



HAL
open science

Modélisation numérique d'écoulements fluide/particules

Aline Lefebvre, Aline Lefebvre-Lepot

► **To cite this version:**

Aline Lefebvre, Aline Lefebvre-Lepot. Modélisation numérique d'écoulements fluide/particules. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT: . tel-00257246

HAL Id: tel-00257246

<https://theses.hal.science/tel-00257246>

Submitted on 18 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Aline LEFEBVRE

Sujet :

**MODÉLISATION NUMÉRIQUE D'ÉCOULEMENTS
FLUIDE/PARTICULES.**

PRISE EN COMPTE DES FORCES DE LUBRIFICATION.

Soutenue le 23 Novembre 2007 devant la Commission d'examen :

| | |
|--------------------------|----------------------|
| M. ALLAIRE GRÉGOIRE | (Rapporteur) |
| M. ALOUGES FRANÇOIS | (Examineur) |
| M. GÉRARD PATRICK | (Examineur) |
| M. GERBEAU JEAN-FRÉDÉRIC | (Examineur) |
| M. GLOWINSKI ROLAND | (Examineur) |
| M. MADAY YVON | (Président du jury) |
| M. MAURY BERTRAND | (Directeur de thèse) |

Après avis des rapporteurs : M. ALLAIRE GRÉGOIRE
M. TUREK STEFAN

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma reconnaissance à Bertrand Maury, mon directeur de thèse. Je le remercie pour sa confiance et son soutien permanent durant ces trois années. Ses compétences, sa patience et sa bonne humeur m'ont souvent été d'un grand secours. Grâce à son enthousiasme et à sa curiosité, j'ai découvert un univers des mathématiques varié et passionnant. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec lui et j'espère avoir la chance de voir cette collaboration continuer.

J'adresse mes sincères remerciements à Grégoire Allaire et Stefan Turek pour le temps qu'ils ont consacré à rapporter cette thèse ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je remercie également François Alouges, Patrick Gérard, Jean-Frédéric Gerbeau, Roland Glowinski et Yvon Maday d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je voudrais également remercier ici ceux sans qui cette thèse n'aurait pas eu lieu. Tout d'abord les hommes de l'ombre, messieurs Akonom et Voedts qui m'ont fait découvrir et apprécier les mathématiques. Je ne remercierai jamais assez Jean Voedts de m'avoir suggéré de quitter ma belle région Lilloise pour la vallée de Chevreuse. Je tiens aussi à exprimer ici ma gratitude à François Alouges qui, suite à un "je veux faire des maths appliquées à la bio", a eu l'excellente idée de m'orienter vers Bertrand. Je veux également le remercier pour les nombreuses discussions ("matheuses" et autres) que nous avons eues depuis : son intérêt pour mon travail, son soutien ainsi que ses conseils m'ont considérablement aidée.

Faire ma thèse dans l'équipe Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles d'Orsay a été une chance et je tiens ici à remercier chaleureusement tous les membres de cette équipe. Je pense plus particulièrement à ceux avec qui j'ai eu l'occasion de collaborer. Jacques Laminie, sans qui le C++ serait rapidement devenu C- -. Le temps qu'il m'a consacré m'a été très précieux (non Jacques, je n'afficherai pas mes beaux dessins dans le salon et oui, je parlerai de toi à Cannes!). François Alouges et Antonio De Simone (ah ! le soleil italien !) qui m'ont appris à nager (bientôt le crawl ?). Et enfin, last but not least, Sylvain Faure, qui a toujours trouvé le temps de répondre à mes questions (informatiques et autres...) et grâce à qui j'ai vaincu VTK (le petit café des matins difficiles sera dur à remplacer !). Un grand merci aussi aux Grenoblois, Mourad Ismail et l'équipe du LSP, pour leur enthousiasme et leur accueil toujours chaleureux (sympa vos manips !).

Je remercie enfin mes co-bureau du 256, bien cachés au fond du fond du couloir du second. Les anciens, qui m'ont appris les subtilités de la vie de thésard, et les nouveaux, qui m'ont soutenue jusqu'à aujourd'hui (vous nommer tous ici serait trop long, mais je suis sûre que vous vous reconnaîtrez !). Sans l'excellente ambiance et la solidarité qui règnent dans ce bureau, ces trois années n'auraient pas été si agréables. Un petit coucou aussi aux doctorants du 258 et du bâtiment d'en face, et plus particulièrement à ceux qui nous rejoignaient pour de longues discussions autour d'un café à midi. Je profite enfin de ces quelques lignes pour adresser mes remerciements à Juliette, zenificatrice officielle de notre bureau. Que de chemin depuis Lille et la prépa ! Ces deux dernières années, nos

échanges mathématiques mais aussi, et surtout, nos longues discussions (sur le parking, tard le soir : tant pis... nos hommes attendront!), m'ont été très précieuses. Un énorme merci également pour ta disponibilité sans faille ces derniers mois, ainsi que pour le temps passé à la relecture minutieuse de ce manuscrit (à charge de revanche!).

Je termine par ceux qui ont toujours été là pendant ces longues années d'étude. Un énorme merci à toute ma petite famille. À mes parents, qui m'ont encouragée, épaulée dans les moments difficiles et qui m'ont appris que l'important était de donner le meilleur de soi-même. À Audrey et Fabrice, pour les heures passées au téléphone et les Week-End détente qui m'étaient indispensables. Et enfin, un énorme merci à Eric qui, armé d'une patience inébranlable, m'a soutenue au jour le jour et sans qui je n'y serais pas arrivée.

Incore in grind merci a tertous !

Table des matières

| | |
|---------------------|----------|
| Introduction | 1 |
| Résumé | 7 |
| Abstract | 9 |

| | |
|--|-----------|
| Partie I Simulation directe d'écoulements Fluide/Particules par une méthode de Pénalisation | 11 |
|--|-----------|

| |
|-------------------|
| Chapitre 1 |
|-------------------|

| |
|-------------------------------------|
| Présentation de l'algorithme |
|-------------------------------------|

| | | |
|-------|--|----|
| 1.1 | Contexte | 14 |
| 1.1.1 | Equations | 14 |
| 1.1.2 | Méthodes numériques existantes | 15 |
| 1.2 | Algorithme proposé | 18 |
| 1.2.1 | Formulation variationnelle continue | 18 |
| 1.2.2 | Discrétisation en temps | 21 |
| 1.2.3 | Gestion du mouvement rigide par pénalisation | 22 |
| 1.3 | Tests numériques | 24 |
| 1.3.1 | Implémentation sous FreeFem++ | 24 |
| 1.3.2 | Particule en cisaillement, problème stationnaire | 25 |

| | | |
|-------|---|----|
| 1.3.3 | Sédimentation d'une particule, problème stationnaire : tests de convergence | 27 |
| 1.3.4 | Sédimentation de deux particules | 31 |
| 1.4 | Un peu de théorie : Inégalité de Korn et conséquences | 32 |
| 1.4.1 | Simplifications et notations | 32 |
| 1.4.2 | Méthode de pénalisation, cas général | 33 |
| 1.4.3 | Application au cas de la contrainte de mouvement rigide | 34 |

| |
|---|
| <p>Chapitre 2</p> <p>Applications</p> |
|---|

| | | |
|-------|--|----|
| 2.1 | Valve cardiaque | 40 |
| 2.1.1 | Description du modèle | 40 |
| 2.1.2 | Formulation variationnelle et implémentation | 41 |
| 2.1.3 | Résultats numériques | 43 |
| 2.2 | Nageur | 45 |
| 2.2.1 | Description du problème | 45 |
| 2.2.2 | Présentation d'un cas simple : la brassée "carrée" | 46 |
| 2.2.3 | Résultats numériques | 49 |
| 2.2.4 | Recherche de brassées optimales | 55 |
| 2.3 | Vésicules | 56 |
| 2.3.1 | Contexte | 56 |
| 2.3.2 | Modèle utilisé | 57 |
| 2.3.3 | Résultats obtenus | 60 |

Partie II Interactions rapprochées **63**

| |
|---|
| <p>Chapitre 3</p> <p>Préambule : Un algorithme de gestion des contacts modélisant des collisions inélastiques</p> |
|---|

| | | |
|-----|--------------------|----|
| 3.1 | Contexte | 66 |
|-----|--------------------|----|

| | | |
|-------|--|----|
| 3.2 | Méthode de prise en compte des contacts | 67 |
| 3.2.1 | Un espace de vitesses “admissibles” | 67 |
| 3.2.2 | Cas de la méthode de pénalisation : formulation variationnelle modifiée | 68 |
| 3.2.3 | Méthode de splitting | 70 |
| 3.3 | Résultats numériques | 71 |

| |
|-------------------|
| Chapitre 4 |
|-------------------|

| |
|--|
| Un modèle de “contact visqueux”, cas particule/plan |
|--|

| | | |
|-------|---|-----|
| 4.1 | Force de lubrification normale et contact | 76 |
| 4.1.1 | Cas d’objets lisses | 76 |
| 4.1.2 | Conséquences numériques | 79 |
| 4.1.3 | Cas d’objets rugueux | 81 |
| 4.2 | Modèle de “contact visqueux” | 84 |
| 4.2.1 | Un exemple | 85 |
| 4.2.2 | Ecriture du modèle et résultats de convergence | 89 |
| 4.3 | Algorithme associé | 93 |
| 4.3.1 | Réécriture du problème | 94 |
| 4.3.2 | Schéma numérique | 96 |
| 4.3.3 | Intégration à la simulation fluide/particules | 108 |
| 4.4 | Enrichissement du modèle | 109 |
| 4.4.1 | Prise en compte de la rugosité | 109 |
| 4.4.2 | Ajout de la force de lubrification tangentielle | 111 |

| |
|-------------------|
| Chapitre 5 |
|-------------------|

| |
|---|
| Modèle de “contact visqueux” et programmation dans le cas multi-particules |
|---|

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.1 | Modèle multi-particules | 118 |
| 5.1.1 | Cas de deux particules | 118 |
| 5.1.2 | Ecriture du modèle multi-particules | 122 |
| 5.2 | Algorithme | 123 |
| 5.2.1 | Ecriture de l’algorithme multi-particules | 123 |
| 5.2.2 | Projection | 124 |
| 5.2.3 | Recherche des voisins | 125 |
| 5.2.4 | Extensions possibles | 128 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.2.5 | Premiers résultats numériques | 129 |
| 5.3 | Programmation Orientée Objet | 132 |
| 5.3.1 | Méthodologie et objectifs | 132 |
| 5.3.2 | Les classes “Variable” | 134 |
| 5.3.3 | Les classes “Opérateur” | 137 |
| 5.3.4 | La Classe “Problème” | 140 |
| 5.3.5 | Le code et son utilisation | 141 |
| 5.3.6 | Résultats numériques : sédimentation de 1000 particules | 144 |

| | | |
|-------------------|---|------------|
| Partie III | Du microscopique vers le macroscopique | 147 |
|-------------------|---|------------|

| |
|---|
| Chapitre 6 Un modèle continu de boulier visqueux |
|---|

| | | |
|-------|--|-----|
| 6.1 | Modèle du boulier visqueux | 151 |
| 6.1.1 | Modèle discret | 151 |
| 6.1.2 | Vers un modèle continu : approche formelle | 155 |
| 6.2 | Convergence du modèle discret vers le modèle continu | 157 |
| 6.2.1 | Sens donné au modèle continu | 157 |
| 6.2.2 | Un opérateur micro-macro | 158 |
| 6.2.3 | Résultat de convergence | 160 |
| 6.3 | Démonstration des lemmes | 167 |

Annexes

Annexe A**Minimisation sous contrainte affine**

| | | |
|-----|--|-----|
| A.1 | Contrainte d'égalité | 186 |
| A.2 | Contrainte d'inégalité, cas $M = \mathbb{R}^N$ | 188 |
| A.3 | Algorithme d'Uzawa : contrainte d'inégalité, cas $M = \mathbb{R}^N$ | 189 |

Annexe B**Optimal strokes for low Reynolds number swimmers : an example**

| | | |
|-------|---|-----|
| B.1 | Introduction | 194 |
| B.2 | Setting of the problem | 196 |
| B.2.1 | Stokes equations | 196 |
| B.2.2 | The ODEs describing swimming | 197 |
| B.2.3 | Swimming as a control problem | 199 |
| B.3 | Proof of Theorem 1 | 200 |
| B.3.1 | Proof of Lemma 1 | 200 |
| B.3.2 | Proof of Lemma 2 | 204 |
| B.4 | A numerical algorithm for computing optimal strokes | 208 |
| B.5 | Examples of optimal strokes | 211 |
| B.5.1 | Optimal strokes versus square loops | 212 |
| B.5.2 | Multiplicity of geodesic strokes | 212 |
| B.5.3 | Swimming with many strokes | 213 |
| B.6 | Discussion | 214 |

Annexe C**Dérivation de fonctions à variations bornées : mesures différentielles**

| | | |
|-----|---------------------------------|-----|
| C.1 | Mesure différentielle | 220 |
| C.2 | Sous-intervalles | 221 |

Annexe D**Démonstration de l'équivalence entre (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}') énoncée page 95****Annexe E****Programmation Orientée Objet et UML**

| | | |
|-----|--|-----|
| E.1 | Programmation Orientée Objet | 232 |
|-----|--|-----|

| | |
|--|-----|
| E.2 UML | 233 |
| E.3 Diagramme des Classes détaillé | 234 |

| |
|---|
| Annexe F Vers la forme faible de l'équation de transport |
|---|

| | |
|----------------------|------------|
| Bibliographie | 249 |
|----------------------|------------|

Introduction

Le sujet de ce travail est la simulation numérique d'écoulements fluide/particules denses. Nous nous concentrons sur les interactions hydrodynamiques à courtes portées dans de tels systèmes et proposons un modèle ainsi qu'un algorithme permettant de les prendre en compte numériquement. Nous proposons également un modèle macroscopique continu qui les modélise en dimension 1.

Écoulements fluide/particules : propriétés macroscopiques et simulation numérique.

Dans la nature, les boues, les écoulements de lave ou encore les globules rouges dans le sang sont des systèmes formés de particules solides en suspension dans un fluide visqueux (en admettant en première approximation que les globules rouges soient solides). De tels systèmes se retrouvent également dans le monde industriel, comme par exemple dans le béton, la pâte à papier ou certains fluides agroalimentaires.

Ils présentent une variété remarquable de comportements rhéologiques¹, dont l'étude a fait l'objet de nombreuses recherches, profitant de contributions venant de différents domaines tels que l'ingénierie, la chimie, la physique ou les mathématiques. Le problème de base consiste à prédire les propriétés macroscopiques de transport de ces suspensions –viscosité, vitesse de sédimentation– à partir des microstructures, c'est-à-dire à partir des interactions entre les particules et de leur distribution spatiale.

La plupart des études théoriques dans ce domaine sont limitées au cas de suspension diluées à nombre de Reynolds nul. Ces études ont commencé avec les travaux d'Einstein [28, 1906] sur la viscosité apparente d'une suspension diluée de sphères rigides dans un fluide de Stokes. Sa formule donne l'influence de la présence de particules sur la viscosité globale de la suspension pour de faibles fractions solides volumiques. Dans ce cas, les interactions à longue portée entre les particules peuvent être négligées et les effets des particules isolées et des paires de particules dominant dans le comportement global du système. Cela permet de déterminer le comportement macroscopique de ces systèmes grâce à des développements asymptotiques à faible densité ou à faible fraction solide volumique. Malheureusement, l'accord de tels résultats avec les données expérimentales n'est généralement obtenu que jusqu'à des fractions solides de l'ordre de quelques pour cent.

Étendre l'analyse du cas dilué à des concentrations plus importantes est un problème difficile. En effet, à forte densité, chaque particule agit, de proche en proche, sur le com-

¹La rhéologie est l'ensemble des phénomènes conditionnant l'écoulement et la déformation de la matière.

portement de toutes les autres et la méthode employée dans le cas dilué n'est donc plus valable. Le comportement macroscopique de ces systèmes ne dépend plus uniquement de la fraction solide volumique mais de la configuration microscopique de la solution (par exemple de la présence ou non d'amas de particules) et il est donc susceptible d'évoluer dans le temps. Deux problèmes majeurs se posent alors :

- La modélisation et la prise en compte de manière globale des interactions multi-particules et plus particulièrement des interactions hydrodynamiques,
- la détermination de la configuration spatiale des particules. Dans le cas dense, la configuration microscopique du système est une inconnue du problème qui évolue au cours du temps.

La simulation numérique s'avère être un outil puissant pour étudier les comportements microscopique et macroscopique de ces suspensions denses. Au niveau microscopique, la résolution de l'écoulement fluide ainsi que l'intégration de la loi de Newton sur les particules donnent la configuration spatiale du système. Les propriétés macroscopiques peuvent alors être calculées à partir de la microstructure obtenue et de l'état du fluide environnant. Dans les années 80, Bossis et Brady ont développé une méthode numérique, appelée *Stokesian Dynamics*, qui permet la simulation dynamique de particules sphériques dans un fluide de Stokes dans des conditions d'écoulement et de géométrie particulières (voir [13, 27, 41]). Cette méthode est basée sur une hypothèse d'additivité des forces hydrodynamiques et fait appel à des développements asymptotiques de ces forces à courte et longue portée. Elle a été utilisée dans [14] par ses concepteurs afin d'étudier la rhéologie de suspensions concentrées de sphères, en cisaillement en milieu infini.

La simulation numérique et l'étude du comportement macroscopique des systèmes multi-particules plus généraux font appel à des méthodes dites de *simulation directe*. Par cela, on entend résolution des équations de Stokes ou Navier-Stokes dans le domaine fluide couplées avec le Principe Fondamental de la Dynamique sur les particules, sans autre modélisation ou approximation (autre que celles liées à la discrétisation). Ce type de simulation a motivé de nombreuses recherches ces dix dernières années (voir section 1.1.2, page 15). Dans [56], nous utilisons une telle méthode afin d'étudier le comportement de mélanges dont les particules interagissent à travers une force d'attraction, dans un écoulement de cisaillement entre deux plans infinis. Nous étudions l'évolution en temps de la viscosité apparente de tels systèmes. Nous observons que, même dans le cas d'un écoulement fluide linéaire de type Stokes, on observe un comportement global fortement non linéaire. Cette étude permet de vérifier que la viscosité apparente dans une telle situation est dépendante de la configuration spatiale microscopique. En effet, elle peut croître ou diminuer selon la forme et la position des amas de particules. Elle dépend également très sensiblement, pour des populations denses, des distances interparticulaires.

Importance d'une bonne gestion des interactions rapprochées.

Une particule proche et en mouvement relatif par rapport à un objet rigide (un mur ou une autre particule) est soumise à une force hydrodynamique qui tend à pénaliser le mouvement relatif des deux objets. Il s'agit de la force de lubrification qui est due à la persistance de fluide interstitiel entre les deux surfaces proches. Cette force est singulière et se comporte, dans un fluide de Stokes, comme l'inverse de la distance interparticulaire

quand celle-ci tend vers zéro. Elle est suffisante pour éviter les collisions de particules et est donc particulièrement importante dans le cas de systèmes denses ou en présence d'obstacles. Dans de tels cas, elle joue en effet un rôle prépondérant dans le comportement macroscopique du système. Lors de la simulation numérique de solutions denses, il apparaît donc indispensable de la prendre en compte correctement.

Or, lors de simulations telles que celles que nous effectuons dans [56], la discrétisation du problème en espace rend difficile la résolution précise de l'écoulement fluide entre les particules proches. Bien entendu, il est possible de raffiner le maillage dans ces zones de fortes contraintes mais cela peut devenir très coûteux dans le cas de systèmes denses. Les erreurs ainsi commises provoquent des contacts et même des chevauchements de particules qui ne sont évidemment pas physiques et qui peuvent stopper prématurément les calculs. Des raisons de modélisation physique et de robustesse numérique imposent donc la mise en place de méthodes permettant de gérer efficacement ces contacts. De nombreux auteurs utilisent par exemple des forces répulsives à courte portée ou des modèles de collisions inélastiques (voir section 3.1, page 66). Dans [56], nous utilisons une méthode globale de gestion des contacts, correspondant à un modèle de collision inélastique. Ces techniques permettent de résoudre numériquement le problème mais ne prennent pas en compte la physique sous-jacente des forces de lubrification dont on a déjà noté l'importance.

Ainsi, certains auteurs ont été amenés à ajouter aux simulations numériques directes la prise en compte des forces de lubrification (voir section 4.1.2, page 4.1.2). Le problème des erreurs d'estimation des forces de lubrification dues à la discrétisation en espace est alors résolu et, en principe, les forces calculées sont suffisantes pour éviter les collisions de particules. Cependant, la force de lubrification étant singulière aux petites distances, on est amené à résoudre numériquement des systèmes très raides. L'existence de faibles distances interparticulaires nécessite alors l'utilisation de pas de temps très petits pour éviter les contacts. Ainsi, la physique du problème est mieux respectée et les petites distances sont pénalisées mais, en l'absence d'un pas de temps suffisamment petit, des chevauchements de particules, bien que moins fréquents, peuvent à nouveau apparaître, suite aux erreurs de discrétisation en temps. En pratique, afin d'éviter une diminution trop coûteuse du pas de temps, il est à nouveau nécessaire, dans les cas de forte densité particulaire, de gérer le problème des contacts numériques. Noter que ce problème étant dû à la discrétisation en temps, il apparaît également dans les simulations de type *Stokesian Dynamics* bien que les forces de lubrification y soient prises en compte à courte portée.

Présentation du travail effectué.

Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cadre de la simulation directe d'écoulements fluide/particules. L'objectif est d'étudier les forces de lubrification afin de décrire une méthode permettant de gérer les contacts numériques lors de telles simulations, tout en respectant la physique sous-jacente.

Pour cela, nous souhaitons d'abord disposer d'un outil de simulation d'écoulement fluide/particules, simple d'utilisation, permettant d'effectuer des tests. La première partie de ce document est consacrée à cet objectif. Dans un premier chapitre, nous présentons la méthode numérique choisie. La contrainte de mouvement rigide est imposée dans une

partie du domaine par une méthode de pénalisation. Bien que le domaine occupé par le fluide varie dans le temps, ce type de méthode permet d'utiliser un unique maillage cartésien du domaine global (fluide+solide), indépendant du temps. Ceci, associé à une discrétisation en temps par la méthode des caractéristiques, permet de se ramener à chaque pas de temps, à la résolution d'une formulation variationnelle de type Stokes généralisé. L'algorithme ainsi obtenu permet d'effectuer des simulations avec ou sans inertie et de prendre en compte des particules de forme quelconque. Il peut être programmé grâce à tout solveur fluide Stokes ou Navier-Stokes. Dans le second chapitre, nous donnons des exemples d'utilisation de cet algorithme. Nous montrons à travers trois problèmes, que le code implanté permet de gérer des situations variées et complexes, présentant de nouvelles contraintes (solide fixé en un point lors de la simulation d'une valve cardiaque, chaîne de particules et volume constant dans le cas de simulations de vésicules, cas 3D axisymétrique pour l'étude d'un nageur).

Dans la seconde partie, nous nous concentrons sur la gestion des interactions rapprochées. Dans le chapitre 3, nous présentons une manière efficace de gérer de façon globale les contacts, en les modélisant par des collisions inélastiques. L'algorithme est basé sur une projection, à chaque instant, des vitesses des particules calculées par un solveur fluide/particule quelconque (provoquant éventuellement des contacts numériques) sur un espace dit de *vitesse admissibles*. Cet espace est celui des vitesses pour lesquelles, à l'instant suivant, il n'y a pas chevauchement des particules. Dans le chapitre suivant, nous nous concentrons sur l'étude de la force de lubrification dans le cas d'une particule sphérique située près d'un plan. Après avoir présenté un état des connaissances sur cette situation, nous décrivons un modèle de "contact visqueux". Dans ce modèle, contrairement au cas inélastique, la particule garde en mémoire les effets des forces qui s'exercent sur elle durant le contact. Cet effet mémoire est dû à la persistance d'une couche de fluide dans l'interstice entre la particule et le plan. Nous proposons ensuite un algorithme permettant de simuler de tels systèmes et montrons sa convergence. Il présente l'avantage de prendre en compte les forces de lubrification tout en empêchant, par construction, les chevauchements. Dans un dernier chapitre, nous montrons comment il peut être généralisé au cas multi-particules en se basant sur la méthode de gestion des contacts décrite en début de partie. L'algorithme final, programmé selon une méthode orientée objet, permet de simuler numériquement, de manière efficace, des collections de particules visqueuses. Le code obtenu est évolutif et sera couplé par la suite à des codes de simulation fluide/particules, afin d'intégrer à ces derniers une méthode de gestion des contacts prenant en compte les forces de lubrification.

Dans une dernière partie, nous nous sommes intéressés à une autre manière d'obtenir de l'information sur le comportement macroscopique de systèmes denses. Cette méthode consiste à représenter le système par un milieu continu. Dans le chapitre 6, on considère un boulier de particules plongé dans un fluide visqueux. Il est modélisé par une chaîne de particules, deux particules successives agissant l'une sur l'autre au travers de la force de lubrification. En faisant tendre le nombre de particules vers l'infini, on obtient un modèle continu formé d'un système de deux équations aux dérivées partielles. La première est une équation de transport. La seconde est une équation constitutive de type Newtonien dont la viscosité est infinie dans les zones solides.

L'ensemble de la thèse a été rédigé en dimension deux. La théorie de la méthode de pénalisation, présentée dans le chapitre 1, se généralise immédiatement au cas de la dimension trois, et de premiers tests numériques satisfaisants ont été effectués avec `FreeFem 3D` [34]. Le modèle de “contact visqueux” normal est quant à lui un modèle 3D que l'on utilise en dimension deux pour des raisons de visualisation. Il reste à adapter la partie tangentielle de ce modèle à la dimension supérieure.

Le travail que nous avons effectué sur la simulation d'écoulements fluide/particules par la méthode de pénalisation, a donné lieu aux deux Proceedings [48] et [55]. Ils correspondent au chapitre 1 et à l'application à la simulation d'une valve aortique dans le chapitre 2. La méthode de gestion des contacts du chapitre 3 est décrite dans [55]. Leur contenu ayant été intégralement repris, développé et réorganisé, ces articles ne sont pas joints au présent document.

Résumé

I. Simulation d'écoulements fluide/particules, méthode de pénalisation

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, nous présentons une méthode pour simuler le mouvement d'un corps rigide dans un fluide Newtonien. Nous effectuons la discrétisation en temps en utilisant la méthode des caractéristiques et la contrainte de mouvement rigide est relaxée en introduisant un terme de pénalisation. Cela conduit à une formulation variationnelle de type Stokes généralisé. Nous montrons que, quand le paramètre de pénalisation tend vers zéro, on retrouve le système d'équations couplées fluide/solide. Des tests numériques sont effectués avec `FreeFem++` afin d'étudier les taux de convergence.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous présentons trois exemples de simulations utilisant la méthode de pénalisation proposée dans le chapitre précédent : simulation du mouvement d'une valve aortique 2D (très) idéalisée, étude d'un "nageur à trois sphères" et simulations numériques de vésicules en cisaillement.

II. Interactions rapprochées

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous présentons une méthode permettant de simuler efficacement des contacts inélastiques dans le cas multi-particules. Nous montrons comment l'intégrer à des simulations d'écoulements fluide/particules pour gérer le problème des contacts. Nous présentons enfin quelques résultats numériques.

Chapitre 4 : Après avoir fait une revue des propriétés connues de la force de lubrification, nous présentons dans ce chapitre un modèle de "contact visqueux" obtenu comme limite à viscosité nulle du modèle de lubrification. Nous proposons ensuite un algorithme permettant de simuler le comportement d'un tel système. Nous démontrons sa convergence et expliquons comment il peut être intégré à des simulations fluide/particules. Nous généralisons enfin le modèle proposé afin de prendre en compte la rugosité et la force de lubrification tangentielle.

Chapitre 5 : Dans ce chapitre, nous généralisons le modèle présenté dans le chapitre précédent au cas multi-particules. Nous proposons ensuite un algorithme permettant la simulation de tels systèmes. Il s'agit d'une extension de la méthode de gestion des contacts décrite dans le chapitre 3. Enfin, nous présentons un exemple de programmation orientée objet de l'algorithme obtenu.

III. Du microscopique vers le macroscopique

Chapitre 6 : On considère un système discret de sphères (un boulier en 1D) qui interagissent à travers une force de lubrification. On propose une équation constitutive macroscopique, qui est construite comme le pendant continu naturel de ce modèle de lubrification microscopique. Le modèle continu, de type Newtonien, repose sur une viscosité linéique proportionnelle à l'inverse de la fraction locale de fluide. On établit ensuite la convergence dans un sens faible des solutions du modèle discret vers les solutions du système d'équations aux dérivées partielles comprenant l'équation macroscopique constitutive proposée et l'équation de transport.

Abstract

I. Simulation of fluid/particle flows, penalty method

Chapter 1 : We present in this chapter a method to simulate the motion of a rigid body in a Newtonian fluid. The time discretization is performed using the method of characteristics and the rigid constraint is relaxed by introducing a penalty term. This leads to a generalized Stokes variational formulation. It is shown that, as the penalty parameter goes to zero, we recover the coupled fluid/solid equations. Numerical tests are implemented with **FreeFem++** to study the convergence rates.

Chapter 2 : We present in this chapter three examples of simulations using the penalty method proposed in the previous chapter : simulation of a (very) simplified 2D model of the aortic valve, study of a “three spheres swimmer” and numerical simulations of vesicles under shear flow.

II. Near field interactions

Chapter 3 : We present in this chapter a method to simulate efficiently inelastic collisions in the multi-particle case. We explain how it can become integrated into numerical simulations of fluid/particle flows and present numerical results.

Chapter 4 : After a review of the properties of the lubrication force, we present in this chapter a “gluey particle” model obtained as the vanishing viscosity limit of the lubrication model. Then, we propose an algorithm to compute the behaviour of such systems. We prove its convergence and show how it can become integrated in fluid/particle simulations. Finally, we extend the proposed model to take into account roughness and the tangential lubrication force.

Chapter 5 : In this chapter, we generalize the model presented in the previous one to the multi-particle case. Then, we propose an algorithm for such systems which consists in an extension of the contact algorithm described in chapter 3. At last, we present an exemple of object oriented programming of the algorithm.

III. From microscopic to macroscopic

Chapter 6 : We consider here a discrete system of spheres (a chain in 1D) interacting through a lubrication force. We propose a macroscopic constitutive equation which is built as the natural continuous counterpart of this microscopic lubrication model. This model, which is of the Newtonian type, relies on an elongational viscosity, which is proportional to the reciprocal of the local fluid fraction. We establish the convergence in a weak sense of the solutions to the discrete problem towards the solution to the system of partial differential equations which is composed of the equation identified as the macroscopic constitutive equation and the transport equation.

Première partie

Simulation directe d'écoulements Fluide/Particules par une méthode de Pénalisation

Chapitre 1

Présentation de l'algorithme

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1.1 | Contexte | 14 |
| 1.1.1 | Equations | 14 |
| 1.1.2 | Méthodes numériques existantes | 15 |
| 1.2 | Algorithme proposé | 18 |
| 1.2.1 | Formulation variationnelle continue | 18 |
| 1.2.2 | Discrétisation en temps | 21 |
| 1.2.3 | Gestion du mouvement rigide par pénalisation | 22 |
| 1.3 | Tests numériques | 24 |
| 1.3.1 | Implémentation sous <code>FreeFem++</code> | 24 |
| 1.3.2 | Particule en cisaillement, problème stationnaire | 25 |
| 1.3.3 | Sédimentation d'une particule, problème stationnaire : tests de convergence | 27 |
| 1.3.4 | Sédimentation de deux particules | 31 |
| 1.4 | Un peu de théorie : Inégalité de Korn et conséquences | 32 |
| 1.4.1 | Simplifications et notations | 32 |
| 1.4.2 | Méthode de pénalisation, cas général | 33 |
| 1.4.3 | Application au cas de la contrainte de mouvement rigide | 34 |

Résumé : Dans ce chapitre, nous présentons une méthode pour simuler le mouvement d'un corps rigide dans un fluide Newtonien. Cette méthode est basée sur une formulation variationnelle sur tout le domaine fluide/solide, avec des contraintes sur l'inconnue et les fonctions test. Nous effectuons la discrétisation en temps en utilisant la méthode des caractéristiques et les contraintes sont relaxées en introduisant un terme de pénalisation. Cela conduit à un problème de minimisation sur des espaces fonctionnels non contraints et ainsi, tout solveur éléments finis pour Stokes/Navier-Stokes permet de programmer aisément cette méthode. Nous montrons que, quand le paramètre de pénalisation tend vers zéro, on retrouve le système d'équations couplées fluide/solide. Des test numériques sont effectués avec `FreeFem++` afin d'étudier les taux de convergence.

Abstract : We present in this chapter a method to simulate the motion of a rigid body in a Newtonian fluid. The method is based on a variational formulation on the whole fluid/solid domain with some constraints on the unknown and the test functions. The time discretization is performed using the method of characteristics and the constraints are relaxed by introducing a penalty term. This leads to a minimization problem over unconstrained functional spaces and makes the method straightforward to implement from any Stokes/Navier-Stokes solver. It is shown that, as the penalty parameter goes to zero, we recover the coupled fluid/solid equations. Numerical tests are implemented with `FreeFem++` to study the convergence rates.

1.1 Contexte

1.1.1 Equations

On souhaite modéliser l'écoulement de N inclusions rigides dans un fluide Newtonien. Pour cela, on considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (voir Fig. 1.1) borné, régulier et on note $(B_i)_{i=1\dots N}$ les N inclusions rigides dans Ω . Les B_i sont des sous-ensembles connexes de Ω , disjoints et fortement inclus dans Ω . On note B l'ensemble du domaine rigide : $B = \cup_{i=1}^N B_i$. On supposera que le fluide, situé dans $\Omega \setminus \bar{B}$, est Newtonien et suit les équations de Navier-Stokes. Afin de simplifier les calculs, les particules sont supposées circulaires et on impose des conditions de Dirichlet homogènes sur $\partial\Omega$. Ces hypothèses ne sont pas restrictives et peuvent facilement être levées.

On désigne par $\mathbf{f}_{\Omega \setminus \bar{B}}$ et \mathbf{f}_i les forces extérieures exercées respectivement sur le fluide et sur la i -ème particule. On note μ la viscosité du fluide, ρ_f sa densité. La masse de la i -ème particule est notée m_i , sa densité ρ_i . La position de son centre de masse et son orientation angulaire sont notées respectivement \mathbf{x}_i et θ_i . Enfin, $\mathbf{V}_i = \dot{\mathbf{x}}_i$ et $\omega_i = \dot{\theta}_i$ désignent ses vitesses de translation et de rotation. $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_i}$ est le moment d'inertie autour de son centre de masse : $\mathbf{J}_{\mathbf{x}_i} = \int_{B_i} \rho_i |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2$. Nous utiliserons également les notations classiques suivantes :

$$\sigma = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \text{Id}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2} \quad \text{et} \quad \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy et $D\mathbf{u}/Dt$ est la dérivée totale de \mathbf{u} . Enfin, \mathbf{x}^\perp est le vecteur $(-x_2, x_1)$ et \mathbf{n} est la normale extérieure à $\Omega \setminus \bar{B}$.

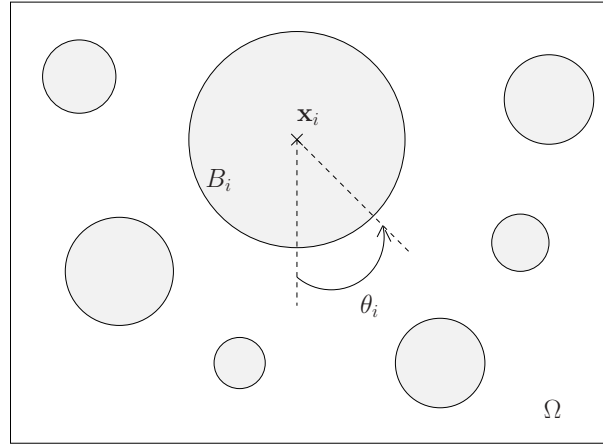


FIG. 1.1 – Notations

Les inconnues de notre problème sont les champs de vitesse $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et de pression p définis dans $\Omega \setminus \bar{B}$, ainsi que les vitesses des particules $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}$ et $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^N$. A chaque instant t , le fluide vérifie les équations de Navier-Stokes dans $\Omega \setminus \bar{B} = \Omega \setminus \bar{B}(t)$ avec des conditions de Dirichlet homogènes au bord.

$$\begin{cases} \rho_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}_{\Omega \setminus \bar{B}} & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

La viscosité impose une condition de non glissement sur ∂B . Cette condition dit que, sur ∂B , la vitesse du fluide doit être égale à la vitesse des particules.

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_i(t) + \boldsymbol{\omega}_i(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))^\perp \text{ sur } \partial B_i(t), \quad \forall i. \quad (1.2)$$

Le fluide exerce une force hydrodynamique sur les particules. Sur une partie infinitésimale ds de ∂B , cette force vaut $\sigma \mathbf{n} ds$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc sur les particules de la façon suivante,

$$\begin{cases} m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = \int_{B_i} \mathbf{f}_i - \int_{\partial B_i} \sigma \mathbf{n} & \forall i, \\ \mathbf{J}_{\mathbf{x}_i} \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \int_{B_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \cdot \mathbf{f}_i - \int_{\partial B_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \cdot \sigma \mathbf{n} & \forall i. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.1.2 Méthodes numériques existantes

On s'intéresse ici aux méthodes numériques de simulation directe d'écoulements fluide-particules. Par simulation directe, on entend méthode résolvant (1.1,1.2,1.3) sans modélisation ou approximation supplémentaire. Ces méthodes numériques se divisent en deux grandes classes. La première repose sur un maillage non structuré mobile suivant le domaine fluide, alors que la seconde utilise un maillage structuré de tout le domaine (fluide et rigide).

Méthodes utilisant des maillages non structurés

Dans ces méthodes, on résout le problème de Navier-Stokes sur un maillage du domaine fluide.

La première difficulté est d'imposer les bonnes conditions au bord, permettant d'obtenir le couplage fluide/solide imposé par l'équation (1.3). Une première façon de considérer le problème est de découpler le fluide et les particules. Pour cela, on écrit la formulation variationnelle sur les inconnues \mathbf{u} et p associée à (1.1) avec conditions de Dirichlet au bord. A chaque instant, cette formulation est résolue en imposant au bord du domaine rigide, les vitesses des particules calculées au pas précédent. Les forces hydrodynamiques s'exerçant sur les particules se déduisent alors des champs (\mathbf{u}, p) obtenus. Elles sont injectées dans (1.3), afin d'obtenir la nouvelle vitesse des particules. Cette méthode a été utilisée dans [49]. Dans [47], la même technique est employée, mais on itère le procédé afin de converger vers la solution du problème couplé. Une seconde possibilité pour imposer ce couplage, consiste à écrire une formulation variationnelle contenant toutes les inconnues du problème, soient \mathbf{u} , p , \mathbf{V} et $\boldsymbol{\omega}$ (voir [46] et [62]). Dans ce cas, l'interaction fluide/particules est directement prise en compte dans la formulation variationnelle.

Le second problème à gérer dans ce type de simulations, est le déplacement du domaine de calcul. En effet, les particules se déplaçant, le domaine fluide à considérer dépend du temps. Une première idée, utilisée par exemple dans [47], est de remailler le nouveau domaine fluide à chaque pas de temps. Ensuite, afin d'effectuer la nouvelle itération de Navier-Stokes, il faut pouvoir représenter sur ce nouveau maillage la solution du pas de temps précédent (qui a été calculée sur l'ancien maillage). On utilise pour cela une méthode de projection, ce qui introduit des erreurs supplémentaires dans le schéma. Pour limiter ces remaillages et projections, on peut choisir de déplacer, à chaque pas de temps, les points de l'ancien maillage afin d'obtenir un maillage du nouveau domaine. Cela peut être fait comme dans [49], en résolvant les équations de l'élasticité avec un déplacement imposé sur les particules. On peut également utiliser une méthode dite ALE (Arbitraire-Euler-Lagrange) comme dans [46] ou [62]. Elle consiste à calculer une vitesse de déplacement du maillage à chaque instant et à adapter la formulation variationnelle en conséquence. Les points situés au bord du domaine rigide ont la même vitesse que la particule à laquelle ils sont associés. La vitesse de déplacement des noeuds internes s'obtient en résolvant un problème de Poisson par exemple. Ceci garantit une variation douce de la distribution des points du maillage. En utilisant ces techniques, il n'est plus nécessaire de projeter la solution d'un pas de temps à l'autre. Cependant, les déformations successives du maillage provoquées par son déplacement peuvent le rendre inutilisable numériquement après plusieurs itérations. Dans ce cas, un remaillage, et donc une projection, peuvent s'imposer à nouveau. Ainsi, ces méthodes permettent de limiter le nombre de remaillages mais pas de les éviter totalement.

Méthodes de domaine fictif

Les méthodes de domaine fictif consistent à étendre un problème défini sur un domaine mobile et complexe (le domaine fluide) à un domaine plus grand mais fixe. L'avantage de ces méthodes est de chercher les champs \mathbf{u} et p sur un maillage indépendant du temps,

et d'éviter ainsi les étapes de remaillage et de projection. De plus, si le domaine fixe est suffisamment simple, il est possible d'obtenir des maillages cartésiens, ce qui permet l'utilisation de solveurs rapides.

Une méthode heuristique de ce type a été proposée dès 1987 dans [31]. Les particules sont représentées par une série de points entre lesquels s'exerce une force interne de cohésion (ressort de grande raideur pour des particules rigides par exemple). Cela permet d'avoir une formulation du problème de type fluide dans tout le domaine (y compris les particules) à condition d'ajouter ces forces internes aux forces extérieures déjà présentes. De manière générale, les méthodes de domaines fictifs peuvent être découpées en deux classes.

La première est basée sur un maillage cartésien du domaine global (fluide et particules) sur lequel se déplacent des maillages locaux (suivant les particules). Le mouvement rigide est imposé grâce à un multiplicateur de Lagrange vivant sur les maillages mobiles. Les multiplicateurs calculés à un instant ne sont plus nécessaires aux temps suivants et il n'y a donc pas besoin de les projeter après le déplacement des maillages locaux. Ce type de méthode a été initié dans le cas de fluide s'écoulant autour d'obstacles (voir [37, 38]) ou de particules ayant une vitesse imposée (voir [39]). Il a ensuite été généralisé au cas de particules libres dans un fluide. Tout d'abord, comme dans [36], dans le cadre de formulations variationnelles contenant l'intégralité des inconnues (\mathbf{u} , p , \mathbf{V} et $\boldsymbol{\omega}$), on écrit la contrainte sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{V}_i + \omega_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp$ sur B_i . Ou, comme dans [71], en écrivant une formulation variationnelle sur \mathbf{u} et p uniquement, on impose au tenseur des déformations $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)/2$ d'être nul sur B .

La seconde classe de méthode de domaines fictifs regroupe des techniques n'utilisant qu'un unique maillage global. Les méthodes de pénalisation en font partie. Elles sont utilisées par exemple dans [6, 50] pour prendre en compte des obstacles en pénalisant la vitesse. Ce type de méthode permettant de gérer des conditions de Dirichlet au bord des particules peut être utilisé pour la simulation d'écoulements fluide/particules dans le cas où la résolution de l'écoulement fluide est entièrement découplée du calcul des forces hydrodynamiques. Ainsi, dans [82], il est proposé, à chaque pas de temps, de résoudre les équations fluide en imposant dans le domaine rigide la vitesse calculée au temps précédent. On en déduit les forces hydrodynamiques exercées sur les particules au pas de temps courant ainsi que leurs nouvelles vitesses. Lors de la résolution fluide, les conditions de Dirichlet au bord sont obtenues grâce à une méthode dite de "frontière fictive". Elle consiste à travailler au niveau matriciel pour imposer la vitesse souhaitée aux noeuds du maillage contenus dans le domaine rigide. Cette contrainte peut également être imposée par pénalisation. Ces méthodes travaillant sur un unique maillage peuvent être couplées avec des techniques de raffinement ou déplacement de maillage afin de capturer correctement la géométrie des particules (voir par exemple [83] ou [50]).

Une méthode de type Lagrangien Augmenté, est quant à elle utilisée dans [73] pour effectuer des simulations d'écoulements fluide-particules. Elle permet de tirer avantage de la méthode de pénalisation sans avoir l'inconvénient (classique pour de telles méthodes) de dégrader le conditionnement des matrices considérées. Cependant, elle utilise des multiplicateurs de Lagrange vivant sur des maillages locaux.

Dans ce travail, nous proposons d'utiliser un unique maillage global et d'imposer la contrainte de mouvement rigide en pénalisant le tenseur des déformations. Ceci, associé à une discrétisation en temps par la méthode des caractéristiques, amène à une formulation

variationnelle de type Stokes généralisé sur le domaine global. Puisque la résolution fluide est couplée au calcul des forces hydrodynamiques, cette méthode peut être utilisée pour simuler des écoulements totalement non inertiels, ce qui est le cas par exemple des écoulements sanguins. Un autre avantage de la méthode de pénalisation présentée, en dehors du fait qu'elle utilise un maillage fixe, est de pouvoir être implémentée sur des solveurs Stokes ou Navier-Stokes classiques.

1.2 Algorithme proposé

1.2.1 Formulation variationnelle continue

Pour ne pas remailler le domaine à chaque pas de temps, on souhaite travailler sur des fonctions définies sur Ω tout entier. Pour cela, on étend la solution de (1.1,1.2,1.3) en posant,

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_i(t) + \omega_i(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))^\perp \text{ dans } B_i(t), \quad \forall i.$$

L'espace naturel dans lequel on cherche la solution est donc,

$$K_B = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \quad \forall i, \quad \exists(\mathbf{V}_i, \omega_i) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ \mathbf{v} = \mathbf{V}_i + \omega_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \text{ p.p. dans } B_i \end{array} \right\}.$$

Remarque 1.1 Comme le sous-domaine B dépend du temps, K_B aussi.

Une propriété fondamentale pour la suite est la suivante :

Propriété 1.2 $K_B = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0 \text{ p.p. dans } B\}$.

Démonstration : Il s'agit d'un résultat classique dont on trouve la démonstration dans [80] par exemple. Nous l'écrivons ici pour la dimension deux. Le fait qu'un élément de K_B vérifie $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$ dans B résulte d'un simple calcul. Pour l'inclusion inverse, si $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$ dans B , on écrit que

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \bar{\omega},$$

$$\text{où } \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \omega = \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2).$$

Alors, pour $j = 1, 2$ on a $\partial_j \omega = \partial_2 \mathbf{D}(\mathbf{v})_{1j} - \partial_1 \mathbf{D}(\mathbf{v})_{2j} = 0$, au sens des distributions. Ainsi, ω est constant presque partout sur les B_i , composantes connexes de B :

$$\forall i, \quad \exists \omega_i \in \mathbb{R}, \quad \omega = \omega_i \text{ p.p. dans } B_i.$$

Or, $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$ implique $\nabla \mathbf{v} = \bar{\omega}$ et, en intégrant, on obtient,

$$\forall i, \quad \exists \omega_i \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}_i + \omega_i \mathbf{x}^\perp \text{ p.p. dans } B_i,$$

et on a ainsi montré que \mathbf{v} est à mouvement rigide sur B . \square

Notons que l'on a aussi,

$$\mathbf{u} \in K_B \implies \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } B. \quad (1.4)$$

Ainsi, l'extension de \mathbf{u} construite est à divergence nulle sur Ω tout entier.

On cherche maintenant une formulation variationnelle dans cet espace fonctionnel contraint K_B . On prend une fonction test $\tilde{\mathbf{u}} \in K_B$, on multiplie l'équation de Navier-Stokes par $\tilde{\mathbf{u}}$ et on intègre classiquement par parties sur $\Omega \setminus \bar{B}$. On obtient

$$\int_{\Omega \setminus \bar{B}} \rho_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{f}_{\Omega \setminus \bar{B}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (1.5)$$

où les deuxième et troisième intégrales sont des intégrales sur $\Omega \setminus \bar{B}$ qui ont été étendues sur Ω grâce à la propriété 1.2 et à (1.4). De plus, l'intégrale de bord, a priori sur $\partial(\Omega \setminus \bar{B})$, a été restreinte à ∂B puisque $\tilde{\mathbf{u}}$ est nulle sur $\partial\Omega$.

Afin de calculer le terme de bord, on se rappelle que $\tilde{\mathbf{u}} \in K_B$ et, par conséquent,

$$\forall i, \exists \tilde{\mathbf{V}}_i, \tilde{\omega}_i \text{ tels que } \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{V}}_i + \tilde{\omega}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp \text{ dans } B_i.$$

Ainsi, pour tout i ,

$$\int_{\partial B_i} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{V}}_i \cdot \int_{\partial B_i} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} + \tilde{\omega}_i \int_{\partial B_i} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp,$$

et les équations associées au principe fondamental de la dynamique (1.3) donnent alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_i} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{V}}_i \cdot \int_{B_i} \mathbf{f}_i + \tilde{\omega}_i \int_{B_i} \mathbf{f}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp - J_{\mathbf{x}_i} \frac{d\omega_i}{dt} \tilde{\omega}_i - m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_i \\ &= \int_{B_i} \mathbf{f}_i \cdot \tilde{\mathbf{u}} - J_{\mathbf{x}_i} \frac{d\omega_i}{dt} \tilde{\omega}_i - m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_i. \end{aligned}$$

Or, on montre que

Lemme 1.3 Si $\mathbf{u} = \mathbf{V}_i + \omega_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp$ et $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{V}}_i + \tilde{\omega}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp$ sur B_i , alors

$$J_{\mathbf{x}_i} \frac{d\omega_i}{dt} \tilde{\omega}_i + m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_i = \rho_i \int_{B_i} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}.$$

Démonstration : Par définition,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Comme dans B_i , $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{V}_i(t) + \omega_i(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))^\perp$, on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega_i}{\partial t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))^\perp - \omega_i \mathbf{V}_i^\perp,$$

et

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} \cdot \nabla u_1 \\ \mathbf{u} \cdot \nabla u_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\omega_i V_{i,2} - \omega_i^2 (x_1 - x_{i,1}) \\ \omega_i V_{i,1} + \omega_i^2 (-x_2 + x_{i,2}) \end{pmatrix} \\
 &= \omega_i \mathbf{V}_i^\perp - \omega_i^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, dans B_i ,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(t, \mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{V}_i}{dt}(t) + \frac{d\omega_i}{dt}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))^\perp - \omega_i^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)).$$

En multipliant par $\tilde{\mathbf{u}}$ on a,

$$\begin{aligned}
 \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(t, \mathbf{x}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(t, \mathbf{x}) \cdot [\tilde{\mathbf{V}}_i + \tilde{\omega}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp] \\
 &= \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_i + \frac{d\omega_i}{dt} \tilde{\mathbf{V}}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp - \omega_i^2 \tilde{\mathbf{V}}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\
 &\quad + \tilde{\omega}_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^\perp + \tilde{\omega}_i \frac{d\omega_i}{dt} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2.
 \end{aligned}$$

En intégrant sur B_i et en utilisant la symétrie de B_i , on obtient finalement

$$\begin{aligned}
 \rho_i \int_{B_i} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_i \int_{B_i} \rho_i + \tilde{\omega}_i \frac{d\omega_i}{dt} \int_{B_i} \rho_i |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2 \\
 &= \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_i m_i + \tilde{\omega}_i \frac{d\omega_i}{dt} J_{\mathbf{x}_i}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Remarque 1.4 *Ce résultat reste valide si les particules sont non circulaires.*

Le terme de bord de (1.5) peut donc se réécrire,

$$\int_{\partial B_i} \sigma \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \int_{B_i} \mathbf{f}_i \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \rho_i \int_{B_i} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \tilde{\mathbf{u}}.$$

On obtient la formulation variationnelle suivante,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, & \forall \tilde{\mathbf{u}} \in K_B, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \forall q \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (1.6)$$

où $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \mathbf{1}_{B_i}$ et $\rho = \rho_f \mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}} + \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{1}_{B_i}$.

Comme souhaité initialement, cette formulation variationnelle est posée sur des espaces de fonctions définies sur Ω tout entier. La contrainte de mouvement rigide apparaît alors dans l'espace associé à la vitesse. Dans [25], une telle formulation variationnelle faisant intervenir la contrainte dans l'espace de fonctions (formulation en espace-temps dans ce cas) est utilisée pour montrer l'existence de solutions faibles au problème (1.1,1.2,1.3).

1.2.2 Discrétisation en temps

On note $\Delta t > 0$ le pas de temps, $t_n = n\Delta t$ et, pour toute fonction f , $f^n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, t_n)$. Afin d'obtenir une formulation variationnelle de type Stokes généralisé, (1.6) est discrétisée en temps en utilisant la méthode des caractéristiques. Si $\mathbf{v} : (t, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ est un champ de vecteur, il s'agit d'une méthode permettant de discrétiser la dérivée totale $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ de façon Lagrangienne.

Plus précisément, on appelle caractéristique associée au champ de vitesses \mathbf{v} , la trajectoire \mathbf{X} suivie par une particule fluide dans un écoulement à cette vitesse. Pour une particule située en \mathbf{x} au temps t , cette trajectoire est solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\tau}(\mathbf{x}, t, \tau) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \tau), \tau), \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, t) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (1.7)$$

On dit que $\tau \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \tau)$ est la caractéristique issue de \mathbf{x} au temps t associée au champ de vitesse \mathbf{v} . On a alors, pour toute fonction $\Phi(t, \mathbf{x})$,

$$\frac{D\Phi}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi \right) (\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial\tau} (\Phi(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \tau), \tau)) |_{\tau=t}.$$

Cette égalité suggère la discrétisation suivante de la dérivée totale :

$$\left(\frac{D\Phi}{Dt} \right) (\mathbf{x}, t^{n+1}) \approx \frac{\Phi^{n+1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}, t_{n+1})) - \Phi^n(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}, t_n))}{\Delta t}.$$

En utilisant le fait que $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}, t_{n+1}) = \mathbf{x}$, on approche la dérivée totale de Φ par

$$\left(\frac{D\Phi}{Dt} \right) (\mathbf{x}, t^{n+1}) \approx \frac{\Phi^{n+1}(\mathbf{x}) - \Phi^n(\mathbf{X}^n(\mathbf{x}))}{\Delta t},$$

où $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ est une approximation de $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}, t_n)$, position au temps n de la particule située en \mathbf{x} au temps $n+1$ (on dit que l'on "remonte" les caractéristiques). On trouvera plus de détails sur cette méthode de discrétisation dans [72].

Afin d'appliquer cette méthode à la discrétisation de (1.6), on note d'abord que, puisque ρ est constant le long des caractéristiques on a (formellement), $\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D(\rho\mathbf{u})}{Dt}$. On obtient finalement le schéma numérique suivant, pour tout $n > 0$,

(i) calculer ρ^{n+1} grâce à \mathbf{u}^n et $(B_i^n)_i$:

$$\begin{aligned} \forall i, \quad \mathbf{V}_i^n &= \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_i^n} \mathbf{u}^n, \quad \mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{V}_i^n, \\ \rho^{n+1} &= \rho_f \mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}^{n+1}} + \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{1}_{B_i^{n+1}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

(ii) résoudre la formulation variationnelle discrétisée associée à (1.6) :

$$(\mathcal{P}_{var}^n) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in K_{B^{n+1}} \text{ et } \mathbf{p}^{n+1} \in L^2(\Omega) \text{ tels que,} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ \mathbf{X}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in K_{B^{n+1}}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{q} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (1.9)$$

où \mathbf{X}^n à l'étape (ii) est obtenue en calculant les caractéristiques associées à \mathbf{u}^n . Noter que, afin de ne pas déformer le domaine rigide dans l'étape (i), on transporte ρ en utilisant les degrés de liberté réels des particules.

Nous avons ainsi obtenu une formulation variationnelle de type Stokes généralisé. La différence fondamentale avec les formulations variationnelles classiques est que l'espace fonctionnel associé contient la contrainte de mouvement rigide. Les éléments finis usuels ne permettent donc pas d'effectuer directement la discrétisation en espace de $(\mathcal{P}_{var}^n, 1.9)$.

1.2.3 Gestion du mouvement rigide par pénalisation

L'objectif est donc maintenant d'obtenir une formulation variationnelle adaptée à la discrétisation par éléments finis. Pour cela, on cherche une formulation pour laquelle l'inconnue ainsi que les fonctions tests sont dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui revient à enlever la contrainte de mouvement rigide de $K_{B^{n+1}}$. Pour ce faire, on va utiliser une méthode dite de pénalisation. Cette méthode permet d'approcher la solution d'un problème de minimisation sous contrainte par une suite de solutions de problèmes de minimisation non contraints. Réécrivons donc $(\mathcal{P}_{var}^n, 1.9)$ sous forme d'un problème de minimisation. On note l'espace des fonctions à divergence nulle K_{∇} ,

$$K_{\nabla} = \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \},$$

et on réécrit le problème sous la forme

$$(\mathcal{P}_{min}^n) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{n+1} \in K_{\nabla} \cap K_{B^{n+1}}, \\ \mathbf{J}^n(\mathbf{u}^{n+1}) = \min_{\mathbf{v} \in K_{\nabla} \cap K_{B^{n+1}}} \mathbf{J}^n(\mathbf{v}), \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où

$$\mathbf{J}^n(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\Delta t} \int_{\Omega} \rho^{n+1} |\mathbf{v}|^2 + \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ \mathbf{X}^n \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{v}.$$

Puis, en se rappelant que la contrainte $\mathbf{v} \in K_{B^{n+1}}$ s'écrit $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$ dans B^{n+1} , on approche les solutions de $(\mathcal{P}_{min}^n, 1.10)$ par celles du problème de minimisation non contraint suivant,

$$(\mathcal{P}_{min}^{n,\varepsilon}) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{\varepsilon}^{n+1} \in K_{\nabla}, \\ \mathbf{J}_{\varepsilon}^n(\mathbf{u}_{\varepsilon}^{n+1}) = \min_{\mathbf{v} \in K_{\nabla}} \mathbf{J}_{\varepsilon}^n(\mathbf{v}), \end{array} \right. \quad (1.11)$$

où

$$J_\varepsilon^n(\mathbf{v}) = J^n(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{B^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}).$$

On dit que l'on pénalise la contrainte $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$ sur B^{n+1} . L'idée est la suivante : quand ε est petit, pour que $\mathbf{u}_\varepsilon^{n+1}$ minimise J_ε^n , il faut que $\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon^{n+1})$ soit petit sur B^{n+1} . La contrainte $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$ a ainsi été relaxée. On n'a plus $\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon^{n+1}) = 0$ sur B^{n+1} mais $\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon^{n+1})$ "petit" et, à la limite ($\varepsilon = 0$), on retrouve la condition de mouvement rigide. On détaillera les hypothèses nécessaires à la convergence de la méthode de pénalisation dans la section 1.4 et on montrera que ces hypothèses sont vérifiées dans le cas de la pénalisation d'un mouvement rigide.

Dans l'algorithme (1.8,1.9), on remplace donc $(\mathcal{P}_{var}^n, 1.9)$ par la formulation variationnelle associée à $(\mathcal{P}_{min}^{n,\varepsilon}, 1.11)$ et on obtient un nouveau schéma numérique :

Pour tout $n \geq 0$, on dispose de \mathbf{x}^n et de \mathbf{u}^n .

1. Calculer ρ^{n+1} grâce à \mathbf{u}^n et $(B_i^n)_i$:

$$\begin{aligned} \forall i, \quad \mathbf{V}_i^n &= \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_i^n} \mathbf{u}^n, \quad \mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{V}_i^n, \\ \rho^{n+1} &= \rho_f \mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}^{n+1}} + \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{1}_{B_i^{n+1}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

2. Résoudre la formulation variationnelle

$$\left(\mathcal{P}_{var}^{n,\varepsilon} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in H_0^1(\Omega) \text{ et } p^{n+1} \in L^2(\Omega) \text{ tels que,} \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \\ + \frac{2}{\varepsilon} \int_{B^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ \mathbf{X}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \mathbf{q} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{1.13}$$

Algorithme 1.1: Schéma numérique obtenu après discrétisation en temps par la méthode des caractéristiques et pénalisation de la contrainte de mouvement rigide

$(\mathcal{P}_{var}^{n,\varepsilon}, 1.13)$ est maintenant une formulation variationnelle classique de type Stokes généralisé qui est adaptée à la discrétisation par éléments finis. Ce nouvel algorithme est implémentable avec tout solveur élément fini de Stokes, à condition que ce solveur permette de prendre en compte dans l'assemblage des matrices des fonctions indicatrices de sous-domaines (nécessaire pour calculer la matrice associée à l'intégrale sur B^{n+1} ainsi que le second membre faisant intervenir ρ et \mathbf{f}). Ce solveur doit également permettre le calcul des caractéristiques associées à un champ de vecteur (nécessaire pour calculer \mathbf{X}^n).

Remarque 1.5 *Physiquement, (1.13) montre que la méthode de pénalisation utilisée considère le domaine rigide comme un domaine de grande viscosité. A la limite ($\varepsilon = 0$), le domaine rigide est vu comme un domaine de viscosité infinie. Cette idée est similaire à celle utilisée dans [73] où le mouvement rigide est pris en compte par une méthode de type Lagrangien Augmenté.*

1.3 Tests numériques

1.3.1 Implémentation sous FreeFem++

On choisit d'implémenter l'algorithme 1.1 avec le solveur éléments finis `FreeFem++` (voir [43]). On effectue la discrétisation en espace grâce à l'élément P^1 -bulle/ P^1 , encore appelé *mini-element* (voir [8]).

Afin de calculer le terme $(\rho^n \mathbf{u}^n) \circ \mathbf{X}^n$, on utilise la fonction `convect` de `FreeFem++`. Si $\boldsymbol{\alpha}$ est un champ de vitesses éléments finis, la valeur approchée au temps n de la caractéristique passant par \mathbf{x} au temps $n+1$ calculée par `FreeFem++` est $\mathbf{X}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Delta t \boldsymbol{\alpha}^n(\mathbf{x})$ (\mathbf{X}^n remonte les caractéristiques au temps n d'un temps Δt). La fonction `convect` est quant à elle définie par `convect`($\boldsymbol{\alpha}^n, -\Delta t, \mathbf{v}^n$)(x) = $\mathbf{v}^n \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ où \mathbf{v} est une fonction éléments finis à valeurs vectorielles. Ainsi, dans notre cas, on peut programmer,

$$(\rho^n \mathbf{u}^n) \circ \mathbf{X}^n = \text{convect}(\mathbf{u}^n, -\Delta t, \rho^n \mathbf{u}^n).$$

Comme le terme de pénalisation du mouvement rigide dégrade le conditionnement des matrices, il est préférable d'utiliser une méthode de résolution de systèmes directe plutôt qu'itérative. On souhaite donc obtenir un système inversible. Pour cela, on utilise une méthode dite de "régularisation" ou de "pénalisation" décrite par exemple dans [35] qui consiste à modifier l'équation sur la divergence de $(\mathcal{P}_{var}^{n,\varepsilon}, 1.13)$ en

$$-\varepsilon_0 \int_{\Omega} p q + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega),$$

avec $\varepsilon_0 \ll 1$.

Remarque 1.6 *Cette dernière équation consiste à écrire que $p = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}$ de façon faible. En remplaçant ensuite p par cette valeur, dans la formulation variationnelle sur \mathbf{u} , on voit que cette méthode, comme son nom le laissait suggérer, consiste précisément à pénaliser (au sens déjà vu dans la section 1.2.3) la divergence sur Ω . Au lieu de résoudre $(\mathcal{P}_{min}^{n,\varepsilon}, 1.11)$, on résout un problème de minimisation sans contrainte (sur $H_0^1(\Omega)$) en ajoutant à la fonctionnelle le terme $\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} |\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}|^2$.*

Le système linéaire sera résolu par le solveur *Crout* (une méthode de décomposition LU). Finalement, la formulation variationnelle codée dans *FreeFem++* est :

```

problem NStokes([u1,u2,p],[v1,v2,q],solver=Crout)=
  //Formulation de Navier-Stokes
  int2d(Th)(rho*u1*v1-convect([uold1,uold2],-dt,rhoold*uold1)*v1
    +rho*u2*v2-convect([uold1,uold2],-dt,rhoold*uold2)*v2)
  +int2d(Th)(mu*dt*(2*dx(u1)*dx(v1)+dy(u1)*dy(v1)+dx(u2)*dx(v2)
    +2*dy(u2)*dy(v2)+dy(u1)*dx(v2)+dx(u2)*dy(v1)))
  +int2d(Th)(eps0*p*q - dt*p*dx(v1) - dt*p*dy(v2)
    + q*dx(u1) + q*dy(u2))
  -int2d(Th)(dt*f1*v1 + dt*f2*v2)
  //terme de Penalisation du mouvement rigide
  +int2d(Th)(mu*(2*dx(u1)*dx(v1)+dy(u1)*dy(v1)+dx(u2)*dx(v2)
    +2*dy(u2)*dy(v2)+dy(u1)*dx(v2)+dx(u2)*dy(v1))*chi/eps)
  //Conditions au bord
  +on(1,2,3,4,u1=g1,u2=g2) ;

```

où Th est le maillage de Ω , (u_1, u_2, p) sont les inconnues, (v_1, v_2, q) sont les fonctions test associées, (u_{old1}, u_{old2}) est le champs de vitesse calculé au pas de temps précédent, ρ et ρ_{old} sont respectivement les densités calculées aux pas de temps courant et précédent, χ est la fonction P^0 approchant l'indicatrice de B , (f_1, f_2) est le terme source et (g_1, g_2) la condition au bord.

Ce qui précède nous permet d'implémenter l'étape 2 de l'algorithme 1.1. Bien que l'étape 1 de cet algorithme ne semble pas poser de problème a priori, il faut tout de même faire attention à la manière de calculer les \mathbf{V}_i^n . En effet, suite à la discrétisation en espace, B_i^n n'est plus un disque mais une polygone $B_{i,h}^n$ approchant ce disque et donc, son aire n'est plus πr_i^2 . Ainsi, si par exemple \mathbf{u}^n est une translation sur $B_{i,h}^n$, $\mathbf{u}^n = \mathbf{V}_i^n$ sur $B_{i,h}^n$, on a

$$\frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_{i,h}^n} \mathbf{u}^n = \frac{\text{Vol}(B_{i,h}^n)}{\pi r_i^2} \mathbf{V}_i^n \neq \mathbf{V}_i^n.$$

On prendra donc garde à remplacer, dans (1.8), le calcul de \mathbf{V}_i^n par,

$$\mathbf{V}_i^n = \frac{1}{\text{Vol}(B_{i,h}^n)} \int_{B_{i,h}^n} \mathbf{u}^n.$$

1.3.2 Particule en cisaillement, problème stationnaire

Afin de valider la prise en compte du mouvement rigide par la méthode de pénalisation, on considère le problème instantané d'une particule plongée dans un fluide de Stokes. Le domaine de calcul est un carré de côté 1cm et une particule de rayon 0.1cm est située en son centre. Les parois à droite et à gauche du domaine imposent un mouvement de cisaillement au système (voir Fig. 1.2), la viscosité du fluide est égale à 1 et il n'y a pas de force extérieure.

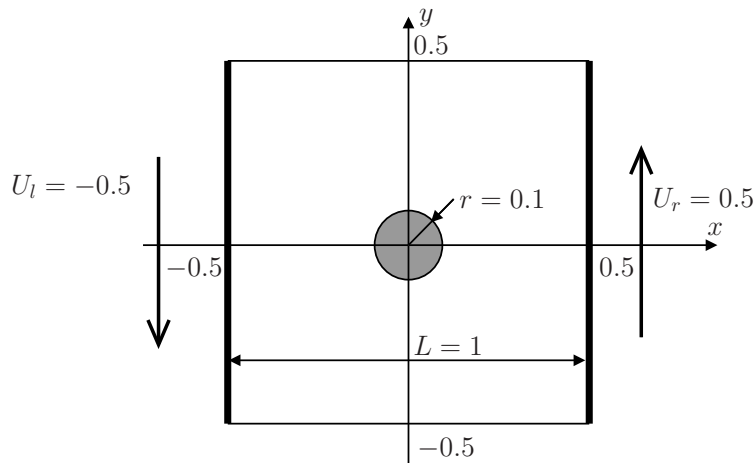
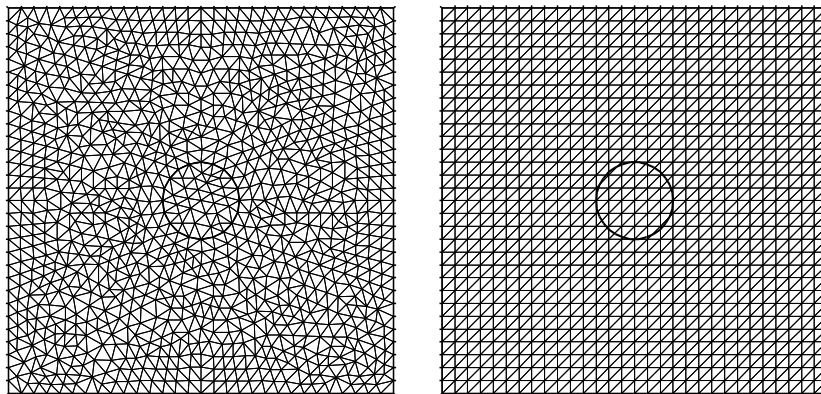


FIG. 1.2 – Particule en cisaillement : description du problème.

On effectue les simulations pour deux types de maillages, des maillages adaptés à la particule et des maillages cartésiens (voir Fig. 1.3). On note N_m le nombre d'éléments du maillage par unité de longueur sur le bord de Ω . Rappelons que, lors de simulations de particules en mouvement, on souhaite utiliser des maillages cartésiens afin de ne pas avoir à remailler à chaque pas de temps.


 FIG. 1.3 – Particule en cisaillement : maillage adapté (à gauche) et cartésien (à droite) pour $N_m = 30$.

Afin d'étudier la prise en compte de la contrainte par la méthode de pénalisation, on trace la norme $L^2(B)$ de $\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ en fonction de ε pour différents maillages (voir Fig. 1.4). On observe que cette norme décroît très vite avec ε : elle est d'ordre 10^{-5} quand ε est d'ordre 10^{-2} , ce qui suggère que l'on pourra choisir des ε pas trop petits afin de ne pas trop dégrader le conditionnement du système. On remarque également que la contrainte de mouvement rigide est bien prise en compte même pour des valeurs de N_m relativement petites et que les maillages cartésiens donnent de bons résultats même si les maillages

adaptés sont légèrement meilleurs.

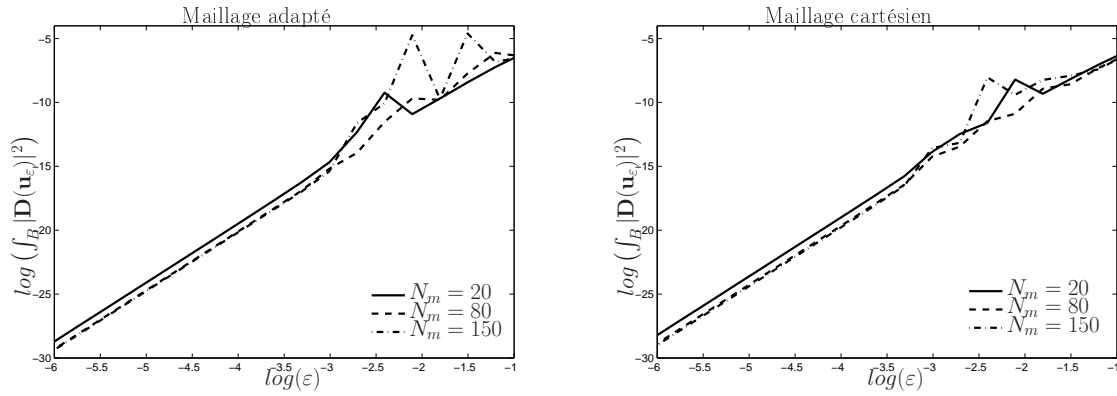


FIG. 1.4 – Particule en cisaillement : Mouvement rigide dans B , influence de N_m et de ε .

Notons finalement que, dans nos tests, on retrouve la valeur théorique de la vitesse angulaire qui converge vers $\frac{\dot{\gamma}}{2} = \frac{U_r - U_l}{2L} = 0.5$ quand le rayon de la particule tend vers zéro. Les lignes de courant de ce mouvement de rotation sont représentées Fig. 1.5 pour $N_m = 150$ et $\varepsilon = 10^{-8}$.

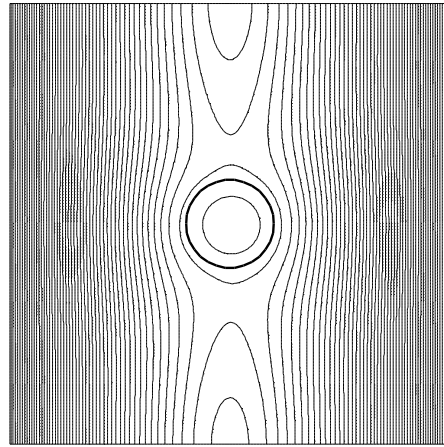


FIG. 1.5 – Particule en cisaillement : Lignes de courant pour un maillage cartésien pour $N_m = 150$ et $\varepsilon = 10^{-8}$.

1.3.3 Sédimentation d'une particule, problème stationnaire : tests de convergence

On cherche maintenant à étudier numériquement la convergence de la méthode de pénalisation quand $h = 1/N_m$ et ε tendent vers zéro. Pour ce faire, on étudie le problème

instantané de la sédimentation d'une particule dans un fluide de Stokes. Pour ce problème, on peut calculer numériquement une solution de référence très précise et on compare cette solution à celle obtenue par la méthode de pénalisation. Comme précédemment (voir Fig. 1.6), le domaine de calcul est le carré de 1cm de côté, la particule de rayon 0.1cm, est située en son centre et la viscosité est égale à 1. On impose des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord de la boîte. La force s'exerçant sur la particule est $\mathbf{f}_B = (0, -500)$.

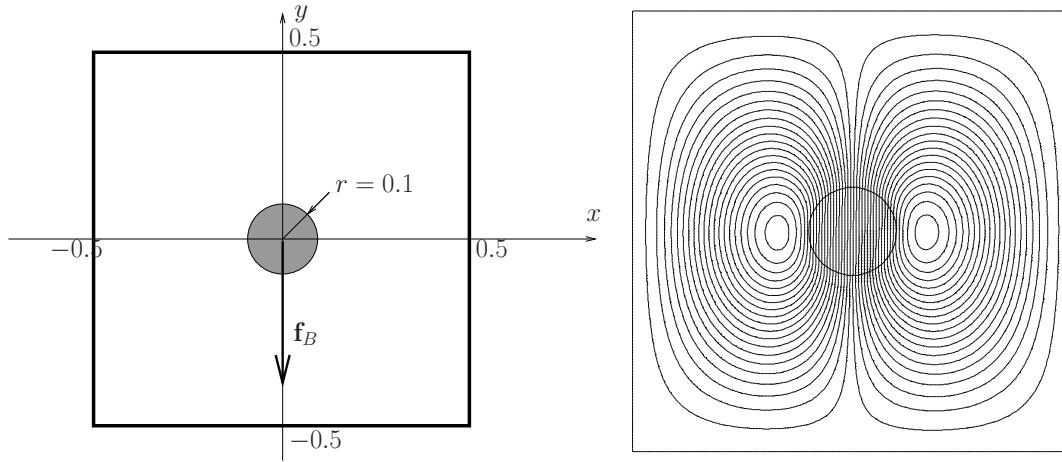


FIG. 1.6 – Sédimentation d'une particule : description du problème (à gauche) et lignes de courant pour un maillage cartésien avec $N_m = 150$ et $\varepsilon = 10^{-8}$ (à droite).

Afin d'étudier la convergence de la méthode, il faut calculer une solution de référence pour ce problème (notée \mathbf{u}). Notons d'abord (\mathbf{u}_1, p_1) la solution du problème de Stokes avec vitesse imposée sur ∂B ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{u}_1 + \nabla p_1 = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \mathbf{u}_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_1 = -1 & \text{sur } \partial B. \end{array} \right.$$

Par raison de symétrie, on sait que la solution cherchée est de la forme $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_1$ et $p = \alpha p_1$. On peut déterminer α en écrivant l'équilibre des forces sur la particule,

$$\int_{\partial B} \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \int_B \mathbf{f}_B$$

et, par conséquent, α est donné par

$$\alpha = \frac{\int_B \mathbf{f}_B}{\int_{\partial B} \sigma(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}}.$$

Une intégration par parties donne finalement,

$$\alpha = \frac{\int_B \mathbf{f}_B}{\int_{\Omega \setminus \bar{B}} p_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 - 2\mu \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{D}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{D}(\mathbf{u}_1)}.$$

La fonction \mathbf{u} ainsi obtenue peut être étendue sur Ω en posant $\mathbf{u} = -\alpha$ dans B . On note \mathbf{u}_{ref} la solution calculée en implémentant cette méthode sous **FreeFem++** sur un maillage fin ($h = 1/150$) adapté à la particule. On s'intéresse à l'évolution des trois quantités suivantes quand ε et h tendent vers zéro :

$$e_K = \|\mathbf{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon,h})\|_{L^2(B)},$$

$$e_{L^2} = \|\mathbf{u}_{\varepsilon,h} - \mathbf{u}_{ref}\|_{L^2(\Omega)},$$

$$e_{H^1} = \|\mathbf{u}_{\varepsilon,h} - \mathbf{u}_{ref}\|_{H^1(\Omega)},$$

où $\mathbf{u}_{\varepsilon,h}$ est la solution du problème de sédimentation pénalisé, calculée avec **FreeFem++** (méthode décrite dans la section 1.3.1), pour le paramètre de pénalisation ε et un pas d'espace égal à h .

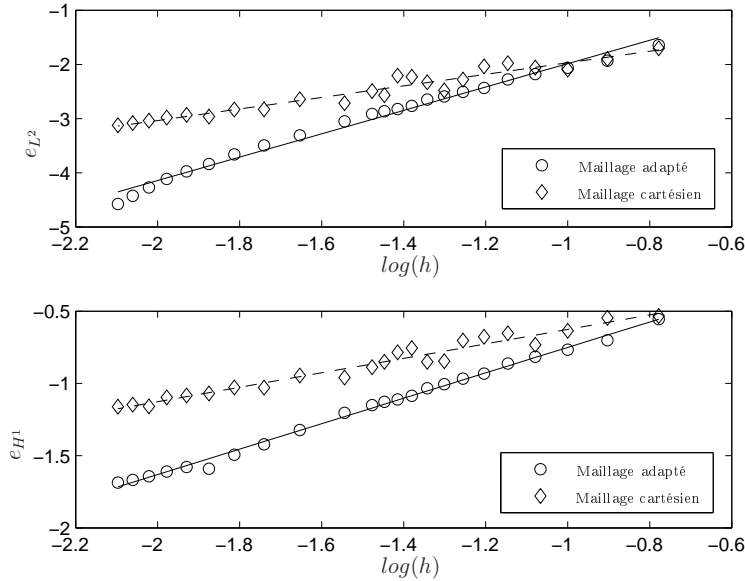


FIG. 1.7 – Sédimentation d'une particule : convergence en h de la méthode de pénalisation.

Les deux courbes de la figure 1.7 permettent d'observer la convergence de la méthode en fonction de h . Dans ces calculs, ε a été fixé à la valeur 10^{-8} . On trace $\log(e_{L^2})$ et $\log(e_{H^1})$ en fonction de $\log(h)$ et on obtient les taux de convergence suivants :

| | Maillage adapté | Maillage Cartésien |
|-----------|-----------------|--------------------|
| e_{L^2} | 2.1577 | 0.8798 |
| e_{H^1} | 1.0658 | 0.5007 |

TAB. 1.1 – Taux de convergence pour h tendant vers zéro

Dans le cas de maillages adaptés à la particule, les taux de convergences observés sont ceux donnés par la théorie classique des éléments finis pour l'élément P^1 -bulle/ P^1 . Bien que ce taux de convergence soit divisé par deux dans le cas de maillages cartésiens, il faut rappeler que la possibilité d'utiliser de tels maillages est un des principaux avantages de la méthode. En effet, cela permet de ne pas avoir à remailler à chaque instant, dans le cas de problèmes non stationnaires.

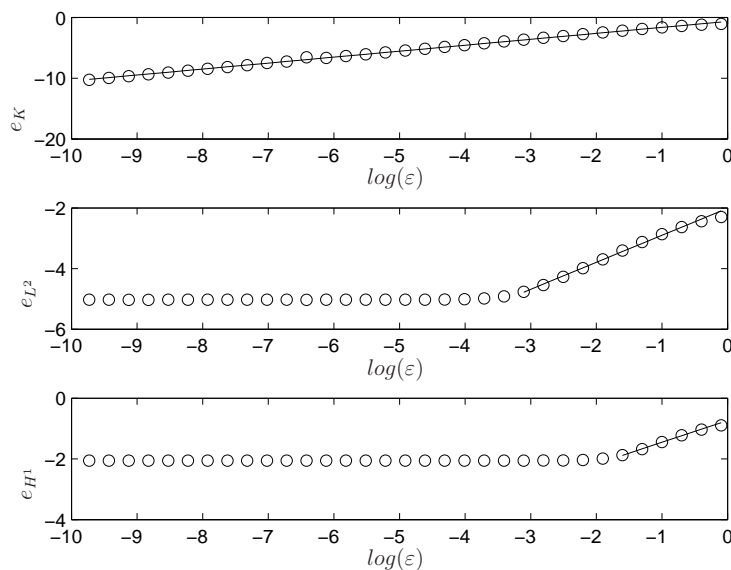


FIG. 1.8 – Sédimentation d'une particule : convergence en ε de la méthode de pénalisation.

Les courbes de la figure 1.8 présentent la convergence de la méthode en fonction de ε . La solution \mathbf{u}_h^ε est calculée sur un maillage adapté à la particule et h est fixé à la valeur $1/150$. On trace (de haut en bas) $\log(e_K)$, $\log(e_{L^2})$ et $\log(e_{H^1})$ en fonction de $\log(\varepsilon)$. Comme on pouvait s'y attendre, on observe une saturation quand ε est très petit : elle est due à l'erreur causée par la discrétisation en espace. Les taux de convergence suivants sont observés :

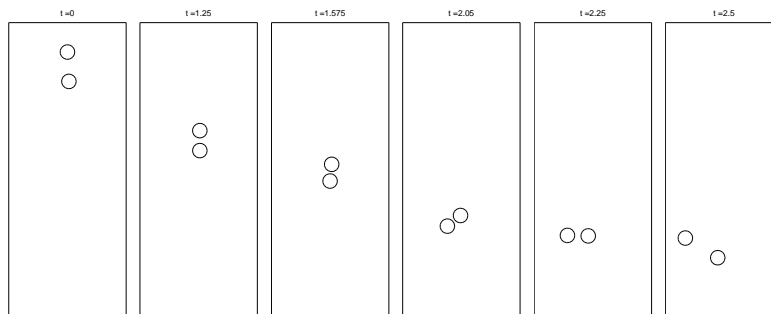
| | Maillage adapté |
|-----------|-----------------|
| e_K | 0.9806 |
| e_{L^2} | 0.8909 |
| e_{H^1} | 0.7177 |

TAB. 1.2 – Taux de convergence pour ε tendant vers zéro

La convergence en ε est très rapide et le phénomène de saturation montre qu’il est inutile de choisir des ε trop petits puisque l’erreur en espace devient rapidement prédominante, même pour des maillages fins (on a ici $N_m = 150$, soit 150 points de maillage sur chaque côté du carré) . On pourra donc choisir des ε pas trop petits afin de ne pas trop détériorer le conditionnement des matrices utilisées. Il faut noter cependant que le taux de convergence de l’erreur e_{H^1} observé avant cet effet de saturation est quelque peu surprenant. On aurait pensé, pour un maillage fin, retrouver le taux de convergence du problème continu qui est de 1 (voir section 1.4). Cela peut être dû au fait que l’erreur de discrétisation en espace se “voit” même pour des ε assez grands. Cependant, comme on ne peut pas faire de tests sur des maillages plus fins, cette hypothèse ne peut être vérifiée.

1.3.4 Sédimentation de deux particules

Afin de montrer que le schéma reproduit bien le comportement de systèmes physiques non stationnaires, on présente ici une simulation de sédimentation de deux particules dans un canal. On considère un canal de largeur 2cm et de hauteur 5cm : $\Omega = [0, 2] \times [0, 5]$. Il contient un fluide de Navier-Stokes et on commence la simulation en laissant tomber deux particules de diamètre $d = 0.25$ cm à partir des points $(1, 4.5)$ et $(1 + 0.2r, 4)$ où r est le rayon des particules. La viscosité du fluide est égale à 0.01, sa densité et celle des particules sont respectivement $\rho_f = 1$ et $\rho_B = 2$. Les configurations obtenues à différents pas de temps sont présentées sur la figure 1.9. Elles reproduisent le phénomène bien connu de “drafting, kissing and tumbling” observé dans [32].

FIG. 1.9 – Sédimentation de deux particules : configurations à différents pas de temps pour $N_m = 50$ et $dt = 0.005$.

1.4 Un peu de théorie : Inégalité de Korn et conséquences

L'objectif de cette section est de montrer :

- l'équivalence de $(\mathcal{P}_{var}^n, 1.9)$ et de $(\mathcal{P}_{min}^n, 1.10)$
- la convergence des solutions de $(\mathcal{P}_{min}^{n,\varepsilon}, 1.11)$ vers celle de $(\mathcal{P}_{min}^n, 1.10)$ quand ε tend vers zéro.

L'équivalence de $(\mathcal{P}_{var}^{n,\varepsilon}, 1.13)$ et de $(\mathcal{P}_{min}^{n,\varepsilon}, 1.11)$ s'inscrit dans la théorie classique de gestion de la contrainte de divergence nulle pour les équations de Stokes.

1.4.1 Simplifications et notations

Les problèmes considérés étant des problèmes de type Stokes généralisé, il suffit de traiter le cas où le fluide vérifie les équations de Stokes et où les particules sont sans inertie. Le cas général est une extension évidente des résultats obtenus dans ce cas particulier. Toujours pour des raisons de clarté, nous traitons le cas où il n'y a qu'une inclusion rigide sphérique notée B , de centre \mathbf{x}_0 et de vitesses (\mathbf{V}, ω) . On note \mathbf{f}_B , la force extérieure exercée sur la particule. Le cas multi-particules s'en déduit facilement. Les équations que l'on considère sont donc,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}_{\Omega \setminus \bar{B}} & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{V} + \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\perp & \text{sur } \partial B, \\ 0 = \int_B \mathbf{f}_B - \int_{\partial B} \sigma \mathbf{n}, & \\ 0 = \int_B (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\perp \cdot \mathbf{f}_B - \int_{\partial B} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\perp \cdot \sigma \mathbf{n}. & \end{array} \right.$$

Les problèmes à étudier sont les suivants,

- Le problème variationnel :

$$(\mathcal{P}_{var}) \left\{ \begin{array}{l} 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in K_B, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (1.14)$$

- Le problème de minimisation associé :

$$(\mathcal{P}_{min}) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in K_{\nabla} \cap K_B, \quad J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in K_{\nabla} \cap K_B} J(\mathbf{v}), \\ \text{où } J(\mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

– Le problème pénalisé :

$$(\mathcal{P}_{min}^\varepsilon) \begin{cases} \mathbf{u} \in K_\nabla, & J^\varepsilon(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in K_\nabla} J^\varepsilon(\mathbf{v}), \\ \text{où } J^\varepsilon(\mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_B \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}). \end{cases} \quad (1.16)$$

On veut montrer l'équivalence de $(\mathcal{P}_{var,1.14})$ et de $(\mathcal{P}_{min,1.15})$ ainsi que la convergence des solutions de $(\mathcal{P}_{min}^\varepsilon, 1.16)$ vers celle de $(\mathcal{P}_{min,1.15})$ quand ε tend vers zéro.

1.4.2 Méthode de pénalisation, cas général

Il s'agit d'une méthode qui permet d'écrire la solution d'un problème de minimisation sous contrainte, comme limite de solutions de problèmes de minimisation sans contrainte. L'objectif sera d'utiliser cette méthode pour supprimer la contrainte de mouvement rigide dans $(\mathcal{P}_{min,1.15})$. Nous décrivons ici la méthode de pénalisation dans un cadre général et énonçons les résultats de convergence dont on dispose. On pourra retrouver ces résultats dans [60].

Les hypothèses sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V \text{ est un espace de Hilbert, } \phi \in V', \\ a(\cdot, \cdot) \text{ est bilinéaire, symétrique, continue, coercive sur } V \text{ (} a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \text{),} \\ b(\cdot, \cdot) \text{ est bilinéaire, symétrique, continue, positive sur } V, \\ K = \{v \in V, b(v, v) = 0\} = \ker b. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

On cherche à approcher la solution du problème de minimisation sous contrainte suivant,

$$\begin{cases} u \in K, & J(u) = \min_{v \in K} J(v), \\ \text{où } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \phi, v \rangle. \end{cases} \quad (1.18)$$

Pour ce faire, on considère la suite de problèmes de minimisation non contraints, indicés par ε ,

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in V, & J^\varepsilon(u^\varepsilon) = \min_{v \in V} J^\varepsilon(v), \\ \text{où } J^\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon}b(v, v). \end{cases} \quad (1.19)$$

L'idée est celle-ci, pour que u^ε minimise J^ε quand ε est petit, il faut que $b(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ soit petit et, à la limite on espère obtenir que u^ε tende vers u élément de K . On a en fait le résultat de convergence suivant :

Propriété 1.7 *Sous les hypothèses (1.17), la solution u^ε de (1.19) converge vers u , solution de (1.18), quand ε tend vers zéro.*

Sous une hypothèse supplémentaire sur b , on dispose d'un ordre de convergence.

Propriété 1.8 *Sous les hypothèses (1.17), et si l'on suppose de plus que $b(\cdot, \cdot)$ peut se mettre sous la forme $b(u, v) = (Bu, Bv)_\Lambda$ où B est un opérateur linéaire, continu, à valeurs dans un espace de Hilbert Λ et à image fermée, alors on a $|u^\varepsilon - u| = O(\varepsilon)$.*

1.4.3 Application au cas de la contrainte de mouvement rigide

Le problème $(\mathcal{P}_{min,1.15})$ entre dans le cadre de la section 1.4.2 en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} V = K_{\nabla}, \quad \langle \phi, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \\ a_S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_B \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}), \\ \mathbf{B}_B : \quad K_{\nabla} \mapsto (L^2(B))^4, \\ \quad \quad \mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{v})|_B \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Afin d'appliquer la théorie décrite dans la section précédente, nous avons besoin de vérifier des hypothèses telles que la coercivité de a_S ou le caractère à image fermée de \mathbf{B}_B par exemple. Pour cela, nous serons amenés à utiliser deux inégalités dites de Korn qui sont rappelées ci-dessous. Ces inégalités sont pour les mouvements rigides, ce que les inégalités de Poincaré-Wirtinger sont pour les fonctions constantes. On en trouvera les démonstrations dans [70] par exemple.

Propriété 1.9 Première Inégalité de Korn :

Soit \mathcal{O} un domaine borné de \mathbb{R}^n . Alors, pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\mathcal{O})$ on a

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq 2\|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{L^2(\mathcal{O})}^2.$$

Propriété 1.10 Seconde Inégalité de Korn dans des espaces fonctionnels ne contenant pas de mouvements rigides :

Soit \mathcal{O} un domaine borné Lipschitz et W un sous-espace fermé de $H^1(\mathcal{O})$ tel que $W \cap K = \{0\}$ où K est l'espace des mouvements rigides sur \mathcal{O} . Alors, pour tout \mathbf{v} dans W , on a

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C\|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Remarque 1.11 Dans la propriété 1.10, on peut prendre par exemple $W = K^\perp$, l'orthogonal des mouvements rigides dans $H^1(\mathcal{O})$.

La propriété 1.9 donne immédiatement la coercivité de a_S sur $K_{\nabla} \cap K_B$ et sur K_{∇} (espaces de Hilbert en tant que sous-espaces fermés de $H_0^1(\Omega)$). Le théorème de Lax Milgram et la propriété A.3 en annexe A permettent alors d'obtenir les deux propriétés suivantes.

Propriété 1.12 Il existe un unique \mathbf{u} solution de $(\mathcal{P}_{min,1.15})$.

Propriété 1.13 (\mathbf{u}, p) solution de $(\mathcal{P}_{var,1.14}) \implies \mathbf{u}$ solution de $(\mathcal{P}_{min,1.15})$.

D'après le théorème A.5 en annexe, afin d'obtenir l'implication réciproque et donc l'équivalence des problèmes $(\mathcal{P}_{var,1.14})$ et $(\mathcal{P}_{min,1.15})$, il faut vérifier que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\nabla : K_B &\mapsto L^2(\Omega \setminus \bar{B}) \\ \mathbf{v} &\longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{v}|_{\Omega \setminus \bar{B}} \end{aligned}$$

est à image fermée. D'après la section précédente, pour obtenir la convergence des solutions des problèmes pénalisés, il faut également vérifier que \mathbf{B}_B (défini en 1.20) est à image fermée. Ces deux hypothèses sont conséquences de la propriété suivante,

Propriété 1.14

$$\begin{aligned} \mathbf{B} : X = H_0^1(\Omega) &\mapsto \Lambda = (L^2(B))^4 \times L^2(\Omega \setminus \bar{B}) \quad \text{est à image fermée.} \\ \mathbf{v} &\longrightarrow (\mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{1}_B, \nabla \cdot \mathbf{v}\mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}}) \end{aligned}$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que

$$\exists C, \forall \gamma \in \text{Im}(\mathbf{B}), \exists \mathbf{w} \in X, \gamma = \mathbf{B}\mathbf{w} \text{ et } \|\mathbf{w}\|_X \leq C\|\gamma\|_\Lambda.$$

Soit donc $\gamma \in \text{Im}(\mathbf{B})$, $\gamma = (\boldsymbol{\lambda}, p)$. Comme $\gamma \in \text{Im}(\mathbf{B})$, il existe \mathbf{w}_0 dans X tel que $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{D}(\mathbf{w}_0)\mathbf{1}_B$, $p = \nabla \cdot \mathbf{w}_0\mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}}$.

• Construction de \mathbf{w} sur B :

On définit $\mathbf{w}_B \in H^1(B)$ par $\mathbf{w}_B = P_{K^\perp}(\mathbf{w}_0\mathbf{1}_B)$, où P_{K^\perp} est la projection de $H^1(B)$ sur K^\perp , avec

$$K = \{\mathbf{v} \in H^1(B), \mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0\}.$$

La seconde inégalité de Korn dans K^\perp (voir propriété 1.10) donne alors $\|\mathbf{w}_B\|_{H^1(B)} \leq C\|\mathbf{D}(\mathbf{w}_B)\|_{(L^2(B))^4}$. Or, par définition de \mathbf{w}_B , $\mathbf{w}_0\mathbf{1}_B - \mathbf{w}_B \in K$ et donc $\mathbf{D}(\mathbf{w}_B) = \mathbf{D}(\mathbf{w}_0)\mathbf{1}_B$ et ainsi on a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{w}_B) &= \boldsymbol{\lambda}, \\ \|\mathbf{w}_B\|_{H^1(B)} &\leq C\|\mathbf{D}(\mathbf{w}_0)\|_{(L^2(B))^4} = C\|\boldsymbol{\lambda}\|_{(L^2(B))^4}. \end{aligned}$$

• Prolongement sur $\Omega \setminus \bar{B}$:

On cherche $\mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ tel que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} &= p \text{ dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} &= \mathbf{w}_B \text{ sur } \partial B, \\ \mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

– relèvement de la condition au bord :

On note g l'élément de $H^{1/2}(\partial(\Omega \setminus \bar{B}))$ défini par

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{w}_B \text{ sur } \partial B, \\ g &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On peut relever g par \mathbf{w}_g dans $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ avec $\|\mathbf{w}_g\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \leq C\|g\|_{H^{1/2}(\partial(\Omega \setminus \bar{B}))}$. Or, $\|g\|_{H^{1/2}(\partial(\Omega \setminus \bar{B}))} = \|\mathbf{w}_B\|_{H^{1/2}(\partial B)} \leq C\|\mathbf{w}_B\|_{H^1(B)}$ par continuité de la trace. Ainsi, en utilisant la majoration de la norme de \mathbf{w}_B , on a construit $\mathbf{w}_g \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_g &= g \text{ sur } \partial(\Omega \setminus \bar{B}), \\ \|\mathbf{w}_g\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} &\leq C\|\boldsymbol{\lambda}\|_{(L^2(B))^4}. \end{aligned}$$

– résolution d'un nouveau problème homogène :

On cherche maintenant $\mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}}$ sous la forme $\mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} = \mathbf{w}_g + \bar{\mathbf{w}}$ où $\bar{\mathbf{w}}$ doit vérifier

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}} &\in H_0^1(\Omega \setminus \bar{B}), \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} &= \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{w}_g. \end{aligned}$$

La divergence étant surjective et bicontinue de $H_0^1(\Omega \setminus \bar{B})$ dans $L_0^2(\Omega \setminus \bar{B})$, il suffit de vérifier que $\mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{w}_g$ est d'intégrale nulle pour avoir une solution de ce problème, dont la norme est contrôlée.

Or, en notant \mathbf{n} la normale extérieure à $\Omega \setminus \bar{B}$, on a,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{w}_g &= \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{p} - \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \nabla \cdot \mathbf{w}_g = \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \nabla \cdot \mathbf{w}_0 - \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \nabla \cdot \mathbf{w}_g \\ &= \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{B})} \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{n} - \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{B})} \mathbf{w}_g \cdot \mathbf{n} = - \int_B \nabla \cdot \mathbf{w}_0 - \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{B})} g \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

On utilise alors que $\mathbf{w}_0 \mathbf{1}_B - \mathbf{w}_B \in K \subset \{\mathbf{v} \in H^1(B), \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$ pour obtenir $\nabla \cdot \mathbf{w}_0 = \nabla \cdot \mathbf{w}_B$ sur B et ainsi,

$$\int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{w}_g = - \int_B \nabla \cdot \mathbf{w}_B - \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{B})} g \cdot \mathbf{n}.$$

Une dernière intégration par parties donne

$$\int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{w}_g = \int_{\partial B} \mathbf{w}_B \cdot \mathbf{n} - \int_{\partial(\Omega \setminus \bar{B})} g \cdot \mathbf{n}$$

et, par définition de g , on a bien,

$$\int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{w}_g = 0.$$

Par conséquent, il existe $\bar{\mathbf{w}} \in H_0^1(\Omega \setminus \bar{B})$ tel que $\nabla \cdot \bar{\mathbf{w}} = \mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{w}_g$ et

$$\|\bar{\mathbf{w}}\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \leq C\|\mathbf{p} - \nabla \cdot \mathbf{w}_g\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})}.$$

On a ainsi,

$$\|\bar{\mathbf{w}}\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \leq C(\|\mathbf{p}\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|\mathbf{w}_g\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})}) \leq C(\|\mathbf{p}\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|\boldsymbol{\lambda}\|_{(L^2(B))^4}).$$

– En posant $\mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} = \mathbf{w}_g + \bar{\mathbf{w}}$ on a bien,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} &= p, \\ \mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} &= \mathbf{w}_B \text{ sur } \partial B, \\ \mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} &= 0 \text{ sur } \partial \Omega, \\ \|\mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}}\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} &\leq C(\|p\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|\boldsymbol{\lambda}\|_{(L^2(B))^4}). \end{aligned}$$

• Bilan : on définit $\mathbf{w} = \mathbf{w}_B \mathbf{1}_B + \mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{1}_{\Omega \setminus \bar{B}}$ et \mathbf{w} vérifie :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &\in H_0^1(\Omega), \\ \mathbf{B}\mathbf{w} &= (\boldsymbol{\lambda}, p) = \boldsymbol{\gamma}, \\ \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)} &\leq C(\|p\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|\boldsymbol{\lambda}\|_{(L^2(B))^4}) = C\|\boldsymbol{\gamma}\|_{\Lambda}. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$ et la constante ne dépendant pas du $\boldsymbol{\gamma}$ considéré, on a donc fini la démonstration. \square

Remarque 1.15 *L'argument clé de la démonstration précédente, est la “compatibilité” entre les contraintes, au sens où $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$ implique $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Ceci permet en effet de construire \mathbf{w}_B dans B pour gérer le mouvement rigide sans modifier la divergence dans B , ce qui est indispensable pour pouvoir ensuite construire $\mathbf{w}_{\Omega \setminus \bar{B}}$ sur $\Omega \setminus \bar{B}$ (de bonne divergence et qui se recolle avec \mathbf{w}_B sur ∂B).*

On obtient alors immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1.16 \mathbf{B}_{∇} et \mathbf{B}_B sont à image fermée.

\mathbf{B}_{∇} étant à image fermée, la propriété suivante découle du théorème A.5.

Propriété 1.17 \mathbf{u} solution de $(\mathcal{P}_{min}, 1.15) \implies \exists p$ tel que (\mathbf{u}, p) solution de $(\mathcal{P}_{var}, 1.14)$.

Cette propriété, associée à la propriété 1.13 montre que $(\mathcal{P}_{var}, 1.14)$ et $(\mathcal{P}_{min}, 1.15)$ sont équivalents. Et enfin, \mathbf{B}_B étant à image fermée, la propriété 1.8 implique :

Propriété 1.18 *Les solutions \mathbf{u}^ε du problème pénalisé $(\mathcal{P}_{min}^\varepsilon, 1.16)$ convergent vers \mathbf{u} solution du problème $(\mathcal{P}_{min}, 1.15)$ quand ε tend vers zéro, et cette convergence est d'ordre 1 : $|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}| = O(\varepsilon)$.*

Chapitre 2

Applications

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 2.1 | Valve cardiaque | 40 |
| 2.1.1 | Description du modèle | 40 |
| 2.1.2 | Formulation variationnelle et implémentation | 41 |
| 2.1.3 | Résultats numériques | 43 |
| 2.2 | Nageur | 45 |
| 2.2.1 | Description du problème | 45 |
| 2.2.2 | Présentation d'un cas simple : la brassée "carrée" | 46 |
| 2.2.3 | Résultats numériques | 49 |
| 2.2.4 | Recherche de brassées optimales | 55 |
| 2.3 | Vésicules | 56 |
| 2.3.1 | Contexte | 56 |
| 2.3.2 | Modèle utilisé | 57 |
| 2.3.3 | Résultats obtenus | 60 |

Résumé : Dans ce chapitre, nous présentons trois exemples de simulations utilisant la méthode de pénalisation proposée dans le chapitre précédent.

- Nous utilisons tout d’abord cette méthode pour simuler le mouvement d’une valve aortique 2D (très) idéalisée. La valve devant être fixée en un point, ce système présente une contrainte supplémentaire de dimension deux. Nous montrons comment cette nouvelle contrainte peut facilement être prise en compte grâce à deux multiplicateurs de Lagrange.
- Dans la seconde section, nous nous intéressons au “nageur à trois sphères”. Nous utilisons la méthode de pénalisation étendue au cas 3D-axisymétrique afin de montrer qu’il lui est possible de nager dans un fluide de Stokes.
- Enfin, nous effectuons des simulations de vésicules en cisaillement. Leur membrane est modélisée par un collier de particules solides reliées par des ressorts. La tension de surface est modélisée par une force de rappel angulaire et la contrainte de volume constant est gérée grâce à un multiplicateur de Lagrange. Nous obtenons des résultats qualitativement semblables aux résultats expérimentaux.

Abstract : We present in this chapter three examples of simulations using the penalty method proposed in the previous chapter.

- We first use this method to simulate a (very) simplified 2D model of the aortic valve. The rigid body has to be attached at one of its points and this adds a new 2-dimensional constraint to the problem. We show how this new constraint can easily be taken into account by using two Lagrange multipliers.
- In the second section, we are interested in the “three spheres swimmer”. We use the extension to the 3D-axisymmetric case of the penalty method in order to show that this swimmer is able to swim through a Stokes fluid.
- Finally, we present simulations of vesicles under shear flow. Their membranes are modeled using a chain of rigid particles linked by springs. The surface tension is modeled by an angular back-pulling force and the volume is set constant using a Lagrange multiplier. Our results are in qualitative agreement with experimental results.

2.1 Valve cardiaque

On décrit dans cette section comment utiliser la méthode présentée dans le chapitre précédent dans le but de simuler le mouvement d’une valve aortique idéalisée. Ce travail a fait l’objet d’un proceeding (voir [48]).

2.1.1 Description du modèle

Dans ce modèle (très) idéalisé, la “valve” est assimilée à un corps rigide B . Ses extrémités. Ses extrémités sont des disques D_1 et D_2 dont les centres sont à distance l (voir Fig 2.1). On suppose de plus qu’elle est en rotation autour du point \mathbf{x}_0 , centre de D_1 . La géométrie utilisée est inspirée de la géométrie réelle de la valve aortique décrite dans [84]. Le comportement complexe de la valve, dû à son élasticité, est modélisé par l’ajout d’un

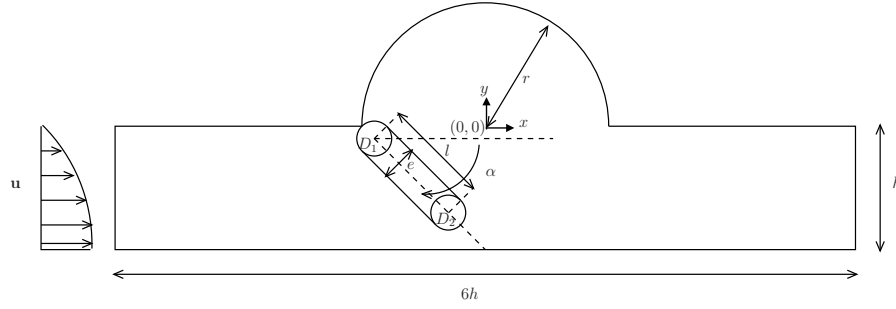


FIG. 2.1 – Valve : Géométrie du problème modèle

moment de rappel qui tend à la ramener vers une position d'équilibre. Plus précisément, on ajoute une force extérieure, agissant sur D_2 , dont le moment est proportionnel à $\alpha - \alpha_{eq}$ où α_{eq} est l'angle d'équilibre. Par conséquent, la force extérieure totale s'exerçant sur la valve et incluant la gravité est,

$$\mathbf{f}_{B,1} = \frac{C}{\ell}(\alpha - \alpha_{eq}) \sin \alpha \mathbf{1}_{D_2}, \quad \mathbf{f}_{B,2} = (\rho_f - \rho_B)\mathbf{1}_B - \frac{C}{\ell}(\alpha - \alpha_{eq}) \cos \alpha \mathbf{1}_{D_2},$$

où C est une constante. ρ_f et ρ_B sont les densités respectives du fluide et de la valve. La condition au bord sur la partie gauche de la frontière est un profil pulsatoire (de pulsation ω_p) de type Poiseuille,

$$\mathbf{u}(-3h, y, t) = -\frac{2v_{max}}{3} \frac{y(y+2h)}{h^2} \left(1 + \frac{\cos(\omega_p t)}{2}\right),$$

où v_{max} est la vitesse maximale en entrée. On impose sur la partie supérieure de la frontière une condition de non glissement ($\mathbf{u} = 0$), sur la partie droite une condition de sortie libre, et sur la partie basse une condition de symétrie ($u_2 = 0$).

2.1.2 Formulation variationnelle et implémentation

Deux contraintes apparaissent dans ce modèle, la contrainte de mouvement rigide qui sera prise en compte comme dans le chapitre précédent, et une nouvelle contrainte : \mathbf{x}_0 doit être un point fixe du solide. Les inconnues sont les champs de vitesse et de pression \mathbf{u} et p , ainsi que la vitesse angulaire ω de rotation autour de \mathbf{x}_0 (la vitesse de translation \mathbf{V} est nulle). Le principe fondamental de la dynamique écrit dans (1.3) par rapport au centre de gravité, peut également s'écrire par rapport à un point fixe. Le problème à résoudre est donc,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}_{\Omega \setminus \bar{B}} & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \bar{B}, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\perp & \text{sur } \partial B, \\ J_{\mathbf{x}_0} \dot{\omega} = \int_B (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\perp \cdot \mathbf{f}_B - \int_{\partial B} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\perp \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds. & \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Comme \mathbf{u} est à mouvement rigide sur B , la contrainte de point fixe $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, \cdot) = 0$ peut s'écrire $\int_{D_1} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$ pour tout t . On intègre cette contrainte à l'espace K_∇ et on note,

$$K_{\mathbf{x}_0} = \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \int_{D_1} \mathbf{v} = 0 \right\}, \quad K_{\mathbf{x}_0, \nabla} = K_\nabla \cap K_{\mathbf{x}_0}$$

La formulation variationnelle associé à (2.1) s'obtient alors comme dans le chapitre précédent en prenant cette fois les fonctions test dans $K_{\mathbf{x}_0} \cap K_B$. Après discrétisation en temps et gestion du mouvement rigide par pénalisation, on se ramène à résoudre, pour chaque pas de temps, le problème suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{n+1} \in K_{\mathbf{x}_0} \text{ et } \mathbf{p}^{n+1} \in L^2(\Omega) \\ \alpha \int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \quad + \frac{2}{\varepsilon} \int_{B^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ \quad = \alpha \int_{\Omega} (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ X^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in K_{\mathbf{x}_0}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{q} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Afin de pouvoir résoudre ce problème par la méthode des éléments finis, il reste à gérer la contrainte de point fixe présente dans l'espace fonctionnel. Cela pourrait être traité par pénalisation en ajoutant le terme $\frac{1}{\varepsilon'} \left| \int_{D_1} \mathbf{v} \right|^2$ à la fonctionnelle à minimiser mais on aurait alors dans la formulation variationnelle le terme $\frac{1}{\varepsilon'} \left(\int_{D_1} \mathbf{u} \right) \cdot \left(\int_{D_1} \tilde{\mathbf{u}} \right)$ qui ne peut être géré facilement par les solveurs standards. D'après la remarque A.6 de l'annexe A, puisqu'il s'agit de deux contraintes linéaires à valeur réelle, on peut les imposer par dualité. Cela consiste à ajouter une inconnue $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^2$, multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de point fixe, qui intervient dans la formulation variationnelle sous la forme $\boldsymbol{\lambda} \cdot \int_{D_1} \mathbf{u}$. En utilisant le fait que $\boldsymbol{\lambda} \mapsto \mathbf{u}_{\boldsymbol{\lambda}}$ est une application affine, on observe qu'il suffit de résoudre le problème pour trois $\boldsymbol{\lambda}$ bien choisis (par exemple $\boldsymbol{\lambda}_1 = (0, 0)$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = (1, 0)$ et $\boldsymbol{\lambda}_3 = (0, 1)$). En effet, si on note \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 et \mathbf{u}_3 les solutions correspondantes, on sait alors que la solution cherchée \mathbf{u} est combinaison barycentrique des trois précédentes. Il existe β et γ tels que,

$$\mathbf{u} = \beta \mathbf{u}_1 + \gamma \mathbf{u}_2 + (1 - \beta - \gamma) \mathbf{u}_3.$$

Pour obtenir les valeurs de β et γ , il suffit alors d'écrire que la contrainte de point fixe doit être vérifiée et de résoudre le système linéaire 2×2 suivant :

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \mathbf{u} = 0 &\Leftrightarrow \int_{D_1} [\beta \mathbf{u}_1 + \gamma \mathbf{u}_2 + (1 - \beta - \gamma) \mathbf{u}_3] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\int_{D_1} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 \right) \beta + \left(\int_{D_1} \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \right) \gamma = - \int_{D_1} \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

On a ainsi montré comment adapter l'étape (ii) de l'algorithme 1.1 à ce nouveau problème. L'étape (i) consiste maintenant à mettre à jour α , unique degré de liberté du solide, en écrivant $\alpha^{n+1} = \alpha^n + \Delta t \omega^n$ où ω^n est calculé à partir de la vitesse du centre du disque D_2 .

$$\mathbf{V}^n = \frac{1}{\text{Vol}(D_{2,h}^n)} \int_{D_{2,h}^n} \mathbf{u}^n, \quad \omega^n = \frac{\cos(\alpha^n) \mathbf{V}_2^n - \sin(\alpha^n) \mathbf{V}_1^n}{\ell},$$

où, comme indiqué dans la section 1.3.1, $D_{2,h}^n$ est le polygone représentant D_2 au temps n après discrétisation en espace.

2.1.3 Résultats numériques

Les paramètres géométriques utilisés lors de la simulation sont $h = 20$, $r = 20$, $\ell = 14$, $\mu = 1$ et $e = 5$. Les densités du fluide et de la valve sont prises respectivement égales à $\rho_f = 1$ et $\rho_B = 5$. La viscosité μ du fluide est égale à 1. La pulsation en entrée est de période $T = 7.5s$. Les équations de Navier-Stokes sont écrites de manière adimensionnée, en utilisant h comme longueur caractéristique et en choisissant v_{max} tel que le nombre de Reynolds, défini par $Re = v_{max} \rho_f h / \mu$, soit égal à 400. Le champ de vitesses est initialisé en résolvant le problème de Stokes correspondant. Le code source associé peut être téléchargé sur [44].

Les champs de vecteurs à gauche de la figure 2.2 correspondent au champ des vitesses obtenus à différents pas de temps. À droite de la figure, on peut trouver les lignes de courant associées. Par définition, ces lignes de courant sont, à un instant donné, les courbes tangentes au champ des vitesses. Pour un champ de vecteur $(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ donné, les lignes de courant $\tau \rightarrow \mathbf{Y}(\tau)$ à un instant s donné sont, par définition, les solutions de l'équation différentielle ordinaire,

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\tau}(\tau) = \mathbf{v}(\mathbf{Y}(\tau), s), \quad (2.3)$$

Noter que, le temps s étant fixé dans (2.3), ces lignes de courant sont différentes des caractéristiques définies en (1.7) et ne représentent donc pas les trajectoires des particules de fluide. Les lignes de courant sont une façon de représenter le champ des vitesses à un instant donné.

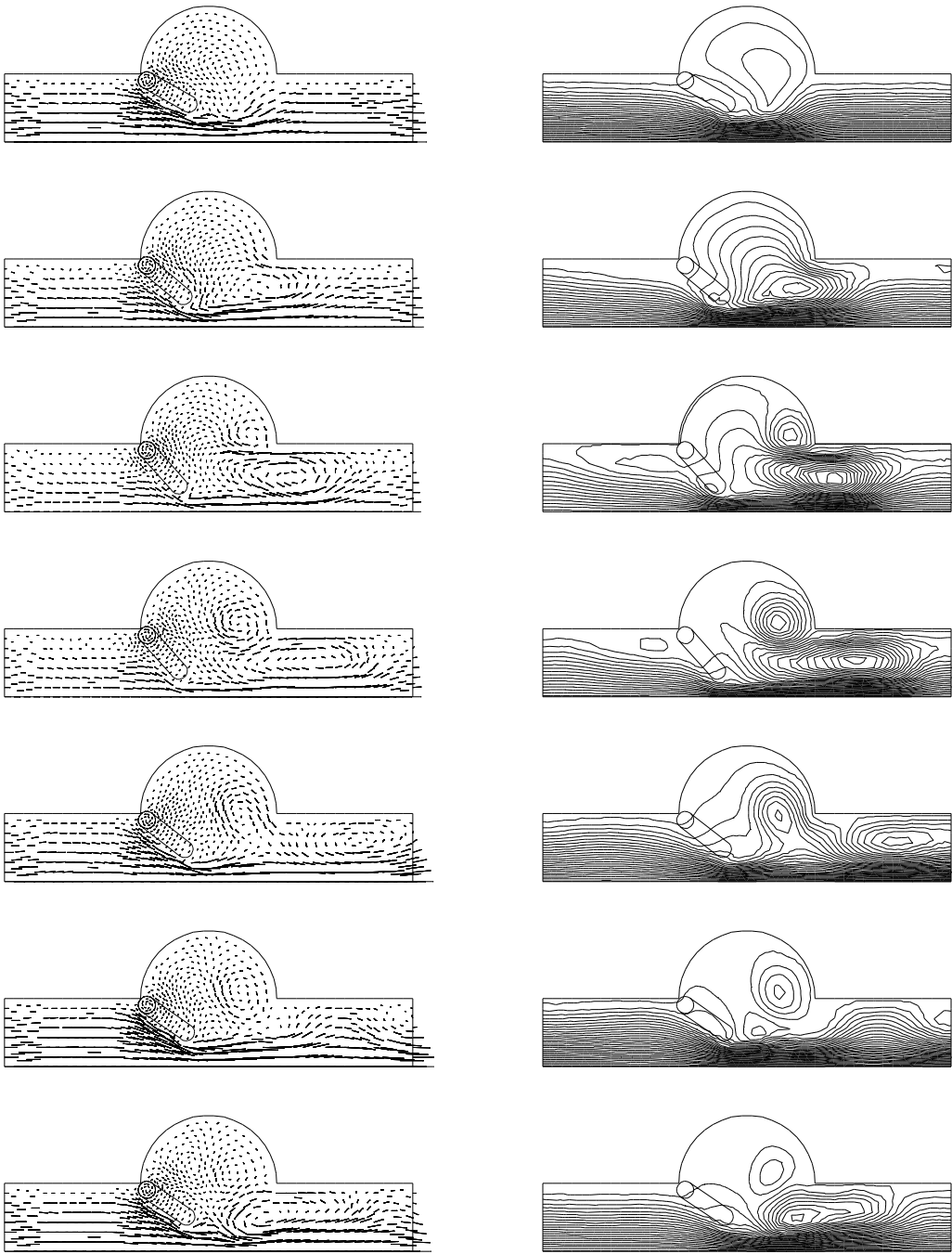


FIG. 2.2 – Champs des vitesses et lignes de courant aux pas de temps 19–41–70–90–120–149–170

2.2 Nageur

2.2.1 Description du problème

Le mécanisme utilisé par l'homme pour nager consiste à effectuer des brassées périodiques et à utiliser les forces hydrodynamiques exercées par le fluide environnant sur lui-même lors de ces brassées. Grâce aux effets inertiels, le déplacement effectué lors de la première moitié de la brassée cyclique n'est pas annulé lors de sa seconde moitié. Dans le cas de systèmes biologiques ou de micro- ou nano-robots, à cause des échelles de longueur et de temps associées, le mouvement est dominé par les effets de viscosité et l'inertie est négligeable. Ceci implique que de tels organismes doivent adopter des stratégies différentes de celles d'organismes plus grands pour nager. En effet, la réversibilité des équations de Stokes impliquent que tout déplacement obtenu grâce à une déformation de l'organisme sera annulé lors d'une déformation réciproque. Le problème qui se pose est de trouver les mécanismes les plus simples capables d'autopropulsion dans un fluide de Stokes ou encore, de savoir si un système est capable d'avancer dans un fluide de Stokes, en effectuant un changement de forme cyclique (une "brassée"), en l'absence de forces extérieures.

Ce travail est issu d'une collaboration avec François Alouges² et Antonio de Simone³ et a été à l'origine d'une publication (voir [4]) qui se trouve en annexe B. Nous nous sommes intéressés au cas du "nageur à trois sphères" décrit dans [68]. Il est constitué de trois sphères égales de rayon a , se déplaçant le long d'un axe \mathbf{e}_z (Voir Fig. 2.3). On note x

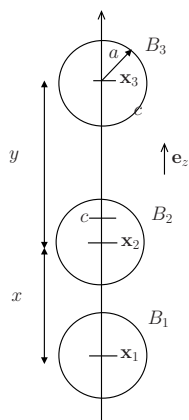


FIG. 2.3 – Nageur : géométrie et notations.

et y , la distance entre les centres des sphères et c le centre de gravité du nageur. L'état du système est décrit par (x, y, c) , (x, y) donnant sa forme et c sa position. On note $\mathbf{F}_i = f_i \mathbf{e}_z$ la force exercée sur la sphère i et $\mathbf{V}_i = V_i \mathbf{e}_z$ sa vitesse. Les équations de Stokes étant

²Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, Orsay, France

³SISSA-International School for Advanced Studies, Trieste, Italy

linéaires, il existe une matrice, notée S et appelée matrice d'Oseen, telle que

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = S(x, y) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

La matrice S ne dépend que de la forme du nageur puisque l'on est en milieu infini.

Propriété 2.1 S est symétrique définie positive

Démonstration : Soient $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^t$ et $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^t$ deux vecteurs, on définit \mathbf{u} et \mathbf{v} les champs de vitesse solution du problème du nageur associé à ces forces. On note \mathbf{U} et \mathbf{V} les vitesses des particules associées : $\mathbf{U} = S\mathbf{f}$ et $\mathbf{V} = S\mathbf{g}$. Alors,

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, S\mathbf{g}) &= \sum_i f_i V_i \\ &= 2\mu \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \\ &= \sum_i g_i U_i = (S\mathbf{f}, \mathbf{g}). \end{aligned}$$

De plus,

$$(\mathbf{f}, S\mathbf{f}) = \sum_i f_i U_i = 2\mu \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) \geq 0.$$

On a donc montré que S est symétrique définie positive. \square

L'hypothèse d'autopropulsion du nageur se traduit par la nullité de la somme des forces s'exerçant sur les différentes sphères,

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0. \quad (2.5)$$

On appelle "brassée" un mouvement périodique de période T dans l'espace des formes,

$$\begin{array}{ccc} b : [0, T] & \mapsto &]2a, +\infty[\times]2a, +\infty[\quad \text{avec } (x(T), y(T)) = (x(0), y(0)). \\ t & \rightarrow & (x(t), y(t)) \end{array}$$

Cette brassée permet de passer de l'état $(x(0), y(0), c(0))$ à l'état $(x(T), y(T), c(T))$. On cherche à savoir s'il en existe, produites par des forces internes, telles que $c(T)$ soit différent de $c(0)$.

2.2.2 Présentation d'un cas simple : la brassée "carrée"

On considère la "brassée" étudiée dans [68]. Elle est donnée dans l'espace des formes par

$$(x, y) : (\delta, \delta) \rightarrow (\delta + h, \delta) \rightarrow (\delta + h, \delta + h) \rightarrow (\delta, \delta + h) \rightarrow (\delta, \delta),$$

où δ est strictement supérieur à $2a$ et h est strictement positif (voir Fig. 2.4). On la suppose effectuée grâce à des forces internes. On souhaite savoir si une telle brassée permet

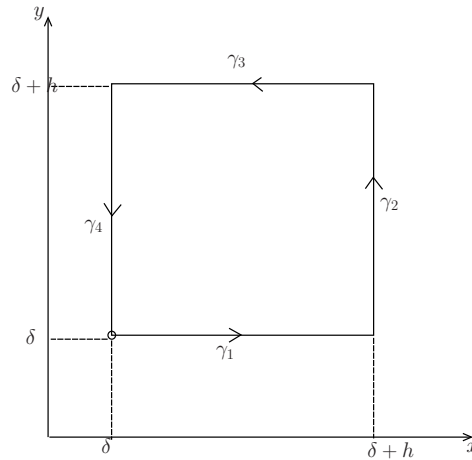


FIG. 2.4 – Nageur : exemple de brassée.

au nageur d'avancer. Dans les variables (x, y, c) , elle se réécrit,

$$(\delta, \delta, c_0) \rightarrow (\delta + h, \delta, c_1) \rightarrow (\delta + h, \delta + h, c_2) \rightarrow (\delta, \delta + h, c_3) \rightarrow (\delta, \delta, c_4). \quad (2.6)$$

Elle permettra de nager si c_4 est différent de c_0 . Pour le savoir, on cherche à déduire du système (2.4) des informations sur le centre de gravité c . On commence par réécrire (2.4) sous la forme,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S(x, y) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la propriété 2.1 ainsi que $x = x_2 - x_1$, $y = x_3 - x_2$ et $c = (x_1 + x_2 + x_3)/3$, on a

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mathbf{e}_1 \cdot S\mathbf{f} = S\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}, \\ \frac{dy}{dt} = \mathbf{e}_2 \cdot S\mathbf{f} = S\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}, \\ \frac{dc}{dt} = \mathbf{e}_3 \cdot S\mathbf{f} = S\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}. \end{cases} \quad (2.7)$$

où $\mathbf{e}_1 = (-1, 1, 0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0, -1, 1)^t$ et $\mathbf{e}_3 = (1/3, 1/3, 1/3)^t$. On remarque alors que, puisque \mathbf{f} vérifie (2.5), elle s'écrit de manière unique sous la forme,

$$\mathbf{f} = \alpha S\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + \beta S\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3. \quad (2.8)$$

Pour le montrer, on note d'abord que, d'après (2.5), \mathbf{f} est orthogonale à \mathbf{e}_3 . Or, les vecteurs $S\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ et $S\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$ sont évidemment dans l'orthogonal de \mathbf{e}_3 et en forment une base puisqu'ils sont libres. En effet, s'ils ne l'étaient pas, il existerait des constantes λ et μ telles que $S(\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_3 = 0$. Or, comme \mathbf{e}_3 est orthogonal à \mathbf{e}_1 et à \mathbf{e}_2 , on aurait alors $S(\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2) \cdot (\lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_2) = 0$, ce qui est en contradiction avec le caractère défini

positif de S . En écrivant \mathbf{f} sous cette forme, le système différentiel (2.7) devient,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha S \mathbf{e}_1 \cdot (S \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \\ \frac{dy}{dt} = \beta S \mathbf{e}_2 \cdot (S \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3), \\ \frac{dc}{dt} = \alpha S \mathbf{e}_3 \cdot (S \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \beta S \mathbf{e}_3 \cdot (S \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3). \end{cases}$$

Remarque 2.2 Grâce à ce système d'équations et à (2.8), on peut toujours, à partir d'une brassée $t \rightarrow (x(t), y(t))$ donnée, retrouver les forces internes associées :

$$\mathbf{f} = \frac{dx}{dt} \frac{S \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{S \mathbf{e}_1 \cdot (S \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} + \frac{dy}{dt} \frac{S \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3}{S \mathbf{e}_2 \cdot (S \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3)}.$$

Ce calcul est possible parce que $S \mathbf{e}_1 \cdot (S \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ n'est pas nul. En effet, s'il l'était, alors $S \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ et $S \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$ seraient tous deux orthogonaux à $S \mathbf{e}_1$ et à $S \mathbf{e}_2$. Comme S est définie positive, $S \mathbf{e}_1$ et $S \mathbf{e}_2$ ne sont pas colinéaires. On a donc $S \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ et $S \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$ colinéaires. Or, on a montré précédemment qu'ils étaient libres.

Finalement, en notant A la matrice telle que $A \mathbf{U} = \mathbf{U} \times \mathbf{e}_3$, on a

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $T = SAS$, on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \mathbf{e}_1 \cdot T \mathbf{e}_2, \\ \frac{dy}{dt} = \beta \mathbf{e}_2 \cdot T \mathbf{e}_1, \\ \frac{dc}{dt} = \alpha \mathbf{e}_3 \cdot T \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \cdot T \mathbf{e}_1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Comme montré précédemment, $\mathbf{e}_1 \cdot T \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_2 \cdot T \mathbf{e}_1$ sont non nuls et ainsi, l'évolution en temps de c le long de la brassée s'écrit,

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot T \mathbf{e}_2} \frac{dx}{dt} + \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2 \cdot T \mathbf{e}_1} \frac{dy}{dt}. \quad (2.10)$$

Remarque 2.3 On note $V = (V_1, V_2)$, où $V_1 = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot T \mathbf{e}_2}$ et $V_2 = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2 \cdot T \mathbf{e}_1}$. Si Δc est la variation de c lors d'une brassée dont le graphe est noté γ , on a d'après (2.10)

$$\Delta c = \int_{\gamma} V dl.$$

Par conséquent, Δc est indépendant du paramétrage de γ . Le déplacement du nageur lors d'une brassée ne dépend que de la forme de cette brassée et non de la vitesse à laquelle elle est effectuée.

Dans le cas de la brassée “carrée” décrite figure 2.4, on peut décrire l’évolution de c , étape par étape, en intégrant (2.10). Après changement de variable on obtient

$$\begin{aligned}
(\delta, \delta, c_0) \xrightarrow{\gamma_1} (\delta + h, \delta, c_1) & : c_{\gamma_1}(x) = c_0 + \int_{\delta}^x \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T(s, \delta) \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot T(s, \delta) \mathbf{e}_2} ds, \\
(\delta + h, \delta, c_1) \xrightarrow{\gamma_2} (\delta + h, \delta + h, c_2) & : c_{\gamma_2}(y) = c_1 + \int_{\delta}^y \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T(\delta + h, s) \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2 \cdot T(\delta + h, s) \mathbf{e}_1} ds, \\
(\delta + h, \delta + h, c_2) \xrightarrow{\gamma_3} (\delta, \delta + h, c_3) & : c_{\gamma_3}(x) = c_2 + \int_{\delta+h}^x \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T(s, \delta + h) \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot T(s, \delta + h) \mathbf{e}_2} ds, \\
(\delta, \delta + h, c_3) \xrightarrow{\gamma_4} (\delta, \delta, c_4) & : c_{\gamma_4}(y) = c_3 + \int_{\delta+h}^y \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T(\delta, s) \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2 \cdot T(\delta, s) \mathbf{e}_1} ds.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

On peut donc simuler numériquement l’évolution de c en fonction de la forme du nageur. Il suffit pour cela de savoir calculer $T(x, y)$ sur le chemin de la brassée. Or, puisque $T = SAS$, cela revient à résoudre deux problèmes de Stokes S avec forces imposées sur les particules. Ceci peut être fait en utilisant la méthode de pénalisation.

2.2.3 Résultats numériques

Un cas test :

On se ramène d’abord à un problème $2D$ en utilisant une formulation variationnelle axisymétrique de Stokes. Les nouvelles variables sont $(r, z) \in \Omega_{2D} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. On approche ensuite le domaine infini Ω_{2D} par une “grande” boîte $[0, R] \times [-H, H]$ ce qui correspond en $3D$ à un cylindre de hauteur $2H$ et de rayon R . Au bord de ce domaine borné, on impose des conditions de Dirichlet homogènes. Avant de chercher à résoudre le problème qui nous intéresse, on souhaite d’abord valider cette approche. Pour cela, on considère une unique particule de rayon a , plongée dans un fluide de Stokes de viscosité μ . On applique une force verticale $\mathbf{f}_B = -g\mathbf{e}_z$ par unité de volume sur la sphère. Afin de limiter les temps de calcul et de pouvoir choisir R et H sans augmenter déraisonnablement le nombre de points du maillage, on choisit une seconde boîte, $[0, R_f] \times [-H_f, H_f] \subset [0, R] \times [-H, H]$, contenant les particules et qui sera maillée plus finement que le reste du domaine. On choisit ici d’utiliser des maillages adaptés aux particules. Le maillage de la figure 2.5 est celui obtenu avec les paramètres $R_f = H_f = 4a$ et $R = H = 34a$. Il comporte $N_f = 4/a$ mailles par unité de longueur pour le maillage fin et dix fois moins pour le maillage grossier. On représente sur la figure 2.6 la pression obtenue pour les paramètres physiques suivants : $a = 0.05$, $g = -10$, $\mu = 3$.

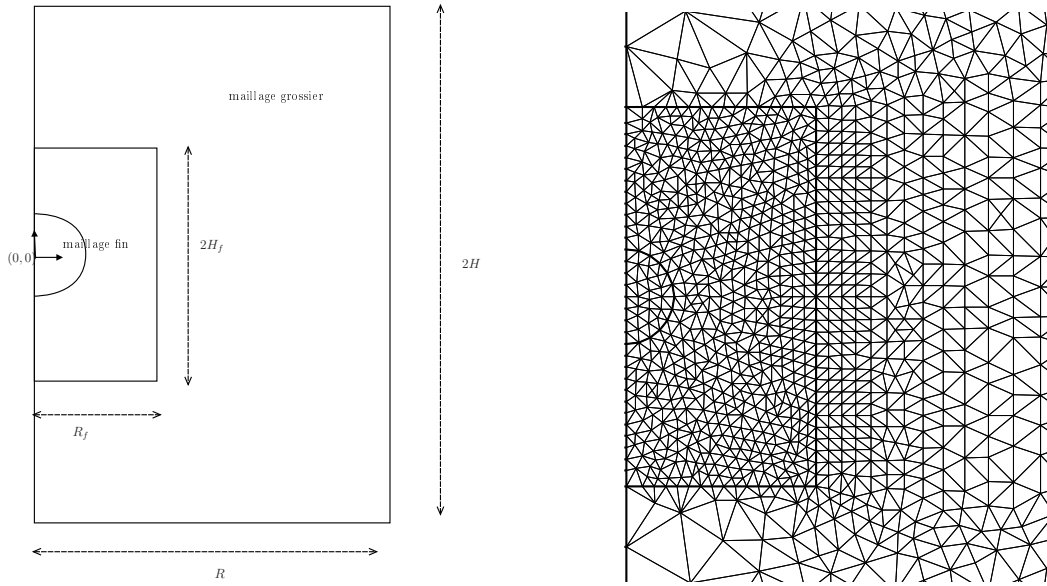


FIG. 2.5 – Problème test et zoom du maillage utilisé.

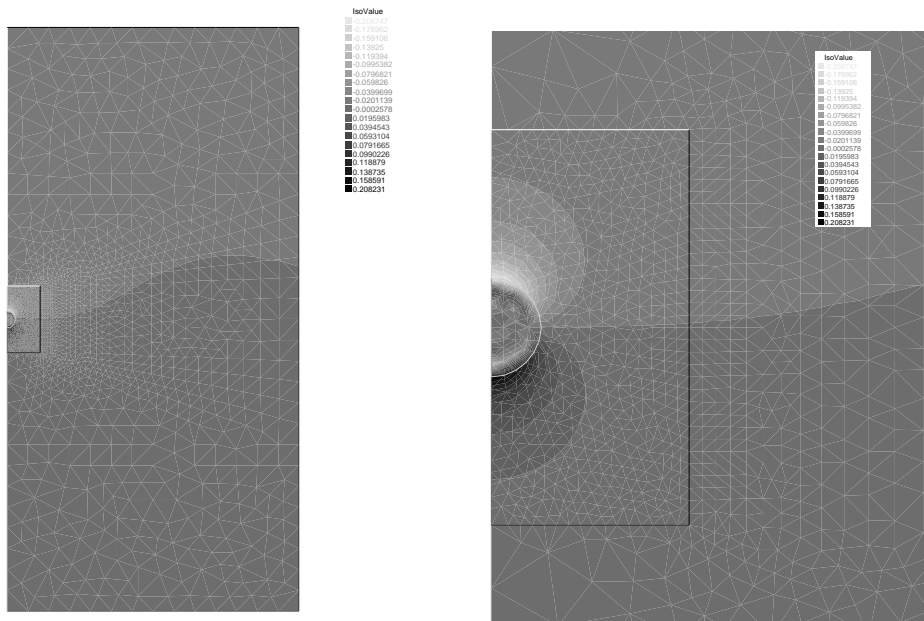


FIG. 2.6 – Problème test : pression obtenue (à gauche) et zoom (à droite).

La valeur théorique de la vitesse $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_z$ de la particule peut être obtenue en écrivant l'équilibre des forces,

$$\mathbf{f}_{Stokes} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_B \mathbf{1}_B = 0,$$

où $\mathbf{f}_{Stokes} = -6\pi\mu a\mathbf{U}$ est la force exercée par un fluide de Stokes sur une particule se déplaçant en milieu infini (voir [78], article original de Stokes en 1851). Ainsi, la vitesse théorique vaut

$$U_{theo} = -\frac{2\pi \int_{\Omega_{2D}} f_B \mathbf{1}_B r dr dz}{6\pi\mu a} = \frac{\int_{B_{2D}} g r dr dz}{3\mu a}.$$

où $B_{2D} = \{(r, z) \in \Omega_{2D}, r^2 + z^2 \leq a^2\}$. Les tests sont effectués pour $a = 0.05$, $H_f = 4a$ et $H = 96a$. Les erreurs relatives obtenues pour différents pas de maillages sont

| N_f | $2/a$ | $4/a$ | $6/a$ |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|
| $err = (U_{num} - U_{theo})/U_{theo}$ | 0.26 | 0.10 | 0.06 |

Remarque 2.4 *Noter que, dans le cas du nageur, la somme des forces exercées sur le système est nulle. La solution décroît donc plus rapidement à l'infini et l'erreur commise suite au calcul dans une boîte finie sera donc plus petite.*

Simplifications :

On souhaite utiliser cette formulation 3D-axisymétrique ainsi que ce type de maillage pour simuler numériquement l'évolution de c en fonction de la brassée. Pour cela, on discrétise la brassée en utilisant un découpage de $[\delta, \delta+h] : (z_0 = \delta, \dots, z_k, \dots, z_{N_z} = \delta+h)$. D'après (2.11), on est ramené à calculer des intégrales sur des intervalles de la forme $[z_k, z_{k+1}]$. On choisit pour cela la méthode d'intégration de Gauss à deux points. Pour chaque intégrale, il faut donc effectuer deux calculs de T , ce qui nécessite quatre résolutions du problème de Stokes S .

La symétrie du problème va nous permettre de diviser par deux ce nombre de calculs. En effet, on remarque que

$$\forall \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = S(x, y)\mathbf{f} \implies \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = S(y, x) \begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

On note \overline{S} la matrice "anti-transposée" de S ,

$$\forall i, j, \quad \overline{S}_{i,j} = S_{4-i,4-j},$$

et $\overline{\mathbf{f}} = (f_3, f_2, f_1)^t$. Pour toute matrice S_1, S_2 et tout vecteur \mathbf{f} on a $\overline{S_1 S_2} = \overline{S_1} \overline{S_2}$ et $\overline{S\mathbf{f}} = \overline{S} \overline{\mathbf{f}}$. Par conséquent, (2.12) donne

$$S(y, x) = \overline{S(x, y)}.$$

Ceci, associé à $\overline{\overline{A}} = A$, permet d'écrire

$$\begin{aligned} T(y, x) &= \frac{S(y, x)AS(y, x)}{S(x, y)AS(x, y)} = \frac{\overline{S(x, y)} \overline{A} \overline{S(x, y)}}{S(x, y)AS(x, y)} = T(x, y). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant $\bar{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{e}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{g}}$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{e}_3 \cdot T(x, \delta + h)\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot T(x, \delta + h)\mathbf{e}_2} &= \frac{\bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \overline{T(x, \delta + h)\mathbf{e}_2}}{\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \overline{T(x, \delta + h)\mathbf{e}_2}} = \frac{\bar{\mathbf{e}}_3 \cdot \overline{T(x, \delta + h)} \bar{\mathbf{e}}_2}{\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot \overline{T(x, \delta + h)} \bar{\mathbf{e}}_2} \\ &= -\frac{\mathbf{e}_3 \cdot T(\delta + h, x)\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2 \cdot T(\delta + h, x)\mathbf{e}_1} \end{aligned}$$

Les intégrales de (2.11) correspondant au chemin $(\delta + h, \delta + h, c_2) \rightarrow (\delta, \delta + h, c_3)$ se ramènent donc à celles obtenues sur le chemin $(\delta + h, \delta, c_1) \rightarrow (\delta + h, \delta + h, c_2)$. De même, pour calculer les intégrales issues du chemin $(\delta, \delta + h, c_3) \rightarrow (\delta, \delta, c_4)$, on peut se ramener à celles du chemin $(\delta, \delta, c_0) \rightarrow (\delta + h, \delta, c_1)$.

Résultats obtenus :

On représente sur la figure 2.7, le maillage utilisé dans le cas d'un nageur dont les particules sont de rayon $a = 0.05$ et de forme $(x, y) = (4a, 7a)$. On y trouvera également le champ des pressions obtenu lors du calcul de $S(x, y)\mathbf{e}_1$ c'est à dire lorsqu'on applique les forces $\mathbf{e}_1 = (-1, 1, 0)^t$ aux trois particules.

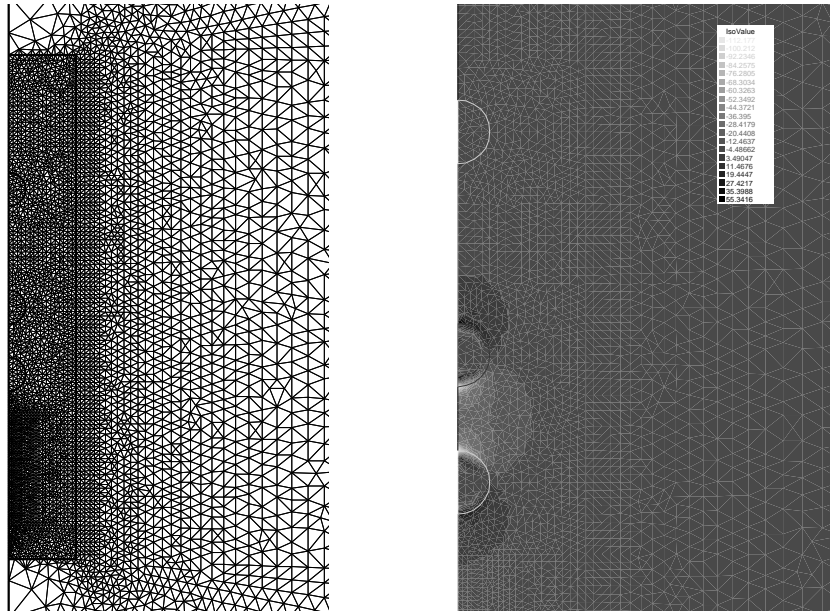


FIG. 2.7 – Nageur : maillage utilisé (à gauche) et pressions obtenues lors du calcul de $S(x, y)\mathbf{e}_1$ (à droite)

Les champs de pression associés aux forces $\mathbf{e}_2 = (0, -1, 1)^t$, et $\mathbf{e}_3 = (1/3, 1/3, 1/3)^t$ sont représentés figure 2.8.

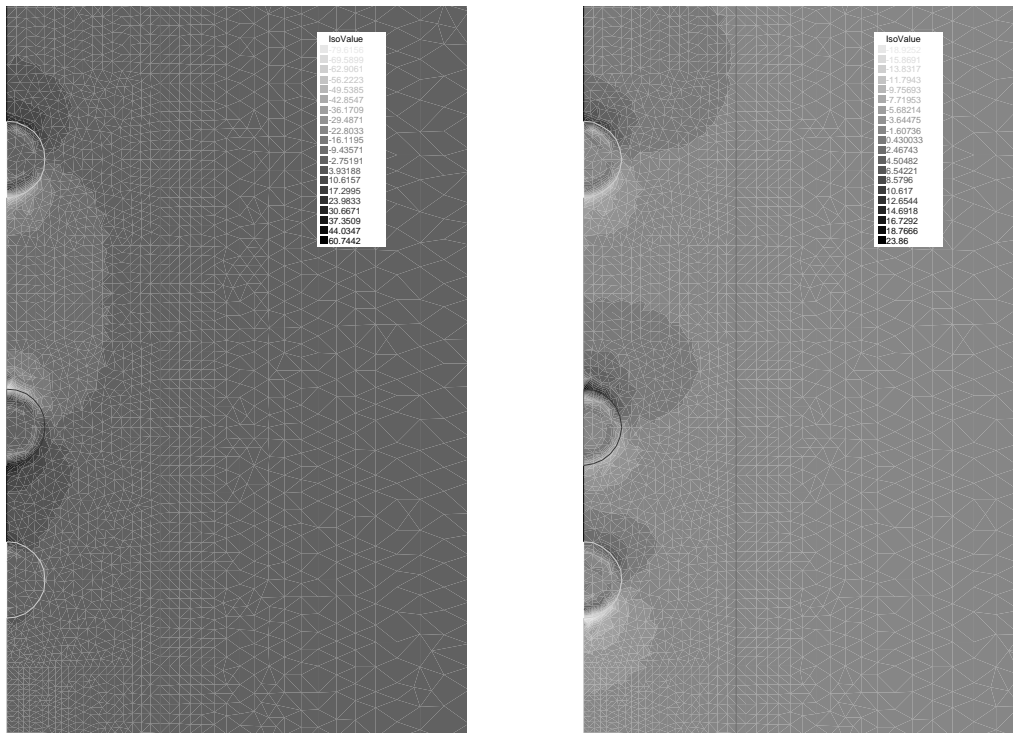


FIG. 2.8 – Nageur : pressions obtenues lors du calcul de $S(x, y)\mathbf{e}_2$ (à gauche) et $S(x, y)\mathbf{e}_3$ (à droite).

Rappelons que le déplacement global du centre de gravité durant une brassée est indépendant de la façon dont est effectuée cette brassée (voir remarque 2.3). Afin d'observer l'évolution en temps du nageur, on se donne un paramétrage de la brassée décrite figure 2.4. On suppose qu'elle est effectuée à vitesse constante durant un temps $T = 1$. On obtient grâce aux calculs décrits précédemment la position du centre de gravité c au cours du temps. Elle est représentée sur la figure 2.9. Les paramètres utilisés sont $a = 0.05$, $\delta = 3a$ et $h = 5a$. Les configurations associées ont été tracées figure 2.10

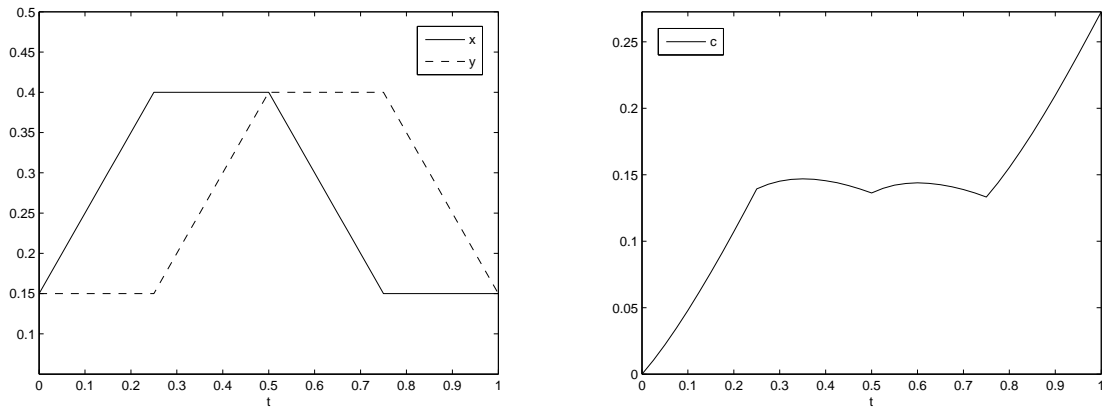


FIG. 2.9 – Nageur : brassée (à gauche) et déplacement associé (à droite).

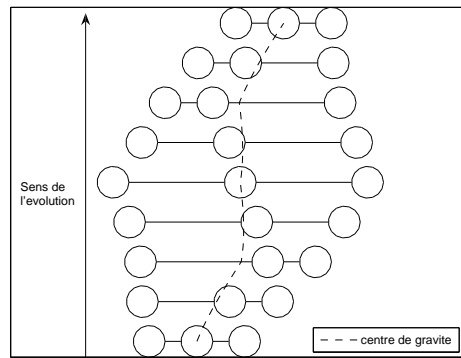


FIG. 2.10 – Nageur : configurations durant la brassée.

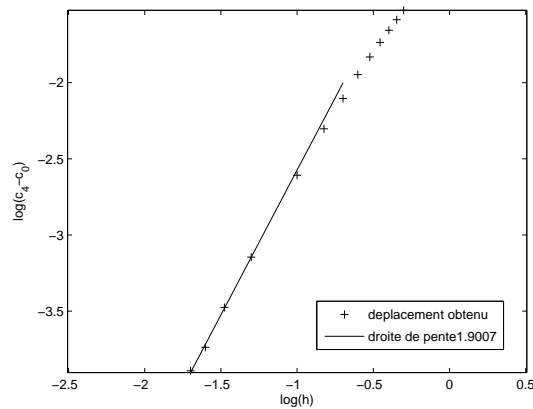


FIG. 2.11 – Nageur : le déplacement Δc est d'ordre 2 en h quand h tend vers zéro.

Une étude du déplacement $c_4 - c_0$ en fonction de h (voir figure 2.11) montre, comme indiqué dans [68], qu'il est d'ordre h^2 quand h est petit. Ces calculs ont été faits pour $a = 0.05$ et $\delta = 4a$. On retrouve en fait ici un résultat bien classique de la théorie du contrôle (voir par exemple [19]) rappelé dans la propriété suivante.

Propriété 2.5 Soit $z \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ solution de $\dot{z} = f(z, u(t))$ où $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x, u) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x)$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$. On note $a = z(0)$ et on suppose

$$\begin{aligned} (u_1(t), u_2(t)) &= (\eta_1, 0), \text{ pour } t \in [0, \varepsilon], \\ (u_1(t), u_2(t)) &= (0, \eta_2), \text{ pour } t \in [\varepsilon, 2\varepsilon], \\ (u_1(t), u_2(t)) &= (-\eta_1, 0), \text{ pour } t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon], \\ (u_1(t), u_2(t)) &= (0, -\eta_2), \text{ pour } t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon]. \end{aligned}$$

Alors, quand ε tend vers zéro,

$$z(4\varepsilon) = a + \eta_1 \eta_2 \varepsilon^2 [f_1, f_2](a) + o(\varepsilon^2)$$

où $[f_1, f_2]$ est le crochet de Lie de f_1 et f_2 défini par $[f_1, f_2] = f_2' f_1 - f_1' f_2$.

2.2.4 Recherche de brassées optimales

Nous avons ainsi retrouvé, grâce à un algorithme basé sur la méthode de pénalisation, les résultats de [68] disant que la système des trois sphères peut nager et que le déplacement final obtenu est d'ordre h^2 quand l'amplitude h du mouvement est petite. Ne se basant pas sur un développement des forces hydrodynamiques pour h petit, cette méthode numérique nous permet de simuler des brassées d'amplitude quelconques et d'obtenir l'évolution du centre de gravité en fonction du temps.

Nous avons étudié numériquement une classe de brassées $t \rightarrow (x_{\delta, h}(t), y_{\delta, h}(t))$ particulière pour laquelle la position du centre de gravité $c(T)$ est différente de sa position initiale $c(0)$. On peut maintenant se demander si le nageur à trois sphères est capable de se déplacer de n'importe quel état à n'importe quel autre : on est ramené à un problème de contrôle. On note X l'état du système, $X = (x, y, c) \in]2a, +\infty[\times]2a, +\infty[\times \mathbb{R}$. Il est régi par l'équation différentielle ordinaire (2.9) que l'on réécrit sous la forme

$$\frac{dX}{dt} = \alpha F_1(X) + \beta F_2(X) \quad (2.13)$$

où $F_1(X) = (\mathbf{e}_1 \cdot T \mathbf{e}_2, 0, \mathbf{e}_3 \cdot T \mathbf{e}_2)^t$ et $F_2(X) = (0, \mathbf{e}_2 \cdot T \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \cdot T \mathbf{e}_1)^t$. Dans [4] (voir annexe B), il est démontré que ce système est globalement contrôlable. C'est-à-dire que, tout état de départ $X_0 = (x_0, y_0, c_0)$ peut être relié à tout état d'arrivée $X_1 = (x_1, y_1, c_1)$ par une solution de (2.13) avec un contrôle $t \rightarrow (\alpha(t), \beta(t))$ bien choisi. On y décrit également un algorithme permettant de calculer des brassées $b : t \rightarrow (x(t), y(t))$ optimales dans le sens où elle maximisent une certaine efficacité. Cet algorithme nécessite la connaissance de F_1 et F_2 qui sont calculés sur une grille discrétisant $]2a, +\infty[\times]2a, +\infty[$ grâce à la méthode décrite précédemment.

2.3 Vésicules

2.3.1 Contexte

Ce travail est issu d'une collaboration avec Mourad Ismail et l'équipe DyFCoM (Dynamique des Fluides Complexes et Morphogénèse) du Laboratoire de Spectrométrie Physique (LSP) de Grenoble. Un des thèmes abordés dans cette équipe est l'étude théorique et expérimentale du comportement mécanique d'objets individuels et en interaction avec leur environnement. Plus particulièrement, ils cherchent à comprendre et à prévoir le comportement de cellules soumises à un écoulement, comme les globules rouges dans le flot sanguin par exemple. La dynamique de ces cellules vivantes est liée à des activités tant biologiques que chimiques ou mécaniques. On s'intéresse ici aux aspects mécaniques de ce comportement.

Pour cela, on étudie des "vésicules géantes". Il s'agit de membranes fermées emprisonnant un liquide, de taille comprise entre 1 et 100 microns. Elles sont formées d'une bicouche incompressible de phospholipides. Les phospholipides sont constitués d'une tête hydrophile et d'une queue hydrophobe (voir figure 2.12). Ce type de vésicules est un

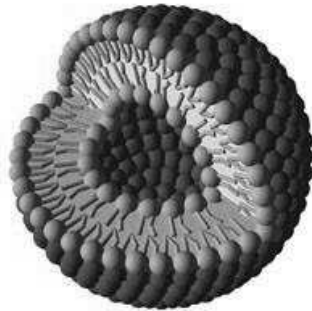


FIG. 2.12 – Représentation schématique d'une vésicule.

modèle efficace et flexible. Il permet de comprendre qualitativement et de prévoir le comportement mécanique de cellules vivantes soumises à un écoulement. Ces vésicules ont l'avantage de pouvoir être facilement fabriquées en laboratoire où l'on peut également modifier leur liquide interne ainsi que leur ratio surface/volume (i.e. leur déformabilité).

L'objectif de ce travail est de modéliser de telles vésicules et d'implémenter un code, facile d'utilisation, reproduisant numériquement leur comportement dans un écoulement. Un tel code, après validation, permettrait de rendre accessibles des paramètres non mesurables expérimentalement. On pourrait ainsi avancer des hypothèses explicatives de certains phénomènes afin d'orienter les recherches expérimentales. On décrit le modèle utilisé dans la section suivante. On présentera ensuite les résultats numériques que l'on comparera avec les résultats expérimentaux obtenus par l'équipe du LSP.

2.3.2 Modèle utilisé

La membrane

On travaille en deux dimensions. La membrane est modélisée par un collier de N particules rigides (voir figure 2.13). On note $(B_i)_{i=1\dots N}$ les particules, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_i$ leurs centres et r leur rayon commun. On suppose que la vésicule est plongée dans un fluide de viscosité μ_{out} et on note μ_{in} la viscosité du liquide qu'elle contient. Afin de visualiser le mouvement de la membrane, sur toutes les représentations de la vésicule, la particule B_1 sera noicie.

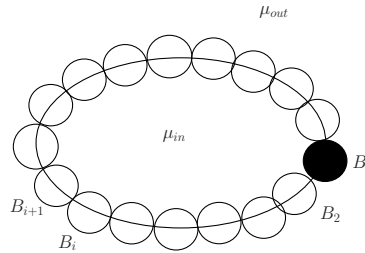


FIG. 2.13 – La membrane vue comme collier de particules rigides.

Les forces interparticulaires sont de deux types. On suppose qu'il existe des ressorts reliant chaque couple de particules voisines et, afin de modéliser la tension superficielle, on ajoute une force angulaire pour chaque triplet de particules successives. On note k_r la constante de raideur des ressorts reliant les particules voisines et l_0 leur longueur à vide (voir figure 2.14). On suppose $l_0 < 2r$. On note \mathbf{e}_i le vecteur unitaire reliant \mathbf{x}_{i-1} à \mathbf{x}_i

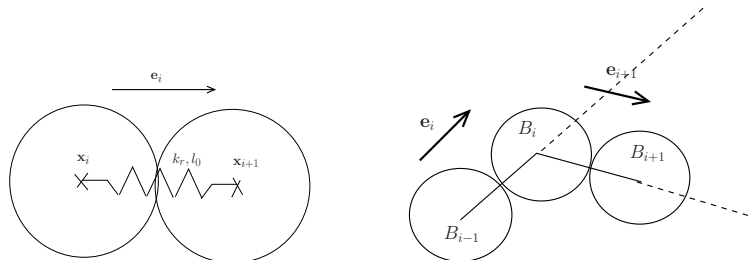


FIG. 2.14 – Forces interparticulaires : ressort (à gauche) et force angulaire (à droite)

pour $i = 2 \dots N$ et \mathbf{e}_1 celui reliant \mathbf{x}_N à \mathbf{x}_1 . La force F_i^r associée aux ressorts exercée sur la i ème particule est

$$\begin{aligned} F_1^r &= k_r(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| - l_0)\mathbf{e}_2 - k_r(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N| - l_0)\mathbf{e}_1 \\ F_i^r &= k_r(|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| - l_0)\mathbf{e}_{i+1} - k_r(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| - l_0)\mathbf{e}_i \text{ pour } i = 2 \dots N - 1 \\ F_N^r &= k_r(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N| - l_0)\mathbf{e}_1 - k_r(|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{N-1}| - l_0)\mathbf{e}_N \end{aligned}$$

La force angulaire considérée (voir figure 2.14), est issue du potentiel

$$\Pi^a = \sum_{i=1}^N \Pi_i^a$$

avec

$$\begin{aligned}\Pi_i^a &= -k_a \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{i+1} \text{ pour } i = 1 \dots N-1 \\ \Pi_N^a &= -k_a \mathbf{e}_N \cdot \mathbf{e}_1\end{aligned}$$

Ce potentiel tend à ramener l'angle entre $-\mathbf{e}_i$ et \mathbf{e}_{i+1} à la valeur π .

Ce problème s'écrit donc comme un problème fluide/particules avec forces imposées et peut être résolu par la méthode de pénalisation décrite dans le chapitre précédent. Afin de s'assurer qu'à chaque instant, aucune particule ne se chevauche et que les particules voisines dans la membrane restent en contact, on ajoute une étape de projection similaire à celle qui sera détaillée dans le chapitre 3. À chaque instant, on souhaite que les vitesses des particules soient telles que à l'instant $n+1$, toutes les distances restent positives et les distances entre particules voisines restent nulles. Pour cela, on projette les vitesses obtenues par la résolution du problème pénalisé sur un espace de vitesses dit *admissible*. Cet espace, noté K^n au temps n , est celui des vitesses pour lesquelles, à l'instant $n+1$, la configuration vérifie les contraintes au premier ordre,

$$K^n = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad D_{ij}(\mathbf{x}^n) + \Delta t \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq 0 \quad \forall i < j \\ \quad \quad \quad D_{i,i+1}(\mathbf{x}^n) + \Delta t \mathbf{G}_{i,i+1}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \forall i \in [2 \dots N] \\ \quad \quad \quad D_{N,1}(\mathbf{x}^n) + \Delta t \mathbf{G}_{N,1}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} = 0 \end{array} \right\},$$

où $\mathbf{x}^n = (\mathbf{x}_i^n)_i$ est la configuration à l'instant n , $D_{ij}(\mathbf{x}^n)$ est la distance entre les particules i et j pour cette configuration et $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n)$ est son gradient.

Contrainte de volume constant

L'algorithme décrit précédemment découple la résolution fluide de la contrainte imposant à la membrane de rester fermée. Ainsi, lors de la première étape, la vitesse obtenue pour les particules ne préserve pas le volume (ou plutôt l'aire en 2D) de la vésicule. Afin de nous assurer ce volume reste constant, il nous faut ajouter une contrainte lors de la résolution fluide. Comme on le verra, cela va conduire à définir une pression à l'intérieur de la vésicule. Pour écrire cette nouvelle contrainte, on considère que le volume interne de la vésicule est celle du polygone de sommets $(\mathbf{x}_i)_i$. On commence par calculer la variation de volume due au déplacement de la particule i . Pour alléger les calculs, on considère le cas où $i \in [1 \dots N-1]$, le cas $i = N$ se traitant de la même façon en adaptant les indices. Supposons donc que la particule i se déplace de $d\mathbf{x}_i$ (voir figure 2.15). On définit $\mathbf{n}_{i,+} = \mathbf{e}_{i+1}^\perp$ et $\mathbf{n}_{i,-} = \mathbf{e}_i^\perp$. Alors, la variation de volume associée au déplacement $d\mathbf{x}_i$ s'écrit

$$\begin{aligned}dA &= dA_{i+1} + dA_{i-1} = \frac{|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| d\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{n}_{i,+}}{2} + \frac{|\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i| d\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{n}_{i,-}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| \mathbf{n}_{i,+} + |\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i| \mathbf{n}_{i,-}) \cdot d\mathbf{x}_i.\end{aligned}$$

On note

$$\mathbf{n}_i = \frac{1}{2\rho_i} (|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i| \mathbf{n}_{i,+} + |\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i| \mathbf{n}_{i,-})$$

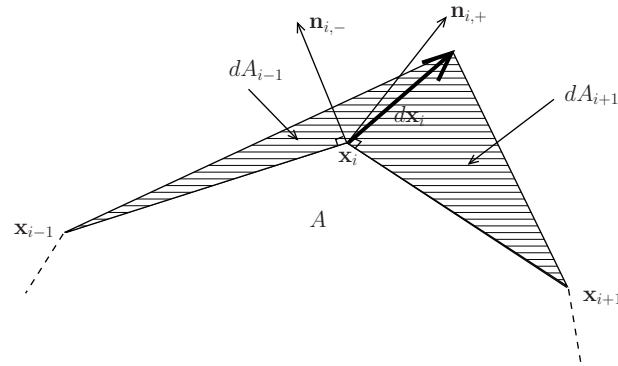


FIG. 2.15 – Variation du volume de la vésicule associée au déplacement de la particule i .

la “normale” à la vésicule au point \mathbf{x}_i où ρ_i est tel que $|\mathbf{n}_i| = 1$. On a montré que le volume de la vésicule reste constant suite au déplacement de la particule i à la vitesse \mathbf{V}_i si

$$\rho_i \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0.$$

Dans le cas où chaque particule i se déplace à vitesse \mathbf{V}_i , la contrainte de volume constant s’écrit,

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0.$$

La remarque A.6 de l’annexe A montre que l’on peut traiter cette nouvelle contrainte (scalaire) à l’aide d’un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela a pour conséquence d’ajouter le terme

$$\lambda \sum_{i=1}^N \rho_i \tilde{\mathbf{V}}_i \cdot \mathbf{n}_i$$

dans la formulation variationnelle utilisée où $\tilde{\mathbf{V}}_i$ est la vitesse de la particule i associée à la fonction test $\tilde{\mathbf{u}}$.

Remarque 2.6 *Ce terme peut être vu comme l’équivalent discret de $\int_{\Gamma} \lambda \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}$ où Γ est le bord de la vésicule et \mathbf{n}_{Γ} la normale à ce bord. λ peut donc être interprété comme une pression s’exerçant à l’intérieur de la vésicule.*

Puisque $\tilde{\mathbf{u}}$ est à mouvement rigide dans B_i , on a $\tilde{\mathbf{V}}_i = \frac{1}{\text{Vol}(B_i)} \int_{B_i} \tilde{\mathbf{u}}$ et le terme à ajouter est

$$\lambda \sum_{i=1}^N \rho_i \tilde{\mathbf{V}}_i \cdot \mathbf{n}_i = \lambda \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \text{ où } \mathbf{g} = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i \mathbf{n}_i}{\text{Vol}(B_i)} \mathbf{1}_{B_i}.$$

On note \mathbf{u}_{λ} la solution de ce problème à λ fixé. Comme dans le cas de la valve cardiaque (section 2.1), on remarque que $\lambda \rightarrow \mathbf{u}_{\lambda}$ est affine et que la solution recherchée s’écrit sous la forme,

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_0 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_1.$$

Pour calculer \mathbf{u} , il suffit donc de résoudre deux problèmes à λ fixé et le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ s'obtient alors en écrivant que la contrainte doit être vérifiée. Si on note \mathbf{V}_i^0 et \mathbf{V}_i^1 les vitesses de la particule i associées respectivement à \mathbf{u}_0 et \mathbf{u}_1 , on a

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-\sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i^1 \cdot \mathbf{n}_i}{\sum_{i=1}^N (\mathbf{V}_i^0 - \mathbf{V}_i^1) \cdot \mathbf{n}_i}.$$

Remarque 2.7 *Noter que l'on impose ici $\frac{dA}{dt} = 0$. Suite à la discrétisation en temps, la contrainte de volume constant n'est en réalité imposée qu'à l'ordre un et il y a donc des variations de volume d'ordre deux par rapport au déplacement des particules. Ceci est vrai que la résolution fluide soit découplée de la gestion des contacts ou non. Il est donc possible qu'une accumulation de ces petites variations fasse apparaître une variation significative du volume de la vésicule en temps long. Une façon de limiter cet effet serait de calculer le volume initial de la vésicule A_0 et d'imposer $A = A_0$ par une contrainte de double inégalité. Dans ce cas, à chaque instant, la contrainte corrige les erreurs issues des instants précédents. Bien que ce ne soit pas la stratégie choisie ici, il sera nécessaire de l'implémenter par la suite si on souhaite effectuer des calculs en temps long.*

2.3.3 Résultats obtenus

On étudie le comportement de vésicules soumises à un écoulement de fluide en cisaillement. On sait que la dynamique associée varie en fonction des paramètres de l'écoulement (taux de cisaillement) et de la vésicule elle-même (différence entre viscosité interne et externe, rapport surface/volume). Par exemple, lorsque la viscosité interne est faible, la vésicule elliptique présente une orientation fixe et sa membrane tourne autour d'elle ; on parle de mouvement de *chenille de char*. Puis, si on augmente peu à peu la viscosité interne, on trouve une valeur limite au-dessus de laquelle la vésicule se comporte comme un solide et présente un mouvement dit de *bascule*. On a cherché à retrouver numériquement ces deux comportements.

Les paramètres utilisés lors des simulations numériques sont les suivants : $N = 20$, $r = 4$, $k_a = 1$, $l_0 = 3r/2$ et $\mu_{out} = 1$. On présente les résultats obtenus pour $\mu_{in} = 1$ et $k_r = 100$ (voir figure 2.16). On y observe un mouvement de *chenille de char* que l'on peut comparer à un mouvement similaire réalisé en laboratoire. Le mouvement dit de *bascule* (figure 2.17) a lui été obtenu pour $\mu_{in} = 30$ et $k_r = 50$.

Ces résultats reflètent le comportement connu des vésicules soumises à un cisaillement et sont donc encourageants. D'autres tests sont à prévoir afin de valider le modèle et de comprendre l'influence des différents paramètres.

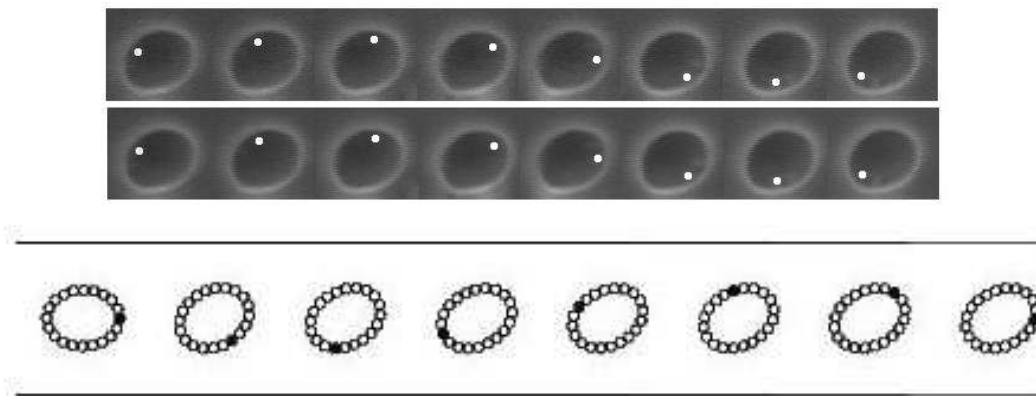


FIG. 2.16 – Mouvement de *chenille de char*. Observation expérimentale (en haut) extraite de [57] et résultats numériques (en bas)

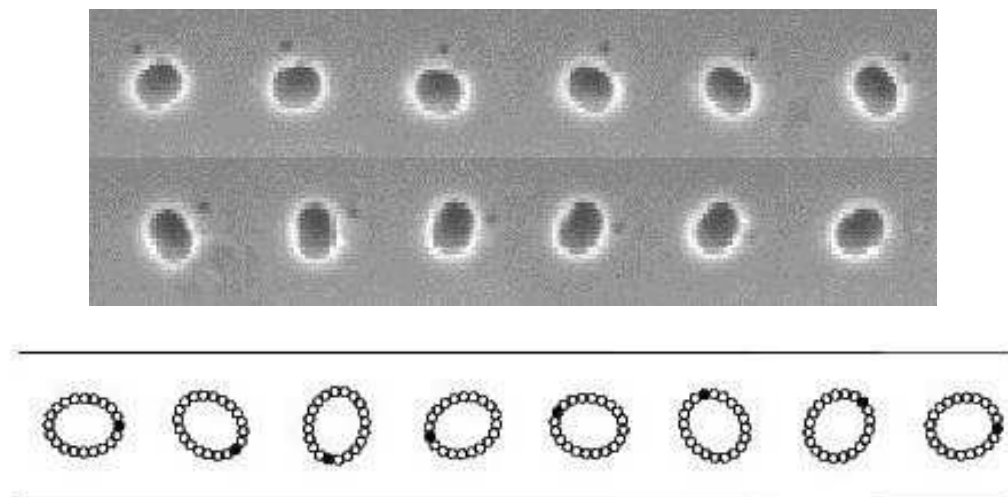


FIG. 2.17 – Mouvement de *bascule*. Observation expérimentale (en haut) extraite de [58] et résultats numériques (en bas)

Deuxième partie
Interactions rapprochées

Chapitre 3

Préambule : Un algorithme de gestion des contacts modélisant des collisions inélastiques

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.1 | Contexte | 66 |
| 3.2 | Méthode de prise en compte des contacts | 67 |
| 3.2.1 | Un espace de vitesses “admissibles” | 67 |
| 3.2.2 | Cas de la méthode de pénalisation : formulation variationnelle modifiée | 68 |
| 3.2.3 | Méthode de splitting | 70 |
| 3.3 | Résultats numériques | 71 |

Résumé : Dans ce chapitre nous présentons une méthode permettant d’empêcher les contacts lors de simulations d’écoulements fluide/particules denses. La méthode utilisée, proposée dans [64], est basée sur la projection des vitesses sur un espace dit de *vitesses admissibles* et modélise des contacts solides inélastiques. Nous montrons comment elle peut être intégrée à la méthode de pénalisation présentée dans la partie précédente. Puis, par souci d’efficacité, nous proposons d’effectuer un *splitting* entre la résolution de l’écoulement fluide/particules et la gestion des contacts. Nous présentons les résultats obtenus dans le cas d’un lit fluidisé et d’une sédimentation de particules.

Abstract : We present in this chapter a method to avoid contacts in numerical simulations of fluid/particle flows. The method, proposed in [64], is based on a projection of the velocities onto a set of *admissible velocities* and models inelastic contacts. We show how it can become integrated in the penalty method presented in the previous part. Then, to improve efficiency, we propose to split the computation of the fluid/particle flow and the projection. We present results of fluidization and sedimentation of particles.

3.1 Contexte

Dans le cas d’importantes fractions solides, les algorithmes de simulation d’écoulements fluide/particules utilisés doivent intégrer une méthode de gestion des contacts. Noter que le terme “contact” est en fait ici assez mal adapté puisque, comme montré dans [45], la force de lubrification empêche des particules lisses immergées dans un fluide Newtonien d’entrer en contact en temps fini. Cependant, elles peuvent devenir arbitrairement proches les unes des autres et, suite aux discrétisations en temps et en espace, des collisions numériques peuvent se produire. Il est indispensable de mettre en place des méthodes pour éviter ces contacts tant pour des raisons physiques (des particules rigides ne peuvent s’interpénétrer) que numériques (de nombreux codes s’arrêtent quand deux frontières se rencontrent).

La première idée pour empêcher ces collisions, est de chercher une stratégie permettant de calculer avec précision les forces de lubrification. Dans [46], une méthode basée sur des raffinements locaux du maillage et du pas de temps a été programmée et donne de bons résultats. Cependant, le nombre de raffinements ainsi que la petitesse du pas de temps nécessaires pour éviter les collisions ne sont pas connus a priori et la méthode peut donc présenter un coût de calcul très important.

Par conséquent, des stratégies moins coûteuses ont été mises en place. Certaines consistent à ajouter aux forces extérieures déjà existantes une force répulsive à courte portée (voir [36, 71] ou [82]). Dans [62], un algorithme de minimisation est utilisé pour imposer une distance minimale entre les particules alors que dans [76], les particules sont autorisées à se chevaucher légèrement et une force élastique répulsive est appliquée quand de tels chevauchements ont lieu. Ces méthodes assurent bien entendu la stabilité numérique des algorithmes mais elles introduisent de nouveaux paramètres à ajuster et ne respectent pas la physique sous-jacente. Une autre approche est d’implémenter une stratégie de collisions basée sur des contacts inélastiques. Cette idée a été utilisée dans [49] afin d’imposer une distance minimale entre les particules. Cependant, la méthode consi-

dère chaque couple de particules voisines séparément et ne permet donc pas de traiter le cas de systèmes denses.

Nous proposons dans cette section d'utiliser un modèle de collisions inélastiques en implémentant le schéma décrit dans [64] dans le cas d'écoulements granulaires. Il consiste en un algorithme global de projection des vitesses sur un espace de *vitesses admissibles*. Cela nous permet d'imposer une distance minimale entre les particules et, puisque qu'il prend en compte globalement tous les contacts possibles, il permet de gérer efficacement les cas denses. Un modèle permettant de modéliser la force de lubrification, et de gérer les interactions rapprochées de manière efficace, en respectant la physique sous-jacente, sera présenté dans le chapitre suivant. Son implémentation numérique sera basée sur l'algorithme décrit ici.

3.2 Méthode de prise en compte des contacts

3.2.1 Un espace de vitesses "admissibles"

Dans [64], B. Maury propose un schéma numérique pour simuler des écoulements granulaires avec contacts inélastiques. La méthode consiste à imposer une contrainte sur le vecteur \mathbf{V} des vitesses des particules : ce dernier doit, à chaque instant, appartenir à un espace de vitesses dites *admissibles*.

On note $D_{ij}(\mathbf{x}^n) = |\mathbf{x}_i^n - \mathbf{x}_j^n| - r_i - r_j$, la distance signée entre les particules i et j ainsi que $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \in \mathbb{R}^{2N}$ le gradient de cette distance,

$$\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) = (\dots, 0, \underset{i}{-\mathbf{e}_{ij}^n}, 0, \dots, 0, \underset{j}{\mathbf{e}_{ij}^n}, 0, \dots, 0) \quad (3.1)$$

où $\mathbf{e}_{ij}^n = \frac{\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n}{|\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_i^n|}$ (voir Fig. 3.1).

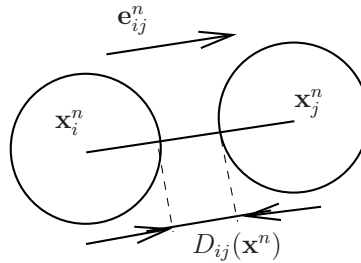


FIG. 3.1 – Gestion des contacts, notations au temps n

On note h le pas de temps et, à chaque instant de calcul t^n , $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}$ est un vecteur vitesse *admissible*, s'il appartient à l'espace convexe fermé $K(\mathbf{x}^n)$ appelé espace des *vitesses admissibles*,

$$K(\mathbf{x}^n) = \{ \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq 0 \quad \forall i < j \}.$$

Remarque 3.1 On note $E(\mathbf{x}^n) = \{\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{x}^n + h\mathbf{V}) \geq 0 \quad \forall i < j\}$ l'espace des vitesses \mathbf{V} telles que des particules positionnées à l'instant n en \mathbf{x}^n et soumises à la vitesse \mathbf{V} , ne se chevauchent pas au temps suivant. La contrainte $D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq 0$ est le linéarisé de $D_{ij}(\mathbf{x}^n + h\mathbf{V}) \geq 0$. Puisque la fonction distance entre deux particules circulaires est une fonction convexe de \mathbf{x} , on a $K(\mathbf{x}^n) \subset E(\mathbf{x}^n)$. Ainsi, des particules ayant une vitesse admissible (i.e. dans $K(\mathbf{x}^n)$) à l'instant n ne se chevaucheront pas au temps $n + 1$.

Remarque 3.2 Le cas d'obstacle (solides de vitesse nulle, penser à des simulations dans des boîtes fermées par exemple) se traite de la même manière. La position de l'obstacle k étant fixée, la distance entre la particule i et cet obstacle dépend que de \mathbf{x}_i . Ainsi, le gradient \mathbf{G}_{ik} de cette distance n'a de composante non nulle qu'en position i et cette nouvelle contrainte n'ajoute de force que sur la particule i . Ceci nous permettra par exemple d'effectuer des simulations dans des boîtes fermées.

3.2.2 Cas de la méthode de pénalisation : formulation variationnelle modifiée

On souhaite résoudre le problème fluide/particules par la méthode de pénalisation décrite dans la partie I. L'étape 2 de l'algorithme 1.1 doit donc être modifiée afin de prendre en compte la contrainte :

$$\mathbf{V}^{n+1} \in K(\mathbf{x}^{n+1}) \text{ avec } \forall i, \quad \mathbf{V}_i^{n+1} = \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_i^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}.$$

On écrit ce nouveau problème comme un problème de point-selle et on note $\lambda_{ij}^{n+1} \geq 0$ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $D_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \cdot \mathbf{V} \geq 0$. La formulation variationnelle ($\mathcal{P}_{var,\varepsilon}^{n,\varepsilon}, 1.13$) est alors remplacée par le problème suivant : trouver $\mathbf{u}^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$, $p^{n+1} \in L^2(\Omega)$ et $\boldsymbol{\lambda}^{n+1} \in \mathbb{R}_+^{N(N-1)/2}$ tels que,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{2}{\varepsilon} \int_{B^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \\ & - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{h} \int_{\Omega} (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ X^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$+ \sum_{i < j} \lambda_{ij}^{n+1} h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (3.3)$$

$$D_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \cdot \mathbf{V}^{n+1} \geq 0, \quad \forall i < j, \quad (3.4)$$

$$\lambda_{ij}^{n+1} (D_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \cdot \mathbf{V}^{n+1}) = 0, \quad \forall i < j, \quad (3.5)$$

où $\mathbf{V}_i^{n+1} = \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_i^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}$ et $\tilde{\mathbf{V}}_i = \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_i^{n+1}} \tilde{\mathbf{u}}$. L'équation (3.5) est une équation de complémentarité qui dit que le multiplicateur de Lagrange λ_{ij}^{n+1} ne peut être activé (i.e. être non nul) que si la contrainte associée aux particules i et j est saturée. Si on compare (3.2) à $(\mathcal{P}_{var}^{n,\varepsilon}, 1.13)$, on voit que $\lambda_{ij}^{n+1} h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1})$ est la force supplémentaire qui doit s'exercer sur les particules i et j afin d'éviter leur chevauchement. Notons que, d'après (3.1), elle n'agit que sur les particules i et j et, est dirigée selon \mathbf{e}_{ij} .

Propriété 3.3 *Le problème (3.2,3.3,3.4,3.5) admet une solution $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}, \boldsymbol{\lambda}^{n+1})$ dans $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R}_+^{N(N-1)/2}$.*

Démonstration : Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} \in K, \\ J_\varepsilon^n(\mathbf{u}^{n+1}) = \min_{\mathbf{v} \in K} J_\varepsilon^n(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (3.6)$$

où J_ε^n est la fonctionnelle donnée dans (1.11) qui intervient dans le problème de minimisation associée à la pénalisation du mouvement rigide :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^n(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2h} \int_\Omega \rho^{n+1} |\mathbf{v}|^2 + \mu \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{B^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_\Omega (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ \mathbf{X}^n \cdot \mathbf{v} - \int_\Omega \mathbf{f}^n \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

L'espace des contraintes K est l'intersection de l'espace K_∇ associé à la contrainte de divergence nulle avec celui associé aux contraintes de non-chevauchement :

$$K = K_\nabla \cap \{D_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) + h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \cdot \mathbf{V} \geq 0, \forall i < j\}.$$

- Il s'agit de la minimisation d'une fonctionnelle strictement convexe, semi-continue inférieurement et coercive sur un ensemble convexe fermé. Il existe donc un unique $\mathbf{u}^{n+1} \in K$ solution de (3.6).
- Le nombre de contraintes de non-chevauchement étant fini, on est dans le cadre de la section A.2 de l'annexe A avec $V = K_\nabla$, $M = \mathbb{R}^{N(N-1)/2}$, $z \in M$ et $B \in \mathcal{L}(V, M)$ donnés par

$$\begin{aligned} z_{ij} &= D_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \quad \text{et} \quad \mathbf{B} : V \mapsto \mathbb{R}^{N(N-1)/2}, \\ \mathbf{w} &\longrightarrow (B_{ij} \mathbf{w})_{i < j} \end{aligned}$$

où $B_{ij} \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, est défini par

$$B_{ij} \mathbf{w} = -h \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \cdot \mathbf{W} \quad \text{avec} \quad \mathbf{W}_i = \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_i^{n+1}} \mathbf{w}.$$

Le théorème A.12 montre qu'il existe $\boldsymbol{\lambda}^{n+1} \in \mathbb{R}_+^{N(N-1)/2}$ tel que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_\Omega \rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + 2\mu \int_\Omega \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{2}{\varepsilon} \int_{B^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \\ &= \frac{1}{h} \int_\Omega (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ \mathbf{X}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_\Omega \mathbf{f}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i < j} \lambda_{ij}^{n+1} B_{ij} \tilde{\mathbf{u}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in K_\nabla, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$D_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \cdot \mathbf{V}^{n+1} \geq 0, \quad \forall i < j,$$

$$\lambda_{ij}^{n+1} (D_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \cdot \mathbf{V}^{n+1}) = 0, \quad \forall i < j.$$

- $\boldsymbol{\lambda}^{n+1}$ étant donné, (3.7) est une formulation variationnelle de type Stokes généralisée et il existe donc $\mathbf{p}^{n+1} \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{\Omega} \rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + 2\mu \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{2}{\varepsilon} \int_{B^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) : \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{p}^{n+1} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{h} \int_{\Omega} (\rho^n \mathbf{u}^n) \circ X^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}^n \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ & + \sum_{i < j} \lambda_{ij}^{n+1} B_{ij} \tilde{\mathbf{u}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{q} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in L^2(\Omega).$$

Finalement, par définition des B_{ij} , on obtient que $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1}, \boldsymbol{\lambda}^{n+1})$ est une solution du problème de (3.2,3.3,3.4,3.5). \square

3.2.3 Méthode de splitting

Dans [64], le problème de point-selle correspondant à (3.2) est résolu numériquement par un algorithme d'Uzawa (voir section A.3 en annexe). Dans notre cas, puisque les particules sont plongées dans un fluide, chaque itération de l'algorithme d'Uzawa nous amènerait à résoudre la formulation variationnelle (3.2) à $\boldsymbol{\lambda}$ fixé. Une résolution du problème de Stokes généralisé à chaque itération d'Uzawa serait très cher en temps de calcul. Afin d'éviter ce problème, on utilise une méthode de splitting en séparant la résolution fluide, de la gestion de la contrainte. On note S le solveur fluide/particules qui résout le problème pénalisé $(\mathcal{P}_{var}^{n,\varepsilon}, 1.13)$. L'algorithme utilisé est l'algorithme 3.1 décrit page suivante.

L'étape de projection 3b est maintenant semblable à celle du cas granulaire et, comme dans [64], elle est effectuée grâce à un algorithme d'Uzawa. Les contraintes étant affines, réelles et en nombre fini, la convergence de cet algorithme est assurée par la propriété A.15 de l'annexe A.

Remarque 3.4 *Puisque l'on a séparé la résolution fluide de la méthode de gestion des contacts, il est possible dans l'algorithme 3.1 de remplacer dans l'étape 2 la méthode de pénalisation par n'importe quelle solveur S de résolution d'écoulement fluide/particules sans gestion des contacts.*

Pour tout $n \geq 0$, on dispose des $(\mathbf{x}^n, \mathbf{V}^n)$, $(\mathbf{u}^n, \mathbf{p}^n)$. On note $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}) = \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\mathbf{x}, s) ds$.

1. calcul de \mathbf{x}^{n+1} :

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + h\mathbf{V}_i^n,$$

2. Calcul de $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1})$ grâce au solveur fluide/particules :

$$(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1}) = S(\mathbf{x}^{n+1}, \mathbf{u}^n, \mathbf{f}^n).$$

3. calcul de \mathbf{V}^{n+1}

(a) Calcul de la vitesse $\mathbf{V}^{n+1/2}$ associée à \mathbf{u}^{n+1} : $\forall i, \mathbf{V}_i^{n+1/2} = \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_i^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}$

(b) Projection sur l'espace des *vitesse admissibles* :

$$|\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1/2}|^2 = \min_{\mathbf{V} \in K(\mathbf{x}^{n+1})} |\mathbf{V} - \mathbf{V}^{n+1/2}|^2$$

Algorithme 3.1: Schéma numérique avec gestion des contacts.

3.3 Résultats numériques

Afin de résoudre correctement le fluide restant entre deux particules voisines, il est nécessaire d'avoir au moins un élément du maillage entre elles. On réduit donc l'espace des vitesses admissibles : si h est le pas du maillage, on choisit

$$K(\mathbf{x}^n) = \{ \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq \eta \} \quad \text{avec } \eta \approx h.$$

On observe figure 3.3 les configurations obtenues pour la simulation d'un lit fluidisé pour un fluide de Navier-Stokes. Il y a 70 particules de rayons variant entre 0.025 et 0.035. La boîte est un carré de côté 1, la viscosité du fluide est $\mu = 0.01$. Sa densité et celle des particules sont respectivement $\rho_f = 1$ et $\rho_B = 2$. On effectue les simulations pour $N_m = 100$ (nombre d'éléments du maillage par unité de longueur au bord) et $dt = 0.01$. Du fluide entre sur la moitié gauche de la paroi du bas selon un profil de Poiseuille. On impose des conditions de Dirichlet homogènes sur les parois droite et gauche. La paroi du haut est une sortie libre pour le fluide mais est vue comme un obstacle pour les particules (imaginer une grille laissant passer le fluide). Ces conditions au bord sont résumées sur la figure 3.2. Une des particules est marquée afin de suivre sa trajectoire.

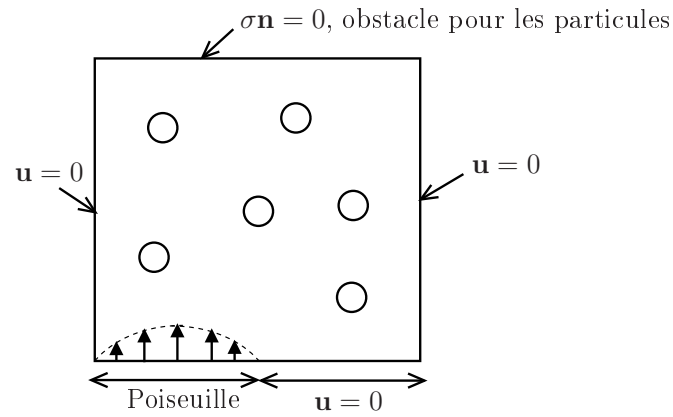


FIG. 3.2 – Lit fluidisé : conditions au bord

Sur la figure 3.4, on observe les configurations obtenues pour la sédimentation de 228 particules dans une boîte fermée, emplie d'un fluide de Navier-Stokes. La boîte est un carré de côté 2, le rayon des particules est $r = 0.04$, la viscosité du fluide est $\mu = 0.01$. Sa densité et celle des particules sont respectivement $\rho_f = 1$ et $\rho_B = 2$. On effectue les simulations pour $N_m = 100$ et $dt = 0.01$.

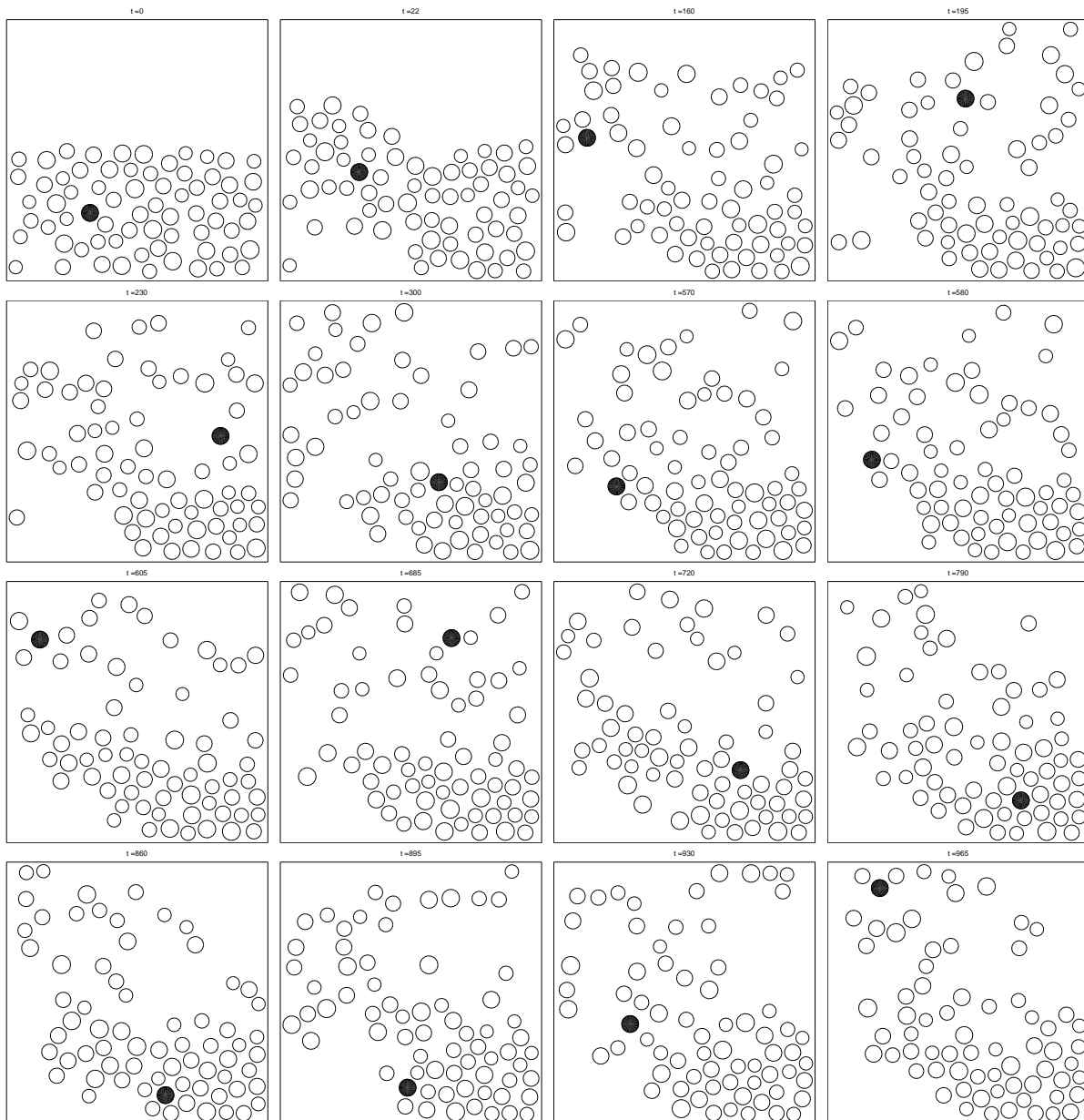


FIG. 3.3 – Lit fluidisé de 70 particules : configurations à différents pas de temps.

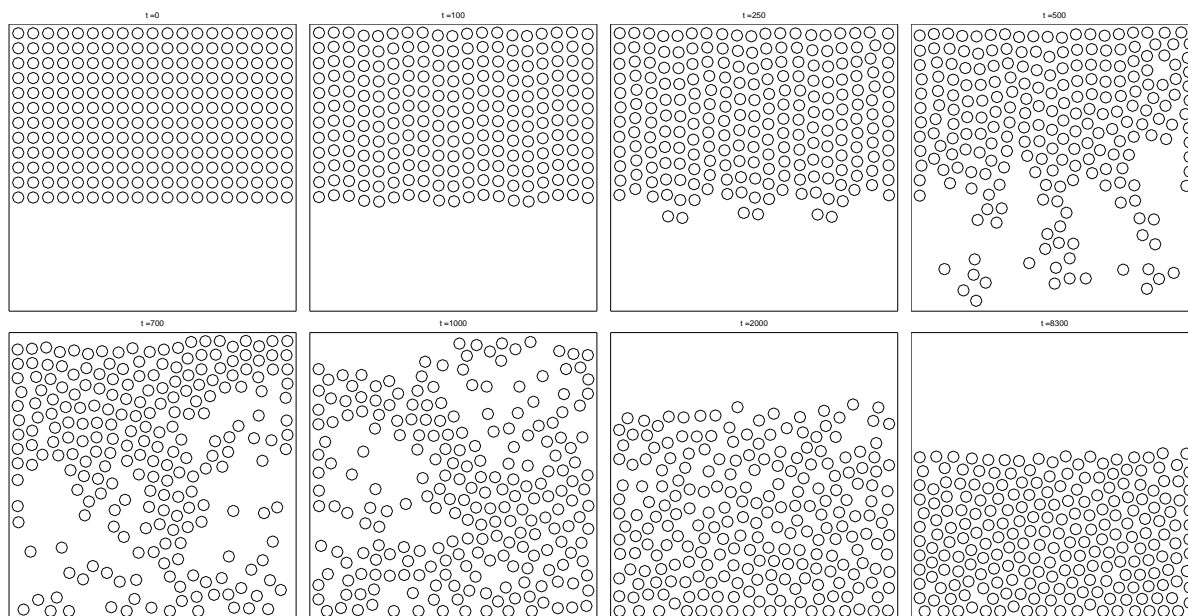


FIG. 3.4 – Sédimentation de 228 particules : configurations à différents pas de temps.

Chapitre 4

Un modèle de “contact visqueux”, cas particule/plan

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| 4.1 | Force de lubrification normale et contact | 76 |
| 4.1.1 | Cas d’objets lisses | 76 |
| 4.1.2 | Conséquences numériques | 79 |
| 4.1.3 | Cas d’objets rugueux | 81 |
| 4.2 | Modèle de “contact visqueux” | 84 |
| 4.2.1 | Un exemple | 85 |
| 4.2.2 | Ecriture du modèle et résultats de convergence | 89 |
| 4.3 | Algorithme associé | 93 |
| 4.3.1 | Réécriture du problème | 94 |
| 4.3.2 | Schéma numérique | 96 |
| 4.3.3 | Intégration à la simulation fluide/particules | 108 |
| 4.4 | Enrichissement du modèle | 109 |
| 4.4.1 | Prise en compte de la rugosité | 109 |
| 4.4.2 | Ajout de la force de lubrification tangentielle | 111 |

Résumé : Nous présentons dans ce chapitre un modèle permettant de prendre en compte la force de lubrification s’exerçant sur une particule à l’approche d’un plan. La première section est consacrée à une revue des propriétés connues de la force de lubrification dans le cas de solides lisses puis rugueux. Dans une seconde section, nous présentons un modèle de “contact visqueux” initialement proposé dans [65], qui est obtenu comme limite à viscosité nulle du modèle de lubrification. Dans ce modèle limite, lorsque la particule est collée au plan (contact macroscopique), une variable auxiliaire enregistre les effets des forces extérieures qui s’exercent sur elle et mesure, en un certain sens, la petitesse de la distance entre la particule et le plan. Nous proposons dans la section suivante un algorithme permettant de simuler le comportement d’un tel système. Nous démontrons sa convergence et expliquons comment il peut être intégré à des simulations fluide/particules. Finalement, nous généralisons dans la dernière section le modèle proposé afin de prendre en compte la rugosité et la force de lubrification tangentielle.

Abstract : In this chapter we present a model to take into account the lubrication force acting on a particle approaching a plane. The first section is dedicated to a look over the properties of the lubrication force in the case of smooth and rough particles. We present in the second section a “gluey particle” model initially proposed in [65], obtained as the vanishing viscosity limit of the lubrication model. In that limit model, when the particle is stuck to the plane (macroscopic contact), an auxiliary variable stores the effects of external forces acting on it and measures in a way the smallness of the distance between the particle and the plane. We propose in the next section an algorithm to compute the behaviour of such systems. We prove its convergence and show how it can become integrated in fluid/particle simulations. Finally, we extend in the last section the proposed model to take into account roughness and the tangential lubrication force.

4.1 Force de lubrification normale et contact

4.1.1 Cas d’objets lisses

On considère une particule lisse et sphérique située au dessus d’un plan. On suppose qu’elle est assujettie à se déplacer dans la direction normale au plan. On note r le rayon de la particule, \mathbf{x} son centre, $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_2$ sa vitesse et q sa distance par rapport au plan (voir Fig.4.1).

M. Hillairet a démontré dans [45] que, si la particule et le plan sont lisses et si le fluide est de Navier-Stokes alors q ne peut tendre vers zéro en temps fini. Cela signifie qu’il n’y a pas contact entre la particule et le plan en temps fini. Physiquement, cela s’explique par le fait que, quand la particule se rapproche du plan, le fluide situé dans l’interstice doit s’évacuer et la résistance du fluide crée alors une force qui pénalise le mouvement de la particule. Il s’agit de la force de lubrification que l’on note \mathbf{F}_{lub} .

L’effet de la présence d’une paroi sur le mouvement d’une sphère dans un fluide visqueux a fait l’objet de nombreuses recherches. Dès 1961, Brenner dans [15] et Maude

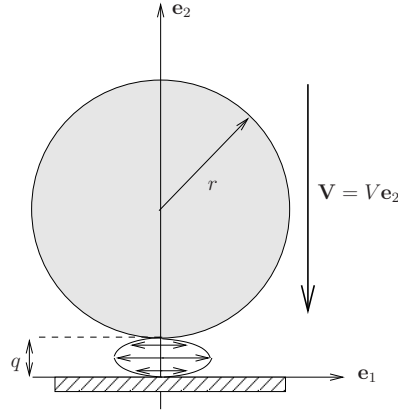


FIG. 4.1 – Force de lubrification normale : notations

dans [59] donnent une solution analytique pour (\mathbf{u}, \mathbf{p}) dans le cas d'un fluide de Stokes. Ils en déduisent une expression exacte de la force de lubrification sous forme d'une série et en donnent un développement à grande distance. En 1974, Cox s'intéresse dans [20] au cas de deux solides lisses de forme quelconque évoluant dans un fluide de Stokes. Un développement asymptotique de la solution en puissances de q lui permet d'obtenir l'équivalent de la force quand la distance tend vers zéro. Dans le cas d'une sphère de rayon r_1 immobile et d'une autre sphère de rayon r_2 se déplaçant à vitesse \mathbf{V} le long de l'axe des centres, le premier terme de la force exercée sur la sphère mobile est

$$\mathbf{F} = -6\pi\mu \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{\mathbf{V}}{q} + O(\ln(q)),$$

où μ est la viscosité du fluide et q la distance entre les deux sphères. En faisant tendre le rayon de la sphère fixe vers $+\infty$, on obtient le cas du mouvement d'une sphère perpendiculaire à un plan. La force de lubrification correspondante est de la forme

$$\mathbf{F}_{lub} = -6\pi\mu r^2 \frac{\mathbf{V}}{q} + O(\ln(q))$$

où r est le rayon de la sphère. Noter que $\mathbf{F}_{Stokes} = -6\pi\mu r \mathbf{V}$ est le premier terme de la force qui s'exerce sur une sphère en milieu infini (donné par Stokes en 1851 dans [78]). Le coefficient r/q peut donc être vu comme un facteur correctif dû à la présence d'un mur. La force de lubrification s'oppose au mouvement (elle est orientée dans le sens de $-\mathbf{V}$). Elle est proportionnelle à la viscosité et à l'inverse de la distance. En effet, plus la distance est petite et la viscosité grande, plus le fluide tend à s'opposer au mouvement de la particule. On remarque enfin que la force augmente quand le rayon augmente : dans ce cas, le fluide a plus de difficulté à s'échapper de l'interstice particule/plan et il oppose donc plus de résistance au mouvement. Ces résultats ont été observés expérimentalement (voir par exemple [86], [2] ou [5]). L'utilisation de la solution exacte de [15] permet, dans [21], d'obtenir le second terme du développement à courte distance. Ce développement à l'ordre 2 a été retrouvé dans [18] grâce à un développement en puissances de q de la fonction

courant.

$$\mathbf{F}_{lub} = -6\pi\mu r \mathbf{V} \left(\frac{r}{q} - \frac{1}{5} \ln \frac{r}{q} + k + O(1) \right).$$

On note $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_2$ la force massique extérieure exercée sur la particule. Grâce à ces développements, on peut écrire le Principe Fondamental de la Dynamique au premier ordre,

$$m\ddot{q}(t) = -6\pi\mu r^2 \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + mf(t). \quad (4.1)$$

Si on se restreint à cette équation au premier ordre, on peut montrer que, pour des forces “raisonnables”, il n’y a pas contact en temps fini. Cette propriété peut être formalisée de la façon suivante :

Propriété 4.1 *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, l’équation différentielle*

$$\begin{cases} m\dot{q}(t) = -\kappa \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + mf(t), \\ q(0) = q_0 > 0, \quad \dot{q}(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où κ est strictement positif, possède une unique solution maximale qui est globale.

Démonstration :

En posant $X = (q, \dot{q})$, on réécrit (4.1) sous la forme d’un système d’équations différentielles d’ordre 1 : $\dot{X} = F(t, X)$. F est de classe \mathcal{C}^1 en X sur $\Omega_X = \{(q, u), q > 0\}$. Le théorème de Cauchy Lipschitz donne alors l’existence d’une unique solution maximale dans Ω_X . On note T le temps d’existence de cette solution. Si elle n’est pas globale ($T < +\infty$), le théorème d’échappement affirme qu’elle doit sortir de tout compact de Ω_X . Or, en multipliant (4.1) par \dot{q} et en intégrant entre 0 et $t < T$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}\dot{q}^2(t) &\leq \frac{m}{2}\dot{q}^2(0) + m \int_0^t f\dot{q} \\ &\leq \frac{m}{2}\dot{q}^2(0) + m\|f\|_{L^2([0,t])}\|\dot{q}\|_{L^2([0,t])} \\ &\leq \frac{m}{2}\dot{q}^2(0) + \frac{m}{2}\|f\|_{L^2([0,t])}^2 + \frac{m}{2}\|\dot{q}\|_{L^2([0,t])}^2 \\ &\leq \frac{m}{2}\dot{q}^2(0) + \frac{m}{2}\|f\|_{L^2([0,T])}^2 + \frac{m}{2}\|\dot{q}\|_{L^2([0,t])}^2. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall nous permet d’en déduire que \dot{q} est borné sur $[0, T]$ pour $T < +\infty$ et donc que X l’est aussi. La seule façon pour une solution de sortir de tout compact de Ω_X est donc de s’approcher de sa frontière $\{q = 0\}$. Or, en intégrant une fois (4.1), on obtient

$$m\dot{q}(t) = C_1 - C_2 \ln(q(t)) + m \int_0^t f(s) ds.$$

Ainsi, si q tend vers 0 en $T < +\infty$, nécessairement, \dot{q} explose en T , ce qui est impossible d’après ce qui précède. Par conséquent, la solution ne peut sortir de tout compact en temps fini et elle est globale. \square

On démontre de la même manière qu’une solution de (4.1) ne peut s’annuler en temps fini. Ainsi, le premier ordre du développement de la force de lubrification quand la distance tend vers zéro contient déjà l’information de “non contact en temps fini”. Le modèle que nous allons présenter dans la section suivante se basera sur cet équivalent et sur le Principe Fondamental de la Dynamique (4.1).

Remarque 4.2 *En dimension 2, le premier terme du développement de la force de lubrification est en $\dot{q}/q^{3/2}$ (voir [51]). On montre de la même façon qu’il ne peut y avoir contact en temps fini en dimension 2.*

Remarque 4.3 *Dans le chapitre 6, on considère le cas d’un boulier de particules et on montre également qu’il ne peut y avoir de contact en temps fini entre les particules.*

Nous venons de montrer qu’une particule lisse ne peut toucher le plan en temps fini. Cependant, ce système se trouve à la limite du contact. Si le premier ordre de la force était en $\dot{q}/q^{1+\eta}$ avec $\eta > 0$, il n’y aurait a fortiori, pas contact en temps fini. Par contre, s’il était en $\dot{q}/q^{1-\eta}$, il y aurait contact en temps fini. La conséquence du fait que le cas 3D corresponde à l’exposant critique est que, bien que les distances ne s’annulent pas, elles deviennent très petites. Par exemple, sans force extérieure ($f = 0$) et pour une viscosité $\mu = 10^{-3}$, avec une condition initiale $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = -1$, la particule atteint une position limite pour laquelle la distance vaut $q_\infty \approx e^{-10^3}$.

4.1.2 Conséquences numériques

La force de lubrification empêche donc le contact entre les particules lisses. Cependant, on a vu que les distances interparticulaires peuvent devenir très petites. Or, lors de simulations numériques, l’écoulement fluide est en général mal résolu entre deux particules proches et donc, la force de lubrification est mal estimée. A ces erreurs dues à la discrétisation en espace, s’ajoutent celles issues de la discrétisation en temps. Par conséquent, numériquement, des contacts peuvent être observés. Des raisons de robustesse numérique rendent alors indispensable le développement de techniques particulières dédiées à la prise en compte de ces contacts “numériques”. Nous en avons décrit certaines dans le chapitre 3 consacré à la simulation d’écoulements denses. Une méthode basée sur la projection des vitesses sur un espace de *vitesses admissibles* y a été détaillée. Elle revient à modéliser les contacts par des collisions inélastiques. Ces méthodes permettent de gérer efficacement les contacts et d’obtenir des algorithmes robustes.

Cependant, des raisons de modélisation rendent nécessaire le développement d’autres méthodes, plus respectueuses de la physique sous-jacente et prenant en compte les phénomènes de lubrification qui ont lieu dans la zone intersticielle. En effet, comme on l’a déjà souligné, lors de simulations à forte densité de particules, ces phénomènes ont un rôle prépondérant dans le comportement global du système. Nous avons montré, par exemple, qu’ils empêchaient les contacts entre les particules. On observe également que, pour des solutions semi-diluées, la vitesse moyenne de sédimentation des particules (obtenue par simulation numérique non directe) est légèrement différente selon la manière dont sont gérés les contacts (voir [22]). Cela s’explique par les différences de configurations microscopiques obtenues : selon la méthode de gestion des contacts choisie, il y a formation

ou non de chaînes de particules. Il est donc indispensable, lors de la simulation d’écoulements denses, de bien prendre en compte les interactions à courte portée en restant au plus proche de la physique sous-jacente.

Ainsi, certains auteurs ont été amenés à ajouter aux méthodes de simulation déjà existantes, la prise en compte des interactions hydrodynamiques à courtes portées. Tous utilisent le développement asymptotique au premier ordre de la force de de lubrification,

$$\mathbf{F}_{lub} \sim -6\pi\mu r^2 \frac{\mathbf{V}}{q}.$$

Dans cette expression, à position fixée, le vitesse \mathbf{V} de la particule est une inconnue. Dans [69, 23], les auteurs montrent que l’ensemble des forces de lubrification est solution d’un système linéaire (dont les coefficients dépendent des distances entre les particules). A chaque instant, ils calculent donc les distances interparticulaires, en déduisent les forces de lubrification en résolvant le système associé et les intègrent dans leur simulation. Afin de diminuer le temps de calcul, seuls les couples de particules dont la distance est en dessous d’un seuil critique sont considérés. Les erreurs d’estimation des forces de lubrification dues à la discrétisation en espace sont alors supprimées et, en théorie, les forces ainsi calculées doivent permettre d’éviter les contacts entre les particules. Cependant, la force de lubrification étant singulière à courte distance, on est amené à résoudre des systèmes très raides. Ainsi, même si la physique du problème est mieux respectée, le problème des contacts persiste à cause de la discrétisation en temps. En pratique, afin d’éviter une diminution trop coûteuse du pas de temps, les auteurs de [23] ajoutent à nouveau une force répulsive à courte portée. Noter que ce problème n’étant pas dû à une mauvaise estimation de la force de lubrification mais à la discrétisation en temps d’un système raide, il apparaît également dans les simulations de type *Stokesian Dynamics* (voir [26]). Dans [65], l’auteur propose une méthode permettant de stabiliser le problème. Il s’agit de calculer de façon précise les quantités sensibles que sont les distances interparticulaires et de traiter la vitesse présente dans l’expression de la force de lubrification de manière implicite. Dans ce travail, le calcul des distances se fait en remarquant qu’elles sont solution d’une équation différentielle ordinaire. Le calcul des positions des particules et des distances est alors découplé. Ainsi, même si, pour de grands pas de temps, des chevauchements apparaissent, les distances interparticulaires restent correctement estimées. Afin de conserver des configurations réalistes, l’auteur propose de projeter, à chaque instant, la configuration obtenue sur un espace de *configurations admissibles* pour lesquelles la distance reste strictement supérieure à un seuil fixé à l’avance.

Noter que le même type de problème apparaît lors de simulations numériques de suspensions de fibres. Les simulations numériques de systèmes denses en fibres nécessitent également la bonne prise en compte des forces hydrodynamiques à courte portée. Par exemple, pour des systèmes semi-dilués, dans [85] seules les forces de lubrification sont modélisées. La méthode décrite dans [17] utilise quant à elle des développements asymptotiques des forces à courte et longue portée comme dans les simulations de type *Stokesian dynamics*. Dans [30], les auteurs intègrent les forces de lubrification à une méthode de simulation basée sur des équations intégrales.

Dans ce chapitre, nous généralisons un modèle de “contact visqueux” initialement proposé dans [65]. Nous proposons un algorithme permettant de calculer les solutions

de ce modèle. Il a l'avantage de prendre en compte les forces de lubrification tout en empêchant, par construction, les chevauchements de particules. Cela nous permettra, dans le chapitre suivant, d'obtenir un algorithme de gestion des contacts dans le cas multi-particules, intégrant la prise en compte de la force de lubrification.

4.1.3 Cas d'objets rugueux

Nous venons de décrire l'effet de la force de lubrification dans le cas idéalisé de particules lisses. Avant d'écrire un modèle la prenant en compte, nous allons considérer le cas plus réaliste de particules rugueuses et montrer que, dans ce cas, les simulations numériques peuvent se ramener au cas lisse.

Contrairement à ce que nous avons établi dans le cadre du modèle (4.1) de sphères idéalisées, il semble évident qu'en réalité, deux particules dans un fluide visqueux peuvent entrer en contact. Cette apparente incompatibilité avec les résultats précédents est due en partie à la rugosité des particules. L'étude de l'influence de la rugosité des solides sur le comportement d'un fluide visqueux environnant a fait l'objet de nombreuses recherches.

Une première étape a été de considérer un fluide s'écoulant dans un domaine semi-infini et de comprendre l'influence des rugosités de la paroi sur l'écoulement. Dans [79, 74], un écoulement 3d, régi par les équations de Stokes au dessus d'un plan rugueux idéalisé, est étudié théoriquement et expérimentalement. Les rugosités sont périodiques dans une direction horizontale (\mathbf{e}_1) et infinies dans l'autre (\mathbf{e}_2). On impose des conditions de non-glissement au bord et on suppose que l'écoulement est un cisaillement parallèle aux rugosités à l'infini

$$\mathbf{u} \sim \kappa x_3 \mathbf{e}_2 \text{ quand } x_3 \rightarrow +\infty,$$

où x_3 est la distance à l'extrémité des rugosités (voir figure 4.2).

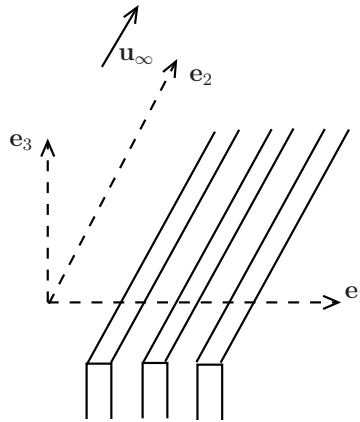


FIG. 4.2 – Plan rugueux idéalisé.

Il est montré qu'alors, quand x_3 tend vers l'infini, l'écoulement est de la forme

$$\mathbf{u} = (\kappa x_3 + U_g) \mathbf{e}_2 + o(1).$$

Ainsi, loin des rugosités, l’écoulement obtenu est celui d’un cisaillement dans le domaine $\{x_3 > 0\}$, de taux de cisaillement κ , avec condition de glissement au bord.

$$\mathbf{u} = U_g \mathbf{e}_2 \text{ en } x_3 = 0.$$

U_g est appelée vitesse de glissement. Si on note $b = U_g/\kappa$, l’écoulement obtenu à l’infini se réécrit

$$\mathbf{u} = \kappa(x_3 + b)\mathbf{e}_2 + o(1).$$

Un tel écoulement est un écoulement de cisaillement de taux de cisaillement κ avec condition de non glissement en $x_3 = -b$ (voir figure 4.3). Le plan $\{x_3 = -b\}$ est appelé plan lisse équivalent et b longueur de glissement.

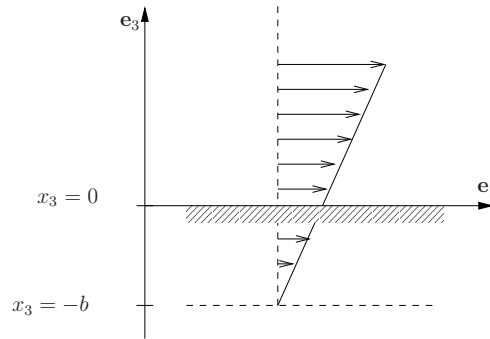


FIG. 4.3 – Plan lisse équivalent et longueur de glissement.

Ce type de conditions $\mathbf{u} = b\kappa$ au bord $\{x_3 = 0\}$ se généralise quand l’écoulement n’est pas un cisaillement sous la forme de conditions au bord dites “de Navier”,

$$\mathbf{u} = b \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 \text{ en } x_3 = 0.$$

Elles sont retrouvées en deux dimensions dans [1] et [16] par des méthodes d’homogénéisation pour des plans rugueux, de rugosités périodiques.

Le comportement de la force de lubrification dans le cas de particules ou de plans rugueux est quant à lui plus difficile à appréhender de manière théorique. On dispose essentiellement d’un développement asymptotique à longue distance (voir [54]) dans le cas d’une sphère lisse et d’un plan rugueux dont les rugosités sont périodiques. Ce développement est obtenu en supposant un écoulement sous forme de cisaillement à l’infini. Le résultat est semblable à ce qui précède. En effet, la force s’exerçant sur la sphère à longue distance est celle qui s’exercerait si le plan rugueux était remplacé par un plan lisse décalé. Aux courtes distances, un modèle heuristique est proposé dans [77]. On y considère une sphère rugueuse au dessus d’un plan lisse. La force de lubrification qui s’exerce est, au premier ordre en la distance, celle qui s’exercerait sur la même sphère privée de ses rugosité. En effet, on aurait

$$F_{lub,rugueux} \sim -6\pi\mu r^2 \mathbf{U} \frac{1}{q + q_s}. \quad (4.2)$$

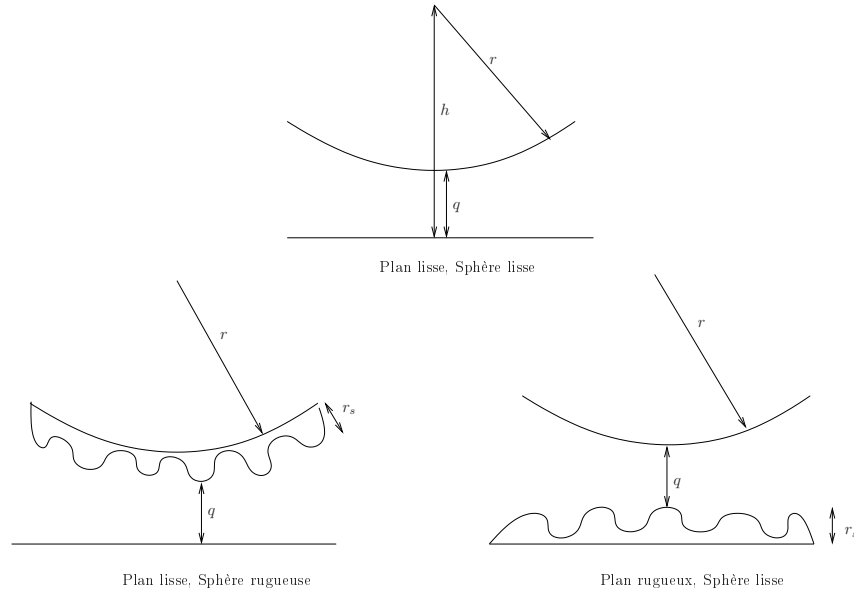


FIG. 4.4 – Notations.

où q_s est égal à r_s , la taille des rugosités. (les notations utilisées sont données figure 4.4).

Grâce à des techniques permettant de mesurer des distances de l'ordre de grandeur de la taille des rugosités, des études expérimentales du comportement de la force de lubrification à très petites distances ont été menées. Ainsi dans [53], on retrouve l'existence d'un q_s pour lequel la force de lubrification s'exerçant sur une sphère rugueuse est de la forme (4.2). En 2006, de nouvelles expériences (voir [81]) ont montré que q_s est strictement inférieur à r_s . Cela signifie que la force de lubrification s'exerçant sur une sphère rugueuse est celle qui s'exercerait sur une sphère lisse de même rayon mais plus proche du plan. On résume ces résultats sur la figure 4.5.

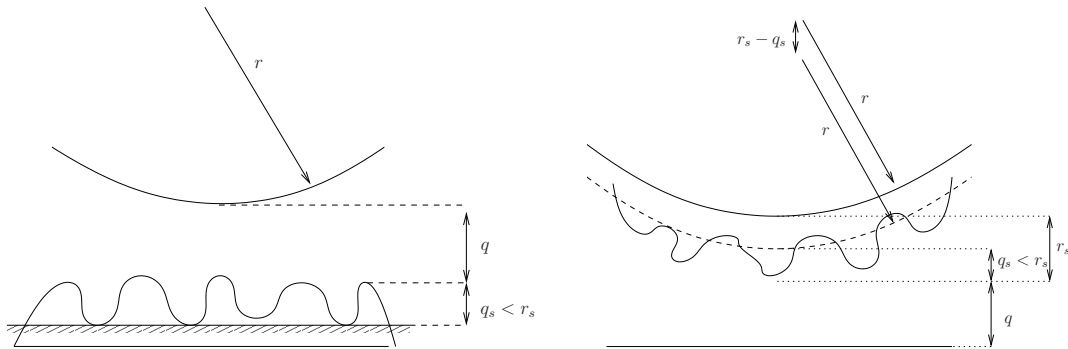


FIG. 4.5 – Plan lisse équivalent (à gauche) et sphère lisse équivalente (à droite).

Ainsi, pour traiter le cas de particules rugueuses, il suffit de disposer d'un modèle de force de lubrification dans le cas lisse. Dans la suite, nous montrerons comment le modèle lisse proposé s'adapte au cas rugueux.

D’après ce que l’on a dit dans le cas lisse, on sait que $q + q_s$ ne tend pas vers zéro en temps fini, c’est à dire que les solides lisses équivalents ne peuvent entrer en contact. Par contre, q peut tendre vers zéro et les solides réels rugueux peuvent donc se toucher. Tant que q est strictement positif, le modèle de lubrification associé aux solides lisses équivalents est valable. A l’instant où q s’annule, il y a un “vrai” contact solide/solide et il faut mettre en place un nouveau modèle. On se trouve alors dans la situation décrite figure 4.6. La modélisation de ce type de contact à été abordée dans [24]. On y propose

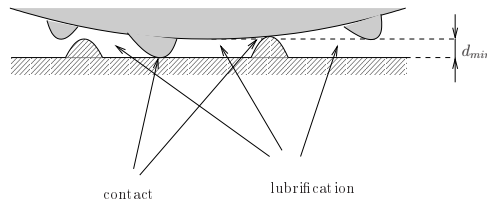


FIG. 4.6 – Contact.

deux modèles. Le premier est un modèle appelé “stick/rotate” dans lequel les rugosités s’imbriquent les unes dans les autres et les deux particules après contact se comportent comme un unique solide. Le second modèle est dit de type “roll/slip”. Il contient une force de friction solide avec glissement possible. Les résultats expérimentaux (voir [87] ou [29]), semblent valider le second modèle. Dans ce travail, nous ne prendrons pas en compte ce type de contacts. Le modèle que nous proposons pour gérer les particules non lisses correspond, lors du contact solide/solide dû aux rugosités, à un modèle de collision inélastique sans friction entre solides lisses (voir section 4.4.1 page 109). Nous montrerons cependant section 4.4.2 page 111 qu’il peut être généralisé, afin de prendre en compte la force de lubrification tangentielle pendant le contact.

4.2 Modèle de “contact visqueux”

On présente dans cette section le modèle proposé dans [65] que l’on appellera modèle de “contact visqueux”. On considère une particule située au voisinage d’un plan et on cherche à écrire un modèle prenant en compte la force de lubrification dans le cas de déplacements dans la direction normale au plan. Comme indiqué dans la section précédente, ce modèle se base sur le premier ordre du développement asymptotique de la force de lubrification normale

$$\mathbf{F}_{lub} = -6\pi\mu r^2 \frac{\mathbf{V}}{q} + O(\ln(q))$$

et sur le Principe Fondamental de la Dynamique associé (4.1),

$$m\ddot{q}(t) = -6\pi\mu r^2 \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + m f(t).$$

Le modèle de “contact visqueux ” est obtenu en faisant tendre la viscosité vers zéro. Contrairement à ce que l’on pourrait croire a priori, ce modèle limite contient bien l’aspect

visqueux du contact. En effet, à chaque quasi-contact (lorsque la particule est considérée comme adhérant au plan), il associe une nouvelle variable, qui représente, dans une certaine échelle, la petitesse de la distance réelle entre la particule et le plan. Cette variable évolue en fonction des forces appliquées. Ainsi, lors de l’adhésion, et contrairement à des modèles “secs”, ce modèle garde en mémoire les forces qui continuent à s’exercer sur la particule. Cet effet mémoire est dû à la persistance d’une couche de fluide visqueux dans l’interstice.

Afin de comprendre l’origine de ce modèle, nous présentons d’abord une expérience simple qui consiste à pousser la particule vers le plan puis à la tirer. Dans ce cas, il est facile de décrire formellement la trajectoire limite à viscosité nulle. Cela nous permettra de comprendre le modèle limite et d’expliquer pourquoi cette approche permet de modéliser des systèmes très visqueux. Nous donnerons ensuite le modèle limite dans le cas général et présenterons les résultats de convergence associés.

4.2.1 Un exemple

On souhaite comprendre le comportement dynamique du système lorsqu’une particule proche d’un plan se déplace dans la direction normale à celui-ci. Une des manières d’obtenir, au cours du temps, des configurations ayant des distances particule/plan très petites est de diminuer la viscosité du fluide. Dans cette section, nous allons étudier un exemple simple : on pousse la particule vers la paroi pendant 2 secondes, puis on exerce une force opposée qui tend à l’en écarter. On prendra

$$f(t) = -\mathbf{1}_{[0,2]}(t) + \mathbf{1}_{]2,+\infty[}(t).$$

Une étude graphique des trajectoires obtenues permettra de décrire formellement le comportement du système quand la viscosité du fluide tend vers zéro. Nous montrerons que, bien qu’elle ait été obtenue en faisant tendre la viscosité vers zéro, cette trajectoire limite permet de modéliser des systèmes très visqueux.

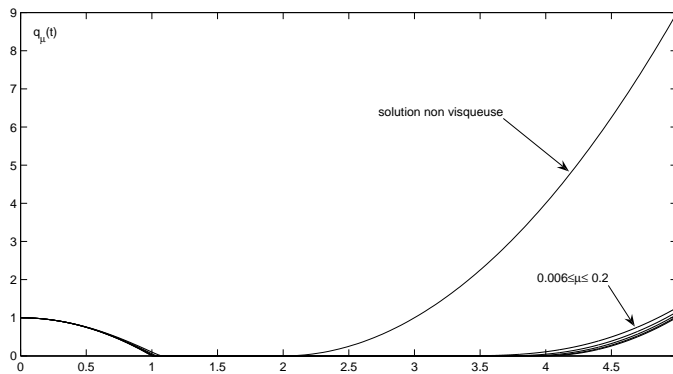
On considère l’équation différentielle

$$\ddot{q}_\mu = -\mu \frac{\dot{q}_\mu}{q_\mu} + f \text{ où } f = -\mathbf{1}_{[0,2]} + \mathbf{1}_{]2,+\infty[}. \quad (4.3)$$

Il s’agit du Principe Fondamental de la Dynamique prenant en compte le premier ordre de la force de lubrification. Toutes les constantes sont choisies égales à 1 sauf la viscosité que l’on va faire tendre vers zéro. On appuie sur la particule jusqu’au temps $t = 2$ puis on la tire.

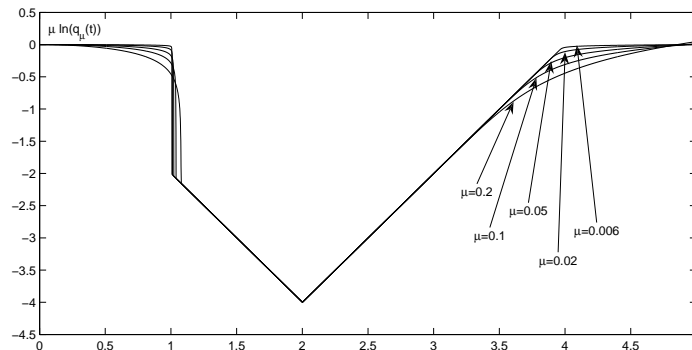
Trajectoire limite :

On trace sur la figure 4.7 les solutions de (4.3) obtenues pour μ tendant vers zéro. On les compare avec le cas d’un contact sec inélastique. On observe que la solution de ce “modèle visqueux” semble converger vers un modèle limite de “contact visqueux” lorsque la viscosité tend vers zéro. Dans le cas non visqueux, il y a contact au temps $t = 1$ et la particule décolle du plan à l’instant $t = 2$, c’est à dire, dès que l’on tire dessus. Au


 FIG. 4.7 – Comportement pour μ tendant vers zero : $t \rightarrow q_\mu(t)$.

contraire, dans le cas visqueux, on sait d’après la section précédente qu’il n’y a jamais contact entre la particule et le plan. Macroscopiquement, on observe cependant un “quasi-contact” au temps $t = 1$ et, contrairement au cas non visqueux, la particule semble adhérer au plan jusqu’à l’instant $t = 4$.

Afin d’observer la zone de quasi-contact ($t \in [1, 4]$), on souhaite effectuer un zoom des distances petites en passant à une échelle logarithmique. Le terme en $\mu \dot{q}_\mu / q_\mu$ dans l’équation différentielle suggère que la variable $\gamma_\mu(t) = \mu \ln(q_\mu(t))$ joue un rôle important dans le modèle. On la trace en fonction du temps sur la figure 4.8. La variable γ_μ semble


 FIG. 4.8 – Comportement pour μ tendant vers zero : $t \rightarrow \mu \ln(q_\mu(t))$.

converger quand μ tend vers zéro vers une variable limite que l’on notera γ . Elle représente, pendant le quasi-contact, la distance réelle entre la particule et le plan aux petites échelles. Avant le quasi-contact, γ est nul ($t \in [0, 1]$). A l’instant du quasi-contact ($t = 1$), γ est initialisée à une valeur strictement négative liée à la vitesse d’impact du cas non visqueux. Comme indiqué précédemment, le fluide visqueux empêche le contact et ainsi, la particule continue à s’approcher peu à peu du plan tant que l’on appuie dessus ($t \in [1, 2]$, γ diminue). A partir de l’instant $t = 2$, la particule s’éloigne peu à peu du plan puisque l’on

tire dessus (γ augmente). L’instant de décollement ($t = 4$) est celui pour lequel γ s’annule à nouveau.

On peut par exemple s’imaginer une bille tombant sur un plan enduit de miel. A l’instant $t = 1$, il devrait y avoir contact avec le plan et la particule s’enfonce instantanément dans la couche de miel. La profondeur atteinte dépend de la vitesse d’impact (initialisation de γ). Tant que l’on appuie sur la bille, elle continue de s’enfoncer dans le miel (γ continue de diminuer). Quand on tire, elle remonte dans la couche de miel (γ augmente) mais y reste engluée. Elle ne pourra se libérer du miel que lorsqu’on aura tiré suffisamment (quand γ s’annule).

Le modèle limite est donc le suivant : q représente la distance macroscopique et γ la distance microscopique. A l’instant du quasi-contact, q devient nul et γ s’initialise à la vitesse d’impact. Ensuite, γ intègre les forces qui continuent de s’exercer sur la particule et celle-ci ne pourra redécoller (i.e. q devenir strictement positif) que lorsque γ sera à nouveau nul. On est ici en présence d’un effet de mémoire : la variable γ enregistre les effets des forces qui s’exercent sur la particule durant le quasi-contact ($q = 0$) et cette dernière ne pourra redécoller que lorsque la somme totale des forces exercées sur la particule compense la vitesse d’impact. Le modèle visqueux et le modèle de contact visqueux limite sont représentés sur la figure 4.9.

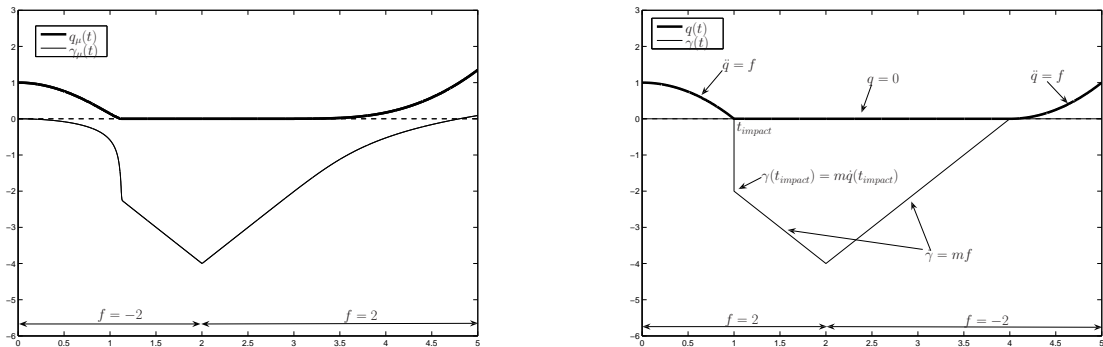


FIG. 4.9 – Modèle visqueux pour $\mu = 0.3$ (gauche) et modèle de “contact visqueux” (droite).

Visqueux ou non visqueux ?

Afin d’obtenir des trajectoires proches du contact et d’étudier le comportement de la force de lubrification dans de telles situations, nous avons considéré des systèmes à faible viscosité. Le modèle de contact visqueux est quant à lui la limite à viscosité nulle du modèle de lubrification (4.1).

Nous venons de voir que le modèle limite ainsi obtenu n’est pas le modèle de contact inélastique mais un modèle gardant en mémoire les effets des forces exercées tout au long du contact. Il ne peut donc modéliser des systèmes non visqueux. On peut alors se demander si, comme on l’espérait, le système limite a gardé le caractère visqueux du

modèle d’origine et, si oui, s’il modélise des systèmes fortement visqueux ou peu visqueux. Pour répondre à cette question, on considère toujours le cas $f(t) = -\mathbf{1}_{[0,2]}(t) + \mathbf{1}_{]2,+\infty[}(t)$. On suppose que la particule est lancée sur un plan enduit d’une couche de fluide visqueux et que, dans ce fluide, le comportement de la particule est régi par (4.1). Les trajectoires obtenues pour différentes viscosités sont tracées sur la figure 4.10. On représente sur cette même figure la trajectoire du modèle de contact visqueux limite.

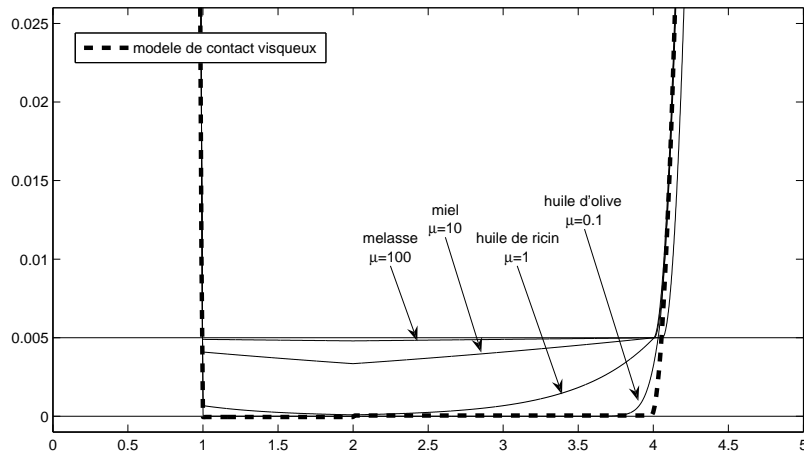


FIG. 4.10 – Comparaison modèle de contact visqueux limite / couche de fluide visqueux.

On observe que le comportement macroscopique des solutions de l’EDO (4.1), est correctement représenté par le modèle de contact visqueux limite quelle que soit la viscosité du fluide. En effet, macroscopiquement, on s’intéresse au quasi-contact c’est-à-dire aux instants pour lesquels la particule adhère au plan. Pour toutes les viscosités considérées, la solution de (4.1) se situe dans la couche visqueuse entre les temps 1 et 4, ce qui est retrouvé dans le modèle limite. On remarque ici que, du point de vue macroscopique, l’important n’est pas de savoir si on se trouve dans un environnement peu ou fort visqueux mais plutôt de savoir si cet environnement est visqueux ou non. Ainsi, dès qu’il y a présence de fluide visqueux, la particule ne peut décoller que lorsque l’ensemble des forces exercées sur elle compense l’impact initial. Si le fluide considéré est moins visqueux, elle s’enfoncera plus loin entre $t = 1$ et $t = 2$ mais avec une vitesse plus grande. Réciproquement, entre les temps 2 et 4, elle sortira du fluide avec une vitesse plus importante que dans un cas plus visqueux. Globalement, quelle que soit la viscosité du fluide considéré, l’instant de décollement est le même, la différence étant la profondeur à laquelle s’est enfoncée la particule.

Ainsi, macroscopiquement, le modèle de contact visqueux représente correctement les solutions de (4.1), quelle que soit la viscosité du fluide considéré. Cependant, cela ne signifie pas qu’il est adapté pour simuler la trajectoire d’une particule dans tous ces fluides. En effet, comme nous l’avons dit, dans le cas de fluide peu visqueux, la solution de (4.1) fait apparaître des distances particule/plan très petites. Or, dans de tels cas, différentes raisons telles que la non validité du modèle de Stokes ou l’influence des rugosités font

que le développement asymptotique de la force de lubrification n’est plus valable. Ainsi, les trajectoires des particules ne sont plus données par (4.1). Pour bien modéliser de tels systèmes, il faudrait prendre en compte une seconde zone dans la couche visqueuse : à distance très petite du plan, la particule doit suivre un autre modèle. Par conséquent, dans le cas peu visqueux, l’équation (4.1) ne modélise pas correctement le comportement de la particule et le modèle limite non plus. Au contraire, dans le cas fortement visqueux, la force de lubrification est plus importante. On a vu qu’alors les particules s’enfoncent moins profondément dans le fluide. On peut donc modéliser leur comportement par (4.1) et ainsi, d’après ce qui précède, le modèle de contact visqueux est adapté à la représentation du comportement macroscopique dans de tels cas.

4.2.2 Ecriture du modèle et résultats de convergence

Nous avons décrit un modèle de contact visqueux qui semble adapté à la simulation du comportement d’une particule plongée dans un fluide très visqueux au voisinage d’un plan. Ce modèle a été pressenti en faisant tendre la viscosité du fluide vers zéro pour un scénario de force donné. Dans [65] le cas d’une force intégrable quelconque est traité et les équations décrivant ce modèle limite sont obtenues en faisant tendre la viscosité vers zéro dans (4.1). Nous allons ici donner les équations obtenues pour le modèle limite et faire le lien avec l’exemple précédent. Nous citerons ensuite le résultat de convergence montré dans [65] et nous en donnerons une généralisation immédiate.

Equations associées au modèle de “contact visqueux” limite

On note \tilde{u} la vitesse qu’aurait la particule s’il n’y avait pas de plan,

$$\tilde{u}(t) = \dot{q}(0) + \int_0^t f(s) ds.$$

On intègre une fois l’équation différentielle ordinaire (4.1). Le modèle visqueux se réécrit alors sous la forme $(\mathcal{P}_\mu, 4.4)$ donnée ci dessous. Il est montré dans [65] que les inconnues q et γ du modèle limite de “contact visqueux”, sont quant à elles solution du problème $(\mathcal{P}, 4.4)$.

Modèle visqueux :

$$(\mathcal{P}_\mu) \begin{cases} m\dot{q}_\mu(t) + \gamma_\mu(t) = \gamma_\mu(0) + m\tilde{u}(t) \\ \gamma_\mu(t) = \mu \ln(q_\mu(t)) \\ q_\mu(0) = q^0 > 0, \quad \dot{q}_\mu(0) = u^0 \end{cases}$$

Modèle de “contact visqueux” :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} m\dot{q} + \gamma = m\tilde{u} \\ q \geq 0, \quad \gamma \leq 0, \quad q\gamma = 0 \\ q(0) = q^0 > 0, \quad \dot{q}(0) = u^0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Lien avec l’exemple précédent

Il est évident que dans le cas $f = -\mathbf{1}_{[0,2]} + \mathbf{1}_{]2,4]}$, la trajectoire du contact visqueux limite représentée sur la figure 4.9 est solution de $(\mathcal{P}, 4.4)$. Réciproquement, on peut montrer que si (q, γ) est solution de $(\mathcal{P}, 4.4)$ avec $f = -\mathbf{1}_{[0,2]} + \mathbf{1}_{]2,4]}$ alors (q, γ) est cette trajectoire limite. Pour cela, procédons étape par étape :

- Comme $q(0)$ est strictement positif et q continue, on peut noter t_1 le premier instant pour lequel q s’annule. Pour $t < t_1$, la condition $q\gamma = 0$ impose $\gamma = 0$ et alors on a $\dot{q} = \tilde{u}$. Par conséquent $t_1 = 1$.
- Sur $]1, 4[$, \tilde{u} est strictement négative. Montrons que q est nulle sur cet intervalle. Si elle ne l’était pas, elle serait strictement positive en un point $t_2 \in]1, 4[$. On définit $\bar{t} = \sup\{t \in [1, t_2], q(t) = 0\}$. Comme q est continue, on a $\bar{t} = t_2 - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. La continuité de q donne encore $q(t_2 - \varepsilon) = 0$ et $q > 0$ sur $]t_2 - \varepsilon, t_2]$. Ceci implique $\gamma = 0$ sur $]t_2 - \varepsilon, t_2]$ et donc $\dot{q} = \tilde{u} < 0$ sur $]t_2 - \varepsilon, t_2]$ ce qui est impossible puisqu’alors on aurait $q < 0$ sur $]t_2 - \varepsilon, t_2]$. Par conséquent, $q = 0$ sur $]1, 4[$ et donc $\gamma = m\tilde{u}$ sur cet intervalle. Ainsi, elle s’initialise à la valeur strictement négative $\gamma(1^+) = m\tilde{u}(1) = m\dot{q}(1)$ puis intègre la force. En $t = 4$ on a donc q et γ nulles.
- Pour $t > 4$, \tilde{u} redevient positive. Montrons qu’alors nécessairement, q est strictement positive. Si elle ne l’était pas, il existerait $t_3 \in]4, +\infty[$ tel que $q(t_3) = 0$. Or, q ne peut être identiquement nulle sur $]4, t_3]$ puisque sinon, on aurait $\gamma = m\tilde{u} > 0$ sur cet intervalle. Par conséquent, il existe $t_4 \in]4, t_3[$ tel que $q(t_4) > 0$. On note $\bar{t} = \inf\{t \in [t_4, +\infty[, q(t) = 0\}$. Comme précédemment on a $\bar{t} = t_4 + \varepsilon$, $q(t_4 + \varepsilon) = 0$ et $q > 0$ sur $[t_4, t_4 + \varepsilon[$. Ceci implique $\gamma = 0$ sur $[t_4, t_4 + \varepsilon[$ et donc $\dot{q} = \tilde{u} > 0$ sur $[t_4, t_4 + \varepsilon[$ ce qui est impossible puisqu’alors on aurait $q(t_4 + \varepsilon) = q(t_4) + \int_{t_4}^{t_4 + \varepsilon} \tilde{u} > 0$. Par conséquent q est strictement positive pour $t > 4$ et ainsi, γ est nulle et $\dot{q} = \tilde{u}$.

Notons que ce type de construction est possible pour toute fonction f telle que les instants de décollement de q soient en nombre fini.

Résultats de convergence

La convergence des solutions de $(\mathcal{P}_\mu, 4.4)$ vers celles de $(\mathcal{P}, 4.4)$ a été obtenue dans [65]. Le théorème établi est le suivant,

Théorème 4.4 *Soient $q^0 > 0$, $u^0 \in \mathbb{R}$, un intervalle de temps $I =]0, T[$ et $f \in L^1(I)$ donnés. On note $q_\mu \in W^{1,\infty}(I)$ l’unique solution de $(\mathcal{P}_\mu, 4.4)$ dans \bar{I} et $\gamma_\mu = \mu \ln q_\mu$. Quand μ tend vers zéro, il existe une suite extraite, toujours notée (q_μ) , $q \in W^{1,\infty}(I)$ et $\gamma \in L^\infty(I)$, tels que*

$$\begin{aligned} q_\mu &\longrightarrow q \text{ uniformément,} \\ \gamma_\mu &\xrightarrow{*} \gamma \text{ dans } L^\infty(I), \end{aligned}$$

et le couple (q, γ) est solution du problème $(\mathcal{P}, 4.4)$.

Une première généralisation du théorème 4.4 donnée dans [65] est la suivante :

Théorème 4.5 *$q^0 > 0$, $u^0 \in \mathbb{R}$, $I =]0, T[$ et $f \in L^1(I)$ sont donnés. Soit φ strictement positive, lipschitzienne et localement intégrable sur \mathbb{R}_+^* . On suppose de plus que $\Phi(q) = \int_q^1 \varphi \rightarrow +\infty$ quand $q \rightarrow 0^+$. On note q_μ la solution de l’équation différentielle ordinaire*

$$\ddot{q}_\mu = -\mu \dot{q}_\mu \varphi(q_\mu) + f(t). \quad (4.5)$$

Alors, si on pose $\gamma_\mu = -\mu \Phi(q_\mu)$, il existe une suite extraite, toujours notée (q_μ) , $q \in W^{1,\infty}(I)$ et $\gamma \in L^\infty(I)$, tels que

$$\begin{aligned} q_\mu &\longrightarrow q \text{ uniformément,} \\ \gamma_\mu &\xrightarrow{*} \gamma \text{ dans } L^\infty(I), \end{aligned}$$

quand μ tend vers zéro. Et le couple (q, γ) est solution du problème $(\mathcal{P}, 4.4)$ que l'on rappelle ici :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} m\dot{q} + \gamma = m\tilde{u}, \\ q \geq 0, \quad \gamma \leq 0, \quad q\gamma = 0. \end{cases}$$

Démonstration : Cette démonstration est une simple adaptation de celle du théorème 4.4 donnée dans [65].

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale de (4.5) définie sur $[0, T[$. Pour montrer que cette solution est globale, on raisonne par l'absurde. Si elle ne l'était pas, (q_μ, \dot{q}_μ) sortirait de tout compact de $\Omega = \{(x, u), x > 0\}$. Or, on montre que \dot{q}_μ est borné par une estimation standard d'énergie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\dot{q}_\mu|^2 &= \frac{1}{2}|u^0|^2 - \mu \int_0^t |\dot{q}_\mu|^2 \varphi(q_\mu) + \int_0^t f \dot{q}_\mu \\ &\leq \frac{1}{2}|u^0|^2 + \int_0^t f \dot{q}_\mu \end{aligned}$$

qui, associée au lemme de Gronwall donne

$$\dot{q}_\mu(t) \leq \left(\sqrt{|u^0|} + \int_0^t |f| \right)^2.$$

Ainsi, la vitesse ne peut exploser en temps fini et, puisque T est supposé fini, nécessairement on a $q_\mu \rightarrow 0$ en T . Or, en intégrant une fois (4.5) on obtient

$$\dot{q}_\mu(t) = u^0 + \mu (\Phi(q_\mu(t)) - \Phi(q^0)) + \int_0^t f.$$

Ainsi, $q_\mu \rightarrow 0$ implique $\dot{q} \rightarrow +\infty$ ce qui est impossible d'après ce qui précède. On a donc montré l'existence d'une unique solution globale de (4.5).

Nous étudions maintenant le comportement des solutions quand μ tend vers zéro.

Nous venons de montrer que $(q_\mu)_\mu$ était borné dans $W^{1,\infty}(I)$. Par conséquent, on peut en extraire une sous-suite (toujours notée $(q_\mu)_\mu$) telle que q_μ converge uniformément vers un $q \in W^{1,\infty}(I)$, et \dot{q}_μ converge faible étoile vers $u = \dot{q}$ dans $L^\infty(I)$.

Si on note $\gamma_\mu = -\mu\Phi(q_\mu)$, l'intégration de (4.5) donne

$$\dot{q}_\mu + \gamma_\mu = u^0 + \gamma_\mu^0 + \int_0^t f,$$

où $\gamma_\mu^0 = -\mu\Phi(q^0)$ tend vers zéro quand μ tend vers zéro. Par conséquent, γ_μ converge faible étoile dans $L^\infty(I)$ vers $\gamma \in L^\infty(I)$ tel que

$$\dot{q} + \gamma = u^0 + \int_0^t f = \tilde{u}(t).$$

L'étape suivante consiste à montrer que q vérifie $\dot{q} = \tilde{u}$ dans $I_0(q) = \{t, q(t) > 0\}$. Pour cela, on introduit pour tout $\eta > 0$ l'ensemble $I_\eta(q) = \{t \in]0, t[, q(t) > \eta\}$. Comme q_μ converge uniformément vers q , on a $I_\eta(q) \subset I_{\eta/2}(q_\mu)$ pour μ assez petit. Par conséquent, $\gamma_\mu = -\mu\Phi(q_\mu)$ converge uniformément vers zéro sur $I_\eta(q)$ et donc, \ddot{q}_μ converge uniformément vers \tilde{u} sur $I_\eta(q)$ pour tout $\eta > 0$. Finalement, q est \mathcal{C}^1 sur I_0 , avec $\dot{q} = \tilde{u}$ et $\gamma = 0$ sur I_0 .

Sur $I_0^c(q) = \{t, q(t) = 0\}$, q est constant et donc, $\dot{q} = 0$ et $\gamma = \tilde{u}$ presque partout. De plus, comme Φ tend vers $+\infty$ en zéro, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $q_\mu < \varepsilon$ implique $\gamma_\mu < 0$. Par conséquent, $\gamma \leq 0$ sur I_0^c . \square

Le théorème 4.4 entre dans le cadre de ce théorème avec $\varphi(q) = 1/q$. Cette première extension permet maintenant de gérer l'équation différentielle issue du Principe Fondamental de la Dynamique avec la force de lubrification complète. En effet, en prenant pour φ la force de lubrification, on a $\varphi \sim 1/q$ et on est dans le cadre du théorème 4.5. De même, dans le cas de la dimension 2, si φ est la force de lubrification on a $\varphi \sim 1/q^{-3/2}$ et le théorème 4.5 s'applique. Nous savons donc que le modèle de contact visqueux est la limite à viscosité nulle du Principe Fondamental de la Dynamique mais on ne peut calculer explicitement le γ_μ associé. Or, l'expression de γ_μ sera utile par exemple pour écrire le modèle rugueux (voir section 4.4.1).

Le théorème suivant va nous permettre de résoudre cette difficulté. En effet, nous y généralisons le théorème précédent en montrant que l'on peut choisir pour γ_μ la primitive de n'importe quel équivalent de la force de lubrification contenant toutes les singularités non intégrables.

Théorème 4.6 $q^0 > 0$, $u^0 \in \mathbb{R}$, $I =]0, T[$ et $f \in L^1(I)$ sont donnés.

Soient φ et ψ lipschitziennes et localement intégrables sur $]0, +\infty[$ telles que $\varphi + \psi > 0$ et $\psi(q) = o(\varphi(q))$ quand $q \rightarrow 0^+$.

On note $\Phi(q) = \int_q^1 \varphi$ et $\Psi(q) = \int_q^1 \psi$. On suppose que $\Phi(q) \rightarrow +\infty$ et $\Psi(q) = \mathcal{O}(1)$ quand $q \rightarrow 0^+$.

On note q_μ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\ddot{q}_\mu = -\mu\dot{q}_\mu (\varphi(q_\mu) + \psi(q_\mu)) + f(t). \quad (4.6)$$

Alors, si on pose $\gamma_\mu = -\mu\Phi(q_\mu)$, il existe une suite extraite, toujours notée (q_μ) , $q \in W^{1,\infty}(I)$ et $\gamma \in L^\infty(I)$, tels que

$$\begin{aligned} q_\mu &\longrightarrow q \text{ uniformément,} \\ \gamma_\mu &\xrightarrow{\star} \gamma \text{ dans } L^\infty(I), \end{aligned}$$

quand μ tend vers zéro. Et le couple (q, γ) est solution du problème $(\mathcal{P}, 4.4)$.

Démonstration : (q_μ) est borné dans $W^{1,\infty}(I)$, indépendamment de μ (voir démonstration du théorème 4.5). Par conséquent, il existe $q \in W^{1,\infty}(I)$ et une sous-suite de (q_μ) tels que :

$$\begin{aligned} q_\mu &\rightarrow q \text{ uniformément} \\ \dot{q}_\mu &\xrightarrow{\star} u = \dot{q} \text{ dans } L^\infty(I). \end{aligned}$$

En intégrant (4.6) on obtient,

$$m\dot{q}_\mu(t) - mu^0 = \mu(\Phi(q_\mu(t)) - \Phi(q^0)) + \mu(\Psi(q_\mu(t)) - \Psi(q^0)) + m \int_0^t f(s)ds.$$

Et, utilisant la définition de γ_μ ,

$$m\dot{q}_\mu(t) + \gamma_\mu(t) = mu^0 - \mu\Phi(q^0) + \mu(\Psi(q_\mu(t)) - \Psi(q^0)) + m \int_0^t f(s)ds.$$

Or, $\Psi(q)$ est continue sur $]0, +\infty[$ (comme primitive d'une fonction localement intégrable), bornée au voisinage de 0 par hypothèse et (q_μ) est strictement positive et bornée. Par conséquent $\Psi(q_\mu(t))$ est bornée et $\mu(\Psi(q_\mu(t)))$ converge uniformément vers 0 sur I . En passant à la limite dans l'équation précédente, on obtient donc qu'il existe $\gamma \in L^\infty(I)$ tel que :

$$\begin{aligned} \gamma_\mu &\xrightarrow{\star} \gamma \text{ dans } L^\infty(I), \\ m\dot{q}(t) + \gamma(t) &= mu^0 + m \int_0^t f(s)ds. \end{aligned}$$

On montre enfin ($q \geq 0$, $\gamma \leq 0$, $q\gamma = 0$) comme dans le théorème 4.5 et cela termine la démonstration. \square

Ce théorème nous permet de choisir un équivalent de la force de lubrification dont on connaît la primitive afin d'avoir une formule explicite pour γ_μ . Dans le cas de la force de lubrification en dimension 3, si on prend $\varphi(q) = q^{-1}$, on a $\psi(q) \sim \ln(q)$. On est dans le cadre du théorème 4.6. Ainsi, le modèle de contact visqueux est également limite, à viscosité nulle, du Principe Fondamental de la Dynamique prenant en compte la force de lubrification complète avec $\gamma_\mu = \mu \ln(q_\mu)$.

4.3 Algorithme associé

Dans cette section, on présente un algorithme permettant de résoudre numériquement le modèle de contact visqueux ($\mathcal{P}, 4.4$). Dans le chapitre 3, on a décrit l'utilisation de l'algorithme de gestion des contacts dans le cas multi-particules proposé dans [64]. Il est basé sur la projection de la vitesse, à chaque instant, sur un espace dit de *vitesse admissibles*. Afin d'utiliser le même type de méthode et ainsi, obtenir un algorithme facilement généralisable au cas multi-particules, nous commençons ici par réécrire ($\mathcal{P}, 4.4$). Pour cela, on utilise une loi de collision faisant apparaître une contrainte sur la vitesse et donc, à chaque instant, un espace de *vitesse admissibles*. Nous décrivons ensuite l'algorithme associé puis nous montrons sa convergence.

4.3.1 Réécriture du problème

On réécrit $(\mathcal{P}, 4.4)$ en introduisant une loi de collision. On cherche (q, γ) tels que

$$q \in W^{1,\infty}(I), \quad \dot{q} \in BV(I), \quad \gamma \in BV(I)$$

A chaque instant t , la vitesse $\dot{q}(t^+)$ (limite à droite en t) doit appartenir à l'ensemble $C_{q,\gamma}(t)$, où

$$C_{q,\gamma}(t) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \gamma(t^-) < 0, \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } \gamma(t^-) = 0, \quad q(t) = 0, \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, si $\gamma(t^-) < 0$, la particule est en train d'adhérer au plan et doit avoir une vitesse nulle. Si $\gamma(t^-) = 0$ et $q(t) = 0$, on se situe au début ou à la fin d'une période de quasi-contact et la contrainte à imposer est la non-pénétration de la particule dans le plan. Enfin, dans tous les autres cas, on a $q > 0$ et il n'y a pas de contrainte à imposer. La loi de collision s'écrit

$$\dot{q}(t^+) = \Pi_{C_{q,\gamma}(t)} \dot{q}(t^-), \quad (4.7)$$

où Π_K est l'opérateur de projection sur K . Cette contrainte sur la vitesse fait apparaître un multiplicateur de Lagrange dans l'équation du Principe Fondamental de la Dynamique. On cherche $\lambda \in \mathcal{M}(I)$ (où $\mathcal{M}(I)$ est le dual des fonctions continues à support compact dans I) tel que

$$m\ddot{q} = mf + \lambda \text{ dans } \mathcal{M}(I). \quad (4.8)$$

Remarque 4.7 *Les fonctions \dot{q} et γ étant supposées à variation bornées, elles ne peuvent être dérivées au sens usuel. Pour des raisons de lisibilité, on a cependant choisi d'utiliser les notations classiques de dérivation dans (4.8) et par la suite dans (4.10). Nous détaillons dans l'annexe C ce que l'on entend précisément par ces notations et équations.*

Le multiplicateur de Lagrange λ peut donc être vu comme une force supplémentaire exercée par le plan sur la particule afin de satisfaire la contrainte (4.7). Le plan ne pouvant agir de loin sur la particule, on impose également

$$\text{supp}(\lambda) \subset \{t, \quad q(t) = 0\}. \quad (4.9)$$

Ainsi, lorsque q est strictement positif, λ est nul et l'équation du mouvement (4.8) se réduit à $\ddot{q} = f$. Il reste alors à préciser l'évolution de γ . En comparant (4.8) à $(\mathcal{P}, 4.4)$, on observe qu'il faut

$$\dot{\gamma} = -\lambda. \quad (4.10)$$

Pendant l'adhésion, \dot{q} est nul et (4.8) donne $\dot{\gamma} = mf$. On retrouve le fait que γ doit intégrer la force. Nous ajoutons finalement les contraintes

$$q \geq 0, \quad \gamma \leq 0, \quad (4.11)$$

et nous réécrivons $(\mathcal{P},4.4)$ de la façon suivante,

$$(\mathcal{P}') \left\{ \begin{array}{l} q \in W^{1,\infty}(I), \quad \dot{q} \in BV(I), \quad \gamma \in BV(I), \\ q(0) = q^0 > 0, \quad \dot{q}(0) = u^0, \quad \gamma(0) = 0 \\ \dot{q}(t^+) = \Pi_{C_{q,\gamma}(t)} \dot{q}(t^-) \quad (4.7) \\ m\ddot{q} = mf + \lambda \text{ dans } \mathcal{M}(I) \quad (4.8) \\ \text{supp}(\lambda) \subset \{t, q(t) = 0\} \quad (4.9) \\ \dot{\gamma} = -\lambda \quad (4.10) \\ q \geq 0, \quad \gamma \leq 0 \quad (4.11) \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Remarque 4.8 Dans la formulation de (\mathcal{P}') , λ est une variable auxiliaire permettant de simplifier l'écriture du problème et non une nouvelle inconnue.

Le théorème suivant montre que, sous certaines hypothèses, $(\mathcal{P}',4.12)$ et $(\mathcal{P},4.4)$ sont équivalents. N'étant pas indispensable à la compréhension de la démarche générale, sa démonstration est reportée en annexe D.

Théorème 4.9 Soit $I = [0, T]$ un intervalle, $q \in W^{1,\infty}(I)$ avec $\dot{q} \in BV(I)$, et $\gamma \in BV(I)$.

On suppose qu'il existe N_1 et N_2 , entiers naturels, et $(a_i, b_i)_{i=1\dots N_1}$, $(c_i)_{i=1\dots N_2}$ dans $[0, T]$ tels que

$$\{t \in [0, T], q(t) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{N_1} [a_i, b_i] \bigcup_{i=1}^{N_2} \{c_i\}.$$

Alors,

$$(q, \gamma) \text{ solution de } (\mathcal{P}',4.12) \iff (q, \gamma) \text{ solution de } (\mathcal{P},4.4).$$

Remarque 4.10 L'hypothèse du théorème 4.9 ne peut être vérifiée a priori dans le cas général. Une condition suffisante est par exemple que f ne change de signe qu'un nombre fini de fois. Noter que dans ce cas, on peut construire étape par étape la solution de $(\mathcal{P},4.4)$, comme page 89. Sous cette hypothèse, il y a donc existence et unicité de la solution de $(\mathcal{P},4.4)$.

Dans le cas général, la convergence de l'algorithme que nous montrons dans la section suivante assure l'existence d'une solution. Par contre, et en particulier quand on ne peut pas isoler les instants de contacts, il n'y a pas unicité de la solution (voir par exemple [65]). Dans [75], l'auteur donne, pour un problème similaire de loi d'impact en dimension une, un contre-exemple à l'unicité avec un second membre infiniment dérivable. Si on veut obtenir l'unicité grâce à une hypothèse sur la régularité du second membre, il faut le supposer analytique.

Remarque 4.11 Les contraintes $q \geq 0$ et $\gamma \leq 0$ sont nécessaires dans le modèle $(\mathcal{P}',4.12)$. En effet, supposons que l'on se trouve à un instant de décollement. Si la force est négative après cet instant et que l'on n'a pas imposé $q \geq 0$, alors $\gamma \equiv 0$ et $\dot{q} = \tilde{u}$ est solution du problème la particule peut entrer dans le plan. De même, si la force est positive après le décollement et que l'on n'a pas imposé $\gamma \leq 0$, alors $q \equiv 0$ et $\gamma = \tilde{u}$ est solution et γ peut devenir strictement positif.

4.3.2 Schéma numérique

Description du schéma

On se donne sur $I = [0, T]$ une subdivision régulière $(t^n)_n = (t^0 = 0, \dots, t^n, \dots, t^N = T)$ de pas h . On initialise le problème à $q^0 > 0$, $u^0 \in \mathbb{R}$ et $\gamma^0 = \lambda^0 = 0$. A un instant t^n donné, on suppose que l'on dispose de q^n , u^n , γ^n et λ^n valeurs calculées de q , u , γ et λ au temps n . On note $f^n = \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s) ds$. On cherche à calculer q^{n+1} , u^{n+1} , γ^{n+1} et λ^{n+1} .

On calcule γ^{n+1} par un schéma d'Euler explicite,

$$\gamma^{n+1} = \gamma^n - h\lambda^n.$$

Cette équation d'évolution discrète pour γ^n est valable tant que γ^{n+1} reste négatif ou nul. Si on obtient $\gamma^{n+1} > 0$, c'est que la particule décolle à un instant $t^* \in]t_n, t_{n+1}[$. Dans ce cas, γ^{n+1} a intégré la force sur $]t^*, t_{n+1}[$ à la place de u^n que l'on avait fixé à zéro pendant le contact. On modifie donc u^n et γ^{n+1} de la façon suivante :

$$\text{Si } \gamma^{n+1} > 0, \quad u^n = \gamma^{n+1}/m \text{ et } \gamma^{n+1} = 0.$$

De même, on choisit d'écrire

$$q^{n+1} = q^n + hu^n.$$

Pour calculer u^{n+1} et λ^{n+1} , on s'inspire de l'écriture du modèle sous la forme (\mathcal{P}' , 4.12). On définit l'espace des contraintes en (q, γ) par

$$\left\{ \begin{array}{l} K(q, \gamma) = \{v, q + hv \geq 0\} \text{ si } \gamma = 0, \\ K(q, \gamma) = \{v, q + hv = 0\} \text{ si } \gamma < 0. \end{array} \right.$$

$K(q^n, \gamma^n)$ est l'espace des *vitesse admissibles* au temps n . Il s'agit du pendant discret de $C_{q,\gamma}(t_n)$. La loi de collision (4.7) et le Principe Fondamental de la Dynamique (4.8) sont alors traduits au niveau discret de la façon suivante,

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{n+1/2} = u^n + hf^n \\ u^{n+1} \in K(q^{n+1}, \gamma^{n+1}), \quad \frac{1}{2} |u^{n+1} - u^{n+1/2}|_m^2 = \min_{v \in K(q^{n+1}, \gamma^{n+1})} \frac{1}{2} |v - u^{n+1/2}|_m^2 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

avec $(v, w)_m = (mv, w)$. Noter que $u^{n+1/2}$ est la vitesse qu'aurait la particule au temps $n+1$ sans la présence du plan. u^{n+1} est la projection de cette vitesse a priori sur l'espace des *vitesse admissibles* $K(q^{n+1}, \gamma^{n+1})$ pour un produit scalaire adapté. Le problème de projection ainsi résolu donne l'existence d'un multiplicateur de Lagrange λ^{n+1} (positif si $\gamma^{n+1} \geq 0$) tel que

$$m(u^{n+1} - u^{n+1/2}) = h\lambda^{n+1}.$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme

$$m \frac{u^{n+1} - u^n}{h} = mf^n + \lambda^{n+1}, \quad (4.14)$$

et on reconnaît alors une discrétisation de (4.8).

La discrétisation du problème (\mathcal{P}') est ainsi

Pour tout $n \geq 0$, on dispose de q^n , u^n , γ^n et λ^n . On note $f^n = \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s) ds$.

1. Evolution de γ ,

$$\gamma^{n+1} = \gamma^n - h\lambda^n$$

2. Modifications dans le cas d'un décollement,

$$\text{Si } \gamma^{n+1} > 0, \begin{cases} u^n = \gamma^{n+1}/m \\ \gamma^{n+1} = 0 \end{cases}$$

3. Evolution de q ,

$$q^{n+1} = q^n + hu^n.$$

4. Calcul de la vitesse a priori, sans gestion de la force de lubrification,

$$u^{n+1/2} = u^n + hf^n.$$

5. Projection de la vitesse sur l'espace des *vitesse admissibles*,

$$u^{n+1} \in K(q^{n+1}, \gamma^{n+1}), \quad \frac{1}{2} |u^{n+1} - u^{n+1/2}|_m^2 = \min_{v \in K(q^{n+1}, \gamma^{n+1})} \frac{1}{2} |v - u^{n+1/2}|_m^2.$$

où $K(q, \gamma) = \{v, q + hv \geq 0\}$ si $\gamma = 0$

$K(q, \gamma) = \{v, q + hv = 0\}$ si $\gamma < 0$

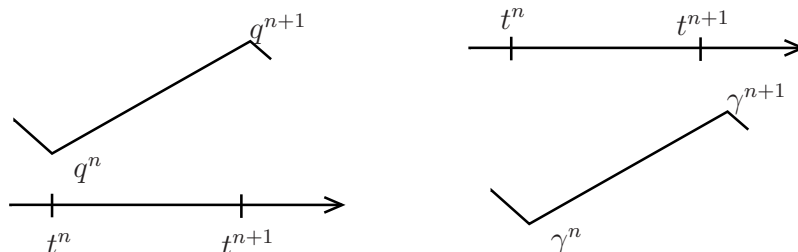
On dispose alors du multiplicateur de Lagrange λ^{n+1} .

Algorithme 4.1: Modèle de contact visqueux.

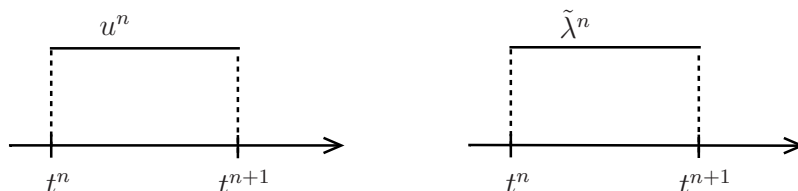
Remarque 4.12 Dans le cas où $q^0 + hu^0 < 0$, il faut commencer par projeter la vitesse. On initialise alors u^0 à $\Pi_{K(q^0, \gamma^0)}(u^0 + hf^0)$ et λ^0 au multiplicateur de Lagrange associé. Dans la suite de cette section, on s'intéresse à la convergence de l'algorithme 4.1 quand h tend vers zéro. On suppose donc h assez petit pour que $q^0 + hu^0$ soit strictement positif, afin de ne pas avoir à modifier les conditions initiales.

Résultat de convergence :

On va montrer que les solutions $((q^n)_n, (u^n)_n, (\gamma^n)_n)$ obtenues grâce à cet algorithme convergent en un certain sens vers les solutions de $(\mathcal{P}, 4.4)$ quand le pas de temps h tend vers zéro. Pour cela, à h fixé, on définit les fonctions q_h et γ_h affines sur les intervalles de la forme $[t^n, t^{n+1}]$ et valant respectivement q^n et γ^n en t^n (voir figure 4.11).


 FIG. 4.11 – Construction de q_h (à gauche) et γ_h (à droite).

On définit également u_h et λ_h respectivement dérivée de q_h et opposée de la dérivée de γ_h . Elles sont donc constantes sur les intervalles $]t^n, t^{n+1}[$. Sur cet intervalle, $u_h = \frac{q^{n+1} - q^n}{h} = u^n$ et $\lambda_h = -\frac{\gamma^{n+1} - \gamma^n}{h} = \tilde{\lambda}^n$ (voir figure 4.12).


 FIG. 4.12 – Construction de u_h (à gauche) et λ_h (à droite).

Noter que $\tilde{\lambda}^n = \lambda^n$ sauf dans le cas où il y a décollement dans l'intervalle $]t^n, t^{n+1}[$. En effet, dans ce cas, on a modifié γ^{n+1} à l'étape 1 de l'algorithme.

Le théorème suivant montre la convergence de ces suites de fonctions vers les solutions de $(\mathcal{P}, 4.4)$.

Remarque 4.13 *Comme on l'a vu lors de la remarque 4.10, même sous des hypothèses de forte régularité de f , il n'y a pas unicité de la solution de $(\mathcal{P}, 4.4)$ en général. Cela interdit l'utilisation des méthodes classiques de démonstration du type consistence/stabilité (on n'a par exemple pas continuité par rapport aux données initiales).*

Théorème 4.14 *Si f est localement intégrable sur I , il existe une sous-suite telle que*

$$\begin{aligned} u_h &\longrightarrow u \text{ dans } L^1(I), \\ q_h &\longrightarrow q \text{ dans } W^{1,1}(I) \text{ et } L^\infty(I) \text{ avec } \dot{q} = u, \\ \lambda_h &\xrightarrow{*} \lambda \text{ dans } \mathcal{M}(I), \\ \gamma_h &\longrightarrow \gamma \text{ dans } L^1(I) \text{ avec } \dot{\gamma} = -\lambda, \end{aligned}$$

où (q, γ) est une solution de (P,4.4).

Démonstration :

Pour des raisons de lisibilité, nous reporterons la preuve de quelques lemmes techniques à la fin de la démonstration. Afin de rendre la démonstration plus claire, on notera \bar{u}^n et $\bar{\gamma}^{n+1}$ les valeurs provisoires calculées respectivement aux étapes 5 et 1 de l'algorithme. Après l'étape 2 et une éventuelle modification due à un décollement, elles ont leur valeur finale et sont notées u^n et γ^{n+1} . Ainsi, l'étape 2 se réécrit

$$\text{Si } \bar{\gamma}^{n+1} > 0, \left| \begin{array}{l} u^n = \bar{\gamma}^{n+1}/m, \\ \gamma^{n+1} = 0. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

et on a

$$\lambda^n = -\frac{\bar{\gamma}^{n+1} - \gamma^n}{h} \text{ et } \tilde{\lambda}^n = -\frac{\gamma^{n+1} - \gamma^n}{h}. \quad (4.16)$$

Remarquons pour commencer que

$$\forall n, \quad mu^{n+1} = mu^n + hmf^n + h\tilde{\lambda}^{n+1}. \quad (4.17)$$

En effet, l'étape de projection 5 de l'algorithme donne un couple $(\bar{u}^{n+1}, \lambda^{n+1})$ vérifiant

$$m\bar{u}^{n+1} = mu^n + hmf^n - h\lambda^{n+1}.$$

S'il n'y a pas décollement dans $]t^{n+1}, t^{n+2}[$, on a $u^{n+1} = \bar{u}^{n+1}$ et, comme $\gamma^{n+2} = \bar{\gamma}^{n+2}$, (4.16) implique $\tilde{\lambda}^{n+1} = \lambda^{n+1}$. Par conséquent, dans ce cas, (4.17) est vérifiée. Dans le cas d'un décollement, (4.16) et (4.15) permettent de montrer successivement

$$\begin{aligned} m\bar{u}^{n+1} &= mu^n + hmf^n - h\frac{\bar{\gamma}^{n+2} - \gamma^{n+1}}{h} \\ 0 &= mu^n + hmf^n - h\frac{\bar{\gamma}^{n+2} - \gamma^{n+1}}{h} \\ \bar{\gamma}^{n+2} &= mu^n + hmf^n - h\frac{0 - \gamma^{n+1}}{h} \\ mu^{n+1} &= mu^n + hmf^n - h\frac{\gamma^{n+2} - \gamma^{n+1}}{h} \\ mu^{n+1} &= mu^n + hmf^n - h\tilde{\lambda}^{n+1} \end{aligned}$$

et on a bien retrouvé (4.17).

1. Convergence de q_h et u_h

Lemme 4.15 $(u_h)_h$ est bornée dans $L^\infty(I)$ (Démonstration page 104)

Lemme 4.16 $(u_h)_h$ est bornée dans $BV(I)$ (Démonstration page 105)

Le lemme 4.16 associé à l’injection compacte de $BV(I)$ dans $L^1(I)$ montre qu’il existe une sous-suite toujours notée $(u_h)_h$ et $u \in BV(I)$ telles que

$$u_h \longrightarrow u \text{ dans } L^1(I) \text{ et presque partout.}$$

Comme $\dot{q}_h = u_h$ presque partout, on a $\dot{q}_h \longrightarrow u$ dans $L^1(I)$ et, si on définit $q \in L^1(I)$ par $q(t) = q^0 + \int_0^t u$, on a

$$\int_0^T |q_h - q| \leq \int_0^T \int_0^t |u_h(s) - u(s)| ds dt \leq T \|u_h - u\|_{L^1(I)}.$$

Par conséquent,

$$q_h \longrightarrow q \text{ dans } W^{1,1}(I) \text{ avec } \dot{q} = u$$

et l’injection continue de $W^{1,1}(I)$ dans $L^\infty(I)$ donne également

$$q_h \longrightarrow q \text{ dans } L^\infty(I).$$

Or, pour tous t et h , on a $q_h(t) \geq 0$ et donc q est positive presque partout. Puisque q est continue comme limite uniforme de fonctions continues, on obtient finalement

$$\forall t, \quad q(t) \geq 0.$$

2. Convergence de γ_h

Lemme 4.17 $(\lambda_h)_h$ est bornée dans $L^1(I)$ (Démonstration page 108)

Par conséquent, $(\lambda_h)_h$ est bornée dans $\mathcal{M}(I)$ et il existe une sous-suite, toujours notée $(\lambda_h)_h$ et $\lambda \in \mathcal{M}(I)$ tels que

$$\lambda_h \xrightarrow{*} \lambda \text{ dans } \mathcal{M}(I).$$

On a $\dot{\gamma}_h = -\lambda_h$ et donc, en utilisant $\gamma_h(0) = 0$, on obtient $\gamma_h(t) = -\int_0^t \lambda_h$ et ainsi, le lemme 4.17 implique $(\gamma_h)_h$ bornée dans $L^\infty(I)$. De plus pour tout $\varphi \in C_0^1(I)$, une intégration par parties donne

$$\int_0^T \gamma_h \varphi' = \int_0^T \lambda_h \varphi.$$

Par conséquent,

$$\left| \int_0^T \gamma_h \varphi' \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(I)} \|\lambda_h\|_{L^1(I)}$$

et le lemme 4.17 dit que la variation de γ_h est bornée indépendamment de h . $(\gamma_h)_h$ étant déjà bornée dans $L^\infty(I)$ d'après ce qui précède, on a finalement $(\gamma_h)_h$ bornée dans $BV(I)$. Il existe donc une sous-suite de $(\gamma_h)_h$ toujours notée $(\gamma_h)_h$ et $\gamma \in BV(I)$ tels que

$$\gamma_h \longrightarrow \gamma \text{ dans } L^1(I) \text{ et presque partout.}$$

De plus,

$$\dot{\gamma} = -\lambda$$

au sens des mesures. En effet, pour le montrer il suffit d'écrire que $\int \gamma_h \varphi' = -\int \dot{\gamma}_h \varphi = \int \lambda_h \varphi$ et de passer à la limite.

Il nous reste à montrer que γ est négatif ou nul. Pour cela, il suffit de voir que γ_h l'est et d'utiliser la convergence presque partout de γ_h vers γ pour obtenir

$$\gamma \leq 0 \text{ presque partout.}$$

3. PFD à la limite

Montrons qu'à la limite, le Principe Fondamental de la Dynamique contraint (4.8) est vérifié au sens des distributions. Pour cela, on commence par l'écrire au niveau discret. Comme u_h est constant par morceaux, si $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on a

$$\langle m\dot{u}_h, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{N-1} m(u^n - u^{n-1})\varphi(t^n)$$

et, d'après (4.17),

$$\langle m\dot{u}_h, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{N-1} mh f^{n-1} \varphi(t^n) + \sum_{n=1}^{N-1} h \tilde{\lambda}^n \varphi(t^n). \quad (4.18)$$

Nous allons passer à la limite dans (4.18) pour h tendant vers zéro. Par définition de la dérivée au sens des distributions, on a $\langle m\dot{u}_h, \varphi \rangle = -m \int_0^T u_h \varphi'$. Ainsi, en utilisant la convergence en norme $L^1(I)$ de u_h on obtient

$$\langle m\dot{u}_h, \varphi \rangle \longrightarrow -m \int_0^T u \varphi' = \langle m\dot{u}, \varphi \rangle \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Pour le premier terme à droite de l'égalité (4.18), on écrit

$$\begin{aligned} h \sum_{n=1}^{N-1} f^{n-1} \varphi(t^n) &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f(s) \varphi(t^n) ds \\ &= \int_0^T f(s) \varphi(s) ds + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f(s) [\varphi(t^n) - \varphi(s)] ds \\ &\quad - \int_{t^{N-1}}^{t^N} f(s) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Comme φ est uniformément continue sur I , la somme de 1 à $N - 1$ tend vers zéro quand h tend vers zéro. En effet,

$$e(\delta) = \inf_{|x-y|<\delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| \longrightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0,$$

et on a

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} f(s) [\varphi(t^n) - \varphi(s)] ds \right| \leq e(h) \|f\|_{L^1(I)}$$

L'intégrale sur $[t^{N-1}, t^N]$ converge également vers zéro puisque $f\varphi \in L^1(I)$ et $|t^N - t^{N-1}| = h \rightarrow 0$. Finalement, on a obtenu

$$\sum_{n=1}^{N-1} mh f^{n-1} \varphi(t^n) \longrightarrow m \int_0^T f(s) \varphi(s) ds \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Pour le second terme à droite de l'égalité (4.18), on écrit comme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} h \tilde{\lambda}^n \varphi(t^n) &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \lambda_h \varphi(t^n) \\ &= \int_0^T \lambda_h(s) \varphi(s) ds + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \lambda_h(s) [\varphi(t^n) - \varphi(s)] ds \\ &\quad - \int_{t^0}^{t^1} \lambda_h(s) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers $\langle \lambda, \varphi \rangle$ puisque λ_h converge vers λ au sens des mesures. On peut majorer le second terme comme précédemment et on montre qu'il converge vers zéro en utilisant le lemme 4.17. Enfin, le dernier terme est nul. En effet, sur $]t_0, t_1[$, λ_h vaut $\tilde{\lambda}^0 = -(\gamma^1 - \gamma^0)/h$. Puisque $\gamma^0 = 0$ et $\gamma^1 = \gamma^0 + h\lambda^0 = 0$, on a bien λ_h nulle sur $]t_0, t_1[$. On a donc montré que

$$\sum_{n=1}^{N-1} h \tilde{\lambda}^n \varphi(t^n) \longrightarrow \langle \lambda, \varphi \rangle \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Finalement, en passant à la limite dans (4.18), on obtient

$$\langle m\dot{u}, \varphi \rangle = m \int_0^T f(s) \varphi(s) ds + \langle \lambda, \varphi \rangle,$$

et l'équation (4.8) est bien vérifiée par les fonctions limites au sens des distributions :

$$\langle m\ddot{q} - \dot{\gamma}, \phi \rangle = \langle mf, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(I).$$

Montrons que cette égalité est également vraie au sens des mesures. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^0(I)$, il existe une suite $(\phi_n)_n$ de $\mathcal{D}(I)$ convergeant uniformément vers ϕ . On vient de montrer que

$$\langle m\ddot{q} - \dot{\gamma}, \phi_n \rangle = \langle mf, \phi_n \rangle, \quad \forall n$$

Comme $m\dot{q} - \gamma$ est dans $BV(I)$, il existe une constante C strictement positive telle que (voir annexe C)

$$\langle m\ddot{q} - \dot{\gamma}, \psi \rangle \leq C \|\psi\|_\infty, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_0^0(I).$$

Cette inégalité nous permet de passer à la limite dans l'équation précédente et on obtient

$$\langle m\ddot{q} - \dot{\gamma}, \phi \rangle = \langle m.f, \phi \rangle,$$

ce qui montre que

$$m\ddot{q} - \dot{\gamma} = m.f \text{ dans } \mathcal{M}(I).$$

En intégrant cette égalité sur $]0, t[$ on obtient (voir annexe C),

$$(m\dot{q} - \gamma)(t^+) - (m\dot{q} - \gamma)(0^+) = \int_0^t m.f.$$

En utilisant $\gamma(0^+) = 0$ et la continuité presque partout de $m\dot{q} - \gamma$, on a finalement la première équation de $(\mathcal{P}, 4.4)$:

$$m\dot{q} - \gamma = m\tilde{u}, \quad \text{presque partout.}$$

4. Pour montrer que (q, γ, λ) est solution de $(\mathcal{P}, 4.4)$, il nous reste à montrer que $q\gamma = 0$. Au niveau discret, $q_h\gamma_h$ n'est pas nul. On construit donc des fonctions $\tilde{\gamma}_h$ et \tilde{q}_h approchant respectivement γ_h et q_h , telles que $\tilde{\gamma}_h\tilde{q}_h = 0$ et on fait ensuite tendre h vers zéro dans cette égalité.

On définit $\tilde{\gamma}_h$ et \tilde{q}_h constantes par morceaux valant respectivement γ^n et q^n sur $]t^n, t^{n+1}[$ (voir figure 4.13).

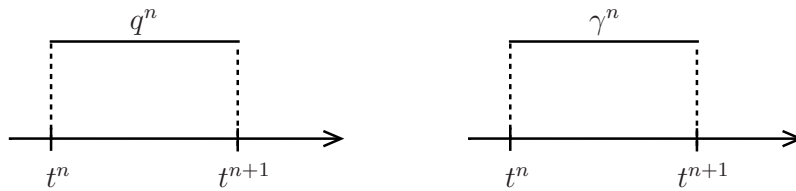


FIG. 4.13 – Construction de \tilde{q}_h (à gauche) et $\tilde{\gamma}_h$ (à droite).

Si q^n est strictement positif, c'est que, soit γ^{n-1} était nul et que la contrainte n'a pas été activée, soit que γ^{n-1} était strictement négatif et qu'il y a eu décollement. Dans les deux cas, on a $\gamma^n = 0$. Par conséquent, $q^n\gamma^n$ est nul pour tout n et on a $\tilde{q}_h\tilde{\gamma}_h = 0$. On souhaite passer à la limite dans cette égalité. Pour cela, on montre d'abord la convergence de \tilde{q}_h vers q . On a

$$\|\tilde{q}_h - q\|_{L^\infty(I)} \leq \|\tilde{q}_h - q_h\|_{L^\infty(I)} + \|q_h - q\|_{L^\infty(I)}.$$

Le second terme tend vers zéro puisque q_h converge uniformément vers q . Pour étudier le premier terme, on remarque que, si $t \in]t^n, t^{n+1}[$,

$$\tilde{q}_h(t) - q_h(t) = q^{n+1} - \left[q^n + (t - t^n) \frac{q^{n+1} - q^n}{h} \right] = (t - t^n)u^n,$$

ce qui implique

$$\|\tilde{q}_h - q_h\|_{L^\infty(I)} \leq h \|u_h\|_{L^\infty(I)}.$$

D’après le lemme 4.15, u_h est borné dans $L^\infty(I)$ indépendamment de h et on obtient donc

$$\tilde{q}_h \longrightarrow q \text{ dans } L^\infty(I) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Montrons de même la convergence de $\tilde{\gamma}_h$ vers γ . On écrit

$$\tilde{\gamma}_h - \gamma = (\tilde{\gamma}_h - \gamma_h) + (\gamma_h - \gamma).$$

D’après ce qui précède (voir le point 2), le second terme converge vers zéro presque partout quand h tend vers zéro. Pour le premier terme on a, si $t \in]t^n, t^{n+1}[$,

$$|\tilde{\gamma}_h(t) - \gamma_h(t)| = (t - t_n) |\tilde{\lambda}^n|.$$

Ainsi,

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} |\tilde{\gamma}_h - \gamma_h| = \frac{h^2}{2} |\tilde{\lambda}^n| = \frac{h}{2} \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\lambda_h|$$

et, en sommant de $n = 0$ à $N - 1$, on obtient

$$\int_0^T |\tilde{\gamma}_h - \gamma_h| = \frac{h}{2} \|\lambda_h\|_{L^1(I)}.$$

λ_h étant bornée dans $L^1(I)$, on a convergence de $\|\tilde{\gamma}_h - \gamma_h\|_{L^1(I)}$ vers zéro. Par conséquent, en utilisant la convergence de γ_h vers γ , on montre que

$$\tilde{\gamma}_h \longrightarrow \gamma \text{ presque partout quand } h \rightarrow 0.$$

On peut donc passer à la limite dans $\tilde{q}_h \tilde{\gamma}_h = 0$ pour obtenir

$$q\gamma = 0 \text{ presque partout.}$$

Ceci finit la démonstration du théorème 4.14 sous réserve de démontrer les trois lemmes utilisés.

– **Démonstration du lemme 4.15** : $(u_h)_h$ est bornée dans $L^\infty(I)$.

Commençons par montrer que, pour tout n ,

$$u^{n+1} \tilde{\lambda}^{n+1} \leq 0. \tag{4.19}$$

Dans le cas où $\gamma^{n+1} = 0$, la contrainte est une contrainte d’inégalité et on a $\lambda^{n+1} \geq 0$. Par conséquent, $\tilde{\gamma}^{n+2} = \gamma^{n+1} - h\lambda^{n+1} \leq 0$ et il n’y a pas de modifications à l’étape 2.

Ainsi, $\tilde{\lambda}^{n+1} = \lambda^{n+1} \geq 0$. Si $\lambda^{n+1} = 0$, l'inégalité (4.19) est vérifiée. Sinon, $\lambda^{n+1} > 0$ et la contrainte est saturée, c'est-à-dire $q^{n+1} + h\bar{u}^{n+1} = 0$. Or, q^{n+1} est positif donc, $u^{n+1} = \bar{u}^{n+1} \leq 0$ et l'inégalité (4.19) est également vérifiée.

Dans le cas où $\gamma^{n+1} < 0$, la contrainte est une contrainte d'égalité et donc $q^{n+1} + h\bar{u}^{n+1} = 0$. Comme dans ce cas $q^{n+1} = 0$, on a donc nécessairement $\bar{u}^{n+1} = 0$. Si $\bar{\gamma}^{n+2} \leq 0$, alors $u^{n+1} = \bar{u}^{n+1} = 0$ et (4.19) est vérifiée. Si $\bar{\gamma}^{n+2} > 0$ alors $u^{n+1} = \gamma^{n+2}/m > 0$ et $\gamma^{n+2} = 0$. Dans ce cas, $\tilde{\lambda}^{n+1} = -(\gamma^{n+2} - \gamma^{n+1})/h \leq 0$ et (4.19) est également vérifiée. Ainsi on a montré que $u^{n+1}\tilde{\lambda}^{n+1} \leq 0$ pour tout n .

En multipliant (4.17) par u^{n+1} on obtient alors

$$\begin{aligned} m|u^{n+1}|^2 &= mu^n u^{n+1} + hm f^n u^{n+1} + h\tilde{\lambda}^{n+1} u^{n+1} \\ &\leq mu^n u^{n+1} + hm f^n u^{n+1} \\ &\leq m|u^n||u^{n+1}| + hm|f^n||u^{n+1}|. \end{aligned}$$

Ainsi, si u^{n+1} est non nul on obtient

$$|u^{n+1}| \leq |u^n| + h|f^n|.$$

Cette inégalité est évidemment encore exacte quand $u^{n+1} = 0$. En itérant on a finalement

$$|u^{n+1}| \leq |u^0| + h \sum_{k=0}^n |f^k| \leq |u^0| + \int_0^T |f|.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, T]$

$$|u_h(t)| \leq |u^0| + \int_0^T |f|,$$

et $(u_h)_h$ est borné dans $L^\infty(I)$, ce qui finit la démonstration du lemme 4.15.

– **Démonstration du lemme 4.16** : $(u_h)_h$ est bornée dans $BV(I)$.

D'après le lemme 4.15, on sait que $(u_h)_h$ est bornée dans $L^\infty(I)$. Pour montrer qu'elle est bornée dans $BV(I)$, il nous suffit donc majorer la variation de u_h indépendamment de h , où

$$\text{Var}(u_h) = \sum_{n=1}^{N-1} |u^n - u^{n-1}|.$$

Pour cela, on va décomposer la somme et considérer les sommes extraites d'indices dans $\{p_1 \dots n_1\}$ où t^{p_1} et t^{n_1} sont deux instants de décollements successifs. La variation totale de u_h est la somme de variations sur des intervalles de ce type à laquelle il faut ajouter deux termes de bord. On se contentera ici d'étudier la variation de u_h sur les intervalles de type $[t^{p_1}, t^{n_1}[$, les termes de bord se traitant de la même façon. L'idée clé de la démonstration est que, puisqu'il y a décollement en p_1 , la vitesse en p_1 est petite et sa variation sur $[t^{p_1}, t^{n_1}[$ ne dépend que de l'intégrale de f sur ce même intervalle. Ainsi, en sommant toutes les contributions, on pourra majorer la variation totale par l'intégrale de f sur $[0, T]$.

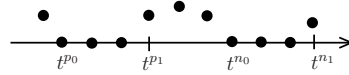


FIG. 4.14 – Démonstration du lemme 4.16 : notations.

Les notations choisies sont données sur la figure 4.14. On note t^{p_0} et t^{n_0} les instants d’impact associés à t^{p_1} et t^{n_1} .

On cherche à majorer la somme

$$\text{Var}_{[t^{p_1}, t^{n_1}]}(u_h) = \sum_{n=p_1}^{n_1-1} |u^n - u^{n-1}|.$$

Deux cas se présentent : la particule peut rester collée plus de deux instants ($n_1 > n_0 + 1$) ou redécoller immédiatement ($n_1 = n_0 + 1$). Dans le premier cas ($n_1 > n_0 + 1$) on écrit

$$\begin{aligned} \text{Var}_{[t^{p_1}, t^{n_1}]}(u_h) &= \sum_{n=p_1}^{n_0-2} |u^n - u^{n-1}| + |u^{n_0-1} - u^{n_0-2}| + |u^{n_0} - u^{n_0-1}| \\ &\quad + \sum_{n=n_0+1}^{n_1-2} |u^n - u^{n-1}| + |u^{n_1-1} - u^{n_1-2}|. \end{aligned}$$

On remarque alors que, $u^n = 0$ pour $n \in [n_0, n_1 - 2]$ et donc,

$$\text{Var}_{[p_1, n_1]}(u_h) \leq \sum_{n=p_1}^{n_0-2} |u^n - u^{n-1}| + 2|u^{n_0-1}| + |u^{n_0-2}| + |u^{n_1-1}|.$$

Dans le second cas, où elle n’adhère au plan qu’un seul instant ($n_1 = n_0 + 1$), on écrit

$$\text{Var}_{[t^{p_1}, t^{n_1}]}(u_h) = \sum_{n=p_1}^{n_0-2} |u^n - u^{n-1}| + |u^{n_0-1} - u^{n_0-2}| + |u^{n_0} - u^{n_0-1}|,$$

et on retrouve la même majoration,

$$\text{Var}_{[t^{p_1}, t^{n_1}]}(u_h) \leq \sum_{n=p_1}^{n_0-2} |u^n - u^{n-1}| + 2|u^{n_0-1}| + |u^{n_0-2}| + |u^{n_1-1}|.$$

Nous allons majorer chacun des termes de droite de cette inégalité. Tout d’abord, si $n \in [p_1, n_0 - 2]$, on se trouve à un instant où la contrainte n’est pas active et donc $\tilde{\lambda}^n = \lambda^n = 0$. Par conséquent, (4.17) donne

$$p_1 \leq n \leq n_0 - 2 \implies |u^n - u^{n-1}| = h|f^{n-1}|.$$

Etudions maintenant l'instant $n_1 - 1$ précédent le décollement. D'après la démonstration du lemme 4.15, on sait que, pour tout n , $m|u^{n+1}|^2 \leq mu^n u^{n+1} + hm f^n u^{n+1}$. Comme u^{n_1-1} est strictement positif, on en déduit

$$u^{n_1-1} \leq u^{n_1-2} + h f^{n_1-2}.$$

Si la particule n'est restée collée au plan qu'un unique instant ($n_1 = n_0 + 1$), u^{n_1-2} est négatif. Soit elle est restée collée pendant au moins de pas de temps et u^{n_1-2} est nulle. Dans les deux cas on obtient

$$0 < u^{n_1-1} \leq h f^{n_1-2}.$$

Pour majorer u^{n_0-1} et u^{n_0-2} , on note d'abord que t^{p_1} est un instant de décollement et donc, comme pour n_1 on a

$$0 < u^{p_1-1} \leq h f^{p_1-2}.$$

Puis, en utilisant l'inégalité $|u^{n+1}| \leq |u^n| + h|f^n|$ montrée pour tout n dans la démonstration du lemme 4.15, on obtient

$$|u^{n_0-1}| \leq |u^{p_1-1}| + \sum_{n=p_1-1}^{n_0-2} h|f^n| \leq \sum_{n=p_1-2}^{n_0-2} h|f^n|$$

et

$$|u^{n_0-2}| \leq |u^{p_1-1}| + \sum_{n=p_1-1}^{n_0-3} h|f^n| \leq \sum_{n=p_1-2}^{n_0-3} h|f^n|.$$

Finalement on obtient

$$\text{Var}_{[t^{p_1}, t^{n_1}]}(u_h) \leq \sum_{n=p_1}^{n_0-2} h|f^{n-1}| + 2 \sum_{n=p_1-2}^{n_0-2} h|f^n| + \sum_{n=p_1-2}^{n_0-3} h|f^n| + h|f^{n_1-2}|,$$

que l'on peut encore majorer par

$$\text{Var}_{[t^{p_1}, t^{n_1}]}(u_h) \leq 4 \sum_{n=p_1-2}^{n_1-2} h|f^n| \leq 4 \int_{t^{p_1-2}}^{t^{n_1-1}} |f(s)| ds.$$

Les intervalles $[t^{p_1-2}, t^{n_1-1}]$ se chevauchant deux à deux, on obtient finalement en sommant toutes les contributions, y compris celles des bords,

$$\text{Var}(u_h) \leq u^0 + 8 \int_0^T |f(s)| ds,$$

ce qui termine la démonstration de ce lemme.

– **Démonstration du lemme 4.17** : $(\lambda_h)_h$ est bornée dans $L^1(I)$.

L'égalité (4.17) donne

$$\forall n \geq 1, \quad h\tilde{\lambda}^n = m(u^n - u^{n-1}) - hm f^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq 1, \quad \int_{t^n}^{t^{n+1}} |\lambda_h| = h|\tilde{\lambda}^n| \leq m|u^n - u^{n-1}| + hm|f^{n-1}|.$$

En sommant de $n = 1$ à $N - 1$ et en utilisant, comme au point 3 de la démonstration générale, $\tilde{\lambda}^0 = 0$, on a donc

$$\int_0^T |\lambda_h| \leq m\text{Var}(u_h) + \|f\|_{L^1(I)}.$$

Le lemme 4.16 permet alors de conclure que $(\lambda_h)_h$ est bornée dans $L^1(I)$, ce qui finit la démonstration du lemme 4.17.

Les trois lemmes utilisés ayant été démontrés, on a terminé la démonstration du théorème 4.14. \square

4.3.3 Intégration à la simulation fluide/particules

Comme dans le chapitre 3, afin de minimiser les coûts de calculs, on choisit d'utiliser une méthode de splitting pour intégrer ce modèle à des simulations d'écoulements fluide-particules.

On suppose la particule plongée dans un fluide visqueux. La force extérieure est verticale et s'exerce uniquement sur la particule. On note $f(t)$ son intensité massique au temps t . On note \mathbf{u}^n et p^n la vitesse et la pression du fluide au temps n . On suppose que l'on dispose d'un solveur fluide/particules S qui, connaissant la position de la particule q^{n+1} , la vitesse \mathbf{u}^n et la force extérieure f^n calcule $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$ la vitesse du fluide et sa pression au temps $n + 1$ sans prendre en compte a priori la gestion du contact. On peut par exemple choisir d'utiliser la méthode présentée dans la partie I mais tout autre solveur fluide/particule peut également convenir.

Pour intégrer la résolution fluide dans l'algorithme 4.1 il suffit de modifier l'étape 4 de calcul de la vitesse a priori en utilisant le solveur fluide/particule dont on dispose. On obtient alors l'algorithme suivant.

Pour tout $n \geq 0$, on dispose de $(q^n, u^n, \gamma^n, \lambda^n)$ et $(\mathbf{u}^n, \mathbf{p}^n)$. On note $f^n = \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s) ds$.

1. Calcul de γ^{n+1} : $\gamma^{n+1} = \gamma^n - h\lambda^n$,
2. Cas d'un décollement : Si $\gamma^{n+1} > 0$, $u^n = \gamma^{n+1}/m$ et $\gamma^{n+1} = 0$,
3. Calcul de q^{n+1} : $q^{n+1} = q^n + hu^n$,
4. Calcul de $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1})$ grâce au solveur fluide/particules,

$$(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1}) = S(q^{n+1}, \mathbf{u}^n, f^n)$$
5. (a) Calcul de $u^{n+1/2}$ associé à \mathbf{u}^{n+1} : $u^{n+1/2} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1}$
 (b) Projection de la vitesse sur l'espace des *vitesse admissibles*,

$$u^{n+1} \in K(q^{n+1}, \gamma^{n+1}), \quad \frac{1}{2} |u^{n+1} - u^{n+1/2}|_m^2 = \min_{v \in K(q^{n+1}, \gamma^{n+1})} \frac{1}{2} |v - u^{n+1/2}|_m^2.$$

où $K(q, \gamma) = \{v, q + hv \geq 0\}$ si $\gamma = 0$
 $K(q, \gamma) = \{v, q + hv = 0\}$ si $\gamma < 0$

On dispose alors du multiplicateur de lagrange λ^{n+1} .

Algorithme 4.2: Intégration du modèle de contact visqueux à la simulation fluide/particules.

4.4 Enrichissement du modèle

4.4.1 Prise en compte de la rugosité

Comme on l'a vu dans la section 4.1.3, si la particule ou le plan sont rugueux, le développement de la force de lubrification n'est plus valable et il peut y avoir contact solide/solide entre la particule et le plan.

Considérons une particule rugueuse de rayon a et possédant des rugosités de taille r_1 (de telle sorte que la surface de la particule se situe entre $r = a$ et $r = a + r_1$) et un plan $y = 0$ possédant des rugosités de taille r_2 (de telle sorte que la surface de plan se situe entre $y = 0$ et $y = r_2$)(voir Fig. 4.15).

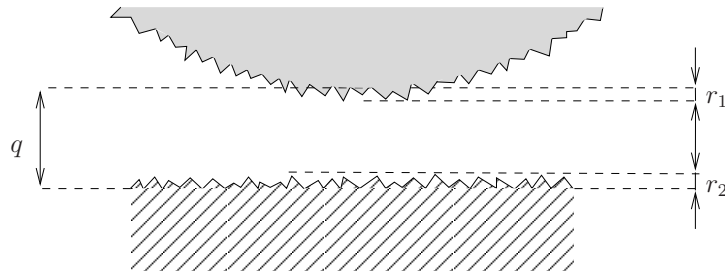


FIG. 4.15 – Notations : cas rugueux

On a vu que la force de lubrification s’exerçant entre la particule et le plan est celle qui s’exercerait entre d’une part, une particule lisse de même rayon dont le centre est situé à une distance $r_{1,s} < r_1$ en dessous de celui de la particule rugueuse et d’autre part, un plan lisse de frontière $y = r_{2,s} < r_2$. Il peut alors y avoir contact solide/solide entre les rugosités. Notre modèle sera le suivant.

- On considère que la force de lubrification qui s’exerce sur la particule est celle qui s’exercerait si le plan et la particule étaient lisses, avec la particule de rayon a et le plan situé en $y = 0$. Cela revient à prendre $r_{1,s} = 0$ et $r_{2,s} = 0$
- Il y a un contact solide/solide entre le plan et la particule si $q = r_1 + r_2$. Il est modélisé par un contact inélastique. Il n’y a donc pas de mémoire des forces qui s’exercent sur la particule durant ce contact.

En se rappelant qu’on a posé $\gamma_\mu = \mu \ln(q_\mu)$, il suffit pour écrire ce modèle de borner inférieurement γ dans le modèle précédent : $\gamma \geq \gamma_{min} = \mu \ln(r_1 + r_2)$. Le type de trajectoire obtenue pour un tel modèle est tracé sur la figure 4.16. Quand γ atteint le seuil, la distance

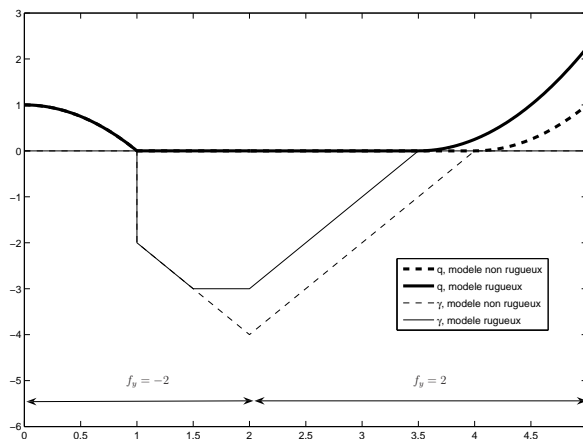


FIG. 4.16 – Comparaison des trajectoires : cas rugueux/cas non rugueux

réelle microscopique atteint $r_1 + r_2$. A partir de cet instant, il y a contact solide/solide inélastique entre les rugosités et γ n’intègre plus les forces exercées. Le contact solide/solide

est rompu dès que l'on "tire" sur la particule et alors, γ recommence à intégrer les forces exercées. Le redécollement a alors lieu plus tôt que dans le cas non rugueux.

4.4.2 Ajout de la force de lubrification tangentielle

Force de lubrification tangentielle : développement au premier ordre

Dans le cas d'un déplacement de la particule parallèle au plan, avec rotation, une force de lubrification tangentielle ainsi qu'un moment sont exercés par le fluide sur la particule.

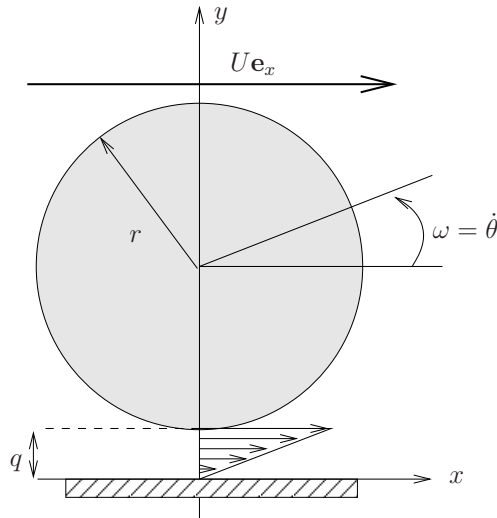


FIG. 4.17 – Force de lubrification tangentielle : notations.

Dans [40], on en donne un développement au premier ordre quand la distance tend vers zéro,

$$\mathbf{F}_{lub,tang} \sim 6\pi\mu r \ln(q) \left(\frac{8}{15}U - \frac{2}{15}r\omega \right) \mathbf{e}_x,$$

$$\mathbf{T} \sim 8\pi\mu r^2 \ln(q) \left(-\frac{1}{10}U + \frac{2}{5}r\omega \right) \mathbf{e}_z,$$

où U est la vitesse horizontale appliquée et ω la vitesse de rotation. Comme précédemment, μ , r et q sont respectivement la viscosité du fluide, le rayon de la particule et sa distance au plan (voir figure 4.17). Il s'agit bien d'une force de résistance au mouvement puisque si $q < 1$, $\ln(q) < 0$.

Modèle limite à partir du premier ordre de la force

On suppose maintenant la particule libre de se déplacer dans un plan vertical. On note (x, y) la position de son centre dans ce plan, θ son orientation, $\omega = \dot{\theta}$ sa vitesse angulaire, m sa masse, J son moment d'inertie et q la distance entre le plan et la particule ($y = r + q$). Les inconnues sont (x, q, θ) . Pour un fluide de viscosité μ , elles sont indicées comme précédemment par μ . La force extérieure exercée sur la particule est $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$.

D’après ce qui précède, le Principe Fondamental de la Dynamique prenant en compte les forces de lubrification normale et tangentielle au premier ordre s’écrit sous la forme

$$\begin{cases} m\ddot{q}_\mu = -\mu\frac{\dot{q}_\mu}{q_\mu} + mf_y, \\ m\ddot{x}_\mu = \mu\ln(q_\mu)(a_{11}\dot{x}_\mu + a_{12}r\dot{\theta}_\mu) + mf_x, \\ J\ddot{\theta}_\mu = \mu\ln(q_\mu)(a_{21}\dot{x}_\mu + a_{22}r\dot{\theta}_\mu), \end{cases} \quad (4.20)$$

où

$$a_{11} = \frac{16}{5}\pi r, \quad a_{12} = -\frac{4}{5}\pi r, \quad a_{21} = -\frac{4}{5}\pi r^2 \quad \text{et} \quad a_{22} = \frac{16}{5}\pi r^2. \quad (4.21)$$

On initialise le problème à $x(0) = x^0$, $q(0) = q^0 > 0$, $\theta(0) = \theta^0$, $\dot{x}(0) = v^0$, $\dot{q}(0) = u^0$ et $\omega(0) = \omega^0$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 4.5. Il montre l’existence d’une solution à (4.20) ainsi que sa convergence, quand la viscosité tend vers zéro, vers un modèle de contact visqueux prenant en compte les effets de la force de lubrification tangentielle.

Théorème 4.18 *On considère des conditions initiales $q^0 \in \mathbb{R}_+^*$, $X^0 \in \mathbb{R}^2$, $u^0 \in \mathbb{R}$ et $U^0 \in \mathbb{R}^2$. $I =]0, T[$ et $(f_1, \mathbf{f}) \in L^1(I) \times L^1(I)^2$ sont donnés. Soit φ strictement positive, lipschitzienne et localement intégrable sur \mathbb{R}_+^* . On suppose de plus que $\Phi(q) = \int_q^1 \varphi \rightarrow +\infty$ quand $q \rightarrow 0^+$. On note (q_μ, X_μ) la solution du système d’équations différentielles ordinaires*

$$\begin{cases} \ddot{q}_\mu = -\mu\dot{q}_\mu\varphi(q_\mu) + f_1, \\ \ddot{X}_\mu = -\mu\Phi(q_\mu)AX_\mu + \mathbf{f}, \end{cases} \quad (4.22)$$

où A est une matrice constante de taille 2×2 .

Alors, si on pose $\gamma_\mu = -\mu\Phi(q_\mu)$, il existe une suite extraite, toujours notée (q_μ, X_μ) , $q \in W^{1,\infty}(I)$, $X \in W^{2,\infty}$ et $\gamma \in L^\infty(I)$, tels que

$$\begin{aligned} q_\mu &\longrightarrow q \text{ uniformément,} \\ \gamma_\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \gamma \text{ dans } L^\infty(I), \\ X_\mu &\longrightarrow X \text{ simplement sur } I \end{aligned}$$

quand μ tend vers zéro. Et (q, X, γ) est solution du problème

$$\begin{cases} m\dot{q} + \gamma = m\tilde{u}_1, \\ q \geq 0, \quad \gamma \leq 0, \quad q\gamma = 0. \\ \ddot{X} = \gamma AX + \mathbf{f}. \end{cases}$$

où $\tilde{u}_1 = u^0 + \int_0^t f_1$.

Démonstration : Cette démonstration est une généralisation de celle du théorème 4.5. En effet, la première équation, qui porte sur l’inconnue q_μ , est identique à (4.1) et est indépendante des deux autres. Elle peut donc être traitée de la même manière que dans la démonstration du théorème 4.5.

Montrons d'abord que la solution (q_μ, X_μ) est globale. Le système se réécrit en un système d'ordre 1 sur les inconnues $Y = (q_\mu, X_\mu, \dot{q}_\mu, \dot{X}_\mu)$ sur le domaine $\Omega_Y = \{(q, X, u, U) \in \mathbb{R}^6, q > 0\}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne l'existence d'une unique solution maximale dans Ω_Y définie sur $[0, T[$ et on montre qu'elle est globale par l'absurde. En effet, si $T < +\infty$, le théorème d'échappement dit que la solution doit sortir de tout compact de Ω_Y . Or, comme dans la démonstration du théorème 4.5, \dot{q}_μ est bornée et q_μ ne peut tendre vers zéro en T . Par conséquent, il suffit de montrer que \dot{X}_μ est bornée sur $[0, T[$ pour obtenir que la solution ne peut s'échapper de Ω_Y sur $[0, T[$. Or, $U_\mu = \dot{X}_\mu$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$\dot{U}_\mu = \gamma_\mu A U_\mu + \mathbf{f}$$

et s'écrit donc

$$U_\mu(t) = \exp \left[\left(\int_0^t \gamma_\mu(s) ds \right) A \right] X_0 + \int_0^t \exp \left[\left(\int_z^t \gamma_\mu(s) ds \right) A \right] \mathbf{f} dz.$$

Or, γ_μ est bornée puisque $\dot{q}_\mu = -\gamma_\mu + \int_0^t f_1 + C$ et \dot{q}_μ l'est. Ainsi, U_μ est bornée et la solution est globale.

Étudions maintenant le comportement des solutions quand μ tend vers zéro. Puisque la première équation est indépendante des autres, la démonstration du théorème 4.5 s'applique à nouveau. On a donc la convergence uniforme de q_μ vers q et la convergence dans $L^\infty(I)$ faible étoile de γ_μ vers γ , avec $m\dot{q} + \gamma = m\tilde{u}_1$, $q \geq 0$, $\gamma \leq 0$ et $q\gamma = 0$. Il reste donc à étudier la convergence de X_μ . Pour cela, on commence par passer à la limite dans l'expression explicite de U_μ . La convergence faible étoile de γ_μ donne, pour tous z et t ,

$$\int_z^t \gamma_\mu(s) ds \longrightarrow \int_z^t \gamma(s) ds \text{ quand } \mu \rightarrow 0.$$

Cette convergence associée au caractère borné de γ_μ nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$U_\mu \longrightarrow U \text{ simplement quand } \mu \rightarrow 0,$$

où

$$U(t) = \exp \left[\left(\int_0^t \gamma(s) ds \right) A \right] X_0 + \int_0^t \exp \left[\left(\int_z^t \gamma(s) ds \right) A \right] \mathbf{f} dz.$$

U est donc solution de

$$\dot{U} = \gamma A U + \mathbf{f}.$$

Enfin, écrivant que $X_\mu = X^0 + \int_0^t U_\mu$, et en remarquant que U_μ est borné indépendamment de μ puisque γ_μ l'est, on peut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient

$$X_\mu \longrightarrow X \text{ simplement quand } \mu \rightarrow 0,$$

où $\dot{X} = U$ est la solution de

$$\ddot{X} = \gamma A \dot{X} + \mathbf{f}.$$

On a ainsi terminé la démonstration du théorème. \square

Le système d'équations (4.20) entre dans le cadre de ce théorème en posant $\varphi(q) = 1/q$, $f_1 = f_x$, $\mathbf{f} = (f_y, 0)$ et $X_\mu = (x_\mu, \theta_\mu)$. Le modèle de contact visqueux ainsi obtenu est

$$(\mathcal{P}^{\text{global}}) \begin{cases} m\dot{q} + \gamma = m\tilde{u}, \\ q \geq 0, \quad \gamma \leq 0, \quad q\gamma = 0, \\ m\ddot{x} = \gamma(a_{11}\dot{x} + a_{12}r\dot{\theta}) + mf_x, \\ J\ddot{\theta} = \gamma(a_{21}\dot{x} + a_{22}r\dot{\theta}), \end{cases}$$

où $\tilde{u} = u^0 + \int_0^t f_y(s)ds$.

Bilan d'énergie :

Pour finir ce chapitre, écrivons un bilan d'énergie pour ce modèle global de contact visqueux.

Propriété 4.19 *Soit (q, γ, x, θ) solution de $(\mathcal{P}^{\text{global}})$. On suppose que les points de contact $(t_i)_i$ et les points de décollement $(\tilde{t}_i)_i$ de la particule sont en nombre fini (voir Fig 4.18). On peut alors écrire le bilan d'énergie suivant (au sens des distributions) :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\omega}^2 \right) &= \underbrace{mf_x\dot{x} + \sum mf_y\dot{q}\mathbf{1}_{[\tilde{t}_i, t_{i+1}]}]}_{\text{puissance des forces extérieures}} \\ &+ \underbrace{(a_{11}\dot{x}^2 + a_{12}r\dot{x}\dot{\omega} + a_{21}\dot{x}\dot{\omega} + a_{22}r\dot{\omega}^2)\gamma}_{\text{dissipation due à la force de lubrification tangentielle}} - \underbrace{\sum \frac{1}{2}m\dot{q}^2(t_i)\delta_{t_i}}_{\text{perte d'énergie cinétique lors des contacts}} \end{aligned}$$

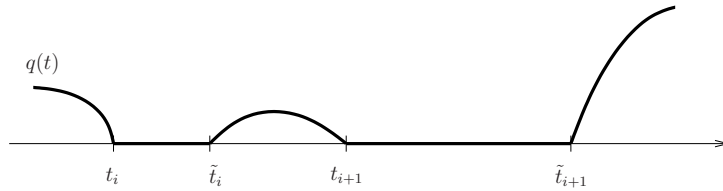


FIG. 4.18 – Bilan d'énergie : notations

Démonstration : Sur $]t_i, \tilde{t}_i[$, on a $\dot{q} = 0$ et $\gamma = m\tilde{u}$. Sur $]\tilde{t}_i, t_{i+1}[$, on a $\dot{q} = \tilde{u}$, $\ddot{q} = f_y$ et $\gamma = 0$.

Par conséquent, en utilisant $\tilde{u}(\tilde{t}_i) = \gamma(\tilde{t}_i) = 0$, on obtient au sens des distributions

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 \right) &= \sum_i m f_y(t) \dot{q}(t) \mathbf{1}_{] \tilde{t}_i, t_{i+1} [}(t) + \sum_i \frac{1}{2} \tilde{u}^2(\tilde{t}_i) \delta_{\tilde{t}_i} - \sum_i \frac{1}{2} \tilde{u}^2(t_i) \delta_{t_i} \\ &= \sum_i m f_y(t) \dot{q}(t) \mathbf{1}_{] \tilde{t}_i, t_{i+1} [}(t) - \sum_i \frac{1}{2} \tilde{u}^2(t_i) \delta_{t_i} \end{aligned}$$

On a également

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \gamma(a_{11} \dot{x} + a_{12} r \omega) \dot{x} + m f_x \dot{x}$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \gamma(a_{21} \dot{x} + a_{22} r \omega) \omega.$$

On obtient l'égalité recherchée en sommant ces trois contributions. \square

Remarque 4.20 *Noter que la puissance de la force extérieure verticale est nulle dès que la particule est en contact avec le plan. Au contraire, γ étant nul en dehors de ces contacts, le terme dû à la force de lubrification tangentielle n'agit que lors des contacts. D'après les valeurs des a_{ij} données en (4.21), ce terme s'écrit*

$$\begin{aligned} (a_{11} \dot{x}^2 + a_{12} r \dot{x} \omega + a_{21} \dot{x} \omega + a_{22} r \omega^2) \gamma &= \frac{4}{5} \pi r (4 \dot{x}^2 - 2 r \dot{x} \omega + 4 r^2 \omega^2) \gamma \\ &= \frac{4}{5} \pi r [(\dot{x} - r \omega)^2 + 3(\dot{x}^2 + r^2 \omega^2)] \gamma. \end{aligned}$$

Comme γ est négatif, il s'agit bien d'une force de dissipation.

Chapitre 5

Modèle de “contact visqueux” et programmation dans le cas multi-particules

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 5.1 | Modèle multi-particules | 118 |
| 5.1.1 | Cas de deux particules | 118 |
| 5.1.2 | Ecriture du modèle multi-particules | 122 |
| 5.2 | Algorithme | 123 |
| 5.2.1 | Ecriture de l’algorithme multi-particules | 123 |
| 5.2.2 | Projection | 124 |
| 5.2.3 | Recherche des voisins | 125 |
| 5.2.4 | Extensions possibles | 128 |
| 5.2.5 | Premiers résultats numériques | 129 |
| 5.3 | Programmation Orientée Objet | 132 |
| 5.3.1 | Méthodologie et objectifs | 132 |
| 5.3.2 | Les classes “Variable” | 134 |
| 5.3.3 | Les classes “Opérateur” | 137 |
| 5.3.4 | La Classe “Problème” | 140 |
| 5.3.5 | Le code et son utilisation | 141 |
| 5.3.6 | Résultats numériques : sédimentation de 1000 particules | 144 |

Résumé : L’objectif de ce chapitre est de proposer un algorithme permettant de prendre en compte de manière efficace la force de lubrification lors de simulations numériques d’écoulements fluide/particules. Pour cela, on généralise le modèle présenté dans le chapitre précédent. La version multi-particules du modèle de “contact visqueux” est basée sur une projection des vitesses, à chaque instant, sur un espace de *vitesses admissibles*. Nous proposons ensuite un algorithme permettant la simulation de tels systèmes. Il s’agit d’une extension de l’algorithme de gestion des contacts décrit dans le chapitre 3. Enfin, nous présentons un exemple de programmation orientée objet de l’algorithme obtenu.

Abstract : The aim of this chapter is to propose an algorithm allowing to take into account efficiently the lubrication force in numerical simulations of fluid/particle flows. To do so, we generalize the model presented in the previous chapter. The multi-particle version of the model is based on the projection of the velocities onto a set of *admissible velocities*. Then, we propose an algorithm for such systems which consists in an extension of the contact algorithm described in chapter 3. At last, we present an exemple of object oriented programming of the algorithm.

5.1 Modèle multi-particules

5.1.1 Cas de deux particules

Déplacements en une dimension

On se place dans le cas où deux particules sphériques sont plongées dans un fluide visqueux. On suppose pour commencer qu’elles sont assujetties à se déplacer le long de l’axe reliant leurs centres. On note cet axe \mathbf{e}_x . On note x_1 et x_2 la position des centres des sphères sur cet axe et r_1, r_2 leurs rayons respectifs. $D_{12} = |x_2 - x_1| - r_2 - r_1$ est la distance signée (qui sera imposée positive) entre les particules (voir figure 5.1).

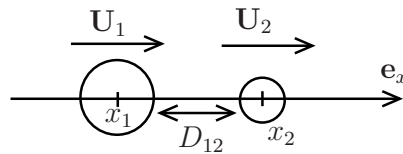


FIG. 5.1 – 2 particules en dimension 1 : notations.

Les forces extérieures exercées sur les particules sont $\mathbf{f}_i = f_i \mathbf{e}_x$ pour $i = 1, 2$. Comme dans le chapitre précédent, l’action du fluide sur les particules est modélisée par le développement au premier ordre de la force de lubrification normale. Ce développement est donné dans [20] : si $\mathbf{U}_1 = U_1 \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{U}_2 = U_2 \mathbf{e}_x$ sont les vitesses des particules 1 et 2 respectivement, on a

$$\mathbf{F}_{lub,2 \rightarrow 1} \sim 6\pi\mu \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{(U_2 - U_1)}{D_{12}} \mathbf{e}_x. \quad (5.1)$$

Comme dans la partie précédente, à viscosité μ fixée, on écrit le Principe Fondamental de la Dynamique au premier ordre sur chacune des deux particules. On obtient

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_{1,\mu} = +6\pi\mu \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{\dot{x}_{2,\mu} - \dot{x}_{1,\mu}}{D_{12}} + m_1 f_1 \\ m_2 \ddot{x}_{2,\mu} = -6\pi\mu \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{\dot{x}_{2,\mu} - \dot{x}_{1,\mu}}{D_{12}} + m_2 f_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

En posant $\gamma_{12,\mu} = 6\pi\mu l n(x_{2,\mu} - x_{1,\mu})$ et en faisant tendre μ vers zéro on obtient alors le système limite suivant

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in W^{1,\infty}(I), \quad \gamma_{12} \in L^\infty(I), \\ m_1 \dot{x}_1(t) - \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \gamma_{12}(t) = m_1 \tilde{u}_1 = m_1 u_1^0 + m_1 \int_0^t f_1(s) ds, \\ m_2 \dot{x}_2(t) + \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \gamma_{12}(t) = m_2 \tilde{u}_2 = m_2 u_2^0 + m_2 \int_0^t f_2(s) ds, \\ D_{12} \geq 0, \quad \gamma_{12} \leq 0, \quad D_{12} \gamma_{12} = 0, \\ x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0 \text{ tq } D_{12}(0) > 0, \\ \dot{x}_1(0) = u_1^0, \quad \dot{x}_2(0) = u_2^0. \end{cases}$$

Ce système est l'équivalent pour deux particules de $(\mathcal{P}, 4.4)$. Comme précédemment pour $(\mathcal{P}', 4.12)$, on le réécrit à l'aide d'une loi de choc et d'un multiplicateur de Lagrange sous la forme

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in W^{1,\infty}(I), \quad \dot{x}_1, \dot{x}_2 \in BV(I), \quad \gamma_{12} \in BV(I), \quad \lambda_{12} \in \mathcal{M}(I), \\ (\dot{x}_1(t^+), \dot{x}_2(t^+)) = \Pi_{C_{D_{12}, \gamma_{12}}(t)}(\dot{x}_1(t^-), \dot{x}_2(t^-)), \\ m_1 \ddot{x}_1 = m_1 f_1 - \lambda_{12}, \\ m_2 \ddot{x}_2 = m_2 f_2 + \lambda_{12}, \\ \text{supp}(\lambda_{12}) \subset \{t, D_{12}(t) = 0\}, \\ \dot{\gamma}_{12} = -\frac{(r_1 + r_2)^2}{r_1^2 r_2^2} \lambda_{12}, \\ D_{12} \geq 0, \quad \gamma_{12} \leq 0, \\ x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0 \text{ tq } D_{12}(0) > 0, \\ \dot{x}_1(0) = u_1^0, \quad \dot{x}_2(0) = u_2^0, \quad \gamma_{12}(0) = 0. \end{cases}$$

où Π_K est la projection sur K et

$$C_{D_{12}, \gamma_{12}}(t) = \begin{cases} \{(v_1, v_2), v_1 - v_2 = 0\} & \text{si } \gamma_{12}(t^-) < 0, \\ \{(v_1, v_2), v_2 - v_1 \geq 0\} & \text{si } \gamma_{12}(t^-) = 0, \quad D_{12}(t) = 0, \\ \mathbb{R}^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$C_{D_{12}, \gamma_{12}}(t)$ est l'espace des *vitesses admissibles*. En effet, si $\gamma_{12}(t^-)$ est strictement négatif, c'est que les deux particules sont collées au temps t et doivent le rester. Il faut donc imposer $\frac{dD_{12}}{dt} = 0$ or, $\frac{dD_{12}}{dt} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$ et la contrainte s'écrit bien $(\dot{x}_1(t^+), \dot{x}_2(t^+)) \in C_{D_{12}, \gamma_{12}}(t)$. De même, si on se situe à un instant de contact ou de décollement ($\gamma_{12}(t^-) = 0$ et $D_{12}(t) = 0$), il faut empêcher les particules de se chevaucher, ce qui revient à imposer $\frac{dD_{12}}{dt} \geq 0$ et donc $(\dot{x}_1(t^+), \dot{x}_2(t^+)) \in C_{D_{12}, \gamma_{12}}(t)$ traduit bien la contrainte. λ_{12} est le multiplicateur de Lagrange associé à ces contraintes et n'est actif que quand les particules sont collées (i.e. $D_{12} = 0$). La force supplémentaire qu'il faut imposer sur la particule 1 (resp. 2) pour vérifier ces contraintes est $-\lambda_{12}\mathbf{e}_x$ (resp. $\lambda_{12}\mathbf{e}_x$). Si les particules ne sont pas collées alors λ_{12} est nul et on retrouve le Principe Fondamental de la Dynamique ne prenant en compte que les forces extérieures ($\ddot{x}_i = f_i$ pour $i = 1, 2$). Si les particules sont collées, on a $\ddot{D}_{12} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = 0$ et donc $\dot{\gamma}_{12} = -\frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (f_1 - f_2)$. γ_{12} intègre donc le bilan des forces s'exerçant sur les deux particules.

Déplacements en deux dimensions

On suppose maintenant que les deux particules sont libres de se déplacer dans \mathbb{R}^2 . \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 désignent les vecteurs position des particules dans \mathbb{R}^2 , \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 les forces exercées sur celles-ci et $\mathbf{e}_{12} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) / \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$ le vecteur unitaire dirigé selon la ligne des centres (voir Fig. 5.2).

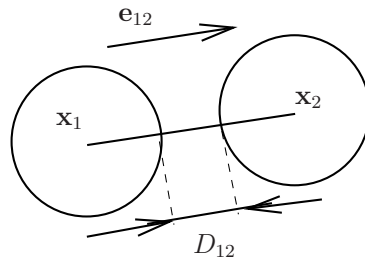


FIG. 5.2 – 2 particules en dimension 2 : notations.

La force de lubrification est alors dirigée selon \mathbf{e}_{12} et vaut

$$F_{lub,2 \rightarrow 1} \sim 6\pi\mu \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \frac{(\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}}{D_{12}} \mathbf{e}_{12}.$$

On obtient alors le modèle suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in (W^{1,\infty}(I))^2, \quad \dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2 \in (BV(I))^2, \quad \gamma_{12} \in BV(I), \quad \lambda_{12} \in \mathcal{M}(I), \\ (\dot{\mathbf{x}}_1(t^+), \dot{\mathbf{x}}_2(t^+)) = P_{C_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \gamma_{12}}(t)}(\dot{\mathbf{x}}_1(t^-), \dot{\mathbf{x}}_2(t^-)), \\ m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = m_1 \mathbf{f}_1 - \lambda_{12} \mathbf{e}_{12}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = m_2 \mathbf{f}_2 + \lambda_{12} \mathbf{e}_{12}, \\ \text{supp}(\lambda_{12}) \subset \{t, D_{12}(t) = 0\}, \\ \dot{\gamma}_{12} = -\frac{(r_1 + r_2)^2}{r_1^2 r_2^2} \lambda_{12}, \\ D_{12} \geq 0, \quad \gamma_{12} \leq 0, \\ \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_1^0, \quad \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_2^0 \text{ tq } D_{12}(0) > 0, \\ \dot{\mathbf{x}}_1(0) = \mathbf{u}_1^0, \quad \dot{\mathbf{x}}_2(0) = \mathbf{u}_2^0, \quad \gamma_{12}(0) = 0, \end{array} \right.$$

où

$$C_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \gamma_{12}}(t) = \begin{cases} \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{e}_{12} = 0\} & \text{si } \gamma_{12}(t^-) < 0, \\ \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{e}_{12} \geq 0\} & \text{si } \gamma_{12}(t^-) = 0, \quad D_{12}(t) = 0, \\ \mathbb{R}^2 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Puisque $\frac{dD_{12}}{dt} = (\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}$, on observe comme précédemment que $C_{D_{12}, \gamma_{12}}(t)$ est bien l'espace des *vitesse admissibles* au temps t . La force supplémentaire exercée pour imposer les contraintes est dirigée selon la direction joignant les centres des particules et vaut $\lambda_{12} \mathbf{e}_{12}$ sur la particule 2.

Ce dernier système peut enfin être écrit de façon plus synthétique. On pose $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \in \mathbb{R}^4$, $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2)$ la matrice de masse et $\mathbf{G}_{12} = (-\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{12}) \in \mathbb{R}^4$. Noter que $\mathbf{G}_{12}(\mathbf{x})$ est le gradient de $D_{12}(\mathbf{x})$. On peut alors écrire :

$$(\mathcal{P}'_2) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \in (W^{1,\infty}(I))^4, \quad \dot{\mathbf{x}} \in (BV(I))^4, \quad \gamma_{12} \in BV(I), \quad \lambda_{12} \in \mathcal{M}(I), \\ \dot{\mathbf{x}}(t^+) = P_{C_{D_{12}, \gamma_{12}}(t)}(\dot{\mathbf{x}}(t^-)) \\ M \ddot{\mathbf{x}} = M \mathbf{f} + \lambda_{12} \mathbf{G}_{12} \\ \text{supp}(\lambda_{12}) \subset \{t, D_{12}(t) = 0\} \\ \dot{\gamma}_{12} = -\frac{(r_1 + r_2)^2}{r_1^2 r_2^2} \lambda_{12} \\ D_{12} \geq 0, \quad \gamma_{12} \leq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \text{ tq } D_{12}(0) > 0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \gamma_{12}(0) = 0 \end{array} \right.$$

où

$$C_{\mathbf{x}, \gamma_{12}}(t) = \begin{cases} \{\mathbf{V} \in \mathbb{R}^4, \mathbf{G}_{12}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} = 0\} & \text{si } \gamma_{12}(t^-) < 0 \\ \{\mathbf{V} \in \mathbb{R}^4, \mathbf{G}_{12}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} \geq 0\} & \text{si } \gamma_{12}(t^-) = 0, \quad D_{12}(t) = 0 \\ \mathbb{R}^4 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.1.2 Ecriture du modèle multi-particules

On généralise le modèle (\mathcal{P}'_2) au cas de N particules. \mathbf{x}_i désigne le vecteur position de la particule i dans \mathbb{R}^2 , \mathbf{f}_i la force exercée sur celle-ci, D_{ij} est la distance signée entre les particules i et j et $\mathbf{e}_{ij} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|$ (voir Fig. 5.3).

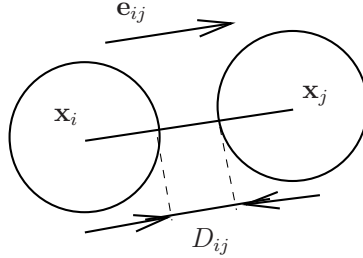


FIG. 5.3 – Particules i et j en dimension 2 : notations.

Comme précédemment, on pose $\mathbf{x} = (\dots, \mathbf{x}_i, \dots) \in \mathbb{R}^{2N}$, $\mathbf{f} = (\dots, \mathbf{f}_i, \dots) \in \mathbb{R}^{2N}$, $M = \text{diag}(\dots, m_i, m_i, \dots)$ la matrice de masse de taille $2N \times 2N$ et $\mathbf{G}_{ij} = \nabla_{\mathbf{x}} D_{ij} \in \mathbb{R}^{2N}$. On a :

$$\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}) = (\dots, 0, \underset{i}{-\mathbf{e}_{ij}}, 0, \dots, 0, \underset{j}{\mathbf{e}_{ij}}, 0, \dots, 0)^t.$$

Comme $\frac{dD_{ij}(\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}}$, l'espace des *vitesses admissibles* s'écrit

$$C_{\mathbf{x}, \gamma}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N} \text{ tq.} \\ \left| \begin{array}{l} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ si } \gamma_{ij}(t^-) < 0 \\ \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V} \geq 0 \text{ si } \gamma_{ij}(t^-) = 0, D_{ij}(t) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

On note $\boldsymbol{\lambda} = (\dots, \lambda_{ij}, \dots) \in \mathbb{R}^{N(N-1)/2}$ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à ces $N(N-1)/2$ contraintes et $\boldsymbol{\gamma} = (\dots, \gamma_{ij}, \dots) \in \mathbb{R}^{N(N-1)/2}$ les variables indiquant la distance microscopique pour chaque couple de particules pendant les quasi-contacts. On note enfin R la matrice diagonale de taille $N(N-1)/2$, de coefficients $R_{ij,ij} = (r_i + r_j)^2 / (r_i^2 r_j^2)$ apparaissant dans la force de lubrification.

Le modèle multi-particules s'écrit alors :

$$(\mathcal{P}'_N) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \in (W^{1,\infty}(I))^{2N}, \quad \dot{\mathbf{x}} \in (BV(I))^{2N}, \quad \boldsymbol{\gamma} \in (BV(I))^{N(N-1)/2}, \quad \boldsymbol{\lambda} \in (\mathcal{M}(I))^{N(N-1)/2}, \\ \dot{\mathbf{x}}(t^+) = P_{C_{\mathbf{x}, \gamma}(t)} \dot{\mathbf{x}}(t^-) \\ M\ddot{\mathbf{x}} = M\mathbf{f} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}) \\ \text{supp}(\lambda_{ij}) \subset \{t, D_{ij}(t) = 0\} \text{ pour tout } i, j \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -R\boldsymbol{\lambda} \\ D_{ij} \geq 0, \quad \gamma_{ij} \leq 0 \text{ pour tout } i, j \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \text{ tq } D_{ij}(0) > 0 \text{ pour tout } i, j, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \boldsymbol{\gamma}(0) = 0_{\mathbb{R}^{N(N-1)/2}} \end{array} \right.$$

Le multiplicateur de Lagrange λ_{ij} , associé aux contraintes pour le couple de particules (i, j) , n'est actif que si les deux particules sont en contact. La force supplémentaire associée à ces contraintes est $\lambda_{ij}\mathbf{G}_{ij}$ et ne s'exerce donc que sur les particules i et j intervenant dans le contact. Cette force vaut selon $-\lambda_{ij}\mathbf{e}_{ij}$ sur la particule i et $\lambda_{ij}\mathbf{e}_{ij}$ sur la particule j .

5.2 Algorithmme

5.2.1 Ecriture de l'algorithme multi-particules

La discrétisation de (\mathcal{P}'_N) en temps choisie est une extension directe de l'algorithme 4.1 au cas multi-particules. On se donne un pas de temps h et on note $\mathbf{V}^n = (\dots, \mathbf{V}_i^n, \dots) \in \mathbb{R}^{2N}$ les vitesses des particules au temps n . Si $K(\mathbf{x}^n, \gamma^n)$ est une approximation de $C_{\mathbf{x}, \gamma}(t_n)$, l'algorithme ainsi obtenu s'écrit

Pour tout $n \geq 0$, on dispose de \mathbf{x}^n , \mathbf{V}^n , γ^n et λ^n . On note $\mathbf{f}^n = \frac{1}{h} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(s) ds$.

1. Evolution de \mathbf{x} ,

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + h\mathbf{u}^n.$$

2. Evolution de γ ,

$$\begin{aligned} \gamma^{n+1} &= \gamma^n - hR\lambda^n, \\ \text{Si } \gamma_{ij}^{n+1} &> 0, \quad \gamma_{ij}^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

3. Calcul de la vitesse a priori, sans gestion de la force de lubrification,

$$\mathbf{V}^{n+1/2} = \mathbf{V}^n + h\mathbf{f}^n.$$

4. Projection de la vitesse sur l'espace des *vitesses admissibles*,

$$\mathbf{V}^{n+1} \in K(\mathbf{x}^{n+1}, \gamma^{n+1}), \quad \frac{1}{2} |\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1/2}|_M^2 = \min_{\mathbf{V} \in K(\mathbf{x}^{n+1}, \gamma^{n+1})} \frac{1}{2} |\mathbf{V} - \mathbf{V}^{n+1/2}|_M^2.$$

On dispose alors du multiplicateur de lagrange λ^{n+1} .

Algorithme 5.1: Modèle de contact visqueux dans le cas multi-particules.

Pour finir la description de cet algorithme, il nous faut définir, lors de l'étape de projection 5, l'espace $K(\mathbf{x}^n, \gamma^n)$ de *vitesses admissibles* discret approchant $C_{\mathbf{x}, \gamma}(t_n)$. Pour cela, on s'inspire de l'algorithme de gestion des contacts présenté dans le chapitre 3 et on écrit que les contraintes doivent être vérifiées au premier ordre,

$$K(\mathbf{x}^n, \gamma^n) = \left\{ \mathbf{V} \left| \begin{array}{l} D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n = 0 \\ D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n < 0 \end{array} \right. \right\}.$$

5.2.2 Projection

Afin de résoudre numériquement l'étape 4 de l'algorithme 5.1, on souhaite utiliser l'algorithme d'Uzawa (voir section A.3 en annexe). Pour cela, on réécrit la contrainte d'égalité $K(\mathbf{x}^n, \boldsymbol{\gamma}^n)$ sous la forme d'une double contrainte d'inégalité :

$$K(\mathbf{x}^n, \boldsymbol{\gamma}^n) = \left\{ \mathbf{V} \mid \begin{array}{l} D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq 0, \quad \forall i < j \\ D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \leq 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n < 0 \end{array} \right\}.$$

On note \mathbf{B}_+^n la matrice de taille $N(N-1)/2 \times 2N$ définie par

$$\mathbf{B}_+^n = \begin{pmatrix} \vdots \\ -\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2} \times 2N}.$$

La ligne d'indice ij de \mathbf{B}_+^n correspond au couple de particules (i, j) . Pour tout vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2N}$, on a $(\mathbf{B}_+^n \mathbf{V})_{ij} = -\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V}$. On note \mathbf{B}_-^n la matrice extraite de \mathbf{B}_+^n ne contenant que les lignes d'indice ij pour lesquelles $\gamma_{ij}^n < 0$. Elle est de taille $N_- \times 2N$ où N_- est le nombre d'adhésions au temps n . De même, on note \mathbf{D}_+^n le vecteur de taille $N(N-1)/2$ des distances à l'instant n ,

$$\mathbf{D}_+^n = \begin{pmatrix} \vdots \\ D_{ij}(\mathbf{x}^n) \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

et \mathbf{D}_-^n le vecteur extrait ne contenant que les lignes pour lesquelles $\gamma_{ij}^n < 0$. On définit finalement la matrice \mathbf{B}^n et le vecteur \mathbf{D}^n prenant en compte toutes les contraintes par

$$\mathbf{B}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_+^n \\ -\mathbf{B}_-^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\frac{N(N-1)}{2} + N_-) \times 2N}, \quad \mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_+^n \\ -\mathbf{D}_-^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2} + N_-}.$$

Alors, $K(\mathbf{x}^n, \boldsymbol{\gamma}^n)$ se réécrit $K(\mathbf{x}^n, \boldsymbol{\gamma}^n) = \{\mathbf{V}, h\mathbf{B}^n \mathbf{V} - \mathbf{D}^n \leq 0\}$. On a maintenant $\frac{N(N-1)}{2} + N_-$ contraintes affines, réelles d'inégalité et le théorème A.12 de l'annexe A donne l'existence d'autant de multiplicateurs de Lagrange associés. De plus, les propriétés A.15 et A.17 montrent que l'on peut calculer le projeté sur $K(\mathbf{x}^n, \boldsymbol{\gamma}^n)$ ainsi que les multiplicateurs de Lagrange associés grâce à l'algorithme d'Uzawa. On note $\boldsymbol{\xi}$ le vecteur contenant ces multiplicateurs et on le décompose sous la forme

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_+ \\ \boldsymbol{\xi}_- \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2} + N_-}.$$

L'algorithme d'Uzawa de paramètre ρ (fixé) permettant d'effectuer l'étape 4, à l'instant n , est alors le suivant :

$\mathbf{V}^{n+1/2}$, \mathbf{D}^{n+1} et \mathbf{B}^{n+1} donnés,

1. $\boldsymbol{\xi}^0 \in \mathbb{R}_+^{\frac{N(N-1)}{2} + N_-}$, $\mathbf{W}^0 = \mathbf{V}^{n+1/2}$
2. Tant que $\mathbf{D}^{n+1} - h\mathbf{B}^{n+1}\mathbf{W}^k < -\varepsilon$
 - (a) $\mathbf{W}^{k+1} = \mathbf{V}^{n+1/2} - hM^{-1}(\mathbf{B}^{n+1})^t \boldsymbol{\xi}^k$
 - (b) $\boldsymbol{\xi}^{k+1} = \Pi_{\mathbb{R}_+^{N(N-1)/2 + N_-}} (\boldsymbol{\xi}^k - \rho(\mathbf{D}^{n+1} - h\mathbf{B}^{n+1}\mathbf{W}^{k+1}))$
3. $\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{W}^{k+1}$
4. $\lambda_{ij}^{n+1} = \xi_{+,ij}^{k+1}$ si $\gamma_{ij} = 0$
 $\lambda_{ij}^{n+1} = \xi_{+,ij}^{k+1} - \xi_{-,ij}^{k+1}$ si $\gamma_{ij} < 0$

Algorithme 5.2: Etape 4 de l'algorithme 5.1 : Algorithme d'Uzawa

Cet algorithme fait donc intervenir deux produits matrice/vecteur, le produit $(\mathbf{B}^{n+1})^t \boldsymbol{\xi}$ dans l'étape 2a et le produit $\mathbf{B}^{n+1} \mathbf{W}$ dans l'étape 2b. Il est bien entendu que l'on ne stockera pas la matrice \mathbf{B}^n intégralement mais seulement les \mathbf{e}_{ij} . Les produits matrice/vecteur considérés s'écrivent en effet

$$\begin{aligned} ((\mathbf{B}^{n+1})^t \boldsymbol{\xi})_i &= \sum_{j>i} \xi_{+,ij} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) - \sum_{j<i} \xi_{+,ij} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \\ &\quad - \sum_{\substack{j>i \\ \gamma_{ij} < 0}} \xi_{-,ij} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) + \sum_{\substack{j<i \\ \gamma_{ij} < 0}} \xi_{-,ij} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{n+1} \mathbf{W})_{+,ij} &= \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1})(\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_j), \quad \forall i < j \\ (\mathbf{B}^{n+1} \mathbf{W})_{-,ij} &= -\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}^{n+1})(\mathbf{W}_i - \mathbf{W}_j), \quad \forall i < j, \quad \gamma_{ij} < 0 \end{aligned}$$

5.2.3 Recherche des voisins

L'étape la plus coûteuse de l'algorithme 5.1 est l'étape de projection 4. En effet, comme nous venons de le voir, les produits matrice/vecteur impliqués font intervenir des boucles sur les contacts dont le nombre est a priori en $\mathcal{O}(N^2)$. Afin d'obtenir un algorithme efficace utilisable pour un grand nombre de particules, il est donc nécessaire d'implémenter cette étape de façon efficace.

Pour ce faire, on remarque qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte toutes les contraintes. En effet, deux particules suffisamment éloignées à l'instant n ne pourront adhérer à l'instant $n+1$ et la contrainte associée ne sera donc pas activée. On note D_{vois}

la distance au delà de laquelle on considère que deux particules ne sont pas susceptibles d’entrer en adhésion à l’instant suivant. Les couples de particules à considérer à l’instant n sont alors

$$C_{vois}(\mathbf{x}^n) = \{(i, j) \in [1, N]^2, i < j \text{ et } D_{ij}(\mathbf{x}^n) \leq D_{vois}\}.$$

Si (i, j) appartient à $C_{vois}(\mathbf{x}^n)$, on dira que les particules i et j sont voisines à l’instant n . Elles sont alors susceptibles d’adhérer à l’instant suivant et, dans ce cas, la contrainte associé sera activée. Au contraire, si (i, j) n’est pas dans $C_{vois}(\mathbf{x}^n)$, on sait qu’il n’y aura pas adhésion au temps suivant et que la contrainte associée à ce couple ne sera pas activée. L’espace des contraintes considéré à l’instant n sera donc

$$K_{vois}(\mathbf{x}^n, \boldsymbol{\gamma}^n) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}, \quad \forall (i, j) \in C_{vois}(\mathbf{x}^n), \\ \left| \begin{array}{l} D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n \geq 0 \\ D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n < 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

Remarque 5.1 *L’idée de ne pas prendre en compte les particules trop éloignées est souvent utilisée quand on considère des interactions interparticulaires avec des forces à courte portée (dont l’intensité tend rapidement vers zéro quand la distance augmente). Cette méthode équivaut à tronquer la force et il s’agit donc d’une approximation. Dans notre cas, il ne s’agit pas d’une approximation. En effet, si D_{vois} a été bien choisi, on sait que les contraintes associées aux couples de particules qui ne sont pas dans $C_{vois}(\mathbf{x}^n)$ ne seront pas actives à l’instant $n+1$. Nous choisissons un pas de temps tel que les particules ne se déplacent pas de plus de deux fois leur rayon d’un instant de calcul à l’autre. La distance D_{vois} est alors fixée à quelques rayons.*

Il reste à décrire un algorithme permettant de construire efficacement $C_{vois}(\mathbf{x}^n)$. Le parcours de tous les couples de particules afin de calculer les distances associées (en $\mathcal{O}(N^2)$) serait une méthode trop coûteuse pour l’utiliser avec un grand nombre de particules. On choisit d’utiliser un algorithme de type *bucket sorting*. Son principe consiste à découper le domaine d’étude Ω en boîtes de taille $\eta > D_{vois}$ et à ne calculer que les distances entre particules de boîtes voisines. On note B_{kl} la boîte $[k\eta, (k+1)\eta] \times [l\eta, (l+1)\eta]$. Si i est une particule de cette boîte (k, l) , on ne calculera sa distance qu’avec des particules appartenant à la même boîte et aux boîtes voisines. (voir figure 5.4).

L’algorithme de recherche des voisins utilisé est l’algorithme 5.3. On prend garde à ne stocker en mémoire que les boîtes non vides lors de l’étape 1. Cela a son importance lorsque toutes les particules sont regroupées dans un sous-domaine de Ω (penser à un cas de sédimentation des particules par exemple). En effet, ainsi, lors de l’étape 2, on ne parcourt que les boîtes non vides, qui sont beaucoup moins nombreuses que la totalité des boîtes recouvrant Ω . Noter également que cet algorithme effectue un parcours des particules à chacune des étapes 1 et 2 et, dans l’étape 2, pour chacune des particules rencontrées, il ne calcule sa distance qu’avec les particules se trouvant dans les boîtes voisines de la sienne dont le nombre est en $\mathcal{O}(1)$. On évite ainsi le parcours emboîté des particules en $\mathcal{O}(N^2)$.

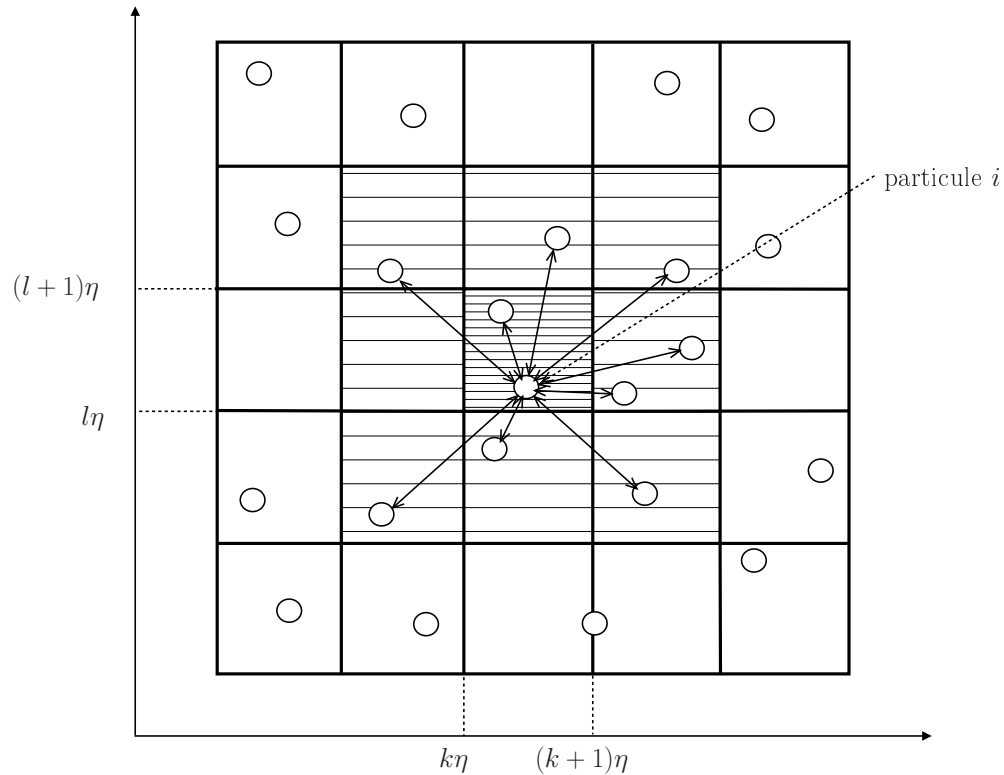


FIG. 5.4 – Algorithme de recherche des voisins : boîtes voisines et calcul de distances

1. Création des boîtes non vides :
 - Pour toute particule i ,
 - (a) Calcul de la boîte B_{kl} dans laquelle elle se trouve
 - (b) – Si B_{kl} existe déjà, y ajouter la particule i
 - Sinon, créer B_{kl} et y mettre la particule i
2. Recherche des voisins :
 - Pour toute boîte B_{kl}
 - Pour toute particule i de B_{kl}
 - Pour toute boîte $B_{k'l'}$ égale à B_{kl} ou voisine (mais pas encore visitée)
 - Pour toute particule j de $B_{k'l'}$
 - (a) Calcul de $D_{ij}(\mathbf{x}^n)$
 - (b) Si $D_{ij}(\mathbf{x}^n) \leq D_{vois}$, ajouter (i, j) à $C_{vois}(\mathbf{x}^n)$.

Algorithme 5.3: Algorithme de recherche des voisins

5.2.4 Extensions possibles

Prise en compte de la rugosité

La loi gérant le contact visqueux apparaît dans l'étape 2. Si on souhaite modéliser des particules rugueuses il faut fixer un seuil pour γ (voir section 4.4.1). Si μ est la viscosité du fluide environnant, le seuil correspondant au couple de particules (i, j) est $\gamma_{ij}^{min} = 6\pi\mu l n(r_i + r_j)$. L'étape 2 de l'algorithme devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^{n+1} = \gamma^n - hR\lambda^n, \\ \text{Si } \gamma_{ij}^{n+1} > 0, \quad \gamma_{ij}^{n+1} = 0, \\ \text{Si } \gamma_{ij}^{n+1} < \gamma_{ij}^{min}, \quad \gamma_{ij}^{n+1} = \gamma_{ij}^{min}. \end{array} \right.$$

Noter que, tant que l'on considère des particules lisses, on peut remplacer la matrice R par l'identité dans l'algorithme 5.1. En effet, dans ce cas, on s'intéresse uniquement au signe de γ et pas à sa valeur. Par contre, dans le cas de particules rugueuses, il est important de connaître la valeur de γ afin de pouvoir fixer son seuil correctement et alors la matrice R est indispensable. De même, dans ce cas, la viscosité du fluide intervient.

Intégration à un solveur fluide/particules

Comme dans le cas particule/plan (voir section 4.3.3), on utilise une méthode de splitting pour intégrer le modèle de lubrification à la simulation d'écoulements fluide/particules. On note S un tel solveur fluide/particules, $(\mathbf{u}^n, \mathbf{p}^n)$ les vitesses et pressions du fluide au temps n . On modifie l'étape 3 de calcul de la vitesse a priori et on la réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Calcul de } (\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1}) : (\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1}) = S(\mathbf{x}^{n+1}, \mathbf{u}^n, \mathbf{f}^n) \\ \text{Calcul de } \mathbf{V}^{n+1/2} \text{ associé à } \mathbf{u}^{n+1} : \mathbf{V}_i^{n+1/2} = \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_i^{n+1}} \mathbf{u}^{n+1} \end{array} \right.$$

Gestion des obstacles

Supposons maintenant qu'il y ait N_o obstacles (penser aux parois d'une boîte contenant les particules par exemple). Dans ce cas, aux $N(N-1)/2$ couples particule/particule il faut ajouter les NN_o couples particule/obstacle. Il y a donc $N_c = N(N-1)/2 + NN_o$ adhésions potentielles. γ et λ sont alors de taille N_c et il y a N_c contraintes dans $K(\mathbf{x}^n, \gamma^n)$. On numérote les particules de 1 à N et les obstacles de $N+1$ à $N+1+N_o$. L'espace des vitesses admissibles s'écrit dans ce cas

$$K(\mathbf{x}^n, \gamma^n) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}, \quad \forall (i, j) \in [1, N]^2 \cup [1, N] \times [N+1, N+1+N_o], \quad i < j, \\ \left| \begin{array}{l} D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n = 0 \\ D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n < 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

Supposons que les obstacles soient des solides dont la vitesse est imposée dans le temps (penser à une boîte qui tourne par exemple). Dans ce cas, à l'itération $n-1$ de

l’algorithme, l’étape 4 a pour objectif d’obtenir une vitesse \mathbf{V}^n telle que, à l’instant $n + 1$, les couples de particules vérifient les contraintes d’adhésion données dans $K(\mathbf{x}^n, \gamma^n)$. On souhaite maintenant ajouter les contraintes d’adhésion particule/obstacle. On note \mathbf{y}^{n+1} la position (connue) de ces obstacles au temps $n + 1$ et on ajoute les NN_o contraintes associées dans $K(\mathbf{x}^n, \gamma^n)$. On obtient l’espace de *vitesse admissibles* suivant,

$$K(\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^{n+1}, \gamma^n) = \left\{ \mathbf{V} \left| \begin{array}{l} \text{Couples } (i, j) \text{ particule/particule :} \\ D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} \geq 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n = 0 \\ D_{ij}(\mathbf{x}^n) + h\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}^n) \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ si } \gamma_{ij}^n < 0 \\ \text{Couples } (i, k) \text{ particule/obstacle :} \\ D_{ik}(\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^{n+1}) + h\mathbf{G}_{ik}(\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^{n+1}) \cdot \mathbf{V} \geq 0 \text{ si } \gamma_{ik}^n = 0 \\ D_{ik}(\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^{n+1}) + h\mathbf{G}_{ik}(\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^{n+1}) \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ si } \gamma_{ik}^n < 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Remarque 5.2 Dans ces deux cas, la position des obstacles étant connue et fixée au temps considéré, la distance D_{ik} ne dépend que de \mathbf{x}_i , si i est une particule et k un obstacle. Ainsi, son gradient n’a de composante non nulle qu’en position i . Par conséquent, la contrainte associée au couple (i, k) n’ajoute de force que sur la particule i .

5.2.5 Premiers résultats numériques

Nous présentons dans cette section de premiers résultats qui permettent d’observer le comportement du modèle multi-particules. Bien que ces simulations n’intègrent aucune prise en compte du fluide autrement que par la force de lubrification, elles ont été effectuées avec `FreeFem++`, en vue d’un couplage futur avec la résolution directe fluide/particule décrite dans la première partie. Les couples de particules sont tous pris en compte sans recherche des voisins.

Billard visqueux

On considère deux particules sphériques lisses de rayon $r = 0.02$. La première est située initialement en $(0, 0)$ et la seconde en $(-0.25, -0.25)$. La particule située à l’origine est supposée immobile à l’instant initial. On lance la seconde avec pour vitesse initiale $0.2 * (0.25, (0.25 - r))$. Le pas de temps utilisé est $h = 0.5r$. Les configurations obtenues par l’algorithme de contact visqueux 5.1 sont représentées sur la figure 5.5 page 130. Au moment de l’impact, les particules se collent l’une à l’autre. Elles continuent à adhérer tant que la force centrifuge n’a pas compensé l’impact initial.

Loto visqueux : influence de la rugosité

L’objectif de cette simulation est d’observer l’influence de la rugosité sur le comportement des systèmes régis par le modèle de contact visqueux. Pour cela, on considère un “loto visqueux” formé de 160 particules dans un mélangeur carré en rotation. La boîte est de côté 0.5 et les rayons des particules sont compris entre 0.007 et 0.015. Les 80 particules initialement situées dans le compartiment de droite sont colorées en noir et les 80 autres

sont blanches. On représente côte à côte sur la figure 5.6 page 131 les configurations obtenues à différents pas de temps pour $\gamma_{min} = 0$ à gauche (contacts inélastiques), $\gamma_{min} = -1$ au centre (particules rugueuses) et $\gamma_{min} = -\infty$ à droite (particules lisses). On observe que la prise en compte de la viscosité provoque l’adhésion des particules (au centre et à droite de la figure). Dans le cas de particules lisses (à droite de la figure), les amas ne se décolle de la paroi que lorsqu’ils sont en haut de la boîte : comme le suggère le modèle particule/plan, il ne peut y avoir décollement que lorsque la gravité a compensé les efforts qu’elle a elle-même exercés, quand elle tendait à pousser les particules vers la paroi du fond. Dans le cas rugueux (au centre), le décollement est plus rapide.

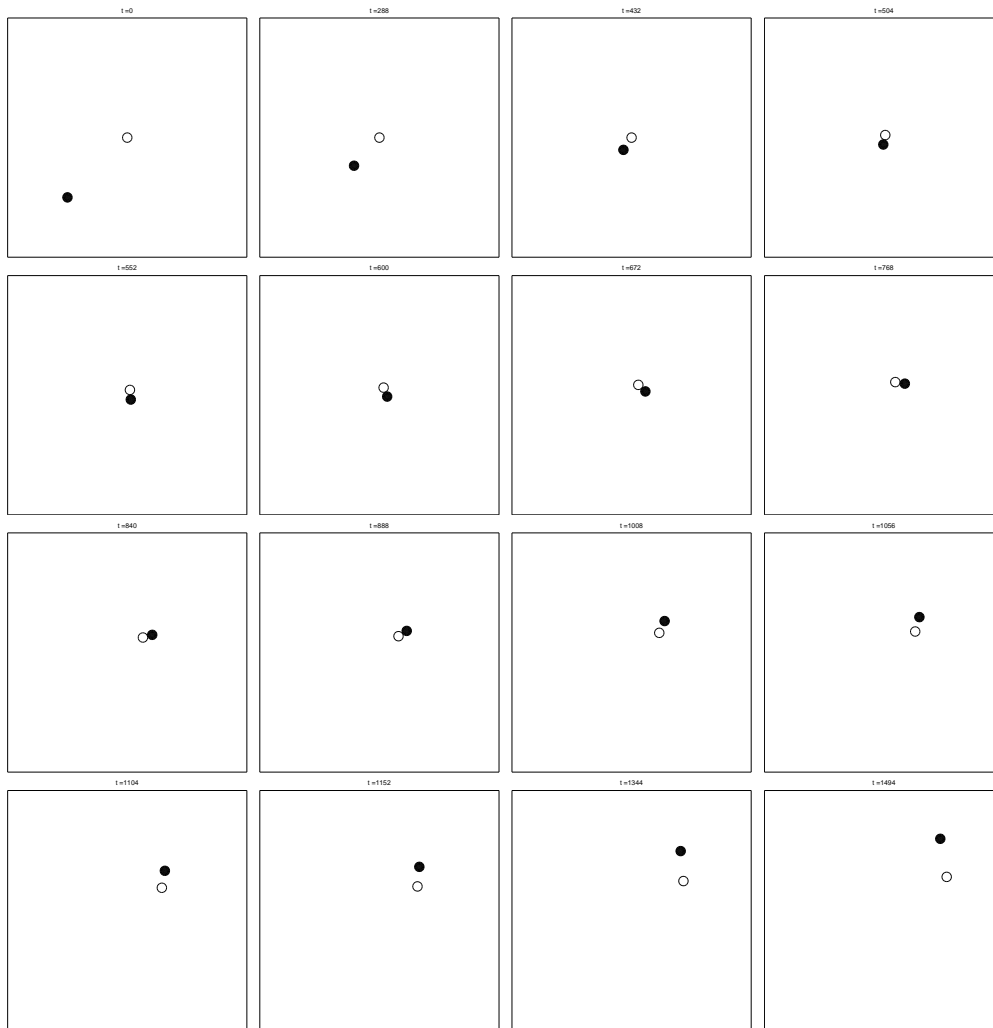


FIG. 5.5 – Billard visqueux : configurations à différents pas de temps

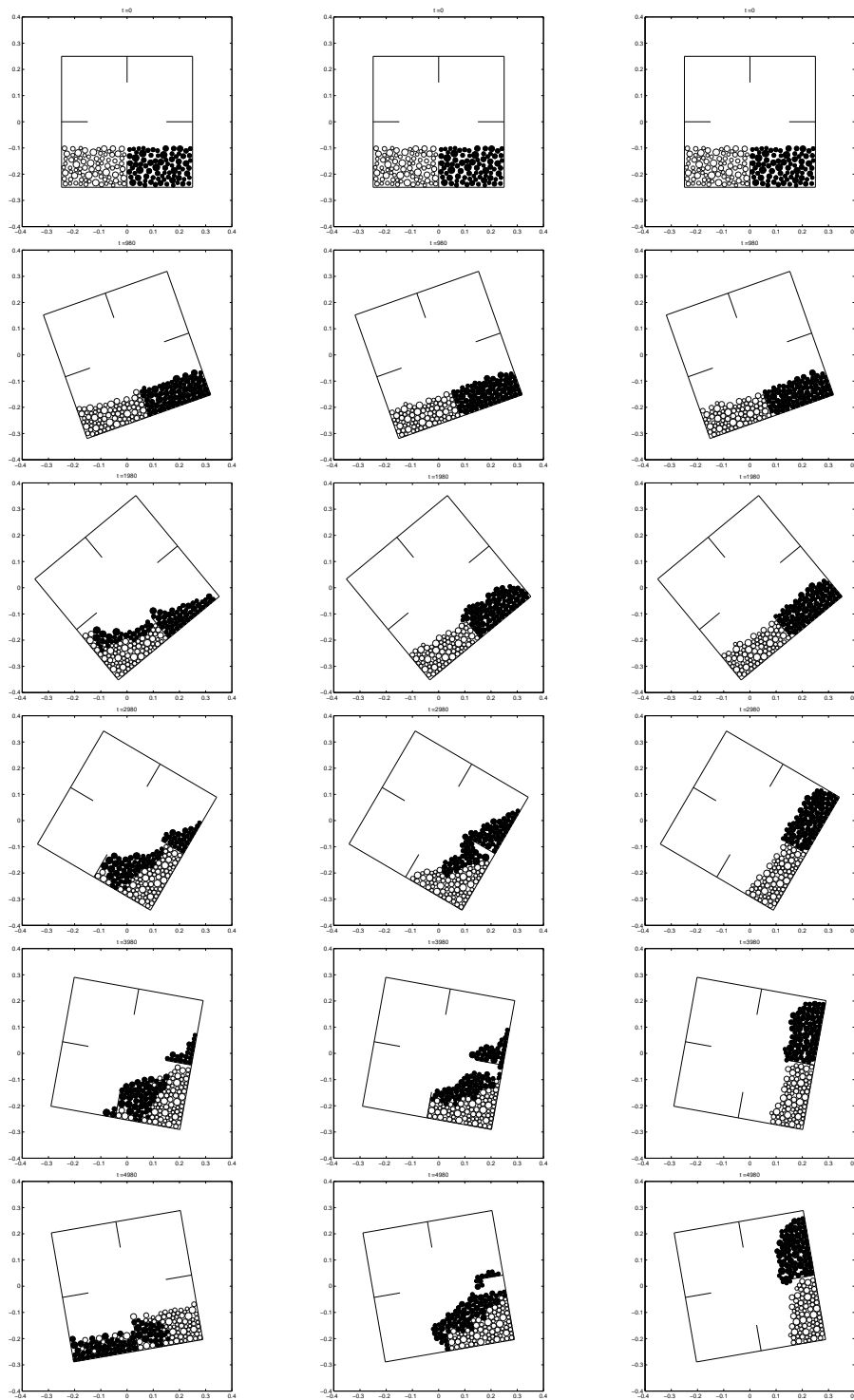


FIG. 5.6 – Loto visqueux : configurations à différents pas de temps pour $\gamma_{min} = 0$ à gauche (contact inélastique), $\gamma_{min} = -1$ au centre (particule rugueuse) et $\gamma_{min} = -\infty$ à droite (particules lisses)

5.3 Programmation Orientée Objet

5.3.1 Méthodologie et objectifs

Méthodologie

La méthode de programmation utilisée s’inspire de celle proposée dans le projet Csi-Moon (Calcul Scientifique, Méthodologie Orientée Objets et eNvironnement). Cette méthode est décrite dans [52]. Ses objectifs sont par exemple la pérennisation des codes de recherche, l’efficacité, la vitesse de développement, la modularité. Un utilisateur final doit pouvoir travailler sans avoir à recompiler. Les auteurs souhaitent également faciliter le travail collectif et donner la possibilité d’agir sur les méthodes indépendamment du reste du code. Pour cela, ils proposent un découpage précis des classes en fonction des compétences. Un premier découpage vertical hiérarchique à trois niveaux est proposé : le premier niveau comprend la définition du problème continu, le second la description de la méthode de discrétisation et le dernier la résolution du problème algébrique. Chacun de ces niveaux est découpé horizontalement en quatre blocs : le problème, les opérateurs, les variables et le domaine de calcul.

Nous souhaitons développer un code de recherche dont l’un des objectifs est de permettre à d’autres chercheurs/doctorants de l’utiliser afin de tester d’autres modèles ou algorithmes. Par conséquent, dans ce travail, nous nous sommes concentrés sur la résolution d’une étape en temps afin de la rendre la plus modulable possible, tant au niveau algorithmique qu’au niveau du modèle de contact utilisé. Nous avons donc choisi de ne programmer que le niveau discret, le code étant construit afin de pouvoir y ajouter facilement, si nécessaire, un niveau continu qui permettrait à un utilisateur final de définir son problème continu et de le résoudre sans se soucier de la méthode de discrétisation choisie.

Afin de répondre à l’objectif de modularité, nous nous sommes attachés à découper notre problème en variables et opérateurs. Ce travail a été effectué en collaboration avec deux des développeurs de CsiMoon, Jacques Laminie⁴ et Stéphane Labbé⁵. Notre réflexion s’est appuyée sur l’utilisation d’UML, support méthodologique permettant de modéliser graphiquement les différentes classes et leurs interactions (Voir l’annexe E où l’on donne les conventions graphiques utilisées). Ce travail préliminaire nous a ensuite permis une programmation rapide et efficace de l’algorithme en C++. Les différents diagrammes de classe ont été tracés avec le logiciel **ArgoUML** (voir [7]). Ce dernier permet également, à partir de ce diagramme de générer les classes C++ associées avec déclarations des attributs et des méthodes.

⁴Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, Orsay, France

⁵Laboratoire LJK, Université Joseph Fourier, Grenoble, France

Objectifs

Après avoir fixé les objectifs généraux, nous précisons ce que nous en attendons pour notre code :

1. Objectifs utilisateur
 - (a) Modification possible des données sans recompiler
 - (b) Différents types de sorties possibles : observation graphique en temps réel, création d'un film, enregistrement des résultats
2. Objectifs de modularité du modèle
 - (a) Possibilité de gérer différentes formes d'obstacles
 - (b) Possibilité de gérer des obstacles immobiles ou à vitesse imposée
 - (c) Possibilité d'implémenter différentes lois de contact (étape 2 de l'algorithme 5.1).
Par exemple : contact inélastique (γ toujours nul), contact rugueux (seuil de γ)
 - (d) Possibilité d'intégration à un code d'écoulements fluide/particules
 - (e) Possibilité d'utilisation pour simuler des mouvements de foule (cela consiste essentiellement à modifier le calcul de la vitesse a priori, voir [66])
3. Objectifs de modularité algorithmique
 - (a) Méthode de calcul des voisins modifiable
 - (b) Méthode de projection modifiable

Comme nous l'avons dit précédemment, il s'agit également d'un code qui doit pouvoir être modifié, adapté, testé par des acteurs différents. Afin de leur permettre ce travail, nous documentons ci-dessous les classes programmées et expliquons les choix effectués. Pour cela, nous nous appuyerons sur les Diagrammes UML simplifiés associés. Les diagrammes détaillés se trouvent en annexe E.

5.3.2 Les classes “Variable”

Les variables sont les classes sur lesquelles on agit, ce sont les inconnues du problème. Nous décrivons ici leurs attributs et méthodes principaux.

Classe Object

La classe `Object` représente les objets physiques du problème. Il peut s’agir de particules (toujours sphériques) ou d’obstacles.

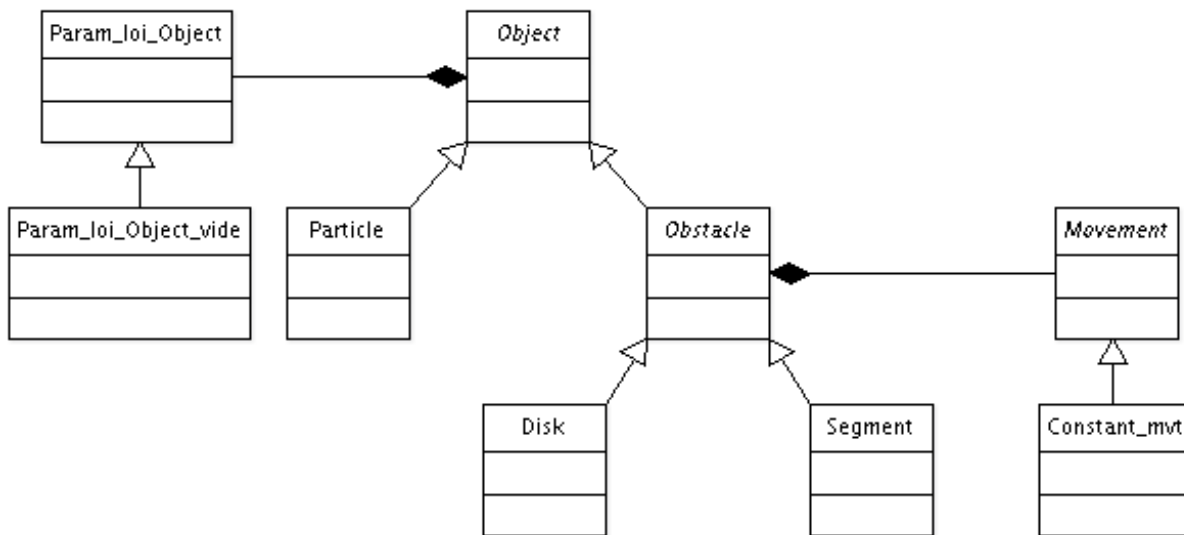


FIG. 5.7 – Diagramme des classes simplifié : Classe `Object`

- Attributs :
 - un numéro de 0 à $N - 1$ pour les particules et de $-(N_0 - 1 + N)$ à $-N$ pour les obstacles. Cela nous permettra de repérer les obstacles au signe de leur numéro et de trier les objets par type.
 - Un attribut de la classe `Param_loi_Object` qui contient les paramètres nécessaires à la loi de contact utilisée. Dans le cas de l’algorithme 5.1, la loi de contact (étape 2) ne fait intervenir aucun paramètre lié aux objets et la classe `Param_loi_Object` est donc vide. On a cependant pris la précaution de la créer de façon à pouvoir par exemple par la suite généraliser l’algorithme au cas rugueux. En effet, dans ce cas, le seuil de γ_{ij} dépend de la rugosité de chacun des objets i et j .
- Méthodes :
 - Méthode permettant de le faire évoluer d’un pas de temps à l’autre en fonction de sa vitesse.
 - Deux méthodes permettant de calculer sa distance à une particule et le gradient associé. Dans le cas de contacts particule/obstacle, il faudra donc toujours prendre garde à appeler les fonctions distance et gradient de l’obstacle.

- La classe fille `Particle` possède comme attributs supplémentaires son rayon, sa masse, sa position, sa vitesse et sa vitesse a priori. L'évolution d'un pas de temps à l'autre se fait en utilisant sa vitesse.
- La classe fille `Obstacle` possède un attribut de classe `Movement` qui sera utilisé pour le faire évoluer d'un instant à l'autre. Il s'agit du type de mouvement imposé à l'obstacle. Cette classe possède des méthodes permettant de renvoyer le centre de rotation ainsi que les vitesses de rotation et de translation à un instant donné. La classe fille actuellement programmée a un mouvement indépendant du temps mais on a utilisé un héritage afin de pouvoir par la suite programmer des mouvements plus complexes. Les obstacles actuellement disponibles sont des disques ou des segments. Il est possible d'y ajouter tout type d'obstacle pour lequel on sait implémenter les fonctions distance et gradient par rapport à une sphère.

Classe Contacts

La classe `Contact` représente les contacts entre deux éléments de classe `Object`.

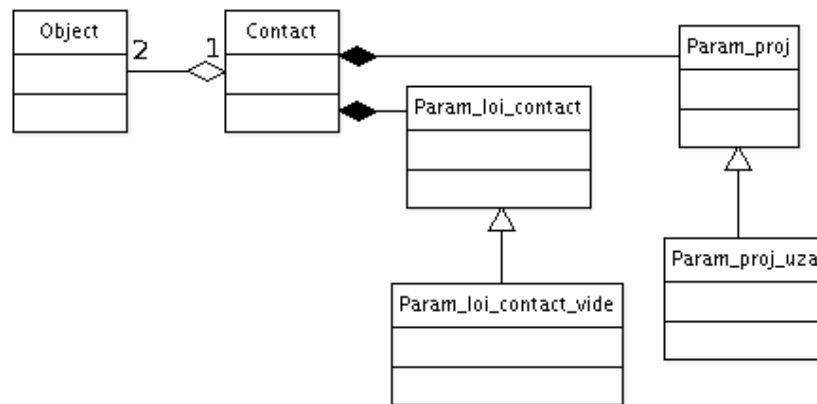


FIG. 5.8 – Diagramme des classes simplifié : Classe `Contact`

- Attributs :
 - Accès aux deux objets `obj_i` et `obj_j` impliqués via deux pointeurs.
 - deux attributs booléens disant s'il s'agit d'un contact particule/particule ou particule/obstacle et s'il y a adhésion entre les deux objets au temps courant.
 - distance entre les deux objets, gradient associé, valeur de γ_{ij} et λ_{ij} au temps courant.
 - Comme les objets, il possède un paramètre `Param_loi_Contact` permettant de prendre en compte différents types de loi de contact. Il est actuellement vide mais pourra par exemple contenir, dans le cas rugueux, le seuil de γ_{ij} associé aux rugosités des objets `obj_i` et `obj_j`. Il possède également un attribut de type `Param_proj`. Il s'agit des paramètres qui seront nécessaires à l'étape de projection 4. Ces paramètres peuvent être différents selon le type de projection choisie. Pour l'instant, on effectue l'étape de projection grâce à un algorithme

d’Uzawa (voir algorithme 5.2) et les paramètres associés à un contact dans ce cas sont $\xi_{+,ij}$ et $\xi_{-,ij}$.

- Méthodes :
 - Méthodes permettant de calculer la distance et le gradient associé des objets mis en jeu. Il faut s’assurer que, dans le cas d’un contact particule/obstacle, on appelle bien les fonctions correspondantes de l’obstacle. Pour cela, on a choisi de toujours associer la particule à `obj_i` et l’obstacle `obj_j`. Les fonctions distance et gradient seront toujours appelées sur `obj_j`.
 - Pour effectuer la mise à jour des contacts à chaque instant et ne garder que les contacts actifs, il sera nécessaire d’avoir une liste de contacts triée. Les contacts possèdent donc un opérateur ‘<’ qui les classe selon l’ordre lexicographique des couple `(num_i, num_j)`, numéros des objets correspondants.

Gestion de la mémoire

Il s’agit ici de stocker en mémoire les variables. On a deux types d’ensembles : les ensembles d’objets et les ensembles de contacts.

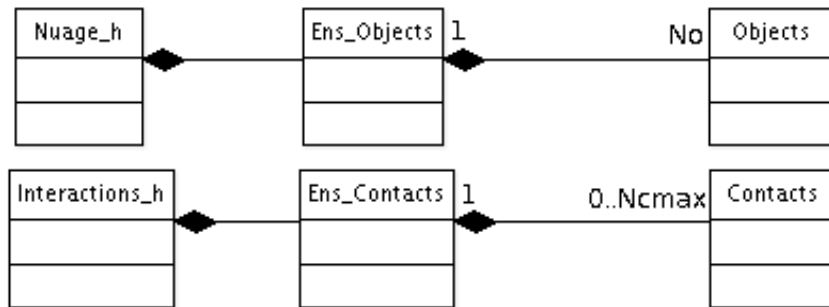


FIG. 5.9 – Diagramme des classes simplifié : Classes `Ens_Objects` et `Ens_Contacts`

Les classes `Nuage_h` et `Interactions_h` ont accès respectivement aux ensembles d’objets et de contacts à l’instant courant. Elles ont été créées afin de pouvoir, par la suite, utiliser des schémas de discrétisation à plus d’un pas de temps. Dans ce cas, ces classes auront accès à autant d’ensembles que de pas de temps nécessaires au schéma.

Commençons par décrire la classe `Ens_Objects` :

- Attributs :
 - Nombre d’objets, de particules et d’obstacles.
 - Ensemble d’objets. Le nombre d’objets étant ici choisi constant, on utilise la classe `vector` de la STL (Standard Template Library). Les objets sont placés en fonction de leur numéro, les particules venant en premier et les obstacles ensuite. Afin de pouvoir modifier ce stockage si nécessaire par la suite, ce vecteur est bien entendu privé et on implémente les itérateurs nécessaires dans les méthodes de la classe.
- Méthodes :
 - Méthodes renvoyant des itérateurs sur le début et la fin des objets, des particules et des obstacles. Cela permet de parcourir facilement tous les objets ou uniquement

les particules ou les obstacles.

- Méthode qui fait évoluer tous les objets d’un pas de temps à l’autre

La particularité de l’ensemble des contacts est que le nombre d’éléments qu’il contient varie d’un instant à l’autre. La classe `Ens_Contacts` a été construite comme suit :

- Attributs :
 - Ensemble de contacts. On a choisi d’utiliser la classe `list` de la STL. La liste des contacts est triée lors de son initialisation au premier pas de temps. Ensuite, à chaque pas de temps, pour la mettre à jour, on la parcourt dans l’ordre et, suivant les cas, on met à jour le contact courant, on le supprime ou on en insère un nouveau en prenant garde à conserver une liste triée (voir classe `Contact_law_h`). Comme dans le cas de l’ensemble d’objets, on implémente les itérateurs nécessaires.
 - Distance minimale parmi les contacts de la liste
- Méthodes :
 - Méthode triant la liste (appelée une unique fois)
 - Méthodes renvoyant des itérateurs sur le premier et le dernier élément de la liste.
 - Suppression ou insertion d’un contact

5.3.3 Les classes “Opérateur”

Les classes opérateur agissent sur les variables et ont chacune une fonction bien définie liée en général à une étape de l’algorithme. Pour chacune de ces classes, la technique utilisée pour réaliser son objectif doit pouvoir être modifiée sans impact sur le reste du code. C’est pourquoi on les construit comme des classes mères virtuelles possédant en général une unique méthode appelée `run` caractérisée par ses arguments, ses sorties et son action. On peut ensuite implémenter différentes classes filles correspondant chacune à un algorithme ou un modèle différent. Pour chaque opérateur, nous décrivons ci-dessous sa fonction (ie sa méthode `run`) et précisons la classe fille que nous avons implémentée.

Classe `Contact_law_h`

Cet opérateur est celui qui réalise l’étape 2 de l’algorithme.

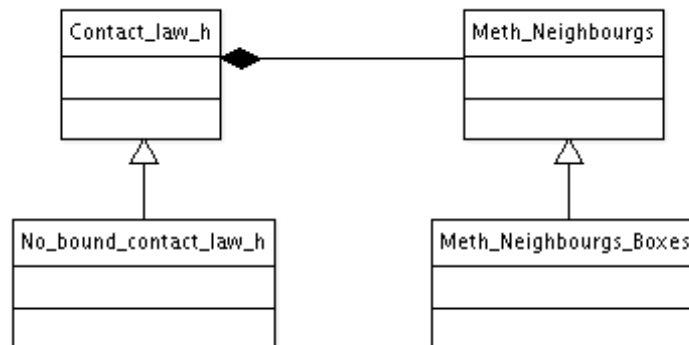


FIG. 5.10 – Diagramme des classes simplifié : Classe `Contact_law_h`

- Fonction de `Contact_law_h` :
 - Cet opérateur prend en argument les contacts à l’instant n , les objets à l’instant $n + 1$ ainsi que le pas de temps.
 - Il met à jour la liste des contacts à l’instant $n + 1$:
 - il supprime de la liste les contacts associé à des objets trop éloignés,
 - il y ajoute les contacts associé à des objets suffisamment proches et risquant de se rencontrer à l’instant suivant,
 - il calcule γ_{ij}^{n+1} pour les contacts qui se maintiennent d’un instant à l’autre.
 - Pour cela, on procède en deux étapes :
 - Calcul des voisins : création d’une liste triée des couples de particules étant considérées comme voisines à l’instant $n + 1$ (ie appartenant à $C_{vois}(\mathbf{x}^{n+1})$, défini à la section 5.2.3). Cette étape est effectuée par l’opérateur de classe `Meth_Neighbours`
 - parcours simultané des listes de voisins et de contacts pour effectuer la mise à jour de ces derniers.
- Fonction de `Meth_Neighbours` :
 - Cet opérateur prend en argument l’ensemble des objets à un instant
 - Il renvoie une liste triée par ordre lexicographique des couples d’entiers (i, j) appartenant à $C_{vois}(\mathbf{x}^{n+1})$.
- Classes filles implémentées :
 - La classe `No_bound_Contact_law` correspond au modèle de contact visqueux lisse (sans seuil pour γ). Il est possible d’implémenter une classe fixant un seuil pour γ grâce à l’attribut de type `Param_loi_Contact` de la classe `Contact`. Cela permet alors d’utiliser le modèle de contact visqueux rugueux. On peut également implémenter une classe fille associée au modèle de contact inélastique en laissant constamment γ nul.
 - La classe `Meth_Neighbours_Boxes` effectue la recherche des voisins selon l’algorithme 5.3.

Classe `Vitesse_a_priori_h`

Cet opérateur est celui qui réalise l’étape 3 de l’algorithme.

- Fonction de `Vitesse_a_priori_h` :
 - Elle prend en argument des éléments de classe `Nuage_h` et `Interactions_h`, ainsi que le pas de temps
 - Elle renvoie la vitesse a priori calculée avant gestion des contacts
 - Pour cela, elle a besoin de connaître la force exercée sur les particules. Elle possède donc un attribut de type `F_ext` qui renvoie, à un instant donné la force exercée sur la particule qui lui est donnée en argument.
- Classe fille implémentée :

La classe `Vap_EDO_u_h` est l’implémentation du schéma d’Euler explicite donné à l’étape 3 de l’algorithme 5.1. Grâce aux deux arguments de type `Nuage_h` et `Interactions_h`, on pourrait par la suite lui donner accès à plusieurs pas de temps sauvegardés et ainsi implémenter des schémas à plusieurs pas de temps. On peut intégrer à ce niveau un solveur fluide/particules afin de prendre en compte la force de

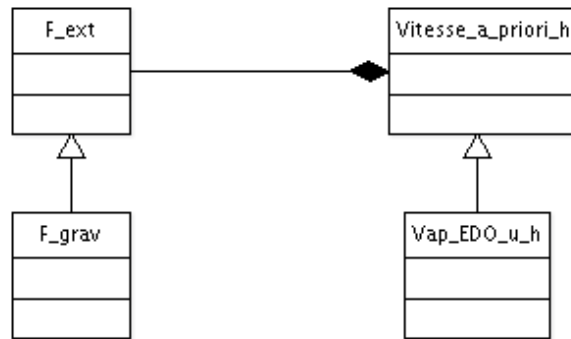


FIG. 5.11 – Diagramme des classes simplifié : Classe Vitesse_a_priori_h

lubrification dans des simulations numériques de tels écoulements. C'est également ici qu'on peut implémenter une *vitesse souhaitée* afin de simuler numériquement des mouvements de foule (voir [66]).

Classe Meth_Projection

Cet opérateur est celui qui réalise l'étape 4 de l'algorithme.

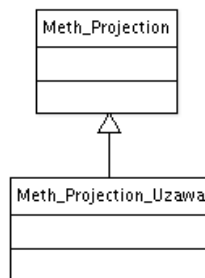


FIG. 5.12 – Diagramme des classes simplifié : Classe Meth_Projection

- Fonction de `Meth_Projection` :
 - Elle prend en argument l'ensemble des objets, l'ensemble des contacts et le pas de temps
 - Elle possède en attribut un vecteur M de taille égale au nombre de particules.
 - Elle effectue la projection de la vitesse a priori des objets sur l'espace des vitesses admissibles donné par les contacts, pour le produit scalaire associé aux poids donnés dans M
- Classe fille implémentée :

La classe `Meth_Projection_Uzawa` est l'implémentation de l'algorithme 5.2. Dans notre modèle, le vecteur M correspond aux masses des particules. On a choisi de le mettre en attribut afin de permettre l'utilisation de cette classe opérateur pour des

projections avec d’autres produits scalaires telles que la projection orthogonale dans l^2 par exemple. Cela sera utile par exemple pour le modèle de mouvement de foule.

5.3.4 La Classe “Problème”

Il s’agit d’une classe particulière d’opérateur regroupant les précédents et permettant de faire évoluer le système.

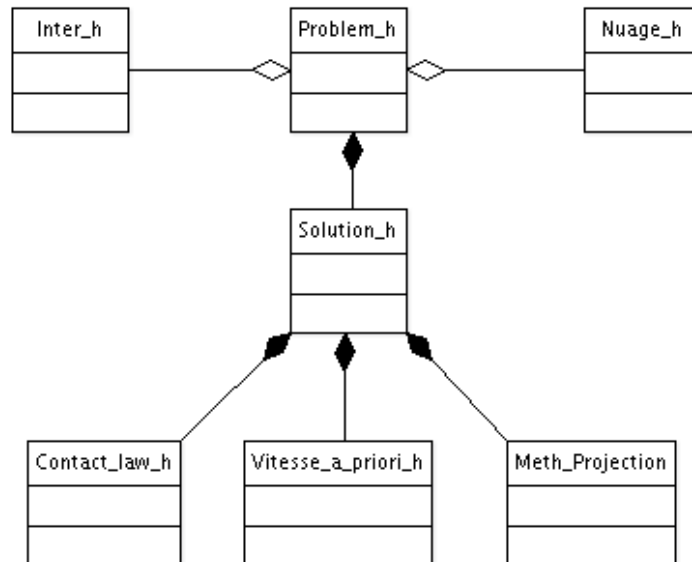


FIG. 5.13 – Diagramme des classes simplifié : Classe Probleme_h

- Attributs de `Problem_h` :
 - Elle a accès aux ensembles d’objets et de contacts mémorisés à travers des pointeurs vers des éléments `_nuage_h` et `_inter_h` respectivement de classe `Nuage_h` et `Interactions_h`
 - Elle connaît le pas de temps `_dt`
 - Elle possède également un attribut `_Sh` de type `Solution_h` qui fait évoluer le système selon le modèle choisi pendant une durée qui lui est donnée en argument.
- Fonction de `Problem_h` :
 - prend en entrée deux instants `t1` et `t2`
 - fait évoluer le système entre `t1` et `t2` en découpant l’intervalle `[t1,t2]` en sous-intervalles de taille `_dt` et en appliquant `_Sh` sur chacun de ces sous-intervalles. Cela permet à l’utilisateur de différencier le pas de temps (petit) utilisé pour le calcul et celui utilisé pour les sauvegardes

- Code de la méthode run de Problem_h :

```
void Problem_h : :run(int DIM, double t1, double t2)
{
    for(double t=t1; t<t2; t=t+_dt)
    {
        _Sh->run(DIM, _nuage_h, _inter_h, _dt);
    }
}
```

- Attributs de Solution_h :
 - _cont_law_h, pointeur sur un élément de classe Contact_law_h
 - _vap_h, pointeur sur un élément de classe Vitesse_a_priori_h
 - _meth_proj, pointeur sur un élément de classe Meth_Projection
- Fonction de Solution_h :
 - prend en entrée des arguments _nuage_h et _inter_h respectivement pointeurs vers des éléments de classe Nuage_h et Interactions_h
 - prend en entrée une durée _dt
 - fait évoluer _nuage_h et _inter_h pendant la durée _dt en leur appliquant une étape de l’algorithme 5.1.
- Code de la méthode run de Solution_h :

```
void Solution_h : :run(int DIM, Nuage_h* nuage_h, Interactions_h*
inter_h, double dt)
{
    _vap_h->run(DIM, nuage_h, inter_h, dt);
    _meth_proj->run(nuage_h->tn(), inter_h->tn(), dt, DIM);
    (nuage_h->tn())->evol(dt);
    cont_law_h->run(inter_h->tn(), nuage_h->tn(), dt, DIM);
}
```

5.3.5 Le code et son utilisation

Fichiers d’entrée

Afin de permettre l’utilisation du code sans avoir à le recompiler à chaque changement de paramètre, il lit en entrée deux fichiers. Le premier, `data`, contient les données liées au modèle (problème continu), aux sorties souhaitées par l’utilisateur et à la discrétisation (problème discret). Le second fichier, `config` contient la description de la configuration (les objets) à l’instant initial.

Exemple de fichier data :

```

=====
CONTINUOUS PROBLEM
=====

2   DIM

1   TYPE OF CONTACT LAW      (1 = no bound on gamma)

1   TYPE OF VAP              (1 = EDO_u)

1   TYPE OF EXTERNAL FORCE   (1 = gravity)
10  g                        gravity

5   T                        final time
0   save                     creating a movie?
1   plot                     plotting while computing?
3   dn_save                  nb of time steps between two images
                              of the movie or/and between two
                              plotting times
=====
DISCRETE PROBLEM
=====
0.5  dt*umax/rmin           (maximal distance covered during one
                              time step)/radius

1    PROJECTION METHOD      (1=Uzawa)
0.15 rho*dt*dt             uzawa parameter
0.02 eps/rmin              uzawa stopping criterion
10000 maxiter              maximal number of iterations of uzawa

1    NEIGHBOURGS METHOD    (1=Boxes)

```

Nous présentons ci-dessous un exemple de fichier `config`. Les particules sont pour l'instant créées aléatoirement. D'autres modes de création peuvent être prévus par la suite. La fin du fichier correspond à la description des obstacles à l'instant initial. Elle se fait sous la forme suivante :

- pour un disque de centre (x_0, y_0) et de rayon r : 1 x_0 y_0 r ,
- pour un segment d'extrémités (x_1, y_1) et (x_2, y_2) : 2 x_1 y_1 x_2 y_2 .

```

100 NbP Number of Particles
32  NbO Number of Obstacles

=====
PARTICLES
=====

1 METHOD TO CREATE PARTICLES (1 = random, uinit=0)
0.04 rmin minimal radius for the particles
0.05 rmax maximal radius for the particles
-2  xmin minimal x for the initial center of the particles
2   xmax maximal x for the initial center of the particles
-3  ymin minimal y for the initial center of the particles
2   ymax maximal y for the initial center of the particles
1   m      mass of the particles

=====
OBSTACLES
=====

1 SAME MOVEMENT FOR EVERYONE ?
1  type of this movement (1 = constant)
0  u[0]                    translational velocity
0  u[1]
0  xo[0]                   rotational center
0  xo[1]
0  w                       rotational velocity

1  -1.1  1    0.06
1  1.1   1    0.06
1  -0.9  0    0.06
2  -2    -12 -2    2
2  -2    2   2    2
2  2     2   2    -12
2  2     -12 -2    -12

```

Sorties

Une classe `Out` de type opérateur est également créée afin de gérer les sorties. Sa fonction peut être de sauvegarder les données, de faire une sortie graphique sur l'écran ou de l'intégrer à un film. Cette classe utilise des classes VTK (Visual ToolKit). Nous ne la détaillerons pas ici.

la fonction `main`

La fonction `main` se découpe alors comme suit :

```
int main(int argc, char* argv[])
{
    //Lecture du fichier data
    ...
    //Lecture du fichier config
    ...
    //Creation des variables et operateurs correspondants
    ...

    //BOUCLE
    for(double t=0 ;t<T;t=t+dt_save)
    {
        cout<<"t="<t<<" : ";
        pb_h->run(2,t,t+dt_save) ;
        out->run() ;
    }
}
```

5.3.6 Résultats numériques : sédimentation de 1000 particules

Ce code nous permet d'effectuer des simulations d'un grand nombre de particules visqueuses. Nous représentons sur la figure 5.14 les configurations obtenues à différents pas de temps pour la sédimentation de 1000 particules dans une boîte fermée contenant 24 obstacles sphériques. Les particules sont de rayons compris entre 0.015 et 0.025, celui des obstacles est 0.05. On choisit le pas de temps de sorte que les particules ne parcourent pas plus de 0.5 fois leur rayon entre deux instants de calcul. La boîte est de largeur 2 et de hauteur 6. A l'instant initial, toutes les particules se situent à une distance du haut de la boîte inférieure à 2.

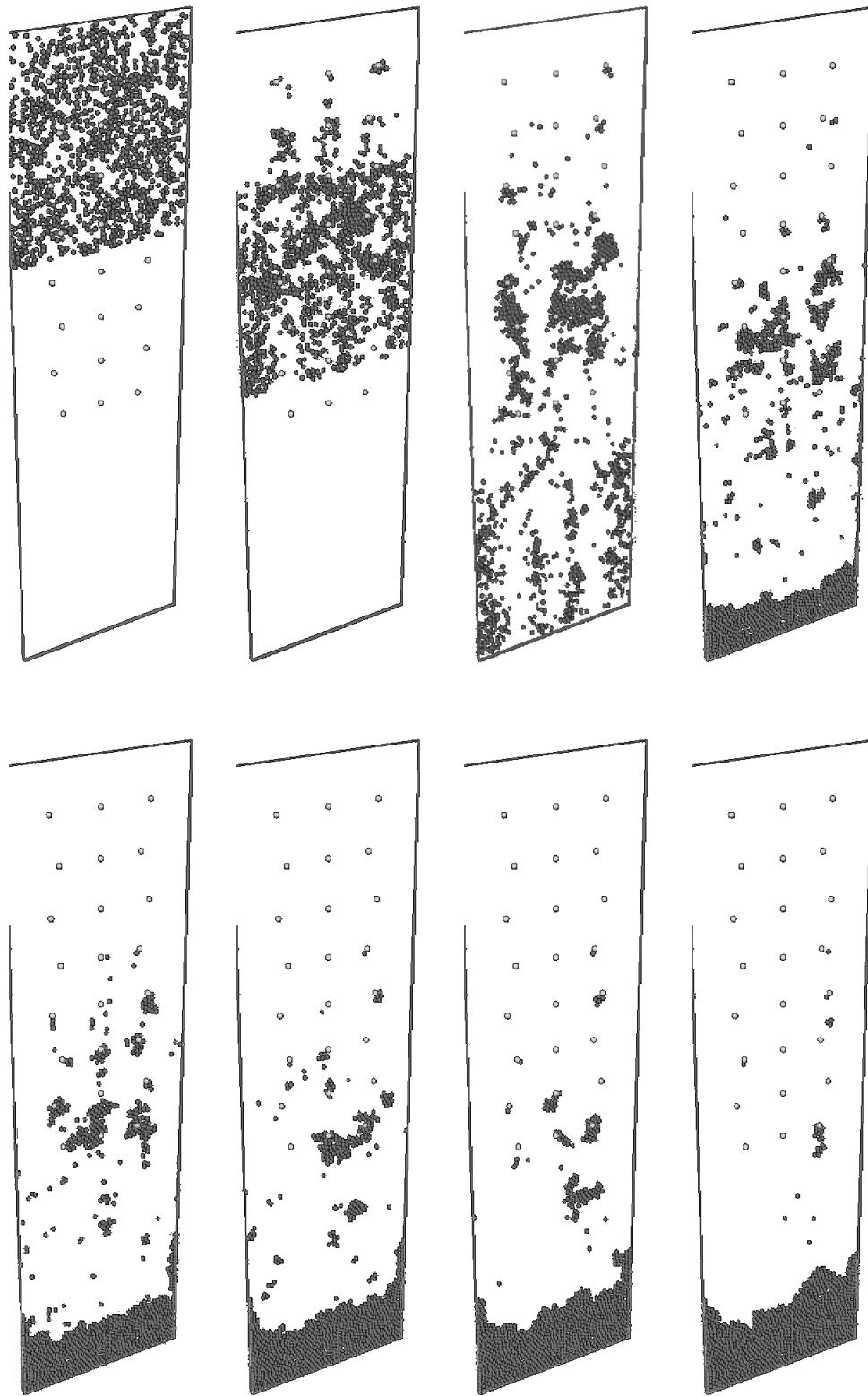


FIG. 5.14 – Sédimentation de 1000 particules : configurations à différents pas de temps

Troisième partie

Du microscopique vers le
macroscopique

Chapitre 6

Un modèle continu de boulier visqueux

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 6.1 | Modèle du boulier visqueux | 151 |
| 6.1.1 | Modèle discret | 151 |
| 6.1.2 | Vers un modèle continu : approche formelle | 155 |
| 6.2 | Convergence du modèle discret vers le modèle continu . . | 157 |
| 6.2.1 | Sens donné au modèle continu | 157 |
| 6.2.2 | Un opérateur micro-macro | 158 |
| 6.2.3 | Résultat de convergence | 160 |
| 6.3 | Démonstration des lemmes | 167 |

Résumé : On considère un système discret de sphères (un boulier en 1D) qui interagissent à travers une force de lubrification. Cette force est dissipative et singulière au voisinage du contact : elle se comporte comme l'inverse de la distance interparticulaire. On propose une équation constitutive macroscopique qui est construite comme le pendant continu naturel de ce modèle de lubrification microscopique. Le modèle continu, de type Newtonien, repose sur une viscosité linéique proportionnelle à l'inverse de la fraction locale de fluide. On établit ensuite la convergence dans un sens faible des solutions du modèle discret vers les solutions du système d'équations aux dérivées partielles comprenant l'équation macroscopique constitutive proposée et l'équation de transport.

Abstract : We consider here a discrete system of spheres (a chain in 1D) interacting through a lubrication force. This force is dissipative, and singular near contact : it behaves like the reciprocal of interparticle distance. We propose a macroscopic constitutive equation which is built as the natural continuous counterpart of this microscopic lubrication model. This model, which is of the newtonian type, relies on an elongational viscosity, which is proportional to the reciprocal of the local fluid fraction. We then establish the convergence in a weak sense of the solutions to the discrete problem towards the solution to the system of partial differential equations which is composed of the equation identified as the macroscopic constitutive equation and the transport equation.

Introduction

Une manière d'obtenir de l'information sur le comportement global de suspensions très denses est d'effectuer une étude asymptotique de quantités macroscopiques lorsque l'on s'approche de la densité maximale. Par exemple, dans [33], les auteurs étudient la viscosité apparente de solutions formées d'un réseau périodique de particules solides immergées dans un fluide Newtonien. En s'appuyant sur le développement au premier ordre de la force de lubrification, ils en proposent un modèle asymptotique, quand les distances interparticulaires tendent vers zéro et que la fraction solide s'approche de la fraction solide maximale. Dans [10], les auteurs montrent que la viscosité apparente de cisaillement d'un ensemble non structuré de particules, dont les distances interparticulaires sont de l'ordre de ε , se comporte en $1/\varepsilon^{3/2}$ quand ε tend vers zéro.

Pour étudier le comportement macroscopique de systèmes denses, on peut également les considérer comme des systèmes continus et en chercher des lois constitutives. Dans [11], les auteurs utilisent pour cela une technique d'homogénéisation : ils étudient le comportement asymptotique quand ε tend vers zéro de systèmes pour lesquels la taille des particules ainsi que les distances interparticulaires sont d'ordre ε . Ils obtiennent à la limite une équation constitutive dont les coefficients peuvent être calculés explicitement dans le cas de réseaux périodiques de particules.

L'approche que nous présentons ici est basée sur un modèle plus simple du point de vue géométrique puisque les sphères sont supposées alignées. D'un autre côté, seuls les rayons des particules tendent vers zéro et nous ne faisons aucune hypothèse sur les distances interparticulaires : nous décrivons une loi constitutive dépendant uniquement

de la fraction solide locale. Les contacts entre les particules peuvent même être autorisés, et une attention spéciale a été portée sur la manière de définir le modèle continu afin de pouvoir prendre en compte des amas macroscopiques (dans ces amas, la viscosité locale est infinie). Nous montrons que la viscosité linéique locale limite se comporte singulièrement quand la fraction locale de fluide tend vers zéro. Cette approche mène à une équation elliptique instantannée de la forme $-\partial_x \left(\frac{1}{1-\rho} \partial_x u \right) = \rho f$, où u est le champ de vitesse, ρ la fraction solide (pouvant prendre la valeur 1) et f une force extérieure. Le modèle continu d'évolution en temps comprend cette équation, couplée avec l'équation de transport :

$$\begin{cases} -\partial_x \left(\frac{1}{1-\rho} \partial_x u \right) = \rho f, \\ \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0. \end{cases}$$

6.1 Modèle du boulier visqueux

6.1.1 Modèle discret

Considérons deux sphères, baignant dans un fluide visqueux, et assujetties à se déplacer dans une unique direction. On note q_1 et q_2 leurs centres respectifs (voir figure 6.1). D est la distance entre les deux sphères, r leur rayon commun et μ la viscosité du fluide. On a vu dans la partie précédente (voir 5.1) que la force de lubrification exercée sur la

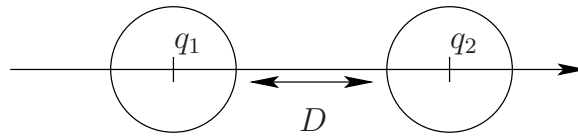


FIG. 6.1 – Modèle de lubrification

sphère 1 par le fluide environnant suite au mouvement relatif des deux particules s'écrit au premier ordre sous la forme

$$F_{lub,2 \rightarrow 1} = \frac{6}{4} \pi \mu r^2 \frac{\dot{q}_2 - \dot{q}_1}{D} \quad (6.1)$$

Pour simplifier les notations, nous prendrons toutes les constantes égales à 1 par la suite. Considérons un boulier à $N+1$ particules de même rayon ε dont les extrémités sont fixées en a et b (voir figure 6.2).

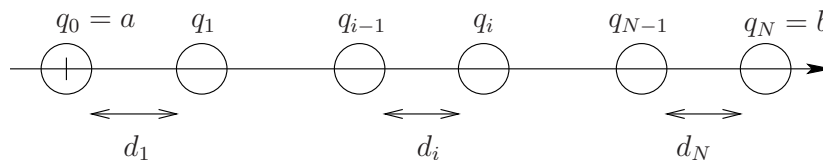


FIG. 6.2 – Boulier

Le théorème suivant montre l'existence d'une solutions à cette équation différentielle.

Théorème 6.2 *Supposons que*

$$f_i \text{ appartient à } L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^N)) \quad (6.4)$$

et est lipschitzienne en la seconde variable. Si $\bar{\mathbf{q}}$ est un vecteur position initiale strictement ε -admissible (les particules ne se touchent pas à l'instant initial, voir définition 6.1), le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} -A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(t, \mathbf{q}) = 0 \\ \mathbf{q}(0) = \bar{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (6.5)$$

possède une unique solution maximale qui est globale. On notera cette solution $\mathbf{q} = \mathcal{P}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{f}, \varepsilon)$.

Démonstration : La matrice A , similaire à la matrice obtenue par discrétisation de l'opérateur de Laplace avec condition de Dirichlet aux bords par différence finies est symétrique définie positive. Par conséquent, on peut réécrire le système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = F(t, \mathbf{q}) \\ \mathbf{q}(0) = \bar{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (6.6)$$

où $F(t, \mathbf{q}) = A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{f}(t, \mathbf{q})$. Considérons (6.6) sur l'ouvert des configurations strictement ε -admissibles

$$\Omega = \{\mathbf{q}, d_i = q_i - q_{i-1} - 2\varepsilon > 0 \forall i \in \{1 \dots N\}\}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de montrer qu'il existe une unique solution maximale de (6.6), définie sur $[0, T^*[$. Si cette solution n'était pas globale, elle sortirait de tout compact de Ω et on aurait alors l'existence d'une suite d'indices $(i_n)_n$ tels que $d_{i_n}(t_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Le nombre de particules étant fini, on en déduit qu'il existe un indice i atteint une infinité de fois par la suite $(i_n)_n$. D'où, quitte à extraire une sous-suite des $(t_n)_n$, on obtient un indice i tel que

$$d_i(t_n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \text{ et } t_n \rightarrow T^*. \quad (6.7)$$

Les points extrémaux étant fixés et T^* étant supposé fini, toutes les distances ne peuvent tendre vers 0 en T^* . Par conséquent, il existe un indice k tel que : $d_k(t_n) \not\rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et, quitte à extraire à nouveau une sous suite des $(t_n)_n$, on peut supposer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$d_k(t_n) > \eta \text{ pour tout } n \quad (6.8)$$

Or, l'équation du premier ordre (6.2), vérifiée par \mathbf{q} , peut être intégrée une fois, coordonnée par coordonnée. On obtient alors, pour tout $j \in \{1 \dots N - 1\}$,

$$0 = C_j + \ln \left(\frac{d_{j+1}(t)}{d_j(t)} \right) + \int_0^t f_j(s, \mathbf{q}(s)) ds$$

où C_j est une constante d'intégration. Supposons $i < k$ et sommons ces relations de $j = i$ à $k - 1$, on a

$$\sum_{j=i}^{k-1} C_j + \ln(d_k(t)) - \ln(d_i(t)) = - \sum_{j=i}^{k-1} \int_0^t f_j(s, \mathbf{q}(s)) ds. \quad (6.9)$$

On obtient alors une contradiction en observant que (6.7) et (6.8) impliquent que le membre de gauche de (6.9) est non borné alors que, d'après (6.4) le membre de droite l'est. Cela termine la démonstration. \square

Remarque 6.3 *On montre de la même façon qu'aucune distance ne converge vers zéro en temps fini.*

Si \mathbf{q} est la solution de (6.5) ($\mathbf{q} = \mathcal{P}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{f}, \varepsilon)$) et si $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$, la propriété suivante permet d'exprimer explicitement \mathbf{u} en fonction de \mathbf{q} .

Propriété 6.4 *Soit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N-1}$ un vecteur position strictement ε -positif (voir définition 6.1) et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N-1}$. Le système*

$$A(\mathbf{q})\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

où A est donnée en (6.3), possède une unique solution. Cette solution s'écrit

$$u_i = \frac{1}{D_N} \left\{ (D_N - D_i) \sum_{k=1}^i D_k f_k + D_i \sum_{k=i+1}^{N-1} (D_N - D_k) f_k \right\} \text{ pour } i = 1 \dots N - 1 \quad (6.10)$$

où $D_i = \sum_{j=1}^i d_j$, avec $d_j = q_j - q_{j-1} - 2\varepsilon$, $q_0 = a$ et $q_N = b$.

Démonstration : Comme on l'a remarqué dans la démonstration précédente, la matrice A est inversible et on vérifie immédiatement que \mathbf{u} donné par (6.10) est solution du système. \square

On peut généraliser les résultats précédents au cas où on autorise les distances interparticulaires à être nulles : les N particules forment P paquets, le k ème paquet, de taille $N_k + 1$ contenant les particules i_k à $i_k + N_k$ (voir figure 6.3). On écrit maintenant l'équilibre des forces sur les particules isolées et sur les paquets. Le système considéré est alors le suivant :

$$\forall i \notin \cup_{k=1}^P [i_k, i_k + N_k], \quad \frac{u_{i+1} - u_i}{d_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{d_i} = -f_i \quad (6.11)$$

$$\forall k \in [1, P], \quad \begin{cases} u_{i_k} = u_{i_k+1} = \dots = u_{i_k+N_k} \\ \frac{u_{i_k+N_k+1} - u_{i_k+N_k}}{d_{i_k+N_k+1}} - \frac{u_{i_k} - u_{i_k-1}}{d_{i_k}} = - \sum_{i=i_k}^{i_k+N_k} f_i \end{cases} \quad (6.12)$$

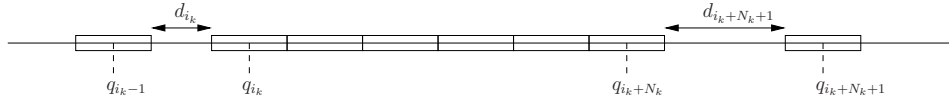


FIG. 6.3 – exemple de configuration

Remarque 6.5 Dans le cas où le premier paquet est collé à gauche de l'intervalle ($i_1 = 0$), la distance $d_{i_1} = d_0$ n'est pas définie. Dans ce cas, comme $u_0 = 0$ par hypothèse, (6.12) se réduit à $0 = u_0 = u_1 = \dots = u_{N_1}$. De même si le dernier paquet est collé à droite.

Les résultats précédents, obtenus dans le cas d'une configuration initiale strictement ε -admissible s'étendent facilement à cette nouvelle situation.

Propriété 6.6 Soit $\bar{\mathbf{q}}$ un vecteur position initiale ε -admissible (les particules ne se chevauchent pas à l'instant initial, voir définition 6.1) et si, pour tout $i = 1 \dots N - 1$, $f_i \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^N))$, alors le système d'équations différentielles associée à (6.11, 6.12) admet une unique solution maximale qui est globale. On la notera toujours $\mathbf{q} = \mathcal{P}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{f}, \varepsilon)$.

Remarque 6.7 De plus, comme précédemment, on a $d_i(0) > 0$ implique $d_i(t) > 0$ pour tout t . C'est à dire : deux particules qui ne sont pas en contact au temps initial ne le seront jamais par la suite.

Propriété 6.8 Soit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N-1}$ un vecteur position ε -positif (voir définition 6.1) et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N-1}$. Le système linéaire (6.11, 6.12), d'inconnue \mathbf{u} possède une unique solution. Cette solution est donnée par (6.10).

6.1.2 Vers un modèle continu : approche formelle

On se place dans cette section dans le cas où la distance entre les particules est strictement positive. Pour écrire un modèle continu, on cherche d'abord à écrire un tenseur des contraintes discret : force exercée en un point par un portion du système qui lui est voisine, lorsqu'il n'y a pas de force extérieure.

On considère \mathbf{q} strictement ε -admissible (les particules ne se touchent pas, voir définition 6.1). On suppose qu'il n'y a pas de force extérieure et que u_0 et u_N sont donnés. L'équilibre des forces s'écrit alors

$$A(\mathbf{q})\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (6.13)$$

où A est donné en (6.3) et où \mathbf{b} contient les conditions de Dirichlet non homogènes : $\mathbf{b} = (u_0/d_1, 0, \dots, 0, u_N/d_N)^t$.

D'après (6.1), la force de lubrification exercée sur la N ième particule par les autres est

$$f_N^{lub} = \frac{u_{N-1} - u_N}{d_N}.$$

Comme \mathbf{u} est solution de (6.13), la propriété 6.4 donne

$$u_i = u_0 + \frac{D_i}{D_N}(u_N - u_0) \quad (6.14)$$

où $D_i = \sum_{k=1}^i d_k$. On peut ainsi réécrire

$$f_N^{lub} = \frac{u_0 - u_N}{D_N} \quad (6.15)$$

où $D_N = \sum_{k=1}^N d_k$ est la quantité de vide entre q_0 et q_N .

Etant donné ce tenseur des contraintes discret, nous allons en déduire formellement un tenseur des contraintes continu. Pour cela, on suppose qu'il y a un grand nombre de particules et on note $D(y)$ le taux de vide au voisinage d'un point y de $]a, b[$. Soit $x \in]a, b[$, la force exercée au point x par la partie du système située à sa droite est

$$F_{\{\text{fluide à droite de } x\} \rightarrow \{x\}} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} F_{[x, x+\eta] \rightarrow \{x\}}.$$

Par similitude avec le cas microscopique et (6.15), on écrit alors :

$$F_{\{\text{fluide à droite de } x\} \rightarrow \{x\}} \approx \frac{u(x+\eta) - u(x)}{\int_x^{x+\eta} D(y) dy}$$

Pour η assez petit, on peut considérer $D(y) \approx D(x)$ pour y dans $[x, x+\eta]$, ce qui donne le tenseur des contraintes continu suivant :

$$F_{\{\text{fluide à droite de } x\} \rightarrow \{x\}} \approx \frac{u(x+\eta) - u(x)}{D(x)\eta} \approx \frac{\partial_x u(x)}{D(x)}.$$

En suivant maintenant une approche très standard, nous établissons l'équation continue d'équilibre des forces sur un domaine à une dimension. On note ρ la fraction solide et on suppose qu'une force extérieure de densité f s'exerce sur le système. À t fixé, on exprime l'équilibre des forces sur une partie $\omega = [a, b]$ du système (supposé non-inertiel). La force extérieure exercée sur ω est

$$F^{ext} = \int_{\omega} \rho f,$$

et la force exercée par le reste du système sur ω est, d'après le tenseur des contraintes continu obtenu,

$$F^{sys} = \frac{\partial_x u(b)}{D(b)} - \frac{\partial_x u(a)}{D(a)} = \int_{\omega} \partial_x \left(\frac{\partial_x u}{D} \right).$$

L'équilibre des forces à chaque instant sur ω s'écrit donc

$$\int_{\omega} \rho f + \int_{\omega} \partial_x \left(\frac{\partial_x u}{D} \right) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout temps t et tout $\omega \subset]a, b[$, on a

$$-\partial_x \left(\frac{\partial_x u}{D} \right) = \rho f, \quad \forall t.$$

Et, puisque le taux de vide D est égal à $1 - \rho$, on obtient finalement

$$-\partial_x \left(\frac{\partial_x u}{1 - \rho} \right) = \rho f \quad (6.16)$$

Le modèle continu ainsi suggéré est formé de cette dernière équation décrivant l'équilibre des forces à chaque instant et de l'équation de convection :

$$\begin{cases} -\partial_x \left(\frac{\partial_x u}{1 - \rho} \right) = \rho f \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0 \end{cases}$$

6.2 Convergence du modèle discret vers le modèle continu

6.2.1 Sens donné au modèle continu

On souhaite montrer dans cette section que la solution du modèle discret décrit section 6.1.1 converge en un certain sens vers le modèle continu obtenu formellement et que l'on rappelle ici.

$$-\partial_x \left(\frac{\partial_x u}{1 - \rho} \right) = \rho f, \quad \forall t, \quad (6.17)$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Pour cela, on précise d'abord le sens donné à l'équation de transport (6.18).

Définition 6.9 Soit $\rho_0 \in L^\infty(]a, b[)$, on dit que $(\rho, u) \in L^\infty(]0, T[\times]a, b[) \times L^1(]0, T[\times]a, b[)$ est solution au sens faible de

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0, \end{cases}$$

si et seulement si, pour tout $\phi \in \mathcal{D}([0, T[\times]a, b[)$, on a

$$\int_0^T \int_a^b \rho(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt + \int_a^b \rho_0(x) \phi(0, x) dx + \int_0^T \int_a^b \rho(t, x) u(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt = 0.$$

Avant d'écrire le théorème de convergence, il nous reste à préciser le sens que l'on donne à (6.17) quand la densité peut valoir 1 :

Propriété 6.10 *I intervalle ouvert de \mathbb{R} . Soit $K : I \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, mesurable, avec $K \geq \alpha > 0$, $\phi \in H^{-1}(I)$ et soit J définie par*

$$v \in H_0^1(I) \mapsto J(v) = \frac{1}{2} \int_I K(x) |\partial_x v|^2 - \langle \phi, v \rangle \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ qui réalise le minimum de J sur $H_0^1(I)$. S'il existe $f \in L^1(I)$ tel que $\langle \phi, v \rangle = \int f v$, on écrira que u est une solution de

$$-\partial_x(K(x)\partial_x u) = f.$$

Démonstration : Ce problème de minimisation est équivalent au problème de minimisation de la même fonctionnelle J sur l'espace

$$H_K = \left\{ v \in H_0^1(I), \partial_x v = 0 \text{ pp où } K = +\infty, \text{ et } \int_{K < +\infty} K(x) |\partial_x v|^2 < \infty \right\}$$

J est convexe, semi-continue inférieurement sur H_K et on obtient donc l'existence et l'unicité du minimum ainsi que la formulation variationnelle associée :

$$u \in H_K, \quad \text{et pour tout } v \in H_K, \quad \int_{K < +\infty} K(x) \partial_x u \partial_x v = \int_I f v.$$

On utilisera par la suite cette formulation variationnelle du problème. \square

6.2.2 Un opérateur micro-macro

Plaçons nous sur un intervalle $I = [a, b]$ et fixons $T > 0$. On suppose les particules extrêmes fixes (ie $u_0 = u_N = 0$) et $q_0 = a$, $q_N = b$. On construit un opérateur $\tilde{\mathcal{P}}$, qui est l'outil clé permettant de passer du niveau microscopique au niveau macroscopique. Cet opérateur est défini de la façon suivante :

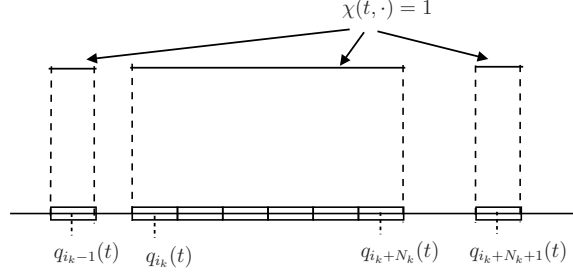
- Soit $\varepsilon > 0$ et $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{N-1}$ un vecteur position initiale ε -admissible. Ils représentent une distribution de $N + 1$ particules de rayon ε qui ne se chevauchent pas et dont les centres sont situés en $\bar{q}_0 = a$, \bar{q}_i pour $i = 1 \dots N$ et $\bar{q}_N = b$ (voir définition 6.1). On se donne également $f \in L^1([0, T[\times]a, b])$.
- On définit un vecteur de forces extérieures $\mathbf{f}^\varepsilon(t, \mathbf{q})$ par

$$f_i^\varepsilon(t, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{q_i(t)-\varepsilon}^{q_i(t)+\varepsilon} f(t, s) ds.$$

On dispose alors de la solution du modèle de boulier visqueux $\mathbf{q} = \mathcal{P}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{f}^\varepsilon, \varepsilon)$ définie sur $[0, T]$ (voir propriété 6.6). On note $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$.

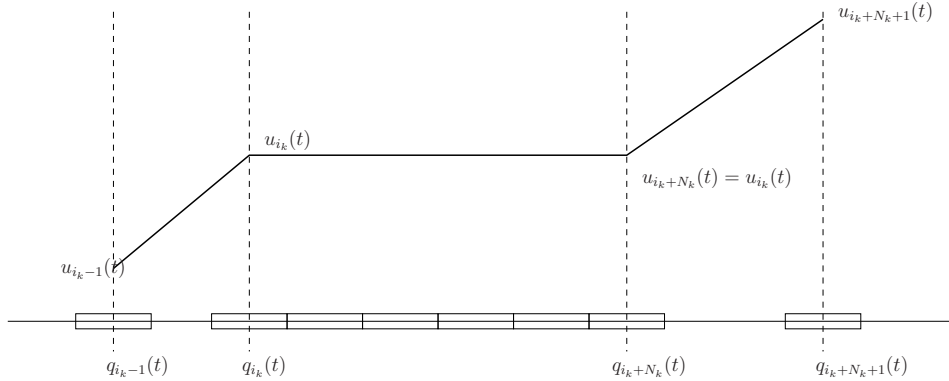
- A \mathbf{q} on associe la fonction caractéristique de la phase solide $\chi \in L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$ (voir figure 6.4). Elle est définie à tout instant par

$$\chi(t, \cdot) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{1}_{]q_i(t)-\varepsilon, q_i(t)+\varepsilon[} + \mathbf{1}_{]a, a+\varepsilon[} + \mathbf{1}_{]b-\varepsilon, b[} \quad (6.19)$$


 FIG. 6.4 – Tracé de la fonction phase solide $\chi(t, \cdot)$

- Au vecteur $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1 \dots N-1}$ on associe une fonction vitesse (voir figure 6.5). A chaque instant t , elle est affine par morceaux sur $[a, b]$ et est définie par

$$\begin{cases} u(t, \cdot) \text{ affine sur } [q_i(t), q_{i+1}(t)] \text{ pour } 0 \leq i \leq N-1 \\ u(t, q_i(t)) = u_i(t) \end{cases} \quad (6.20)$$


 FIG. 6.5 – Tracé de la fonction vitesse $u(t, \cdot)$

- On note $(\chi, u) = \tilde{\mathcal{P}}(\bar{\mathbf{q}}, f, \varepsilon)$.

Dans le même esprit, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N-1}$ vecteur position admissible, on définit $\chi(\mathbf{q}, \varepsilon) \in L^\infty(]a, b[)$ comme étant la fonction caractéristique de la phase solide associée à la distribution $(\mathbf{q}, \varepsilon)$:

$$\chi(\mathbf{q}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{1}_{]q_i-\varepsilon, q_i+\varepsilon[} + \mathbf{1}_{]a, a+\varepsilon[} + \mathbf{1}_{]b-\varepsilon, b[} \quad (6.21)$$

6.2.3 Résultat de convergence

Le théorème suivant montre que, si le rayon des particules tend vers zéro et leur nombre vers l'infini, on construit grâce à l'opérateur $\tilde{\mathcal{P}}$ une suite de fonctions tendant en un certain sens vers la solution du problème continu.

Théorème 6.11 *Soient $T > 0$, f et ρ_0 deux fonctions mesurables respectivement sur $]0, T[\times]a, b[$ et $]a, b[$. On suppose que :*

$$f \in L^\infty(]0, T[\times]a, b[), \quad (6.22)$$

$$f \text{ lipschitzienne par rapport à la seconde variable, uniformément en } t, \quad (6.23)$$

$$\partial_t f \in L^\infty(]0, T[, L^1(]a, b[)), \quad (6.24)$$

$$\rho_0 \in L^\infty(]a, b[) \text{ et } 0 \leq \rho_0 \leq 1. \quad (6.25)$$

Soit $(\bar{\mathbf{q}}^\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de vecteurs position initiale ε -admissibles (voir définition 6.1), $\bar{\mathbf{q}}^\varepsilon \in \mathbb{R}^{N^\varepsilon}$, $N^\varepsilon = 1/\varepsilon$. On note $\bar{\chi}^\varepsilon = \chi(\bar{\mathbf{q}}^\varepsilon, \varepsilon)$ la suite de fonctions associée à ces conditions initiales (voir (6.21)) et on suppose

$$\bar{\chi}^\varepsilon \xrightarrow{*} \rho_0 \text{ dans } L^\infty(]a, b[) \quad (6.26)$$

Alors, la solution du problème discret $(\chi^\varepsilon, u^\varepsilon) = \tilde{\mathcal{P}}(\bar{\mathbf{q}}^\varepsilon, f, \varepsilon)$ (voir section 6.2.2) converge quand ε tend vers zéro vers la solution du problème continu au sens suivant : il existe $\rho \in L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$ et $u \in L^\infty(]0, T[, H_0^1(]a, b[)) \cap W^{1,\infty}(]0, T[, L^\infty(]a, b[))$, tels que, quand ε tend vers zéro et à une suite extraite près,

$$\chi^\varepsilon \xrightarrow{*} \rho \text{ dans } L^\infty(]0, T[\times]a, b[),$$

$$u^\varepsilon \xrightarrow{*} u \text{ dans } L^\infty(]0, T[, H_0^1(]a, b[)),$$

$$\partial_t u^\varepsilon \xrightarrow{*} \partial_t u \text{ dans } L^\infty(]0, T[\times]a, b[).$$

De plus, ρ et u vérifient

$$\text{ppt } t, \quad 0 \leq \rho(t, \cdot) \leq 1 \text{ presque partout sur } [a, b] \quad (6.27)$$

$$\text{ppt } t, \quad -\partial_x \left(\frac{1}{1 - \rho(t, \cdot)} \partial_x u(t, \cdot) \right) = \rho(t, \cdot) f(t, \cdot) \quad (6.28)$$

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad \rho(0, \cdot) = \rho_0 \quad (6.29)$$

où (6.29) est vérifiée au sens de la définition 6.9 et (6.28) au sens de la propriété 6.10.

Remarque 6.12 *Pour tout $\rho_0 \in L^\infty(I)$ avec $\rho(x) \in [0, 1]$ presque partout sur $]a, b[$, on peut facilement construire une suite $(\bar{\mathbf{q}}^\varepsilon)_\varepsilon$, ε -admissible, telle que $\bar{\chi}^\varepsilon \xrightarrow{*} \rho_0$ dans $L^\infty(I)$, où $\bar{\chi}^\varepsilon = \chi(\bar{\mathbf{q}}^\varepsilon, \varepsilon)$. Prenons $\varepsilon = 1/N$. On définit $\bar{q}_0^\varepsilon = a$. Ensuite, on note l_1^0 le réel tel que $\int_{\bar{q}_0^\varepsilon}^{l_1^\varepsilon} \rho_0$ soit égal à ε . Comme $\rho_0 \leq 1$, on a $l_1^0 \geq \bar{q}_0^\varepsilon + \varepsilon$ et on peut définir $\bar{q}_1^\varepsilon = l_1^\varepsilon + \varepsilon$. De même,*

pour définir \bar{q}_2^ε , on choisit d'abord l_2^ε tel que $\int_{\bar{q}_1^\varepsilon}^{l_2^\varepsilon} \rho_0 = \varepsilon$ et on pose $\bar{q}_2^\varepsilon = l_2^\varepsilon + \varepsilon$. On peut itérer pour obtenir \bar{q}^ε , ε -admissible. De plus, on a $\int_{l_i^\varepsilon}^{l_{i+1}^\varepsilon} (\bar{\chi}^\varepsilon - \rho_0) = 0$ et donc $\bar{\chi}^\varepsilon \xrightarrow{*} \rho_0$ dans $L^\infty(I)$ quand ε tend vers zéro (voir la démonstration page 170 du lemme 6.19, où un résultat similaire est démontré).

Démonstration :

Notons tout d'abord que l'hypothèse sur f nous assure de l'existence d'une solution globale au problème discret. Par construction, χ^ε étant bornée par 1, on a immédiatement le lemme suivant :

Lemme 6.13

$\exists \rho \in L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$ tel que $\chi^\varepsilon \xrightarrow{*} \rho$ dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$

Alors, comme $0 \leq \chi^\varepsilon \leq 1$, (6.27) est vérifiée. En effet, montrons par exemple que, pour presque tout t dans $]0, T[$ on a $\rho(t, \cdot) \geq 0$ pp. sur $[a, b]$. Si cela n'était pas vrai, on aurait l'existence d'un ensemble

$$A \subset [0, T], \quad \text{mes}_{[0, T]}(A) > 0,$$

tel que,

$$\forall t \in A, \quad \exists B_t \subset [a, b], \quad \text{mes}_{[a, b]}(B_t) > 0 \text{ et } \rho(t, \cdot) < 0 \text{ sur } B_t.$$

Soit alors $\Phi \in L^\infty(]0, T[\times]a, b[) \subset L^1(]0, T[\times]a, b[)$ définie par $\Phi(t, x) = \mathbf{1}_{B_t}(x)$ si t est dans A et $\Phi(t, x) = 0$ sinon. Le lemme 6.13 donne alors

$$\int_{]0, T[\times]a, b[} \chi^\varepsilon \Phi \longrightarrow \int_{]0, T[\times]a, b[} \rho \Phi \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Or, comme $\chi^\varepsilon \Phi \geq 0$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \int_{]0, T[\times]a, b[} \chi^\varepsilon \Phi \geq 0.$$

Comme $\rho \Phi \in L^\infty(]0, T[\times]a, b[) \subset L^1(]0, T[\times]a, b[)$, on peut appliquer le théorème de Fubini à la seconde intégrale et on obtient, par définition de Φ ,

$$\int_{]0, T[\times]a, b[} \rho \Phi = \int_0^T \int_a^b \rho(t, x) \Phi(t, x) dx dt = \int_A \int_{B_t} \rho(t, x) dx dt.$$

Par définition de A et B_t , on a finalement

$$\int_{]0, T[\times]a, b[} \rho \Phi < 0,$$

ce qui est absurde. On procède de même pour la domination par 1.

La suite de la démonstration nécessite plusieurs lemmes. Ces lemmes seront énoncés au cours de la démonstration mais, par soucis de lisibilité, nous reporterons leur démonstration à la section suivante.

Notons $d_i^\varepsilon(t) = q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t) - 2\varepsilon$ la distance entre les particules i et $i - 1$ au temps t issues de la configuration initiale $\bar{\mathbf{q}}^\varepsilon$. Comme indiqué lors de la remarque 6.7, deux particules qui ne sont pas en contact au temps initial ne le seront jamais. Par conséquent, pour un ε donné (ie. une configuration initiale donnée), les indices des particules contenues dans un paquet sont constants au cours du temps. Noter que, afin d'alléger les notations, nous n'écrirons pas la dépendance en ε de ces indices concernant les paquets. Ainsi, nous écrirons P pour P^ε , $q_{i_k}^\varepsilon$ pour $q_{i_k}^\varepsilon$ ou encore $q_{i_k+N_k}^\varepsilon$ pour $q_{i_k+N_k}^\varepsilon$.

Nous définissons, à chaque instant t , deux nouvelles fonctions :

- $\rho^\varepsilon(t, \cdot)$ est la fonction densité. Elle est constante sur $[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]$ et est égale au taux de matière sur cet intervalle (voir Fig. 6.6),

$$\rho_i^\varepsilon(t) = 1 - \frac{d_i^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \text{ sur } [q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)] \text{ pour } 1 \leq i \leq N^\varepsilon \quad (6.30)$$

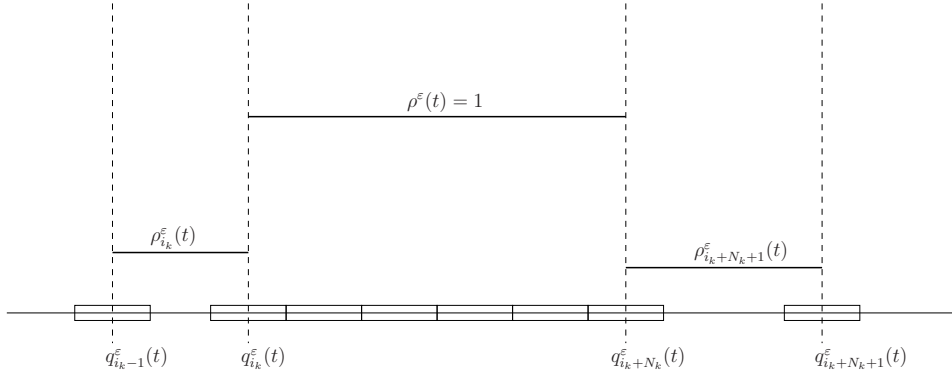


FIG. 6.6 – Tracé de la fonction densité $\rho^\varepsilon(t, \cdot)$

- $w^\varepsilon(t, \cdot)$ est l'équivalent discret de $\partial_x u / (1 - \rho)$. C'est une fonction continue, affine sur les intervalles $[q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon]$ pour $i = 1 \dots N^\varepsilon - 1$ et constante sur chacun des sous-intervalles de $[a, b] \setminus \bigcup_{i=1 \dots N^\varepsilon - 1} [q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon]$ (voir Fig. 6.7). Elle est définie par

$$\begin{cases} w^\varepsilon(t, q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon) = w_i^\varepsilon(t) \\ w^\varepsilon(t, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon) = w_{i+1}^\varepsilon(t) \end{cases} \text{ pour } i = 1 \dots N^\varepsilon - 1 \quad (6.31)$$

avec

$$\begin{cases} w_i^\varepsilon(t) = \frac{1}{1 - \rho_i^\varepsilon(t)} \partial_x u^\varepsilon(t, \cdot)|_{[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]} & , \text{ si } \rho_i^\varepsilon(t) \neq 1 \\ w_i^\varepsilon(t) = \beta_i^\varepsilon(t) & , \text{ si } \rho_i^\varepsilon(t) = 1 \end{cases} \quad (6.32)$$

où les $(\beta_i^\varepsilon(t))_{i_k+1 \leq i \leq i_k+N_k}$ correspondant au k ième paquet sont solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{i_k+1}^\varepsilon(t) - \frac{u_{i_k}^\varepsilon(t) - u_{i_k-1}^\varepsilon(t)}{d_{i_k}^\varepsilon(t)} = -2\varepsilon f_{i_k}^\varepsilon(t) \\ \beta_{i_k+2}^\varepsilon(t) - \beta_{i_k+1}^\varepsilon(t) = -2\varepsilon f_{i_k+1}^\varepsilon(t) \\ \vdots \\ \beta_{i_k+N_k}^\varepsilon(t) - \beta_{i_k+N_k-1}^\varepsilon(t) = -2\varepsilon f_{i_k+N_k-1}^\varepsilon(t) \\ \frac{u_{i_k+N_k+1}^\varepsilon(t) - u_{i_k+N_k}^\varepsilon(t)}{d_{i_k+N_k+1}^\varepsilon(t)} - \beta_{i_k+N_k}^\varepsilon(t) = -2\varepsilon f_{i_k+N_k}^\varepsilon(t) \end{array} \right. \quad (6.33)$$

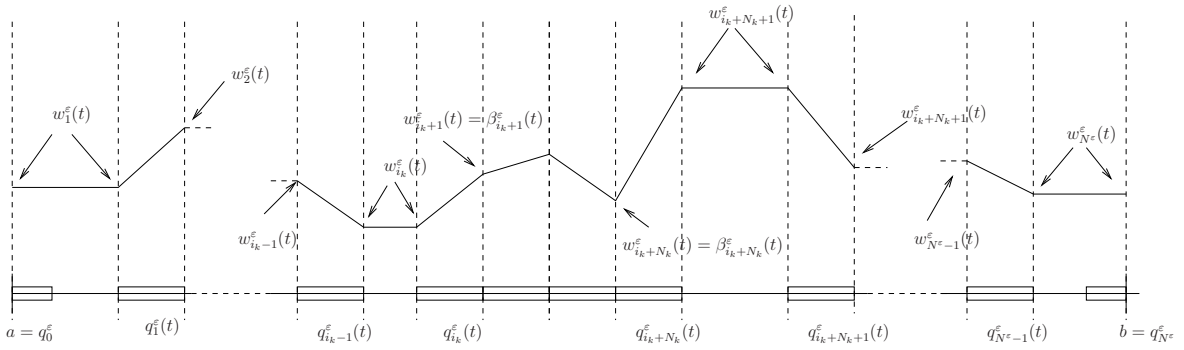


FIG. 6.7 – Tracé de $w^\varepsilon(t, \cdot)$

Remarque 6.14 Le système (6.33) contient $N_k + 1$ équations pour N_k inconnues. On remarque qu'en sommant toutes ses équations, on retrouve l'équation d'équilibre des forces sur le k ième paquet, déjà imposée par (6.12). Dans le cas où $i_1 = 0$, c'est à dire quand le premier paquet est attaché au bord de gauche, on peut donc définir les $(\beta_i^\varepsilon(t))_{1 \leq i \leq N_1}$ grâce aux N_1 dernières équations de (6.33). De même, si $i_P + N_P = N^\varepsilon$, le dernier paquet est fixé au bord de droite et on peut définir les $(\beta_i^\varepsilon(t))_{i_P+1 \leq i \leq i_P+N_P}$ en utilisant les N_P premières équations du système.

Remarque 6.15 L'idée sous-jacente à cette construction est que $\beta_i(t)$ peut être vu comme une force de cohésion entre les particules $i - 1$ et i à l'instant t . Une façon de le voir est de noter que, à t fixé, $\mathbf{u}_\varepsilon(t)$ est la limite de $\mathbf{u}^{\varepsilon, \eta}$ où $\mathbf{u}^{\varepsilon, \eta}$ est la solution du système (6.2) avec $d_i = \eta > 0$ si i est compris entre $i_k + 1$ et $i_k + N_k$ et $d_i = d_i(t)$ sinon. On a alors

$$\forall k, \quad \forall j \in [1, N_k], \quad \beta_{i_k+j}^\varepsilon = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{u_{i_k+j}^{\varepsilon, \eta} - u_{i_k+j-1}^{\varepsilon, \eta}}{\eta}.$$

Une autre manière de définir ces forces de cohésion est de considérer le problème de minimisation suivant : minimiser

$$J(\mathbf{v}) = \sum_{i \notin \cup_k [i_k+1, i_k+N_k]} \frac{1}{2} \frac{(v_i - v_{i-1})^2}{d_i^\varepsilon(t)} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i^\varepsilon(t) v_i$$

sur $K = \{\mathbf{v}, \forall i \in \cup_k [i_k + 1, i_k + N_k], v_i = v_{i-1}\}$. Ce problème est équivalent au problème (6.11, 6.12) et β_i^ε est alors le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $v_i = v_{i-1}$.

Le lemme suivant montre que l'équation (6.28) est vérifiée au niveau discret.

Lemme 6.16 (démonstration page 167)

Pour tout t et tout ε , on a

$$-\partial_x w^\varepsilon(t, \cdot) = f^\varepsilon(t, \cdot), \quad (6.34)$$

$$\text{où } f^\varepsilon(t, \cdot) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} f_i^\varepsilon(t) \mathbf{1}_{]q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon[.}$$

De même, on vérifie que (6.29) est vérifiée au niveau discret.

Lemme 6.17 (démonstration page 168)

Pour tout ε , on a

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \partial_x (\rho^\varepsilon u^\varepsilon) = 0, \quad (6.35)$$

au sens de la définition 6.9, avec pour condition initiale $\rho^\varepsilon(0, \cdot)$.

Remarque 6.18 Pour démontrer ce lemme, on n'utilisera pas les équations (6.11) et (6.12) : le résultat provient uniquement de la façon dont on a défini ρ^ε et u^ε en fonction de \mathbf{q}^ε .

On souhaite passer à la limite dans les équations (6.34) et (6.35). Pour cela, on étudie d'abord le comportement de ρ^ε et de f^ε dans les lemmes suivants.

Lemme 6.19 (démonstration page 170)

$$\rho^\varepsilon \xrightarrow{*} \rho \text{ dans } L^\infty(]0, T[\times]a, b]) \text{ et } \rho^\varepsilon(0, \cdot) \xrightarrow{*} \rho_0 \text{ dans } L^\infty(]a, b]).$$

Lemme 6.20 (démonstration page 172)

$$f^\varepsilon \xrightarrow{*} \rho f \text{ dans } L^\infty(]0, T[\times]a, b]).$$

L'idée de la suite de la démonstration est alors claire : on va montrer que u^ε possède une limite en un certain sens puis, grâce aux lemmes 6.19 et 6.20, on va passer à la limite dans (6.34) et (6.35).

Lemme 6.21 (démonstration page 174)

$$(u^\varepsilon)_\varepsilon \text{ est bornée dans } L^\infty(]0, T[, H_0^1(]a, b]).$$

Il existe donc une suite extraite, toujours notée $(u^\varepsilon)_\varepsilon$, telle que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$u^\varepsilon \xrightarrow{*} u \text{ dans } L^\infty(]0, T[, H_0^1(]a, b]), \quad (6.36)$$

$$\partial_x u^\varepsilon \xrightarrow{*} \partial_x u \text{ dans } L^\infty(]0, T[, L^2(]a, b]). \quad (6.37)$$

Cette convergence étant établie, on souhaite maintenant passer à la limite dans le terme de gauche de (6.34) et identifier la limite de $w^\varepsilon \approx 1/(1 - \rho^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon$ à $1/(1 - \rho) \partial_x u$. Pour cela, on étudie w^ε .

Lemme 6.22 (démonstration page 176)

$(w^\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\partial_x w^\varepsilon)_\varepsilon$ sont bornées dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$.

Lemme 6.23 (démonstration page 177)

$(\partial_t w^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$.

Les lemmes 6.22 et 6.23 impliquent que $(w^\varepsilon)_\varepsilon$ est équicontinue dans $\mathcal{C}(]0, T[\times]a, b[)$. D'après le théorème d'Ascoli, elle est donc relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(]0, T[\times]a, b[)$. Par conséquent, il existe une suite extraite, toujours notée $(w^\varepsilon)_\varepsilon$, et $w \in \mathcal{C}^0(]0, T[\times]a, b[)$ tels que

$$w^\varepsilon \longrightarrow w \text{ dans } \mathcal{C}^0(]0, T[\times]a, b[) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.38)$$

Connaissant le comportement de w^ε , on peut en déduire celui de $\partial_x u^\varepsilon$.

Lemme 6.24 (démonstration page 179)

$\partial_x u^\varepsilon \xrightarrow{*} (1 - \rho)w$ dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$.

On va maintenant pouvoir faire tendre ε vers zéro dans (6.34) et montrer que, pour presque tout t ,

$$-\partial_x \left(\frac{1}{1 - \rho(t, \cdot)} \partial_x u(t, \cdot) \right) = \rho f(t, \cdot)$$

au sens de la propriété 6.10. Tout d'abord, comme $L^1(]0, T[, L^2(]a, b[)) \subset L^1(]0, T[\times]a, b[)$, le lemme 6.24 implique

$$\partial_x u^\varepsilon \xrightarrow{*} (1 - \rho)w \text{ dans } L^\infty(]0, T[, L^2(]a, b[)).$$

Ceci, associé à (6.37) donne $\partial_x u = (1 - \rho)w$ dans $L^\infty(]0, T[, L^2(]a, b[))$ et donc, pour presque tout t , $\partial_x u(t, \cdot) = (1 - \rho(t, \cdot))w(t, \cdot)$ presque partout sur $]a, b[$. Ainsi,

$$u(t, \cdot) \in H_{\frac{1}{1 - \rho(t, \cdot)}} \text{ pour presque tout } t \in]0, T[,$$

où H_K est défini dans la démonstration de la propriété 6.10. Ensuite on a, d'après (6.34), que pour tout $v \in H_0^1(]a, b[)$ et tout $\Phi \in \mathcal{D}(]0, T[)$,

$$\int_0^T \int_a^b w^\varepsilon(t, x) v'(x) \Phi(t) dx dt = \int_0^T \int_a^b f^\varepsilon(t, x) v(x) \Phi(t) dx dt.$$

La propriété de convergence (6.38) et le lemme 6.20 nous permettent alors de passer à la limite et d'obtenir, pour tout $v \in H_0^1(]a, b[)$,

$$\int_0^T \left(\int_a^b w(t, x) v'(x) dx \right) \Phi(t) dt = \int_0^T \left(\int_a^b \rho f(t, x) v(x) dx \right) \Phi(t) dt, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

Finalement on a montré

$$\forall v \in H_0^1(]a, b[), \quad \int_a^b w(t, x) v'(x) dx = \int_a^b \rho f(t, x) v(x) dx \text{ pour presque tout } t \in]0, T[.$$

Soit maintenant $v \in H_{\frac{1}{1-\rho(t,\cdot)}}$. Pour presque tout t on a,

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(t,x) f(t,x) v(x) dx &= \int_a^b w(t,x) v'(x) dx = \int_{\rho \neq 1} w(t,x) v'(x) dx \\ &= \int_{\rho \neq 1} \frac{(1-\rho(t,x))w(t,x)}{1-\rho(t,x)} v'(x) dx = \int_{\rho \neq 1} \frac{\partial_x u(t,x)}{1-\rho(t,x)} v'(x) dx. \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu l'équation variationnelle caractérisant les solutions de (6.28) (voir propriété 6.10).

Il nous reste maintenant à montrer que l'équation de transport est vérifiée à la limite c'est-à-dire, montrer que (ρ, u) vérifie l'équation de transport au sens de la définition 6.9. Afin de pouvoir passer à la limite dans le terme $\partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)$, nous allons avoir besoin d'une convergence forte de u^ε . Pour l'obtenir, on utilise le lemme suivant.

Lemme 6.25 (démonstration page 180)

$(\partial_t u^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$.

On a donc, à une suite extraite près,

$$\partial_t u^\varepsilon \xrightarrow{*} \partial_t u \text{ dans } L^\infty(]0, T[\times]a, b[).$$

De plus, des lemmes 6.21 et 6.25, on déduit que $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $H^1(]0, T[\times]a, b[)$ et donc, qu'il existe une sous-suite, encore notée $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ telle que

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \text{ dans } L^2(]0, T[\times]a, b[) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6.39)$$

Soit maintenant $\Psi \in \mathcal{D}(]0, T[\times]a, b[)$, d'après le lemme 6.17, $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ vérifie l'équation de transport et on a ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon \partial_t \Psi dx dt + \int_a^b \rho^\varepsilon(0,x) \Psi(0,x) dx + \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \Psi dx dt = 0.$$

On passe à la limite dans les deux premières intégrales en utilisant le lemme 6.19 associé au fait que $\partial_t \Psi$ est dans $L^1(]0, T[\times]a, b[)$ et que $\Psi(0, \cdot)$ est dans $L^1(]a, b[)$. Pour la dernière intégrale, on écrit

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon u^\varepsilon \partial_x \Psi dx dt - \int_0^T \int_a^b \rho u \partial_x \Psi dx dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon (u^\varepsilon - u) \partial_x \Psi dx dt \right| + \left| \int_0^T \int_a^b (\rho^\varepsilon - \rho) u \partial_x \Psi dx dt \right| \\ & \leq \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(]0, T[\times]a, b[)} \|\partial_x \Psi\|_{L^2(]0, T[\times]a, b[)} + \left| \int_0^T \int_a^b (\rho^\varepsilon - \rho) u \partial_x \Psi dx dt \right| \end{aligned}$$

Le premier terme converge vers zéro grâce à (6.39) et le second grâce au lemme 6.19 puisque u et $\partial_x \Psi$ sont dans $L^2(]0, T[\times]a, b[)$ et donc $u \partial_x \Psi$ est dans $L^1(]0, T[\times]a, b[)$. On obtient l'égalité souhaitée en passant à la limite,

$$\int_0^T \int_a^b \rho \partial_t \Psi dx dt + \int_a^b \rho_0(x) \Psi(0, x) dx + \int_0^T \int_a^b \rho u \partial_x \Psi dx dt = 0.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème, sous réserve de prouver les lemmes utilisés. \square

Remarque 6.26 Dans la démonstration du lemme 6.22 on montre en fait que $(\partial_x u^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$. Ceci, associé au lemme 6.25, montre que $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $W^{1,\infty}(]0, T[\times]a, b[)$. L'injection compacte de $W^{1,\infty}(]0, T[\times]a, b[)$ dans $\mathcal{C}^0(]0, T[\times]a, b[)$ donne alors la convergence uniforme de u^ε vers u sur $]0, T[\times]a, b[$.

Remarque 6.27 L'énergie dissipée à chaque instant par unité de longueur, s'écrivant

$$\frac{1}{1-\rho} (\partial_x u)^2 = (1-\rho) w^2,$$

est bornée sur $]0, T[\times]a, b[$ d'après le lemme 6.22. La remarque précédente montre d'autre part que $\partial_x u$ est dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$ et ainsi, le taux de déformation par unité de longueur est lui aussi borné sur $]0, T[\times]a, b[$.

6.3 Démonstration des lemmes

- **Démonstration du lemme 6.16** : $-\partial_x w^\varepsilon(t, \cdot) = f^\varepsilon(t, \cdot)$

$w^\varepsilon(t, \cdot)$ est continue, affine sur $[q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon]$ pour $1 \leq i \leq N^\varepsilon - 1$ et constante ailleurs. On a ainsi

$$\partial_x w^\varepsilon(t, \cdot) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} \frac{w_{i+1}^\varepsilon(t) - w_i^\varepsilon(t)}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{]q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon[}.$$

On réécrit cette somme en utilisant la définition (6.32) des w_i^ε . Dans le cas où $d_i^\varepsilon(t) > 0$ (ie. $\rho_i^\varepsilon(t) < 1$), comme u^ε est affine sur $[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]$, on utilise

$$w_i^\varepsilon(t) = \frac{1}{1-\rho^\varepsilon(t, \cdot)} \partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) = \frac{1}{1-\rho_i^\varepsilon(t)} \frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} = \frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{d_i^\varepsilon(t)}.$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned}
 \partial_x w^\varepsilon(t, \cdot) = & \sum_{\substack{i \in 1..N^\varepsilon - 1 \\ d_i(t) > 0, d_{i+1}(t) > 0}} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{u_{i+1}^\varepsilon(t) - u_i^\varepsilon(t)}{d_{i+1}^\varepsilon(t)} - \frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{d_i^\varepsilon(t)} \right) \mathbf{1}_{]q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon[} \\
 & + \sum_{k=1}^P \sum_{i=i_k+1}^{i_k+N_k-1} \frac{1}{2\varepsilon} (\beta_{i+1}^\varepsilon(t) - \beta_i^\varepsilon(t)) \mathbf{1}_{]q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon[} \\
 & + \sum_{k=1}^P \frac{1}{2\varepsilon} \left(\beta_{i_k+1}^\varepsilon(t) - \frac{u_{i_k}^\varepsilon(t) - u_{i_k-1}^\varepsilon(t)}{d_{i_k}^\varepsilon(t)} \right) \mathbf{1}_{]q_{i_k}^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_{i_k}^\varepsilon(t) + \varepsilon[} \\
 & + \sum_{k=1}^P \frac{1}{2\varepsilon} \left(\frac{u_{i_k+N_k+1}^\varepsilon - u_{i_k+N_k}^\varepsilon}{d_{i_k+N_k+1}^\varepsilon} - \beta_{i_k+N_k}^\varepsilon \right) \mathbf{1}_{]q_{i_k+N_k}^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_{i_k+N_k}^\varepsilon(t) + \varepsilon[}.
 \end{aligned}$$

On utilise alors le système différentiel (6.11) et (6.12), ainsi que la définition (6.33) des β_i et on obtient le résultat souhaité :

$$\partial_x (w^\varepsilon)(t, \cdot) = - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} f_i^\varepsilon(t) \mathbf{1}_{]q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon[} = f^\varepsilon(t, \cdot). \quad \square$$

• **Démonstration du lemme 6.17** : $\partial_t \rho^\varepsilon + \partial_x (\rho^\varepsilon u^\varepsilon) = 0$

Soit $\Phi \in \mathcal{D}([0, T[\times]a, b])$. Regardons d'abord le terme avec le dérivée en t . Par construction de ρ^ε (voir (6.30)), on a

$$\int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T \int_a^b \rho_i^\varepsilon(t) \partial_t \phi(t, x) \mathbf{1}_{]q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]}(x) dx dt.$$

En utilisant la propriété F.1 de l'annexe, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt = & - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T \int_a^b (\rho_i^\varepsilon)'(t) \phi(t, x) \mathbf{1}_{]q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]}(x) dx dt \\
 & - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_a^b \rho_i^\varepsilon(0) \phi(0, x) \mathbf{1}_{]q_{i-1}^\varepsilon(0), q_i^\varepsilon(0)]}(x) dx \\
 & - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T (\rho_i^\varepsilon(t) u_i^\varepsilon(t) \phi(t, q_i^\varepsilon(t)) - \rho_i^\varepsilon(t) u_{i-1}^\varepsilon(t) \phi(t, q_{i-1}^\varepsilon(t))) dt.
 \end{aligned}$$

On effectue un changement d'indice dans la dernière somme (les termes de bord sont nuls car $u_0^\varepsilon = u_{N^\varepsilon}^\varepsilon = 0$) et on écrit que $(\rho_i^\varepsilon)' = -2\varepsilon(u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon)/(q_i^\varepsilon - q_{i-1}^\varepsilon)^2$ pour

obtenir

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt = \\
& \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T \int_a^b \frac{2\varepsilon(u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t))}{(q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t))^2} \phi(t, x) \mathbf{1}_{[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]}(x) dx dt \\
& - \int_a^b \rho^\varepsilon(0) \phi(0, x) dx + \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T (\rho_{i+1}^\varepsilon(t) - \rho_i^\varepsilon(t)) u_i^\varepsilon(t) \phi(t, q_i^\varepsilon(t)) dt.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

On regarde maintenant le terme avec la dérivée en x ,

$$\int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T \left(\int_{q_{i-1}^\varepsilon(t)}^{q_i^\varepsilon(t)} \rho^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx \right) dt.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt \\
& = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T \left([\rho^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon(t, x) \phi(t, x)]_{q_{i-1}^\varepsilon(t)}^{q_i^\varepsilon(t)} - \int_{q_{i-1}^\varepsilon(t)}^{q_i^\varepsilon(t)} \partial_x (\rho^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon(t, x)) \phi(t, x) dx \right) dt \\
& = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T [u_i^\varepsilon(t) \rho_i^\varepsilon(t) \phi(t, q_i^\varepsilon(t)) - u_{i-1}^\varepsilon(t) \rho_{i-1}^\varepsilon(t) \phi(t, q_{i-1}^\varepsilon(t))] dt \\
& \quad - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T \int_{q_{i-1}^\varepsilon(t)}^{q_i^\varepsilon(t)} \rho_i^\varepsilon(t) \frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \phi(t, x) dx dt.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt \\
& = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T (\rho_i^\varepsilon(t) - \rho_{i+1}^\varepsilon(t)) u_i^\varepsilon(t) \phi(t, q_i^\varepsilon(t)) dt \\
& \quad - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \int_0^T \int_a^b \frac{2\varepsilon(u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t))}{(q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t))^2} \phi(t, x) \mathbf{1}_{[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]}(x) dx dt.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

En sommant (6.40) et (6.41) on obtient finalement l'égalité souhaitée,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt + \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) u^\varepsilon(t, x) \partial_x \phi(t, x) dx dt \\
& = - \int_a^b \rho^\varepsilon(0) \phi(0, x) dx. \quad \square
\end{aligned}$$

- **Démonstration du lemme 6.19** : $\rho^\varepsilon \xrightarrow{\star} \rho$ dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$ et $\rho^\varepsilon(0, \cdot) \xrightarrow{\star} \rho_0$ dans $L^\infty(]a, b[)$

Pour démontrer ce lemme, nous allons utiliser le lemme 6.13 ($\chi^\varepsilon \xrightarrow{\star} \rho$ dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$) et le fait que ρ^ε est "proche" de χ^ε en un certain sens. On fait la démonstration du premier point du lemme (sur $]0, T[\times]a, b[)$, le second point se traitant exactement de la même façon en utilisant l'hypothèse (6.26). Rappelons que χ^ε est défini en (6.19) et ρ^ε en (6.30) par

$$\chi(t, \cdot) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} \mathbf{1}_{]q_i(t)-\varepsilon, q_i(t)+\varepsilon[} + \mathbf{1}_{]a, a+\varepsilon[} + \mathbf{1}_{]b-\varepsilon, b[},$$

et

$$\rho_i^\varepsilon(t) = 1 - \frac{d_i^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \text{ sur } [q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)] \text{ pour } 1 \leq i \leq N^\varepsilon.$$

Nous allons procéder en trois étapes :

Montrons d'abord que

$$\forall \alpha, \beta, \quad a \leq \alpha \leq \beta < b, \quad \forall t, \quad \int_\alpha^\beta \chi^\varepsilon(t, x) dx - \int_\alpha^\beta \rho^\varepsilon(t, x) dx \leq 6\varepsilon$$

Soient α et β fixés, on note $q_{i_0}^\varepsilon(t), q_{i_0+1}^\varepsilon(t), \dots, q_{j_0}^\varepsilon(t)$, les particules dont les centres sont dans $[\alpha, \beta]$ au temps t . Comme pour tout i entre 0 et $N^\varepsilon - 1$ on a

$$\int_{q_i^\varepsilon(t)}^{q_{i+1}^\varepsilon(t)} (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx = 2\varepsilon - (q_{i+1}^\varepsilon(t) - q_i^\varepsilon(t) - d_{i+1}^\varepsilon(t)) = 0,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \chi^\varepsilon(t, x) dx - \int_\alpha^\beta \rho^\varepsilon(t, x) dx &= \int_\alpha^{q_{i_0}^\varepsilon(t)} (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx \\ &\quad - \int_{q_{j_0}^\varepsilon(t)}^\beta (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx. \end{aligned}$$

Il suffit alors de calculer explicitement ces deux dernières intégrales selon la position de α par rapport à $q_{i_0}^\varepsilon(t) - \varepsilon$ et de β par rapport à $q_{j_0}^\varepsilon(t) + \varepsilon$ pour montrer que

$$\int_\alpha^\beta \chi^\varepsilon(t, x) dx - \int_\alpha^\beta \rho^\varepsilon(t, x) dx \leq 6\varepsilon.$$

Montrons maintenant que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^0(]0, T[\times]a, b[)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^T \int_a^b \chi^\varepsilon(t, x) \varphi(t, x) dx dt - \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right) = 0.$$

Soient $\varphi \in \mathcal{C}_0^0([0, T[\times]a, b[)$ et $\eta > 0$ fixés, notons

$$e(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \\ t, s \in [0, T], |t - s| < \delta}} |\varphi(t, x) - \varphi(s, y)|$$

et pour n fixé, définissons x_k , $k = 0, \dots, n-1$ par

$$x_k = a + (b - a) \left(\frac{1}{2n} + \frac{k}{n} \right).$$

On a, pour tout $t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t, x) (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+(b-a)\frac{k}{n}}^{a+(b-a)\frac{k+1}{n}} \varphi(t, x) (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+(b-a)\frac{k}{n}}^{a+(b-a)\frac{k+1}{n}} \varphi(t, x_k) (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+(b-a)\frac{k}{n}}^{a+(b-a)\frac{k+1}{n}} (\varphi(t, x) - \varphi(t, x_k)) (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx \end{aligned}$$

On obtient donc la majoration suivante,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T \int_a^b \varphi(t, x) (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx dt \right| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T \left| \int_{a+(b-a)\frac{k}{n}}^{a+(b-a)\frac{k+1}{n}} (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx \right| + \sum_{k=0}^{n-1} T \frac{2}{n} e \left(\frac{b-a}{2n} \right). \end{aligned}$$

Comme φ est absolument continue,

$$\exists n > 0 \text{ tel que } e \left(\frac{b-a}{2n} \right) < \eta.$$

Ce n étant fixé, le premier point nous donne,

$$\forall k, \forall \varepsilon, \int_{a+(b-a)\frac{k}{n}}^{a+(b-a)\frac{k+1}{n}} (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx < 6\varepsilon$$

Ainsi,

$$\forall \varepsilon < \eta, \left| \int_0^T \int_a^b \varphi(t, x) (\chi^\varepsilon(t, x) - \rho^\varepsilon(t, x)) dx dt \right| \leq (6Tn\|\varphi\|_\infty + 2T)\varepsilon,$$

ce qui finit de démontrer ce second point.

Montrons enfin que, pour tout $\varphi \in L^1([0, T[\times]a, b[)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) \varphi(t, x) dx dt - \int_0^T \int_a^b \rho(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right) = 0.$$

Comme $\mathcal{C}_0^0(]0, T[\times]a, b[)$ est dense dans $L^1(]0, T[\times]a, b[)$ et que la suite $(\rho^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$, il suffit de le montrer pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^0(]0, T[\times]a, b[)$.

Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_0^0(]0, T[\times]a, b[)$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) \varphi(t, x) dx dt - \int_0^T \int_a^b \rho(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \int_a^b \rho^\varepsilon(t, x) \varphi(t, x) dx dt - \int_0^T \int_a^b \chi^\varepsilon(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right| \\ & \quad + \left| \int_0^T \int_a^b \chi^\varepsilon(t, x) \varphi(t, x) dx dt - \int_0^T \int_a^b \rho(t, x) \varphi(t, x) dx dt \right|. \end{aligned}$$

Le premier terme tendant vers zéro d'après le point précédent et le second également d'après la convergence de χ^ε , on a fini la démonstration de ce lemme. \square

- **Démonstration du lemme 6.20** : $f^\varepsilon \xrightarrow{*} \rho f$ dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$

Rappelons que f^ε est défini dans le lemme 6.16 par

$$f^\varepsilon(t, \cdot) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} f_i^\varepsilon(t) \mathbf{1}_{]q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon[}.$$

Nous allons procéder en deux étapes.

Montrons d'abord la convergence dans $\mathcal{D}'(]0, T[\times]a, b[)$: soit $\Psi \in \mathcal{D}(]0, T[\times]a, b[)$, montrons que Δ_ε tend vers zéro quand ε tend vers zéro où

$$\Delta^\varepsilon = \int_0^T \int_a^b f^\varepsilon \Psi - \int_0^T \int_a^b \rho f \Psi.$$

Pour cela, on écrit

$$\Delta^\varepsilon = \underbrace{\int_0^T \int_a^b (f^\varepsilon - \chi^\varepsilon f) \Psi}_{\Delta_1^\varepsilon} + \underbrace{\int_0^T \int_a^b (\chi^\varepsilon - \rho) f \Psi}_{\Delta_2^\varepsilon}.$$

Comme $f \Psi \in L^1(]0, T[\times]a, b[)$, le lemme 6.13 montre la convergence de Δ_2^ε vers zéro. Il reste donc à montrer celle de Δ_1^ε vers zéro. Or,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f^\varepsilon - \chi^\varepsilon f) \Psi &= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} [f_i^\varepsilon(t) - f(x, t)] \Psi(t, x) dx \\ &\quad - \int_a^{a+\varepsilon} f(t, x) \Psi(t, x) dx - \int_{b-\varepsilon}^b f(t, x) \Psi(t, x) dx. \end{aligned}$$

Comme, Ψ est à support compact sur $]0, T[\times]a, b[$, les deux derniers termes de l'égalité précédente sont nuls pour ε assez petit,

$$\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \int_a^b (f^\varepsilon - \chi^\varepsilon f) \Psi = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} [f_i^\varepsilon(t) - f(x, t)] \Psi(t, x) dx.$$

Or,

$$\begin{aligned} |f_i^\varepsilon(t) - f(t, x)| &= \left| \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} f(y, t) dy \right) - f(x, t) \right| \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \left| \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} (f(y, t) - f(x, t)) dy \right|. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in [q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon]$, l'hypothèse (6.23) donne $C > 0$ indépendant de t et de ε tel qu'on ait la majoration suivante,

$$\begin{aligned} |f_i^\varepsilon(t) - f(t, x)| &\leq \frac{C}{2\varepsilon} \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} |y - x| dy \\ &\leq \frac{C}{2\varepsilon} \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} 2\varepsilon \leq 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \left| \int_a^b (f^\varepsilon - \chi^\varepsilon f) \Psi \right| &\leq \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} 2C\varepsilon \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} |\Psi(t, x)| dx \\ &\leq 2C\varepsilon \|\Psi(t, \cdot)\|_{L^1(]a, b])}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \quad \Delta_1^\varepsilon \leq 2C\varepsilon \int_0^T \|\Psi(t, \cdot)\|_{L^1(]a, b])} = 2C\varepsilon \|\Psi\|_{L^1(]0, T[\times]a, b])},$$

ce qui termine la démonstration de la convergence dans $\mathcal{D}'(]0, T[\times]a, b])$.

Montrons maintenant la convergence faible étoile dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b])$. Soit $\varphi \in L^1(]0, T[\times]a, b])$, par densité de $\mathcal{D}(]0, T[\times]a, b])$ dans $L^1(]0, T[\times]a, b])$, il existe une suite de fonctions φ_n telle que

$$\varphi_n \in \mathcal{D}(]0, T[\times]a, b]), \quad \|\varphi_n - \varphi\|_{L^1(]0, T[\times]a, b])} \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_a^b (f^\varepsilon \varphi - \rho f \varphi) dx dt &= \int_0^T \int_a^b f^\varepsilon (\varphi - \varphi_n) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_a^b (f^\varepsilon - \rho f) \varphi_n dx dt + \int_0^T \int_a^b \rho f (\varphi - \varphi_n) dx dt. \end{aligned}$$

Le second terme de la somme tend vers zéro d'après ce qui précède. Le dernier terme tend vers zéro car ρf est bornée sur $]0, T[\times]a, b[$ et φ_n tend vers φ dans $L^1(]0, T[\times]a, b])$. Pour la même raison, si on montre que f^ε est bornée indépendamment de ε sur $]0, T[\times]a, b[$, on aura la convergence vers zéro du premier terme. Or,

$$f_i^\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} f(t, x) dx \leq \|f\|_{L^\infty(]0, T[\times]a, b])}.$$

Ainsi,

$$\|f^\varepsilon\|_{L^\infty(]0,T[\times]a,b[)} \leq \|f\|_{L^\infty(]0,T[\times]a,b[)}, \quad (6.42)$$

ce qui achève la démonstration du lemme. \square

- **Démonstration du lemme 6.21** : $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ bornée dans $L^\infty(]0,T[, H_0^1(]a,b[))$

Travaillons d'abord à t fixé et estimons $\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot)$ dans $L^2(]a,b[)$.

Commençons par définir $\tilde{w}^\varepsilon(t, \cdot)$, fonction constante par morceaux, valant $w_i^\varepsilon(t)$ sur $[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]$. En particulier,

$$\tilde{w}^\varepsilon(t, \cdot) = \frac{1}{1 - \rho^\varepsilon(t, \cdot)} \partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) \text{ si } \rho^\varepsilon(t, \cdot) < 1.$$

On peut estimer $\partial_x u^\varepsilon$ dans $L^2(]a,b[)$ en se rappelant que $\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot)$ est nulle quand $\rho^\varepsilon(t, \cdot)$ vaut 1 et en écrivant

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H_0^1(]a,b[)}^2 &= \int_a^b |\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot)|^2 = \int_{[a,b] \cap \{\rho^\varepsilon(t, \cdot) < 1\}} |\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot)|^2 \\ &\leq \int_{[a,b] \cap \{\rho^\varepsilon(t, \cdot) < 1\}} \frac{1}{1 - \rho^\varepsilon(t, \cdot)} |\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot)|^2, \end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant \tilde{w}^ε ,

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H_0^1(]a,b[)}^2 \leq \int_{[a,b] \cap \{\rho^\varepsilon(t, \cdot) < 1\}} \tilde{w}^\varepsilon(t, \cdot) \partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) = \int_{[a,b]} \tilde{w}^\varepsilon(t, \cdot) \partial_x u^\varepsilon(t, \cdot).$$

Enfin, une intégration par parties donne

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H_0^1(]a,b[)}^2 \leq - \int_{[a,b]} \partial_x \tilde{w}^\varepsilon(t, \cdot) u^\varepsilon(t, \cdot). \quad (6.43)$$

Calculons alors $\partial_x \tilde{w}^\varepsilon$ au sens des distributions. Pour $0 \leq i \leq N^\varepsilon - 1$, $u^\varepsilon(t, \cdot)$ est affine sur $[q_i^\varepsilon(t), q_{i+1}^\varepsilon(t)]$. Par conséquent on a,

$$\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) = \frac{u_{i+1}^\varepsilon(t) - u_i^\varepsilon(t)}{q_{i+1}^\varepsilon(t) - q_i^\varepsilon(t)} \text{ sur } [q_i^\varepsilon(t), q_{i+1}^\varepsilon(t)].$$

Si $d_{i+1}(t) > 0$, on obtient,

$$w_{i+1}^\varepsilon(t) = \frac{1}{1 - \rho^\varepsilon(t, \cdot)} \partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) = \frac{u_{i+1}^\varepsilon(t) - u_i^\varepsilon(t)}{d_{i+1}^\varepsilon(t)}.$$

D'où, au sens des distributions,

$$\begin{aligned}
 \partial_x \tilde{w}^\varepsilon(t, \cdot) &= \sum_{\substack{i \in 1..N^\varepsilon - 1 \\ d_i(t) > 0, d_{i+1}(t) > 0}} \left(\frac{u_{i+1}^\varepsilon(t) - u_i^\varepsilon(t)}{d_{i+1}^\varepsilon(t)} - \frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{d_i^\varepsilon(t)} \right) \delta_{q_i^\varepsilon(t)} \\
 &+ \sum_{k=1}^P \sum_{i=i_k+1}^{i_k+N_k-1} (\beta_i^\varepsilon(t) - \beta_{i-1}^\varepsilon(t)) \delta_{q_i^\varepsilon(t)} \\
 &+ \sum_{k=1}^P \left(\beta_{i_k+1}^\varepsilon(t) - \frac{u_{i_k}^\varepsilon(t) - u_{i_k-1}^\varepsilon(t)}{d_{i_k}^\varepsilon(t)} \right) \delta_{q_{i_k}^\varepsilon(t)} \\
 &+ \sum_{k=1}^P \left(\frac{u_{i_k+N_k+1}^\varepsilon(t) - u_{i_k+N_k}^\varepsilon(t)}{d_{i_k+N_k+1}^\varepsilon(t)} - \beta_{i_k+N_k}^\varepsilon(t) \right) \delta_{q_{i_k+N_k}^\varepsilon(t)}.
 \end{aligned}$$

On utilise alors l'équation (6.11), ainsi que la définition (6.33) des β_i^ε et on obtient

$$\partial_x \tilde{w}^\varepsilon(t, \cdot) = - \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} 2\varepsilon f_i^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t)) \delta_{q_i^\varepsilon(t)} \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[\times]a, b[). \quad (6.44)$$

La densité de $\mathcal{D}(]a, b[)$ dans $H_0^1(]a, b[)$ ainsi que l'injection continue en dimension 1 de $H_0^1(]a, b[)$ dans $\mathcal{C}_0^0(]a, b[)$ nous permettent d'étendre le résultat dans $H^{-1}(]a, b[)$. Par conséquent, en calculant le crochet de dualité entre (6.44) et $u^\varepsilon(t, \cdot)$, la majoration (6.43) de $\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H_0^1(]a, b[)}^2$ donne

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H_0^1(]a, b[)}^2 \leq \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} (2\varepsilon f_i^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t))) u^\varepsilon(t, q_i^\varepsilon(t)).$$

On a donc, en utilisant le fait que les particules ne se chevauchent pas,

$$\begin{aligned}
 \|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H_0^1(]a, b[)}^2 &\leq \|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(]a, b[)} \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} 2\varepsilon |f_i^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t))| \\
 &\leq \|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(]a, b[)} \|f(t, \cdot)\|_{L^1(]a, b[)}.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'injection continue de $H_0^1(]a, b[)$ dans $\mathcal{C}^0(]a, b[)$ on obtient,

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{H_0^1(]a, b[)} \leq C \|f(t, \cdot)\|_{L^1(]a, b[)} \leq C(b-a) \|f(t, \cdot)\|_{L^\infty(]a, b[)}$$

et

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(]0, T[, H_0^1(]a, b[))} \leq C(b-a) \|f\|_{L^\infty(]0, T[\times]a, b[)}. \quad \square$$

- **Démonstration du lemme 6.22** : $(w^\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\partial_x w^\varepsilon)_\varepsilon$ bornées dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$

Montrons d'abord que $(w^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$. Pour cela, il suffit de majorer les $w_i^\varepsilon(t)$ indépendamment de t et de ε .

Commençons par le cas où $d_i^\varepsilon(t)$ est strictement positif. Dans ce cas, par définition (voir 6.32),

$$w_i^\varepsilon(t) = \frac{1}{1 - \rho_i^\varepsilon(t)} \partial_x u^\varepsilon(t, \cdot)|_{[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]}.$$

Or, nous avons déjà vu que,

$$\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) = \frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \text{ sur } [q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)],$$

et, en utilisant l'expression de \mathbf{u} en fonction de \mathbf{q} donné par la propriété 6.8, un simple calcul donne,

$$\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) = (1 - \rho_i^\varepsilon(t)) p_i^\varepsilon(t) \text{ sur } [q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)],$$

où

$$p_i^\varepsilon(t) = 2\varepsilon \sum_{k=i}^{N^\varepsilon-1} \frac{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t) - D_k^\varepsilon(t)}{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t)} f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t)) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{i-1} \frac{D_k^\varepsilon(t)}{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t)} f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t)). \quad (6.45)$$

Par conséquent,

$$\forall i \text{ tel que } d_i^\varepsilon(t) > 0, \quad w_i^\varepsilon(t) = p_i^\varepsilon(t).$$

Or, comme $\frac{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t) - D_k^\varepsilon(t)}{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t)} \leq 1$ et $\frac{D_k^\varepsilon(t)}{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t)} \leq 1$, on a

$$|p_i^\varepsilon(t)| \leq \sum_{k=1}^{N^\varepsilon-1} |2\varepsilon f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t))| \leq \|f(t, \cdot)\|_{L^1(]a, b])},$$

et finalement,

$$\forall i \text{ tel que } d_i^\varepsilon(t) > 0, \quad w_i^\varepsilon(t) \leq \|f(t, \cdot)\|_{L^1(]a, b])}.$$

Il nous reste donc à majorer $w_i^\varepsilon(t)$ dans le cas où $d_i^\varepsilon(t) = 0$. Dans ce cas, la particule i appartient à un paquet. Si elle est dans le k ème paquet, pour $k \in [1, P]$ alors $i = i_k + j$ où $j \in [1, N_k]$ (voir les notations du système (6.11, 6.12)). Par définition, $w_i^\varepsilon(t) = \beta_i^\varepsilon(t) = \beta_{i_k+j}^\varepsilon(t)$ dans ce cas (voir (6.32)). Or, en utilisant le système définissant les β_i^ε (6.33), on a

$$\beta_{i_k+j}^\varepsilon(t) = p_{i_k-1}^\varepsilon(t) - 2\varepsilon \sum_{m=i_k}^{i_k+j-1} f_m^\varepsilon(t)$$

et donc

$$w_i^\varepsilon(t) \leq 2\|f(t, \cdot)\|_{L^1(]a, b])}.$$

Finalement, on obtient la majoration suivante

$$\|w^\varepsilon\|_{L^\infty([0,T[\times]a,b])} \leq 2\|f\|_{L^\infty([0,T[,L^1([a,b])])} \quad (6.46)$$

Il nous reste à montrer que $\partial_x w^\varepsilon$ est bornée indépendamment de ε . Pour cela, d'après le lemme 6.16, il suffit de majorer f^ε , ce qui a été fait dans la démonstration du lemme 6.20 en (6.42) et on a donc $\partial_x w^\varepsilon$ bornée dans $L^\infty([0,T[\times]a,b])$. \square

• **Démonstration du lemme 6.23** : $(\partial_t w^\varepsilon)_\varepsilon$ bornée $L^\infty([0,T[\times]a,b])$

Par définition (voir (6.31)), on a

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(t, x) &= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} w_i^\varepsilon(t, x) \mathbf{1}_{[q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon]}(x) + \sum_{i=2}^{N^\varepsilon-1} w_i^\varepsilon(t) \mathbf{1}_{[q_{i-1}^\varepsilon(t)+\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon]}(x) \\ &\quad + w_1^\varepsilon(t) \mathbf{1}_{[a, q_1^\varepsilon(t)-\varepsilon]}(x) + w_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t) \mathbf{1}_{[q_{N^\varepsilon-1}^\varepsilon(t)+\varepsilon, b]}(x) \end{aligned}$$

où $w_i^\varepsilon(t, x) = w_i^\varepsilon(t) + \frac{w_{i+1}^\varepsilon(t) - w_i^\varepsilon(t)}{2\varepsilon} [x - (q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon)]$. w^ε étant continue, la dérivée en temps ne fait pas apparaître de diracs et on a

$$\begin{aligned} \partial_t w^\varepsilon(t, x) &= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} \partial_t w_i^\varepsilon(t, x) \mathbf{1}_{[q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon]}(x) + \sum_{i=2}^{N^\varepsilon-1} (w_i^\varepsilon)'(t) \mathbf{1}_{[q_{i-1}^\varepsilon(t)+\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon]}(x) \\ &\quad + (w_1^\varepsilon)'(t) \mathbf{1}_{[a, q_1^\varepsilon(t)-\varepsilon]}(x) + (w_{N^\varepsilon}^\varepsilon)'(t) \mathbf{1}_{[q_{N^\varepsilon-1}^\varepsilon(t)+\varepsilon, b]}(x), \end{aligned}$$

où

$$\partial_t w_i^\varepsilon(t, x) = \underbrace{(w_i^\varepsilon)'(t) + \frac{(w_{i+1}^\varepsilon)'(t) - (w_i^\varepsilon)'(t)}{2\varepsilon} [x - (q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon)]}_{w_{i,aff}^\varepsilon(t, x)} - \underbrace{\frac{w_{i+1}^\varepsilon(t) - w_i^\varepsilon(t)}{2\varepsilon} w_i^\varepsilon(t)}_{w_{i,cste}^\varepsilon(t)}.$$

En séparant les termes affines des termes constants dans $\partial_t w_i^\varepsilon$, on peut écrire $\partial_t w^\varepsilon$ comme somme de deux fonctions, la première étant affine par morceaux et la seconde constante par morceaux à t fixé

$$\partial_t w^\varepsilon = w_{der,aff}^\varepsilon - w_{der,cste}^\varepsilon,$$

avec

$$\begin{aligned} w_{der,aff}^\varepsilon(t, x) &= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} w_{i,aff}^\varepsilon(t, x) \mathbf{1}_{[q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon]}(x) + \sum_{i=2}^{N^\varepsilon-1} (w_i^\varepsilon)'(t) \mathbf{1}_{[q_{i-1}^\varepsilon(t)+\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon]}(x) \\ &\quad + (w_1^\varepsilon)'(t) \mathbf{1}_{[a, q_1^\varepsilon(t)-\varepsilon]}(x) + (w_{N^\varepsilon}^\varepsilon)'(t) \mathbf{1}_{[q_{N^\varepsilon-1}^\varepsilon(t)+\varepsilon, b]}(x) \end{aligned}$$

et

$$w_{der,cste}^\varepsilon(t, x) = \sum_{i=1}^{N^\varepsilon-1} w_{i,cste}^\varepsilon(t) \mathbf{1}_{[q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon, q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon]}(x).$$

Pour borner $\partial_t w^\varepsilon$, il suffit donc de borner ces deux fonctions.

Commençons par borner $w_{der,cste}^\varepsilon$. En utilisant le lemme 6.21 et l'injection continue de $H_0^1([a, b])$ dans $\mathcal{C}_0([a, b])$, on obtient que u^ε est bornée dans $L^\infty([0, T[\times]a, b])$ et donc que $u_i^\varepsilon(t)$ est borné indépendamment de t , ε et i . Puis, on utilise la définition des w_i^ε (6.32), ainsi que les systèmes (6.11), (6.12) et (6.33), pour obtenir

$$\left| \frac{w_{i+1}^\varepsilon(t) - w_i^\varepsilon(t)}{2\varepsilon} \right| = |f_i^\varepsilon| \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} |f(t, x)| dx \leq \|f\|_{L^\infty([0, T[\times]a, b])}.$$

On a finalement, $w_{i,cste}^\varepsilon(t)$ bornée indépendamment de t , ε et i et donc $w_{der,cte}^\varepsilon$ bornée indépendamment de ε dans $L^\infty([0, T[\times]a, b])$.

Etudions maintenant $w_{der,aff}^\varepsilon$. Il s'agit, à t fixé, de la fonction affine par morceaux (comme $w^\varepsilon(t, \cdot)$), valant $(w_i^\varepsilon)'(t)$ en $q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon$ et $(w_{i+1}^\varepsilon)'(t)$ en $q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon$. Pour montrer que cette fonction est bornée indépendamment de ε dans $L^\infty([0, T[\times]a, b])$, il suffit donc de montrer que $(w_i^\varepsilon)'(t)$ est bornée indépendamment de t , ε et i .

En dérivant la formule explicite (6.45) obtenue pour $w_i^\varepsilon(t)$, on obtient, en utilisant que D_N^ε est constante et que $(D_k^\varepsilon)' = u_k^\varepsilon$:

$$\begin{aligned} (w_i^\varepsilon)'(t) &= 2\varepsilon \sum_{k=i}^{N^\varepsilon-1} \frac{-u_k^\varepsilon(t)}{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t)} f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t)) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k^\varepsilon(t)}{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t)} f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t)) \\ &\quad + 2\varepsilon \sum_{k=i}^{N^\varepsilon-1} \frac{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t) - D_k^\varepsilon(t)}{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t)} (f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t)))' - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{i-1} \frac{D_k^\varepsilon(t)}{D_{N^\varepsilon}^\varepsilon(t)} (f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t)))'. \end{aligned}$$

On utilise comme précédemment que $u_i^\varepsilon(t)$ est borné indépendamment de t , ε et i (borne notée M), que $D_k^\varepsilon/D_{N^\varepsilon}^\varepsilon \leq 1$ et $(D_{N^\varepsilon}^\varepsilon - D_k^\varepsilon)/D_{N^\varepsilon}^\varepsilon \leq 1$ pour avoir la majoration suivante,

$$\begin{aligned} |(w_i^\varepsilon)'(t)| &\leq 2\varepsilon M \sum_{k=1}^{N^\varepsilon-1} |f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t))| + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{N^\varepsilon-1} |(f_k^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t)))'| \\ &\leq M \|f(t, \cdot)\|_{L^1([a, b])} + \sum_{k=1}^{N^\varepsilon-1} \left| \left(\int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} f(t, x) dx \right)' \right| \\ &\leq M \|f\|_{L^\infty([0, T[, L^1([a, b])])} + \sum_{k=1}^{N^\varepsilon-1} |u_i^\varepsilon(t)| |f(t, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon) - f(t, q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon)| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N^\varepsilon-1} \int_{q_i^\varepsilon(t)-\varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t)+\varepsilon} |\partial_t f(t, x)| dx \end{aligned}$$

On utilise les hypothèses (6.23) et (6.24) sur f et sa dérivée en temps ainsi que la borne sur les $u_i^\varepsilon(t)$ pour obtenir

$$|(w_i^\varepsilon)'(t)| \leq M \|f\|_{L^\infty([0, T[, L^1([a, b])])} + MC \sum_{k=1}^{N^\varepsilon-1} 2\varepsilon + \|\partial_t f(t, \cdot)\|_{L^1([a, b])}$$

où C est la constante de Lischitz de f . Finalement on a,

$$|(w_i^\varepsilon)'(t)| \leq M\|f\|_{L^\infty(]0,T[,L^1(]a,b[))} + MC(b-a) + \|\partial_t f\|_{L^\infty(]0,T[,L^1(]a,b[))}. \quad (6.47)$$

On a donc fini de démontrer que $w_{der,aff}^\varepsilon$ est bornée indépendamment de ε dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$.

Ainsi, $(\partial_t w^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$, ce qui termine la démonstration. \square

- **Démonstration du lemme 6.24** : $\partial_x u^\varepsilon \xrightarrow{*} (1 - \rho)w$ dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$

On a :

$$\begin{aligned} \partial_x u^\varepsilon - (1 - \rho)w &= \{\partial_x u^\varepsilon - (1 - \rho^\varepsilon)w^\varepsilon\} + \{((1 - \rho^\varepsilon) - (1 - \rho))w\} \\ &\quad + \{(1 - \rho^\varepsilon)(w^\varepsilon - w)\}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Montrons que chacun de ces trois termes converge faible étoile vers zéro dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$, quand ε tend vers zéro.

Commençons par montrer que le premier terme converge fortement vers zéro dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$ (et donc aussi faible-étoile) :

A t fixé, les définitions de w^ε (6.31), ρ^ε (6.30) et u^ε (6.20) montrent que $\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) - (1 - \rho^\varepsilon(t, \cdot))w^\varepsilon(t, \cdot) = 0$ sur $[q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon, q_{i+1}^\varepsilon(t) - \varepsilon]$, ainsi que sur $[a, a + \varepsilon]$ et $[b - \varepsilon, b]$. Par conséquent, il suffit d'étudier $\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) - (1 - \rho^\varepsilon(t, \cdot))w^\varepsilon(t, \cdot)$ sur les $[q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon]$. La fonction est affine sur $[q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon, q_i^\varepsilon(t)]$ et sur $[q_i^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon]$. Elle est nulle en $q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon$ et en $q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon$. Sa limite à gauche en $q_i^\varepsilon(t)$ vaut $(1 - \rho_i^\varepsilon(t))(w_i^\varepsilon(t) - w_{i+1}^\varepsilon(t))/2$, et sa limite à droite vaut $(1 - \rho_{i+1}^\varepsilon(t))(w_{i+1}^\varepsilon(t) - w_i^\varepsilon(t))/2$. Ainsi, on obtient, à t fixé,

$$\|\partial_x u^\varepsilon(t, \cdot) - (1 - \rho^\varepsilon(t, \cdot))w^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(]a, b[)} \leq \frac{1}{2} \sup_i |w_{i+1}^\varepsilon(t) - w_i^\varepsilon(t)|.$$

Or,

$$|w_{i+1}^\varepsilon(t) - w_i^\varepsilon(t)| = |2\varepsilon f_i^\varepsilon(t, \mathbf{q}^\varepsilon(t))| = \left| \int_{q_i^\varepsilon(t) - \varepsilon}^{q_i^\varepsilon(t) + \varepsilon} f(t, x) dx \right| \leq 2\varepsilon \|f\|_{L^\infty(]0, T[\times]a, b[)}$$

Ainsi,

$$\|\partial_x u^\varepsilon - (1 - \rho^\varepsilon)w^\varepsilon\|_{L^\infty(]0, T[\times]a, b[)} \leq \varepsilon \|f\|_{L^\infty(]0, T[\times]a, b[)},$$

et on obtient la convergence vers zéro souhaitée.

Montrons maintenant la convergence faible-étoile vers zéro du second terme de (6.48) :

Soit $g \in L^1(]0, T[\times]a, b[)$, comme $w \in L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$, on a $wg \in L^1(]0, T[\times]a, b[)$ et, en utilisant que $1 - \rho^\varepsilon \xrightarrow{*} 1 - \rho$ dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$ (cf lemme 6.19), on a immédiatement

$$\int_{]0, T[\times]a, b[} ((1 - \rho^\varepsilon(t, x)) - (1 - \rho(t, x))) w(t, x) g(t, x) dx dt \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Finalement, comme

$$\|(1 - \rho^\varepsilon)(w^\varepsilon - w)\|_{L^\infty([0, T[\times]a, b])} \leq \|w^\varepsilon - w\|_{L^\infty([0, T[\times]a, b])},$$

la convergence uniforme de w^ε vers w (voir (6.38)) permet de montrer la convergence forte vers zéro du dernier terme de (6.48) dans $L^\infty([0, T[\times]a, b])$.

Ceci termine la démonstration du lemme. \square

- **Démonstration du lemme 6.25** : $(\partial_t u^\varepsilon)_\varepsilon$ bornée dans $L^\infty([0, T[\times]a, b])$

Comme dans le cas de la démonstration du lemme 6.23, on calcule $\partial_t u^\varepsilon$:

$$\partial_t u^\varepsilon = u_{der,aff,1}^\varepsilon - u_{der,aff,2}^\varepsilon - u_{der,cste}^\varepsilon,$$

où

$$\begin{aligned} u_{der,aff,1}^\varepsilon &= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \left\{ (u_{i-1}^\varepsilon)'(t) + \frac{(u_i^\varepsilon)'(t) - (u_{i-1}^\varepsilon)'(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} [x - q_{i-1}^\varepsilon(t)] \right\} \mathbf{1}_{[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]} \\ u_{der,aff,2}^\varepsilon &= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \left\{ \left(\frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \right)^2 [x - q_{i-1}^\varepsilon(t)] \right\} \mathbf{1}_{[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]} \\ u_{der,cste}^\varepsilon &= \sum_{i=1}^{N^\varepsilon} \left\{ \frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \right\} u_{i-1}^\varepsilon(t) \mathbf{1}_{[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]} \end{aligned}$$

Or, comme

$$\left| \frac{u_{i+1}^\varepsilon(t) - u_i^\varepsilon(t)}{q_{i+1}^\varepsilon(t) - q_i^\varepsilon(t)} \right| = (1 - \rho_i^\varepsilon(t)) |w_i^\varepsilon(t)| \leq |w_i^\varepsilon(t)| \leq \|w^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T[\times]a, b])},$$

la majoration (6.46) donne

$$\left| \frac{u_{i+1}^\varepsilon(t) - u_i^\varepsilon(t)}{q_{i+1}^\varepsilon(t) - q_i^\varepsilon(t)} \right| \leq 2 \|f\|_{L^\infty([0, T[\times]a, b])} \quad (6.49)$$

et $u_{der,aff,2}^\varepsilon$ et $u_{der,cste}^\varepsilon$ sont bornées indépendamment de ε dans $L^\infty([0, T[\times]a, b])$.

Reste à montrer que $u_{der,aff,1}^\varepsilon$ l'est aussi. $u_{der,aff,1}^\varepsilon(t, \cdot)$ est la fonction affine par morceaux (comme $u^\varepsilon(t, \cdot)$), valant $(u_i^\varepsilon)'(t)$ en $q_i^\varepsilon(t)$. Elle est nulle en a , par conséquent,

$$u_{der,aff,1}^\varepsilon(t, x) = \int_a^x \partial_x(u_{der,aff,1}^\varepsilon)(t, y) dy.$$

Il suffit donc de montrer que $\partial_x(u_{der,aff,1}^\varepsilon)$ est bornée sur $[0, T] \times [a, b]$. Or, cette fonction est constante par morceaux valant $((u_i^\varepsilon)'(t) - (u_{i-1}^\varepsilon)'(t)) / (q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t))$ sur $[q_{i-1}^\varepsilon(t), q_i^\varepsilon(t)]$. On écrit alors que

$$\frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} = (1 - \rho_i^\varepsilon(t)) w_i^\varepsilon(t)$$

ce qui, en dérivant en temps donne

$$\frac{(u_i^\varepsilon)'(t) - (u_{i-1}^\varepsilon)'(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} = (1 - \rho_i^\varepsilon)'(t)w_i^\varepsilon(t) + (1 - \rho_i^\varepsilon(t))(w_i^\varepsilon)'(t) + \left(\frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \right)^2.$$

En utilisant que $1 - \rho_i^\varepsilon(t) = \frac{d_i^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)}$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{(u_i^\varepsilon)'(t) - (u_{i-1}^\varepsilon)'(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} &= \frac{2\varepsilon}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)}(1 - \rho_i^\varepsilon(t))(w_i^\varepsilon(t))^2 \\ &\quad + (1 - \rho_i^\varepsilon(t))(w_i^\varepsilon)'(t) + \left(\frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \right)^2. \end{aligned}$$

Or, $q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t) \geq 2\varepsilon$ et $1 - \rho_i^\varepsilon(t) \leq 1$, donc

$$\left| \frac{(u_i^\varepsilon)'(t) - (u_{i-1}^\varepsilon)'(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \right| \leq |w_i^\varepsilon(t)|^2 + |(w_i^\varepsilon)'(t)| + \left(\frac{u_i^\varepsilon(t) - u_{i-1}^\varepsilon(t)}{q_i^\varepsilon(t) - q_{i-1}^\varepsilon(t)} \right)^2.$$

Enfin, les inégalités (6.46), (6.47) et (6.49) nous permettent de majorer chacun des termes ci-dessus indépendamment de t , ε et i . Ainsi, on obtient $\partial_x(u_{der,aff,1}^\varepsilon)$ bornée indépendamment de ε dans $L^\infty(]0, T[\times]a, b[)$ et donc, $u_{der,aff,1}^\varepsilon$ également, ce qui termine la démonstration du lemme. \square

Annexes

Annexe A

Minimisation sous contrainte affine

Cette annexe rassemble un certain nombre de considérations sur les problèmes d'optimisation convexe qui sont rencontrés au long de cette thèse. Le point clé est ici le comportement de la suite des multiplicateurs de Lagrange pour l'algorithme d'Uzawa, qui est peu documenté dans la littérature. Le résultat de convergence obtenu section A.3 est celui sur lequel se base l'algorithme de contact visqueux multi-particules décrit dans le chapitre 5.

Les sections A.1 et A.2 précisent le cadre abstrait dans lequel nous nous sommes inscrits et rappellent les résultats classiques

- concernant la minimisation sous contrainte d'égalité affine en dimension infinie pour la section A.1 (voir par exemple [63, Problème 8]). Ce type de problème apparaît :
 - dans la section 1.4 sur la méthode de pénalisation,
 - dans le chapitre 3, lors de l'étude du problème de couplage entre la gestion des contacts et la résolution fluide/particules.
- concernant la minimisation sous un nombre fini de contraintes d'inégalités affines et réelles pour la section A.2 (voir par exemple [3, Chap.10]). Ce type de problème apparaît :
 - dans le chapitre 2, pour la gestion de contraintes supplémentaires lors de l'utilisation de la méthode de pénalisation.
 - dans les problèmes de projection associés aux contacts, dans la partie II.

Soient V et M deux espaces de Hilbert. On note respectivement (\cdot, \cdot) et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ leurs produits scalaires. Soient $B \in \mathcal{L}(V, M)$, $A \in \mathcal{L}(V)$ autoadjoint et $f \in V$. On considère la fonctionnelle suivante,

$$J: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v)$$

et on suppose J coercive i.e. $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, (Av, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$.

A.1 Contrainte d'égalité

Soit K l'ensemble des contraintes

$$K = \{v \in V, Bv = z\}$$

où $z \in \text{Im}(B)$, $z = Bu_0$. K est alors un espace affine fermé :

$$K = u_0 + K_0,$$

où $u_0 \in V$ et $K_0 = \text{Ker}B$. On souhaite résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} u \in K \\ J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \end{cases}$$

Une extension immédiate du lemme de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité d'une solution de (P) :

Propriété A.1 Le problème (P) admet une unique solution $u \in K$, caractérisée par

$$\forall v \in K_0, (Au, v) = (f, v).$$

La fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : V \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, \mu) &\longmapsto \mathcal{L}(v, \mu) = J(v) + \langle \mu, Bv - z \rangle \end{aligned}$$

est appelée Lagrangien du problème (P).

Définition A.2 (u, λ) est un point-selle de \mathcal{L} si (u, λ) est solution de (P') où

$$(P') \quad \begin{cases} (u, \lambda) \in V \times M \\ \mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda), \quad \forall v \in V, \quad \forall \mu \in M \end{cases}.$$

λ est alors appelé multiplicateur de Lagrange associé à u .

Propriété A.3 (u, λ) solution de (P') $\implies u$ solution de (P).

On note B^* l'adjoint de B défini par

$$\forall v \in V, \quad \forall \mu \in M, \quad (B^* \mu, v) = \langle \mu, Bv \rangle.$$

Le problème considéré s'écrit encore sous la forme d'un système d'équations :

Propriété A.4 (u, λ) solution de (P') $\iff (u, \lambda)$ solution de problème (P'') avec

$$(P'') \quad \begin{cases} Au + B^* \lambda = f \\ Bu = z \end{cases}$$

L'existence et l'unicité d'un multiplicateur de Lagrange sont assurées par des hypothèses supplémentaires sur B :

Théorème A.5 Si l'image de B est fermée alors :

$$u \text{ solution de (P)} \implies \exists \lambda \text{ tel que } (u, \lambda) \text{ solution de (P')} \text{ (et donc de (P''))}.$$

Si B est surjective, le multiplicateur de Lagrange est unique.

Remarque A.6 Si M est de dimension finie (par exemple si on a un nombre fini de contraintes réelles), alors le théorème précédent assure l'existence d'un multiplicateur de Lagrange. Dans ce cas, $M = \mathbb{R}^N$ et B peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} B : V &\longrightarrow M = \mathbb{R}^N && \text{avec } B_i \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) \text{ pour } i = 1 \dots N, \\ v &\longmapsto (B_1 v, \dots, B_N v) && B_i v = (b_i, v), \quad b_i \in V \end{aligned}$$

On a alors pour $v \in V$ et $\mu \in M$,

$$\left(\sum_{i=1}^N \mu_i b_i, v \right) = \sum_{i=1}^N \mu_i (b_i, v) = \langle \mu, Bv \rangle = (B^* \mu, v),$$

et (P'') se réécrit

$$\begin{cases} Au + \sum_{i=1}^N \lambda_i b_i = f \\ Bu = z \end{cases}$$

A.2 Contrainte d'inégalité, cas $M = \mathbb{R}^N$

On se place dans cette section dans le cas où on impose un nombre fini de contraintes d'inégalités affines réelles. Comme précédemment, V est un espace de Hilbert quelconque. L'espace des contraintes considéré est

$$K_+ = \{v \in V, Bv \leq z\} = \{v \in V, \forall i = 1 \dots N, B_i v \leq z_i\}$$

$$\text{où } B : V \longrightarrow M = \mathbb{R}^N \quad \text{avec } B_i \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) \text{ pour } i = 1 \dots N,$$

$$v \longmapsto (B_1 v, \dots, B_N v)$$

On considère le problème de minimisation suivant

$$(P_+) \quad \begin{cases} u_+ \in K_+ \\ J(u_+) = \inf_{v \in K_+} J(v) \end{cases}$$

J étant strictement convexe, semi-continue inférieurement (et même continue), coercive et K_+ étant convexe fermé, on a la propriété suivante :

Propriété A.7 *Le problème (P_+) possède une unique solution u_+ .*

Si C est le cône \mathbb{R}_+^N , le Lagrangien du problème est maintenant défini par

$$\mathcal{L}_+ : V \times C \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, \mu) \longmapsto \mathcal{L}_+(v, \mu) = J(v) + \langle \mu, Bv - z \rangle$$

$$= J(v) + \sum_{i=1}^N \mu_i (B_i v - z_i)$$

On note (P'_+) le problème de point selle associé :

$$(P'_+) \quad \begin{cases} (u_+, \lambda_+) \in V \times C \\ \mathcal{L}_+(u_+, \mu) \leq \mathcal{L}_+(u_+, \lambda_+) \leq \mathcal{L}_+(v, \lambda_+), \quad \forall v \in V, \quad \forall \mu \in C \end{cases}$$

et on a les deux résultats suivants :

Propriété A.8 *(u_+, λ_+) solution de $(P'_+) \implies u_+$ solution de (P_+) .*

Propriété A.9 *(u_+, λ_+) est solution de $(P'_+) \iff (u_+, \lambda_+)$ est solution de (P''_+) avec*

$$(P''_+) \quad \begin{cases} Au_+ + \sum_{i=1}^N \lambda_{+,i} b_i = f, \\ B_i u_+ \leq z_i, \quad \forall i \\ \lambda_{+,i} (B_i u_+ - z_i) = 0, \quad \forall i. \end{cases}$$

Remarque A.10 *Le système associé fait maintenant intervenir une équation supplémentaire, appelée relation de complémentarité. Cette équation dit que le multiplicateur de Lagrange λ_i associé à la contrainte $B_i u_+ - z_i \leq 0$ ne peut être activé (ie non nul) que si la contrainte est saturée (ie $B_i u_+ - z_i = 0$).*

Remarque A.11 *On a montré lors de la remarque A.6 que, pour $\mu \in M$,*

$$B^* \mu = \sum_{i=1}^N \mu_i b_i.$$

Aussi, on peut réécrire (P'_+) sous la forme

$$\begin{cases} Au_+ + B^* \lambda_+ = f, \\ Bu_+ \leq z, \\ \langle \lambda_+, Bu_+ - z \rangle = 0. \end{cases}$$

Comme le montre le théorème suivant, dans le cas d'un nombre fini de contraintes d'inégalités affines réelles, (P') possède toujours une solution (ce qui est faux dans le cas général, voir remarque A.13).

Théorème A.12

u_+ est solution de (P_+) $\implies \exists \lambda_+ \in C$ tel que (u_+, λ_+) solution de (P'_+) (et donc de (P''_+)).

Si B est surjective, le multiplicateur de Lagrange est unique.

Remarque A.13 *Ces résultats se généralisent au cas non affine. (voir [3, Chap. 10]). On peut dans ce cas vérifier l'existence de multiplicateurs de Lagrange sous la condition que les contraintes soient qualifiées.*

Ils se généralisent également au cas d'un espace M de Hilbert quelconque et d'un espace de contraintes sous la forme

$$K_+ = \{v \in V, \forall \mu \in C, \langle \mu, Bv - z \rangle \leq 0\},$$

avec C cône convexe fermé de M de sommet 0 et $z \in \text{Im} B$ (voir [63, Problème 8]). L'existence de multiplicateurs de Lagrange est alors assurée par l'hypothèse $B^(C)$ fermé.*

A.3 Algorithme d'Uzawa : contrainte d'inégalité, cas $M = \mathbb{R}^N$

On décrit ici l'algorithme d'Uzawa dans le cadre de la section précédente (nombre fini de contraintes d'inégalités réelles). Il s'agit d'un algorithme de gradient à pas fixe projeté, sur le problème dual en λ_+ . Il s'écrit

$$\begin{cases} \rho > 0, \lambda^0 \in C, \\ \lambda^{k+1} = \Pi_C (\lambda^k + \rho [BA^{-1}(f - B^* \lambda^k) - z]), \end{cases}$$

où λ^0 et ρ sont des paramètres à choisir et où Π_C est la projection sur C .

Remarque A.14 L'algorithme peut se réécrire en construisant une suite (u^k, λ^k) dans $V \times C$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \rho > 0, \lambda^0 \in C, \\ u^{k+1} = A^{-1}(f - B^* \lambda^k), \\ \lambda^{k+1} = \Pi_C(\lambda^k + \rho [Bu^{k+1} - z]). \end{cases}$$

On voit alors apparaître $Bu^{k+1} - z$ qui est la quantité sous contrainte ainsi que l'équation $Au^{k+1} + B^* \lambda^k = f$, présente dans le problème (P''_+) d'après la remarque A.11.

Il est montré dans [63, Problème 8], pour un cas plus général (M non nécessairement de dimension finie), que la convergence de la partie primale $(u^k)_k$ vers u_+ est assurée sous la condition d'existence d'un point-selle. La section précédente nous permet donc d'obtenir la propriété suivante :

Propriété A.15 $u^k = A^{-1}(f - B^* \lambda^k)$ converge vers u_+ dès que $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|B\|^2}$.

Dans le cas qui nous intéresse (M de dimension finie), on peut également montrer que la suite de multiplicateurs de Lagrange construite par l'algorithme d'Uzawa converge, même dans le cas de non-unicité du point-selle. La démonstration est basée sur la proposition suivante (voir par exemple [42]) :

Propriété A.16 Lemme d'Opial Soit Λ un espace de Hilbert (éventuellement de dimension infinie), $\tilde{\Lambda}$ un sous-ensemble non vide de Λ , et (λ^k) une suite d'éléments de Λ telle que

(i) pour tout $\mu \in \tilde{\Lambda}$, la suite $|\lambda^k - \mu|$ converge,

(ii) si une sous-suite $(\lambda^{\varphi(k)})$ converge faiblement vers un élément μ de Λ , alors $\mu \in \tilde{\Lambda}$.

Alors la suite (λ^k) converge faiblement vers un élément de $\tilde{\Lambda}$.

Démonstration : D'après (i), la suite (λ^k) est bornée. Il suffit donc de vérifier que deux sous-suites qui convergent faiblement ont la même limite. On considère donc deux sous-suites (λ^{m_k}) et (λ^{n_k}) qui convergent faiblement vers λ_1 et λ_2 , respectivement. On introduit les limites

$$\ell_1 = \lim |\lambda^k - \lambda_1|, \quad \ell_2 = \lim |\lambda^k - \lambda_2|,$$

qui sont bien définies par hypothèse. On écrit alors

$$|\lambda^k - \lambda_1|^2 - |\lambda^k - \lambda_2|^2 = \langle \lambda_2 - \lambda_1, 2\lambda^k - \lambda_1 - \lambda_2 \rangle.$$

On passe à la limite dans l'identité précédente pour la sous-suite (λ^{m_k}) , puis pour (λ^{n_k}) . Il vient

$$|\ell_1|^2 - |\ell_2|^2 = -|\lambda_2 - \lambda_1|^2 \text{ et } |\ell_1|^2 - |\ell_2|^2 = |\lambda_2 - \lambda_1|^2.$$

On a donc nécessairement $|\lambda_2 - \lambda_1| = 0$, d'où le résultat. \square

Propriété A.17 Sous l'hypothèse $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|B\|^2}$, λ^k converge vers un $\mu_+ \in C$ tel que (u_+, μ_+) soit solution de (P'_+) .

Démonstration : On note $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ l'ensemble des μ_+ tels que (u_+, μ_+) soit un point-selle pour \mathcal{L}_+ (ou de façon équivalente solution du problème (P''_+)), et l'on se propose de vérifier que la suite (λ^k) rentre dans le cadre du lemme d'Opial.

Montrons que l'hypothèse (i) est vérifiée. Soit $\lambda_+ \in \tilde{\Lambda}$, on a

$$\lambda_+ = \Pi_C (\lambda_+ + \rho [Bu_+ - z]).$$

En effet, en utilisant la caractérisation de la projection sur un convexe fermé, il nous suffit de montrer

$$\langle \lambda_+ + \rho [Bu_+ - z] - \lambda_+, \mu - \lambda_+ \rangle \leq 0, \quad \forall \mu \in C,$$

c'est-à-dire,

$$\langle Bu_+ - z, \mu - \lambda_+ \rangle \leq 0, \quad \forall \mu \in C,$$

ce qui se déduit immédiatement de $u_+ \in K_+$ et $\langle \lambda_+, Bu_+ - z \rangle = 0$. Alors, comme $\lambda^{k+1} = \Pi_C (\lambda^k + \rho [Bu^{k+1} - z])$, on utilise le caractère 1-lipschitzien de Π_C pour écrire

$$\begin{aligned} |\lambda^{k+1} - \lambda_+|^2 &\leq |\lambda^k - \lambda_+ + \rho B(u^{k+1} - u_+)|^2 \\ &= |\lambda^k - \lambda_+|^2 + 2\rho \langle u^{k+1} - u_+, B^*(\lambda^k - \lambda_+) \rangle + \rho^2 |B(u^{k+1} - u_+)|^2 \\ &= |\lambda^k - \lambda_+|^2 - 2\rho \langle u^{k+1} - u_+, A(u^{k+1} - u_+) \rangle + \rho^2 |B(u^{k+1} - u_+)|^2 \\ &\leq |\lambda^k - \lambda_+|^2 - \rho (2\alpha - \rho \|B\|^2) |u^{k+1} - u_+|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $|\lambda^k - \lambda_+|$ est décroissante positive et donc converge. Le point (i) est donc vérifié.

Montrons maintenant que l'hypothèse (ii) du lemme d'Opial est vérifiée. Pour cela, considérons une sous-suite, que nous notons encore (λ^k) pour alléger l'écriture, qui converge faiblement vers $\mu \in \Lambda$. Tout d'abord, C étant convexe fermé, il est fermé pour la topologie faible et μ est dans C . Ensuite, on a

$$Au^{k+1} + B^*\lambda^k = f$$

pour tout k . Or, $B^*\lambda^k$ converge faiblement vers $B^*\mu$ et, d'après la propriété A.15, Au^k converge vers Au_+ . On a donc par passage à la limite (faible)

$$Au_+ + B^*\mu = f,$$

Pour vérifier que μ est un point-selle de \mathcal{L}_+ , il reste à vérifier la relation de complémentarité

$$\langle \mu, Bu - z \rangle = 0.$$

Pour cela, comme précédemment, on utilise la caractérisation de la projection sur C pour écrire

$$\langle \lambda^k + \rho [Bu^k - z] - \lambda^{k+1}, \tilde{\mu} - \lambda^{k+1} \rangle \leq 0, \quad \forall \tilde{\mu} \in C.$$

L'hypothèse de la dimension finie implique que la suite des (λ^k) converge fortement et on peut passer à la limite dans l'équation précédente. En prenant enfin $\tilde{\mu} = 0$, on obtient

$$\langle \mu, Bu - z \rangle \geq 0.$$

Or, $u \in K$ et $\mu \in C$ implique $\langle \mu, Bu - z \rangle \leq 0$ et la relation de complémentarité est vérifiée. Finalement on a montré que (u, μ) est point-selle de \mathcal{L}_+ c'est-à-dire $\mu \in \tilde{\Lambda}$.

Le lemme d'Opial ci-dessus permet alors de conclure. \square

Remarque A.18 *On se place dans le cadre de la section A.1. L'algorithme d'Uzawa associé à une contrainte d'égalité correspond à un gradient à pas fixe classique sur le problème dual. Pour M espace de Hilbert quelconque, la convergence de u^k ainsi que la convergence faible de λ^k sont alors assurées sous l'hypothèse d'existence de multiplicateurs de Lagrange. Dans le cas où M est de dimension finie, il y a donc convergence forte des λ^k vers un multiplicateur de Lagrange.*

Annexe B

Optimal strokes for low Reynolds number swimmers : an example

François Alouges¹ Antonio DeSimone² Aline Lefebvre³

Préprint, accepté pour publication dans *Journal of Nonlinear Science*
sous réserve de modifications.

Abstract

Swimming, *i. e.*, being able to advance in the absence of external forces by performing cyclic shape changes, is particularly demanding at low Reynolds numbers. This is the regime of interest for micro-organisms and micro- or nano-robots. We focus in this paper on a simple yet representative example : the three-sphere swimmer of Najafi and Golestanian [16]. For this system, we show how to cast the problem of swimming in the language of control theory, prove global controllability (which implies that the three-sphere swimmer can indeed swim), and propose a numerical algorithm to compute optimal strokes (which turn out to be suitably defined sub-Riemannian geodesics).

¹Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France, Francois.Alouges@math.u-psud.fr

²SISSA-International School for Advanced Studies, via Beirut 2-4, 34014 Trieste, Italy, desimone@sissa.it

³Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France, aline.lefebvre@math.u-psud.fr

B.1 Introduction

The problem of swimming at low Reynolds numbers has attracted considerable attention in the recent literature, starting from the pioneering works of Taylor [18], Berg [5] and Purcell [17]. This problem is both puzzling and relevant *e.g.*, for biological systems and micro- or nano-robots. Indeed, due to the length and time scales involved, the motion of micro-swimmers is dominated by viscosity, while inertia is negligible. This implies that microorganisms, such as bacteria, must adopt swimming strategies completely different from those employed by larger organisms, such as fish. In particular, the observation that, in a flow regime obeying Stokes equations, a scallop cannot advance through the reciprocal motion of its valves is called the “scallop theorem” [17]. The mathematical explanation for this is the symmetry of the Stokes equations under time reversal : whatever forward motion will be produced by closing the valves, it will be exactly canceled by a backward motion upon reopening them.

This leads to the question of finding the simplest mechanisms capable of self propulsion at this scales. By this we mean the ability to advance by performing a cyclic shape change - *a stroke* - in the absence of external forces. Several proposals have been put forward and analyzed, see *e.g.*, [18, 17, 16, 2, 4]. A particularly simple example, due to Najafi and Golestanian [16], is the three-sphere swimmer. In its simplest form, it consists of three equal spheres of radius a moving along a line (see Fig. B.1).

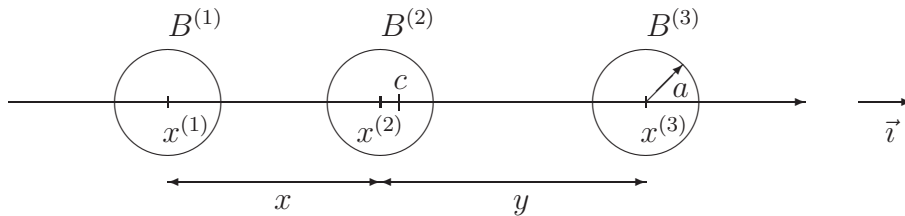


FIG. B.1 – Swimmer’s geometry and notation.

We call $\Omega := \cup_{i=1}^3 B^{(i)}$ the union of the three open balls, x and y the two distances between the centers of the balls and c the coordinate of the global center of mass. The state of our system is thus (x, y, c) , its shape is (x, y) and its position will be c . A brief mathematical description of the system is the following : each ball is acted upon by a force $f^{(i)}$ (coming from the other balls) which is transmitted to the surrounding fluid, generating a flow solution to Stokes equations outside Ω . As a consequence, each ball moves at a velocity $u^{(i)}$. The relation between forces and velocities is linear (Stokes equations are linear) and given by

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{pmatrix} = S(x, y) \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ f^{(3)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

where S is known as the Oseen matrix [16]. In this context, self propulsion means that the total force acting on the system vanishes

$$f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} = 0. \quad (\text{B.2})$$

It turns out that the center of mass c satisfies the ODE

$$\frac{dc}{dt} = V_x(x, y) \frac{dx}{dt} + V_y(x, y) \frac{dy}{dt}, \quad (\text{B.3})$$

where (V_x, V_y) is a vector field that can be computed explicitly from S . The swimming problem is the following question : can one find force laws $f^{(i)} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying (B.2), which produce T -periodic paths in the space of shapes (x, y) , and such that the average speed of the center of mass

$$\bar{c} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dc}{dt} dt \quad (\text{B.4})$$

does not vanish? A positive answer has been given in the physics literature [16] in the limiting regime of small spheres and small deformations.

We cast the swimming problem in the language of control theory. The controls are either the forces $f^{(i)}$ subject to the constraint (B.2), or the shape parameters x and y . The positive answer to the swimming problem is a consequence of the global controllability of the system, *i.e.*, the possibility of reaching an arbitrary point (x_1, y_1, c_1) of the space of states, starting from another arbitrary state (x_0, y_0, c_0) , through self propulsion.

Theorem 1 *The three-sphere swimmer is a globally controllable system.*

Granted the possibility of swimming, the next interesting question is how to swim optimally, namely, to find the optimal stroke.

A classical notion of swimming efficiency is due to Lighthill [13]. It is defined as the inverse of the ratio between the average power expended by the swimmer during a stroke starting and ending at the shape (x_0, y_0) and the power that an external force would spend to translate the system rigidly at the same average speed \bar{c} :

$$\text{Eff}^{-1} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \sum_i f^{(i)} u^{(i)}}{6\pi\eta A \bar{c}^2}. \quad (\text{B.5})$$

Here, η is the viscosity of the fluid, and $A = A(x_0, y_0)$ is the effective radius of the swimmer, which tends to $3a$ when the three spheres are infinitely far apart (see [16]). Our second main result is a numerical algorithm, namely, **Algorithm 1** in section B.4, to compute the force laws that provide, for given \bar{c} , the stroke requiring minimal expended power, hence yielding maximal efficiency. We emphasize that, contrary to the standard approach in the Physics literature, we do not fix *a priori* the shape of the stroke, and then optimize over a few scalar parameters. Rather, we let the swimmer free to choose an optimal “gait”.

The rest of the paper is organized as follows. In section 2 we describe the setting of the problem in detail. Section 3 contains the proof of Theorem 1. In section 4 we state the problem of optimal swimming and discuss the numerical strategy for its solution. Some numerical results are presented in section 5. Future directions are discussed in section 6.

B.2 Setting of the problem

B.2.1 Stokes equations

Let $\Omega = \cup_{i=1}^3 B^{(i)}$ be the union of the three open balls, and assume that the flow in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ satisfies the (static) Stokes equation. This means that for given vectors $f^{(i)}$ there exists a unique pair (u, p) , where the velocity of the fluid u is constant on each $\partial B^{(i)}$, and p is the pressure which satisfies

$$\begin{cases} -\eta\Delta u + \nabla p = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ -\int_{\partial B^{(i)}} \sigma n = f^{(i)}, \\ u \rightarrow 0 \text{ at } \infty. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Here $\sigma = \eta(\nabla u + \nabla^t u) - p\operatorname{Id}$ is the Cauchy stress tensor, and n is the outer unit normal to the boundary of Ω . The constant trace of u on $\partial B^{(i)}$ represents the velocity $u^{(i)}$ of the ball $B^{(i)}$.

It is convenient to reformulate the problem as one in which the velocities $u^{(i)}$ are the given data and the forces $f^{(i)}$ are to be calculated, and show that there is a linear one-to-one correspondence between the $u^{(i)}$ and the $f^{(i)}$. Let $M = L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$, and H be the weighted Hilbert space

$$H = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega) : \nabla u \text{ and } \frac{u}{\sqrt{1+|r|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega), u|_{\partial B^{(i)}} = 0 \right\}, \quad (\text{B.7})$$

endowed with the classical norm $\|\cdot\|_H$ defined by

$$\|u\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} |\nabla u|^2. \quad (\text{B.8})$$

which is equivalent (see [7, p. 117]) to the natural norm

$$\|u\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \left(\frac{|u(r)|^2}{1+|r|^2} + |\nabla u|^2(r) \right) dr. \quad (\text{B.9})$$

Here $r = (x_1, x_2, x_3)$, the position vector of a point in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Take now $\bar{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ which satisfies the boundary conditions $\bar{u}|_{\partial B^{(i)}} = u^{(i)}$. It is well known (see [7, p. 154]) that there exists a unique solution (u, p) to the variational problem

$$\begin{aligned} &\text{Find } (u, p) \in (\bar{u} + H) \times M \text{ such that } \forall (v, q) \in H \times M, \\ &\begin{cases} 2 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \eta D(u) \cdot D(v) - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} p \operatorname{div} v = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} q \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

where $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u)$. From the solution (u, p) one can compute the forces exerted on the balls as

$$f^{(i)} = - \int_{\partial B^{(i)}} \sigma n. \quad (\text{B.11})$$

It is clear that the $f^{(i)}$ depend linearly on the $u^{(i)}$

$$f^{(i)} = \sum_j L_{ij} u^{(j)}, \quad (\text{B.12})$$

and it is easy to show that this relation is invertible. Indeed, let $(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ and $(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$ be two sets of boundary conditions. We solve the corresponding Stokes problems and call the solutions (u, p) and (v, q) respectively. Moreover, we compute the corresponding forces $f^{(i)}$ and $g^{(i)}$ according to (B.11). Since u and v are divergence free, integrating by parts we get

$$\begin{aligned} \sum_{ij} (L_{ij} u^{(j)}) \cdot v^{(i)} &= \sum_i f^{(i)} \cdot v^{(i)} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \eta D(u) \cdot D(v) \\ &= \sum_i g^{(i)} \cdot u^{(i)} \\ &= \sum_{ij} u^{(j)} \cdot (L_{ji} v^{(i)}), \end{aligned}$$

and

$$\sum_i f^{(i)} \cdot u^{(i)} = \sum_{ij} (L_{ij} u^{(j)}) \cdot u^{(i)} = 2 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \eta |D(u)|^2. \quad (\text{B.13})$$

Finally, we define the solution of (B.6) for given data $f^{(i)}$ as the unique solution of (B.10) corresponding to Dirichlet data $u^{(i)}$ satisfying (B.12).

In the geometry of Fig. B.1, forces and velocities are all directed along the axis of motion so that, from now onward, we will denote by $f^{(i)}$ and $u^{(i)}$ their scalar components along that axis. Thus, from (B.12) and the properties of L_{ij} , we obtain that (B.1) holds and that the Oseen matrix S is symmetric and positive definite.

B.2.2 The ODEs describing swimming

Calling $(x_i)_i$ the positions of the centers of the three balls, we rewrite (B.1) as

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{pmatrix} = S(x, y) \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ f^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

and change variables to $x = x^{(2)} - x^{(1)}$, $y = x^{(3)} - x^{(2)}$, and $c = (x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)})/3$. Setting $e_x = (-1, 1, 0)^t$, $e_y = (0, -1, 1)^t$, $e_c = (1/3, 1/3, 1/3)^t$ and $f = (f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)})^t$, we obtain

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e_x \cdot S f = S e_x \cdot f, \\ \frac{dy}{dt} = e_y \cdot S f = S e_y \cdot f, \\ \frac{dc}{dt} = S e_c \cdot f, \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

because S is symmetric.

Now, since f satisfies (B.2), it is always possible to write it as

$$f = \alpha_x \frac{Se_y \times e_c}{Se_x \cdot (Se_y \times e_c)} - \alpha_y \frac{Se_x \times e_c}{Se_x \cdot (Se_y \times e_c)}. \quad (\text{B.16})$$

This is because

1. the two vectors $Se_y \times e_c$ and $Se_x \times e_c$ are obviously orthogonal to e_c and never proportional, for if this were the case, there would exist $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ such that

$$S(\lambda e_x + \mu e_y) \times e_c = 0.$$

But, since e_c is orthogonal to both e_x and e_y , we would have

$$S(\lambda e_x + \mu e_y) \cdot (\lambda e_x + \mu e_y) = 0,$$

which is in contradiction with the fact that S is positive definite.

2. $Se_x \cdot (Se_y \times e_c)$ never vanishes. Indeed, if this were the case, then both $Se_x \times e_c$ and $Se_y \times e_c$ would be orthogonal to Se_x and Se_y . Since from the preceding remark, Se_x and Se_y are not collinear, then $Se_x \times e_c$ and $Se_y \times e_c$ should be collinear, which again from the preceding remark is not possible.

Using (B.16), system (B.15) becomes

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_x, \\ \frac{dy}{dt} = \alpha_y, \\ \frac{dc}{dt} = \alpha_x \frac{Se_c \cdot (Se_y \times e_c)}{Se_x \cdot (Se_y \times e_c)} - \alpha_y \frac{Se_c \cdot (Se_x \times e_c)}{Se_x \cdot (Se_y \times e_c)} \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

which leads to

$$\frac{dc}{dt} = V_x(x, y) \frac{dx}{dt} + V_y(x, y) \frac{dy}{dt}, \quad (\text{B.18})$$

with

$$V_x(x, y) = \frac{Se_c \cdot (Se_y \times e_c)}{Se_x \cdot (Se_y \times e_c)} = \frac{S^{-1}e_c \cdot (e_c \times e_y)}{S^{-1}e_c \cdot (e_x \times e_y)} \quad (\text{B.19})$$

$$V_y(x, y) = -\frac{Se_c \cdot (Se_x \times e_c)}{Se_x \cdot (Se_y \times e_c)} = -\frac{S^{-1}e_c \cdot (e_c \times e_x)}{S^{-1}e_c \cdot (e_x \times e_y)}. \quad (\text{B.20})$$

Therefore, if the system performs a stroke, *i.e.*, it follows a given closed curve $\gamma = (x, y)$ in the space of admissible shapes $\mathcal{S} = (2a, +\infty)^2$ defined by $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}$, then it experiences a global displacement of its center of mass which amounts to

$$\begin{aligned} \Delta c &= \int_0^T \left(V_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + V_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) \right) dt, \\ &= \pm \oint_{\gamma} V \cdot dl \\ &= \pm \int_{\omega} \text{curl } V, \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

where $V = (V_x, V_y)$ and $\omega \subset \mathcal{S}$ is the region enclosed by γ . Here, $\text{curl}V = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$ and the $-$ sign should be chosen if $t \mapsto \gamma(t)$ induces a clockwise orientation of γ . Notice also that the definition of \mathcal{S} ensures that the balls do not overlap.

Thus, we can think of swimming as *the problem of controlling shape in order to produce a net displacement Δc different from 0 at the end of one stroke γ* . The force laws that are needed to produce an arbitrary path in the space of shapes $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{S}$, are easily recovered from (B.16) and (B.17) :

$$f = \frac{dx}{dt} \frac{Se_y \times e_c}{Se_x \cdot (Se_y \times e_c)} - \frac{dy}{dt} \frac{Se_x \times e_c}{Se_x \cdot (Se_y \times e_c)}. \quad (\text{B.22})$$

B.2.3 Swimming as a control problem

It is convenient to rewrite system (B.17) as

$$\frac{dX}{dt} = \alpha_x(t)F_x(X) + \alpha_y(t)F_y(X), \quad (\text{B.23})$$

where $X = (x, y, c) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}$ and the vector-fields F_x and F_y are given by

$$F_x(X) = (1, 0, V_x(x, y)), \quad F_y(X) = (0, 1, V_y(x, y)). \quad (\text{B.24})$$

In what follows, we will denote by $\mathcal{X} = \mathcal{S} \times \mathbb{R}$ the set of admissible states. This system is globally controllable if, starting from any state $X_0 = (x_0, y_0, c_0) \in \mathcal{X}$, one can reach any other state $X_1 = (x_1, y_1, c_1) \in \mathcal{X}$ with a solution of (B.23) and suitable controls $t \mapsto (\alpha_x(t), \alpha_y(t))$. The system is locally controllable at X_0 if one can reach any point in a neighborhood of X_0 . Since swimming means the ability to connect (x_0, y_0, c_0) and $(x_0, y_0, c_1 \neq c_0)$ with a solution of (B.23), we see that local controllability is a sufficient condition for swimming. In fact, it turns out that the three-sphere swimmer is globally controllable.

In order to proceed, we need to introduce basic notations and results of control theory applied to our situation. First, a sufficient condition for local controllability at X_0 is that the Lie algebra $\text{Lie}(F_x, F_y)(X_0) = \mathbb{R}^3$ (see, e.g., [1]). In particular this is true if

$$\det(F_x, F_y, [F_x, F_y])(X_0) \neq 0, \quad (\text{B.25})$$

where $[F_x, F_y] = (F_x \cdot \nabla)F_y - (F_y \cdot \nabla)F_x$ is the Lie bracket of F_x and F_y . An easy computation shows that (since neither F_x nor F_y depend on c)

$$\det(F_x, F_y, [F_x, F_y])(X_0) = \text{curl} V(X_0) \quad (\text{B.26})$$

and we recover (in view of (B.21)) that $\text{curl} V(X_0) \neq 0$ allows for swimming with any sufficiently small loop around (x_0, y_0) .

Introducing the Martinet surface

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{X} : \det(F_x, F_y, [F_x, F_y])(X) = 0\}, \quad (\text{B.27})$$

it is clear that the system is locally controllable outside \mathcal{M} and therefore globally controllable on each connected component of $\mathcal{X} \setminus \mathcal{M}$.

B.3 Proof of Theorem 1

For the proof of theorem 1, which states that the three-sphere swimmer is globally controllable, we need the following two lemmas whose proofs are postponed to the next subsections.

Lemma 1 *The vector fields $F_x(X)$ and $F_y(X)$ are analytic functions of $X \in \mathcal{X}$.*

Lemma 2 *The set $\mathcal{X} \setminus \mathcal{M}$ is not empty.*

From the preceding lemmas, it is clear that the Martinet surface \mathcal{M} is locally at most of dimension 2. Indeed, if $\det(F_x, F_y, [F_x, F_y])$ vanished in a neighborhood of a state $X_0 \in \mathcal{X}$, then by analyticity, it would vanish everywhere on \mathcal{X} , and \mathcal{M} would be equal to \mathcal{X} contradicting lemma 2. Now, since F_x and F_y do not depend on c , the Martinet surface is a cylinder with vertical axis and since $\text{span}(F_x(X), F_y(X))$ is never a vertical plane, we deduce that (at least) one of the two vectors $F_x(X)$ or $F_y(X)$ is transverse to \mathcal{M} at $X \in \mathcal{M}$. The global controllability on the connected components of $\mathcal{X} \setminus \mathcal{M}$ and the transverse vector field to pass from one connected component to another prove the global controllability of the system and theorem 1.

Remark 1 *We notice that, the global controllability of the system could be proven with a weaker statement. However, analyticity of $\text{curl } V$ also gives extra informations, for instance, that the set \mathcal{M} is at most two-dimensional and hence its intersection with the space of shapes \mathcal{S} is at most one-dimensional.*

B.3.1 Proof of Lemma 1

In view of formulas (B.19,B.20), the fact that $F_x(X)$ and $F_y(X)$ are analytic functions of X directly follows from the analyticity of $S^{-1}(x, y)$ with respect to (x, y) that we prove now. In fact, it is sufficient to show that for any triplet $U = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})^t$, the energy

$$(S^{-1}(x, y)U, U) = 2 \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} \eta |D(u)|^2 \quad (\text{B.28})$$

is analytic in (x, y) where (u, p) solves Stokes equations with boundary values $u^{(i)}$ on $\partial B^{(i)}$

$$\begin{cases} -\eta \Delta u + \nabla p = 0 \text{ on } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \text{div}(u) = 0 \text{ on } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ u|_{\partial B^{(i)}} = u^{(i)} \text{ for } i = 1, 2, 3, \\ u \rightarrow 0 \text{ at infinity.} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

In order to emphasize the dependence of the domain Ω on (x, y) we will write until the end of the section $\Omega_{(x,y)}$ instead of Ω . That u is analytic in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x,y)}$ follows from standard elliptic regularity (see, *e.g.*, [15]), but we stress that what concerns us here is that u is analytic with respect to (x, y) , *i.e.*, with respect to deformations of the domain of the fluid flow. In order to proceed, we work near a point (x_0, y_0) , set $\delta_x = x - x_0$, and $\delta_y = y - y_0$,

and recall that a function X with values in a Banach space \mathcal{B} is analytic at $(0, 0)$ if and only if one can write for any $\delta = (\delta_x, \delta_y)$ in a suitable neighborhood of $(0, 0)$

$$X(\delta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} \delta^\alpha X^{(\alpha)}, \quad (\text{B.30})$$

where $X^{(\alpha)} \in \mathcal{B}$ satisfy the estimate

$$\exists C > 0, \rho > 0, \text{ s.t. } \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \|X^{(\alpha)}\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{C}{\rho^{|\alpha|}}. \quad (\text{B.31})$$

Here, for a multiindex $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y) \in \mathbb{N}^2$, and $\delta = (\delta_x, \delta_y) \in \mathbb{R}^2$, we have denoted by δ^α the quantity $\delta_x^{\alpha_x} \delta_y^{\alpha_y}$, and $|\alpha| = \alpha_x + \alpha_y$.

We then recast the Stokes problem on the fixed domain $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}$, but with variable coefficients. Namely, we solve the following two problems on $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}$

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 \\ \phi|_{\partial B^{(1)}} = 1, \\ \phi|_{\partial B^{(2)}} = 0, \\ \phi|_{\partial B^{(3)}} = 0, \\ \phi \rightarrow 0 \text{ at infinity,} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \psi = 0 \\ \psi|_{\partial B^{(1)}} = 0, \\ \psi|_{\partial B^{(2)}} = 0, \\ \psi|_{\partial B^{(3)}} = 1, \\ \psi \rightarrow 0 \text{ at infinity.} \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

Since ϕ and ψ are harmonic, as a consequence of classical elliptic regularity theory, they are analytic on $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}$ (see [15]). Moreover, ϕ , ψ and all their derivatives are bounded functions on $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}$, and satisfy the following decay estimate at infinity

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3, \exists C_\alpha > 0, \text{ s.t. } |\partial^\alpha \phi(r)| \leq \frac{C_\alpha}{|r|^{|\alpha|+1}}. \quad (\text{B.33})$$

Now, we set for $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \Omega_{(x_0, y_0)}$

$$\theta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 - \delta_x \phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + \delta_y \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \bar{x}_2, \bar{x}_3),$$

and define

$$\bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = u(\theta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)), \quad \forall (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}. \quad (\text{B.34})$$

Since for $(\delta_x, \delta_y) = (0, 0)$, $\theta = Id$, and θ is analytic in (δ_x, δ_y) , θ admits an inverse ξ which is analytic in (δ_x, δ_y) near $(0, 0)$, so that we may rewrite (B.34) as

$$u(x_1, x_2, x_3) = \bar{u}(\xi(x_1, x_2, x_3)), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x, y)}. \quad (\text{B.35})$$

Therefore, the analyticity of u in (δ_x, δ_y) is equivalent to the analyticity of \bar{u} . Calling $\bar{p} = p \circ \theta$, that (u, p) satisfy Stokes equations on $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x, y)}$ is now equivalent to (\bar{u}, \bar{p}) satisfying

$$\begin{cases} -\eta \sum_{ij} \left[\sum_k \bar{\partial}_{jk} \bar{u}_l \partial_i \xi_k \partial_i \xi_j + \bar{\partial}_j \bar{u}_l \partial_{ii} \xi_j \right] + \sum_j \bar{\partial}_j \bar{p} \partial_l \xi_j = 0 \\ \text{on } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}, \text{ for } l = 1, 2, 3, \\ \sum_{ij} \bar{\partial}_j \bar{u}_i \partial_i \xi_j = 0 \text{ on } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}, \\ \bar{u}|_{\partial \bar{B}^{(i)}} = u^{(i)} \text{ for } i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

in which we have used the notations $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, and $\bar{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$. Notice that an explicit formula for the derivatives of ξ can be obtained by differentiation of $\xi \circ \theta = Id$. Indeed, one has

$$\nabla \xi(\theta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)) = (\bar{\nabla} \theta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3))^{-1}, \quad (\text{B.37})$$

which can be computed explicitly from

$$\bar{\nabla} \theta = \begin{pmatrix} 1 - \delta_x \bar{\partial}_1 \phi + \delta_y \bar{\partial}_1 \psi & -\delta_x \bar{\partial}_2 \phi + \delta_y \bar{\partial}_2 \psi & -\delta_x \bar{\partial}_3 \phi + \delta_y \bar{\partial}_3 \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.38})$$

We insist on the fact that the Jacobian determinant $\det \bar{\nabla} \theta = 1 - \delta_x \bar{\partial}_1 \phi + \delta_y \bar{\partial}_1 \psi$ does not vanish for (δ_x, δ_y) small enough, uniformly in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}$ due to the uniform bound on the derivatives of ϕ and ψ . Therefore, the coefficients in the transformed Stokes equation (B.36) are indeed analytic in $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \delta_x, \delta_y)$. Setting

$$\begin{cases} a_{jk} = \eta \sum_i \partial_i \xi_k \partial_i \xi_j, \\ b_j = \eta \sum_i \partial_{ii} \xi_j, \\ c_{jk} = \partial_j \xi_k, \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

the system (B.36) rewrites

$$\begin{cases} R_{(\delta_x, \delta_y)}(\bar{u}, \bar{p}) = 0, \\ \bar{u}|_{\partial \bar{B}^{(i)}} = u^{(i)} \text{ for } i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

where the second order differential operator $R_{(\delta_x, \delta_y)}$ is given by

$$R_{(\delta_x, \delta_y)} = \begin{pmatrix} D_2 & 0 & 0 & \sum_j c_{1j} \bar{\partial}_j \\ 0 & D_2 & 0 & \sum_j c_{2j} \bar{\partial}_j \\ 0 & 0 & D_2 & \sum_j c_{3j} \bar{\partial}_j \\ \sum_j c_{1j} \bar{\partial}_j & \sum_j c_{2j} \bar{\partial}_j & \sum_j c_{3j} \bar{\partial}_j & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.41})$$

with $D_2 = -\sum_j [\sum_k a_{jk} \bar{\partial}_{jk} + b_j \bar{\partial}_j]$. Since the coefficients are analytic in δ , we will write

$$a_{jk} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} \delta^\alpha a_{jk}^{(\alpha)}, \quad (\text{B.42})$$

$$b_j = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} \delta^\alpha b_j^{(\alpha)}, \quad (\text{B.43})$$

$$c_{jk} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} \delta^\alpha c_{jk}^{(\alpha)}. \quad (\text{B.44})$$

Of particular importance for the sequel is the behavior of the functions $a_{jk}^{(\alpha)}$, $b_j^{(\alpha)}$, $c_{jk}^{(\alpha)}$, as $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ tends to infinity. We get from (B.33), (B.37), (B.38), and (B.39) the following estimates

$$\exists C > 0, \rho > 0, \text{ s.t. } \begin{cases} \|a_{jk}^{(\alpha)}\|_{L^\infty}, \|c_{jk}^{(\alpha)}\|_{L^\infty}, \|\sqrt{1+|r|^2}b_j^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\rho^{|\alpha|}}, \\ \|\sqrt{1+|r|^2}\bar{\partial}_l a_{jk}^{(\alpha)}\|_{L^\infty}, \|\sqrt{1+|r|^2}\bar{\partial}_l c_{jk}^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\rho^{|\alpha|}}. \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

Now, in order to deal with the non homogeneous boundary conditions, we consider a map \bar{U} analytic in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}$ which obeys the boundary conditions for instance by solving

$$\begin{cases} -\Delta \bar{U} = 0, \text{ on } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}, \\ \bar{U}|_{\partial \bar{B}^{(i)}} = u^{(i)} \text{ for } i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (\text{B.46})$$

and seek the solution as $\bar{u} = \bar{U} + \bar{v}$. Hence, \bar{v} is solution of

$$\begin{cases} R_{(\delta_x, \delta_y)}(\bar{v}, \bar{p}) = -R_{(\delta_x, \delta_y)}(\bar{U}, 0) \\ \bar{v}|_{\partial \bar{B}^{(i)}} = 0 \text{ for } i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (\text{B.47})$$

Unfortunately, the operator $R_{(\delta_x, \delta_y)}$ does not map $H \times M$ into itself and therefore, we rewrite our system as

$$\begin{cases} R_{(0,0)}^{-1} R_{(\delta_x, \delta_y)}(\bar{v}, \bar{p}) = -R_{(0,0)}^{-1} R_{(\delta_x, \delta_y)}(\bar{U}, 0) \text{ on } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)}, \\ \bar{v}|_{\partial \bar{B}^{(i)}} = 0 \text{ for } i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

where by $R_{(0,0)}^{-1}(f, g)$ we mean the solution to the Dirichlet problem

$$\begin{cases} R_{(0,0)}(\bar{w}, \bar{q}) = (f, g), \text{ on } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{(x_0, y_0)} \\ \bar{w}|_{\partial \bar{B}^{(i)}} = 0 \text{ for } i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (\text{B.49})$$

That $R_{(0,0)}^{-1} R_{(\delta_x, \delta_y)}$ is invertible on $H \times M$ is clear. We now show that it depends on $\delta = (\delta_x, \delta_y)$ analytically (near $(0, 0)$). Using the expansions (B.42, B.43, B.44) leads to

$$R_{(0,0)}^{-1} R_{(\delta_x, \delta_y)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} \delta^\alpha R_{(0,0)}^{-1} R^{(\alpha)}, \quad (\text{B.50})$$

where the operators $R^{(\alpha)}$ are given by

$$R^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} D_2^{(\alpha)} & 0 & 0 & \sum_j c_{1j}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j \\ 0 & D_2^{(\alpha)} & 0 & \sum_j c_{2j}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j \\ 0 & 0 & D_2^{(\alpha)} & \sum_j c_{3j}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j \\ \sum_j c_{1j}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j & \sum_j c_{2j}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j & \sum_j c_{3j}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.51})$$

with $D_2^{(\alpha)} = -\sum_j \left[\sum_k a_{jk}^{(\alpha)} \bar{\partial}_{jk} + b_j^{(\alpha)} \bar{\partial}_j \right]$, and it is sufficient to show that $R^{(\alpha)}$ satisfies (B.31). But, we have

$$\|R_{(0,0)}^{-1} R^{(\alpha)}\|_{\mathcal{L}(H \times M)} \leq \|R_{(0,0)}^{-1}\|_{\mathcal{L}(H' \times M, H \times M)} \|R^{(\alpha)}\|_{\mathcal{L}(H \times M, H' \times M)}$$

and we can estimate

$$\begin{aligned} \|R^{(\alpha)}\|_{\mathcal{L}(H \times M, H' \times M)} \leq C & \left(\sum_{jk} \|a_{jk}^{(\alpha)} \bar{\partial}_{jk}\|_{\mathcal{L}(H, H')} + \sum_j \|b_j^{(\alpha)} \bar{\partial}_j\|_{\mathcal{L}(H, H')} + \right. \\ & \left. \sum_{ij} \|c_{ij}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j\|_{\mathcal{L}(H, M)} + \sum_{ij} \|c_{ij}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j\|_{\mathcal{L}(M, H')} \right). \end{aligned}$$

We consider each of the four terms separately.

$$\begin{aligned} \|a_{jk}^{(\alpha)} \bar{\partial}_{jk}\|_{\mathcal{L}(H, H')} &= \sup_{u, v \in H} \frac{\left| \int a_{jk}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j u \bar{\partial}_k v + \bar{\partial}_k a_{jk}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j u v \right|}{\|u\|_H \|v\|_H} \\ &\leq \sup_{u, v \in H} \frac{\|a_{jk}^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \|\bar{\partial}_j u\|_{L^2} \|\bar{\partial}_k v\|_{L^2}}{\|u\|_H \|v\|_H} \\ &\quad + \frac{\|\sqrt{1+|r|^2} \bar{\partial}_k a_{jk}^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \|\bar{\partial}_j u\|_{L^2} \|\frac{v}{\sqrt{1+|r|^2}}\|_{L^2}}{\|u\|_H \|v\|_H} \\ &\leq C \left(\|a_{jk}^{(\alpha)}\|_\infty + \|\sqrt{1+|r|^2} \bar{\partial}_k a_{jk}^{(\alpha)}\|_\infty \right). \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned} \|b_j^{(\alpha)} \bar{\partial}_j\|_{\mathcal{L}(H, H')} &\leq \|\sqrt{1+|r|^2} b_j^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \\ \|c_{ij}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j\|_{\mathcal{L}(H, M)} &\leq \|c_{ij}^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \\ \|c_{ij}^{(\alpha)} \bar{\partial}_j\|_{\mathcal{L}(M, H')} &\leq \|c_{ij}^{(\alpha)}\|_{L^\infty} + \|\sqrt{1+|r|^2} \bar{\partial}_j c_{ij}^{(\alpha)}\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Therefore, from the fact that the coefficients a_{jk} , b_j and c_{jk} satisfy (B.45), we deduce that $R_{(0,0)}^{-1} R_{(\delta_x, \delta_y)}$ is analytic in δ .

Moreover, since $R_{(0,0)}^{-1} R^{(0,0)} = Id$, (here, $R^{(0,0)}$ stands for $R^{(\alpha)}$ with $\alpha = (0, 0)$) the analytic inverse theorem implies that the inverse $\left(R_{(0,0)}^{-1} R_{(\delta_x, \delta_y)} \right)^{-1}$ also satisfies (B.30, B.31) for δ sufficiently small, which means that it is analytic in δ as well.

Since $(\bar{U}, 0)$ is smooth, we infer that $R_{(0,0)}^{-1} R_{(\delta_x, \delta_y)}(\bar{U}, 0)$ is analytic in δ (with values in $H \times M$), which leads to the analyticity of (\bar{v}, \bar{p}) in $\delta = (\delta_x, \delta_y)$ and hence to the result.

B.3.2 Proof of Lemma 2

The proof of lemma 2 consists of two steps. In the first, we prove the estimate

$$\exists C > 0, x_0 > 0, \text{ s.t. } \forall x, y > x_0, \|S(x, y) - S_\infty(x, y)\| < \frac{C}{\min(x, y)^2} \quad (\text{B.52})$$

for the error term E in the asymptotic expansion for (B.1)

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{pmatrix} = S(x, y) \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ f^{(3)} \end{pmatrix} = (S_\infty(x, y) + E(x, y)) \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ f^{(3)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.53})$$

where the matrix $S_\infty(x, y)$ is given by

$$S_\infty(x, y) = \frac{1}{\pi\eta} \begin{pmatrix} \frac{1}{6a} & \frac{1}{4x} & \frac{1}{4(x+y)} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{6a} & \frac{1}{4y} \\ \frac{1}{4(x+y)} & \frac{1}{4y} & \frac{1}{6a} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.54})$$

We give an explicit short proof, in the interest of the reader, to keep the paper self-contained. Formulas like (B.52, B.54) are not new, and we first encountered them in [9]. More refined asymptotics show that, in fact, the error decay rate is cubic for the off-diagonal terms, and quartic for the diagonal ones, see [3]. In the second step, we construct a stroke for which we can prove, using (B.52), that the displacement of the center of mass is nonzero, making impossible that $\mathcal{M} = \mathcal{X}$.

Step 1. We note that for x, y sufficiently large, the matrix $S_\infty(x, y)$ is uniformly diagonal dominant and therefore there exist $\alpha > 0$, $x_0 > 0$ such that

$$\left\| S_\infty(x, y) \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ f^{(3)} \end{pmatrix} \right\| \geq \alpha \left\| \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ f^{(3)} \end{pmatrix} \right\|, \quad \forall x, y > x_0. \quad (\text{B.55})$$

Next, we recall that if u satisfies the homogeneous Stokes equations outside Ω , with $u|_{\partial B^{(i)}} = u^{(i)}$ a constant, then u can be written as

$$u(r) = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial B^{(i)}} G(r - r') t^{(i)}(r') dr'. \quad (\text{B.56})$$

Here the Stokeslet

$$G(r) = \frac{1}{8\pi\eta} \left(\frac{1}{|r|} + \frac{r \otimes r}{|r|^3} \right) \quad (\text{B.57})$$

is the fundamental solution of Stokes equation and $t^{(i)} = \sigma n|_{\partial B^{(i)}}$ is the force per unit area on $\partial B^{(i)}$.

We now construct an approximate solution to the three-sphere Stokes problem by using, as a building block, the solution to the outer Stokes problem with uniform Dirichlet data on one sphere (one-sphere Stokes solution). Let γ the boundary of a smooth bounded domain and consider the space $\mathcal{H}(\Gamma) = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R}^3)/\mathcal{R}$, where \mathcal{R} is the equivalence relation $t \mathcal{R} t'$ iff $t - t' = \lambda n$ with $\lambda \in \mathbb{R}$ and n the unit normal to Γ (this is needed because the interior pressure p inside Γ is defined to within a constant, see [7, p. 157]). We define the map Φ from $\mathcal{H}(\partial B^{(1)}) \times \mathcal{H}(\partial B^{(2)}) \times \mathcal{H}(\partial B^{(3)})$ to $H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(1)}, \mathbb{R}^3) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(2)}, \mathbb{R}^3) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(3)}, \mathbb{R}^3)$ given by

$$\begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \\ g^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0^{(11)} & T_{-x}^{(12)} & T_{-(x+y)}^{(13)} \\ T_x^{(21)} & T_0^{(22)} & T_{-y}^{(23)} \\ T_{(x+y)}^{(31)} & T_y^{(32)} & T_0^{(33)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \\ g^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.58})$$

where the operators $T_z^{(ij)} : \mathcal{H}(\partial B^{(j)}) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(i)}, \mathbb{R}^3)$ are defined by

$$T_z^{(ij)} g^{(j)}(r) = \int_{\partial B^{(j)}} G(z\vec{i} + r - r') g^{(j)}(r') dr' \quad \text{for } r \in \partial B^{(i)}. \quad (\text{B.59})$$

where \vec{i} is the unit vector along the horizontal axis, see Fig. B.1. It is clear from (B.56) that

$$\begin{aligned} \Phi(t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}) &= (u|_{\partial B^{(1)}}, u|_{\partial B^{(2)}}, u|_{\partial B^{(3)}}) \\ &= (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}). \end{aligned}$$

Moreover, Φ defines an isomorphism because the Stokes problem is well posed and the integral representation (B.56) is unique. We shall see that Φ is also uniformly coercive for (x, y) sufficiently large.

It is well-known (see [7, eq. (5.31)]) that $T_0^{(ii)}$ is coercive on $\mathcal{H}(\partial B^{(i)})$, meaning that there exists $\alpha_0 > 0$ such that

$$\forall g \in \mathcal{H}(\partial B^{(i)}), \quad \left\langle g, T_0^{(ii)} g \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial B^{(i)}), H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(i)})} \geq \alpha_0 \|g\|_{\mathcal{H}(\partial B^{(i)})}^2, \quad (\text{B.60})$$

while an easy estimate gives (due to the decay of G at infinity) for $z \gg a$,

$$\|T_z^{(ij)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(\partial B^{(j)}), H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(i)}))} \leq \frac{C}{|z|}. \quad (\text{B.61})$$

The coerciveness of T_0 (B.60) together with the estimate (B.61) give the following uniform coerciveness estimate for $\Phi : \exists X > 0, \quad \text{s.t. } \forall x, y > X,$

$$\langle (g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}), \Phi(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}) \rangle \geq \alpha \|(g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)})\|^2. \quad (\text{B.62})$$

Now, for a given velocity V of the ball B , we call u_V the one-sphere Stokes solution outside B , namely, the solution of the homogeneous Stokes equations which vanishes at infinity and whose trace on ∂B is equal to V . Stokes formula gives the drag force F_V generated in this case as

$$F_V = - \int_{\partial B} \sigma(u_V) n = 6\pi a \eta V. \quad (\text{B.63})$$

For the three values $U = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})^t$ of the velocity of the spheres, we compute the drags $F = (F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})^t$ solutions to the system $S_\infty(x, y)F = U$, and the corresponding velocities $V^{(i)} = \frac{F^{(i)}}{6\pi a \eta}$. We then compute

$$(w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}) = \Phi(t^{(1)} - \sigma(u_{V^{(1)}})n, t^{(2)} - \sigma(u_{V^{(2)}})n, t^{(3)} - \sigma(u_{V^{(3)}})n) \quad (\text{B.64})$$

and get

$$\begin{cases} w^{(1)}(r) = u^{(1)} - V^{(1)} - u_{V^{(2)}}(-x\vec{i} + r) - u_{V^{(3)}}(-(x+y)\vec{i} + r), \\ w^{(2)}(r) = u^{(2)} - V^{(2)} - u_{V^{(1)}}(x\vec{i} + r) - u_{V^{(3)}}(-y\vec{i} + r), \\ w^{(3)}(r) = u^{(3)} - V^{(3)} - u_{V^{(1)}}((x+y)\vec{i} + r) - u_{V^{(2)}}(y\vec{i} + r). \end{cases} \quad (\text{B.65})$$

Moreover, using (B.56), we infer for $r \in \partial B$ and $|z| \gg a$ (since $u_V = Vu_1$)

$$\begin{aligned} u_V(z\vec{l} + r) &= \int_{\partial B} G(z\vec{l} + r - r') \sigma(u_V)(r') n(r') dr' \\ &= G(z\vec{l}) \int_{\partial B} \sigma(u_V)(r') n(r') dr' + O\left(\frac{|V|}{z^2}\right) \\ &= \frac{F_V}{4\pi\eta|z|} + O\left(\frac{|V|}{z^2}\right) \end{aligned}$$

from the analytic expression of G and (B.63). Since $S_\infty F = U$, plugging these expressions into (B.65) leads to the uniform estimate

$$\exists C > 0, \text{ s.t. } \forall r \in \partial B^{(i)}, |w^{(i)}(r)| \leq \frac{C\|(V^{(1)}, V^{(2)}, V^{(3)})\|}{\min(x, y)^2}. \quad (\text{B.66})$$

Since Φ satisfies the uniform coerciveness estimate (B.62), one deduces that

$$\begin{aligned} \alpha \|t^{(i)} - \sigma(u_{V^{(i)}})n\|_{\mathcal{H}(\partial B^{(i)})}^2 &\leq \sum_{j=1}^3 \langle t^{(j)} - \sigma(u_{V^{(j)}})n, w^{(j)} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial B^{(j)}), H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(j)})} \\ &\leq \sum_{j=1}^3 \|t^{(j)} - \sigma(u_{V^{(j)}})n\|_{\mathcal{H}(\partial B^{(j)})} \|w^{(j)}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(j)})}, \end{aligned}$$

from which we obtain

$$\begin{aligned} |f^{(i)} - F^{(i)}| &= \left| \int t^{(i)} - \sigma(u_{V^{(i)}})n \right| \\ &\leq \|t^{(i)} - \sigma(u_{V^{(i)}})n\|_{\mathcal{H}(\partial B^{(i)})} \|1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(i)})} \\ &\leq C \sum_{j=1}^3 \|w^{(j)}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B^{(j)})} \\ &\leq \frac{C\|(F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)})\|}{\min(x, y)^2}, \end{aligned}$$

from (B.66) and $V_i = \frac{F_i}{6\pi a\eta}$. Writing

$$\begin{aligned} \|S - S_\infty\| &= \|-S(S^{-1} - S_\infty^{-1})S_\infty\| \\ &\leq \|S\| \|S^{-1} - S_\infty^{-1}\| \|S_\infty\|, \end{aligned}$$

for the matricial norm $\|\cdot\|$ establishes (B.52).

Step 2. Let L and K be two numbers which are meant to tend to infinity with the constraint that

$$1 \ll K \ll L. \quad (\text{B.67})$$

We consider the square loop in the space of shapes described by $(x, y) : (L, L) \rightarrow (L + K, L) \rightarrow (L + K, L + K) \rightarrow (L, L + K) \rightarrow (L, L)$. The displacement of the center of mass generated by such a stroke is given by (B.21)

$$\Delta c = \int_L^{L+K} V_x(x, L) + \int_L^{L+K} V_y(L + K, y) + \int_{L+K}^L V_x(x, L + K) + \int_{L+K}^L V_y(L, y). \quad (\text{B.68})$$

From symmetry, it is not difficult to see that $V_x(x, y) = -V_y(y, x)$ for all $x, y > r$, which implies

$$\int_L^{L+K} V_x(x, L) = \int_{L+K}^L V_y(L, y) \text{ and } \int_L^{L+K} V_y(L + K, y) = \int_{L+K}^L V_x(x, L + K), \quad (\text{B.69})$$

and leads to

$$\Delta c = 2 \int_L^{L+K} (V_x(x, L) - V_x(x, L + K)) dx. \quad (\text{B.70})$$

But, since $V_x(x, y) = \frac{\det(S(x, y)e_c, S(x, y)e_y, e_c)}{\det(S(x, y)e_x, S(x, y)e_y, e_c)}$, and using estimate (B.52) of $S(x, y)$ for large (x, y) , we get

$$V_x(x, y) = \frac{a}{6} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} + \frac{2}{y} \right) + O\left(\frac{1}{\min(x, y)^2} \right).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \frac{6}{a} \Delta c &= 2 \int_L^{L+K} -\frac{1}{x+L} + \frac{1}{x+L+K} + \frac{2}{L} - \frac{2}{L+K} + O\left(\frac{1}{L^2} \right) \\ &= 2 \ln \left(\frac{1 + \frac{K}{L}}{\left(1 + \frac{K}{2L}\right)^2} \right) + \frac{4K^2}{L(L+K)} + O\left(\frac{K}{L^2} \right) \\ &= \frac{7K^2}{2L^2} + O\left(\frac{K}{L^2} \right). \end{aligned}$$

Taking $K = \sqrt{L}$ leads, for L sufficiently large, to a non zero displacement Δc proving lemma 2.

B.4 A numerical algorithm for computing optimal strokes

In this section, we propose an algorithm for the computation of a stroke of maximal efficiency. We recall that

$$\text{Eff}^{-1} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T (f, u)}{6\pi\eta A \bar{c}^2}, \quad (\text{B.71})$$

where we have set $(f, u) = \sum_i f^{(i)} u^{(i)}$, and remark that Eff is a non-dimensional quantity, invariant under an affine change of parametrization of time. Thus, we can set $T = 1$ s and $\bar{c} = \Delta c$. The problem we intend to solve numerically is to find optimal strokes. By this we mean to find, for each given initial shape $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$, the stroke $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ with

$$\gamma(0) = \gamma(1) = (x_0, y_0), \quad (\text{B.72})$$

which performs a given displacement

$$\Delta c = \int_0^1 V(\gamma) \cdot d\gamma \quad (\text{B.73})$$

with maximal efficiency. In view of (B.71), this means to solve the following constrained minimization problem :

$$\min_{\gamma \in \mathcal{A}(x_0, y_0, \Delta c)} \int_0^1 (f(\gamma(\tau)), u(\gamma(\tau))) d\tau, \quad (\text{B.74})$$

where

$$\mathcal{A}(x_0, y_0, \Delta c) = \left\{ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} \text{ s.t. } \gamma(0) = \gamma(1) = (x_0, y_0) \text{ and } \int_0^1 V \cdot d\gamma = \Delta c \right\}. \quad (\text{B.75})$$

From (B.16), one has $f = \alpha_x U_x + \alpha_y U_y$ with

$$U_x = \frac{S e_y \times e_c}{S e_x \cdot (S e_y \times e_c)}, \quad U_y = -\frac{S e_x \times e_c}{S e_x \cdot (S e_y \times e_c)}. \quad (\text{B.76})$$

Since $\dot{\gamma} = (\alpha_x, \alpha_y)$,

$$\begin{aligned} (f, u) &= (f, S f) \\ &= g_{xx} \alpha_x^2 + 2g_{xy} \alpha_x \alpha_y + g_{yy} \alpha_y^2 \\ &= (G \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \end{aligned}$$

where the symmetric and positive definite matrix G is given by

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S U_x, U_x) & (S U_x, U_y) \\ (S U_y, U_x) & (S U_y, U_y) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.77})$$

Introducing the Lagrange multiplier λ associated with the constraint (B.73), the Euler-Lagrange equation for (B.74) is

$$-\overline{(\dot{G} \cdot \dot{\gamma})} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial_x G \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \\ (\partial_y G \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \end{pmatrix} + \lambda \text{curl } V(\gamma) \dot{\gamma}^\perp = 0. \quad (\text{B.78})$$

where $\partial_x G$ and $\partial_y G$ stand for the x and y derivatives of the matrix G .

Remark 2 We wish to point out an interesting connection with sub-Riemannian geometry, which has guided our analysis, see [11]. Introducing for any path $\gamma \in \mathcal{S}$

$$c(s) = c_0 + \int_0^s V(\gamma(\tau)) \cdot \dot{\gamma}(\tau) d\tau, \forall s \in [0, 1], \quad (\text{B.79})$$

then $X = (\gamma, c)$ describes a curve in the three-dimensional space \mathcal{X} whose tangent \dot{X} is constrained to belong to a two-dimensional plane $T_X = \text{span}(F_x, F_y)$. The dissipation rate (f, u) gives, in the local basis (F_x, F_y) the square of the length of X .

Therefore, with the metric given by (B.77) defined on T_X , our optimal strokes describe the shortest sub-Riemannian geodesics in \mathcal{X} joining (x_0, y_0, c_0) to $(x_0, y_0, c_0 + \Delta c)$. Equation (B.78) is the general equation for sub-Riemannian geodesics, along which the Hamiltonian $(G\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ is constant. The existence of a minimizing geodesic joining any two points in state space follows from general theorems. Indeed, the system (B.23) being analytic and globally controllable, the Lie algebra $\text{Lie}(F_x, F_y)$ is of dimension 3 everywhere in state space (see [1]). This in turn implies the existence of minimizing geodesics [14, Theorem 1.19].

We now describe our algorithm for solving (B.74). It is based on the solution of the Cauchy problem for (B.78), with given trial value for λ , and a suitable shooting method. Namely, for given initial shape (x_0, y_0) , and given trial initial velocity (\dot{x}_0, \dot{y}_0) , we compute the unique solution $(x(t), y(t))$ of the second order ODE (B.78) with a classical Runge-Kutta method. The functions $V(x, y)$ and $G(x, y)$ which appear as coefficients in (B.78) are computed at several points of \mathcal{S} using a 3D axisymmetric finite element Stokes solver and then interpolated (see below for further details). In order to enforce the constraints (B.72) and (B.73), we introduce the function $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{X}$ defined by

$$\Psi(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \lambda) = \left(x(1), y(1), \int_0^1 (V_x(x, y)\dot{x} + V_y(x, y)\dot{y}) d\tau \right), \quad (\text{B.80})$$

and rewrite the original problem (B.74) as

$$\text{Find a triplet } (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \lambda) \text{ such that } \Psi(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \lambda) = (x_0, y_0, \Delta c). \quad (\text{B.81})$$

This is solved with the following algorithm.

Algorithm 1 (shooting method)

0. Provide a target $\bar{Z} = (x_0, y_0, \Delta c)$ and a parameter N
1. Compute the values of V and G at several points of the space of shapes and interpolate the values
2. Start with an initial guess $\theta_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \lambda)$
3. Loop for $n = 0 \dots N - 1$
 - Compute $Z_n = \Psi(\theta_n)$ by solving (B.78) with a Runge-Kutta method
 - Compute $\theta_{n+1} = \theta_n + D\Psi(\theta_n)^{-1} \left(\frac{\bar{Z} - Z_n}{N - n} \right)$
4. (Newton's method) Loop for $n \geq N$ until θ_n converges to θ_∞
 - Compute $Z_n = \Psi(\theta_n)$ by solving (B.78) with a Runge-Kutta method

- Compute $\theta_{n+1} = \theta_n + D\Psi(\theta_n)^{-1} (\bar{Z} - Z_n)$
- 5. Compute the (optimal) stroke γ_∞ from θ_∞
- 6. Compute the force laws from γ_∞ and (B.22)

After the initializations, step 3. of the algorithm is a Newton type method for which the gap between initial guess and unknown target has been subdivided into N increments. A suitably large value has been chosen for N in order to obtain convergence of the algorithm. Moreover, steps 3. and 4. require the solution of a linear system at each iteration with coefficients given by the 3×3 matrix $D\Psi(\theta_n)$. The matrix $D\Psi(\theta)$ is obtained by finite differences from the approximation

$$D\Psi(\theta)\delta\theta \sim \Psi(\theta + \delta\theta) - \Psi(\theta), \quad (\text{B.82})$$

by setting $\delta\theta = (\epsilon, 0, 0)$, $(0, \epsilon, 0)$ and $(0, 0, \epsilon)$ with ϵ small.

Depending on the initial guess θ_0 in step 2., the algorithm produces different geodesic strokes. Among the computed geodesic strokes, the one with maximal efficiency is selected as the optimal stroke.

B.5 Examples of optimal strokes

In this section we describe some numerical experiments demonstrating the significance of our approach and the reliability of the algorithm. For our tests, we have taken parameter N of Algorithm 1 equal to 30. For what concerns geometric and material parameters, our simulations describe, say, spheres of radius $a = 0.05 \text{ mm}$ swimming in a medium with the kinematic viscosity of water ($\nu = \frac{\eta}{\rho} = 1 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$). Setting $T = 1 \text{ s}$, this results in a Reynolds number of the order $Re = a^2 \nu = 0.0025$. The interpolation stage (step 1. of Algorithm 1) has been done by computing the quantities $V(x, y)$ and $G(x, y)$ at 50×50 equally spaced points in the region $[0.125 \text{ mm}, 0.7 \text{ mm}]^2$ of the space of shapes \mathcal{S} with an axisymmetric finite element Stokes solver (based on FREEFEM [8]). The simulation domain has been restricted to a large bounding box of size $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ around Ω on the boundary of which we have taken homogeneous Dirichlet boundary condition for the velocity. In fact, we only take forces that satisfy (B.2), hence the velocity is expected to decay like $1/|r|^2$ as r tends to infinity. We have then found the polynomial in $(1/x, 1/y)$ giving the best least square fit of these values (a polynomial of degree 4 in each variable proved to be sufficient). Eventually, $\text{curl}V$ has been computed by exact differentiation of this polynomial. The numerical results of this section have been validated by comparing with the results of direct finite element simulations, with an error in the predicted power consumption not exceeding one percent.

B.5.1 Optimal strokes versus square loops

For a given initial shape $(x_0, y_0) = (0.3 \text{ mm}, 0.3 \text{ mm})$, and two different given displacements $\Delta c_1 = 0.001 \text{ mm}$ and $\Delta c_2 = 0.01 \text{ mm}$ we have compared the efficiency of our optimal strokes with the square one proposed by Najafi and Golestanian (NG stroke) [16]. In addition, we show the performance of a square loop in which the distances between the balls are increased, instead of being decreased, in the first two legs of the loop. The expended energy in all cases are given in Table B.1 while the strokes are shown in Fig. B.2. The optimal strokes are shown superimposed on the graph of $\text{curl}V$ in Fig. B.3.

| $\Delta c(\text{mm})$ | Optimal stroke | NG stroke | Naive stroke |
|-----------------------|----------------|-----------|--------------|
| 0.001 | 0.0307 | 0.0405 | 0.0589 |
| 0.010 | 0.229 | 0.278 | 0.914 |

TAB. B.1 – Energy consumption (J).

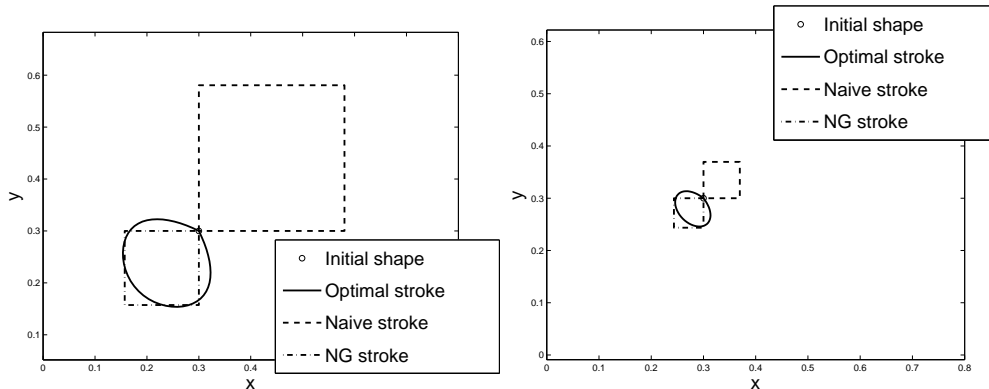


FIG. B.2 – Optimal strokes and square strokes which induce the same displacement $\Delta c = 0.01 \text{ mm}$ (left) and $\Delta c = 0.001 \text{ mm}$ (right) in $T = 1 \text{ s}$.

The optimal stroke gives a noticeable efficiency improvement. It is remarkable that, in our regime, there is a drastic difference, for a given initial shape, between the two square loops. By contrast, in the limiting regimes of small spheres or small deformations, this difference disappears.

B.5.2 Multiplicity of geodesic strokes

As already mentioned, depending on the initial parameters θ_0 in our algorithm, one can converge to different geodesic strokes. This is due to the fact that the geodesics joining two points in \mathcal{X} are not unique. These geodesics, when projected on \mathcal{S} give more and more involved strokes, and the shortest one gives best efficiencies. In Fig. B.4 we have shown three of them for the same parameters as before which have been named according to their shape. The corresponding expended energies are given in Table B.2.

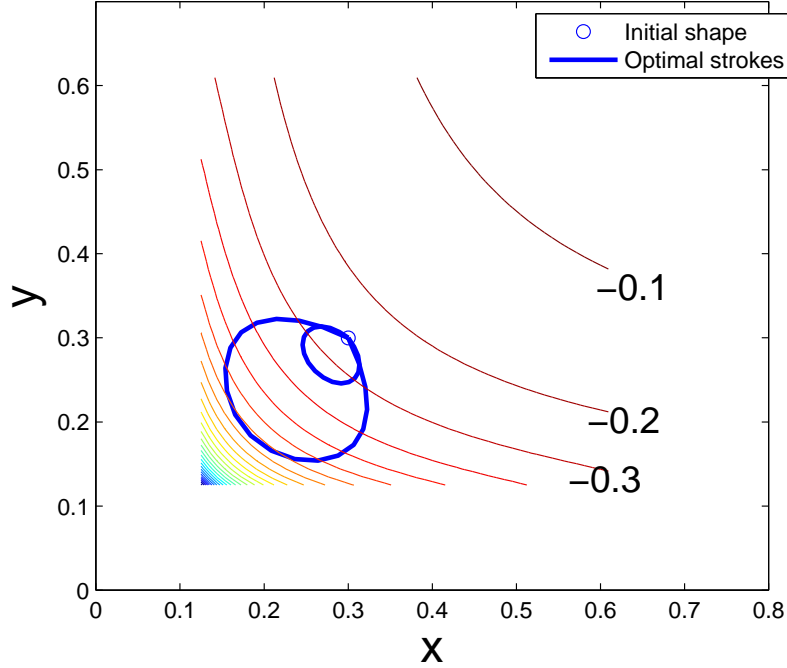


FIG. B.3 – Optimal strokes (for $\Delta c = 0.01 \text{ mm}$ and $\Delta c = 0.001 \text{ mm}$ in $T = 1 \text{ s}$) and equally spaced level curves of $\text{curl}V$.

| $\Delta c(\text{mm})$ | Drop | Bean | Pretzel |
|-----------------------|--------|--------|---------|
| 0.001 | 0.0307 | 0.0387 | 0.0637 |
| 0.010 | 0.229 | 0.451 | 0.529 |

TAB. B.2 – Energy consumption (J).

We remark that, for small Δc , $\text{curl} V(x, y)$ and $G(x, y)$ are essentially constant and equal to their values at (x_0, y_0) . In this case, it is well known (from sub-Riemannian geometry) that geodesics project to ellipses. Therefore, in the small Δc regime, all geodesic strokes collapse to ellipses.

B.5.3 Swimming with many strokes

One can move of an amount Δc in time $T = 1 \text{ s}$ by executing n identical strokes, with each of which one moves by $\Delta c/n$. We have investigated the difference in terms of power consumption with respect to n and again $(x_0, y_0, \Delta c) = (0.3 \text{ mm}, 0.3 \text{ mm}, 0.01 \text{ mm})$. To this aim, we have computed the energy consumption of the n -stroke movement relative to the one using a single stroke. The results are summarized in Fig. B.5 where it is shown that this relative energy consumption reaches an asymptotic value for large n . As expected, the fewer the strokes, the bigger the efficiency, and reaching the target in just one stroke is the most preferable strategy, whenever possible. The opposite one, namely, performing

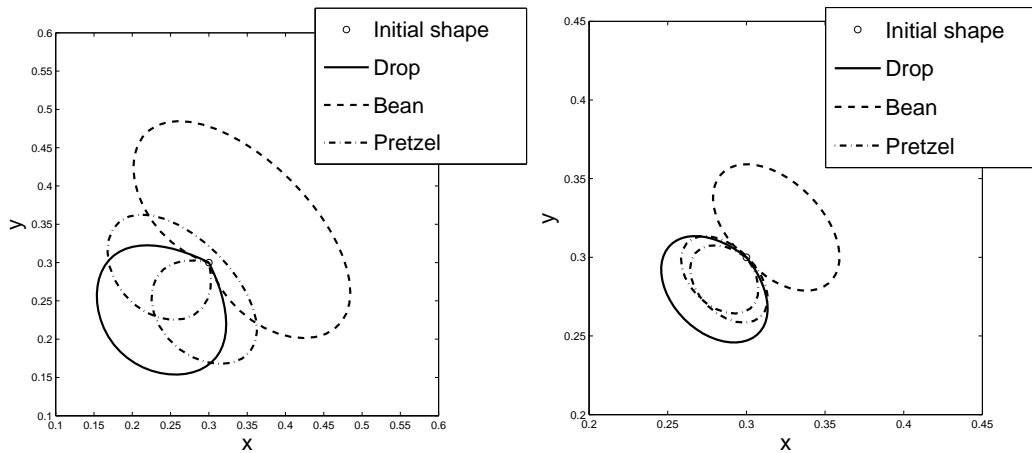


FIG. B.4 – Three geodesic strokes (obtained by projecting geodesics onto the space of shapes \mathcal{S}) with $\Delta c = 0.01 \text{ mm}$ (left) and $\Delta c = 0.001 \text{ mm}$ (right) in $T = 1 \text{ s}$.

many small shape changes around (x_0, y_0) is most inefficient.

If the shape of the system is constrained to lie in a subset $\bar{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$, say, for biological or technological reasons, then the optimal swimming strategy requires exploring the largest allowed shape changes in $\bar{\mathcal{S}}$ leaving $(x_0, y_0, \Delta c)$ as adjustable parameters. Resolving the hydrodynamic interactions in this regime cannot be based on asymptotic formulas such as (B.54), and it calls for numerical tools such as the ones we have used in this section.

B.6 Discussion

We have shown how to formulate and solve numerically the problem of finding optimal strokes for low Reynolds number swimmers by focussing on the three-sphere swimmer of Najafi and Golestanian (a simple, yet representative example).

The theoretical part of our analysis shows how to address quantitatively swimming as the problem of controlling shape in order to produce a net displacement at the end of one stroke. By casting the problem in the language of control theory, we reduce the problem of swimming to the controllability of the system, and the search of optimal strokes to an optimal control problem leading to the computation of suitable sub-Riemannian geodesics. The numerical solution we find for the optimal stroke leads to an increase of efficiency exceeding 300% with respect to more naive proposals.

Much remains to be done. On the one hand, if one is interested in the optimal swimming strategy to reach a given target from a given initial position, the choice of a shape around which to fluctuate and the distance traveled with each stroke are parameters, to be optimized subject to suitable constraints. On the other hand, the three-sphere swimmer is just an example. Its simplicity enables us to carry out the analysis by using explicit formulas, while the study of biologically relevant swimmers will require more abstract mathematical tools.

We are working on extensions of our work in both of these two directions. However, we believe that our paper provides a significant head start. For both the questions of

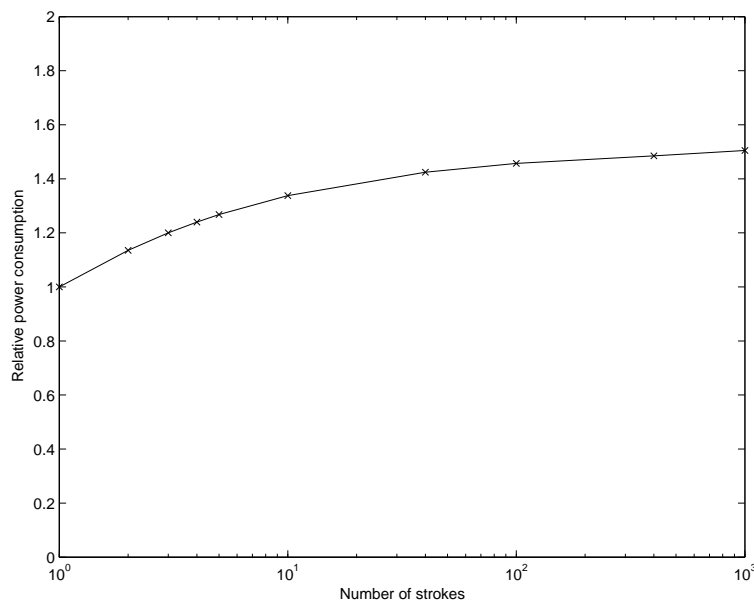


FIG. B.5 – Relative expended energy versus number of strokes.

adjusting the stroke to a global optimality criterion, and of optimizing the stroke of complex swimmers, combining the numerical approach we advocate with the use of tools from sub-Riemannian geometry may prove extremely valuable. Useful inspiration can come from the sizable literature on the related field of control of swimmers in a perfect fluid, see *e.g.* [10] and the many references cited therein, and [6]. The literature on low Reynolds number swimmers is, by comparison, smaller, but growing at a fast pace, see *e.g.* [12, 19].

Acknowledgments : We thank A. Agrachev, R. Golestanian, B. Maury, G. Métivier, V. Šverák, and E. Trélat for very helpful discussions. This work was carried out during visits of FA to SISSA and of ADS to Paris XI. The financial support of these institutions is gratefully acknowledged. Additional support came from the EU through the MULTIMAT Marie Curie Research Training Network MRTN-CT-2004-505226 and the italian INdAM through the research project “Mathematical Challenges in Nanomechanics”. Finally, we wish to thank the three anonymous referees for their many valuable comments, and A. Garroni and the staff of the library of the Mathematics Department ‘G. Castelnuovo’ of the University of Roma ‘La Sapienza’ for their kind assistance.

Bibliographie

- [1] A. Agrachev and Y. Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences , Vol. 87, Control Theory and Optimization, Springer (2004)
- [2] J. E. Avron, O. Kenneth and D. H. Oakmin, *Pushmepullyou : an efficient micro-swimmer*, New Journal of Physics **7**, 234–1–8 (2005)
- [3] G. K. Batchelor, *Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interactions*, J. Fluid Mech. **74**, 1–29 (1976)
- [4] L. E. Becker, S. A. Koehler, and H. A. Stone, *On self-propulsion of micro-machines at low Reynolds numbers : Purcell’s three-link swimmer*, J. Fluid Mechanics **490**, 15–35 (2003)
- [5] H. C. Berg and R. Anderson, *Bacteria swim by rotating their flagellar filaments*, Nature **245**, 380–382 (1973)
- [6] A. Bressan, *Impulsive Control of Lagrangian Systems and Locomotion in Fluids*, preprint (2006)
- [7] R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 4, Springer-Verlag (1990)
- [8] Freefem, [http ://www.freefem.org/](http://www.freefem.org/)
- [9] R. Golestanian, personal communication to ADS
- [10] E. Kanso, J. E. Marsden, C. W. Rowley, and J. B. Melli-Huber *Locomotion of Articulated Bodies in a Perfect Fluid*, J. Nonlinear Sci. **15**, 255–289 (2005)
- [11] J. Koiller, K. Ehlers, and R. Montgomery, *Problems and Progress in Microswimming*, J. Nonlinear Sci. **6**, 507–541 (1996)
- [12] A. M. Leshansky, O. Kenneth, O. Gat, and J. E. Avron, *A frictionless microswimmer*, preprint (2007)
- [13] M. J. Lighthill, *On the Squirming Motion of Nearly Spherical Deformable Bodies through Liquids at Very Small Reynolds Numbers*, Comm. Pure Appl. Math. **5**, 109–118 (1952)
- [14] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, AMS Mathematical Surveys and Monographs **91**, 2002
- [15] C. B. Morrey and L. Nirenberg, *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **10**, 271–290 (1957)

- [16] A. Najafi and R. Golestanian, *Simple swimmer at low Reynolds numbers : Three linked spheres*, Phys. Rev. E **69**, 062901–1–4 (2004)
- [17] E. M. Purcell, *Life at low Reynolds numbers*, Am. J. Phys. **45**, 3–11 (1977)
- [18] G. I. Taylor, *Analysis of the swimming of microscopic organisms*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **209**, 447–461 (1951)
- [19] J. Wilkening and A. E. Hosoi, *Shape optimization of swimming sheets*, preprint (2007)

Annexe C

Dérivation de fonctions à variations bornées : mesures différentielles

Dans cette annexe, nous donnons la définition et quelques propriétés de la mesure différentielle d'une fonction à variation bornée, sur lesquelles s'appuie la démonstration de la convergence du schéma numérique vers le modèle de contact visqueux particule/plan dans le chapitre 4. Nous précisons également ici le sens que nous donnons aux équations (4.8) et (4.10) du problème (\mathcal{P}' , 4.12) énoncé page 95 :

$$m\ddot{q} = mf + \lambda \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = -\lambda.$$

Les résultats de la section 1 sont issus de [67, Ch1§6] et ceux de la seconde section de [67, Ch1§8].

On note $BV(I)$ l'ensemble des fonctions à variation bornée sur I et, pour f dans $BV(I)$, on note $\text{Var}(f; I)$ sa variation sur I .

C.1 Mesure différentielle

Soit I un intervalle réel. On note $\mathcal{S} = \{S \subset I, |S| < +\infty\}$ les sous-ensembles finis de I . On appelle *intercalaire* toute application θ telle que

$$\begin{aligned} \theta : \quad \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} && \text{avec } \theta_S^i \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \text{ pour } i = 1 \dots n \\ S = \{\tau_0, \dots, \tau_n\} &\longmapsto \{\theta_S^1, \dots, \theta_S^n\} \end{aligned}$$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, pour tout $S \in \mathcal{S}$, θ intercalaire et $\phi \in \mathcal{C}_0^0(I)$ (continue à support compact dans I) on note :

$$M(S, \theta, \phi) = \sum_{i=1}^n \phi(\theta_S^i) (f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})).$$

Propriété C.1 *Soit $f \in BV(I)$. Pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^0(I)$ et θ intercalaire, $M(S, \theta, \phi)$ converge quand le pas de la subdivision S tend vers zéro. La limite obtenue est indépendante de θ et de la suite S . On note cette limite $\int \phi df$ (intégrale de Stieltjes). On a de plus l'inégalité suivante :*

$$\left| \int \phi df \right| \leq \|\phi\|_\infty \text{Var}(f; I)$$

ce qui montre que l'application $\phi \mapsto \int \phi df$ appartient au dual topologique de $\mathcal{C}_0^0(I)$, noté $\mathcal{M}(I)$.

Définition C.2 *La mesure obtenue ci-dessus est appelée mesure différentielle (ou mesure de Stieltjes) de la fonction $f \in BV(I)$. Elle est notée df et appartient à $\mathcal{M}(I)$.*

Remarque C.3 *On vérifie facilement que la mesure différentielle de la fonction identité est la mesure de Lebesgue (notée dt) et que si $f \in C^1(I)$ on a $df = f'(t)dt$.*

C.2 Sous-intervalles

On a vu ci-dessus que, si f est à variation bornée, on peut définir sa mesure différentielle qui appartient à $\mathcal{M}(I)$.

Soit J la fonction indicatrice d'un intervalle valant 1 sur J et 0 ailleurs. En l'approchant par des fonctions continues à support compact $(\phi_n)_n$, on peut définir, pour $f \in BV(I)$

$$\int_J df = \langle df, \mathbf{1}_J \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle df, \phi_n \rangle.$$

Pour f à variation bornée sur I et $t \in \overset{\circ}{I}$, on note respectivement $f(t^-)$ et $f(t^+)$ les limites à droite et à gauche de f en t . Par convention, si I contient sa borne de gauche a , on note $f(a^-) = f(a)$. De même, si I contient sa borne de droite, on note $f(b^+) = f(b)$.

En utilisant la définition de la mesure différentielle on peut montrer :

Propriété C.4 *Soit $f \in BV(I)$. Pour tout sous-intervalle compact $[a, b]$ de I on a*

$$\int_{[a,b]} df = f(b^+) - f(a^-).$$

En particulier, pour tout $a \in I$, la mesure du singleton $\{a\}$ pour df vaut

$$\int_{\{a\}} df = f(a^+) - f(a^-).$$

On peut étendre ces résultats à des intervalles non compacts pour obtenir :

Corollaire C.5 *Si a et b sont deux éléments de I avec $a \leq b$, on a*

$$\int_{]a,b]} df = f(b^+) - f(a^+) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b[} df = f(b^-) - f(a^-).$$

De plus, si $a < b$, $\int_{]a,b[} df = f(b^-) - f(a^+)$.

Notations

D'après ce qui précède, puisque \dot{q} et γ appartiennent à $BV(I)$, les équations (4.8) et (4.10) du problème (\mathcal{P}' , 4.12) devraient s'écrire

$$m d\dot{q} = m f(t) dt + \lambda \quad \text{et} \quad d\gamma = -\lambda \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}(I). \quad (\text{C.1})$$

Pour des raisons de lisibilité, nous avons choisi de noter (C.1) sous la forme

$$m \ddot{q} = m f + \lambda \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = -\lambda,$$

qui est exacte en dehors des instants d'impact d'après la remarque C.3. Il s'agit bien entendu d'un abus de notation et on gardera en mémoire qu'il s'agit d'une égalité de mesures. Avec ces notations, la propriété C.4 se réécrit par exemple pour γ et \dot{q} ,

$$\int_{[a,b]} \dot{\gamma} = \gamma(b^+) - \gamma(a^-) \quad \text{et} \quad \int_{\{a\}} \dot{\gamma} = \gamma(a^+) - \gamma(a^-),$$
$$\int_{[a,b]} \ddot{q} = \dot{q}(b^+) - \dot{q}(a^-) \quad \text{et} \quad \int_{\{a\}} \ddot{q} = \dot{q}(a^+) - \dot{q}(a^-).$$

Annexe D

Démonstration de l'équivalence entre
 (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}') énoncée page 95

Dans cette annexe, nous montrons l'équivalence entre le modèle de contact visqueux $(\mathcal{P}, 4.4)$ donné page 89 et le problème $(\mathcal{P}', 4.12)$ énoncé page 95 que l'on utilise pour écrire l'algorithme 4.1.

On se donne un intervalle I et $f \in L^1(I)$. Rappelons les définitions de (\mathcal{P}) et de (\mathcal{P}') :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} q \in W^{1,\infty}(I), \quad \gamma \in L^\infty(I), \\ q(0) = q^0 > 0, \quad \dot{q}(0) = u^0 \\ m\dot{q} + \gamma = m\tilde{u} \text{ presque partout} \\ q\gamma = 0 \text{ presque partout} \\ q \geq 0, \quad \gamma \leq 0 \text{ presque partout} \end{array} \right.$$

$$\text{où } \tilde{u}(t) = u^0 + \int_0^t f.$$

$$(\mathcal{P}') \left\{ \begin{array}{l} q \in W^{1,\infty}(I), \quad \dot{q} \in BV(I), \quad \gamma \in BV(I), \\ q(0) = q^0 > 0, \quad \dot{q}(0) = u^0, \quad \gamma(0) = 0 \\ \dot{q}(t^+) = \Pi_{C_{q,\gamma}(t)} \dot{q}(t^-) \quad (4.7) \\ m\ddot{q} = mf + \lambda \text{ dans } \mathcal{M}(I) \quad (4.8) \\ \text{supp}(\lambda) \subset \{t, q(t) = 0\} \quad (4.9) \\ \dot{\gamma} = -\lambda \quad (4.10) \\ q \geq 0, \quad \gamma \leq 0 \text{ presque partout} \quad (4.11) \end{array} \right.$$

$$\text{où } C_{q,\gamma}(t) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \gamma(t^-) < 0, \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } \gamma(t^-) = 0, \quad q(t) = 0, \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons également (voir annexe C) que, si $g \in BV(I)$ et si $s \leq t$ avec s, t dans $]0, T[$, on a

$$\int_{[s,t]} \dot{g} = g(t^+) - g(s^-),$$

ou encore

$$\int_{\{s\}} \dot{g} = g(s^+) - g(s^-).$$

Les intégrations sur les autres types d'intervalles s'écrivent de la même façon. La première égalité est également valable pour $s = 0$ avec $g(0^-) = g(0)$ par convention.

Le théorème que l'on souhaite démontrer (énoncé page 95) est le suivant :

Théorème 4.9 *Soit $I = [0, T]$ un intervalle, $q \in W^{1,\infty}(I)$ avec $\dot{q} \in BV(I)$, et $\gamma \in BV(I)$.*

On suppose qu'il existe N_1 et N_2 , entiers naturels, et $(a_i, b_i)_{i=1\dots N_1}$, $(c_i)_{i=1\dots N_2}$ dans $[0, T]$ tels que

$$\{t \in [0, T], q(t) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{N_1} [a_i, b_i] \bigcup_{i=1}^{N_2} \{c_i\}.$$

Alors,

$$(q, \gamma) \text{ solution de } (\mathcal{P}', 4.12) \iff (q, \gamma) \text{ solution de } (\mathcal{P}, 4.4).$$

Les deux propriétés qui suivent correspondent à chacune des implications à démontrer.

Propriété D.1 Soit (q, γ) une solution de (\mathcal{P}') . On suppose qu'il existe N_1 et N_2 , entiers naturels, et $(a_i, b_i)_{i=1\dots N_1}$, $(c_i)_{i=1\dots N_2}$ dans $[0, T]$ tels que

$$\{t \in [0, T], q(t) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{N_1} [a_i, b_i] \bigcup_{i=1}^{N_2} \{c_i\}.$$

Alors (q, γ) est solution de (\mathcal{P}) .

Démonstration : Si (q, γ) est une solution de (\mathcal{P}') , en intégrant (4.8) sur $[0, t]$ on obtient pour tout t ,

$$m\dot{q}(t^+) - m\dot{q}(0) = m \int_0^t f - (\gamma(t^+) - \gamma(0))$$

et donc

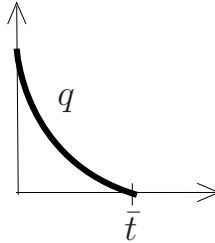
$$m\dot{q}(t^+) + \gamma(t^+) = m\dot{q}(0) + m \int_0^t f = m\tilde{u}(t).$$

Or, comme $m\dot{q} + \gamma$ est dans $BV(I)$, elle est continue presque partout et on a

$$m\dot{q} + \gamma = m\tilde{u} \text{ presque partout sur } [0, T].$$

De plus, comme (q, γ) est solution de (\mathcal{P}') , on a $q \geq 0$ et $\gamma \leq 0$. Par conséquent, pour montrer que (q, γ) est solution de (\mathcal{P}) , il reste à montrer que $q\gamma = 0$. Pour cela, nous allons procéder par étapes.

1. Comme $q(0)$ est strictement positif et q est continu, le premier zéro de q est atteint au temps $\bar{t} = \min(a_1, c_1) > 0$.



Alors, q est strictement positif sur $[0, \bar{t}[$ et $q(\bar{t}) = 0$. Montrons que γ est nulle sur cet intervalle. Soit $t \subset]0, \bar{t}[$, d'après (4.10) intégré sur $[0, t]$ on a

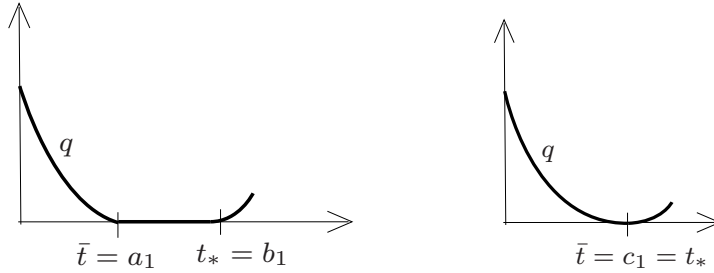
$$\gamma(t^+) - \gamma(0^-) = \langle \lambda, \mathbf{1}_{[0,t]} \rangle.$$

Or, comme γ est dans $BV(I)$, elle est continue presque partout et on a

$$\gamma = \gamma(0^-) = \gamma(0) = 0 \text{ presque partout sur } [0, \bar{t}[.$$

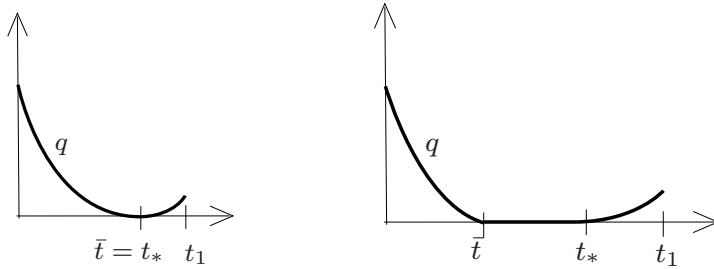
On a donc montré que $q\gamma = 0$ presque partout sur $[0, \bar{t}[$. Si $\bar{t} = T$ on a fini, sinon, on passe à l'étape 2.

2. Par définition, \bar{t} est égal à a_1 ou c_1 .



Si $\bar{t} = c_1$, on pose $t_* = c_1$ et on passe à l'étape 3. Dans l'autre cas, on pose $t_* = b_1$. Comme q est nulle sur $[a_1, b_1]$, on a alors $q\gamma = 0$ sur $[a_1, b_1] = [\bar{t}, t_*]$. Dans ce cas, si $t_* = T$ on a fini, sinon on passe à également l'étape 3.

3. L'hypothèse sur les zéros de q donne l'existence d'un $t_1 > t_*$ pour lequel q est strictement positif sur $]t_*, t_1[$ (il est déjà positif ou nul par hypothèse).



Montrons que γ est presque partout nul sur cet intervalle. Le même raisonnement qu'à l'étape 1 montre que γ y est constant :

$$\gamma = \gamma(t_*^+) \text{ presque partout sur }]t_*, t_1[.$$

Montrons par l'absurde que $\gamma(t_*^+)$ est nul. S'il ne l'était pas, il serait strictement négatif (il est négatif ou nul par hypothèse) et, par définition de la limite à droite, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que

$$\gamma < 0 \text{ sur }]t_*, t_* + \varepsilon[\subset]t_*, t_1[.$$

Mais alors, $C_{q,\gamma}(t) = \{0\}$ sur $]t_*, t_* + \varepsilon[$ et l'équation (4.7) donne $\dot{q}(t^+) = 0$ sur cet intervalle. Or, \dot{q} est dans $BV(I)$ par hypothèse et est donc continue presque partout.

Ainsi, $\dot{q}(t) = 0$ presque partout sur $[t_*, t_* + \varepsilon[$. Par conséquent, comme $q \in W^{1,\infty}(I)$, on a $q = q(t_*) = 0$ sur $[t_*, t_* + \varepsilon[$, ce qui est en contradiction avec $t_* = b_1$ ou $t_* = c_1$. On a donc nécessairement $\gamma(t_*^+) = 0$ et ainsi

$$\gamma = 0 \text{ presque partout sur }]t_*, t_1[,$$

et $q\gamma = 0$ presque partout sur $]t_*, t_1[$. Si $t_1 = T$ on a fini, sinon on passe à l'étape 4.

4. On a donc obtenu $t_1 > 0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} q\gamma = 0 \text{ presque partout sur } [0, t_1] \\ q(t_1) > 0 \\ \gamma(t_1^-) = 0 \\ a_1 \in]0, t_1[\text{ ou } c_1 \in]0, t_1[\end{array} \right.$$

On itère alors le procédé qui s'arrête puisqu'il y a un nombre fini de a_i et c_i . On obtient $(t_0 = 0, \dots, t_i, \dots, t_N = T)$ tel que $q\gamma = 0$ presque partout sur $]t_i, t_{i+1}[$. On a donc bien le résultat souhaité :

$$q\gamma = 0 \text{ presque partout sur } [0, T].$$

Ceci termine la démonstration. \square

Propriété D.2 Soit (q, γ) une solution de (\mathcal{P}) telle que \dot{q} et γ soient dans $BV(I)$. On suppose qu'il existe N_1 et N_2 , entiers naturels, et $(a_i, b_i)_{i=1 \dots N_1}$, $(c_i)_{i=1 \dots N_2}$ dans $[0, T]$ tels que

$$\{t \in [0, T], q(t) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{N_1} [a_i, b_i] \bigcup_{i=1}^{N_2} \{c_i\}.$$

Alors, (q, γ) est solution de (\mathcal{P}') .

Démonstration : Si (q, γ) une solution de (\mathcal{P}) , en calculant la mesure différentielle de chacun des termes de droite et de gauche de l'égalité (presque partout) $\dot{q} + \gamma = \tilde{u}$, on obtient

$$m\ddot{q} = mf + \lambda,$$

où $\lambda = -\dot{\gamma}$ et donc les équations (4.8) et (4.10) sont vérifiées.

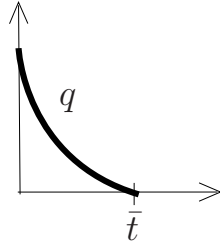
De plus, comme (q, γ) est solution de (\mathcal{P}) , on a $q \geq 0$ et $\gamma \leq 0$. L'égalité $q\gamma = 0$ presque partout montre que γ est nulle presque partout sur les intervalles où q est non nulle. Par conséquent,

$$\text{supp}(\dot{\gamma}) \subset \{t, q(t) = 0\}$$

et (4.9) est également vérifiée.

Pour montrer que (q, γ) est solution de (\mathcal{P}') , il reste à montrer que $\dot{q}(t^+) = \Pi_{C_q, \gamma(t)} \dot{q}(t^-)$ sur $]0, T[$. Pour cela, nous allons procéder par étapes, comme lors de la démonstration précédente.

1. Comme $q(0)$ est strictement positif et q est continu, le premier zéro de q est atteint au temps $\bar{t} = \min(a_1, c_1) > 0$.



Alors, q est strictement positif sur $]0, \bar{t}[$ et donc $]0, \bar{t}[\subset \text{supp}(\lambda)^c$. Par conséquent, si $t \in]0, \bar{t}[$

$$\gamma(t^-) - \gamma(0^+) = -\langle \lambda, \mathbf{1}_{]0, t]} \rangle = 0,$$

et

$$\gamma(t^+) - \gamma(t^-) = -\langle \lambda, \mathbf{1}_{\{t\}} \rangle = 0.$$

On obtient donc

$$\gamma(t^+) = \gamma(t^-) = \gamma(0^+) = 0.$$

Alors, pour $t \in]0, \bar{t}[$, $\gamma(t^-) = 0$ et $q(t) > 0$ implique

$$C_{q, \gamma}(t) = \mathbb{R} \text{ sur }]0, \bar{t}[,$$

et, comme $m\ddot{q} + \gamma = mf$, on a en intégrant sur $\{t\}$,

$$\dot{q}(t^+) = \dot{q}(t^-) - (\gamma(t^+) - \gamma(t^-)) = \dot{q}(t^-).$$

Finalement on a montré

$$\dot{q}(t^+) = \Pi_{C_{q, \gamma}(t)} \dot{q}(t^-) \text{ sur }]0, \bar{t}[.$$

Si $\bar{t} = T$ on a fini, sinon, on passe à l'étape 2.

2. Comme $\gamma(\bar{t}^-) = 0$ et $q(\bar{t}) = 0$, on a $C_{q, \gamma}(\bar{t}) = \mathbb{R}^+$. Comme $\dot{q}(t^-) \leq 0$, pour vérifier (4.7) en \bar{t} , il faut montrer que $\dot{q}(\bar{t}^+) = 0$. Par définition, \bar{t} est égal à a_1 ou c_1 .

S'il est égal à a_1 , q est constant (nul) dans un voisinage à droite de a_1 et on a bien $\dot{q}(\bar{t}^+) = 0$.

Si \bar{t} est égal à c_1 , on est à un instant de décollement et donc $\dot{q}(t^+) \geq 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\dot{q}(\bar{t}^+)$ strictement positif. On a montré au début de la démonstration que $m\ddot{q} + \gamma = mf$. En intégrant cette équation sur $\{\bar{t}\}$ on obtient

$$\gamma(\bar{t}^+) = \gamma(\bar{t}^-) - m(\dot{q}(\bar{t}^+) - \dot{q}(\bar{t}^-)) = -m(\dot{q}(\bar{t}^+) - \dot{q}(\bar{t}^-))$$

et, comme $\dot{q}(\bar{t}^-) \leq 0$ par définition de c_1 , on obtient

$$\gamma(\bar{t}^+) < 0.$$

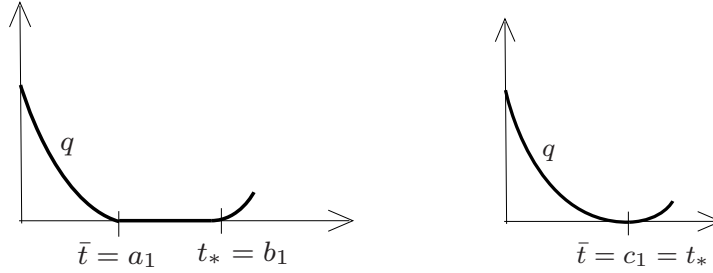
Alors, par définition de la limite à droite, γ est strictement négative sur un voisinage à droite de \bar{t} mais alors, la contrainte $q\gamma = 0$ presque partout impose $q = 0$ sur ce voisinage, ce qui est impossible par définition de c_1 . Donc, $\dot{q}(\bar{t}^+)$ est nécessairement nul.

Dans les deux cas, on a bien vérifié que

$$\dot{q}(\bar{t}^+) = 0 = \Pi_{C_{q,\gamma}(\bar{t})}\dot{q}(\bar{t}^-).$$

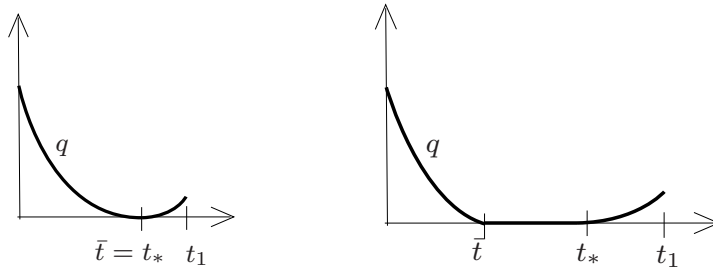
On passe alors à l'étape suivante.

3. Par définition, \bar{t} est égal à a_1 ou c_1 .



Si $\bar{t} = c_1$, on pose $t_* = c_1$ et on passe à l'étape 4. Dans l'autre cas, on pose $t_* = b_1$. Alors, sur l'intervalle $]\bar{t}, t_*[$, on a $\dot{q}(t^+) = \dot{q}(t^-) = 0$ et la loi de choc (4.7) est alors évidemment vérifiée. Dans ce cas, si $t_* = T$ on a fini. Sinon, il faut vérifier (4.7) en t_* . Or, par définition, t_* est un instant de décollement et on peut montrer comme dans l'étape 2 que $\dot{q}(t_*^+)$ est nul. Comme $\dot{q}(t_*^-) = 0$, la loi de choc est bien vérifiée en t_* et on passe à également l'étape 4.

4. L'hypothèse sur les zéros de q donne l'existence d'un $t_1 > t_*$ pour lequel q est strictement positif sur $]t_*, t_1[$ (il est déjà positif ou nul par hypothèse).



Sur $]t_*, t_1[$, q est strictement positive. On procède comme à l'étape 1 pour montrer que

$$\dot{q}(t^+) = \dot{q}(t^-) = \Pi_{C_{q,\gamma}(t)}\dot{q}(t^-) \text{ sur }]t_*, t_1[.$$

5. Comme q est continue et $q(t_1)$ est strictement positive, q est encore strictement positive jusqu'à $t_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Par conséquent, γ est nulle sur cet intervalle et on peut montrer comme précédemment que

$$\dot{q}(t^+) = \Pi_{C_{q,\gamma}(t)}\dot{q}(t^-) \text{ sur } [t_*, t_1 + \varepsilon[.$$

On a donc obtenu $t_1 > 0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}(t^+) = \Pi_{C_q, \gamma(t)} \dot{q}(t^-) \text{ sur }]0, t_1] \\ q(t_1) > 0 \\ \gamma(t_1^-) = 0 \\ a_1 \in]0, t_1[\text{ ou } c_1 \in]0, t_1[\end{array} \right.$$

Comme dans la démonstration précédente, on itère alors le procédé qui s'arrête puisqu'il y a un nombre fini de a_i et c_i . On obtient alors le résultat souhaité :

$$\dot{q}(t^+) = \Pi_{C_q, \gamma(t)} \dot{q}(t^-) \text{ sur }]0, T[.$$

Ceci termine la démonstration. \square

Annexe E

Programmation Orientée Objet et UML

Nous avons utilisé la Programmation Orientée Objet pour implémenter l'algorithme de "contact visqueux" multi-particules en C++ (voir section 5.3). Nous rappelons ici brièvement les principes de la Programmation Orientée Objet, présentons le langage UML avec lequel nous avons modélisé les différentes classes utilisées, puis nous donnons le Diagramme des Classes détaillé de notre programme.

Cette annexe s'inspire largement du cours *Calcul Scientifique et Méthodes objet* d'Alain Lichnewsky⁴ (DEA Analyse Numérique et EDP, Orsay, 2003-2004).

E.1 Programmation Orientée Objet

La modélisation objet consiste à créer une représentation informatique des éléments auxquels on s'intéresse, sans se soucier de l'implémentation. Autrement dit, cette modélisation est indépendante du langage de programmation utilisé. Il s'agit donc de déterminer les objets présents et d'isoler leurs données et les fonctions qui les utilisent. Les principales caractéristiques de la Programmation Orientée Objets sont les suivantes :

- **Les objets** : Il s'agit d'une structure de données qui répond à un ensemble de méthodes. Les données définissent l'état de l'objet et les méthodes décrivent son comportement.
- **Les classes** : C'est une description d'objet précisant son comportement et le type de ses données. Cela permet de créer des objets semblables qui seront appelés instances de la classe.
- **L'héritage** : Principe permettant de créer une nouvelle classe à partir d'une classe existante. Le nom d'héritage provient du fait que la classe fille (la classe nouvellement créée) contient les attributs de sa classe parente (la classe dont elle dérive). L'intérêt majeur de l'héritage est de pouvoir définir de nouveaux attributs et de nouvelles méthodes pour la classe fille qui viennent s'ajouter à ceux et celles héritées de la classe parente. On crée ainsi une hiérarchie de classes sans avoir à repartir de rien.
- **Le polymorphisme** : Alors que l'héritage concerne les classes, le polymorphisme concerne les méthodes des objets. Il y a trois types de polymorphisme :
 - possibilité d'avoir des fonctions de même nom dans des classes différentes (ex : `print` dans toutes les classes, voir section E.3)
 - possibilité de définir plusieurs fonctions de même nom mais avec des paramètres différents en nombre ou en type
 - possibilité de redéfinir une méthode dans les classes héritant d'une classe de base, c'est la spécialisation (ex : `evol` dans la classe `Object`, voir section E.3). Il est alors possible d'appeler la méthode d'un objet sans se soucier de son type intrinsèque, c'est le polymorphisme d'héritage.
- **L'encapsulation** : rassembler les données et les méthodes au sein d'une structure en cachant l'implémentation de l'objet. Les données d'un objet ne peuvent être observées et modifiées que par ses propres méthodes, ce qui permet d'assurer la protection des données. Les méthodes sont utilisées par les autres objets comme des "boîtes noires". On peut ainsi modifier la structure interne des objets ou des méthodes sans que cela ait d'impact sur les utilisateurs.

⁴Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, Orsay, France

E.2 UML

UML (Unified Modeling Language) est un langage standardisé de modélisation Orientée Objet. Il s'agit d'un support méthodologique qui permet de modéliser le problème à traiter. Sa représentation graphique permet une visualisation et une comparaison rapide des variantes possibles. Il permet de représenter différents diagrammes. Dans notre travail, nous avons utilisé le Diagramme des Classes qui décrit les classes d'objets et leurs relations.

Les représentations graphiques d'UML que nous avons utilisé sont les suivantes :

- **Classe** : La donnée est prise dans un ensemble de valeurs correspondant à son type. La méthode a une signature qui est le type des paramètres ainsi que celui de la valeur retournée.

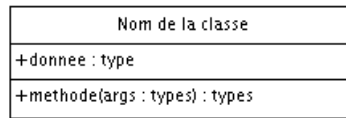


FIG. E.1 – Représentation UML : Classe

- **Agrégation** : Il s'agit d'une association asymétrique où l'un des objets est considéré comme dépendant ou faisant partie de l'autre. Le losange est toujours du côté de l'agrégat : ici, la classe B fait partie de la classe A ou encore, une instance de A a accès à une instance de B. Cette agrégation peut être propriétaire, ce qui signifie que les instances associées (de type A et B) sont créées et détruites en même temps.

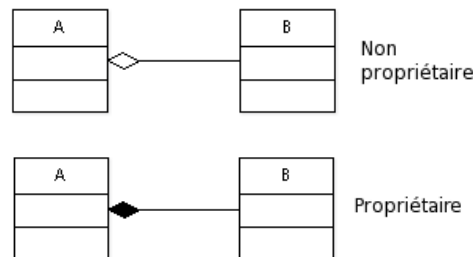


FIG. E.2 – Représentation UML : Agrégation non propriétaire (à gauche) et propriétaire (à droite)

- **Cardinalité** : Une agrégation peut être un lien entre un objet de classe A (l'agrégat) et plusieurs objets de classe B. Le chiffre 1 sur la figure E.3 précise que chaque objet de B ne peut appartenir qu'à un objet de A. Le chiffre N dit que chaque objet de classe A contiendra N objets de classe B. L'indication Nmin..Nmax dirait qu'il peut contenir entre Nmin et Nmax objets de classe B et * désigne un nombre arbitraire.

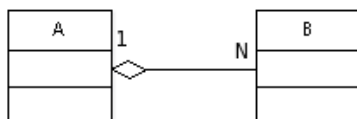


FIG. E.3 – Représentation UML : Cardinalité

- **Généralisation/Spécialisation** : C'est le résultat du mécanisme d'héritage. Une classe A est une généralisation d'une classe B si tous les objets de B ont parmi leurs données et méthodes celles des objets de A. Une classe B est une spécialisation d'une classe A si A généralise B.

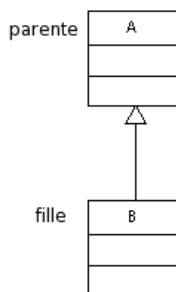


FIG. E.4 – Représentation UML : Généralisation/Spécialisation

E.3 Diagramme des Classes détaillé

Nous donnons ci-dessous la représentation UML détaillée du Diagrammes de Classes que nous avons utilisé. Celui-ci a été présenté et justifié dans la section 5.3.

Classe Object

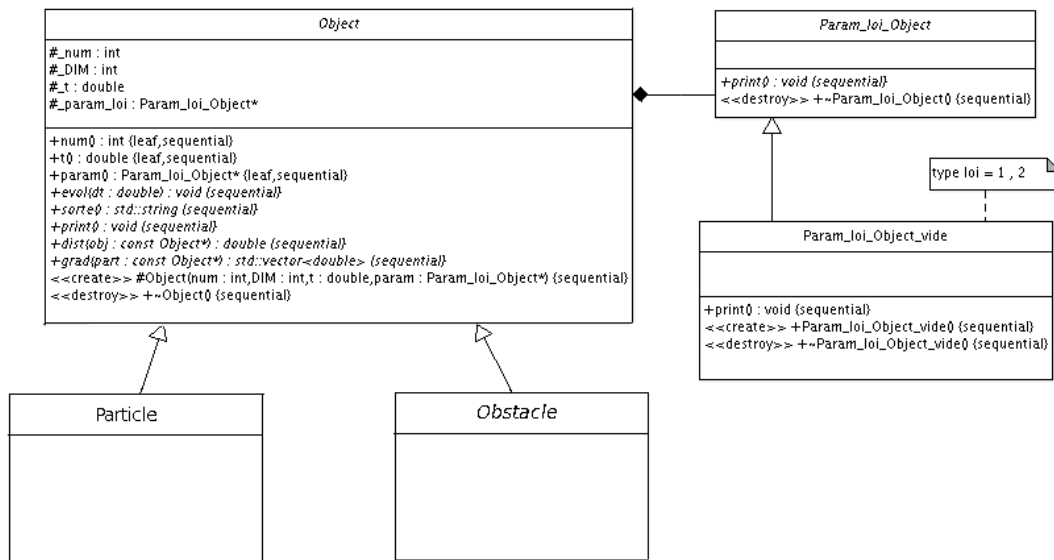


FIG. E.5 – Diagramme des classes : Classe Object

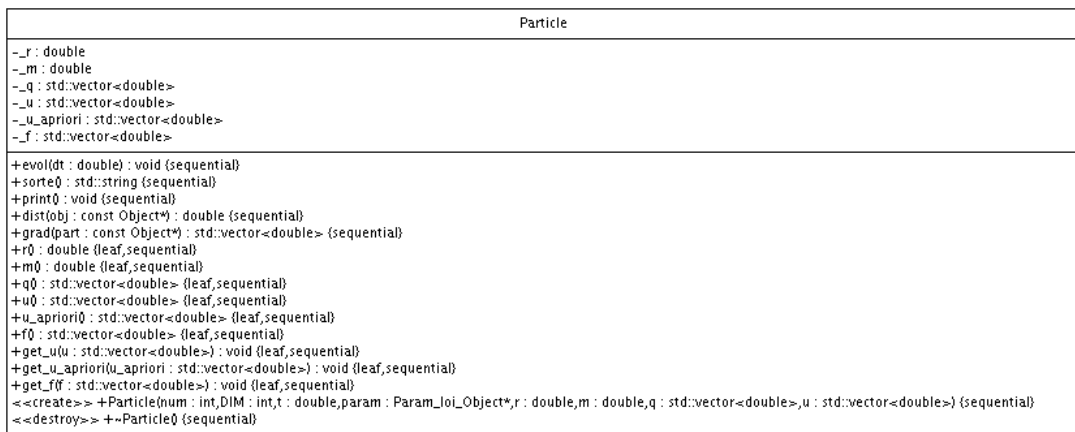


FIG. E.6 – Diagramme des classes : Classe Particle



FIG. E.7 – Diagramme des classes : Classe Obstacle

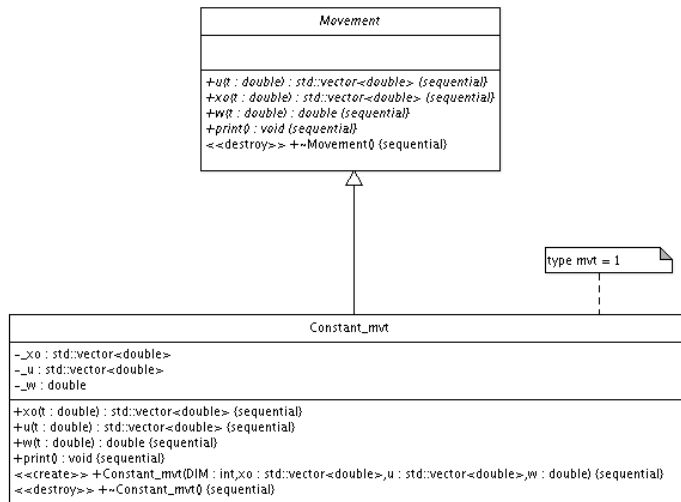


FIG. E.8 – Diagramme des classes : Classe Movement

Classe Contacts

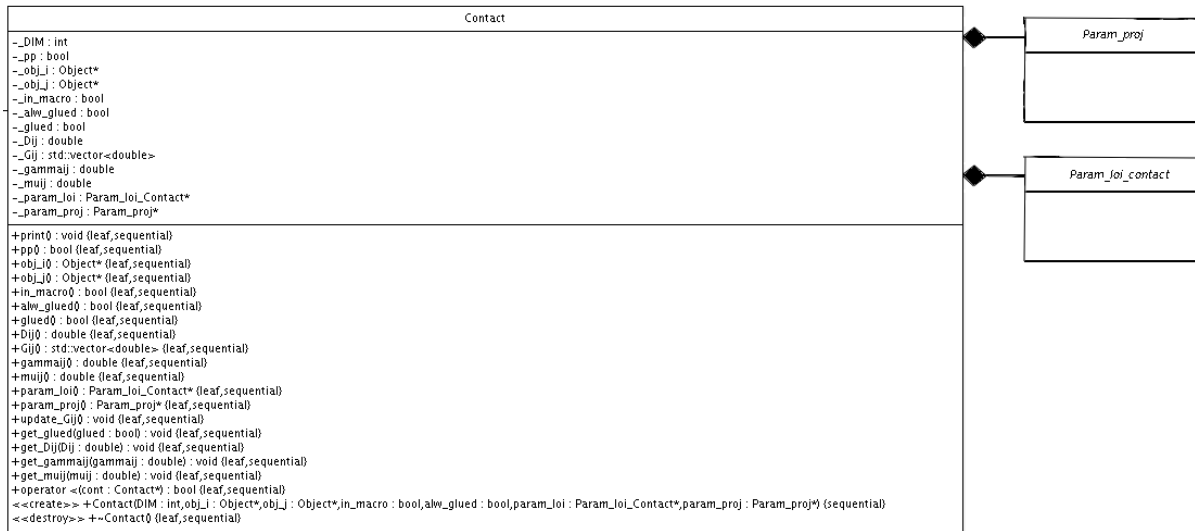


FIG. E.9 – Diagramme des classes : Classe Contact

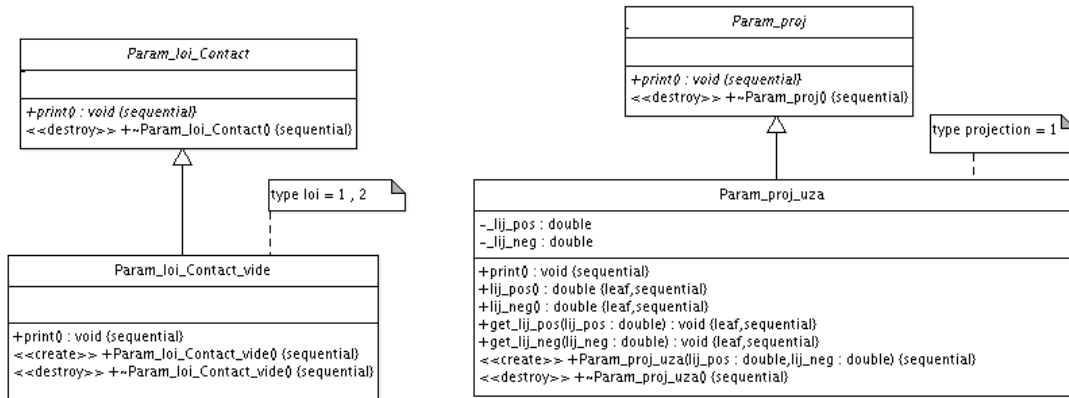


FIG. E.10 – Diagramme des classes : Classes Param_loi_Contact et Param_proj

Gestion de la mémoire

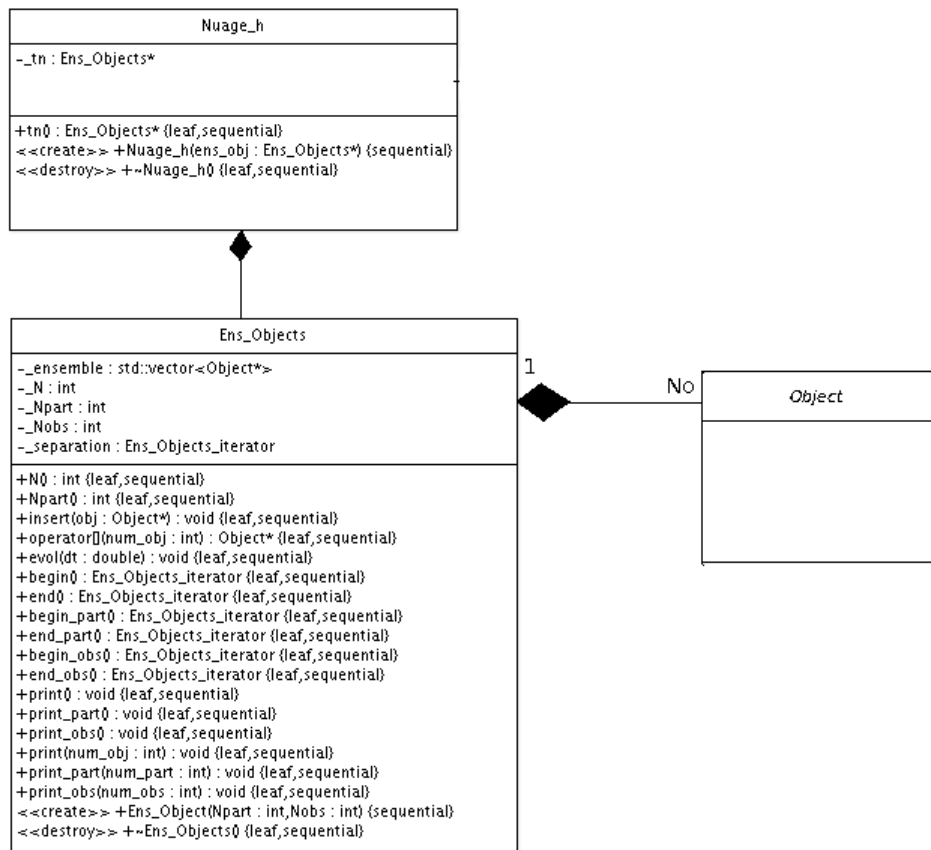


FIG. E.11 – Diagramme des classes : Classe Ens_Objects

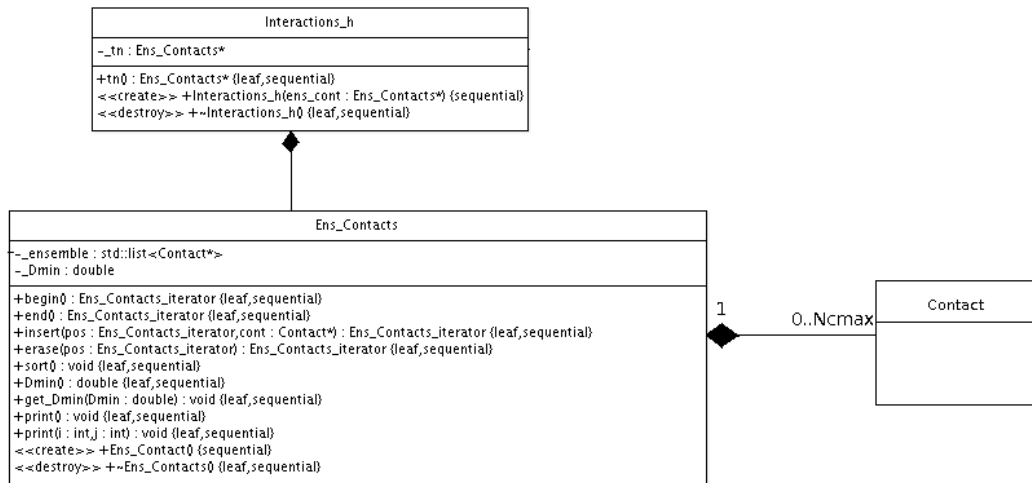


FIG. E.12 – Diagramme des classes : Classe Ens_Contacts

Classe Probleme_h

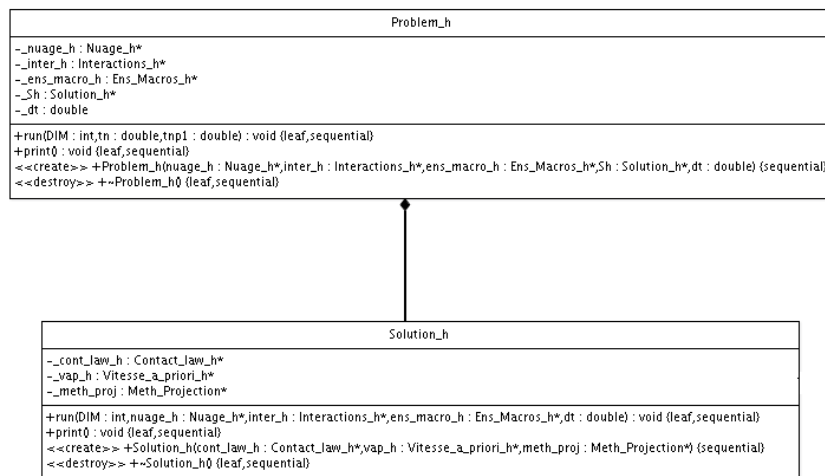


FIG. E.13 – Diagramme des classes : Classe Probleme_h

Classe Contact_law_h

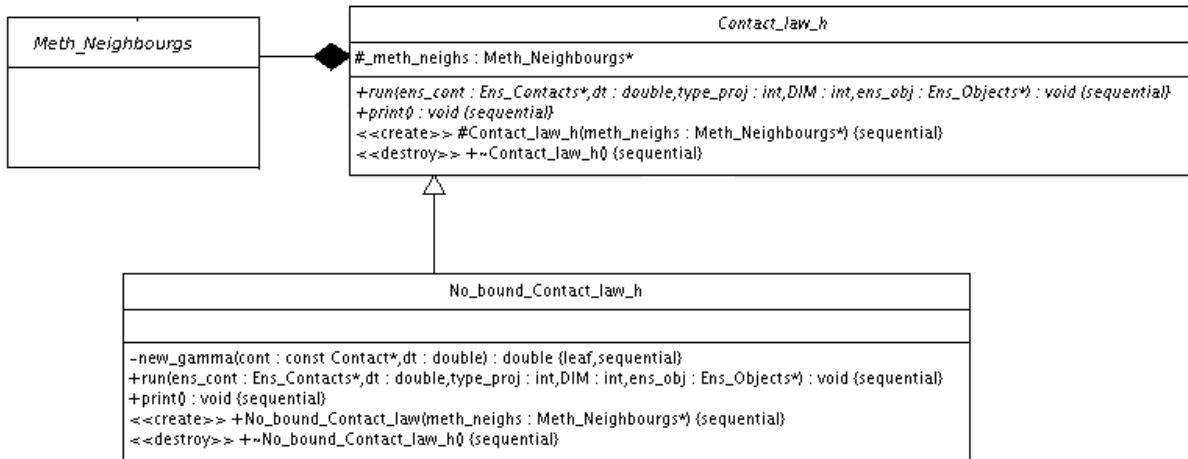


FIG. E.14 – Diagramme des classes : Classe Contact_law_h

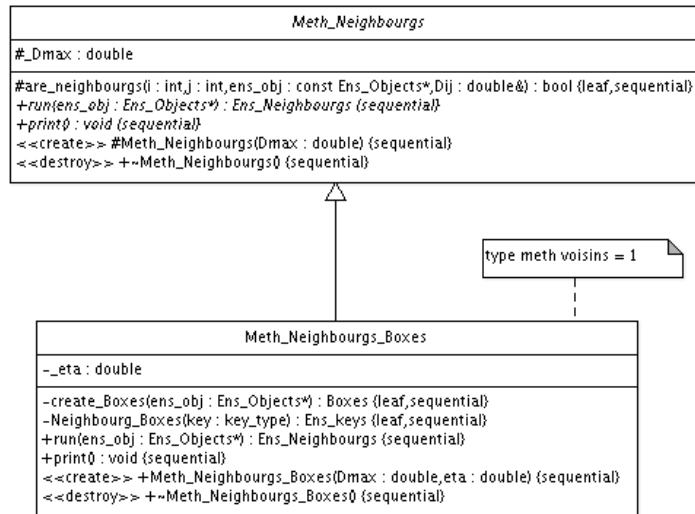


FIG. E.15 – Diagramme des classes : Classe Meth_Neighbours

Classe Vitesse_a_priori_h

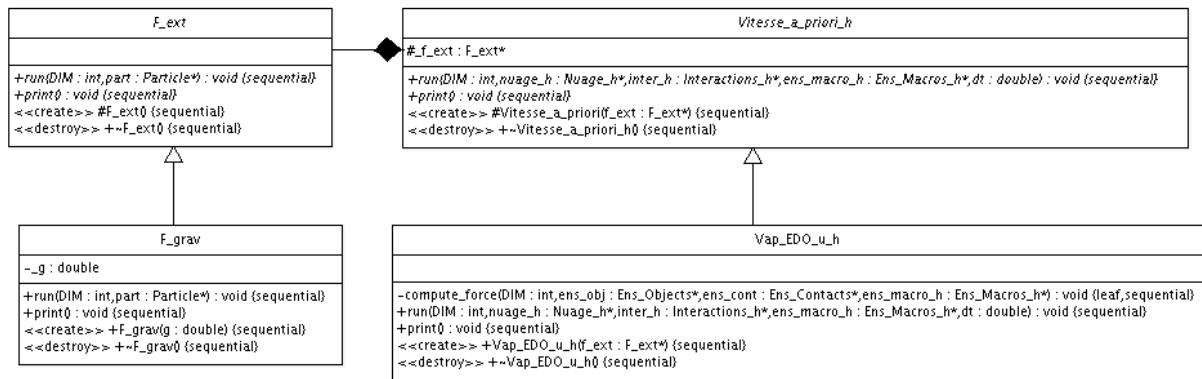


FIG. E.16 – Diagramme des classes : Classe Vitesse_a_priori_h

Classe Meth_Projection

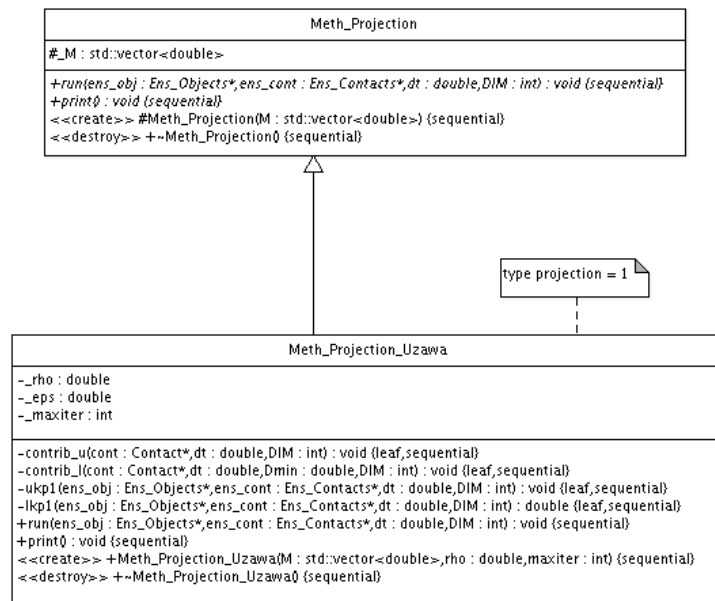


FIG. E.17 – Diagramme des classes : Classe Meth_Projection

Annexe F

Vers la forme faible de l'équation de transport

Dans cette annexe, nous montrons un résultat classique, sur lequel s'appuie la démonstration du lemme 6.17 dans le chapitre sur le boulier visqueux (page 164). Ce lemme montre que $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ vérifie l'équation de transport au sens de la définition 6.9 page 157, ρ^ε étant constante par morceaux.

Propriété F.1 Soient $\phi \in \mathcal{C}_0^1([0, T[\times]a, b[)$, $\rho \in \mathcal{C}^1([0, T])$ et $(a, b) \in \mathcal{C}^1([0, T])^2$ à valeurs dans $[0, 1]$, avec $a(t) < b(t)$ pour tout t dans $[0, T]$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^T \rho(t) \partial_t \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx &= - \int_0^1 \int_0^T \rho'(t) \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx \\ &- \int_0^1 \rho(0) \phi(0, x) \mathbf{1}_{[a(0), b(0)]}(x) dx - \int_0^T [\rho(t) b'(t) \phi(t, b(t)) - \rho(t) a'(t) \phi(t, a(t))] dt. \end{aligned}$$

Démonstration :

Posons

$$I_h = \int_0^1 \int_0^{T-h} \rho(t) \frac{\phi(t+h, x) - \phi(t, x)}{h} \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx.$$

On a

$$hI_h = \int_0^1 \int_0^{T-h} \rho(t) \phi(t+h, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx - \int_0^1 \int_0^{T-h} \rho(t) \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx.$$

Un changement de variable dans la première intégrale en temps donne

$$hI_h = \int_0^1 \int_h^T \rho(t-h) \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t-h), b(t-h)]}(x) dt dx - \int_0^1 \int_0^{T-h} \rho(t) \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx.$$

On décompose cette intégrale en 5 morceaux :

$$I_h = -I_h^1 - I_h^2 - I_h^3 + I_h^4 - I_h^5,$$

où

$$\begin{aligned} I_h^1 &= \int_0^1 \int_h^T \frac{\rho(t) - \rho(t-h)}{h} \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx, \\ I_h^2 &= \int_0^1 \int_h^T \rho(t) \phi(t, x) \frac{\mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) - \mathbf{1}_{[a(t-h), b(t-h)]}(x)}{h} dt dx, \\ I_h^3 &= \int_0^1 \frac{1}{h} \int_0^h \rho(t) \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx, \\ I_h^4 &= \int_0^1 \int_{T-h}^T \rho(t) \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx, \\ I_h^5 &= \int_0^1 \int_h^T [\rho(t-h) - \rho(t)] \phi(t, x) \frac{\mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) - \mathbf{1}_{[a(t-h), b(t-h)]}(x)}{h} dt dx. \end{aligned}$$

Pour démontrer le résultat souhaité, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned}
I_h &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^1 \int_0^T \rho(t) \partial_t \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx, \\
I_h^1 &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^1 \int_0^T \rho'(t) \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt dx, \\
I_h^2 &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T [\rho(t) b'(t) \phi(t, b(t)) - \rho(t) a'(t) \phi(t, a(t))] dt, \\
I_h^3 &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^1 \rho(0) \phi(0, x) \mathbf{1}_{[a(0), b(0)]}(x) dx, \\
I_h^4 &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \\
I_h^5 &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

- **Etude de I_h**

Notons

$$g_h(t, x) = \rho(t) \frac{\phi(t+h, x) - \phi(t, x)}{h} \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) \mathbf{1}_{[h, T]}(t).$$

On a convergence simple sur $[0, T] \times [a, b]$ de g_h vers $\rho(t) \partial_t \phi(t, x) \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x)$ et le théorème des accroissements finis nous donne la majoration suivante sur $[0, T] \times [a, b]$

$$|g_h(t, x)| \leq \|\rho\|_{L^\infty([0, 1])} \|\partial_t \phi\|_{L^\infty([0, T] \times [a, b])}.$$

Le théorème de convergence dominée nous donne donc le résultat souhaité.

- **Etude de I_h^1**

On procède de la même façon que pour I_h .

- **Etude de I_h^2**

Fixons d'abord t dans $[h, T]$, et notons

$$\gamma_h(t) = \int_0^1 \rho(t) \phi(t, x) \frac{\mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) - \mathbf{1}_{[a(t-h), b(t-h)]}(x)}{h} dx.$$

a et b étant continues, pour h assez petit, on a $a(t-h) < b(t)$, $a(t-h) < b(t-h)$ et $b(t-h) > a(t)$. Supposons (les autres cas se traitent de la même façon) que $a(t-h) < a(t) < b(t-h) < b(t)$. Alors,

$$\mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) - \mathbf{1}_{[a(t-h), b(t-h)]}(x) = \mathbf{1}_{[b(t-h), b(t)]} - \mathbf{1}_{[a(t-h), a(t)]}$$

et donc,

$$\gamma_h(t) = \underbrace{\frac{1}{h} \int_{b(t-h)}^{b(t)} \rho(t) \phi(t, x) dx}_{\gamma_h^b(t)} - \underbrace{\frac{1}{h} \int_{a(t-h)}^{a(t)} \rho(t) \phi(t, x) dx}_{\gamma_h^a(t)}.$$

Etudions γ_h^b . On note

$$\Delta_h^b(t) = \gamma_h^b(t) - \rho(t)b'(t)\phi(t, b(t)).$$

On veut montrer que $\Delta_h^b(t)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} \Delta_h^b(t) &= \frac{1}{h}\rho(t) \int_{b(t-h)}^{b(t)} [\phi(t, x) - \phi(t, b(t))]dx \\ &\quad + \left[\frac{b(t) - b(t-h)}{h} - b'(t) \right] \rho(t)\phi(t, b(t)). \end{aligned}$$

La continuité de $x \mapsto \phi(t, x)$ en $b(t)$ donne, pour $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\exists h_1 > 0, \forall x, |x - b(t)| < h_1 \implies |\phi(t, x) - \phi(t, b(t))| \leq \varepsilon$$

puis, la continuité de b en t donne

$$\exists h_2 > 0, \forall \bar{h} < h_2, |b(t) - b(t - \bar{h})| < h_1.$$

Ainsi, on a obtenu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h_2 > 0, \forall h < h_2, x \in [b(t-h), b(t)] \implies |\phi(t, x) - \phi(t, b(t))| \leq \varepsilon,$$

ce qui nous permettra de majorer le premier terme de $\Delta_h^b(t)$. Pour le second terme, on utilise la dérivabilité de b en t qui nous donne, pour $\varepsilon > 0$ fixé

$$\exists h_3, \forall \bar{h} < h_3, \left| \frac{b(t) - b(t - \bar{h})}{\bar{h}} - b'(t) \right| \leq \varepsilon$$

et on a

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon, \exists h_0 = \min(h_2, h_3), \forall h < h_0, \\ |\Delta_h^b(t)| &\leq \varepsilon \|\rho\|_{L^\infty([0,1])} \left| \frac{b(t) - b(t-h)}{h} \right| + \varepsilon \|\rho\|_{L^\infty([0,1])} \|\phi\|_{L^\infty([0,T] \times [a,b])}. \end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis nous permet finalement d'écrire

$$\forall \varepsilon, \exists h_0 > 0, \forall h < h_0,$$

$$|\Delta_h^b(t)| \leq \varepsilon (\|\rho\|_{L^\infty([0,1])} \|\partial_t b\|_{L^\infty([0,1])} + \|\rho\|_{L^\infty([0,1])} \|\phi\|_{L^\infty([0,T] \times [a,b])}).$$

On a donc montré que $\Delta_h^b(t)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro, c'est-à-dire que $\gamma_h^b(t)$ tend vers $\rho(t)b'(t)\phi(t, b(t))$ quand h tend vers zéro. On peut faire de même pour $\gamma_h^a(t)$ et on obtient finalement, pour tout t de $[h, T]$,

$$\gamma_h(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \rho(t)b'(t)\phi(t, b(t)) - \rho(t)a'(t)\phi(t, a(t)).$$

On écrit enfin que

$$I_h^2 = \int_0^T \gamma_h(t) \mathbf{1}_{[h,T]}(t) dt.$$

Ce qui précède montre la convergence simple de $\gamma_h(t)\mathbf{1}_{[h,T]}(t)$ vers $\rho(t)b'(t)\phi(t, b(t)) - \rho(t)a'(t)\phi(t, a(t))$ pour tout t dans $[0, T]$ et on a la majoration suivante

$$\begin{aligned} |\gamma_h(t)\mathbf{1}_{[h,T]}| &\leq |\gamma_h(t)| \leq |\gamma_h^b(t)| + |\gamma_h^a(t)| \\ &\leq \|\rho\|_{L^\infty([0,1])} \|\phi\|_{L^\infty([0,T] \times [a,b])} \left(\left| \frac{b(t) - b(t-h)}{h} \right| + \left| \frac{a(t) - a(t-h)}{h} \right| \right) \\ &\leq \|\rho\|_{L^\infty([0,1])} \|\phi\|_{L^\infty([0,T] \times [a,b])} (\|\partial_t b\|_{L^\infty([0,1])} + \|\partial_t a\|_{L^\infty([0,1])}). \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée nous permet donc de conclure

$$I_h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T [\rho(t)b'(t)\phi(t, b(t)) - \rho(t)a'(t)\phi(t, a(t))] dt.$$

• Etude de I_h^3

On note, pour x dans $[0, 1]$ donné,

$$\Delta_h(x) = \frac{1}{h} \left(\int_0^h \rho(t)\phi(t, x)\mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt \right) - \rho(0)\phi(0, x)\mathbf{1}_{[a(0), b(0)]}(x)$$

On veut montrer que $\Delta_h(x)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro. On a

$$\begin{aligned} \Delta_h(x) &= \underbrace{\frac{1}{h} \int_0^h [\rho(t)\phi(t, x) - \rho(0)\phi(0, x)]\mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) dt}_{A_h(x)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{h} \int_0^h \rho(0)\phi(0, x) [\mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) - \mathbf{1}_{[a(0), b(0)]}(x)] dt}_{B_h(x)} \end{aligned}$$

On utilise la continuité de $t \mapsto \rho(t)\phi(t, x)$ en zéro pour obtenir

$$\forall x \in [0, 1], \forall \varepsilon, \exists h_1 > 0, \forall t \leq h_1, |\rho(t)\phi(t, x) - \rho(0)\phi(0, x)| \leq \varepsilon,$$

et donc,

$$\forall x \in [0, 1], \forall \varepsilon, \exists h_1 > 0, \forall h \leq h_1, |A_h(x)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $A_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ pour tout x dans $[0, 1]$.

On utilise ensuite la continuité de $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ en zéro pour obtenir

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{a(0), b(0)\}, \exists h_2 > 0, \forall t \leq h_2, \mathbf{1}_{[a(t), b(t)]}(x) - \mathbf{1}_{[a(0), b(0)]}(x) = 0,$$

donc,

$$\forall x \in [0, 1] \setminus \{a(0), b(0)\}, \exists h_2 > 0, \forall h \leq h_2, B_h(x) = 0.$$

Ainsi, $B_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ pour presque tout x dans $[0, 1]$.

Finalement, on a montré que $\Delta_h(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ pour presque tout x dans $[0, 1]$. Comme $\Delta_h(x)$ est majoré sur $[0, 1]$ par $4\|\rho\|_{L^\infty([0,1])}\|\phi\|_{L^\infty([0,T] \times [a,b])}$, le théorème de convergence dominée nous permet de conclure :

$$I_h^3 - \int_0^1 \rho(0)\phi(0, x)\mathbf{1}_{[a(0),b(0)]}(x)dx = \int_0^1 \Delta_h(x)dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

• **Etude de I_h^4**

Comme ϕ est à support compact dans $[0, T[\times]a, b[$, on a clairement $I_h^4 = 0$ pour h assez petit.

• **Etude de I_h^5**

$$|I_h^5| \leq \|\phi\|_{L^\infty([0,T] \times [a,b])} \int_h^T \left(|\rho(t) - \rho(t-h)| \left| \int_0^1 \frac{\mathbf{1}_{[a(t),b(t)]}(x) - \mathbf{1}_{[a(t-h),b(t-h)]}(x)}{h} dx \right| \right) dt.$$

Comme précédemment, on majore

$$\left| \int_0^1 \frac{\mathbf{1}_{[a(t),b(t)]}(x) - \mathbf{1}_{[a(t-h),b(t-h)]}(x)}{h} dx \right| \leq \|\partial_t b\|_{L^\infty([0,1])} + \|\partial_t a\|_{L^\infty([0,1])}$$

et on a donc

$$|I_h^5| \leq \|\phi\|_{L^\infty([0,T] \times [a,b])} (\|\partial_t b\|_{L^\infty([0,1])} + \|\partial_t a\|_{L^\infty([0,1])}) \int_0^T |\rho(t) - \rho(t-h)| \mathbf{1}_{[h,T]}(t) dt.$$

On utilise alors la continuité de ρ et le théorème de convergence dominée pour conclure.

On a ainsi terminé la démonstration. \square

Bibliographie

- [1] Y. ACHDOU, O. PIRONNEAU, AND F. VALENTIN. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *J. Comp. Phys.*, 147(1) :187–218, 1998.
- [2] Z. ADAMCZYK, M. ADAMCZYK, AND T.G.M. VAN DE VEN. Resistance coefficient of a solid sphere approaching plane and curved boundaries. *J. Colloid Interface Science*, 96(1) :204–213, 1983.
- [3] G. ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation*. Editions de l'École Polytechnique, 2005.
- [4] F. ALOUGES, A. DESIMONE, AND A. LEFEBVRE. Optimal strokes for low reynolds number swimmers : an example. Accepté pour publication dans *Journal of Nonlinear Science*, 2007.
- [5] A. AMBARI, B. GAUTHIER-MANUEL, AND E. GUYON. Wall effects on a sphere translating at constant velocity. *J. Fluid Mech.*, 149 :235–253, 1984.
- [6] P. ANGOT, C-H. BRUNEAU, AND P. FABRIE. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999.
- [7] <http://argouml.tigris.org/>. Page Web ArgoUML.
- [8] D. ARNOLD, F. BREZZI, AND M. FORTIN. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21(4) :337–344, 1984.
- [9] Y. ASSOU, D. JOYEUX, A. AZOUNI, AND F. FEUILLEBOIS. Mesure par interférométrie laser du mouvement d'une particule proche d'une paroi. *J. Phys. III*, 1 :315–330, 1991.
- [10] L. BERLYAND, L. BORCEA, AND A. PANCHENKO. Network approximation for effective viscosity of concentrated suspensions with complex geometry. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 36(5) :1580–1628, 2005.
- [11] L. BERLYAND AND E. KHHRUSLOV. Homogenized non-Newtonian viscoelastic rheology of a suspension of interaction particles in a viscous Newtonian fluid. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 64(3) :1002–1034, 2004.
- [12] L. BOCQUET AND J-L. BARRAT. Hydrodynamic boundary conditions, correlation functions, and kubo relations for confined fluids. *Phys. Rev. E*, 49(4) :3079–3092, 1994.
- [13] G. BOSSIS AND J.F. BRADY. Dynamic simulation of sheared suspensions. I. General method. *J. Comp. Phys.*, 80(10) :5141–5154, 1984.

- [14] G. BOSSIS AND J.F. BRADY. The rheology of concentrated suspensions of spheres in simple shear flow by numerical simulation. *J. Fluid Mech.*, 155 :105–129, 1985.
- [15] H. BRENNER. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chem. Engng. Sci.*, 16 :242–251, 1961.
- [16] D. BRESCH AND V. MILISIC. Higher order boundary layer corrections and wall law derivation : a unified approach. preprint, 2006.
- [17] J.E. BUTLER AND E.S.G. SHAQFEH. Dynamic simulations of the inhomogeneous sedimentation of rigid fibres. *J. Fluid Mech.*, 468 :205–237, 2002.
- [18] M.D.A. COOLEY AND M.E. O’NEIL. On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere. *Mathematika*, 16 :37–49, 1969.
- [19] J.M. CORON. *Control and nonlinearity*, volume 136. Mathematical Surveys and Monograph, 2007. sec. 3.2.
- [20] R.G. COX. The motion of suspended particles almost in contact. *Int. J. Multiphase Flow*, 1 :343–371, 1974.
- [21] R.G. COX AND H. BRENNER. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface - ii - small gap width, including inertial effects. *Chem. Engng. Sci.*, 22 :1753–1777, 1967.
- [22] S.L. DANCE, E. CLIMENT, AND M.R. MAXEY. Collision barrier effects on the bulk flow in a random suspension. *Physics of Fluids*, 16(3) :828–831, 2004.
- [23] S.L. DANCE AND M.R. MAXEY. Incorporation of lubrication effects into the force-coupling method for particulate two-phase flow. *J. Comp. Phys.*, 189 :212–238, 2003.
- [24] R.H. DAVIS. Effect of surface roughness on a sphere sedimenting through a dilute suspension of neutrally buoyant spheres. *Phys. Fluids A*, 4(12) :2607–2619, 1992.
- [25] B. DESJARDINS AND M.J. ESTEBAN. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 146 :59–71, 1999.
- [26] D.I. DRATLER AND W.R. SCHOWALTER. Dynamic simulation of suspensions of non-Brownian hard spheres. *J. Fluid Mech.*, 325 :53–77, 1996.
- [27] L.J. DURLOFSKU AND J.F. BRADY. Dynamic simulation of bounded suspensions of hydrodynamically interacting particles. *J. Fluid Mech.*, 200 :39–67, 1989.
- [28] A. EINSTEIN. *Ann. Phys. Leipzig*, 19 :289, 1906. *Ibid.* 1911, 34, 591.
- [29] M.L. EKIEL-JEŻEWSKA, F. FEUILLEBOIS, K. MASMOUDI N. LECOQ, R. ANTHORE, F. BOSTEL, AND E. WAJNRYB. Hydrodynamic interactions between two spheres at contact. *Phys. Rev. E*, 59(3) :3182–3191, 1999.
- [30] X. FAN, N. PHAN-THIEN, AND R. ZHENG. A direct simulation of fibre suspensions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 74 :113–135, 1998.
- [31] A.L. FOGELSON AND C.S. PESKIN. A fast numerical method for solving the three-dimensional Stokes equations in the presence of suspended particles. *J. Comp. Phys.*, 79 :50–69, 1988.
- [32] A.F. FORTES, D.D. JOSEPH, AND T.S. LUNDGREN. Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles. *J. Fluid Mech.*, 17 :467–48, 1987.

-
- [33] N.A. FRANKEL AND A. ACRIVOS. On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres. *Chem. Engng. Sci.*, 22 :847–853, 1967.
- [34] <http://www.freefem.org/ff3d/>. Page Web **FreeFem3D**.
- [35] V. GIRAULT AND P.-A. RAVIART. *Finite element methods for the Navier-Stokes equations*. Springer, 1986.
- [36] R. GLOWINSKI, T-W. PAN, AND T.I. HESLAAND D.D. JOSEPH. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 25 :755–794, 1999.
- [37] R. GLOWINSKI, T-W. PAN, AND J. PERRIAUX. A fictitious domain method for dirichlet problem and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 111 :283–303, 1994.
- [38] R. GLOWINSKI, T-W. PAN, AND J. PERRIAUX. A fictitious domain method for external incompressible flow modeled by Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 112 :133–148, 1994.
- [39] R. GLOWINSKI, T-W. PAN, AND J. PERRIAUX. A lagrange multiplier/fictitious domain method for the numerical simulation of incompressible viscous flow around mouving rigid bodies : (I) case where the rigid body motions are known a priori. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 324 :361–369, 1997.
- [40] A.J. GOLDMAN, R.J. COX, AND H. BRENNER. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall - i - motion through a quiescent fluid. *Chem. Engng. Sci.*, 22 :637–651, 1967.
- [41] S. HABER AND H. BRENNER. Hydrodynamic interaction of spherical particles in quadratic Stokes flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 25 :1009–1032, 1999.
- [42] A. HARAUX. *Nonlinear evolution equations - global behaviour of solutions*. Springer Verlag, 1981.
- [43] F. HECHT AND O. PIRONNEAU. <http://www.freefem.org>. Page Web **FreeFem++**.
- [44] <http://www.freefem.org/examples/NSpenal.edp>. Source du code de la valve cardiaque.
- [45] M. HILLAIRET. Aspects interactifs de la mécanique des fluides. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2005.
- [46] H.H. HU. Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures. *Int. J. Multiphase Flow*, 22(2) :335–352, 1996.
- [47] H.H. HU, D.D. JOSEPH, AND M.J. CROCHET. Direct simulation of fluid particle motion. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 3 :285–306, 1992.
- [48] J. JANELA, A. LEFEBVRE, AND B. MAURY. A penalty method for the simulation of fluid - rigid body interaction. *ESAIM :Proc*, 14 :115–123, 2005.
- [49] A.A. JOHNSON AND T.E. TEZDUYAR. Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 134 :351–373, 1996.
- [50] K. KHADRA, P. ANGOT, S. PARNEIX, AND J.P. CALTAGIRONE. Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34(8) :651–684, 2000.

-
- [51] S. KIM AND S. J. KARRILA. *Microhydrodynamics : Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann, 1991.
- [52] S. LABBÉ, J. LAMINIE, AND V. LOUVET. Csimoon. Calcul scientifique, méthodologie orientée objet et environnement : de l'analyse mathématique à la programmation. Technical Report RT 2001-01, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, 2004.
- [53] N. LECOCQ, F. FEUILLEBOIS, N. ANTHORE, R. ANTHORE, F. BOSTEL, AND C. PETIPAS. Precise measurement of particle-wall hydrodynamic interactions at low reynolds number using laser interferometry. *Phys. Fluids A*, 5(1) :3–12, 1993.
- [54] N. LECOQ, R. ANTHORE, B. CICHOCKI, P. SZYMCZAK, AND F. FEUILLEBOIS. Drag force on a sphere moving towards a corrugated wall. *J. Fluid Mech.*, 513 :247–264, 2004.
- [55] A. LEFEBVRE. Fluid-particle simulations with FreeFem++. *ESAIM :Proc*, 18 :120–132, 2007.
- [56] A. LEFEBVRE AND B. MAURY. Apparent viscosity of a mixture of a newtonian fluid and interacting particles. *Comptes Rendus Mecanique*, 333(12) :923–933, 2005.
- [57] M.A. MADER, C. MISBAH, AND T. PODGORSKI. Dynamics and rheology of vesicles in a shear flow. *Microgravity sci. technol.*, XVIII-3/4 :199–203, 2006.
- [58] M.A. MADER, V. VITKOVA, M. ABKARIAN, A. VIALLAT, AND T. PODGORSKI. Dynamics of viscous vesicles in shear flow. *Eur. Phys. J. E*, 19 :389–397, 2006.
- [59] A.D. MAUDE. End effects in a falling-sphere viscosimeter. *Br. J. Appl. Phys.*, 12 :293–295, 1961.
- [60] B. MAURY. Numerical analysis of a finite element / volume penalty method. Soumis pour publication.
- [61] B. MAURY. A many-body lubrication model. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 325(I) :1053–1058, 1997.
- [62] B. MAURY. Direct simulation of 2d fluid-particle flows in biperiodic domains. *J. Comp. Phys.*, 156 :325–351, 1999.
- [63] B. MAURY. *Analyse fonctionnelle*. Ellipse, 2004.
- [64] B. MAURY. A time-stepping scheme for inelastic collisions. *Numerische Mathematik*, 102(4) :649–679, 2006.
- [65] B. MAURY. A gluey particle model. *ESAIM :Proc*, 18 :133–142, 2007.
- [66] B. MAURY AND J. VENEL. Un modèle de mouvements de foule. *ESAIM :Proc*, 18 :143–152, 2007.
- [67] J.J. MOREAU, P.D. PANAGIOTOPOULOS, AND G. STANG. *Topics in Nonsmooth Mechanics*. Birkhäuser Verlag, 1988.
- [68] A. NAJAFI AND R. GOLESTANIAN. Simple swimmer at low reynolds number : Three linked spheres. *Phys. Rev. E*, 69(062901), 2004.
- [69] S. NASSERI, N. PHAN-THIEN, AND X.J. FAN. Lubrication approximation in completed double layer boundary element method. *Computational Mechanics*, 26 :388–397, 2000.

-
- [70] O.A. OLEINIK, A.S. SHAMAEV, AND G.A. YOSIFIAN. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. North-Holland, 1992.
- [71] N.A. PATANKAR, P. SINGH, D.D. JOSEPH, R. GLOWINSKI, AND T-W. PAN. A new formulations for the distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 26 :1509–152, 2000.
- [72] O. PIRONNEAU, J. LIOU, AND T. TEZDUYAR. Characteristic-galerkin and galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equations with time-dependent domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 100(1) :117–141, 1992.
- [73] T.N. RANDRIANARIVELO, G. PIANET, S. VINCENT, AND J.P. CALTAGIRONE. Numerical modelling of solid particle motion using a new penalty method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47 :1245–1251, 2005.
- [74] S. RICHARDSON. A model for the boundary condition of a porous material. part 2. *J. Fluid Mech.*, 49(2) :327–336, 1971.
- [75] M. SCHATZMANN. Uniqueness and continuous dependence on data for one dimensional impact problems. *Mathematical and Computational modelling*, 28 :1–18, 1998.
- [76] P. SINGH, T.I. HESLA, AND D.D. JOSEPH. Distributed lagrange multiplier method for particulate flows with collisions. *Int. J. Multiphase Flow*, 29 :495–509, 2003.
- [77] J.R. SMART AND D.T. LEIGHTON. Measurement of the hydrodynamic roughness of non colloidal spheres. *Phys. Fluids A*, 1 :52, 1989.
- [78] G.G. STOKES. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9(II) :8–106, 1851.
- [79] G.I. TAYLOR. A model for the boundary condition of a porous material. part 1. *J. Fluid Mech.*, 49(2) :319–326, 1971.
- [80] R. TEMAM AND A. MIRANVILLE. *Mathematical modeling in continuum mechanics*. Cambridge university press, 2001.
- [81] O.I. VINOGRADOVA AND G.E. YACUBOV. Surface roughness and hydrodynamic boundary conditions. *Phys. Rev. E*, 73 :045302(R), 2006.
- [82] D. WAN AND S. TUREK. Direct numerical simulation of particulate flow via multigrid fem techniques and the fictitious boundary method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 51 :531–566, 2006.
- [83] D. WAN AND S. TUREK. Fictitious boundary and moving mesh methods for the numerical simulation of rigid particulate flows. *J. Comp. Phys.*, 222(1) :28–56, 2007.
- [84] F.K. WIPPERMANN. On the fluid dynamics of the aortic valve. *J. Fluid Mech.*, 159 :497–501, 1985.
- [85] Y. YAMANE, Y. KANEDA, AND M. DIO. Numerical simulation of semi-dilute suspensions of rodlike particles in shear flow. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 54 :405–421, 1994.
- [86] S. YUU AND Y. FUKUI. Measurement of fluid resistance correction factor for a sphere moving through a viscous fluid towards a plane surface. *AIChE Journal*, 27(1) :168–170, 1981.

- [87] S. ZENG, E.T. KERNS, AND R.H. DAVIS. The nature of particle contacts in sedimentation. *Phys. of Fluids*, 8(6) :1389–1396, 1996.

N° d'impression 2821
4ème trimestre 2007

Résumé.

Modélisation numérique d'écoulements fluide/particules.

Prise en compte des forces de lubrification.

Nous nous intéressons à la simulation directe d'écoulements fluide-particules très denses en particules et plus particulièrement à la prise en compte des forces de lubrification qui sont exercées sur les particules par le fluide interstitiel. Cette thèse comporte trois parties : simulation d'écoulements de particules dans un fluide visqueux par une méthode de pénalisation, étude et prise en compte des interactions rapprochées, modèle macroscopique pour un système discret 1D de sphères plongées dans un fluide visqueux.

- Dans la première partie, nous présentons une méthode permettant la simulation du mouvement d'un corps rigide dans un fluide Newtonien. Nous montrons que la pénalisation du tenseur des contraintes, associée à une discrétisation en temps par la méthode des caractéristiques, conduit à une formulation variationnelle de type Stokes généralisée. Des tests numériques sont effectués sous `FreeFem++` afin d'étudier la convergence. On présente également trois exemples d'utilisation de la méthode.

- Dans la seconde partie nous proposons un modèle permettant de prendre en compte les forces de lubrification dans les simulations directes d'écoulements fluide/particules telles que celle décrite dans la première partie. Nous présentons d'abord un modèle de *contact visqueux*, modélisant l'action de la force de lubrification dans le cas d'une particule et d'un plan. Il est obtenu comme limite, à viscosité nulle, du modèle de lubrification. L'algorithme associé repose sur une étape de projection des vitesses, à chaque instant, sur un espace dit de *vitesses admissibles*. Nous montrons, dans ce cas particule/plan, la convergence du schéma vers le modèle proposé et nous généralisons ensuite l'algorithme au cas multi-particules. Nous présentons également un exemple de programmation orientée objet de l'algorithme obtenu.

- Finalement dans la troisième partie, nous considérons un système discret de sphères (boulier en 1D) qui interagissent à travers la force de lubrification. Le modèle microscopique repose sur le développement de cette force à courte distance. Nous proposons une équation constitutive macroscopique, de type Newtonien, reposant sur une viscosité linéique proportionnelle à l'inverse de la fraction locale de fluide. Nous établissons la convergence du modèle microscopique vers le modèle macroscopique proposé.

Mots clés : écoulements fluide/particules, fluide Newtonien, Navier-Stokes, pénalisation, simulation numérique, éléments finis, interactions rapprochées, contacts, force de lubrification, programmation orientée objet, modélisation micro-macro.

Codes AMS (MSC2000) : 65M60, 74F10, 74Q10, 74Q15, 76D05, 76M10, 76M50, 76T20.