



**HAL**  
open science

# Stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné

Séverine Millet

► **To cite this version:**

Séverine Millet. Stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné. Mécanique [physics.med-ph]. INSA de Lyon, 2007. Français. NNT: . tel-00256920

**HAL Id: tel-00256920**

**<https://theses.hal.science/tel-00256920>**

Submitted on 18 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

---

# Stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné

---

Présentée devant  
L'institut national des sciences appliquées de Lyon

Pour obtenir  
Le grade de docteur

Formation doctorale : MECANIQUE DES FLUIDES

École doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique de Lyon

Par

Séverine Millet  
(Ingénieur)

Soutenue le 07 décembre 2007 devant la Commission d'examen

## Jury MM.

---

Directeur	BEN HADID Hamda	Professeur (UCBL Lyon)
Co-directeur	BOTTON Valéry	Maître de conférence (INSA de Lyon)
Président	BOURGIN Patrick	Professeur (E. C. de Lyon)
Examinatrice	LYUBIMOVA Tatyana	Professeur (Perm State University – Russia)
Rapporteur	MOJTABI Abdelkader	Professeur (Université de Toulouse)
Rapporteur	ROUX Bernard	Directeur de recherche CNRS (Université Aix-Marseille)

---

Laboratoire de recherche :

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA)  
UMR CNRS 5509 Université de Lyon (ECL / INSA-Lyon / UCBL)



---

# Stabilité de l'écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné

## Résumé

---

Nous étudions la stabilité de l'écoulement de films superposés de fluides newtoniens ou non newtoniens sur un plan incliné. La connaissance des conditions d'apparition des instabilités dans ce type d'écoulements intéresse particulièrement le secteur industriel faisant appel à des méthodes de couchage. Il est en effet intéressant de pouvoir maîtriser le déclenchement des instabilités en vue d'éviter qu'elles ne détériorent la qualité du produit. Nous nous sommes intéressés au cas de fluides rhéofluidifiants, dont la viscosité est décrite par la loi de Carreau.

La première partie est consacrée au cas d'une seule couche. Trois approches complémentaires sont exploitées : une approche asymptotique, considérant un comportement faiblement non newtonien dans la limite des grandes longueurs d'onde, une approche phénoménologique basée sur les mécanismes de l'instabilité au niveau de la surface libre et une approche numérique. Cette dernière s'appuie sur la résolution sous forme d'un problème aux valeurs propres de l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée par la méthode spectrale de collocation de type Tau-Tchebychev.

Dans une deuxième partie, nous avons étendu l'étude à deux couches et étudié l'influence sur la stabilité de l'écoulement des principaux paramètres : propriétés rhéofluidifiantes, tensions de surface, rapport des débits, densités et viscosités. L'étude de stabilité est combinée à une approche énergétique qui nous a permis d'analyser le rôle de chaque terme de l'équation de l'énergie. Nous avons montré le rôle clé joué par le cisaillement aux interfaces pour expliquer l'influence des propriétés rhéofluidifiantes sur les différentes contributions du bilan énergétique.

**Mots-Clés:** Stabilité, écoulement stratifié, films, loi de Carreau, non newtonien, plan incliné, surface libre.

---

# Stability of non Newtonian multilayer film flows down an inclined plane

## Abstract

---

We study the stability of stratified Newtonian or non Newtonian fluids flow down an inclined plane. This problem is of interest in many applications such as simultaneous coating of multiple layers. One of the defects encountered in this process is the onset of instabilities which cause ripples responsible for the degradation of the coating uniformity. We focused on fluids obeying the Carreau model. This model accurately describes the rheological behavior of fluids like polymers suspensions and melts and is particularly suitable to free surface flow issues.

The first part is devoted to one layer case. Three complementary approaches have been used: an asymptotic approach considering a weakly non-Newtonian behavior in the limit of long waves, then a phenomenological approach in order to describe the instability mechanisms, and at last a numerical solution of the general case. A spectral Tau collocation method based on Tchebychev polynomials is used for the discretization of the generalized Orr-Sommerfeld eigenvalue problem. We mainly focus on the effects of shear-thinning properties on the flow stability.

The work was extended by the study of two-layer film flows. We highlighted the influence of a shear-thinning rheology, surface tensions, viscosity and density stratification on the stability. We combined this study with an energy budget to explain the differences on the stability according to the parameters. We investigated the key role played by the shear stress at the interfaces to explain these phenomena and the influence of the shear-thinning properties on the different contributions of the energy balance.

**Keywords:** Stability, stratified flows, films, Carreau law, non Newtonian, inclined plane, free surface.

## INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales 2007

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://sakura.cpe.fr/ED206">http://sakura.cpe.fr/ED206</a> M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://www.insa-lyon.fr/eea">http://www.insa-lyon.fr/eea</a> M. Alain NICOLAS Insa : D. BARBIER ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 – Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2">http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2</a> M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : S. GRENIER	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDIIS	<b>INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE</b> <a href="http://ediis.univ-lyon1.fr">http://ediis.univ-lyon1.fr</a> M. Alain MILLE Secrétariat : I. BUISSON	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - EDIIS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax 04 72 44 80 53 ediis@liris.cnrs.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
EDISS	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES- SANTÉ</b> M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.35 72 32 Fax : Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
	<b>MATERIAUX DE LYON</b> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
Math IF	<b>MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE FONDAMENTALE</b> M. Pascal KOIRAN Insa : G. BAYADA	M.Pascal KOIRAN Ecole Normale Supérieure de Lyon 46 allée d'Italie 69364 LYON Cédex 07 Tél : 04.72.72 84 81 Fax : 04 72 72 89 69 Pascal.koiran@ens-lyon.fr Secrétariat : Fatine Latif - latif@math.univ-lyon1.fr
MEGA	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b> M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.18.71.70 Fax : 04 72 18 87 12 mega@lva.insa-lyon.fr
SSED	<b>SCIENCES DES SOCIETES, DE L'ENVIRONNEMENT ET DU DROIT</b> Mme Claude-Isabelle BRELOT Insa : J.Y. TOUSSAINT	Mme Claude-Isabelle BRELOT Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Claude-isabelle.brelot@univ-lyon2.fr

# REMERCIEMENTS

*Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de Lyon dirigé par Monsieur Michel LANCE. Nombreux sont ceux que je souhaiterais remercier pour m'avoir aidée, soutenue ou accompagnée durant ces trois années de thèse. C'est pour leur montrer toute ma gratitude que je leur dédie cette page.*

*Je souhaiterais adresser mes sincères remerciements à mes deux directeurs de thèse, Monsieur Hamda BEN HADID, Professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon, et Monsieur Valéry BOTTON, maître de conférence à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, qui ont encadré cette thèse dans la continuité de mon stage de D.E.A. Tout au long de ces trois années, ils ont su me guider, orienter mes recherches aux bons moments, m'encourager avec leur énergie et leur enthousiasme, et me faire bénéficier de leurs connaissances dans le domaine de la Mécanique des Fluides.*

*Je remercie les rapporteurs de cette thèse, Monsieur Abdelkader MOJTABI, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse et Monsieur Bernard ROUX, directeur de recherche CNRS à l'Université d'Aix-Marseille, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leurs remarques pertinentes qui ont permis d'approfondir et d'enrichir les problématiques abordées au cours de cette thèse. Merci également aux autres membres du jury qui ont accepté de juger ce travail: Monsieur Patrick BOURGIN, directeur de l'Ecole Centrale de Lyon, et Madame Tatyana LYUBIMOVA, professeur à la Perm State University, Russie.*

*Ma reconnaissance s'adresse également:*

*A toute l'équipe du LMFA pour leur aide sur le plan scientifique, ou tout simplement pour la sympathie qu'ils m'ont témoigné, et en particulier à Françoise BIGILLON, Jean-Yves CHAMPAGNE, Delphine DOPPLER, Mahmoud EL HAJEM, Daniel HENRI, Nicolas RIVIERE, Jacques SAU, Serge SIMOENS, Gilbert TRAVIN, et aux techniciens Lucien KACI et Alexandre ZELEZ, pour leur promptitude aux dépannages de « TP et PC contrariants » respectivement,*

*à François ROUSSET, maître de conférence au Centre Thermique de Lyon (CETHIL), pour notre travail en commun réalisé pendant cette thèse et pour m'avoir permis d'élargir mes connaissances à ces mystérieux fluides non newtoniens,*

*à ma collègue de bureau Julie pour la bonne ambiance qui régnait au quotidien dans notre bureau,*

*à mes amis pour leur soutien et leur faculté naturelle à me sortir la tête du guidon,*

*à ma famille et en particulier mes parents qui m'ont toujours encouragée dans mes choix,*

*à Richard qui n'a pas besoin de ces lignes pour savoir tout ce que je lui dois...*



# TABLE DES MATIERES

<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>5</b>
<b>TABLE DES MATIERES</b>	<b>7</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>11</b>
<b>CHAPITRE 1 : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	<b>15</b>
<u>1</u> <u>ETUDES NUMERIQUES DE LA STABILITE DES FILMS DE FLUIDES NEWTONIENS</u>	<u>15</u>
1.1 Cas d'une seule couche de fluide newtonien	16
1.2 Cas de deux couches de fluides newtoniens confinées entre deux plans	17
1.3 Cas de deux couches de fluides newtoniens avec une surface libre	18
1.4 Cas de plus de deux couches de fluides newtoniens	24
<u>2</u> <u>LES APPLICATIONS AUX PROBLEMES DE STABILITE DE FILMS DE DIFFERENTS MODELES RHEOLOGIQUES</u>	<u>26</u>
2.1 Les modèles purement visqueux	26
2.1.1 Le modèle newtonien et ses limites	26
2.1.2 Le modèle en loi de puissance d'Ostwald (1925)	27
2.1.3 Le modèle de Carreau-Yasuda (1981)	28
2.2 Les modèles viscoplastiques	30
2.3 Les modèles viscoélastiques	30
<b>CHAPITRE 2 : MISE EN EQUATIONS DU PROBLEME</b>	<b>33</b>
<u>1</u> <u>MISE EN EQUATIONS DU PROBLEME A N COUCHES</u>	<u>33</u>
1.1 Equations constitutives et champ de base	33
1.2 Equations du problème linéaire.	38
<u>2</u> <u>LE BILAN ENERGETIQUE</u>	<u>42</u>
2.1 Principe de la méthode	42
2.2 Moyenne sur une période et sur une longueur d'onde	45
2.3 Interprétation physique des termes	46



**CHAPITRE 3 : RESULTATS DU PROBLEME A UNE SEULE COUCHE 49**

<u>1</u>	<u>L'APPROCHE ASYMPTOTIQUE:</u>	<u>49</u>
1.1	Ordre zéro en $\alpha$	50
1.2	Premier ordre en $\alpha$	50
<u>2</u>	<u>ETUDE DU CHAMP DE BASE</u>	<u>52</u>
2.1	Forme du profil – Influence de la rhéologie	52
2.2	Épaisseur et vitesse de la surface libre	55
<u>3</u>	<u>EFFET DES PROPRIETES RHEOFLUIDIFIANTES DU FLUIDE SUR LA STABILITE DU FILM</u>	<u>57</u>
3.1	Précision et convergence des calculs	57
3.2	Effet de l'angle d'inclinaison sur le seuil de déclenchement des instabilités	57
3.3	Effet des paramètres rhéologiques $L$ et $n$	58
3.4	Célérité des ondes - modèle phénoménologique pour les fluides non newtoniens	61
3.5	Cas des petits angles d'inclinaison $\beta < 0.5'$	66

**CHAPITRE 4 : RESULTATS DU PROBLEME A DEUX COUCHES 69**

<u>1</u>	<u>ETUDE DU CHAMP DE BASE</u>	<u>71</u>
1.1	Cas de deux fluides newtoniens	71
1.2	Cas des fluides rhéofluidifiants	72
1.3	Influence du rapport des viscosités $E_1$	74
1.4	Influence du débit $Q_1$	75
1.5	Influence du rapport de densités $M_1$	79
<u>2</u>	<u>ETUDE DE STABILITE - COUCHE INFERIEURE MOINS VISQUEUSE (<math>E_1 &gt; 1</math>)</u>	<u>83</u>
2.1	Influence du débit $Q_1$	83
2.2	Influence du rapport de densités $M_1$	87
2.3	Influence de la tension de surface $T_1$ et d'interface $T_2$	92
2.3.1	La tension d'interface $T_2$	92
2.3.2	La tension de surface $T_1$	95
<u>3</u>	<u>ETUDE DE STABILITE - COUCHE INFERIEURE PLUS VISQUEUSE (<math>E_1 &lt; 1</math>)</u>	<u>97</u>
3.1	Influence du débit $Q_1$	97
3.2	Influence du rapport de densités $M_1$	100
3.3	Influence de la tension de surface $T_1$ et d'interface $T_2$	102
3.3.1	La tension d'interface $T_2$	102
3.3.2	La tension de surface $T_1$	104

<b>CHAPITRE 5 : LE BILAN D'ENERGIE</b>	<b>107</b>
<u>1</u> <u>CAS D'UNE SEULE COUCHE</u>	<u>107</u>
1.1    Le cas d'un fluide newtonien	107
1.2    Influence de la rhéologie	110
<u>2</u> <u>LES DIFFERENTES INSTABILITES ET LEUR ORIGINE</u>	<u>112</u>
2.1    Mode de surface de grande longueur d'onde	112
2.2    Mode d'interface de grande longueur d'onde	116
2.3    Mode d'interface de longueur d'onde modérée	121
<u>3</u> <u>EFFETS DE LA RHEOLOGIE DES FLUIDES SUR LES TERMES D'ENERGIE</u>	<u>125</u>
3.1    Mode de surface de grande longueur d'onde	125
3.2    Mode d'interface de grande longueur d'onde	126
3.3    Mode d'interface de longueur d'onde modérée	130
<u>4</u> <u>EFFETS DES PARAMETRES DE L'ETUDE SUR LES TERMES D'ENERGIE</u>	<u>134</u>
4.1    Influence de la tension de surface au niveau de l'interface ( $Ca_2 \neq 0$ )	134
4.2    Influence du rapport de densité $M_1$	135
4.3    Influence de la stratification en viscosité	137
4.4    Influence du débit $Q_1$	140
 <b>CONCLUSIONS</b>	 <b>143</b>
 <b>ANNEXES</b>	 <b>147</b>
Annexe I.    Les asymptotes de la loi de Carreau	149
Annexe II.    Précisions sur les modèles rhéologiques évoqués	151
Annexe III.    La méthode de Newton	155
Annexe IV.    Différentiation des équations : Les pôlynomes de Tchebychev	157
Annexe V.    Transformation des termes d'énergie sous forme de complexes et conjugués	159
Annexe VI.    Validation du champ de base	161
Annexe VII.    Validation de l'approche énergétique	163
 <b>NOTATIONS</b>	 <b>165</b>
 <b>LISTE DES FIGURES</b>	 <b>168</b>
 <b>LISTE DES TABLEAUX</b>	 <b>172</b>
 <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	 <b>173</b>



## II INTRODUCTION

Nous étudions dans ce mémoire la stabilité linéaire de l'écoulement sur un plan incliné de films multicouches à surface libre. La connaissance des conditions d'apparition d'instabilités dans de tels écoulements présente des intérêts tant du point de vue fondamental qu'appliqué. Ce problème intéresse particulièrement le secteur industriel faisant appel à des méthodes de couchage ou revêtement de surfaces (industrie alimentaire, photographique, papeterie...) pour lequel l'apparition des instabilités est généralement synonyme de détérioration de la qualité du produit (voir Fig. 1). Il est donc important de pouvoir prédire le déclenchement d'instabilités afin d'agir sur le système et retarder, voire éviter, leur apparition. On trouve également à ce problème des applications dans le domaine environnemental, notamment l'écoulement de glaciers, laves ou boues en suspension (voir Fig. 2).

Les fluides qui correspondent aux applications citées ci-dessus ne sont généralement pas des fluides newtoniens, mais présentent des propriétés rhéofluidifiantes, c'est-à-dire qu'une augmentation du taux de cisaillement dans l'écoulement génère une diminution locale de la viscosité du fluide. La compréhension de la physique de ces écoulements, en particulier les phénomènes interfaciaux est encore loin d'être satisfaisante. Le comportement de ce type d'écoulements multicouches est dicté par plusieurs phénomènes qui agissent simultanément, tels que la viscosité qui évolue selon la profondeur, la tension de surface aux interfaces...

Nous nous sommes intéressés dans cette étude au cas d'une seule couche et de deux couches de fluides non newtoniens et non miscibles. La viscosité de ces fluides est décrite par la loi de Carreau à quatre paramètres. Parmi les modèles rhéologiques simples, le modèle de Carreau présente l'avantage de convenir particulièrement pour la description d'écoulements à surface libre car il considère une viscosité constante à faible taux de cisaillement. Malgré la simplicité de la configuration, le nombre de paramètres de l'étude reste important : le rapport des débits, des masses volumiques, des viscosités entre les couches, la tension de surface, la tension d'interface, les paramètres relatifs à la rhéologie des fluides et leur position.

La première partie du travail est une étude bibliographique concernant les travaux qui ont porté sur la stabilité des films de fluides newtoniens, que ce soit avec une seule ou plusieurs couches. Nous discuterons les différences observées sur la stabilité de ces écoulements selon le nombre de couches et les propriétés physiques des fluides constituant ces couches. Nous montrerons ainsi le rôle prépondérant de la stratification en viscosité sur la stabilité. L'étude bibliographique est complétée par

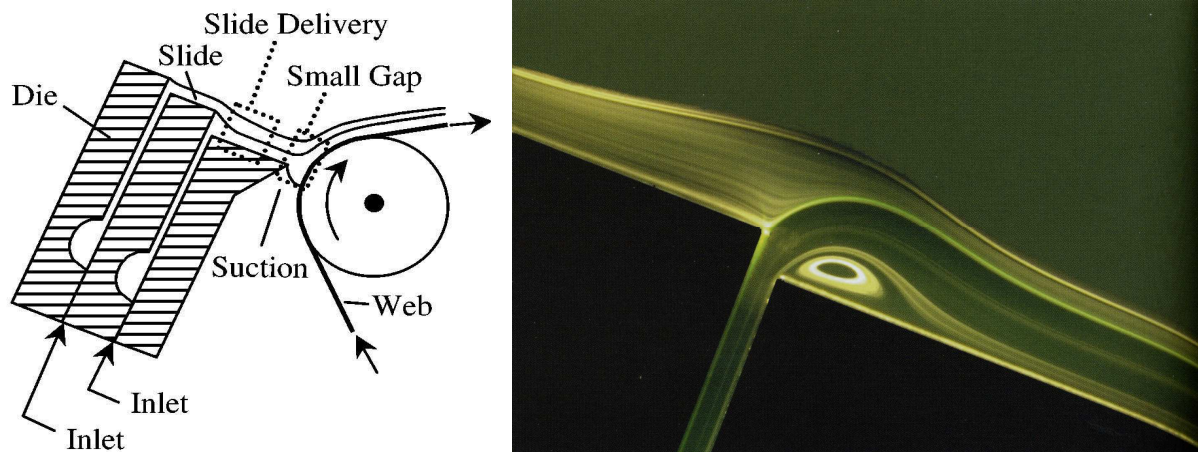
une analyse des différentes études effectuées avec des modèles rhéologiques non newtoniens. Soulignons que l'écoulement multicouche de fluides non newtoniens a fait l'objet de relativement peu d'études dans le passé. Nous montrerons que, si la synthèse des études dans le cas des fluides newtoniens donne accès à une compréhension globale des phénomènes d'instabilités, les études dans le cas de fluides non newtoniens, par leur dispersion, ne permettent pas de conclusions générales.

Les outils et méthodes de calcul, ainsi que les différentes formulations utilisées dans ce travail de thèse feront l'objet du deuxième chapitre. Nous présenterons tout d'abord les équations du problème physique, ensuite le calcul du champ de base, suivi par la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations du problème. Concernant les outils de calcul, une méthode spectrale de collocation utilisant les points des polynômes de Tchebychev est employée pour la discrétisation de l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée. Enfin, un bilan énergétique sera dérivé des équations sur les perturbations. Le but de l'approche énergétique est la mise en évidence de l'origine des instabilités par le calcul des différentes contributions au bilan.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du cas d'une seule couche. Deux approches complémentaires seront exploitées : par une approche asymptotique, nous considérons un comportement faiblement non newtonien dans la limite des grandes longueurs d'onde. Nous déterminerons pour les fluides rhéofluidifiants que le nombre de Reynolds critique pour le déclenchement des instabilités et leur célérité sont modifiées par rapport aux fluides newtoniens. La résolution numérique du système complet confirme ces résultats et les étend à tous les nombres d'onde et toutes les valeurs des paramètres rhéologiques. Une attention particulière sera prêtée aux faibles angles d'inclinaison, pour lesquels les modes de surface habituellement observés sont masqués par l'apparition de modes de cisaillement en deçà d'un certain angle critique. On montrera également que cet angle critique est fonction des propriétés rhéologiques du fluide.

Le quatrième chapitre concerne l'étude du système à deux couches. Les effets de la stratification en débit, densité et viscosité seront étudiés dans un premier temps avec des fluides newtoniens pour retrouver les résultats de la littérature, puis étendus aux cas de fluides suivant une loi de Carreau. Pour cela différentes configurations rhéologiques seront abordées selon la position des couches de fluide de Carreau. Nous noterons aussi, l'effet de l'ajout d'une tension de surface au niveau de l'interface entre les couches et au niveau de la surface libre. L'étude sera renouvelée selon deux stratifications en viscosité. Nous montrerons en particulier que ce genre d'écoulements est toujours instable lorsque la couche inférieure est la moins visqueuse. Nous mettrons en évidence l'existence d'un rapport de densité seuil à partir duquel on observe un changement de longueur d'onde critique de l'instabilité. L'influence des propriétés rhéofluidifiantes des fluides sur la valeur de ce seuil sera étudiée.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à l'étude énergétique en vue de déterminer l'origine des instabilités. A travers le calcul des différents termes de l'équation du bilan énergétique, nous pourrions identifier les termes de production - qui favorisent l'instabilité - et de dissipation - qui l'amortissent. Ceci nous permettra tout d'abord de discerner les mécanismes sous-jacents au déclenchement de chacune des instabilités identifiées, ainsi que les évolutions apportées par une modification de la rhéologie des couches ou des autres paramètres physiques des fluides.



*Coating flows* – Weinstein et Ruschak (2004) *Liquid Film Coating* – Kistler et Schweizer (1997)

**Fig. 1. Procédé de couchage pour la fabrication des films photographiques.**

- (a) Schéma du dispositif de couchage,
- (b) Photographie de la mise en place de deux couches superposées.



IGN - Glacier de Leschaux - Grandes Jorasses

**Fig. 2. Photographie du glacier de Leschaux – présence d'instabilités de surface.**



# CHAPITRE 1 :

## ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

La littérature concernant la stabilité et la croissance des ondes dans des écoulements de films sur un plan incliné est très vaste, particulièrement en ce qui concerne les études numériques. Cette partie a pour but d'analyser les travaux antérieurs les plus marquants, et d'en extraire les principaux résultats en vue de présenter l'état de l'art.

Nous aborderons dans un premier temps les études numériques réalisées avec une ou plusieurs couches de fluides newtoniens, qui constituent la part la plus importante des travaux. Dans une seconde partie, une description des études de stabilité de films effectuées avec des modèles rhéologiques non newtoniens sera présentée.

### **1 ÉTUDES NUMÉRIQUES DE LA STABILITÉ DES FILMS DE FLUIDES NEWTONIENS**

---

Il est intéressant de faire l'analyse séparée des études de stabilité sur des films de fluides newtoniens données dans la littérature selon le nombre de couches qui les compose car celui-ci apparaît comme étant déterminant pour la stabilité de ces écoulements. Ces études serviront par la suite de point de comparaison pour vérifier la validité du modèle développé dans ce travail et évaluer les effets de la prise en compte des propriétés rhéofluidifiantes.



### 1.1 Cas d'une seule couche de fluide newtonien

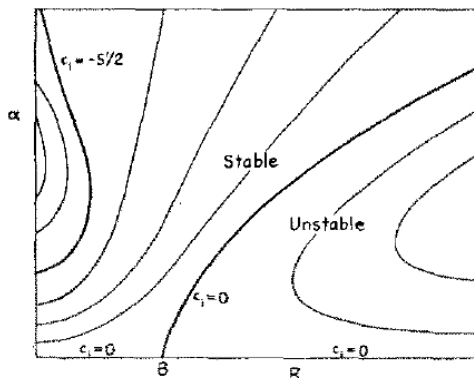
La stabilité de l'écoulement d'un film de fluide newtonien sur un plan incliné d'un angle  $\beta$  a été largement étudiée depuis que le problème a été posé de manière formelle par Benjamin (1957) et Yih (1963). Pour la stabilité de tels écoulements, l'inertie du fluide joue un rôle important. Pour une couche donnée, le rapport des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité est représenté par le nombre de Reynolds défini par :

$$Re = \frac{\rho U_0 h}{\mu}, \quad (1.1)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $U_0$  la vitesse du fluide au niveau de la surface libre et  $\mu$  la viscosité cinématique du fluide. Dans leurs travaux, Benjamin (1957) et Yih (1963) montrent que les instabilités ne se déclenchent que pour  $Re \neq 0$  et déterminent une expression simple du seuil critique des instabilités de surface qui ne dépend que de l'angle d'inclinaison du plan  $\beta$  :

$$Re_c = \frac{5}{6} \cot \beta. \quad (1.2)$$

Ils montrent aussi que ces ondes se propagent à une vitesse double de la vitesse de base du liquide au niveau de la surface libre. Indépendamment de l'inertie, les écoulements à une seule couche sont stables pour des perturbations de longueur d'onde infinie. Les instabilités qui gouvernent ces écoulements sont des modes dits de surface, à grande longueur d'onde, comme il est illustré sur la Fig. 3 et doivent leur existence à la déformation de l'interface air – liquide.



**Fig. 3. Yih (1963) - Courbes neutres.**

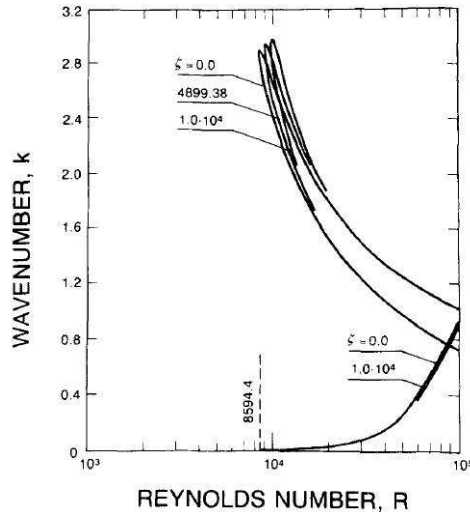
Ces courbes délimitent les zones de stabilité en fonction du nombre de Reynolds  $R$  et du nombre d'onde  $\alpha$  avec une tension de surface nulle et d'un angle d'inclinaison  $\theta < \pi/2$ .  $c_i$  représente le taux d'amplification des ondes.

Kelly, *et al.* (1989) ont effectué un bilan énergétique afin de déterminer les mécanismes responsables de ces instabilités. Ils ont montré que le terme dominant de production d'énergie est associé au travail des forces de cisaillement au niveau de la surface libre déformée. Ils ajoutent cependant que la stabilité est aussi liée à un autre phénomène. Le déplacement de la surface libre crée un saut de vorticité de la perturbation se produisant au voisinage de celle-ci : quand ce saut est tel que la vorticité vient renforcer le déplacement de l'interface, des instabilités se développent, alors que dans le cas contraire, il y a stabilisation de l'écoulement.

Smith (1990) a proposé une explication concernant les mécanismes physiques à l'origine de la croissance de ces instabilités à grande longueur d'onde. Il décrit comment une perturbation au niveau de la surface libre produit un mouvement secondaire (la perturbation) au sein de la couche fluide et comment ce mouvement peut amplifier ou non les perturbations de l'interface suivant l'importance relative de l'inertie et du gradient de pression dans l'écoulement. Il retrouve par cette analyse les résultats de Yih (1963) concernant la valeur du nombre de Reynolds critique de l'Eq. (1.2) et la célérité dont la valeur est le double de la vitesse à la surface libre.

Un autre type d'instabilités peut se développer dans les cas particuliers de petits angles d'inclinaison et de grands nombres de Reynolds. Ce résultat a été montré par DeBruin (1974) et complété par Floryan, *et al.* (1987). En effet, pour des inclinaisons inférieures à  $0.5'$ , des modes dont le seuil critique est plus bas que celui des modes de surface deviennent les modes les plus instables. Ces modes ont des

longueurs d'ondes de l'ordre de l'épaisseur du film et se propagent à une vitesse inférieure à celle de la surface libre. On les appelle modes de cisaillement ou modes de Tollmien-Schlichting. Sur la Fig. 4 on note l'existence de deux modes d'instabilités : le mode de surface avec un nombre de Reynolds critique de 8594.4 et un nombre d'onde de l'ordre de zéro et le mode de cisaillement qui évolue avec la tension de surface et dont le nombre d'onde est de l'ordre de 3. Floryan, *et al.* (1987) ont montré l'effet stabilisant de la tension de surface et de l'augmentation de l'inclinaison sur ces modes de cisaillement.



**Fig. 4. Floryan, *et al.* (1987) - Courbes neutres.**

Ces courbes délimitent les zones de stabilité en fonction du nombre de Reynolds  $R$  et du nombre d'onde  $k$  pour un angle d'inclinaison  $\theta = 0.5'$  et différents nombres  $\zeta$  quantifiant la tension de surface.

Notons que ces études s'accordent sur le fait que les instabilités ne peuvent apparaître au sein de l'écoulement d'un film de fluide newtonien sur un plan incliné qu'en présence d'inertie.

## 1.2 Cas de deux couches de fluides newtoniens confinées entre deux plans

Les études sur des écoulements à plusieurs couches s'attachent à déterminer l'influence des rapports de viscosité, densité et épaisseur des couches sur la stabilité du système.

Yih (1967) a étudié le cas de deux fluides stratifiés en viscosité confinés entre deux parois planes à petits nombres de Reynolds dans les cas d'écoulements de Poiseuille et de Couette. Son étude est basée sur une approche asymptotique aux grandes longueurs d'ondes. Pour deux fluides de densité égale, il montre que, dans le cas où la couche inférieure est plus visqueuse que la couche supérieure, cette stratification en viscosité a un effet déstabilisant sur l'écoulement. Il identifie des instabilités pour certaines combinaisons de rapports de viscosité et épaisseurs de couches, avec des taux de croissance proportionnels au nombre de Reynolds. Il en déduit donc que la limite de stabilité neutre est atteinte pour  $Re \rightarrow 0$  et montre ainsi la nécessité de la présence d'inertie pour déclencher des instabilités.

Craik et Smith (1968) ont examiné des écoulements pour lesquels la viscosité varie continûment en fonction de la profondeur en utilisant également l'approche aux grandes longueurs d'onde. Ils identifient ainsi un mode instable dont le taux de croissance approche zéro quand le nombre de Reynolds diminue, confirmant ainsi les résultats de Yih (1967).

Dans le cas de longueurs d'onde finies, Hooper et Boyd (1987) ont considéré le cas de l'écoulement de Couette de deux fluides stratifiés de viscosités différentes où la couche supérieure est d'épaisseur infinie. Ils constatent les modes de cisaillement sont stables et que les instabilités apparaissent au niveau de l'interface fluide / fluide. Dans le cas où la fine couche inférieure est la plus visqueuse, ils retrouvent les instabilités de type Yih (1967) avec une grande longueur d'onde et un taux de croissance proportionnel à  $(1-m)$ , avec  $m$  le rapport de viscosités entre la couche supérieure et la couche inférieure. Ce cas est donc toujours instable dans la configuration proposée. Par contre, quand

la viscosité de la couche inférieure est plus faible que celle de la couche infinie, cette configuration s'est révélée toujours instable tout en conservant la propriété selon laquelle le taux de croissance est proportionnel au nombre de Reynolds lorsque ce dernier est petit. Ces instabilités ont des longueurs d'ondes finies. La courbe neutre de stabilité dans ce cas est présentée sur la Fig. 5. Cette fine couche moins visqueuse est nommée « lubricating layer » (« couche lubrifiante ») et son effet « thin-layer effect » (« effet de couche fine »).

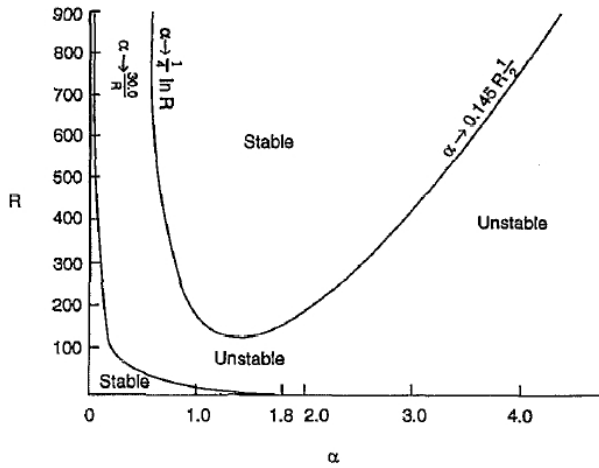


Fig. 5. Hooper et Boyd (1987) - Courbes neutres.

Couche du bas deux fois moins visqueuse que la couche infinie, tension de surface nulle.

Il se développe donc une instabilité à bas nombre de Reynolds et en l'absence de tension de surface à partir du moment où il y a stratification en viscosité, quelle que soit sa direction. En présence d'une tension de surface et à faible nombre de Reynolds, l'écoulement peut être stable pour toutes les longueurs d'onde. Cette instabilité reste toutefois conditionnée par la présence d'inertie.

Finalement pour ces études à deux couches de fluides newtoniens confinées entre deux plans, il est une nouvelle fois montré qu'il faut nécessairement un nombre de Reynolds non nul pour provoquer la croissance des instabilités.

### 1.3 Cas de deux couches de fluides newtoniens avec une surface libre

En vue de pouvoir effectuer un travail comparatif et synthétique de toutes ces études, nous commençons par proposer une uniformisation des paramètres représentés sur la Fig. 6 et auxquels nous allons faire référence tout au long de cette section :

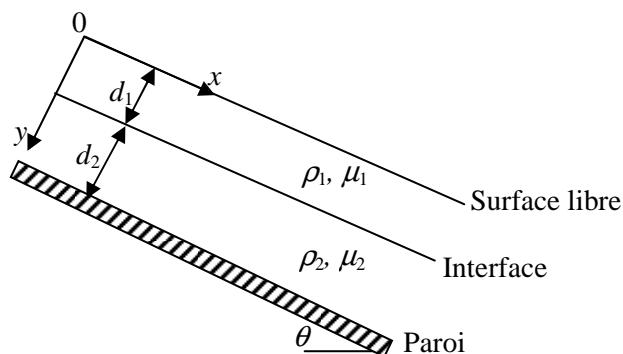


Fig. 6. Schéma uniformisé de la configuration.

$$\delta = D = \frac{d_1}{d_2}, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \text{et} \quad m = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

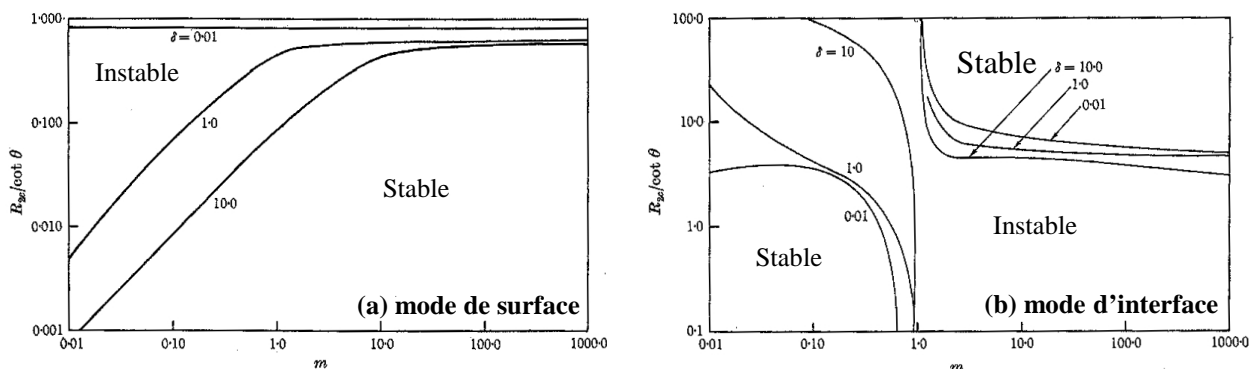
Les paramètres seront le rapport d'épaisseurs des couches  $\delta$  (parfois noté  $D$  sur les figures proposées), le rapport de masses volumiques  $\gamma$  et le rapport de viscosités dynamiques  $m$ . Le nombre de Reynolds est construit avec les propriétés de la couche adjacente à la paroi  $\rho_2, \mu_2, d_2$  et une vitesse de référence  $U_R$  qui change selon les études. Il s'écrit :

$$Re = \frac{\rho_2 U_R d_2}{\mu_2}$$

Kao (1965) et (1968) est le premier à s'intéresser aux effets d'une stratification discontinue de la viscosité sur la stabilité d'un écoulement de deux couches fluides non miscibles avec une surface libre. La tension de surface est négligée. Sa vitesse de référence  $U_R$  pour la construction du nombre de Reynolds est la vitesse moyenne sur l'épaisseur totale. Il établit que pour le cas de systèmes multicouches à surface libre composés de fluides de propriétés physiques différentes en termes de densité et viscosité, le nombre de modes pouvant être instables est égal au nombre d'interfaces du système. A deux couches, il y a un mode dit d'interface localisé entre les couches et un mode dit de surface sur la surface libre. Chacun doit son existence à un saut des propriétés du fluide à travers l'interface concernée.

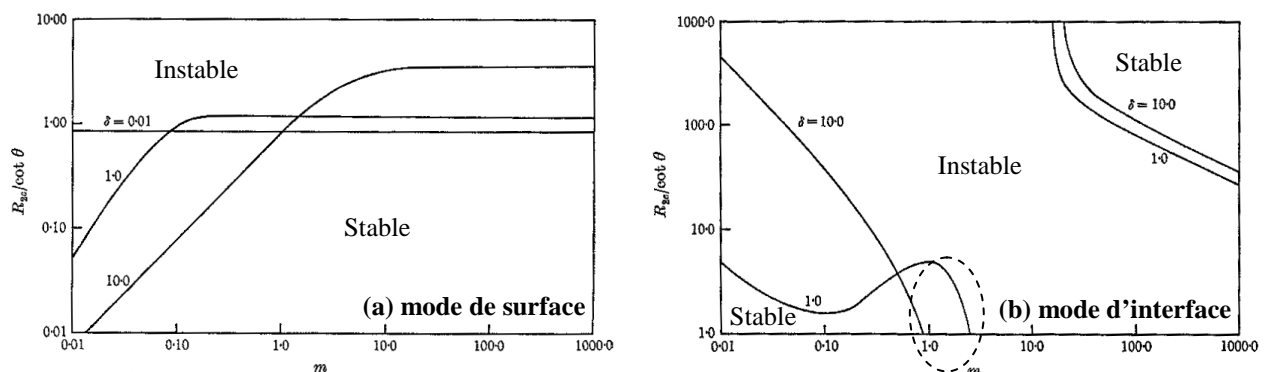
Il fait l'étude d'un écoulement à deux couches, donc de deux modes dans le cas particulier de longueurs d'onde infiniment grandes (comme Yih (1963)) et observe comment ils interagissent. Pour ce type d'écoulements, il montre que les modes de cisaillement sont amortis, et que la stabilité est déterminée par les ondes de surface.

Celui des modes de surface et d'interface qui se manifeste en premier dépend des paramètres de l'écoulement et notamment des rapports d'épaisseur  $\delta$ , de densité  $\gamma$  et de viscosité  $m$  entre les couches. Il en conclut qu'il y a compétition entre les deux modes pour le déclenchement des instabilités. Pour juger du rôle propre de chacun des modes sur la stabilité globale de l'écoulement, il trace les courbes neutres de stabilité des deux modes en fonction des rapports de viscosité  $m$  et d'épaisseur  $\delta$  entre les couches pour deux rapports de densités  $\gamma$  différents. Les résultats sont reproduits sur les Fig. 7 et Fig. 8 (attention aux variations d'échelle des ordonnées entre les figures).



**Fig. 7. Kao (1968) - Seuils de stabilité pour un rapport de densités  $\gamma = 0.9$ .**

Nombre de Reynolds critique pour le mode de surface libre (a) et le mode d'interface (b) en fonction du rapport de viscosités  $m$ , du rapport d'épaisseurs  $\delta$ .



**Fig. 8. Kao (1968) - Seuils de stabilité pour un rapport de densités  $\gamma = 0.1$ .**

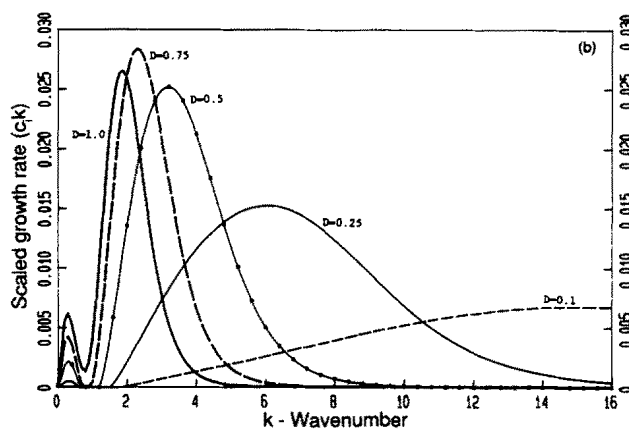
Nombre de Reynolds critique pour le mode de surface libre (a) et le mode d'interface (b) en fonction du rapport de viscosités  $m$ , du rapport d'épaisseurs  $\delta$ .

D'après les figures, nous pouvons constater que quand  $m < 1$ , c'est-à-dire lorsque la couche inférieure est la plus visqueuse, le second mode (interface) est stabilisé et, en parallèle, le premier mode est déstabilisé. Dans ce cas, le premier mode (surface libre) est critique pour le déclenchement

d'instabilités. En revanche, pour  $m > 1$ , la stratification en viscosité ne semble pas modifier le seuil de déclenchement des instabilités : le second mode (interface) est toujours instable alors que le premier mode (surface libre) a un seuil de déclenchement  $Re_d / \cot \theta$  de l'ordre de 1. La seule exception qu'ils aient noté à ces conclusions est celle du déclenchement de modes de surface pour  $m$  faiblement supérieur à 1,  $\delta$  de l'ordre de 1 et  $\gamma$  de l'ordre de 0.1. Cette zone est entourée en lignes pointillées sur la Fig. 8(b). Il faut cependant garder à l'esprit que ces résultats ne sont valables que pour des perturbations de grandes longueurs d'onde.

Loewenherz et Lawrence (1989) ont étudié la déformation des glaciers rocheux. Ils confirment dans leur étude que dans les écoulements de films à deux couches superposées avec une surface libre, l'inertie n'est pas nécessaire pour le déclenchement des instabilités d'interface, alors qu'elle l'est pour les instabilités de surface. Les auteurs ont étudié un système à deux couches ayant même densité ( $\gamma = 1$ ) mais des viscosités différentes ( $m \neq 1$ ) et des tensions de surface négligeables (hypothèse remplaçant celle des longueurs d'onde infinies). Leur nombre de Reynolds s'appuie sur la vitesse moyenne dans la couche inférieure. Cette étude a pour point de départ l'observation à la surface supérieure des glaciers, dont la vitesse de déplacement est pourtant très faible, d'une périodicité du relief qui suggère l'apparition d'un phénomène d'instabilités. Ils estiment que les nombres de Reynolds dans ce type d'écoulement sont de l'ordre de  $10^{-18}$ . Dans le cas où la couche du fond a une viscosité plus faible que celle de la couche en surface, ils font donc l'approximation  $Re = 0$  et identifient des instabilités naissant au niveau des interfaces dans chaque couche. Dans la configuration inverse, lorsque la couche supérieure est la moins visqueuse, ces instabilités ne sont pas observables et comme le mode de surface est stable (c'est-à-dire le premier mode dans la limite de  $Re \rightarrow 0$ ), ce système est donc globalement stable.

Une conclusion importante de leur travail consiste aussi à remettre en cause l'hypothèse simplificatrice communément utilisée jusqu'alors qui consiste à ne considérer que les instabilités de grandes longueurs d'onde. Ils élargissent leur étude et considèrent une large gamme de longueurs d'onde.



**Fig. 9. Loewenherz et Lawrence (1989) – Les deux instabilités du mode d'interface.**

Taux de croissance des ondes en fonction du nombre d'onde  $k$  et du rapport d'épaisseur  $D = \delta$  avec une inclinaison  $\theta = 0.2$  rad et un rapport de viscosités  $m = 2.5$ .

Comme on peut le constater sur la Fig. 9, il y a deux pics de taux de croissance en fonction du nombre d'onde :

- Le premier pic est à faible nombre d'onde et correspond donc aux instabilités à grandes longueurs d'ondes observées par Kao (1968). A noter que le nombre d'onde correspondant à ce pic ne varie pas en fonction du rapport d'épaisseurs  $\delta$  et que le plus fort taux de croissance est pour un rapport d'épaisseurs  $\delta$  supérieur à 1, c'est-à-dire quand la couche supérieure est la plus épaisse.
- Le second pic est situé dans des longueurs d'ondes finies et le nombre d'onde varie fortement en fonction du rapport d'épaisseurs  $\delta$  (mais très peu en fonction du rapport de viscosités  $m$  et de l'angle d'inclinaison  $\theta$ ). La longueur d'onde du mode le plus croissant augmente à mesure que l'épaisseur de la couche supérieure diminue. Le taux de croissance est maximal pour un rapport d'épaisseurs de l'ordre de  $\delta = 0.75$ .

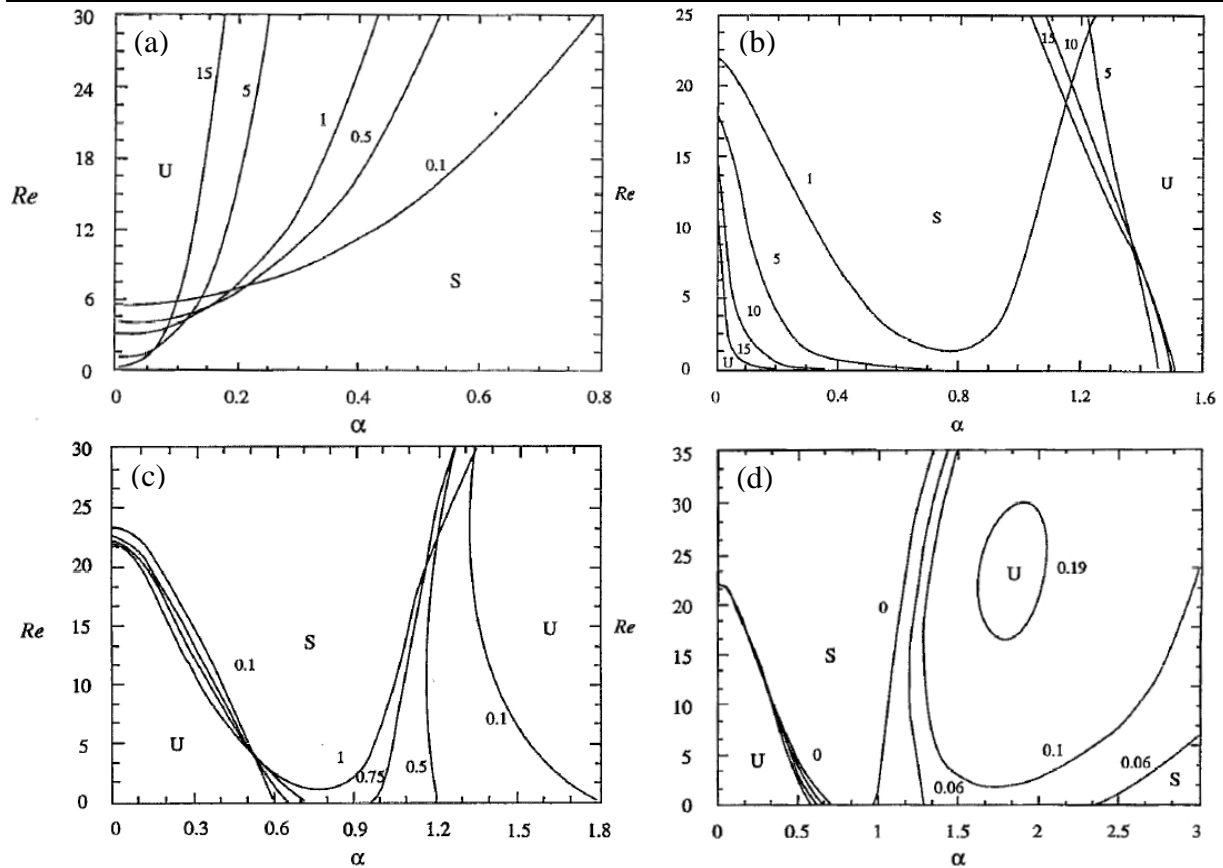
Bien que les analyses à grandes longueurs d'onde apportent d'importantes informations sur la stabilité du système, les instabilités ayant les plus grands taux de croissance peuvent apparaître à des longueurs d'onde finies. De plus, contrairement au cas des écoulements à une seule couche pour lesquels les modes dominants sont des modes de surface à grande longueur d'onde, les modes d'interface dans les écoulements multicouches ne sont pas toujours identifiables avec ces hypothèses simplificatrices.

Ils tracent ensuite les taux de croissance maximaux en balayant une plage de valeurs pour le rapport de viscosités  $m$  et le rapport d'épaisseurs  $\delta$  entre 0 et 1. Ils en concluent que les plus forts taux de croissance apparaissent pour des rapports de viscosités  $m$  de l'ordre de 0.4-0.6 et des rapports d'épaisseurs  $\delta$  de l'ordre de 1.5-2.5.

En définitive, Loewenherz et Lawrence (1989) concluent que quand la couche la moins visqueuse est située au fond, le second mode est toujours le plus instable, même à nombre de Reynolds nul (sans inertie). L'instabilité qui croît le plus rapidement a une longueur d'onde de l'ordre de l'épaisseur de la couche supérieure. Dans le cas inverse (couche la plus visqueuse en bas), l'écoulement à nombre de Reynolds nul est stable pour toutes les longueurs d'ondes.

Ces résultats sont en contraste avec ceux de Hooper et Boyd (1987) pour lesquels la surface libre était absente. Effectivement, pour une configuration à couche supérieure infinie telle que celle de Hooper et Boyd (1987), le mode d'interface est marginalement stable à nombre de Reynolds nul, donc le « *thin-layer effect* » nécessite la présence d'inertie. Pour cette raison le cas étudié ici pour lequel les instabilités se déclenchent sans inertie est connu sous le nom de « *antilubrication effect* » (Chen (1993)).

Chen (1993) s'est intéressé particulièrement au cas où la couche supérieure est la plus épaisse, c'est-à-dire avec un rapport  $\delta > 1$ , pour tenter de se ramener de manière asymptotique au cas de Hooper et Boyd (1987). Dans son étude, les deux couches ont même densité. Il choisit comme vitesse caractéristique  $U_r$  la vitesse de l'interface entre les couches. Il trace, selon les rapports de viscosité  $m$  et d'épaisseur  $\delta$  entre les couches, les courbes neutres de stabilité présentées sur les Fig. 10 et Fig. 11. Sur ces figures, les zones marquées d'un S sont les zones stables et celles marquées d'un U sont instables. La Fig. 10 regroupe les résultats du cas où la couche inférieure est la plus visqueuse. Tout d'abord en ce qui concerne les courbes neutres du mode de surface tracées sur la Fig. 10(a), il observe des résultats similaires à ceux d'une seule couche avec un seuil critique pour des longueurs d'onde infinies ( $\alpha = 0$ ). De plus, lorsque le rapport d'épaisseur  $\delta$  tend vers zéro (c'est-à-dire lorsque la couche du haut tend à disparaître), le nombre de Reynolds critique tend vers la valeur donnée par Yih (1963) (Eq. (1.2)). Sur les Fig. 10(b) et Fig. 10(c), on note l'existence de deux zones instables qui correspondent aux deux longueurs d'ondes différentes mises en évidence par Loewenherz et Lawrence (1989) quand la couche inférieure est la moins visqueuse ( $m > 1$ ) et leurs évolutions suivant le rapport d'épaisseur des couches. Ainsi quand la couche supérieure devient infiniment épaisse ( $\delta \rightarrow \infty$ ), la zone instable près des axes est confinée le long des axes jusqu'à disparaître. On est alors dans la configuration limite de Hooper et Boyd (1987) dans laquelle les axes  $Re = 0$  et  $\alpha = 0$  font partie de la courbe neutre et le « *thin-layer effect* » domine. A l'inverse quand la couche supérieure devient infiniment fine ( $\delta \rightarrow 0$ ), le mode interfacial devient aussi marginalement stable pour  $Re = 0$ . L'« *antilubrication effect* » est le plus marqué lorsque les deux couches ont la même épaisseur ( $\delta = 0$ ). Sur la Fig. 10(d), il note l'influence de la tension de surface qui est plus marquée sur les petites longueurs d'onde. Les zones instables des grandes longueurs d'ondes restent inchangées mais les zones instables concernant les instabilités de longueur d'onde finies sont considérablement réduites. Il remarque également que la tension de surface joue un rôle stabilisant beaucoup plus efficace lorsqu'elle est présente au niveau de l'interface qu'au niveau de la surface libre.

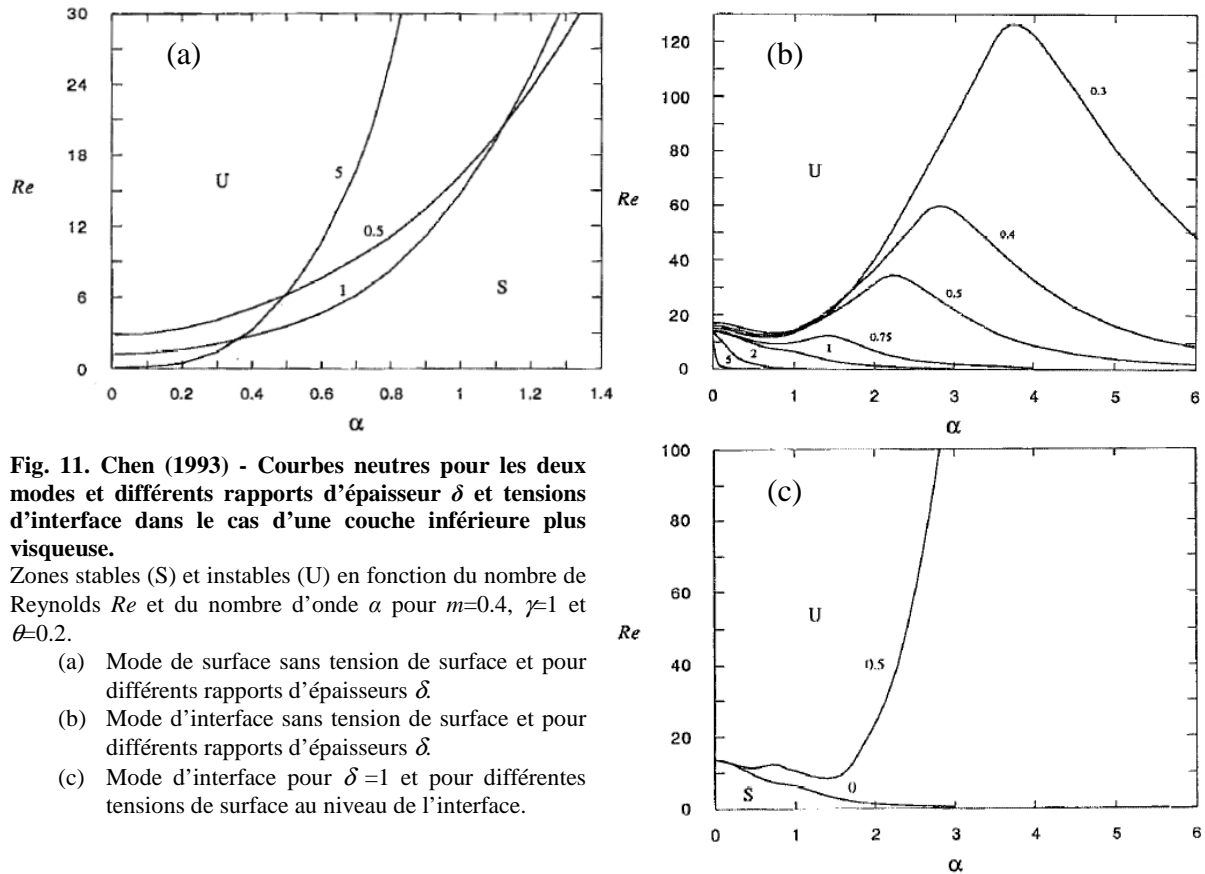


**Fig. 10. Chen (1993) - Courbes neutres pour les deux modes et différents rapports d'épaisseur  $\delta$  et tensions d'interface dans le cas d'une couche inférieure moins visqueuse.**

Zones stables (S) et instables (U) en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et du nombre d'onde  $\alpha$  pour  $m=2.5$ ,  $\gamma=1$  et  $\theta=0.2$  :

- Mode de surface sans tension de surface et pour différents rapports d'épaisseurs  $\delta$ .
- Mode d'interface sans tension de surface et pour différents rapports d'épaisseurs  $\delta \geq 1$ .
- Mode d'interface sans tension de surface et pour différents rapports d'épaisseurs  $\delta \leq 1$ .
- Mode d'interface pour  $\delta=0.75$  et pour différentes tensions de surface au niveau de l'interface.

La Fig. 11 regroupe les courbes neutres de stabilité de la configuration inverse avec la couche inférieure la plus visqueuse. La Fig. 11 (a) est relative au mode de surface. Elle confirme les conclusions de la Fig. 10(a). La Fig. 11 (b) concerne le mode d'interface et montre qu'il est stable aux grandes longueurs d'ondes ainsi que l'a montré Kao (1968), mais devient instable au delà d'un certain nombre d'onde  $\alpha$ . Par ailleurs plus la couche supérieure est fine, plus la zone stable est étendue et les deux tendances asymptotiques en  $\delta$  discutées précédemment restent valables. Enfin la Fig. 11 (c) montre que le mode d'interface est stabilisé par l'ajout d'une tension de surface au niveau de l'interface. Le nombre de Reynolds critique pour le déclenchement des instabilités est obtenu pour une longueur d'onde finie, remettant ainsi clairement en cause les conclusions de la méthode aux ondes longues adoptée par Kao (1968). Effectivement on ne pourra avoir à faire à des instabilités de surface qu'en présence d'une tension de surface et sur de faibles gammes de nombre de Reynolds pour lesquelles le mode de surface est instable mais le mode d'interface est stable. Ainsi par exemple pour  $\delta = 1$  et une tension de surface de 0.5, l'écoulement sera stable pour  $Re < 1.2$ , et présentera des instabilités de surface pour  $1.2 < Re < 8.4$  et des instabilités d'interfaces pour  $Re > 8.4$ .



**Fig. 11. Chen (1993) - Courbes neutres pour les deux modes et différents rapports d'épaisseur  $\delta$  et tensions d'interface dans le cas d'une couche inférieure plus visqueuse.**

Zones stables (S) et instables (U) en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et du nombre d'onde  $\alpha$  pour  $m=0.4$ ,  $\gamma=1$  et  $\theta=0.2$ .

- (a) Mode de surface sans tension de surface et pour différents rapports d'épaisseurs  $\delta$ .
- (b) Mode d'interface sans tension de surface et pour différents rapports d'épaisseurs  $\delta$ .
- (c) Mode d'interface pour  $\delta=1$  et pour différentes tensions de surface au niveau de l'interface.

Finalement, Chen (1993) a montré que, lorsque le nombre de Reynolds  $Re$  est faible, un système peut être stable pour de grandes longueurs d'onde, mais finies, et instables pour de plus petites longueurs d'onde. Ainsi une étude de stabilité limitée aux grandes longueurs d'onde se révèle insuffisante pour tirer des conclusions sur la stabilité du système. L'auteur montre également que la stratification en viscosité joue un rôle important. En l'absence de tensions de surfaces, la croissance des modes d'interface est alimentée par deux contributions qui interagissent : l'une ne se manifestant qu'en présence d'inertie (« *thin layer effect* ») et devenant dominant quand l'épaisseur de la couche supérieure est grande (configuration de Hooper et Boyd (1987)), et l'autre toujours présente (« *antilubrication effect* »), aussi petit que soit le nombre de Reynolds et identifié par Kao (1968) et Loewenherz et Lawrence (1989). Le second effet est dû à la propriété déformable de la surface libre et ses interactions avec les interfaces liquide-liquide. Il est dépendant de la tension de surface et de la distance qui sépare la surface libre de l'interface. Donc les modes d'interface doivent leur existence à la présence de la surface libre mais l'écoulement en entier influence sur chaque mode.

Bien que ces deux effets soient le résultat de la stratification en viscosité, Chen (1993) montre qu'ils sont en compétition, et que le résultat de cette compétition dépend du nombre de Reynolds: à très faible nombre de Reynolds et dans une configuration où la couche la moins visqueuse est adjacente à la paroi, la partie non inertielle, donc le « *antilubrication effect* », domine. Le « *thin-layer effect* » est totalement masqué. Dans la configuration inverse, le « *antilubrication effect* » n'apparaît pas, et l'ajout d'une tension de surface suffit à stabiliser l'écoulement, c'est-à-dire à étouffer le « *thin-layer effect* » à bas nombre de Reynolds.

Jiang, *et al.* (2004) ont étudié la stabilité de deux films fluides stratifiés de même densité mais de viscosités différentes. Leurs travaux se sont concentrés sur les instabilités qui se déclenchent sans inertie (« *antilubrication effect* »). L'objectif de ces travaux est d'expliquer les phénomènes physiques qui en sont à l'origine. Partant du constat que sans surface libre, lorsque la couche du fond est la moins visqueuse, l'écoulement est stable (« *thin lubrication effect* »), et devient instable dès qu'il y a une surface libre, aussi petit que soit  $Re$ , ils ont cherché à mettre en évidence par le calcul du bilan énergétique le type d'interaction qui lie les différents modes. Ils ont examiné également l'importance



des effets non linéaires, ce qui est nouveau par rapport aux études précédentes. Ils ont montré que dans la configuration précitée, le travail de la contrainte de cisaillement sur la surface libre non perturbée pour atténuer les perturbations est essentiel dans la déstabilisation de l'écoulement et le déclenchement de l'« *antilubrication effect* ». A l'inverse, l'autre configuration est stable grâce à cette même contrainte de cisaillement sur la surface libre.

Tout comme pour les systèmes à une couche, les modes de surface nécessitent la présence d'inertie pour croître, mais les modes d'interface fonctionnent différemment. Ainsi ces derniers peuvent se développer sans inertie dans le fluide ( $Re = 0$ ). On leur donne le nom d'« *inertialess instabilities* ». Ce n'est pas la présence de l'interface en elle-même qui provoque l'apparition de ces instabilités, puisqu'elles n'ont pas été observées dans le cas des études à deux couches confinées. Ce n'est pas non plus la surface libre qui en est responsable comme le montrent les résultats à une seule couche. On peut donc conclure à une interaction entre les deux modes d'instabilités, qui joue un rôle important dans le processus de déstabilisation des écoulements de films à deux couches superposées. Par ailleurs la stratification en viscosité de l'écoulement est un paramètre déterminant pour la stabilité.

## 1.4 Cas de plus de deux couches de fluides newtoniens

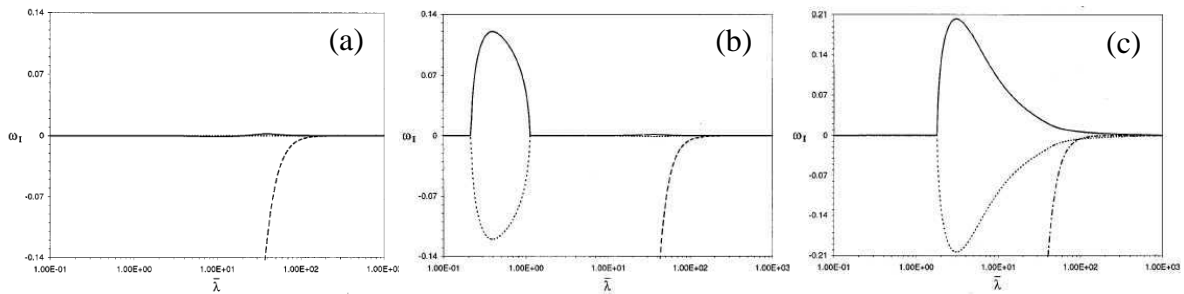
Pour les systèmes à trois couches ou plus, des études de stabilité linéaire et faiblement non linéaire ont été menées sur des plans faiblement inclinés, en l'absence d'inertie et avec des tensions de surface et d'interface négligeables.

Wang, *et al.* (1978) ont obtenu les courbes neutres pour différents rapports de viscosité, densité et épaisseur des couches dans une étude de stabilité linéaire de  $N$  films sur un plan incliné. Ils ont adopté l'hypothèse des grandes longueurs d'onde. Ils concluent que dans une configuration où la densité augmente avec la profondeur, le film est stable pour les modes interfaciaux, mais peut être instable pour le mode de surface libre. Cette instabilité n'apparaît que si cette variation est assez importante pour provoquer un potentiel gravitationnel suffisamment grand. Les modes interfaciaux n'apparaissent que dans la configuration inverse (densité qui diminue avec la profondeur), cette configuration étant toujours instable. L'instabilité du mode interfacial due à une augmentation brusque de la viscosité avec la profondeur apparaît seulement si le nombre de Reynolds est suffisamment petit. Le cas d'une diminution brusque de la viscosité est stable si le nombre d'onde de la perturbation est inférieur à une valeur seuil.

Weinstein et Kurz (1991) ont étudié des écoulements à trois couches sans inertie et à grandes longueurs d'onde. Ils ont considéré le cas des grandes longueurs d'onde à travers une équation du troisième degré à coefficients réels. Leur modèle considère que la propagation des ondes est non dispersive. Deux des valeurs propres obtenues à partir de cette équation sont des complexes conjugués, correspondant aux modes interfaciaux, alors que la troisième est réelle et correspond au mode de surface. Ce dernier est un mode stable. Le fait qu'elles soient conjuguées suggère une forte interaction entre les deux modes, une résonance aussi observée dans les écoulements confinés à trois couches. La surface libre est aussi affectée par l'instabilité, confirmant le fait que la propagation des instabilités doit être étudiée de façon globale sur tout l'écoulement comme évoqué précédemment. Les auteurs montrent également que les configurations physiques donnant naissance à des instabilités d'ordre zéro sont celles pour lesquelles la couche centrale a une densité ou une viscosité plus faible que celles qui l'encadrent. De plus, la couche centrale doit être relativement fine par rapport à l'épaisseur totale de l'écoulement, et localisée à proximité de l'axe central de l'écoulement. La faible épaisseur de cette couche facilite certainement l'interaction entre les modes d'interface et la symétrie de la configuration, en termes de viscosité ou densité et de position de la couche interne, paraît conforme avec la symétrie mathématique requise pour obtenir des solutions complexes conjuguées.

L'étude de Weinstein et Chen (1999) considère l'influence d'une stratification en viscosité sur la propagation des ondes dans un écoulement triple couche sans inertie ( $Re = 0$ ) sur un plan incliné avec des longueurs d'onde finies. Ce travail peut donc être considéré comme une extension de celui de

Loewenherz et Lawrence (1989) (longueurs d'onde finies mais avec une couche de plus) et de celui de Weinstein et Kurz (1991) (trois couches mais avec des longueurs d'onde finies). Les auteurs montrent que les modes interfaciaux de Weinstein et Kurz (1991) persistent dans le domaine des longueurs d'onde finies sous la forme de deux vitesses de phase complexes conjuguées. Ils illustrent ces résultats en présentant le taux de croissance de chacun des modes en fonction de la longueur d'onde et ce pour différentes configurations des rapports de viscosités. Leurs résultats sont reproduits sur la Fig. 12.



**Fig. 12. Weinstein et Chen (1999) - Tracé du taux de croissance  $\omega_i$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  selon la configuration.**

- (a) La viscosité diminue graduellement avec la profondeur,
- (b) La couche centrale est la plus visqueuse,
- (c) La couche centrale est la moins visqueuse,

pour les modes d'interfaces (—et.....) et mode de surface (- - -).

D'après la figure, on note que le mode de surface est stable pour des longueurs d'ondes finies et neutre dans la limite de longueurs d'ondes infinies, quelle que soit la configuration au niveau des viscosités. Ceci est en accord avec tous les résultats précédents. Dans le cas où la viscosité augmente graduellement avec la profondeur, le système est stable, en accord avec les résultats de Loewenherz et Lawrence (1989) et de Chen (1993). De la même façon, quand la viscosité diminue avec la profondeur, on trouve à nouveau une instabilité qui apparaît avec une longueur d'onde grande, mais finie. Pour la configuration avec une couche centrale plus visqueuse que les couches adjacentes (Fig. 12(b)), il y a deux longueurs d'ondes croissantes: la première est relativement grande, mais finie ( $\alpha \approx 30$ ) et la seconde est de l'ordre de l'épaisseur totale de l'écoulement ( $\alpha \approx 0.4$ ). En termes de taux de croissance, celui associé à la plus grande longueur d'onde est comparable aux résultats de Loewenherz et Lawrence (1989) en bicouche, alors que celui de la plus petite longueur d'onde est plus élevé de plusieurs ordres de grandeurs. Pour la configuration avec une couche centrale moins visqueuse (Fig. 12(c)), des instabilités n'apparaissent qu'à partir d'une valeur seuil de longueurs d'ondes, de l'ordre elle aussi de l'épaisseur totale des couches.

En définitive, le plus fort taux de croissance de l'instabilité est beaucoup plus important que celui identifié par Loewenherz et Lawrence (1989) et correspond à des longueurs d'onde de l'ordre de l'épaisseur totale de l'écoulement. Les configurations favorables à ces taux de croissance maxima sont d'une part celle déjà notée par Weinstein et Kurz (1991) (couche interne moins visqueuse, fine et centrée) et d'autres organisations qui ne sont pas accessibles par une étude asymptotique à longueurs d'ondes infinies mais toujours caractérisées par ce comportement symétrique (racines complexes conjuguées). Dans ces dernières configurations la couche interne est toujours fine mais présente une plus forte viscosité que celles adjacentes. Elle n'est plus centrée mais déplacée vers le fond de l'écoulement, plus près de la paroi. Dans ce cas, les longueurs d'onde donnant lieu aux plus forts taux de croissance sont environ 10 fois plus petites par rapport à la configuration avec couche interne à faible viscosité.

Contrairement à ce que nous aurions pu croire, les écoulements de films constitués de plus de deux couches donnent lieu à des phénomènes bien différents du cas avec deux couches, et une multiplication du nombre de paramètres à considérer. Il semble donc difficile d'envisager de généraliser une étude bicouche.

## 2 LES APPLICATIONS AUX PROBLEMES DE STABILITE DE FILMS DE DIFFERENTS MODELES RHEOLOGIQUES

---

Il existe un grand nombre de lois pour décrire la rhéologie des fluides. Nous nous sommes intéressés uniquement à celles sur lesquelles ont portées des études de stabilité de films. Ce paragraphe est une analyse de ces différentes études, classées suivant les catégories qui regroupent ces lois : les modèles purement visqueux, les modèles viscoplastiques et les modèles viscoélastiques. Nous avons plus précisément décrit les modèles purement visqueux utilisés pour des études de stabilité de films car il s'agit de la catégorie à laquelle appartient le modèle de Carreau. Nous portons en annexes une description des autres modèles évoqués. Les définitions des modèles sont extraites du livre de Carreau, *et al.* (1997).

### 2.1 Les modèles purement visqueux

#### 2.1.1 Le modèle newtonien et ses limites

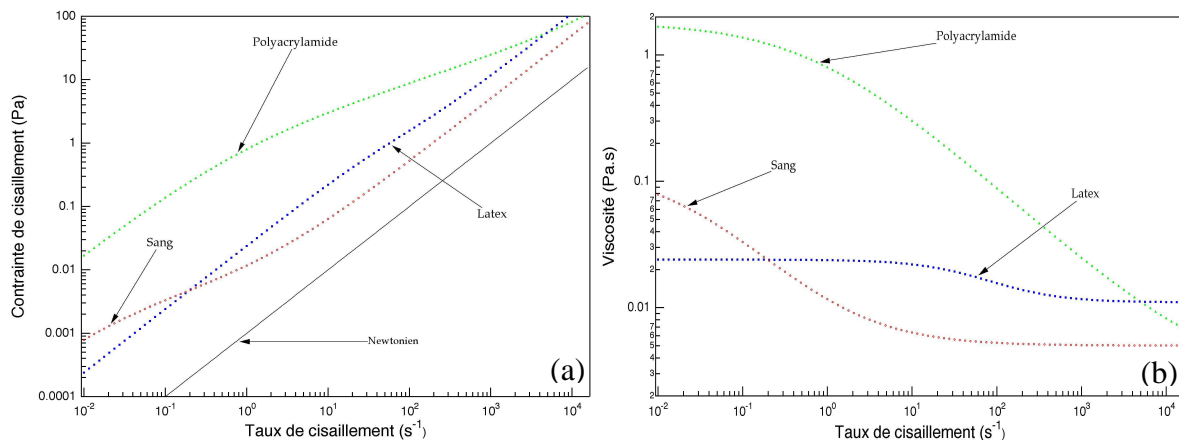
Si le modèle de fluide newtonien décrit bien la grande majorité des fluides, il existe un bon nombre de fluides, dont certains sont d'usage très courant, qui ont un comportement rhéologique plus complexe. Un fluide newtonien répond à certaines propriétés: les contraintes de cisaillement  $\tau$  sont proportionnelles au gradient de vitesse dans l'écoulement. Dans le cas d'écoulements parallèles, le taux de cisaillement, aussi appelé vitesse de déformation et noté  $\dot{\gamma}$ , est égal à la valeur absolue de ce gradient de vitesse. Nous avons ainsi :

$$\tau = -\eta\dot{\gamma} \text{ avec } \eta = \text{constante.} \quad (1.3)$$

Cette relation linéaire entre contraintes de cisaillement et vitesse de déformation implique que la viscosité soit indépendante des paramètres de l'écoulement et du temps. Elle ne varie qu'en fonction de paramètres étrangers à l'écoulement, comme la température ou la pression, que nous considérons constants dans les études présentées ici.

Les contraintes de cisaillement s'annulent instantanément lorsque l'écoulement s'arrête. Des fluides non newtoniens au contraire ont un comportement non linéaire dans le sens où leur viscosité est fonction de l'écoulement. C'est le cas de la plupart des suspensions, des boues, des pâtes, des émulsions, des gels et nombre de polymères en suspension.

Le caractère non newtonien le plus répandu est la variation de la viscosité avec le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Très souvent, pour les solutions de polymères, la viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement (gradient de vitesse) auquel est soumis le fluide augmente. On parle alors de comportement rhéofluidifiant (shear-thinning ou pseudoplastic). Les suspensions de particules solides asymétriques ont souvent ce comportement: plus on le cisaille est rapide, plus ces particules s'orientent dans le sens de l'écoulement et leurs interactions de frottement diminuent. C'est le cas des polymères liquides à longue chaîne, des jus de fruits. Ce comportement est également observé dans les suspensions de vésicules déformables comme le sang. La Fig. 13 montre les rhéogrammes (relation contrainte/taux de cisaillement) et l'évolution de la viscosité en fonction du taux de cisaillement pour trois fluides rhéofluidifiants.



**Fig. 13. Rhéogrammes (a) et viscosités en fonction du taux de cisaillement (b) obtenus pour trois exemples de liquides rhéofluidifiants.**

Exemples d'une solution aqueuse de polyacrylamide, du sang et d'une suspension de particules de polymère (latex) dans l'eau.

(Cours de Mécanique des fluides - José Bico, Marc Fermigier, Pascal Kurowski, ESPCI, Paris.)

On rencontre également le comportement rhéoépaississant (shear-thickening ou dilatat) : la viscosité augmente lorsqu'on augmente le taux de cisaillement. Pour la majorité de ces fluides, le comportement rhéoépaississant n'est observé que sur une plage limitée de valeurs du taux de cisaillement, alors que pour des taux de cisaillement plus faibles il peut présenter un comportement rhéofluidifiant. Par exemple, les suspensions très concentrées (au-dessus de 30% en fraction volumique) de particules solides présentent une brusque augmentation de viscosité qui est liée à un changement important de la structure de la suspension. C'est le cas de certains amidons dans l'eau.

Lorsque la viscosité n'est plus indépendante du taux de cisaillement, il est nécessaire d'utiliser plusieurs paramètres pour décrire le comportement mécanique du fluide. Un grand nombre de modèles empiriques permettent cette description. Le but n'étant pas ici d'en faire une liste exhaustive, nous nous limiterons à ceux sur lesquels ont porté des études de stabilité de films dans la littérature, et en particulier sur le modèle de Carreau que nous avons choisi pour cette étude.

## 2.1.2 Le modèle en loi de puissance d'Ostwald (1925)

Dans une certaine gamme de taux de cisaillement, on peut représenter la viscosité comme une loi de puissance du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , en particulier pour les polymères fondus :

$$\eta = m|\dot{\gamma}|^{n-1}. \quad (1.4)$$

Un fluide newtonien correspond à  $n = 1$ , un fluide rhéofluidifiant est représenté par  $n < 1$  et un fluide rhéoépaississant par  $n > 1$ . Le paramètre  $m$  est appelé indice de consistance, sa dimension ( $\text{Pa.s}^n$ ) dépend de l'indice  $n$ . Représentée en coordonnées logarithmiques, cette équation correspond à une relation linéaire entre la viscosité  $\eta$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et forme une droite de pente  $(n-1)$ . Bien que ce modèle permette de résoudre bon nombre de problèmes d'écoulement de fluides non newtoniens, il faut garder à l'esprit qu'il décrit très mal le comportement à faible taux de cisaillement et que les paramètres  $m$  et  $n$  n'ont pas d'interprétation claire en termes de grandeurs microscopiques tels que la masse moléculaire. Le modèle de la loi de puissance correspond par exemple à des fluides comme le caoutchouc, la colle, les polymères ou certains liquides biologiques. Des modèles plus complexes comme la loi de puissance généralisée (ou de second degré) avec ou sans seuil, le modèle de Carreau, *etc.* présentés plus loin, peuvent permettre une meilleure approximation de la viscosité suivant le matériau.

Hwang, *et al.* (1994) ont réalisé une étude de stabilité linéaire sur un film de liquide obéissant à une loi de puissance et s'écoulant sur un plan incliné. Ils ont utilisé la méthode intégrale qui consiste à intégrer les équations du mouvement sur l'épaisseur du film en vue d'obtenir des équations non linéaires équivalentes ayant pour paramètres le débit volumique et l'épaisseur de la couche. Ils ont ensuite appliqué la méthode de décomposition en modes normaux. Ils montrent qu'en fixant l'exposant  $n$  de la loi de puissance, ils retrouvent les tendances observées avec un film de fluide newtonien: une augmentation du nombre de Reynolds ou une diminution du nombre de Weber (caractéristique de l'influence de la tension de surface) provoque une déstabilisation de l'écoulement. En parallèle, une diminution de l'exposant  $n$ , et donc une augmentation des propriétés rhéofluidifiantes du fluide déstabilise l'écoulement et augmente la vitesse de phase des ondes.

Balmforth, *et al.* (2003) ont exploré les instabilités interfaciales dans l'écoulement de deux couches de fluides en loi de puissance superposées sur un plan incliné. En utilisant l'hypothèse d'un nombre de Reynolds tendant vers zéro, ils ont établi des modèles simplifiés pour résoudre le problème de stabilité linéaire. Avec une analyse faiblement non linéaire, ils ont étendu ce travail pour explorer la dynamique des ondes instables. Cependant ils ont rencontré des difficultés quand la couche supérieure est non newtonienne en raison de la loi constitutive qu'ils ont choisie: elle donne une viscosité infinie pour un taux de cisaillement nul, ce qui est le cas nécessairement à la surface libre. Les difficultés rencontrées pour obtenir des résultats cohérents dans cette configuration d'étude confirment les limites du modèle loi de puissance pour l'étude des écoulements à surface libre.

Par ailleurs, le modèle en loi de puissance ne rend pas compte des comportements newtoniens observés expérimentalement à faibles et très forts gradients de vitesse.

### 2.1.3 Le modèle de Carreau-Yasuda (1981)

Une extension du modèle en loi de puissance est la relation de Carreau qui, dans sa forme la plus complète, fait intervenir cinq paramètres :

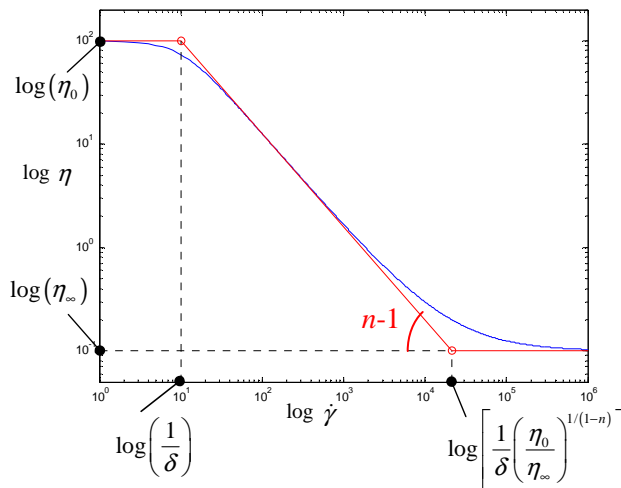
$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[ 1 + |\delta\dot{\gamma}|^a \right]^{\frac{n-1}{a}}, \quad (1.5)$$

où  $\eta_0$  est la viscosité newtonienne limite à cisaillement nul,  $\eta_{\infty}$  la viscosité newtonienne limite à cisaillement infini,  $\delta$  une constante de temps caractéristique,  $n$  un exposant de loi de puissance et  $a$  est un paramètre qui décrit la transition entre le comportement à faible cisaillement et la région en loi de puissance. Encore une fois, les différents coefficients sont déterminés de manière empirique et n'ont pas de signification physique directe.

Pour un grand nombre de solutions de polymères et de mélanges, on choisit la valeur  $a = 2$ , et on parle alors de la loi de Carreau à quatre paramètres (Carreau, *et al.* (1979)), le paramètre  $a$  ayant été ajouté plus tard par Yasuda (Yasuda, *et al.* (1981)). On obtient ainsi :

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[ 1 + (\delta\dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1.6)$$

La Fig. 14 représente la viscosité en fonction du taux de cisaillement :



**Fig. 14. Viscosité en fonction du taux de cisaillement.**  
 $\eta_0=100, \eta_\infty=0.1, n=0.1, \delta=0.1.$

La méthode de détermination des asymptotes de cette loi est portée en annexe I. A faible et fort taux de cisaillement, le fluide a un comportement quasi newtonien avec une viscosité proche respectivement de  $\eta_0$  et  $\eta_\infty$ . Entre ces deux tendances asymptotiques, la viscosité tend à suivre une loi de puissance ( $n-1$ ). L'équivalent du coefficient  $m$  de la loi de puissance dans ce cas est  $m = \eta_0 \delta^{n-1}$ . Cette région est délimitée en termes de taux de cisaillement par :

$$\dot{\gamma} \in \left[ \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta} \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^{1/(1-n)} \right].$$

On retrouve le cas newtonien quand  $n = 1$  ou  $\delta = 0$ . Le fluide est rhéofluidifiant si  $0 < n < 1$  et  $\eta_\infty < \eta_0$  et rhéoépaississant si  $n > 1$  et  $\eta_\infty > \eta_0$ .

On peut, lorsque l'écoulement ne met pas en jeu des taux de cisaillements très importants, limiter le nombre de paramètres à trois en considérant  $\eta_\infty = 0$ , ce qui n'affecte pas le comportement à cisaillement modéré. On obtient la relation :

$$\eta = \eta_0 \left[ 1 + (\delta \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1.7)$$

Weinstein (1990) a étudié numériquement l'influence de l'équation constitutive de Carreau à 4 paramètres sur la stabilité spatiale d'un film multicouche s'écoulant sur un plan incliné. Afin d'évaluer l'effet du comportement rhéofluidifiant sur la stabilité, l'auteur a comparé ses résultats aux deux cas newtoniens ayant pour viscosité les deux valeurs limites atteintes dans chaque couche, soit pour le plus faible et le plus fort taux de cisaillement de la couche. Il a observé que les résultats obtenus pour les écoulements à deux couches avec le modèle rhéofluidifiant se trouvent entre ces deux cas newtoniens uniquement en ce qui concerne les modes de surface. Par contre, pour les modes d'interface, le taux de croissance des ondes et leur propagation sont largement influencés par la viscosité locale et ne suivent pas un comportement moyen compris entre les deux cas newtoniens qui l'encadrent, en particulier pour les fréquences très basses. Le caractère rhéofluidifiant a donc un rôle propre dans le développement de ces instabilités d'interface, pouvant provoquer leur stabilisation ou déstabilisation suivant que le saut à l'interface en termes de taux de cisaillement est diminué ou augmenté par les propriétés rhéofluidifiantes. L'auteur a finalement proposé un mécanisme qui modélise les différents cas basés sur des considérations d'énergie.

Nous n'avons trouvé dans la littérature aucune étude de stabilité linéaire temporelle faisant appel au modèle de Carreau, que ce soit à une seule ou plusieurs couches.

## 2.2 Les modèles viscoplastiques

Un cas particulier du comportement rhéofluidifiant est l'existence d'une contrainte seuil d'écoulement: si la contrainte appliquée au fluide est inférieure à une certaine contrainte seuil, aucune déformation ne se produit, aucun mouvement n'apparaît au sein du fluide. On parle alors de fluide à seuil ou viscoplastique. C'est le cas généralement des pâtes : les laves torrentielles, les boues de forage de gisements pétroliers, les ciments et mortiers, le traitement de minerais en métallurgie extractive, les polymères fondus ou en solution très concentrée, les pâtes à papier, les mastics, peintures et vernis, les industries alimentaires, cosmétiques et pharmaceutiques... Les modèles évoqués dans ce paragraphe sont brièvement présentés en annexes.

Liu et Mei (1989) ont étudié la dynamique des boues liquides avec une forte concentration en particules cohésives d'argile. Ils ont fait pour cela une étude de stabilité sur un film mince de fluide de Bingham (1922) s'écoulant lentement sur un plan incliné. Ils montrent la présence de courants de gravité qui progressent à vitesse constante et peuvent même remonter l'écoulement. En résolvant une équation différentielle non linéaire, ils étudient l'étalement d'un volume fixé du même fluide déversé sur une couche statique appliquée auparavant. Ils observent que le front du courant de boue a toujours la même forme et progresse à une vitesse constante. Puis l'écoulement s'arrête lorsque les contraintes qu'il subit deviennent inférieures à la contrainte seuil du fluide.

Balmforth et Liu (2004) ont étudié la stabilité linéaire d'un film viscoplastique à surface libre s'écoulant sur un plan incliné dans le but de déterminer le nombre de Reynolds critique pour le déclenchement d'instabilités de surface dites « *roll waves* ». Ils adoptent pour cette étude la loi constitutive d'Herschel–Bulkley (Herschel et Bulkley (1926)). Ce type d'écoulement est stable pour de grands nombres de Reynolds car la sous-couche rigide à la surface de l'écoulement (sur toute l'épaisseur où le cisaillement est sous le seuil) ne peut pas être déformée et la surface libre reste plate. Par contre si l'écoulement est perturbé en introduisant arbitrairement de faibles taux de cisaillement, cette sous-couche supérieure devient déformable. Cette situation est modélisée à nombre de Reynolds nul, et les auteurs ont montré la présence d'instabilités de surface. Des modèles plus simples basés sur des moyennes verticales des équations sont évalués, et un modèle particulier, qui prévoit correctement le début de l'instabilité, est identifié. Ce modèle est employé pour une étude du comportement non linéaire de ces instabilités.

## 2.3 Les modèles viscoélastiques

Pour les fluides complexes, il existe une échelle de temps qui est une propriété intrinsèque de la matière appelé temps de relaxation: cela peut être le temps de désenchevêtrement de chaînes de polymères en solution, celui de la déformation, de l'agrégation ou la rupture de particules colloïdales induite par un cisaillement. Suivant le nombre de Deborah  $De$  qui représente le rapport de ce temps à l'échelle de temps de la sollicitation (comme l'inverse du taux de cisaillement dans le cas de cisaillement simple, l'inverse de la vitesse de rotation dans le cas d'un mélange en cuve agitée...) le comportement se rapprochera de celui d'un solide (caractérisé par son élasticité) ou de celui d'un liquide (caractérisé par sa viscosité). On considère qu'il s'agit d'un fluide purement visqueux quand  $De \ll 1$  car les échelles de temps des modifications de structure du produit sont beaucoup plus faibles que le temps caractéristique de la sollicitation, et d'un solide élastique pour  $De \gg 1$  car la structure du matériau n'a « pas le temps » de s'adapter aux effets de la contrainte. La viscosité n'est donc pas toujours la seule grandeur à observer, la plupart des matériaux possèdent également des propriétés élastiques d'autant plus marquées qu'ils possèdent une organisation moléculaire complexe. La viscoélasticité est notamment très fréquente dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. La réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux avec une partie de la contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation et un aspect élastique avec l'autre partie de la contrainte proportionnelle à la déformation elle-même. Nous n'entrerons pas ici dans une description précise de chacun des modèles viscoélastiques mais nous citerons simplement ceux adoptés pour des études de stabilité de films en renvoyant vers l'ouvrage très complet de Bird, *et al.* (1987) pour plus de détails.

Les travaux de Gupta (1967) concernent la stabilité d'un film viscoélastique de second ordre s'écoulant le long d'un plan incliné. Il observe que les modes de surface se déclenchent pour des nombres de Reynolds critique plus faibles que pour des fluides newtoniens. En parallèle, son analyse montre également l'existence de modes de cisaillement qui sont toujours instables alors qu'ils sont fortement atténués pour les fluides newtoniens ordinaires. Le fait que leur stabilité soit gouvernée par les modes de cisaillement est une particularité importante de ces fluides du second ordre.

La stabilité d'un film de fluide viscoélastique de Oldroyd-B qui s'écoule sur un plan incliné a été en premier lieu étudiée par Lai (1967). Il a formulé pour cela le problème aux valeurs propres correspondant et l'a résolu en choisissant, une nouvelle fois, l'hypothèse des grandes longueurs d'onde. Il constate que la présence d'une composante élastique dans le fluide a tendance à abaisser la valeur du nombre de Reynolds critique et donc à déstabiliser l'écoulement.

Shaqfeh, *et al.* (1989) ont étudié la stabilité linéaire d'un film de fluide viscoélastique sur un plan incliné. Les équations régissant la croissance de petites perturbations bidimensionnelles sont dérivées et résolues numériquement pour le modèle d'Oldroyd-B sur une gamme de nombre de Deborah. Leurs résultats montrent que pour de petits nombres de Reynolds, bien que les effets viscoélastiques déstabilisent l'écoulement, le taux de croissance des modes purement élastiques reste très petit. Ces effets ne devraient donc vraisemblablement avoir que peu de conséquence dans des situations pratiques. D'autre part, pour des nombres de Reynolds modérés, les effets viscoélastiques ont un effet stabilisant.

Chen (1992) s'est intéressé aux conditions de déclenchement d'instabilités dans l'écoulement de films à deux couches de liquides viscoélastiques de même densité et viscosité le long d'un plan incliné. Il s'est basé sur une analyse de stabilité linéaire du modèle de Maxwell convecté dans la limite des nombres de Reynolds nuls. Il a montré qu'une onde d'interface peut se développer à tout nombre de Weissenberg quand le liquide plus élastique se trouve à côté de la paroi, indépendamment du rapport d'épaisseur entre les couches. Une onde de surface peut également se développer quand les contraintes élastiques sont élevées. Les nombres de Weissenberg critiques pour le déclenchement de ces modes de surface d'origine élastique sont calculés pour différents rapports d'épaisseur des couches.

Huang et Khomami (2001) ont proposé une explication concernant les mécanismes physiques sous-jacents au déclenchement des instabilités dans les films à une ou plusieurs couches de fluides viscoélastiques sur un plan incliné en les comparant aux fluides newtoniens. Leur étude est basée sur une analyse énergétique parallèlement à une étude de stabilité linéaire. Les analyses qu'ils ont développées ont montré que tout comme pour les fluides newtoniens, les instabilités de surface dans le cas limite de grandes longueurs d'onde se déclenchent à cause des contraintes de cisaillement aux interfaces. Ce qui est spécifique aux fluides viscoélastiques, ce sont les efforts élastiques déstabilisants qui apparaissent. Pour les écoulements de fluides newtoniens, l'origine du déclenchement de l'instabilité aux ondes longues dépend de la place de la couche la moins visqueuse. Si le fluide le moins visqueux est au fond, le cisaillement au niveau de l'interface sera responsable de la déstabilisation, alors que dans la configuration inverse, les efforts dus au tenseur de Reynolds gouvernent l'instabilité. Pour les fluides viscoélastiques, la force d'entraînement pour l'instabilité est le couplage entre la vitesse de base et la perturbation d'une part et les contraintes et leurs gradients à travers l'interface d'autre part.





# C H A P I T R E 2 :

## M I S E E N E Q U A T I O N S D U P R O B L E M E

### **1 MISE EN EQUATIONS DU PROBLEME A $N$ COUCHES**

---

La première partie de ce chapitre est consacrée à la mise en équations du problème. Dans un premier temps, nous exposons la méthode pour le calcul des profils de vitesses de base et des épaisseurs des couches, notamment le choix du système d'adimensionnement. Ensuite nous présenterons les équations du problème, notamment l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée adaptée à notre modèle rhéologique ainsi que des conditions aux limites qui lui sont associées. Dans une seconde partie est développée la méthode de calcul du bilan énergétique du système.

#### **1.1 Equations constitutives et champ de base**

Nous considérons l'écoulement laminaire de  $N$  couches de fluides incompressibles superposées et entraînées par gravité le long d'un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle  $\beta$ . Le schéma de la configuration est donné sur la Fig. 15. Les  $N$  fluides sont supposés non miscibles. Dans la suite de la mise en équation du problème à  $N$  couches, le cas d'une seule couche ( $N = 1$ ) sera précisé chaque fois qu'il présente une particularité.

L'indice  $k = 1..N$  désigne le numéro de la couche considérée en partant de la couche supérieure (couche  $k = 1$ ) vers la couche inférieure (couche  $k = N$ ) comme il est illustré sur la Fig. 13. Cet indice est appliqué à chacune des propriétés du fluide et les variables surmontées d'une barre sont dimensionnelles. Ainsi  $\bar{d}_k$  désigne l'épaisseur de la couche  $k$ ,  $\bar{\rho}_k$  sa densité et  $\bar{\eta}_k$  sa viscosité dynamique. La tension de surface à la surface libre séparant la couche 1 du gaz inerte au dessus de celle-ci est notée  $\bar{T}_1$  alors que la tension de surface à l'interface entre les couches  $(k-1)$  et  $k$  est  $\bar{T}_k$ .

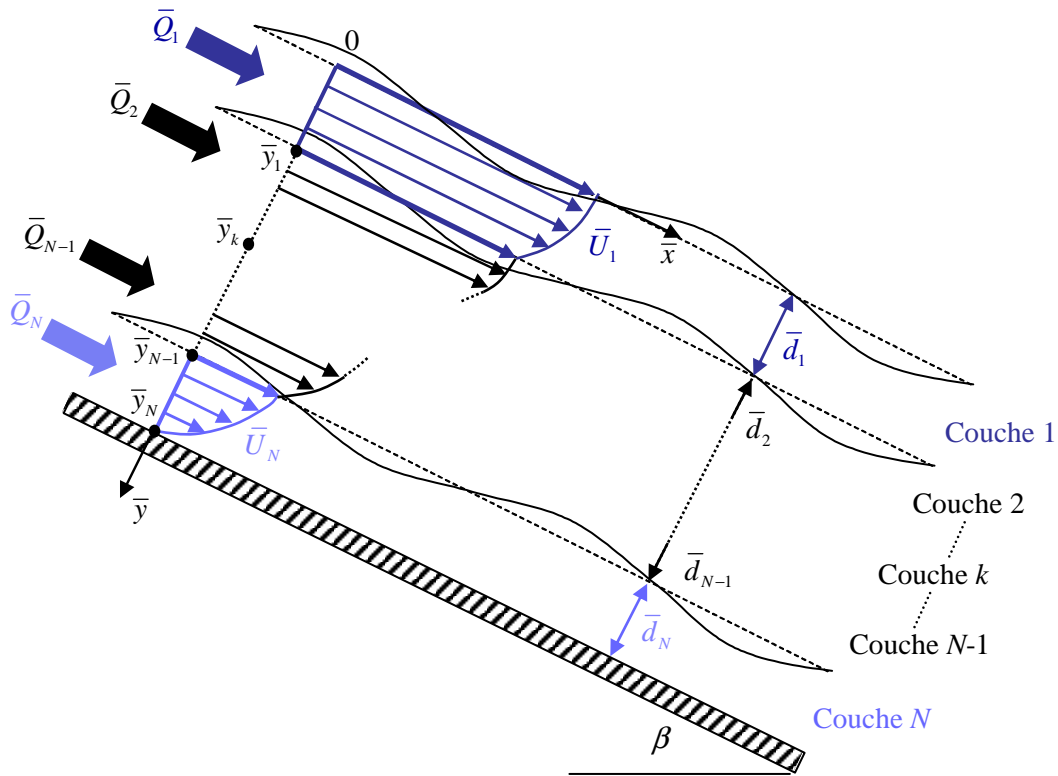


Fig. 15. Configuration d'étude.

Le débit surfacique par unité de largeur dans chaque couche,  $\bar{Q}_k$ , est spécifié initialement, définissant le débit total par unité de largeur,

$$\bar{Q}_T = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_k. \quad (2.1)$$

Le système d'axes de coordonnées cartésiennes est aligné avec le plan : son origine se trouve sur la surface libre non perturbée, l'axe  $\bar{x}$  est dans la direction et le sens de l'écoulement, l'axe  $\bar{y}$  est choisi normal au plan, dirigé vers le bas. On définit aussi  $\bar{y}_k$ , la position de l'interface non déformée située sous la couche  $k$  pour  $k = 2..(N-1)$  ou la position de la paroi du fond pour  $k = N$  telle que :

$$\bar{y}_k = \sum_{n=1}^k \bar{d}_n \quad \text{pour } k = 2..N. \quad (2.2)$$

L'équation  $\bar{y} = \bar{\zeta}_k(\bar{x}, \bar{t})$  donne la déformation suivant l'axe  $\bar{y}$  au temps  $\bar{t}$  et à la position  $\bar{x}$  de la surface libre pour  $k = 1$  et celle des interfaces entre les couches pour  $k = 2..N$ .

Au niveau de chaque couche, la conservation de la masse est assurée par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{avec } k = 1..N, \quad (2.3)$$

et les équations du mouvement de l'écoulement de base s'écrivent :

$$\bar{\rho}_k \left( \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_k \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \bar{x}} + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{xx,k}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy,k}}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{\rho}_k \bar{g} \sin \beta \quad \text{avec } k = 1..N, \quad (2.4)$$

$$\bar{\rho}_k \left( \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \bar{x}} + \bar{V}_k \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial \bar{y}} + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy,k}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{yy,k}}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{\rho}_k \bar{g} \cos \beta \quad \text{avec } k = 1..N, \quad (2.5)$$

avec  $\bar{U}_k$  et  $\bar{V}_k$  les composantes de la vitesse de base dans la couche  $k$  suivant les axes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  respectivement,  $\bar{P}_k$  la pression dans la couche  $k$ ,  $\bar{g}$  l'accélération de la gravité et  $\bar{\sigma}_{ij,k}$  les composantes du tenseur de contraintes dans la couche  $k$  :

$$\bar{\sigma}_{xx,k} = 2\bar{\eta}_k \left( \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{x}} \right), \bar{\sigma}_{yy,k} = 2\bar{\eta}_k \left( \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \bar{y}} \right), \bar{\sigma}_{xy,k} = \bar{\eta}_k \left( \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \bar{x}} \right). \quad (2.6)$$

Les fluides sont supposés purement visqueux et leur viscosité dépend uniquement du taux de cisaillement. Cette viscosité est notée  $\bar{\eta}_k$ . Elle est constante pour les fluides dits newtoniens. Dans le cas où le fluide est non newtonien, c'est une loi de Carreau à quatre paramètres (Carreau, *et al.* (1979)) que nous considérons :

$$\frac{\bar{\eta}_k - \bar{\eta}_{\infty,k}}{\bar{\eta}_{0,k} - \bar{\eta}_{\infty,k}} = \left[ 1 + \left( \bar{\delta}_k \left| \dot{\gamma}_k \right| \right)^2 \right]^{\frac{n_k-1}{2}} \quad \text{avec } k = 1..N, \quad (2.7)$$

avec  $\bar{\eta}_{0,k}$  et  $\bar{\eta}_{\infty,k}$  les viscosités newtoniennes à bas et fort taux de cisaillement,  $\bar{\delta}_k$  un temps caractéristique et  $n_k$  l'exposant sans dimension de la partie en loi puissance.

Le champ de base est supposé établi, parallèle et uniforme. La vitesse de base dans la couche  $k$ , notée  $\bar{U}_k$ , est donc la seule composante non nulle et varie uniquement suivant l'axe  $\bar{y}$ . Par ailleurs, le gradient de pression statique selon l'axe  $\bar{x}$  est nul.

Dans le cas d'un fluide Non newtonien, pour un débit surfacique  $\bar{Q}_k$  par unité de largeur donné, l'épaisseur du film en fonction des paramètres de l'écoulement ne peut pas être déterminée explicitement, cette longueur ne peut donc pas être choisie comme longueur caractéristique pour l'adimensionnement, comme c'est généralement le cas dans les études de ce type avec des fluides newtoniens. A l'instar de Weinstein (1990) nous construisons donc une longueur caractéristique de l'épaisseur du film,

$$\bar{d}_s = \left( \frac{\bar{\eta}_{0,N} \bar{Q}_T}{\bar{\rho}_N \bar{g} \sin \beta} \right)^{1/3}. \quad (2.8)$$

Physiquement, cette longueur représente, à un facteur  $3^{1/3}$  près, l'épaisseur qu'aurait le film si le débit total  $\bar{Q}_T$  s'écoulait à travers une seule couche, constituée du fluide contenu dans la couche  $N$  adjacente à la paroi et que ce fluide était newtonien de viscosité  $\bar{\eta}_{0,N}$ .

Dans la suite de l'étude, nous prenons  $\bar{d}_s$ ,  $\frac{\bar{Q}_T}{\bar{d}_s}$ ,  $\rho_N \frac{\bar{Q}_T^2}{\bar{d}_s^2}$  et  $\frac{\bar{d}^2}{\bar{Q}_T}$  comme grandeurs de référence respectivement pour les longueurs, les vitesses, les pressions et les temps. Les quantités sans dimension sont notées sans barre.

Les propriétés des fluides s'écrivent alors :

$$E_k = \frac{\bar{\eta}_{0,k}}{\bar{\eta}_{0,N}}, M_k = \frac{\bar{\rho}_k}{\bar{\rho}_N} \text{ avec } k = 1..N. \quad (2.9)$$

Nous définissons les paramètres sans dimension de l'étude, le nombre de Reynolds et le nombre capillaire de la couche  $k$ , comme suit :

$$Re = \frac{\bar{\rho}_N \bar{Q}_T}{\bar{\eta}_{0,N}}, Ca_k = \frac{\bar{T}_k \bar{d}_s}{\bar{\eta}_{0,N} \bar{Q}_T} \text{ avec } k = 1..N, \quad (2.10)$$

où  $\bar{T}_k$  est la tension de surface au niveau de la surface libre pour  $k = 1$  et au niveau de l'interface couvrant la couche  $k$  pour  $k = 2..N$ .

En notant  $U_k = \bar{U}_k \bar{d}_s / \bar{Q}_T$  la vitesse de base sans dimension, la seule composante adimensionnée non nulle du tenseur de contraintes est de la forme :

$$\sigma_{xy,k} = \eta_k \frac{dU_k}{dy}. \quad (2.11)$$

La viscosité pour un fluide de Carreau s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\eta_k = E_k \left\{ I_k + (1 - I_k) \left[ 1 + \left( L_k \frac{dU_k}{dy} \right)^2 \right]^{(n_k - 1)/2} \right\}, \quad (2.12)$$

avec  $I_k = \bar{\eta}_{\infty,k} / \bar{\eta}_{0,k}$ ,  $L_k = \bar{\delta}_k \bar{Q}_T / \bar{d}_s^2$  et avec  $k = 1..N$ .

**NB :** En recombinaison l'expression (2.8) de la longueur caractéristique  $d_s$  avec celle du nombre de Reynolds (2.10), on obtient la relation suivante :

$$\bar{d}_s = \left( \frac{\bar{Q}_T^2}{Re \bar{g} \sin \beta} \right)^{1/3} \quad (2.13)$$

Ainsi pour retrouver toutes les grandeurs dimensionnelles du problème, il suffit de fixer le débit total dimensionnel  $\bar{Q}_T$  et l'accélération de la pesanteur  $\bar{g}$ , le nombre de Reynolds et l'angle d'inclinaison  $\beta$  faisant partie du jeu de paramètres adimensionnels.

Les équations (2.3), (2.4) et (2.5) deviennent:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{d\sigma_{xy,k}}{dy} = -M_k, \quad (2.15)$$

$$\frac{dP_k}{dy} = M_k \cot \beta / Re, \quad (2.16)$$

où  $P_k$  est le champ de pression hydrostatique dans la couche  $k$ .

Les équations (2.14), (2.15) et (2.16) constituent le système permettant d'obtenir le champ de base, c'est-à-dire la vitesse et la pression de l'écoulement permanent dans chaque couche.

La condition de non glissement sur la paroi solide et celle de la contrainte tangentielle nulle au niveau de la surface libre sont données respectivement par les relations (2.17) et (2.18):

$$U_N(y_N) = 0, \quad (2.17)$$

$$\sigma_{xy,1}(0) = 0, \quad (2.18)$$

où  $y_k = \bar{y}_k / \bar{d}_s$  est la position adimensionnée de la limite inférieure de la couche  $k$ .

Ces deux conditions sont les seules nécessaires pour le cas à une seule couche ( $N = 1$ ). Par contre dès que  $N > 1$ , d'autres conditions aux limites sont nécessaires au niveau des interfaces entre les couches, il s'agit respectivement de la continuité en vitesse et en contrainte :

$$U_{k-1}(y_{k-1}) = U_k(y_{k-1}) \quad \text{pour } k = 2..N, \quad (2.19)$$

$$\sigma_{xy,k-1}(y_{k-1}) = \sigma_{xy,k}(y_{k-1}) \quad \text{pour } k = 2..N. \quad (2.20)$$

Les équations (2.15) et (2.16) sont intégrées par rapport à  $y$  en utilisant les conditions aux limites (2.18) et (2.20) lorsque  $N > 1$ . Nous obtenons :

$$\sigma_{xy,k} = -M_k y + C_k, \text{ avec } C_1 = 0 \text{ et } C_k = (M_k - M_{k-1}) y_{k-1} \text{ pour } k = 2..N, \quad (2.21)$$

et 
$$P_k = y.M_k \cot \beta / Re \text{ pour } k = 1..N. \quad (2.22)$$

A partir des équations (2.11), (2.12) et (2.21), nous obtenons le système d'équations différentielles sur le champ de vitesse de base  $\bar{U}_k$  suivant :

$$E_k \left\{ I_k + (1 - I_k) \left[ 1 + \left( L_k \frac{dU_k}{dy} \right)^2 \right]^{(n_k-1)/2} \right\} \frac{dU_k}{dy} = -M_k y + C_k \text{ pour } k = 1..N. \quad (2.23)$$

Le système (2.23) doit être résolu sur l'intervalle  $y \in [0, d_1]$  pour  $k = 1$  et  $y \in [y_{k-1}, y_k]$  pour  $k = 2..N$  en utilisant les conditions aux limites (2.17)-(2.20). Une relation supplémentaire est utile à la résolution de l'équation (2.23), il s'agit des conditions d'entrée du système imposant un débit massique adimensionné,  $Q_T$ , égal à l'unité:

$$Q_T = \sum_{n=1}^N Q_n = \int_0^{y_1} U_1 dy + \sum_{k=2}^N \int_{y_{k-1}}^{y_k} U_k dy = 1. \quad (2.24)$$

Le système d'équations non linéaires (2.17), (2.19), (2.23) et (2.24) est résolu numériquement pour déterminer le champ de vitesse de base  $U_k(y)$  et les épaisseurs  $d_k$  des différentes couches du film. Pour le calcul de ces grandeurs, nous appliquons une méthode de Newton dont le principe est exposé en annexes. Pour le cas particulier d'une seule couche, le système (2.23) se réduit à une équation unique associée à la condition aux limites (2.17). La relation (2.24) s'écrit alors:

$$Q_T = Q_1 = \int_0^{y_1} U_1 dy = 1. \quad (2.25)$$

## 1.2 Equations du problème linéaire.

Nous considérons que les grandeurs de l'écoulement sont constituées d'une partie correspondant au champ de base (écoulement non perturbé) à laquelle s'ajoute une perturbation.

$$u_k = U_k(y) + u_k'(x, y, t), \quad (2.26)$$

$$v_k = v_k'(x, y, t), \quad (2.27)$$

$$p_k = P_k(y) + p_k'(x, y, t), \quad (2.28)$$

où  $u_k'(x, y, t)$ ,  $v_k'(x, y, t)$ ,  $p_k'(x, y, t)$  sont les petites perturbations de vitesses et de pression dans la couche  $k = 1..N$ .

Les perturbations des interfaces s'écrivent donc:

$$\zeta_k = \zeta_k'(x, t), \quad (2.29)$$

$$\text{avec } \zeta_k = \bar{\zeta}_k / \bar{d}_s.$$

La variable  $\zeta_1$  désigne la perturbation de la surface libre et est donc la seule présente dans le cas d'une seule couche. La variable  $\zeta_k$ , pour  $k = 2..N$ , représente la perturbation de l'interface entre les couches  $(k-1)$  et  $k$ .

En négligeant les termes de second ordre en perturbations, et en utilisant le fait que  $U_k$  et  $P_k$  satisfont les équations du champ de base (2.14), (2.15) et (2.16), on obtient les équations linéarisées sur les perturbations :

$$\frac{\partial u_k'}{\partial x} + \frac{\partial v_k'}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } k = 1..N, \quad (2.30)$$

$$M_k Re \left( \frac{\partial u_k'}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_k'}{\partial x} + v_k' \frac{\partial U_k}{\partial y} \right) = -Re \frac{\partial p_k'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xx,k}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy,k}}{\partial y} \quad \text{avec } k = 1..N, \quad (2.31)$$

$$M_k Re \left( \frac{\partial v_k'}{\partial t} + U_k \frac{\partial v_k'}{\partial x} \right) = -Re \frac{\partial p_k'}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{xy,k}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy,k}}{\partial y} \quad \text{avec } k = 1..N, \quad (2.32)$$

$$\text{où} \quad \sigma'_{xx,k} = 2\eta_k \frac{\partial u_k'}{\partial x} \quad \sigma'_{yy,k} = 2\eta_k \frac{\partial v_k'}{\partial y} \quad \sigma'_{xy,k} = \theta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y} + \frac{\partial v_k'}{\partial x} \right), \quad (2.33)$$

$$\text{et} \quad \theta_k = E_k \left\{ I_k + (1 - I_k) \left[ 1 + n_k \left( L_k \frac{dU_k}{dy} \right)^2 \right] \cdot \left[ 1 + \left( L_k \frac{dU_k}{dy} \right)^2 \right]^{(n_k-3)/2} \right\}. \quad (2.34)$$

Remarquons que la contrainte  $\sigma'_{xy,k}$  s'exprime à l'aide d'une viscosité  $\theta_k$ , différente de celle apparaissant dans l'expression des contraintes normale,  $\sigma'_{xx,k}$  et  $\sigma'_{yy,k}$ . Cette viscosité traduit l'influence des perturbations de la viscosité *via* la loi de Carreau sur de vitesse.

**NB :** On a :  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta_k \frac{\partial U_k}{\partial y} \right) = \frac{\partial \eta_k}{\partial y} \frac{\partial U_k}{\partial y} + \eta_k \frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2}$ . En développant le premier terme de cette expression et en factorisant par  $\partial^2 U_k / \partial y^2$ , on obtient la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta_k \frac{\partial U_k}{\partial y} \right) = \theta_k \frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2}. \quad (2.35)$$

Au niveau de la paroi, la condition de non glissement conduit à :

$$\begin{cases} u_N' = 0 \\ v_N' = 0 \end{cases} \text{ en } y = y_N . \quad (2.36)$$

Les conditions cinématiques à chacune des interfaces donnent :

$$v_k' = \frac{\partial \zeta_k'}{\partial t} + U_k \frac{\partial \zeta_k'}{\partial x} \text{ en } y = 0 \text{ pour } k = 1 \text{ et en } y = y_{k-1} \text{ pour } k = 2..N . \quad (2.37)$$

A la surface libre, les contraintes tangentielles doivent s'annuler et les contraintes normales s'équilibrer avec celles induites par la tension de surface :

$$\sigma'_{xy,1} - M_1 \zeta_1' = 0 \text{ en } y = 0 , \quad (2.38)$$

$$p_1' Re + \zeta_1' M_1 \cot \beta - 2\eta_1 \frac{\partial v_1'}{\partial y} - Ca_1 \frac{\partial^2 \zeta_1'}{\partial x^2} = 0 \text{ en } y = 0 . \quad (2.39)$$

Ces conditions aux limites (2.36) à (2.39) suffisent pour résoudre le problème à une seule couche ( $N=1$ ). Pour  $N>1$ , on doit ajouter d'autres conditions relatives à chacune des interfaces. Les contraintes tangentielles et normales doivent respectivement s'équilibrer:

$$\sigma'_{xy,k} - \sigma'_{xy,k-1} - (M_k - M_{k-1}) \zeta_k' = 0 \text{ en } y = y_{k-1} , \quad (2.40)$$

$$(p_k' - p_{k-1}') Re + \zeta_k' (M_k - M_{k-1}) \cot \beta + 2 \left( \eta_{k-1} \frac{\partial v_{k-1}'}{\partial y} - \eta_k \frac{\partial v_k'}{\partial y} \right) - Ca_k \frac{\partial^2 \zeta_k'}{\partial x^2} = 0 \text{ en } y = y_{k-1} , \quad (2.41)$$

pour  $k = 2..N$ .

Par ailleurs, la continuité des composantes de vitesse de part et d'autre de l'interface doit être assurée:

$$v_k' = v_{k-1}' \text{ en } y = y_{k-1} , \quad (2.42)$$

$$u_k' - u_{k-1}' = \left( \frac{\partial U_{k-1}}{\partial y} - \frac{\partial U_k}{\partial y} \right) \zeta_k' \text{ en } y = y_{k-1} . \quad (2.43)$$

pour  $k = 2..N$ .

**NB :** Notons que la grandeur  $u_k' - u_{k-1}'$  n'est pas nulle sur l'interface non perturbée. En effet la continuité de la vitesse n'est vraie que sur l'interface déformée, soit en  $y = y_{k-1} + \zeta_k'$ . En cette position, les vitesses longitudinales de part et d'autre de l'interface  $k$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_k(y_{k-1} + \zeta_k') &= (U_k + u_k')(y_{k-1} + \zeta_k') \\ &\simeq U_k(y_{k-1}) + \zeta_k' \frac{\partial U_k}{\partial y}(y_{k-1}) + \underbrace{\frac{\zeta_k'^2}{2} \frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2}(y_{k-1})}_{\text{ordre 2}} + u_k'(y_{k-1}) + \underbrace{\zeta_k' \frac{\partial u_k'}{\partial y}(y_{k-1})}_{\text{ordre 2}} \end{aligned} \text{ dans la couche } k, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} u_{k-1}(y_{k-1} + \zeta_k') &= (U_{k-1} + u_{k-1}')(y_{k-1} + \zeta_k') \\ &\simeq U_{k-1}(y_{k-1}) + \zeta_k' \frac{\partial U_{k-1}}{\partial y}(y_{k-1}) + \underbrace{\frac{\zeta_k'^2}{2} \frac{\partial^2 U_{k-1}}{\partial y^2}(y_{k-1})}_{\text{ordre 2}} + u_{k-1}'(y_{k-1}) + \underbrace{\zeta_k' \frac{\partial u_{k-1}'}{\partial y}(y_{k-1})}_{\text{ordre 2}} \end{aligned} \text{ dans la couche } k-1, \quad (2.45)$$



Lorsque nous écrivons l'égalité de ces vitesses en tenant compte de la continuité des vitesses de base représentée par l'Eq.(2.19), on obtient la relation (2.43). Il est intéressant de remarquer qu'il y a donc un saut de valeur entre les perturbations de vitesses longitudinales à la traversée de l'interface non déformée. Pour les vitesses normales, comme la composante verticale du champ de base est nulle, nous avons :

$$v_k(y_{k-1} + \zeta_k') = v_k'(y_{k-1} + \zeta_k') \approx v_k'(y_{k-1}) + \underbrace{\zeta_k' \frac{\partial v_k'}{\partial y}}_{\text{ordre 2}}(y_{k-1}) \quad \text{dans la couche } k, \quad (2.46)$$

$$v_{k-1}(y_{k-1} + \zeta_k') = v_{k-1}'(y_{k-1} + \zeta_k') \approx v_{k-1}'(y_{k-1}) + \underbrace{\zeta_k' \frac{\partial v_{k-1}'}{\partial y}}_{\text{ordre 2}}(y_{k-1}) \quad \text{dans la couche } k-1, \quad (2.47)$$

$$\text{donc } v_k(y_{k-1} + \zeta_k') - v_{k-1}(y_{k-1} + \zeta_k') = 0 \Leftrightarrow v_k'(y_{k-1}) - v_{k-1}'(y_{k-1}) = 0.$$

Il y a cette fois continuité des vitesses de perturbations normales à l'écoulement de base à travers l'interface non déformée.

Nous définissons maintenant la forme des perturbations. Celles-ci sont considérées sous la forme de modes normaux bidimensionnels. On considère uniquement des ondes planes s'écoulant dans la direction de l'écoulement  $x$ . Squire (1933) montre que dans le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible entre deux surfaces solides, les instabilités bidimensionnelles sont les plus dangereuses. Les seuils de déclenchement peuvent donc être déterminés en considérant uniquement des perturbations bidimensionnelles. Schaflinger (1994) a étendu le domaine d'application de ce théorème au cas de deux couches de fluides superposées. Nous faisons ici l'hypothèse que le théorème de Squire s'applique aussi au cas de deux couches superposées avec une surface libre. Il s'agit d'une hypothèse communément adoptée dans la littérature pour les études de stabilité linéaire, et nous avons vérifié au cours de mon DEA qu'elle était correcte dans le cas d'une couche en considérant des perturbations tridimensionnelles. Les perturbations en vitesse et pression s'écrivent :

$$(u_k', v_k', p_k')(x, y, t) = (\hat{u}_k, \hat{v}_k, \hat{p}_k)(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad \text{et} \quad \zeta_k'(x, t) = \hat{\zeta}_k e^{i\alpha(x-ct)},$$

avec  $k = 1..N$  et où  $\alpha$ , le nombre d'onde longitudinal, est un réel et  $c$  est la vitesse complexe avec  $c = c_R + ic_I$ .

La partie réelle de  $c$ , notée  $c_R$ , est la vitesse de phase de la perturbation et  $\alpha c_I$  est le taux de croissance temporel de la perturbation, avec  $c_I$  la partie imaginaire de  $c$ . L'écoulement est respectivement stable, instable ou marginalement stable selon que  $c_I$  est négatif, positif ou nul.

En introduisant ces expressions dans le système (2.30)-(2.32) et les conditions aux limites (2.36)-(2.43), et après l'élimination des variables  $p_k'$  et  $u_k'$ , nous obtenons un système d'équations linéarisées ne dépendant plus que des perturbations de vitesse  $v_k'$ . Il s'agit pour cette étude d'un système d'équations d'Orr-Sommerfeld généralisées avec des termes supplémentaires spécifiques au modèle de Carreau (termes encadrés dans l'Eq. (2.48)). Le système s'écrit :

$$\boxed{\theta_k} \left[ (D^2 + \alpha^2)^2 \hat{v}_k + \boxed{(D^2 \theta_k + 2D\theta_k D)(D^2 + \alpha^2) \hat{v}_k - 4\alpha^2 D(\eta_k D \hat{v}_k)} \right] = i\alpha Re M_k \left[ (U_k - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2 U_k \right] \hat{v}_k \quad \text{pour } k = 1..N, \quad (2.48)$$

où  $D = \frac{\partial}{\partial y}$  désigne une dérivation par rapport à  $y$ .

Les conditions aux limites (2.36)-(2.43) donnent le système suivant:

$$\begin{cases} D\hat{v}_N = 0 \\ \hat{v}_N = 0 \end{cases} \quad \text{en } y = y_N \quad (2.49)$$

$$\begin{cases} \left[ 1 + \frac{E_1}{M_1}(U_1 - c)(D^2 + \alpha^2) \right] \hat{v}_1 = 0 \\ i\alpha ReM_1(c - U_1)D\hat{v}_1 - 3\alpha^2 E_1 D\hat{v}_1 + E_1 D^3 \hat{v}_1 + i\alpha E_1 \left( \cot \beta + \frac{\alpha^2 Ca_1}{M_1} \right) (D^2 + \alpha^2) \hat{v}_1 = 0 \end{cases} \quad \text{en } y = 0 \quad (2.50)$$

Notons que sur la surface libre, nous avons la propriété  $\theta_1 = E_1 = \eta_1$ . Les deux systèmes de conditions aux limites (2.49) et (2.50) suffisent à décrire le problème monocouche. Pour un système à  $N$  couches ( $N > 1$ ), nous y ajoutons les conditions aux interfaces:

$$\begin{cases} \left[ (M_k - M_{k-1}) + \theta_k (U_k - c)(D^2 + \alpha^2) \right] \hat{v}_k = \theta_{k-1} (U_{k-1} - c)(D^2 + \alpha^2) \hat{v}_{k-1} \\ \hat{v}_{k-1} = \hat{v}_k \\ (M_k - M_{k-1})(D\hat{v}_k - D\hat{v}_{k-1}) = (DU_{k-1} - DU_k) \left[ \theta_k (D^2 + \alpha^2) \hat{v}_k - \theta_{k-1} (D^2 + \alpha^2) \hat{v}_{k-1} \right] \\ i\alpha ReM_k \left[ (c - U_k)D + DU_k \right] \hat{v}_k - i\alpha ReM_{k-1} \left[ (c - U_{k-1})D + DU_{k-1} \right] \hat{v}_{k-1} - 4\alpha^2 (\eta_k D\hat{v}_k - \eta_{k-1} D\hat{v}_{k-1}) \\ + (D^2 + \alpha^2) \left[ D(\theta_k \hat{v}_k - \theta_{k-1} \hat{v}_{k-1}) + i\alpha \left( \cot \beta + \frac{\alpha^2 Ca_k}{M_k - M_{k-1}} \right) (\theta_k \hat{v}_k - \theta_{k-1} \hat{v}_{k-1}) \right] = 0 \end{cases} \quad \text{en } y = y_{k-1} \quad (2.51)$$

pour  $k = 2..N$ .

Le système d'équations (2.48) à (2.50) dans le cas monocouche ou (2.48) à (2.51) dans le cas de couches superposées constitue un problème aux valeurs propres dont la résolution permet de déterminer la vitesse complexe  $c$  et par conséquent la stabilité du système. Les vecteurs propres obtenus  $\hat{v}_k$  ont des composantes complexes, cependant seules les parties réelles de ces vecteurs propres possèdent une signification physique.

## 2 LE BILAN ENERGETIQUE

Afin de mieux cerner l'importance et le rôle des différents termes du système d'équations (2.48)-(2.51) dans la stabilité des écoulements multicouches, une analyse énergétique est proposée dans cette étude. Parmi les études de stabilité utilisant l'analyse énergétique, on peut citer les travaux de Kelly, *et al.* (1989) et Jiang, *et al.* (2004), concernant des écoulements de films newtoniens à une et deux couches respectivement. Pour d'avantage de simplicité, nous écrivons les équations du mouvement sur les perturbations (2.30)-(2.32) sous la forme vectorielle:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}_k = 0 \\ ReM_k \mathbf{v}_{k,t} + Re\mathbf{U}_k \cdot \nabla \mathbf{v}_k + Re\mathbf{v}_k \cdot \nabla \mathbf{U}_k = -Re\nabla p_k + \nabla \cdot \mathbf{O}_k \end{cases} \text{ pour } k = 1..N \quad (2.52)$$

$$\text{avec } \mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} u_k' \\ v_k' \end{pmatrix}, \mathbf{U}_k = \begin{pmatrix} U_k \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{O}_k = \begin{pmatrix} 2\eta_k \frac{\partial u_k'}{\partial x} & \theta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y} + \frac{\partial v_k'}{\partial x} \right) \\ \theta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y} + \frac{\partial v_k'}{\partial x} \right) & 2\eta_k \frac{\partial v_k'}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

### 2.1 Principe de la méthode

Pour obtenir l'équation sur l'énergie, nous effectuons le produit scalaire de l'équation (2.52) par  $\mathbf{v}_k$  et intégrons les termes obtenus sur un volume de contrôle  $\Omega_k$  de hauteur  $d_k$  (l'épaisseur de la couche  $k$ ), et de longueur  $\lambda=2\pi/\alpha$  correspondant à une longueur d'onde. Puisque notre intérêt ne se porte que sur les perturbations bidimensionnelles (avec un nombre d'onde transversal nul), nous considérons un volume de largeur unité d'où  $\Omega_k = dx dy$ . Nous obtenons ainsi, en utilisant l'équation de continuité, l'équation d'Orr-Reynolds traduisant le bilan énergétique :

$$\begin{aligned} & \underbrace{Re \int_{\Omega_k} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_k \cdot \nabla \right) e_{ck} d\Omega_k}_{\text{[1]}} + \underbrace{Re \int_{\Omega_k} M_k \mathbf{v}_k \cdot (\mathbf{v}_k \cdot \nabla \mathbf{U}_k) d\Omega_k}_{\text{[2]}} \\ & = - \underbrace{Re \int_{S_k} p_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k dS_k}_{\text{[3]}} + \underbrace{\int_{S_k} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{O}_k) \cdot \mathbf{n}_k dS_k}_{\text{[4]}} - \underbrace{\int_{\Omega_k} \mathbf{O}_k \cdot (\nabla \mathbf{v}_k) d\Omega_k}_{\text{[5]}} \end{aligned} \quad (2.53)$$

avec  $e_{ck} = M_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k / 2$  l'énergie cinétique de la perturbation par unité de volume, et  $\mathbf{n}_k$  le vecteur normal unitaire sortant du fluide  $k$  sur l'élément de surface  $dS_k$  enveloppant le volume  $\Omega_k$ . le domaine étant  $\lambda$ -périodique, les flux à travers les surfaces latérales de normales  $\mathbf{x}$  et  $-\mathbf{x}$  s'annulent. Il reste donc les surfaces supérieure et inférieure d'où  $dS_k = 2dx$ .

Les intégrales volumiques ont été transformées en intégrales surfaciques sur le contour  $S_k$  en utilisant la relation d'Ostrogradski. Effectivement, nous avons, pour le dernier terme de l'équation (2.52) :

$$\int_{\Omega_k} \mathbf{v}_k \cdot (\nabla \cdot \mathbf{O}_k) d\Omega_k = \int_{\Omega_k} \nabla \cdot (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{O}_k) d\Omega_k - \int_{\Omega_k} \mathbf{O}_k \cdot (\nabla \mathbf{v}_k) d\Omega_k = \int_{S_k} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{O}_k) \cdot \mathbf{n}_k dS - \int_{\Omega_k} \mathbf{O}_k \cdot (\nabla \mathbf{v}_k) d\Omega_k.$$

Chaque terme de l'équation (2.53) est ensuite développé pour obtenir son expression complète :

$$\begin{aligned}
\boxed{1} &= Re \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_k \cdot \nabla \right) e_{ck} d\Omega_k \\
&= Re \underbrace{\frac{d}{dt} \int_0^{y_1} \int_0^\lambda e_{c1} dx dy}_{cin_1} + Re \sum_{k=2}^N \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^\lambda e_{ck} dx dy}_{cin_k},
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\boxed{2} = Re \underbrace{M_1 \int_0^{y_1} \int_0^\lambda u_1' \cdot v_1' \frac{\partial U_1}{\partial y} dx dy}_{re_1} + Re \sum_{k=2}^N \underbrace{M_k \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^\lambda u_k' \cdot v_k' \frac{\partial U_k}{\partial y} dx dy}_{re_k}, \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{3} &= -Re \int_0^\lambda \left[ p_1' v_1' \Big|_{y=y_1} - p_1' v_1' \Big|_{y=0} \right] dx - Re \sum_{k=2}^N \int_0^\lambda \left[ p_k' v_k' \Big|_{y=y_k} - p_k' v_k' \Big|_{y=y_{k-1}} \right] dx \\
&= Re \int_0^\lambda \left[ p_1' v_1' \Big|_{y=0} \right] dx + Re \sum_{k=2}^N \int_0^\lambda \underbrace{(p_k' - p_{k-1}') v_k' \Big|_{y=y_{k-1}}}_{0} dx - Re \int_0^\lambda \left[ p_N' v_N' \Big|_{y=y_k} \right] dx
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Nous utilisons les conditions aux limites sur les contraintes normales (2.39) et (2.41) aux interfaces pour éliminer la variable de pression  $p_k'$  ; nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
\boxed{3} &= -\underbrace{M_1 \cot \beta \int_0^\lambda \zeta_1' v_1' \Big|_{y=0} dx}_{p_F} + 2 \underbrace{\int_0^\lambda v_1' \eta_1 \frac{\partial v_1'}{\partial y} \Big|_{y=0} dx}_{-n_F} + \underbrace{Ca_1 \int_0^\lambda v_1' \frac{\partial^2 \zeta_1'}{\partial x^2} \Big|_{y=0} dx}_{sw_F} \\
&\quad + \sum_{k=2}^N \underbrace{M_{k-1} \cot \beta \int_0^\lambda \zeta_k' v_k' \Big|_{y=y_{k-1}} dx}_{p_{k-1,k}} + \sum_{k=2}^N \underbrace{\left[ -M_k \cot \beta \int_0^\lambda \zeta_k' v_k' \Big|_{y=y_{k-1}} dx \right]}_{p_{k,k}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k=2}^N \int_0^\lambda (-2) v_{k-1} \eta_{k-1} \frac{\partial v_{k-1}'}{\partial y} \Big|_{y=y_{k-1}} dx}_{n_{k-1}} + \underbrace{\sum_{k=2}^N \int_0^\lambda 2 v_k \eta_k \frac{\partial v_k'}{\partial y} \Big|_{y=y_{k-1}} dx}_{-n_k} + \underbrace{\sum_{k=2}^N Ca_k \int_0^\lambda v_k' \frac{\partial^2 \zeta_k'}{\partial x^2} \Big|_{y=y_{k-1}} dx}_{sw_{T,k}}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{4} &= -\underbrace{\int_0^\lambda u_1' \theta_1 \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y} + \frac{\partial v_1'}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} dx}_{sh_F} - 2 \underbrace{\int_0^\lambda v_1' \eta_1 \frac{\partial v_1'}{\partial y} \Big|_{y=0} dx}_{n_F} \\
&\quad + \sum_{k=2}^N \underbrace{\int_0^\lambda u_{k-1}' \theta_{k-1} \left( \frac{\partial u_{k-1}'}{\partial y} + \frac{\partial v_{k-1}'}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_{k-1}} dx}_{sh_{k-1,k}} + \sum_{k=2}^N \underbrace{\int_0^\lambda 2 v_{k-1}' \eta_{k-1} \frac{\partial v_{k-1}'}{\partial y} \Big|_{y=y_{k-1}} dx}_{-n_{k-1}} \\
&\quad + \sum_{k=2}^N \underbrace{\int_0^\lambda -u_k' \theta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y} + \frac{\partial v_k'}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_{k-1}} dx}_{sh_{k,k}} + \sum_{k=2}^N \underbrace{\int_0^\lambda (-2) v_k' \eta_k \frac{\partial v_k'}{\partial y} \Big|_{y=y_{k-1}} dx}_{n_k} \\
&\quad + \underbrace{\int_0^\lambda u_N' \theta_N \left( \frac{\partial u_N'}{\partial y} + \frac{\partial v_N'}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_N} dx}_{0} + 2 \underbrace{\int_0^\lambda v_N' \eta_N \frac{\partial v_N'}{\partial y} \Big|_{y=y_N} dx}_{0},
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{5} &= -\underbrace{\int_0^{y_1} \int_0^\lambda 2 \eta_1 \left( \frac{\partial u_1'}{\partial x} \right)^2 + 2 \eta_1 \left( \frac{\partial v_1'}{\partial y} \right)^2 + \theta_1 \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y} + \frac{\partial v_1'}{\partial x} \right)^2 dx dy}_{di_1} \\
&\quad - \sum_{k=2}^N \underbrace{\int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^\lambda 2 \eta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial x} \right)^2 + 2 \eta_k \left( \frac{\partial v_k'}{\partial y} \right)^2 + \theta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y} + \frac{\partial v_k'}{\partial x} \right)^2 dx dy}_{-di_k}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Nous obtenons finalement l'équation suivante :

$$Re(cin_1 + re_1) = p_F + sw_F + sh_F + di_1 \text{ lorsque } N = 1, \quad (2.60)$$

$$Re(cin_1 + re_1) + \sum_{k=2}^N (cin_k + re_k) = p_F + sw_F + sh_F + di_1 + \sum_{k=2}^N (p_{k-1,k} + p_{k,k} + sw_{I,k} + sh_{k-1,k} + sh_{k,k} + di_k) \quad (2.61)$$

lorsque  $N > 1$ .

Rappelons l'expression de chacun des termes de cette égalité ci-dessous :

$$cin_1 = \frac{M_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{y_1} \int_0^\lambda (u_1'^2 + v_1'^2) dx dy \quad (2.62)$$

$$cin_k = \frac{M_k}{2} \frac{d}{dt} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^\lambda (u_k'^2 + v_k'^2) dx dy \quad (2.63)$$

$$re_1 = M_1 \int_0^{y_1} \int_0^\lambda u_1' \cdot v_1' \frac{\partial U_1}{\partial y} dx dy \quad (2.64)$$

$$re_k = M_k \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^\lambda u_k' \cdot v_k' \frac{\partial U_k}{\partial y} dx dy \quad (2.65)$$

$$p_F = -M_1 \cot \beta \int_0^\lambda \zeta_1' v_1' \Big|_{y=0} dx \quad (2.66)$$

$$p_{k-1,k} = M_{k-1} \cot \beta \int_0^\lambda \zeta_k' v_k' \Big|_{y=y_{k-1}} dx \quad (2.67)$$

$$p_{k,k} = -M_k \cot \beta \int_0^\lambda \zeta_k' v_k' \Big|_{y=y_{k-1}} dx \quad (2.68)$$

$$sw_{I,k} = Ca_k \int_0^\lambda v_k' \frac{\partial^2 \zeta_k'}{\partial x^2} \Big|_{y=y_{k-1}} dx \quad (2.69)$$

$$sw_F = Ca_1 \int_0^\lambda v_1' \frac{\partial^2 \zeta_1'}{\partial x^2} \Big|_{y=0} dx \quad (2.70)$$

$$sh_{k-1,k} = \int_0^\lambda u_{k-1}' \theta_{k-1} \left( \frac{\partial u_{k-1}'}{\partial y} + \frac{\partial v_{k-1}'}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_{k-1}} dx \quad (2.71)$$

$$sh_{k,k} = -\int_0^\lambda u_k' \theta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y} + \frac{\partial v_k'}{\partial x} \right) \Big|_{y=y_{k-1}} dx \quad (2.72)$$

$$sh_F = -\int_0^\lambda u_1' \theta_1 \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y} + \frac{\partial v_1'}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} dx \quad (2.73)$$

$$di_1 = -\int_0^{y_1} \int_0^\lambda 2\eta_1 \left( \frac{\partial u_1'}{\partial x} \right)^2 + 2\eta_1 \left( \frac{\partial v_1'}{\partial y} \right)^2 + \theta_1 \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y} + \frac{\partial v_1'}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (2.74)$$

$$di_k = -\int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^\lambda 2\eta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial x} \right)^2 + 2\eta_k \left( \frac{\partial v_k'}{\partial y} \right)^2 + \theta_k \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y} + \frac{\partial v_k'}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (2.75)$$

## 2.2 Moyenne sur une période et sur une longueur d'onde

Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus dans différents cas de figures, nous prenons la moyenne de chaque terme sur une période  $T = 2\pi/\omega_R$  et sur une longueur d'onde  $\lambda=2\pi/\alpha$ . Les équations (2.60) et (2.61) deviennent donc :

$$\frac{Re}{\lambda(2\pi/\omega_R)} \int_0^{2\pi/\omega_R} (cin_1 + re_1) dt = \frac{1}{\lambda(2\pi/\omega_R)} \int_0^{2\pi/\omega_R} (p_F + sw_F + sh_F + di_1) dt \quad \text{si } N = 1, \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{Re}{\lambda(2\pi/\omega_k)} \int_0^{2\pi/\omega_k} (cin_1 + re_1) dt + \sum_{k=2}^N \frac{Re}{\lambda(2\pi/\omega_k)} \int_0^{2\pi/\omega_k} (cin_k + re_k) dt &= \frac{1}{\lambda(2\pi/\omega_k)} \int_0^{2\pi/\omega_k} (p_F + sw_F + sh_F + di_1) dt \\ + \sum_{k=2}^N \frac{1}{\lambda(2\pi/\omega_k)} \int_0^{2\pi/\omega_k} (p_{k-1,k} + p_{k,k} + sw_{I,k} + sh_{k-1,k} + sh_{k,k} + di_k) dt & \\ \text{si } N > 1. & \end{aligned} \quad (2.77)$$

Rappelons que seules les parties réelles de la vitesse  $\mathbf{v}_k$  et de la déformation d'interface  $\zeta_k$  ont un sens physique. Seule la partie réelle des perturbations doit donc être introduite dans le calcul de l'énergie cinétique et des autres termes précédemment établis. La méthode utilisée pour ce calcul est donnée en annexe.

On obtient ainsi une nouvelle formulation de l'équation de l'énergie avec l'intégration sur  $x$  déjà effectuée :

$$CIN_1 = -RE_1 + P_F + SW_F + SH_F + DI_1 \quad \text{lorsque } N = 1, \quad (2.78)$$

$$CIN_1 + \sum_{k=2}^N (CIN_k) = -RE_1 + P_F + SW_F + SH_F + DI_1 + \sum_{k=2}^N (-RE_k + P_{k-1,k} + P_{k,k} + SW_{I,k} + SH_{k-1,k} + SH_{k,k} + DI_k) \quad (2.79)$$

lorsque  $N > 1$ ,

avec

$$CIN_1 = \frac{ReM_1\omega_R}{4\pi} \omega_I \int_0^{y_1} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega_I t} (u_1' \cdot u_1'^* + v_1' \cdot v_1'^*) dt dy, \quad (2.80)$$

$$CIN_k = \frac{ReM_k\omega_R}{4\pi} \omega_I \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega_I t} (u_k' \cdot u_k'^* + v_k' \cdot v_k'^*) dt dy, \quad (2.81)$$

$$RE_1 = \frac{ReM_1\omega_R}{8\pi} \int_0^{y_1} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega_I t} (u_1' \cdot v_1'^* + v_1' \cdot u_1'^*) \frac{\partial U_1}{\partial y} dt dy, \quad (2.82)$$

$$RE_k = \frac{ReM_k\omega_R}{8\pi} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega_I t} (u_k' \cdot v_k'^* + v_k' \cdot u_k'^*) \frac{\partial U_k}{\partial y} dt dy, \quad (2.83)$$

$$P_F = -\frac{M_1 \cot \beta \omega_R}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{\omega_I t} (\zeta_1' \cdot v_1'^*(0) + v_1'(0) \cdot \zeta_1'^*) dt, \quad (2.84)$$

$$P_{k-1,k} = \frac{M_{k-1} \cot \beta \omega_R}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{\omega_I t} (\zeta_k' \cdot v_{k-1}'^*(y_{k-1}) + v_{k-1}'(y_{k-1}) \cdot \zeta_k'^*) dt, \quad (2.85)$$

$$P_{k,k} = -\frac{M_k \cot \beta \omega_R}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{\omega_I t} (\zeta_k' \cdot v_k'^*(y_{k-1}) + v_k'(y_{k-1}) \cdot \zeta_k'^*) dt, \quad (2.86)$$

or comme  $v_{k-1}'(y_{k-1}) = v_k'(y_{k-1})$ , on a  $P_{k,k} = -\frac{M_k}{M_{k-1}} P_{k-1,k}$ ,

$$SW_F = -\frac{\alpha^2 Ca_1 \omega_R}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{\omega t} \left( \zeta_1' \cdot v_1'^* (0) + v_1'(0) \cdot \zeta_1'^* \right) dt \quad (2.87)$$

$$SW_{I,k} = -\frac{\alpha^2 Ca_k \omega_R}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{\omega t} \left( \zeta_k' \cdot v_k'^* (y_{k-1}) + v_k'(y_{k-1}) \cdot \zeta_k'^* \right) dt \quad (2.88)$$

$$SH_{k-1,k} = \frac{\omega_R \theta_{k-1}(y_{k-1})}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( \frac{\partial u_{k-1}'}{\partial y}(y_{k-1}) \cdot u_{k-1}''^*(y_{k-1}) + u_{k-1}'(y_{k-1}) \cdot \frac{\partial u_{k-1}''^*}{\partial y}(y_{k-1}) \right) dt \\ + \frac{\alpha \omega_R \theta_{k-1}(y_{k-1})}{8i\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( u_{k-1}'(y_{k-1}) \cdot v_{k-1}''^*(y_{k-1}) - v_{k-1}'(y_{k-1}) \cdot u_{k-1}''^*(y_{k-1}) \right) dt, \quad (2.89)$$

$$SH_{k,k} = -\frac{\omega_R \theta_k(y_{k-1})}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y}(y_{k-1}) \cdot u_k''^*(y_{k-1}) + u_k'(y_{k-1}) \cdot \frac{\partial u_k''^*}{\partial y}(y_{k-1}) \right) dt \\ - \frac{\omega_R \alpha \theta_k(y_{k-1})}{8i\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( u_k'(y_{k-1}) \cdot v_k''^*(y_{k-1}) - v_k'(y_{k-1}) \cdot u_k''^*(y_{k-1}) \right) dt, \quad (2.90)$$

$$SH_F = -\frac{\omega_R \theta_1(0)}{8\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y}(0) \cdot u_1''^*(0) + u_1'(0) \cdot \frac{\partial u_1''^*}{\partial y}(0) \right) dt \\ - \frac{\alpha \omega_R \theta_1(0)}{8i\pi} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( u_1'(0) \cdot v_1''^*(0) - v_1'(0) \cdot u_1''^*(0) \right) dt, \quad (2.91)$$

$$DI_1 = -\frac{\omega_R}{2\pi} \int_0^{y_1} \int_0^{2\pi/\omega_R} \eta_1 e^{2\omega t} \left( \alpha^2 (u_1' \cdot u_1''^*) + \frac{\partial v_1'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_1''^*}{\partial y} \right) dt dy \\ - \frac{\omega_R}{4\pi} \int_0^{y_1} \int_0^{2\pi/\omega_R} \theta_1 e^{2\omega t} \left[ \frac{\partial u_1'}{\partial y} \frac{\partial u_1''^*}{\partial y} + \alpha^2 (v_1' \cdot v_1''^*) + \frac{\alpha}{i} \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y} \cdot v_1''^* - v_1' \cdot \frac{\partial u_1''^*}{\partial y} \right) \right] dt dy, \quad (2.92)$$

et

$$DI_k = -\frac{\omega_R}{2\pi} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^{2\pi/\omega_R} \eta_k e^{2\omega t} \left( \alpha^2 (u_k' \cdot u_k''^*) + \frac{\partial v_k'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_k''^*}{\partial y} \right) dt dy \\ - \frac{\omega_R}{4\pi} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \int_0^{2\pi/\omega_R} \theta_k e^{2\omega t} \left[ \frac{\partial u_k'}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_k''^*}{\partial y} + \alpha^2 (v_k' \cdot v_k''^*) + \frac{\alpha}{i} \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y} \cdot v_k''^* - v_k' \cdot \frac{\partial u_k''^*}{\partial y} \right) \right] dt dy. \quad (2.93)$$

### 2.3 Interprétation physique des termes

Chacun des termes des Eq. (2.78) et (2.79) obtenus a une interprétation physique et joue un rôle spécifique dans le bilan énergétique. Ainsi :

- ✓ Les termes  $CIN_k$  représentent les taux de variation temporelle de l'énergie cinétique de perturbation du fluide dans la couche  $k$ . Ils représentent également la part d'énergie de perturbation induite par les effets d'inertie. Ils sont proportionnels au taux de croissance de la perturbation  $\omega_r$ . Ainsi leur somme -l'énergie cinétique totale- augmente ou diminue avec le temps selon que l'écoulement est instable ( $\omega_r > 0$ ) ou stable ( $\omega_r < 0$ ) respectivement.
- ✓  $P_F$  est la puissance des forces de pression sur la surface libre, alors que  $P_{k,m}$  désigne la puissance des forces de pression exercés par le fluide de la couche  $k$  sur l'interface  $m$  (ainsi  $P_{k,k}$  correspond à la surface supérieure de la couche  $k$  et  $P_{k-1,k}$  à la surface inférieure de la couche  $(k-1)$ ).

- ✓ La puissance des forces de tension de surface, respectivement à la surface libre et aux interfaces entre les couches  $(k-1)$  et  $k$  est représentée par les termes  $SW_F$  et  $SW_{I,k}$ .
- ✓  $-RE_k$  sont les termes de transfert d'énergie du champ de base aux perturbations *via* les contraintes de Reynolds<sup>1</sup> dans la couche  $k$ .
- ✓  $SH_{k-1,k}$  est le terme résultant des efforts de cisaillement visqueux du fluide de la couche  $(k-1)$  avec le fluide de la couche  $k$  au niveau de l'interface  $k$ , et  $SH_{k,k}$  celui du fluide de la couche  $k$  avec le fluide de la couche  $(k-1)$  au niveau de la même interface.  $SH_F$  correspond au travail de la contrainte de cisaillement visqueux du fluide 1 de la couche supérieure au niveau de la surface libre nécessaire pour préserver une contrainte tangentielle nulle au niveau de celle-ci.
- ✓ Enfin des termes  $DI_k$  représentent le taux de dissipation d'énergie mécanique par la viscosité dans la couche  $k$ . Ces derniers termes sont toujours négatifs.

Les travaux de Chen (1993), Loewenherz et Lawrence (1989) et Jiang, *et al.* (2004) considèrent des tensions de surface et d'interface négligeables ( $SW_F = SW_{I,k} = 0$ ). De plus ils ne considèrent pas le cas où la masse volumique entre les couches varie de sorte que la somme des termes  $P_{k-1,k}$  et  $P_{k,k}$  s'annule au niveau de l'interface  $k$ . Ces hypothèses sont adoptées en vue de faire apparaître uniquement l'effet de la stratification en viscosité. Dans notre étude, nous choisissons de considérer le cas de masses volumiques différentes dans les couches afin d'étudier également l'influence de la stratification en densité ; le terme  $(P_{k-1,k} + P_{k,k})$  peut donc ne pas être nul. Nous souhaitons également étudier les effets de la tension de surface. De ce fait les termes  $SW_F$  et  $SW_{I,k}$  ne seront pas nuls et seront par conséquent considérés dans le bilan d'énergie.

La validation de l'approche énergétique et du calcul des différents termes a été réalisée en comparant nos résultats obtenus dans le cas de deux couches de fluides newtoniens à ceux Jiang, *et al.* (2004) correspondant à la même configuration. Nous présenterons cette validation en annexes.

---

<sup>1</sup> on parle de contrainte de Reynolds pour désigner les termes en  $u_k'v_k'$  par analogie avec la décomposition de Reynolds utilisée dans le cadre de la modélisation de la turbulence.





# CHAPITRE 3 :

## RÉSULTATS DU PROBLÈME

### A UNE SEULE COUCHE

L'objectif dans cette partie est d'étudier la stabilité d'un film constitué d'un fluide purement visqueux rhéofluidifiant. La loi constitutive choisie est celle du modèle de Carreau à quatre paramètres. La première partie du chapitre est consacrée à la présentation d'une méthode asymptotique aux grandes longueurs d'onde nous permettant de déterminer analytiquement les seuils de stabilité pour le problème à une couche faiblement rhéofluidifiant. Nous analysons l'effet des paramètres du modèle de Carreau sur le champ de base, en particulier sur l'épaisseur du film et sur la vitesse de l'écoulement à la surface libre. Puis dans la seconde partie, nous étudions la stabilité du film de fluide de Carreau, et nous comparons les résultats obtenus à ceux d'un fluide newtonien.

## 1 L'APPROCHE ASYMPTOTIQUE:

Dans le cas des grandes longueurs d'ondes par rapport à l'épaisseur de la couche (nombre d'onde longitudinal  $\alpha$  tendant vers zéro), nous développons en séries de  $\alpha$  la perturbation de vitesse  $\hat{v}$  et la vitesse complexe  $c$ :

$$\hat{v} = \hat{v}_0 + \alpha \hat{v}_1 + O(\alpha^2), \quad (3.1)$$

$$c = c_0 + \alpha c_1 + O(\alpha^2). \quad (3.2)$$

Nous supposons par ailleurs que le fluide est faiblement rhéofluidifiant, c'est à dire que le paramètre  $L$  tend vers zéro, de façon à pouvoir utiliser les expressions du champ de base  $U$  et de l'épaisseur de la couche  $d$  obtenues par Weinstein (1990) dans les mêmes conditions :

$$U = \frac{1}{2}(3^{2/3} - y^2) + \frac{1}{40}(I-1)(n-1)(3^{4/3} - 5y^4)L^2 + O(L^4), \quad (3.3)$$

$$d = 3^{1/3} - \frac{3}{10}(I-1)(n-1)L^2 + O(L^4). \quad (3.4)$$

### 1.1 Ordre zéro en $\alpha$

En introduisant les expressions (3.1) et (3.2) dans l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée, nous obtenons pour les termes d'ordre zéro:

$$\theta D^4 \hat{v}_0 + 2D\theta D^3 \hat{v}_0 + D^2 \theta D^2 \hat{v}_0 = 0. \quad (3.5)$$

Cette équation est associée aux conditions aux limites de non glissement à la paroi :

$$\begin{cases} D\hat{v}_0 = 0 \\ \hat{v}_0 = 0 \end{cases} \text{ en } y = d, \quad (3.6)$$

et à l'équilibre des contraintes normales à l'interface :

$$D^3 \hat{v}_0 = 0 \text{ en } y = 0. \quad (3.7)$$

La normalisation de la vitesse de perturbation au niveau de la surface libre ( $y = 0$ ) s'écrit :  $\hat{v}_0 = 1$ . Dans ces conditions, la solution à l'ordre zéro en  $\alpha$  est:

$$\hat{v}_0 = \left(1 - \frac{2}{3^{1/3}} y + \frac{1}{3^{2/3}} y^2\right) + \left(\frac{3^{2/3}}{60} (I-1)(n-1) y (-33y + 3^{1/3} (18 + 5y^3))\right) L^2 + O(L^4). \quad (3.8)$$

La condition cinématique à l'interface s'écrit :

$$\hat{v}_0 + (U - c_0) D^2 \hat{v}_0 = 0 \text{ en } y = 0. \quad (3.9)$$

et la valeur propre du système  $c_0$  est déterminée par:

$$c_0 = 3^{2/3} + \frac{9}{10} 3^{1/3} (I-1)(n-1) L^2 + O(L^4). \quad (3.10)$$

### 1.2 Premier ordre en $\alpha$

Une équation au premier ordre en  $\alpha$  est obtenue en considérant uniquement les termes d'ordre 0 et 1 de l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée:

$$\theta D^4 \hat{v}_1 + 2D\theta D^3 \hat{v}_1 + D^2 \theta D^2 \hat{v}_1 = iRe \left[ (U - c_0) D^2 \hat{v}_0 - \hat{v}_0 D^2 U \right]. \quad (3.11)$$

Les conditions aux limites sont dans ce cas:

$$\begin{cases} D\hat{v}_1 = 0 \\ \hat{v}_1 = 0 \end{cases} \text{ en } y = d, \quad (3.12)$$

$$D^3 \hat{v}_1 + i \left[ Re \left( (c_0 - U) D\hat{v}_0 + \hat{v}_0 D U \right) + \cot \beta D^2 \hat{v}_0 \right] = 0 \text{ en } y = 0, \quad (3.13)$$

$$\hat{v}_1 = 0 \text{ en } y = 0. \quad (3.14)$$

Le vecteur propre  $\hat{v}_1$  du premier ordre est:

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 = & (-iy/180) \left( Re(-63 + 48 \cdot 3^{2/3} y - 30 \cdot 3^{1/3} y^2 + 3^{2/3} y^4) + 20 \cot \beta (3 - 2 \cdot 3^{2/3} y + 3^{1/3} y^2) \right) + \\ & (-iy/25200) (I-1)(n-1) \left[ Re(-5679 \cdot 3^{2/3} + 10368 \cdot 3^{1/3} y - 5040 y^2 + 1680 \cdot 3^{2/3} y^3 - \right. \\ & 1953 \cdot 3^{1/3} y^4 + 130 \cdot 3^{2/3} y^6) - 140 \cot \beta (24 \cdot 3^{2/3} - 60 \cdot 3^{1/3} y + 33 y^2 + 10 \cdot 3^{2/3} y^3 - \\ & \left. 9 \cdot 3^{1/3} y^4) \right] L^2 + O(L^4), \end{aligned} \quad (3.15)$$

et la condition cinématique à la surface libre :

$$\hat{v}_1 + (U - c_0) D^2 \hat{v}_1 - c_1 D^2 \hat{v}_0 = 0 \quad \text{en } y = 0. \quad (3.16)$$

L'expression de la valeur propre de premier ordre en  $\alpha$  s'écrit:

$$c_1 = \frac{i}{5} (6Re - 5 \cot \beta) + \frac{3^{5/3}}{175} i (I-1)(n-1) (-35 \cot \beta + 113Re) L^2 + O(L^4). \quad (3.17)$$

Et en posant  $c_l = \text{Im}(c) = \alpha c_l$  égal à zéro, de façon à avoir la limite de stabilité marginale avec un taux de croissance nul, on obtient le nombre de Reynolds critique pour le déclenchement d'instabilités :

$$\boxed{Re_{cr} = \frac{5}{6} \cot \beta - \frac{71}{28 \cdot 3^{1/3}} (I-1)(n-1) \cot \beta L^2 + O(L^4)}. \quad (3.18)$$

Dans le cas d'un fluide newtonien ( $L = 0$  et/ou  $n = 1$ ), la vitesse de phase des ondes  $c_R$  et le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  donnés respectivement par les expressions (3.10) et (3.18) sont en total accord avec les résultats de Benjamin (1957) et Yih (1963). Ces auteurs ont montré que la vitesse de phase dans le cas d'un fluide newtonien est le double par rapport à la vitesse de la surface libre. L'équation (3.18) montre que dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant ( $0 < I < 1$  et  $0 < n < 1$ ), le nombre de Reynolds critique est plus bas que dans le cas d'un fluide newtonien, bien qu'il reste fonction de l'angle d'inclinaison (proportionnel à  $\cot \beta$ ). Par ailleurs, la valeur de la vitesse de phase des ondes  $c_R = \Re(c) = c_0$  est plus importante que dans le cas newtonien et son accroissement en fonction du paramètre  $L$  est plus rapide que celui de la vitesse de la surface libre  $U(0)$ . Le rapport  $c_0/U(0)$  est donc d'autant plus élevé que le fluide est rhéofluidifiant.

## 2 ETUDE DU CHAMP DE BASE

Nous proposons dans ce paragraphe une approche en ordres de grandeur du problème dimensionnel. Nous écrivons pour cela l'équilibre statique sur un volume de contrôle de film de longueur  $\Delta x$  et de largeur  $l$  représenté en pointillés sur la Fig. 16. L'équilibre de la contrainte de cisaillement au fond avec le poids de ce tronçon projeté sur l'axe  $x$  s'écrit :

$$\rho g \sin \beta d l \Delta x = \left. \eta \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=d} l \Delta x. \quad (3.19)$$

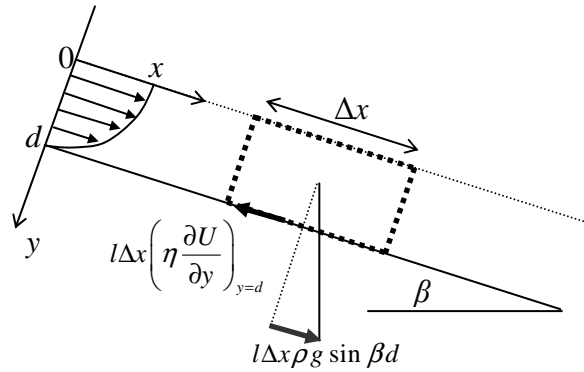


Fig. 16. Volume de contrôle pour l'écriture de l'équilibre statique.

En ordre de grandeur, pour un débit  $Q$  donné,  $U \sim Q/d$  et  $\partial U/\partial y \sim Q/d^2$ . Finalement par substitution on obtient un ordre de grandeur de l'épaisseur du film et de la vitesse de la surface libre :

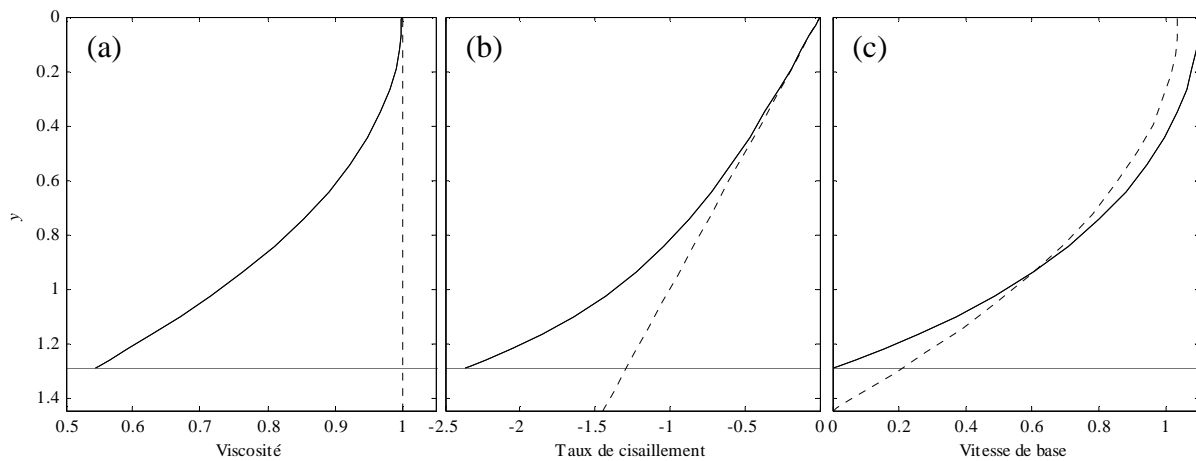
$$d \sim \left( \frac{\eta|_{y=d} Q}{\rho g \sin \beta} \right)^{1/3}, \quad (3.20)$$

$$U \sim \left( \frac{Q^2 \rho g \sin \beta}{\eta|_{y=d}} \right)^{1/3}. \quad (3.21)$$

Nous obtenons ainsi l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche et de la vitesse caractéristique de l'écoulement. Rappelons que l'expression (3.20) a été retenue comme longueur caractéristique pour l'adimensionnement des équations en prenant comme référence la viscosité newtonienne. Par ailleurs, la rhéofluidification entraîne une diminution de la viscosité du fluide, d'où une diminution de l'épaisseur de la couche fluide et une augmentation de la vitesse caractéristique.

### 2.1 Forme du profil - Influence de la rhéologie

Nous présentons sur les Fig. 17 la viscosité  $\eta$ , le taux de cisaillement  $\partial U/\partial y$  et la vitesse  $U$  en fonction de la profondeur  $y$  pour l'écoulement d'un fluide newtonien ( $L = 0$  ou  $n = 1$ ) et d'un fluide rhéofluidifiant ( $L = 0.8$  et  $n = 0.2$ ) sur un plan incliné d'un angle  $\beta$ . La longueur caractéristique  $d_s$  est la même pour les deux fluides. Un examen rapide des figures montre que l'épaisseur du film est plus faible dans le cas rhéofluidifiant que dans le cas newtonien. En effet, nous obtenons  $d = 1.289$  pour le fluide de Carreau et  $d \approx 1.4422$  pour le fluide newtonien. La vitesse maximale  $U_{\max}$  est atteinte à la surface libre. Elle est plus forte dans le cas rhéofluidifiant ( $U_{\max} = 1.098$ ) que dans le cas newtonien ( $U_{\max} = 1.037$ ).



**Fig. 17. Comparaison des champs de base entre le cas newtonien et le cas rhéofluidifiant.**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$  pour  $\beta = 0.2$  rad,  $I = 10^{-3}$ ,  $Ca = 0$  dans le cas d'un fluide:

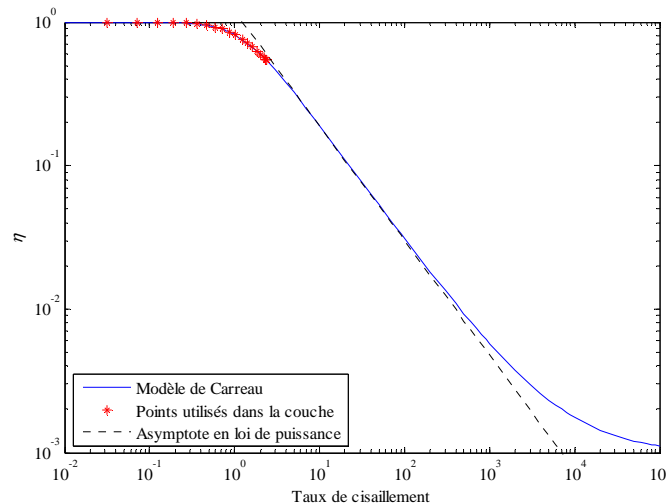
- newtonien ( $L = 0$  et  $n = 1$ ),
- rhéofluidifiant ( $L = 0.8$ ,  $n = 0.2$ ).

Nous constatons sur la Fig. 17 (a) que dans le cas du fluide rhéofluidifiant la viscosité est égale à la viscosité newtonienne au niveau de la surface libre, car à cet endroit le cisaillement est nul ; on retrouve donc  $\eta = 1$ . Contrairement au cas newtonien où la viscosité est constante, dans le cas rhéofluidifiant, la viscosité diminue sous l'effet du cisaillement tout au long de l'épaisseur de la couche jusqu'à atteindre la valeur  $\eta(d) = 0.54$ .

Les taux de cisaillement représentés sur la Fig. 17 (b) ont une évolution linéaire avec la profondeur quand le fluide est newtonien. Ce n'est pas le cas quand le fluide est rhéofluidifiant, bien que la contrainte de cisaillement reste linéaire. Puisque la viscosité au fond est presque divisée par deux pour le fluide rhéofluidifiant, les taux de cisaillement sont, en valeur absolue, quasiment doublés (2.37 par rapport à 1.44 pour le fluide newtonien).

La Fig. 17 (c) donne le champ de vitesse de base dans les deux cas. Pour le cas newtonien nous avons une évolution parabolique (car les taux de cisaillement varient linéairement). Par contre, dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant, comme le débit est le même mais la couche est plus fine, on observe une accélération du champ de base.

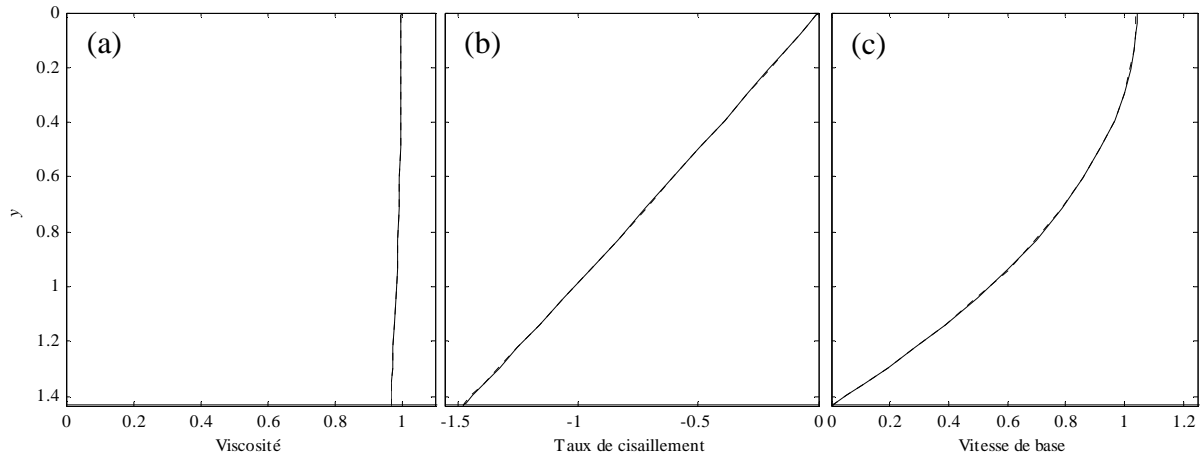
Notons que les modifications apportées sur le champ de base par la rhéologie du fluide sont significatives même si les valeurs du taux de cisaillement restent relativement faibles, comme le montre la Fig. 18. En effet la plage des valeurs de taux de cisaillement correspondant au cas étudié n'atteint pas la région strictement en loi de puissance et conduit à une viscosité qui s'éloigne relativement peu du plateau newtonien.



**Fig. 18 Viscosité en fonction du taux de cisaillement dans le cas de la Fig. 17.**

$\beta = 0.2$  rad,  $L = 0.8$ ,  $n = 0.2$ , et  $I = 10^{-3}$ .

La Fig. 19 compare le champ de base calculé par l'approche asymptotique (en traits pleins) à celui obtenu numériquement (traits pointillés) pour un fluide faiblement rhéofluidifiant ( $L = 0.2$ ,  $n = 0.2$ ). On observe ainsi que les profils obtenus par l'approche asymptotique sont très proches de ceux de l'approche numérique, avec une erreur inférieure à 1%. Ceci montre la validité de l'approche asymptotique pouvant fournir une bonne estimation des profils de base dans la couche tant que le paramètre  $L$  reste faible (fluide faiblement rhéofluidifiant).

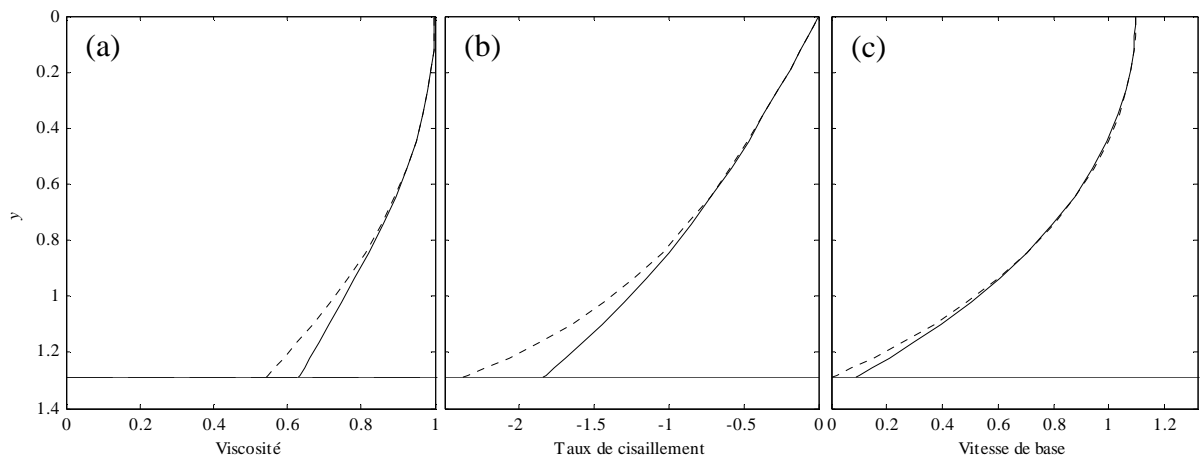


**Fig. 19. Comparaison des champs de base entre le l'approche numérique et l'approche asymptotique.**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$  pour  $\beta = 0.2$  rad,  $I = 10^{-3}$ ,  $Ca = 0$  dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant ( $L = 0.2$ ,  $n = 0.2$ ) obtenus par l'approche :

- numérique,
- asymptotique.

Les grandeurs du champ de base sont portées sur Fig. 20 pour un fluide rhéofluidifiant ( $L = 0.8$  et  $n = 0.2$ ). Dans un cas le fluide n'est pas quasi-newtonien et n'entre donc pas dans les hypothèses de l'approche asymptotique. D'après ces figures, on peut noter que les résultats de l'approche asymptotique restent valables pour ce qui concerne l'épaisseur et la vitesse de la surface libre, avec une erreur toujours inférieure à 1%. Par contre les profils obtenus à proximité du fond (frontière rigide) s'écartent de ceux de la solution numérique. Pour les fluides rhéofluidifiants, la résolution numérique des équations du champ de base devient nécessaire.



**Fig. 20. Comparaison des champs de base entre le l'approche numérique et l'approche asymptotique.**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$  pour  $\beta = 0.2$  rad,  $I = 10^{-3}$ ,  $Ca = 0$  dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant ( $L = 0.8$ ,  $n = 0.2$ ) obtenus par l'approche :

- numérique,
- asymptotique.

## 2.2 Epaisseur et vitesse de la surface libre

La vitesse à la surface libre et l'épaisseur de la couche sont deux grandeurs caractéristiques du champ de base et de son évolution en fonction des paramètres rhéologiques du fluide. Nous rappelons ici les expressions que nous avons utilisées dans l'approche asymptotique basée sur l'approximation aux grandes longueurs d'ondes pour  $L \rightarrow 0$ :

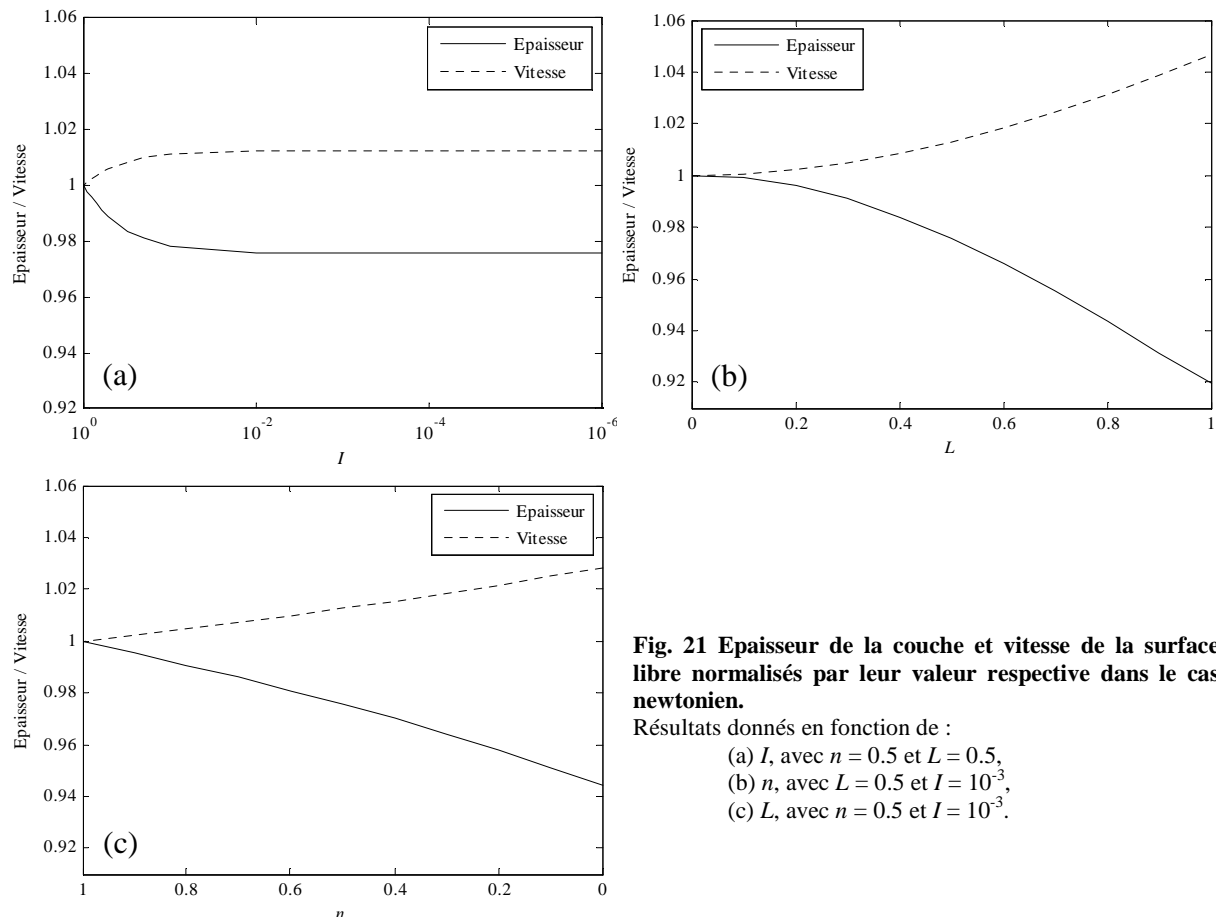
$$U = \frac{1}{2}(3^{2/3} - y^2) + \frac{1}{40}(I-1)(n-1)(3^{4/3} - 5y^4)L^2 + O(L^4) \quad (3.22)$$

$$d = 3^{1/3} - \frac{3}{10}(I-1)(n-1)L^2 + O(L^4) \quad (3.23)$$

Nous avons ainsi présenté, sur la Fig. 21, l'évolution de ces grandeurs en fonction de chacun des 3 paramètres de la loi de Carreau :  $I$ ,  $L$  et  $n$ . Chacune de ces grandeurs est normalisée par sa valeur dans le cas newtonien obtenue analytiquement, soit :

$$d_{newt.} = 3^{1/3} \approx 1.44 \text{ et } U(0)_{newt.} \approx 1.04.$$

Ces conditions newtoniennes sont portées dans chaque cas au niveau de l'origine de l'axe des abscisses (soit  $I = 1$ ,  $L = 0$  et  $n = 1$ ).



**Fig. 21 Epaisseur de la couche et vitesse de la surface libre normalisés par leur valeur respective dans le cas newtonien.**

Résultats donnés en fonction de :

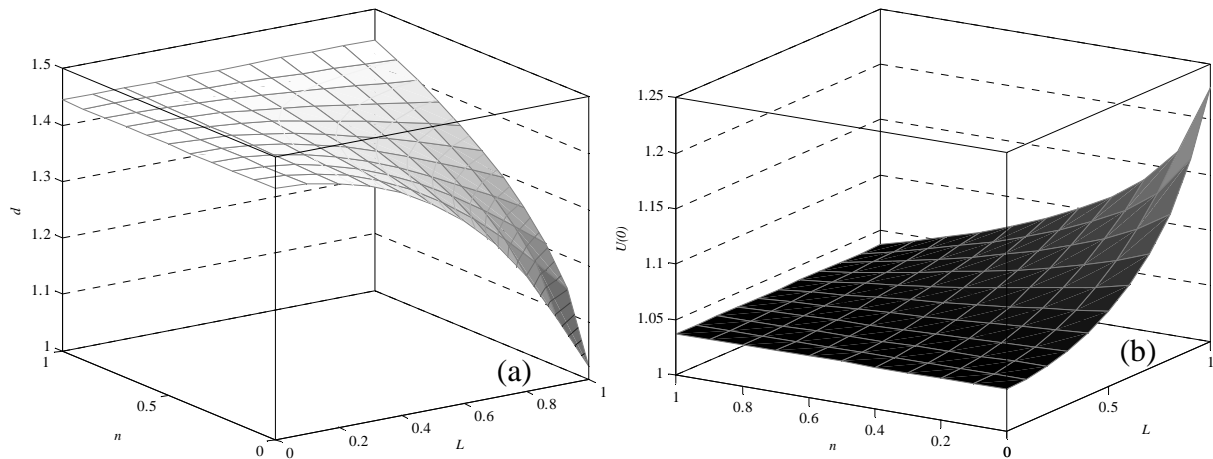
- (a)  $I$ , avec  $n = 0.5$  et  $L = 0.5$ ,
- (b)  $n$ , avec  $L = 0.5$  et  $I = 10^{-3}$ ,
- (c)  $L$ , avec  $n = 0.5$  et  $I = 10^{-3}$ .

On observe sur la Fig. 21 (a) que le paramètre  $I$ , qui représente la position relative des deux plateaux de viscosités newtoniennes  $\eta_0$  et  $\eta_\infty$ , a peu d'influence sur le champ de base en dessous d'une certaine valeur de l'ordre de  $10^{-2}$ . Dans cette étude, et particulièrement pour les écoulements à surface libre (avec une contrainte imposée nulle au niveau de cette dernière), les taux de cisaillement restent modérés et les viscosités s'éloignent peu de la valeur  $\eta_0$ . Nous choisissons pour tout le reste de ce travail de se placer dans les conditions  $I < 10^{-1}$ , car, à partir de cette valeur, les variations des grandeurs



caractéristiques de l'écoulement sont minimales. Les deux autres paramètres ont par contre des effets non négligeables tout le long de leur intervalle de variation, ainsi que nous pouvons le constater sur les Fig. 21 (b) et (c). D'une manière générale, l'épaisseur de la couche est plus influencée que la vitesse de l'interface. De plus le paramètre  $n$  a une influence quasi linéaire sur ces deux grandeurs alors que la variation de  $L$  conduit à une évolution parabolique, en accord avec les expressions (3.22) et (3.23).

Les effets conjugués des deux paramètres rhéologiques  $L$  et  $n$  sur lesquels nous avons fixé notre attention sont portés sur la Fig. 22. On observe que les deux effets s'ajoutent et produisent des variations significatives quand on s'éloigne du cas newtonien.



**Fig. 22** Epaisseur (a) et vitesse de la surface libre (b) en fonction des deux paramètres de la loi de Carreau  $L$  et  $n$  avec  $I = 10^{-3}$ .

### 3 EFFET DES PROPRIETES RHEOFLUIDIFIANTES DU FLUIDE SUR LA STABILITE DU FILM

Nous étudions dans ce paragraphe la stabilité de l'écoulement d'une couche de fluide de Carreau pour différentes valeurs des paramètres rhéologiques  $L$  et  $n$  ainsi que pour différents angles  $\beta$  du plan incliné.

Nous avons montré à travers l'étude bibliographique que deux types d'instabilités peuvent se manifester dans de tels écoulements : des instabilités de surface et des instabilités de cisaillement. Un moyen d'identifier chacune de ces instabilités est de comparer la vitesse de phase  $c_R$  avec la vitesse de la surface libre  $U(0)$ . L'instabilité est identifiée en tant que mode de surface si  $c_R > U(0)$  et en tant que mode de cisaillement dans le cas contraire. Sachant que les modes de surface donnent naissance à des instabilités de grande longueur d'onde, alors que les modes de cisaillement se développent avec des longueurs d'ondes beaucoup plus courtes, on peut avoir une idée sur la nature de l'instabilité à partir de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

#### 3.1 Précision et convergence des calculs

Le cas des petits angles d'inclinaison ( $\beta < 0.5^\circ$ ) est choisi pour vérifier la précision des calculs. Comme l'a déjà montré Floryan, *et al.* (1987) le nombre de Reynolds critique pour le déclenchement d'instabilités est très sensible à la précision des calculs dans cette gamme d'angles d'inclinaison  $\beta$ . On a reporté dans le Tableau 1 le nombre de Reynolds critique que nous avons obtenu en fonction du nombre de modes  $N$ . On remarque que pour  $N > 40$  les résultats numériques ne varient plus de manière significative et on peut donc considérer que ce nombre de modes est suffisant pour obtenir des résultats avec une bonne précision.

Nombre de modes $N$	20	30	40	50	60	90	120	150
$Re_{cr}$	3337.5	3340.5	3342	3342.9	3343.5	3344.5	3345	3345.3
<b>Variation</b> (par rapport au cas $N = 150$ )	0.5%	0.2%	0.1%	0.08%	0.05%	0.03%	0.01%	0%

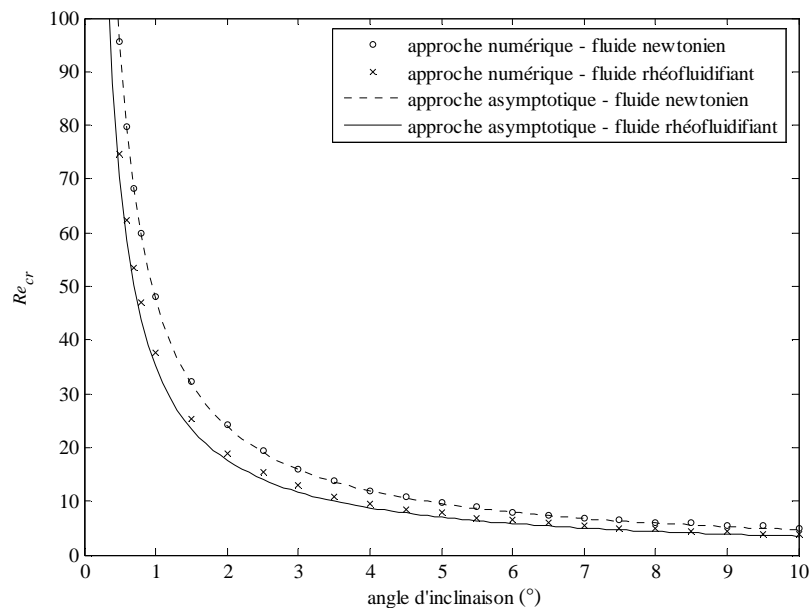
Tableau 1. Nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de modes  $N$  pour  $\beta = 1'$ ,  $I = 10^{-3}$ ,  $n = 0.5$  et  $L = 0.5$ .

#### 3.2 Effet de l'angle d'inclinaison sur le seuil de déclenchement des instabilités

Le cas d'un fluide newtonien peut être obtenu à partir d'un fluide rhéofluidifiant pour  $L = 0$  ou  $n = 1$ . Le cas newtonien est celui dont nous disposons de plus de résultats dans la littérature. Ce sont les résultats de Yih (1963) et Floryan, *et al.* (1987) qui nous serviront de référence.

Les courbes portées sur la Fig. 25 donnent l'évolution du nombre de Reynolds critique en fonction de l'angle d'inclinaison. On peut constater d'après la figure que les résultats des deux approches numériques et asymptotiques sont en bon accord. Par ailleurs, nous avons vu précédemment dans le cas newtonien que les résultats de l'approche asymptotique correspondaient parfaitement à ceux de Yih (1963) pour ce qui concerne l'influence de l'angle sur l'évolution du nombre de Reynolds critique  $Re_{cr}$ . Cette évolution est donnée par :

$$Re_{cr} = \frac{5}{6} \cot \beta \quad (3.24)$$



**Fig. 23. Seuils de stabilité selon l'angle d'inclinaison.**

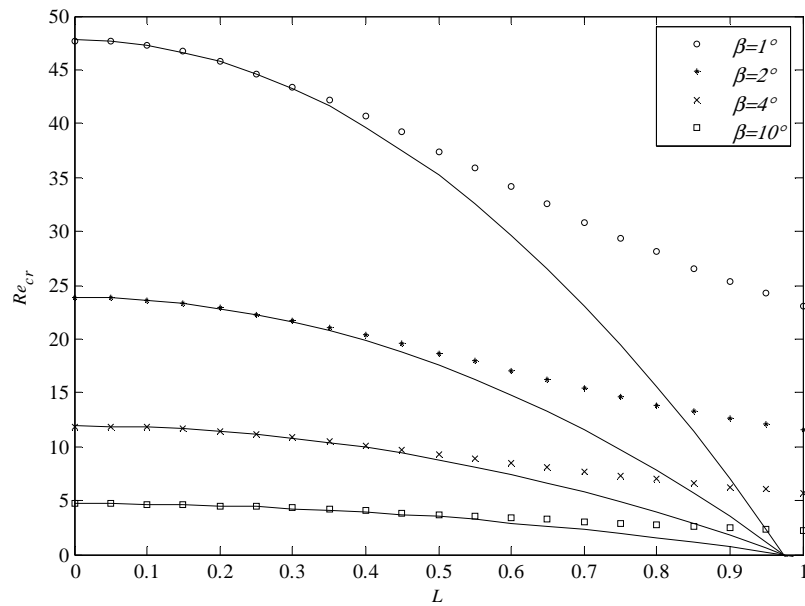
Nombre de Reynolds critique en fonction de l'angle d'inclinaison  $\beta$  en degrés avec  $I = 10^{-3}$ ,  $Ca = 0$ ,  $n = 0.5$  et  $L = 0$  dans le cas d'un fluide newtonien ou  $L = 0.5$  dans le cas d'un fluide de Carreau.

Pour le cas d'un fluide rhéofluidifiant, nous ne disposons pas d'étude antérieure sur laquelle on peut s'appuyer quantitativement. Nous nous contentons de l'analyse des comportements de la courbe lorsque  $L \rightarrow 0$  ou  $n \rightarrow 1$ . Notons que dans le cas des fluides newtoniens et pour des angles d'inclinaison au delà de  $\beta = 0.5'$ , les instabilités qui se développent sont des modes de surface à grandes longueurs d'onde (Floryan, *et al.* (1987)). Pour pouvoir utiliser à la fois les deux approches dans le cas d'un fluide non newtonien, nous avons choisi des paramètres du fluide de Carreau à la limite du domaine de validité de l'approche asymptotique.

### 3.3 Effet des paramètres rhéologiques $L$ et $n$

Les effets des propriétés rhéofluidifiantes sur la stabilité d'un film s'écoulant sur un plan incliné d'un angle  $\beta$  sont examinées dans cette partie en considérant l'influence des paramètres  $L$  et  $n$  qui interviennent dans l'expression de la loi de Carreau adimensionnée. La Fig. 24 donne l'évolution du nombre de Reynolds critique en fonction du paramètre  $L$  pour quatre angles d'inclinaison.

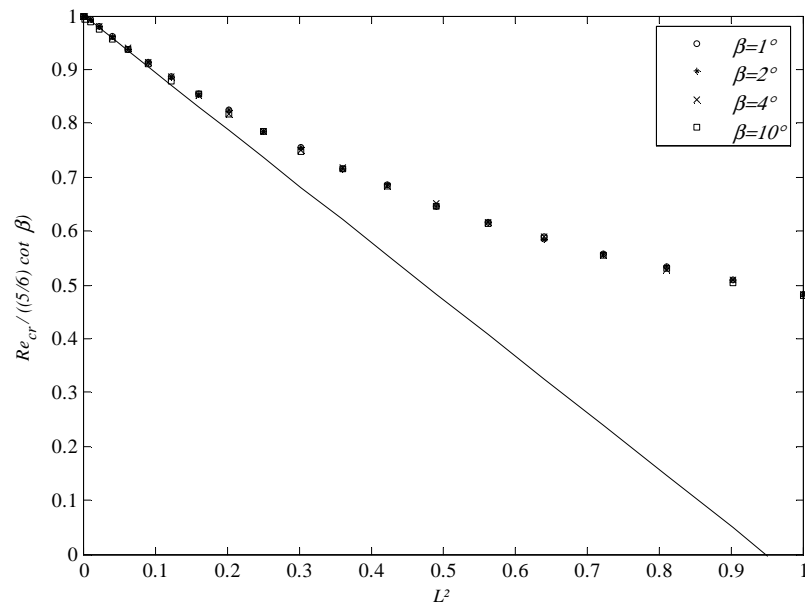
Les lignes pleines correspondent aux résultats de la méthode asymptotique et les points à ceux de l'approche numérique. D'après la figure, on peut remarquer que nous avons pour les faibles valeurs du paramètre  $L$  et les petits angles un bon accord entre les deux approches. La bonne correspondance entre les deux résultats s'étend vers de plus grandes valeurs de  $L$  lorsque  $\beta$  augmente. Rappelons que l'augmentation de la valeur du paramètre  $L$  se traduit par l'augmentation de la non linéarité des contraintes tangentielles par rapport aux gradients de vitesse de l'écoulement. Pour la gamme de valeurs de  $\beta$  étudiée, nous notons également qu'une augmentation de la valeur du paramètre  $L$  se traduit par une diminution de la valeur de  $Re_{cr}$  et donc par une déstabilisation de l'écoulement. Cette tendance est d'autant plus marquée que l'inclinaison  $\beta$  est faible. Ces résultats sont en accord avec ceux de l'approche asymptotique qui prédit un nombre de Reynolds critique proportionnel à  $\frac{5}{6} \cot \beta$  pour des cas quasi newtonien ( $L \ll 1$ ).



**Fig. 24. Seuils de stabilité selon  $L$ .**

Nombre de Reynolds critique en fonction de  $L$  pour différents angles d'inclinaison  $\beta$  avec  $Ca = 0$ ,  $I = 1.10^{-3}$  et  $n = 0.5$ .

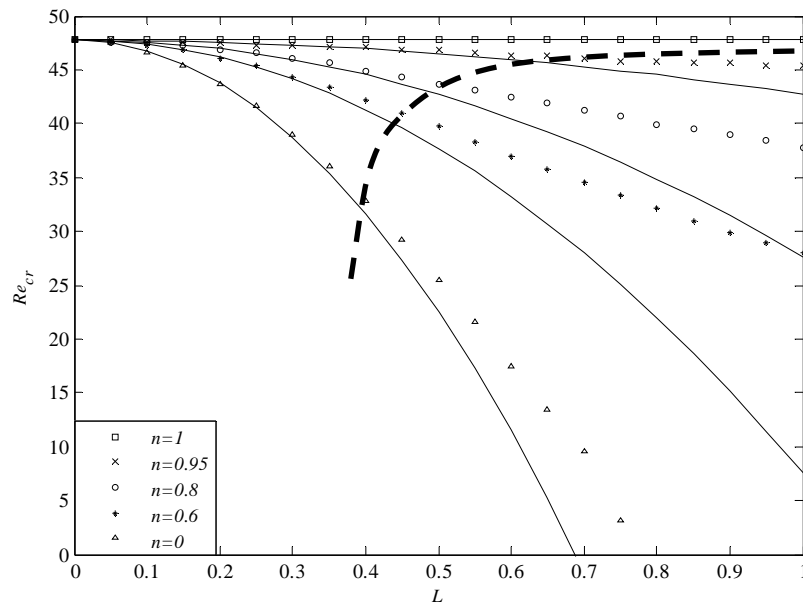
Nous présentons sur la Fig. 25, le nombre de Reynolds critique normalisé par sa valeur maximale obtenue pour le cas newtonien ( $L = 0$ ), soit  $\frac{5}{6} \cot \beta$ , en fonction de  $L^2$ .



**Fig. 25. Seuils de stabilité normalisés.**

Nombre de Reynolds critique normalisé par sa valeur maximale en fonction de  $L$  pour différents angles d'inclinaison avec  $Ca = 0$ ,  $I = 10^{-3}$  et  $n = 0.5$ .

Avec cette représentation, l'ensemble des résultats de la Fig. 25 se confondent en une courbe indépendante de l'angle  $\beta$ . L'angle d'inclinaison est donc un facteur de proportionnalité pour le nombre de Reynolds critique, quelle que soit la valeur de  $L$ . La courbe unique ainsi obtenue révèle la cohérence des résultats obtenus par la méthode asymptotique : leur tracé est une asymptote à la courbe unique quand  $L \rightarrow 0$ .



**Fig. 26. Seuils de stabilité suivant  $n$ .**

Nombre de Reynolds critique en fonction de  $L$  pour différentes valeurs de  $n$  avec  $Ca = 0$ ,  $I = 10^{-3}$  et  $\beta = 1^\circ$ .

Sur la Fig. 26 sont présentées les courbes donnant l'évolution du seuil critique en fonction de  $L$  pour plusieurs valeurs de paramètre rhéologique  $n$ . Les résultats de l'approche asymptotique sont représentés par les traits pleins et ceux de l'approche numérique par les points. D'après ces courbes, on remarque que le film est d'autant plus instable que  $n$  est faible. Notons que la diminution du paramètre  $n$  s'apparente à une diminution de la viscosité et une augmentation du cisaillement dans la couche. Cet aspect a déjà été montré par Hwang, *et al.* (1994) pour des fluides suivant un modèle en loi de puissance. Si l'on compare les résultats des deux approches, on s'aperçoit une nouvelle fois que dans le cas d'un fluide newtonien ( $n = 1$ , quelle que soit la valeur de  $L$ ), les résultats des deux approches sont en bon accord et ceci reste valable d'autant plus que  $L$  est petit et  $n$  est proche de 1. L'écart entre les résultats augmente progressivement quand on s'éloigne de ces conditions. Pour l'approche asymptotique, la viscosité est considérée dans sa forme linéarisée basée sur l'hypothèse selon laquelle  $L^2 DU_{\max}^2 \ll 1$ . Il est donc intéressant d'avoir une idée sur les conséquences de cette linéarisation sur les résultats de stabilité. Nous calculons donc dans chaque cas un paramètre  $\varepsilon$  qui mesure la différence entre la partie linéarisée de l'expression de la viscosité et la valeur réelle de la partie non linéarisée correspondante utilisées respectivement dans l'approche asymptotique et l'approche numérique :

$$\varepsilon = \left| \frac{\left(1 + L^2 DU_{\max}^2\right)^{\frac{n-1}{2}} - \left(1 + L^2 \frac{n-1}{2} DU_{\max}^2\right)}{\left(1 + L^2 DU_{\max}^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} \right| \quad (3.25)$$

Ce paramètre traduit l'effet de la linéarisation sur laquelle est basée l'approche asymptotique. Il va nous permettre de déterminer le domaine de validité de cette approche en fixant une valeur maximale admissible pour  $\varepsilon$ . On pose arbitrairement  $\varepsilon = 10^{-3}$  comme limite au delà de laquelle on considère que les deux méthodes divergent. Cette limite est représentée sur la Fig. 26 par un trait épais pointillé. Cette courbe tend asymptotiquement vers  $n = 1$ , valeur pour laquelle nous avons  $\varepsilon = 0$  et qui correspond au cas d'un fluide newtonien.

### 3.4 Célérité des ondes - modèle phénoménologique pour les fluides non newtoniens

Smith (1990) a proposé un scénario pour expliquer l'instabilité d'un film newtonien à grande longueur d'onde. Son approche consiste à considérer une petite déformation sinusoïdale au niveau de l'interface et une longueur d'onde grande devant l'épaisseur du film. Nous proposons ci-dessous une extension de cette approche au cas d'un fluide non newtonien purement visqueux.

La déformation de l'interface est à l'origine d'une contrainte de cisaillement,  $\tau_i$ , à la surface libre déformée. On peut l'estimer par un développement limité au premier ordre :

$$\tau_i = \eta \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{\zeta} = \left( \eta \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_0 + \zeta \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_0 \quad (3.26)$$

Rappelons que dans le cas d'une couche, l'équation du mouvement de l'écoulement s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -1. \quad (3.27)$$

L'intégration de l'Eq. (3.27) nous donne :

$$\eta \frac{\partial U}{\partial y} = -y. \quad (3.28)$$

Nous pouvons ainsi écrire la relation (2.35) sous la forme suivante :

$$\theta \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -1. \quad (3.29)$$

où

$$\theta = I + (1-I) \left[ 1 + n \left( L \frac{dU}{dy} \right)^2 \right] \cdot \left[ 1 + \left( L \frac{dU}{dy} \right)^2 \right]^{(n-3)/2}. \quad (3.30)$$

Dans le cas d'un fluide newtonien la viscosité est constante et égale à 1. Dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant, à l'interface, le cisaillement est nul, et nous avons par conséquent également  $\eta = 1$ . Au niveau de la surface libre, la contrainte  $\tau_i$  est donc la même dans les deux cas. Avec la condition de cisaillement nul en  $y = 0$  et en utilisant la relation (3.29), nous obtenons :

$$\tau_i = \zeta \left( \theta \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \Big|_0 = -\zeta \quad (3.31)$$

La condition de contrainte nulle à la surface libre déformée implique alors l'existence d'une contrainte à la surface due au champ de perturbation,  $\tau_i'$ , qui compense  $\tau_i$ .

$$\tau_i' = \zeta. \quad (3.32)$$

Cette contrainte est donc en opposition de phase avec la déformation de la surface libre : elle entraîne un écoulement dans le même sens que l'écoulement de base sous les bosses ( $u' > 0$  quand  $\zeta < 0$ ), en sens opposé à l'écoulement de base sous les creux ( $u' < 0$  quand  $\zeta > 0$ ) et qui s'annule sous les nœuds ( $u' = 0$  quand  $\zeta = 0$ ). Du fait de l'hypothèse de grande longueur d'onde, cet écoulement est parallèle ( $\hat{u} = \hat{u}(y)$  et  $\hat{v} \sim 0$  au premier ordre en  $\alpha$ ). Dans le cas newtonien,  $u'$  présente donc un profil linéaire (Couette) alors que dans le cas rhéofluidifiant, puisque la viscosité évolue en fonction de  $y$ , ce profil n'est plus linéaire.

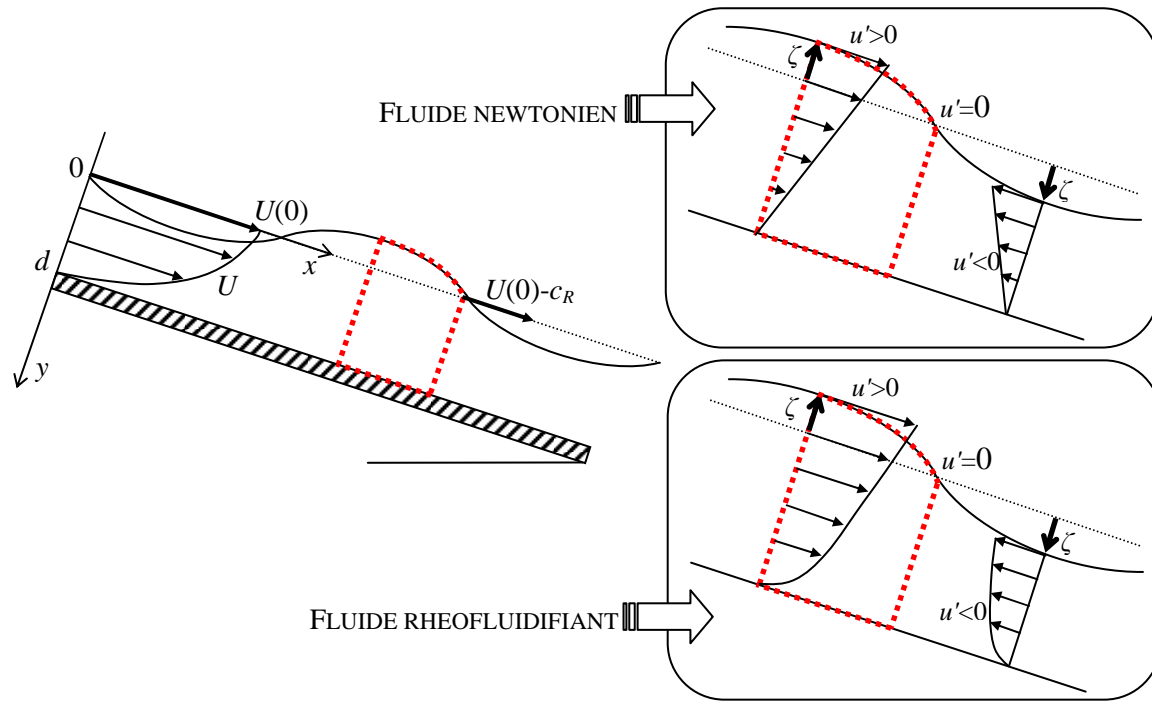


Fig. 27. Volume de contrôle et profil de perturbations  $u'$ .

Smith (1990) montre qu'au premier ordre en  $\alpha$ , l'écoulement est stable. Cela est dû à l'absence d'inertie ( $u'$  est parallèle), qui n'apparaît qu'au deuxième ordre du développement. L'approche au premier ordre permet dans un premier temps de calculer la célérité de l'onde,  $c_R$ , à l'aide d'un bilan de masse dans le repère lié à l'interface. On considère pour cela le volume de contrôle de la Fig. 27; dans ce repère, l'écoulement de base a pour vitesse  $U(y)-c_R$ . Le bilan de masse s'écrit donc :

$$\underbrace{\int_{\zeta}^d (U(y) - c_R) dy}_{\text{débit entrant}} + \underbrace{\int_{\zeta}^d u' dy}_{\text{débit entrant}} - \underbrace{\int_0^d (U(y) - c_R) dy}_{\text{débit sortant}} = 0 \quad (3.33)$$

Le membre de gauche représente le débit entrant dans le volume de contrôle sous l'effet du champ de base et de la perturbation au premier ordre,  $u'$ ; le membre de droite représente le débit sortant, où la perturbation  $u'$  est nulle. En linéarisant l'équation (3.33), on obtient :

$$\zeta [U(0) - c_R] = \int_0^d u' dy, \quad (3.34)$$

si bien que la célérité est directement liée au débit  $q' = \int_0^d u' dy$  de la perturbation. On peut écrire :

$$\frac{c_R}{U(0)} = 1 - \frac{\int_0^d u' dy}{\zeta U(0)}, \quad (3.35)$$

ou encore en intégrant par partie :

$$\frac{c_R}{U(0)} = 1 + \frac{\int_0^d y \frac{\partial u'}{\partial y} dy}{\zeta U(0)} \quad (3.36)$$

Pour calculer la célérité, il reste donc à prendre en compte l'influence de la rhéologie sur le profil de la perturbation  $u'$ . Cet écoulement est entraîné par la contrainte  $\tau_i$  à la surface du film ; on peut écrire :

$$\eta(y) \frac{\partial u'}{\partial y} + \eta'(y) \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_i' . \quad (3.37)$$

Nous négligeons ici les termes en  $\partial v'/\partial y$  devant  $\partial u'/\partial x$  grâce à l'hypothèse de grande longueur d'onde. La viscosité  $\eta(y)$  ne varie que sous l'effet du champ de base. On peut la calculer grâce à la loi constitutive du fluide considéré (par exemple la loi de Carreau). Le deuxième terme est dû à la perturbation  $\eta'(y)$  de la viscosité sous l'effet des perturbations de vitesses qui induisent un cisaillement supplémentaire. Cette dernière peut être positive ou négative suivant que le cisaillement est localement inférieur ou supérieur à celui de l'écoulement non perturbé. Dans le cas rhéofluidifiant, elle sera donc négative sous les bosses, positive sous les creux, nulle au niveau des nœuds de l'interface.

Si l'on néglige dans un premier temps la perturbation de la viscosité  $\eta'(y)$ , en combinant les relations (3.28) et (3.37), on montre que :

$$-y \frac{\partial u'}{\partial y} = \zeta \frac{\partial U}{\partial y}$$

et donc l'Eq. (3.36) devient :

$$\frac{c_R}{U(0)} = 1 - \frac{\int_0^d \frac{\partial U}{\partial y} dy}{U(0)} , \text{ soit } \frac{c_R}{U(0)} = 2. \quad (3.38)$$

Ceci est donc une généralisation au cas des fluides purement visqueux du résultat de Yih (1963) selon lequel les ondes de faible amplitude et grande longueur d'onde se déplacent à deux fois la vitesse de la surface libre. Les résultats numériques représentés en traits pointillés sur la Fig. 28 montrent clairement que, si l'ordre de grandeur est respecté, la célérité diffère toutefois de cette valeur  $c_R = 2U(0)$ . Il apparaît donc nécessaire de prendre en compte la perturbation en viscosité,  $\eta'$ .

La perturbation en viscosité peut être attribuée aux petites variations du taux de cisaillement  $d\dot{\gamma}$  autour de sa valeur de base  $\dot{\gamma}$ . On écrit alors :

$$\eta' = \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} d\dot{\gamma} = -\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial u'}{\partial y} .$$

Ici, le signe négatif vient du fait que dans notre cas  $\partial U/\partial y = -\dot{\gamma}$  est négative; ainsi une diminution locale du cisaillement ( $\partial u'/\partial y < 0$ ) augmente la rhéofluidification. La relation (3.37) devient alors :

$$\eta \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_i' ,$$

soit encore :

$$\eta(y) \left( 1 + \frac{\dot{\gamma}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \right) \frac{\partial u'}{\partial y} = \tau_i' . \quad (3.39)$$

On peut vérifier que le membre de gauche de cette relation (3.39) correspond bien à l'expression de la contrainte dans le cas d'un fluide de Carreau (équation (2.33)).

Finalement l'amplitude de la fluctuation de débit créée par la déformation de l'interface, notée  $q'$ , s'écrit :

$$q' = -\int_0^d \frac{\tau_i' y}{\eta} \left( 1 + \frac{\dot{\gamma}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \right)^{-1} dy = -\int_0^d \frac{\zeta y}{\eta} dy - \int_0^d \frac{\zeta y}{\eta} \left[ \frac{-\frac{\dot{\gamma}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}}}{1 + \frac{\dot{\gamma}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}}} \right] dy. \quad (3.40)$$



En suivant les mêmes étapes que pour établir l'équation (3.38), on exprime la célérité par :

$$c_R = 2U(0) - \int_0^d \dot{\gamma} \left[ \frac{\frac{\dot{\gamma} \partial \eta}{\eta \partial \dot{\gamma}}}{1 + \frac{\dot{\gamma} \partial \eta}{\eta \partial \dot{\gamma}}} \right] dy. \quad (3.41)$$

L'intégrale dans le membre de droite de (3.41) est due à la perturbation en viscosité. Le modèle rhéologique doit à cette étape être choisi car la valeur de l'intégrale en dépend. Le terme  $\frac{\dot{\gamma} \partial \eta}{\eta \partial \dot{\gamma}}$  correspond à la pente de la loi constitutive du fluide dans un tracé en échelles logarithmiques

(par exemple la Fig. 14) de la viscosité en fonction du taux de cisaillement. Pour un fluide newtonien, ce terme est nul car la viscosité  $\eta$  est constante, on retrouve ainsi  $c_R = 2U(0)$ . Pour un fluide de Carreau, il est négatif et varie de 0 à la surface libre à sa valeur minimale au fond; cette dernière est toujours supérieure à  $(n-1)$ , qui est la pente de la région en loi puissance. Ce terme est donc évalué en fonction de  $\dot{\gamma}$ , puis calculé à partir des résultats numériques sur le champ de base. Nous avons représenté sur la Fig. 28 le rapport  $c_R/U(0)$  en fonction du carré du paramètre  $L$  pour un fluide newtonien et un fluide de Carreau suivant les trois méthodes proposées dans ce travail : l'approche numérique, l'approche asymptotique, et l'approche phénoménologique que nous venons de décrire. On note un résultat commun à ces trois approches dans le cas newtonien ( $L = 0$ ):  $c_R/U(0) = 2$ . L'approche asymptotique décrit ensuite une évolution linéaire, comme on le voit à partir des relations (3.3) et (3.10). Effectivement cette méthode ne tient pas compte des variations locales de la viscosité générées par les perturbations de vitesse. Les deux autres approches (numérique et phénoménologique) donnent des résultats qui sont en parfait accord et s'éloignent progressivement de la variation linéaire de l'approche asymptotique quand  $L^2$  augmente. Cette comparaison confirme la validité de l'approche phénoménologique pour décrire l'influence du champ de perturbations sur la célérité des ondes.

En choisissant  $I = 0$  et  $L \rightarrow \infty$ , on obtient asymptotiquement la loi de puissance associée à la loi de Carreau étudiée:

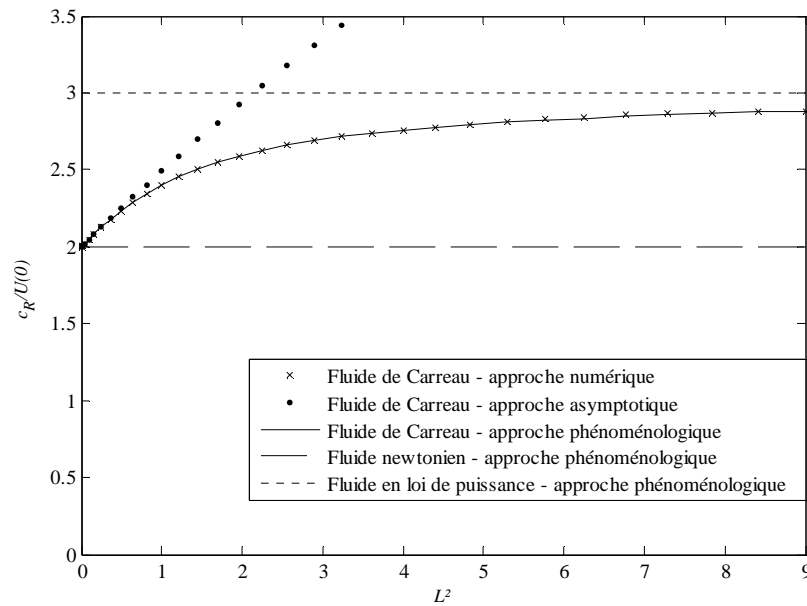
$$\eta = L^{n-1} \dot{\gamma}^{n-1}, \quad (3.42)$$

et sa vitesse de phase se réduit selon l'expression (3.41) à :

$$c_R = \left(1 + \frac{1}{n}\right) U(0). \quad (3.43)$$

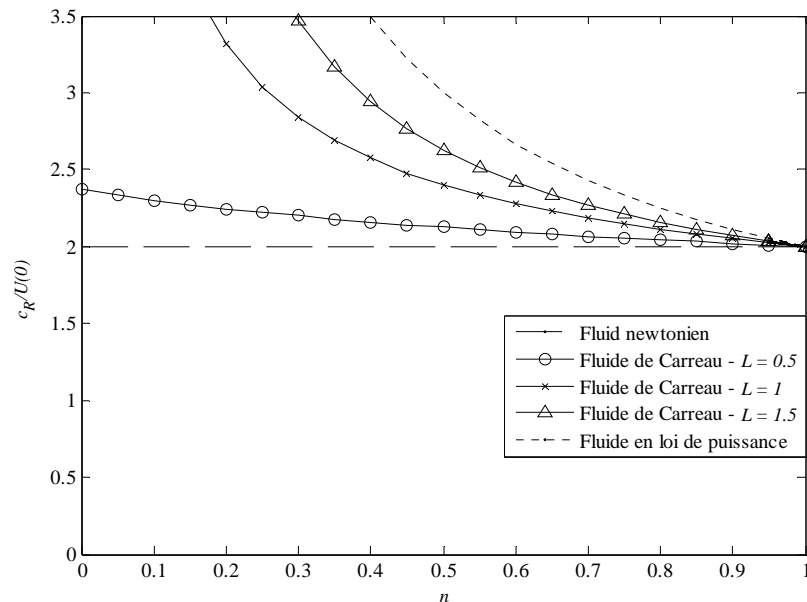
La célérité  $c$  dépend uniquement de l'exposant  $n$ . Nous avons ajouté sur la Fig. 28 la représentation de cette loi en pointillés fins, une droite horizontale, dans ce cas en  $c_R/U(0) = 3$ . Nous notons que le rapport  $c_R/U(0)$  de la loi de puissance est une asymptote de celui de la loi de Carreau pour les grandes valeurs de  $L$ .

De la même manière le rapport  $c_R/U(0)$  calculé par l'approche phénoménologique est représenté en fonction du paramètre  $n$  sur la Fig. 29 pour trois modèles rhéologiques : fluide newtonien, fluide en loi de puissance et fluide de Carreau. Ils se rejoignent tous en une valeur commune en  $n = 1$  correspondant au cas où tous sont dans leurs conditions particulières newtoniennes. Les courbes pour les fluides de Carreau sont pour les plus faibles valeurs de  $n$  réparties entre le cas newtonien constant et le cas loi de puissance en  $(1+1/n)$  selon la valeur du paramètre  $L$ .



**Fig. 28. Rapport de la célérité des ondes à la vitesse de la surface libre en fonction de  $L^2$ .**

Cas d'un fluide de Carreau ( $I = 10^{-3}$  et  $n = 0.5$ ), d'un fluide newtonien et d'un fluide en loi de puissance ( $n = 0.5$ ).



**Fig. 29. Rapport de la célérité des ondes à la vitesse de la surface libre en fonction de  $n$ .**

Cas d'un fluide de Carreau ( $I = 10^{-3}$  et  $L = 0.5, 1$  et  $1.5$ ), d'un fluide newtonien et d'un fluide en loi de puissance.

Tous les termes de la relation (3.41) sont connus à l'issue du calcul numérique du champ de base. Ceci représente un des avantages de cette méthode qui donne des renseignements sur des grandeurs liées à la stabilité (dans ce cas la célérité des ondes  $c_R$ ) en se limitant au calcul du champ de base. De plus, l'équation (3.41) est une relation générale, pas seulement limitée à un modèle rhéologique. Il s'agit donc d'une extension du modèle de Smith (1990) à tous les modèles purement visqueux. Il met en lumière l'importance de la prise en compte des effets de la perturbation de viscosité induite par les perturbations de vitesses de l'écoulement.

Nos résultats sont en accord avec ceux de Nouar, *et al.* (2007), qui montrent aussi l'importance de la prise en compte de la perturbation de viscosité, appelée viscosité tangente, à travers une étude de stabilité linéaire d'un écoulement de type Poiseuille d'un fluide de Carreau. Les auteurs montrent que la non prise en compte de cet effet de la rhéofluidité a pour conséquence une surévaluation du seuil de stabilité.

Notons que, comme le soulignait Smith (1990) dans le cas de fluides newtoniens, le terme d'inertie, qui est responsable de la déstabilisation de l'écoulement, est proportionnel à  $c_R - U(0)$ . Par conséquent,

au vu de l'évolution du rapport  $c_R/U(0)$  pour les fluides rhéofluidifiants, nous pouvons en déduire que les termes d'inertie augmentent lorsque les propriétés rhéofluidifiantes du fluide augmentent, et deviennent de plus en plus dominant par rapport au gradient de pression stabilisant. Cette observation fournit donc une explication sur la diminution des seuils de stabilité dans le cas d'une seule couche de fluide rhéofluidifiant : le transport par le champ de base dans le repère lié à l'onde, proportionnel à  $c_R - U(0)$ , est plus important pour un fluide rhéofluidifiant que pour un fluide newtonien.

### 3.5 Cas des petits angles d'inclinaison $\beta < 0.5'$

Les courbes de stabilité donnant le nombre de Reynolds critique en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour un petit angle d'inclinaison,  $\beta = 0.3'$ , sont présentées sur la Fig. 30. Dans ce paragraphe, nous avons fixé le paramètre dimensionnel  $\delta$  de la loi de Carreau au lieu du paramètre  $L$ . Nous faisons ce choix car il permet une visualisation plus aisée des modes de cisaillement. Sur cette figure, les deux courbes neutres correspondent à un fluide newtonien pour les traits pointillés ( $\delta = 0$ ) et à un fluide rhéofluidifiant pour les traits pleins ( $n = 0.5$ ,  $\delta = 0.1$  et  $I = 0.1$ ). Toutes deux présentent deux minima en termes de nombres de Reynolds, dont les valeurs sont indiquées sur la figure. Pour les fluides newtoniens, Benjamin (1957) a identifié les instabilités qui se manifestaient à très grandes longueur d'onde comme des modes de surface. Floryan, *et al.* (1987) a identifié par la suite un second type d'instabilités, les modes de cisaillement, qui ne se manifestent que pour de petits angles d'inclinaisons tels que  $\beta < 0.5'$ . Ces instabilités ont une longueur d'onde caractéristique de l'ordre de l'épaisseur de la couche et une vitesse de phase  $c_R$  inférieure à la vitesse de la surface libre  $U(0)$ .

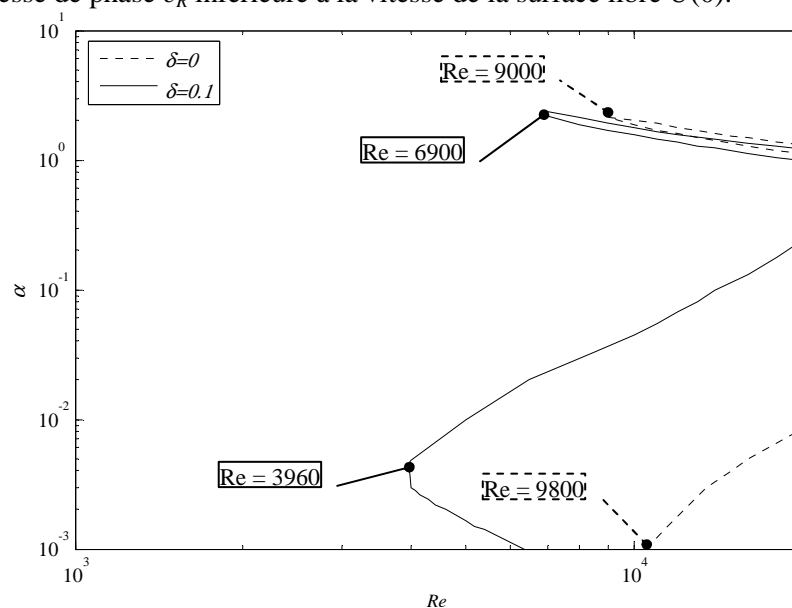
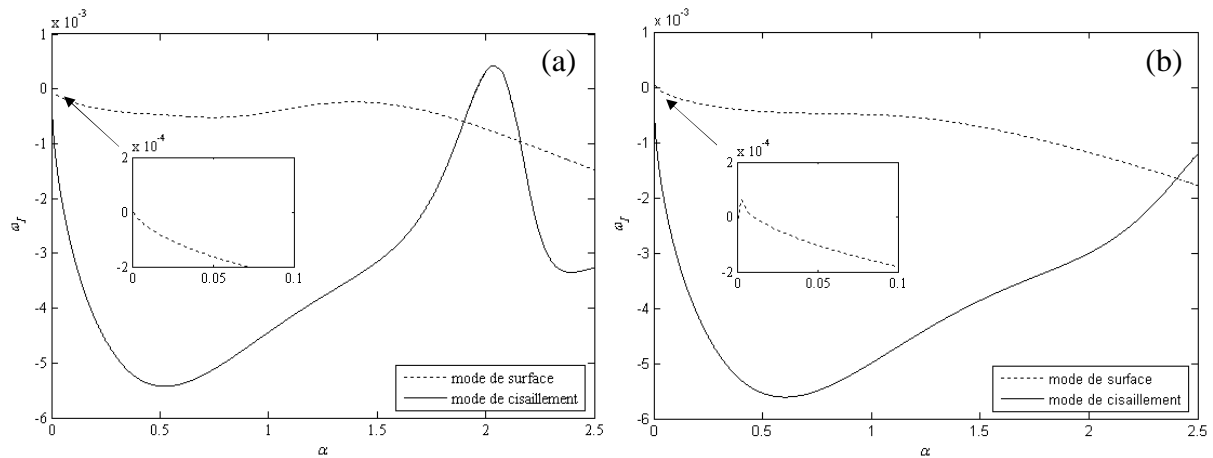


Fig. 30. Courbes neutres de stabilité pour  $\beta = 0.3'$ .  $I = 10^{-3}$ ,  $n = 0.5$ .

Les résultats de la Fig. 30 montrent clairement que dans le cas d'un fluide newtonien, le mode le plus instable est un mode de surface alors que dans le cas du fluide rhéofluidifiant, le mode le plus instable est un mode de cisaillement. Pour illustrer ce résultat, nous avons représenté l'évolution du taux de croissance des ondes  $\omega_i = \alpha c_i$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  sur la Fig. 31 (a) pour un fluide newtonien ( $\delta = 0$ ) et sur la Fig. 31 (b) pour le fluide rhéofluidifiant ( $\delta = 0.1$ ).



**Fig. 31.** Taux de croissance  $\omega_r$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour  $\beta = 0.3'$ .

$I = 0.1$ ,  $n = 0.5$  et

(a)  $\delta = 0$  et  $Re = 9500$

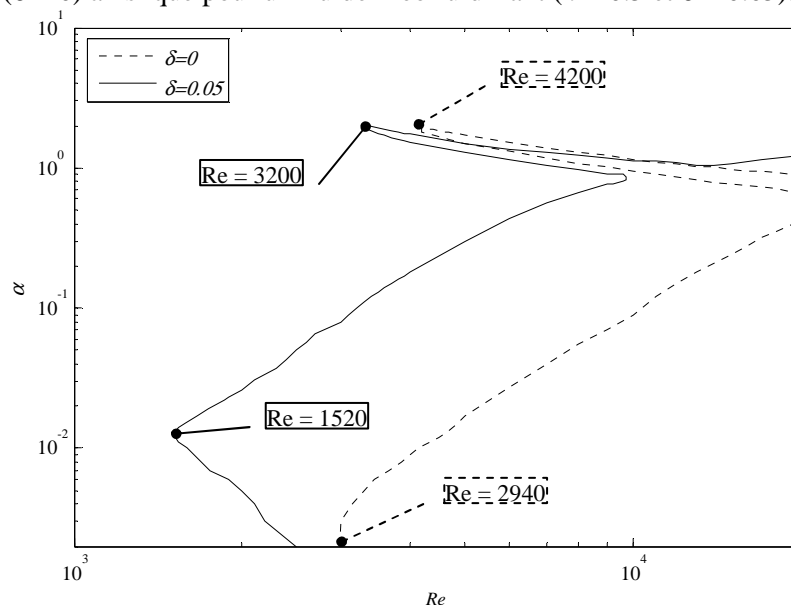
(b)  $\delta = 0.1$  et  $Re = 6000$

Les valeurs du nombre de Reynolds pour lesquelles sont présentées ces courbes sont choisies de manière à n'avoir la croissance que de l'un des deux types d'instabilités. A partir de la Fig. 31 (a), on constate que le seul taux de croissance positif est celui d'une instabilité de nombre d'onde de l'ordre de 2. Les résultats pour ce cas sont résumés dans le Tableau 2 d'après lequel on note que la célérité de l'onde est inférieure à la vitesse à la surface libre et qu'il s'agit donc d'un mode de cisaillement.

$\delta$	$\alpha$	$Re$	$U(y=0)$	$c_R$	Type d'instabilité
0	2.05	9500	0.440	0.173	<b>Mode de cisaillement</b>
0.1	0.00255	6000	0.246	2.406	<b>Mode de surface</b>

**Tableau 2.** Type d'instabilité pour  $\beta = 0.3'$ ,  $I = 0.1$ ,  $n = 0.5$  en rapport avec la Fig. 30.

Au contraire, sur la Fig. 31 (b), on remarque que le mode de surface se développe avec un nombre d'onde  $\alpha$  proche de zéro. La surface libre a dans ce cas une vitesse supérieure à la vitesse de phase des ondes. Les mêmes courbes de stabilité neutre sont données sur la Fig. 32 avec un angle  $\beta = 1'$  pour un fluide newtonien ( $\delta = 0$ ) ainsi que pour un fluide rhéofluidifiant ( $n = 0.5$  et  $\delta = 0.05$ ).



**Fig. 32.** Courbes neutres de stabilité pour  $\beta = 1'$ ,  $I = 10^{-3}$ ,  $n = 0.5$ .

Sur cette figure, on observe une prédominance des modes de surface qui se déclenchent toujours pour des nombres de Reynolds critiques inférieurs à ceux des modes de cisaillement. Pour cet angle d'inclinaison  $\beta = 1'$ , il est probable que ce comportement restera valable quelle que soit la valeur de  $\delta$ : les seuls modes à se développer seront des modes de surface (voir le Tableau 3).

$\delta$	$\alpha$	$Re$	$U(y=0)$	$c_R$	Type d'instabilité
0	0.01	2000	0.232	2.311	Mode de surface
0.05	0.001	4000	0.283	2.027	Mode de surface

Tableau 3. Type d'instabilité pour  $\beta = 1'$ ,  $I = 0.1$ ,  $n = 0.5$  en rapport avec la Fig. 32.

A partir de ces résultats il apparaît clairement que la stabilité de la couche est influencée par la distribution de la viscosité le long de l'épaisseur de la couche et que celle ci peut changer la nature du mode d'instabilité dominant. Cependant cette propriété disparaît dès que l'angle d'inclinaison devient supérieur à  $0.5'$ .

Il existe par ailleurs pour chaque valeur du paramètre  $\delta$  un angle d'inclinaison seuil  $\beta_{cr}$  au-delà duquel le mode dominant devient le mode de surface. Dans le cas newtonien ( $\delta = 0$ ), Floryan, *et al.* (1987) ont obtenu pour cet angle seuil  $\beta_{cr} \approx 0.5'$ . Nous avons montré ici que la valeur de cet angle seuil est abaissée pour un fluide rhéofluidifiant : elle est inférieure à  $0.3'$  pour  $\delta = 0.1$ .

Soulignons qu'une grande partie de ces résultats concernant la stabilité d'un film de fluide de Carreau s'écoulant sur un plan incliné a été publiée dans l'article de Rousset, *et al.* (2007).

# CHAPITRE 4 :

## RÉSULTATS DU PROBLÈME

### A DEUX COUCHES

Nous étudions dans cette partie l'influence des principaux paramètres du problème sur la stabilité de l'écoulement à double couche représenté sur la Fig. 33. Il s'agit de faire ressortir, pour différentes positions de la (ou des) couche(s) de fluide rhéofluidifiant, l'influence des grandeurs suivantes :

- le rapport  $Q_1$  du débit de la couche supérieure par rapport au débit total,
- le rapport des viscosités  $E_1$ ,
- le rapport des masses volumiques  $M_1$  entre la couche supérieure et la couche inférieure, ainsi que,
- les tensions de surface et d'interface  $T_1$  et  $T_2$ .

Dans cette partie, l'angle d'inclinaison n'est plus un paramètre. Nous le fixons à 0.2 radian ( $\sim 11^\circ$ ). Ce choix est motivé par deux raisons: cette valeur se retrouve dans beaucoup des travaux de la littérature, nous permettant donc d'envisager des comparaisons, et elle correspond à des inclinaisons utilisées dans l'industrie. Effectivement, chez Kodak par exemple, des angles compris entre  $5^\circ$  et  $15^\circ$  sont utilisés pour le couchage des films photographiques.

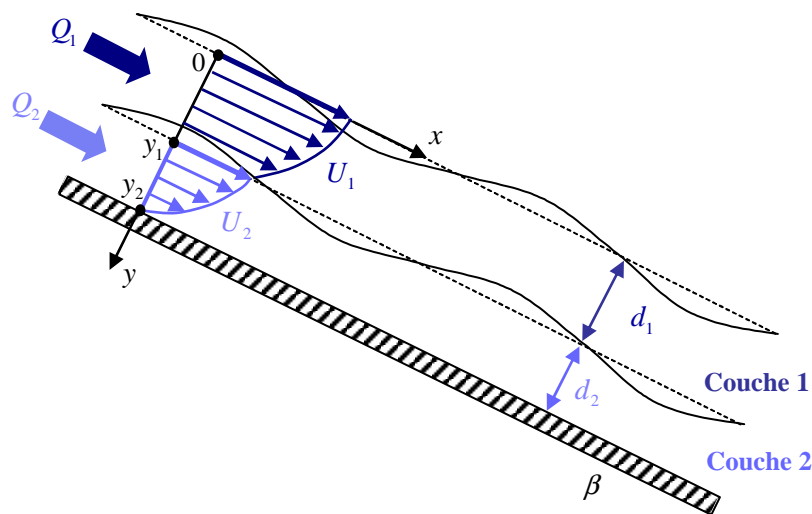


Fig. 33. Schéma du problème à deux couches.

Nous avons nommé les différentes configurations rhéologiques pour les référencer plus facilement. Ainsi, par exemple, la configuration *N/R* signifie que la couche supérieure est constituée d'un fluide newtonien (*N*) et la couche inférieure d'un fluide rhéofluidifiant (*R*). Le schéma suivant définit les quatre configurations étudiées :

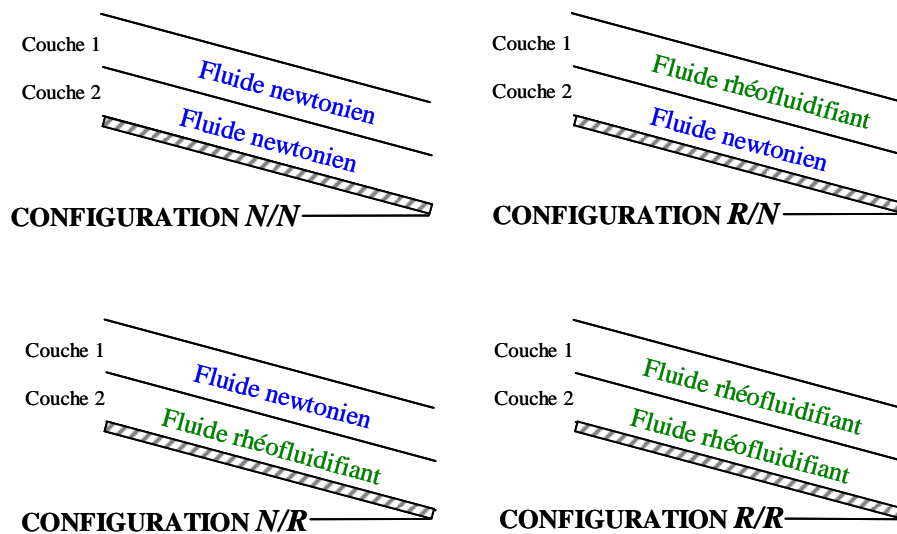


Fig. 34. Schéma des différentes configurations rhéologiques étudiées et leur nom.

Nous avons donc envisagé toutes les configurations rhéologiques possibles. Ainsi nous ne nous sommes pas arrêtés à des applications spécifiques, mais tout est envisageable. Par exemple dans le cas d'un polymère en solution dans un solvant, le solvant migre vers le haut, stratifiant ainsi l'écoulement, puis s'évapore. Selon la rhéologie de ce solvant et du polymère en question, on peut envisager différentes configurations. De même dans le cas de l'application d'une couche de vernis sur une couche de peinture, selon la composition et la dilution de chacun, on pourrait les considérer indépendamment comme un fluide newtonien ou rhéofluidifiant.

Rappelons que l'étude de stabilité linéaire sur deux couches de fluides newtoniens de Chen (1993) montre que la stratification en viscosité influence fortement la stabilité de l'écoulement. En effet, dans le cas d'une couche moins visqueuse adjacente à la paroi du fond, on observe des modes d'interface se déclenchant sans inertie (lubrication effect) alors que dans le cas inverse, ce seront des modes de surface qui se déclenchent généralement à nombre de Reynolds petit mais non nul. On propose donc de diviser cette étude en deux sous-parties distinctes correspondant à deux rapports de viscosité inverses :  $E_1 = 2.5$  puis  $E_1 = 0.4$ . Dans chacune de ces parties on détaillera les effets des autres paramètres.

Afin de valider nos calculs dans le cas newtonien, nous comparons nos courbes de stabilité neutre à celles données dans la littérature par Chen (1993). Pour les fluides rhéofluidifiants, les comparaisons sont plus difficiles. Ces difficultés sont inhérentes à la nature du problème étudié. En effet, dans le cas de fluides rhéofluidifiants, à débit  $Q_1$  constant, l'épaisseur des couches varie avec les autres paramètres, et ne peut pas être choisie directement comme grandeur de référence. Une comparaison avec les résultats de Weinstein (1990) sur le champ de base pour le cas d'un fluide de Carreau dans la couche inférieure est portée en annexe.

# 1 ETUDE DU CHAMP DE BASE

L'objectif ici est d'analyser les effets de chacun des paramètres du problème sur l'épaisseur des couches, la vitesse du champ de base, le taux de cisaillement et la viscosité locale. En effet, modifier la configuration rhéologique, le rapport des viscosités  $E_1$  ou des densités  $M_1$ , le débit  $Q_1$  peut avoir un effet non négligeable sur ces grandeurs. Soulignons à ce niveau que les tensions de surface  $T_1$  et  $T_2$  n'ont pas d'influence sur le champ de base.

## 1.1 Cas de deux fluides newtoniens

Rappelons brièvement ici le système à résoudre pour l'établissement du champ de base. En régime établi, l'équilibre entre contrainte de cisaillement et gradient de pression hydrostatique s'écrit :

$$\eta_k \frac{dU_k}{dy} = -M_k y + C_k \text{ avec } \eta_k = E_k \left\{ I_k + (1 - I_k) \left[ 1 + \left( L_k \frac{dU_k}{dy} \right)^2 \right]^{(\eta_k - 1)/2} \right\}, \quad (4.1)$$

$$C_1 = 0 \text{ et } C_2 = d_1(1 - M_1).$$

Les conditions d'adhérence et de continuité du champ de vitesse s'écrivent :

$$U_2(y_2) = 0, \quad (4.2)$$

$$U_1(y_1) = U_2(y_1), \quad (4.3)$$

et la conservation du débit :

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = \int_0^{y_1} U_1 dy + \int_{y_1}^{y_2} U_2 dy = 1. \quad (4.4)$$

Pour le cas où les deux fluides sont newtoniens, nous avons des viscosités constantes dans chacune des couches. Le système (4.1)-(4.4) peut donc être résolu analytiquement. Les taux de cisaillement et les vitesses s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial y}(y) = -\frac{M_1}{\eta_1} y \\ \frac{\partial U_2}{\partial y}(y) = -\frac{1}{\eta_2} y + \frac{d_1}{\eta_2} (1 - M_1) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} U_1(y) = -\frac{M_1}{2\eta_1} y^2 + \frac{M_1 d_1^2}{2\eta_1} + \frac{M_1 d_1 d_2}{\eta_2} + \frac{d_2^2}{2\eta_2} \\ U_2(y) = -\frac{1}{2\eta_2} y^2 + \frac{d_1}{\eta_2} (1 - M_1) y + \frac{1}{2\eta_2} (d_2^2 - d_1^2) + \frac{M_1 d_1}{\eta_2} (d_1 + d_2) \end{cases} \quad (4.6)$$

Le taux de cisaillement a une pente négative et constante dont la norme est proportionnelle à l'inverse de la viscosité de la couche. Les épaisseurs des couches  $d_1$  et  $d_2$  sont calculées à partir des débits imposés  $Q_1$  et  $Q_2$ . Les débits s'écrivent :

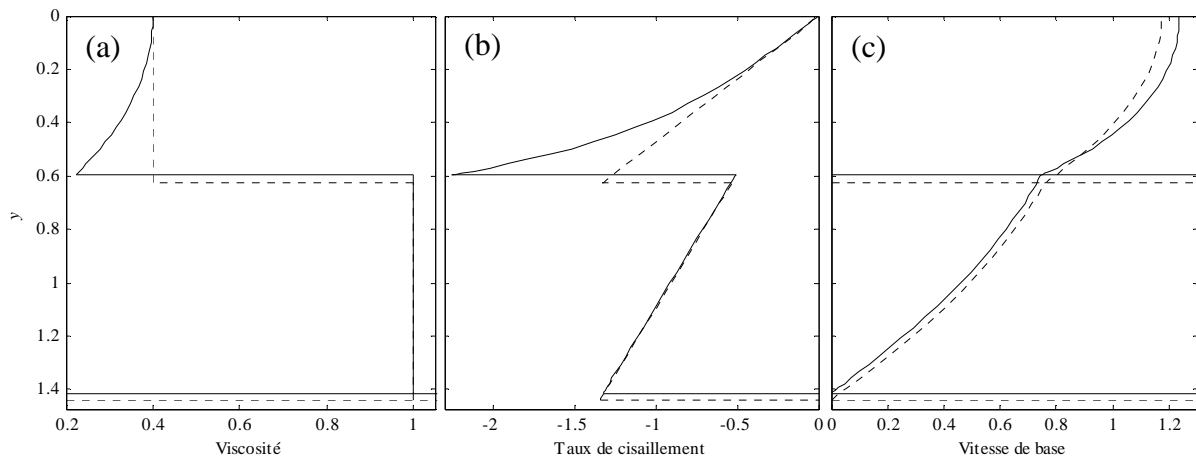
$$\begin{cases} Q_1 = \frac{M_1}{3\eta_1} d_1^3 + \frac{M_1}{\eta_2} d_1^2 d_2 + \frac{1}{2\eta_2} d_1 d_2^2 \\ Q_2 = \frac{1}{3\eta_2} d_2^3 + \frac{M_1}{2\eta_2} d_1 d_2^2 \end{cases} \quad (4.7)$$



## 1.2 Cas des fluides rhéofluidifiants

Dans le cas de fluides rhéofluidifiants, on ne peut malheureusement pas obtenir analytiquement l'expression des profils de vitesse. Le système d'équations (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4) est résolu numériquement pour déterminer le champ de vitesse de base  $U_k(y)$  et les épaisseurs  $d_k$  des différentes couches du film.

Comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, dans le cas de l'écoulement bicouche de fluides rhéofluidifiants, nous avons trois configurations possibles ( $R/N$ ,  $N/R$  et  $R/R$ ). Pour chaque configuration rhéologique, nous nous intéressons plus particulièrement à la viscosité locale  $\eta_k$ , au taux de cisaillement local  $\partial U_k/\partial y$  et au champ de vitesses  $U_k$ , dans chacune des couches  $k = 1, 2$ . Dans tous les cas, nous comparons ces grandeurs au cas où les deux couches sont newtoniennes (configuration  $N/N$ ). Sur la Fig. 35, nous présentons les résultats de la configuration  $R/N$ .



**Fig. 35. Comparaison des champs de base entre la configuration  $N/N$  et la configuration  $R/N$ .**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$  pour  $Q_1 = 0.65$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 0.4$  et  $M_1 = 0.85$  pour deux configurations rhéologiques différentes :

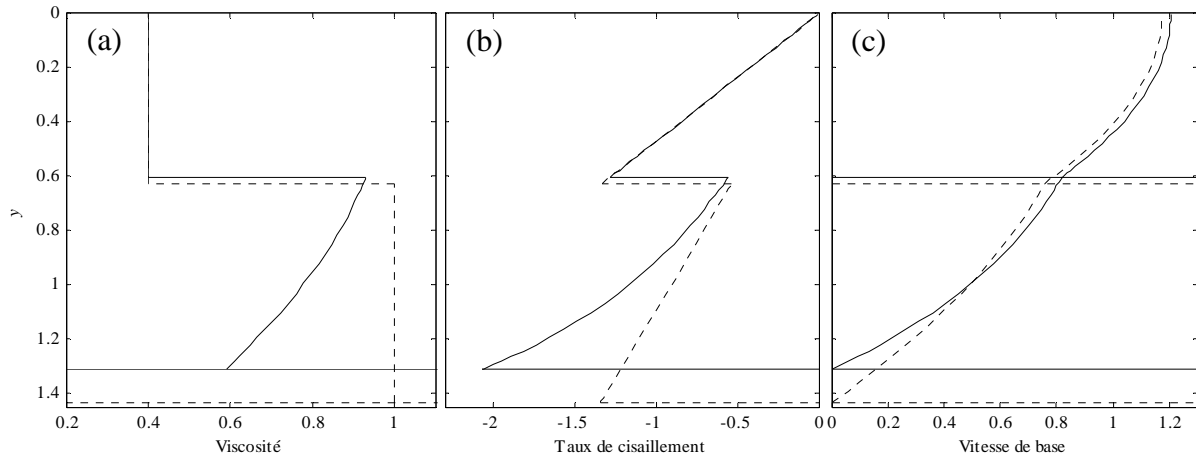
- - - - -  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),
- $R/N$  ( $L_1 = 0.8$ ,  $n_1 = 0.2$ ,  $L_2 = 0$  et  $n_2 = 1$ ).

Quand le fluide de la couche supérieure est rhéofluidifiant, la viscosité  $\eta_1$  est réduite dans cette couche, d'autant plus que la valeur absolue du taux de cisaillement local est forte. L'épaisseur  $d_1$  de la couche est dans ce cas plus fine que lorsque le fluide est newtonien du fait de la diminution de la viscosité et de l'augmentation de la vitesse qui en résulte. La valeur de la vitesse au niveau de l'interface est cependant plus faible que dans le cas newtonien. L'épaisseur  $d_2$  de la couche inférieure change elle aussi: elle est légèrement augmentée pour compenser le ralentissement de la vitesse de l'interface  $U_2(d_1)$ . Malgré cela, l'épaisseur totale de l'écoulement est réduite.

Sur la Fig. 36 nous présentons les résultats du cas où la couche inférieure est rhéofluidifiante. Pour la couche inférieure, on remarque une évolution sensible de toutes les grandeurs. Cette évolution est typique de la rhéofluidification. Elle conduit à :

- une diminution de la viscosité liée au cisaillement local,
- une augmentation en valeur absolue du taux de cisaillement et de la vitesse moyenne débitante,
- une diminution de l'épaisseur  $d_2$  de la couche du bas.

Pour le fluide newtonien de la couche supérieure, le taux de cisaillement  $\partial U_1/\partial y$  garde la même pente par rapport à la configuration  $N/N$ , donc la même courbure des profils de vitesse. Les vitesses par contre sont plus fortes à cause de l'accélération de l'interface liée à la rhéofluidification de la couche inférieure. L'épaisseur  $d_1$  est donc réduite pour conserver le débit  $Q_1$ . L'épaisseur totale de l'écoulement diminue en passant des configurations  $N/N$  à  $N/R$ . L'évolution due au changement de rhéologie est plus conséquente quand la couche concernée se trouve près du fond car elle est le siège de plus fortes contraintes de cisaillement.

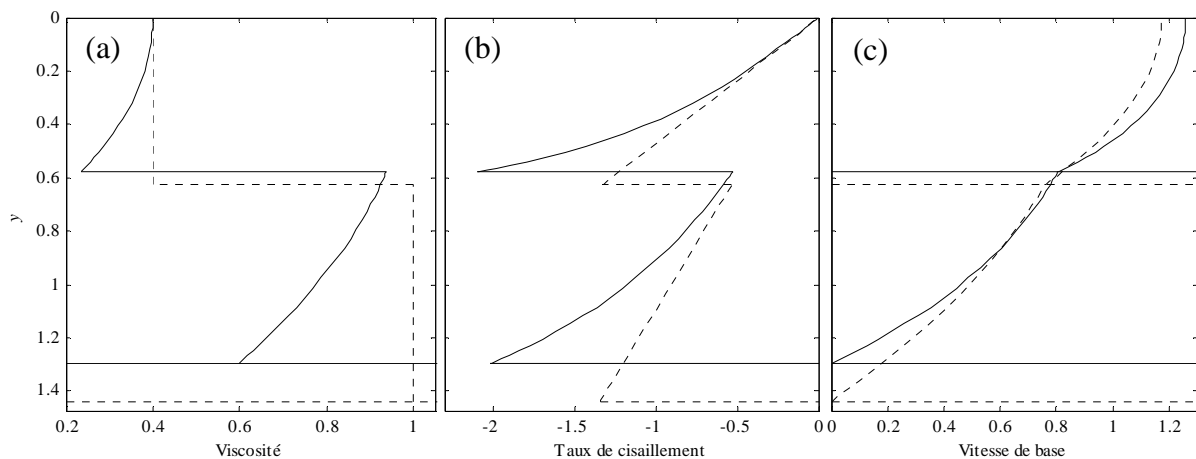


**Fig. 36. Comparaison des champs de base entre la configuration  $N/N$  et la configuration  $N/R$ .**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$  pour  $Q_1 = 0.65$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 0.4$  et  $M_1 = 0.85$  pour deux configurations rhéologiques différentes :

- $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),
- $N/R$  ( $L_2 = 0.8$ ,  $n_2 = 0.2$ ,  $L_1 = 0$  et  $n_1 = 1$ ).

Lorsque les deux fluides sont rhéofluidifiants (configuration  $R/R$ ), nous obtenons les champs présentés sur la Fig. 37. On note dans ce cas des comportements globalement similaires à ceux observés précédemment dans chacune des couches de fluides rhéofluidifiants : accélération de la vitesse moyenne, diminution de l'épaisseur, augmentation en valeur absolue du cisaillement et diminution de la viscosité localisée sur les zones de fort cisaillement.



**Fig. 37. Comparaison des champs de base entre la configuration  $N/N$  et la configuration  $R/R$ .**

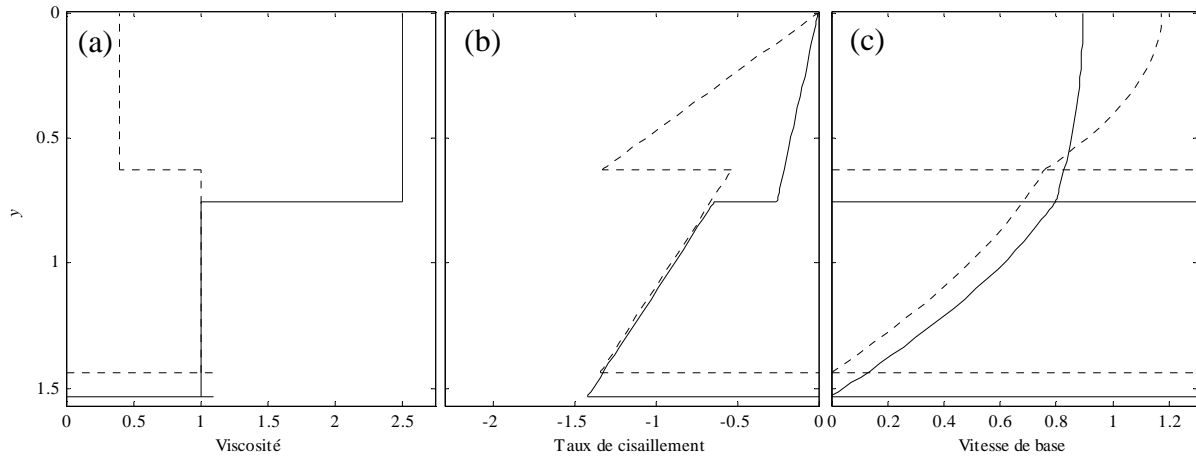
Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$  pour  $Q_1 = 0.65$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 0.4$  et  $M_1 = 0.85$  pour deux configurations rhéologiques différentes :

- $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),
- $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$ ,  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).

Enfin, on peut noter à partir de ces résultats que lorsque l'une des couches passe d'un fluide newtonien à un fluide rhéofluidifiant, la façon dont le champ de vitesse de base s'adapte dépend de la position de cette couche : s'il s'agit de la couche supérieure, la vitesse de la surface libre aura tendance à augmenter de manière plus significative que la diminution de l'épaisseur de la couche, alors que s'il s'agit de la couche inférieure, son épaisseur sera plus affectée que la vitesse de l'interface. Soulignons que ce comportement ne concerne que le cas de stratification en viscosité pour lequel  $E_1 < 1$ .

### 1.3 Influence du rapport des viscosités $E_1$

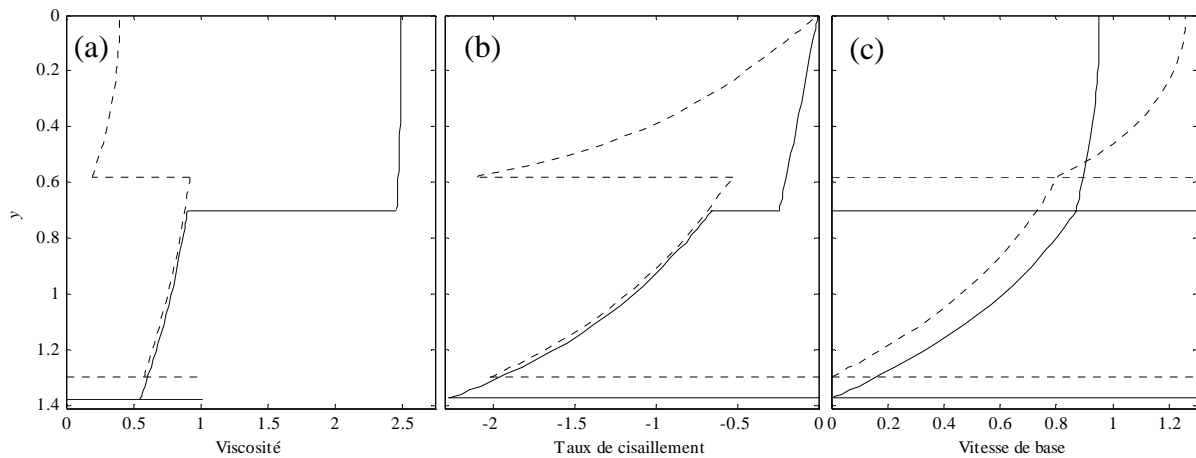
Les résultats de la littérature montrent que le rapport  $E_1$  des viscosités entre les couches joue un rôle important dans la stabilité de films superposés de fluides newtoniens. Il est par conséquent important d'analyser l'influence de ce paramètre sur la viscosité, le taux de cisaillement et la vitesse. Ces grandeurs sont représentées pour deux rapports de viscosité  $E_1$  inverses dans la configuration  $N/N$  sur la Fig. 38 et dans la configuration  $R/R$  sur la Fig. 39.



**Fig. 38. Comparaison des champs de base pour deux fluides newtoniens selon le rapport de viscosité  $E_1$ .**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$ ,  $L_1 = L_2 = 0$ ,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$  et  $M_1 = 0.85$  pour deux rapports de viscosité différents :

- $E_1 = 0.4$ ,
- $E_1 = 2.5$ .



**Fig. 39. Comparaison des champs de base pour deux fluides rhéofluidifiants selon le rapport de viscosité  $E_1$ .**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$ ,  $L_1 = L_2 = 0.8$ ,  $n_1 = n_2 = 0.2$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$  et  $M_1 = 0.85$  pour deux rapports de viscosité différents :

- $E_1 = 0.4$ ,
- $E_1 = 2.5$ .

En considérant la continuité des contraintes de cisaillement au niveau de l'interface entre les couches, nous avons :

$$\eta_1 \frac{\partial U_1}{\partial y}(d_1) = \eta_2 \frac{\partial U_2}{\partial y}(d_1). \quad (4.8)$$

Une inversion du rapport des viscosités newtoniennes  $E_1$  donne donc lieu à la même inversion pour le rapport des taux de cisaillement de part et d'autre de l'interface, et pour les tangentes aux profils des vitesses en  $y = d_1$ . On modifie essentiellement les profils de la couche supérieure qui subit l'inversion de la viscosité. Quand on franchit l'interface, de la couche 1 vers la couche 2, selon que le rapport  $E_1$  des viscosités est inférieur ou supérieur à l'unité, la viscosité est respectivement augmentée ou diminuée ; la valeur absolue du taux de cisaillement est respectivement diminuée ou augmentée et le profil des vitesses présente un angle rentrant ou saillant. D'une manière générale, les champs de la

couche inférieure sont moins influencés par le rapport  $E_1$  des viscosités que ceux de la couche supérieure. L'épaisseur totale des films augmente en même temps que  $E_1$ , du fait de l'évolution prédominante de  $d_1$ .

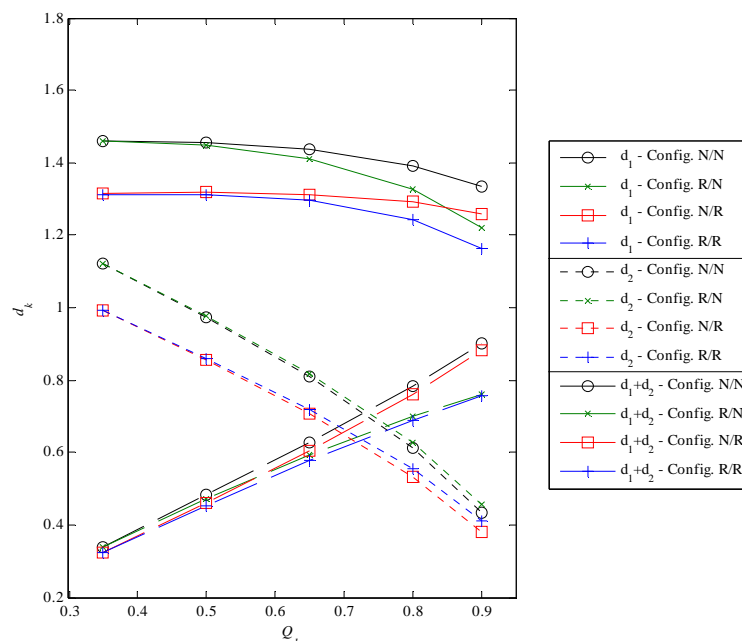
Les résultats du cas où les deux fluides sont rhéofluidifiants sont présentés sur la Fig. 39. On remarque qu'en inversant le rapport  $E_1$  des viscosités, les changements dans les profils des différentes grandeurs sont qualitativement similaires à la configuration  $N/N$ . Néanmoins ces changements, notamment dans la couche supérieure, sont accentués par les propriétés rhéofluidifiantes des fluides. En effet, on note une tendance à l'accroissement de l'écart entre les valeurs locales des taux de cisaillements (et donc aussi des viscosités) dans la couche supérieure entre les deux cas. Les effets observés dans le cas newtonien sont donc renforcés avec en particulier un amincissement plus marqué de la couche supérieure.

Le rapport de viscosité a pour effet de modifier le champ de vitesse principalement dans la couche supérieure. A mesure qu'on augmente  $E_1$ , la vitesse devient plus uniforme sur l'épaisseur de cette couche (le cisaillement diminue), la valeur moyenne de la vitesse diminue et la couche s'épaissit.

## 1.4 Influence du débit $Q_1$

Le débit  $Q_1$  représente la part du débit total  $Q_T$  qui s'écoule dans la couche supérieure. Les épaisseurs des couches sont déterminées à partir de ce débit, mais leur évolution n'est pas linéaire avec celui-ci. Nous avons observé qualitativement dans un premier temps l'effet de  $Q_1$  sur les épaisseurs des couches et les vitesses des interfaces, puis nous nous sommes attachés à établir la relation entre le rapport  $Q_1/Q_2$  des débits et le rapport  $d_1/d_2$  des épaisseurs entre les couches.

Comme nous avons pu le constater dans les paragraphes précédents, les paramètres significatifs de l'écoulement peuvent se réduire à l'épaisseur des couches et à la vitesse aux interfaces, car ces valeurs nous donnent des indications sur la forme des profils de vitesse. La Fig. 40 présente les épaisseurs des couches  $d_1$ ,  $d_2$  et du film entier ( $d_1+d_2$ ) en fonction du débit  $Q_1$  dans les 4 configurations rhéologiques  $N/N$ ,  $R/N$ ,  $N/R$  et  $R/R$  pour  $E_1 = 0.4$ ,  $M_1 = 0.85$ . La Fig. 41 présente les vitesses à la surface libre et à l'interface pour les mêmes paramètres et montre, pour les quatre configurations, l'influence du débit quand le fluide de la couche supérieure est le moins visqueux.

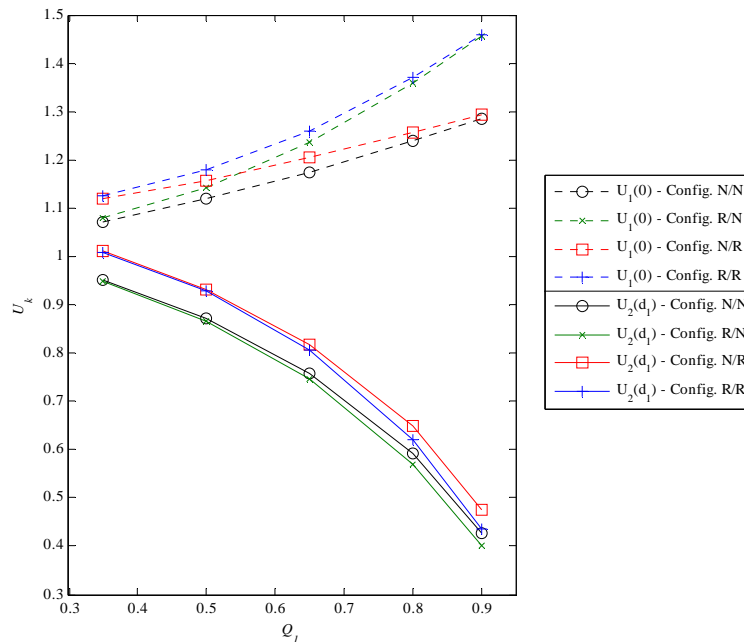


**Fig. 40.** Epaisseur des couches  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_1+d_2$  dans les configurations  $N/N$ ,  $R/N$ ,  $N/R$  et  $R/R$  en fonction du débit  $Q_1$  dans le cas  $E_1 = 0.4$ .

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $M_1 = 0.85$  et les paramètres rhéologiques :

$$L_k = 0, n_k = 1 \text{ si la couche } k \text{ est newtonienne,}$$

$$L_k = 0.8, n_k = 0.2 \text{ si la couche } k \text{ est rhéofluidifiante.}$$



**Fig. 41. Vitesse de la surface libre  $U_1(0)$  et vitesse de l'interface  $U_2(d_1)$  dans les configurations  $N/N$ ,  $R/N$ ,  $N/R$  et  $R/R$  en fonction du débit  $Q_1$  dans le cas  $E_1 = 0.4$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $M_1 = 0.85$  et les paramètres rhéologiques:

$$L_k = 0, n_k = 1 \text{ si la couche } k \text{ est newtonienne,}$$

$$L_k = 0.8, n_k = 0.2 \text{ si la couche } k \text{ est rhéofluidifiante.}$$

D'une manière générale, on note d'après ces courbes que, à mesure que  $Q_1$  augmente, quelle que soit la configuration, nous avons:

- un épaissement de la couche supérieure,
- un amincissement de la couche inférieure,
- une diminution de l'épaisseur totale,
- une accélération de la vitesse à la surface libre,
- un ralentissement de la vitesse à l'interface entre les couches.

La diminution de l'épaisseur totale de l'écoulement quand  $Q_1$  augmente traduit le fait que l'augmentation de l'épaisseur de la couche supérieure est moins rapide que la diminution de celle de la couche inférieure car  $Q_2$  diminue lorsque  $Q_1$  augmente. Ceci semble signifier que les modifications de l'épaisseur des couches touchent prioritairement les fluides les plus visqueux.

Dans le cas où le fluide de la couche supérieure est rhéofluidifiant, on remarque une plus forte accélération de la vitesse à la surface libre lorsque  $Q_1$  augmente, ainsi qu'une augmentation, moins rapide que dans le cas  $N/N$ , de l'épaisseur de la couche supérieure. Ainsi, l'écoulement s'adapte aux propriétés rhéofluidifiantes du fluide de la couche supérieure par une augmentation de la vitesse plus significative que celle de l'épaisseur.

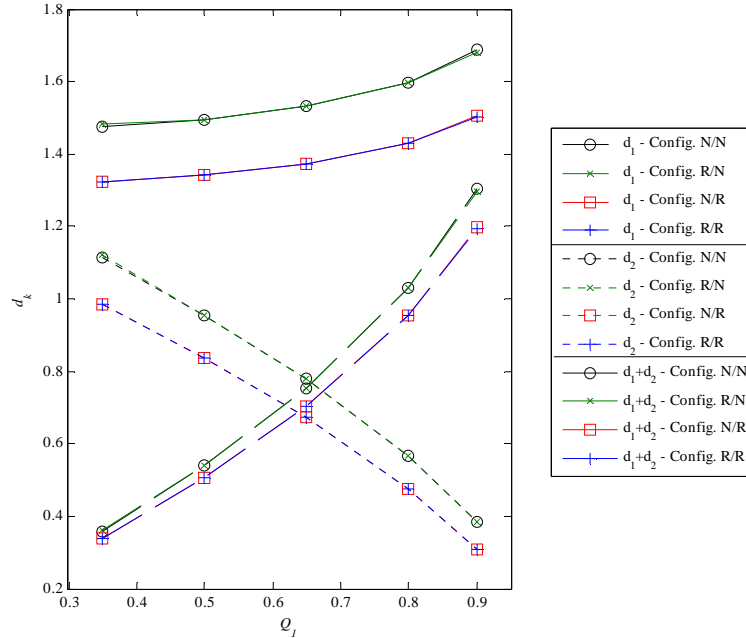
Lorsque le fluide de la couche inférieure est rhéofluidifiant ( $N/R$ ), l'épaisseur de la couche supérieure n'est pratiquement pas modifiée alors que celle de la couche inférieure devient nettement plus faible. Cet écart est plus marqué pour les faibles débits  $Q_1$  (forts débits  $Q_2$  du fluide rhéofluidifiant). Par conséquent, l'épaisseur totale de l'écoulement diminue quand le débit  $Q_1$  augmente. La vitesse de la surface libre ne subit qu'une faible augmentation, négligeable pour les forts débits  $Q_1$ . On note également que la vitesse de l'interface est plus grande que dans le cas  $N/N$  et que cet écart ne semble pas être influencé par la valeur du débit  $Q_1$ . D'une manière générale, on retrouve ainsi l'effet de la configuration rhéologique quand le fluide de la couche inférieure est rhéofluidifiant: l'épaisseur est plus affectée que la vitesse de l'interface.

Finalement nous considérons l'effet du débit  $Q_1$  sur les champs de base lorsque les fluides des deux couches sont des fluides de Carreau ( $R/R$ ). Concernant les épaisseurs et les vitesses des interfaces, on peut noter que chaque couche évolue comme dans la configuration rhéologique où elle est la seule couche rhéofluidifiante. Nous avons en effet :

- l'épaisseur  $d_1$  et la vitesse à la surface libre qui évoluent comme dans la configuration  $R/N$ ,
- l'épaisseur  $d_2$  et la vitesse à l'interface qui évoluent comme dans la configuration  $N/R$ .

Les modifications de ces grandeurs dans le cas  $R/R$  semblent être la somme des évolutions dans les configurations  $R/N$  et  $N/R$ . Il en résulte une évolution constante de l'épaisseur totale de l'écoulement par rapport au cas  $N/N$ , quelle que soit la valeur de  $Q_1$ .

L'évolution des champs quand le fluide de la couche supérieure est le plus visqueux, soit  $E_1 > 1$ , s'avère assez différente, nous renouvelons l'étude précédente pour le cas  $E_1 = 2.5$ .

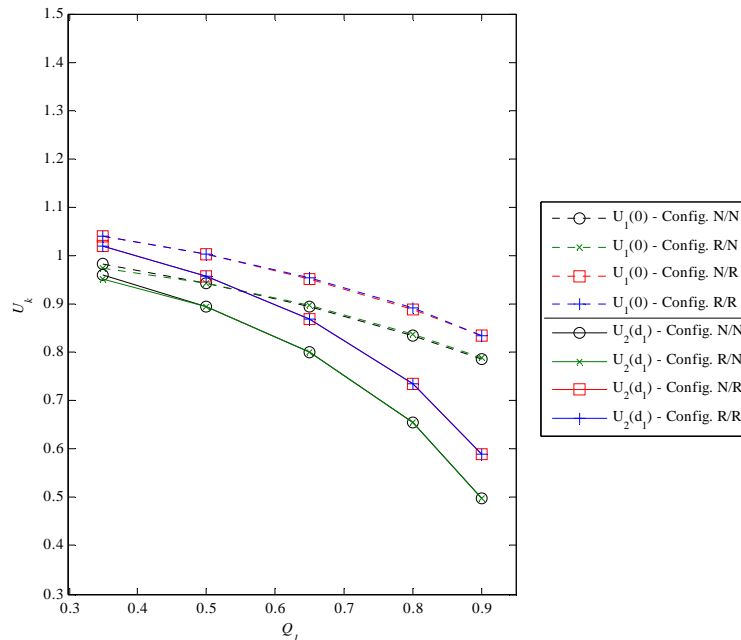


**Fig. 42.** Epaisseur des couches  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_1+d_2$  dans les configurations  $N/N$ ,  $R/N$ ,  $N/R$  et  $R/R$  en fonction du débit  $Q_1$  dans le cas  $E_1 = 2.5$ .

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $M_1 = 0.85$  et les paramètres rhéologiques :

$L_k = 0$ ,  $n_k = 1$  si la couche  $k$  est newtonienne,

$L_k = 0.8$ ,  $n_k = 0.2$  si la couche  $k$  est rhéofluidifiante.



**Fig. 43.** Vitesse de la surface libre  $U_1(0)$  et vitesse de l'interface  $U_2(d_1)$  dans les configurations  $N/N$ ,  $R/N$ ,  $N/R$  et  $R/R$  en fonction du débit  $Q_1$  dans le cas  $E_1 = 2.5$ .

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $M_1 = 0.85$  et les paramètres rhéologiques :

$L_k = 0$ ,  $n_k = 1$  si la couche  $k$  est newtonienne,

$L_k = 0.8$ ,  $n_k = 0.2$  si la couche  $k$  est rhéofluidifiante.

Sur les Fig. 42 et Fig. 43 présentant les épaisseurs et vitesses d'interfaces pour toutes les configurations en considérant  $E_1 = 2.5$ , on constate quand  $Q_1$  augmente :

- un épaissement de la couche supérieure,
- un amincissement de la couche inférieure,
- une **augmentation** de l'épaisseur totale,
- un **ralentissement** de la surface libre,
- un ralentissement de l'interface entre les couches.

Les différences par rapport à la stratification inverse en viscosité sont portées en gras. Le fait que l'épaisseur totale augmente avec le débit  $Q_1$  montre que l'épaisseur de la couche supérieure augmente plus vite que la couche inférieure ne s'amincit, confirmant notre remarque précédente selon laquelle l'épaisseur d'une couche est d'autant plus influencée par son débit que le fluide qu'elle contient est visqueux. Le ralentissement de la surface libre est aussi lié au fait que l'épaisseur de la couche supérieure augmente très rapidement : la surface libre est ralentie pour conserver le débit  $Q_1$ .

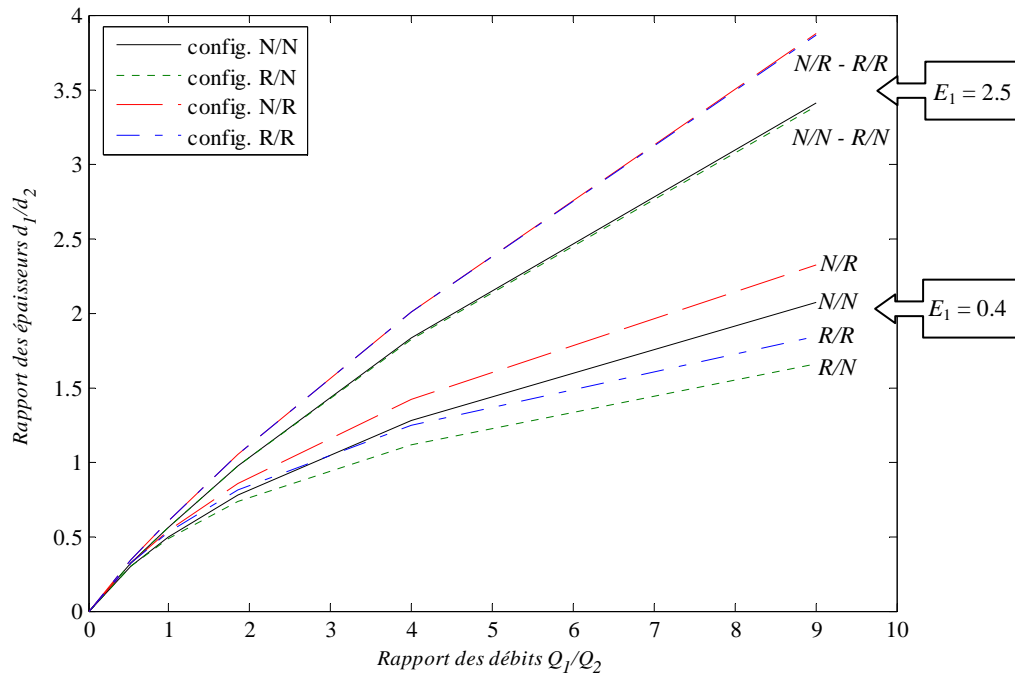
Par ailleurs, avec cette stratification en viscosité, on note sur les Fig. 42 et Fig. 43 que le changement de la nature du fluide de newtonien à rhéofluidifiant dans la couche supérieure a très peu d'effet sur les champs de base, quel que soit le débit  $Q_1$ . Ceci est dû aux faibles taux de cisaillement dans la couche supérieure, résultant de l'effet combiné de la stratification en viscosité et de la présence de la surface libre (cisaillement nul en  $y = 0$ ). A paramètres  $L_k$  et  $n_k$  équivalents, la viscosité locale est beaucoup moins influencée que dans le cas  $E_1 = 0.4$ . Ainsi les champs de base dans les configurations  $N/N$  et  $R/N$  sont très proches.

Quand la rhéologie de la couche inférieure est modifiée en passant de la configuration  $N/N$  à  $N/R$ , on constate que l'épaisseur des deux couches diminue. Cette diminution est fonction du débit  $Q_1$  : la variation de l'épaisseur  $d_1$  est d'autant plus importante que le débit  $Q_1$  est grand alors que l'épaisseur  $d_2$  est surtout influencée par les faibles débits  $Q_1$ . La différence majeure avec l'évolution du cas inverse en viscosité (Fig. 40 et Fig. 41) est que l'épaisseur  $d_1$  de la couche supérieure est fortement diminuée alors qu'elle est constituée d'un fluide newtonien. On peut expliquer cette différence par le fait que la pente du taux de cisaillement est faible. Le champ de vitesse est ainsi relativement uniforme dans la couche supérieure, et cela impose une évolution conséquente de son épaisseur dès que les conditions aux limites varient pour conserver le débit  $Q_1$ . Nous observons donc une évolution conjointe de l'épaisseur des deux couches et des vitesses des deux interfaces quand on passe d'une configuration  $N/N$  à  $N/R$ .

Enfin sur les Fig. 42 et Fig. 43 on constate pour la configuration  $R/R$  les mêmes évolutions que dans la configuration  $N/R$  étudiée juste avant. Comme l'introduction dans la couche supérieure d'un fluide de Carreau n'a pratiquement aucun effet sur les champs de base, on peut conclure une nouvelle fois à une addition des effets obtenus dans les configurations  $R/N$  et  $N/R$  pour obtenir les champs de la configuration  $R/R$ . De plus, la modification de l'épaisseur totale de l'écoulement n'est pas beaucoup influencée par la valeur du débit  $Q_1$ .

Ces observations confirment les comportements observés dans les sections précédentes concernant l'influence de la configuration rhéologique et du rapport de viscosité  $E_1$ .

Dans la majorité des études de stabilité de films multicouches de fluides newtoniens, l'une des variables de l'étude est le rapport des épaisseurs  $d_1/d_2$  entre les couches. Cependant, ce rapport ne peut pas être un paramètre de l'étude, il est remplacé par le débit  $Q_1$ . Il nous paraît important d'étudier l'influence du rapport  $d_1/d_2$  des épaisseurs entre les couches en fonction du rapport  $Q_1/Q_2$  entre les débits. La Fig. 44 donne ces courbes pour les différentes configurations rhéologiques et pour les cas  $E_1 = 0.4$  et  $E_1 = 2.5$ .



**Fig. 44. Rapport d'épaisseurs  $d_1/d_2$  entre les couches en fonction du rapport des débits imposés en entrée  $Q_1/Q_2$  dans chacune des configurations rhéologiques pour  $E_1 = 0.4$  et  $E_1 = 2.5$ .**  
 $\beta = 0.2$  rad,  $M_1 = 0.85$ .

Le rapport d'épaisseurs  $d_1/d_2$  évolue moins rapidement que le rapport des débits  $Q_1/Q_2$ . On retrouve les tendances observées précédemment quand la configuration rhéologique change :

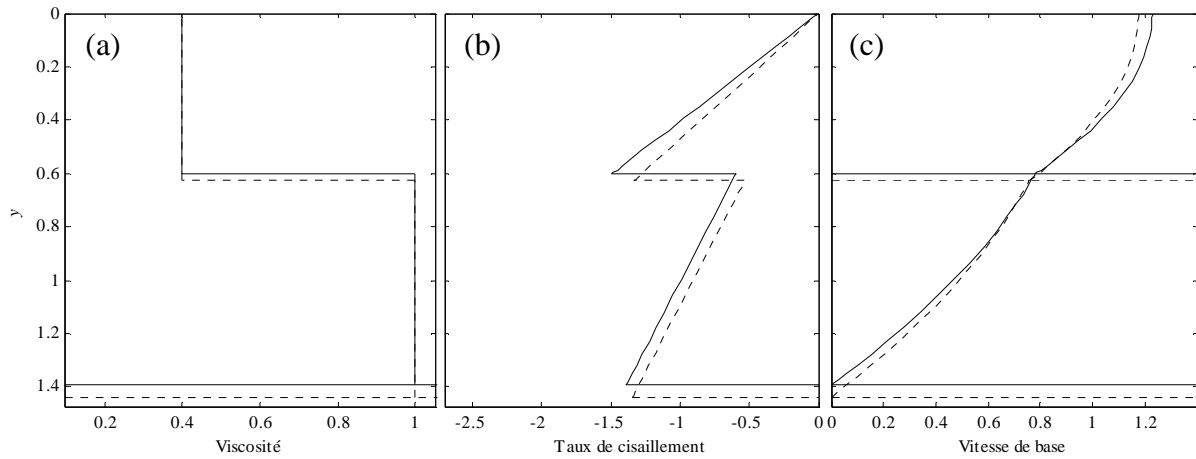
- Quand la rhéologie de la couche supérieure est modifiée de newtonienne à rhéofluidifiante (de N/N à R/N et N/R à R/R), il n'y a pratiquement pas d'évolution des épaisseurs quand  $E_1 = 2.5$  et une diminution de l'épaisseur de cette couche pour  $E_1 = 0.4$ ,
- Quand le fluide de la couche supérieure change de newtonien à rhéofluidifiant (de N/N à N/R et R/N à R/R) l'épaisseur de la couche inférieure diminue, provoquant la même augmentation du rapport des épaisseurs quelle que soit la rhéologie de la couche supérieure. Cette augmentation est plus forte quand  $E_1 = 2.5$ .
- de la configuration N/N à R/R : pour  $E_1 = 0.4$ , la réduction du rapport d'épaisseurs permet de conclure que la couche supérieure subit un amincissement plus rapide que la couche inférieure, et ceci est conforme à nos conclusions précédentes. Inversement quand  $E_1 = 2.5$ , le rapport des épaisseurs augmente tout comme pour le passage de N/N à N/R.

L'influence du débit  $Q_1$  est non négligeable sur les champs de base et les épaisseurs des couches. Les effets des autres paramètres (rapport des viscosités, paramètres rhéologiques...) sont plus ou moins marqués suivant la valeur du débit  $Q_1$  choisie.

## 1.5 Influence du rapport de densités $M_1$

Le dernier paramètre pouvant avoir une influence sur les champs de base est le rapport  $M_1$  des densités entre les couches. Les Fig. 45 et Fig. 46 donnent les profils de la viscosité, du taux de cisaillement et le champ de vitesses de base en fonction de la profondeur  $y$  pour les configurations N/N et R/R respectivement et pour deux valeurs différentes du rapport des densités  $M_1$ .

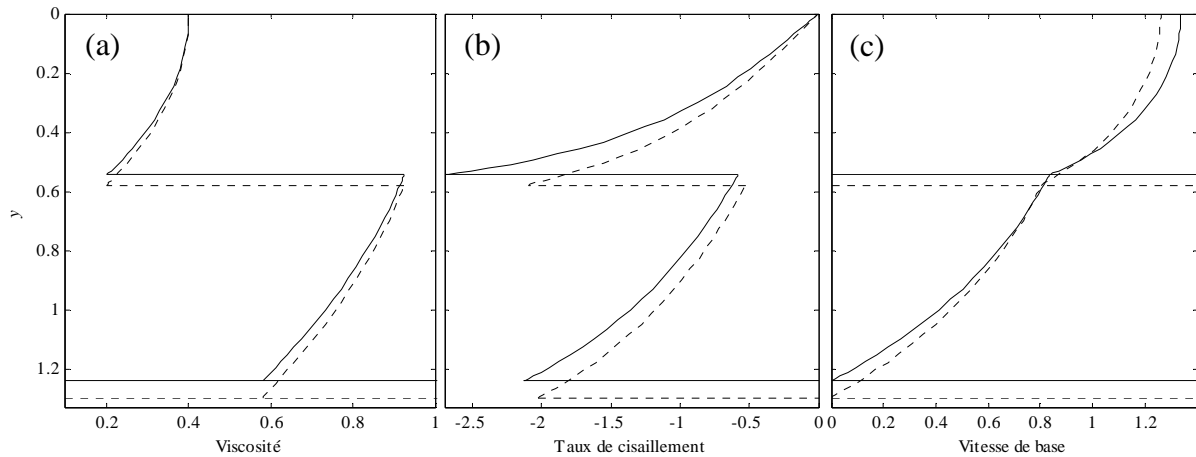




**Fig. 45. Comparaison des champs de base pour deux fluides newtoniens selon le rapport de densité  $M_1$  dans le cas  $E_1 = 0.4$ .**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$ ,  $L_1 = L_2 = 0$ ,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$  et  $Q_1 = 0.65$  pour deux rapports de densité différents :

-----  $M_1 = 0.85$ ,  
 ———  $M_1 = 0.99$ .



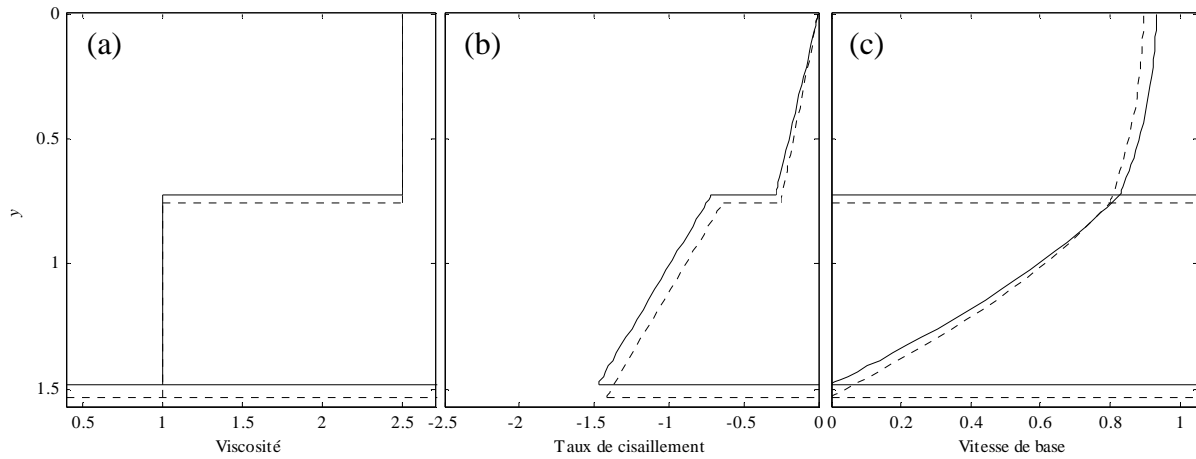
**Fig. 46. Comparaison des champs de base pour deux fluides rhéofluidifiants selon le rapport de densité  $M_1$  dans le cas  $E_1 = 0.4$ .**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$ ,  $L_1 = L_2 = 0.8$ ,  $n_1 = n_2 = 0.2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$  et  $Q_1 = 0.65$  pour deux rapports de densité différents :

-----  $M_1 = 0.85$ ,  
 ———  $M_1 = 0.99$ .

Le rapport des densités  $M_1$  a un effet sur les valeurs des vitesses et du cisaillement dans la configuration  $N/N$ : quand  $M_1$  augmente, le cisaillement maximal en valeur absolue dans chacune des couches augmente ainsi que la vitesse à la surface libre et à l'interface. Pour ces raisons, les deux couches s'amincissent. Dans le cas  $R/R$ , les pics de cisaillement s'écartent un peu plus pour les deux valeurs de  $M_1$  étudiées, et les effets décrits ci-dessus se trouvent accentué.

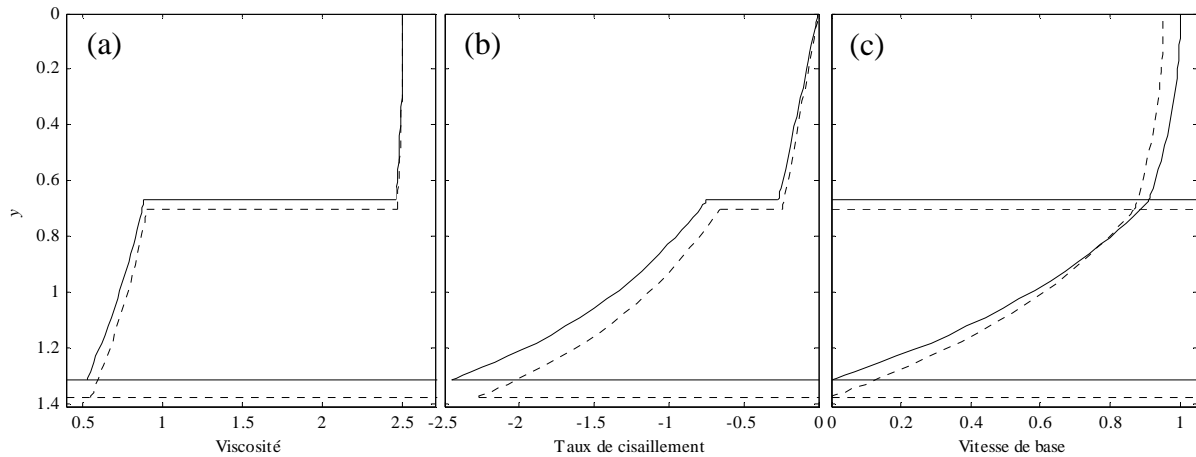
Les profils des différentes grandeurs sont présentés sur les Fig. 47 et Fig. 48 pour la stratification inverse en viscosité, c'est-à-dire pour  $E_1 = 2.5$ . Ils conduisent aux mêmes conclusions concernant l'influence de  $M_1$ .



**Fig. 47. Comparaison des champs de base pour deux fluides newtoniens selon le rapport de densité  $M_1$  dans le cas  $E_1 = 2.5$ .**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$ ,  $L_1 = L_2 = 0$ ,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$  et  $Q_1 = 0.65$  pour deux rapports de densité différents :

-----  $M_1 = 0.85$ ,  
 ———  $M_1 = 0.99$ .



**Fig. 48. Comparaison des champs de base pour deux fluides rhéofluidifiants selon le rapport de densité  $M_1$  dans le cas  $E_1 = 2.5$ .**

Viscosité (a), taux de cisaillement (b) et champ de vitesse de base (c) en fonction de la profondeur  $y$ ,  $L_1 = L_2 = 0.8$ ,  $n_1 = n_2 = 0.2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$  et  $Q_1 = 0.65$  pour deux rapports de densité différents :

-----  $M_1 = 0.85$ ,  
 ———  $M_1 = 0.99$ .

L'effet de l'augmentation du rapport des densités  $M_1$  consiste en une diminution de l'épaisseur des couches et une augmentation de la vitesse. Cet effet est le même quelle que soit la couche ayant la plus forte viscosité newtonienne,  $\eta_{0,k}$ .



## 2 ETUDE DE STABILITE - COUCHE INFERIEURE MOINS VISQUEUSE ( $E_1 > 1$ )

Nous étudions dans ce paragraphe l'influence du débit,  $Q_1$ , du rapport de densités,  $M_1$ , et des tensions de surface  $T_1$  et d'interface  $T_2$  sur la stabilité de deux couches superposées dans le cas où la couche inférieure est la moins visqueuse ( $E_1 > 1$ ). Les résultats de quatre configurations rhéologiques sont présentés en vue d'en extraire l'influence du modèle rhéologique sur la stabilité.

Ainsi que le montrent les résultats de la littérature dans le cas de deux couches de fluides newtoniens, trois instabilités différentes sont susceptibles de se déclencher lorsque  $E_1 > 1$ . Elles sont issues des deux modes les plus instables: le mode de surface et le mode d'interface. Le mode de surface peut donner naissance à une instabilité de grande longueur d'onde alors que le mode d'interface peut permettre la croissance de deux instabilités : l'une de grande longueur d'onde et l'autre d'une longueur d'onde de l'ordre de l'épaisseur des couches.

### 2.1 Influence du débit $Q_1$

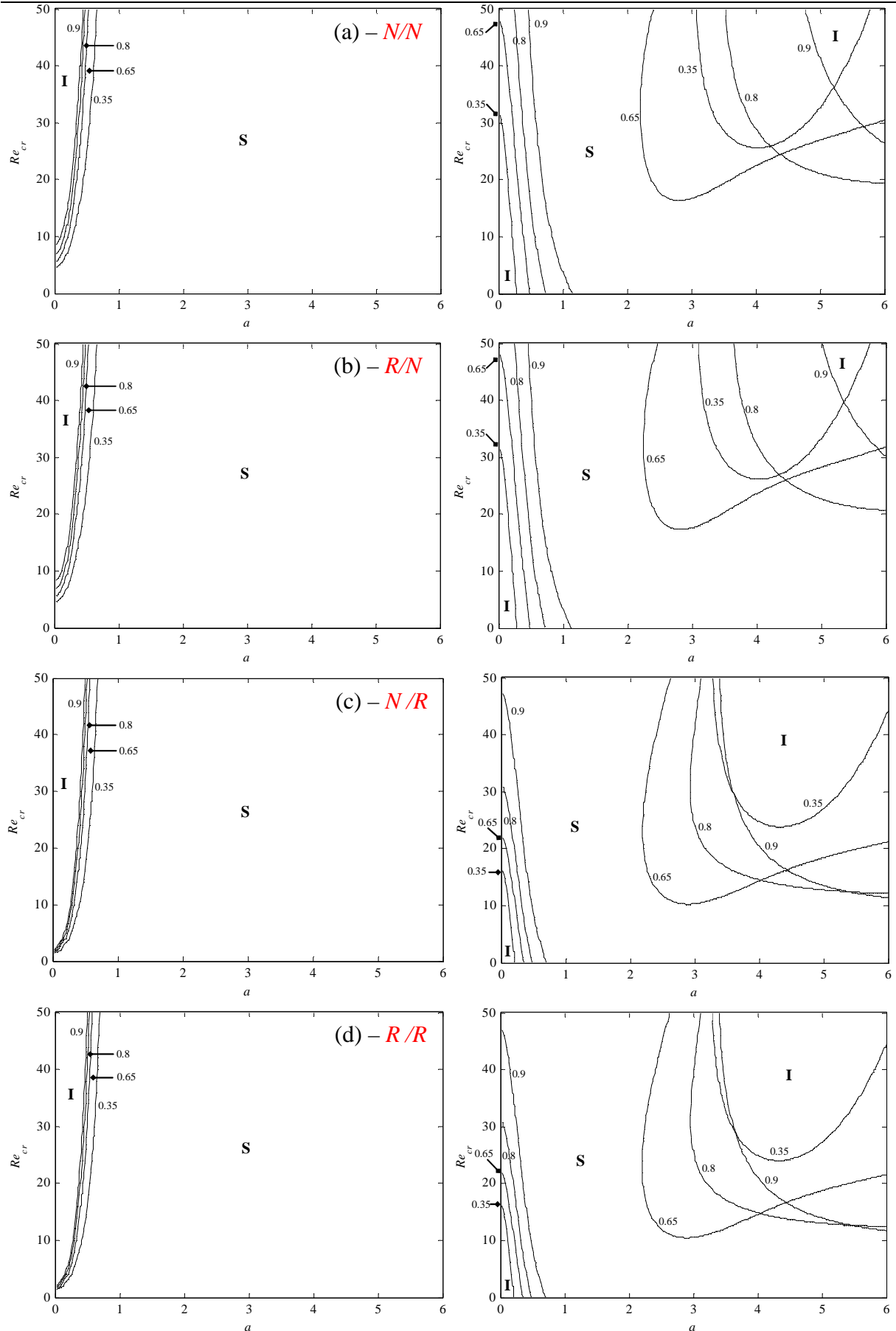
On représente sur la Fig. 49 les cartes de stabilité donnant les zones stables (**S**) et instables (**I**) en fonction du nombre d'onde et du nombre de Reynolds pour différents débits  $Q_1$ .

La variation du débit  $Q_1$  a un effet globalement identique sur la stabilité du mode de surface pour toutes les configurations rhéologiques : plus le débit dans la couche supérieure est grand, plus le nombre de Reynolds critique du mode de surface est grand, il est donc stabilisé.

Pour les modes d'interfaces, il faut dissocier le comportement des deux longueurs d'onde instables. On note que, pour toutes les configurations, le mode qui possède le seuil de déclenchement le plus faible est le mode d'interface à grande longueur d'onde ( $\alpha \rightarrow 0$ ). Ce mode peut permettre la croissance d'une instabilité sans inertie (*inertialess instability*) car il peut se déclencher même dans le cas  $Re = 0$ . Lorsque le débit  $Q_1$  augmente, la zone instable liée aux grandes longueurs d'onde s'étend, conduisant à une augmentation du nombre d'onde critique et du taux de croissance de ces ondes. Ces conclusions sont en accord avec les courbes de la Fig. 50 présentant les taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde pour les différents débits étudiés et pour un nombre de Reynolds  $Re = 30$ , dans les cas où les deux fluides sont newtoniens ( $N/N$ ) et celui où le fluide de la couche inférieure est rhéofluidifiant ( $N/R$ ).

En ce qui concerne les modes d'interface de longueur d'onde modérée, la zone instable s'élargit et se décale dans un premier temps vers les grandes longueurs d'onde (de  $Q_1 = 0.35$  à  $0.65$ ) puis, dans un deuxième temps, évolue en sens inverse en élargissant sa zone instable du côté des petites longueurs d'onde.

L'augmentation du débit  $Q_1$  a un effet récurrent sur les deux instabilités de grande longueur d'onde : celles du mode de surface sont stabilisées et celles du mode d'interface sont déstabilisées. Par contre il a un effet variable sur les longueurs d'onde modérées du mode d'interface.



**Fig. 49.** Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de débit  $Q_1 = 0.35, 0.65, 0.8, 0.9$  et  $M_1 = 0.85$ .

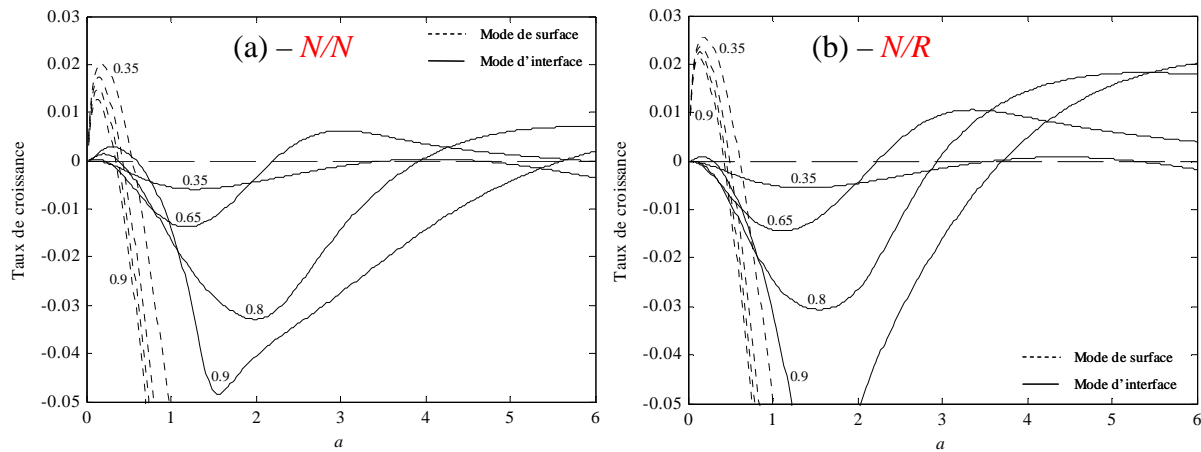
Résultats donnés pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite, avec  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 2.5$  et dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $R/N$  ( $L_1 = 0.8$ ,  $n_1 = 0.2$ ,  $L_2 = 0$  et  $n_2 = 1$ ),

(c) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ),

(d) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).



**Fig. 50. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents rapports de débit  $Q_1 = 0.35, 0.65, 0.8, 0.9$  et  $M_1 = 0.85$ .**

$Re = 30$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 2.5$  et dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ )

(b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

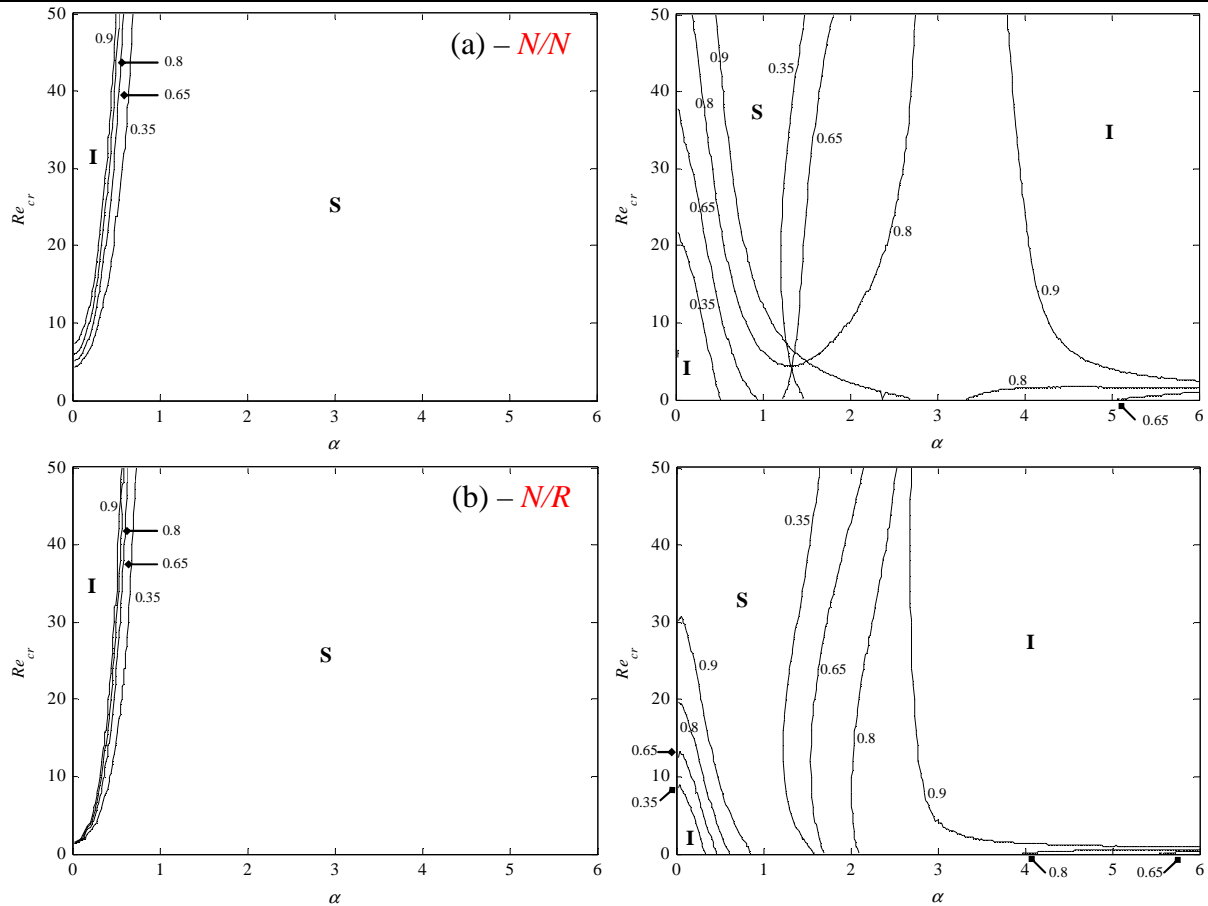
### Influence de la rhéologie du fluide:

En accord avec l'évolution des rapports d'épaisseurs en fonction du rapport des débits  $Q_1/Q_2$  présentée sur la Fig. 44, on note une nette ressemblance entre les cas où les deux fluides sont newtoniens ( $N/N$ ) et celui où seulement le fluide de la couche supérieure est rhéofluidifiant ( $R/N$ ). Les modes d'interface de longueur d'onde modérée sont toutefois faiblement stabilisés quand le fluide de la couche supérieure est rhéofluidifiant. De même les cartes de stabilité du cas où seul le fluide de la couche inférieure est rhéofluidifiant ( $N/R$ ) et celles du cas où les deux fluides sont rhéofluidifiants ( $R/R$ ) sont identiques. C'est donc la rhéologie du fluide contenu dans la couche inférieure qui a le plus d'influence sur la stabilité de l'écoulement: quand il est rhéofluidifiant, les seuils de déclenchement des modes de surface sont légèrement abaissés et les modes d'interface de grande longueur d'onde sont stabilisés. On observe également sur la Fig. 49 la stabilisation de ces modes d'interface à grande longueur d'onde induite par la rhéologie du fluide de la couche inférieure.

On remarque aussi que le seuil de déclenchement des modes de surface est beaucoup plus influencé par le débit  $Q_1$  quand le fluide contenu dans la couche inférieure est newtonien, comme on peut le constater en comparant les Fig. 49 (a) et (b) par rapport aux Fig. 49 (c) et (d).

L'augmentation du débit  $Q_1$  et donc l'éloignement relatif des deux interfaces de par l'élargissement de la couche supérieure a un effet déstabilisant sur les grandes longueurs d'onde du mode d'interface (Fig. 49). Par contre, le fait de passer dans la couche inférieure d'un fluide newtonien à un fluide rhéofluidifiant, ce qui consiste aussi en relatif à éloigner les deux interfaces (Fig. 44 pour  $E_1 = 2.5$ , et les cas  $N/N$  et  $N/R$ ), stabilise au contraire les modes d'interface de grandes longueurs d'onde. Ceci paraît en contradiction avec l'effet stabilisant de l'augmentation du débit  $Q_1$  et montre que l'épaisseur des couches n'est pas le seul facteur déterminant pour la stabilité du système.

Nous avons remarqué un comportement différent lorsque les deux couches ont des densités proches,  $M_1 \approx 1$ .



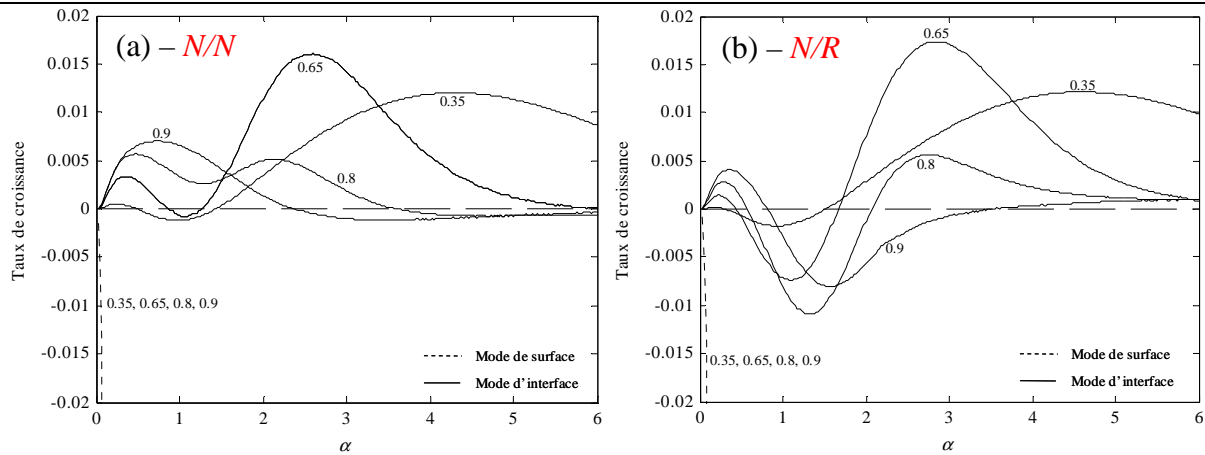
**Fig. 51. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de débit  $Q_1 = 0.35, 0.65, 0.8, 0.9$  et  $M_1 = 0.99$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 2.5$  pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

La Fig. 51 présente les cartes de stabilité concernant les deux configurations rhéologiques  $N/N$  et  $N/R$ . Quand le débit  $Q_1$  augmente (entre 0.65 et 0.8), on note sur la Fig. 51 (a) que les deux zones instables habituellement séparées par une zone stable se rejoignent pour de faibles nombres de Reynolds, traduisant le rapprochement des deux pics de taux de croissance des instabilités pouvant aller jusqu'à la coalescence. On note parallèlement l'apparition d'une zone stable à faible nombre de Reynolds et grand nombre d'onde ( $Q_1 = 0.65, 0.8$ ) dont la surface s'étend jusqu'à venir rejoindre l'autre zone de stabilité ( $Q_1 = 0.9$ ). On a alors une seule instabilité de grande longueur d'onde comme illustré sur la Fig. 52(a). Quand  $Q_1$  augmente, le nombre d'onde de l'instabilité de longueur d'onde modérée diminue et se rapproche de celui de l'instabilité de grande longueur d'onde. Parallèlement, son taux de croissance diminue à partir de  $Q_1 > 0.65$  et on observe la fusion des deux pics. Notons que ce comportement a déjà été montré pour le cas newtonien dans les travaux de Chen (1993).



**Fig. 52. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents rapports de débit  $Q_1 = 0.35, 0.65, 0.8, 0.9$  et  $M_1 = 0.99$ .**

$Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 2.5$  et dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

On peut noter à partir de la Fig. 51(b) que ce comportement se produit également quand la couche inférieure est rhéofluidifiante, sans le regroupement des zones instables. Deux pics de croissance des ondes d'interface pour deux longueurs d'onde distinctes sont toujours présents, comme le montre la Fig. 52(b). Pour de très petites valeurs de  $Re$  uniquement, les longueurs d'onde modérées sont stabilisées et il n'existe qu'une instabilité de grande longueur d'onde. Pour les deux autres configurations rhéologiques  $R/N$  et  $R/R$ , nous avons obtenu des comportements similaires respectivement à  $N/N$  et  $N/R$ .

Quand la couche inférieure est la moins visqueuse, c'est sa rhéologie qui contrôle la stabilité du système. L'étude des champs de base a montré que dans le cas  $E_1 > 1$ , la rhéofluidification de la couche inférieure provoque principalement une diminution de son épaisseur (plus marquée que l'accélération de l'interface). Cette diminution de l'épaisseur semble favoriser :

- la stabilisation des grandes longueurs d'ondes du mode d'interface,
- la déstabilisation du mode de surface.

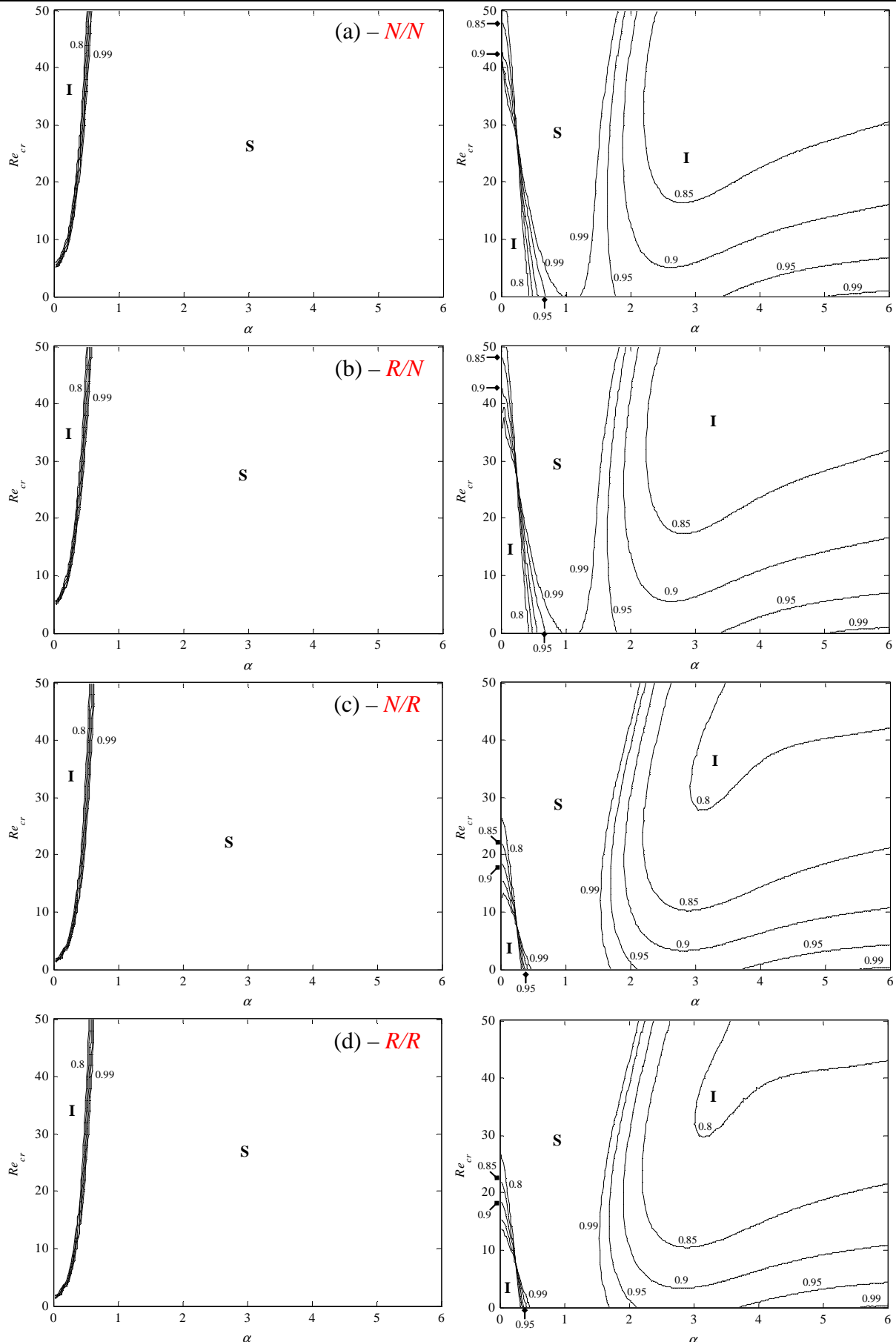
On ne peut pas conclure d'une façon générale sur le comportement régulier pour les longueurs d'onde modérées du mode d'interface.

Les différences entre les Fig. 49 et Fig. 51 montrent que le rapport de densités entre les couches a une influence sur la stabilité. L'effet de ce paramètre est présenté dans le paragraphe suivant.

## 2.2 Influence du rapport de densités $M_1$

Dans notre étude sur l'influence du rapport des densités  $M_1$  entre les couches sur la stabilité de l'écoulement de deux couches de fluides superposées, nous nous limitons aux cas  $M_1 < 1$  sans quoi la couche supérieure deviendrait plus dense que la couche inférieure, cas pour lequel d'autres types d'instabilités que celles auxquelles on s'intéresse pourraient se développer (instabilités de type Rayleigh-Taylor). Les résultats pour les quatre configurations rhéologiques données plus haut sont résumés sur les Fig. 53 (a)-(d).





**Fig. 53. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de densités  $M_1 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 2.5$  et  $Q_1 = 0.65$  pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $R/N$  ( $L_1 = 0.8$ ,  $n_1 = 0.2$ ,  $L_2 = 0$  et  $n_2 = 1$ ),

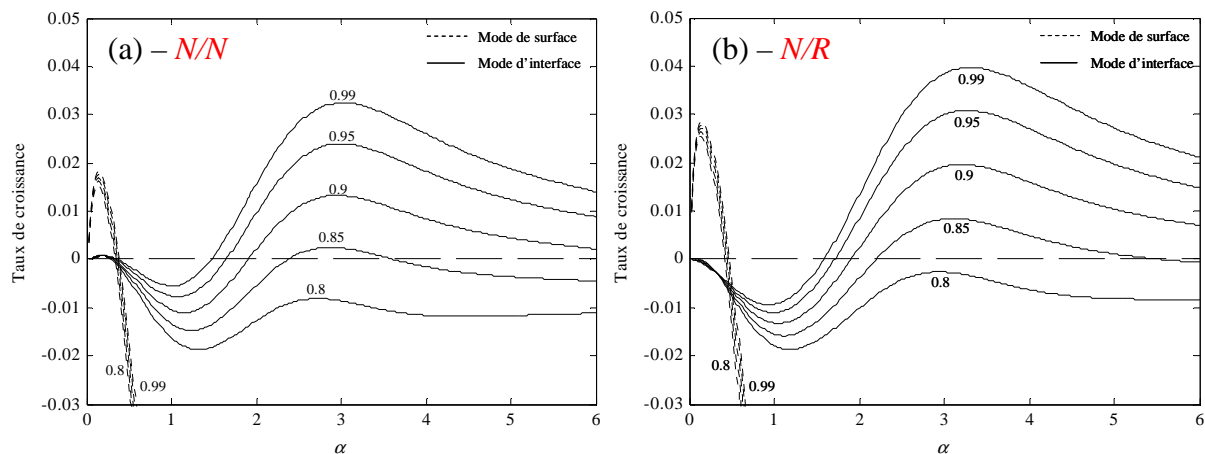
(c) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ),

(d) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).

Pour les modes de surface, l'analyse des cartes de stabilité montre que le rapport des densités  $M_1$  a peu d'influence sur leur seuil de déclenchement. Quel que soit le rapport  $M_1$ , le mode critique est de nouveau le mode d'interface de grande longueur d'onde sans inertie. Le nombre de Reynolds maximum pour lequel ce mode est instable a tendance à diminuer quand  $M_1$  augmente, tandis que son nombre d'onde  $\alpha$  augmente. On constate effectivement sur les Fig. 53 que l'aire de la zone instable correspondant aux instabilités de grande longueur d'onde est globalement diminuée. De plus les courbes neutres pour différents rapports de densités se croisent toutes pour un même nombre de Reynolds,  $Re_{cross}$ , qui se situe autour de 27 pour les cas (a) et (b) et 8 pour les cas (c) et (d). On peut résumer l'effet de l'augmentation du rapport de densités  $M_1$  sur la stabilité du mode d'interface de grande longueur d'onde comme suit:

- pour  $Re < Re_{cross}$ , il est déstabilisé et le nombre d'onde de l'instabilité augmente,
- pour  $Re > Re_{cross}$ , il est stabilisé et le nombre d'onde de l'instabilité diminue.

Par ailleurs, et conformément à ce qu'on peut observer sur la Fig. 54, l'augmentation du rapport des densités  $M_1$  entre les couches déstabilise le mode d'interface à longueur d'onde modérée en abaissant son seuil de déclenchement jusqu'à ce qu'il devienne nul ( $Re_{cr} = 0$ ) pour une valeur de  $M_1$  comprise entre 0.9 et 0.95.



**Fig. 54. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents rapports de densités  $M_1 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99$  et  $Re = 20$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$  et  $Q_1 = 0.65$  dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

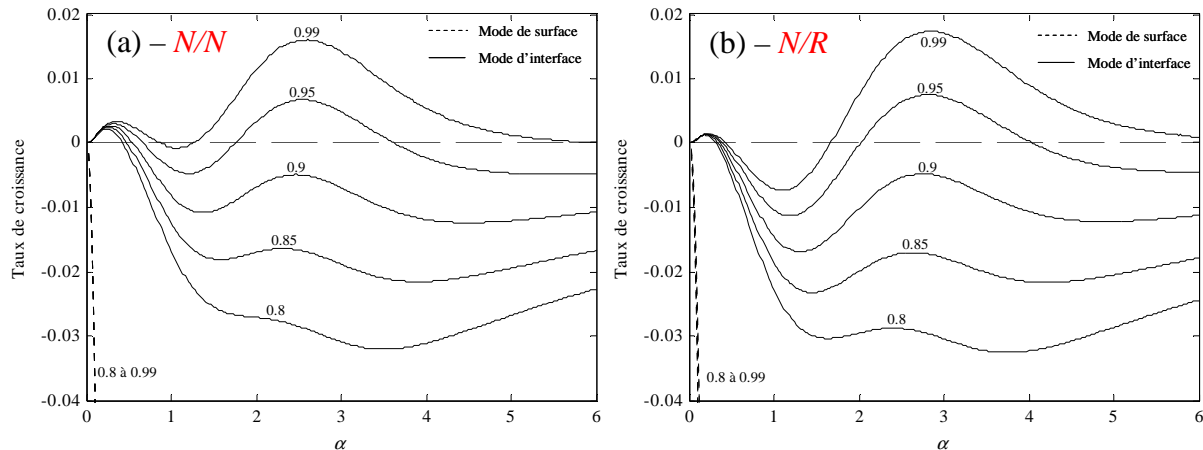
(b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

### Influence de la rhéologie :

La Fig. 54 résume également l'influence de la rhéologie du fluide de la couche inférieure. On observe d'après cette figure que lorsque la couche inférieure est rhéofluidifiante, le taux de croissance du mode de surface ainsi que du mode d'interface de longueur d'onde modérée augmente. En parallèle, l'instabilité d'interface de grande longueur est stabilisée et n'apparaît plus au-delà d'une certaine valeur limite du nombre de Reynolds. Comme on peut le voir sur la Fig. 53 (c), les grandes longueurs d'onde sont stabilisées à partir de  $M_1 = 0.9$ . Pour  $Re = 20$ , nous avons suivant les valeurs de  $M_1$  soit une instabilité de surface, soit une instabilité d'interface avec une longueur d'onde modérée. Par contre, en comparaison au cas  $N/N$ , la rhéologie du fluide de la couche supérieure (cas  $R/N$ ) n'a que peu d'influence sur la stabilité.

Rappelons que nos résultats concernant les grandes longueurs d'onde du cas  $N/N$  sont en parfait accord avec ceux de Kao (1968). Ils montrent une déstabilisation des modes de surface ainsi qu'une stabilisation des modes d'interface quand le rapport des densités  $M_1$  (noté  $\gamma$  par Kao) croît. On retrouve également le seuil critique à  $Re_{cr} = 0$  pour les modes d'interface (Fig. 7 – Chapitre 1). Soulignons que l'étude de Kao (1968) est basée sur une approche grandes longueurs d'onde, et fait ainsi l'impasse sur la forte déstabilisation des modes d'interface de longueur d'onde modérée. Notre étude Hu, *et al.* (2006) complète l'étude de Kao (1968) et l'élargit à toutes longueurs d'onde.

Pour un nombre de Reynolds plus faible,  $Re = 1$ , pour lequel les modes de surface sont stables, on observe sur les Fig. 55 (a) et (b) lorsque  $M_1$  augmente une évolution progressive du taux de croissance des longueurs d'onde modérées qui deviennent les plus instables au-delà d'une certaine valeur limite de  $M_1$ .



**Fig. 55. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents rapports de densités  $M_1 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99$  et  $Re = 1$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$  et  $Q_1 = 0.65$  dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

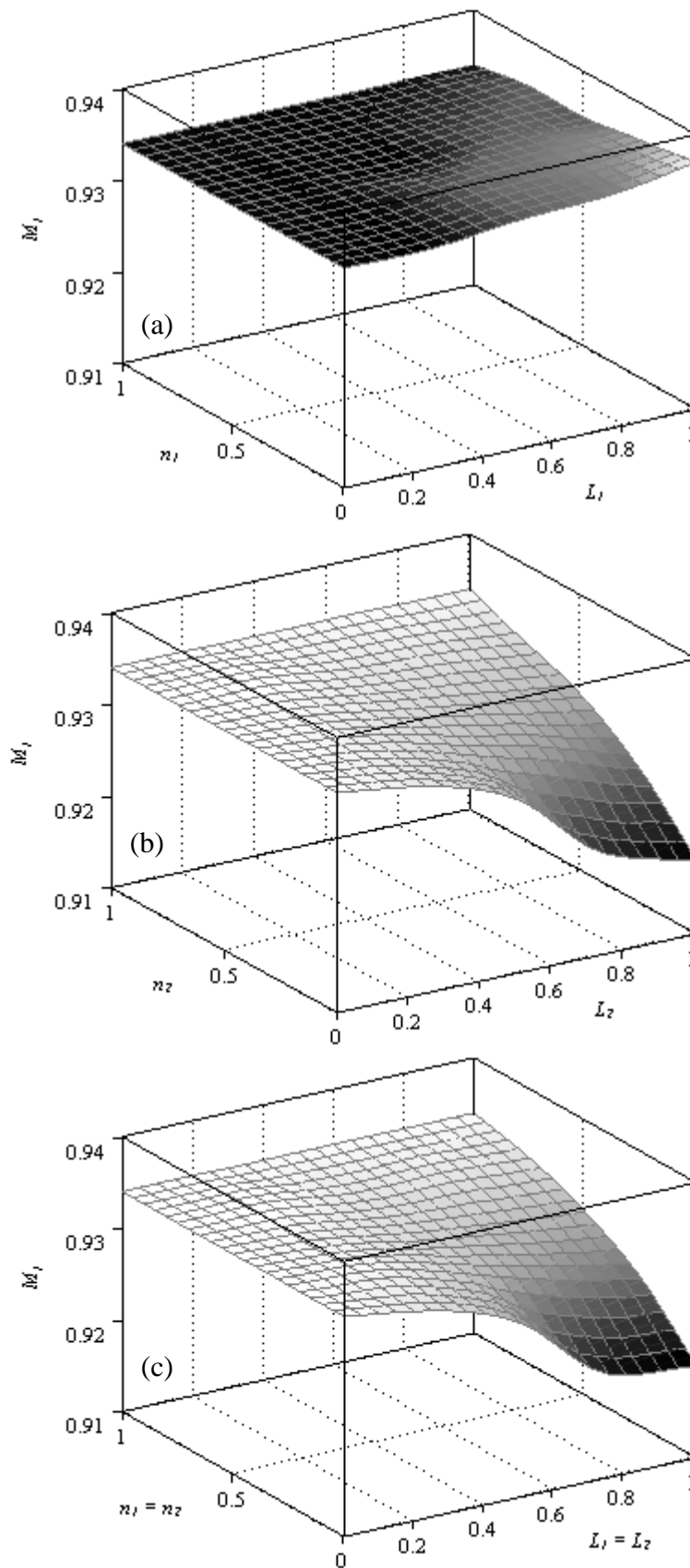
(b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

Par conséquent, il existe une valeur seuil  $M_{1c}$  en termes de rapport des densités pour laquelle on bascule d'une instabilité d'interface de grande longueur d'onde à une instabilité d'interface de longueur d'onde modérée. L'existence de ce seuil a déjà été montré dans le travail de Hu, *et al.* (2006) dans le cas  $N/N$ . Nous nous sommes intéressés à l'influence des propriétés rhéologiques des fluides sur la valeur de ce seuil de rapport des densités délimitant le saut de longueur d'onde de l'instabilité. Nous avons présenté sur la Fig. 56 les surfaces des rapports de densités limites  $M_{1c}$  en fonction des paramètres  $L_k$  et  $n_k$  de la loi de Carreau dans la couche  $k$  pour un nombre de Reynolds  $Re = 1$ .

Dans le cas où la couche inférieure est un fluide de Carreau, on observe sur la Fig. 56(b) que la valeur limite  $M_{1c}$  du rapport de densité diminue au fur et à mesure que les propriétés rhéofluidifiantes du fluide augmentent, soit que  $L_2$  augmente et/ou  $n_2$  diminue. Rappelons que, d'après ce qui précède, diminuer  $M_1$ , de manière à avoir une couche inférieure beaucoup plus dense que la couche supérieure, revient à stabiliser les longueurs d'onde modérées du mode d'interface, alors qu'augmenter les propriétés rhéofluidifiantes des fluides conduit à la déstabilisation de ces dernières. Il existe par conséquent une compétition entre les effets du rapport de densité  $M_1$  et les effets rhéofluidifiants de la couche inférieure. L'évolution constatée sur la Fig. 56 (b), signifie que malgré l'effet stabilisant de la baisse du rapport de densité, les perturbations de longueur d'onde modérée subissent un fort effet déstabilisant dû au comportement rhéofluidifiant de la couche inférieure. Une évolution opposée, mais toutefois moins marquée, est constatée sur la Fig. 56 (a) quand la couche supérieure est un fluide de Carreau. Le fait qu'elle soit moins marquée peut s'expliquer par le fait que le fluide de la couche supérieure, en passant de newtonien à rhéofluidifiant, ne modifie que très peu le champ de base. Par ailleurs, avec une couche supérieure rhéofluidifiante, on obtient des seuils du rapport de densité  $M_{1c}$  qui augmentent au fur et à mesure que les propriétés rhéofluidifiantes du fluide augmentent, soit que  $L_1$  augmente et/ou  $n_1$  diminue. Par conséquent, la conjugaison des deux effets stabilisants, celui dû au rapport de densité  $M_1$ , ajouté à celui des propriétés rhéofluidifiantes du fluide de la couche supérieure, produit une élévation du seuil de basculement entre les deux instabilités. En suivant le même raisonnement, on explique pourquoi sur la Fig. 56 (c) le seuil critique  $M_{1c}$  est abaissé quand les propriétés rhéofluidifiantes du fluide augmentent, mais de manière légèrement moins forte que quand le fluide de la couche supérieure est newtonien.

Nous avons montré que la valeur limite du rapport de densités  $M_{1c}$  dépend de la nature des fluides. Dans les cas  $N/R$  et  $R/R$ , les longueurs d'onde modérées sont déstabilisées alors qu'en parallèle les grandes longueurs d'onde sont stabilisées et la limite  $M_{1c}$  s'en trouve ainsi abaissée. Ceci est indépendant de la rhéologie du fluide de la couche supérieure. Les zones de prédominance des instabilités de longueur d'onde modérée se trouvent donc élargies. Par contre, dans le cas  $R/N$ , les

instabilités de longueur d'onde modérée sont légèrement stabilisées, les changements sont observés pour des valeurs de  $M_{lc}$  légèrement plus élevées.



**Fig. 56. Rapport de densité limite  $M_{lc}$  pour différentes configurations.**

$Re = 1$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $\beta = 0.2$  rad dans la configuration:

(a)  $R/N$  en fonction de  $L_1$  et  $n_1$ ,

(b)  $N/R$  en fonction de  $L_2$  et  $n_2$ ,

(c)  $R/R$  en fonction de  $L_1 = L_2$  et  $n_1 = n_2$ .

## 2.3 Influence de la tension de surface $T_1$ et d'interface $T_2$

Jusqu'à présent, la valeur de la tension de surface au niveau de la surface libre et de l'interface est prise égale à zéro ( $Ca_k = (\bar{T}_k \bar{d}_s / \bar{\eta}_{0,N} \bar{Q}_T) = 0$ ). Il est néanmoins établi par Chen (1993) que la tension de surface peut jouer un rôle important dans le cas de films de fluides newtoniens superposés en s'opposant à la déformation des interfaces. Elle a pour effet de stabiliser les instabilités de faible longueur d'onde. Nous avons dans ce qui suit étendu l'étude de Chen (1993) au cas des fluides rhéofluidifiants.

Afin d'avoir une idée des valeurs typiques que peuvent prendre les nombres capillaires dans les applications mentionnées en introduction, nous prenons dans les Tableau 4 et Tableau 5 deux exemples correspondant au couchage de polymères fondus et de polymères en solution.

Viscosité	$10^4$ à $10^6$ kg/m <sup>3</sup>
Tension de surface	$10^{-2}$ à $10^{-1}$ Pa.s
Vitesse	$10^{-3}$ m/s

Tableau 4. Paramètres du fluide - Polymère fondu: cas du polyéthylène.

Viscosité	$10^1$ kg/m <sup>3</sup> (3% de PEO dans l'eau) à $10^2$ kg/m <sup>3</sup> (3% de PEO dans un mélange eau-glycérine à proportions égales)
Tension de surface	$10^{-2}$ à $10^{-1}$ Pa.s
Vitesse	$10^{-1}$ m/s

Tableau 5. Paramètres du fluide - Polymères en solution: cas d'un PEO en solution dans l'eau et la glycérine (données de Ortiz – 1992).

Sachant que la grandeur caractéristique  $\bar{Q}_T / \bar{d}_s$  représente un ordre de grandeur des vitesses de couchage, on obtient des nombres capillaires  $Ca$  de l'ordre de  $10^{-5}$  à  $10^{-2}$  dans le cas des polymères fondus et de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-1}$  dans le cas des polymères en solution. Nous étudions l'effet de la tension de surface au niveau de l'interface tout d'abord, puis au niveau de la surface libre, pour des nombres capillaires  $Ca_k$  variant de 0 à 1.

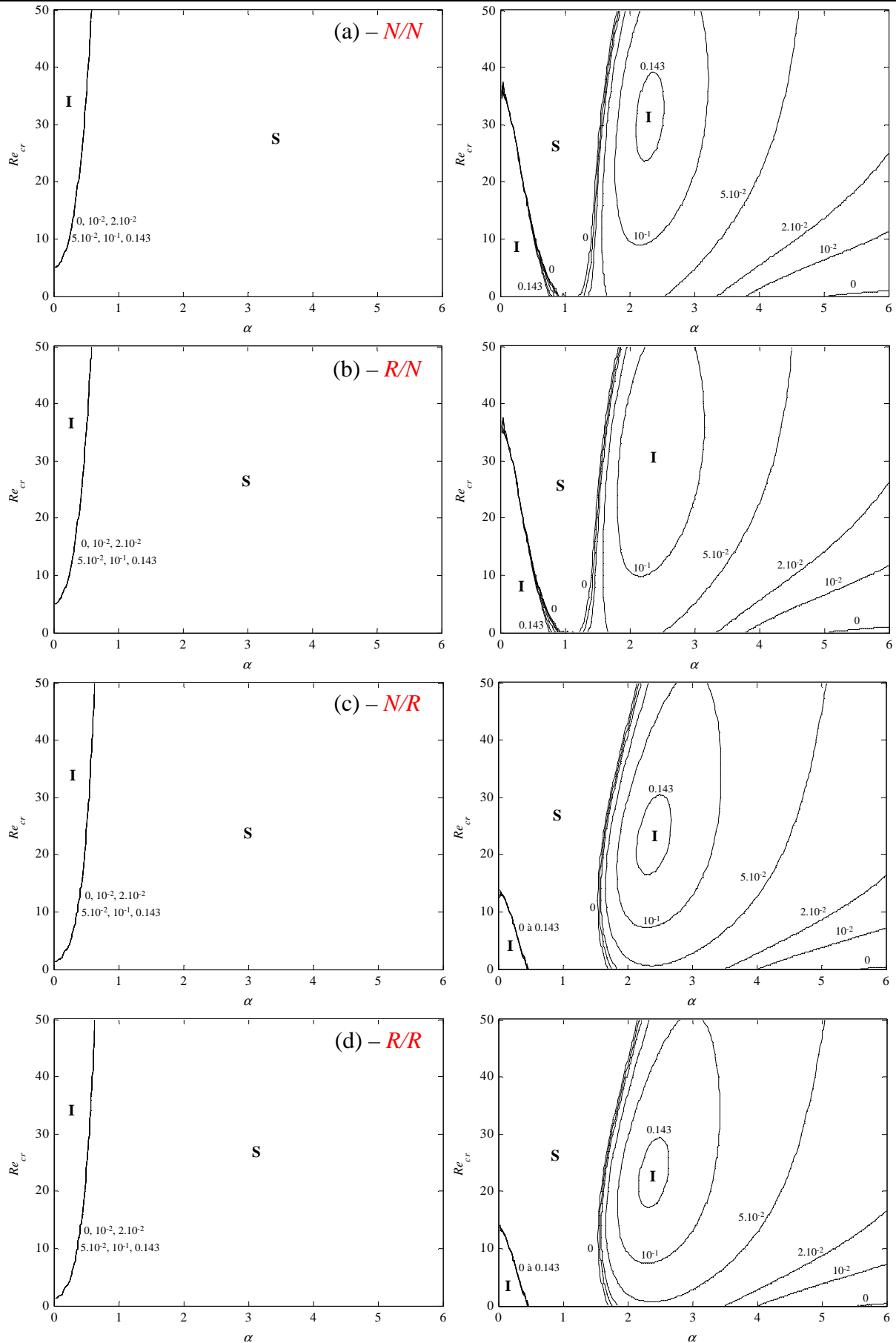
### 2.3.1 La tension d'interface $T_2$

La Fig. 57 représente les courbes neutres de stabilité dans les quatre configurations rhéologiques pour les modes de surface et les modes d'interface avec différentes valeurs du nombre capillaire relatif à l'interface  $Ca_2$ , soit pour différentes tension d'interface  $T_2$ .

Quelle que soit la configuration rhéologique, plusieurs tendances générales peuvent être dégagées :

- les modes de surface ne sont pas influencés par le nombre capillaire  $Ca_2$ ,
- les courbes neutres des grandes longueurs d'onde des modes d'interface sont très peu modifiées,
- la zone instable des longueurs d'onde modérées rétrécit lorsque le nombre capillaire  $Ca_2$  augmente et finit par disparaître complètement lorsque la valeur de  $Ca_2$  devient suffisamment grande.

On présente sur la Fig. 58 et pour un nombre de Reynolds de 20 les taux de croissance des deux modes en fonction du nombre d'onde dans deux configurations ( $N/N$  et  $N/R$ ). Il est clair d'après la figure que la prise en compte d'une tension de surface au niveau de l'interface ne stabilise que les modes d'interface de longueur d'onde modérée. La diminution conséquente de l'aire des zones instables s'explique par une forte stabilisation des modes de grand nombre d'onde. Ceci est en accord avec ce à quoi on pouvait s'attendre, la tension de surface n'agissant pas sur les instabilités de grande longueur d'onde.



**Fig. 57. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents nombres capillaires  $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-1}, 0.143$ .**

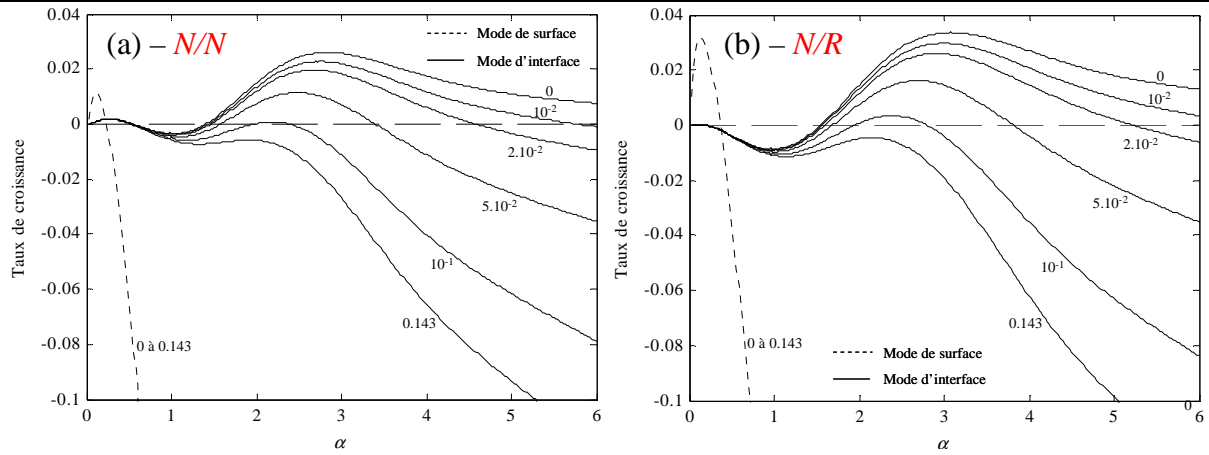
$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = 0$ ,  $E_1 = 2.5$   $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $R/N$  ( $L_1 = 0.8$ ,  $n_1 = 0.2$ ,  $L_2 = 0$  et  $n_2 = 1$ ),

(c) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ),

(d) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).



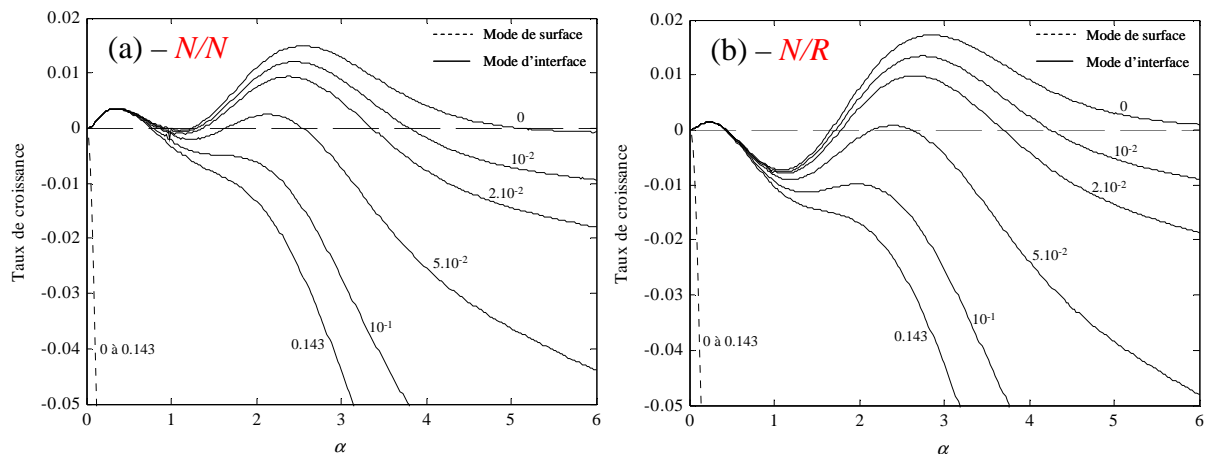
**Fig. 58. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents nombre capillaires  $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-1}, 0.143$  et  $Re = 20$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ) (b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

### Influence de la rhéologie :

L'analyse de la Fig. 57 montre que l'importance des effets de la tension de surface sur la stabilité de l'écoulement est modifiée par la rhéologie des fluides. Lorsque le fluide de la couche inférieure est rhéofluidifiant, les surfaces des zones instables ne sont que légèrement modifiées. Cependant leurs seuils de déclenchement sont resserrés. Effectivement, une comparaison de la Fig. 57 (c) avec la Fig. 57 (a) montre que pour  $Ca_2 = 0.143$  ou  $10^{-1}$  le seuil d'apparition diminue (déstabilisation) alors que pour  $Ca_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  il augmente (stabilisation). Les mêmes remarques peuvent être faites concernant les Fig. 57 (d) et Fig. 57 (a), avec toutefois une légère stabilisation du mode d'interface de longueur d'onde modérée. Pour les configurations  $N/R$  et  $R/R$ , le comportement des courbes de stabilité neutre relatives aux modes d'interface à longueur d'onde modérée semble montrer un effet spécifique à la tension de surface au niveau de l'interface: pour certaines valeurs de la tension de surface ( $Ca_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  par exemple), l'effet stabilisant de la tension de surface domine l'effet déstabilisant dû à la rhéologie observé précédemment en l'absence de tension de surface.



**Fig. 59. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents nombre capillaires  $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 10^{-1}, 0.143$  et  $Re = 1$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ), (b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

Ce comportement est clairement décrit par les Fig. 59 (a) et (b) représentant les taux d'amplifications des deux modes. En effet, on observe, quand le fluide de la couche inférieure devient rhéofluidifiant, d'un côté une diminution du taux de croissance pour  $Ca_2 \geq 5 \cdot 10^{-2}$  et de l'autre une augmentation de ce taux quand  $Ca_2 \leq 2 \cdot 10^{-2}$ .

Lorsque la valeur de  $Ca_2$  est supérieure à une certaine valeur limite, on note une stabilisation du mode d'interface de longueurs d'onde modérée quand le fluide de la couche inférieure change de newtonien à rhéofluidifiant. Ce comportement est totalement opposé à celui observé jusqu'à présent sans tension de surface.

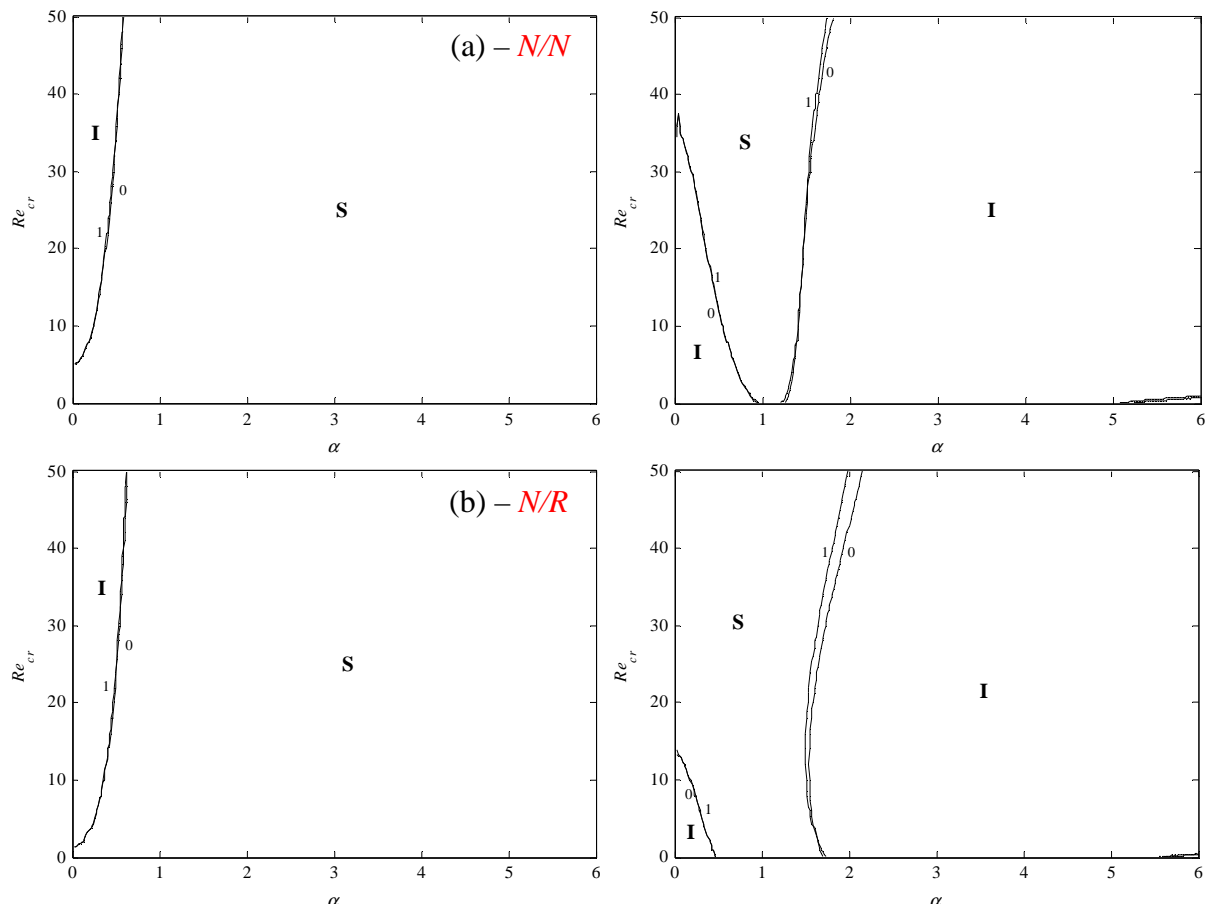
### 2.3.2 La tension de surface $T_1$

Lorsque l'on considère au contraire une tension de surface non négligeable sur la surface libre de la couche supérieure, alors que celle de l'interface est négligeable, on observe des évolutions beaucoup moins marquées. Nous avons présenté sur les Fig. 60 (a) et (b) les courbes de stabilité neutre dans deux configurations :  $N/N$  et  $N/R$ . Nous avons également présenté sur la Fig. 61 les taux de croissance de ces modes pour  $Re = 10$ .

A partir de ces deux figures, on peut faire les remarques suivantes:

- Les instabilités de grande longueur d'onde ne sont pas modifiées par la tension de surface,
- L'instabilité interfaciale de longueur d'onde modérée est peu sensible à la rigidification de la surface libre. On peut remarquer par ailleurs que cette influence ne s'étend pas vers les grands nombres d'onde, contrairement au cas où la tension de surface au niveau de l'interface est active. Ceci explique pourquoi les délimitations des zones stables et instables sur les cartes de stabilité ne sont pratiquement pas modifiées.

Bien que la tension de surface au niveau de la surface libre n'ait que peu d'effet sur la stabilité de l'écoulement à deux couches, elle garde tout de même la capacité de changer la nature des instabilités dans certains cas. C'est en particulier le cas sur la Fig. 61 (b) où se manifestent des modes de surface à grande longueur d'onde si  $Ca_1 = 1$  et des modes d'interface à longueur d'onde modérée si  $Ca_1 = 0$ .



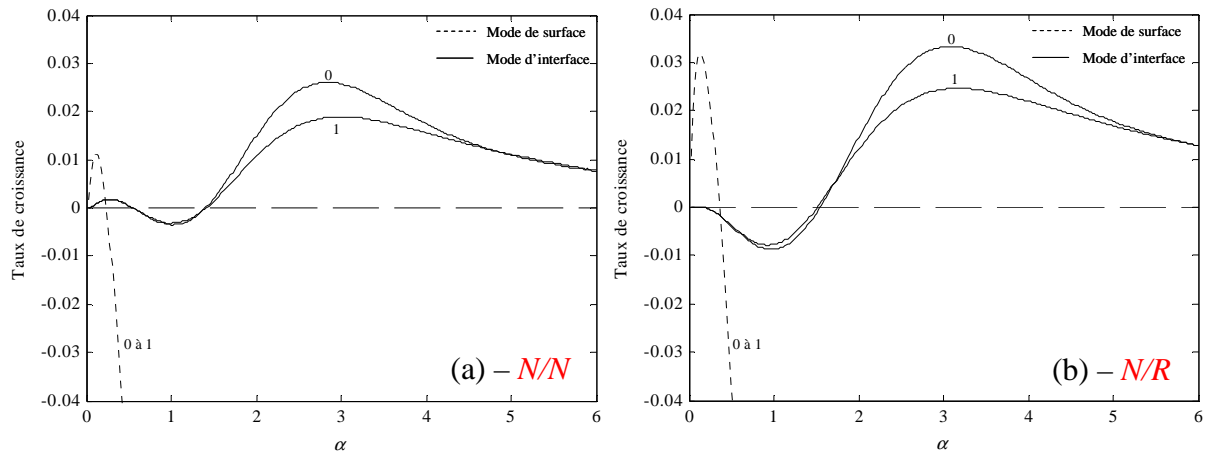
**Fig. 60. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour deux nombres capillaires  $Ca_1 = 0$  et 1.**

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 2.5$   $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).





**Fig. 61. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux nombres capillaires  $Ca_1 = 0$  et  $1$  et  $Re = 10$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

### 3 ETUDE DE STABILITE - COUCHE INFERIEURE PLUS VISQUEUSE ( $E_1 < 1$ )

---

Nous nous intéressons dans cette partie de l'étude au cas où le fluide de la couche inférieure est le plus visqueux des deux. Dans ces conditions, les travaux de Chen (1993) ont montré que, dans le cas de fluides newtoniens, l'instabilité d'interface n'apparaît pas forcément à nombre de Reynolds nul. Les modes les plus dangereux peuvent alors être des deux types –de surface ou d'interface– selon les paramètres de l'étude. Nous allons dans cette partie étudier l'influence des différents paramètres (rapport des débits, rapport des densités, et tensions de surfaces) sur la stabilité de l'écoulement. Pour chacun des paramètres, nous observons également l'influence de la configuration rhéologique.

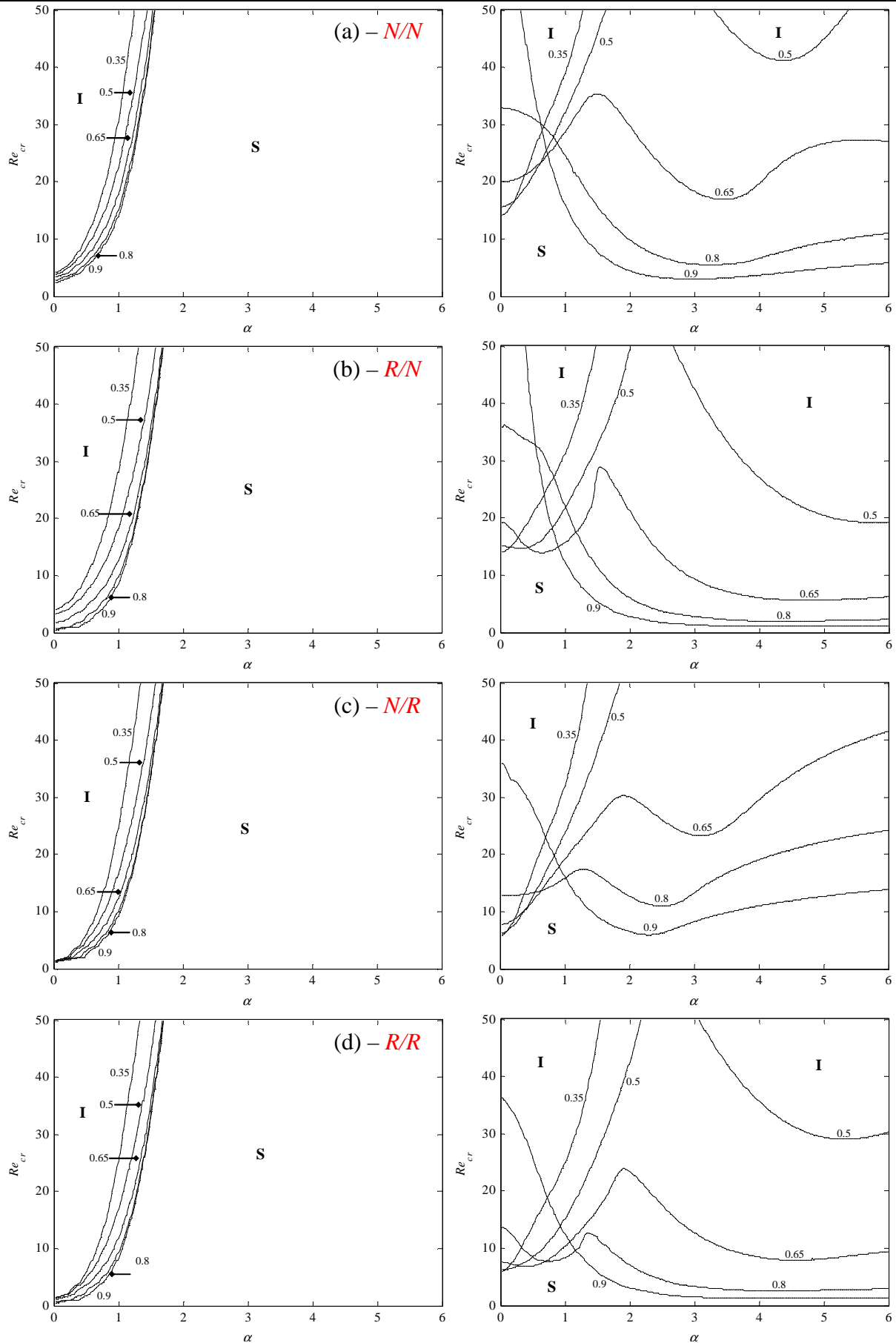
#### 3.1 Influence du débit $Q_1$

Les cartes de stabilité pour chacune des quatre configurations étudiées sont présentées sur les Fig. 62 (a) à (d) pour plusieurs valeurs du débit  $Q_1$ .

Sur ces figures, on note en premier que le comportement des modes de surface est relativement peu modifié. On note néanmoins un élargissement de la plage de nombre d'onde instables et une influence plus marquée du débit  $Q_1$  que dans le cas  $E_1 = 2.5$ . Le seuil de déclenchement des modes de surface est abaissé par rapport au cas  $E_1 = 2.5$ . Ces modes sont donc déstabilisés par cette stratification en viscosité, alors que dans le cas d'une stratification inverse en viscosité, l'augmentation de  $Q_1$  avait tendance à les stabiliser.

Les courbes de stabilité neutre pour le mode d'interface n'ont pas la même allure que celles de la stratification inverse en viscosité. Pour chaque valeur de débit, la courbe divise le plan ( $\alpha-Re_{cr}$ ) en deux parties: une zone inférieure stable et une zone supérieure instable plus ou moins étendues. Les courbes du mode d'interface ne coupent plus l'axe  $Re_{cr} = 0$ , indiquant ainsi la nécessité de la présence d'inertie pour le développement de ces modes. Ces courbes présentent deux minima pour deux longueurs d'ondes distinctes que nous appellerons grande longueur d'onde (pour  $\alpha < 1$ ) et longueur d'onde modérée (pour  $\alpha > 2$ ).

Le fait d'augmenter le débit  $Q_1$  provoque deux effets distincts suivant le nombre d'onde. En effet lorsque  $Q_1$  augmente, le seuil des grandes longueurs d'onde augmente, alors que celui des longueurs d'onde modérées baisse. En d'autres termes, les modes d'interface de grandes longueurs d'onde sont stabilisés alors que ceux de longueur d'onde modérée sont déstabilisés. Ce comportement est à nouveau très différent de celui de la stratification inverse en viscosité, en particulier pour les grandes longueurs d'onde qui sont déstabilisés par l'augmentation du débit  $Q_1$ . Lorsque  $Q_1$  augmente, la courbe neutre semble tendre asymptotiquement vers l'axe  $Re_{cr} = 0$  alors que l'instabilité de grande longueur d'onde disparaît. La longueur d'onde de l'instabilité tend donc vers zéro dans ces conditions.



**Fig. 62.** Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de débit  $Q_1 = 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.9$ .

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 0.4$  et  $M_1 = 0.85$  pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

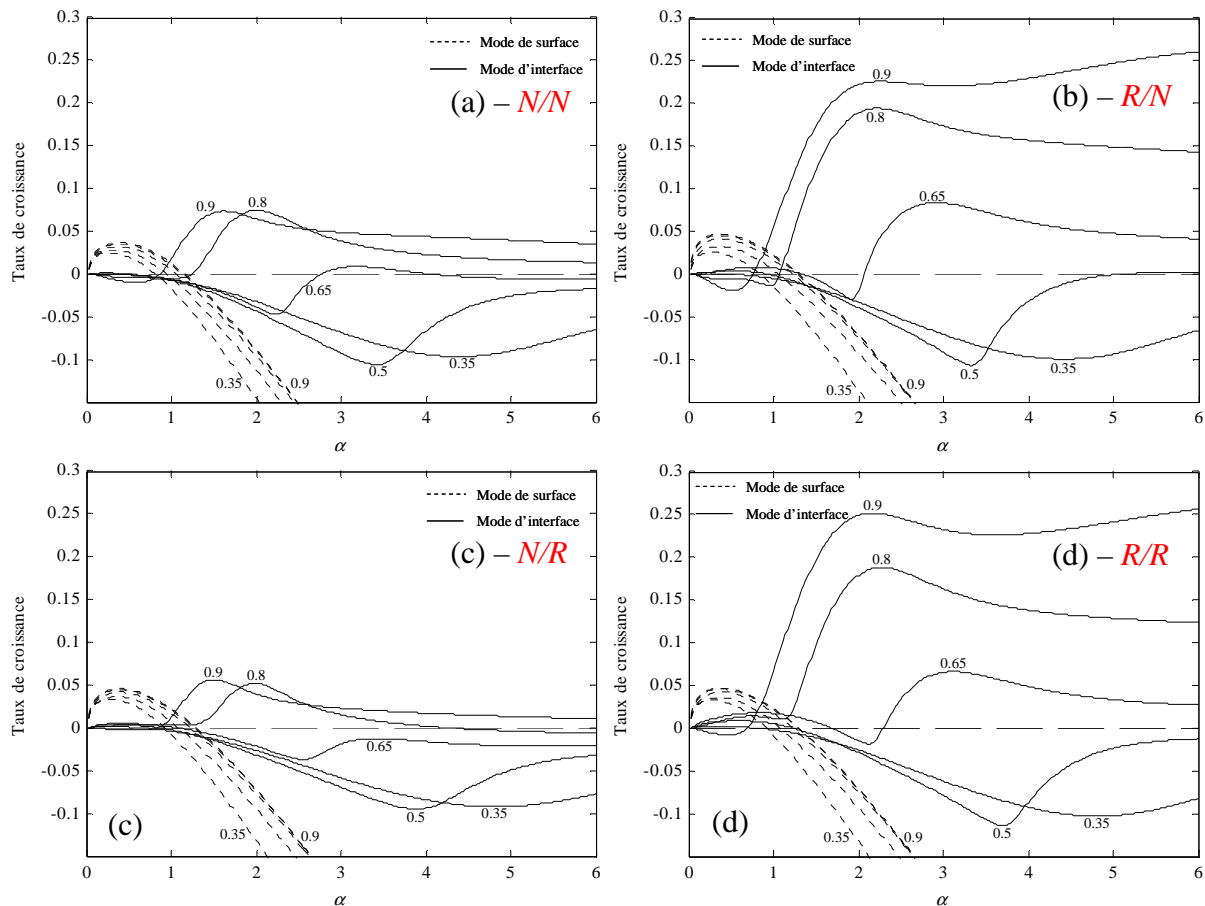
(b) Configuration  $R/N$  ( $L_1 = 0.8$ ,  $n_1 = 0.2$ ,  $L_2 = 0$  et  $n_2 = 1$ ),

(c) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ),

(d) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).

Nous présentons sur la Fig. 63 les taux de croissance des modes de surface et d'interface pour  $Re = 20$  en fonction du nombre d'onde dans chacune des configurations rhéologiques étudiées. Cette figure, en combinaison avec la Fig. 62, nous permet de faire le résumé suivant :

Dans le cas où la couche inférieure est la plus visqueuse, les modes d'interface de grande longueur d'onde ont toujours un taux de croissance plus faible que les modes de surface. On note par contre une compétition suivant la valeur du débit  $Q_1$  et la configuration rhéologique entre les modes de surface et les modes d'interface de longueur d'onde modérée. Le mode le plus dangereux, ayant le nombre de Reynolds critique le plus faible, est toujours du mode de surface.



**Fig. 63. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents rapports de débits  $Q_1 = 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.9$  et  $Re = 20$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 0.4$ ,  $M_1 = 0.85$  dans les configurations rhéologiques suivantes :

- (a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ), (b) Configuration  $R/N$  ( $L_1 = 0.8$ ,  $n_1 = 0.2$ ,  $L_2 = 0$  et  $n_2 = 1$ ),  
(c) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ), (d) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).

### Influence de la rhéologie :

L'analyse de la Fig. 63 montre que, contrairement au cas inverse en viscosité, ce n'est plus la rhéologie de la couche inférieure qui contrôle la stabilité de l'écoulement. La stabilité des longueurs d'onde modérées semble surtout dépendre de la rhéologie de la couche supérieure. En opposition avec les conclusions du paragraphe précédent ( $E_1 > 1$ ), on constate effectivement en comparant les Fig. 63 (a) et (b) ainsi que les Fig. 63 (c) et (d) que le changement de la nature du fluide de la couche supérieure de newtonien à rhéofluidifiant est suivi d'une stabilisation des modes d'interface à grande longueur d'onde. Parallèlement, on note une déstabilisation des modes d'interface de longueur d'onde modérée. En effet, la rhéofluidification et l'augmentation du débit  $Q_1$  ont des effets similaires sur la stabilité, mais des répercussions opposées en termes d'épaisseur des couches : quand  $Q_1$  augmente,  $d_1/d_2$  augmente et quand la couche supérieure est rhéofluidifiée,  $d_1/d_2$  diminue. Pour ce qui concerne les modes de surface, leur stabilité n'évolue que très peu avec la rhéologie.

Lorsque la couche inférieure devient rhéofluidifiante, en comparant les Fig. 63 (a) et (c) ou les Fig. 63 (b) et (d), on note une faible déstabilisation des modes d'interface de grande longueur d'onde ainsi qu'une faible stabilisation des modes d'interface de longueur d'onde modérée. Cet effet est similaire à l'effet d'une diminution du débit  $Q_1$ .

Le comportement rhéologique du fluide a d'autant plus d'influence sur la stabilité que le fluide concerné a une viscosité newtonienne  $\eta_{0,k}$  faible, donc des taux de cisaillement élevés dans la couche.

### 3.2 Influence du rapport de densités $M_1$

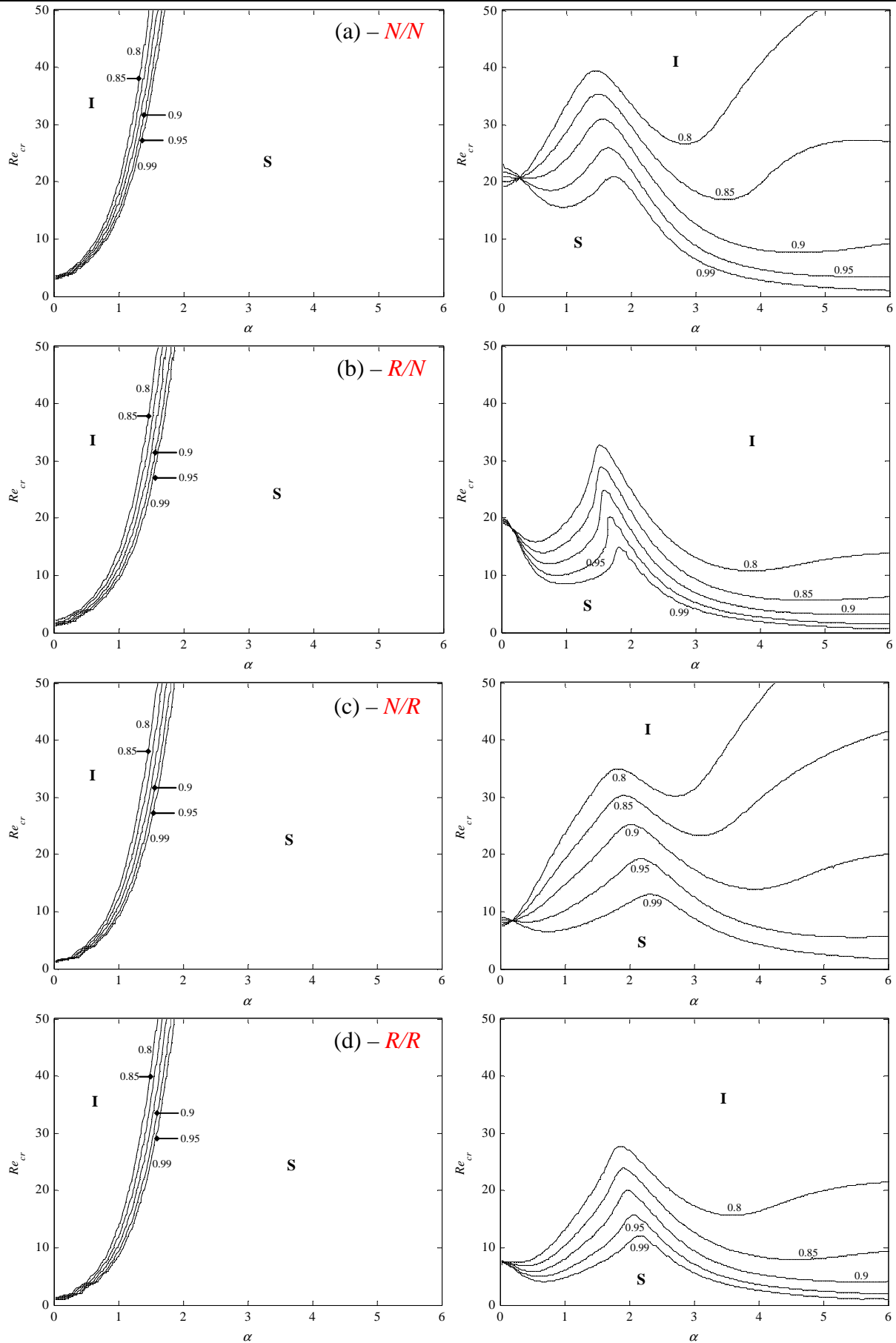
Les résultats du paragraphe 2.2, et les études de la littérature dans le cas  $N/N$ , montrent que le rapport  $M_1$  des densités a une influence non négligeable sur la stabilité des écoulements de films superposés. Les cartes de stabilité sont présentées sur la Fig. 64, pour les modes de surface et d'interface et pour chacune des quatre configurations rhéologiques étudiées.

L'analyse de ces figures montre que, pour toutes les configurations rhéologiques lorsque le rapport  $M_1$  des densités augmente:

- le mode de surface est très légèrement déstabilisé,
- le mode d'interface à longueur d'onde modérée est fortement déstabilisé.

Le mode d'interface de grande longueur d'onde évolue par contre différemment du cas  $E_1 = 2.5$ . Ainsi pour les configurations  $N/N$  et  $N/R$ , on remarque à nouveau le croisement des courbes neutres en un point qui semble être le même pour tous les rapports de densité  $M_1$ . Notons  $(\alpha_{cross}; Re_{cross})$  les coordonnées de ce point. L'augmentation du rapport  $M_1$  des densités a un effet stabilisant pour  $\alpha < \alpha_{cross}$  et l'effet inverse pour  $\alpha > \alpha_{cross}$ . L'examen des courbes montre qu'il y a une évolution du nombre de Reynolds minimum ( $Re_{min}$ ) des instabilités de grande longueur d'onde en fonction du rapport  $M_1$  des densités. En effet, on constate que  $Re_{min}$  commence par augmenter (stabilisation) jusqu'à  $M_1 = 0.9$ . Il a pour ces valeurs un nombre d'onde quasi nul ( $\alpha < \alpha_{cross}$ ). Au-delà de  $M_1 = 0.9$ ,  $Re_{min}$  diminue (déstabilisation) et le nombre d'onde correspondant est plus élevé ( $\alpha > \alpha_{cross}$ ). Par contre pour les configurations  $R/N$  et  $R/R$ , le rapport des densités  $M_1$  a un effet toujours déstabilisant sur ces modes d'interface de grandes longueur d'onde, qui concerne uniquement des nombres d'onde de l'ordre de l'unité.

Les travaux de Kao (1968), concernant la configuration  $N/N$  et le cas asymptotique  $\alpha \rightarrow 0$ , ont montré une déstabilisation des modes de surface et une stabilisation des modes d'interface. Dans la présente étude, nous avons montré que ce comportement n'est valable qu'en dessous de certaines valeurs de  $M_1$  fonction de la configuration rhéologique. Au-delà de cette valeur limite du rapport  $M_1$  des densités, la valeur minimale du nombre de Reynolds se situe vers des valeurs faibles mais finies du nombre d'onde, inversant ainsi l'effet du rapport  $M_1$  des densités en lui donnant un rôle déstabilisant.



**Fig. 64. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de densités  $M_1 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 0.4$  et  $Q_1 = 0.65$  pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite dans les cas suivants :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $R/N$  ( $L_1 = 0.8$ ,  $n_1 = 0.2$ ,  $L_2 = 0$  et  $n_2 = 1$ ),

(c) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ),

(d) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).

**Influence de la rhéologie :**

Les courbes de la Fig. 64 montrent que la configuration rhéologique a un effet important sur la stabilité des couches, principalement sur les modes d'interface. Effectivement, les modes de surface subissent une légère déstabilisation dès qu'au moins l'un des fluides est rhéofluidifiant, et ceci en particulier pour les plus faibles valeurs de  $M_1$ . On remarque que, pour les modes d'interface, la rhéologie de la couche supérieure contrôle la stabilité des longueurs d'onde modérées, alors que les grandes longueurs d'onde sont plutôt influencées par la rhéologie de la couche inférieure. En effet, l'évolution du nombre de Reynolds correspondant à la coordonnée  $\alpha = 0$  montre que la rhéofluidification de la couche inférieure a un caractère déstabilisant pour les faibles nombres d'onde ( $Re \approx 20$  pour les cas  $N/N$  et  $R/N$  et  $Re \approx 10$  pour les cas  $N/R$  et  $R/R$ ). Par ailleurs la rhéologie de la couche inférieure détermine le seuil minimum de stabilité pour le mode d'interface dans les cas particuliers  $\alpha_{cr} \approx 0$  :  $M_1 < 0.85$  dans la configuration  $N/N$  et  $M_1 < 0.9$  dans la configuration  $N/R$ . Par contre pour les autres valeurs de  $M_1$ , les seuils de stabilité sont fixés par la rhéologie de la couche supérieure.

En accord avec ces remarques, quand le fluide de la couche supérieure devient rhéofluidifiant, les modes d'interface de grande longueur d'onde et de longueur d'onde modérée sont déstabilisés à rapport  $M_1$  de densité fixé. Lorsqu'il s'agit du fluide de la couche inférieure, les modes d'interface à grande longueur d'onde sont déstabilisés alors que ceux de longueur d'onde modérée sont stabilisés. On s'aperçoit ainsi que la configuration la plus instable n'est pas celle où les deux fluides sont rhéofluidifiants mais celle où le fluide de la couche inférieure (la plus visqueuse) est newtonien.

### 3.3 Influence de la tension de surface $T_1$ et d'interface $T_2$

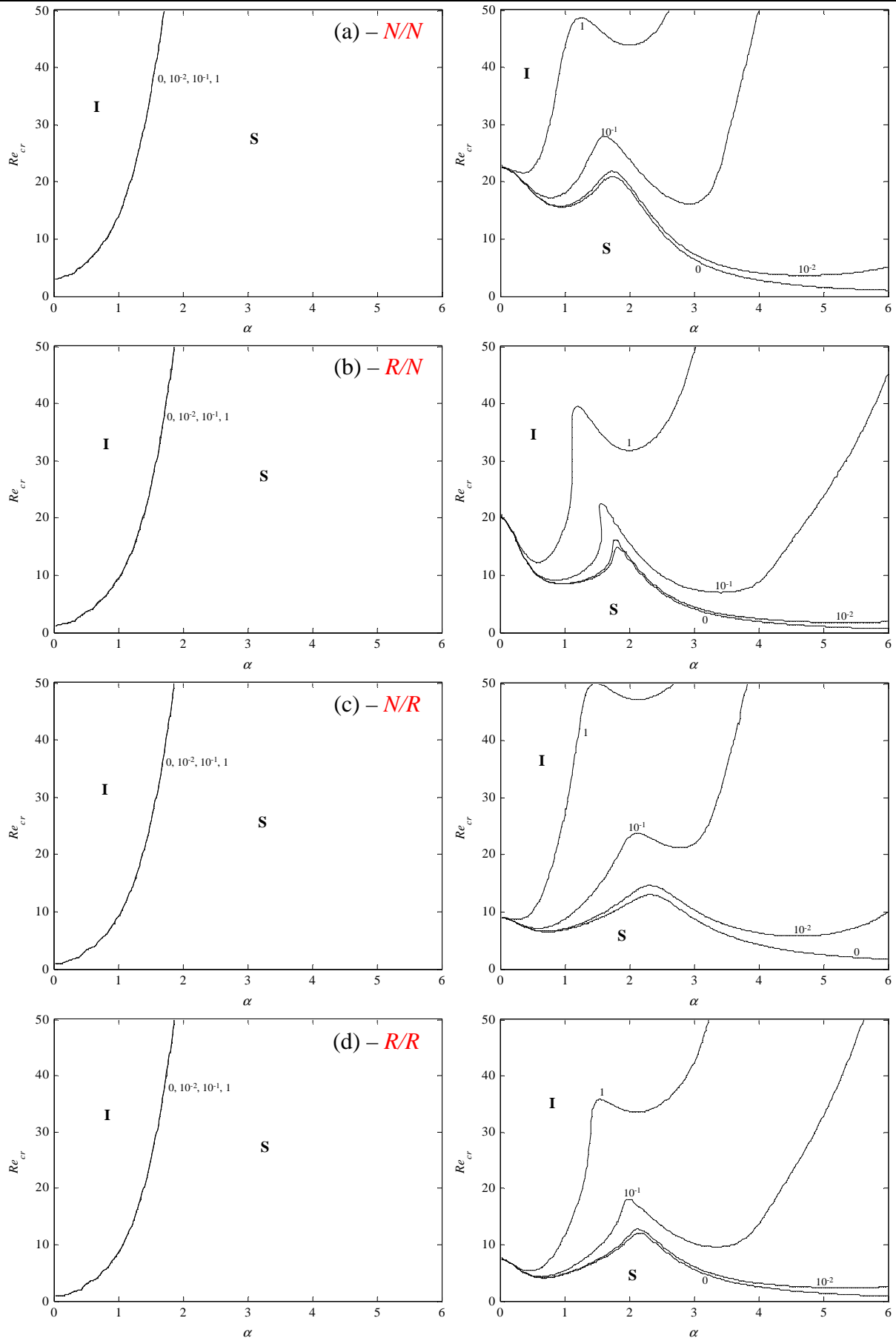
#### 3.3.1 La tension d'interface $T_2$

Nous étudions séparément l'influence des tensions de surface  $T_1$  et d'interface  $T_2$  sur la stabilité de l'écoulement dans le cas où la couche inférieure est la plus visqueuse pour une valeur de  $E_1=0.4$ . On présente sur la Fig. 65 les courbes de stabilité neutre pour différentes valeurs du nombre capillaire  $Ca_2$  relatif à l'interface. Sur la Fig. 66 figurent les taux de croissance des instabilités en fonction du nombre d'onde pour les valeurs du nombre capillaire  $Ca_2$  et pour  $Re = 10$ .

On remarque sur ces courbes qu'à nouveau la tension d'interface  $T_2$  a un effet stabilisant sur les modes d'interface de longueur d'onde modérée. Elle a un effet négligeable sur les modes de surface et également sur les longueurs d'onde infinies du mode d'interface. Ceci est en accord avec ce qui se produit avec la stratification inverse en viscosité.

**Influence de la rhéologie :**

Conformément à ce qui a été observé précédemment, on note sur la Fig. 66, une forte déstabilisation des deux longueurs d'onde des modes d'interface quand on passe d'une configuration  $N/N$  à une configuration  $R/R$ , et cela quel que soit le nombre capillaire  $Ca_2$ . Dans la configuration  $R/R$ , l'instabilité de longueur d'onde modérée devient la plus dangereuse pour des valeurs du nombre capillaire  $Ca_2$  plus élevées que dans la configuration  $N/N$ . Par exemple pour  $Re = 10$  et  $Ca_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ , l'instabilité dominante est le mode de surface dans la configuration  $N/N$  et le mode d'interface dans la configuration  $R/R$ .



**Fig. 65. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents nombres capillaires  $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 10^{-1}$  et 1.**

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_1 = 0$ ,  $E_1 = 0.4$   $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite dans les configurations rhéologiques suivantes :

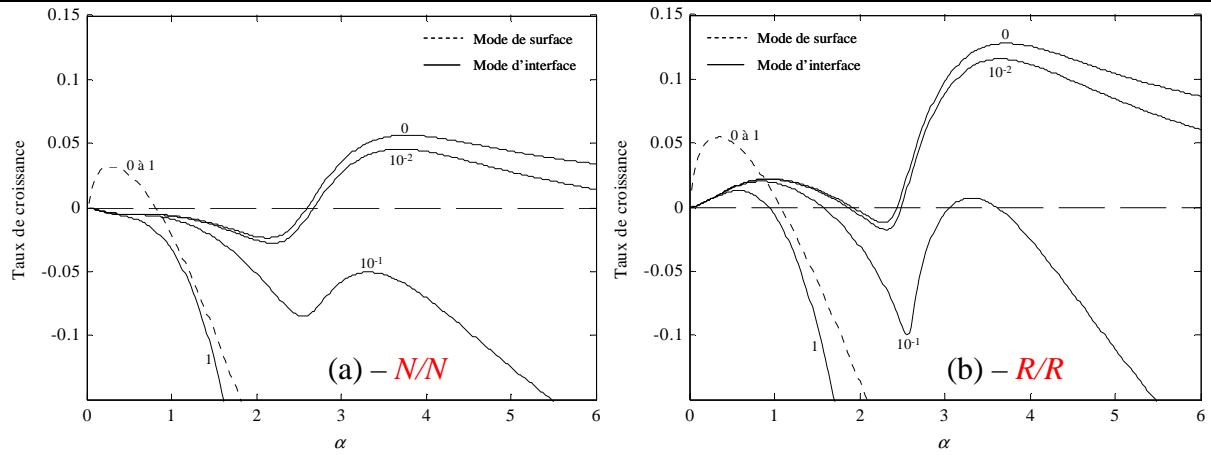
(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $R/N$  ( $L_1 = 0.8, n_1 = 0.2, L_2 = 0$  et  $n_2 = 1$ ),

(c) Configuration  $N/R$  ( $L_1 = 0, n_1 = 1, L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ),

(d) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).



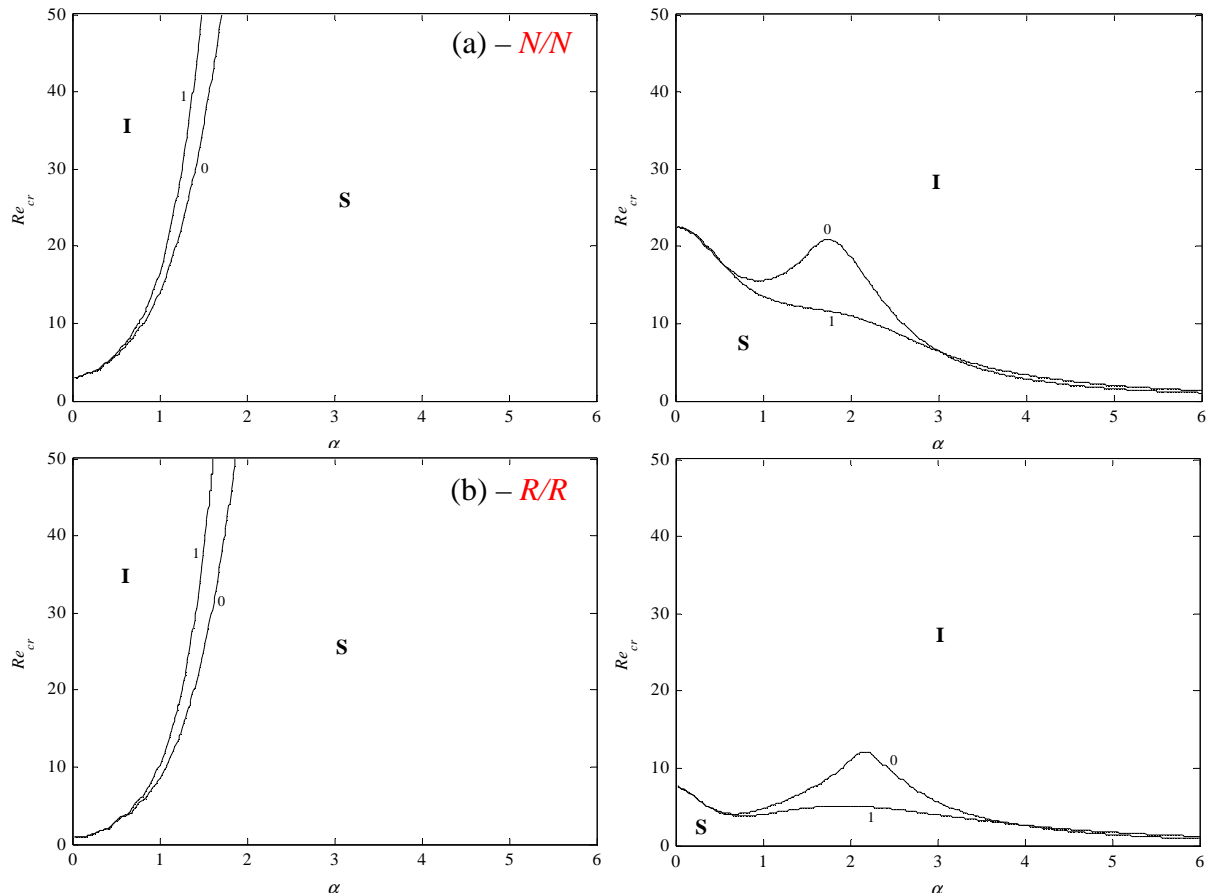


**Fig. 66. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour différents nombres capillaires  $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$  et  $Re = 10$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 0.4$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  dans les configurations rhéologiques suivantes :  
 (a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),  
 (b) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).

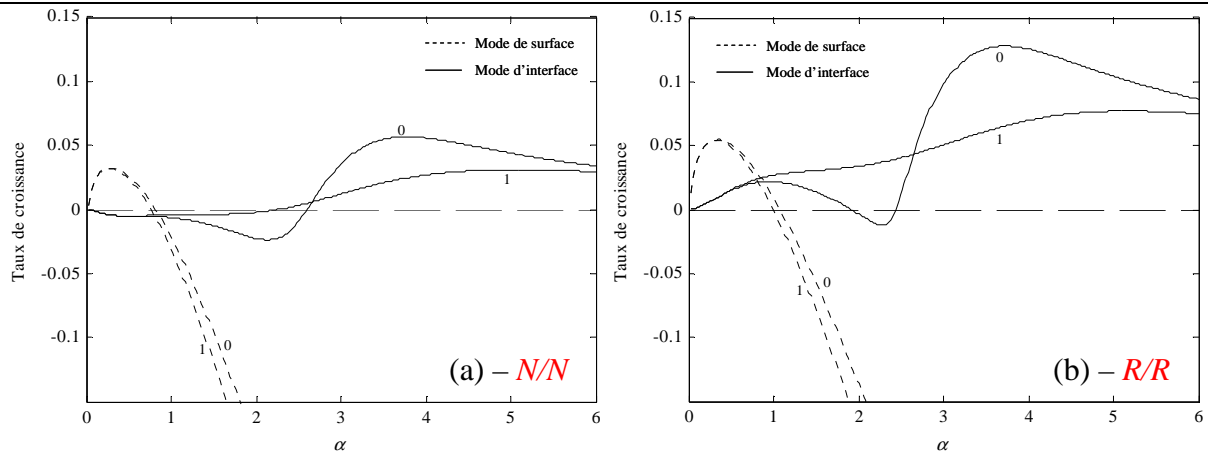
### 3.3.2 La tension de surface $T_1$

Les Fig. 67 et Fig. 68 présentent respectivement les cartes de stabilité et les taux de croissance pour  $Re = 10$  en fonction du nombre d'onde pour deux nombres capillaires  $Ca_1$  relatifs à la surface libre.



**Fig. 67. Courbes neutres de stabilité délimitant les zones stables (S) et instables (I) en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour deux nombres capillaires  $Ca_1 = 0$  et  $1$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $Ca_2 = 0$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  pour les modes de surface à gauche et d'interface à droite dans les configurations rhéologiques suivantes :  
 (a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),  
 (b) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).



**Fig. 68. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux nombres capillaires  $Ca_1 = 0$  et  $1$  et  $Re = 10$ .**

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 0.4$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$  dans les configurations rhéologiques suivantes :

(a) Configuration  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

(b) Configuration  $R/R$  ( $L_1 = L_2 = 0.8$  et  $n_1 = n_2 = 0.2$ ).

D'après ces figures, l'ajout d'une tension de surface au niveau de la surface libre  $T_1$  ne déstabilise les modes d'interface que sur une plage limitée de nombres d'onde, alors qu'elle stabilise légèrement les modes de surface. On constate sur la Fig. 68 que l'augmentation de la valeur de la tension de surface engendre une diminution du taux de croissance maximum des instabilités de longueur d'onde modérée, qui sont, en l'absence de tension de surface, les modes les plus instables.

#### **Influence de la rhéologie :**

A partir de la Fig. 68, on note que l'augmentation de la tension de surface au niveau de la surface libre, c'est-à-dire de  $Ca_1$ , réduit le taux d'amplification des longueurs d'onde modérées du mode d'interface. Pour la configuration  $N/N$ , ce taux d'amplification devient plus faible que celui des modes de surface au-delà d'une certaine valeur de  $Ca_1$ . Pour la configuration  $R/R$ , la transition entre les deux modes s'effectue pour des valeurs de  $Ca_1$  plus élevées. Cette dernière remarque met l'accent sur l'effet déstabilisant du passage de fluides newtoniens à des fluides rhéofluidifiants, et montre que le mode le plus dangereux peut dépendre de la configuration rhéologique.

La tension d'interface  $T_2$  et la tension de surface  $T_1$  ont donc un effet similaire avec chacune des deux configurations en viscosité abordées au cours de cette étude.



# CHAPITRE 5 :

## LE BILAN D'ENERGIE

### 1 CAS D'UNE SEULE COUCHE

---

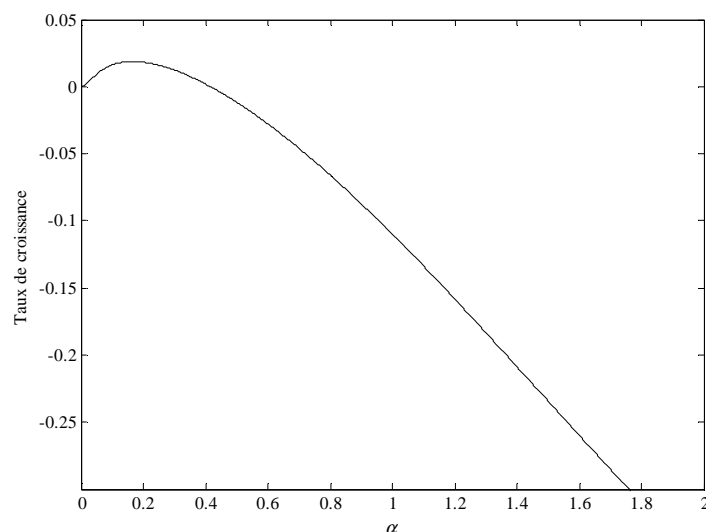
Ce paragraphe est consacré à l'analyse énergétique de l'instabilité de surface observée dans le problème à une seule couche. Ces résultats serviront de base de comparaison pour ce qui sera abordé par la suite concernant le cas double couche. Nous procédons en deux étapes : d'abord l'analyse des termes prédominants responsables de la déstabilisation de la couche, et ensuite l'influence de l'introduction du modèle de Carreau sur ces termes d'énergie.

#### 1.1 Le cas d'un fluide newtonien

Dans le cas d'un fluide newtonien, nous présentons sur la Fig. 69 les taux de croissance des instabilités dans un cas instable. Pour cela nous choisissons un nombre de Reynolds supérieur au seuil critique d'apparition des instabilités. Nous avons alors :

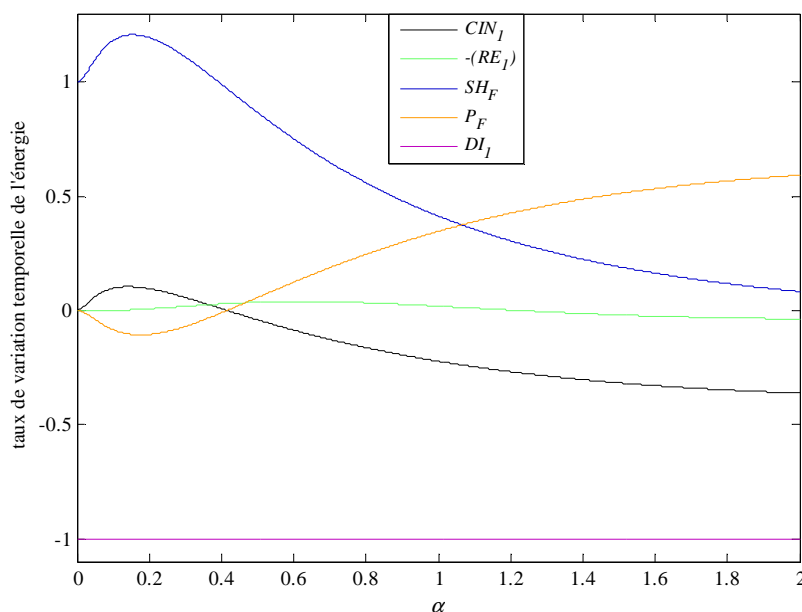
$$Re_{cr} = \frac{5}{6} \cot(0.2) \approx 4.11.$$

Ce nombre de Reynolds critique est associé au nombre d'onde  $\alpha = 0.15$ . Remarquons qu'on ne peut considérer que  $\alpha \rightarrow 0$  qu'au niveau du seuil de déclenchement, et que plus on s'en éloigne, plus le nombre d'onde augmente. On a ainsi une longueur d'onde adimensionnelle de  $\lambda = 2\pi/\alpha \approx 42$ , soit en dimensionnel  $\bar{\lambda} = \lambda \bar{d}_s = 42 \bar{d}_s$ .



**Fig. 69. Taux de croissance du mode de surface en fonction de  $\alpha$  pour le mode de surface dans le cas newtonien.**  
 $Re = 10$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca = 0$ ,  $I = 10^{-3}$  et  $L = 0$  ou  $n = 1$ .

Sur la Fig. 70, nous présentons les courbes des différents termes du bilan d'énergie pour une seule couche, en fonction du nombre d'onde. Ces différents termes sont normalisés par la norme du taux de dissipation total,  $DI_1$  dont la valeur est toujours négative. Ce choix de normalisation qui sera maintenu tout au long de cette étude, conduit à un terme de dissipation  $DI_1$  constant égal à  $-1$ .



**Fig. 70. Termes du bilan d'énergie du mode de surface normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  dans le cas newtonien.**

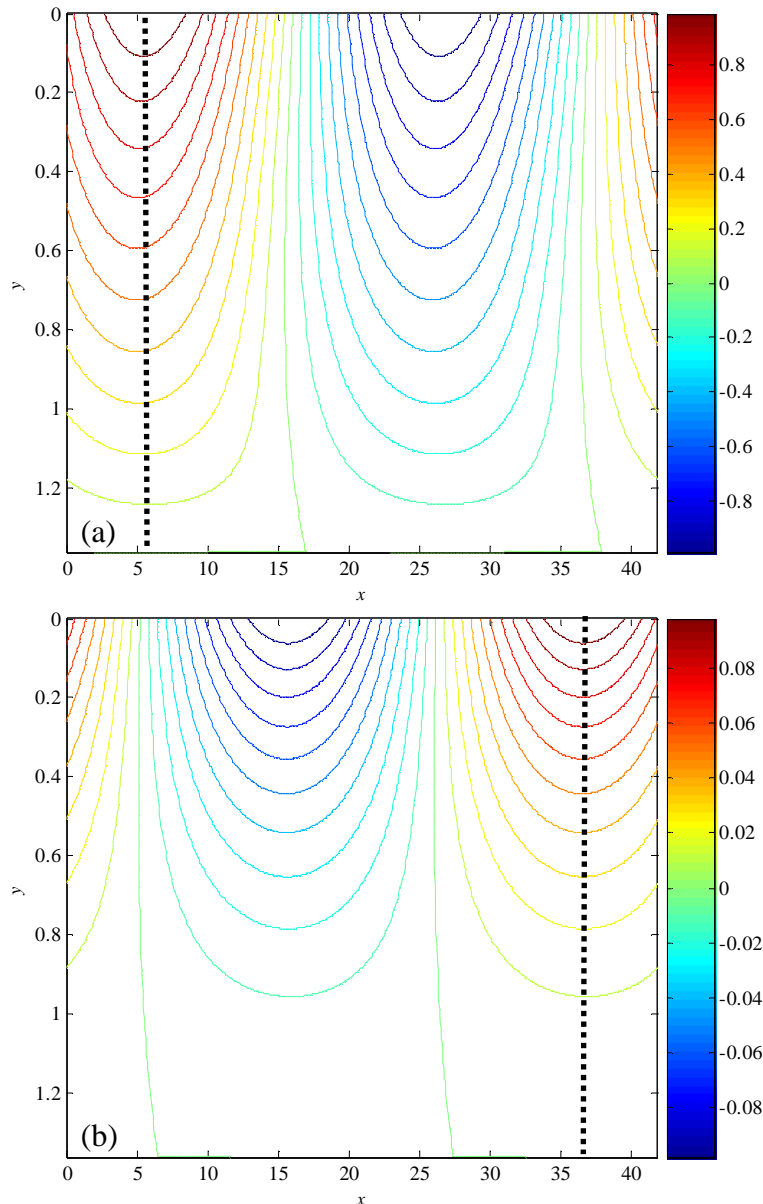
$Re = 10$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca = 0$ ,  $I = 10^{-3}$  et  $L = 0$  ou  $n = 1$ .

Le signe du taux de variation de l'énergie cinétique  $CIN$  est un indicateur qui nous permet de distinguer un écoulement stable (signe positif) d'un écoulement instable (signe négatif) d'après l'expression (2.80). On peut effectivement remarquer sur cette figure que le taux de variation de l'énergie cinétique suit la même évolution que le taux de croissance de l'instabilité. Son maximum est atteint pour  $\alpha = 0.15$ . Les termes à l'origine de l'instabilité sont les termes positifs. Ce sont les termes qui produisent de l'énergie servant à alimenter l'instabilité. Les termes négatifs dissipent de l'énergie et ont au contraire un effet stabilisant.

En considérant ces éléments, la Fig. 70 montre que l'instabilité qui est susceptible de croître à la surface du film a pour origine la puissance des efforts de cisaillement au niveau de la surface libre. Ces termes ont pour rôle de maintenir une contrainte de cisaillement nulle sur la surface libre déformée. Les autres termes du bilan d'énergie sont négatifs et ont donc des effets stabilisants.

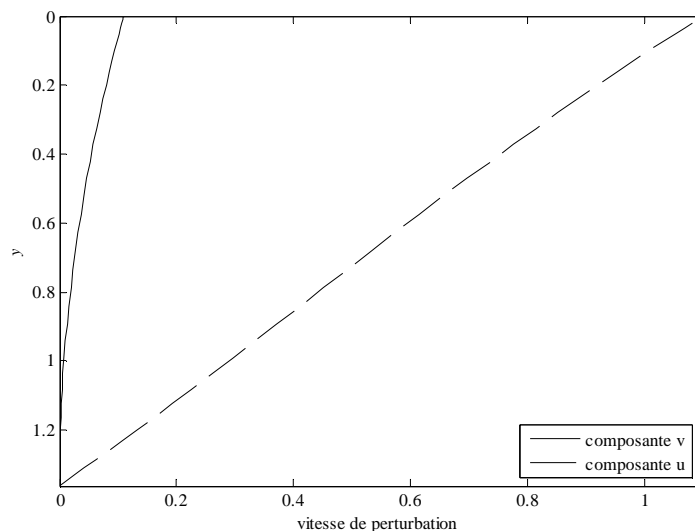
Sur les Fig. 71 (a) et (b) sont présentés les contours des perturbations  $u'(x, y)$  et  $v'(x, y)$  pour  $\alpha = 0.15$ . Les isolateurs des perturbations sont données sur une coupe rectangulaire de l'écoulement de longueur  $\lambda$  (longueur d'onde) et de hauteur l'épaisseur du film  $d$  au temps  $t = 0$ . On remarque que les plus fortes amplitudes des composantes se situent au niveau de la surface libre. L'évolution de chacune d'elle est en phase le long de l'épaisseur de la couche. On pourrait ainsi tracer dans chacun des champs une ligne verticale sur laquelle on a  $u' = 0$  et  $v' = 0$ . L'une par rapport à l'autre, les deux composantes sont en quadrature, ainsi que l'impose la relation de continuité sur les perturbations (2.30) qui conduit à la relation :

$$Dv' = -i\alpha u' \quad (5.1)$$



**Fig. 71. Isovaleurs des vitesses de perturbation  $u'(x,y)$  (a) et  $v'(x,y)$  (b) du mode de surface dans le cas newtonien.**  $\alpha = 0.15$  avec  $Re = 10$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca = 0$ ,  $I = 10^{-3}$  et  $L = 0$  ou  $n = 1$ .

La Fig. 72 présente le profil de chacune des composantes de la vitesse de perturbations suivant la profondeur  $y$  en une position donnée  $x$ . On choisit de les représenter là où chacune est maximale, soit en  $x = 6$  pour  $u'$  et en  $x = 6 + \lambda/4$  pour  $v'$ . Ces positions sont représentées par une ligne verticale en traits pointillés sur la Fig. 71. On observe tout d'abord que l'amplitude maximale de la perturbation longitudinale  $u'$  est plus forte que celle de la perturbation normale  $v'$ . Par ailleurs, et en accord avec les résultats de Smith (1990), les perturbations longitudinales  $u'$  ont un profil quasi linéaire, contrairement aux perturbations normales  $v'$  qui ont un profil parabolique.

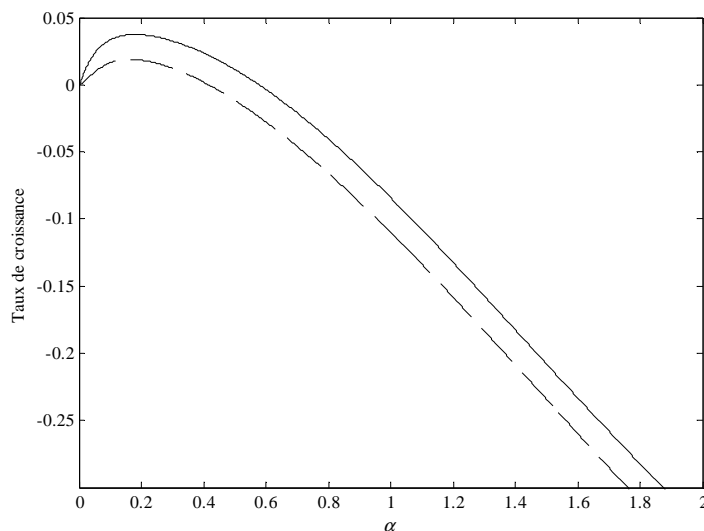


**Fig. 72. Profils des vitesses de perturbation  $u'(y)$  en  $x = 6$  et  $v_k'(y)$  du mode de surface dans le cas newtonien.**  
En  $x = 6 - \lambda/4$  pour  $\alpha = 0.15$  avec  $Re = 10$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca = 0$ ,  $I = 10^{-3}$  et  $L = 0$  ou  $n = 1$ .

## 1.2 Influence de la rhéologie

L'influence du modèle de Carreau sur l'évolution des différents termes du bilan énergétique est abordée ici, afin de déterminer l'origine de la déstabilisation des modes de surface.

Nous présentons sur la Fig. 73 le taux de croissance en fonction du nombre d'onde  $\alpha$ . D'après la figure, on observe bien une déstabilisation liée à la rhéologie du fluide. Le taux de croissance du mode augmente lorsqu'on passe d'un fluide newtonien à un fluide de Carreau. La longueur d'onde de l'instabilité où ce taux atteint son maximum reste inchangée.

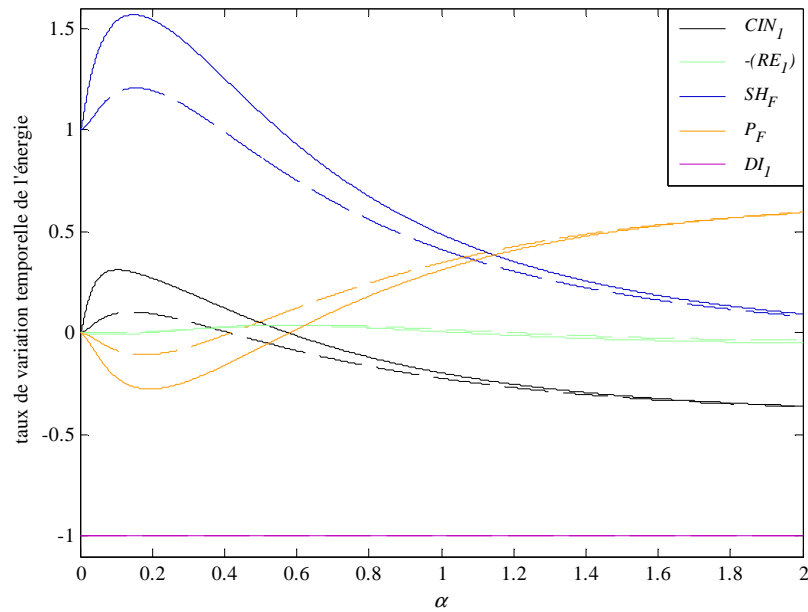


**Fig. 73. Comparaison du taux de croissance du mode de surface en fonction de  $\alpha$  pour le mode de surface entre le cas newtonien et rhéofluidifiant.**

$Re = 10$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca = 0$ ,  $I = 10^{-3}$  pour deux rhéologies différentes :

- un fluide newtonien ( $L = 0$  ou  $n = 1$ ),
- un fluide rhéofluidifiant ( $L = 0.8$  et  $n = 0.2$ ).

La Fig. 74 compare les courbes des différents termes du bilan d'énergie dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant (courbes en traits pleins) et à ceux d'un fluide newtonien (courbes en traits pointillés). On note que le taux de variation de l'énergie cinétique  $CIN_1$  augmente en  $\alpha = 0.15$ , indiquant d'une déstabilisation. Cette déstabilisation est provoquée par une forte augmentation de la production due aux efforts de cisaillement sur la surface libre, comme le montre l'augmentation du terme  $SH_F$ .



**Fig. 74. Comparaison des termes du bilan d'énergie du mode de surface normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  entre le cas newtonien et rhéofluidifiant.**

$Re = 10$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca = 0$ ,  $I = 10^{-3}$  pour deux rhéologies différentes :

- un fluide newtonien ( $L = 0$  ou  $n = 1$ ),
- un fluide rhéofluidifiant ( $L = 0.8$  et  $n = 0.2$ ).

L'augmentation du taux de croissance des instabilités de surface rencontrées dans le cas d'une seule couche de fluide quand on remplace un fluide newtonien par un fluide de Carreau est due à une augmentation des efforts de cisaillement sur la surface libre.

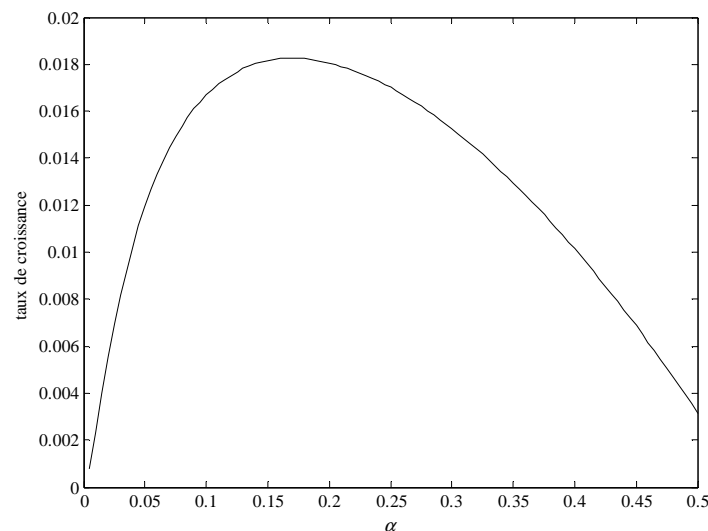


## 2 LES DIFFERENTES INSTABILITES ET LEUR ORIGINE

Comme nous l'avons déjà souligné, dans le cas de deux couches superposées, les instabilités qui peuvent croître dans la configuration étudiée sont au nombre de trois : modes de surface, modes d'interface à grande longueur d'onde et modes d'interface à longueur d'onde modérée. Nous nous appuyons sur un bilan énergétique pour mieux cerner l'origine de chacune de ces instabilités dans le cas  $N/N$ . Nous nous intéressons aussi aux champs de perturbations et aux déformations des interfaces. Cette étape nous a permis de mieux définir les mécanismes que chacune d'elle engendre.

### 2.1 Mode de surface de grande longueur d'onde

Le premier type d'instabilités susceptible de se développer au sein de l'écoulement est une instabilité de grande longueur d'onde issue du mode de surface. Il est vraisemblable de penser qu'il s'agisse du même type d'instabilité que dans le cas monocouche. Nous nous plaçons dans un cas où cette instabilité présente un fort taux de croissance afin d'en observer les caractéristiques.



**Fig. 75.** Taux de croissance  $\omega_I$  du mode de surface en fonction de  $\alpha$  pour le mode de surface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

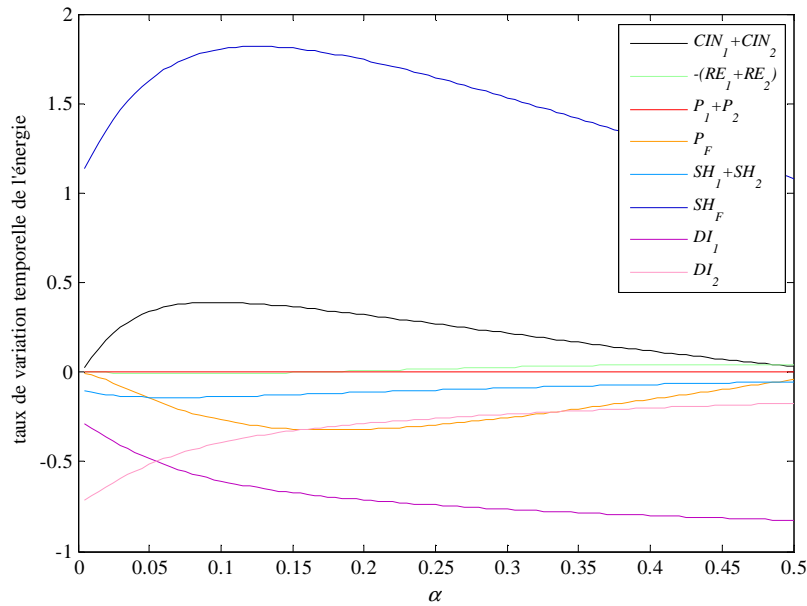
Nous avons reporté sur la Fig. 69 le taux de croissance en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  du mode de surface. La longueur d'onde correspondant au taux de croissance maximal est de  $\lambda = 2\pi/\alpha \approx 37$ , d'où  $\bar{\lambda} = 37\bar{d}_s$ .

La Fig. 70 présente pour les mêmes paramètres, les différents termes du bilan énergétique en fonction du nombre d'onde  $\alpha$ . Cette figure nous permet de faire remarques suivantes:

- Les termes  $SW_I$  et  $SW_F$  représentant la puissance des forces de surface sont nuls car on est dans un cas sans tension de surface.
- Le terme de puissance des efforts de pression sur l'interface ( $P_1 + P_2$ ) est quasi nul du fait que les masses volumiques des deux couches sont très proches.
- Le terme de transport  $-(RE_1 + RE_2)$  est faible relativement aux autres et n'a donc pas un rôle prépondérant pour ces instabilités.

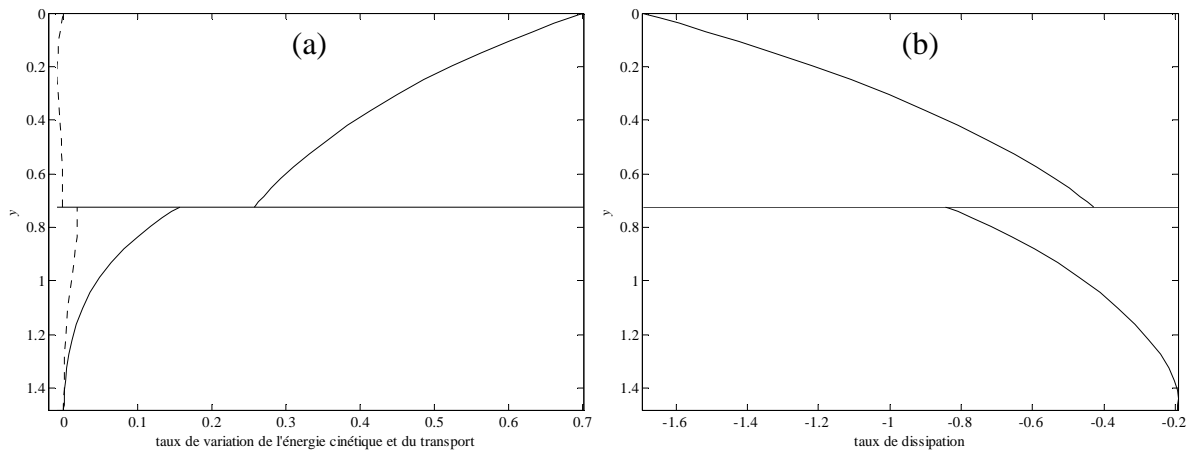
Tous les autres termes excepté la puissance des efforts de cisaillement sur la surface libre  $SH_F$  ont un effet stabilisant. Le taux de dissipation  $DI_1 + DI_2$  est le principal terme stabilisant.

On en conclue donc que l'instabilité issue du mode de surface est due aux efforts de cisaillement au niveau de la surface libre.



**Fig. 76.** Termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour le mode de surface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .



**Fig. 77.** Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode de surface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

(a) Le taux de variation d'énergie cinétique  $CIN_k$  (—) et le transport d'énergie  $RE_k$  (- - -).

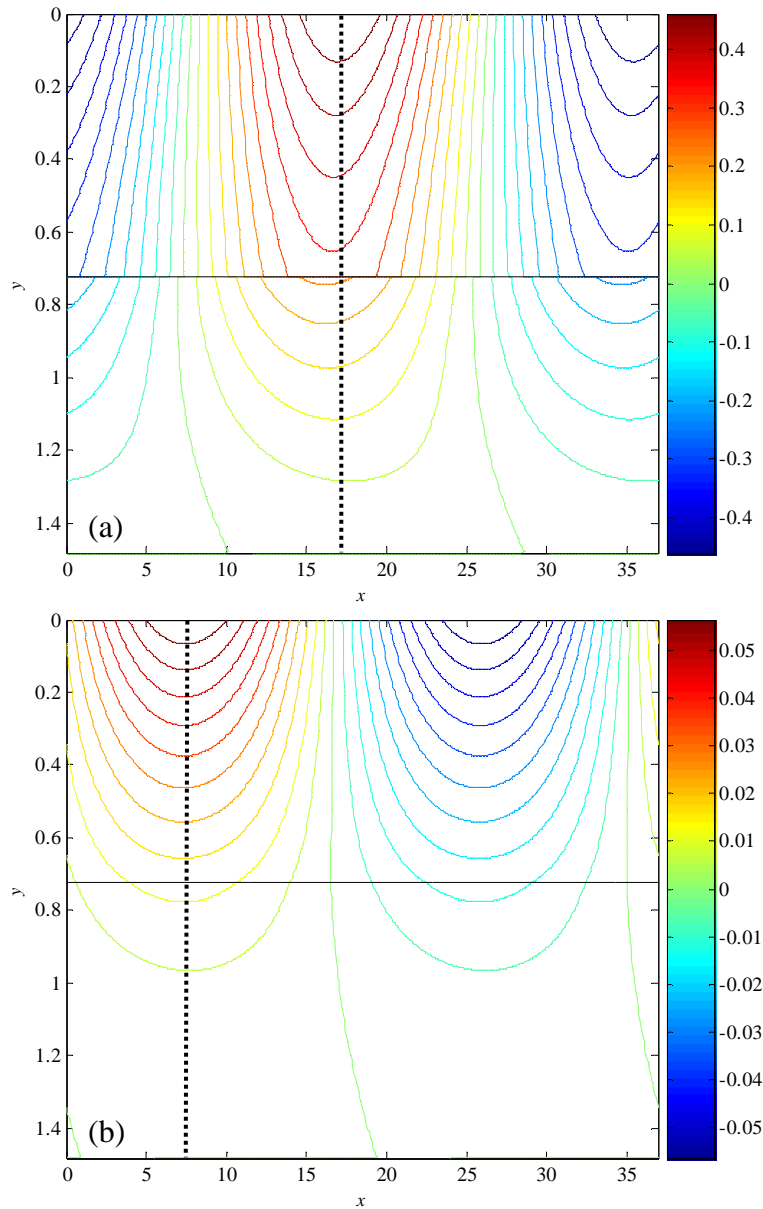
(b) Le taux de dissipation  $DI_k$ ,

$\alpha = 0.17$ ,  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Sur la Fig. 77 sont présentés les profils de la variation d'énergie cinétique, de transport (a) et du taux de dissipation (b) en fonction de la profondeur  $y$  dans le film pour le nombre d'onde critique  $\alpha = 0.17$ . Les résultats de cette figure confirment qu'il s'agit bien d'une instabilité liée à la surface libre dans le sens où la production d'énergie cinétique se développe principalement en son voisinage et où elle y est aussi majoritairement dissipée. Par ailleurs en décomposant le terme de puissance des efforts de cisaillement à la surface libre,  $SH_F$ , pour le nombre d'onde de l'instabilité, on constate que 97% de sa valeur est constituée par sa première composante :

$$-\frac{\theta_1(0)}{4\lambda(2\pi/\omega_R)} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y}(0) \cdot u_1'^*(0) + u_1'(0) \cdot \frac{\partial u_1'^*}{\partial y}(0) \right) dt.$$

C'est donc la composante longitudinale de la perturbation en vitesse qui fournit le plus d'énergie pour la croissance des instabilités. Afin de mieux comprendre ces mécanismes de génération des instabilités, il est intéressant de connaître la répartition des perturbations dans l'épaisseur de la couche, et en l'occurrence celle de  $u_1'$ . Les contours des perturbations  $u_k'(x,y)$  et  $v_k'(x,y)$  sont présentés sur les Fig. 78 (a) et (b) pour le nombre d'onde critique  $\alpha = 0.17$  sur une coupe rectangulaire de l'écoulement de longueur une longueur d'onde  $\lambda$  et de hauteur l'épaisseur totale du film ( $d_1 + d_2$ ) pour le mode de surface, au temps  $t = 0$ .



**Fig. 78. Isovaleurs des vitesses de perturbation  $u_k'(x,y)$  (a) et  $v_k'(x,y)$  (b) pour le mode de surface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 0.17$ ,  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Ces perturbations qui doivent être normalisées, rappelons-le, sont les vecteurs propres du problème et sont connues à un coefficient multiplicateur près. Les deux composantes de la perturbation  $u_k'$  et  $v_k'$  ainsi que les déformations de l'interface et de la surface libre sont liés linéairement :

- par la relation de continuité :

$$\frac{\partial u_k'}{\partial x} + \frac{\partial v_k'}{\partial y} = 0 \text{ donc } Dv_k' = -i\alpha u_k' \quad (5.2)$$

- et par les conditions cinématiques au niveau des interfaces :

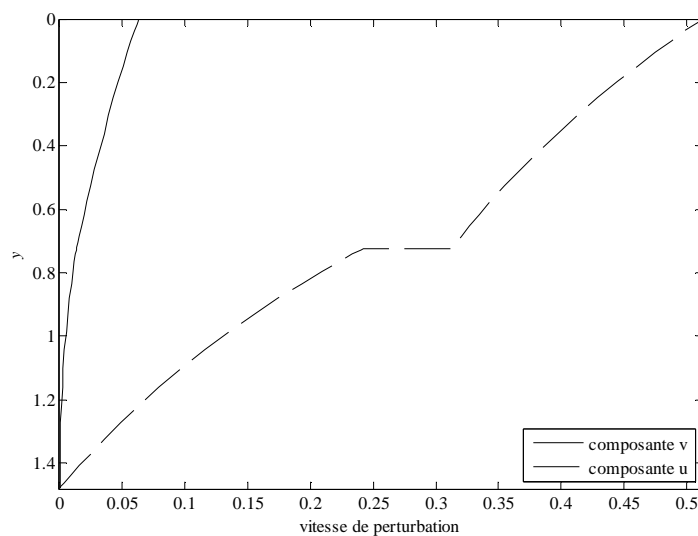
$$\begin{cases} v_1'(0) = \frac{\partial \zeta_1'}{\partial t} + U_1(0) \frac{\partial \zeta_1'}{\partial x} \\ v_2'(d_1) = \frac{\partial \zeta_2'}{\partial t} + U_2(d_1) \frac{\partial \zeta_2'}{\partial x} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} v_1'(0) = i\alpha(U_1(0) - c)\zeta_1' \\ v_2'(d_1) = i\alpha(U_2(d_1) - c)\zeta_2' \end{cases} \quad (5.3)$$

Elles peuvent donc toutes être normalisées par rapport à la même référence qui est dans notre cas la valeur maximale de la déformation de la surface libre.

Nous constatons, par ailleurs, que les amplitudes des deux composantes,  $u_k'$  et  $v_k'$ , sont maximales en valeur absolue au niveau de la surface libre, et que les conditions aux limites au niveau de l'interface et au niveau de la paroi solide sont respectées : continuité de la perturbation  $v_k'$  au niveau de l'interface

(contrairement à  $u_k'$ ), et valeurs nulles des deux composantes  $u_k'$  et  $v_k'$  en  $y = d_1 + d_2$ . On note aussi un déphasage de  $\pi/2$  entre les deux composantes de la perturbation de la vitesse, qui se traduit par un décalage spatial de  $\lambda/4$  entre leurs maxima et minima respectifs. Ceci est en accord avec l'équation de continuité (5.2) dont il résulte que lorsque l'une des deux composantes est nulle dans la couche, l'autre atteint son maximum en valeur absolue et vice versa.

Nous avons présenté sur la Fig. 72 le profil des amplitudes des perturbations  $u_k'$  et  $v_k'$  en fonction de la profondeur  $y$  aux positions  $x$ , marquées par une ligne verticale en pointillés sur la Fig. 71. Ces lignes verticales donnent la position  $x$  où les perturbations  $v_k'$  sont maximales au niveau de la surface libre, celle qui nous importe ici et par suite celle où les perturbations  $u_k'$  sont maximales par un décalage de  $\lambda/4$ . Nous pouvons ainsi mieux rendre compte et directement comparer les amplitudes de ces perturbations et de leur répartition selon l'épaisseur. On note que la composante  $u_k'$  au niveau de l'interface est de l'ordre de 10 fois supérieure à la composante  $v_k'$ . Ceci est conforme à l'équation de continuité (5.2), dans le cas d'un petit nombre d'onde  $\alpha$  (ici 0,17) par rapport à l'épaisseur de la couche: on est en présence d'un écoulement quasi-parallèle. Le saut de la composante  $u_k'$  au niveau de l'interface est relativement faible. En outre, chaque composante garde le même signe sur toute l'épaisseur du film.



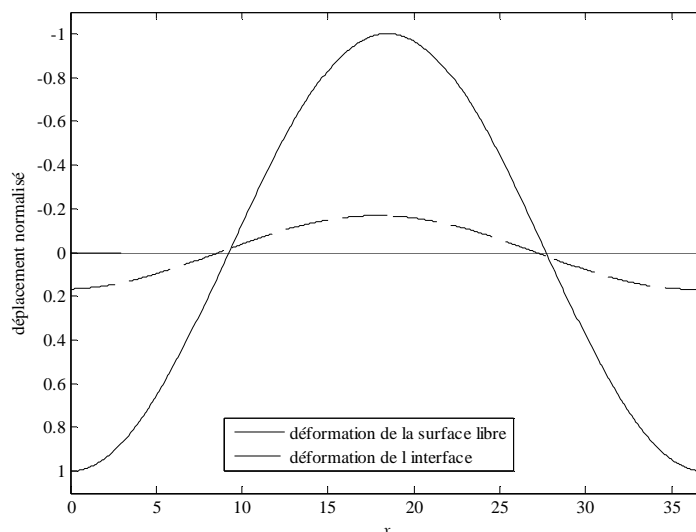
**Fig. 79. Profils des vitesses de perturbation  $u_k'(y)$  en  $x = 17$  (a) et  $v_k'(y)$  en  $x = 17 - \lambda/4$  (b) pour le mode de surface et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 0.17$ ,  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Dans le cas monocouche et d'une longueur d'onde infinie, l'étude phénoménologique de Smith (1990) montre que la perturbation  $u_k'$  présente un profil de Couette. Ce profil est entraîné par une contrainte à la surface libre résultant de la déformation de celle-ci. Puisque  $u_k'$  varie linéairement avec  $y$ , d'après l'équation de continuité, le profil de  $v_k'$  devrait être parabolique (voir Section 3.4 du chapitre 3). Même si le profil de  $u_k'$  sur la Fig. 72, ci-dessus, n'est pas tout à fait linéaire, on voit que le cisaillement du champ de perturbation  $\partial u_1'/\partial y$  varie peu le long de l'épaisseur de la couche; ce profil est donc proche d'un profil de Couette, mais en reste différent puisqu'on n'est pas tout à fait dans le cas asymptotique d'une longueur d'onde infinie. L'estimation, au premier ordre du cisaillement selon l'approche de Smith serait ici de  $\partial u_1'/\partial y = M_1/E_1 \approx 0.4$ . On retrouve bien cette valeur sur la Fig. 72. Tout cela confirme donc que l'instabilité du mode de cisaillement n'est pas fondamentalement différente du cas à monocouche. La grande valeur atteinte par la puissance des efforts de cisaillement au niveau de la surface libre est donc due aux grandes valeurs des vitesses de perturbation parallèles à l'écoulement de base  $u_1'$ .

Sur la Fig. 80 nous avons tracé sur une longueur d'onde l'évolution des interfaces déformées, normalisées par rapport à la déformation maximale de la surface libre. La figure montre la prédominance des effets des perturbations sur la surface libre, siège de l'instabilité. On voit également que les deux interfaces évoluent presque parfaitement en phase. Ceci provient de la structure du champ de perturbations, puisque la déformation de la surface libre  $\zeta_1'$  est liée à la perturbation  $v_1'$  par un facteur  $i$ , ce qui fait que leur maxima respectifs sont donc décalés suivant  $x$  de  $\lambda/4$ . Il en est de même pour  $\zeta_2'$  et  $v_2'$ . Ainsi, comme les deux perturbations  $v_1'$  et  $v_2'$  sont maximales pour des positions  $x$  très

proches, les deux perturbations des interfaces sont quasiment en phase. Soulignons à ce niveau que  $u_k'$  et  $\zeta_k'$  sont en opposition de phase, ainsi qu'on pouvait le voir à partir des relations (5.2) et (5.3).



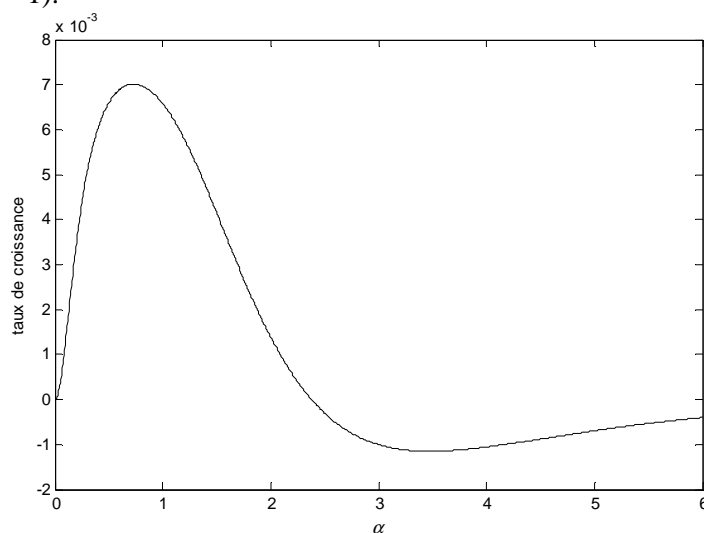
**Fig. 80.** Déformation  $\zeta_1'$  de la surface libre et  $\zeta_2'$  de l'interface entre les couches sur une longueur d'onde  $\lambda$  pour le mode de surface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$\alpha = 0.17$ ,  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

En résumé, l'instabilité de grande longueur d'onde du mode de surface est engendrée par la contrainte de cisaillement à la surface libre, résultant de la déformation de cette dernière. Il apparaît clairement qu'elle a la même origine que l'instabilité de surface à grande longueur d'onde du cas monocouche. L'énergie cinétique de la perturbation est apportée par le travail des efforts de cisaillements au voisinage de la surface libre.

## 2.2 Mode d'interface de grande longueur d'onde

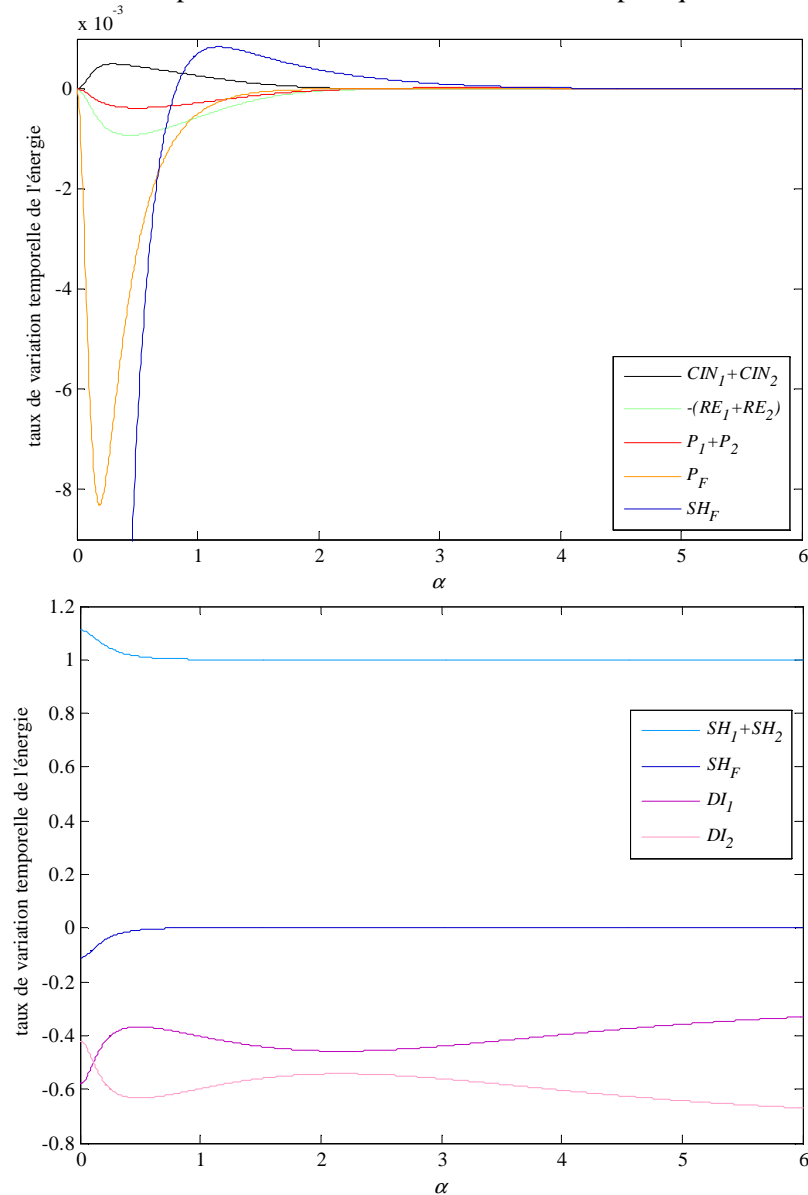
Nous nous intéressons maintenant aux caractéristiques de l'instabilité d'origine interfaciale de grande longueur d'onde. Cette instabilité est obtenue pour des nombres de Reynolds plus faibles (en dessous du seuil de déclenchement des modes de surface) et pour de forts débits  $Q_1$  (dont l'augmentation a tendance à stabiliser les longueurs d'onde modérées). Nous présentons dans un premier temps le taux de croissance de cette instabilité en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour un jeu de paramètres pour lequel elle est la plus dangereuse ( $\beta = 0.2$ ,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ).



**Fig. 81.** Taux de croissance  $\omega_I$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour le mode d'interface et  $Re = 1$  dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Le nombre d'onde critique dans ce cas est  $\alpha = 0.73$ , ce qui nous donne une longueur d'onde  $\lambda = 8.6$ . On remarque que ces longueurs d'onde, même si elles restent largement supérieures à la longueur caractéristique  $d_s$  ( $\bar{\lambda} = 8.6 d_s$ ), sont plus faibles que pour les modes de surface. Par ailleurs leur taux de croissance maximal est souvent relativement plus faible que celui des modes surface si bien que lorsque les deux modes sont en présence, le mode de surface domine pratiquement toujours.



**Fig. 82.** Termes du bilan d'énergie normalisés la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  et regroupés par ordre de grandeur pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Nous présentons les courbes des termes du bilan d'énergie sur les Fig. 82 (a) et (b). Les termes se répartissent en deux groupes liés à deux ordres de grandeur différents:

- les termes de variation de l'énergie cinétique  $CIN_1+CIN_2$ , de transport  $-(RE_1+RE_2)$ , de pression  $P_1+P_2$  et  $P_F$  ainsi que la puissance des efforts de cisaillement à la surface libre  $SH_F$  pour les nombres d'ondes  $\alpha > 0.5$  sont de l'ordre de  $10^{-3}$ ,
- les termes correspondant aux efforts de cisaillement à l'interface  $SH_1+SH_2$  et à la surface libre  $SH_F$  (pour  $0 < \alpha < 0.5$ ) et ceux du taux de dissipation  $DI_1+DI_2$  sont de l'ordre de  $10^{-1}$  à 1.

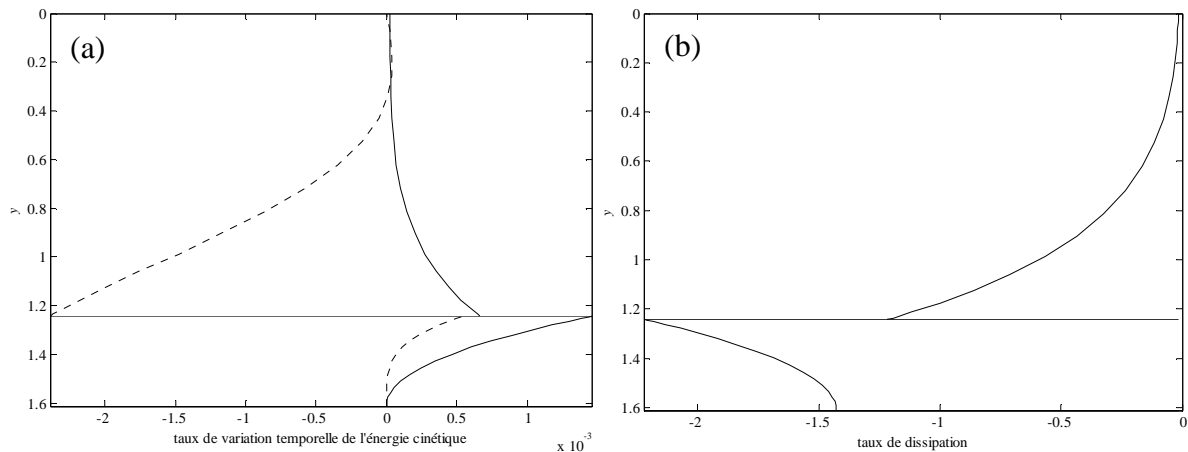
Pour le nombre d'onde  $\alpha = 0.73$ , correspondant au maximum du taux de croissance de l'instabilité, le seul terme de production d'énergie, et donc déstabilisant, est celui dû aux efforts de cisaillement à l'interface  $SH_1+SH_2$ . On remarque également que le taux de variation de l'énergie cinétique  $CIN_1+CIN_2$  résultant de la somme de tous les autres termes est relativement faible en comparaison à

$SH_1+SH_2$ . Ceci est du à une forte stabilisation générée par la puissance des efforts de cisaillement à la surface libre  $SH_F$  qui vient s'ajouter à la dissipation visqueuse.

L'origine des instabilités des modes d'interface de grande longueur d'onde est liée aux efforts de cisaillement  $SH_1+SH_2$  créés par les perturbations au niveau de l'interface entre les couches. Le cisaillement au niveau de la surface libre a, cette fois, un effet stabilisant sur le film.

Par ailleurs, on peut noter sur la figure que le maximum du taux de variation de l'énergie cinétique n'est pas localisé à la même valeur du nombre d'onde  $\alpha$  que le maximum du taux de croissance  $\omega_r$ . Ce dernier atteint son maximum pour  $\alpha = 0.73$  qui est un nombre d'onde plus élevé que celui pour lequel  $CIN_1+CIN_2$  atteint son maximum. Or on sait que ces deux grandeurs sont linéairement liées. Cette différence est due à la normalisation adoptée : pour chaque nombre d'onde, les différents termes d'énergie sont divisés par la norme du taux de dissipation total, mais celle-ci évolue aussi avec le nombre d'onde. Ici le fait que le maximum de  $CIN_1+CIN_2$  se situe à un nombre d'onde plus faible signifie que le taux de dissipation augmente avec le nombre d'onde. Par contre, comme on normalise par rapport à sa norme, les changements de signe des deux grandeurs  $CIN_1+CIN_2$  et  $\omega_r$  interviennent toujours pour les mêmes valeurs du nombre d'onde  $\alpha$ .

Nous présentons sur la Fig. 83 la répartition suivant l'épaisseur de la couche du taux de dissipation et du taux de variation de l'énergie cinétique. Les résultats de cette figure confirment ainsi que l'interface est le siège de l'instabilité puisque c'est à son niveau que se trouvent les maxima de production et de dissipation d'énergie. Il faut également noter que c'est dans la couche inférieure que ces deux dernières quantités sont les plus importantes.



**Fig. 83.** Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

(a) Le taux de variation d'énergie cinétique  $CIN_k$  (—) et le transport d'énergie  $RE_k$  (- - -).

(b) Le taux de dissipation  $DI_k$ ,

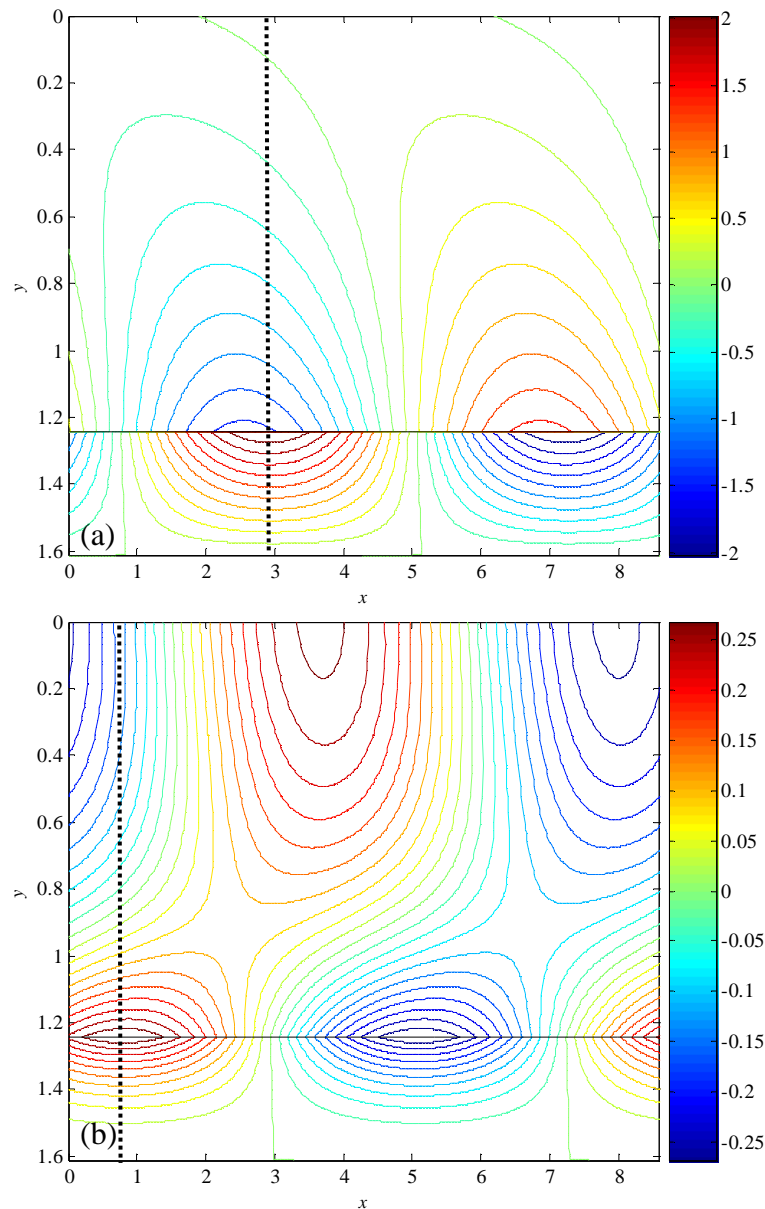
$\alpha = 0.73$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

En décomposant les termes dus aux efforts de cisaillement à l'interface ( $SH_1 + SH_2$ ), on peut noter que plus de 99% de la norme de  $SH_1$  et  $SH_2$  provient respectivement des termes suivants :

$$\frac{\theta_1(d_1)}{4\lambda(2\pi/\omega_r)} \int_0^{2\pi/\omega_r} e^{2\omega_r t} \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y}(d_1) \cdot u_1'^*(d_1) + u_1'(d_1) \cdot \frac{\partial u_1'^*}{\partial y}(d_1) \right) dt,$$

$$\text{et } -\frac{\theta_2(d_1)}{4\lambda(2\pi/\omega_r)} \int_0^{2\pi/\omega_r} e^{2\omega_r t} \left( \frac{\partial u_2'}{\partial y}(d_1) \cdot u_2'^*(d_1) + u_2'(d_1) \cdot \frac{\partial u_2'^*}{\partial y}(d_1) \right) dt.$$

L'instabilité est donc une nouvelle fois gouvernée par les perturbations longitudinales. Il convient donc de d'examiner plus particulièrement les deux composantes de la perturbation  $u_k'$  et  $v_k'$  qui sont présentées sur les Fig. 84 (a) et (b) par le tracé des lignes d'isovaleurs.



**Fig. 84. Isovaleurs des vitesses de perturbation  $u'_k(x,y)$  (a) et  $v'_k(x,y)$  (b) pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 0.73$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$  et  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

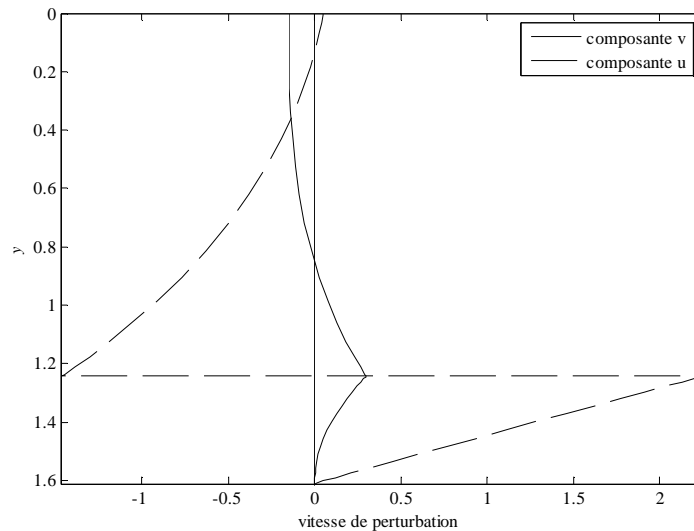
D'après ces figures, on observe globalement les mêmes caractéristiques que le cas des modes de surface:  $v'_k$  est continu à travers l'interface alors que  $u'_k$  est discontinu et les deux champs sont en quadrature. Cependant, ces champs de vitesse sont plus complexes que celui correspondant aux modes de surface, car on observe en particulier un déphasage dans la couche supérieure entre les perturbations au niveau de la surface libre et au niveau de l'interface.

Les profils des perturbations sont présentés sur la Fig. 85 aux positions  $x$  représentées par une ligne en pointillés sur la Fig. 84. On constate que les valeurs absolues maximales de la perturbation de vitesse longitudinale  $u'_k$  sont localisées au niveau de l'interface. La composante  $u'_k$ , qui est maximale dans la couche inférieure, présente une plus forte discontinuité à travers l'interface où elle change de signe. La vitesse verticale est nettement plus faible et présente un profil parabolique, elle est en quadrature par rapport à l'interface. Les dérivées suivant  $y$  des perturbations sont également maximales au niveau de l'interface.

Dans la couche inférieure, l'écoulement semble être généré par le cisaillement à l'interface car les perturbations de vitesse longitudinale présentent un profil quasi-linéaire. De plus, on remarque, en corrélant les contours de vitesse de la Fig. 84 avec les déformations des interfaces présentées sur la



Fig. 86 qu'il se produit autour de l'interface une accélération de l'écoulement ( $u_k' > 0$ ) dans la couche  $k=1,2$  quand la déformation entraîne une diminution de son épaisseur, et inversement il se produit une décélération ( $u_k' < 0$ ) quand la déformation entraîne un épaissement de la couche  $k$ . De ce point de vue, la situation dans la couche inférieure paraît similaire à celle d'une instabilité de surface de grande longueur d'onde (voir Chapitre 3, section 3.4 et Chapitre 5, section 2.1). La seule différence est que, dans le cas présent, les vitesses de perturbations longitudinales sont en phase avec les déformations de l'interface et non plus en opposition de phase. Notons enfin que même si elles sont de plus faibles amplitudes, on note l'existence de perturbations de vitesse au niveau de la surface libre. Ceci traduit comme il a été déjà souligné par Chen (1993), la forte interaction entre les deux interfaces.

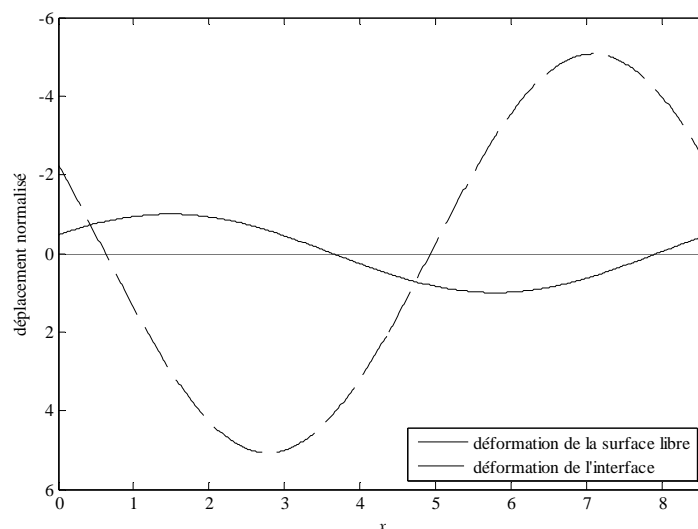


**Fig. 85. Profils des vitesses de perturbation  $u_k'(y)$  en  $x = 0.8 + \lambda/4$  (a) et  $v_k'(y)$  en  $x = 0.8$  (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 0.73$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$  et  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

L'analyse des déformations des interfaces représentées sur la Fig. 86 conduit aux remarques suivantes :

- Les deux interfaces ne sont pas en phase, ceci est dû à la distorsion du champ de perturbations (si  $v_1'$  et  $v_2'$  sont décalées suivant  $x$ , alors les déformations aussi).
- La déformation de l'interface entre les deux couches est près de 5 fois plus importante que la surface libre.



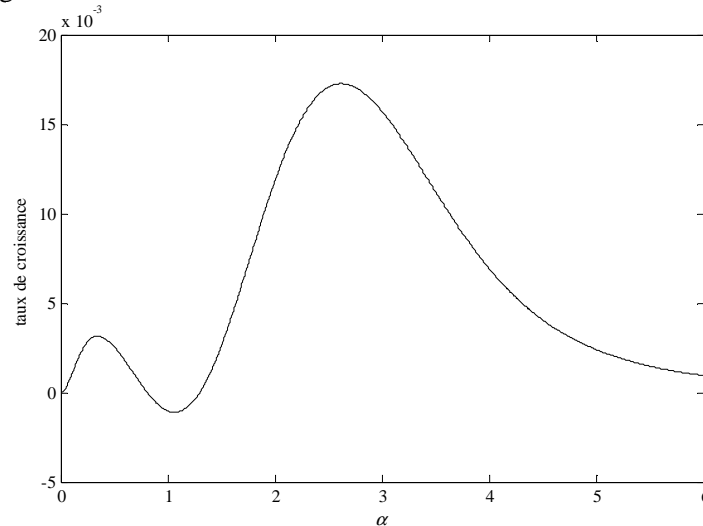
**Fig. 86. Déformation  $\zeta_1'$  de la surface libre et  $\zeta_2'$  de l'interface entre les couches sur une longueur d'onde  $\lambda$  pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 0.73$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

L'instabilité de grande longueur d'onde issue du mode d'interface est produite principalement par les efforts de cisaillement des perturbations longitudinales au niveau de l'interface entre les couches.

### 2.3 Mode d'interface de longueur d'onde modérée

Le troisième et dernier type d'instabilités que nous avons étudié est celui des modes d'interface de faible longueur d'onde (de l'ordre de la longueur caractéristique  $d_s$ ). Nous avons vu qu'elles peuvent dominer les deux autres types d'instabilités, notamment pour de faibles nombres de Reynolds et pour de faibles débits  $Q_1$ . La Fig. 87 présente le taux de croissance  $\omega_I$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$ . Dans ces conditions, le taux de croissance maximal de cette instabilité est obtenu pour  $\alpha = 2.6$  ce qui correspond à une longueur d'onde de  $\lambda = 2\pi/\alpha = 2.41$ .



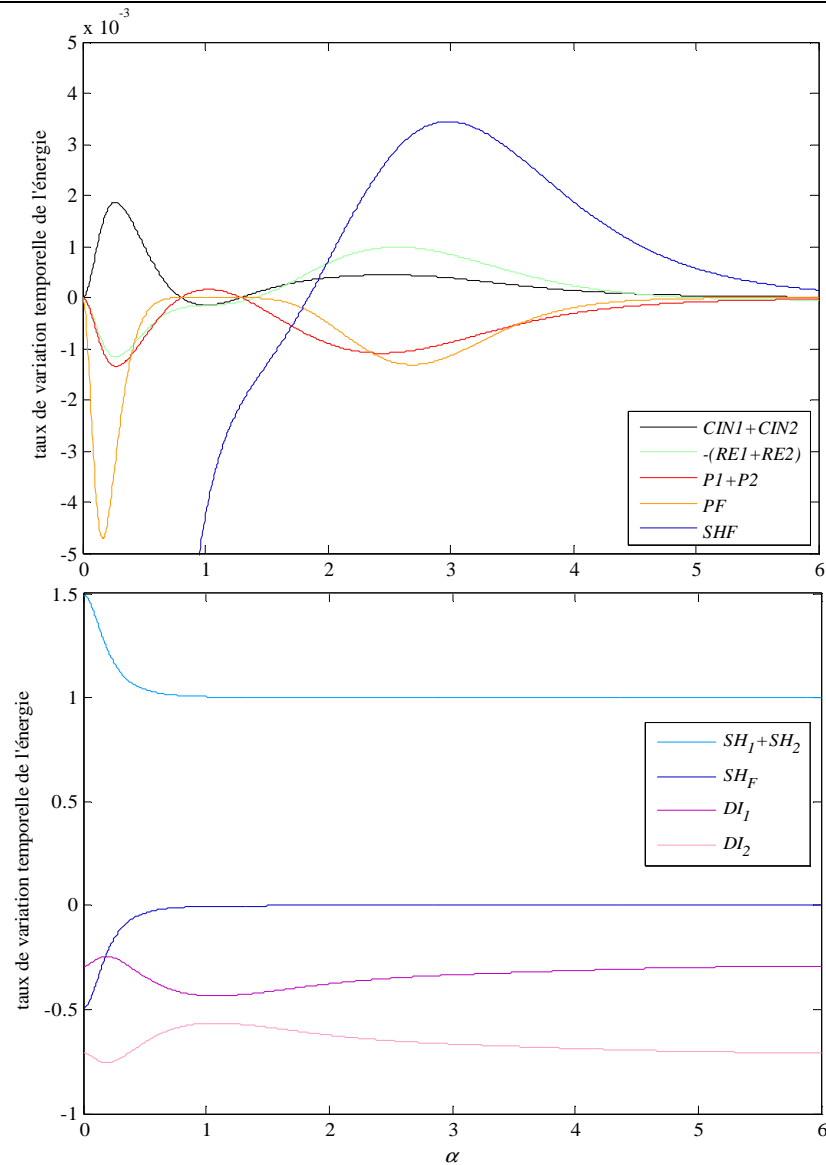
**Fig. 87.** Taux de croissance  $\omega_I$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

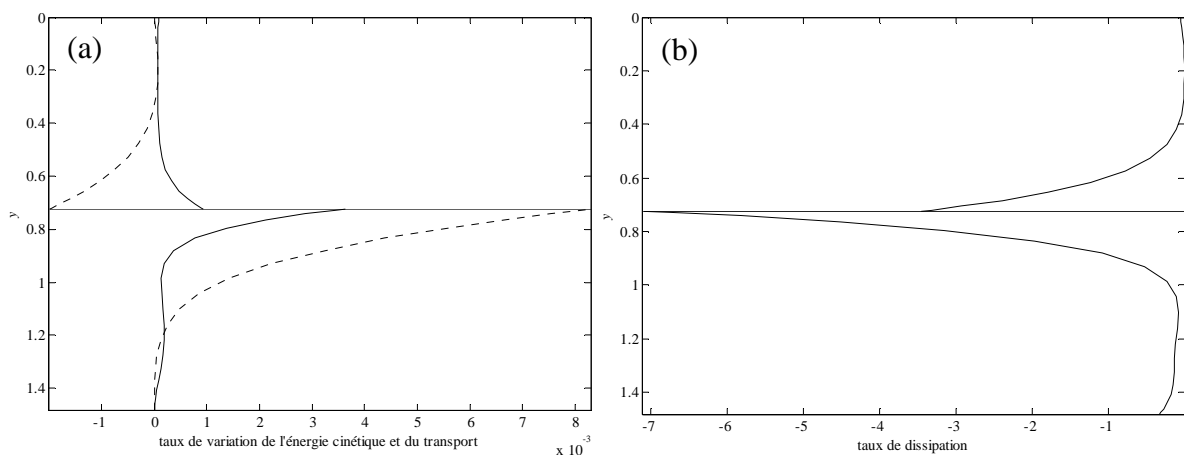
Les différents termes de l'équation d'énergie sont reportés sur la Fig. 88. De la même façon que pour les instabilités de grande longueur d'onde, il convient à nouveau de regrouper les différents termes suivant les deux ordres de grandeur identifiés. En considérant le taux de croissance de la Fig. 87, l'examen de la courbe du terme  $CIN_1 + CIN_2$  indique une augmentation de la dissipation avec le nombre d'onde. En effet, sur la Fig. 88, en  $\alpha = 2.6$  ce terme  $CIN_1 + CIN_2$  est plus faible qu'en  $\alpha = 0.3$ , du fait de la normalisation par la dissipation. La puissance des efforts de pression aux deux interfaces  $P_1 + P_2$  et  $P_F$  et le taux de dissipation  $DI_1 + DI_2$  ont à nouveau des effets stabilisants, tandis que les termes de transport ( $-RE_1 - RE_2$ ) ainsi que la puissance des efforts de cisaillement à la surface libre  $SH_F$  et à l'interface  $SH_1 + SH_2$  sont déstabilisants. Par conséquent, si l'énergie nécessaire à la croissance de l'instabilité est une nouvelle fois essentiellement apportée par le cisaillement à l'interface, on peut remarquer que le cisaillement à la surface libre ainsi que le transport des perturbations par le champ de base jouent un rôle dans le processus, étant donné que leur puissance est supérieure au taux de variation de l'énergie cinétique au nombre d'onde considéré.

La Fig. 89, qui donne la répartition suivant l'épaisseur du film des termes  $CIN_k$ ,  $RE_k$  et  $DI_k$ , montre que les instabilités naissent effectivement au niveau de l'interface entre les couches, là où les valeurs de ces termes sont les plus élevées.

L'instabilité d'interface de longueur d'onde modérée est donc essentiellement produite par les efforts de cisaillement au niveau de l'interface entre les couches. Toutefois, à ces termes de cisaillement s'ajoutent les efforts de cisaillement localisés au niveau de la surface libre, ainsi que le transfert d'énergie entre le champ de base et le champ de perturbations pour favoriser l'apparition des instabilités d'interface. C'est en cela principalement que l'instabilité d'interface de longueur d'onde modérée se différencie de l'instabilité d'interface de grande longueur d'onde.



**Fig. 88.** Termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  et regroupés par ordre de grandeur pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .  $Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .



**Fig. 89.** Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

(a) Le taux de variation d'énergie cinétique  $CIN_k$  (—) et le transport d'énergie  $RE_k$  (---).

(b) Le taux de dissipation  $DI_k$ .

$\alpha = 2.6$ ,  $Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

On décomposant les termes dus aux efforts de cisaillement à l'interface ( $SH_1 + SH_2$ ), on peut noter que plus de 98% provient du terme suivant :

$$-\frac{\theta_k(d_1)}{4\lambda(2\pi/\omega_R)} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( \frac{\partial u_k'}{\partial y}(d_1) \cdot u_k^{**}(d_1) + u_k'(d_1) \cdot \frac{\partial u_k^{**}}{\partial y}(d_1) \right) dt \text{ avec } k=1,2.$$

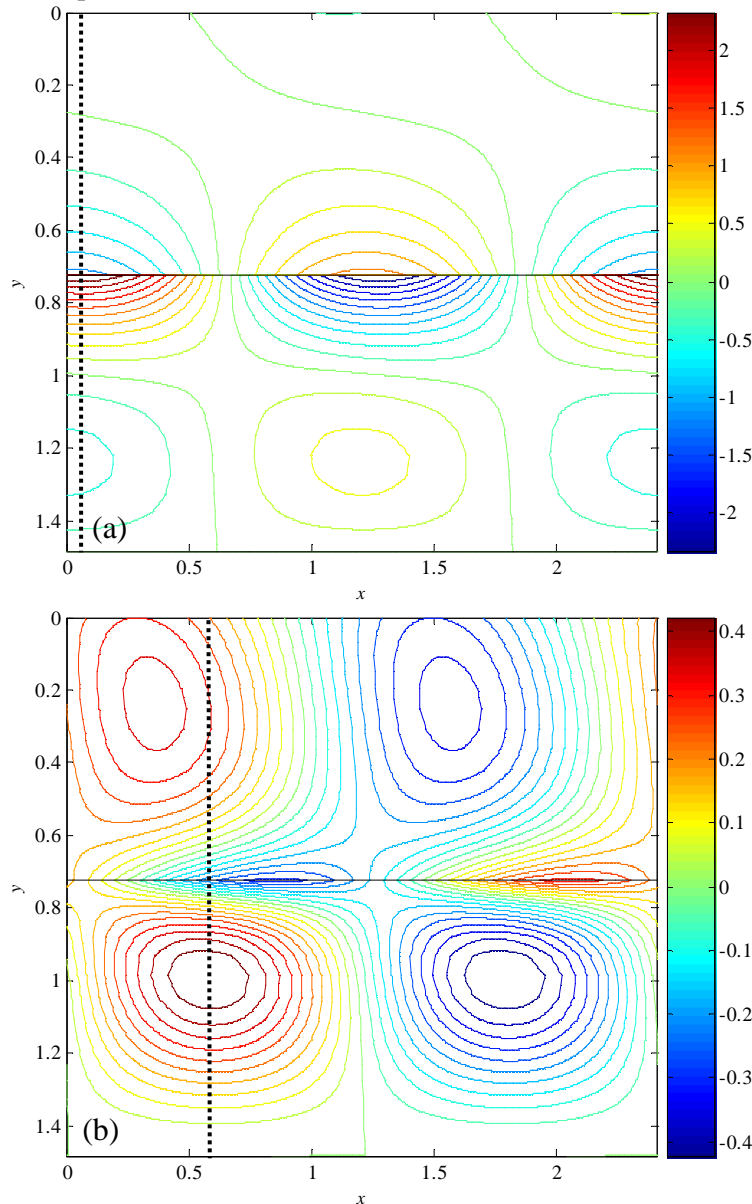
Pour le terme  $SH_F$ , seul le premier terme a un effet déstabilisant :

$$-\frac{\theta_1(0)}{4\lambda(2\pi/\omega_R)} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} \left( \frac{\partial u_1'}{\partial y}(0) \cdot u_1^{**}(0) + u_1'(0) \cdot \frac{\partial u_1^{**}}{\partial y}(0) \right) dt,$$

le second étant négatif. Concernant  $RE_k$ , seul le terme  $RE_2$  est déstabilisant, comme le confirme la Fig. 89. Il se construit sous la forme :

$$\frac{M_2}{4\lambda(2\pi/\omega_R)} \int_{d_1}^{d_1+d_2} \int_0^{2\pi/\omega_R} e^{2\omega t} (u_2' \cdot v_2^{**} + v_2' \cdot u_2^{**}) \frac{\partial U_2}{\partial y} dt dy$$

et se localise en grande partie vers  $y = d_1$ .

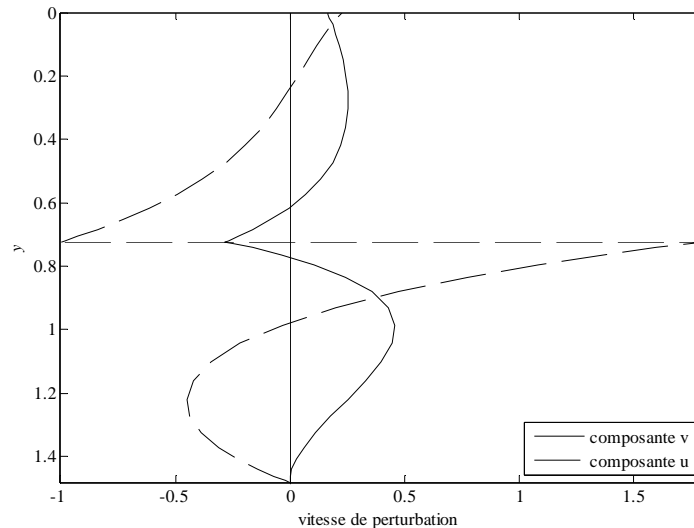


**Fig. 90. Isovaleurs des vitesses de perturbation  $u_k'(x,y)$  (a) et  $v_k'(x,y)$  (b) pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 2.6$ ,  $Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Sur les Fig. 90 (a) et (b) sont présentés les lignes d'isolateurs des perturbations  $u_k'$  et  $v_k'$  et sur la Fig. 91 leur profil en fonction de la coordonnée  $y$ , en des positions où elles atteignent leurs valeurs maximales et qui sont repérées par une ligne en pointillés sur la Fig. 90. Pour la perturbation  $u_k'$ , on observe des profils relativement proches de ceux de l'instabilité de grande longueur d'onde avec des maxima situés autour de l'interface et un grand saut de discontinuité. Les perturbations sont plus

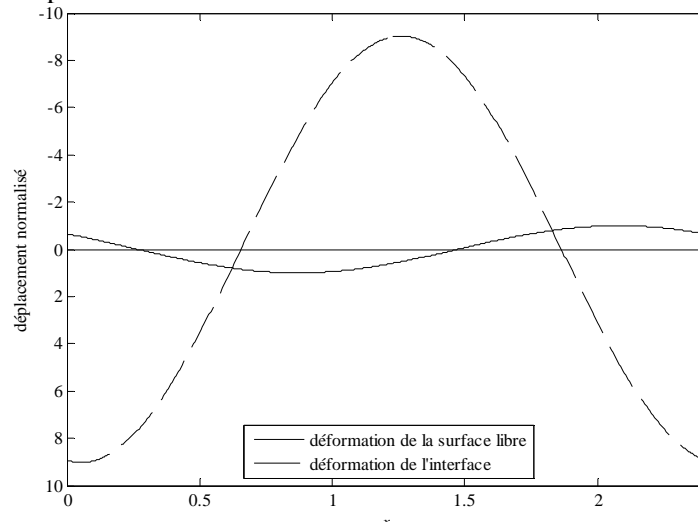
concentrées au voisinage de l'interface. En comparant avec le cas précédent de la Fig. 85, on note une nette diminution des valeurs extrêmes de la perturbation de vitesse  $u_k'$ , alors que les taux de cisaillement à l'interface  $\partial u_k' / \partial y (y = d_1)$  évoluent peu. Ceci pourrait expliquer pourquoi les efforts de cisaillement à l'interface sont moins forts dans ce cas. Notons enfin que les valeurs maximales des vitesses de perturbations sont moins importantes dans la couche supérieure que dans la couche inférieure. Pour ce qui concerne la perturbation  $v_k'$ , on observe une répartition différente puisque les vitesses maximales ne sont plus localisées au niveau de l'interface, mais au sein même de chacune des couches. Contrairement au cas des grandes longueurs d'ondes, elles sont du même ordre de grandeur que les composantes  $u_k'$ . On observe par ailleurs qu'il existe une interaction entre les deux interfaces, la surface libre étant elle aussi perturbée. En comparaison aux instabilités de grande longueur d'onde, les plus fortes valeurs atteintes par les perturbations de la surface libre, expliquent pourquoi le terme  $SH_F$  est dans ce cas déstabilisant.



**Fig. 91. Profils des vitesses de perturbation  $u_k'(y)$  en  $x = 0.6 - \lambda/4$  (a) et  $v_k'(y)$  en  $x = 0.6$  (b) pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 2.6$ ,  $Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Sur la Fig. 92 sont présentées les déformations des interfaces. Elle conduit aux mêmes observations que celles concernant le mode d'interface à grande longueur d'onde avec un fort déphasage entre les deux interfaces et une plus grande déformation de l'interface par rapport à la surface libre, encore plus marquée que dans le cas précédent.



**Fig. 92. Déformation  $\zeta_1'$  de la surface libre et  $\zeta_2'$  de l'interface entre les couches sur une longueur d'onde  $\lambda$  pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 2.6$ ,  $Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Les instabilités du mode d'interface à longueur d'onde modérée sont alimentées elles aussi par les efforts de cisaillement au niveau de l'interface entre les couches. Mais il a été montré que d'autres sources d'énergie interviennent dans ce cas, car les perturbations sont mieux réparties sur l'épaisseur totale de la couche.

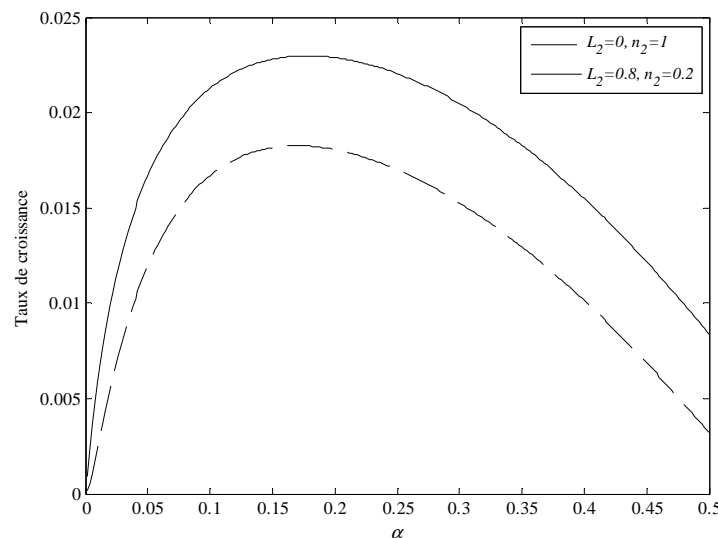
### 3 EFFETS DE LA RHEOLOGIE DES FLUIDES SUR LES TERMES D'ENERGIE

Nous avons montré dans le chapitre précédent que la rhéologie des films joue un rôle important sur la stabilité de l'écoulement multicouche. Dans ce paragraphe, nous portons notre attention sur l'origine des instabilités lorsque l'une au moins des deux couches est un fluide rhéofluidifiant.

Nous avons montré que, pour  $E_1=2.5$ , la rhéologie de la couche inférieure contrôle la stabilité de l'écoulement: les modes de surface et les modes d'interface de longueurs d'onde modérées sont déstabilisés, alors que les modes d'interface de grandes longueurs d'onde sont stabilisés quand le fluide de la couche inférieure passe de newtonien à rhéofluidifiant. Nous souhaitons expliquer pour chacune des instabilités, l'origine de ces modifications, en prenant pour référence les résultats de la configuration  $N/N$ .

#### 3.1 Mode de surface de grande longueur d'onde

Nous présentons sur la Fig. 93 le taux de croissance des modes de surface de grandes longueurs d'ondes dans les deux configurations suivantes :  $N/N$  et  $N/R$ . La figure montre clairement une augmentation du taux de croissance des modes de surface lorsque la rhéologie du fluide de la couche inférieure devient rhéofluidifiante. Cette déstabilisation induite par la modification de la rhéologie de la couche inférieure est accompagnée par un léger changement au niveau de la valeur du nombre d'onde pour lequel le taux de croissance atteint son maximum : on passe de  $\alpha = 0.17$  pour la configuration  $N/N$  à  $\alpha = 0.18$  pour la configuration  $N/R$ . Rappelons que la longueur caractéristique  $d_s$  n'est pas influencée par la rhéologie, on peut donc comparer les différentes valeurs si les autres paramètres ne changent pas.



**Fig. 93. Comparaison des taux de croissance  $\omega_I$  en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour le mode de surface et pour deux configurations rhéologiques.**

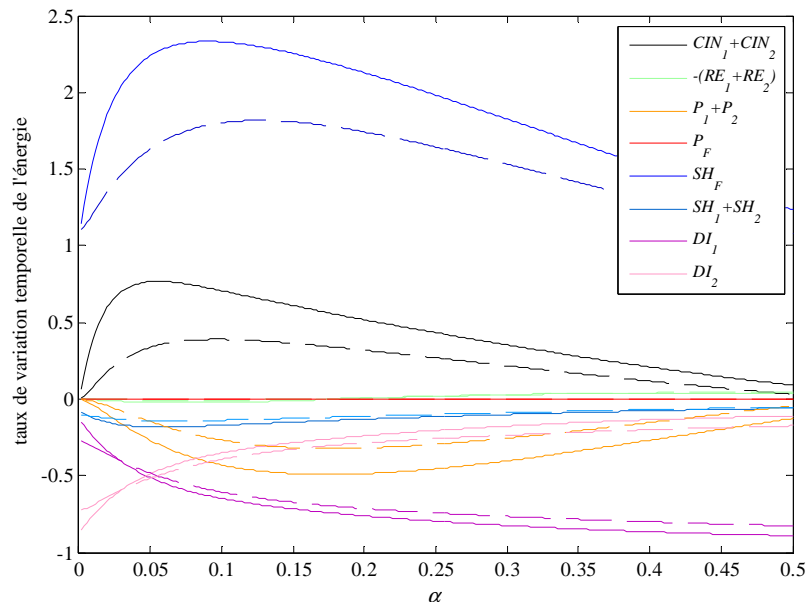
$Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$  et dans la configuration rhéologique :

---  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ )

—  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

L'évolution en fonction du nombre d'onde des différents termes du bilan énergétique est donnée sur la Fig. 94 pour les deux configurations rhéologiques considérées. On observe que le seul terme qui subit une forte augmentation est le terme  $SH_F$  du cisaillement localisé sur la surface libre.

En comparaison à la configuration  $N/N$ , la déstabilisation du mode de surface quand la couche inférieure est rhéofluidifiante est due à l'augmentation du terme de cisaillement au niveau de la surface libre.



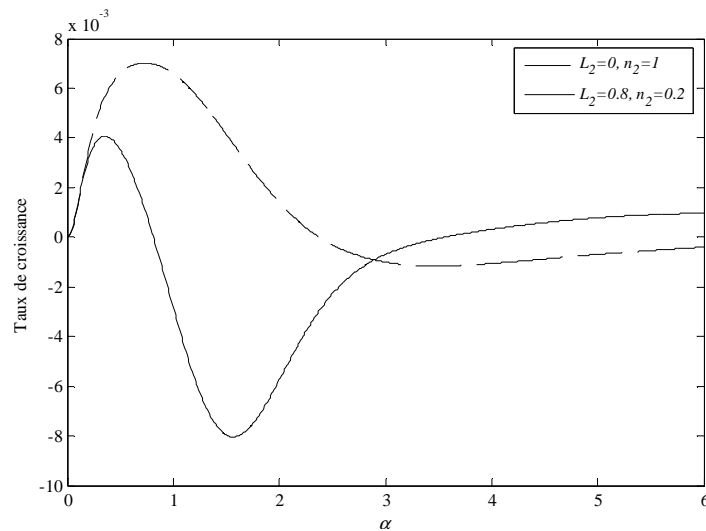
**Fig. 94.** Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour le mode de surface et pour deux configurations rhéologiques.

$Re = 40$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$  et dans la configuration rhéologique :

---  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ )

—  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

### 3.2 Mode d'interface de grande longueur d'onde



**Fig. 95.** Comparaison du taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux configurations rhéologiques.

$Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$  et dans la configuration rhéologique :

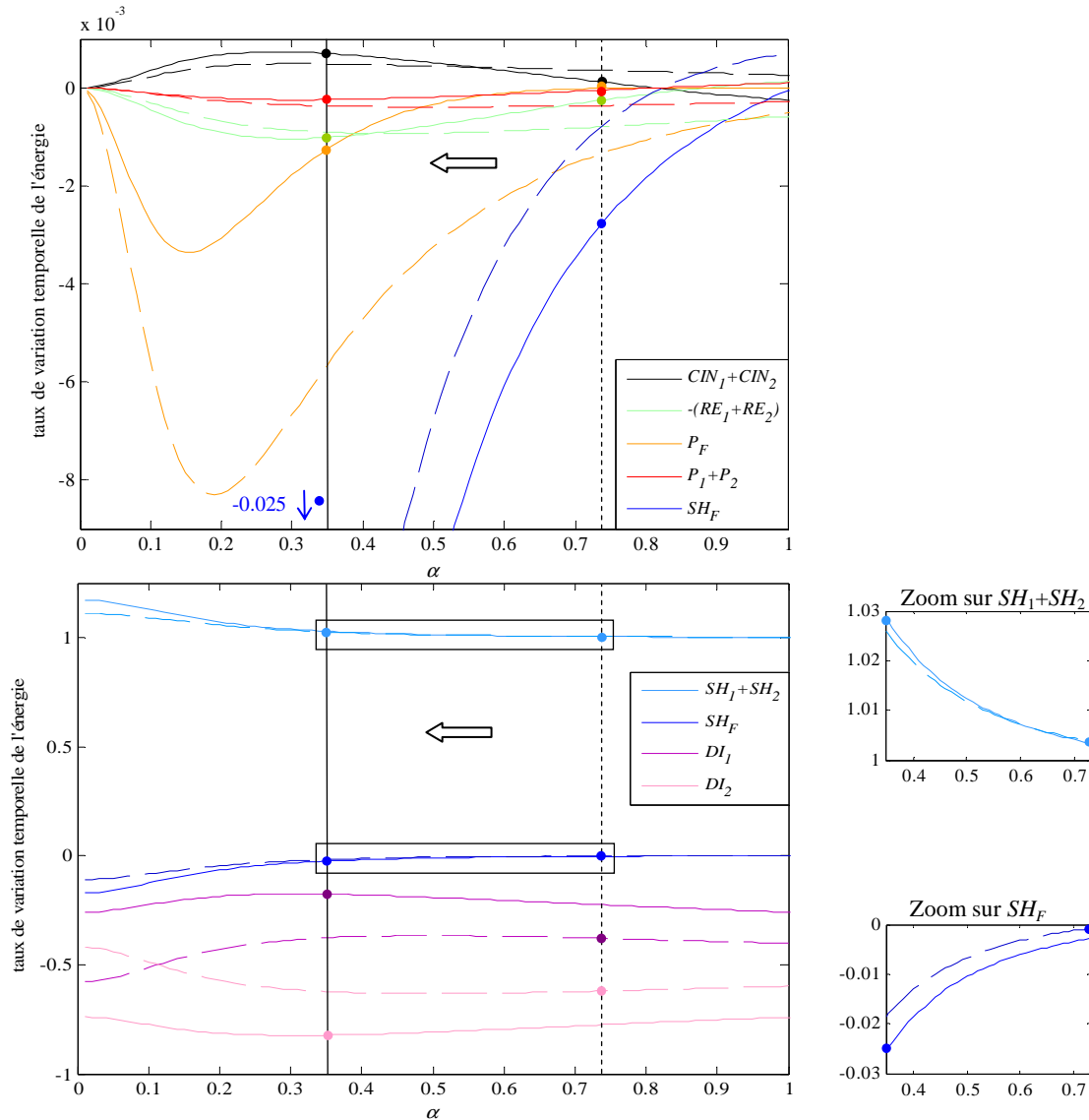
---  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ )

—  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

La Fig. 95 présente les taux de croissance du mode d'interface dans une situation pour laquelle l'instabilité de grande longueur d'onde domine. Le taux de croissance diminue - stabilisation- lors du passage d'une configuration  $N/N$  à une configuration  $N/R$ . Cette diminution est accompagnée par une diminution du nombre d'onde de l'instabilité qui passe de  $\alpha_{N/N} = 0.73$  à  $\alpha_{N/R} = 0.35$ . Ainsi, l'augmentation de la longueur d'onde, qui a plus que doublé en passant de 8.6 à 17.6, est un effet marquant de la rhéofluidification.

Les différents termes du bilan d'énergie sont donnés sur la Fig. 96 en fonction du nombre d'onde. Ce qui apparaît en premier lieu est que le taux de variation de l'énergie cinétique ne suit pas l'évolution du taux de croissance donnée sur la Fig. 95. En effet, à l'inverse des taux de croissance, nous avons

$(CIN_1+CIN_2)_{N/N}$  en  $\alpha_{N/N}=0.73$  inférieur à  $(CIN_1+CIN_2)_{N/R}$  en  $\alpha_{N/R} = 0.35$ . Ceci est dû simplement au fait que le taux de dissipation total qui sert à normaliser chaque terme est plus faible lorsque la couche inférieure est rhéofluidifiante. L'examen des courbes de dissipation dans chacune des couches donnée sur la Fig. 96 (b) montre que la part d'énergie dissipée dans la couche supérieure diminue fortement en modifiant la rhéologie, et c'est probablement cela qui explique la diminution du taux de dissipation total.



**Fig. 96. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  et regroupés par ordre de grandeur pour le mode d'interface et pour deux configurations rhéologiques.**

$Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$  et pour la configuration rhéologique:

- $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),
- $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

Comme dans la configuration  $N/N$ , la croissance de ce mode est due à la puissance des efforts de cisaillement à l'interface entre les couches, seul terme positif aux nombres d'onde concernés. Mais ce qui est remarquable dans ce cas, c'est l'allongement de la longueur d'onde qui accompagne la diminution du taux de croissance.

Afin de mieux comprendre les changements induits par le changement de la rhéologie du fluide de la couche inférieure, nous examinons les valeurs des différents termes dans le bilan d'énergie, au niveau des deux nombres d'ondes critiques de chacune des deux configurations :

→ En  $\alpha_{N/N} = 0.73$  (nombre d'onde critique dans le cas  $N/N$ ), quand on passe d'un fluide newtonien à un fluide rhéofluidifiant dans la couche inférieure, les principales modifications consistent en une réduction de la valeur des termes dus aux efforts de cisaillement à la surface libre, qui conduit à stabiliser le nombre d'onde de manière à ce qu'il ne soit plus celui pour lequel le taux de

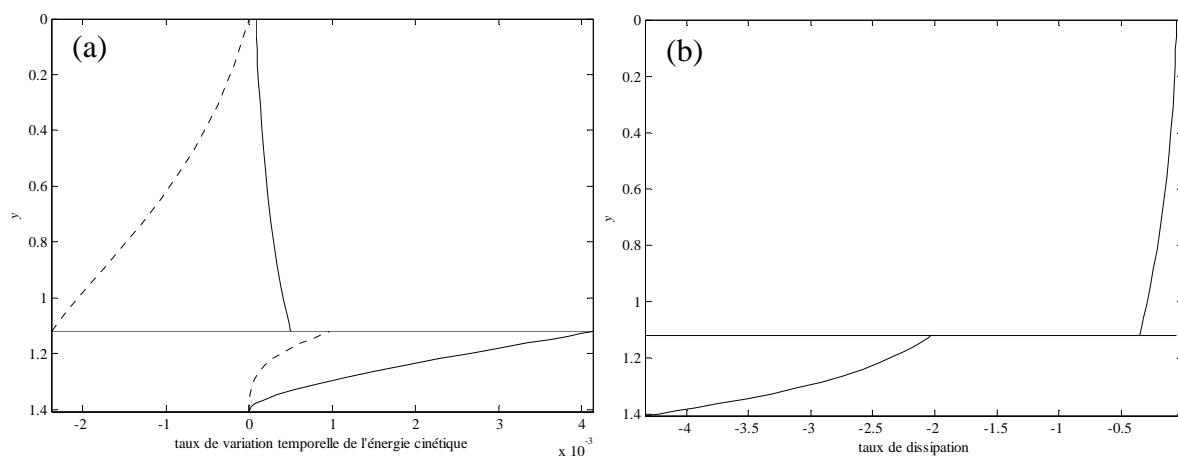


croissance est le plus fort (les autres termes sont tous augmentés). Le maximum en terme de taux de croissance, et donc aussi en terme de taux de variation de l'énergie cinétique, est ainsi décalé, en l'occurrence en  $\alpha_{N/R} = 0.35$ .

→ En  $\alpha_{N/R} = 0.35$  (nombre d'onde critique dans le cas  $N/N$ ), le bilan d'énergie cinétique est plus fort qu'en  $\alpha_{N/N} = 0.73$  quand la couche inférieure contient un fluide rhéofluidifiant. Il s'avère que le seul terme ayant un effet plus déstabilisant entre  $\alpha = 0.73$  et  $0.35$  est celui de la puissance des efforts de cisaillement à l'interface. Son augmentation explique probablement le décalage vers les plus fortes longueurs d'onde. En ce nouveau nombre d'onde  $\alpha_{N/R} = 0.35$ , la stabilisation générée par la diminution du terme  $SH_F$  en augmentant  $L_2$  est compensée par une augmentation de  $(P_1+P_2)$  et  $(SH_1+SH_2)$ , donc de la puissance de la pression et du cisaillement au niveau de l'interface.

Dans le cas  $N/N$  le nombre d'onde critique est relativement grand. Il est plus proche de celui des instabilités de longueurs d'onde modérées caractérisées par une valeur positive de  $SH_F$  qui joue dans ce cas un rôle déstabilisant. Dans le cas d'une configuration  $N/R$ , le nombre d'onde critique est plus faible et est par conséquent plus éloigné de celui des instabilités de longueurs d'onde modérées. Suivant la configuration, les deux nombres d'onde des deux instabilités du mode d'interface sont ainsi plus ou moins éloignés. Ceci peut expliquer les phénomènes de coalescence des deux pics de croissance observés dans le chapitre 4 sur la Fig. 52 par exemple.

La stabilisation des grandes longueurs d'onde du mode d'interface quand  $E_1 > 1$  et quand la couche inférieure devient rhéofluidifiante trouve son origine dans la diminution de la puissance des efforts de cisaillement au niveau de la surface libre. Cette diminution entraîne un décalage du nombre d'onde critique vers de plus petites valeurs. Au niveau des faibles nombres d'onde, l'énergie des termes tels que les efforts de cisaillement et de pression à l'interface est plus importante et vient s'opposer au rôle stabilisateur de  $SH_F$  due à la rhéofluidification.



**Fig. 97. Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique  $N/R$ .**

(a) Le taux de variation d'énergie cinétique  $CIN_k$  (—) et le transport d'énergie  $RE_k$  (- - -).

(b) Le taux de dissipation  $DI_k$ .

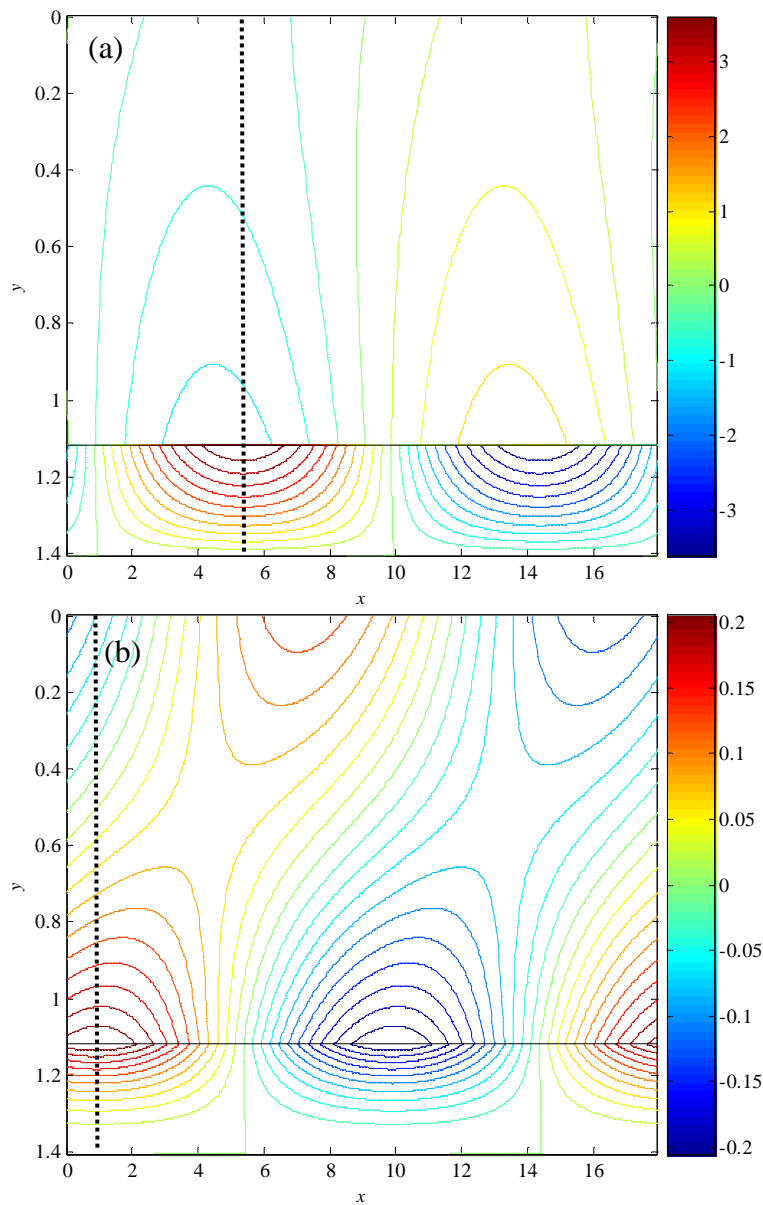
$\alpha = 0.35$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ .

Afin d'avoir une meilleure idée sur la façon dont se produisent ces changements au sein de l'écoulement, nous avons tracé sur la Fig. 97 les profils de l'énergie cinétique et du transport (a) ainsi que de la dissipation (b) dans la configuration  $N/R$ . En comparaison au cas  $N/N$  (Fig. 83), l'énergie cinétique est répartie différemment avec une plus forte composante dans la couche inférieure, de même que la dissipation qui atteint son maximum au niveau de la paroi solide.

Les contours des composantes des perturbations de la vitesse et leur profil sont portés respectivement sur les Fig. 98 et Fig. 99. D'après ces figures les perturbations longitudinales  $u_1'$  dans la couche supérieure sont moins fortes en comparaison au cas  $N/N$  (Fig. 84 et Fig. 85). Les taux de cisaillement se trouvent ainsi diminués alors que la viscosité varie très peu, d'où la diminution du taux de dissipation et au niveau de la surface libre, la diminution du terme  $SH_F$  responsable de la stabilisation de cette instabilité. Dans la couche inférieure les perturbations sont plus importantes, et comme elles

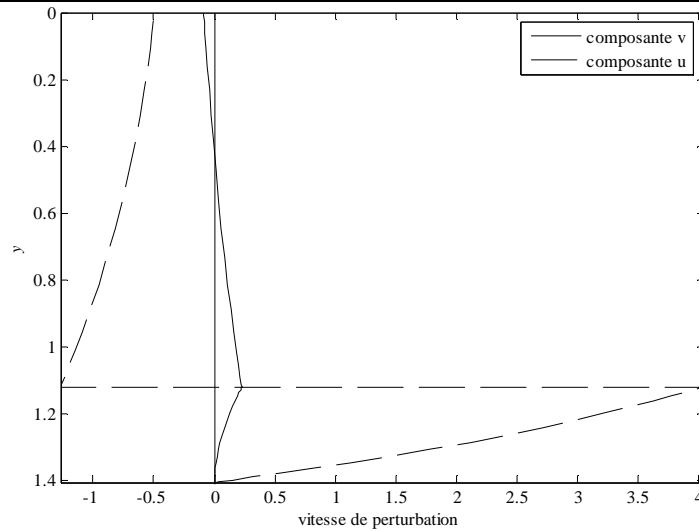
sont accompagnées d'une forte diminution de l'épaisseur de la couche, les efforts de cisaillement sont relativement plus élevés. Le profil de la composante  $u_2'$  dans la couche inférieure est plus éloigné plus du profil linéaire que ne l'est le profil dans le cas newtonien, et les taux de cisaillement sont d'autant plus forts que  $y$  augmente. Ceci peut expliquer pourquoi le profil des taux de dissipation est modifié, devenant beaucoup plus élevé à proximité de la paroi du fond.

Dans le cas où le fluide de la couche inférieure est un fluide de Carreau, la stabilisation observée est due, du point de vue énergétique, à une diminution de la puissance des efforts de cisaillement au niveau de la surface libre qui vient contrecarrer l'augmentation des efforts de cisaillement et de pression sur l'interface. Le champ des perturbations longitudinales dans la couche supérieure a une amplitude maximale réduite, donnant lieu à une diminution des taux de cisaillement sur toute son épaisseur et par conséquent la diminution de  $SH_F$  et  $DI_1$ . En parallèle, la diminution de l'épaisseur de la couche inférieure conduit à une forte augmentation de  $DI_2$  et  $SH_2$ . Globalement, ces modifications se soldent par une diminution du taux de variation de l'énergie cinétique, montrant que les effets sur la couche supérieure dominent.



**Fig. 98.** Isovaleurs des vitesses de perturbation  $u_k'(x,y)$  (a) et  $v_k'(x,y)$  (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique N/R.

$\alpha = 0.35$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ .



**Fig. 99.** Profils des vitesses de perturbation  $u'_k(y)$  en  $x = 0.9 + \lambda/4$  (a) et  $v'_k(y)$  en  $x = 0.9$  (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique  $N/R$ .

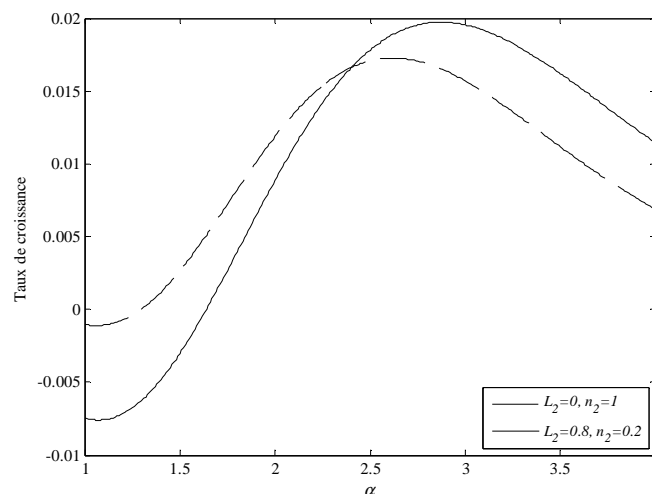
$\alpha = 0.35$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ .

### 3.3 Mode d'interface de longueur d'onde modérée

Nous étudions dans ce paragraphe les mécanismes donnant lieu à la déstabilisation des modes d'interface de longueur d'onde modérée (de l'ordre de l'épaisseur des couches) survenant quand la couche inférieure devient rhéofluidifiante. Nous présentons sur la Fig. 95 les taux de croissance de ces instabilités. On constate effectivement une déstabilisation entre le cas  $N/N$  représenté en pointillé et le cas  $N/R$  en traits pleins. Cette déstabilisation de l'écoulement s'accompagne d'une augmentation du nombre d'onde le plus instable, passant de  $\alpha_{N/N} = 2.6$  ( $\lambda = 2\pi/\alpha = 2.41$ ) à  $\alpha_{N/R} = 2.85$  ( $\lambda = 2\pi/\alpha = 2.20$ ).

L'évolution des différents termes normalisés du bilan d'énergie en fonction du nombre d'onde, est portée sur la Fig. 101. On remarque ainsi que le changement de newtonien à rhéofluidifiant de la rhéologie du fluide dans la couche inférieure stabilise tous les termes excepté celui qui traduit la puissance produite par le transport des perturbations par le champ de base  $-(RE_1 + RE_2)$ .

Le terme de transport  $-(RE_1 + RE_2)$  produit donc l'énergie responsable de la déstabilisation des longueurs d'onde modérées du mode d'interface générée par la rhéofluidification. Les puissances des efforts de cisaillement, la principale source d'instabilités pour ce type de modes comme cela a été montré dans la section précédente, sont au contraire réduites.

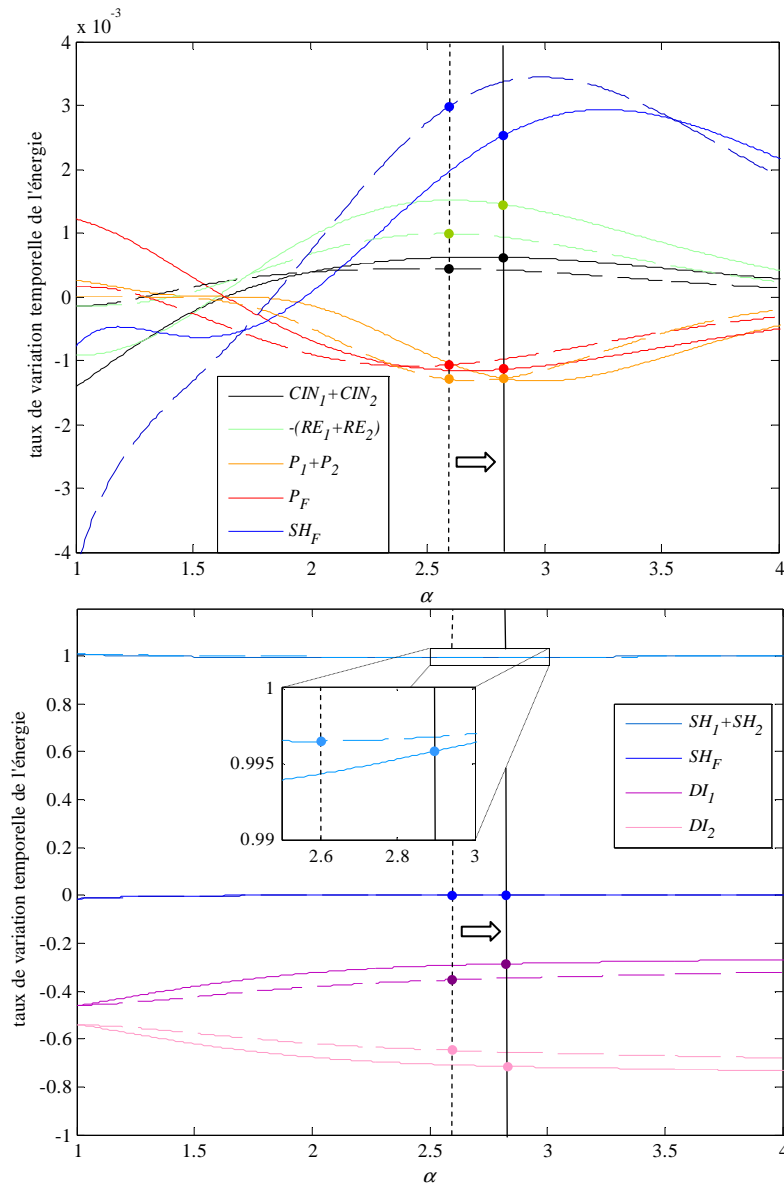


**Fig. 100.** Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux configurations rhéologiques.

$Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$  et pour la configuration :

---  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ),

—  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).

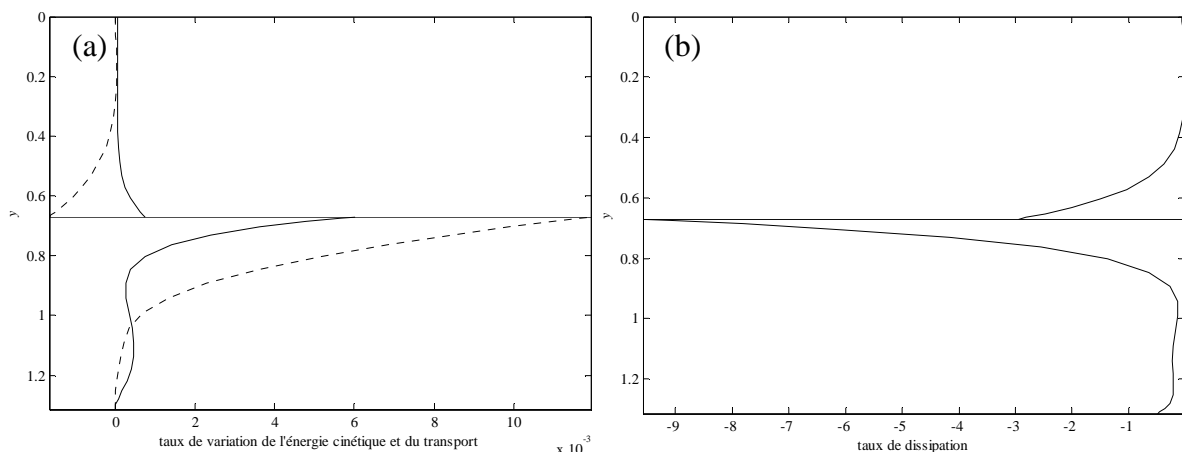


**Fig. 101. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  regroupés par ordre de grandeur pour le mode d'interface et deux configurations rhéologiques.**

$Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$  pour la configuration:

---  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ )

—  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ ).



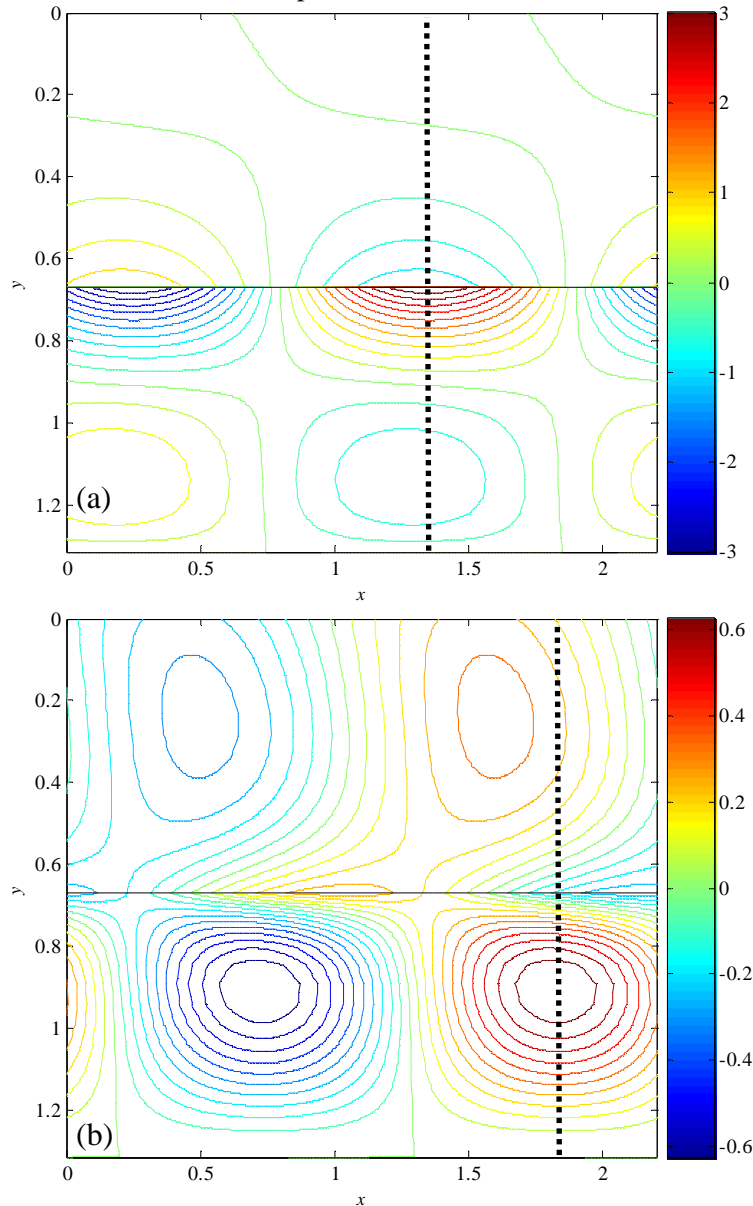
**Fig. 102. Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/R$ .**

(a) Le taux de variation d'énergie cinétique  $CIN_k$  (—) et le transport d'énergie  $RE_k$  (---).

(b) Le taux de dissipation  $DI_k$ .

$\alpha = 2.85$ ,  $Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

La Fig. 102 présente dans le cas  $N/R$  la répartition en fonction de  $y$  des termes de taux de variation de l'énergie cinétique et de transport, ainsi que du taux de dissipation normalisés. On ne note pas de différence majeure avec les profils de la Fig. 88, exceptée une augmentation du terme de transport au niveau de l'interface entre les couches, en particulier dans la couche inférieure.



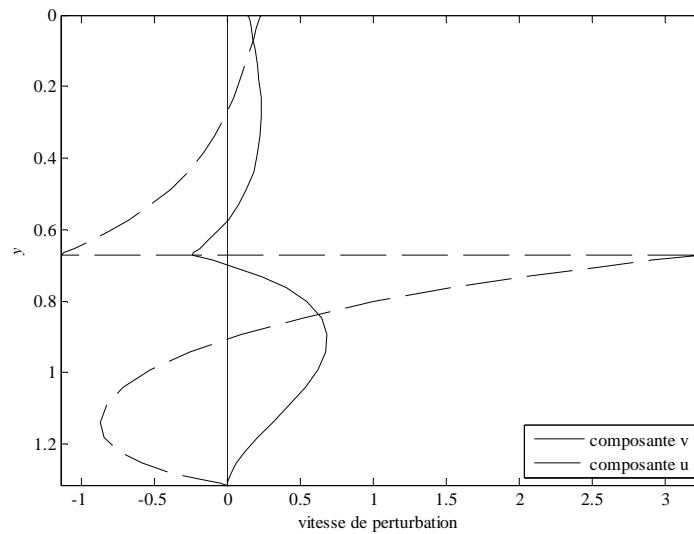
**Fig. 103. Isovaleurs des vitesses de perturbation  $u'_k(x,y)$  (a) et  $v'_k(x,y)$  (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique  $N/R$ .**

$\alpha = 2.85$ ,  $Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ .

Les champs de perturbations présentés sur les Fig. 98 et leur profil sur la Fig. 99 montrent que, comme le cas des grandes longueurs d'ondes, les variations des champs de perturbations longitudinales sont plus importantes dans la couche inférieure que dans la couche supérieure. On peut alors se demander pourquoi le même effet (une augmentation des perturbations dans la couche inférieure) donne lieu à des conséquences dominantes différentes : une augmentation de  $SH_2$  et de  $DI_2$  dans le cas précédent des grandes longueurs d'ondes, et une augmentation de  $RE_2$  dans le cas présent des longueurs d'onde modérées. Pour expliquer cela, il faut revenir à l'étude du champ de base et comparer ces résultats aux conditions dans lesquelles ces instabilités apparaissent préférentiellement. Nous avons vu en effet dans l'étude du champ de base (section 1.4 du chapitre 3) que le passage de la configuration  $N/N$  à la configuration  $N/R$ , provoque une diminution de l'épaisseur des deux couches. Toutefois, lorsque  $Q_1$  est faible, cette diminution touche principalement l'épaisseur  $d_2$  de la couche inférieure, alors que, pour des débits  $Q_1$  plus élevés, la diminution d'épaisseur touche principalement l'épaisseur  $d_1$  de la couche supérieure. Or nous avons également vu que les instabilités de longueurs d'onde modérées des modes d'interface ont des taux de croissance dominants dans le cas de faibles débits  $Q_1$ . Dans ce cas,

la rhéofluidification provoque surtout une diminution de l'épaisseur de la couche inférieure qui s'accompagne d'une accélération au niveau de l'interface. On obtient donc de forts taux de cisaillement au niveau du champ de base  $\partial U_2/\partial y$  qui expliquent l'augmentation du terme  $RE_2$ . Ce phénomène est moins marqué pour les débits  $Q_1$  plus forts puisqu'ils affectent principalement la couche supérieure où les taux de cisaillement  $\partial U_1/\partial y$  sont beaucoup plus faibles de par l'existence de la surface libre où  $\partial U_1/\partial y=0$ . La diminution de l'épaisseur de la couche supérieure obtenue pour de forts débits  $Q_1$  ne crée pas une augmentation suffisante de  $\partial U_1/\partial y$  pour rendre le terme  $RE_1$  significatifs.

Le passage de  $N/N$  à  $N/R$  déstabilise le mode d'interface à longueur d'onde modérée. Dans l'analyse des mécanismes sous-jacents à la déstabilisation, la prise en compte du champ de base permet de mieux comprendre les différences dans le comportement de l'écoulement. En effet, pour de faibles débits  $Q_1$ , la diminution conséquente de l'épaisseur de la couche inférieure s'accompagne d'une augmentation du taux de cisaillement  $\partial U_2/\partial y$ . Cela favorise la croissance des instabilités *via* les termes  $RE_2$  de transport d'énergie par le champ de base.



**Fig. 104. Profils des vitesses de perturbation  $u_k'(y)$  en  $x = 2 - \lambda/4$  (a) et  $v_k'(y)$  en  $x = 2$  (b) pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique  $N/R$ .**

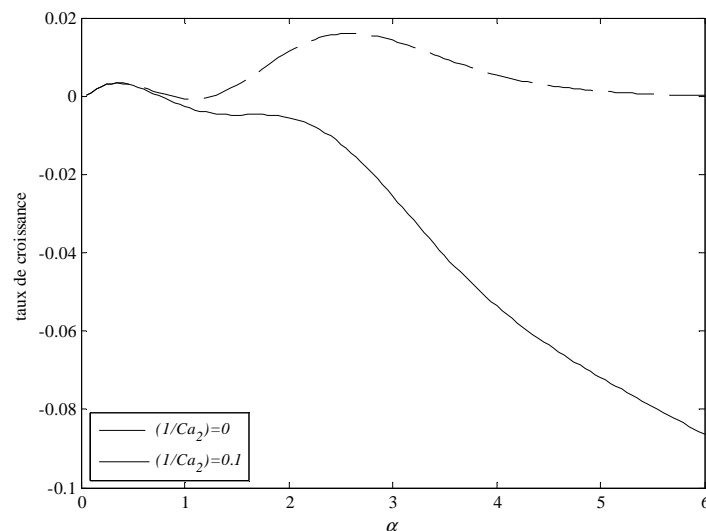
$\alpha = 2.85$ ,  $Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 0.8$  et  $n_2 = 0.2$ .

## 4 EFFETS DES PARAMETRES DE L'ETUDE SUR LES TERMES D'ENERGIE

### 4.1 Influence de la tension de surface au niveau de l'interface ( $Ca_2 \neq 0$ )

Les Fig. 105 et Fig. 106 présentent des taux de croissance et les différents termes du bilan d'énergie normalisés en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux nombres capillaires différents  $Ca_2 = 0$  et  $0.1$ . Comme on l'a vu dans la section 2.3.1 du chapitre 4, l'introduction d'une tension de surface entre les deux couches fluides stabilise les longueurs d'onde modérées du mode d'interface.

Soulignons que dans les deux cas présentés, les modes de surface sont stables et que le seul mode instable est le mode d'interface. Dans le cas sans tension de surface, l'instabilité a un nombre d'onde  $\alpha = 2.6$ . Quand  $Ca_2 = 0.1$ , les longueurs d'onde modérées sont stabilisées et l'instabilité a un nombre d'onde  $\alpha = 0.35$ .

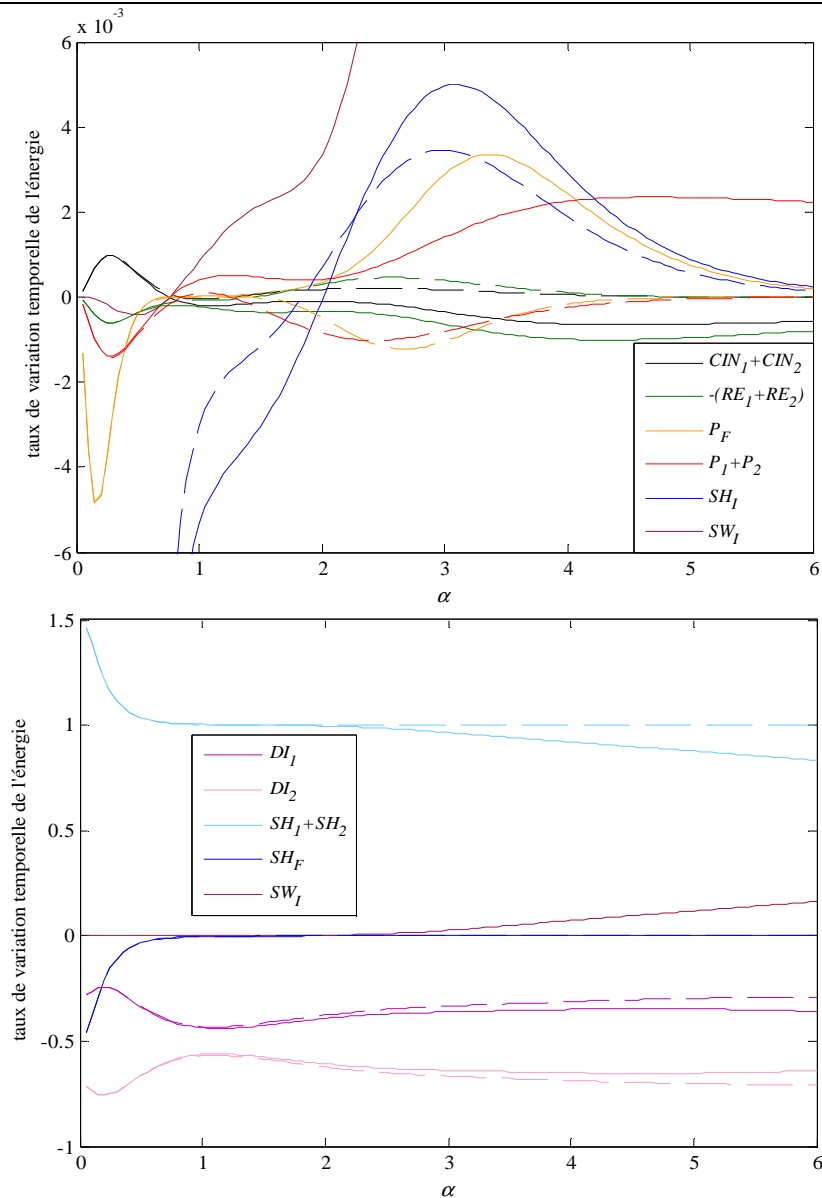


**Fig. 105.** Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux nombres capillaires  $Ca_2 = 0, 0.1$  dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$Re = 1, \beta = 0.2 \text{ rad}, Ca_1 = 0, I_1 = I_2 = 10^{-3}, E_1 = 2.5, M_1 = 0.99, Q_1 = 0.65, L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Comme nous avons procédé plus haut pour le mode d'interface, nous divisons les différents termes selon deux ordres de grandeur. Nous notons d'après les courbes que les taux de variation de l'énergie cinétique sont relativement faibles, ce qui nous conduit à prendre en considération dans notre analyse l'ensemble les termes du bilan d'énergie. On note par ailleurs l'apparition d'un nouveau terme,  $SW_F$ , représentant la puissance des forces de tension à l'interface (il était toujours nul jusqu'à présent). Ces efforts provoquent une déstabilisation de plus en plus forte quand le nombre d'onde augmente. L'ajout d'une tension d'interface provoque aussi une déstabilisation des termes des efforts de pression sur les deux interfaces,  $P_1 + P_2$  et  $P_F$ , et de cisaillement sur la surface libre  $SH_F$ .

La stabilisation du mode d'interface de longueur d'onde modérée liée à l'ajout d'une tension d'interface résulte d'une forte diminution de la puissance des efforts de cisaillement à l'origine de l'instabilité, ainsi qu'une diminution des termes de transfert d'énergie du champ de base au champ perturbé  $-(RE_1 + RE_2)$ .

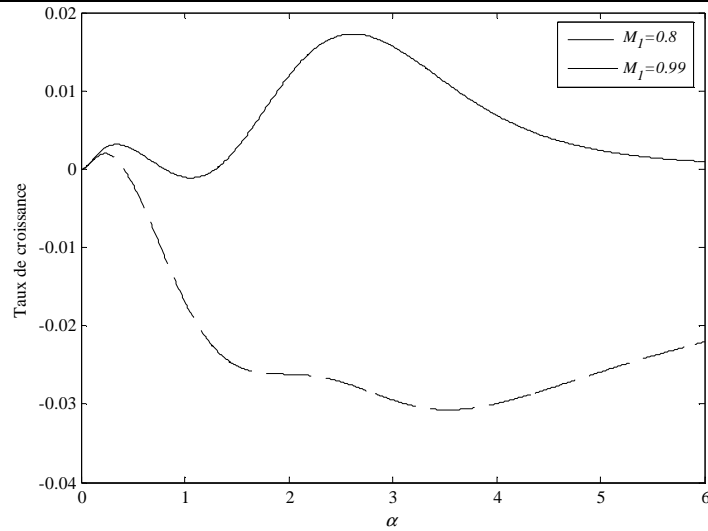


**Fig. 106. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour le mode d'interface pour deux nombres capillaires dans la configuration rhéologique  $N/N$ .  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$ ,  $n_1 = n_2 = 1$  et pour le nombre capillaire:   
 - - -  $Ca_2 = 0$ ,  
 —  $Ca_2 = 0.1$ .**

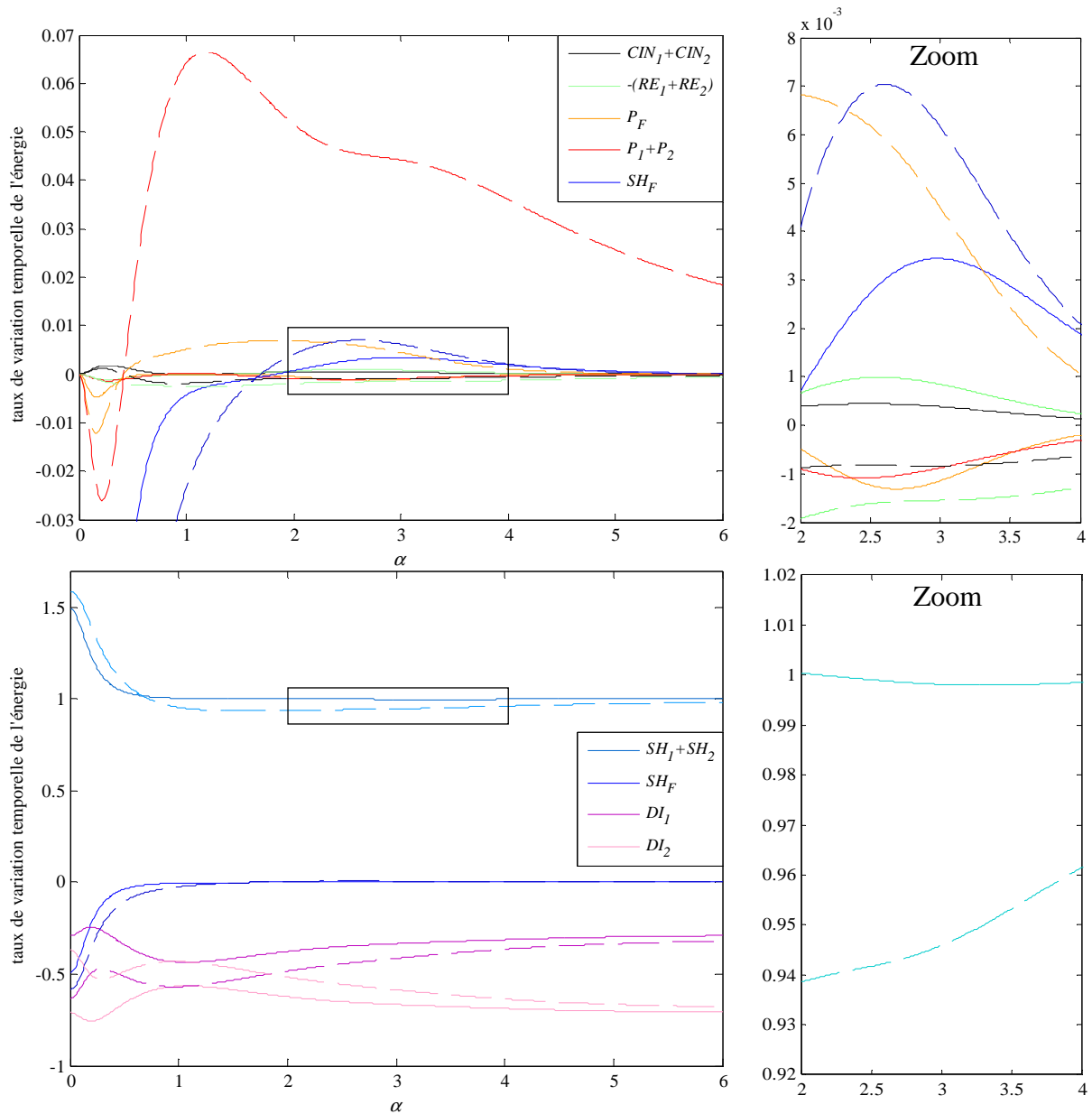
## 4.2 Influence du rapport de densité $M_1$

Nous avons montré, dans la section 2.2 du chapitre 4, que l'effet majeur du rapport  $M_1$  de densité entre les couches est de modifier la stabilité du mode d'interface de longueur d'onde modérée. C'est cet effet que nous allons étudier dans ce qui suit, à travers le bilan d'énergie. La Fig. 107 présente les taux de croissance des modes d'interface pour deux valeurs de  $M_1$ . Nous constatons effectivement une stabilisation du mode d'interface de longueur d'onde modérée quand la stratification en densité augmente (soit quand  $M_1$  diminue). Nous nous intéressons plus particulièrement au comportement des différents termes du bilan d'énergie autour du nombre d'onde  $\alpha = 2.6$ , où le taux de croissance atteint son maximum. Les différents termes du bilan d'énergie sont présentés sur la Fig. 108.





**Fig. 107. Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux rapports de densité  $M_1 = 0.99$  et  $0.8$  dans la configuration rhéologique  $N/N$ .  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .**



**Fig. 108. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde pour le mode d'interface pour deux rapports de densité et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $Q_1 = 0.65$ ,  $L_1 = L_2 = 0$ ,  $n_1 = n_2 = 1$  et pour le rapport de densité: ---  $M_1=0.8$ , —  $M_1=0.99$ .**

Dans les études que nous avons effectuées jusqu'à présent, les densités des couches étaient relativement proches, et l'apport du terme du aux efforts de pression à l'interface  $P_1+P_2$  dans le bilan d'énergie était négligeable. On remarque sur ces courbes la croissance de ce terme lorsque  $M_1=0.8$ . Cependant le taux d'énergie cinétique décroît quand  $M_1$  diminue, il y a donc un ou plusieurs autres termes qui compensent la déstabilisation de  $P_1+P_2$  pour le nombre d'onde de l'instabilité. On a vu que, sans stratification en densité, la croissance du mode d'interface de longueur d'onde modérée trouvait son origine dans les efforts de cisaillement sur les deux interfaces et le transport par le champ de base : dans le cas  $M_1 = 0.8$ , la puissance des efforts de cisaillement sur la surface libre devient encore plus déstabilisante, alors que les autres termes s'avèrent moins dangereux que quand  $M_1 = 0.99$ .

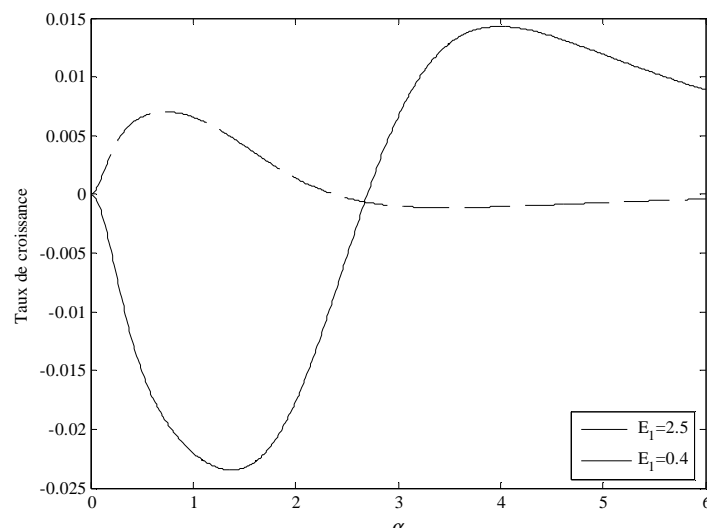
Lorsqu'on ajoute une stratification en densité en augmentant la masse volumique du fluide de la couche inférieure, la stabilisation du mode d'interface de longueur d'onde modérée s'explique par une diminution simultanée de la puissance des efforts de cisaillement sur l'interface entre les couches et des termes de transport par le champ de base, qui sont les deux termes responsables de l'instabilité.

### 4.3 Influence de la stratification en viscosité

Nous avons déjà montré que le changement de stratification en viscosité conduit à des modifications dans le comportement de chaque type d'instabilité. La modification la plus remarquable est celle du mode d'interface à grande longueur d'onde : alors qu'il présentait la particularité de ne pas nécessiter d'inertie pour être instable ( $Re_{cr} = 0$ ) lorsque  $E_1 = 2.5$ , son seuil devient non nul lorsque  $E_1 = 0.4$ . Par ailleurs, le seuil de déclenchement de l'instabilité de surface devient plus faible que celui du mode d'interface de grande longueur d'onde. Ainsi, pour les grandes longueurs d'onde, le taux de croissance de l'instabilité de surface devient prépondérant par rapport à celui de d'interface.

Par ailleurs, les instabilités du mode de surface et du mode d'interface de longueur d'onde modérée sont peu modifiées. De même l'ordre de grandeur des différents termes du bilan d'énergie et les champs de perturbations ne présentaient pas de différence remarquable.

Nous nous intéressons dans ce qui suit plus particulièrement à l'étude de l'instabilité du mode d'interface de grande longueur d'onde. Nous présentons sur la Fig. 109 les taux de croissance du mode d'interface en fonction du nombre d'onde pour les deux rapports de viscosité que nous avons étudié.

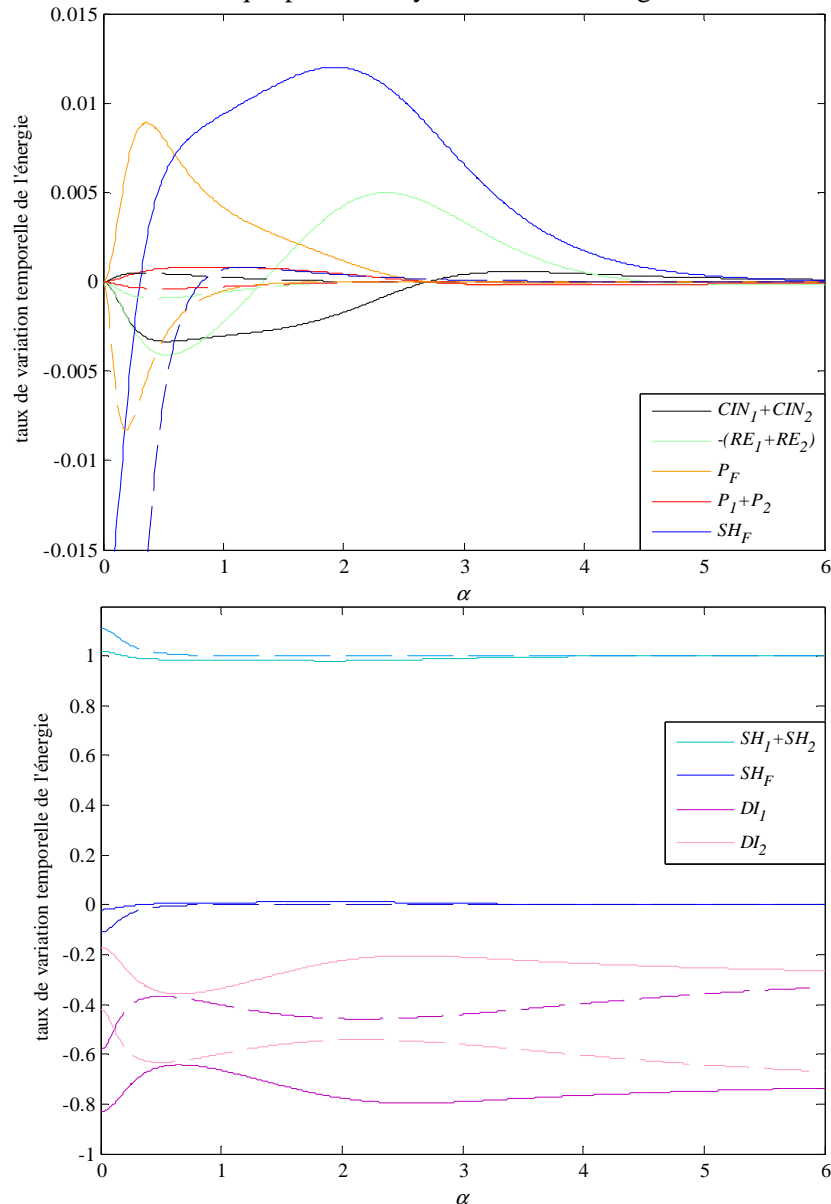


**Fig. 109.** Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux rapport de viscosité  $E_1 = 2.5$  et  $0.4$  dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Nous choisissons ici un nombre de Reynolds inférieur au seuil de l'instabilité de grande longueur d'onde de manière à observer la stabilisation liée au changement de stratification en viscosité  $E_1 = 0.4$ . Les différents termes du bilan d'énergie normalisés par le taux de dissipation totale sont représentés

sur la Fig. 110. Dans le cas  $E_1 = 2.5$ , le nombre d'onde critique est  $\alpha = 0.73$ . Nous nous plaçons au voisinage de ce nombre d'onde critique pour l'analyse du bilan d'énergie.



**Fig. 110.** Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour le mode d'interface pour deux rapports de viscosité et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$  et pour le rapport de viscosité:

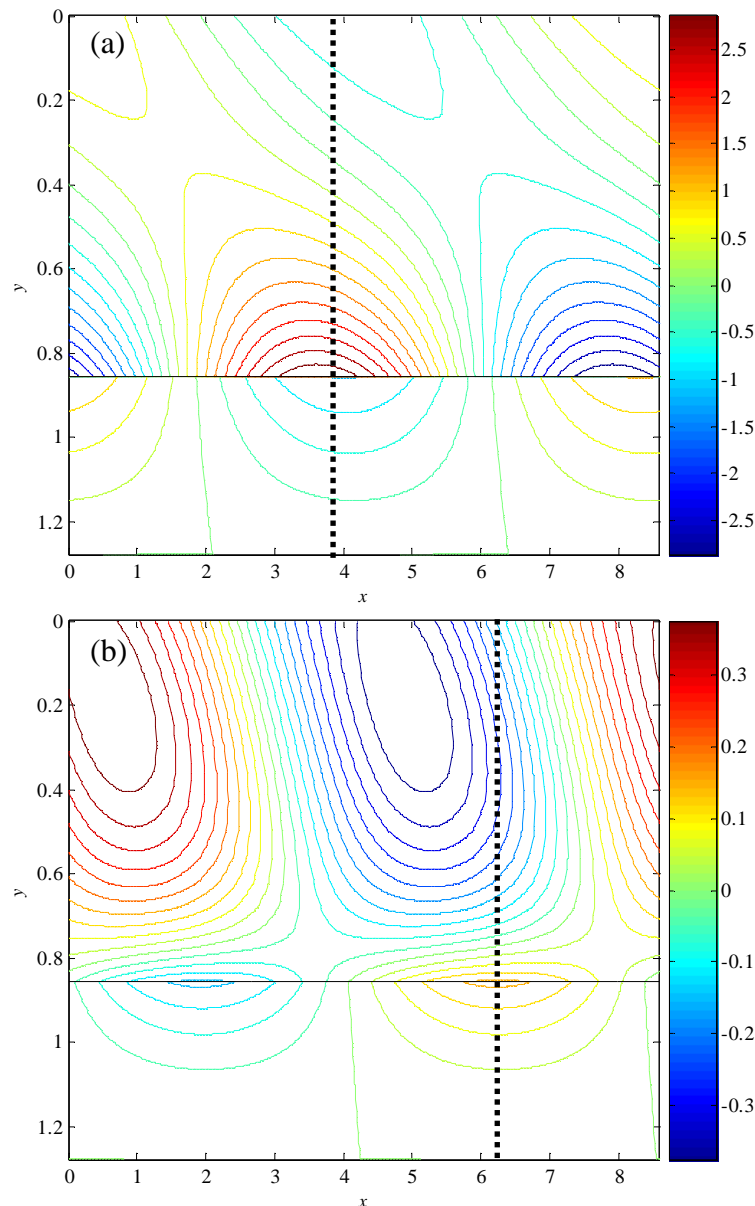
- $E_1=2.5$ ,
- $E_1=0.4$ .

Le changement de signe du taux de croissance traduit la stabilisation de ce mode. Seuls deux termes du bilan diminuent en passant de  $E_1 = 2.5$  à  $E_1 = 0.4$  :

- le terme de transport par la perturbation du gradient du champ de base  $-(RE_1+RE_2)$  dissipe un peu plus d'énergie,
- le terme de production d'énergie par les efforts de cisaillement au niveau de l'interface entre les couches ( $SH_1+SH_2$ ) devient moins efficace.

Les champs et profils de perturbations représentés sur les Fig. 111 et Fig. 112 sont à comparer avec les Fig. 84 et Fig. 85 présentant les mêmes résultats pour  $E_1 = 2.5$ . On remarque que les profils de perturbations ont la même allure, mais que les perturbations ne sont pas réparties de la même façon selon la profondeur. Effectivement, contrairement au cas  $E_1 = 2.5$ , les perturbations longitudinales, qui jouent un rôle dominant dans le processus de déstabilisation à travers les efforts de cisaillement à

l'interface, sont les plus fortes dans la couche supérieure. Nous observons ainsi que les perturbations longitudinales sont influencées par la stratification en viscosité. Leurs valeurs extrêmes dans la couche semblent devenir d'autant plus fortes que la viscosité est faible.

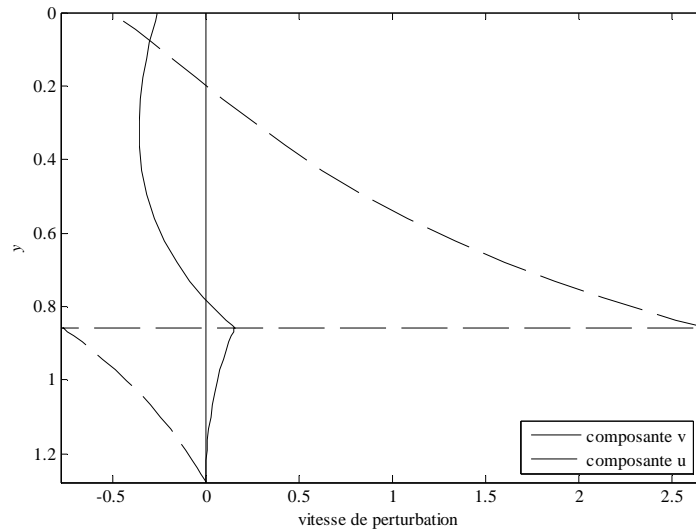


**Fig. 111.** Isovaleurs des vitesses de perturbation  $u'_k(x,y)$  (a) et  $v'_k(x,y)$  (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$\alpha = 0.73$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 0.4$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

Dans le cas étudié, le débit dans la couche supérieure représente 90% du débit total. La couche supérieure est par conséquent plus épaisse que la couche inférieure, et les efforts de cisaillement à l'interface sont moindres par rapport à ceux dans la couche inférieure. Notons également que dans le cas  $E_1 = 2.5$ , l'épaisseur de la couche inférieure est encore plus faible que le cas présent, par l'effet de la stratification en viscosité sur le champ de base, ce qui accentue encore le cisaillement dans cette couche. La viscosité est, quant à elle, multipliée par 6.25 quand  $E_1$  passe de 2.5 à 0.4. Mais cette augmentation ne suffit pas à équilibrer la diminution du taux de cisaillement et la contrainte à l'interface diminue, comme en témoigne la diminution du terme  $SH_1 + SH_2$ .

La stabilisation des modes d'interfaces sur leurs grandes longueurs d'onde opérée quand le fluide de la couche inférieure devient le plus visqueux des deux semble ainsi provenir d'une répartition différente des perturbations sur l'épaisseur du film, provoquant une diminution de la puissance des efforts de cisaillement suffisante pour empêcher la croissance de ces instabilités.



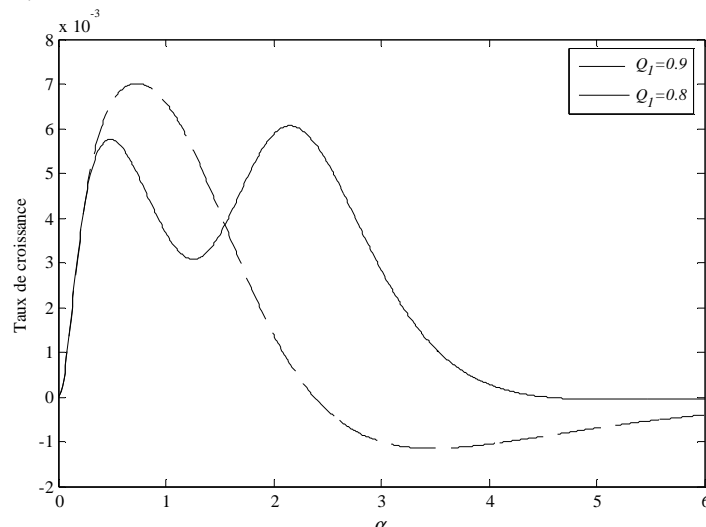
**Fig. 112. Profils des vitesses de perturbation  $u_k'(y)$  en  $x = 6.2 - \lambda/4$  (a) et  $v_k'(y)$  en  $x = 6.2$  (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$\alpha = 0.73$ ,  $Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 0.4$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $Q_1 = 0.9$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .

#### 4.4 Influence du débit $Q_1$

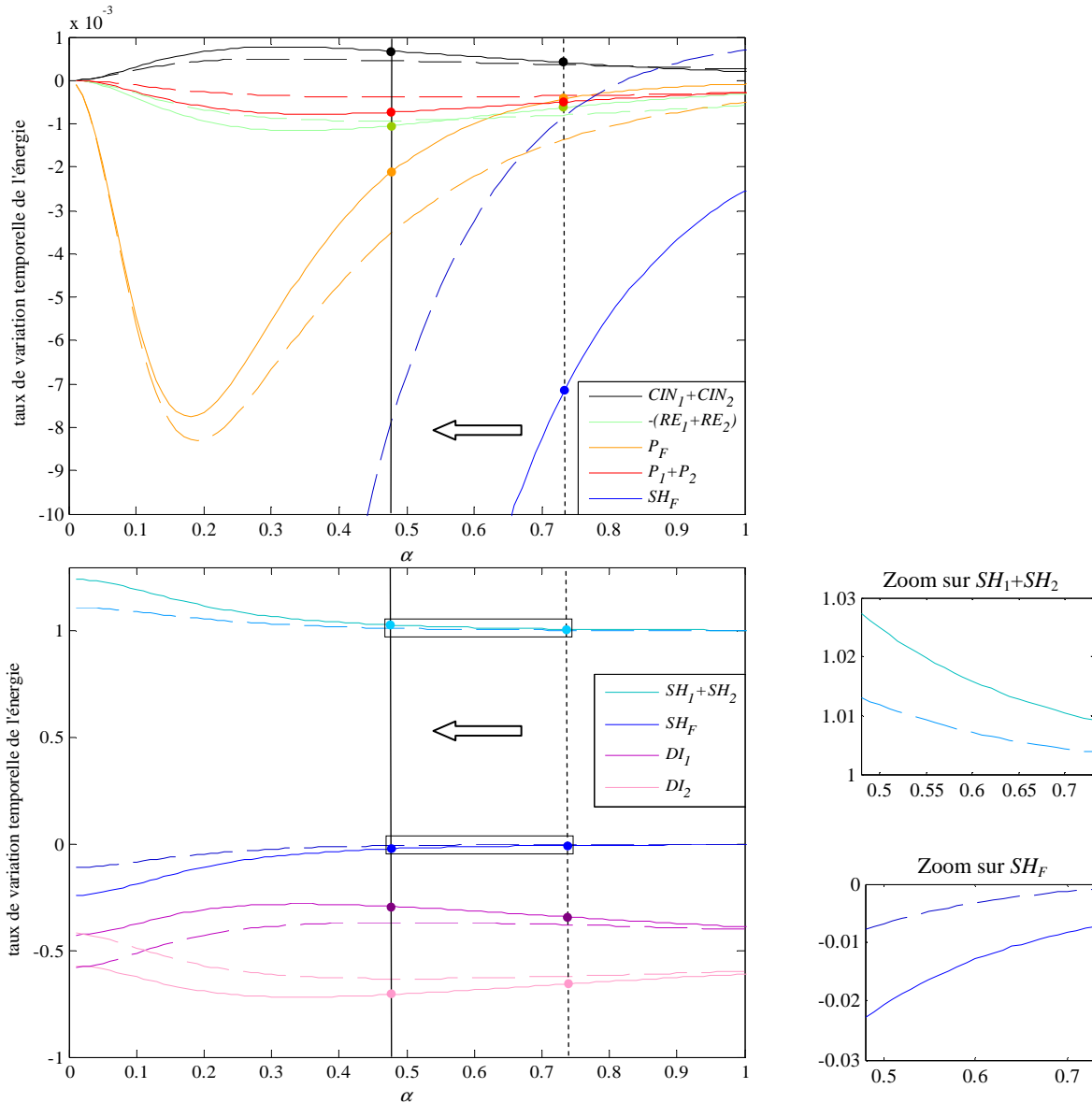
La diminution du débit  $Q_1$  conduit à une **diminution** du rapport d'épaisseurs  $d_1/d_2$ . Par ailleurs, au niveau de la stabilité, avec  $E_1 = 2.5$ , la diminution de  $Q_1$  a pour effet de stabiliser les modes d'interface de grande longueur d'onde (voir chapitre 4, section 2.1). Nous avons également noté un effet contradictoire de  $Q_1$  avec un autre paramètre : le couple  $(L_2, n_2)$  qui représente les propriétés rhéofluidifiantes de la couche inférieure. Effectivement, on a vu notamment dans la section 2.2 de ce chapitre que le fait d'augmenter la rhéofluidité stabilise lui aussi les grandes longueurs d'onde du mode d'interface. Pourtant, d'après l'étude du champ de base, on sait aussi que cela conduit à une **augmentation** le rapport  $d_1/d_2$ .

L'évolution du taux de croissance est présentée sur la Fig. 113 avec le même jeu de paramètres que dans la section 2.2. Nous observons une stabilisation des grandes longueurs d'onde quand le débit dans la couche supérieure est réduit, ainsi qu'une diminution du nombre d'onde critique de  $\alpha_{0,9} = 0.73$  à  $\alpha_{0,8} = 0.48$ . L'évolution des différents termes du bilan énergétique quand on diminue le débit est illustrée sur la Fig. 114.



**Fig. 113. Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour deux débits  $Q_1 = 0.9$  et  $0.8$  dans la configuration rhéologique  $N/N$ .**

$Re = 1$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ .



**Fig. 114.** Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde  $\alpha$  pour le mode d'interface, pour deux débits et dans la configuration rhéologique  $N/N$ .

$Re = 2$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1 = Ca_2 = 0$ ,  $I_1 = I_2 = 10^{-3}$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.99$ ,  $L_1 = L_2 = 0$  et pour le débit:

- $Q_1 = 0.9$ ,
- $Q_1 = 0.8$ .

Remarquons tout d'abord que les évolutions des courbes de la Fig. 114 sont globalement similaires à celles de la Fig. 96 illustrant l'influence de la rhéofluidification sur le mode d'interface. On note sur la Fig. 113 que le nombre d'onde pour lequel le taux d'amplification atteint son maximum se décale vers les faibles nombres d'onde. Examinons maintenant l'évolution des composantes du bilan d'énergie autour du nombre d'onde critique  $\alpha_{0,9} = 0.73$ , et les raisons qui conduisent au changement du nombre d'onde critique, lorsqu'on diminue le débit de  $Q_1 = 0.9$  à  $Q_1 = 0.8$  :

→ En  $\alpha_{0,9} = 0.73$  (nombre d'onde critique dans le cas  $Q_1 = 0.9$ ), quand on diminue le débit  $Q_1$  jusqu'à 0.8, nous observons une forte réduction de la puissance des efforts de cisaillement à la surface libre. La puissance de ces mêmes efforts sur l'interface augmente elle aussi, mais pas suffisamment pour que  $\alpha_{0,9} = 0.73$  reste le nombre d'onde le plus instable. Le maximum en terme de taux de croissance, et donc aussi en terme de taux de variation de l'énergie cinétique avant normalisation, est ainsi décalé, en l'occurrence vers  $\alpha_{0,8} = 0.48$ .

→ A nouveau le seul terme ayant un effet plus déstabilisant entre  $\alpha = 0.73$  et 0.48 est celui de la puissance des efforts de cisaillement à l'interface. Son augmentation explique donc le décalage vers les plus grandes longueurs d'onde. Pour ce nouveau nombre d'onde  $\alpha_{0,8} = 0.48$ , la stabilisation

générée par la diminution du terme  $SH_F$  en diminuant  $Q_1$  est compensée par une augmentation de  $(P_1+P_2)$  et  $(SH_1+SH_2)$ , c'est-à-dire de la puissance de la pression et du cisaillement au niveau de l'interface.

La diminution du débit  $Q_1$  dans la couche supérieure a exactement le même effet qualitatif sur le bilan énergétique que le fait d'introduire un modèle de Carreau dans la couche inférieure. Ces deux modifications conduisent à une stabilisation des grandes longueurs d'onde du mode d'interface. Ceci tend donc à confirmer que les rapports d'épaisseur entre les couches n'est pas le seul paramètre devant être considéré pour la stabilité du système.

# C ONCLUSIONS

Nous avons abordé dans cette étude la stabilité de l'écoulement de films de fluides newtoniens ou non newtoniens sur un plan incliné. Notre étude bibliographique met en évidence que, contrairement au cas de fluides newtoniens, très peu d'études portent sur les fluides rhéofluidifiants. Dans ce travail de thèse, nous avons porté notre attention plus particulièrement sur ce type d'écoulement en considérant le cas d'un fluide rhéofluidifiant, d'abord à une couche, puis à deux couches non miscibles superposées.

L'étude est essentiellement basée sur la stabilité linéaire combinée à une approche énergétique. Une fois les seuils et taux de croissance déterminés par l'étude de stabilité linéaire (équation d'Orr-Sommerfeld), l'approche énergétique nous a permis d'analyser le rôle de chaque terme de l'équation de l'énergie (équation d'Orr-Reynolds). Nous avons ainsi pu déterminer avec précision d'une part, les termes qui produisent de l'énergie et alimentent la croissance des instabilités et d'autre part ceux qui en dissipent et s'opposent à leur développement.

Un code de simulation numérique a été développé pour la résolution du problème aux valeurs propres généralisé, résultant de la linéarisation des équations de Navier-Stokes et le développement des perturbations des variables du problème en modes normaux. Ce code est basé sur la méthode spectrale de Tau-Tchebychev.

Dans le cas d'une seule couche, l'étude de stabilité linéaire montre que lorsque le fluide est rhéofluidifiant, en comparaison au cas d'un fluide newtonien, on observe une déstabilisation de l'écoulement. L'analyse énergétique montre que ces instabilités sont dues aux travaux des forces de cisaillement au niveau de la surface libre. Ces forces agissent sur l'écoulement de sorte à rétablir une contrainte nulle sur la surface déformée. Quand le fluide est rhéofluidifiant, le travail des forces de cisaillement est plus important, ce qui entraîne une élévation du taux de croissance des instabilités.

Deux autres approches ont été développées pour étudier la stabilité du cas monocouche. La première est basée sur une méthode asymptotique aux grandes longueurs d'onde. Elle a permis de déterminer les seuils de déclenchement des instabilités et la célérité critique des ondes  $c_R$  dans la limite des fluides faiblement rhéofluidifiants. La deuxième est une approche phénoménologique. Elle est également aux grandes longueurs d'onde, mais ne restreint pas les paramètres rhéologiques au cas faiblement rhéofluidifiant. Elle donne accès à la célérité des ondes en utilisant le champ de base déterminé



numériquement. Les deux approches donnent des résultats en parfait accord dans la limite des fluides faiblement rhéofluidifiants et constituent un premier pas vers la compréhension de l’instabilité de grande longueur d’onde avec un fluide rhéofluidifiant. Effectivement, les deux approches montrent qu’il s’agit de la même instabilité que dans le cas d’un fluide newtonien. Toutefois, on note que la différence  $U(0)-c_R$  augmente quand le fluide devient rhéofluidifiant, et cela a pour effet de réduire le seuil de déclenchement des instabilités à travers une augmentation des effets des termes d’inertie. Une approche phénoménologique étendue au second ordre en  $\alpha$  devrait certainement permettre de retrouver les nombres de Reynolds critiques des instabilités.

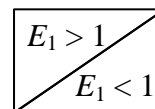
Les résultats de l’étude monocouche nous ont servi de base pour l’analyse de la stabilité de l’écoulement d’un film à deux couches superposées sur un plan incliné. Il s’agit d’un problème complexe car, aux nombreux paramètres physiques s’ajoute le fait que chacun influence différemment la stabilité de l’écoulement, rendant délicat le travail de synthèse. Nous avons néanmoins pu mettre en évidence certaines tendances dans le comportement des instabilités en fonction des paramètres de l’étude. Le Tableau 6 présente une synthèse de l’influence de chaque paramètre séparément en termes d’augmentation (déstabilisation) ou de diminution du taux de croissance (stabilisation).

Mode :		Influence de l’augmentation de :			Influence de la rhéologie :		
		$Q_1$	$M_1$	$T_k \quad k = 1,2$	$N/N \rightarrow R/N$	$N/N \rightarrow N/R$	$N/N \rightarrow R/R$
Surface				=			
Interface	$\alpha \sim 0$			=	=		
	$\alpha > 1$						

**Légende**

	Forte déstabilisation
	Faible déstabilisation
	Effet négligeable
	Faible stabilisation
	Forte stabilisation

**Influence de la viscosité :**



**Tableau 6. Tableau récapitulatif de l’effet spécifique de chacun des paramètres de l’étude sur la stabilité**

Stabilisation = diminution du taux de croissance.

Déstabilisation = augmentation du taux de croissance.

Dans le cas de l’écoulement à deux couches, trois types d’instabilités ont pu être identifiées : une instabilité de surface (mode de surface) à grande longueur d’onde et deux instabilités d’interface (mode d’interface), l’une à grande longueur d’onde et l’autre à longueur d’onde modérée. Tout d’abord, l’instabilité de surface dans le cas à deux couches présente la même origine que dans le cas d’une couche unique. L’approche énergétique montre dans les deux cas, une évolution similaire de l’instabilité en fonction des propriétés rhéofluidifiantes du fluide.

Les deux instabilités issues du mode d’interface ont pour origine principale le travail des efforts de cisaillement à l’interface. Ces efforts sont développés par les fluides alentour pour assurer la continuité des contraintes au niveau de l’interface déformée. Pour les instabilités de grande longueur d’onde, ces efforts constituent la seule contribution dans la production d’énergie de perturbation. Par contre, pour le développement des instabilités de longueur d’onde modérée, plusieurs termes contribuent à la production de l’énergie de perturbation.

La stratification en viscosité joue un rôle déterminant dans la stabilité du système, notamment sur les seuils de déclenchement des instabilités. Nous avons montré que lorsque la couche inférieure est la moins visqueuse, l'instabilité de grande longueur d'onde issue du mode d'interface est la plus dangereuse. Cette instabilité peut en effet croître sans inertie ; on parle d'« *inertialess effect* ». Cet effet disparaît quand on inverse les viscosités des couches. Une inversion en viscosité provoque effectivement de profondes modifications dans le champ de base, et notamment au niveau des épaisseurs relatives des couches. Cela est à l'origine d'une répartition différente des perturbations de vitesse dans l'épaisseur, aboutissant à de plus faibles taux de cisaillement au niveau de l'interface. L'augmentation de la viscosité ne suffit pas à compenser la baisse du taux de cisaillement. Ceci explique la diminution des contraintes de cisaillement au niveau de l'interface à l'origine de la disparition de ces instabilités sans inertie.

Nos résultats montrent que les propriétés rhéologiques du fluide ont d'autant plus d'influence sur la stabilité du système que le fluide concerné a une viscosité newtonienne faible. Lorsque la couche inférieure (adjacente à la paroi) est la moins visqueuse, la rhéologie de cette couche détermine la stabilité de l'écoulement. La rhéologie de la couche supérieure est dans ce cas pratiquement sans conséquence. On aboutit alors à une diminution du taux de croissance (stabilisation) des grandes longueurs d'onde du mode d'interface, qui gardent toutefois un nombre de Reynolds critique nul et restent donc les plus dangereuses. La rhéofluidification induit parallèlement une augmentation du taux de croissance des deux autres instabilités : l'instabilité de grande longueur d'onde issue du mode de surface et l'instabilité de longueur d'onde modérée issue du mode d'interface. Dans la configuration inverse en viscosité, le comportement du système reste pratiquement inchangé lorsque le débit est faible, mais pour de forts débits, la stabilité n'est plus seulement commandée par l'une ou l'autre des couches. La stabilité de l'écoulement quand l'une des deux couches est un fluide rhéofluidifiant évolue en effet différemment selon que la couche concernée est la couche inférieure ou la couche supérieure. Cette analyse met donc en évidence deux régimes : le premier où la rhéologie de la couche inférieure dicte la stabilité de l'écoulement, le second où le comportement est plus complexe et dépend de la rhéologie des deux couches. La limite entre ces deux régimes n'est pas donnée simplement par le rapport de viscosité  $E_1$ , puisque, pour certaines valeurs de  $E_1$  inférieures à 1, on se trouve dans l'un ou l'autre des régimes selon la valeur du rapport des débits  $Q_1/Q_2$ . Déterminer un critère simple combinant ces deux paramètres est donc une perspective essentielle de ce travail.

Ce mémoire présente à la fois une étude systématique de l'influence spécifique de chacun des paramètres sur la stabilité de l'écoulement mono ou bicouches, et une interprétation des phénomènes physiques qui l'accompagnent. Les résultats obtenus offrent une base à la conception et au dimensionnement d'un banc expérimental. Ce banc permettra non seulement la validation des résultats présentés dans cette étude mais aussi l'observation d'autres phénomènes (instabilités secondaires et développement de phénomènes nonlinéaires).



# ANNEXES



## Annexe I. LES ASYMPTOTES DE LA LOI DE CARREAU

Recherchons les asymptotes de la loi de Carreau :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[ 1 + (\delta \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}.$$

On isole  $\eta$ :

$$\eta = \eta_\infty \left\{ 1 + \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} - 1 \right) \left[ 1 + (\delta \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\},$$

donc 
$$\log \eta = \log \eta_\infty + \log \left\{ 1 + \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} - 1 \right) \left[ 1 + (\delta \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\}.$$

Or on suppose que  $\eta_0 \gg \eta_\infty$ , donc:

$$\log \eta \approx \log \eta_\infty + \log \left\{ 1 + \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \left[ 1 + (\delta \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\}.$$

✓ **Cas 1 :**  $\delta \dot{\gamma} \ll 1$ , donc  $\dot{\gamma} \ll 1/\delta$ , et on obtient :

$$\log \eta \approx \log \eta_\infty + \log \left( 1 + \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \approx \log \eta_\infty + \log \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right),$$

et finalement

$$\boxed{\log \eta \approx \log \eta_0}. \quad (4)$$

✓ **Cas 2 :**  $\delta \dot{\gamma} \gg 1$ , donc  $\dot{\gamma} \gg 1/\delta$ , et on obtient :

$$\log \eta \approx \log \eta_\infty + \log \left\{ 1 + \frac{\eta_0}{\eta_\infty} (\delta \dot{\gamma})^{n-1} \right\}.$$

Si  $\frac{\eta_0}{\eta_\infty} (\delta \dot{\gamma})^{n-1} \ll 1$ , ce qui équivaut à  $\dot{\gamma} \gg \frac{1}{\delta} \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^{\frac{1}{1-n}}$ , alors  $\log \eta \approx \log \eta_\infty + \log(1)$  et :

$$\boxed{\log \eta \approx \log \eta_\infty}. \quad (5)$$

Si  $\frac{\eta_0}{\eta_\infty} (\delta \dot{\gamma})^{n-1} \gg 1$ , ce qui équivaut à  $\dot{\gamma} \ll \frac{1}{\delta} \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^{\frac{1}{1-n}}$ , on a:

$$\log \eta \approx \log \eta_\infty + \log \left\{ \frac{\eta_0}{\eta_\infty} (\delta \dot{\gamma})^{n-1} \right\} \approx \log \eta_\infty + \log \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) + (n-1) \log(\delta \dot{\gamma})$$

donc 
$$\boxed{\log \eta \approx \log \eta_0 + (n-1) \log \delta + (n-1) \log \dot{\gamma}} \quad (6)$$

Les relations (4), (5) et (6) donnent les équations des trois asymptotes de la loi de Carreau selon la valeur de  $\dot{\gamma}$  :

$$\begin{cases} \log \eta \approx \log \eta_0 & \text{si } \dot{\gamma} \ll 1/\delta \\ \log \eta \approx \log \eta_0 + (n-1) \log \delta + (n-1) \log \dot{\gamma} & \text{si } 1/\delta \ll \dot{\gamma} \ll (1/\delta)(\eta_0/\eta_\infty)^{1/(1-n)} \\ \log \eta \approx \log \eta_\infty & \text{si } \dot{\gamma} \gg (1/\delta)(\eta_0/\eta_\infty)^{1/(1-n)} \end{cases} \quad (7)$$

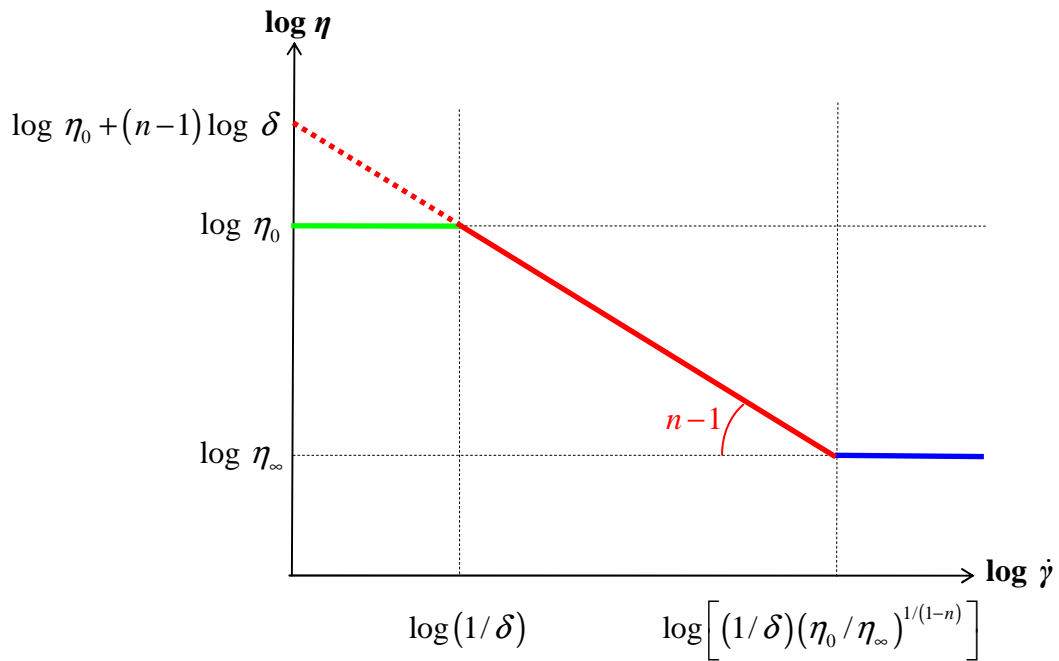


Fig. 115. Les asymptotes de la loi de Carreau.

## Annexe II. PRECISIONS SUR LES MODELES RHEOLOGIQUES EVOQUES

### Modèles viscoplastiques :

#### Fluide à seuil de Bingham (1922)

Un cas particulier du comportement rhéofluidifiant est l'existence d'une contrainte seuil d'écoulement: si la contrainte appliquée au fluide est inférieure à cette contrainte seuil, aucune déformation ne se produit, le fluide ne coule pas. On parle alors de fluide à seuil ou viscoplastique. Un exemple courant de fluide à seuil est la pâte dentifrice: elle ne peut sortir du tube sous l'effet de son propre poids, il faut lui appliquer une contrainte nettement supérieure pour qu'elle s'écoule. Un autre exemple pratique est la peinture anti-coulure, qui est fluide quand on la remue dans le pot, mais qui ne coule pas sur le mur. La représentation la plus simple d'un fluide à seuil est le modèle de Bingham (Bingham (1922)) qui donne la relation suivante entre la contrainte  $\tau$  et le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ :

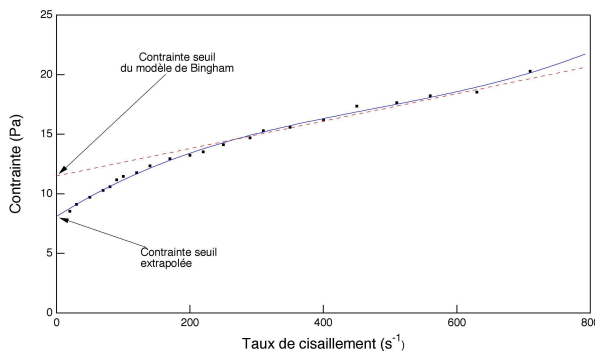
$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau < \tau_0 \\ \tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} & \text{si } \tau \geq \tau_0 \end{cases}$$

où  $\tau_0$  et la contrainte seuil et  $\mu_p$  est appelé la viscosité plastique.

En termes de viscosité, on a :

$$\begin{cases} \mu = \infty & \text{si } \tau < \tau_0 \\ \mu = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p & \text{si } \tau \geq \tau_0 \end{cases}$$

En pratique le modèle de Bingham ne s'applique que dans une gamme limitée de taux de cisaillements et la contrainte seuil prédite par le modèle est souvent relativement éloignée de la valeur obtenue par extrapolation du rhéogramme à  $\dot{\gamma} = 0$  comme on peut le constater sur la Fig. 116.



**Fig. 116. Exemple de fluide à seuil d'écoulement.**

Rhéogramme d'une suspension concentrée de bauxite avec les contraintes seuils d'écoulement déterminées par un modèle de Bingham et par extrapolation d'un ajustement polynomial.

Cours de Mécanique des fluides - José Bico, Marc Fermigier, Pascal Kurowski, ESPCI, Paris.

#### Améliorations du modèle

Après dépassement de la contrainte seuil, la plupart des rhéogrammes des fluides viscoplastiques réels présentent un caractère rhéofluidifiant qui peut être représenté par une loi en puissance :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau < \tau_0 \\ \tau = \tau_0 + m_p \dot{\gamma}^{n_p} & \text{si } \tau \geq \tau_0 \end{cases}$$

avec  $m_p$  et  $n_p$  les paramètres de l'équation d'Herschel-Bulkley (Herschel et Bulkley (1926)).



De nombreuses pâtes dans les domaines alimentaires, cosmétiques et pigments obéissent à la loi de Casson (Casson (1959)):

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau < \tau_0 \\ \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_c \dot{\gamma}} & \text{si } \tau \geq \tau_0 \end{cases}$$

avec  $\mu_c$  la viscosité plastique de Casson.

### **Modèles viscoélastiques linéaires :**

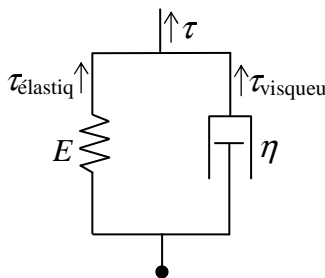
Un matériau viscoélastique peut être défini comme un corps dont la déformation ou le taux de déformation ne réagit pas instantanément à une sollicitation sous forme de contrainte. La viscoélasticité linéaire est dédiée à l'étude des matériaux soumis à de petites déformations. Sous cette hypothèse, un certain nombre de modèles ont été développés dont nous présentons les plus simples.

#### **Le modèle de Kelvin Voigt**

Le modèle le plus simple de fluide viscoélastique consiste à additionner les contraintes d'origine élastique et les contraintes d'origine visqueuse :

$$\tau = \tau_{\text{élastique}} + \tau_{\text{visqueuse}} = E\gamma + \eta\dot{\gamma}$$

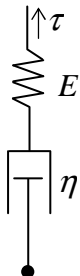
où  $E$  est un module d'élasticité et  $\gamma$  est la déformation. Une représentation graphique de ce modèle, dit solide de Kelvin-Voigt, est l'association en parallèle d'un ressort de raideur  $E$  et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement  $\eta$  est présentée sur la Fig. 117.



**Fig. 117. Représentation schématique du modèle de Kelvin-Voigt.**

#### **Le modèle de Maxwell**

On peut également associer en série un ressort et un amortisseur : il s'agit du modèle du liquide de Maxwell comme illustré ci-dessous sur la Fig. 118.



**Fig. 118. Représentation schématique du modèle de Maxwell.**

Dans ce cas, les déformations élastique et visqueuse s'additionnent et les contraintes sont identiques, soit :

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma_{\text{visqueuse}}}{dt} + \frac{d\gamma_{\text{élastique}}}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}$$

Les modèles de Kelvin et Maxwell présentent aussi des analogies avec le domaine de l'électricité : une résistance et un condensateur soit en parallèle, soit en série. Les deux modèles font apparaître un

temps de relaxation caractéristique:  $t_c = \eta/E$  qui est l'analogie du temps caractéristique RC en électricité. Expérimentalement, le comportement viscoélastique peut être mis en évidence en examinant l'évolution temporelle de la réponse du fluide.

Ces deux modèles sont la base de la théorie de viscoélasticité linéaire et peuvent être combinés pour former d'autres modèles plus réalistes ou adaptés à des cas d'étude particuliers. Leurs applications sont cependant restreintes à des situations proches de l'état d'équilibre par l'hypothèse des petites déformations. Dans la plupart des applications industrielles, telles que par exemple le couchage ou l'extrusion, les déformations sont hors de ces hypothèses de validité, et on fait alors appel à des modèles de viscoélasticité non linéaire.

### **Modèles viscoélastiques non linéaires :**

Un fluide viscoélastique subissant de grandes déformations a un comportement non linéaire. Les modèles de viscoélasticité non linéaires servent à expliquer ces comportements. Ces fluides ont des comportements très complexes, en particulier dans le régime non linéaire obtenu pour de fortes sollicitations.

L'une des manifestations les plus flagrantes de l'élasticité d'un fluide sollicité en cisaillement simple, comme c'est le cas dans cette étude, c'est l'apparition de contraintes normales dans le fluide. L'application d'une contrainte de cisaillement à un élément de fluide entraîne toujours l'apparition de contraintes normales à la direction de l'écoulement, qui, pour un fluide visqueux incompressible, sont équilibrées par la pression. Pour un fluide viscoélastique apparaît une anisotropie de contraintes normales. Pour des sollicitations en cisaillement simple, seule la première différence de contraintes normales  $N_1$  est considérée :

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$$

avec  $\sigma_{xx}$  la contrainte normale dans le sens de l'écoulement et  $\sigma_{yy}$  la contrainte normale orthogonale à l'écoulement dans le sens du gradient de vitesse.

La Fig. 119 montre les effets de cette différence de contraintes normales, ou effet Weissenberg, engendrés lors du cisaillement d'un fluide élastique par un rotor. Ces effets tendent à provoquer l'ascension du liquide le long du rotor alors que, pour un liquide newtonien purement visqueux, l'interface se creuse dans la partie centrale. La première différence des contraintes normales, manifestation de l'élasticité, devient d'autant plus importante que la vitesse de sollicitation augmente et que l'on s'approche de l'axe de rotation, conformément au caractère viscoélastique des polymères.

Quand un fluide viscoélastique s'écoule, il dissipe une partie de son énergie par frottement visqueux, mais en stocke aussi une autre partie qu'il restituera par la suite sous forme élastique. Pour décrire ces fluides, il ne suffit plus de donner une expression adaptée de la viscosité mais il faut réécrire leur loi de comportement sous forme de modèles appelés équations constitutives ou équations rhéologiques. Il en existe de plusieurs types : différentielles, intégrales...



**Fig. 119. Un exemple de l'effet Weissenberg.**

Le fluide est une solution de PIB dans du polyisobutylène.

D.V. Boger and K. Walters, "Rheological Phenomena in Focus"



### Annexe III. LA METHODE DE NEWTON

Cette méthode est utilisée pour le calcul numérique de l'épaisseur et du champ de vitesse de base. Nous en présentons ici le principe.

#### Principe :

La méthode de Newton permet de trouver rapidement la valeur approchée d'un zéro d'une fonction  $f$  quelconque (c'est à dire un nombre  $x$  tel que  $f(x) = 0$ ), en utilisant la dérivée  $f'$  de  $f$  par rapport à  $x$  de la façon suivante :

1. **étape 0** : On choisit  $x_0$  arbitrairement.

2. **étape i** : si  $f(x_i)$  n'est pas suffisamment proche de 0, on calcule  $x_{i+1} = x_i + \delta x$  avec  $\delta x = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ .

#### La méthode de Newton à deux variables :

La méthode de Newton peut s'appliquer à la résolution d'un système de plusieurs équations :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

A partir d'un couple de valeurs approchées  $(x_i, y_i)$  d'une solution du système, on peut déterminer les deux accroissements  $\delta x$  et  $\delta y$  à donner à  $x_i$  et  $y_i$  de manière à ce que :

$$\begin{cases} f(x_i + \delta x, y_i + \delta y) = 0 \\ g(x_i + \delta x, y_i + \delta y) = 0 \end{cases}$$

En développant au premier ordre, on obtient :

$$\begin{cases} f(x_i + \delta x, y_i + \delta y) = f(x_i, y_i) + \delta x \cdot \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \delta y \cdot \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \\ g(x_i + \delta x, y_i + \delta y) = g(x_i, y_i) + \delta x \cdot \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial x} + \delta y \cdot \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial y} \end{cases}$$

Les quantités  $\delta x$  et  $\delta y$  s'obtiennent donc en résolvant le système linéaire suivant :

$$AX = B$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial y} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -f(x_i, y_i) \\ -g(x_i, y_i) \end{bmatrix}.$$

Les quantités  $x_{i+1} = x_i + \delta x$  et  $y_{i+1} = y_i + \delta y$  ainsi obtenues sont alors réinjectées dans le calcul jusqu'à ce que  $\delta x$  et  $\delta y$  deviennent inférieurs à une valeur  $\varepsilon$  fixée initialement selon la précision voulue pour le calcul.

Ainsi l'algorithme correspondant est :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \left[ \frac{f(x_i, y_i) \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial y} - g(x_i, y_i) \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}}{\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial y}} \right] \\ y_{i+1} = y_i + \left[ \frac{g(x_i, y_i) \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} - f(x_i, y_i) \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} \frac{\partial g(x_i, y_i)}{\partial y}} \right] \end{cases}$$

Dans ce travail, les variables à ajuster sont les épaisseurs des couches  $(d_{1,i}, d_{2,i})$  et les deux fonctions  $f$  et  $g$  à annuler sont les différences entre les débits  $Q_{1imposé}$  et  $Q_{2imposé}$  imposés en entrée, et les débits  $Q_{1,i}$  et  $Q_{2,i}$  calculés à partir des valeurs d'épaisseur  $d_{1,i}$  et  $d_{2,i}$ . On a ainsi :

$$\begin{cases} f(d_{1,i}, d_{2,i}) = Q_{1imposé} - Q_{1,i} = 0 \\ g(d_{1,i}, d_{2,i}) = Q_{2imposé} - Q_{2,i} = 0 \end{cases},$$

et on doit résoudre le système:

$$\begin{cases} f(d_{1,i+1}, d_{2,i+1}) = f(d_{1,i} + \delta d_1, d_{2,i} + \delta d_2) = f(d_{1,i}, d_{2,i}) + \delta d_1 \cdot \frac{\partial f(d_{1,i}, d_{2,i})}{\partial d_1} + \delta d_2 \cdot \frac{\partial f(d_{1,i}, d_{2,i})}{\partial d_2} = 0 \\ g(d_{1,i+1}, d_{2,i+1}) = g(d_{1,i} + \delta d_1, d_{2,i} + \delta d_2) = g(d_{1,i}, d_{2,i}) + \delta d_1 \cdot \frac{\partial g(d_{1,i}, d_{2,i})}{\partial d_1} + \delta d_2 \cdot \frac{\partial g(d_{1,i}, d_{2,i})}{\partial d_2} = 0 \end{cases},$$

$$\text{avec } \begin{cases} \frac{\partial f(d_{1,i}, d_{2,i})}{\partial d_1} = \frac{f(d_{1,i+1}, d_{2,i}) - f(d_{1,i}, d_{2,i})}{\delta d_1} \\ \frac{\partial f(d_{1,i}, d_{2,i})}{\partial d_2} = \frac{f(d_{1,i}, d_{2,i+1}) - f(d_{1,i}, d_{2,i})}{\delta d_2} \\ \frac{\partial g(d_{1,i}, d_{2,i})}{\partial d_1} = \frac{g(d_{1,i+1}, d_{2,i}) - g(d_{1,i}, d_{2,i})}{\delta d_1} \\ \frac{\partial g(d_{1,i}, d_{2,i})}{\partial d_2} = \frac{g(d_{1,i}, d_{2,i+1}) - g(d_{1,i}, d_{2,i})}{\delta d_2} \end{cases},$$

pour obtenir les quantités  $\delta d_1$  et  $\delta d_2$  et ainsi calculer les champs de vitesse de base dans chaque couche puis les débits  $Q_{1,i+1}$  et  $Q_{2,i+1}$  jusqu'à la précision souhaitée.

## Annexe IV. DIFFÉRENTIATION DES EQUATIONS : LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEV

Les polynômes de Tchebychev sont un outil permettant de différentier et intégrer des équations discrétisées. Nous présentons dans cette annexe la façon dont on les utilise dans le code.

Les polynômes de Tchebychev sont des fonctions cosinus portant sur une variable  $y_p$  obtenue après changement de variable selon l'axe vertical :

$$y \rightarrow y_p = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi \cdot y))$$

avec  $y = \left[ 0 \quad \frac{1}{N} \quad \frac{2}{N} \quad \dots \quad \frac{p}{N} \quad \dots \quad \frac{N-2}{N} \quad \frac{N-1}{N} \quad 1 \right]$  et  $N =$  nombre de modes.

Il s'agit d'une adaptation de la formule de passage de l'espace physique à un espace de Tchebychev couramment utilisée. On parle des points de Gauss – Labatto :

$$y_p = \cos \frac{p\pi}{N} \quad \text{avec } p = 0, N$$

Cette formule est valable pour une variable évoluant sur un intervalle  $[-1;1]$ , or notre variable  $y_p$  évolue uniquement entre  $[0; d]$  pour le cas à une seule couche et entre  $[0; d_1]$  et  $[d_1; d_1+d_2]$ . Il a donc fallu en tenir compte et adapter la discrétisation adoptée.

Cette étape consiste en la mise en place du maillage par le choix d'un nombre de points qui seront répartis sur l'axe normal au plan d'écoulement selon une loi en cosinus, donc beaucoup plus resserrés à proximité des parois et de la surface libre comme on peut le noter sur la figure suivante. Ce nombre de points fixe donc le maillage de manière spatiale, mais aussi le nombre de modes oscillatoires qui seront étudiés. Il doit donc être fixé avec attention, suffisamment grand pour ne plus avoir d'influence sur les résultats.

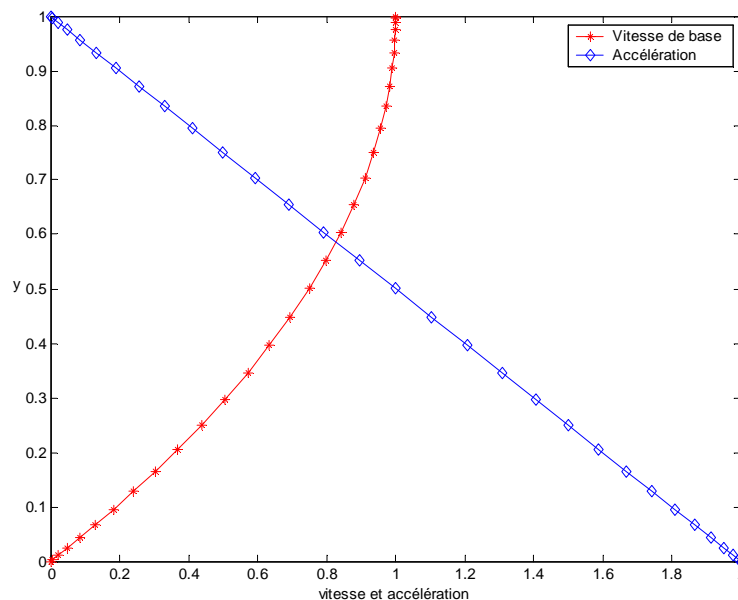


Fig. 120. Courbe représentant les profils de vitesse et accélération introduits dans le code avec  $N = 30$  nœuds.

### Relations utiles pour la discrétisation des dérivées et intégrales:

Les polynômes de Tchebychev peuvent être définis de différentes façons, et notamment :

- sous forme d'une fonction trigonométrique telle que  $T_n(y) = \cos(n \cdot \theta)$  avec  $\theta = \arccos(y)$
- comme les solutions de l'équation de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dy} \left( \sqrt{1-y^2} \frac{d}{dy} T_n(y) \right) + \frac{n^2}{\sqrt{1-y^2}} T_n(y) = 0$$

- sous forme d'une relation de récurrence:  $T_0(y) = 1$ ,  $T_1(y) = y$ ,  $T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y)$
- par une formule directe:  $T_n(y) = \frac{1}{2} \left[ (y + \sqrt{y^2 - 1})^n + (y - \sqrt{y^2 - 1})^n \right]$
- par la formule dite de Rodrigues:  $T_n(y) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-y^2} \frac{d^n}{dy^n} \left[ (1-y^2)^{n-1/2} \right]$

Pour des applications numériques, comme tel est notre cas, on préférera la notation trigonométrique.

Les polynômes de Tchebychev ont la propriété de satisfaire la relation d'orthogonalité suivante:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(y) T_m(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy = C_n \delta_{nm} \quad \text{avec} \quad C_0 = \pi, \quad C_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } n \neq 0$$

Chacune des variables du problème dépendant de  $y$  sera donc approximée par une série de polynômes de Tchebychev sous la forme:

$$f(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y)$$

### Expression des dérivées:

Pour discrétiser des équations différentielles, les expressions des dérivées des solutions cherchées sont nécessaires. Ces dérivées doivent donc être exprimées en fonction des polynômes de Tchebychev. Pour cela on utilise une relation de récurrence entre les polynômes et leurs dérivées:

$$T_0^{(k)}(y_p) = 0$$

$$T_1^{(k)}(y_p) = T_0^{(k-1)}(y_p)$$

$$T_2^{(k)}(y_p) = 4T_1^{(k-1)}(y_p)$$

$$T_n^{(k)}(y_p) = 2nT_{n-1}^{(k-1)}(y_p) + \frac{n}{n-1} T_{n-1}^{(k)}(y_p) \quad \text{pour } n = 3, 4, \dots$$

où  $k$  indique l'ordre de dérivation.

On construit donc sur ce principe des matrices de dérivations  $Dk$ , qui, multipliées par un vecteur, nous en donneront sa dérivée  $k^{\text{ième}}$  par rapport à  $y$  (l'axe selon la profondeur de l'écoulement) à l'ordre voulu. On retrouve plus précisément la manière dont ces matrices sont construites en observant le code nommé Dmat.m et porté en annexes.

### Expression des intégrales:

Le calcul des intégrales de fonctions exprimées en fonction des polynômes de Tchebychev sur la grille de Gauss-Lobatto est utile dans cette étude, notamment pour les calculs d'énergie.

On utilise la formule suivante:

$$\int_0^1 f(y) dy = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N f(y_p) \cdot W(y_p)$$

où  $W(y_p)$  est la fonction poids d'intégration de Tchebychev. Le poids  $W(y_p)$  peut être calculé en pratique en prenant l'inverse des matrices de dérivations décrites précédemment

## Annexe V. TRANSFORMATION DES TERMES D'ENERGIE SOUS FORME DE COMPLEXES ET CONJUGUES

On cherche à généraliser le calcul de chacun des termes de l'équation d'énergie. On a vu que pour cela nous ne devons retenir que la partie réelle des perturbations. Ecrivons la forme d'une perturbation en modes normaux quelconque  $a$  :

$$a = \hat{a}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \text{ avec } \hat{a} = \hat{a}_R + i\hat{a}_I \text{ et } \omega = \omega_R + i\omega_I \text{ complexes et } \alpha \text{ réel}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } a = e^{\omega_I t} \hat{a}_R & (\cos(\alpha x) \cos(\omega_R t) + \sin(\alpha x) \sin(\omega_R t)) \\ & + e^{\omega_I t} \hat{a}_I (\cos(\alpha x) \sin(\omega_R t) - \sin(\alpha x) \cos(\omega_R t)) \\ + i & \left[ \begin{aligned} \hat{a}_I & (\cos(\alpha x) \cos(\omega_R t) + \sin(\alpha x) \sin(\omega_R t)) \\ & + e^{\omega_I t} \hat{a}_R (\sin(\alpha x) \cos(\omega_R t) - \cos(\alpha x) \sin(\omega_R t)) \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Etablissons la partie réelle de  $a$  :

$$\Re(a) = \Re(\hat{a}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)})$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \Re(a) = e^{\omega_I t} \hat{a}_R & (\cos(\alpha x) \cos(\omega_R t) + \sin(\alpha x) \sin(\omega_R t)) \\ & + e^{\omega_I t} \hat{a}_I (\cos(\alpha x) \sin(\omega_R t) - \sin(\alpha x) \cos(\omega_R t)). \end{aligned}$$

En introduisant cette expression dans les différents types de termes rencontrés dans l'équation de l'énergie puis en effectuant la moyenne de ces termes sur une longueur d'onde  $\lambda$  on obtient les relations suivantes :

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \Re(a) \cdot \Re(a) dx = \frac{1}{2} e^{2\omega_I t} (\hat{a}_R^2 + \hat{a}_I^2) = \frac{1}{2} e^{2\omega_I t} a \cdot a^*$$

où  $a^*$  désigne le conjugué du nombre complexe  $a$ .

**NB :** On sait que  $\alpha = 2\pi / \lambda$ . On utilise les propriétés suivantes pour effectuer l'intégration sur  $x$  :

$$\int_0^\lambda \cos^2(\alpha x) dx = \frac{\lambda}{2}, \quad \int_0^\lambda \sin^2(\alpha x) dx = \frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^\lambda \sin(\alpha x) \cos(\alpha x) dx = 0$$

De même lorsqu'on multiplie deux perturbations différentes  $a$  et  $b$ , on obtient la relation :

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \Re(a) \cdot \Re(b) dx = \frac{1}{2} e^{2\omega_I t} (\hat{a}_R \hat{b}_R + \hat{a}_I \hat{b}_I) = \frac{1}{4} e^{2\omega_I t} (a \cdot b^* + b \cdot a^*).$$

On doit ainsi effectuer tous les cas de figures rencontrés dans les différents termes de l'équation d'énergie :

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left( \frac{\partial}{\partial x} \Re(a) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \alpha^2 e^{2\omega_I t} (\hat{a}_R^2 + \hat{a}_I^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a^*}{\partial x} \right) = \frac{\alpha^2}{2} e^{2\omega_I t} (a \cdot a^*),$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left( \frac{\partial}{\partial y} \Re(a) \right)^2 dx = \frac{1}{2} e^{2\omega_I t} \left( \left( \frac{\partial \hat{a}_R}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{a}_I}{\partial y} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} e^{2\omega_I t} \left( \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial a^*}{\partial y} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\partial(\Re(a))}{\partial x} \frac{\partial(\Re(b))}{\partial y} dx = \frac{\alpha}{2} e^{2\omega_I t} \left( \frac{\partial \hat{b}_I}{\partial y} \hat{a}_R - \frac{\partial \hat{b}_R}{\partial y} \hat{a}_I \right) = \frac{\alpha}{4i} e^{2\omega_I t} \left( \frac{\partial b}{\partial y} a^* - a \frac{\partial b^*}{\partial y} \right),$$

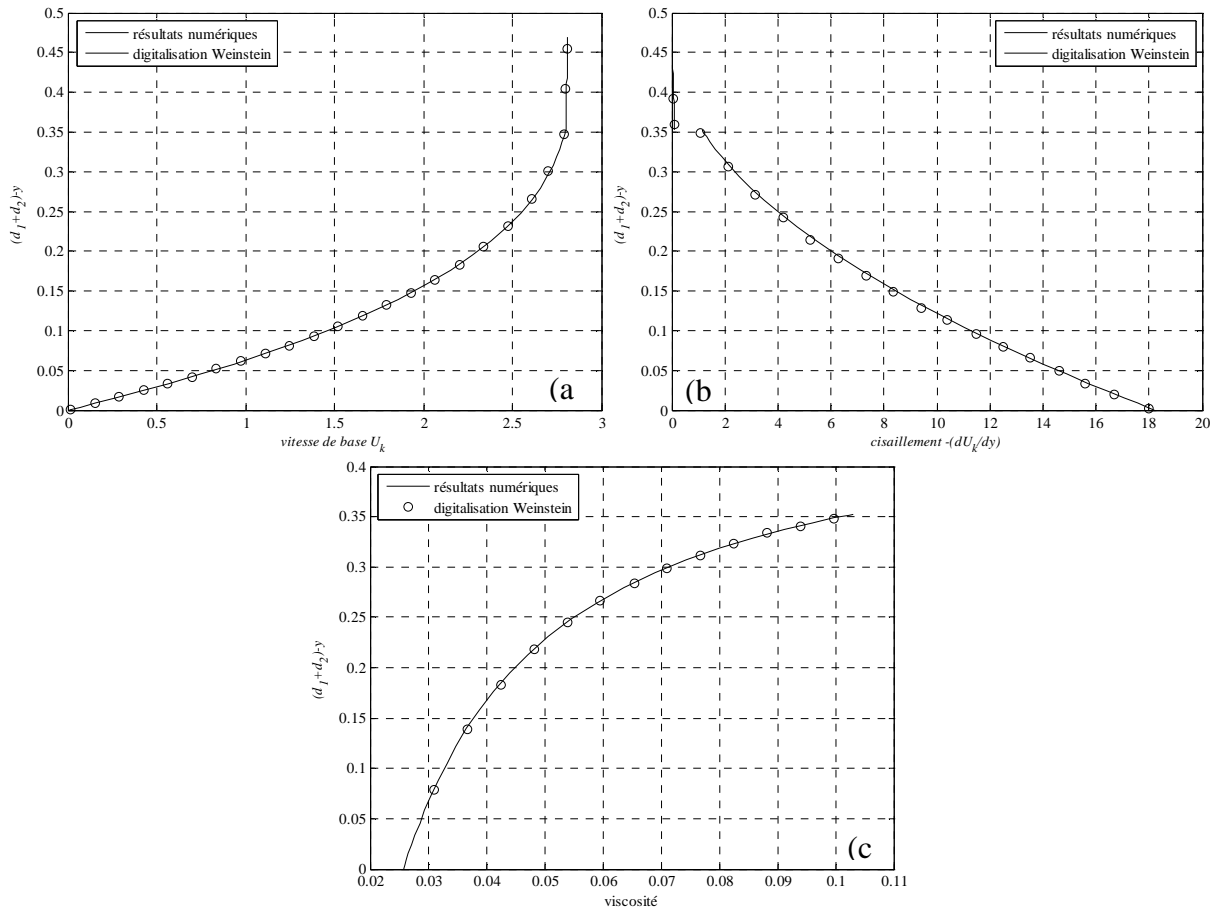


$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\partial(\Re(a))}{\partial x} \Re(b) dx = \frac{\alpha}{2} e^{2\omega t} (\hat{b}_I \hat{a}_R - \hat{b}_R \hat{a}_I) = \frac{\alpha}{4i} e^{2\omega t} (b.a^* - a.b^*),$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\partial(\Re(a))}{\partial y} \Re(b) dx = \frac{1}{2} e^{2\omega t} \left( \frac{\partial \hat{a}_R}{\partial y} \hat{b}_R + \frac{\partial \hat{a}_I}{\partial y} \hat{b}_I \right) = \frac{1}{4} e^{2\omega t} \left( \frac{\partial a}{\partial y} . b^* + b . \frac{\partial a^*}{\partial y} \right).$$

## Annexe VI. VALIDATION DU CHAMP DE BASE

Les seuls résultats dont nous disposons pour valider nos résultats numériques avec des fluides rhéofluidifiants sont ceux de Weinstein (1990) qui fait une étude avec le modèle de Carreau de la stabilité spatiale de films à deux couches. Nous avons donc pu comparer les champs de base obtenus numériquement avec ceux qu'ils proposent. Nous avons tracé sur la Fig. 121 le champ de vitesse de base, le taux de cisaillement et la viscosité dans la couche inférieure constituée d'un fluide de Carreau en fonction de la distance au fond  $(d_1+d_2)-y$ .



**Fig. 121. Comparaison de nos résultats avec ceux de Weinstein (1990).**

- (a) champs de vitesse,
- (b) taux de cisaillement,
- (c) viscosité dans la couche inférieure,

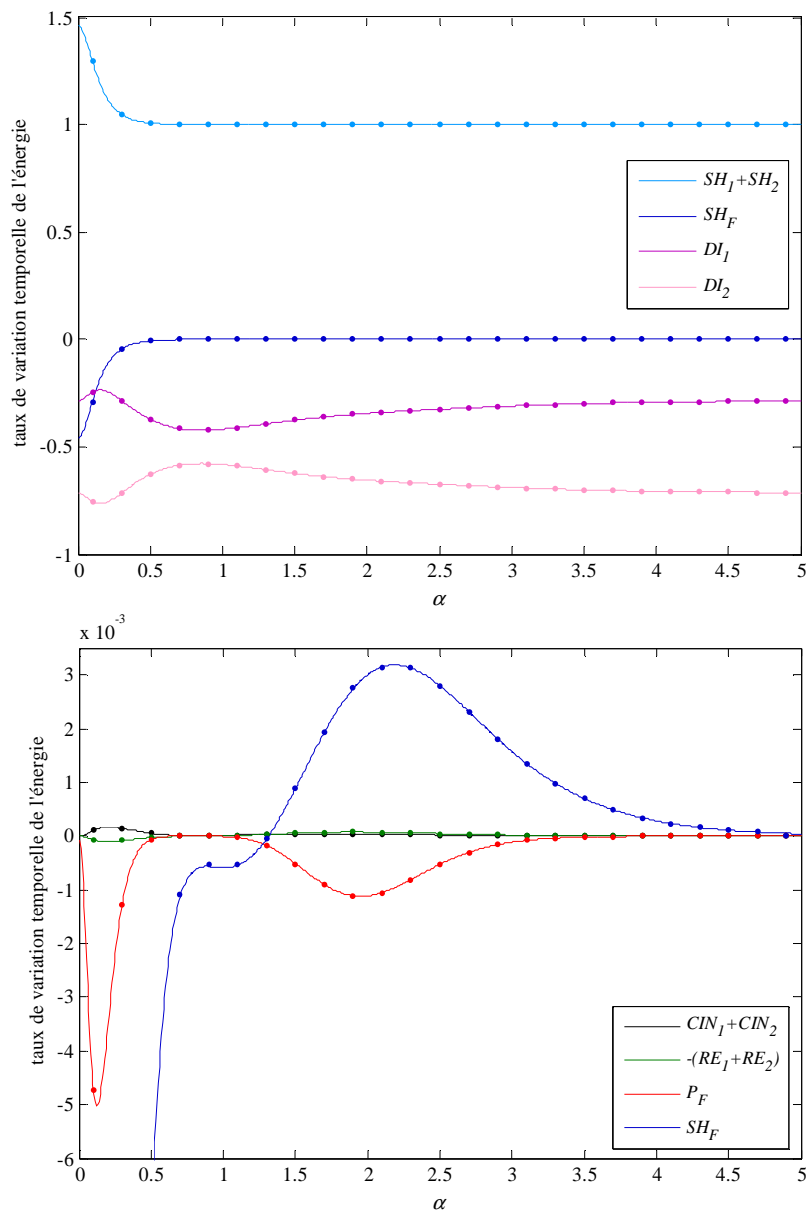
en fonction de la distance au fond  $(d_1+d_2) - y$  avec  $Q_1 = 0.33$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $I_1 = I_2 = 0$ ,  $Ca_1^{-1} = 0.84$ ,  $Ca_2^{-1} = 0$ ,  $E_1 = 1$ ,  $M_1 = 1$  et dans la configuration rhéologique  $N/R$  ( $L_1 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $L_2 = 82.56$  et  $n_2 = 0.5$ ).

Le bon accord de nos résultats avec ceux de Weinstein (1990) nous permet de conclure à la validité de l'approche numérique.



## Annexe VII. VALIDATION DE L'APPROCHE ENERGETIQUE

Les résultats de la littérature qui nous ont permis de valider l'approche énergétique sont ceux de Jiang, *et al.* (2004). Nous avons comparé pour cela nos résultats avec ceux reportés dans leur Table I. Ce tableau regroupe tous les termes du bilan d'énergie pour  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 1$ ,  $Ca_1^{-1} = Ca_2^{-1} = 0$  et  $\beta = 0.2$  radian dans le cas de deux fluides newtoniens. Les autres paramètres, en l'occurrence  $Re$  et  $Q_1$  doivent être calculés ou ajustés car les systèmes d'adimensionnement choisis sont différents. Pour retrouver les paramètres de l'étude, il faut fixer  $Re = 0.1644$  et  $Q_1 = 0.6621$ . Nous avons normalisé les résultats de Jiang, *et al.* (2004) ainsi que les nôtres par le taux de dissipation total, et rectifié un facteur d'échelle entre les nombres d'onde  $\alpha$  des deux approches qui diffèrent d'un facteur  $d_1$ , l'épaisseur de la couche supérieure. La Fig. 122 regroupe les termes du bilan d'énergie calculés avec notre code en trait plein, et ceux de Jiang, *et al.* (2004) sous forme de points. On obtient un parfait accord entre ces deux séries de résultats. On peut ainsi conclure à la validité de notre bilan énergétique.



**Fig. 122. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde pour le mode d'interface avec ceux de Jiang, *et al.* (2004).**

$Re = 0.1644$ ,  $\beta = 0.2$  rad,  $Ca_1^{-1} = Ca_2^{-1} = 0$ ,  $E_1 = 2.5$ ,  $M_1 = 0.999$  et  $Q_1 = 0.6621$ , dans la configuration rhéologique  $N/N$  ( $L_1 = L_2 = 0$  et  $n_1 = n_2 = 1$ ).



# NOTATIONS

## GRANDEURS DIMENSIONNELLES :

### Alphabet latin :

$\bar{d}_k$	épaisseur de la couche $k$ ,	(m)
$\bar{d}_s$	longueur caractéristique de l'épaisseur du film,	(m)
$\bar{g}$	accélération de la gravité,	(m.s <sup>-2</sup> )
$\bar{P}_k$	pression dans la couche $k$ ,	(Pa)
$\bar{Q}_k$	débit surfacique par unité de largeur dans la couche $k$ ,	(m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )
$\bar{Q}_T$	débit surfacique total par unité de largeur,	(m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )
$\bar{t}$	temps,	(s)
$\bar{T}_1$	tension de surface à la surface libre,	(N.m <sup>-1</sup> )
$\bar{T}_k$	tension de surface à l'interface entre les couches ( $k-1$ ) et $k$ ,	(N.m <sup>-1</sup> )
$\bar{U}_k$	composante de la vitesse de base dans la couche $k$ suivant l'axe $\bar{x}$ ,	(m.s <sup>-1</sup> )
$\bar{V}_k$	composante de la vitesse de base dans la couche $k$ suivant l'axe $\bar{y}$ ,	(m.s <sup>-1</sup> )
$\bar{x}$	axe dans la direction et le sens de l'écoulement,	(m)
$\bar{y}$	axe normal au plan, dirigé vers le bas,	(m)
$\bar{y}_k$	position de l'interface non déformée située sous la couche $k$ .	(m)

### Alphabet grec :

$\bar{\delta}_k$	temps caractéristique de la loi de Carreau,	(s)
$\bar{\eta}_k$	viscosité dynamique de la couche $k$ ,	(Pa.s)
$\bar{\eta}_{0,k}$	viscosité newtonienne à bas taux de cisaillement de la loi de Carreau,	(Pa.s)
$\bar{\eta}_{\infty,k}$	viscosité newtonienne à fort taux de cisaillement de la loi de Carreau,	(Pa.s)
$\bar{\rho}_k$	densité de la couche $k$ ,	(kg.m <sup>-3</sup> )
$\bar{\sigma}_{ij,k}$	composante ( $i,j$ ) du tenseur de contraintes dans la couche $k$ ,	(Pa)
$\bar{\zeta}_k$	déformation suivant l'axe $\bar{y}$ au temps $\bar{t}$ et à la position $\bar{x}$ de l'interface $k$ .	(m)

**GRANDEURS SANS DIMENSION :****Alphabet latin :**

$c$	vitesse complexe,
$Ca_k$	nombre capillaire dans la couche $k$ ,
$c_I$	partie imaginaire de la vitesse complexe,
$CIN$	taux de variation temporelle de l'énergie cinétique de perturbation du fluide,
$c_R$	partie réelle de la vitesse complexe, vitesse de phase de la perturbation,
$c_0$	ordre 0 en $\alpha$ de la vitesse complexe,
$c_1$	ordre 1 en $\alpha$ de la vitesse complexe,
$D$	dérivation par rapport à $y$ ,
$DI$	taux de dissipation d'énergie mécanique par la viscosité,
$d_k$	épaisseur de la couche $k$ ,
$dS_k$	élément de surface $S_k$ ,
$e_{ck}$	énergie cinétique de la perturbation par unité de volume,
$E_k$	rapport des viscosités newtoniennes à bas taux de cisaillement entre les couches $k$ et $N$ ,
$I_k$	rapport des viscosités $\bar{\eta}_{\infty,k}$ et $\bar{\eta}_{0,k}$ ,
$k$	indice de la couche,
$L_k$	paramètre de la loi de Carreau,
$M_k$	rapport des densités entre les couches $k$ et $N$ ,
$N$	nombre de couches / nombre de modes,
$n_k$	exposant de loi de Carreau,
$\mathbf{n}_k$	vecteur normal unitaire sortant du fluide $k$ sur l'élément de surface $dS_k$
$\mathbf{O}_k$	tenseur des perturbations de contraintes..
$P$	puissance des efforts de pression,
$P_k$	pression hydrostatique dans la couche $k$ ,
$p_k$	pression dans la couche $k$ ,
$p_k'$	perturbations de pression dans la couche $k$ ,
$\hat{p}_k$	amplitude de la perturbation de pression dans la couche $k$ ,
$Re$	nombre de Reynolds,
$RE$	transfert d'énergie du champ de base aux perturbations,
$Re_{cr}$	nombre de Reynolds critique,
$SH$	puissance des efforts de cisaillement visqueux,
$S_k$	surface enveloppant le volume $\Omega_k$ .
$SW$	puissance des forces de tension de surface,
$t$	temps,
$U_k$	composante de la vitesse de base suivant l'axe $x$ dans la couche $k$ ,

---

$\mathbf{U}_k$	vecteur vitesse de base,
$u_k$	vitesse dans la couche $k$ ,
$u_k'$	perturbation de vitesse selon l'axe $x$ dans la couche $k$ ,
$\hat{u}_k$	amplitude de la perturbation de vitesse selon l'axe $x$ dans la couche $k$ ,
$V_k$	composante de la vitesse de base suivant l'axe $\bar{y}$ dans la couche $k$ ,
$\mathbf{v}_k$	vecteur des perturbations de vitesse dans la couche $k$ ,
$v_k$	vitesse dans la couche $k$ ,
$v_k'$	perturbation de vitesse selon l'axe $y$ dans la couche $k$ ,
$\hat{v}_k$	amplitude de la perturbations de vitesse selon l'axe $y$ dans la couche $k$ ,
$x$	axe dans la direction et le sens de l'écoulement,
$y$	axe normal au plan, dirigé vers le bas,
$y_k$	position de la limite inférieure de la couche $k$ .

**Alphabet grec :**

$\alpha$	nombre d'onde longitudinal,
$\alpha_{cr}$	nombre d'onde longitudinal critique,
$\beta$	angle d'inclinaison,
$\beta_{cr}$	angle d'inclinaison critique,
$\eta_k$	viscosité dynamique dans la couche $k$ ,
$\lambda$	longueur d'onde,
$\Omega_k$	volume de contrôle dans la couche $k$ de hauteur $d_k$ , de longueur $\lambda$ et de largeur 1,
$\sigma_{ij,k}$	composante $(i,j)$ du tenseur de contraintes dans la couche $k$ ,
$\sigma'_{ij,k}$	composante du tenseur de perturbations de contraintes dans la couche $k$ ,
$\theta_k$	viscosité tangentielle de la couche $k$ ,
$\omega$	pulsation complexe,
$\omega_I$	partie imaginaire de $\omega$ , taux de croissance des modes,
$\omega_R$	partie réelle de $\omega$ , pulsation du mode,
$\zeta_k$	déformation de l'interface entre les couches $(k-1)$ et $k$ .



# LISTE DES FIGURES

Fig. 1. Procédé de couchage pour la fabrication des films photographiques. ....	13
Fig. 2. Photographie du glacier de Leschaux – présence d’instabilités de surface.....	13
Fig. 3. Yih (1963) - Courbes neutres.....	16
Fig. 4. Floryan, <i>et al.</i> (1987) - Courbes neutres. ....	17
Fig. 5. Hooper et Boyd (1987) - Courbes neutres. ....	18
Fig. 6. Schéma uniformisé de la configuration. ....	18
Fig. 7. Kao (1968) - Seuils de stabilité pour un rapport de densités $\gamma = 0.9$ .....	19
Fig. 8. Kao (1968) - Seuils de stabilité pour un rapport de densités $\gamma = 0.1$ .....	19
Fig. 9. Loewenherz et Lawrence (1989) – Les deux instabilités du mode d’interface. ....	20
Fig. 10. Chen (1993) - Courbes neutres pour les deux modes et différents rapports d’épaisseur $\delta$ et tensions d’interface dans le cas d’une couche inférieure moins visqueuse. ....	22
Fig. 11. Chen (1993) - Courbes neutres pour les deux modes et différents rapports d’épaisseur $\delta$ et tensions d’interface dans le cas d’une couche inférieure plus visqueuse. ....	23
Fig. 12. Weinstein et Chen (1999) - Tracé du taux de croissance $\omega_i$ en fonction de la longueur d’onde $\lambda$ selon la configuration. ....	25
Fig. 13. Rhéogrammes (a) et viscosités en fonction du taux de cisaillement (b) obtenus pour trois exemples de liquides rhéofluidifiants. ....	27
Fig. 14. Viscosité en fonction du taux de cisaillement. ....	29
Fig. 15. Configuration d’étude.....	34
Fig. 16. Volume de contrôle pour l’écriture de l’équilibre statique. ....	52
Fig. 17. Comparaison des champs de base entre le cas newtonien et le cas rhéofluidifiant.....	53
Fig. 18 Viscosité en fonction du taux de cisaillement dans le cas de la Fig. 17.....	53
Fig. 19. Comparaison des champs de base entre le l’approche numérique et l’approche asymptotique.....	54
Fig. 20. Comparaison des champs de base entre le l’approche numérique et l’approche asymptotique.....	54
Fig. 21 Epaisseur de la couche et vitesse de la surface libre normalisés par leur valeur respective dans le cas newtonien.....	55
Fig. 22 Epaisseur (a) et vitesse de la surface libre (b) en fonction des deux paramètres de la loi de Carreau $L$ et $n$ avec $I = 10^{-3}$ . ....	56
Fig. 23. Seuils de stabilité selon l’angle d’inclinaison. ....	58
Fig. 24. Seuils de stabilité selon $L$ .....	59
Fig. 25. Seuils de stabilité normalisés. ....	59
Fig. 26. Seuils de stabilité suivant $n$ .....	60
Fig. 27. Volume de contrôle et profil de perturbations $u'$ .....	62
Fig. 28. Rapport de la célérité des ondes à la vitesse de la surface libre en fonction de $L^2$ .....	65
Fig. 29. Rapport de la célérité des ondes à la vitesse de la surface libre en fonction de $n$ . ....	65
Fig. 30. Courbes neutres de stabilité pour $\beta = 0.3'$ . $I = 10^{-3}$ , $n = 0.5$ . ....	66
Fig. 31. Taux de croissance $\omega_i$ en fonction du nombre d’onde $\alpha$ pour $\beta = 0.3'$ .....	67
Fig. 32. Courbes neutres de stabilité pour $\beta = 1'$ . $I = 10^{-3}$ , $n = 0.5$ . ....	67

Fig. 33. Schéma du problème à deux couches. ....	69
Fig. 34. Schéma des différentes configurations rhéologiques étudiées et leur nom. ....	70
Fig. 35. Comparaison des champs de base entre la configuration $N/N$ et la configuration $R/N$ . ....	72
Fig. 36. Comparaison des champs de base entre la configuration $N/N$ et la configuration $N/R$ . ....	73
Fig. 37. Comparaison des champs de base entre la configuration $N/N$ et la configuration $R/R$ . ....	73
Fig. 38. Comparaison des champs de base pour deux fluides newtoniens selon le rapport de viscosité $E_1$ . ....	74
Fig. 39. Comparaison des champs de base pour deux fluides rhéofluidifiants selon le rapport de viscosité $E_1$ . ....	74
Fig. 40. Epaisseur des couches $d_1$ , $d_2$ et $d_1+d_2$ dans les configurations $N/N$ , $R/N$ , $N/R$ et $R/R$ en fonction du débit $Q_1$ dans le cas $E_1 = 0.4$ . ....	75
Fig. 41. Vitesse de la surface libre $U_1(0)$ et vitesse de l'interface $U_2(d_1)$ dans les configurations $N/N$ , $R/N$ , $N/R$ et $R/R$ en fonction du débit $Q_1$ dans le cas $E_1 = 0.4$ . ....	76
Fig. 42. Epaisseur des couches $d_1$ , $d_2$ et $d_1+d_2$ dans les configurations $N/N$ , $R/N$ , $N/R$ et $R/R$ en fonction du débit $Q_1$ dans le cas $E_1 = 2.5$ . ....	77
Fig. 43. Vitesse de la surface libre $U_1(0)$ et vitesse de l'interface $U_2(d_1)$ dans les configurations $N/N$ , $R/N$ , $N/R$ et $R/R$ en fonction du débit $Q_1$ dans le cas $E_1 = 2.5$ . ....	77
Fig. 44. Rapport d'épaisseurs $d_1/d_2$ entre les couches en fonction du rapport des débits imposés en entrée $Q_1/Q_2$ dans chacune des configurations rhéologiques pour $E_1 = 0.4$ et $E_1 = 2.5$ . ....	79
Fig. 45. Comparaison des champs de base pour deux fluides newtoniens selon le rapport de densité $M_1$ dans le cas $E_1 = 0.4$ . ....	80
Fig. 46. Comparaison des champs de base pour deux fluides rhéofluidifiants selon le rapport de densité $M_1$ dans le cas $E_1 = 0.4$ . ....	80
Fig. 47. Comparaison des champs de base pour deux fluides newtoniens selon le rapport de densité $M_1$ dans le cas $E_1 = 2.5$ . ....	81
Fig. 48. Comparaison des champs de base pour deux fluides rhéofluidifiants selon le rapport de densité $M_1$ dans le cas $E_1 = 2.5$ . ....	81
Fig. 49. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de débit $Q_1 = 0.35, 0.65, 0.8, 0.9$ et $M_1 = 0.85$ . ....	84
Fig. 50. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour différents rapports de débit $Q_1 = 0.35, 0.65, 0.8, 0.9$ et $M_1 = 0.85$ . ....	85
Fig. 51. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de débit $Q_1 = 0.35, 0.65, 0.8, 0.9$ et $M_1 = 0.99$ . ....	86
Fig. 52. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour différents rapports de débit $Q_1 = 0.35, 0.65, 0.8, 0.9$ et $M_1 = 0.99$ . ....	87
Fig. 53. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de densités $M_1 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99$ . ....	88
Fig. 54. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour différents rapports de densités $M_1 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99$ et $Re = 20$ . ....	89
Fig. 55. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour différents rapports de densités $M_1 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99$ et $Re = 1$ . ....	90
Fig. 56. Rapport de densité limite $M_{1c}$ pour différentes configurations. ....	91
Fig. 57. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents nombres capillaires $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 2.10^{-2}, 5.10^{-2}, 10^{-1}, 0.143$ . ....	93
Fig. 58. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour différents nombre capillaires $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 2.10^{-2}, 5.10^{-2}, 10^{-1}, 0.143$ et $Re = 20$ . ....	94
Fig. 59. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour différents nombre capillaires $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 2.10^{-2}, 5.10^{-2}, 10^{-1}, 0.143$ et $Re = 1$ . ....	94
Fig. 60. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour deux nombres capillaires $Ca_1 = 0$ et $1$ . ....	95

Fig. 61. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour deux nombres capillaires $Ca_1 = 0$ et $1$ et $Re = 10$ .....	96
Fig. 62. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de débit $Q_1 = 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.9$ .....	98
Fig. 63. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour différents rapports de débits $Q_1 = 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.9$ et $Re = 20$ .....	99
Fig. 64. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents rapports de densités $M_1 = 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 0.99$ .....	101
Fig. 65. Courbes de stabilité neutre en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour différents nombres capillaires $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 10^{-1}$ et $1$ .....	103
Fig. 66. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour différents nombres capillaires $Ca_2 = 0, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$ et $Re = 10$ .....	104
Fig. 67. Courbes neutres de stabilité délimitant les zones stables (S) et instables (I) en fonction du nombre de Reynolds et du nombre d'onde pour deux nombres capillaires $Ca_1 = 0$ et $1$ .....	104
Fig. 68. Taux de croissance des modes de surface et d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour deux nombres capillaires $Ca_1 = 0$ et $1$ et $Re = 10$ .....	105
Fig. 69. Taux de croissance du mode de surface en fonction de $\alpha$ pour le mode de surface dans le cas newtonien. ....	108
Fig. 70. Termes du bilan d'énergie du mode de surface normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ dans le cas newtonien. ....	108
Fig. 71. Isovaleurs des vitesses de perturbation $u'(x,y)$ (a) et $v'(x,y)$ (b) du mode de surface dans le cas newtonien. ....	109
Fig. 72. Profils des vitesses de perturbation $u'(y)$ en $x = 6$ et $v'_k(y)$ du mode de surface dans le cas newtonien. ....	110
Fig. 73. Comparaison du taux de croissance du mode de surface en fonction de $\alpha$ pour le mode de surface entre le cas newtonien et rhéofluidifiant. ....	110
Fig. 74. Comparaison des termes du bilan d'énergie du mode de surface normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ entre le cas newtonien et rhéofluidifiant.....	111
Fig. 75. Taux de croissance $\omega_I$ du mode de surface en fonction de $\alpha$ pour le mode de surface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	112
Fig. 76. Termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour le mode de surface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	113
Fig. 77. Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode de surface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	113
Fig. 78. Isovaleurs des vitesses de perturbation $u'_k(x,y)$ (a) et $v'_k(x,y)$ (b) pour le mode de surface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	114
Fig. 79. Profils des vitesses de perturbation $u'_k(y)$ en $x = 17$ (a) et $v'_k(y)$ en $x = 17 - \lambda/4$ (b) pour le mode de surface et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	115
Fig. 80. Déformation $\zeta'_1$ de la surface libre et $\zeta'_2$ de l'interface entre les couches sur une longueur d'onde $\lambda$ pour le mode de surface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	116
Fig. 81. Taux de croissance $\omega_I$ en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour le mode d'interface et $Re = 1$ dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	116
Fig. 82. Termes du bilan d'énergie normalisés la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ et regroupés par ordre de grandeur pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	117
Fig. 83. Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	118
Fig. 84. Isovaleurs des vitesses de perturbation $u'_k(x,y)$ (a) et $v'_k(x,y)$ (b) pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	119
Fig. 85. Profils des vitesses de perturbation $u'_k(y)$ en $x = 0.8 + \lambda/4$ (a) et $v'_k(y)$ en $x = 0.8$ (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	120

Fig. 86. Déformation $\zeta_1'$ de la surface libre et $\zeta_2'$ de l'interface entre les couches sur une longueur d'onde $\lambda$ pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	120
Fig. 87. Taux de croissance $\omega_I$ en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	121
Fig. 88. Termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ et regroupés par ordre de grandeur pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	122
Fig. 89. Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	122
Fig. 90. Isovaleurs des vitesses de perturbation $u_k'(x,y)$ (a) et $v_k'(x,y)$ (b) pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	123
Fig. 91. Profils des vitesses de perturbation $u_k'(y)$ en $x = 0.6 - \lambda/4$ (a) et $v_k'(y)$ en $x = 0.6$ (b) pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	124
Fig. 92. Déformation $\zeta_1'$ de la surface libre et $\zeta_2'$ de l'interface entre les couches sur une longueur d'onde $\lambda$ pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	124
Fig. 93. Comparaison des taux de croissance $\omega_I$ en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour le mode de surface et pour deux configurations rhéologiques.....	125
Fig. 94. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour le mode de surface et pour deux configurations rhéologiques.....	126
Fig. 95. Comparaison du taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour deux configurations rhéologiques.....	126
Fig. 96. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ et regroupés par ordre de grandeur pour le mode d'interface et pour deux configurations rhéologiques.....	127
Fig. 97. Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/R$ .....	128
Fig. 98. Isovaleurs des vitesses de perturbation $u_k'(x,y)$ (a) et $v_k'(x,y)$ (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/R$ .....	129
Fig. 99. Profils des vitesses de perturbation $u_k'(y)$ en $x = 0.9 + \lambda/4$ (a) et $v_k'(y)$ en $x = 0.9$ (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/R$ .....	130
Fig. 100. Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour deux configurations rhéologiques.....	130
Fig. 101. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ regroupés par ordre de grandeur pour le mode d'interface et deux configurations rhéologiques.....	131
Fig. 102. Répartition suivant l'épaisseur du film de différents termes d'énergie normalisés pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/R$ .....	131
Fig. 103. Isovaleurs des vitesses de perturbation $u_k'(x,y)$ (a) et $v_k'(x,y)$ (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/R$ .....	132
Fig. 104. Profils des vitesses de perturbation $u_k'(y)$ en $x = 2 - \lambda/4$ (a) et $v_k'(y)$ en $x = 2$ (b) pour le mode d'interface dans la configuration rhéologique $N/R$ .....	133
Fig. 105. Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour deux nombres capillaires $Ca_2 = 0, 0.1$ dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	134
Fig. 106. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour le mode d'interface pour deux nombres capillaires dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	135
Fig. 107. Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour deux rapport de densité $M_1 = 0.99$ et $0.8$ dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	136
Fig. 108. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde pour le mode d'interface pour deux rapports de densité et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	136

Fig. 109. Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour deux rapports de viscosité $E_1 = 2.5$ et $0.4$ dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	137
Fig. 110. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour le mode d'interface pour deux rapports de viscosité et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	138
Fig. 111. Isovaleurs des vitesses de perturbation $u_k'(x,y)$ (a) et $v_k'(x,y)$ (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	139
Fig. 112. Profils des vitesses de perturbation $u_k'(y)$ en $x = 6.2 - \lambda/4$ (a) et $v_k'(y)$ en $x = 6.2$ (b) pour le mode d'interface et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	140
Fig. 113. Comparaison des taux de croissance des modes d'interface en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour deux débits $Q_1 = 0.9$ et $0.8$ dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	140
Fig. 114. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde $\alpha$ pour le mode d'interface, pour deux débits et dans la configuration rhéologique $N/N$ .....	141
Fig. 115. Les asymptotes de la loi de Carreau.....	150
Fig. 116. Exemple de fluide à seuil d'écoulement.....	151
Fig. 117. Représentation schématique du modèle de Kelvin-Voigt.....	152
Fig. 118. Représentation schématique du modèle de Maxwell.....	152
Fig. 119. Un exemple de l'effet Weissenberg.....	153
Fig. 120. Courbe représentant les profils de vitesse et accélération introduits dans le code avec $N = 30$ nœuds.....	157
Fig. 121. Comparaison de nos résultats avec ceux de Weinstein (1990).....	161
Fig. 122. Comparaison des termes du bilan d'énergie normalisés par la norme du taux de dissipation total en fonction du nombre d'onde pour le mode d'interface avec ceux de Jiang, <i>et al.</i> (2004).....	163

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1. Nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de modes $N$ pour $\beta = 1'$ , $I = 10^{-3}$ , $n = 0.5$ et $L = 0.5$ .....	57
Tableau 2. Type d'instabilité pour $\beta = 0.3'$ , $I = 0.1$ , $n = 0.5$ en rapport avec la Fig. 30.....	67
Tableau 3. Type d'instabilité pour $\beta = 1'$ , $I = 0.1$ , $n = 0.5$ en rapport avec la Fig. 32.....	68
Tableau 4. Paramètres du fluide - Polymère fondu: cas du polyéthylène.....	92
Tableau 5. Paramètres du fluide - Polymères en solution: cas d'un PEO en solution dans l'eau et la glycérine..	92
Tableau 6. Tableau récapitulatif de l'effet spécifique de chacun des paramètres de l'étude sur la stabilité.....	144

# R E F E R E N C E S   B I B L I O G R A P H I Q U E S

BALMFORTH, N. J., CRASTER, R. V. et TONIOLO, C., 2003.  
*Interfacial instability in non-Newtonian fluid layers.*  
Phys. Fluids **15**(11), 3370-3384.

BALMFORTH, N. J. et LIU, J. J., 2004.  
*Roll waves in mud.*  
J. Fluid Mech. **519**, 33-54.

BENJAMIN, T. B., 1957.  
*Wave formation in laminar flow down an inclined plane.*  
J. Fluid Mech. **2**, 554-573.

BINGHAM, E. C.,  
*Fluidity an Plasticity.*  
McGraw-Hill, extrait de McGraw-Hill, New York, 1922. pp. 215-218.

BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C. et HASSAGER, O.,  
*Dynamics of polymeric liquids, Vol. 1 , Fluid Mechanics.*  
J. Wiley, New York, 1987.

CARREAU, P. J., DEKEE, D. C. R. et CHHABRA, R. P.,  
*Rheology of Polymeric Systems - Principles and Applications.*  
Hanser Gardner, Munich, 1997.

- CARREAU, P. J., KEE, D. D. et DAROUX, M., 1979.  
*An Analysis of the Viscous Behavior of Polymeric Solutions.*  
Can. J. Chem. Eng. **57**, 135-141.
- CASSON, N.,  
*A Flow Equation for Pigment-Oil suspensions of the Printing Ink type.*  
C. C. Mill, extrait de *Rheology of Disperse Systems*, C. C. Mill, Pergamon Press, New York, 1959. pp. 84-102.
- CHEN, K., 1992.  
*The onset of elastically driven wavy motion in the flow of two viscoelastic liquid films down an inclined plane.*  
J. Non-Newton. Fluid Mech. **45**(1), 21-45.
- CHEN, K., 1993.  
*Wave formation in the gravity-driven low-Reynolds number flow of two liquid films down an inclined plane.*  
Phys. Fluids A **5**(12), 3038-3048.
- CRAIK, A. D. D. et SMITH, F. I. P., 1968.  
*The stability of free-surface flows with viscosity stratification.*  
J. Fluid Mech. **34**(2), 393-406.
- DEBRUIN, J. G., 1974.  
*Stability of a Layer of of Liquid Flowing Down an Inclined Plane.*  
J. Eng. Math. **8**, 259-270.
- FLORYAN, J. M., DAVIS, S. H. et KELLY, R. E., 1987.  
*Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane.*  
Phys. Fluids **30**(4), 983-989.
- GUPTA, A. S., 1967.  
*Stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane.*  
J. Fluid Mech. **28**, 17-28.
- HERSCHEL, W. H. et BULKLEY, R., 1926.  
*Konsistenzmessungen von Gummi-Benzol-Lösungen.*  
Kolloid Z. **39**(4), 291-300.
- HOOPER, A. P. et BOYD, W. G. C., 1987.  
*Shear-flow instability due to a wall and a viscosity discontinuity at the interface.*  
J. Fluid Mech. **179**, 201-225.
- HU, J., MILLET, S., BOTTON, V., BENHADID, H. et HENRY, D., 2006.  
*Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification.*  
Phys Fluids **18**(10), 104101.
- HUANG, C.-T. et KHOMAMI, B., 2001.  
*The instability mechanism of single and multilayer Newtonian and viscoelastic flows down an inclined plane.*  
Rheol. Acta **40**(5), 467-484.

- HWANG, C.-C., CHEN, J.-L., WANG, J.-S. et LIN, J.-S., 1994.  
*Linear stability of power law liquid down an inclined plane.*  
J. Phys D: Appl. Phys. **27**, 2297-2301.
- JIANG, W. Y., HELENBROOK, B. et LIN, S. P., 2004.  
*Inertialess instability of a two-layer liquid film flow.*  
Phys. Fluids **16**(3), 652-663.
- KAO, T. W., 1965.  
*Role of the Interface in the Stability of Stratified Flow down an Inclined Plane.*  
Phys. Fluids **8**(12), 2190-2194.
- KAO, T. W., 1968.  
*Role of viscosity stratification in the stability of two layer flow down an incline.*  
J. Fluid Mech. **33**, 561-572.
- KELLY, R. E., GOUSSIS, D. A., LIN, S. P. et HSU, F. K., 1989.  
*The mechanism for surface wave instability in film flow down an inclined plane.*  
Phys. Fluids A **1**(5), 819-828.
- KISTLER, S. F. et SCHWEIZER, P. M.,  
*Liquid Film Coating - Scientific Principles and Their Technological Implications.*  
Chapman & Hall, London, 1997.
- LAI, W., 1967.  
*Stability of an Elastico-Viscous Liquid Film Flowing down an Inclined Plane.*  
Phys. Fluids **10**(4), 844-847.
- LIU, K. F. et MEI, C. C., 1989.  
*Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane.*  
J. Fluid Mech. **207**, 505-529.
- LOEWENHERZ, D. S. et LAWRENCE, C. J., 1989.  
*The effect of viscosity stratification on the stability of a free surface flow at low Reynolds number.*  
Phys. Fluids A **1**(10), 1686-1693.
- NOUAR, C., BOTTARO, A. et BRANCHER, J. P., 2007.  
*Delaying transition to turbulence in channel flow: Revisiting the stability of shear thinning fluids.*  
J. Fluid Mech. **592**, 177-194.
- OSTWALD, W., 1925.  
*Ueber die Geschwindigkeitsfunktion der Viskosität disperser Systeme.*  
Kolloid Z. **36**(2), 99-117.
- ROUSSET, F., MILLET, S., BOTTON, V. et BENHADID, H., 2007.  
*Temporal Stability of Carreau Fluid Flow down an Incline.*  
J. Fluid Eng. **129**(7), 913-920.



- SCHAFLINGER, U., 1994.  
*A short note on Squire's theorem for interfacial instabilities in a stratified flow of two superposed fluids.*  
Fluid Dyn. Res. **14**(5), 223-227.
- SHAQFEH, E. S. G., LARSON, R. G. et FREDRICKSON, G. H., 1989.  
*The stability of gravity driven viscoelastic film-flow at low to moderate Reynolds number.*  
J. Non-Newton. Fluid Mech. **31**(1), 87-113.
- SMITH, M. K., 1990.  
*The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films.*  
J. Fluid Mech. **217**, 469-485.
- SQUIRE, H. B., 1933.  
*On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls.*  
Proc. Roy. Soc. **A142**, 621-628.
- WANG, C. K., SEABORG, J. J. et LIN, S. P., 1978.  
*Instability of multi-layered liquid films.*  
Phys. Fluids **21**(10), 1669-1673.
- WEINSTEIN, S. J., 1990.  
*Wave-Propagation in the Flow of Shear-Thinning Fluids Down an Incline.*  
AIChE J. **36**(12), 1873-1889.
- WEINSTEIN, S. J. et CHEN, K. P., 1999.  
*Large growth rate instabilities in three-layer flow down an incline in the limit of zero Reynolds number.*  
Phys. Fluids **11**(11), 3270-3282.
- WEINSTEIN, S. J. et KURZ, M. R., 1991.  
*Long-wavelength instabilities in three-layer flow down an incline.*  
Phys. Fluids A **3**(11), 2680-2687.
- WEINSTEIN, S. J. et RUSCHAK, K. J., 2004.  
*Coating Flows.*  
Annual Review of Fluid Mechanics **36**(1), 29-53.
- YASUDA, K., ARMSTRONG, R. C. et COHEN, R. E., 1981.  
*Shear flow properties of concentrated solutions of linear and star branched polystyrenes.*  
Rheol. Acta **20**(2), 163-178.
- YIH, C.-S., 1963.  
*Stability of Liquid Flow down an Inclined Plane.*  
Phys. Fluids **6**(3), 321-334.
- YIH, C.-S., 1967.  
*Instability due to viscosity stratification.*  
J. Fluid Mech. **27**, 337-352.



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

**NOM :** MILLET

**DATE de SOUTENANCE :** 07 Décembre 2007

**Prénoms :** Séverine

**TITRE :** *STABILITE DE L'ECOULEMENT MULTICOUCHE DE FILMS NON NEWTONIENS SUR UN PLAN INCLINE.*

**NATURE :** Doctorat

Numéro d'ordre : 2007 ISAL 0115

**Ecole doctorale :** Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique (MEGA)

**Spécialité :** Mécanique des Fluides

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis

**CLASSE :**

**RESUME :**

Le travail présenté est une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de films superposés de fluides non newtoniens sur un plan incliné. La connaissance des conditions d'apparition des instabilités dans ce type d'écoulements intéresse particulièrement le secteur industriel faisant appel à des méthodes de couchage. Il est en effet intéressant de pouvoir maîtriser le déclenchement des instabilités en vue de les empêcher de nuire à la qualité du résultat. Nous nous sommes intéressés au cas de fluides rhéofluidifiants, dont la viscosité est décrite par la loi de Carreau.

Une première partie est consacrée au cas d'une seule couche. Trois approches complémentaires sont exploitées : une approche asymptotique, considérant un comportement faiblement non newtonien dans la limite des grandes longueurs d'onde, une approche phénoménologique utile à la compréhension des mécanismes de l'instabilité et une approche numérique. Cette dernière s'appuie sur la résolution sous forme d'un problème aux valeurs propres de l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée par la méthode spectrale de collocation de Tchebychev.

Ce travail est étendu par une étude à deux couches. Nous avons mis en évidence les effets de chaque paramètre sur la stabilité de l'écoulement (propriétés rhéofluidifiantes, tensions de surface, rapport des débits, densités et viscosités). Enfin, en vue de découvrir l'origine des instabilités, un bilan énergétique a été formulé afin d'identifier les termes qui produisent de l'énergie. Nous avons montré le rôle clé joué par le cisaillement aux interfaces pour expliquer l'influence des propriétés rhéofluidifiantes sur les différentes contributions du bilan énergétique.

**MOTS-CLES :** Stabilité, écoulement stratifié, film, non newtonien, plan incliné, surface libre, interface.

**ABSTRACT :**

Simultaneous coating of multiple layers is required in many applications. One of the encountered defects of these processes is related to waves initiated by ambient perturbations that degrade the uniformity of a coating. Wave propagation can be examined through stability analysis of a stratified flow down an inclined plane. We focused on fluids following the Carreau model. This law accurately describes the rheological behavior of fluids like suspensions of polymers and melts and is particularly suitable to free surface flow issue.

The study was first limited to the case of only one layer. Three complementary approaches have been applied: first, a weakly non-Newtonian behavior is considered in the limit of long waves through an asymptotic approach, then a phenomenological approach is developed in order to describe the instability mechanisms, and in a last step the general case is studied numerically. A spectral Tau collocation method based on Tchebychev polynomials is used for the discretization of the generalized Orr-Sommerfeld eigenvalue problem. It is found shear-thinning properties have some destabilizing effects.

This work was extended by the study of two-layer film flows. We highlighted the influence of a shear-thinning rheology, surface tensions, density and viscosity stratification on the stability. We completed this work relying on an energy budget to explain the differences on the stability according to the parameters. We investigated the key role played by the shear stress at the undisturbed free surface and interface to explain these phenomena and the influence of the shear-thinning properties on the different contributions of the energy balance.

**KEYWORDS :** Stability, stratified flow, film, non Newtonian, inclined plane, free surface, interface.

**Laboratoire de recherche :** Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique (LMFA)  
UMR CNRS 5509 – Université de Lyon (ECL/INSA/UCBL)

**Directeur de thèse :** **BEN HADID Hamda** (directeur) et **BOTTON Valéry** (co-directeur)

**Président de jury :**

**Composition du jury :** Rapporteurs : **MOJTABI Abdelkader** et **ROUX Bernard**  
Examineurs : **BEN HADID Hamda**, **BOTTON Valéry**, **BOURGIN Patrick** & **LYUBIMOVA Tatyana**