



**HAL**  
open science

# Applications du formalisme des faisceaux gaussiens à la modélisation de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un objet 3D complexe

Julien Hillairet

► **To cite this version:**

Julien Hillairet. Applications du formalisme des faisceaux gaussiens à la modélisation de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un objet 3D complexe. Autre. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2007. Français. NNT: . tel-00258429

**HAL Id: tel-00258429**

**<https://theses.hal.science/tel-00258429>**

Submitted on 22 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER  
U.F.R. P.C.A.

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université TOULOUSE III**

Spécialité : Électronique - Micro-Ondes

présentée par

**Julien HILLAIRET**

**APPLICATIONS DU FORMALISME DES  
FAISCEAUX GAUSSIENS À LA MODÉLISATION  
DE L'INTERACTION D'UNE ONDE  
ÉLECTROMAGNÉTIQUE AVEC UN OBJET 3D  
COMPLEXE**

Thèse soutenue le 6 décembre 2007 à l'auditorium de l'ONERA

Membres du Jury :

Pr. Didier DECOSTER	Rapporteur
Dr. Christine LETROU	Rapporteur
Pr. Patrick VAUDON	Examineur
Pr. Paul COMBES	Examineur
Dr. Sylvain BOLIOLI	Encadrant ONERA et co-directeur de thèse
Dr. Jérôme SOKOLOFF	Encadrant universitaire et co-directeur de thèse



LAME

Laboratoire de Micro-ondes et d'Electromagnétisme

118, route de Narbonne  
31062 TOULOUSE cedex



Département Électromagnétisme et Radar

2, avenue Édouard Belin - BP 4025  
31055 TOULOUSE cedex 4



UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER  
U.F.R. P.C.A.

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université TOULOUSE III**

Spécialité : Électronique - Micro-Ondes

présentée par

**Julien HILLAIRET**

**APPLICATIONS DU FORMALISME DES  
FAISCEAUX GAUSSIENS À LA MODÉLISATION  
DE L'INTERACTION D'UNE ONDE  
ÉLECTROMAGNÉTIQUE AVEC UN OBJET 3D  
COMPLEXE**

Thèse soutenue le 6 décembre 2007 à l'auditorium de l'ONERA

Membres du Jury :

Pr. Didier DECOSTER	Rapporteur
Dr. Christine LETROU	Rapporteur
Pr. Patrick VAUDON	Examinateur
Pr. Paul COMBES	Examinateur
Dr. Sylvain BOLIOLI	Encadrant ONERA et co-directeur de thèse
Dr. Jérôme SOKOLOFF	Encadrant universitaire et co-directeur de thèse



LAME

Laboratoire de Micro-ondes et d'Electromagnétisme

118, route de Narbonne  
31062 TOULOUSE cedex



Département Électromagnétisme et Radar

2, avenue Édouard Belin - BP 4025  
31055 TOULOUSE cedex 4





# Remerciements

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre de la coopération entre le Laboratoire de Micro-ondes et d'Électromagnétisme (LAME), anciennement AD2M, et le Département Électromagnétisme et Radar (DEMR) de l'Office National d'Étude et de Recherches en Aéronautique (ONERA). C'est pourquoi je tiens tout d'abord à remercier Messieurs Paul Combes et Olivier Pascal, successivement directeur du laboratoire LAME (AD2M), M. Florent Christophe, directeur adjoint du DEMR, ainsi que M. Joël Lemorton, directeur de l'unité Antenne et Propagation (APR), pour l'accueil qu'ils m'ont fait au sein de leur laboratoire.

J'exprime toute ma gratitude au Professeur Didier Decoster et à Mme Christine Letrou, qui ont accepté d'être les rapporteurs de ces travaux. L'intérêt qu'ils ont porté à ce mémoire et leurs remarques ont permis de mettre en valeur ces recherches. Je remercie également le Professeur Patrick Vaudon, qui a accepté de faire partie de mon jury. Je remercie tout particulièrement le Professeur Paul Combes, qui non seulement a été le président de ce jury, mais a également rendu possible cette thèse. Je me souviens encore de son appel téléphonique durant l'été 2004, pour m'avertir que mon financement avait été accepté.

À mes encadrants durant ces trois ans, M. Sylvain Bolioli et M. Jérôme Sokoloff, respectivement ingénieur de recherche à l'ONERA et Maître De Conférences à l'Université Paul Sabatier, j'adresse mes plus sincères et chaleureux remerciements.

Sylvain, je me souviendrai avant tout de ta rigueur et de ton expérience, si utiles dans de nombreuses circonstances. Je te remercie également pour avoir eu confiance en moi, jusqu'à me laisser les clés de la chambre anéchoïque et de ses appareils.

Jérôme, tu as été plus qu'un encadrant durant ces trois années. En effet, grâce à toi, j'ai également pu découvrir le milieu de l'enseignement. Toi aussi, tu as eu confiance en moi et tu as accepté de me laisser quelques unes de tes classes. De plus, ton sens de la

communication et tes qualités de pédagogue ont été des précieux conseillers.

Vos qualités respectives sont complémentaires et tous les deux, vous avez su me donner les directions à suivre ainsi que de nombreux conseils utiles pour un apprenti chercheur. À mon sens, vous incarnez parfaitement cette phrase que l'on associe généralement au doctorat : *la formation par la recherche*.

Quoi qu'en pensent certains, le doctorat ne consiste pas qu'en un long travail solitaire. Ainsi, durant ces années passées au sein du DEMR, j'ai pu côtoyer un certain nombre de personnes et de collègues. Elles m'ont toutes aidé, chacune à leur manière. Je remercie Jean-Pierre et Maryse Lopez, qui m'ont aidé à mettre au point les manipulations expérimentales. Je remercie également Vincent Fabbro, pour ses précieux conseils dans le domaine de la propagation électromagnétique, mais également pour sa bonne humeur et ses nombreux talents. Enfin, je n'oublie pas Marie-Edith Gimonet, Danielle Nougapolis, Corinne De Pablo ainsi que toutes les personnes qui ont pu traverser un jour ou l'autre la salle informatique en quête d'une imprimante.

Mais le doctorat, c'est aussi des collègues de travail : des thésards, des stagiaires. C'est avec eux que l'on partage le quotidien du thésard : les coups de stress avant les présentations ou les congrès, les coups de blues lorsque "ça ne marche pas", mais aussi tout ce qui fait la bonne ambiance de cette salle informatique, l'office de nos bureaux respectifs. Nous nous sommes juste croisés, mais vos travaux m'ont accompagné : Sarah et Alexandre. On s'est côtoyé un peu plus longtemps, Frédéric : tu vas faire un très bon Papa. Tu ne pensais peut être pas rester aussi longtemps à mes côtés, mais peu importe Arnaud, tu fus le meilleur des collègues. D'ailleurs, beaucoup connaissent ta bonne humeur, mais trop peu on put constater à quel point tu pouvais être perfectionniste. Quant à toi Rémi, j'espère de tout coeur que tes projets seront couronnés de succès, car tu le mérites. Sinon, il te restera la politique. Enfin, je n'oublie pas tous les actuels, ex ou anciens thésards : Nicolas, Maxime, Ludovic, Anthony, Mark, Thomas, Jean-Charles... ainsi que tous les stagiaires.

Ainsi vont les choses et tout à une fin : c'est également le cas de la thèse. Ces trois ans se sont écoulés à une vitesse folle. Ma famille, qui n'a certes pas toujours bien compris ce que je faisais là, a toujours été compréhensive. Merci à eux, pour m'avoir soutenu. Mes amis de promotion étaient également à mes côtés, en particulier Sylvain, qui a toujours su être là. J'espère d'ailleurs pouvoir venir te voir avant que tu ne reviennes !

Mais je garde le meilleur pour la fin, celle qui me connaît le mieux sait que c'est une habitude. Ce n'est pas une simple pensée affectueuse que je t'adresse, Aurore, mais bien plus encore. Tu as été au cours de ces années ma confidente : tu as toujours su me remonter le moral dans ces petits moments de déprime et me faire relativiser les choses lorsque c'était nécessaire. C'est toi qui a grandement contribué à faire de moi ce que je suis aujourd'hui, et pour tout cela et bien plus encore, je t'en serai éternellement reconnaissant.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Lexique</b>	<b>15</b>
<b>Chapitre 1 Faisceaux gaussiens</b>	<b>17</b>
I Faisceaux gaussiens classiques . . . . .	20
I.1 Formulation scalaire . . . . .	20
I.2 Formulation vectorielle . . . . .	23
II Faisceaux gaussiens généralisés . . . . .	25
II.1 Définitions . . . . .	25
II.2 Spectre d’ondes planes du champ initial . . . . .	26
II.3 Champs propagés . . . . .	27
II.4 Formulation paraxiale . . . . .	28
II.5 Formulation champ lointain . . . . .	30
II.6 Caractéristiques physiques . . . . .	31
II.6.1 Caractéristiques géométriques . . . . .	31
II.6.2 Domaine de validité . . . . .	33
III Faisceaux gaussiens conformes . . . . .	39
III.1 Courants élémentaires gaussiens . . . . .	40
III.2 Rayonnement des courants élémentaires . . . . .	41
III.2.1 Formulation basée sur le rayonnement des courants . . . . .	41
III.2.2 Formulation basée sur le spectre d’ondes planes . . . . .	43
III.3 Caractéristiques physiques . . . . .	49
III.3.1 Configuration des calculs . . . . .	49
III.3.2 Matrice de courbure du faisceau . . . . .	51
III.3.3 Termes de phase linéaire . . . . .	53
III.3.4 Matrice de courbure de la surface . . . . .	56
III.4 Évaluation asymptotique des champs transmis et réfléchis . . . . .	60

IV	Point source complexe . . . . .	62
IV.1	Historique . . . . .	62
IV.2	Description mathématique . . . . .	63
V	Conclusion du chapitre . . . . .	67
<b>Chapitre 2 Diffraction d'un faisceau gaussien</b>		<b>69</b>
I	Diffraction 2D . . . . .	70
I.1	Champ exact rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien . . . . .	70
I.1.1	Expression exacte du champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par une onde plane . . . . .	71
I.1.2	Expression du spectre d'onde planes d'un faisceau gaussien incident . . . . .	73
I.1.3	Expression intégrale du champ rayonné . . . . .	76
I.1.4	Interprétations physiques de la solution exacte . . . . .	77
I.1.5	Approximations champ lointain . . . . .	81
I.2	Champ rayonné par un demi-plan conducteur : approximation de l'optique physique . . . . .	85
I.2.1	Expression du champ incident . . . . .	85
I.2.2	Expression du champ rayonné : hypothèse de l'OP . . . . .	86
I.2.3	Domaine de validité . . . . .	88
I.3	Champ exact rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un point source complexe . . . . .	91
I.3.1	Expression du champ incident . . . . .	91
I.3.2	Expression du champ rayonné . . . . .	92
I.3.3	Interprétations physiques . . . . .	93
I.4	Conclusion . . . . .	94
II	Diffraction 3D . . . . .	96
II.1	Expression des champs incidents . . . . .	96
II.1.1	Faisceau gaussien paraxial . . . . .	96
II.1.2	Faisceau gaussien champ lointain . . . . .	97
II.1.3	Relation avec le repère absolu . . . . .	98
II.2	Expressions des champs rayonnés . . . . .	99
II.2.1	Remarques préliminaires . . . . .	99
II.2.2	Écriture sous forme canonique des intégrales . . . . .	102
II.2.3	Expressions asymptotiques non uniformes . . . . .	104

II.2.4	Validité de la solution non uniforme . . . . .	108
II.2.5	Expressions asymptotiques uniformes . . . . .	116
II.2.6	Comparaison avec la solution non uniforme . . . . .	122
II.3	Domaine de validité de la solution uniforme . . . . .	123
II.3.1	Taille de la plaque . . . . .	124
II.3.2	Largeur du faisceau . . . . .	129
II.3.3	Angle d'incidence . . . . .	133
II.3.4	Configurations plus générales . . . . .	138
II.3.5	Utilisation d'un faisceau gaussien champ lointain . . . . .	144
II.3.6	Conclusion . . . . .	145
III	Conclusion du chapitre . . . . .	147
<b>Chapitre 3 Applications des faisceaux gaussiens</b>		<b>149</b>
I	Décomposition d'un champ en faisceaux gaussiens . . . . .	149
I.1	Décomposition multi faisceaux gaussiens . . . . .	150
I.2	Décomposition multi faisceaux gaussiens conformes . . . . .	151
I.2.1	Principe de la décomposition . . . . .	152
I.2.2	Calcul des coefficients de décomposition . . . . .	153
I.3	Comparaisons des décompositions pour des surfaces courbes . . . . .	154
II	Applications des Faisceaux Gaussiens Conformes . . . . .	159
III	Mesures en chambre anéchoïque . . . . .	164
III.1	Décomposition en faisceaux gaussiens et propagation du champ . . . . .	165
III.2	Rayonnement d'une plaque métallique . . . . .	167
III.2.1	Diffraction par une arête horizontale en polarisation ver- ticale . . . . .	168
III.2.2	Diffraction par une arête verticale en polarisation verticale	174
IV	Application des faisceaux gaussiens aux calculs de propagation . . . . .	176
IV.1	Propagation d'un champ au dessus d'un sol plan conducteur . . . . .	176
IV.2	Plaque conductrice perpendiculaire au sens de propagation . . . . .	182
IV.3	Propagation dans une vallée . . . . .	193
IV.4	Synthèse . . . . .	196
V	Conclusion du chapitre . . . . .	198
<b>Conclusion générale</b>		<b>199</b>
<b>Liste des publications</b>		<b>205</b>



<b>Bibliographie</b>	<b>207</b>
<b>Annexe A Intégrales gaussiennes</b>	<b>221</b>
<b>Annexe B Intégrales de rayonnement des courants</b>	<b>223</b>
<b>Annexe C Évaluation asymptotique d'intégrales</b>	<b>225</b>
<b>Annexe D Formes quadratiques</b>	<b>243</b>
<b>Annexe E Évaluations asymptotiques du spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme</b>	<b>245</b>
<b>Annexe F Évaluation asymptotique du champ rayonné par un demi plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien 2D</b>	<b>249</b>

# Introduction

## Contexte de l'étude

Les progrès technologiques dans le domaine des télécommunications ou du radar ont multiplié les sources électromagnétiques, entraînant un besoin accru en outils de modélisation permettant d'analyser et de prédire au mieux leurs rayonnements, en particulier lorsque ces sources sont placées dans un environnement complexe. Bien que les équations modélisant l'évolution des ondes électromagnétiques soient connues depuis de nombreuses années (1864), leur résolution analytique exacte ou approchée n'est possible que dans un certain nombre de problèmes particuliers[1, 2, 3].

L'augmentation des capacités de calcul a permis le développement de nombreuses méthodes permettant de résoudre des cas de plus en plus complexes, l'objectif étant de modéliser des situations les plus proches possibles de celles rencontrées en réalité. Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories :

- *Les méthodes rigoureuses*, basées sur la résolution directe des équations de MAXWELL. Elles reposent soit sur une formulation intégrale (méthode des moments[4]), soit sur une formulation différentielle (différences finies, éléments finis[5]). Malgré l'utilisation de méthodes accélératrices comme la méthode des *multipôles rapides*[6], les problèmes dont la taille est supérieure aux centaines de longueurs d'ondes restent inaccessibles, pour des raisons de coûts en espace mémoire et de temps de calcul<sup>1</sup>.
- *Les méthodes asymptotiques*[7, 8, 9] (optique géométrique, optique physique, ...) utilisent des approximations asymptotiques haute fréquence pour résoudre les équations de MAXWELL et décrire le rayonnement des champs ainsi que leurs interactions avec les objets. Elles supposent que les objets sont de grande taille par rapport

---

<sup>1</sup>Les méthodes de calcul rigoureuses ne sont en principe pas limitées par les dimensions du domaine. Ce sont les capacités de calcul qui limitent en pratique leurs applications. Une voie de recherche consiste également à paralléliser les charges de calcul. De cette manière, des problèmes inaccessibles aux ordinateurs personnels peuvent être traités sur des super-ordinateurs ou des fermes de calcul.

à la longueur d'onde.

Jusqu'à présent, l'utilisation de méthodes rigoureuses dans le domaine des ondes centimétriques ou millimétriques pour des contextes dont les dimensions sont très grandes devant la longueur d'onde, s'est avérée hors de portée des moyens de calcul classiques. L'utilisation de méthodes asymptotiques permet d'aborder ces situations et par conséquent, une grande partie des codes actuels en font usage. Toutefois, lorsque les dimensions des objets étudiés sont importantes, les performances des méthodes de rayons peuvent être limitées par l'augmentation rapide du nombre de rayons à traiter.

## Objectifs

L'objectif de ces travaux de thèse est d'analyser et d'approfondir les méthodes asymptotiques basées sur les faisceaux gaussiens pour modéliser le rayonnement de surfaces conductrices dont les dimensions sont finies, ainsi que les surfaces diélectriques qui présentent de fortes courbures.

Nous voulons étendre le domaine d'utilisation des faisceaux gaussiens aux surfaces conductrices présentant des arêtes et des coins, générateurs de champs électromagnétiques diffractés. Notre objectif est de donner des expressions approchées et analytiques des champs rayonnés par ces structures afin de fournir un compromis satisfaisant entre précision et temps de calcul.

Nous voulons également montrer le potentiel applicatif de ces techniques à des problèmes de grandes dimensions. Notre objectif est de proposer des solutions toujours plus rapides que les approches conventionnelles, adaptées à des situations qui nécessitent des calculs fréquents pour lesquels la précision est paramétrable et qui peuvent être éventuellement hybridées à d'autres méthodes de calcul.

## État de l'art

Nous faisons ici un état de l'art des techniques haute fréquence utilisées pour le calcul du rayonnement en général et en particulier de la diffraction par des surfaces conductrices finies. Cette vue d'ensemble des approches utilisées nous permettra de définir précisément les termes *diffraction*, *rayonnement* employés dans ce manuscrit ainsi que les hypothèses utilisées par ces techniques haute fréquence.

### Méthodes hautes fréquences pour le calcul du rayonnement

Le terme de *diffraction* peut avoir selon le contexte, un double sens. Dans l'usage courant, on désigne généralement par "diffraction" la transformation d'un champ incident sur un objet en ondes rayonnées dans toutes les directions de l'espace, y compris les directions des ondes réfléchies (directions *spéculaires*) [10, 11]. Dans ce cas, le terme *diffraction* est équivalent au terme *rayonnement*, et parfois on confondra donc ces deux termes. Toutefois, on peut également définir la *diffraction* comme l'ensemble des phénomènes qui ne sont pas prévus par l'optique géométrique [1]. Dans ce cas, le phénomène de réflexion classique (dans les directions spéculaires) ne fait pas partie de la *diffraction*.

Pour éviter les amalgames, nous utiliserons la définition suivante : la *diffraction* sera l'ensemble des phénomènes qui ne correspondent pas aux lois de l'optique géométrique. On utilisera le terme *rayonnement* pour qualifier toutes les émissions d'ondes électromagnétiques provenant d'un objet. Le champ *rayonné* correspondra à l'ensemble des champs réfléchis mais également diffractés ou du moins issus des discontinuités de la surface de l'objet et qui ne sont pas pris en compte par l'optique géométrique.

La prédiction du rayonnement électromagnétique de structures complexes fait l'objet de recherches actives depuis plus de 150 ans et à ce titre, ce sujet dispose d'une littérature abondante. On trouvera des introductions récentes aux problèmes de rayonnements et de diffraction haute fréquence dans les articles [12, 13, 11, 9] ainsi que dans les ouvrages [7, 14, 15]<sup>2</sup>.

D'une manière générale, les techniques haute fréquence sont basées sur le *principe de localité* qui stipule que les courants et les champs des objets sont seulement corrélés par la géométrie locale de la surface. Cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée à mesure que les objets sont grands devant la longueur d'onde, soit pour de hautes fréquences.

---

<sup>2</sup>On trouvera également un récit historique sur la conception de quelques une de ces méthodes dans un document de N. BLEISTEIN [16].

Elles déduisent les expressions des champs rayonnés par des objets complexes à partir de solutions exactes obtenue avec des objets canoniques et approchent la géométrie locale des objets complexes. Une arête courbe peut par exemple être approchée localement par une arête droite infinie, une surface courbe par son plan tangent, etc... Les techniques haute fréquence peuvent être classées principalement en deux catégories, selon les quantités qu'elles utilisent, champs ou courants :

- les méthodes basées sur les champs :
  - Optique Géométrique (OG/*GO*)<sup>3</sup>
  - Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD/*GTD*)
  - Théorie Uniforme de la Diffraction (TUD/*UTD*) et T. Asymp. Uniforme (TAU/*UAT*)
  - Théorie Incrémentale de la Diffraction (TID/*ITD*).
- les méthodes basées sur les courants :
  - Optique Physique (OP/*PO*)
  - Théorie physique de la Diffraction (TPD/*PTD*)
  - Méthodes basées sur la notion de Courants Équivalents (MCE/*ECM*)
  - Théorie Incrémentale de la Diffraction basée sur la TPD.

Nous décrivons dans les sections suivantes les principes généraux de ces méthodes. On trouvera des références plus complètes sur les techniques haute fréquence dans les ouvrages [7, 8] ainsi que dans les travaux de doctorat [17, 18].

### Méthodes basées sur les champs

Durant la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle, peu de travaux connus portèrent sur la diffraction pour de hautes fréquences. Cette situation changea lorsque KELLER publia en 1953 une extension de l'optique géométrique (OG) incluant des *rayons diffractés*<sup>4</sup> sous le nom de Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD) [19, 20]. Ces rayons diffractés sont des ondes possédant une structure de rayon<sup>5</sup> et provenant des discontinuités de surface : arêtes, coins, câbles, etc.

La TGD est basée sur l'incorporation de solutions asymptotiques issues des solutions

---

<sup>3</sup>Les acronymes anglais usuels sont écrits en italique.

<sup>4</sup>D'après UFIMTSEV[11], le terme de *rayons diffractés* a été suggéré dès 1911 par KALASHNIKOV, qui fut selon lui, le premier à présenter une preuve objective de ces rayons en les enregistrant sur une plaque photographique.

<sup>5</sup>En 1924, RUBINOWICZ démontra théoriquement que les champs rayonnés par les arêtes d'une ouverture ont une structure de rayons. En particulier, il montra que chaque point stationnaire sur l'arête crée un cône de rayons satisfaisant au principe de Fermat. Ce cône a été décrit plus tard heuristiquement par KELLER dans la GTD et porte aujourd'hui le nom couramment admis de *cône de Keller*. L'existence de ce cône a été observée expérimentalement par SENIOR et USLENGHI en 1972[11].

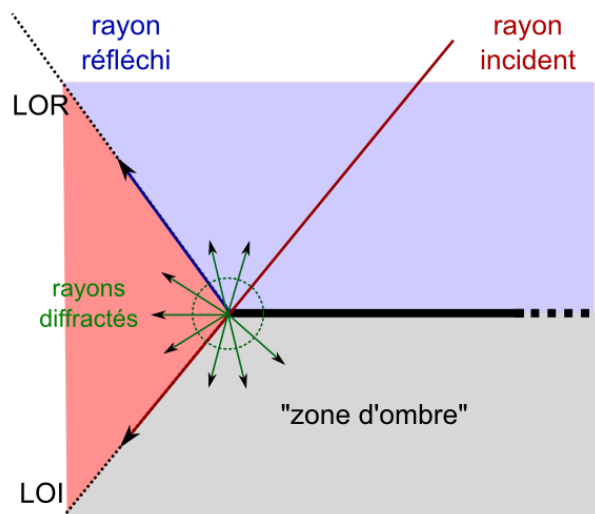


FIG. 1: Définition des "zones d'ombres" et des Limites d'Ombres des champs Incident et Réfléchi (L.O.I. et L.O.R.) de l'optique géométrique.

exactes de problèmes canoniques, comme le dièdre, le cylindre ou la sphère, au formalisme des rayons de l'OG. Selon la TGD, le champ total créé par un objet est la somme du champ  $\mathbf{E}_{\text{OG}}$  calculé avec l'OG et d'un terme de champ diffracté  $\mathbf{E}_{\text{diff}}$  :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{OG}} + \mathbf{E}_{\text{diff}} \quad (1)$$

Le terme issu de l'optique géométrique  $\mathbf{E}_{\text{OG}}$  est la somme du champ direct (incident)  $\mathbf{E}_{\text{OG}}^i$  et du champ réfléchi  $\mathbf{E}_{\text{OG}}^r$ , exprimés sous forme de rayons :

$$\mathbf{E}_{\text{OG}} = \mathbf{E}_{\text{OG}}^i \varpi_i + \mathbf{E}_{\text{OG}}^r \varpi_r \quad (2)$$

où  $\varpi_{i,r}$  correspond à une fonction de HEAVISIDE, nulle partout sauf dans les zones où les champs incident et réfléchi de l'optique géométrique sont présents. Par exemple, sur le cas illustré par la figure (1), le terme  $\varpi_i$  correspond aux zones rouge et bleue et le terme  $\varpi_r$  à la zone bleue.

Le champ calculé avec la TGD est divergent dans les directions particulières que sont les Limites d'Ombres des champs Incident et Réfléchi (L.O.I. et L.O.R.), illustrées sur la figure (1). Cette discontinuité, due à une évaluation asymptotique non uniforme (cf. annexe C), est corrigée par la Théorie Uniforme de la Diffraction (TUD)[21, 22] ainsi que par la Théorie Asymptotique Uniforme (TAU)[23, 24]<sup>6</sup>. Plus qu'une simple correction,

<sup>6</sup>Ces deux formulations diffèrent dans leurs approches du développement asymptotique effectué sur la

ces théories uniformes assurent la continuité du champ total au passage des L.O.R. et L.O.I., c'est-à-dire la continuité entre les termes  $\mathbf{E}_{\text{OG}}$  et  $\mathbf{E}_{\text{diff}}$ .

Pour certaines géométries particulières, par exemple un réflecteur parabolique illuminé par une onde plane, il existe des points ou des directions qui sont atteints par une infinité de rayons : ce sont des *caustiques*. Malgré l'apport des corrections uniformes à la TGD, le problème des caustiques est inhérent aux méthodes de rayons et d'autres techniques ont été employées pour résoudre ce problème, en particulier des méthodes basées sur les courants.

## Méthodes basées sur les courants

### Optique Physique

L'Optique Physique (OP) est une technique d'approximation de la densité de courant électrique circulant sur la surface d'un objet parfaitement conducteur [26, 8].

Soit  $S$  la surface d'un objet parfaitement conducteur,  $\mathbf{r}'$  un point de  $S$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  le vecteur unitaire normal à la surface  $S$  en  $\mathbf{r}'$ . La densité surfacique de courant électrique  $\mathbf{J}$  peut être exprimée en fonction du champ magnétique total  $\mathbf{H}$  sur la surface grâce au théorème d'équivalence [27, 28] :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \quad (3)$$

L'approximation de l'optique physique consiste à utiliser la densité de courant surfacique  $\mathbf{J}_{\text{OP}}$  induite par un plan parfaitement conducteur tangent à la surface  $S$  en  $\mathbf{r}'$  :

$$\mathbf{J}_{\text{OP}}(\mathbf{r}') \simeq \begin{cases} 2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}') & \text{Si la surface } S \text{ est directement éclairée,} \\ \mathbf{0} & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

où  $\mathbf{H}^i(\mathbf{r}')$  est le champ magnétique incident au point  $\mathbf{r}'$ .

L'hypothèse de l'optique physique est valide en hautes fréquences lorsque le rayon de courbure de la surface  $S$  est suffisamment grand en terme de longueurs d'ondes pour justifier l'approximation. En pratique, l'hypothèse de l'optique physique est applicable pour obtenir le champ des premiers lobes dès lors que les dimensions de la surface sont supérieures à  $4\lambda$  [18, p.81],[15, §1.5]. L'OP peut être généralisée aux surfaces non parfaitement conductrices mais impénétrables, au moyen de coefficients de réflexion dyadiques [8, §3]. Les détails de cette généralisation ne seront pas donnés ici.

---

solution canonique. La TUD utilise l'approche de PAULI-CLEMMOW tandis que la TAU utilise la méthode de VAN DER WAERDEN pour traiter les singularités dues aux pôles de la solution canonique. On trouvera une comparaison de ces deux méthodes dans [25] et [7, Chap.5].

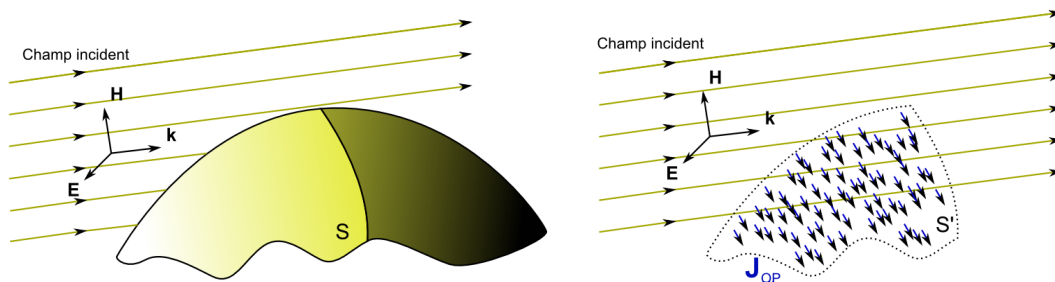


FIG. 2: Calcul du champ rayonné avec l'OP. Contrairement à l'OG, le champ incident existe partout, comme si l'objet était absent[9].

Les courants  $\mathbf{J}_{OP}$  sont calculés sur la surface  $S$ , uniquement sur le domaine éclairé  $S'$ . Le champ rayonné par ces courants  $\mathbf{E}_{OP}^r$  est calculé à partir des intégrales de rayonnement des densités de courant, numériquement ou analytiquement si cela est possible. Le champ total est obtenu en sommant au champ rayonné le champ incident, partout dans l'espace, comme si l'objet était absent (cf. figure (2)) :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}_{OP}^r \quad (5)$$

Par définition, l'OP n'est qu'une approximation du courant réel sur la surface. De plus, pour des surfaces finies, l'OP décrit mal les courants localisés près des discontinuités. Par conséquent, pour des directions où le rayonnement de la surface n'est plus prépondérant (loin des directions spéculaires), les calculs effectués avec l'OP seront incorrects. Pour améliorer les résultats de l'OP, il convient donc d'utiliser une méthode modélisant les effets des arêtes. C'est l'objectif de la Théorie Physique de la Diffraction.

### Théorie Physique de la Diffraction

la Théorie Physique de la Diffraction (TPD), formulée à la même époque que la TGD par UFIMTSEV [29]<sup>7</sup>, a pour objectif de pallier les défauts de l'OP pour le calcul des champs diffractés. Tout comme la TGD corrige l'OG, la TPD corrige l'OP. Ainsi, le champ total s'écrit dans la TPD :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}_{OP}^r + \mathbf{E}_u^d \quad (6)$$

où  $\mathbf{E}^i$  correspond au champ incident,  $\mathbf{E}_{OP}^r$  au champ rayonné dans l'hypothèse de l'OP et  $\mathbf{E}_u^d$  un terme correcteur, approximation asymptotique au premier ordre de l'effet de diffraction induit par les bordures de la surface éclairée.

<sup>7</sup>Publié en Russe en 1962 puis traduit en anglais en 1971.



Initialement [29, 30], ce terme correcteur de champ est obtenu à partir de la solution exacte du problème canonique équivalent. Ce champ correcteur, où "champ de bordure"<sup>8</sup> est défini comme issu du rayonnement d'un courant supplémentaire, un courant correctif au courant de l'OP. Toutefois, l'expression de ce courant n'est pas définie explicitement.

L'approche proposée par UFIMTSEV dans [29] est souvent nommée à tort "théorie physique de la diffraction" alors qu'il avait préféré le terme "méthode des ondes de bordure"<sup>9</sup> [30]. Avec le recul, la théorie physique de la diffraction correspond plutôt à la méthodologie globale qui consiste à ajouter un champ correcteur à celui de l'OP. Plusieurs techniques ont été développées par la suite pour formuler clairement ce champ correcteur, à partir de courants ou de coefficients. Ces techniques dérivant de la même approche globale, nous les nommerons Théories Physiques de la Diffraction (au pluriel). Parmi les plus connues et utilisées en pratique dans des codes de calcul, on peut citer :

- la théorie des Ondes Élémentaires de Bordure (*EEW*) [31, 32, 33];
- la Méthode des Courants Équivalents (MCE/*ECM* ou *EEC*) [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40];
- les Coefficients Incrémentaux de Longueur de Diffraction (*ILDCs*) [41, 42];
- la Théorie Incrémentale de la Diffraction (TID/*ITD*) [43, 44, 45].

Généralement, ces méthodes consistent à exprimer le champ correcteur comme une intégrale linéique, dont le contour d'intégration correspond à la bordure diffractante :

$$\mathbf{E}_u^d = \int_{\text{bordure}} (...) d\ell \quad (7)$$

L'intégrande est exprimée soit par rapport au rayonnement de "courants de diffraction" soit par rapport à des "champs élémentaires de diffraction" selon la technique employée<sup>10</sup>.

## Diffraction de faisceaux gaussiens

Toutes les techniques haute fréquence précédentes employées pour calculer le champ rayonné par des structures diffractantes ont un point commun. Elles s'appuient sur le principe de localité, qui stipule que localement, la géométrie d'un objet est équivalente à celle d'un objet canonique connu et que de plus, le champ incident est localement assimilable à une onde plane ou sphérique. Ainsi, l'application directe de ces formulations lorsque le champ incident correspond à un faisceau gaussien échoue invariablement, car le champ incident d'un faisceau gaussien n'est localement pas assimilable à celui d'une

<sup>8</sup>fringe field.

<sup>9</sup>Method of Edges Waves (MEW).

<sup>10</sup>La Théorie Incrémentale de la Diffraction de TIBERIO, MACI et TOCCAFONDI peut être classée comme une méthode basée sur les champs ou sur les courants selon la formulation employée[45].

onde plane ou sphérique.

Pour traiter le problème spécifique de la diffraction d'un objet canonique éclairé par un faisceau gaussien, plusieurs approches ont été employées dans la littérature.

L'une de ces approches consiste à utiliser la théorie du *point source complexe*, car un faisceau gaussien correspond à l'approximation paraxiale du rayonnement d'un point source complexe. Or, on peut déterminer l'expression exacte du champ rayonné par une structure éclairée par un point source complexe lorsque l'on connaît sa fonction de GREEN, comme l'ont montré en particulier les travaux de L.B. FELSEN (cf. [46] pour une biographie de ses travaux sur ce sujet). G.A. SUEDAN et E.V. JULL ont appliqué ces résultats vers la fin des années 80 aux problèmes canoniques du demi-plan conducteur en deux dimensions [47, 48] puis au demi-plan conducteur en incidence oblique (semi-3D) pour une source scalaire [49, 50]. Plus récemment (2003), E. MARTINI a appliqué la généralisation vectorielle de la méthode du point source complexe aux surfaces conductrices planes dont les dimensions sont finies, mais uniquement dans le cadre de l'optique physique [51].

L'application aux faisceaux gaussiens de la démarche proposée en 1976 par R. MITTRA dans la *théorie spectrale de la diffraction* [52] a été réalisée en 2002 pour un plan conducteur semi-infini dans les travaux de L.E. PETERSSON [53]. Cette démarche consiste à exprimer un champ incident sur un objet canonique comme une somme continue d'ondes planes, puis d'appliquer la solution connue du champ rayonné relative à cette structure à chacune des ces ondes planes. L'expression finale obtenue est exacte mais exprimée sous forme intégrale<sup>11</sup> et nécessite d'être évaluée numériquement pour chacun des points d'observation.

Les travaux les plus récents sur le sujet utilisent le formalisme des faisceaux gaussiens dans le cadre de *lancers de faisceaux gaussiens*, adaptation de la technique du *lancer de rayons* aux faisceaux gaussiens [54, 55]. L'interaction d'un faisceau gaussien avec une surface courbe est bien connue et on peut déterminer, grâce à une généralisation des lois ABCD de l'optique, les expressions d'un faisceau gaussien réfléchi et d'un faisceau gaussien transmis par ce type d'interface. Par contre, le problème de l'interception d'une arête par un faisceau gaussien paraxial n'a à l'heure actuelle pas de solution analytique exacte connue. L'étude de ce problème a fait l'objet de plusieurs stratégies différentes :

- Dans le cadre de l'étude de réflecteurs métalliques, H.T. CHOU et P.H. PATHAK ont montré à partir de 1997 que la symétrie circulaire du problème permet de ramener l'intégrale de rayonnement des courants dans l'hypothèse de l'optique physique

---

<sup>11</sup>Une intégrale simple en dimension deux et une intégrale double en dimension trois.

à une seule dimension. En utilisant des hypothèses supplémentaires<sup>12</sup>, on peut alors exprimer cette intégrale sous une forme analytique et uniforme [56, 57, 58]. L'idée d'améliorer cette technique par l'ajout d'une contribution permettant de modéliser correctement la diffraction par les arêtes, à la manière des Théories Physiques de la Diffraction, a été proposée par ces auteurs mais sans être démontrée. Des travaux sont actuellement en cours sur ce sujet [59].

- Une solution proposée par C. LETROU en 2007 consiste à exprimer la partie du champ non masquée par une arête diffractante comme une somme de faisceaux que l'on peut à nouveau faire propager dans un algorithme de lancer de faisceau [60].
- Enfin, les travaux publiés également en 2007 par M. KATSAV et E. HEYMAN consistent à exprimer le champ rayonné par une arête semi-infinie en deux dimensions comme une somme de faisceaux gaussiens émanant de l'arête [61]. Cette approche permet de calculer le champ rayonné avec une très bonne approximation par rapport à une solution exacte, mais son domaine de validité reste jusqu'à présent restreint à des distances inférieures à quelques dizaines de fois la largeur des faisceaux utilisés [62].

---

<sup>12</sup>En particulier, la constance de la matrice de courbure complexe du faisceau incident sur la surface rayonnante et l'hypothèse champ lointain.

## Démarche et travaux effectués

Dans cette étude, notre démarche consiste à nous intéresser à la fois au problème canonique de la diffraction d'un obstacle conducteur plan par un faisceau gaussien ainsi qu'au rayonnement de surfaces diélectriques de fortes courbures, mais aussi à l'application du formalisme des faisceaux gaussiens à des problèmes plus complexes.

À cet effet, nous nous appuyons sur les travaux précédemment réalisés [63, 64] en synthétisant les différentes expressions utilisées dans le formalisme des faisceaux gaussiens, sous une même notation homogène. À partir de ce formalisme initial, nous développons l'expression analytique du *spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme*, permettant de calculer les champs transmis et réfléchis sur une interface diélectrique par des faisceaux gaussiens conformes. Enfin, nous définissons grâce à une analyse paramétrique et en comparant avec une solution numérique, le domaine de validité des faisceaux gaussiens généralisés et conformes.

Concernant le problème de la diffraction d'un faisceau gaussien, nous abordons ce sujet en développant l'expression intégrale exacte du champ diffracté par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien en deux dimensions. Cette solution exacte est utilisée comme référence et comparée par la suite à l'expression analytique approchée du champ rayonné par ce demi-plan dans l'hypothèse de l'optique physique puis lors de l'utilisation de la méthode du point source complexe.

En outre, ce problème est étendu aux surfaces rectangulaires planes conductrices de dimensions finies, pour lesquelles nous donnons l'expression *non-uniforme* puis *uniforme* du champ rayonnés par ces structures lorsqu'elles sont éclairées par des faisceaux gaussiens en trois dimensions dans l'hypothèse de l'optique physique. Les champs calculés grâce à ces expressions sont comparés à une méthode rigoureuse basée sur la méthode des moments ainsi qu'à des mesures réalisées en chambre anéchoïque.

Concernant l'application du formalisme des faisceaux gaussiens à des problèmes complexes, nous validons les méthodes de décomposition de champs initiaux en faisceaux gaussiens généralisés et conformes par rapport à des références analytiques ou numériques ainsi qu'à une série de mesures réalisées en chambre anéchoïque. Nous appliquons ensuite les méthodes présentées aux domaines de la propagation électromagnétique pour lequel les dimensions des problèmes sont généralement très grands devant la longueur d'onde. Nous comparons les résultats obtenus à un code de calcul basé sur la résolution de l'équation parabolique, une méthode adaptée à ce type de situation.

Enfin, tous ces résultats nécessitent l'amélioration des codes de calculs existant ainsi que le développement de nouveaux. Durant ces travaux, on a pris soin de conserver et

de faire évoluer les codes et les structures précédemment développées, afin de conserver un ensemble d'outils le plus modulaire et le plus cohérent possible.

## Plan de l'étude

**Le premier chapitre** récapitule les définitions des faisceaux gaussiens que l'on utilisera dans ce manuscrit. Premièrement, on rappelle la définition classique du faisceau gaussien. Trois approches permettant de généraliser ce faisceau sont présentées. Pour chacune d'entre elles, leurs caractéristiques physiques sont explicitées ainsi que leur domaine de validité. La première se fonde sur la représentation d'un champ d'amplitude gaussienne transverse sur son spectre d'ondes planes. La seconde repose sur le rayonnement de courants définis sur une surface courbe par une amplitude gaussienne et par une variation de phase linéaire. Nous présentons une approche originale permettant de calculer le spectre d'ondes planes d'un faisceau ainsi défini. Enfin, la troisième correspond au point source complexe, dont nous rappelons les principaux résultats.

**Le second chapitre** a pour objectif de décrire le champ rayonné par une surface conductrice plane semi-finie ou finie éclairée par un faisceau gaussien. Ce chapitre se scinde en deux parties. Dans la première nous présentons une approche conventionnelle du calcul du champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien en deux dimensions. Dans la seconde, nous présentons des formulations originales permettant de calculer asymptotiquement le champ rayonné par une surface conductrice plane de taille finie en trois dimensions. Le domaine de validité des expressions développées est défini par comparaison avec une méthode de calcul rigoureuse.

**Le troisième chapitre** est plus prospectif. Il explore les possibilités offertes par le formalisme des faisceaux gaussiens concernant des situations plus complexes. Tout d'abord nous aborderons les techniques de décomposition adaptées aux surfaces modérément courbes ou effilées. Ces résultats sont comparés avec des mesures. Dans un deuxième temps, nous utilisons les expressions développées dans le chapitre deux afin de modéliser une situation nécessitant le calcul du champ rayonné par une structure plane rectangulaire. Les résultats obtenus sont également comparés à des mesures. Enfin, nous utilisons l'ensemble des techniques précédentes pour appliquer les faisceaux gaussiens au contexte de la propagation électromagnétique sur de grandes distances. Les résultats sont comparés à d'autres codes de calcul.



## Lexique des notations utilisées

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions quelconques. On utilisera les conventions mathématiques suivantes :

- $\mathbf{f}$  représente un vecteur (colonne) de  $\mathbb{C}^3$  ;
- ${}^t\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$  : transposée du vecteur  $\mathbf{f}$ .  $f_x, f_y, f_z$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{f}$  dans une base cartésienne ;
- ${}^t\mathbf{f}\mathbf{g} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$  : produit scalaire des vecteurs  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  ;
- $\mathbb{M}$  : matrice de dimension  $m \times n$ . Lorsque cela n'est pas précisé,  $m$  et  $n$  sont implicitement égaux à 2 ;
- $\mathbb{I}$  : matrice identité ;
- $\hat{\mathbf{f}}$  : vecteur unitaire.  $\|\hat{\mathbf{f}}\| = 1$  ;
- $\mathbf{f}^{(\mathcal{B})}$  : vecteur  $\mathbf{f}$  exprimé dans la base  $(\mathcal{B})$ . Si aucune base n'est indiquée, le vecteur est exprimé dans le repère absolu ;
- $\tilde{f}$  : spectre d'ondes planes ou spectre angulaire d'ondes planes d'une fonction scalaire  $f$  ;
- $\tilde{\mathbf{f}}$  : spectre d'ondes planes ou spectre angulaire d'ondes planes d'une fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  ;

La notation suivante est adoptée pour les paramètres et constantes fondamentales utilisées en électromagnétisme :

- $\lambda$  : longueur d'onde dans le milieu de propagation ( $\lambda_0$  : longueur d'onde dans le vide) ;
- $c$  : vitesse de la lumière. Dans le vide, on utilise  $c_0 = 2.997925E8$  ;
- $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$  : nombre d'onde ( $k_0$  : longueur d'onde dans le vide) ;
- $\mathbf{k}$  : vecteur d'onde.  $\mathbf{k} = {}^t(k_x, k_y, k_z)$  dans une base cartésienne ;
- $Z_0 = 120\pi$  : impédance du vide ;
- $\epsilon_r$  : permittivité relative du milieu de propagation ;





# Chapitre 1

## Faisceaux gaussiens

Dans ce premier chapitre, nous définissons les expressions, les propriétés mathématiques et physiques des faisceaux gaussiens qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Le calcul du rayonnement électromagnétique d'objets éclairés par des champs électromagnétiques hautes fréquences a fait l'objet de nombreuses recherches et reste un sujet actuel compte tenu de la multiplication des sources d'émissions (WIFI, télécommunications mobiles, etc.). On adopte la méthode consistant à décomposer le champ incident (connu) en un ensemble de champs élémentaires, plus simples à manipuler analytiquement. Lorsque cette décomposition est obtenue, les interactions de chacun de ces champs élémentaires avec l'objet sont calculées. Le calcul analytique ou numérique des ces interactions permet alors d'obtenir le champ total rayonné par la structure, en effectuant la somme des champs rayonnés.

De nombreuses méthodes et techniques existent pour exprimer un champ électromagnétique connu sur une surface (réelle ou virtuelle) à l'aide d'un ensemble d'objets physiques élémentaires. Parmi les plus connues, on peut citer les méthodes basées sur le spectre d'ondes planes, sur l'utilisation d'ondes sphériques en faisant appel au principe de HUYGENS, les méthodes modales ou les méthodes de rayon. Pour chacune d'entre elles, les champs sont exprimés par un ensemble d'objets élémentaires : ondes planes, ondes sphériques, ondes focalisées, modes propres de l'opérateur de propagation ou rayons. Depuis plusieurs années, de nouvelles méthodes basées sur des faisceaux élémentaires, dont les extensions spatiale et spectrale sont finies, permettent de résoudre les problèmes rencontrés par les méthodes précédentes, comme les caustiques ou l'explosion du nombre d'ondes planes ou de rayons nécessaires pour décrire des scènes complexes. Une illustration de la décomposition d'un champ électromagnétique connu sur une surface courbe  $S$

par un ensemble de faisceaux élémentaires est donnée sur la figure (1.1).

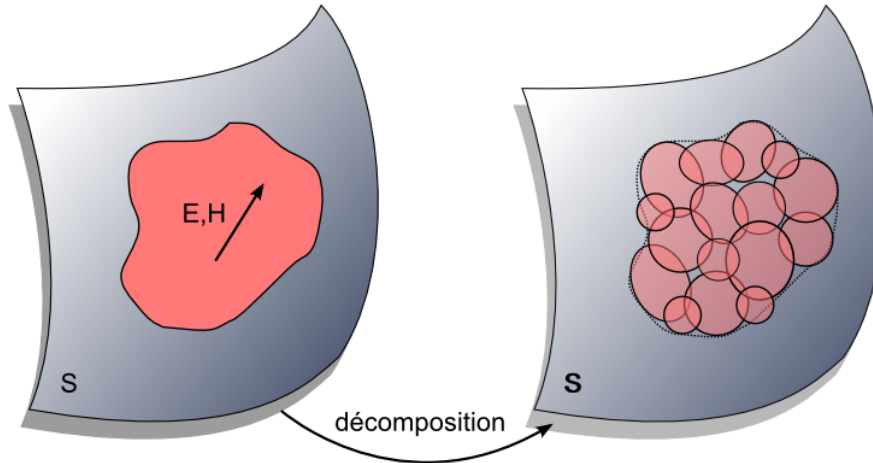


FIG. 1.1: Illustration du principe de la décomposition d'un champ électromagnétique en faisceaux élémentaires de formes différentes.

Le choix du type de faisceau élémentaire utilisé pour la décomposition dépend d'un certain nombre de critères, mathématiques ou physiques, ainsi que de la méthode employée pour décomposer les champs. Les faisceaux élémentaires utilisés dans ces travaux de thèse sont gaussiens. En toute généralité, un faisceau gaussien est un faisceau dont l'évolution du profil transversal d'amplitude en fonction de la propagation spatiale est proportionnel à une fonction gaussienne. Un état de l'art des méthodes de décomposition en faisceaux gaussiens sera effectué dans le chapitre 3. Le principe général est illustré sur la figure (1.2). Il se décompose généralement en deux étapes :

1. connaître ou calculer un champ sur une surface réelle ou virtuelle (à partir d'une mesure ou d'un calcul numérique) ;
2. exprimer les champs ou les courants équivalents sur cette surface en une distribution de faisceaux élémentaires gaussiens ;

Enfin, on calcule (analytiquement) la propagation de chacun des ces faisceaux.

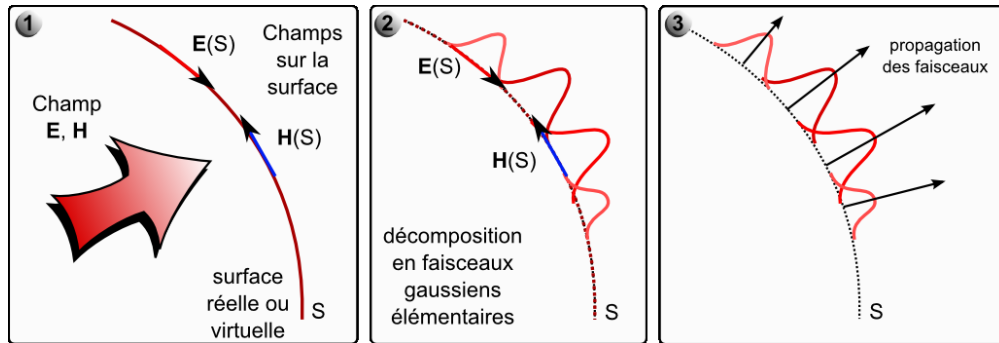


FIG. 1.2: Illustration de la décomposition et de la propagation d'un champ dans le formalisme des faisceaux gaussiens.

Dans ce premier chapitre, nous allons décrire plusieurs types de faisceaux élémentaires gaussiens, dont les hypothèses mathématiques ou le domaine d'application physique sont complémentaires. La première partie du chapitre est consacrée aux propriétés physiques fondamentales des faisceaux gaussiens "classiques" originellement utilisés en optique, obtenus à partir de l'équation de propagation dans le cadre de l'hypothèse paraxiale. Cette première partie nous permettra de définir les paramètres caractéristiques d'un faisceau gaussien que nous utiliserons tout le long de ce manuscrit.

Dans la section II, nous définirons des faisceaux gaussiens plus généraux à partir du spectre d'ondes planes d'un champ d'amplitude gaussienne connu sur un plan initial. En fonction du domaine de calcul, la propagation de ces faisceaux sera calculée analytiquement selon deux techniques. La première est basée sur une hypothèse paraxiale et permet une description fine des champs en zone proche ou à proximité de l'axe de propagation du faisceau [65, 56, 66]. La seconde utilise une approximation champ lointain et permet de décrire la propagation des champs sans contrainte paraxiale au-delà d'une certaine distance [67, 64]. Les domaines de validité de chacune de ces formulations seront précisés dans la section II.6.2.

L'approche spectrale utilisée pour la définition des faisceaux gaussiens généralisés n'est valable que lorsque le champ gaussien initial est exprimé sur un plan. Une généralisation à un champ initial gaussien exprimé sur une surface courbe est possible et amène à la définition des faisceaux gaussiens conformes [64, 68] dont les propriétés sont étudiées dans la section III.

Enfin, les faisceaux gaussiens classiques peuvent également être définis comme un cas particulier paraxial des formulations basées sur la théorie du point source complexe, décrite dans la section IV. Les points sources complexes sont une généralisation des

fonctions de GREEN à des dimensions d'espace [69, 70] et de temps [71, 54] complexes.

## I Faisceaux gaussiens classiques

### I.1 Formulation scalaire

Historiquement, la notion de faisceaux gaussiens est liée à l'optique, en particulier au domaine des lasers où ils permettent de formuler avec une bonne approximation la propagation des faisceaux et leurs interactions avec des systèmes optiques.

Un faisceau gaussien est une solution particulière de l'équation de propagation dans le cadre de l'approximation paraxiale[72, chap.16,17]. Soit  $z$  la direction de propagation du faisceau. Il est pratique d'extraire de l'expression du champ électrique  $E$  le facteur de propagation dans la direction  $z$  :  $E(x, y, z) = u(x, y, z) \exp(-jkz)$ , où  $u(x, y, z)$  est l'amplitude scalaire complexe qui décrit l'évolution spatiale du faisceau. L'approximation paraxiale suppose une faible divergence du faisceau par rapport à son axe de propagation :

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \quad (1.1)$$

L'équation de propagation s'écrit sous ces hypothèses :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

La résolution de (1.2) permettant de construire une onde de profil quelconque amène à une famille de solutions à base de polynômes d'HERMITE en coordonnées cartésiennes ou de GAUSS-LAGUERRE en coordonnées cylindriques, formant une base orthogonale complète[72, 16.4]. Au premier ordre (mode fondamental), on a :

$$u(x, y, z) = \sqrt{\frac{W_{0x} W_{0y}}{W_x(z) W_y(z)}} \exp \left[ -\frac{x^2}{W_x^2(z)} - \frac{y^2}{W_y^2(z)} \right] \cdot \exp \left[ \frac{j}{2} \left( \arctan \left( \frac{z - z_{W_{0x}}}{z_{0x}} \right) + \arctan \left( \frac{z - z_{W_{0y}}}{z_{0y}} \right) \right) \right] \exp \left[ -\frac{jk}{2} \left( \frac{x^2}{R_x(z)} + \frac{y^2}{R_y(z)} \right) - jkz \right] \quad (1.3)$$

Les distances  $x = W_x(z)$  et  $y = W_y(z)$  correspondent aux positions de l'enveloppe du faisceau dans les plans  $xOz$  et  $yOz$  pour lesquelles l'amplitude du champ est divisée par  $e$  par rapport à sa valeur sur l'axe. Les paramètres  $W_x(z)$  et  $W_y(z)$  sont appelés les *enveloppes* ou *largeurs du faisceau* et valent :

$$W_{x,y}(z) = W_{0x,y} \sqrt{1 + \left( \frac{z - z_{W_{0x,y}}}{z_{0x,y}} \right)^2} \quad (1.4)$$

$z_{0x}$  et  $z_{0y}$  sont les distances pour lesquelles  $W_x(z) = \sqrt{2}W_{0x}$  et  $W_y(z) = \sqrt{2}W_{0y}$ . Les paramètres  $z_{0x}$  et  $z_{0y}$  sont appelés *facteurs d'échelle*, *distances* ou *portées de RAYLEIGH* et valent :

$$z_{0x,y} = \frac{kW_{0x,y}^2}{2} \quad (1.5)$$

Pour  $z = z_{W_{0x}}$  et  $z = z_{W_{0y}}$ , les largeurs du faisceau prennent pour valeur respectivement  $W_{0x}$  et  $W_{0y}$ . Les paramètres  $W_{0x}$  et  $W_{0y}$  représentent les rayons minima du faisceau selon  $x$  et  $y$  et sont appelés les *ceintures* ou *waists* du faisceau<sup>1</sup>.

Les termes  $R_x(z)$  et  $R_y(z)$  représentent les rayons de courbure du front d'onde sur l'axe  $z$  et valent :

$$R_{x,y}(z) = (z - z_{W_{0x,y}}) \left( 1 + \left( \frac{z_{0x,y}}{z - z_{W_{0x,y}}} \right)^2 \right) \quad (1.6)$$

Au niveau de la ceinture, le front équiphase est plan. Ailleurs, le front d'onde est quadratique et en particulier sphérique à l'infini au niveau de l'axe  $z$ .

Loin des ceintures, les angles de divergence du faisceau ont pour expression :

$$\theta_x \approx \arctan\left(\frac{2}{kW_{0x}}\right) \quad , \quad \theta_y \approx \arctan\left(\frac{2}{kW_{0y}}\right) \quad (1.7)$$

L'angle de divergence maximal généralement admis pour satisfaire à l'hypothèse paraxiale est de l'ordre de 20 degrés de part et d'autre de l'axe de propagation.

Nous avons représenté sur la figure (1.3) l'ensemble de ces paramètres pour une coupe dans le plan  $xOz$  d'un faisceau gaussien.

---

<sup>1</sup>Par abus de langage, on utilisera parfois dans la suite de ce manuscrit le terme "largeurs du faisceau" pour désigner les demi-largeurs minima  $W_{0x}$  et  $W_{0y}$ .

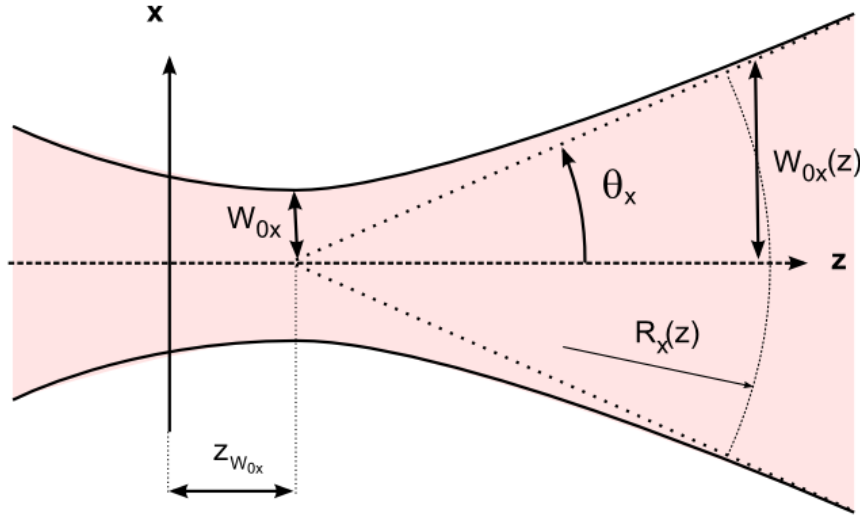


FIG. 1.3: Illustration des paramètres d'un faisceau gaussien classique dans le plan  $xOz$ .

Le long de la direction de propagation  $z$ , le terme :

$$\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{z - z_{W_{0x,y}}}{z_{0x,y}}\right) \quad (1.8)$$

fait acquérir au faisceau un décalage de phase par rapport à celle d'une onde plane de même fréquence. Cette différence de phase est appelée décalage de GOUY[73, 74]<sup>2</sup>. Il en résulte un décalage dans la position des fronts d'onde, le front d'onde d'un faisceau gaussien se propageant plus rapidement que celui d'une onde plane (sa vitesse de phase étant plus grande)[72, §17.4]. Enfin, contrairement aux rayons de l'optique géométrique, le décalage de phase est progressif lors de la traversée de la zone focale. Par conséquent, le phénomène de *caustique*, lié aux sauts de phase brusques d'un rayon lors de la traversée de la zone focale, n'existe pas avec les faisceaux gaussiens.

Lorsque les couples de paramètres  $W_{0x}, W_{0y}$  et  $z_{W_{0x}}, z_{W_{0y}}$  sont égaux, le faisceau possède une symétrie de révolution autour de l'axe de propagation  $Oz$  et il est dit *circulaire* (Figure 1.4). Le front d'onde d'un tel faisceau est plan au niveau de sa ceinture et devient sphérique à l'infini[63].

<sup>2</sup>Parfois indument nommé "Guoy", par exemple dans [72].

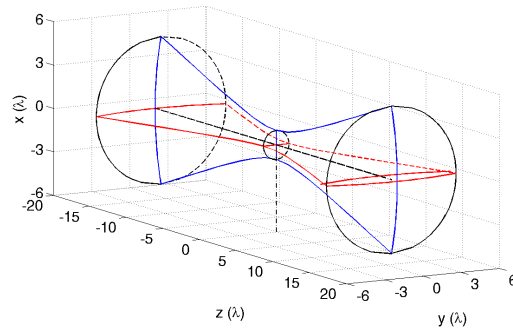


FIG. 1.4: Faisceau gaussien circulaire.

Lorsque seuls les paramètres  $z_{W_{0,x}}$ ,  $z_{W_{0,y}}$  sont égaux, l'enveloppe du champ dans le plan de la ceinture est une ellipse dont les demi-grands axes sont  $W_{0,x}$  et  $W_{0,y}$ . Le faisceau est alors dit *elliptique*. Au niveau de sa ceinture et à l'infini, les fronts d'onde conservent les mêmes propriétés que celles du faisceau gaussien circulaire, c'est-à-dire que son front d'onde est plan au niveau de la ceinture et devient sphérique à l'infini<sup>3</sup> (cf. Figure 1.5).

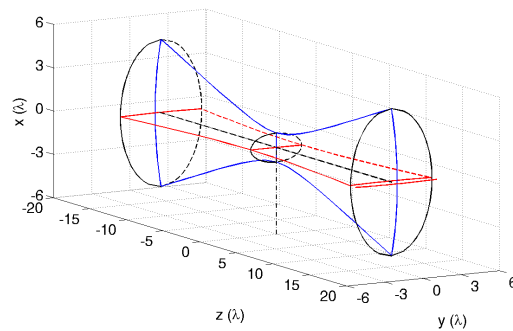


FIG. 1.5: Faisceau gaussien elliptique.

Enfin, lorsque les distances  $z_{W_{0,x}}$  et  $z_{W_{0,y}}$  sont différentes, le faisceau est dit *astigmatique*[75]. Au niveau de chaque ceinture, les fronts d'onde sont cylindriques, et sphériques à l'infini<sup>3</sup> (cf. Figure 1.6).



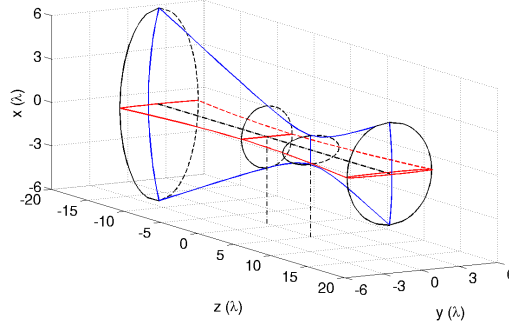


FIG. 1.6: Faisceau gaussien astigmatique.

## I.2 Formulation vectorielle

Une formulation vectorielle d'un faisceau gaussien peut être obtenue à partir de potentiels vecteurs, définis à partir de l'expression scalaire 1.3[76]. L'orientation du potentiel vecteur électrique définit alors la polarisation principale du champ électrique. En toute généralité, un faisceau gaussien vectoriel peut s'écrire comme une combinaison linéaire pondérée par les coefficients  $a_x$  et  $a_y$  issus de faisceaux vectoriels dont les polarisations principales sont dirigées selon  $x$  et  $y$ [63, 64] :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = u(x, y, z)(a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y) - \frac{j}{k} \left( \frac{\partial u}{\partial x} a_x + \frac{\partial u}{\partial y} a_y \right) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.9)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} \left( u(x, y, z)(a_x \hat{\mathbf{e}}_y - a_y \hat{\mathbf{e}}_x) - \frac{j}{k} \left( \frac{\partial u}{\partial y} a_x - \frac{\partial u}{\partial x} a_y \right) \hat{\mathbf{e}}_z \right) \quad (1.10)$$

Les composantes selon l'axe  $\mathbf{e}_z$  exprimées à partir de dérivées partielles selon  $x$  et  $y$  de la fonctions  $u$  peuvent se réécrire comme le produit d'un terme avec la fonction  $u$ . Les champs peuvent alors s'exprimer sous la forme compacte :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_{E;z}(x, y, z) \end{pmatrix} u(x, y, z) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \\ a_{H;z}(x, y, z) \end{pmatrix} u(x, y, z) \quad (1.12)$$

avec

$$\mathbf{a}_{E;z}(x, y, z) = \left( -\frac{1}{R_x(z)} + j \frac{2}{kW_x^2(z)} \right) x \mathbf{a}_x + \left( -\frac{1}{R_y(z)} + j \frac{2}{kW_y^2(z)} \right) y \mathbf{a}_y \quad (1.13)$$

$$\mathbf{a}_{H;z}(x, y, z) = \left( -\frac{1}{R_y(z)} + j \frac{2}{kW_y^2(z)} \right) y \mathbf{a}_x - \left( -\frac{1}{R_x(z)} + j \frac{2}{kW_x^2(z)} \right) x \mathbf{a}_y \quad (1.14)$$

Les vecteurs  $\mathbf{A}_E(x, y, z) = {}^t(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_{E;z}(x, y, z))$  et  $\mathbf{A}_H(x, y, z) = {}^t(-\mathbf{a}_y, \mathbf{a}_x, \mathbf{a}_{H;z}(x, y, z))$  définissent alors la polarisation des champs électrique et magnétique.

## II Faisceaux gaussiens généralisés

### II.1 Définitions

Un faisceau gaussien peut être défini à partir d'un champ dont l'amplitude est gaussienne et la phase quadratique sur un plan initial  $\Sigma$ . Soit  $\{O, \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$  le repère lié au plan initial dans lequel le champ sera exprimé. Ce repère forme une base orthonormée, représentée sur la figure (1.7) :

$$\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_z \quad (1.15)$$

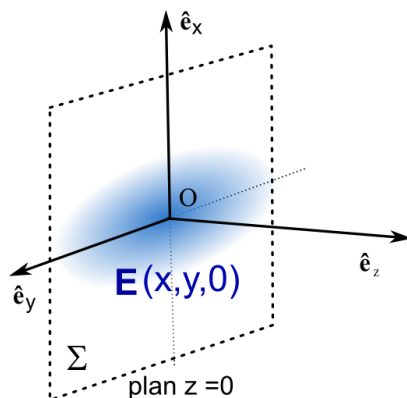


FIG. 1.7: Définition du repère.

Un champ électrique d'amplitude gaussienne dans le plan  $\Sigma$  situé en  $z = 0$  et dont la composante principale est contenue dans le plan  $z = 0$ , peut s'écrire en s'inspirant de l'écriture des champs (1.11-1.12) :

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = \mathbf{A}_E(x, y, 0) u(x, y, 0) \quad (1.16)$$

avec  $\mathbf{A}_E = {}^t(a_x, a_y, a_{E;z})$  et

$$u(x, y, 0) = \exp \left[ -\frac{jk^t}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{Q}(0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \quad (1.17)$$

Seules les composantes  $a_x$  et  $a_y$  de  $\mathbf{A}_E$  sont nécessaires pour définir le champ. La composante  $a_{E;z}$  sera calculée par la suite.

$\mathbb{Q}(0)$  est une matrice symétrique à valeurs complexes :

$$\mathbb{Q}(0) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Afin d'assurer la décroissance gaussienne du champ (1.16), la matrice  $\mathbb{Q}(0)$  doit être définie avec une partie imaginaire négative :

$$\text{Im}[\mathbb{Q}(0)] < 0 \quad (1.19)$$

pour que la forme quadratique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{Q}(0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = q_{11}x^2 + q_{22}y^2 + 2q_{12}xy \quad (1.20)$$

possède également une partie imaginaire négative, assurant ainsi la décroissance de l'exponentielle.

## II.2 Spectre d'ondes planes du champ initial

On exprime le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le repère lié au plan selon les composantes cartésiennes  $(k_x, k_y, k_z)$ . Il vérifie :

$$\|\mathbf{k}\|^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (1.21)$$

d'où :

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 \quad (1.22)$$

Le spectre d'ondes planes  $\tilde{\mathbf{E}}$  du champ (1.16) s'écrit[77] :

$$\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(x, y, 0) e^{jk_x x + jk_y y} dx dy \quad (1.23)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_E \exp \left[ -\frac{j}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{Q}(0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \right] dx dy \quad (1.24)$$

Cette intégrale peut s'évaluer exactement<sup>3</sup> (cf. Annexe A).

$$\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) = \mathbf{A}_E \tilde{u}(k_x, k_y) \quad (1.25)$$

avec :

$$\tilde{u}(k_x, k_y) = \frac{1}{jk} (\det \mathbb{Q}(0))^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{j}{2k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \mathbb{Q}^{-1}(0) \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \right] \quad (1.26)$$

<sup>3</sup>Pour les composantes selon  $\hat{\mathbf{e}}_x$  et  $\hat{\mathbf{e}}_y$ .

Les trois composantes du champ électrique ne sont pas indépendantes et sont reliées entre elles par les équations de MAXWELL. Dans le domaine spectral, l'équation de MAXWELL-GAUSS sur la divergence du champ électrique impose la condition :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow k_x \tilde{E}_x + k_y \tilde{E}_y + k_z \tilde{E}_z = 0 \quad (1.28)$$

$$\Rightarrow k_x a_x + k_y a_y + k_z a_{E;z} = 0 \quad (1.29)$$

La connaissance des composantes transverses  $a_x$  et  $a_y$  du champ électrique dans le plan initial nous permet de déduire la composante longitudinale  $a_{E;z}$  :

$$a_{E;z} = -\frac{1}{k_z}(k_x a_x + k_y a_y) \quad (1.30)$$

Ainsi, le spectre d'ondes planes du champ électrique a pour expression :

$$\tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_{E;z}(k_x, k_y) \end{pmatrix} \tilde{u}(k_x, k_y) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{A}}_E(k_x, k_y) \tilde{u}(k_x, k_y) \quad (1.31)$$

L'équation de MAXWELL-FARADAY dans le domaine spectral nous permet de déduire du spectre d'ondes planes du champ électrique (1.31) le spectre d'ondes planes du champ magnétique :

$$\tilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} k_y a_{E;z} - k_z a_y \\ k_z a_x - k_x a_{E;z} \\ k_x a_y - k_y a_x \end{pmatrix} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{k Z_0} \tilde{u}(k_x, k_y) \quad (1.32)$$

En utilisant la relation (1.22), cette expression devient :

$$\tilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} -\frac{k_x k_y}{k_z} a_x - \frac{k^2 - k_x^2}{k_z} a_y \\ \frac{k^2 - k_y^2}{k_z} a_x + \frac{k_y k_y}{k_z} a_y \\ k_x a_y - k_y a_x \end{pmatrix} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{k Z_0} \tilde{u}(k_x, k_y) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{A}}_H(k_x, k_y) \tilde{u}(k_x, k_y) \quad (1.33)$$

### II.3 Champs propagés

Les champs électromagnétiques propagés sont calculés en prenant en compte la propagation des ondes planes entre le plan initial et les points  $(x, y, z)$ . Pour tout  $z > 0$ , on a [77] :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \quad (1.34)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \quad (1.35)$$

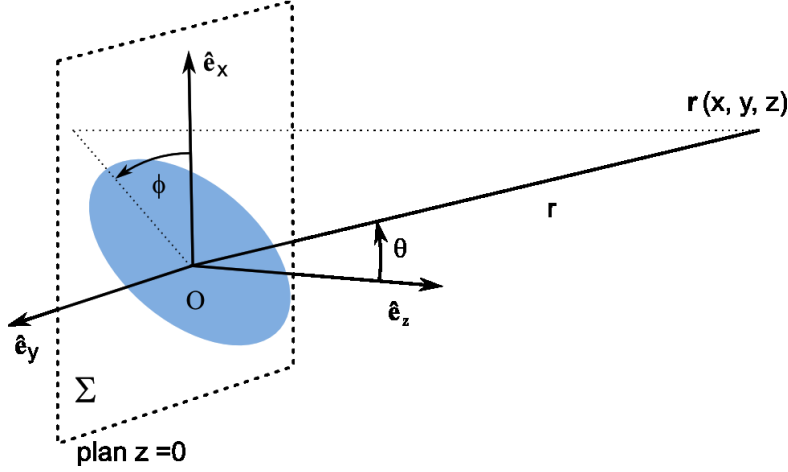


FIG. 1.8: Géométrie générale et notations.

La composante  $k_z$  du vecteur d'onde a pour expression d'après (1.22) :

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} & \text{Si } k^2 > |k_x^2 + k_y^2| \\ -j\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2} & \text{Si } k^2 < |k_x^2 + k_y^2| \end{cases} \quad (1.36)$$

Le premier cas ( $k^2 > |k_x^2 + k_y^2|$ ) correspond aux ondes planes se propageant dans la direction  $z > 0$  et sont dites *propagatives*. Le second cas ( $k^2 < |k_x^2 + k_y^2|$ ) correspond aux ondes planes dont l'amplitude s'atténue exponentiellement dans la direction  $z > 0$  et sont dites *evanescentes*. De manière équivalente, pour assurer la convergence de ces intégrales à l'infini, on doit préciser le choix du signe de la racine carrée  $k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}$ . Pour obtenir une décroissance à l'infini, la partie imaginaire de la racine carrée d'un nombre complexe doit être négative. Par conséquent on impose :

$$\text{Im}[k_z] \leq 0 \quad (1.37)$$

Les intégrales (1.34) et (1.35) n'ont pas de solution analytique, en particulier à cause de la racine carrée induite par la composante  $k_z$  du vecteur d'onde. Toutefois, ces intégrales peuvent être évaluées asymptotiquement selon deux hypothèses différentes. La première utilise une hypothèse paraxiale et la seconde une hypothèse champ lointain. L'objectif de ces évaluations asymptotiques est de fournir des expressions analytiques permettant le calcul rapide des champs propagés.

#### II.4 Formulation paraxiale

L'approximation paraxiale consiste à privilégier les ondes planes du spectre se propageant au voisinage de l'axe de propagation  $z$  du faisceau. Ces ondes planes sont ca-

ractérisées par l'hypothèse :

$$k^2 \gg k_x^2 + k_y^2 \quad (1.38)$$

Dans cette hypothèse, la composante  $k_z$  (1.22) du vecteur d'onde peut être approchée par un développement de TAYLOR :

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \quad (1.39)$$

Les termes de phase de l'équation (1.34) peuvent alors se réécrire comme une forme quadratique :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) = & \frac{(\det \mathbf{Q}(0))^{-\frac{1}{2}}}{2\pi j k} e^{-jkz} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{A}}_E(k_x, k_y) \\ & \cdot \exp \left[ \frac{j}{2k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} [\mathbf{Q}^{-1}(0) + z\mathbb{I}] \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] dk_x dk_y \end{aligned} \quad (1.40)$$

où  $\mathbb{I}$  représente la matrice identité. On obtient une expression similaire pour le champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Dans l'annexe (C), cette intégrale est évaluée asymptotiquement par la méthode du point col et on ne présentera ici que les résultats finaux. Le champ électrique d'un faisceau gaussien dans l'hypothèse paraxiale a pour expression :

$$\mathbf{E}(x, y, z) \approx \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_{E;z} \end{pmatrix} u(x, y, z) \quad (1.41)$$

avec :

$$u(x, y, z) = \left( \frac{\det \mathbf{Q}(z)}{\det \mathbf{Q}(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{jk}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbf{Q}(z) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - jkz \right] \quad (1.42)$$

La composante selon l'axe  $z$  du champ s'exprime en fonction de la matrice de courbure et des composantes transverses par :

$$a_{E;z} \stackrel{\text{def}}{=} -a_x (q_{11}(z)x + q_{12}(z)y) - a_y (q_{12}(z)x + q_{22}(z)y) \quad (1.43)$$

La matrice de courbure complexe du faisceau propagé à la cote  $z$  est :

$$\mathbf{Q}(z) = (\mathbf{Q}^{-1}(0) - z\mathbb{I})^{-1} \quad (1.44)$$

Le champ magnétique d'un faisceau gaussien dans l'hypothèse paraxiale a pour expression :

$$\mathbf{H}(x, y, z) \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{Z_0} \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \\ a_{H;z} \end{pmatrix} u(x, y, z) \quad (1.45)$$

avec

$$a_{H;z} \stackrel{\text{def}}{=} a_x (q_{12}(z)x + q_{22}(z)y) - a_y (q_{11}(z)x + q_{12}(z)y) \quad (1.46)$$

## II.5 Formulation champ lointain

Les champs lointains d'une onde électromagnétique quelconque peuvent être déterminés analytiquement à partir de leur spectre d'ondes planes en utilisant la méthode de la phase stationnaire[78, 65]. Dans l'hypothèse où le point d'observation des champs se trouve en zone lointaine du centre du faisceau, c'est-à-dire lorsque  $kr \gg 1$  avec  $r = \|\mathbf{r}\|$ , les intégrales (1.34) et (1.35) sont approchées par les expressions suivantes, démontrées dans l'annexe (C) :

$$\mathbf{E}(x, y, z) \approx jk \frac{e^{-jkr}}{r} \cos\theta \tilde{\mathbf{E}}(k \cos\phi \sin\theta, k \sin\phi \sin\theta) \quad (1.47)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) \approx jk \frac{e^{-jkr}}{r} \cos\theta \tilde{\mathbf{H}}(k \cos\phi \sin\theta, k \sin\phi \sin\theta) \quad (1.48)$$

c'est-à-dire , en coordonnées cartésiennes pour le champ électrique

$$\mathbf{E}(x, y, z) \approx \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ -\frac{x}{z}a_x - \frac{y}{z}a_y \end{pmatrix} v(x, y, z) \quad (1.49)$$

avec

$$v(x, y, z) = \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{z}{r} (\det \mathbb{Q}(0))^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{jk}{2r^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{Q}^{-1}(0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \quad (1.50)$$

Quant au champ magnétique, il s'écrit dans ces mêmes coordonnées :

$$\mathbf{H}(x, y, z) \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{Z_0} \begin{pmatrix} -\frac{xy}{zr}a_x - \left(\frac{z}{r} + \frac{y^2}{zr}\right)a_y \\ \left(\frac{z}{r} + \frac{x^2}{zr}\right)a_x + \frac{xy}{zr}a_y \\ -\frac{y}{r}a_x + \frac{x}{r}a_y \end{pmatrix} v(x, y, z) \quad (1.51)$$



## II.6 Caractéristiques physiques

### II.6.1 Caractéristiques géométriques

Les caractéristiques physiques du faisceau gaussien généralisé sont, pour une fréquence donnée, entièrement déterminées par la matrice de courbure complexe  $\mathbb{Q}(0)$  du champ gaussien dans le plan initial. On trouvera une analyse complète des propriétés géométriques en fonction des paramètres de la matrice de courbure complexe dans [67, 64]. Nous en résumons ici les principaux résultats.

Au préalable, remarquons que l'expression d'un faisceau gaussien classique (1.3) peut éventuellement se réécrire sous une forme plus compacte[79],[72, 16.5] :

$$u(x, y, z) = \sqrt{\frac{q_x(0)q_y(0)}{q_x(z)q_y(z)}} \exp \left[ -\frac{jk}{2} \left( \frac{x^2}{q_x(z)} + \frac{y^2}{q_y(z)} \right) - jkz \right] \quad (1.52)$$

où l'on a utilisé :

$$\frac{1}{q_{x,y}(z)} = \frac{1}{R_{x,y}(z)} - j \frac{2}{kW_{x,y}^2(z)} \quad (1.53)$$

$$= \frac{1}{z - z_{W_{0,x,y}} + jz_{0,x,y}} \quad (1.54)$$

$q_{x,y}$  représentent alors les rayons de courbures *complexes* du faisceau selon  $x$  et  $y$ .

Lorsque la matrice de courbure est diagonale, on peut montrer que la formulation généralisée (1.41) correspond à celle du mode fondamental d'un faisceau gaussien classique (1.52). Dans ce cas, la matrice de courbure complexe peut être séparée en une partie réelle et une partie imaginaire, correspondant respectivement à la description de la courbure du front d'onde  $R_{x,y}$  et de l'amplitude gaussienne du faisceau[58]. En conservant l'analogie avec un faisceau gaussien classique, les éléments diagonaux de la matrice de courbure (1.18) peuvent être reliés aux caractéristiques classiques d'un faisceau gaussien qui sont :

- les demi-largeurs de la (ou des) ceinture(s) :  $W_{0,x}$  et  $W_{0,y}$  ;
- les distances entre le centre du repère faisceau et la position de la (ou des) ceinture(s) :  $z_{W_{0,x}}$  et  $z_{W_{0,y}}$ .

Les relations de passage entre les éléments de la matrice de courbure  $q_{ij}$  et ces paramètres sont :

$$W_{0,x} = \sqrt{\operatorname{Im} \left( \frac{2}{kq_{11}} \right)} \quad W_{0,y} = \sqrt{\operatorname{Im} \left( \frac{2}{kq_{22}} \right)} \quad (1.55)$$

$$z_{W_{0,x}} = -\operatorname{Re} \left( \frac{1}{q_{11}} \right) \quad z_{W_{0,y}} = -\operatorname{Re} \left( \frac{1}{q_{22}} \right) \quad (1.56)$$

ou de manière équivalente :

$$\mathbb{Q}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{-z_{W_{0,x}} + j\frac{kW_{0,x}^2}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-z_{W_{0,y}} + j\frac{kW_{0,y}^2}{2}} \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

Enfin, on remarque que les composantes selon  $\hat{\mathbf{e}}_z$  des relations vectorielles d'un faisceau gaussien classique (1.13,1.14) correspondent exactement à celles d'un faisceau gaussien généralisé paraxial (1.43,1.46).

Lorsque la matrice de courbure est diagonale et que ses coefficients  $q_{ii}$  sont égaux, c'est-à-dire lorsque  $W_{0,x} = W_{0,y} = W_0$  et  $z_{W_{0,x}} = z_{W_{0,y}} = z_{W_0}$ , on retrouve le comportement physique d'un faisceau gaussien *circulaire*, dont on rappelle l'interprétation des paramètres  $W_0$  et  $z_{W_0}$  sur la figure (1.9).

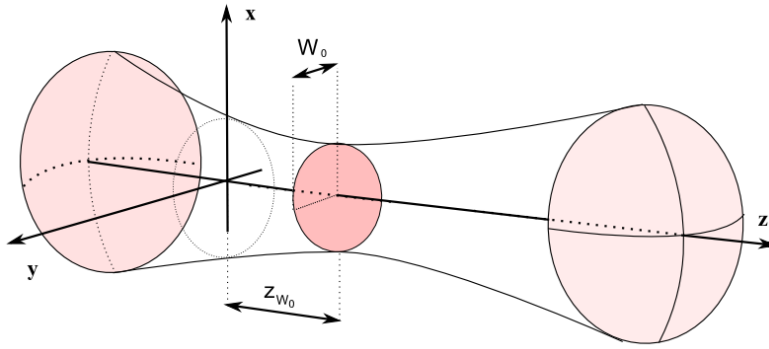


FIG. 1.9: Géométrie générale d'un faisceau gaussien circulaire.

Lorsque la matrice de courbure est diagonale et que ses coefficients  $W_{0,x}$  et  $W_{0,y}$  sont différents, on retrouve le comportement physique d'un faisceau gaussien *elliptique* (cf. fig. 1.5). Si les distances  $z_{W_{0,x}}$  et  $z_{W_{0,y}}$  sont différentes, on retrouve le comportement physique d'un faisceau gaussien *astigmatique* (cf. fig. 1.6).

Enfin, lorsque la matrice de courbure est une matrice complexe quelconque (symétrique et définie à partie imaginaire négative par définition), elle permet de décrire un faisceau gaussien *astigmatique généralisé*, impossible à décrire avec l'expression classique d'un faisceau gaussien. Dans ce cas, les caractéristiques classiques d'un faisceau gaussien (amplitude transverse, effet GOUY) sont conservées, mais il n'est plus possible de définir simplement les notions de ceinture et de largeur du faisceau [63, 64]. En particulier, si les positions des ceintures sont égales, on remarque alors que les directions des

demi-grands axes des ellipses ont subi une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$  telle que  $\tan 2\alpha = 2q_{12}/(q_{11} - q_{22})$  (cf. Annexe D).

### II.6.2 Domaine de validité

Afin de présenter un domaine de validité pour chacune des deux hypothèses utilisées pour le calcul des champs propagés, nous nous intéressons au rayonnement d'une distribution gaussienne définie dans le plan  $z = 0$ , c'est-à-dire à la propagation d'un faisceau gaussien dont l'expression exacte est donnée par la relation intégrale (1.34). Cette expression est évaluée numériquement et est comparée avec les expressions analytiques (1.41) et (1.49). L'erreur entre la méthode de référence numérique et une formulation analytique est définie par :

$$\Delta(\mathbf{r}) = \|\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{\text{test}}(\mathbf{r})\| \quad (1.58)$$

On jugera que cette erreur est satisfaisante à la distance  $r = r_{\Delta}$  lorsque  $\Delta$  sera inférieur à  $-60$  dB avec  $\text{Max}\|\mathbf{E}_{\text{ref}}\| = 0$  dB :

$$r_{\Delta} \quad \text{tel que} \quad \Delta(\mathbf{r}) < -60\text{dB} \quad (1.59)$$

Afin de présenter des conclusions indépendantes de la fréquence, on normalise les résultats par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$ . Plusieurs types de faisceaux sont définis par des ceintures circulaires "étroites" formant des faisceaux très divergents (telles que  $kW_0 < 2\pi$ ) jusqu'à des ceintures "larges" et peu divergents (telles que  $kW_0 > 2\pi$ ). Les ceintures sont définies sans perte de généralité sur le plan initial en  $z = 0$  par  $z_{W_0,x} = z_{W_0,y} = 0$ .

Sur les figures (1.10 à 1.16), nous avons représenté la composante principale d'un faisceau gaussien circulaire avec différentes demi-largeurs de ceinture telles que  $kW_0 = \pi, 2\pi, 4\pi, 8\pi$  et introduites dans la matrice de courbure suivante :

$$\mathbb{Q}(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{jkW_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{jkW_0^2} \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

On représente pour chacune de ces figures les erreurs entre le calcul numérique et les formulations analytiques paraxiale et champ lointain.

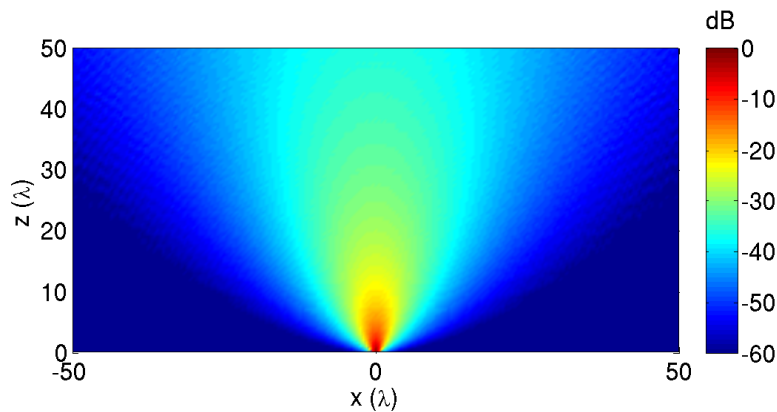


FIG. 1.10: Amplitude d'un faisceau gaussien propagé dans le plan  $xOz$ . Référence calculée numériquement à partir de l'équation intégrale du spectre d'ondes planes (1.34). Faisceau circulaire,  $kW_0 = \pi$ .

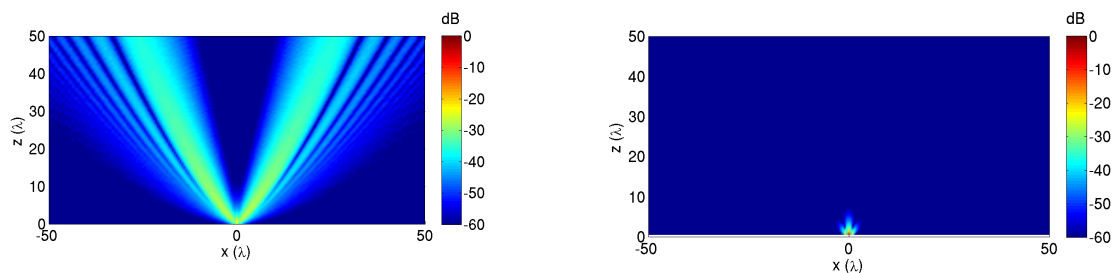


FIG. 1.11: Différence absolue (en dB) entre la référence et la formulation paraxiale (1.41) (à gauche) et entre la référence et la formulation champ lointain (1.49) (à droite). Faisceau circulaire,  $kW_0 = \pi$ .

Lorsque la demi-largeur du faisceau est faible, on constate que le faisceau est très divergent. La formulation analytique paraxiale donne de bons résultats uniquement dans le cône de paraxialité. La formulation analytique champ lointain correspond au champ exact à quelques longueurs d'ondes du centre du faisceau.

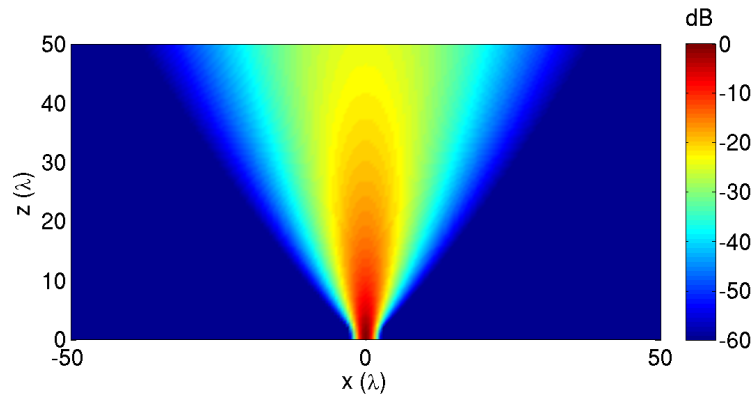


FIG. 1.12: Amplitude d'un faisceau gaussien propagé dans le plan  $xOz$ . Référence calculée numériquement à partir de l'équation intégrale du spectre d'ondes planes (1.34). Faisceau circulaire,  $kW_0 = 2\pi$ .

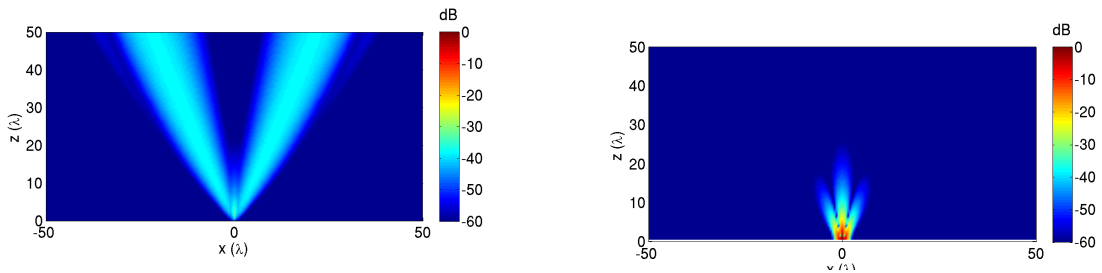


FIG. 1.13: Différence absolue (en dB) entre la référence et la formulation paraxiale (1.41) (à gauche) et entre la référence et la formulation champ lointain (1.49) (à droite). Faisceau circulaire,  $kW_0 = 2\pi$ .

À mesure que l'on augmente la taille du faisceau, l'approximation paraxiale donne de meilleurs résultats, contrairement à l'approximation champ lointain dont le domaine de validité s'éloigne du centre du faisceau.

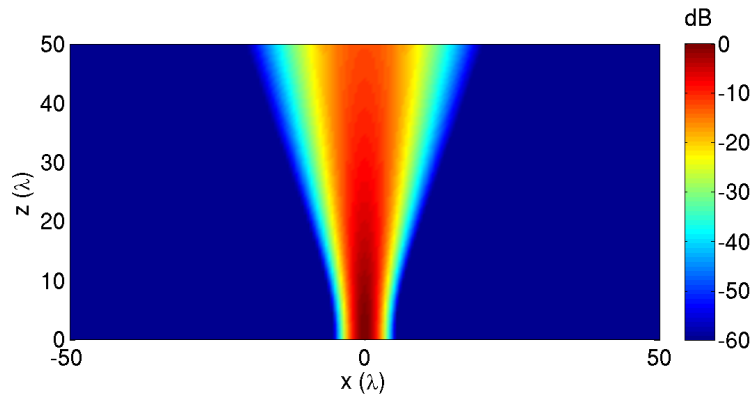


FIG. 1.14: Amplitude d'un faisceau gaussien propagé dans le plan  $xOz$ . Référence calculée numériquement à partir de l'équation intégrale du spectre d'ondes planes (1.34). Faisceau circulaire,  $kW_0 = 4\pi$ .

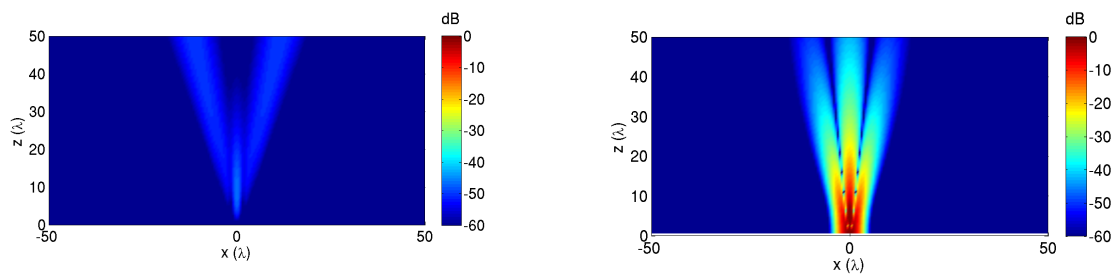


FIG. 1.15: Différence absolue (en dB) entre la référence et la formulation paraxiale (1.41) (à gauche) et entre la référence et la formulation champ lointain (1.49) (à droite). Faisceau circulaire,  $kW_0 = 4\pi$ .

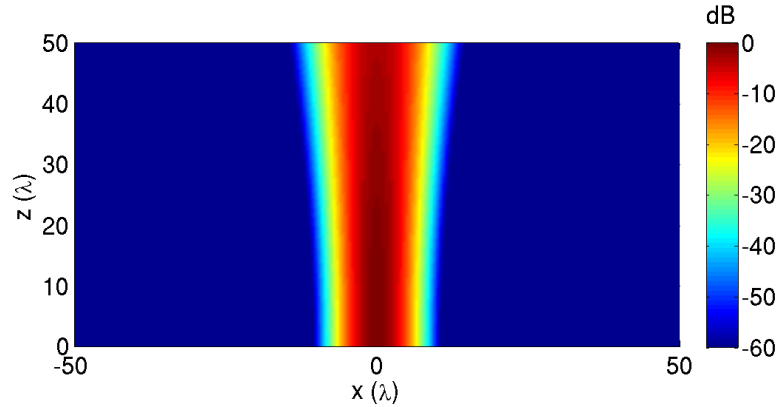


FIG. 1.16: Amplitude d'un faisceau gaussien propagé dans le plan  $xOz$ . Référence calculée numériquement à partir de l'équation intégrale du spectre d'ondes planes (1.34). Faisceau circulaire,  $kW_0 = 8\pi$ .

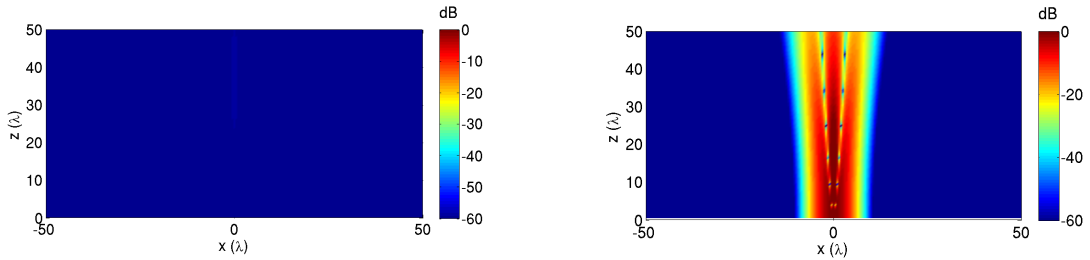


FIG. 1.17: Différence absolue (en dB) entre la référence et la formulation paraxiale (1.41) (à gauche) et entre la référence et la formulation champ lointain (1.49) (à droite). Faisceau circulaire,  $kW_0 = 8\pi$ .

Lorsque la demi-largeur du faisceau est grande, le faisceau est très peu divergent. Dans ce cas de figure, l'erreur avec l'expression analytique paraxiale est très faible. Au contraire, plus le faisceau est large, plus le domaine de validité de la formulation champ lointain est éloigné.

**Synthèse.** Les formulations des faisceaux gaussiens généralisés offrent une écriture plus compacte des champs ainsi que la description de tous les faisceaux gaussiens classiques. La validité de chacune des deux formulations généralisées dépend essentiellement de la demi-largeur du faisceau au niveau de la ceinture. Pour des faisceaux étroits ( $kW_0 < 2\pi$ ), la formulation champ lointain donne de très bons résultats au-delà d'une vingtaine de longueur d'ondes. À mesure que la largeur du faisceau augmente, la distance

$r_{\Delta}$  nécessaire pour que l'approximation champ lointain soit justifiée augmente également. En se basant sur le critère de justification de l'approximation champ lointain pour des ouvertures (zone de FRAUNHOFER), la distance minimale d'observation doit être supérieure de  $2D^2/\lambda$  où  $D$  représente le diamètre de l'ouverture. Par conséquent, la distance minimale pour un faisceau gaussien de demi-largeur  $W_0$  doit être supérieure à  $5\frac{kW_0^2}{2}$ , soit  $5z_0$ .

La formulation paraxiale donne de meilleurs résultats à mesure que la taille de la ceinture augmente. Il est généralement admis que la formulation paraxiale donne de bons résultats au voisinage de l'axe de propagation pour  $kW_0 > 2\pi$  (soit une largeur  $W_0 = \lambda$  ou angle de divergence d'environ 20 degrés)[64]. D'une manière générale, la zone de validité de l'approximation paraxiale est contenue dans le cône d'angle  $\arctan(2/(kW_0))$ .

Ces résultats sont illustrés schématiquement sous la forme d'une abaque sur la figure (1.18).

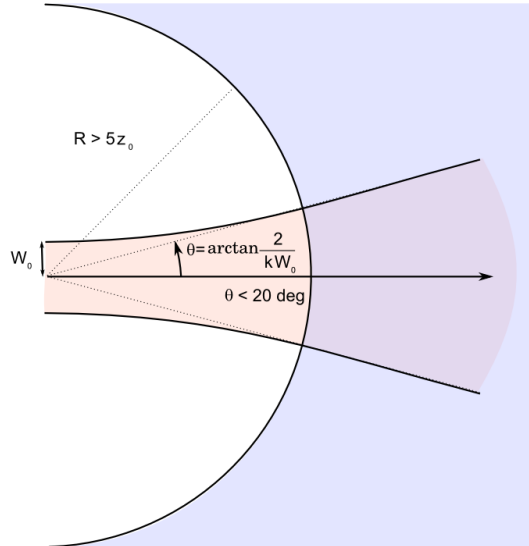


FIG. 1.18: Abaque schématique des zones de validité des formulations paraxiales (1.41) (rouge) et champ lointain (1.49) (bleu).

Enfin, les fronts d'onde des faisceaux ne sont pas équivalents selon les formulations utilisées. Le front d'onde d'un faisceau gaussien dans la formulation paraxiale est quadratique tandis qu'il est sphérique pour la formulation champ lointain. Par conséquent, à grande distance (zone en rose), l'utilisation de la formulation paraxiale peut engendrer des erreurs de phase importantes dès que l'on s'éloigne de l'axe de propagation.



### III Faisceaux gaussiens conformes

Dans cette section, nous rappelons les principales caractéristiques des faisceaux gaussiens conformes introduit dans [64].

Comme nous le verrons au chapitre 3, il existe plusieurs techniques permettant de décomposer une distribution de champ en un ensemble de faisceaux gaussiens. Parmi ces techniques, la décomposition multi-faisceaux gaussiens introduite par [64] permet de décomposer des champs électromagnétiques définis sur des surfaces modérément courbes à l'aide des faisceaux gaussiens généralisés de la section précédente. Le domaine d'application de la décomposition multi-faisceaux gaussiens est limité à une incidence modérée du champ sur la surface courbe initiale, typiquement de l'ordre de 30 degrés et ne convient également pas à des surfaces trop courbes (cf. Figure 1.19).

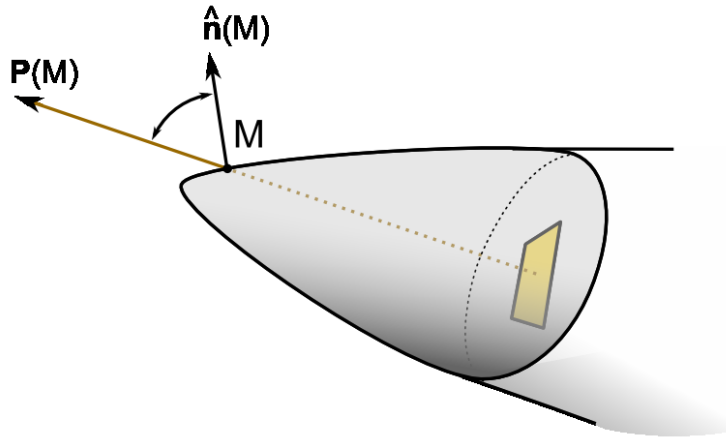


FIG. 1.19: Illustration d'une problématique liée à des radômes de pointe effilés.  $\mathbf{P}$  est le vecteur de Poynting du champ émis par l'antenne au point  $M$  et  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale locale sortante à la surface au point  $M$ . La décomposition multi-faisceaux gaussiens est valide lorsque l'angle entre ces deux vecteurs reste modéré, c'est-à-dire inférieur à 30 degrés.

Un nouveau type de faisceau gaussien a été défini pour surmonter cette limitation. Contrairement aux faisceaux gaussiens généralisés qui sont définis à partir d'un champ gaussien sur un plan, les faisceaux gaussiens conformes sont définis à partir de densités surfaciques gaussiennes de courant circulant sur une surface courbe quadratique. Le rayonnement de ces courants est appelé *faisceau gaussien conforme*. Grâce à cette définition, les faisceaux gaussiens conformes prennent en compte la courbure de la surface

dont ils sont issus.

Une distribution de champ supportée par une surface courbe peut alors être décomposée en une somme de faisceaux gaussiens conformes, à partir de la décomposition des courants équivalents sur la surface en un ensemble de courants élémentaires gaussiens. On utilisera dans les sections qui suivent le terme de "courant" pour désigner une densité surfacique de courant. Les courants électriques seront notés  $\mathbf{J}$  et les courants magnétiques  $\mathbf{M}$ .

### III.1 Courants élémentaires gaussiens

Soit  $\Sigma$  une surface paramétrique quadratique définie par l'équation :

$$z'(x', y') \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \mathbb{Q}^\Sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

où la matrice  $\mathbb{Q}^\Sigma$  est définie réelle et symétrique :

$$\mathbb{Q}^\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q_{11}^\Sigma & q_{12}^\Sigma \\ q_{12}^\Sigma & q_{22}^\Sigma \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

Soient  $O$  l'origine du repère placé au sommet de la surface  $\Sigma$ ,  $\mathbf{r} = {}^t(x, y, z)$  le vecteur associé au point d'observation et  $\mathbf{r}' = {}^t(x', y', z')$  le vecteur associé au point de la surface  $\Sigma$ . La distance entre un point courant de la surface  $\Sigma$  et un point d'observation s'écrit  $R = \|\mathbf{R}\| = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|$ . Son vecteur unitaire est noté  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|}$  (cf. fig. (1.20)).

On définit des courants gaussiens élémentaires sur la surface  $\Sigma$ . Ces courants dépendent de la position relative  $\mathbf{r}' = {}^t(x', y', z')$  sur la surface  $\Sigma$  et sont exprimés comme une fonction  $w$  d'amplitude gaussienne orientée selon les vecteurs unitaires  $\hat{\mathbf{e}}^J, \hat{\mathbf{e}}^M$ , tangents en tout point de la surface :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{e}}^J(\mathbf{r}') w(\mathbf{r}') \quad (1.63)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{e}}^M(\mathbf{r}') w(\mathbf{r}') \quad (1.64)$$

avec :

$$w(\mathbf{r}') \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left[ -j \frac{k}{2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \mathbb{Q}^\Sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right] \exp \left[ -j \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} \right] \quad (1.65)$$

Les termes de phase  $\beta_x, \beta_y$  décrivent une variation linéaire de la phase des courants sur la surface. Ces termes s'inspirent des travaux de décomposition d'ouverture dans la représentation de GABOR[80, 81, 67], introduisant le concept de faisceaux gaussiens

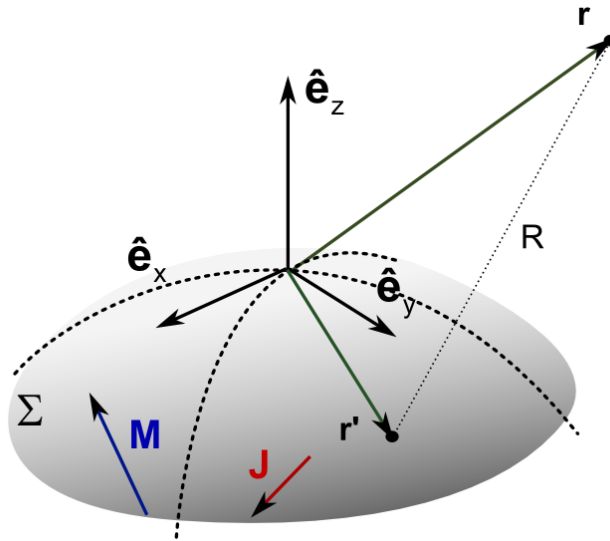


FIG. 1.20: Géométrie et notations.

à phase linéaire. Ces derniers sont définis à partir d'une amplitude gaussienne et d'un terme de phase linéaire sur une interface plane[64].

La matrice de courbure du faisceau  $Q^f$  est définie comme (1.18), c'est-à-dire symétrique avec une partie imaginaire négative pour assurer la décroissance de  $w$  à l'infini. On pose :

$$Q^f \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q_{11}^f & q_{12}^f \\ q_{12}^f & q_{22}^f \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

Dans les sections suivantes, nous calculons les expressions analytiques des faisceaux gaussiens conformes  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  issus de courants électrique  $\mathbf{J}$  et magnétique  $\mathbf{M}$ . Deux approches sont employées pour obtenir ce résultat :

- une approche *spatiale*, où l'on calcule le développement asymptotique des intégrales de rayonnement des courants[64] ;
- une approche *spectrale* originale, où l'on détermine d'abord le spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme avant de déterminer les expressions des champs lointains.

## III.2 Rayonnement des courants élémentaires

### III.2.1 Formulation basée sur le rayonnement des courants

Dans cette section, nous calculons les expressions analytiques des faisceaux gaussiens conformes  $\mathbf{E}_J, \mathbf{H}_J$  issus d'un courant électrique  $\mathbf{J}$ . La démarche est similaire pour des courants magnétiques  $\mathbf{M}$  et nous nous contenterons de donner les résultats finaux pour les faisceaux gaussiens conformes  $\mathbf{E}_M, \mathbf{H}_M$  dont ils seraient issus.

Le champ électrique rayonné au point  $\mathbf{r}$  par un courant  $\mathbf{J}$  est calculé à partir des intégrales de rayonnement de courants. En utilisant la formulation de KOTTLER, le champ électrique rayonné est[82] :

$$\mathbf{E}_J(\mathbf{r}) = \frac{k}{4j\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( 1 - \frac{j}{kR} - \frac{1}{(kR)^2} \right) \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( -1 + \frac{3j}{kR} + \frac{3}{(kR)^2} \right) (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \hat{\mathbf{R}} \right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma \quad (1.67)$$

Le champ magnétique rayonné :

$$\mathbf{H}_J(\mathbf{r}) = \frac{k}{4j\pi} \iint_{\Sigma} \left( 1 - \frac{j}{kR} \right) (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma \quad (1.68)$$

Les termes en  $1/kR$  et  $1/(kR)^2$  peuvent être négligés dès lors que  $R > 3\lambda$ [18]. Dans cette hypothèse, les formulations précédentes se simplifient :

$$\mathbf{E}_J(\mathbf{r}) = \frac{jk}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma \quad (1.69)$$

$$\mathbf{H}_J(\mathbf{r}) = -\frac{jk}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma \quad (1.70)$$

On remplace l'expression du courant élémentaire  $\mathbf{J}$  par sa définition (1.63). À grande distance, la distance  $R$  entre un point de la surface et un point d'observation peut s'approcher par :

$$R = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| \approx r - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \left[ \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{r^2} & -\frac{xy}{r} \\ -\frac{xy}{r} & 1 - \frac{y^2}{r^2} \end{pmatrix} + \frac{z}{r} \mathbb{Q}^{\Sigma} \right] \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

La phase de l'expression intégrale précédente peut se mettre sous forme quadratique. L'application de la méthode du point col permet d'évaluer asymptotiquement cette intégrale pour obtenir l'expression analytique du champ électrique[64] (cf. Annexe C) :

$$\boxed{\mathbf{E}_J(\mathbf{r}) = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} (\hat{\mathbf{R}}_s \times \hat{\mathbf{R}}_s \times \hat{\mathbf{e}}_s^J) u_{\text{fgc}}(\mathbf{r})} \quad (1.72)$$

et du champ magnétique :

$$\boxed{\mathbf{H}_J(\mathbf{r}) = -(\hat{\mathbf{R}}_s \times \hat{\mathbf{e}}_s^J) u_{\text{fgc}}(\mathbf{r})} \quad (1.73)$$

avec

$$u_{\text{fgc}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \frac{g_s}{\det \mathbb{Q}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{j}{2k} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \mathbb{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \right] \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (1.74)$$

où les coordonnées  $\xi_x, \xi_y$  correspondent à :

$$\begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = \frac{k}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

La matrice de courbure complexe  $\mathbb{Q}$  définit les paramètres du faisceau gaussien conforme en fonction des paramètres du courant ainsi que de la courbure de la surface  $\Sigma$  :

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{r^2} & -\frac{xy}{r} \\ -\frac{xy}{r} & 1 - \frac{y^2}{r^2} \end{pmatrix} + \mathbb{Q}^f + \frac{z}{r} \mathbb{Q}^\Sigma \quad (1.76)$$

L'indice  $s$  attaché aux vecteurs directeurs  $\hat{\mathbf{e}}_s^J$  et  $\hat{\mathbf{R}}_s$  indique que l'on évalue ces vecteurs aux coordonnées du point col de l'intégrale spatiale :

$$\begin{pmatrix} x'_s \\ y'_s \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbb{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_s^J = \hat{\mathbf{e}}^J(\mathbf{r}'_s) \quad (1.78)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_s = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}'_s) \quad (1.79)$$

Enfin, le terme  $g_s$  est issu de l'expression d'un élément de surface de  $\Sigma$ , évalué au point col :

$$g_s = (q_{11}^\Sigma x'_s + q_{12}^\Sigma y'_s)^2 + (q_{12}^\Sigma x'_s + q_{22}^\Sigma y'_s)^2 + 1 \quad (1.80)$$

Pour un courant magnétique  $\mathbf{M}$ , on aurait de la même façon :

$$\boxed{\mathbf{E}_M(\mathbf{r}) = (\hat{\mathbf{R}}_s \times \hat{\mathbf{e}}_s^M) u_{\text{fgc}}(\mathbf{r})} \quad (1.81)$$

$$\boxed{\mathbf{H}_M(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} (\hat{\mathbf{R}}_s \times \hat{\mathbf{R}}_s \times \hat{\mathbf{e}}_s^M) u_{\text{fgc}}(\mathbf{r})} \quad (1.82)$$

## III.2.2 Formulation basée sur le spectre d'ondes planes

Dans cette section, nous présentons un travail original dont l'objectif est la formulation de l'expression analytique des spectres d'ondes planes  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$  d'un faisceau gaussien conforme, tels que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.83)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.84)$$

Ces expressions sont utiles pour calculer les champs transmis et réfléchis par une interface diélectrique comme l'a montré[64] : lors de la traversée d'une surface diélectrique, chacune des ondes planes constituant le spectre est pondérée par un coefficient dyadique de transmission ou de réflexion qui dépend des directions  $\mathbf{k}$  des ondes planes et de la normale locale à la surface  $\hat{\mathbf{n}}$ . Les coefficients de transmission  $\overline{\overline{T}}$  et de réflexion  $\overline{\overline{R}}$  correspondent aux coefficients de FRESNEL, établis dans l'hypothèse du plan tangent à la surface :

$$\mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{T}}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{n}}) \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.85)$$

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{R}}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{n}}) \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.86)$$

L'évaluation asymptotique de ces intégrales conduit alors aux champs transmis et réfléchis sur l'interface.

Notre démarche est la suivante : à partir des intégrales de rayonnement de courant (1.87-1.88), nous décomposons la fonction de GREEN en espace libre en un spectre d'ondes planes. En inversant l'ordre d'intégration et en évaluant l'une des intégrales par la méthode du point col, nous en déduisons le spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme. Au passage, nous déduisons du spectre d'ondes planes l'expression analytique du champ lointain d'un faisceau gaussien conforme grâce à la méthode de la phase stationnaire. Enfin, nous appliquons ces résultats au calcul des champs transmis et réfléchis par une interface diélectrique courbe. Ces travaux étant originaux, nous détaillons les calculs pour des courants électriques et magnétiques.

### III.2.2.a Équations de Franz

Les équations intégrales de rayonnement des courants (1.67) et (1.68) peuvent être formulées de manière équivalente sous la forme des équations de FRANZ[83, 84, 85] :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Z_0}{jk} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}^J(\mathbf{r}) - \nabla \times \mathbf{A}^M(\mathbf{r}) \quad (1.87)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}^J(\mathbf{r}) + \frac{1}{jkZ_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}^M(\mathbf{r}) \quad (1.88)$$

où  $\mathbf{A}^J$  et  $\mathbf{A}^M$  sont respectivement les potentiels vecteurs électrique et magnétique et  $G$  la fonction de GREEN en espace libre :

$$\mathbf{A}^J(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Sigma \quad (1.89)$$

$$\mathbf{A}^M(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{M}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Sigma \quad (1.90)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} \quad (1.91)$$

où  $(k_x, k_y, k_z)$  sont les composantes cartésiennes du vecteur d'onde respectant les définitions précédentes (1.21) et (1.37).

### III.2.2.b Décomposition spectrale d'un point source en ondes planes

La fonction de GREEN en espace libre (1.91) correspond à un point source sphérique, qui peut être décomposé en un spectre d'ondes planes<sup>4</sup> à partir de la formule de WEYL[2, p.481],[86, (2.2.27)], [87, 88] :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_z|z-z'|}}{k_z} e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} dk_x dk_y \quad (1.92)$$

---

<sup>4</sup>Une démarche similaire pourrait être accomplie en décomposant le point source en ondes cylindriques grâce à la formule de SOMMERFELD[2, p.481],[86, p.66-70]. Le résultat ne fait plus intervenir qu'une intégrale simple mais dont l'intégrande contient une fonction de Bessel ou de Hankel qui complique rapidement les calculs.

## III.2.2.c Expression des potentiels vecteurs

On remplace la fonction de GREEN en espace libre (1.91) par l'expression de sa décomposition spectrale (1.92) dans les expressions des potentiels vecteurs (1.89-1.90) :

$$\mathbf{A}^J(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_z|z-z'|}}{k_z} e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} dk_x dk_y \right) d\Sigma \quad (1.93)$$

$$\mathbf{A}^M(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_z|z-z'|}}{k_z} e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} dk_x dk_y \right) d\Sigma \quad (1.94)$$

Pour alléger les écritures, on utilise le symbole  $C$  pour désigner les indices  $J$  ou  $M$  et  $\mathbf{C}$  pour  $\mathbf{J}$  ou  $\mathbf{M}$  :

$$\mathbf{A}^C(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{C}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_z|z-z'|}}{k_z} e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} dk_x dk_y \right) d\Sigma \quad (1.95)$$

La simplification de la valeur absolue autour de  $z - z'$  présente deux cas de figure :

- $(z - z') > 0$  (indice +) ;
- $(z - z') < 0$  (indice -).

c'est-à-dire :

$$\mathbf{A}_+^C(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{C}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_z(z-z')}}{k_z} e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} dk_x dk_y \right) d\Sigma \quad (1.96)$$

$$\mathbf{A}_-^C(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \mathbf{C}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+jk_z(z-z')}}{k_z} e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} dk_x dk_y \right) d\Sigma \quad (1.97)$$

Les densités de courant  $\mathbf{C}$  sont décomposées en un produit d'une fonction vectorielle avec une fonction scalaire gaussienne  $w$  selon les définitions (1.63-1.64) :

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{e}}^C(\mathbf{r}') w(\mathbf{r}') \quad (1.98)$$

d'où :

$$\mathbf{A}_+^C(\mathbf{r}) = \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{\Sigma} \hat{\mathbf{e}}^C(\mathbf{r}') w(\mathbf{r}') \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_z(z-z')}}{k_z} e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} dk_x dk_y \right) d\Sigma \quad (1.99)$$

$$\mathbf{A}_-^C(\mathbf{r}) = \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{\Sigma} \hat{\mathbf{e}}^C(\mathbf{r}') w(\mathbf{r}') \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+jk_z(z-z')}}{k_z} e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} dk_x dk_y \right) d\Sigma \quad (1.100)$$

Pour ces hypothèses, les intégrales précédentes sont définies. Grâce au théorème de FUBINI, on peut inverser l'ordre d'intégration des intégrales spectrales et spatiales[89, 90] :

$$\mathbf{A}_{\pm}^C(\mathbf{r}) = \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\mathbf{k}^{\pm} \cdot \mathbf{r}}}{k_z} \left( \iint_{\Sigma} \hat{\mathbf{e}}^C(\mathbf{r}') w(\mathbf{r}') e^{+j\mathbf{k}^{\pm} \cdot \mathbf{r}'} d\Sigma \right) dk_x dk_y \quad (1.101)$$



où on a utilisé la notation :

$$\mathbf{k}^\pm = {}^t(k_x, k_y, \pm k_z) \quad (1.102)$$

L'intégrale double centrale peut être évaluée asymptotiquement en utilisant la méthode du point col (cf. Annexe C). On obtient :

$$\mathbf{A}_\pm^C(\mathbf{r}) = \frac{1}{8j\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\mathbf{k}^\pm \cdot \mathbf{r}}}{k_z} \left( \frac{2\pi}{k} \hat{\mathbf{e}}^C(\mathbf{r}'_s) (-g_s / \det \mathbb{Q}_\pm)^{\frac{1}{2}} \exp \left( + \frac{j}{2k} {}^t\zeta \mathbb{Q}_\pm^{-1} \zeta \right) \right) dk_x dk_y \quad (1.103)$$

avec

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

$$\mathbb{Q}_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}^f \pm \frac{k_z}{k} \mathbb{Q}^\Sigma \quad (1.105)$$

$\mathbf{r}'_s$  correspond au point col de l'intégrale et vaut :

$$\begin{pmatrix} x'_s \\ y'_s \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbb{Q}_\pm^{-1} \zeta \quad (1.106)$$

Enfin,  $g_s$  correspond à la métrique de la surface  $\Sigma$ , évaluée pour le point col :

$$g_s = (q_{11}^\Sigma x'_s + q_{12}^\Sigma y'_s)^2 + (q_{12}^\Sigma x'_s + q_{22}^\Sigma y'_s)^2 + 1 \quad (1.107)$$

### III.2.2.d Expressions des champs électriques et magnétiques

Les opérateurs différentiels des équations de FRANZ (1.87) et (1.88) agissent sur les coordonnées d'observation (non primées). On peut donc faire entrer les opérateurs à l'intérieur des intégrales spectrales et les champs  $\mathbf{E}^r$  et  $\mathbf{H}^r$  s'écrivent alors :

$$\mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ \mathbf{k}^\pm \times \hat{\mathbf{e}}^M(\mathbf{r}'_s) + \frac{Z_0}{k} \mathbf{k}^\pm \times \mathbf{k}^\pm \times \hat{\mathbf{e}}^J(\mathbf{r}'_s) \right] \tilde{u}_{\text{fgc}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}^\pm \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.108)$$

$$\mathbf{H}_\pm(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\mathbf{k}^\pm \times \hat{\mathbf{e}}^J(\mathbf{r}'_s) + \frac{1}{kZ_0} \mathbf{k}^\pm \times \mathbf{k}^\pm \times \hat{\mathbf{e}}^M(\mathbf{r}'_s) \right] \tilde{u}_{\text{fgc}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}^\pm \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.109)$$

avec

$$\tilde{u}_{\text{fgc}}(k_x, k_y) = \frac{1}{2kk_z} (-g_s / \det \mathbb{Q}_\pm)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ \frac{j}{2k} {}^t\zeta \mathbb{Q}_\pm^{-1} \zeta \right] \quad (1.110)$$

III.2.2.e Expression des spectres des champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ 

On reconnaît dans les expressions (1.109-1.109) les formulations intégrales basées sur les spectres d'ondes planes (1.83-1.84). Les expressions des spectres d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme sont alors déterminées par identification :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\pm}(k_x, k_y) = \left[ \mathbf{k}^{\pm} \times \hat{\mathbf{e}}^M(\mathbf{r}'_s) + \frac{Z_0}{k} \mathbf{k}^{\pm} \times \mathbf{k}^{\pm} \times \hat{\mathbf{e}}^J(\mathbf{r}'_s) \right] \tilde{u}_{\text{fgc}}(k_x, k_y) \quad (1.111)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\pm}(k_x, k_y) = \left[ -\mathbf{k}^{\pm} \times \hat{\mathbf{e}}^J(\mathbf{r}'_s) + \frac{1}{kZ_0} \mathbf{k}^{\pm} \times \mathbf{k}^{\pm} \times \hat{\mathbf{e}}^M(\mathbf{r}'_s) \right] \tilde{u}_{\text{fgc}}(k_x, k_y) \quad (1.112)$$

## III.2.2.f Évaluation asymptotique des champs en zone lointaine

Les champs lointains peuvent être déterminés à partir des spectres d'ondes planes (1.111-1.112) en évaluant les intégrales spectrales :

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}^{\pm} \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.113)$$

$$\mathbf{H}^r(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{H}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}^{\pm} \cdot \mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.114)$$

par la méthode de la phase stationnaire dans l'hypothèse champ lointain ( $kr \gg 1$ ), on obtient (cf. Annexe C) :

$$\mathbf{E}^r(\mathbf{r}) = jk \frac{z}{r} \frac{e^{-jkr}}{r} \tilde{\mathbf{E}}\left(\frac{k}{r} \mathbf{r}\right) \quad (1.115)$$

$$\mathbf{H}^r(\mathbf{r}) = jk \frac{z}{r} \frac{e^{-jkr}}{r} \tilde{\mathbf{H}}\left(\frac{k}{r} \mathbf{r}\right) \quad (1.116)$$

Le développement de ces expressions à partir des expressions des spectres  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$  permet d'obtenir les expressions champ lointain d'un faisceau gaussien conforme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left( \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_s^J + \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_s^M \right) u_{\text{fgc,loin}}(\mathbf{r}) \quad (1.117)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left( \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_s^M - \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_s^J \right) u_{\text{fgc,loin}}(\mathbf{r}) \quad (1.118)$$

avec

$$u_{\text{fgc,loin}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2(\det \mathbb{Q}_{\text{loin}})^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ \frac{j}{2k} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix}^t \mathbb{Q}_{\text{loin}}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \right] \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (1.119)$$

où l'on a utilisé les notations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

$$\mathbb{Q}_{\text{loin}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}^f + \frac{z}{r} \mathbb{Q}^\Sigma \quad (1.121)$$

et :

$$\begin{pmatrix} x'_s \\ y'_s \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \mathbb{Q}_{\text{loin}}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \quad (1.122)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_s^J = \hat{\mathbf{e}}^J(\mathbf{r}'_s) \quad \hat{\mathbf{e}}_s^M = \hat{\mathbf{e}}^M(\mathbf{r}'_s) \quad (1.123)$$

**Remarque.** Ces expressions, valides en champ lointain, peuvent également être démontrées à partir des expressions "grande distance" d'un faisceau gaussien conforme (1.72-1.73). En effet, on a :

$$\mathbb{Q} \xrightarrow[r \gg 1]{} \mathbb{Q}_{\text{loin}} \quad (1.124)$$

$$\mathbf{R}_s \xrightarrow[r \gg 1]{} \mathbf{r} \quad (1.125)$$

Autrement dit, l'approche spectrale permet de retrouver la formulation des faisceaux gaussiens conformes "champ lointain" exprimée à partir des intégrales de rayonnement des courants [64].

### III.3 Caractéristiques physiques

Dans cette section, nous étudions les caractéristiques physiques d'un faisceau gaussien conforme. À la différence des faisceaux gaussiens généralisés vus dans la section II où seule la matrice de courbure complexe déterminait la géométrie du faisceau, les caractéristiques des faisceaux gaussiens conformes sont également déterminées par la matrice de courbure  $\mathbb{Q}^\Sigma$  de la surface  $\Sigma$  ainsi que les termes de phase linéaire  $(\beta_x, \beta_y)$ . Dans les sous-sections suivantes, nous étudions les effets de ces différents paramètres sur l'allure d'un faisceau gaussien conforme.

#### III.3.1 Configuration des calculs

**Champ proche.** Dans les comparaisons qui suivent, le calcul des champs en zone proche ou semi-lointaine est effectué dans des plans de coupe de l'espace défini par le repère lié à la surface  $\Sigma$  (cf. figure 1.21). Lorsque la surface  $\Sigma$  est plane, le rayonnement des courants est symétrique par rapport au plan. Par conséquent, nous ne représenterons le rayonnement que dans le demi-espace supérieur ( $z > 0$ ).

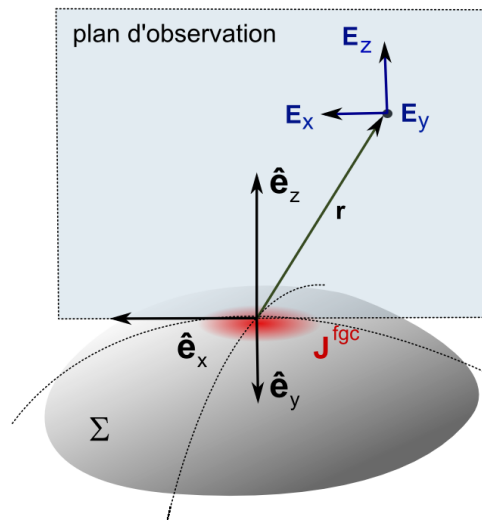


FIG. 1.21: Géométrie des comparaisons. Observation en zone proche dans un plan de coupe.

**Champ lointain.** En zone lointaine, les calculs sont effectués à  $\|\mathbf{r}\| = C^{\text{te}} = 1000\lambda$ . Nous calculons les composantes sphériques ( $E_r, E_\phi, E_\theta$ ) du champ électrique d'un faisceau gaussien conforme calculées avec les expressions "grande distance" (1.72). Compte tenu du fait qu'en champ lointain, l'expression "champ lointain" (1.117) d'un faisceau gaussien conforme correspond à l'expression "grande distance", une seule formulation sera employée pour illustrer les résultats. La géométrie générale et les notations angulaires employées sont illustrées sur la figure 1.22.

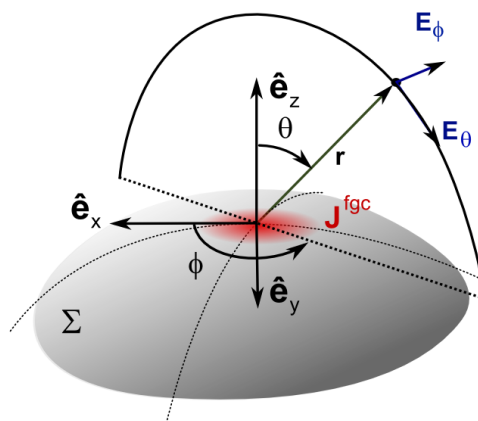


FIG. 1.22: Géométrie des comparaisons. Observation en zone lointaine.

### III.3.2 Matrice de courbure du faisceau

Dans cette partie, la courbure de la surface génératrice du faisceau est supposée nulle, de sorte que la surface soit plane ( $z' = 0 \forall (x', y')$ ). Les termes de phase linéaire sont nuls : ( $\beta_x = 0, \beta_y = 0$ ).

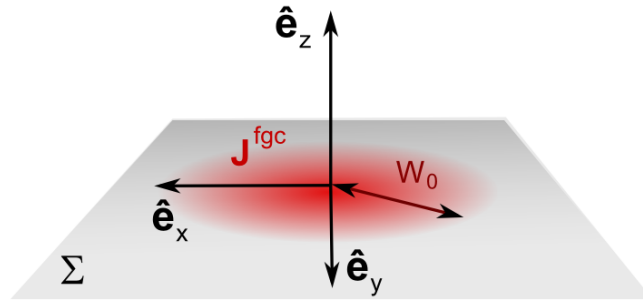


FIG. 1.23: Géométrie.

Les courants électriques (1.63) générateurs du faisceau gaussien conforme sont calculés sur une surface  $\Sigma$  plane (cf. figure 1.23). Le champ rayonné par ces courants est calculé numériquement à partir des équations de KOTTLER (1.67-1.68) afin de servir de référence. Dans les figures (1.24-1.26) suivantes, nous comparons le champ électrique de la composante principale des expressions analytiques (1.72) ("grande distance") et (1.117) ("champ lointain").

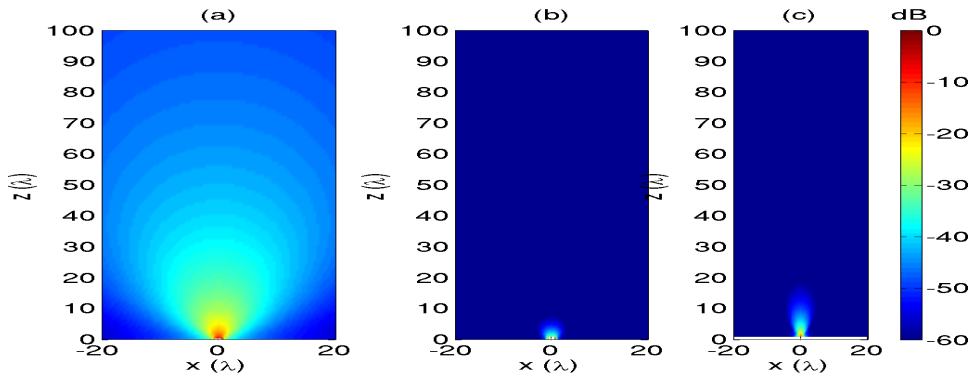


FIG. 1.24: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain". Faisceau circulaire,  $kW_0 = \pi$ .

Comme pour les faisceaux gaussiens généralisés, la largeur de la ceinture du faisceau

conditionne sa divergence. Plus la ceinture du faisceau est petite, plus le faisceau est divergent. Conformément aux hypothèses utilisées, on constate que le domaine de validité de la formulation "grande distance" est plus important que celui de la formulation "champ lointain".

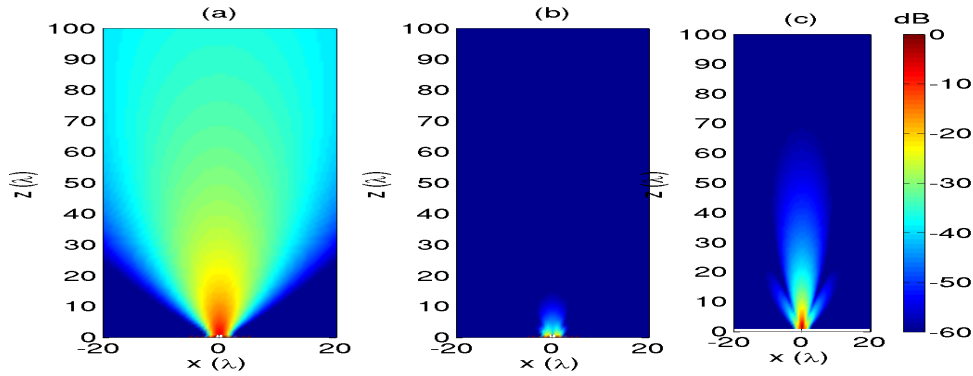


FIG. 1.25: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain". Faisceau circulaire,  $kW_0 = 2\pi$ .

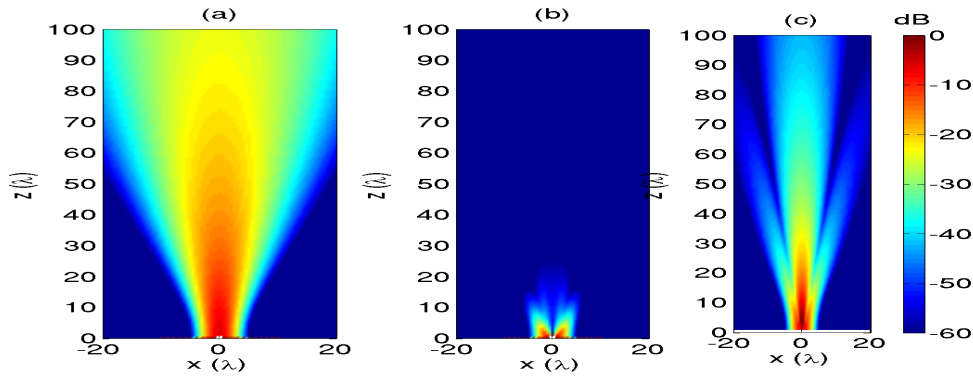


FIG. 1.26: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain". Faisceau circulaire,  $kW_0 = 4\pi$ .

Plus la largeur de la ceinture est importante, plus il est nécessaire de s'éloigner du centre du faisceau pour que les approximations "grandes distances" et "champ lointain" soient valides. Ce comportement est similaire aux ouvertures rayonnantes, pour lesquelles la zone de "champ lointain" dépend de la taille de l'ouverture.

Les composantes  $E_\theta$  du champ électrique en zone lointaine générées par un courant

gaussien électrique polarisé selon  $\hat{\mathbf{e}}_y$  sont représentées sur la figure (1.27).

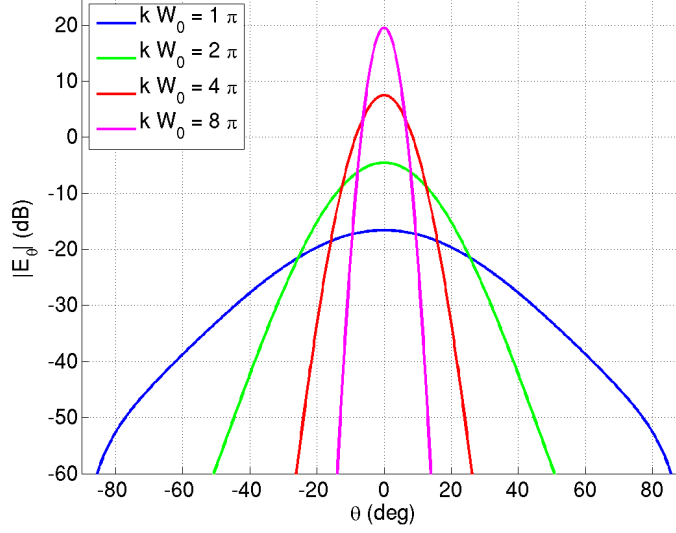


FIG. 1.27: Comparaisons de la composante  $E_\theta$  du champ électrique pour différentes valeurs de  $kW_0$  en zone lointaine. Observation pour  $\theta \in [-90^\circ, +90^\circ]$ ,  $\phi = 0$  (plan  $xOz$ ).

Dans cette configuration, le comportement des faisceaux gaussiens conformes est similaire à celui des faisceaux gaussiens généralisés. En effet lorsque la courbure de la surface génératrice  $\Sigma$  est infinie et que les termes de phase linéaire ( $\beta_x, \beta_y$ ) sont nuls, l'expression du faisceau gaussien conforme (1.72) est similaire à celle d'un faisceau gaussien généralisé champ lointain (1.49). Les conclusions sont donc identiques : la validité des formulations dépend principalement de la largeur de la ceinture du faisceau. Selon la formulation utilisée, le critère d'erreur en distance défini comme :

$$r_\Delta \quad \text{tel que} \quad \Delta(r) = \|\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_{\text{test}}(\mathbf{r})\| < -60\text{dB} \quad (1.126)$$

est de l'ordre de  $r_\Delta > z_0$  pour la formulation "grande distance" ou  $r_\Delta > 20z_0$  pour la formulation "champ lointain". On rappelle que  $z_0$  correspond à la distance de RAYLEIGH pour une ouverture gaussienne de largeur  $W_0$ , avec  $z_0 = kW_0^2/2$ .

### III.3.3 Termes de phase linéaire

Dans cette partie, nous conservons une surface génératrice  $\Sigma$  plane et nous générons des courants élémentaires dont la matrice de courbure complexe  $\mathbb{Q}^f$  définit une gaussienne

circulaire de demi largeur  $W_0 = 2\lambda$ , soit  $kW_0 = 4\pi$ . Dans les figures (1.29) à 1.31), nous faisons varier les paramètres  $(\beta_x, \beta_y)$ , définis angulairement par :

$$\beta_x \stackrel{\text{def}}{=} k \cos \phi_\beta \sin \theta_\beta \quad (1.127)$$

$$\beta_y \stackrel{\text{def}}{=} k \sin \phi_\beta \sin \theta_\beta \quad (1.128)$$

où  $(\phi_\beta, \theta_\beta)$  sont les angles directeurs du faisceau exprimés dans un repère sphérique (cf. figure 1.28).

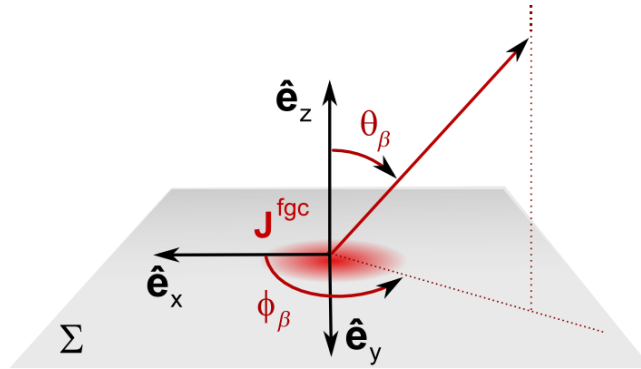


FIG. 1.28: Géométrie.

Les cartographies suivantes sont réalisées dans le plan  $xOz$ . Afin de visualiser correctement le rôle des paramètres  $(\beta_x, \beta_y)$ , on représente plusieurs configurations, pour lesquelles nous faisons varier l'angle  $\theta_\beta$  en conservant  $\phi_\beta = 0^\circ$ , c'est-à-dire en conservant la direction de propagation du faisceau dans le plan d'observation.

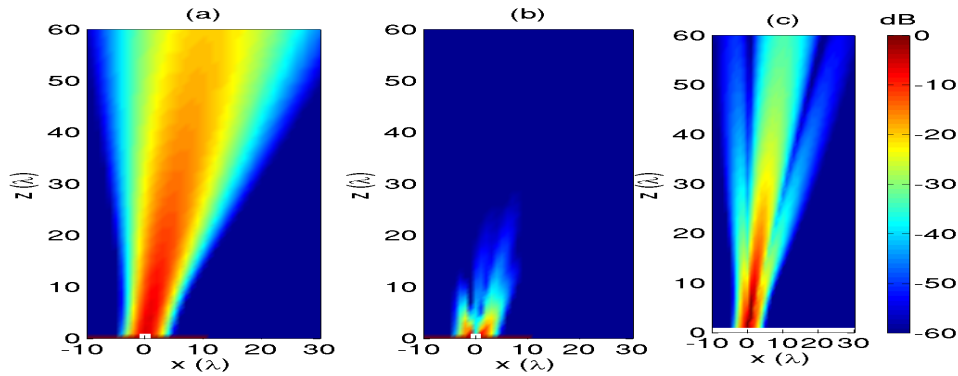


FIG. 1.29: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain".  $\theta_\beta = 10^\circ$ ,  $\phi_\beta = 0^\circ$ .



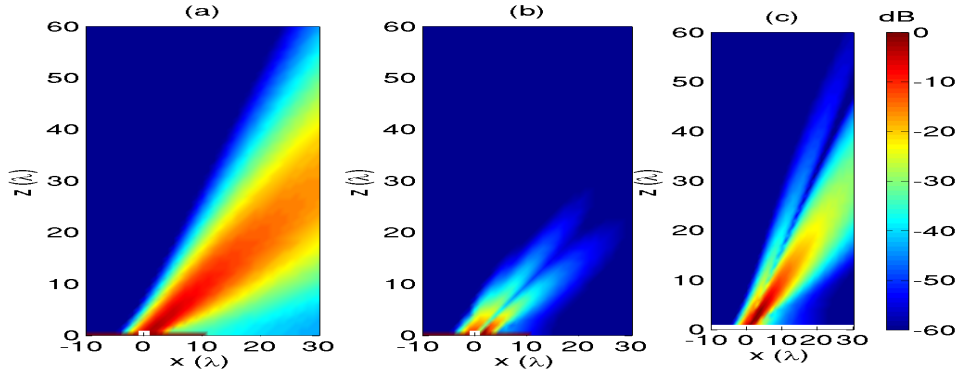


FIG. 1.30: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain".  $\theta_\beta = 45^\circ$ ,  $\phi_\beta = 0^\circ$ .

Comme on peut le constater sur ces figures, l'angle  $\theta_\beta$  détermine la direction principale de rayonnement du faisceau. On remarque également que la formulation "grande distance" est plus rapidement valide que la formulation "champ lointain". De plus, la distance au-delà de laquelle les formulations analytiques sont valides est indépendante de l'angle  $\theta_\beta$  et donc des paramètres  $(\beta_x, \beta_y)$ .

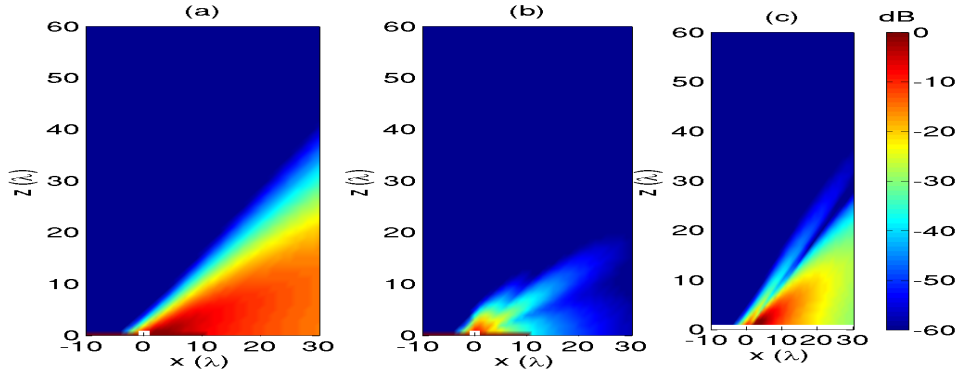


FIG. 1.31: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain".  $\theta_\beta = 70^\circ$ ,  $\phi_\beta = 0^\circ$ .

On représente sur la figure (1.32) la composante  $E_\theta$  en champ lointain du champ électrique rayonné pour différentes valeurs de  $\theta_\beta$ .

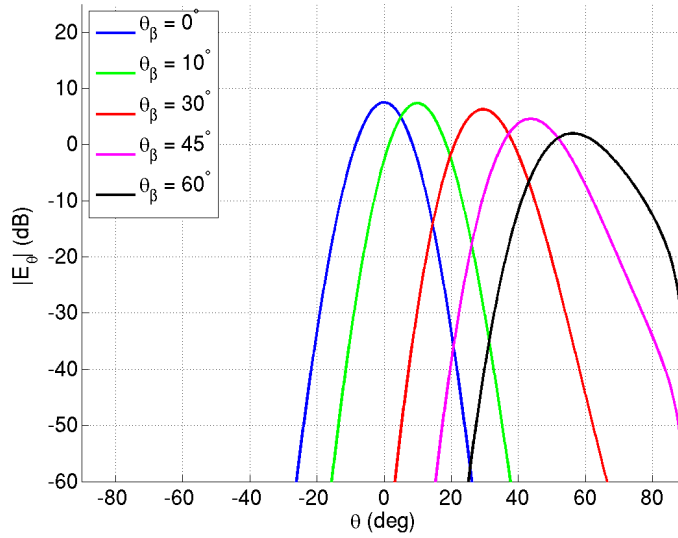


FIG. 1.32: Comparaisons de la composante  $E_\theta$  du champ électrique pour différentes valeurs de  $\theta_\beta$ , pour  $\phi_\beta = 0^\circ$ .

Contrairement aux faisceaux gaussiens généralisés, un faisceau gaussien conforme peut être utilisé pour décrire la propagation d'un faisceau oblique dont la direction de propagation est paramétrée par les coefficients  $(\beta_x, \beta_y)$ . Les termes de phase linéaire  $(\beta_x, \beta_y)$  donnent aux faisceaux gaussiens conformes une large couverture angulaire. Aussi, le domaine de validité des expressions analytiques, définit selon le critère d'erreur (1.126), n'est pas modifié par les paramètres  $(\beta_x, \beta_y)$ .

### III.3.4 Matrice de courbure de la surface

Le dernier paramètre définissant un faisceau gaussien conforme est la matrice de courbure de la surface locale  $\Sigma$ . Cette surface est définie comme une surface paramétrée quadratique (cf. Annexe D), dont la cote est déterminée analytiquement par l'équation (1.61) que nous rappelons ici :

$$z' = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t \mathbb{Q}^\Sigma \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (1.129)$$

avec  $\mathbb{Q}^\Sigma$  une matrice réelle symétrique définie positive :

$$\mathbb{Q}^\Sigma = \begin{pmatrix} q_{11}^\Sigma & q_{12}^\Sigma \\ q_{12}^\Sigma & q_{22}^\Sigma \end{pmatrix} \quad (1.130)$$

Pour illustrer l'influence de la courbure sur un faisceau gaussien conforme, nous définissons une surface dont les rayons de courbure principaux sont égaux. Dans les exemples qui suivent, les termes de phase linéaire  $(\beta_x, \beta_y)$  sont nuls et le faisceau est peu divergent, avec une largeur de ceinture  $W_0 = 2\lambda$  (soit  $kW_0 = 4\pi$ ). Les champs sont calculés pour plusieurs rayons de courbure de la surface  $\Sigma$ , comme illustré sur la figure (1.33).

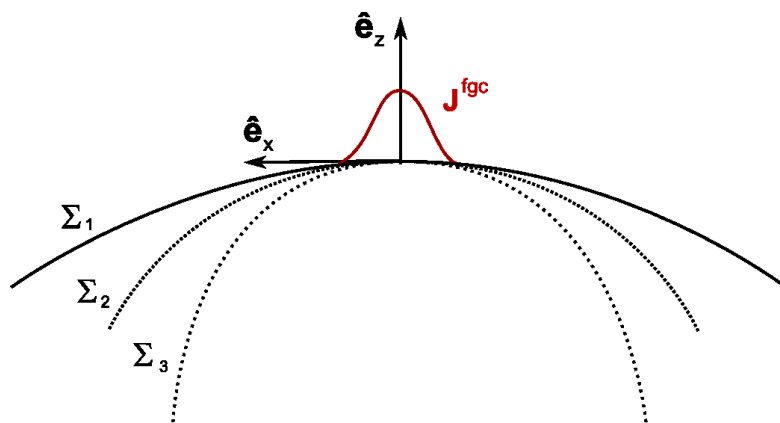


FIG. 1.33: Géométrie (vue en coupe  $xOz$ ). Les surfaces  $\Sigma_i$  sont définies à partir de rayons de courbure différents  $R_{x,i} = R_{y,i}$ .

Dans la mesure où la surface  $\Sigma$  n'est plus plane, les champs rayonnés de part et d'autre de la surface ne sont plus symétriques. Par conséquent nous représentons les champs au-dessus et en dessous de la surface  $\Sigma$ , illustrée par une courbe blanche<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>On observe également une ligne blanche sur les figures (c). Cette ligne est due à la singularité existante en  $z = 0$  de la formulation "champ lointain".

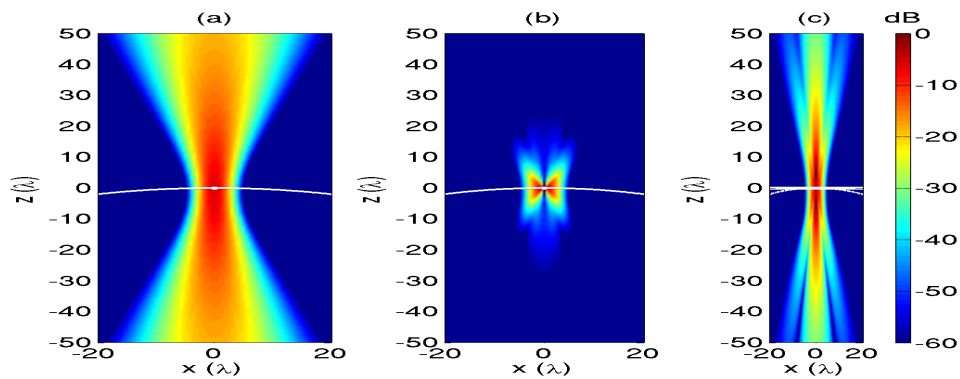


FIG. 1.34: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain".  $R_x = R_y = 100\lambda$ .

Lorsque le rayon de courbure de la surface est grand (1.34), la surface est peu courbée. Dans ce cas, on retrouve évidemment le comportement d'un faisceau gaussien généralisé.

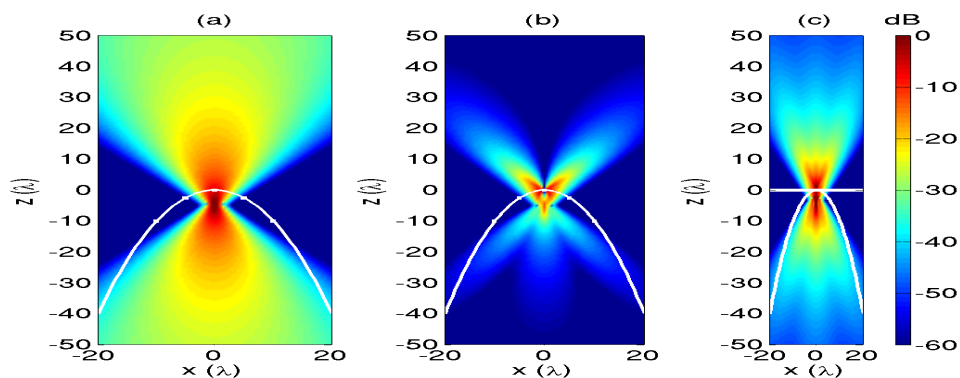


FIG. 1.35: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain".  $R_x = R_y = 10\lambda$ .

Lorsque la courbure de la surface est importante, le champ rayonné est dissymétrique par rapport à la surface. Le faisceau va diverger dans la zone convexe ( $z > \text{surface}$ ) tandis qu'il va d'abord converger avant de diverger dans la zone concave ( $z < \text{surface}$ ).

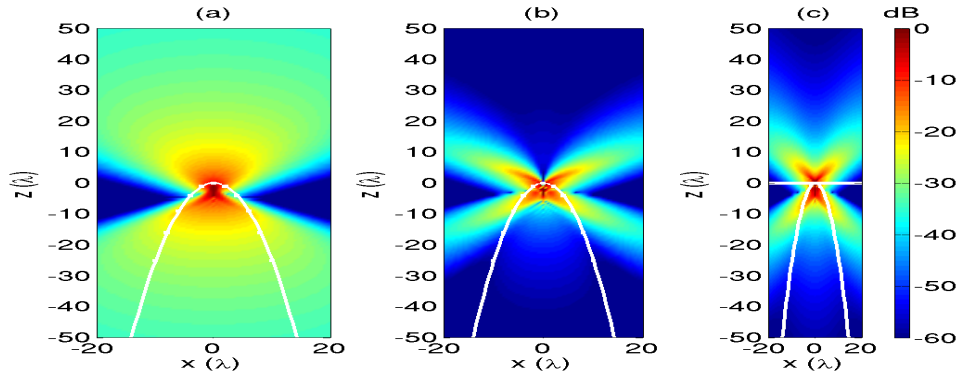


FIG. 1.36: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain".  $R_x = R_y = 2\lambda$ .

Lorsque la courbure de la surface augmente (*i.e.* le rayon de courbure diminue), la divergence du faisceau augmente également. L'erreur est aussi plus importante en champ proche, en particulier le long des "bordures" du faisceau.

La composante  $E_\theta$  en zone lointaine du champ électrique est représentée sur la figure (1.37) pour plusieurs rayons de courbure de la surface  $\Sigma$ . À grande distance, l'amplitude du champ rayonné est symétrique de part et d'autre de la surface, aussi seul le demi-espace supérieur est représenté.

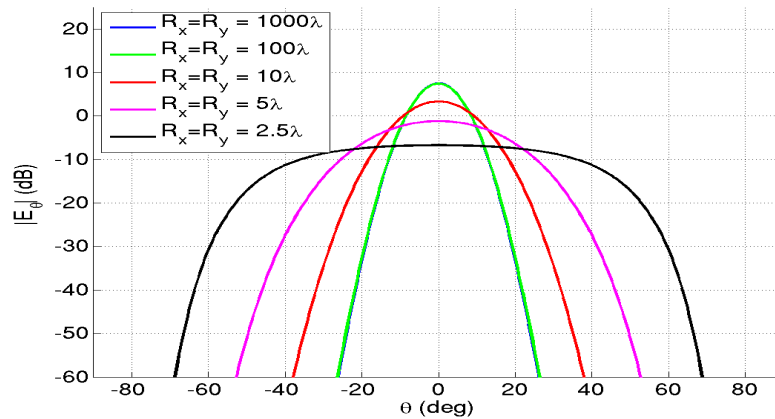


FIG. 1.37: Comparaisons de la composante  $E_\theta$  du champ électrique pour différentes valeurs du rayon de courbure de la surface  $\Sigma$ .

Enfin, nous avons représenté sur la figure (1.38) un cas général, où le paramètre  $\theta_\beta$  est non nul et vaut  $45^\circ$ . Dans ce cas, les directions principales de rayonnement sont orientées

à  $45^\circ$  (et  $180^\circ - 45^\circ$  pour  $z < 0$ ) par rapport à la normale de la surface, à l'origine du faisceau.

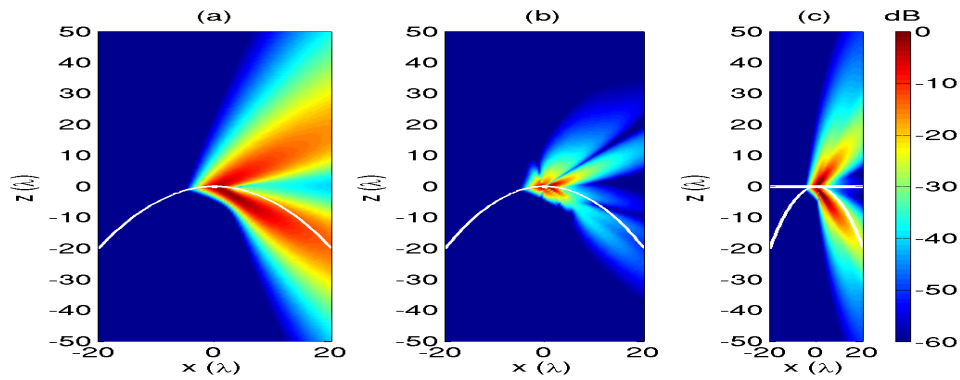


FIG. 1.38: Comparaisons des formulations analytiques. (a) : Calcul numérique. (b) : module de l'erreur avec la formulation "grande distance". (c) : module de l'erreur avec la formulation "champ lointain".  $R_x = R_y = 10\lambda$ ,  $\theta_\beta = 45^\circ$ .

Tout comme la largeur de la ceinture du faisceau, la courbure de la surface détermine également la divergence du faisceau. Plus la courbure est importante et plus le faisceau rayonné diverge.

Dans cette section, nous avons étudié l'influence des paramètres d'un faisceau gaussien conforme. Afin d'utiliser ces faisceaux pour le calcul de la propagation et du rayonnement d'objet complexe, nous allons utiliser le spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme pour calculer les champs transmis et réfléchis par une interface diélectrique.

### III.4 Évaluation asymptotique des champs transmis et réfléchis

Nous nous intéressons à l'évaluation asymptotique des intégrales (1.85-1.86), dont nous rappelons l'expression ici :

$$\mathbf{E}_{tr}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{T}}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{n}}) \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.131)$$

$$\mathbf{E}_{re}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \overline{\overline{R}}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{n}}) \tilde{\mathbf{E}}(k_x, k_y) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y \quad (1.132)$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}$  correspond à l'expression analytique (1.111) démontrée précédemment. Ces expressions intégrales doivent nous permettre de calculer les champs transmis et réfléchis par une interface diélectrique courbe dans le formalisme des faisceaux gaussiens conformes.

La principale difficulté de cette analyse est l'évaluation asymptotique de ces intégrales. En posant  $\overline{\overline{Y}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{\overline{T}}, \overline{\overline{R}}\}$  et dans l'hypothèse où les coefficients de transmission et de réflexion dyadiques varient lentement avec les coordonnées spectrales  $(k_x, k_y)$ , il s'agit d'évaluer une intégrale de la forme ( $z > 0$ ) :

$$I = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(k_x, k_y) e^{-kg(k_x, k_y)} dk_x dk_y \quad (1.133)$$

où l'on a posé :

$$\mathbf{f}(k_x, k_y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \overline{\overline{Y}}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{n}}) \left[ \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}^M(\mathbf{r}'_s) + \frac{Z_0}{k} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}^J(\mathbf{r}'_s) \right] \frac{1}{2kk_z} (-g_s / \det \mathbb{Q})^{\frac{1}{2}} \quad (1.134)$$

$$g(k_x, k_y) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{j}{2k^2} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} \left[ \mathbb{Q}^f + \frac{k_z}{k} \mathbb{Q}^\Sigma \right]^{-1} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} k_z z \quad (1.135)$$

L'évaluation en champ lointain de (1.133) ne pose pas de difficulté et la démarche est similaire à celle effectuée précédemment pour le calcul du champ lointain d'un faisceau gaussien conforme (1.117-1.118). On trouve pour le champ électrique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left( \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_s^J + \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_s^M \right) \overline{\overline{Y}} \left( \frac{k}{r} \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}} \right) u_{\text{loin}}(\mathbf{r}) \quad (1.136)$$

L'expression précédente est utile pour calculer les champs transmis ou réfléchis par une interface diélectrique située à grande distance du faisceau. Nous traiterons un exemple d'application dans le chapitre 3, section II.

Lorsqu'une interface diélectrique est située à proximité de l'origine du faisceau, il est nécessaire de calculer le champ en zone proche. On trouvera dans l'annexe E des évaluations asymptotiques devant permettre le calcul en zone proche. Jusqu'à présent, ces évaluations asymptotiques disposent d'un domaine de validité trop restreint, en particulier angulaire, pour être utilisées. Ceci est dû au fait que le point col de la fonction  $g(k_x, k_y)$ , c'est-à-dire le point  $(k_{x_s}, k_{y_s})$  pour lequel :

$$\nabla g(k_{x_s}, k_{y_s}) = \mathbf{0} \quad (1.137)$$

ne peut être déterminé analytiquement. En effet, la fonction  $g$  n'est pas une forme quadratique, car le terme matriciel de (1.135) dépend des paramètres d'intégration  $(k_x, k_y)$ . Une approximation paraxiale selon la direction  $z$  ou selon la direction de propagation déterminée par les coefficients  $(\beta_x, \beta_y)$  est insuffisante et ne permet pas d'obtenir la valeur du point col  $(k_{x_s}, k_{y_s})$  dans un large domaine de validité.

Des travaux ont été menés pour déterminer le comportement du point col en fonction des paramètres d'observation et des paramètres du faisceau. Ils ont montré qu'en champ très proche, pour des distances inférieures à la longueur d'onde, le point col est proche de  $(k_x, k_y) = (\beta_x, \beta_y)$ . Au delà d'une distance de plusieurs dizaines de longueurs d'ondes, le point col tend vers le point  $(k_x, k_y) = (kx/r, ky/r)$ . Entre ces deux domaines, le point col évolue entre ces deux zones critiques. On remarque également que selon les configurations, un ou plusieurs points cols peuvent apparaître au voisinage de la branche de coupure, amenant à une situation analytiquement délicate et pour laquelle il n'existe pas à notre connaissance de méthode asymptotique uniforme.

Ce point col peut éventuellement être déterminé de façon numérique. Toutefois, mise à part le temps de calcul important, la situation peut se compliquer lorsque la direction de rayonnement est très oblique. Dans ce cas, le point col tend vers la branche de coupure définie par la racine carrée de  $k_z$  et le résultat de la recherche numérique est généralement erroné.



## IV Point source complexe

Dans cette section, nous décrivons les principales caractéristiques des points sources complexes, sources ponctuelles dont les coordonnées spatiales (et/ou temporelles) sont complexes. Sous certaines conditions, le rayonnement de ces sources dans l'espace réel possède des propriétés similaires aux faisceaux gaussiens.

### IV.1 Historique

Les premiers travaux significatifs évoquant l'idée d'utiliser des coordonnées spatiales complexes sont datés du milieu des années 1960. DESCHAMPS[91] propose de combiner deux nombres réels qui caractérisent la section transverse d'un faisceau gaussien dans un seul nombre complexe. Au début des années 1970, DESCHAMPS[69, 92], KELLER et STREIFER[93] montrèrent que la continuation analytique des coordonnées spatiales d'une ligne source ou d'un point source dans l'espace complexe décrivait des faisceaux avec une amplitude transverse quasi-gaussienne dans l'espace réel. À partir de ces résultats, FELSEN débuta ses travaux dans le domaine des champs issus de coordonnées complexes et des ondes évanescentes, appliqués à différents problèmes électromagnétiques[94, 95]. Il montra en particulier que la continuation analytique des coordonnées spatiales de la fonction de GREEN relative à une géométrie particulière conduisait directement aux champs produits par la même géométrie éclairée par un faisceau d'allure gaussienne[46]<sup>6</sup>. C'est cet aspect de la théorie des sources complexes qui nous intéresse, en particulier pour traiter le cas de la diffraction par un demi-plan métallique éclairé par un faisceau gaussien que nous traiterons dans le chapitre 2.

Entre les années 1970 et 1980, les recherches sur le sujet sont intenses et on trouvera une bibliographie beaucoup plus complète des sujets abordés dans [97, 98, 99]. C'est aussi à cette époque que les recherches portent sur la continuation analytique des coordonnées temporelles, amenant à la définition de champs gaussiens pulsés dont on trouvera une description complète dans l'ouvrage [54].

Extension naturelle du lancer de rayons, le lancé de rayons complexes utilise des sources complexes pour décrire les champs dans une scène, mais nécessite également le prolongement dans l'espace complexe des géométries du problème, conduisant à des difficultés d'implémentation[71]. Le "suivi d'ondes évanescentes" (*Evanescent-Wave Tracking*)[100] tente de formuler le problème directement dans l'espace réel, mais son domaine d'application reste toutefois limité à un domaine de validité restreint et sur de

---

<sup>6</sup>Par exemple, les champs transmis et réfléchis par une interface diélectrique[96, 94], extension des résultats du chapitre [2, §5.5] aux points sources complexes.

courtes distances[71].

Plus récemment, [97, 98, 99] ont poursuivi les recherches dans le domaine des sources complexes, afin d'obtenir une analyse complète et rigoureuse dans l'espace complexe. Ces travaux font apparaître des interprétations physiques des points sources complexes, en termes de distances complexes et d'angles complexes. Les calculs sont effectués dans le domaine spatial complexe avant d'être interprétés dans le domaine spatial réel. Enfin, l'étude des interactions des ondes évanescentes d'un point source complexe avec des empilements de structures diélectriques planes amènent certains auteurs à appliquer cette théorie aux *plasmons de surface*<sup>7</sup>[101].

Bien qu'élégante et exacte car satisfaisant exactement à l'équation de propagation, l'utilisation du point source complexe dans des applications pratiques et industrielles se heurte à plusieurs inconvénients majeurs. D'une part, les travaux portant sur les sources complexes se sont le plus souvent restreints aux problèmes bidimensionnels et scalaires. La notion de point source complexe vectoriel, comme une extension complexe de la notion de dipôle de Hertz, a été utilisée dans le cas d'une surface de dimensions finies par [51] pour traiter le cas du rayonnement d'une surface plane dans l'hypothèse de l'optique physique. Toutefois, le domaine d'application de la technique dépend de la formulation des faisceaux employés. Lorsque l'on utilise des faisceaux gaussiens généralisés, le domaine de validité est restreint à la zone paraxiale. Lorsque l'on utilise des points sources complexes en tant que sources des champs, on doit alors faire face aux difficultés pratiques rencontrées par l'optique géométrique complexe. D'autre part, le rayonnement d'un point source complexe dans l'approximation paraxiale ne permet de décrire que des faisceaux gaussiens circulaires. Néanmoins, cette approche est intéressante pour étudier les problèmes canoniques de diffraction en deux dimensions, comme nous le verrons au chapitre 2.

## IV.2 Description mathématique

Considérons un vecteur  $\mathbf{b}$  positif de  $\mathbb{R}^3$  et définissons les coordonnées spatiales complexes d'un point source comme :

$$\mathbf{r}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_0 - j\mathbf{b} \quad (1.138)$$

---

<sup>7</sup>Les oscillations de plasma se comportent comme des particules quantifiées appelées *plasmons*. Les *plasmons de surface* sont des *plasmons* confinés sur des interfaces vide/diélectrique particulières. Ils peuvent interagir avec le champ électromagnétique, modifiant l'aspect du champ rayonné (fréquence, polarisation).

où  $\mathbf{r}_0$  est la position du point source dans l'espace réel. Le champ rayonné au point  $\mathbf{r}$  par une source située en  $\mathbf{r}'$  peut être obtenu à partir d'une solution de l'équation d'onde scalaire dans l'espace réel par continuation analytique dans l'espace complexe[102] :

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jks(\mathbf{r})}}{4\pi s(\mathbf{r})} \quad (1.139)$$

où  $s(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|$  est la distance entre la position  $\mathbf{r}'$  du point source complexe et un point  $\mathbf{r}$  de l'espace réel.  $G(\mathbf{r})$  est une solution exacte de l'équation de propagation car la partie imaginaire rajoutée n'a pas d'incidence dans le calcul des dérivées partielles.

Lorsque le vecteur  $\mathbf{b}$  est nul, l'expression (1.139) correspond à une source scalaire isotrope :

$$G_0(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}\|}}{4\pi\|\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}\|} \quad (1.140)$$

Si  $\mathbf{b}$  est non nul, la source devient directive. Dans ce cas,  $G(\mathbf{r})$  a le comportement d'un faisceau à symétrie circulaire se propageant dans la direction  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$  avec une décroissance exponentielle transverse à l'axe du faisceau[51].

La distance complexe  $s(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|$  est une fonction bi-valuée. Par conséquent, il est nécessaire de définir une branche de coupure permettant une évaluation unique de la fonction. Tandis qu'une source réelle est singulière au point  $\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\| = 0$ , la source complexe est singulière selon la courbe d'équation  $\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| = 0$ , c'est-à-dire aux points satisfaisant à :

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\|^2 = b^2 \\ \mathbf{b} \cdot (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) = 0 \end{cases} \quad (1.141)$$

Ces conditions correspondent au cercle de centre  $\mathbf{r}_0$  et de rayon  $b = \|\mathbf{b}\|$  appartenant au plan perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{b}}$  (cf. figure 1.39). Pour choisir la branche de coupure, deux conventions sont principalement utilisées pour déterminer le signe de la racine carrée[102, 103, 71] :

- soit  $\text{Re}[s(\mathbf{r})] \geq 0$ , convention "source" ;
- soit  $\text{Im}[s(\mathbf{r})] \geq 0$ , convention "faisceau"<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup>Le signe choisi définit le sens d'évolution du champ le long de la direction de propagation.

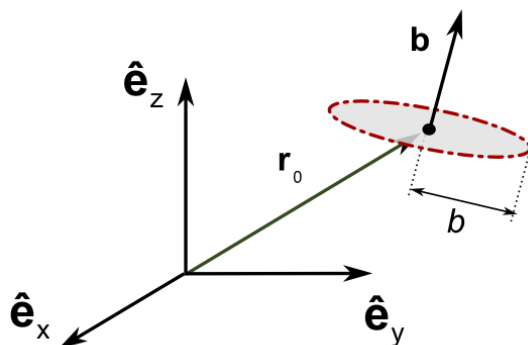


FIG. 1.39: Géométrie et notations. Le cercle rouge représente la courbe de singularités correspondant à  $\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| = 0$  et le disque représente la branche de coupure choisie dans la convention "source".

La convention "source" utilise la définition usuelle de la racine carrée à partie réelle positive tandis que la convention "faisceau" utilise la convention  $(z)^{\frac{1}{2}} = \pm j\sqrt{-z}$  où  $\sqrt{\cdot}$  est la racine carrée usuelle. Dans le premier cas, la branche de coupure est située à l'intérieur du cercle de rayon  $b$  perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{b}}$  (cf. figure 1.40). Le second correspond au cas dual, la branche de coupure étant alors située à l'extérieur du cercle (cf. figure 1.41). Dans la première convention, la source du champ a pour origine le disque de centre  $\mathbf{r}_0$ . Dans la seconde, la source du champ est située à l'infini dans la direction antérieure du faisceau. Dans le cadre d'une décomposition d'un champ initial et d'une propagation dans une seule direction, le choix de l'une ou l'autre est avant tout conventionnel.

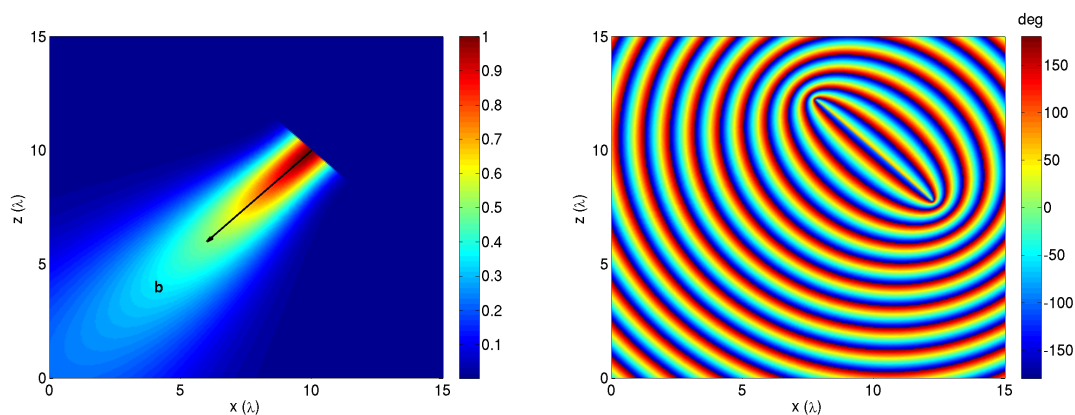


FIG. 1.40: Convention "source" avec  $W_0 = \lambda$ ,  $\mathbf{r}_0 = (10, 0, 10)$  et  $\hat{\mathbf{b}} = (-\sin(45^\circ), 0, -\cos(45^\circ))$ .

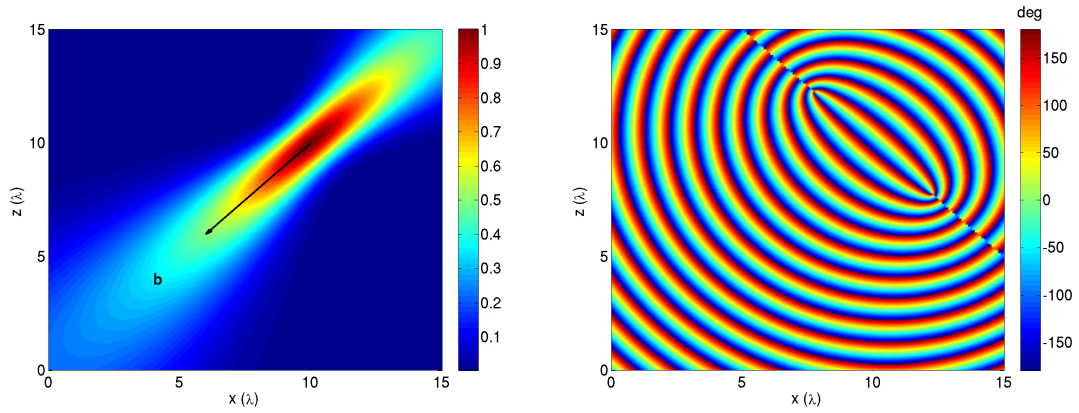


FIG. 1.41: Convention "faisceau". Même paramètres que pour la figure 1.40.

Dans le demi-espace défini par  $(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} > 0$  et pour les points au voisinage de l'axe de propagation du faisceau, l'approximation paraxiale de  $G(\mathbf{r})$  permet d'obtenir l'expression d'un faisceau gaussien scalaire dont la ceinture est située en  $\mathbf{r}_0$  avec la demi-largeur du faisceau  $W_0$  définie par[71] :

$$W_0 = \left( \frac{2b}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.142)$$

Enfin, des considérations similaires permettent de définir un dipôle de Hertz dont les coordonnées sont complexes ou bien un potentiel vecteur dont la fonction  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  est l'une des composantes. Dans l'approximation paraxiale, on définit alors de cette façon un faisceau gaussien vectoriel[51]. Ces calculs ne seront pas détaillés ici.

## V Conclusion du chapitre

Dans ce premier chapitre, nous avons fait la description de plusieurs types de faisceaux élémentaires. Les faisceaux gaussiens généralisés ainsi que les points sources complexes sont adaptés à la décomposition de champs définis sur des surfaces planes ou modérément courbes. Les faisceaux gaussiens conformes permettent de définir un nouveau type de faisceaux, particulièrement adaptés pour décrire les champs issus de surfaces courbes avec une incidence oblique. Ces faisceaux élémentaires sont utilisés pour la décomposition de champs, le calcul analytique de la propagation et de leurs interactions. Ils sont les briques essentielles d'un "lancer de faisceaux" complet.

Une grande partie des travaux existants portent sur les faisceaux gaussiens généralisés, ce qui fait d'eux l'outil principalement utilisé pour des applications pratiques. Leur domaine de validité est connu, tout comme les expressions analytiques permettant de calculer leurs interactions avec des objets conducteurs, diélectriques et diélectriques multicouches.

Plus récent, les faisceaux gaussiens conformes permettent la décomposition et la propagation d'un champ connu sur une surface très courbe. À l'heure actuelle, l'évaluation asymptotique des intégrales spectrales de faisceaux gaussiens conformes en zone proche n'a pas été possible et limite le domaine d'application à la seule décomposition et propagation de champs. Une évaluation asymptotique correcte permettrait en plus de décrire les champs transmis et réfléchis par des faisceaux gaussiens conformes et ainsi étendre leur domaine d'utilisation.

Enfin, bien que présentant l'avantage de provenir d'une solution exacte de l'équation de propagation, les points sources complexes présentent plusieurs restrictions. Tout d'abord, seuls des faisceaux gaussiens circulaires peuvent être exprimés par ce formalisme. Mais surtout, le calcul des interactions, en particulier des réflexions, d'un point source complexe reste un sujet de recherche ouvert, où des algorithmes de recherche sont lourds et non généraux. Toutefois, ils permettent d'exprimer dans certains cas de figure canoniques, l'expression exacte du champ diffracté par des faisceaux gaussiens.



## Chapitre 2

# Diffraction d'un faisceau gaussien

Dans ce chapitre, notre objectif est de décrire le champ rayonné par une surface conductrice semi-infinie ou finie éclairée par un faisceau gaussien.

Notre étude portera tout d'abord sur la diffraction 2D d'un demi-plan conducteur, éclairé par un faisceau gaussien. Notre première étape sera de calculer l'expression intégrale exacte du champ rayonné. Nous chercherons à obtenir une expression analytique de cette solution intégrale exacte puis nous exprimerons une solution analytique approchée, basée sur l'hypothèse de l'optique physique. Enfin, nous comparerons ces résultats avec une approche exacte basée sur l'utilisation du point source complexe.

Nous étendrons la formulation approchée basée sur l'hypothèse de l'optique physique aux structures conductrices planes en trois dimensions. Deux formulations analytiques seront présentées. La première peut être utilisée pour des surfaces planes quelconques et est dite *non-uniforme*, dans la mesure où elle présente des discontinuités ou des singularités dans certaines configurations. Afin de pallier ces défauts, nous proposons une seconde approche *uniforme*, c'est-à-dire dépourvue de discontinuités ou de singularités, mais limitée aux surfaces rectangulaires. Nous utiliserons cette dernière formulation pour le calcul du champ rayonné par des surfaces rectangulaires et nous déterminerons son domaine de validité en comparant les résultats analytiques obtenus avec un code de calcul basé sur la méthode des moments développé à l'ONERA : ELSEM3D.



## I Diffraction 2D

Dans cette section, nous exprimons le champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien. Plusieurs formulations sont employées pour obtenir ce résultat.

Tout d'abord, nous obtiendrons une expression exacte du champ sous forme intégrale. Cette expression, calculée numériquement, nous servira de référence pour la suite. Afin d'obtenir des champs sous forme analytique, nous emploierons l'hypothèse de l'optique physique pour obtenir une approximation du champ rayonné. Enfin, nous utiliserons également la méthode du point source complexe pour calculer le champ rayonné.

### I.1 Champ exact rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien

Notre objectif est de calculer le champ diffracté par un demi-plan conducteur lorsqu'il est éclairé par un faisceau gaussien. Pour cela, notre approche est basée sur la *théorie spectrale de la diffraction* [52, 104, 25, 105] : le champ incident est décomposé en un spectre d'ondes planes et le champ rayonné est la somme des champs rayonnés par chacune des ondes planes composant le spectre.

La géométrie du problème est représentée sur la figure (2.1). Un faisceau gaussien dont la ceinture est située au point  $O^{\text{fg}} = (x_{O^{\text{fg}}}, y_{O^{\text{fg}}})$  du plan  $xOy$  éclaire le demi-plan conducteur avec un angle d'incidence  $\phi_0$ . Le champ diffracté est observé au point  $P$  de coordonnées  $(x, y)$  ou  $(\rho, \phi)$ .

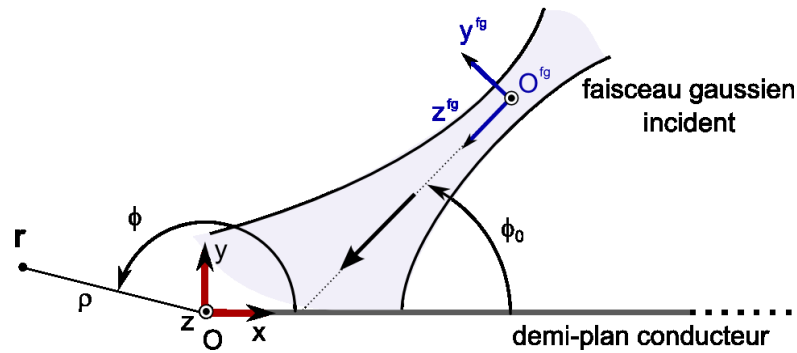


FIG. 2.1: Géométrie générale du problème de diffraction par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien en deux dimensions.

La démarche des calculs qui suivent est la suivante : nous exprimons le champ incident

$\mathbf{E}_i$  sous la forme intégrale d'un spectre d'ondes planes :

$$\mathbf{E}_i = \int \tilde{\mathbf{E}}_i e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}^i$  est le spectre d'ondes planes du champ incident. Le terme  $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  représente une onde plane dont la direction est paramétrée par la variable d'intégration que nous expliciterons par la suite.

Afin d'obtenir le champ rayonné  $\mathbf{E}_r$ , on remplace alors le terme d'onde plane en rouge par l'expression du champ rayonné par cette onde plane  $E_{r,op}$ . Le champ rayonné sera alors exprimé sous la forme :

$$\mathbf{E}_r = \int \tilde{\mathbf{E}}_i E_{r,op} \quad (2.2)$$

Dans la section suivante, nous rappelons l'expression exacte du champ rayonné  $E_{r,op}$  par un demi-plan conducteur éclairé par une onde plane, puis nous exprimerons le spectre d'ondes planes du champ incident  $\tilde{\mathbf{E}}_i$ .

### I.1.1 Expression exacte du champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par une onde plane

Soit une onde plane d'incidence  $\phi_0$  polarisée en mode TE par rapport au demi-plan conducteur. Le champ incident  $E_{i,z}$  s'exprime alors :

$$E_{i,z}(\rho, \phi) = e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \exp[jk \cos(\phi - \phi_0)] \quad (2.3)$$

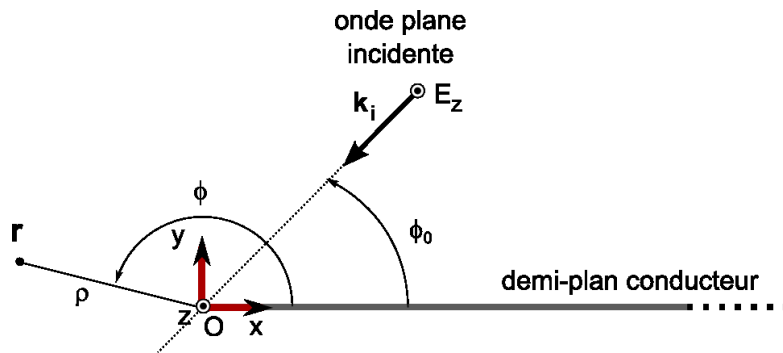


FIG. 2.2: Géométrie du problème canonique éclairé par une onde plane d'incidence  $\phi_0$ .

L'expression intégrale exacte du champ total  $E_{t,z}$  (correspondant au champ incident, diffracté par l'arête et réfléchi par le plan) est d'après les travaux de SOMMERFELD[1,

p.567],[106, p.55], [77, p.83] :

$$E_{t,z}(\rho, \phi) = \frac{1}{j\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{\phi_0}{2}}{\cos \xi + \cos \phi_0} e^{-jk\rho \cos(\phi \mp \xi)} d\xi \quad (2.4)$$

$$= -\frac{1}{4j\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[ \sec \frac{\xi - \phi_0}{2} - \sec \frac{\xi + \phi_0}{2} \right] e^{-jk\rho \cos(\phi \mp \xi)} d\xi \quad (2.5)$$

avec le signe + pour  $0 < \phi < \pi$  ( $y > 0$ ) et le signe - pour  $\pi < \phi < 2\pi$  ( $y < 0$ ).  $\mathcal{C}$  correspond au contour d'intégration illustré sur la figure (2.3), allant de  $\pi + j\infty$  à  $\pi$ , de  $\pi$  à 0 puis de 0 à  $-j\infty$ <sup>1</sup>. On trouvera une démonstration de ce résultat dans [1, Chap.11], [106, Chap.3] et [107].

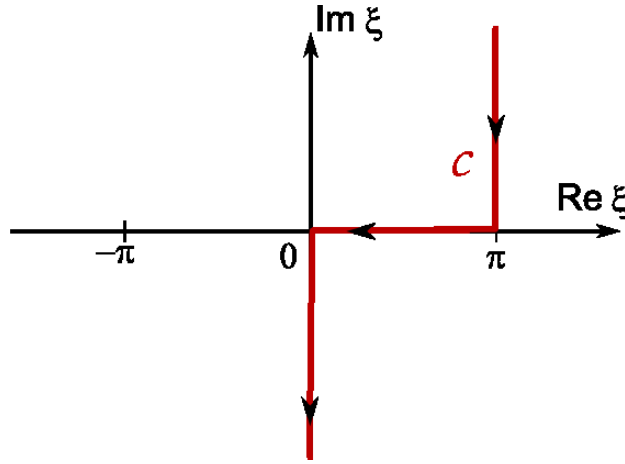


FIG. 2.3: Contour d'intégration  $\mathcal{C}$  dans le plan spectral complexe angulaire  $\xi$ .

Les intégrales spectrales (2.4-2.5) peuvent être exprimées sans approximation sous une forme plus compacte[1, §11.5.2],[77, p.73] :

$$E_{t,z}(\rho, \phi) = \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{-jk\rho} [G(\mu) - G(\nu)] \quad (2.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu &= -\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \\ \nu &= -\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi + \phi_0}{2}\right) \\ G(a) &= e^{ja^2} \int_a^{+\infty} e^{-jt^2} dt \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Où il convient d'éviter les pôles induits par les sécantes, situés en  $\xi = \pi \pm \phi_0$ .

On peut réécrire (2.6) sous la forme :

$$E_{t;z}(\rho, \phi) = +e^{jk\rho \cos(\phi-\phi_0)} F(\mu) - e^{jk\rho \cos(\phi+\phi_0)} F(\nu) \quad (2.7)$$

avec

$$F(a) = \sqrt{\frac{j}{\pi}} \int_a^\infty e^{-jt^2} dt \quad (2.8)$$

Les fonctions  $G$  ou  $F$  sont connues sous le nom d'intégrales ou fonctions de FRESNEL<sup>2</sup>.

Les solutions (2.6) et (2.7) sont continues au passage des L.O.R. et L.O.I. Lorsque son argument est grand devant l'unité, on peut obtenir par intégrations par parties successives une approximation asymptotique de la fonction de FRESNEL[77, p.54] :

$$G(a) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{j}} e^{ja^2} \square(-\text{Re}[a]) + \frac{1}{2ja} \quad , \quad |a| \gg 1 \quad (2.9)$$

$$F(a) \simeq \square(-\text{Re}[a]) + \sqrt{\frac{j}{\pi}} \frac{e^{-ja^2}}{2ja} \quad , \quad |a| \gg 1 \quad (2.10)$$

où la fonction  $\square$  correspond à la fonction échelon.

Dans l'hypothèse où  $|\mu|, |\nu| \gg 1$ , c'est-à-dire en champ lointain de l'arête du plan conducteur, l'expression (2.7) s'exprime alors

$$E_{t;z}(\rho, \phi) \simeq +e^{jk\rho \cos(\phi-\phi_0)} \square(\phi \in [0; \pi + \phi_0]) - e^{jk\rho \cos(\phi+\phi_0)} \square(\phi \in [0; \pi - \phi_0]) - \frac{e^{jk\rho}}{\sqrt{8j\pi k\rho}} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\phi-\phi_0}{2}\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\phi+\phi_0}{2}\right)} \right) \quad (2.11)$$

Les deux premiers termes correspondent respectivement au champ incident et réfléchi de l'OG, tandis que le troisième terme correspond aux rayons diffractés de la TGD. Le terme de diffraction est divergent pour les directions  $\phi = \pi \pm \phi_0$ , correspondant aux directions de la L.O.I. et de la L.O.R.

La connaissance du champ  $E_{t;z}$  (2.6 ou 2.7) produit par un demi-plan conducteur lorsqu'il est éclairé par une onde plane va nous permettre d'exprimer le champ total lorsque ce demi-plan est éclairé par un faisceau gaussien. Pour cela, on va tout d'abord exprimer l'expression d'un faisceau gaussien incident sous la forme d'un spectre d'ondes planes.

<sup>2</sup>La définition peut varier selon les auteurs, en particulier le terme précédant l'intégrale. On peut également relier ces fonctions à la fonction de transition de KOUYOUMJIAN et PATHAK utilisée dans la TUD[21].

### I.1.2 Expression du spectre d'onde planes d'un faisceau gaussien incident

#### I.1.2.a Expression intégrale d'un faisceau gaussien incident dans son repère propre

Soient  $(O^{\text{fg}}, \hat{\mathbf{e}}_x^{\text{fg}}, \hat{\mathbf{e}}_y^{\text{fg}}, \hat{\mathbf{e}}_z^{\text{fg}})$  le repère propre au faisceau incident et  $q(0)$  son coefficient de courbure complexe dans le plan  $z^{\text{fg}} = 0$ . D'après l'expression du champ incident dans le plan initial (1.16), on a en deux dimensions pour un mode TE :

$$\mathbf{E}_i(y^{\text{fg}}, 0) = \hat{\mathbf{e}}_x^{\text{fg}} \exp \left[ -\frac{jk}{2} q(0) (y^{\text{fg}})^2 \right] = \hat{\mathbf{e}}_x^{\text{fg}} \exp \left[ -\left( \frac{y^{\text{fg}}}{W_0} \right)^2 \right] \quad (2.12)$$

On peut exprimer (2.12) sous la forme d'une intégrale spectrale :

$$\mathbf{E}_i(y^{\text{fg}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{E}}^i(k_y) e^{-jk_y y^{\text{fg}}} dk_y \quad (2.13)$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}^i$  correspond au spectre d'ondes planes du champ incident. Comme dans le chapitre 1, le spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien peut se calculer analytiquement en utilisant les résultats de l'annexe A :

$$\tilde{\mathbf{E}}^i(k_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_i(y^{\text{fg}}, 0) e^{jk_y y^{\text{fg}}} dy^{\text{fg}} \quad (2.14)$$

$$= \hat{\mathbf{e}}_x^{\text{fg}} \frac{W_0}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\left( \frac{W_0}{2} k_y \right)^2 \right] \quad (2.15)$$

Le champ propagé au point  $(y^{\text{fg}}, z^{\text{fg}})$  s'écrit :

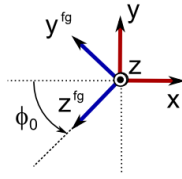
$$\mathbf{E}_i(y^{\text{fg}}, z^{\text{fg}}) = \hat{\mathbf{e}}_x^{\text{fg}} \frac{W_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{W_0}{2} k_y\right)^2} e^{-jk_y y^{\text{fg}} \mp jk_z z^{\text{fg}}} dk_y \quad , \quad z^{\text{fg}} \geq 0 \quad (2.16)$$

Pour assurer la convergence de l'intégrale pour tout  $k_y$  réel, on définit  $k_z$  tel que  $\text{Im}[k_z] < 0$  :

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_y^2} & \text{si } k^2 \geq k_y^2, \\ -j\sqrt{k_y^2 - k^2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.17)$$

#### I.1.2.b Expression intégrale d'un faisceau gaussien incident dans le repère absolu

**Expression du champ en coordonnées cartésiennes.** Le repère local du champ incident est défini par rapport au repère absolu lié au demi-plan par une rotation d'angle  $\phi_0$  d'axe  $\hat{\mathbf{e}}_x^{\text{fg}} = \hat{\mathbf{e}}_z$  et par une translation d'un vecteur  ${}^t(x_{O^{\text{fg}}}, y_{O^{\text{fg}}})$  :



$$\mathbf{r}^{\text{fg}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin \phi_0 & +\cos \phi_0 & 0 \\ -\cos \phi_0 & -\sin \phi_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{O^{\text{fg}}} \\ y - y_{O^{\text{fg}}} \\ z \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Ainsi,

$$k_y y^{\text{fg}} \pm k_z z^{\text{fg}} = (x - x_{O^{\text{fg}}})(-k_y \sin \phi_0 \mp k_z \cos \phi_0) + (y - y_{O^{\text{fg}}})(k_y \cos \phi_0 \mp k_z \sin \phi_0) \quad (2.19)$$

Le champ incident dans le repère absolu s'exprime alors comme :

$$\mathbf{E}_i(x, y) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{W_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{W_0}{2} k_y\right)^2} \cdot \exp \left[ -jk(x - x_{O^{\text{fg}}})(-k_y \sin \phi_0 \mp k_z \cos \phi_0) - jk(y - y_{O^{\text{fg}}})(k_y \cos \phi_0 \mp k_z \sin \phi_0) \right] dk_y \quad (2.20)$$

**Expression du champ en coordonnées cylindriques.** Pour donner aux expressions précédentes une forme plus simple et exprimer la direction des ondes planes du spectre en termes d'angles, on utilise des coordonnées cylindriques. Pour cela, on pose (cf figure 2.4) :

$$k_y = k \cos \xi \quad , \quad k_z = k \sin \xi \quad (2.21)$$

où l'angle  $\xi$  est défini par rapport à l'axe  $\mathbf{y}^{\text{fg}}$ . En coordonnées cylindriques, on a :

$$x = \rho \cos \phi \quad , \quad y = \rho \sin \phi \quad (2.22)$$

et plus particulièrement :

$$x_{O^{\text{fg}}} = \rho_{O^{\text{fg}}} \cos \phi_{O^{\text{fg}}} \quad , \quad y_{O^{\text{fg}}} = \rho_{O^{\text{fg}}} \sin \phi_{O^{\text{fg}}} \quad (2.23)$$

On en déduit ainsi :

$$k_y y^{\text{fg}} + k_z z^{\text{fg}} = k\rho \sin(\phi - \phi_0 \mp \xi) - k\rho_{O^{\text{fg}}} \sin(\phi_{O^{\text{fg}}} - \phi_0 \mp \xi) \quad (2.24)$$

L'expression spectrale du champ incident (2.20) s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{E}_i(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{W_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{C}} e^{-\left(\frac{kW_0}{2} \cos \xi\right)^2} e^{-jk\rho \sin(\phi - \phi_0 \mp \xi)} e^{+jk\rho_{O^{\text{fg}}} \sin(\phi_{O^{\text{fg}}} - \phi_0 \mp \xi)} (-k \sin \xi) d\xi \quad (2.25)$$

avec le signe supérieur pour les angles  $0 < \xi < \pi$  et le signe inférieur pour les angles  $\pi < \xi < 2\pi$ .

Le contour d'intégration  $\mathcal{C}$  de la variable  $\xi$ , représenté sur la figure (2.3), correspond à la transposition du domaine  $k_y \in [-\infty, +\infty]$ . Il débute en  $\xi \rightarrow \pi + j\infty$  pour  $k_y = -\infty$ , puis

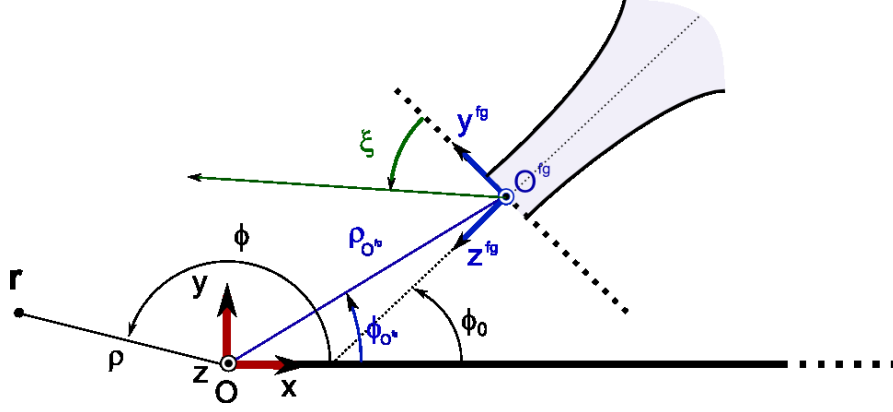


FIG. 2.4: Géométrie et notations.

passé de  $\xi = \pi$  à  $\xi = 0$  pour  $k_y = [-k, +k]$  et enfin descend vers  $\xi \rightarrow -j\infty$  pour  $k_y = +\infty$ . Les points de branchement  $k_y = \pm k$  correspondent maintenant aux zéros de  $dk_y/d\xi$ , soit aux points  $\{0, \pi\}$  [2, §5.3c]. Notons au passage que  $k_y$  est analytique en  $\xi = \{0, \pi\}$ , aussi ces points sont réguliers, contrairement aux points  $k_y = \pm k$ .

Afin de résonner par analogie avec l'expression (2.3) d'une onde plane incidente, on fait le changement de variable suivant dans l'expression du champ  $\mathbf{E}_i$  (2.25) :

$$-jk\rho \sin(\phi - \phi_0 \mp \xi) \stackrel{\text{def}}{=} jk\rho \cos(\phi \mp \Theta) \quad (2.26)$$

Où l'on a utilisé :  $\Theta = \xi \pm \phi_0 \mp \pi/2$ . Avec ce changement de variable, l'expression intégrale du champ incident s'écrit :

$$\mathbf{E}_i(\rho, \phi) = \mp \hat{\mathbf{e}}_z \frac{kW_0}{2\sqrt{\pi}} \int \cos(\Theta \mp \phi_0) e^{-\left(\frac{kW_0}{2} \sin(\Theta \mp \phi_0)\right)^2} \cdot \exp[jk\rho \cos(\phi \mp \Theta) - jk\rho_{0^{\text{fg}}} \cos(\phi_{0^{\text{fg}}} \mp \Theta)] d\Theta \quad (2.27)$$

Soit, finalement :

$$\mathbf{E}_i(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{C}'} P(\Theta) e^{jk\rho \cos(\phi \mp \Theta)} d\Theta \quad (2.28)$$

avec le signe supérieur (-) lorsque  $\phi_0 - \pi/2 < \Theta < \phi_0 + \pi/2$  et le signe inférieur (+) lorsque  $-\phi_0 - \pi/2 < \Theta < -\phi_0 + \pi/2$ .  $P(\Theta)$  correspond au spectre *angulaire* d'onde plane du champ incident :

$$P(\Theta) = \mp \frac{kW_0}{\sqrt{2}} \cos(\Theta \mp \phi_0) \exp\left[-\left(\frac{kW_0}{2} \sin(\Theta \mp \phi_0)\right)^2\right] e^{-jk\rho_{0^{\text{fg}}} \cos(\phi_{0^{\text{fg}}} \mp \Theta)} \quad (2.29)$$

Le terme en **rouge** représente les ondes planes incidentes d'angles d'incidence  $\pm\Theta$  et observées en  $(\rho, \phi)$ . Le terme en **bleu** représente le déphasage dû à la propagation des ondes planes provenant du centre du repère local vers le centre du repère absolu. Le nouveau chemin d'intégration  $\mathcal{C}'$  est similaire au chemin  $\mathcal{C}$  illustré sur la figure (2.3) mais translaté de  $\phi_0 - \pi/2$ .

À partir de l'expression intégrale du spectre angulaire d'ondes planes d'un faisceau gaussien incident (2.28), nous pouvons exprimer le champ rayonné par le demi-plan.

### I.1.3 Expression intégrale du champ rayonné

L'expression du champ rayonné par un faisceau gaussien est obtenue en suivant la démarche de la *théorie spectrale de la diffraction* [52, 104, 25, 105] : le champ total est obtenu en remplaçant le terme d'ondes planes incidentes d'angle d'incidence  $\Theta$  en **rouge** dans l'équation (2.28) par l'expression du champ total (incident et rayonné) d'une onde plane (2.6) de même angle d'incidence. Ainsi, le champ total d'un faisceau gaussien éclairant un demi-plan conducteur s'écrit :

$$\mathbf{E}_t(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{C}'} P(\Theta) \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{-jk\rho} [G(\mu') - G(\nu')] d\Theta \quad (2.30)$$

avec

$$P(\Theta) = -\frac{kW_0}{\sqrt{2}} \cos(\Theta - \phi_0) e^{-\left(\frac{kW_0}{2} \sin(\Theta - \phi_0)\right)^2} e^{-jk\rho_{\text{ofg}} \cos(\phi_{\text{ofg}} - \Theta)} \quad (2.31)$$

$$G(x) = e^{jx^2} \int_x^{+\infty} e^{-jt^2} dt \quad (2.32)$$

$$\mu' = -\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi - \Theta}{2}\right) \quad (2.33)$$

$$\nu' = -\sqrt{2k\rho} \cos\left(\frac{\phi + \Theta}{2}\right) \quad (2.34)$$

En utilisant le terme de champ rayonné et diffracté de l'expression (2.7) dans l'expression (2.28), on obtient l'expression équivalente :

$$\mathbf{E}_t(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{C}'} P(\Theta) \left[ e^{jk\rho \cos(\phi - \Theta)} F(\mu') - e^{jk\rho \cos(\phi + \Theta)} F(\nu') \right] d\Theta \quad (2.35)$$

Le champ rayonné par le demi-plan s'obtient en retranchant le champ incident aux expressions (2.30) ou (2.35).



### I.1.4 Interprétations physiques de la solution exacte

Dans les figures (2.5) à (2.8) qui suivent, le calcul de l'expression intégrale exacte (2.30) est réalisé numériquement. Le plan conducteur est placé en  $(x > 0, y = 0)$  (ligne blanche). Le champ incident est défini par la taille  $W_0$  et la position  $(x_{O_{\text{fg}}}, y_{O_{\text{fg}}})$  de la ceinture du faisceau ainsi que son angle d'incidence  $\phi_0$ , comme illustré sur la figure (2.1).

Sur la figure (2.5), le centre de la ceinture du faisceau incident coïncide avec l'arête du demi-plan conducteur. Le faisceau incident est peu divergent ( $kW_0 = 20$ ) et l'angle d'incidence du faisceau est de  $45^\circ$  par rapport au plan. Le faisceau gaussien incident donne naissance à deux champs principaux rayonnés dans les directions voisines des L.O.I. et L.O.R. On remarque en particulier que l'allure de ces champs n'est pas gaussienne, en particulier en zone proche où des "franges" peuvent apparaître.

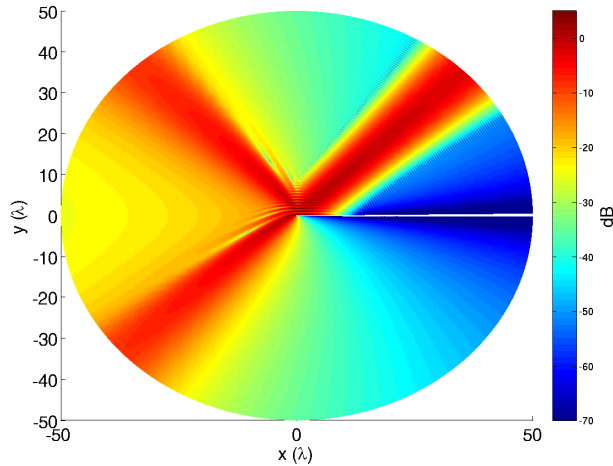


FIG. 2.5: Champ total (incident, diffracté et réfléchi).  $kW_0 = 20$ ,  $\phi_0 = 45^\circ$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)\lambda$ .

Sur les figures (2.6) le faisceau incident est plus divergent ( $kW_0 = 10$  et  $5$ ). On remarque que les champs rayonnés sont moins localisés autour des directions des L.O.I. et L.O.R.

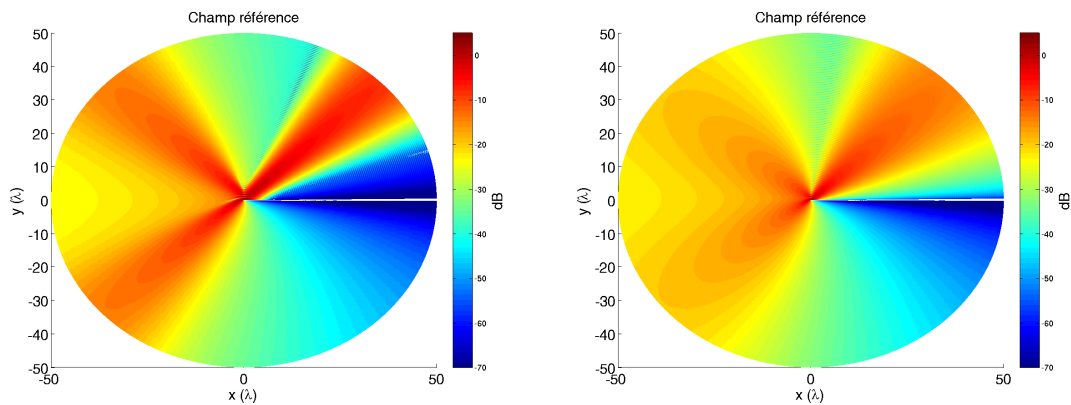


FIG. 2.6: Champ total (incident, diffracté et réfléchi). À gauche :  $kW_0 = 10$ ,  $\phi_0 = 45^\circ$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)\lambda$ . À droite :  $kW_0 = 5$ .

Sur la figure (2.7), un faisceau gaussien peu divergent ( $kW_0 = 20$ ) éclaire le demi-plan avec un angle d'incidence (défini par rapport au plan)  $\phi_0 = 18^\circ$ . La position de la ceinture correspond à celle de l'arête.

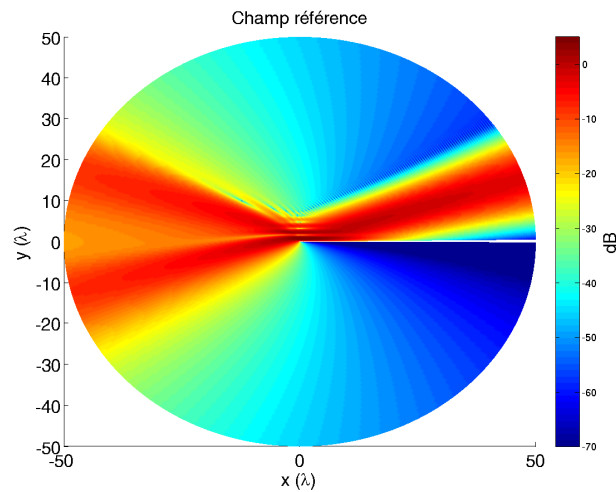


FIG. 2.7: Champ total (incident, diffracté et réfléchi).  $kW_0 = 20$ ,  $\phi_0 = 18^\circ$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)\lambda$ .

Sur la figure (2.8), le centre de la ceinture d'un faisceau incident peu divergent est positionné au point  $(x, y) = (10, 5)\lambda$ . La majorité du champ rayonné correspond dans ce cas au champ réfléchi.

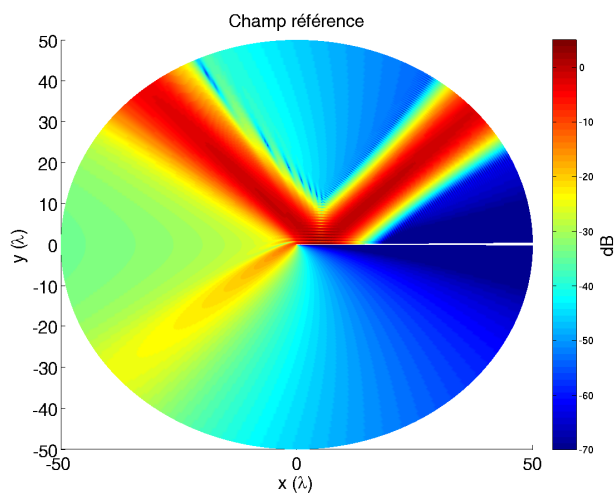


FIG. 2.8: Champ total (incident, diffracté et réfléchi).  $kW_0 = 20$ ,  $\phi_0 = 45^\circ$ ,  $(x_0, y_0) = (10, 5)\lambda$ .

Seule une faible proportion du champ incident génère un champ diffracté. Contrairement à une onde plane incidente qui générerait toujours un champ rayonné et diffracté, un faisceau gaussien incident peut générer selon la configuration :

- un champ réfléchi et diffracté ;
- principalement un champ réfléchi ;
- principalement un champ diffracté ;
- ni l'un ni l'autre (le faisceau n'intercepte pas du tout le demi-plan).

Sur la figure (2.9), nous avons représenté le champ lointain rayonné d'un faisceau gaussien pour différents paramètres de ceinture  $kW_0$  allant de 5 à 20, pour un angle d'incidence de  $\phi_0 = 45^\circ$  avec la ceinture positionnée sur l'arête. Lorsque le faisceau est divergent  $kW_0 < 10$ , les champs tendent à rayonner de manière diffuse dans l'espace.

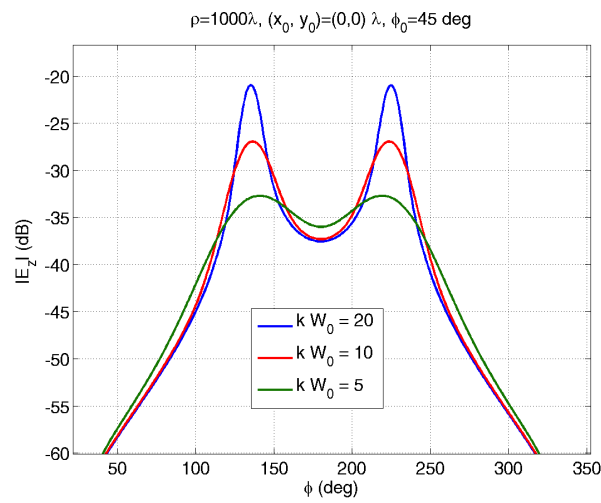


FIG. 2.9: Champs diffractés et réfléchis en zone lointaine pour différentes tailles de ceinture  $W_0$ .  $\rho = 1000\lambda$ ,  $kW_0 = 5, 10, 20$ ,  $\phi_0 = 45^\circ$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)\lambda$ .

Enfin, sur la figure (2.10), nous avons représenté le champ lointain rayonné d'un faisceau gaussien dont l'incidence sur le demi-plan varie entre  $\phi_0 = 45^\circ$  à  $\phi_0 = 9^\circ$  (angle rasant).

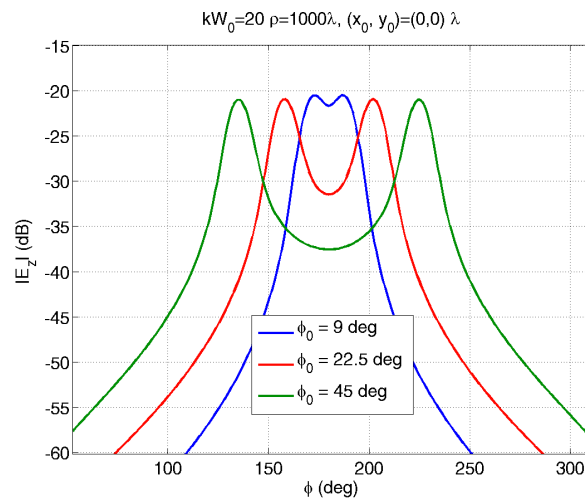


FIG. 2.10: Champs diffractés et réfléchis en zone lointaine pour différents angles d'incidence  $\phi_0$ .  $\rho = 1000\lambda$ ,  $kW_0 = 20$ ,  $\phi_0 = 9^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)\lambda$ .

### I.1.5 Approximations champ lointain

Dans cette section, nous tentons d'exprimer sous la forme d'une expression analytique la formulation intégrale exacte (2.35). Pour cela, nous utilisons deux types d'hypothèses afin de simplifier l'expression intégrale et d'en obtenir un développement asymptotique.

#### I.1.5.a Hypothèse champ lointain du spectre d'onde plane

L'expression exacte (2.35) que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{C}'} P(\Theta) F(\mu') e^{jk\rho \cos(\phi-\Theta)} d\Theta \\ - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{C}'} P(\Theta) F(\nu') e^{jk\rho \cos(\phi+\Theta)} d\Theta \end{aligned} \quad (2.36)$$

peut être simplifiée en champ lointain grâce à l'utilisation de la méthode de la phase stationnaire [77, §3.2.2]. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que le produit des fonctions  $P$  et  $F$  varie lentement devant le terme de phase  $e^{jk\rho \cos(\phi \mp \Theta)}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\rho, \phi) \approx \hat{\mathbf{e}}_z e^{-j\pi/4} P(\phi) F_{\mu'} \frac{e^{jk\rho}}{\sqrt{k\rho}} \\ - \hat{\mathbf{e}}_z e^{-j\pi/4} P(-\phi) F_{\nu'} \frac{e^{jk\rho}}{\sqrt{k\rho}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Or, puisque  $k\rho \gg 1$ , on peut utiliser le développement asymptotique de la fonction de FRESNEL (2.10), valide pour de grands arguments :

$$F_{\mu', \nu'} \approx \Pi(\mp y) - \frac{e^{-j2k\rho}}{\sqrt{8j\pi k\rho}} \quad (2.38)$$

On obtient :

$$\mathbf{E}_t(\rho, \phi) \simeq \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_d \quad (2.39)$$

avec

$$\mathbf{E}_i(\rho, \phi) \approx \hat{\mathbf{e}}_z e^{-j\pi/4} \frac{e^{jk\rho}}{\sqrt{k\rho}} P(\phi) \quad (2.40)$$

$$\mathbf{E}_r(\rho, \phi) \approx \hat{\mathbf{e}}_z e^{-j\pi-j\pi/4} \frac{e^{jk\rho}}{\sqrt{k\rho}} P(-\phi) \quad (2.41)$$

$$\mathbf{E}_d(\rho, \phi) \approx \hat{\mathbf{e}}_z \frac{e^{-2jk\rho}}{\sqrt{8j\pi k\rho}} \mathbf{E}_i(\rho = 0) \quad (2.42)$$

$$P(\pm\phi) = \mp \frac{kW_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi \mp \phi_0) e^{-\left(\frac{kW_0}{2} \sin(\phi \mp \phi_0)\right)^2} e^{-jk\rho_{\text{fig}} \cos(\phi_{\text{fig}} \mp \phi)} \quad (2.43)$$

Dans le calcul précédent, nous avons supposé qu'à grande distance, la variation de la fonction de FRESNEL  $F$  était lente devant la variation du terme de phase  $e^{jk\rho \cos(\phi \mp \Theta)}$ . Cette supposition est en réalité erronée et conduit à un résultat partiel. En effet, l'expression précédente ne prend pas correctement en compte la discontinuité induite par l'arête et seul le champ réfléchi par un plan continu est bien modélisé.

Ce résultat incorrect est dû à l'hypothèse initiale selon laquelle les fonctions  $P$  et surtout  $F$  varient lentement devant le terme de phase. On observe en pratique que la fonction de FRESNEL  $F$  varie rapidement en fonction du paramètre d'intégration. Par conséquent, le développement asymptotique est incorrect.

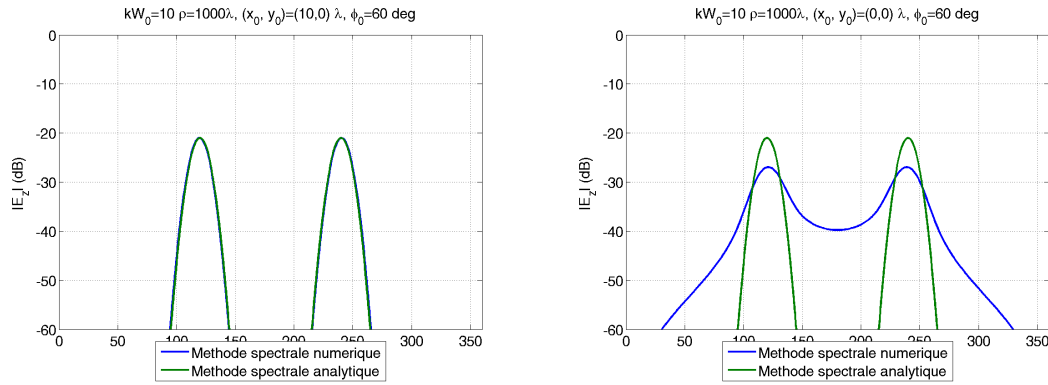


FIG. 2.11: Champs rayonnés avec l'hypothèse champ lointain du spectre d'ondes planes (en vert) par rapport à la référence numérique (en bleu). À gauche, le faisceau incident intercepte le demi-plan loin de l'arête. À droite, le faisceau incident intercepte le demi-plan sur l'arête.

### I.1.5.b Hypothèse champ lointain de l'intégrande

Dans cette approximation, on utilise le développement asymptotique de la fonction de Fresnel directement dans les intégrandes de (2.36), c'est-à-dire que l'on suppose que les arguments  $\mu'$  et  $\nu'$  sont toujours grands devant l'unité. Toutefois, comme l'ont également montré [104], le résultat obtenu n'est pas uniforme au voisinage de la L.O.R. et de la L.O.I., c'est pourquoi les détails des calculs ne seront pas reproduits ici. Le résultat obtenu est illustré sur la figure (2.12) page 84.

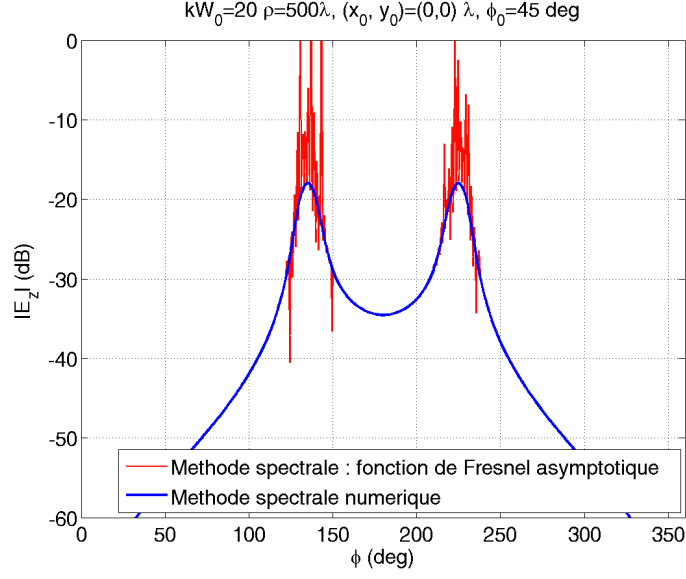


FIG. 2.12: Comparaison des champs rayonnés calculés par l'expression intégrale (en bleu) et par l'évaluation asymptotique de la fonction de Fresnel dans l'intégrande (en rouge).

Les singularités de la courbe rouge sont dues aux pôles en  $\Theta = \pi \mp \phi$  induits par l'utilisation du développement asymptotique (2.10) de la fonction de FRESNEL, qui s'écrit en  $|\mu'|, |v'| \gg 1$  :

$$\frac{F(\mu')}{F(v')} \approx \prod \left( \cos \left( \frac{\phi \mp \Theta}{2} \right) \right) - \frac{1}{\sqrt{8j\pi k\rho}} \frac{e^{-j2k\rho \cos^2 \left( \frac{\phi \mp \Theta}{2} \right)}}{\cos \left( \frac{\phi \mp \Theta}{2} \right)} \quad (2.44)$$

## Conclusion

Dans cette partie nous avons calculé l'expression intégrale exacte du champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien en deux dimensions. Nous avons également cherché à obtenir une expression analytique de cette solution mais jusqu'à présent sans succès.

Toutefois cette approche n'est pas inutile, car évaluée numériquement, cette solution est la référence par rapport à laquelle nous allons calculer des expressions analytiques du champ rayonné ainsi que leurs domaines de validité.

Enfin, remarquons que la démarche utilisée dans cette partie peut être facilement adaptée à d'autres cas canoniques pour lesquels on dispose de solutions exactes pour une plane : un dièdre, une sphère, etc. Cette démarche peut également être étendue à des cas

---

canoniques en trois dimensions, par exemple un demi-plan conducteur. On trouvera les expressions intégrales (doubles) du champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien sous incidence oblique dans les travaux de PETERSSON[53].



## I.2 Champ rayonné par un demi-plan conducteur : approximation de l'optique physique

### I.2.1 Expression du champ incident

Dans cette section, nous calculons le champ rayonné par un demi-plan conducteur situé en  $x > 0$  éclairé par un faisceau gaussien (paraxial) en deux dimensions, dans l'hypothèse de l'optique physique (OP). L'objectif de ce calcul est d'obtenir une expression analytique du champ rayonné.

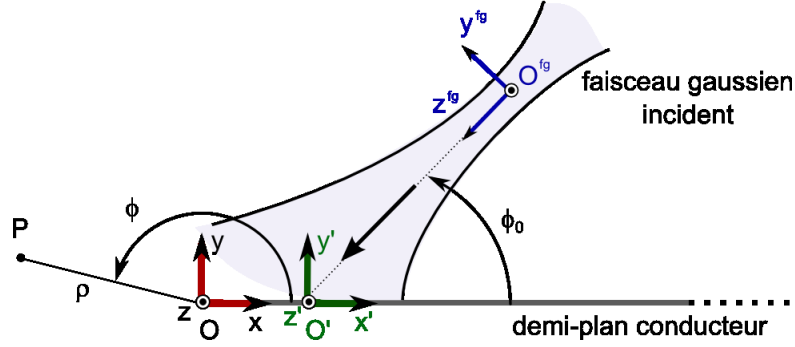


FIG. 2.13: Géométrie du problème.

En mode TE, le champ électrique d'un faisceau gaussien généralisé dans la formulation paraxiale s'écrit dans son repère propre  $(O^{fg}, x^{fg}, y^{fg}, z^{fg})$  :

$$\mathbf{E}^i(y^{fg}, z^{fg}) = \hat{\mathbf{e}}_x^{fg} \sqrt{\frac{q(z^{fg})}{q(0)}} \exp \left[ -\frac{jk}{2} q(z^{fg}) y^{fg2} - jkz^{fg} \right] \quad (2.45)$$

$$q(z^{fg}) = \frac{1}{z^{fg} + j\frac{kW_0^2}{2}} \quad (2.46)$$

Le champ magnétique s'écrit grâce à l'équation de MAXWELL-FARADAY

$$\mathbf{H}^i(y^{fg}, z^{fg}) = \frac{j\sqrt{\epsilon_r}}{kZ_0} \left( \frac{\partial E_{x^{fg}}^i}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_{y^{fg}} - \frac{\partial E_{y^{fg}}^i}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_{z^{fg}} \right) \quad (2.47)$$

d'où :

$$H_{y^{fg}}^i(y^{fg}, z^{fg}) = \frac{j\sqrt{\epsilon_r}}{kZ_0} \left( \frac{jk}{2} q^2(z^{fg}) y^{fg2} - \frac{1}{2} q(z^{fg}) - jk \right) E_{x^{fg}}^i(y^{fg}, z^{fg}) \quad (2.48)$$

$$H_{z^{fg}}^i(y^{fg}, z^{fg}) = -\frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} q(z^{fg}) y^{fg} E_{x^{fg}}^i(y^{fg}, z^{fg}) \quad (2.49)$$

Pour passer dans le repère absolu, on applique la transformation (2.18), que nous rappelons ici :

$$\mathbf{r}^{\text{fg}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\phi_0 & +\cos\phi_0 & 0 \\ -\cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{O^{\text{fg}}} \\ y - y_{O^{\text{fg}}} \\ z \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

où  $(x_{O^{\text{fg}}}, y_{O^{\text{fg}}})$  correspond au centre du repère propre au faisceau gaussien incident, exprimé dans le repère absolu. Le champ magnétique incident sur le demi plan  $(x > 0, y = 0)$  s'exprime alors par :

$$\mathbf{H}^i(x, 0) = \left( -\sin\phi_0 H_{y_{\text{fg}}}^i(y_{(0)}^{\text{fg}}, z_{(0)}^{\text{fg}}) - \cos\phi_0 H_{z_{\text{fg}}}^i(y_{(0)}^{\text{fg}}, z_{(0)}^{\text{fg}}) \right) \hat{\mathbf{e}}_x \\ \left( \cos\phi_0 H_{y_{\text{fg}}}^i(y_{(0)}^{\text{fg}}, z_{(0)}^{\text{fg}}) - \sin\phi_0 H_{z_{\text{fg}}}^i(y_{(0)}^{\text{fg}}, z_{(0)}^{\text{fg}}) \right) \hat{\mathbf{e}}_y \quad (2.51)$$

où on a :

$$y_{(0)}^{\text{fg}} = -\sin\phi_0(x - x_{O^{\text{fg}}}) - \cos\phi_0 y_{O^{\text{fg}}} \quad (2.52)$$

$$z_{(0)}^{\text{fg}} = -\cos\phi_0(x - x_{O^{\text{fg}}}) + \sin\phi_0 y_{O^{\text{fg}}} \quad (2.53)$$

### I.2.2 Expression du champ rayonné : hypothèse de l'OP

Le courant électrique de l'optique physique est nul partout sauf en  $(x > 0, y = 0)$  :

$$\mathbf{J}_{OP}(x) = 2\hat{\mathbf{e}}_y \times \mathbf{H}^i(x, 0) \quad (2.54)$$

$$= 2 \left( \sin\phi_0 H_{y_{\text{fg}}}^i(y_{(0)}^{\text{fg}}, z_{(0)}^{\text{fg}}) + \cos\phi_0 H_{z_{\text{fg}}}^i(y_{(0)}^{\text{fg}}, z_{(0)}^{\text{fg}}) \right) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.55)$$

Le champ rayonné par ce courant s'exprime à partir de l'intégrale de rayonnement en deux dimensions :

$$\mathbf{E}(x, y) = -\frac{kZ_0}{4} \int_0^{+\infty} \mathbf{J}_{OP}(x') H_0^{(2)}(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) dx' \quad (2.56)$$

où les indices primés correspondent à la variable d'intégration, c'est-à-dire les points de la surface du plan.  $H_0^{(2)}$  est la fonction de HANKEL du premier ordre et de second type, correspondant à la fonction de GREEN en espace libre 2D pour la convention  $\exp(+j\omega t)$ . L'intégrale (2.56) peut être évaluée asymptotiquement en champ lointain, avec l'hypothèse supplémentaire que le paramètre de courbure  $q(z^{\text{fg}})$  est constant sur le plan conducteur. Pour améliorer la précision du développement asymptotique, on choisit  $q(z_{(0)}^{\text{fg}}) \approx q(z_{\cap}^{\text{fg}})$  où  $z_{\cap}^{\text{fg}}$  est la cote correspondante à l'intersection de l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_{z^{\text{fg}}}$  avec le plan conducteur (cf figure (2.14)).

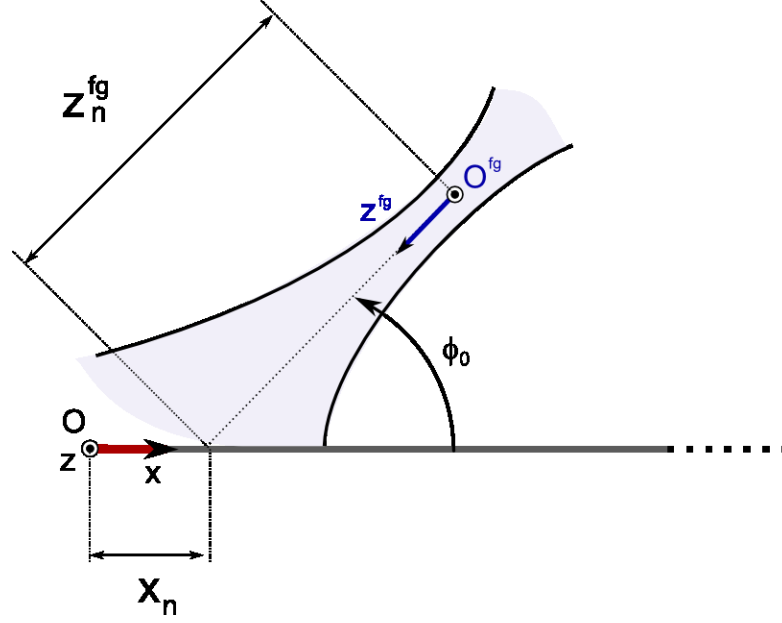


FIG. 2.14: Géométrie du problème.

On obtient finalement (cf. Annexe F) :

$$E^r(\rho, \phi) \approx \hat{\mathbf{e}}_z e^{-kg(x'_s)} \left[ \frac{F(s_0) - F(0)}{2ks_0} e^{-ks_0^2} + \frac{F(0)}{\sqrt{k}} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_0) \right] \quad (2.57)$$

avec

$$\mathcal{Q}(y) = \int_y^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(y) \quad (2.58)$$

$$g(x'_s) = -\frac{b^2}{2a} + c \quad (2.59)$$

$$F(0) = f(x'_s) \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (2.60)$$

$$F(s_0) = f(0) \frac{2s_0}{-b} \quad (2.61)$$

$$s_0 = \left( \frac{b^2}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.62)$$

et

$$a = jq_\Gamma \sin^2 \phi_0 + \frac{j}{\rho} \sin^2 \phi \quad (2.63)$$

$$b = j \cos \phi + jq_\Gamma (\sin \phi_0 x_{O'fg} - \cos \phi_0 y_{O'fg}) \sin \phi_0 + j \cos \phi \quad (2.64)$$

$$c = j(\cos \phi_0 x_{O'fg} + \sin \phi_0 y_{O'fg}) + \frac{jq_\Gamma}{2} (\sin \phi_0 x_{O'fg} - \cos \phi_0 y_{O'fg})^2 \quad (2.65)$$

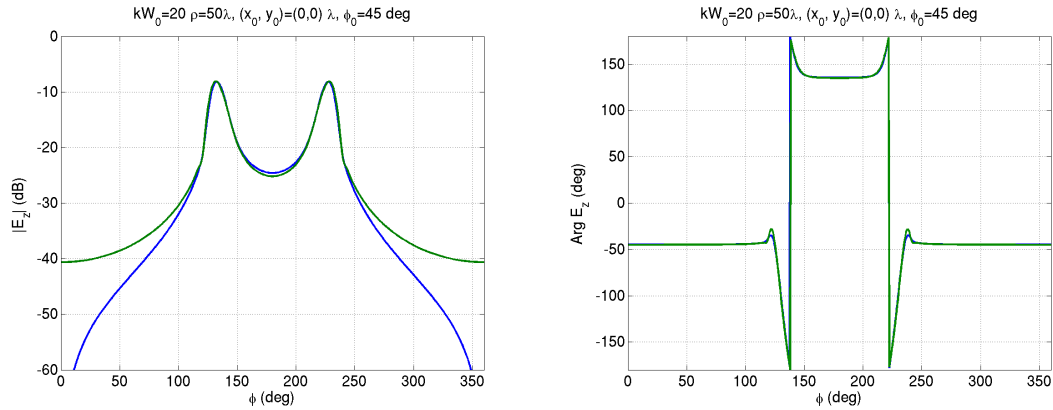


FIG. 2.15: Amplitude et phase à grande distance de la formulation intégrale exacte (en bleu) et de la formulation analytique approchée dans l'hypothèse de l'optique physique (en vert).

### I.2.3 Domaine de validité

Sur la figure 2.16, nous avons représenté l'erreur  $\Delta = |E_z^{\text{SOP}} - E_z^{\text{OP}}|$  en dB entre les champs rayonnés calculés avec l'approche spectrale (exacte) et avec l'approche spatiale (Optique Physique). Pour un faisceau peu divergent et dont le centre de la ceinture coïncide avec l'arête du demi-plan conducteur, nous faisons varier l'angle d'incidence  $\phi_0$  du faisceau de 90 à 18 degrés.

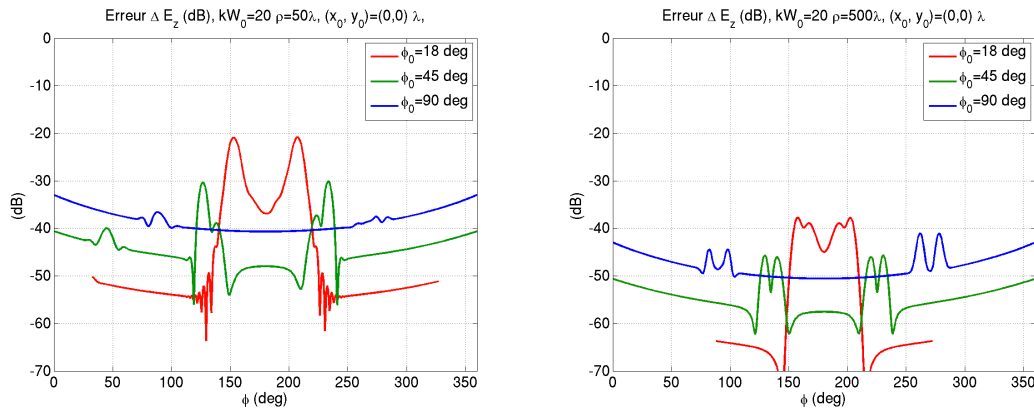


FIG. 2.16: Erreur  $\Delta = |E_z^{\text{SOP}} - E_z^{\text{OP}}|$  en dB pour différente valeur d'incidence  $\phi_0 = 90, 45, 18^\circ$ ,  $kW_0 = 20$ . À gauche,  $\rho = 50\lambda$ . À droite,  $\rho = 500\lambda$ .

L'erreur augmente en particulier dans les directions principales de rayonnement lorsque l'angle d'incidence est faible. Cette erreur "localisée" diminue pour des angles plus importants. Cette erreur est principalement imputable à l'hypothèse de constance

du paramètre de courbure  $q(z^{\text{fg}})$  dans le calcul du champ rayonné : lorsque l'angle entre le plan et la direction d'incidence du faisceau est faible, le faisceau intercepte une large section du plan et cette hypothèse n'est plus valable (cf. figure (2.17)).

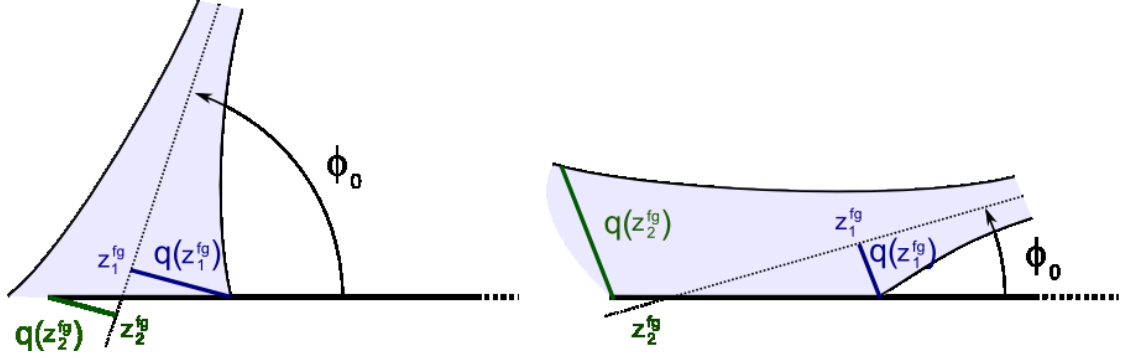


FIG. 2.17: Illustration de l'incidence du faisceau sur le terme de courbure complexe  $q(z^{\text{fg}})$ . À gauche, l'angle d'incidence  $\phi_0$  est proche de la normale : les termes de courbure  $q(z_1^{\text{fg}})$  et  $q(z_2^{\text{fg}})$  sont proches. À droite, l'angle d'incidence est faible : les termes de courbure  $q(z_1^{\text{fg}})$  et  $q(z_2^{\text{fg}})$  ne sont plus comparables.

Enfin, l'approximation de l'optique physique utilisée pour calculer le champ rayonné ne permet pas de retrouver le comportement exact d'une onde en mode TE, où la composante  $E_z$  du champ électrique doit être nulle sur le plan conducteur ( $\phi = 0, 360^\circ$ ) (cf figure 2.15). Aussi, on observe une erreur résiduelle, augmentant à mesure que l'on s'éloigne des directions principales de rayonnement.

L'erreur relative  $|E_z^{\text{SOP}} - E_z^{\text{OP}}|/|E_z^{\text{SOP}}|$  est plus instructive concernant le paramètre de ceinture  $W_0$ . Comme on peut l'observer sur la figure (2.18), l'erreur est plus importante à mesure que le faisceau est plus divergent, c'est-à-dire pour des valeurs de  $kW_0 < 10$ . L'erreur relative augmente en dehors des zones principales de rayonnement, pour la raison évoquée au précédent paragraphe.

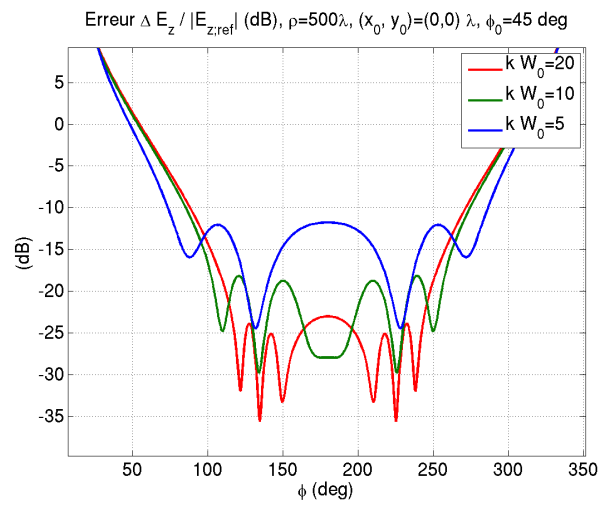


FIG. 2.18: Erreur  $\Delta/|E_z^{\text{SOP}}|$  en dB pour différente valeur de  $kW_0$  avec  $\phi_0 = 45^\circ$ .

### I.3 Champ exact rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un point source complexe

Comme nous l'avons montré dans le chapitre 1, un point source dont les coordonnées spatiales sont complexes correspond à un faisceau gaussien dans l'approximation paraxiale. Par conséquent, le champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien peut également être modélisé à partir d'un point source complexe.

Comme l'a montré L. FELSEN, la connaissance d'un champ rayonné par une géométrie quelconque éclairée par un point source réel peut être, par prolongement analytique dans l'espace complexe, utilisée pour déterminer le champ rayonné par un point source complexe. Cette idée fut appliquée à différentes configurations et en particulier au demi-plan conducteur en deux dimensions[108, 47, 48]. Suivant cette méthodologie, nous utilisons dans cette section le champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un point source réel pour déterminer le champ rayonné par un point source complexe.

#### I.3.1 Expression du champ incident

La géométrie du problème est représentée sur la figure (2.19). Le champ électrique (TE) au point  $\mathbf{r} = {}^t(x, y)$  d'une ligne source complexe de courant unité située en  $\mathbf{r}' = {}^t(x', y')$  s'exprime à partir de la fonction de GREEN en espace libre 2D<sup>3</sup> :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_z \sqrt{\frac{\pi}{2j}} H_0^{(2)}(kR) \quad (2.66)$$

où  $R = \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|$  et  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_s - j\mathbf{b}$ .  $\mathbf{r}_s = {}^t(x_s, y_s)$  représente la position réelle du point source, tandis que  $\mathbf{b}$  représente son décalage dans l'espace complexe et paramètre la direction du champ émis. On pose :

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -\cos\phi_0 \\ -\sin\phi_0 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

On rappelle que la norme  $b$  du vecteur  $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{b}}$  est liée à la taille de la ceinture par  $W_0 = (2b/k)^{\frac{1}{2}}$ .

L'expression du champ (2.66) peut se simplifier en fonction du domaine d'observa-

---

<sup>3</sup> $H_0^{(2)}$  est la fonction de HANKEL d'ordre 0 et de deuxième type, correspondant à la convention temporelle  $e^{+j\omega t}$ [3, §4.11.7].

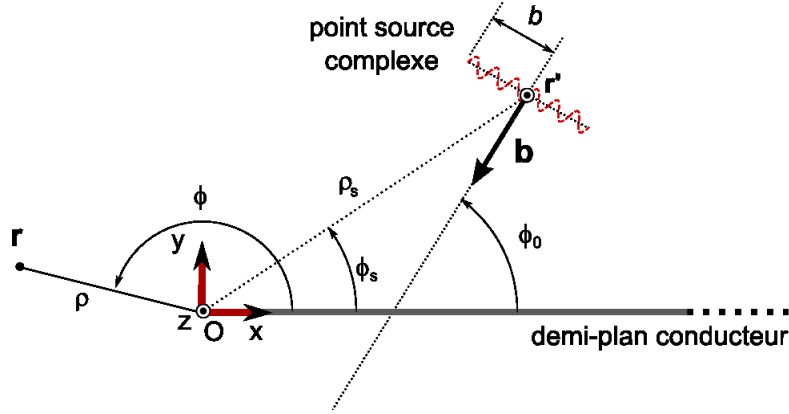


FIG. 2.19: Géométrie et notations.

tion<sup>4</sup> :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \approx \hat{\mathbf{e}}_z \frac{e^{-jkR}}{\sqrt{kR}}, \quad |R| > q.q.\lambda \quad (2.68)$$

$$\approx \hat{\mathbf{e}}_z \frac{e^{-jk[\rho - \rho_s \cos(\phi - \phi_s)]}}{\sqrt{k\rho}} e^{kb \cos(\phi - \phi_0)}, \quad \rho \gg \rho_s \quad (2.69)$$

où on a utilisé  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\rho_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}$ ,  $\phi = \tan^{-1} y/x$  et  $\phi_s = \tan^{-1} y_s/x_s$ . Près de l'axe du faisceau,  $\cos(\phi - \phi_0) \approx 1 - (\phi - \phi_0)^2/2$  et (2.69) s'écrit alors sous la forme d'un faisceau gaussien<sup>5</sup> :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \approx \hat{\mathbf{e}}_z \frac{e^{-jk[\rho - \rho_s \cos(\phi - \phi_s)]}}{\sqrt{k\rho}} e^{kb} e^{-\frac{kb}{2}(\phi - \phi_0)^2}, \quad \rho \gg \rho_s \quad (2.70)$$

### I.3.2 Expression du champ rayonné

Le champ total d'un point source réel situé en  $(\rho_s, \phi_s)$  s'écrit pour le cas d'un demi-plan conducteur [1, §11.7],[77, §4.2.5] :

$$\mathbf{E}_t(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{e^{-jk(\rho + \rho_s)}}{\sqrt{k(\rho + \rho_s)}} e^{jk \frac{\rho \rho_s}{\rho + \rho_s}} \left[ D\left(\frac{\rho \rho_s}{\rho + \rho_s}, \phi - \phi_s\right) - D\left(\frac{\rho \rho_s}{\rho + \rho_s}, \phi + \phi_s\right) \right] \quad (2.71)$$

avec

$$D(r, \psi) = e^{jkr \cos \psi} F\left(-\sqrt{2kr} \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right) \quad (2.72)$$

<sup>4</sup>Le domaine d'observation est réel.

<sup>5</sup>On notera qu'avec l'expression utilisée, le faisceau doit être multiplié par  $\exp(-kb)\sqrt{kb}$  pour normaliser l'amplitude du champ incident à 1.



où  $F$  est la fonction de FRESNEL (2.8). Par prolongement analytique, les coordonnées du point source réel sont transposées dans l'espace complexe [47, 48]. On remplace  $(\rho_s, \phi_s)$  par leurs homologues complexes  $(\dot{\rho}_s, \dot{\phi}_s)$  :

$$\rho_s \rightarrow \dot{\rho}_s = [(x_s + jb \cos \phi_0)^2 + (y_s + jb \sin \phi_0)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.73)$$

$$\phi_s \rightarrow \dot{\phi}_s = \arctan^{-1} \left( \frac{y_s + jb \sin \phi_0}{x_s + jb \cos \phi_0} \right) \quad (2.74)$$

Les points d'observation quant à eux restent inchangés.

### I.3.3 Interprétations physiques

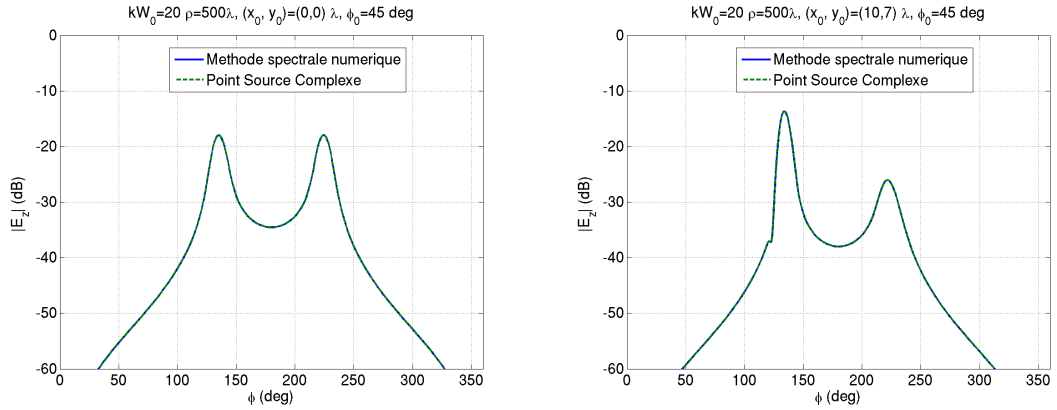


FIG. 2.20: Comparaison des champs lointains pour la méthode de référence (en bleu) et pour un point source complexe (2.71) (en vert). À gauche :  $O^{\text{fg}} = (0, 0)$ . À droite :  $O^{\text{fg}} = (10, 7)$ .  $kW_0 = 4\pi$ ,  $\phi_0 = 45^\circ$ .

Le champ rayonné calculé à partir de l'expression (2.71) pour les coordonnées complexes de la source  $(\dot{\rho}_s, \dot{\phi}_s)$  est représenté sur la figure (2.20) en zone lointaine. Le champ total est représenté sur la figure (2.21) en zone proche. Notons que la formulation (2.71) n'est mathématiquement valide qu'à une distance de quelques longueurs d'ondes de l'arête. On constate que les résultats analytiques sont en parfait accord avec la solution numérique.

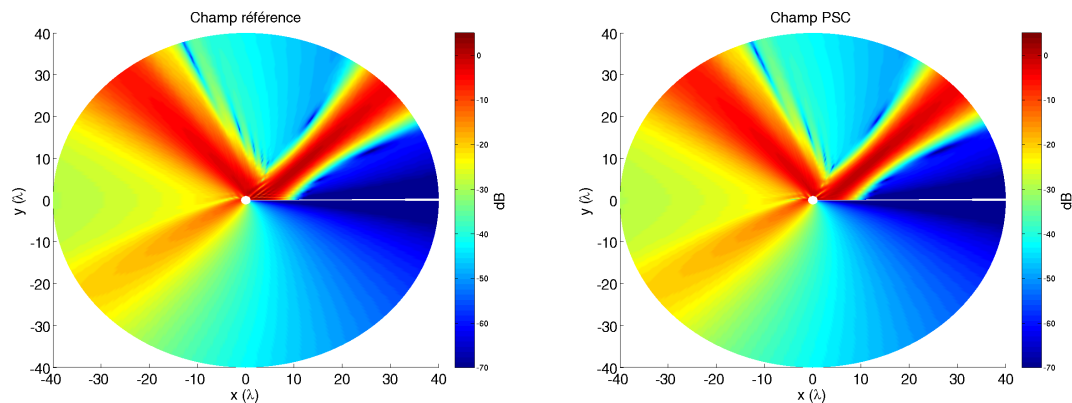


FIG. 2.21: Comparaison du champ proche calculé avec la méthode spectrale exacte (à gauche) et l'utilisation du point source complexe (à droite).  $O^{\text{fg}} = (10, 7)$ ,  $kW_0 = 4\pi$ ,  $\phi_0 = 45^\circ$ .

#### I.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons calculé l'expression intégrale exacte du champ rayonné par un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien en deux dimensions. Afin d'obtenir une expression analytique du champ rayonné dépourvue de singularités, nous avons utilisé l'approximation de l'optique physique pour en déduire le champ rayonné approché. Cette formulation donne de bons résultats dans les directions principales de rayonnement. Enfin, nous avons utilisé un point source complexe afin d'obtenir une expression analytique exacte du champ rayonné.

Une des caractéristiques d'un faisceau gaussien est que son champ est spatialement localisé. Aussi, contrairement aux ondes planes dont l'extension spatiale est infinie, selon la configuration du faisceau (position, direction) et celle d'un objet diffractant, il n'existe pas<sup>6</sup> toujours de champs diffractés ou rayonnés. En effet, le faisceau gaussien peut ne pas intercepter la surface, auquel cas il n'y a pas de champ rayonné. Il est également possible que le faisceau intercepte le plan loin d'une arête : dans ce cas l'énergie sur la bordure est négligeable et seul un faisceau réfléchi est rayonné.

Jusqu'à présent, les développements asymptotiques de la formulation intégrale exacte n'ont pas permis d'obtenir une expression simple et unique du champ rayonné, où un faisceau gaussien incident générerait un champ de "faisceaux diffractés" comme dans le cadre de la TGD où un rayon génère des "rayons diffractés", dont l'expression est

<sup>6</sup>Ou très peu. En particulier si l'on utilise un ensemble de faisceaux gaussiens pour calculer le champ rayonné : dans ce cas, la contribution d'autres faisceaux rayonné peut être nettement supérieure.

analytique. Récemment, M. KATSAV et E. HEYMAN ont montré que ce champ rayonné pouvait s'exprimer à partir d'une somme de faisceaux gaussiens. L'avantage de cette formulation est que l'on peut ensuite "suivre" les faisceaux diffractés, dans un algorithme de lancer de faisceaux. Le champ rayonné par un demi-plan conducteur est modélisé asymptotiquement comme une somme de faisceaux provenant de l'arête[61]. Les auteurs obtiennent alors un "spectre de faisceaux gaussiens", c'est-à-dire une somme de faisceaux d'amplitudes et de directions différentes. Dans le cas présenté par les auteurs, le champ rayonné par un demi-plan conducteur 2D éclairé par un faisceau gaussien est obtenu en sommant 700 faisceaux gaussiens<sup>7</sup>.

Depuis plusieurs années, les points sources complexes sont utilisés avec des méthodes hautes-fréquences pour exprimer le champ rayonné par des objets complexes, comme des réflecteurs métalliques[109]. Toutefois, ces travaux sont généralement restreints à certains types de surfaces courbes[49] ou planes[51]. Des recherches sont toujours en cours pour étendre le formalisme de la TUD aux faisceaux gaussiens[59], mais elles restent seulement limitées aux faisceaux gaussiens circulaires dans le cadre de l'approximation paraxiale.

Dans le contexte de notre étude, l'utilisation de point source complexe en lieu et place d'un faisceau gaussien peut s'avérer pertinente dans la mesure où il existe une expression analytique exacte permettant de calculer le champ rayonné par une arête. De plus, ce résultat analytique peut s'étendre aux arêtes infinies en trois dimensions[50]. Puisque l'utilisation de points sources complexes est limitée par les difficultés rencontrées lors du calcul des interactions avec des surfaces courbes, il pourrait être envisageable d'hybrider faisceaux gaussiens généralisés et points sources complexes (selon la géométrie) pour réaliser un lancer de faisceaux complet.

---

<sup>7</sup>Il n'est pas nécessaire de sommer tous les faisceaux en chaque point de l'espace. Les auteurs utilisent une règle de sélection permettant de sommer environ 14 faisceaux pour calculer le champ en un point.

## II Diffraction 3D

Dans cette section nous exprimons le champ rayonné par une surface conductrice rectangulaire éclairée par un faisceau gaussien. Les expressions obtenues sont analytiques dans l'hypothèse de l'optique physique.

La géométrie générale du problème est illustrée sur la figure (2.22). Le repère absolu est attaché à la surface  $S$  et est défini par la base  $\mathcal{B}(O, \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$ . Soit un point  $P(x, y, z)$ , le vecteur position  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$  s'écrit dans cette base  $\mathbf{r} = {}^t(x, y, z)$ .  $S$  est une surface conductrice rectangulaire, située en  $z = 0$ .

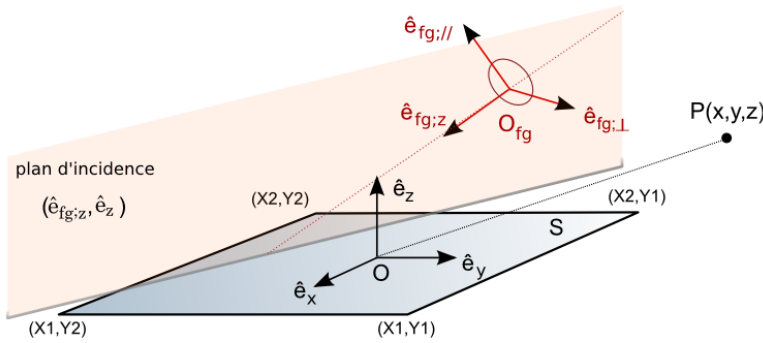


FIG. 2.22: Géométrie du problème et notations.

Le faisceau gaussien incident est défini dans son repère propre  $\mathcal{B}_{fg}(O_{fg}, \hat{\mathbf{e}}_{fg;||}, \hat{\mathbf{e}}_{fg;\perp}, \hat{\mathbf{e}}_{fg;z})$  où  $O_{fg}$  et  $\hat{\mathbf{e}}_{fg;z}$  correspondent respectivement à la position de sa ceinture et à sa direction de propagation.  $\hat{\mathbf{e}}_{fg;||}$  et  $\hat{\mathbf{e}}_{fg;\perp}$  correspondent aux vecteurs unitaires parallèles et perpendiculaires au plan d'incidence du faisceau. On notera  $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$  les champs électrique et magnétique du faisceau incident.

Plusieurs formulations seront décrites dans les sections suivantes, selon le type de faisceau utilisé (paraxial ou lointain) et selon le type de développement asymptotique employé (non uniforme ou uniforme).

### II.1 Expression des champs incidents

#### II.1.1 Faisceau gaussien paraxial

Considérons un faisceau gaussien paraxial incident sur la surface  $S$ . Soit  $P(x, y, z)$  un point de l'espace. Dans le repère propre du faisceau  $\mathcal{B}_{fg}$ , le point  $P$  a pour coordonnées  $P(x^{(fg)}, y^{(fg)}, z^{(fg)})$ .

La matrice de courbure dans le plan de la ceinture est notée  $\mathbb{Q}(0) = \mathbb{Q}(z^{(\text{fg})} = 0)$ . Les coefficients  $a_{\parallel}$  et  $a_{\perp}$  sont respectivement associés aux polarisations parallèle  $\hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\parallel}$  et perpendiculaire  $\hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\perp}$  au plan d'incidence. Avec ces notations, le faisceau incident a pour expression (cf chapitre 1, section (II.4)) :

$$\mathbf{E}_i(P) = \mathbf{A}_E(P) u(P) \quad (2.75)$$

$$\mathbf{H}_i(P) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{Z_0} \mathbf{A}_H(P) u(P) \quad (2.76)$$

avec

$$u(P) = \left( \frac{\det \mathbb{Q}(z^{(\text{fg})})}{\det \mathbb{Q}(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{jk}{2} {}^t \begin{pmatrix} x^{(\text{fg})} \\ y^{(\text{fg})} \end{pmatrix} \mathbb{Q}(z^{(\text{fg})}) \begin{pmatrix} x^{(\text{fg})} \\ y^{(\text{fg})} \end{pmatrix} - jkz^{(\text{fg})} \right] \quad (2.77)$$

Les vecteurs  $\mathbf{A}_E$  et  $\mathbf{A}_H$  s'expriment dans la base  $\mathcal{B}_{\text{fg}}$  comme :

$$\mathbf{A}_E^{(\text{fg})}(P) = a_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\parallel} + a_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\perp} + a_{E;z}(P) \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};z} \quad (2.78)$$

$$\mathbf{A}_H^{(\text{fg})}(P) = -a_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\parallel} + a_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\perp} + a_{H;z}(P) \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};z} \quad (2.79)$$

où<sup>8</sup> :

$$a_{E;z}(P) = -a_{\parallel} (q_{11}x^{(\text{fg})} + q_{12}y^{(\text{fg})}) - a_{\perp} (q_{12}x^{(\text{fg})} + q_{22}y^{(\text{fg})}) \quad (2.80)$$

$$a_{H;z}(P) = a_{\parallel} (q_{12}x^{(\text{fg})} + q_{22}y^{(\text{fg})}) - a_{\perp} (q_{11}x^{(\text{fg})} + q_{12}y^{(\text{fg})}) \quad (2.81)$$

### II.1.2 Faisceau gaussien champ lointain

Avec les mêmes notations que précédemment, les champs électrique et magnétique d'un faisceau gaussien formulé en champ lointain ont pour expression (cf. chapitre 1, section (II.5)) :

$$\mathbf{E}_i(P) = \mathbf{A}'_E(P) v(P) \quad (2.82)$$

$$\mathbf{H}_i(P) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{Z_0} \mathbf{A}'_H(P) v(P) \quad (2.83)$$

avec

$$v(P) = (\det \mathbb{Q}(0))^{-\frac{1}{2}} \frac{z^{(\text{fg})}}{r^{(\text{fg})}} \frac{e^{-jkr^{(\text{fg})}}}{r^{(\text{fg})}} \exp \left[ +\frac{jk}{2(r^{(\text{fg})})^2} {}^t \begin{pmatrix} x^{(\text{fg})} \\ y^{(\text{fg})} \end{pmatrix} \mathbb{Q}^{-1}(0) \begin{pmatrix} x^{(\text{fg})} \\ y^{(\text{fg})} \end{pmatrix} \right] \quad (2.84)$$

<sup>8</sup>Pour plus de clarté, nous avons supprimé l'indication de la dépendance en  $z^{(\text{fg})}$  des composantes de la matrice de courbure  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire que  $q_{ij} = q_{ij}(z^{(\text{fg})})$ .

Les vecteurs  $\mathbf{A}'_E$  et  $\mathbf{A}'_H$  s'écrivent dans la base  $\mathcal{B}_{fg}$  :

$$\mathbf{A}'_E{}^{(fg)}(P) = a_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{fg;\parallel} + a_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{fg;\perp} - \left( \frac{x^{(fg)}}{z^{(fg)}} a_{\parallel} + \frac{y^{(fg)}}{z^{(fg)}} a_{\perp} \right) \hat{\mathbf{e}}_{fg;z} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{A}'_H{}^{(fg)}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{x^{(fg)} y^{(fg)}}{z^{(fg)} r^{(fg)}} a_{\parallel} + \frac{(r^{(fg)})^2 - (x^{(fg)})^2}{z^{(fg)} r^{(fg)}} a_{\perp} \\ -\frac{(r^{(fg)})^2 - (y^{(fg)})^2}{z^{(fg)} r^{(fg)}} a_{\parallel} + \frac{x^{(fg)} y^{(fg)}}{z^{(fg)} r^{(fg)}} a_{\perp} \\ -a_{\parallel} \frac{y^{(fg)}}{r^{(fg)}} + \frac{x^{(fg)}}{r^{(fg)}} a_{\perp} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

avec  $r^{(fg)} = \|\mathbf{r}^{(fg)}(P)\| = \sqrt{(x^{(fg)})^2 + (y^{(fg)})^2 + (z^{(fg)})^2}$ . Cette expression est valide lorsque le centre du faisceau est à grande distance du point  $P$ , soit lorsque  $\|\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}(O_{fg})\| \gg 1$ .

### II.1.3 Relation avec le repère absolu

On a  $\mathbf{OP} = \mathbf{OO}_{fg} + \mathbf{O}_{fg}\mathbf{P}$  (cf. figure (2.23)), c'est-à-dire :

$$\mathbf{r}(P) = \mathbf{r}(O_{fg}) + \mathbb{M}_{\mathcal{B}_{fg} \rightarrow \mathcal{B}} \mathbf{r}^{(fg)}(P) \quad (2.87)$$

où  $\mathbb{M}_{\mathcal{B}_{fg} \rightarrow \mathcal{B}}$  est la matrice de passage du repère propre du faisceau  $\mathcal{B}_{fg}$  au repère absolu  $\mathcal{B}$  :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{B}_{fg} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_{fg;\parallel} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_{fg;\perp} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_{fg;z} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_{fg;\parallel} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_{fg;\perp} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_{fg;z} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_{fg;\parallel} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z & \hat{\mathbf{e}}_{fg;\perp} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z & \hat{\mathbf{e}}_{fg;z} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

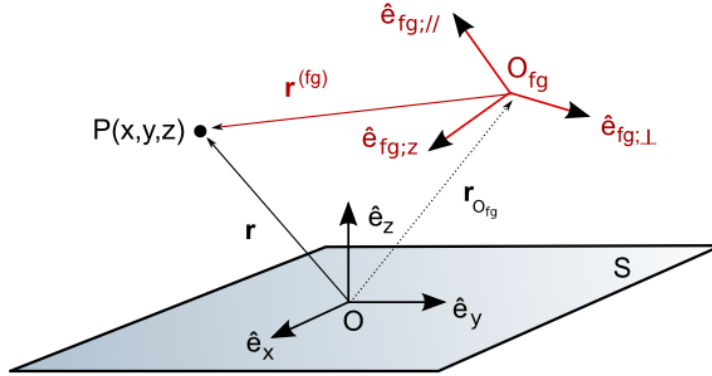


FIG. 2.23: Notations des repères utilisés.

On en déduit la relation inverse :

$$\mathbf{r}^{(fg)}(P) = \mathbb{M}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{fg}} (\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}(O_{fg})) \quad (2.89)$$

où :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{fg}}} = {}^t \mathbb{M}_{\mathcal{B}_{\text{fg}} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\parallel} & \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\parallel} & \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\parallel} \\ \hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\perp} & \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\perp} & \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};\perp} \\ \hat{\mathbf{e}}_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};z} & \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};z} & \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};z} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

Dans la suite, on posera en toute généralité :

$$\mathbb{M}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{fg}}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = [m_{ij}] \quad (2.91)$$

En particulier, soit  $Q(x_Q, y_Q, 0)$  un point de la surface  $S$ . On a :

$$\mathbf{r}^{(\text{fg})}(Q) = \begin{cases} m_{11}(x_Q - x_{O_{\text{fg}}}) + m_{12}(y_Q - y_{O_{\text{fg}}}) - m_{13}z_{O_{\text{fg}}} \\ m_{21}(x_Q - x_{O_{\text{fg}}}) + m_{22}(y_Q - y_{O_{\text{fg}}}) - m_{23}z_{O_{\text{fg}}} \\ m_{31}(x_Q - x_{O_{\text{fg}}}) + m_{32}(y_Q - y_{O_{\text{fg}}}) - m_{33}z_{O_{\text{fg}}} \end{cases} \quad (2.92)$$

Avec ces conventions, les champs électromagnétiques s'écrivent alors dans le repère absolu  $\mathcal{B}$  :

$$\mathbf{E}_i(P) = [{}^t m_{ij}] \mathbf{A}_E^{(\text{fg})}(P) u(P) \quad (2.93)$$

$$\mathbf{H}_i(P) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{Z_0} [{}^t m_{ij}] \mathbf{A}_H^{(\text{fg})}(P) u(P) \quad (2.94)$$

## II.2 Expressions des champs rayonnés

### II.2.1 Remarques préliminaires

Dans cette section, nous calculons les expressions asymptotiques des champs  $\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r$  issus des intégrales de rayonnement du courant électrique dans l'hypothèse de l'optique physique à grande distance (cf Annexe B) au point  $P(x, y, z)$  :

$$\mathbf{E}_r(P) = j \frac{kZ_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}} \iint_S \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i(Q)] \frac{e^{-jkR}}{R} dx_Q dy_Q \quad (2.95)$$

$$\mathbf{H}_r(P) = -j \frac{k}{2\pi} \iint_S \hat{\mathbf{R}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i(Q)] \frac{e^{-jkR}}{R} dx_Q dy_Q \quad (2.96)$$

où  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_z$  correspond au vecteur unitaire normal à la surface  $S$ ,  $\mathbf{r}$  un point de l'espace,  $Q(x_Q, y_Q, 0)$  un point de la surface,  $\mathbf{R} = \mathbf{QP}$ ,  $R = \|\mathbf{R}\|$  et  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ .

L'évaluation asymptotique des intégrales (2.95-2.96) nécessite une approximation sur le calcul de la distance  $R$ . À grande distance de la surface, on a :

$$R = \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 + z^2} \quad (2.97)$$

$$\approx r - \frac{x}{r}x_Q - \frac{y}{r}y_Q - \frac{xy}{r^3}x_Qy_Q + \left(\frac{1}{2r} - \frac{x^2}{2r^3}\right)x_Q^2 + \left(\frac{1}{2r} - \frac{y^2}{2r^3}\right)y_Q^2 \quad , \quad r \gg x_Q, y_Q \quad (2.98)$$

avec  $r = \|\mathbf{r}\|$ . L'évaluation asymptotique de l'intégrale avec cette hypothèse s'interprète physiquement comme un champ provenant de l'origine du repère absolu, c'est-à-dire le point  $O$ . Bien que valide à grande distance, typiquement de l'ordre de  $r = 1000\lambda$  cette hypothèse est assez restrictive dès lors que l'on souhaite calculer des champs plus proches [56].

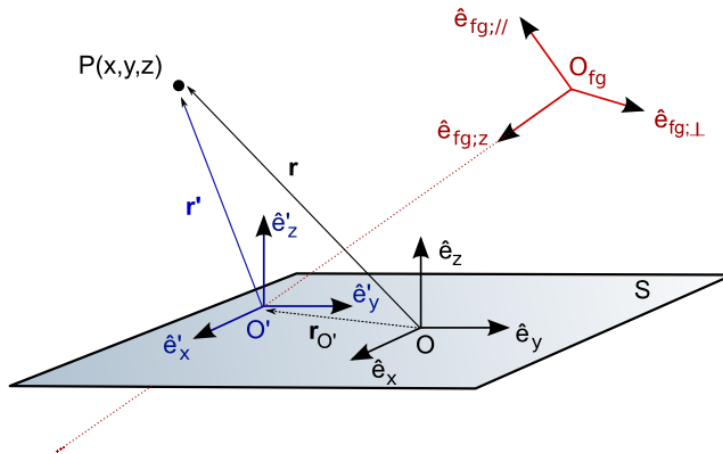


FIG. 2.24: Illustration du changement de repère. Le point  $O'$  correspond à l'intersection du vecteur directeur  $\hat{e}_{fg;z}$  du faisceau avec la surface  $S$ .

Afin d'étendre le domaine de validité des formulations qui vont être calculées aux zones les plus proches possibles de la surface, nous procédons à un changement de repère intermédiaire. Soit  $O'$  le point correspondant à l'intersection du vecteur directeur  $\hat{e}_{fg;z}$  du faisceau avec la surface  $S$ , comme illustré sur la figure (2.24). On procède au changement



de repère avec le repère centré sur  $O'$  :

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'\mathbf{Q} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \\ z'_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q - x_{O'} \\ y_Q - y_{O'} \\ z_Q \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OO}' + \mathbf{O}'\mathbf{P} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_{O'} \\ y - y_{O'} \\ z \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

d'où :

$$R = \|\mathbf{QP}\| = \|\mathbf{OP} - \mathbf{OQ}\| \quad (2.101)$$

$$= \|\mathbf{O}'\mathbf{P} - \mathbf{O}'\mathbf{Q}\| \quad (2.102)$$

$$= \sqrt{(x' - x'_Q)^2 + (y' - y'_Q)^2 + z'^2} \quad (2.103)$$

De la même manière, le développement de Taylor de l'expression pour  $r' \gg x'_Q, y'_Q$  donne :

$$R \simeq r' - \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'/r' \\ y'/r' \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \mathbb{P} \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix}, \quad r' \gg x'_Q, y'_Q \quad (2.104)$$

avec  $r' = \|\mathbf{r}'\| = \sqrt{(x - x_{O'})^2 + (y - y_{O'})^2 + z^2}$  et :

$$\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{r'} - \frac{(x')^2}{(r')^3} & -\frac{x'y'}{(r')^3} \\ -\frac{x'y'}{(r')^3} & \frac{1}{r'} - \frac{(y')^2}{(r')^3} \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

Ce changement de variable permet de décrire plus fidèlement le champ réfléchi par la surface  $S$ . Physiquement, l'origine du champ est exprimée comme étant le point spéculaire de réflexion du faisceau incident avec la surface. La distance  $z_{O'}^{(\text{fg})} = \|\mathbf{O}_{\text{fg}}\mathbf{O}'\|$ , séparant le centre  $O_{\text{fg}}$  du repère propre au faisceau au point  $O'$  de la surface se calcule analytiquement et vaut :

$$z_{O'}^{(\text{fg})} = -\frac{z_{O_{\text{fg}}}}{\hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};z} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z} \quad (2.106)$$

De la même façon, un point  $Q$  appartenant à la surface  $S$  repéré dans le repère propre au faisceau peut s'exprimer en fonction des coordonnées du repère centré sur  $O'$  :

$$\mathbf{r}^{(\text{fg})}(Q) = [m_{ij}] \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (2.107)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} [m_{ij}] \begin{pmatrix} x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}} \\ y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}} \\ 0 \end{pmatrix} - z_{O_{\text{fg}}} \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

**Remarque :** on aurait pu dès le départ définir le repère absolu comme étant centré au point  $O'$ . Toutefois, même si cette approche est plus simple, elle est moins pratique en vue d'une implémentation dans un code généraliste. En effet, on préférera généralement décrire la surface  $S$  comme un objet dont on aura défini au préalable la géométrie, plutôt que de la calculer en fonction du champ incident. Autrement dit, le maillage d'un objet est généralement décrit sans rapport avec le champ incident.

### II.2.2 Écriture sous forme canonique des intégrales

Avant de procéder au développement asymptotique des intégrales (2.95-2.96), il est nécessaire de procéder à quelques hypothèses et simplifications supplémentaires.

#### II.2.2.a Faisceau gaussien incident paraxial

Comme pour le calcul du champ rayonné en deux dimensions (cf. section (I.2)), on fera l'hypothèse que la matrice de courbure du faisceau est constante sur le plan, avec sa valeur au point  $O'$  [56]. Soit :

$$\mathbb{Q}(z^{(\text{fg})}) \approx \mathbb{Q}(z_{O'}^{(\text{fg})}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}_{O'} \quad (2.109)$$

et on pose  $q_{ij}(z_{O'}^{(\text{fg})}) \stackrel{\text{def}}{=} q'_{ij}$ . Les équations (2.95-2.96) peuvent alors s'écrire sous la forme canonique suivante :

$$\mathbf{E}_r(P) = \iint_S \mathbf{f}_E(x_Q, y_Q) e^{-kg(x_Q, y_Q)} dx_Q dy_Q \quad (2.110)$$

$$\mathbf{H}_r(P) = \iint_S \mathbf{f}_H(x_Q, y_Q) e^{-kg(x_Q, y_Q)} dx_Q dy_Q \quad (2.111)$$

avec

$$\mathbf{f}_E(x_Q, y_Q) \stackrel{\text{def}}{=} j \frac{k}{2\pi} \left( \frac{\det \mathbb{Q}_{O'}}{\det \mathbb{Q}(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \left[ \hat{\mathbf{n}} \times \left( {}^t[m_{ij}] \mathbf{A}_H(\mathbf{r}_Q^{(\text{fg})}) \right) \right] \quad (2.112)$$

$$\mathbf{f}_H(x_Q, y_Q) \stackrel{\text{def}}{=} -j \frac{k\sqrt{\epsilon_r}}{2\pi Z_0} \left( \frac{\det \mathbb{Q}_{O'}}{\det \mathbb{Q}(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}} \times \left[ \hat{\mathbf{n}} \times \left( {}^t[m_{ij}] \mathbf{A}_H(\mathbf{r}_Q^{(\text{fg})}) \right) \right] \quad (2.113)$$

$$g(x_Q, y_Q) \stackrel{\text{def}}{=} jR + \frac{j}{2} \begin{pmatrix} x_Q^{(\text{fg})} \\ y_Q^{(\text{fg})} \end{pmatrix} \mathbb{Q}_{O'} \begin{pmatrix} x_Q^{(\text{fg})} \\ y_Q^{(\text{fg})} \end{pmatrix} + jz_Q^{(\text{fg})} \quad (2.114)$$

Après quelques calculs et grâce au développement limité du paramètre  $R$  (2.104), on obtient :

$$g(x'_Q, y'_Q) = \frac{j}{2} \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \left[ \mathbb{P} + {}^t[m_{ij}] \mathbb{Q}_{O'} [m_{ij}] \right] \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \mathbf{b} + jc \quad (2.115)$$

avec :

$$\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x'/r' \\ y'/r' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} - {}^t[m_{ij}] \mathbb{Q}_{O'} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

$$c \stackrel{\text{def}}{=} r' + \alpha_3 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \mathbb{Q}_{O'} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

### II.2.2.b Faisceau gaussien incident champ lointain

En utilisant la formulation champ lointain d'un faisceau gaussien, on peut également écrire les intégrales (2.95-2.96) sous la forme canonique :

$$\mathbf{E}_r(P) = \iint_S \mathbf{F}_E(x_Q, y_Q) e^{-kG(x_Q, y_Q)} dx_Q dy_Q \quad (2.118)$$

$$\mathbf{H}_r(P) = \iint_S \mathbf{F}_H(x_Q, y_Q) e^{-kG(x_Q, y_Q)} dx_Q dy_Q \quad (2.119)$$

avec :

$$\mathbf{F}_E(x_Q, y_Q) \stackrel{\text{def}}{=} j \frac{k}{2\pi} (\det \mathbb{Q}(0))^{-\frac{1}{2}} \frac{z_Q^{(\text{fg})}}{(r_Q^{(\text{fg})})^2} \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \left[ \hat{\mathbf{n}} \times \left( \mathbb{M}_{\mathcal{B}_{\text{fg}}} \rightarrow \mathcal{B} \mathbf{A}'_H(\mathbf{r}_Q^{(\text{fg})}) \right) \right] \quad (2.120)$$

$$\mathbf{F}_H(x_Q, y_Q) \stackrel{\text{def}}{=} -j \frac{k\sqrt{\varepsilon_r}}{2\pi Z_0} (\det \mathbb{Q}(0))^{-\frac{1}{2}} \frac{z_Q^{(\text{fg})}}{(r_Q^{(\text{fg})})^2} \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \left[ \hat{\mathbf{n}} \times \left( \mathbb{M}_{\mathcal{B}_{\text{fg}}} \rightarrow \mathcal{B} \mathbf{A}'_H(\mathbf{r}_Q^{(\text{fg})}) \right) \right] \quad (2.121)$$

$$G(x_Q, y_Q) \stackrel{\text{def}}{=} jR + jr_Q^{(\text{fg})} - \frac{j}{2(r_Q^{(\text{fg})})^2} \begin{pmatrix} x_Q^{(\text{fg})} \\ y_Q^{(\text{fg})} \end{pmatrix} \mathbb{Q}^{-1}(0) \begin{pmatrix} x_Q^{(\text{fg})} \\ y_Q^{(\text{fg})} \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

Pour pouvoir développer le calcul et le mettre sous forme quadratique, on fait l'hypothèse que le faisceau se trouve en zone lointaine de la plaque, c'est-à-dire lorsque  $r^{(\text{fg})}(O') \gg r(Q)$ . Dans ce cas, la distance  $r^{(\text{fg})}(Q)$  entre l'origine du faisceau  $O^{(\text{fg})}$  et un point  $Q$  sur la plaque est proche de la distance  $r^{(\text{fg})}(O')$  entre l'origine du faisceau et le point d'intersection de l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};z}$  avec le plan  $z = 0$  ( $O'$ ).

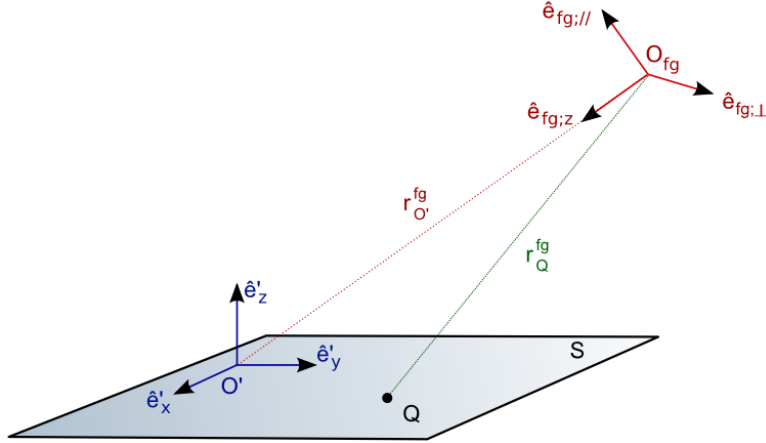


FIG. 2.25: Approximation zone lointaine utilisée dans le calcul du champ rayonné par un faisceau gaussien "champ lointain". Lorsque  $r^{(\text{fg})}(O') \gg r(Q)$ , on considère que la distance  $r^{(\text{fg})}(Q) \simeq r^{(\text{fg})}(O')$  pour le terme d'amplitude (on utilise un développement limité pour le terme de phase).

Dans cette hypothèse, on peut réaliser un développement limité de la distance  $r_Q^{(\text{fg})}$  pour le terme de phase :

$$r_Q^{(\text{fg})} \approx r_{O'}^{(\text{fg})} - \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}})/r_{O'}^{(\text{fg})} \\ (y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}})/r_{O'}^{(\text{fg})} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{O'}^{(\text{fg})}} - \frac{(x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}})^2}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^3} & -\frac{(x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}})(y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}})}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^3} \\ -\frac{(x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}})(y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}})}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^3} & \frac{1}{r_{O'}^{(\text{fg})}} - \frac{(y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}})^2}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

et

$$\frac{1}{r_Q^{(\text{fg})}} \approx \frac{1}{r_{O'}^{(\text{fg})}} \quad (2.124)$$

avec :

$$r_{O'}^{(\text{fg})} = \frac{-z_{O_{\text{fg}}}}{\hat{\mathbf{e}}_{\text{fg};z} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z} \quad (2.125)$$

Après quelques calculs, on trouve :

$$G(x'_Q, y'_Q) = \frac{j}{2} \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} x'_Q \\ y'_Q \end{pmatrix} \mathbf{B} + jC \quad (2.126)$$

où

$$\mathbb{A} = \mathbb{P} + \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{r_{O'}^{(\text{fg})}} - \frac{(x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}})^2}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^3} & -\frac{(x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}})(y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}})}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^3} \\ -\frac{(x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}})(y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}})}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^3} & \frac{1}{r_{O'}^{(\text{fg})}} - \frac{(y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}})^2}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^3} \end{array} \right) - \frac{{}^t[m_{ij}] \mathbb{Q}_0^{-1}[m_{ij}]}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^2} \quad (2.127)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \frac{1}{r_{O'}^{(\text{fg})}} \begin{pmatrix} x_{O'} - x_{O_{\text{fg}}} \\ y_{O'} - y_{O_{\text{fg}}} \end{pmatrix} - \frac{{}^t[m_{ij}] \mathbb{Q}_0^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}}{(r_{O'}^{(\text{fg})})^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

$$C = r_{O'}^{(\text{fg})} + r' - \frac{1}{2(r_{O_{\text{fg}}}^{(\text{fg})})^2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \mathbb{Q}_0^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2.129)$$

### II.2.3 Expressions asymptotiques non uniformes

L'évaluation asymptotique d'intégrales doubles du type :

$$\iint_S \varphi(x, y) e^{-k\psi(x, y)} dx dy \quad (2.130)$$

où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  lorsque le paramètre  $k > 0$  est grand, a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. En particulier lorsque le domaine d'intégration  $S$  correspond à  $\mathbb{R}^2$ , l'évaluation de l'intégrale (2.130) par la méthode de la phase stationnaire, de LAPLACE ou du point col est bien connue[110, 2, 111] et est décrite dans l'annexe C- II.

Toutefois, pour un domaine d'intégration fini, comme c'est le cas pour les intégrales (2.110-2.111) et (2.118-2.119), les travaux sont moins nombreux et font généralement appel à des extensions de la méthode de la phase stationnaire, c'est-à-dire dans l'hypothèse où  $\psi(x, y) = j\phi(x, y)$  où la fonction  $\phi$  est à valeurs réelles[112, 113, 114, 115, 116]. Clairement, les intégrales que l'on souhaite évaluer ne satisfont pas à cette hypothèse dans la mesure où les fonctions  $g$  ou  $G$  sont dans le cas le plus général à valeurs complexes.

L'extension de méthodes asymptotiques à des intégrales doubles ou multiples à valeurs complexes sur des domaines bornés reste un domaine de recherche actif dans le cadre des théories dites *hyperasymptotiques*[117, 118, 119, 120]. Bien que dépassant largement le cadre de nos besoins, ces travaux montrent qu'aux premiers ordres du développement asymptotique et lorsque les fonctions qui composent l'intégrande sont continues sur le domaine d'intégration, les résultats obtenus à partir des extensions de la méthode de la phase stationnaire restent valides pour des fonctions à valeurs complexes<sup>9</sup>. Aussi, nous utiliserons les résultats provenant de la méthode de la phase stationnaire pour les intégrales (2.110-2.111) et (2.118-2.119).

<sup>9</sup>Bien que l'approche soit différente, les résultats sont identiques, comme c'est le cas pour des intégrales simples.

### II.2.3.a Points critiques

D'un point de vue mathématique, les contributions dominantes de l'intégrale (2.130) sont dues à un ensemble de points dits *critiques*[113]. Lorsque ces points sont réels, comme c'est le cas pour l'optique géométrique, ils correspondent physiquement aux régions voisines des points spéculaires qui satisfont à la loi de SNELL-DESCARTES sur le plan tangent à la surface d'un objet et dépendent de la position de l'observateur[9]. Selon la position de ces points par rapport aux frontières du domaine d'intégration, ils peuvent être classés en points critiques du *premier*, *second* et *troisième* ordre[112, 121, 116],[111, §VIII] (cf. figure 2.26).

**Points critiques du premier ordre** Un point critique du premier ordre, plus connu sous le nom de *point stationnaire* ou de *point col*, correspond au point  $(x_s, y_s)$  pour lequel le gradient de la fonction de phase  $\psi$  est nul :

$$\nabla\psi(x_s, y_s) = \mathbf{0} \quad (2.131)$$

**Points critiques du second ordre** Un point critique du second ordre  $(x_s^{(2)}, y_s^{(2)})$  est un point appartenant au contour  $\partial S$  de coordonnées curvilignes  $s$  pour lequel :

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}(x_s^{(2)}, y_s^{(2)}) = 0 \quad (2.132)$$

**Points critiques du troisième ordre** Un point critique du troisième ordre  $(x_s^{(3)}, y_s^{(3)})$  correspond à un point pour lequel le contour  $\partial S$  n'est pas lisse. Il s'agit par exemple des coins d'un polygone.

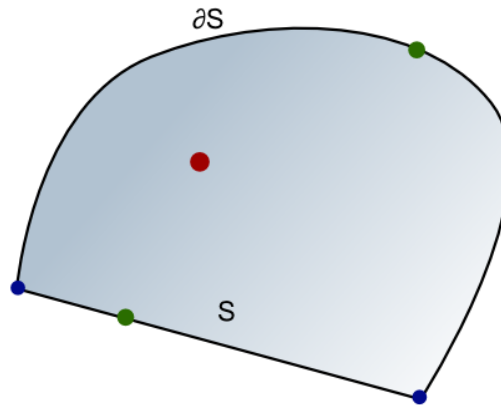


FIG. 2.26: Illustration de la position de points critiques sur une surface  $S$ . En rouge : un point critique du premier ordre. Vert : second ordre. Bleu : troisième ordre.

Pour chaque type de point critique, la contribution de l'intégrale (2.130) aura une expression différente. L'évaluation totale de l'intégrale correspond alors à la somme des contributions de tous les points critiques liés à la surface  $S$ [116]. Les expressions associées à chaque type de point critique sont détaillées dans l'annexe C-II.2.1. Cette technique est appliquée dans [122, 123, 124, 125, 126] pour le calcul analytique ou semi-analytique<sup>10</sup> du rayonnement dans l'hypothèse de l'optique physique, lorsque les objets sont éclairés par des rayons ou des ondes sphériques.

### II.2.3.b Application à un faisceau paraxial

On utilise les résultats de l'annexe C-II.2.1 pour évaluer l'intégrale (2.110). La surface d'intégration correspond à un rectangle tel que  $X_- < x_Q < X_+$  et  $Y_- < y_Q < Y_+$  représenté sur la figure (2.27).

<sup>10</sup>La localisation des points critiques est numérique.

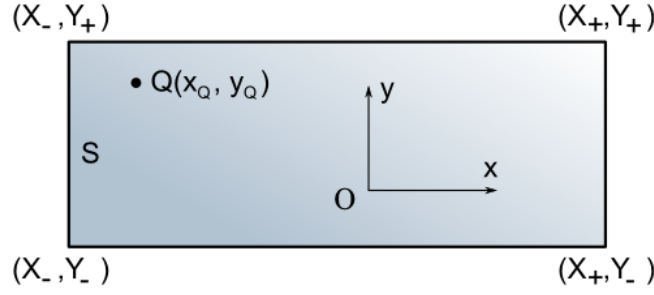


FIG. 2.27: Géométrie du domaine d'intégration  $S$  de l'intégrale 2.110.  $Q(x_Q, y_Q)$  est la variable d'intégration.

**Point critique du premier ordre.** Le point critique du premier ordre de la fonction  $g$  (2.114) est :

$$\begin{pmatrix} x_Q^{(1)} \\ y_Q^{(1)} \end{pmatrix} = [a_{ij}]^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix} \quad (2.133)$$

d'où la contribution :

$$\mathbf{E}_r^{(1)}(P) = \frac{2\pi}{k} \frac{\mathbf{f}_E(x_Q^{(1)}, y_Q^{(1)})}{(\det[a_{ij}])^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -kg(x_Q^{(1)}, y_Q^{(1)}) \right] \quad (2.134)$$

**Point critique du second ordre.** Sur les 2 côtés  $x_Q = X_{\pm}$ , les points critiques du second ordre associés  $y_{\pm}^{(2)}$  sont :

$$y_{Q\pm}^{(2)} = \frac{b_2 - a_{12}(X_{\pm} - x_{O'})}{a_{22}} - y_{O'} \quad (2.135)$$

d'où la contribution :

$$\mathbf{E}_{r;X_{\pm}}^{(2)}(P) \approx \mp \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \frac{\mathbf{f}_{E;X_{\pm}}^{(2)}}{k g_1^{(2)} (a_{22})^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -kg_{X_{\pm}}^{(2)} \right] \quad (2.136)$$

avec

$$g_{X_{\pm}}^{(2)} = g(X_{\pm}, y_{Q\pm}^{(2)}) \quad (2.137)$$

$$g_1^{(2)} = \frac{\partial g}{\partial x_Q}(X_{\pm}, y_{Q\pm}^{(2)}) \quad (2.138)$$

$$\mathbf{f}_{E;X_{\pm}}^{(2)} = \mathbf{f}_E(X_{\pm}, y_{Q\pm}^{(2)}) \quad (2.139)$$



De la même façon, sur les côtés  $y_Q = Y_{\pm}$ , les points critiques du second ordre associés  $x_{\pm}^{(2)}$  sont :

$$x_{Q\pm}^{(2)} = \frac{b_1 - a_{12}(Y_{\pm} - y_{O'})}{a_{11}} - x_{O'} \quad (2.140)$$

d'où la contribution :

$$\mathbf{E}_{r;Y_{\pm}}^{(2)}(P) \approx \mp \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \frac{\mathbf{f}_{E;Y_{\pm}}^{(2)}}{k g_2^{(2)} (a_{11})^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -k g_{X;\pm}^{(2)} \right] \quad (2.141)$$

avec

$$g_{Y;\pm}^{(2)} = g(x_{Q\pm}^{(2)}, Y_{\pm}) \quad (2.142)$$

$$g_2^{(2)} = \frac{\partial g}{\partial y_Q}(x_{Q\pm}^{(2)}, Y_{\pm}) \quad (2.143)$$

$$\mathbf{f}_{E;Y_{\pm}}^{(2)} = \mathbf{f}_E(x_{Q\pm}^{(2)}, Y_{\pm}) \quad (2.144)$$

**Points critiques du troisième ordre** Aux 4 coins de la surface  $S$ , c'est-à-dire aux points  $(X_+, Y_+)$ ,  $(X_+, Y_-)$ ,  $(X_-, Y_-)$ ,  $(X_-, Y_+)$ , on a la contribution :

$$\mathbf{E}_{r;X_{\pm};Y_{\pm}}^{(3)} = \epsilon_{X_{\pm};Y_{\pm}} \frac{\mathbf{f}_E^{(3)}}{k^2 g_1^{(3)} g_2^{(3)}} e^{-k g^{(3)}} \quad (2.145)$$

avec

$$\mathbf{f}_E^{(3)} = \mathbf{f}_E(X_{\pm}, Y_{\pm}) \quad g^{(3)} = g(X_{\pm}, Y_{\pm}) \quad (2.146)$$

$$g_1^{(3)} = \frac{\partial g}{\partial x_Q}(X_{\pm}, Y_{\pm}) \quad g_2^{(3)} = \frac{\partial g}{\partial y_Q}(X_{\pm}, Y_{\pm}) \quad (2.147)$$

et

$$\epsilon_{X_{\pm};Y_{\pm}} = \begin{cases} -1 & \text{pour } (X_+, Y_+), (X_-, Y_-) \\ +1 & \text{pour } (X_-, Y_+), (X_+, Y_-) \end{cases} \quad (2.148)$$

## II.2.4 Validité de la solution non uniforme

### II.2.4.a Contributions des points critiques

Dans cette section nous appliquons les solutions développées précédemment. Notre méthode de référence sera l'évaluation numérique de l'intégrale (2.110). Afin de mettre en valeur le rôle de chacune des contributions (premier, second et troisième ordre), nous allons présenter un ensemble de cas de figure particuliers.

Le champ rayonné dans la direction spéculaire de réflexion est associé aux points critiques du premier ordre. Pour mettre en évidence la contribution de ces points (2.134), on éclaire une surface carrée de  $20\lambda$  de côté par un faisceau gaussien paraxial de demi-largeur  $kW_0 = 4\pi$  situé à une hauteur de  $10\lambda$  de la plaque (cf figure 2.28). Avec cette configuration, l'amplitude du champ éclairant les arêtes de la surface est faible devant l'amplitude incidente au centre de la surface, et ainsi, seule la contribution des points critiques du premier ordre sera mise en évidence.

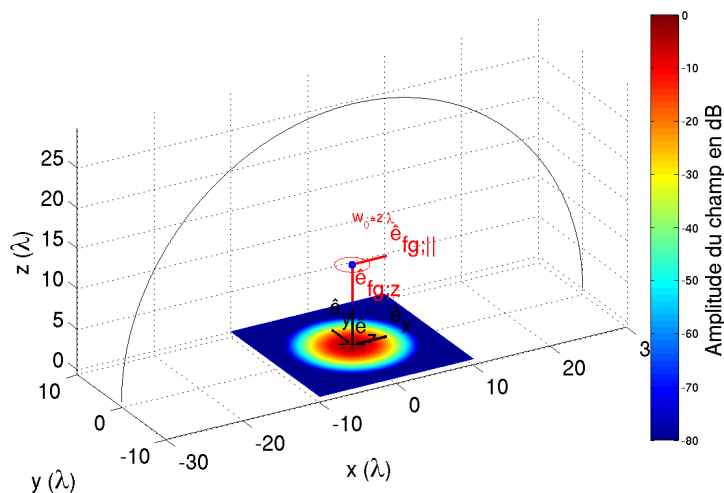


FIG. 2.28: Géométrie du calcul.

La polarisation principale du champ incident est dirigée selon la direction  $e_x$  du repère absolu. La visualisation des composantes  $E_\theta$  des champs rayonnés se fait à une distance  $r = 1000\lambda$  de l'origine (courbe en noir illustrée sur la géométrie). L'amplitude et la phase de l'évaluation numérique de l'intégrale (2.110) et la solution asymptotique sont représentées sur la figure (2.29). L'erreur représentée sur cette figure correspond à la valeur absolue de la différence des deux composantes, soit  $\Delta = |E_{\theta,num} - E_{\theta,asympt}|$ .

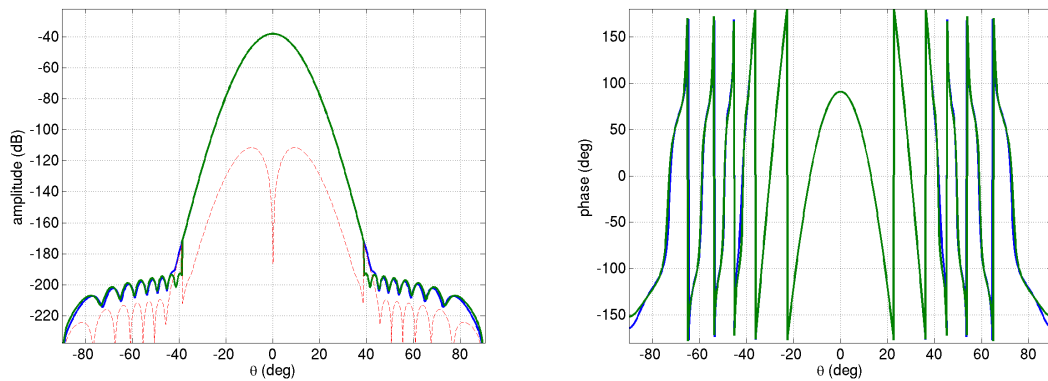


FIG. 2.29: Mise en évidence de la contribution du point critique du premier ordre. À gauche : amplitude en dB de la composante  $E_\theta$ . À droite : phase en degrés. En bleu : OP numérique ; en vert : OP analytique. En rouge : différence.

Comme on peut le constater sur la figure (2.29), le champ rayonné par l'expression analytique correspond bien avec l'évaluation numérique de l'intégrale de rayonnement dans l'hypothèse de l'optique physique. La contribution du point critique du premier ordre correspond principalement à la composante spéculaire du champ rayonné.

Afin de mettre en évidence la contribution des points critiques du second ordre (2.136-2.141), on éclaire la plaque avec un faisceau décalé, de sorte que la majorité du faisceau se propage en dehors de la plaque (cf figure (2.30)). Ainsi, la contribution spéculaire sera négligeable par rapport à la contribution des champs rayonnés par l'arête éclairée.

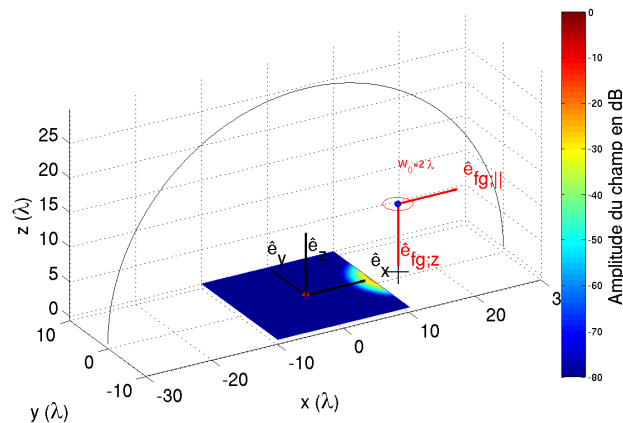


FIG. 2.30: Géométrie du calcul.

Le faisceau incident a les mêmes propriétés que précédemment, mais son origine est située cette fois au point  $O_{fg}(14\lambda, 0, 10\lambda)$ . L'amplitude et la phase des champs rayonnés sont représentées sur la figure (2.31).

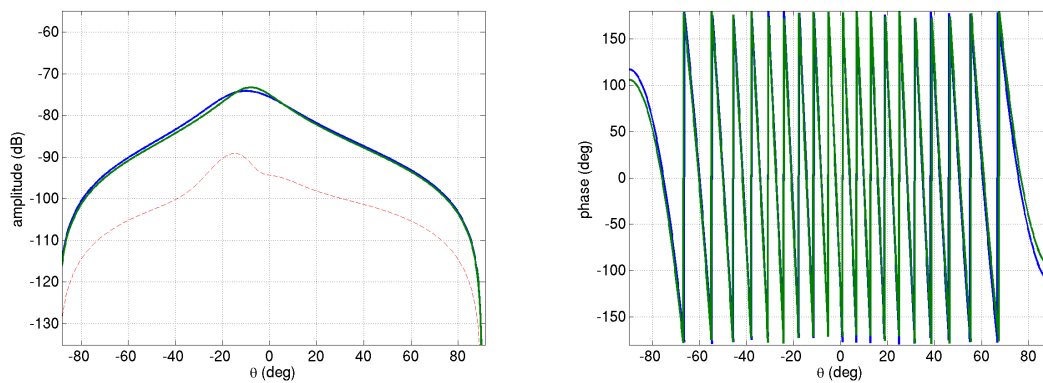


FIG. 2.31: Mise en évidence de la contribution des points critiques du second ordre. À gauche : amplitude en dB de la composante  $E_\theta$ . À droite : phase en degrés. En bleu : OP numérique ; en vert : OP analytique. En rouge : différence.

Comme on peut le constater sur la figure (2.31), le rayonnement de l'arête est modélisé de façon satisfaisante par la contribution des points critiques du second ordre. On note que l'amplitude globale du champ rayonné par l'arête est inférieure à l'amplitude de la composante spéculaire dans le cas précédent, c'est-à-dire de la contribution du point critique du premier ordre.

Afin de mettre en évidence la contribution des points critiques du troisième ordre (2.145), on place le faisceau de telle sorte qu'il n'éclaire principalement qu'un coin de la surface (cf. figure 2.32).

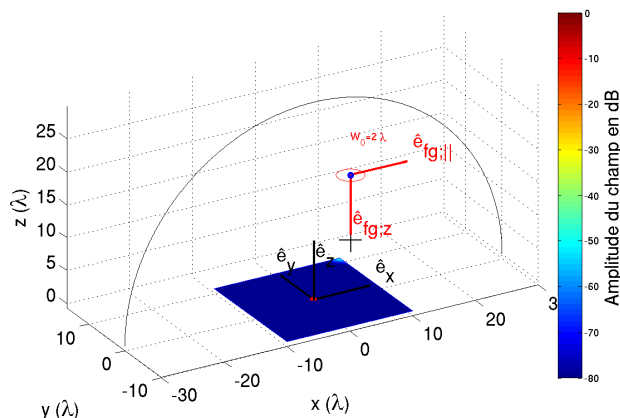


FIG. 2.32: Géométrie du calcul.

Le faisceau incident a les mêmes propriétés que précédemment, mais son origine est située cette fois au point  $O_{fg}(14\lambda, 14\lambda, 10\lambda)$ . L'amplitude et la phase des champs rayonnés sont représentées sur la figure (2.33).

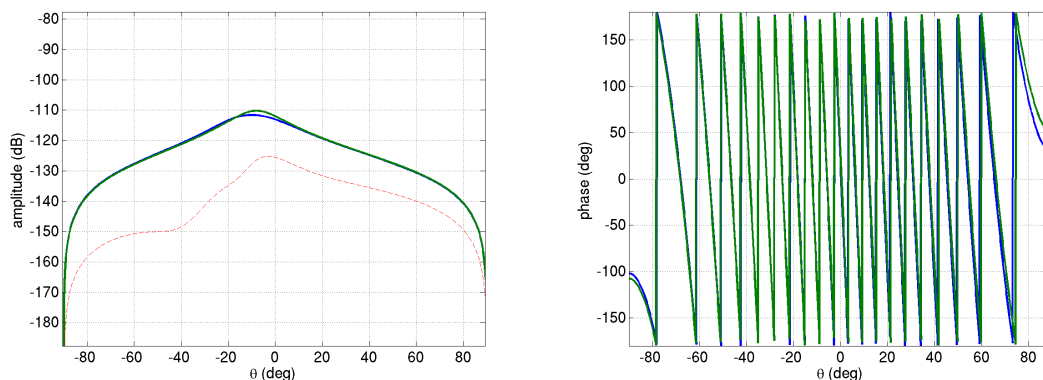


FIG. 2.33: Mise en évidence de la contribution des points critiques du troisième ordre. À gauche : amplitude en dB de la composante  $E_\theta$ . À droite : phase en degrés. En bleu : OP numérique ; en vert : OP analytique. En rouge : différence.

On constate sur la figure (2.33) que le rayonnement du coin de la plaque est correctement modélisé par la contribution des points critiques du troisième ordre. On remarque de plus que l'amplitude globale du champ rayonnée est inférieure à l'amplitude du champ rayonné par une arête, c'est-à-dire par la contribution des points critiques du second ordre.

### II.2.4.b Superposition des contributions des points critiques

Comme on peut le constater sur les figures précédentes, la contribution de chaque type de point critique est d'un ordre de grandeur différent. La contribution des points critiques du premier ordre (2.134) est un développement asymptotique d'ordre  $O(k^{-1})$ . Les contributions des points critiques du second ordre (2.136,2.141) sont d'ordre  $O(k^{-3/2})$  et enfin les contributions des points critiques du troisième ordre sont d'ordre  $O(k^{-2})$ . Afin de mettre en évidence l'intérêt de chacune des contributions dans un cas plus complexe, on éclaire la plaque par un faisceau situé en  $O_{fg}(-2\lambda;3\lambda;50\lambda)$  (cf. figure 2.34). De cette manière, les 4 arêtes et les 4 coins sont éclairés avec une amplitude non négligeable par rapport au reste de la surface.

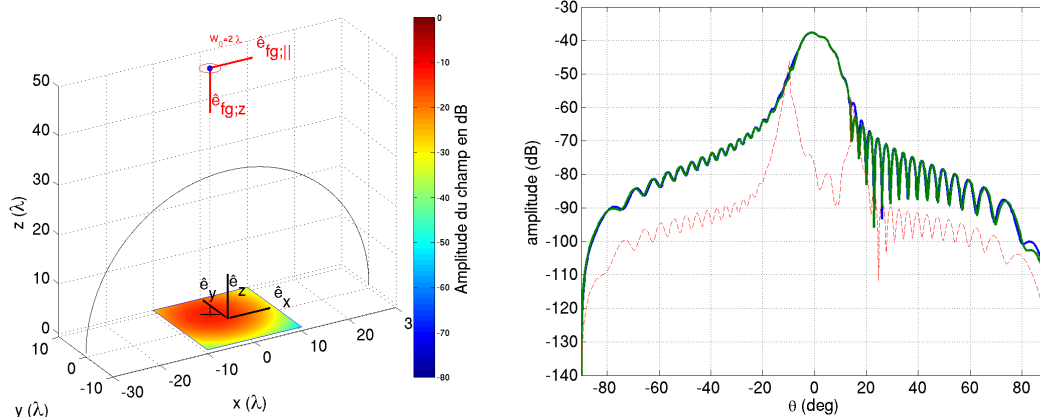


FIG. 2.34: Géométrie du calcul et amplitude des composantes  $E_\theta$  du champ lointain rayonné pour  $r = 1000\lambda$ . En bleu : OP numérique ; en vert : OP analytique. En rouge : différence.

Nous avons scindé le champ rayonné de la figure (2.34) sur la figure suivante (2.35) afin de pouvoir visualiser la contribution de chaque type de points critiques. Il est clair que la contribution principale, celle du spéculaire, provient des points critiques du premier ordre (en vert). Les lobes secondaires proviennent du rayonnement des arêtes, c'est-à-dire des contributions des points critiques du second ordre (en rouge). D'un niveau inférieur, la contribution des 4 points critiques du troisième ordre, correspondant au rayonnement des 4 coins de la surface, est négligeable dans le cas présent.

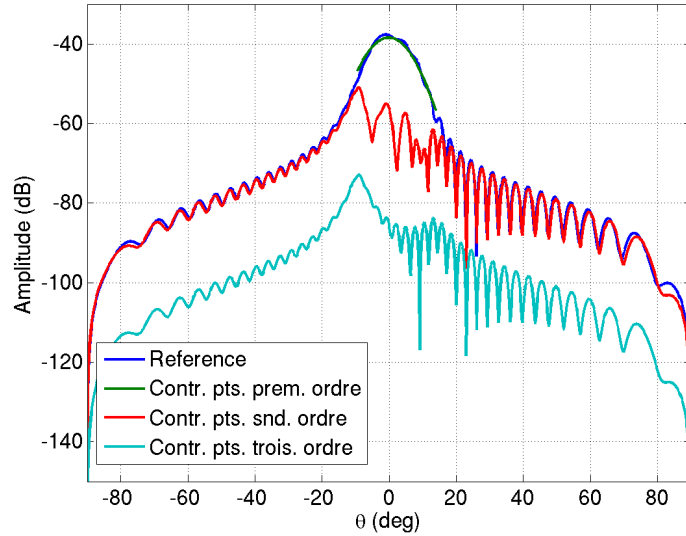


FIG. 2.35: Champ référence (en bleu) et contribution globale de chaque type de points critiques.

On remarquera de plus que la seule contribution du point critique de premier ordre ne donne pas exactement l'allure du lobe principal. C'est la somme des contributions du premier et du second ordre qui permet de décrire le champ rayonné, même pour le premier lobe. Aussi, il apparaît que la contribution des points critiques du second ordre est nécessaire à la description du champs rayonné, non seulement pour les lobes secondaires, mais également pour la direction principale.

Enfin, la contribution des coins peut généralement être négligée, tout du moins lorsque l'amplitude du champ incident sur la surface est non négligeable sur la surface (ou les arêtes). Lorsque un coin est la seule partie de la surface éclairée, la contribution du troisième ordre devient alors essentielle au calcul des champs rayonnés.

#### II.2.4.c Caractère non uniforme de la solution

**Discontinuités.** Les contributions des points critiques de premier et second ordre doivent être prises en compte seulement si ces points appartiennent au domaine d'intégration[116]. Or, lorsque le point d'observation  $P$  du champ rayonné varie, les points critiques varient également. On constate alors que le point critique du premier ordre "traverse" la surface  $S$ .

Pour la configuration précédente, le point critique du premier ordre évolue avec le point d'observation du champ. Pour des angles d'observation  $\theta < 9.6^\circ$  ou supérieur  $\theta >$

14.5°, le point critique du premier ordre n'appartient plus au domaine d'intégration  $S$ . Par conséquent, il convient alors ne pas prendre en compte la contribution (2.134) pour ces angles. Ce qui conduit à des discontinuités dans le calcul du champ rayonné, lorsque par exemple une contribution "disparaît". Ces discontinuités sont visibles sur la figure (2.34).

**Singularités.** On remarque que les expressions des contributions des points critiques du second et du troisième ordre (2.136-2.141), (2.145) peuvent être singulières lorsque :

$$g_{1,2}^{(2)} \rightarrow 0 \Rightarrow E_{r;X,Y}^{(2)} \rightarrow \infty \quad (2.149)$$

$$g_{1,2}^{(3)} \rightarrow 0 \Rightarrow E_r^{(3)} \rightarrow \infty \quad (2.150)$$

Si les dérivées premières de la fonction  $g$  sont nulles aux points critiques de second et troisième ordre, alors ces points sont également des points critiques du premier ordre. Aussi, on peut s'attendre à obtenir des champs singuliers lorsque le point critique du premier ordre sera proche des contours de la surface  $S$ , c'est-à-dire lorsque l'axe de propagation du faisceau incident coupera la surface  $S$  au voisinage des bords.

Pour illustrer cette configuration, nous éclairons la plaque carrée avec un faisceau dont l'origine est en  $O_{fg}(X_+, 0, 10\lambda)$ , c'est-à-dire juste au dessus de l'une des arêtes (cf. figure (2.36)).

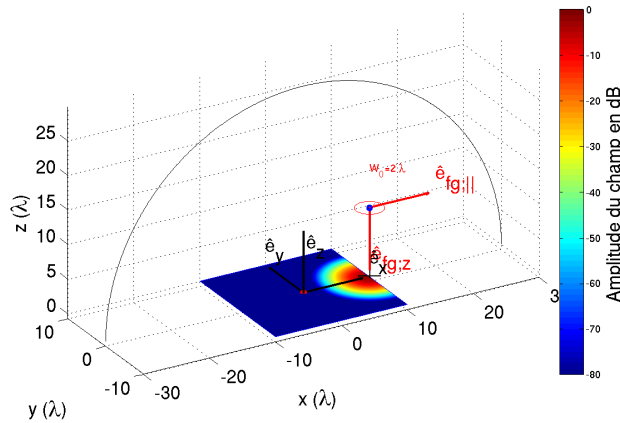


FIG. 2.36: Géométrie.

Le champ rayonné est représenté sur la figure (2.37). Comme on peut le constater



sur cette figure, au voisinage de l'angle  $\theta = 0^\circ$ , c'est-à-dire dans la direction spéculaire, la contribution du point critique du second ordre devient singulière. Ceci est dû au fait que le point critique du premier ordre est proche du point du second ordre. On parle alors de *coalescence* entre les points critiques de premier et de second ordre.

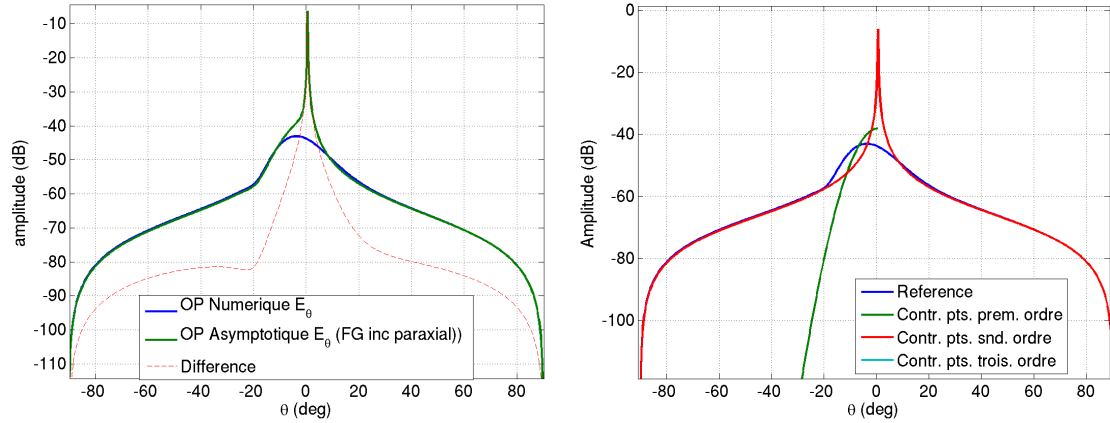


FIG. 2.37: À gauche : amplitude des champs rayonnés. À droite : contribution de chaque type de points critiques.

La solution asymptotique proposée n'est donc valide que lorsque le point spéculaire est éloigné des contours de la surface. Ce domaine de validité étant limité, notre objectif suivant est de formuler une expression uniforme, c'est-à-dire dépourvue de discontinuités et de singularités. C'est l'objet de la prochaine section.

### II.2.5 Expressions asymptotiques uniformes

L'objectif de cette section est de présenter une formulation asymptotique uniforme des champs rayonnés (2.110-2.111) et (2.118-2.119). Cette formulation doit être dépourvue de singularités ou de discontinuités.

Plusieurs approches permettent d'exprimer une intégrale double sur un domaine fermé comme la somme d'un terme avec une intégrale de contour à partir du théorème de STOKES pour des ondes planes[127, 128][1, p.452], pour des points sources ou des dipôles de HERTZ[129, 130] ou pour un point source complexe[51]. L'utilisation d'un champ incident quelconque est théoriquement possible lorsque l'observation n'est pas située dans le demi-espace contenant les sources[131, 132, 133], mais les calculs ne sont praticables que pour des ondes planes ou des points sources<sup>11</sup>. Enfin, bien que ces travaux

<sup>11</sup>Il s'agit alors de calculer l'expression analytique d'un vecteur  $\mathbf{W}$ , tel que  $\nabla \times \mathbf{W} = \mathbf{U}$  où  $\mathbf{U}$  représente

aient été étendus aux points sources complexes, permettant ainsi de décrire le champ rayonné dans l'hypothèse de l'optique physique par une surface éclairée par un faisceau gaussien circulaire[51], l'intégrale linéique résultante est évaluée numériquement.

Lorsque la symétrie du problème le permet, comme pour des disques ou des ellipses, un changement de variable d'intégration permet de réduire la double intégration à une seule dimension[56, 134]. Toutefois, cette technique n'est pas applicable à une surface rectangulaire ou un polygone.

Une formulation asymptotique générale est présentée dans l'annexe C-II.2.2, basée sur le développement asymptotique uniforme d'une intégrale[110, §9.6]. Toutefois, elle impose l'utilisation d'une nouvelle fonction spéciale, une généralisation de la fonction d'erreur complexe à deux dimensions, pour laquelle on ne dispose pas d'algorithme de calcul efficace.

La formulation présentée fait appel à un calcul "indirect" de l'intégrale double. Afin de pouvoir formuler un développement asymptotique uniforme de ces intégrales, on procède à un "découpage" de la surface rectangulaire  $S$  en sous-domaines. Cette technique permet de faire apparaître des intégrales que l'on peut évaluer de manière uniforme. Cette méthode, proposée par STAMNES[135] pour l'étude la diffraction par des ouvertures dont le contour est continu, est ici étendue à un domaine d'intégration dont le contour est discontinu (aux 4 coins).

### II.2.5.a Découpage du domaine en sous-domaine

On reprend ici l'expression canonique (2.130) utilisée précédemment :

$$\iint_S \varphi(x, y) e^{-k\psi(x, y)} dx dy \quad (2.151)$$

représentant les champs rayonnés (2.110-2.111) et (2.118-2.119). On rappelle que la fonction  $\varphi$  représente les fonctions  $\mathbf{f}_E, \mathbf{f}_H$  (2.112-2.113) ou  $\mathbf{F}_E, \mathbf{F}_H$  (2.120-2.121), tandis que la fonction  $\psi$  représente la fonction  $\mathbf{g}$  (2.114) ou  $G$  (2.122). Le domaine d'intégration peut être "découpé" en domaines complémentaires. Ce "découpage" est illustré sur les figures (2.38-2.39).

---

l'une des composantes de la dyade  $\overline{\overline{U}}$  dont l'expression dépend des dérivées du champ incident.

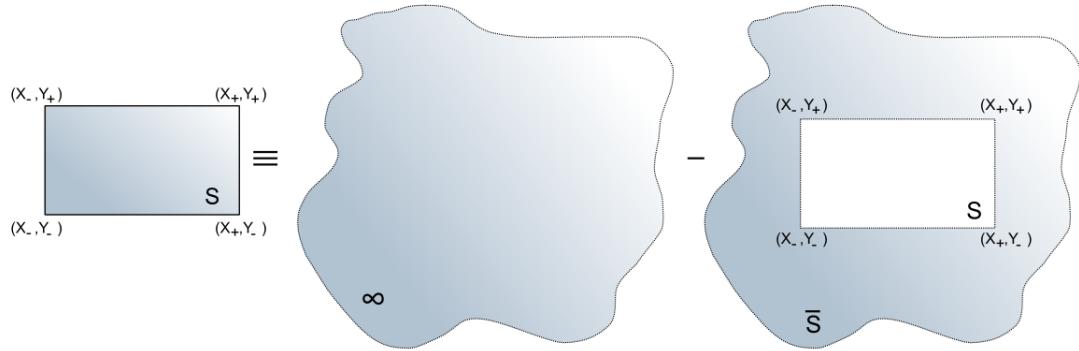


FIG. 2.38: Découpage du domaine d'intégration en domaines complémentaires (1).

Le domaine complémentaire  $\bar{S}$  de  $S$  peut également être dissocié en plusieurs sous-domaines :

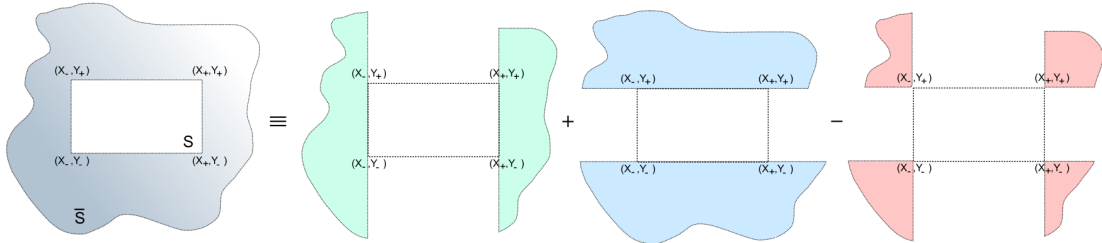


FIG. 2.39: Découpage du domaine d'intégration en domaines complémentaires (2).

Mathématiquement, le découpage s'écrit :

$$\iint_S \equiv \int_{Y_-}^{Y_+} \int_{X_-}^{X_+} \quad (2.152)$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{X_-} - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{X_+}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{Y_-} \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{Y_+}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \\ & + \int_{-\infty}^{Y_-} \int_{-\infty}^{X_-} + \int_{Y_+}^{+\infty} \int_{-\infty}^{X_-} + \int_{-\infty}^{Y_-} \int_{X_+}^{+\infty} + \int_{Y_+}^{+\infty} \int_{X_+}^{+\infty} \\ & \equiv I_0 \end{aligned} \quad (2.154)$$

$$-I_2(X_-) - I_1(X_+) - I_2(Y_-) - I_1(Y_+)$$

$$+ I_{22}(X_-, Y_-) + I_{21}(X_-, Y_+) + I_{12}(X_+, Y_-) + I_{11}(X_+, Y_+)$$

On remarque que l'on a alors 3 types d'intégrales, dont le domaine d'intégration est caractérisé par :

- aucune borne finie : intégrale  $I_0$  ;
- une seule borne finie : intégrales  $I_1(X_+)$ ,  $I_2(X_-)$  et  $I_1(Y_+)$ ,  $I_2(Y_-)$  ;
- deux bornes finies : intégrales  $I_{11}$ ,  $I_{12}$ ,  $I_{21}$  et  $I_{22}$ .

La solution totale consiste à sommer les 9 contributions, quelle que soit la position des points critiques :

$$\mathbf{E}_r(P) = I_0 - \sum_{m=\{1,2\}}^4 I_m + \sum_{m,n=\{1,2\}}^4 I_{mn} \quad (2.155)$$

Contrairement à la solution proposée précédemment, il est inutile ici de procéder à un test sur la position des points critiques par rapport à la géométrie de la surface. En effet, quelle que soit la position des points critiques, le champ rayonné demeure la somme de toutes les intégrales. Dans la mesure où cette formulation ne fait pas intervenir de fonction échelon, elle est dépourvue de discontinuités. Enfin, la divergence éventuelle de certains termes pour des points particuliers est compensée par les fonctions d'erreur, qui assurent la continuité des champs aux voisinages de ces singularités.

**Contribution de l'intégrale  $I_0$ .** L'évaluation asymptotique de l'intégrale  $I_0$  est bien connue et ne pose pas de difficulté. En utilisant le résultat de l'annexe C-II.1, on obtient :

$$I_0 \approx \frac{2\pi}{k} \left( \det \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} \right] \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi_s e^{-k\psi_0} \quad (2.156)$$

où  $\psi_s = \psi(x_s, y_s)$  et  $\varphi_s = \varphi(x_s, y_s)$ .  $(x_s, y_s)$  correspond au point col (ou point stationnaire), c'est-à-dire le point pour lequel le gradient de la fonction  $\psi$  est nul :  $\nabla \psi(x_s, y_s) = \mathbf{0}$ .

**Contribution des intégrales  $I_{1,2}$ .** Les intégrales  $I_{1,2}$  peuvent s'évaluer asymptotiquement en procédant à deux développements asymptotiques successifs, sur un domaine non borné puis sur un domaine borné. Les calculs sont présentés dans l'annexe (C-II.2.2.a). On obtient :

$$I_1(X) \approx e^{-k\Psi(x_s)} \left[ \frac{F_X(0)}{\sqrt{k}} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_X) + \frac{1}{2k} \frac{F_X(s_X) - F_X(0)}{s_X} e^{-ks_X^2} \right] \quad (2.157)$$

avec

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, y_s) \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x, y_s) \quad (2.158)$$

$$\Psi(x) = \phi(x, y_s) \quad (2.159)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y_s) = 0 \quad \forall x \in [X, +\infty[ \quad (2.160)$$

$$s_X = \sqrt{\Psi(X) - \Psi(x_s)} \quad (2.161)$$

$$x_s \quad \text{tq} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x_s) = 0 \quad (2.162)$$

$$F_X(s_X) = \Phi(X) \frac{s_X}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}(X)} \quad (2.163)$$

$$F_X(0) = \Phi(x_s) \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x_s)}} \quad (2.164)$$

$$\mathcal{Q}(t) = \int_t^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(t) \quad (2.165)$$

De la même façon pour  $I_2(X)$  on obtient :

$$I_2(X) \approx e^{-k\Psi(x_s)} \left[ \frac{F_X(0)}{\sqrt{k}} \left( \sqrt{\pi} - \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_X) \right) - \frac{1}{2k} \frac{F_X(s_X) - F_X(0)}{s_X} e^{-ks_X^2} \right] \quad (2.166)$$

Pour  $I_{1,2}(Y)$ , on obtient :

$$I_1(Y) \approx e^{-k\Psi(y_s)} \left[ \frac{F_Y(0)}{\sqrt{k}} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_Y) + \frac{1}{2k} \frac{F_Y(s_Y) - F_Y(0)}{s_Y} e^{-ks_Y^2} \right] \quad (2.167)$$

$$I_2(Y) \approx e^{-k\Psi(y_s)} \left[ \frac{F_Y(0)}{\sqrt{k}} \left( \sqrt{\pi} - \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_Y) \right) - \frac{1}{2k} \frac{F_Y(s_Y) - F_Y(0)}{s_Y} e^{-ks_Y^2} \right] \quad (2.168)$$

avec cette fois  $\Phi(y) = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_s, y) \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x_s, y)$  et  $\Psi(y) = \phi(x_s, y)$  et

$$\Phi(y) = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x_s, y) \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x_s, y) \quad (2.169)$$

$$\Psi(y) = \phi(x_s, y) \quad (2.170)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x_s) = 0 \quad \forall y \quad (2.171)$$

$$s_Y = \sqrt{\Psi(Y) - \Psi(y_s)} \quad (2.172)$$

$$y_s \quad \text{tq} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(y_s) = 0 \quad (2.173)$$

$$F_Y(s_Y) = \Phi(Y) \frac{s_Y}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}(Y)} \quad (2.174)$$

$$F_Y(0) = \Phi(y_s) \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y}(y_s)}} \quad (2.175)$$

$$\mathcal{Q}(t) = \int_t^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(t) \quad (2.176)$$

**Contribution des intégrales  $I_{ij}$ .** On s'intéresse à l'intégrale du type :

$$I_{11} = \int_X^\infty \int_Y^\infty \varphi(x, y) e^{-k\psi(x, y)} dx dy \quad (2.177)$$

À notre connaissance, il n'existe pas de formulation analytique uniforme pour ce type d'intégrale complexe. Dans le cadre de la méthode de la phase stationnaire, STAMNES [136] propose une méthode hybride, numérique et asymptotique, isolant les points critiques pour lesquels le point stationnaire approche le contour du domaine d'intégration. CONDE et ses co-auteurs [124] donnent une expression asymptotique uniforme de ce type d'intégrale pour la méthode de la phase stationnaire, sans toutefois la démontrer. Cette expression est démontrée dans l'annexe C-II.2.2.a et étendue heuristiquement aux fonctions à valeurs complexes. On montre également que cette expression n'est valide que lorsque le terme croisé de la matrice Hessienne est nul, c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.178)$$

Dans ce cas, on peut découpler les deux intégrales et on obtient avec deux développements asymptotiques séparés :

$$I_{11} \approx \frac{\varphi(X_+, Y_+)}{\pi} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(X_+, Y_+) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(X_+, Y_+) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-k\psi(X_+, Y_+)} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_x) e^{ks_x^2} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_y) e^{ks_y^2} \quad (2.179)$$

avec

$$s_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}(X_+, Y_+) \left( \frac{1}{2\psi_{xx}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.180)$$

$$s_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}(X_+, Y_+) \left( \frac{1}{2\psi_{yy}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.181)$$

De la même façon :

$$I_{12} \approx \frac{\varphi(X_+, Y_-)}{\pi} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(X_+, Y_-) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(X_+, Y_-) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-k\psi(X_+, Y_-)} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_x) e^{ks_x^2} \left( \sqrt{\pi} - \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_y) \right) e^{ks_y^2} \quad (2.182)$$

$$I_{21} \approx \frac{\varphi(X_-, Y_+)}{\pi} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(X_-, Y_+) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(X_-, Y_+) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-k\psi(X_-, Y_+)} \left( \sqrt{\pi} - \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_x) \right) e^{ks_x^2} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_y) e^{ks_y^2} \quad (2.183)$$

$$I_{22} \approx \frac{\varphi(X_-, Y_-)}{\pi} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(X_-, Y_-) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(X_-, Y_-) \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-k\psi(X_-, Y_-)} \left( \sqrt{\pi} - \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_x) \right) e^{ks_x^2} \left( \sqrt{\pi} - \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_y) \right) e^{ks_y^2} \quad (2.184)$$

**Validité de l'approximation.** D'après les expressions développées dans la section II.2.2, l'hypothèse (2.178) correspond, pour un faisceau gaussien paraxial (expression (2.115)), aux égalités :

$$\begin{cases} -\frac{x'y'}{(r')^3} + m_{11} [m_{12} q_{11}(O') + m_{22} q_{12}(O')] + m_{21} [m_{12} q_{12}(O') + m_{22} q_{22}(O')] = 0 \\ -\frac{x'y'}{(r')^3} + m_{12} [m_{11} q_{11}(O') + m_{21} q_{12}(O')] + m_{22} [m_{11} q_{12}(O') + m_{21} q_{22}(O')] = 0 \end{cases} \quad (2.185)$$

À grande distance, la contribution du premier terme  $\frac{x'y'}{(r')^3}$  devient négligeable<sup>12</sup>. La seconde partie des égalités n'est quant à elle, vérifiée que lorsque  $(\hat{\mathbf{e}}_{\text{fg},\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg},\perp}) \perp \hat{\mathbf{e}}_x$  ou  $(\hat{\mathbf{e}}_{\text{fg},\parallel}, \hat{\mathbf{e}}_{\text{fg},\perp}) \perp \hat{\mathbf{e}}_y$ , c'est-à-dire lorsque le faisceau éclaire la plaque sous incidence rasante. Cette hypothèse consiste donc à négliger la plupart du temps ces termes bien qu'ils soient non nuls. Nous étudions plus en détail l'erreur engendrée par cette approximation dans les sections suivantes, en particulier dans la section II.3.4.a.

Bien que cette hypothèse soit rarement vérifiée, son influence sur le résultat final est faible, comme nous le verrons dans les exemples qui suivent.

## II.2.6 Comparaison avec la solution non uniforme

Avant d'étudier le domaine de validité de la solution proposée (2.155), nous reprenons le cas de figure pour lequel la solution non uniforme donne un résultat singulier (cf

<sup>12</sup>Également lorsque le point d'observation appartient au plan  $x' = 0$  ou  $y' = 0$ .

II.2.4.c, fig. 2.36). Le centre d'un faisceau gaussien paraxial est positionné au point  $O_{fg}(10\lambda, 0, 10\lambda)$ , soit juste au dessus d'une arête d'une surface carrée de côté  $20\lambda$  (cf. figure (2.40)). On représente en bleu sur cette figure l'amplitude du champ calculé par l'intégration numérique des intégrales de rayonnement dans l'hypothèse de l'optique physique et en vert le champ calculé analytiquement avec l'expression uniforme (2.155).

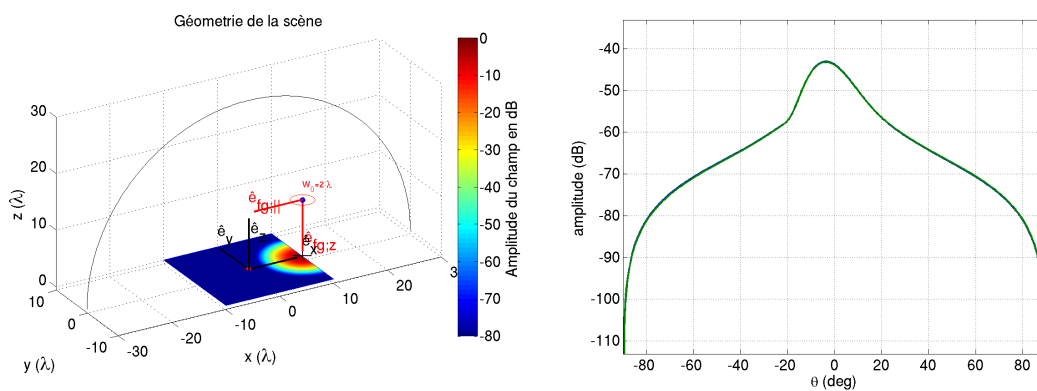


FIG. 2.40: Géométrie et amplitudes des champs  $E_\theta$  rayonnés (en dB). Carré de côté  $20\lambda, \phi = 0^\circ$ . En bleu : OP numérique. En vert : OP asymptotique uniforme.

On constate que la solution proposée est cette fois parfaitement uniforme et ne souffre d'aucune discontinuité. La formulation asymptotique correspond à l'évaluation numérique.

Un autre cas de figure, impossible à traiter correctement avec une solution non uniforme, consiste à placer le faisceau juste au dessus d'un coin, soit en  $O_{fg}(10, 10, 10)\lambda$  (cf. fig. 2.41).



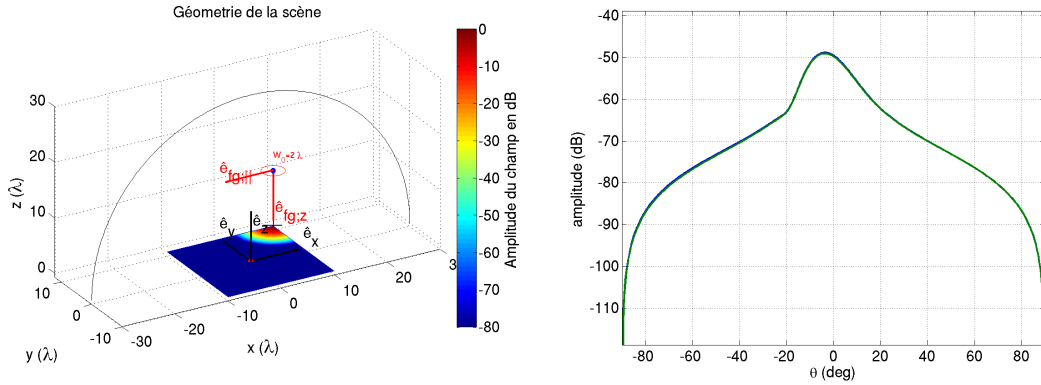


FIG. 2.41: Géométrie et amplitudes des champs  $E_\theta$  rayonnés (en dB). Carré de côté  $20\lambda$ ,  $\phi = 0^\circ$ . En bleu : OP numérique. En vert : OP asymptotique uniforme.

Comme dans le cas précédent, la solution uniforme est parfaitement continue quel que soit l'angle d'observation.

### II.3 Domaine de validité de la solution uniforme

Dans cette partie, nous étudions le domaine de validité de la solution asymptotique uniforme (2.155). Les champs calculés à partir de cette formulation analytique sont comparés à deux autres méthodes :

- L'intégration numérique des intégrales de rayonnement des courants dans l'hypothèse de l'optique physique ;
- Le calcul numérique par la Méthode des Moments (MoM-FMM), avec le code ELSEM3D de l'ONERA-DEMR.

La comparaison avec le calcul numérique des intégrales de rayonnement nous permet d'évaluer la pertinence du développement asymptotique, tandis que l'utilisation de la méthode des moments met en évidence les limites de l'hypothèse de l'optique physique. Nous représenterons également sur les figures qui suivent, l'erreur  $|E_{\text{ELSEM3D}} - E_{\text{asymptotique}}|$  entre la solution numérique exacte et la solution analytique. Les calculs présentés sont réalisés avec la formulation paraxiale du faisceau incident. Des comparaisons seront également effectuées avec la formulation champ lointain du champ incident.

La géométrie générale des exemples présentés est illustrée sur la figure 2.42). Un faisceau gaussien dont le centre du repère propre est situé en  $O_{fg}$  éclaire une surface rectangulaire située en  $z = 0$ . Sauf indication contraire, les composantes sphériques  $E_\theta, E_\phi$  des champs rayonnés sont calculés à une distance  $r = 1000\lambda$  de la surface.

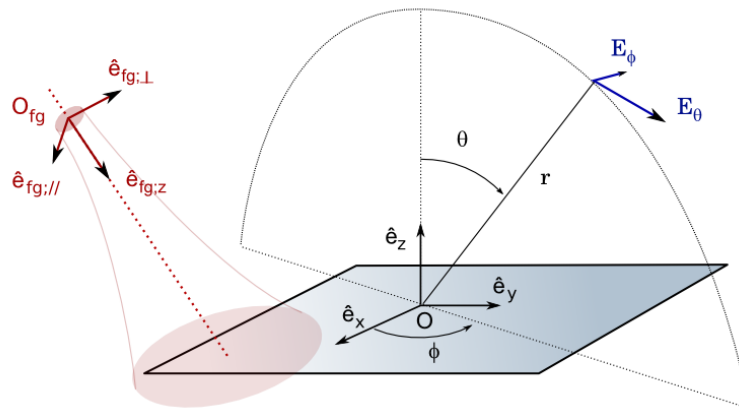
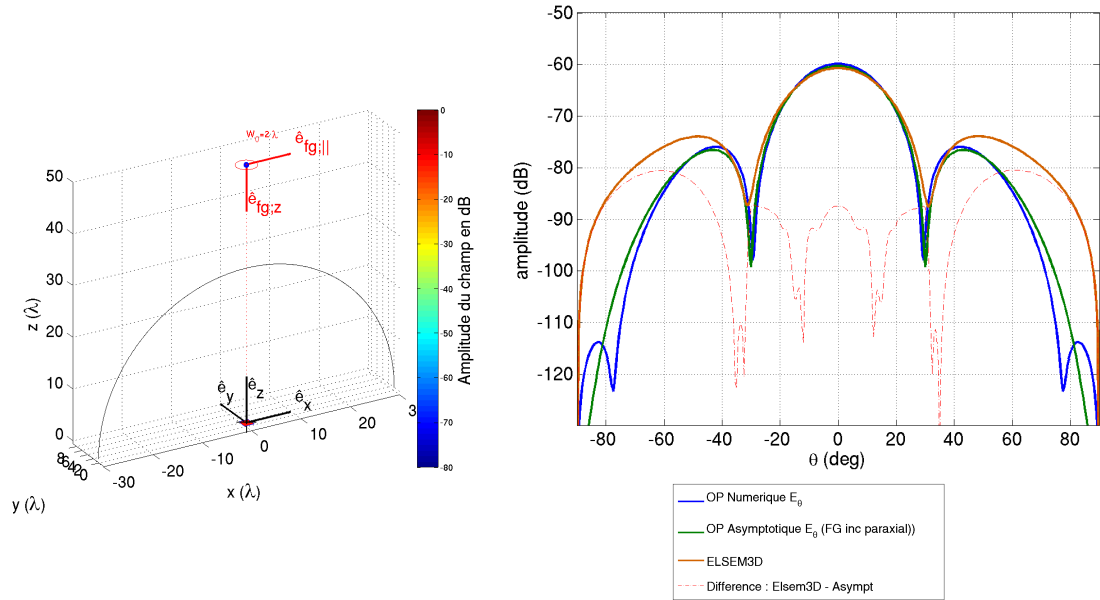
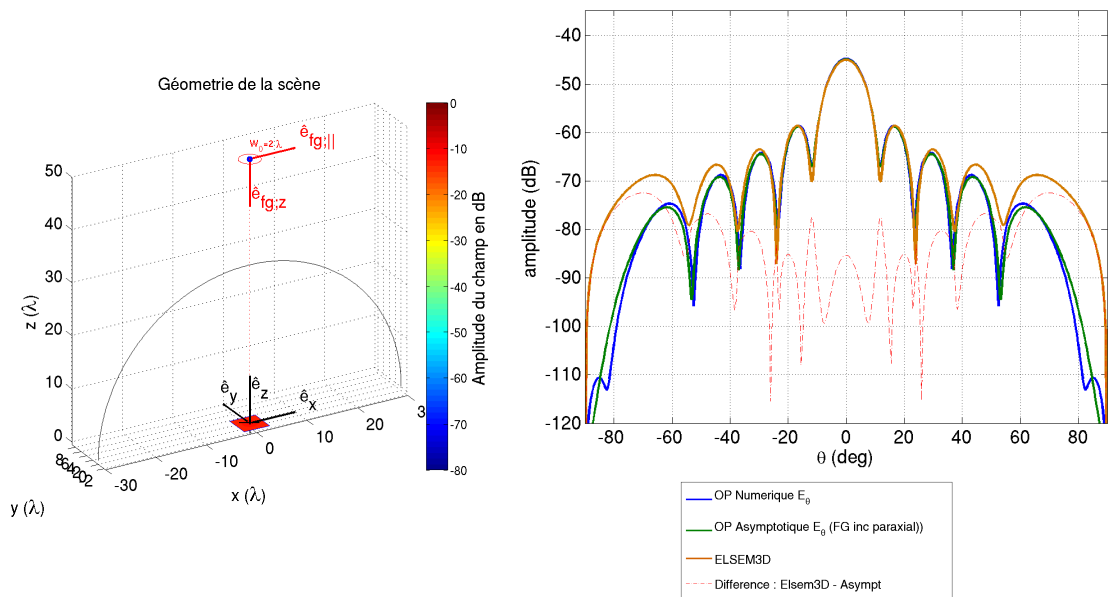


FIG. 2.42: Géométrie générale des exemples présentés.

### II.3.1 Taille de la plaque

Pour déterminer le domaine de validité de la solution uniforme en fonction de la taille de la surface éclairée, on calcule les champs rayonnés par une surface carrée de côté  $2,5,10$  et  $20\lambda$ . Le faisceau incident est placé en  $O_{fg}(0,0,50\lambda)$  et sa largeur est de  $kW_0 = 4\pi$ . La direction principale de polarisation du faisceau est dirigée selon l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_x$  ( $\phi = 0$ ). On représente sur les figures suivantes la composante  $E_\theta$  des champs rayonnés dans le plan  $\phi = 0^\circ$ , ainsi que la composante  $E_\phi$  dans le plan  $\phi = 90^\circ$ .

II.3.1.a  $E_\theta, \phi = 0^\circ$ FIG. 2.43: Géométrie et champs  $E_\theta$  rayonnés. Carré de côté  $2\lambda$ ,  $\phi = 0^\circ$ .FIG. 2.44: Géométrie et champs  $E_\theta$  rayonnés. Carré de côté  $5\lambda$ ,  $\phi = 0^\circ$ .

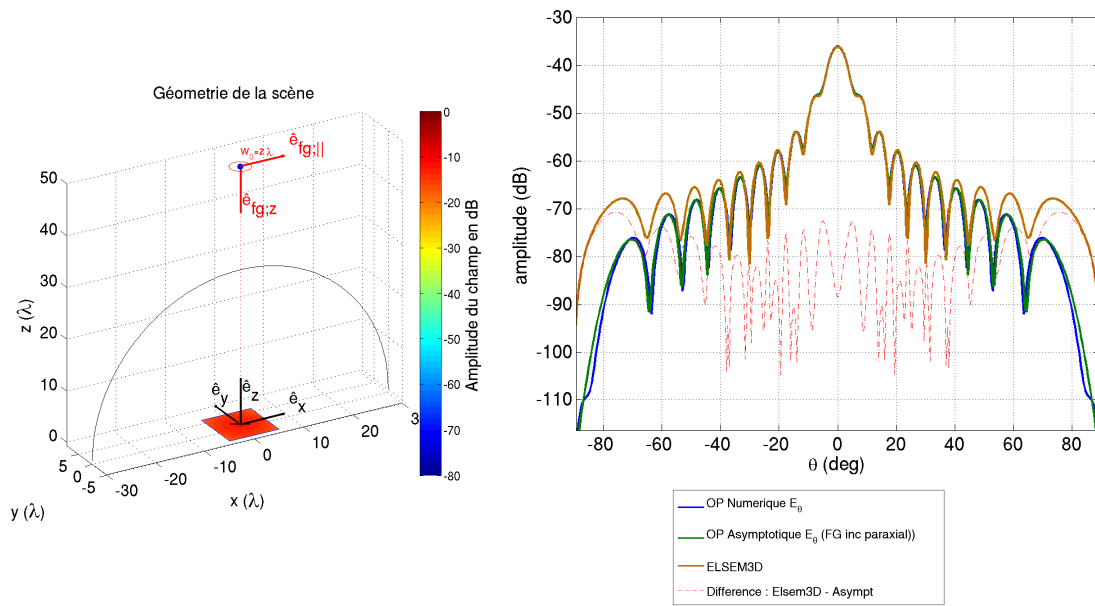


FIG. 2.45: Géométrie et champs  $E_\theta$  rayonnés. Carré de côté  $10\lambda, \phi = 0^\circ$ .

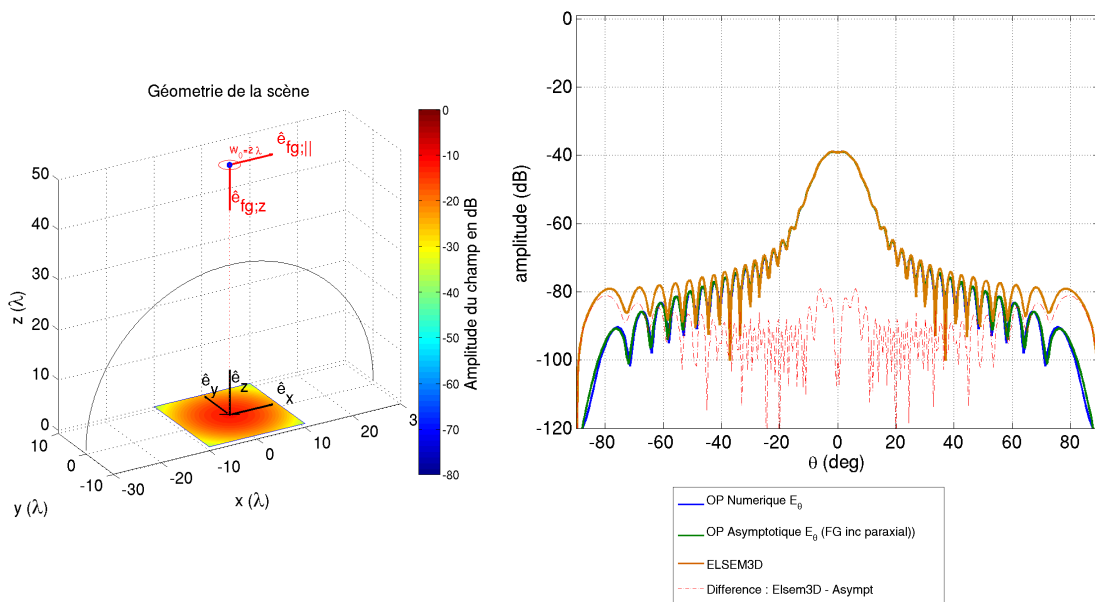
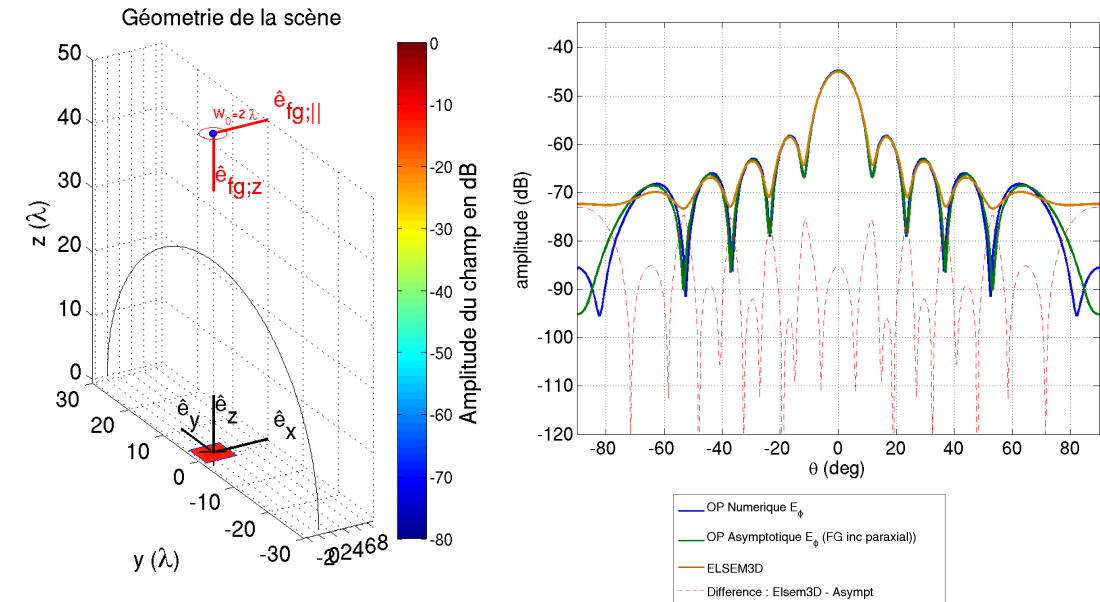
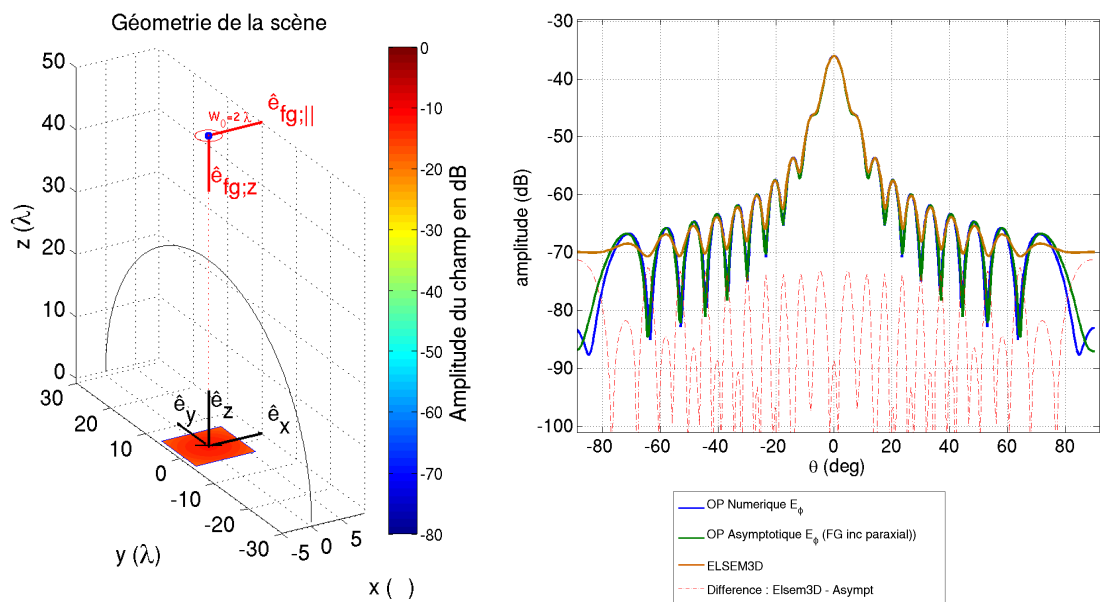


FIG. 2.46: Géométrie et champs  $E_\theta$  rayonnés. Carré de côté  $20\lambda, \phi = 0^\circ$ .

II.3.1.b  $E_\phi$ ,  $\phi = 90^\circ$ FIG. 2.47: Géométrie et champs  $E_\phi$  rayonnés. Carré de côté  $5\lambda$ ,  $\phi = 90^\circ$ .FIG. 2.48: Géométrie et champs  $E_\phi$  rayonnés. Carré de côté  $10\lambda$ ,  $\phi = 90^\circ$ .

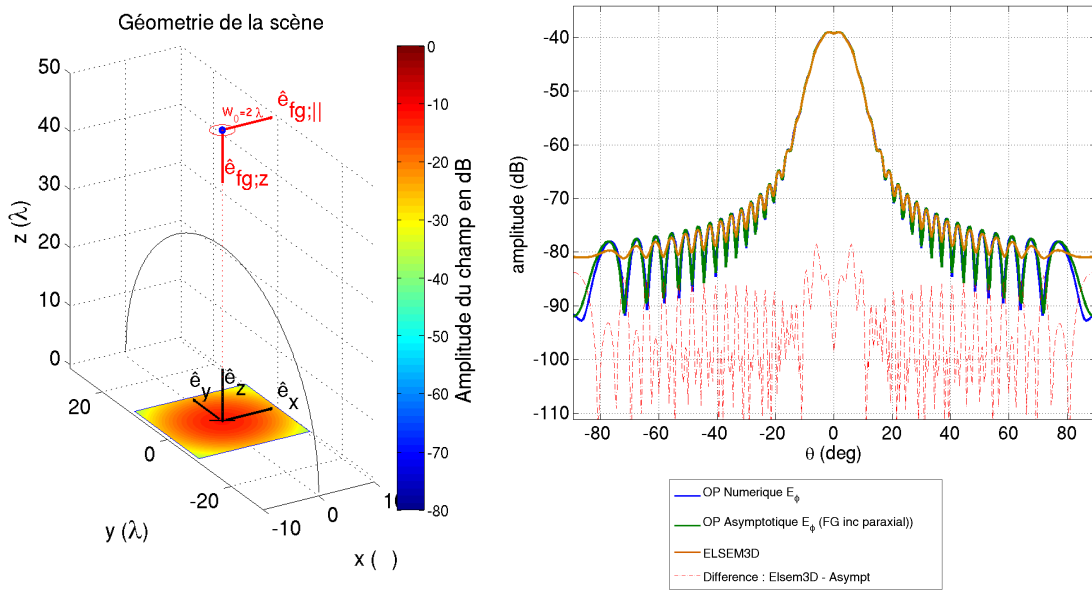


FIG. 2.49: Géométrie et champs  $E_{\phi}$  rayonnés. Carré de côté  $20\lambda$ ,  $\phi = 90^{\circ}$ .

L'hypothèse de l'optique physique est en particulier valide lorsque la taille de la surface est de l'ordre de  $4\lambda$ [18]. Toutefois, même si les résultats se dégradent dans les lobes secondaires pour une plaque de côté  $2\lambda$ , le champ dans la direction principale de rayonnement est correctement évalué.

Enfin, il n'y a pas de limite supérieure à la taille de surface  $S$ . La solution proposée étant analytique, le temps de calcul est identique quelle que soit la taille de la surface  $S$ , contrairement aux méthodes numériques. Les temps de calculs correspondant aux simulations présentées sont pour une plaque de côté de  $20\lambda$  à 10 GHz<sup>13</sup> :

Méthode utilisée	Temps de calcul
OP Analytique (uniforme)	0.25 s
OP numérique	30 s
MoM (ELSEM3D)	30 min

### II.3.2 Largeur du faisceau

On place un faisceau gaussien en  $O_{fg}(0,0,30\lambda)$  et on fait varier sa largeur de  $kW_0 = \pi$  (très divergent) à  $kW_0 = 4\pi$  (peu divergent). Le faisceau éclaire une plaque carrée de côté  $10\lambda$ .

Afin de visualiser plus clairement la divergence des faisceaux, nous avons représenté le cône de paraxialité des faisceaux sur les figures illustrant les géométries des configurations. Les couleurs utilisées sur les plaques correspondent à l'amplitude du champ incident sur la surface. Lorsque le faisceau est divergent, la puissance incidente sur la plaque est plus faible (couleur jaune) que lorsque le faisceau est peu divergent (couleur rouge).

<sup>13</sup>Calculs OP effectués avec le logiciel MATLAB sur un PC de bureau équipé d'un processeur Intel Pentium D (dual core 64bits) cadencé à 3.4GHz. Les calculs ELSEM3D (en fortran/C) ont été effectués sur un PC équipé d'un processeur Intel Pentium IV cadencé à 3GHz.

II.3.2.a  $E_\theta, \phi = 0^\circ$

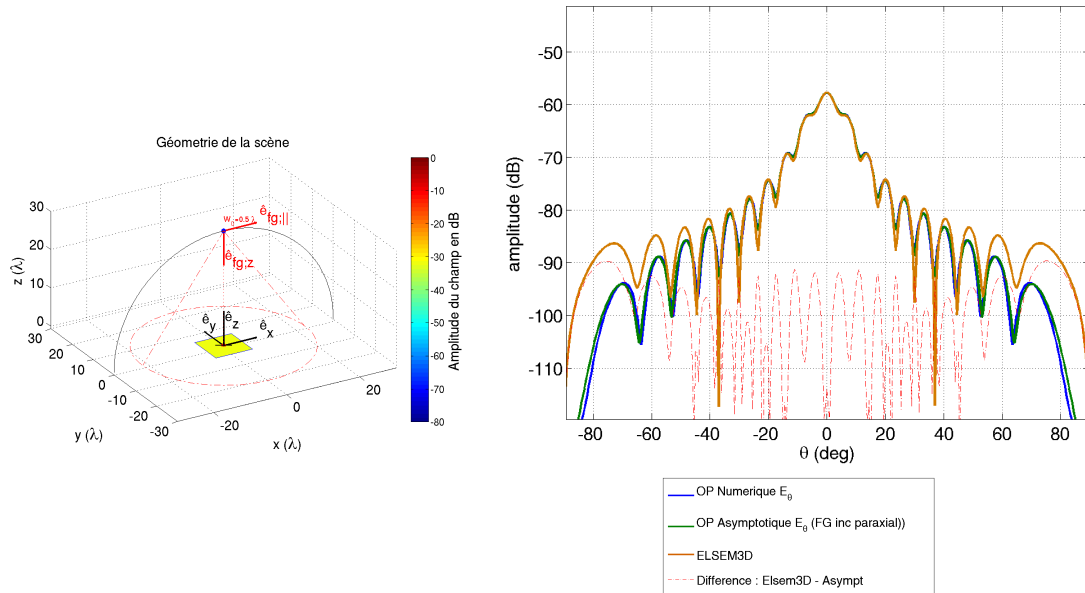


FIG. 2.50: Géométrie et champs  $E_\theta$  rayonnés.  $kW_0 = \pi$ ,  $\phi = 0^\circ$ .

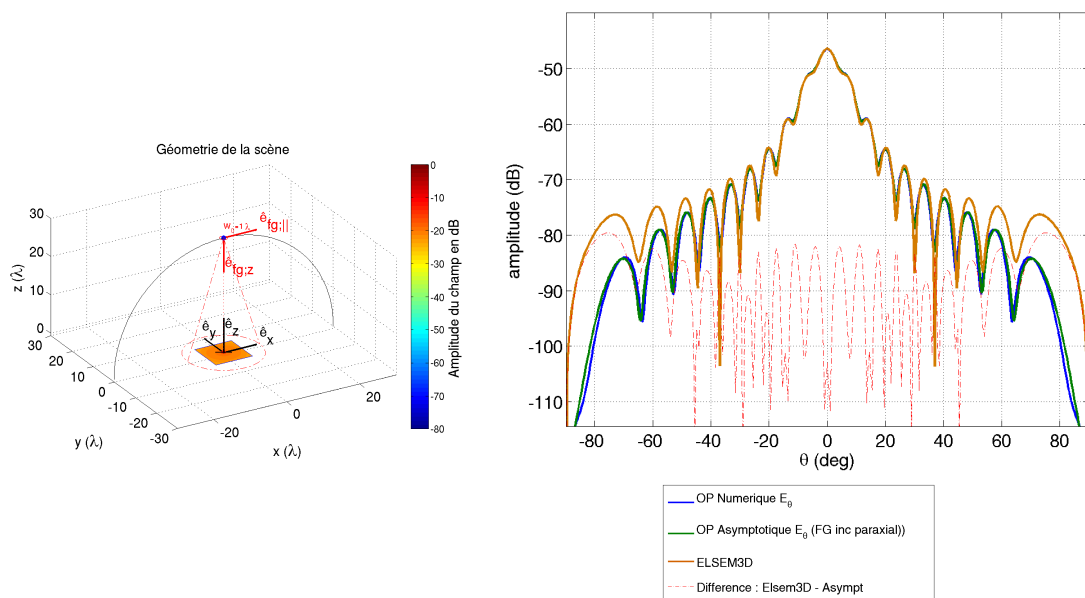


FIG. 2.51: Géométrie et champs  $E_\theta$  rayonnés.  $kW_0 = 2\pi$ ,  $\phi = 0^\circ$ .



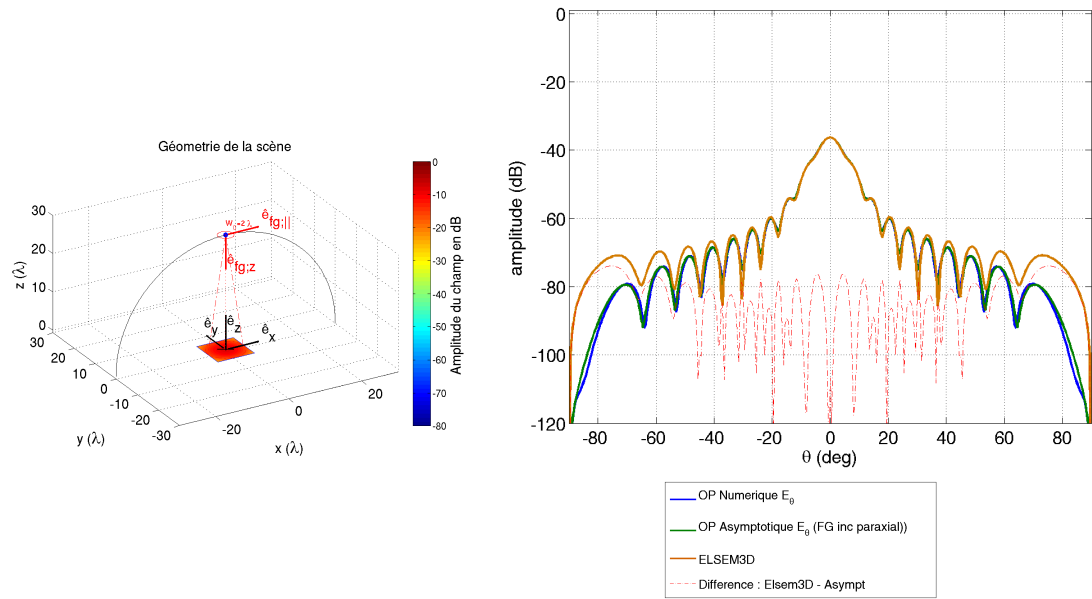


FIG. 2.52: Géométrie et champs  $E_\theta$  rayonnés.  $kW_0 = 4\pi$ ,  $\phi = 0^\circ$ .

### II.3.2.b $E_\phi$ , $\phi = 90^\circ$

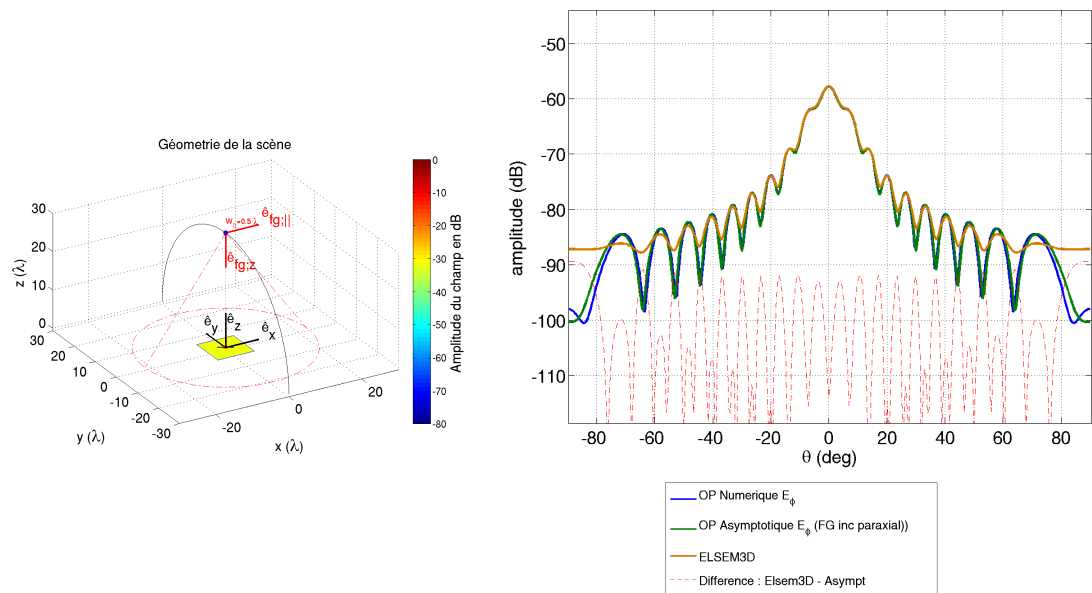


FIG. 2.53: Géométrie et champs  $E_\phi$  rayonnés.  $kW_0 = \pi$ ,  $\phi = 90^\circ$ .

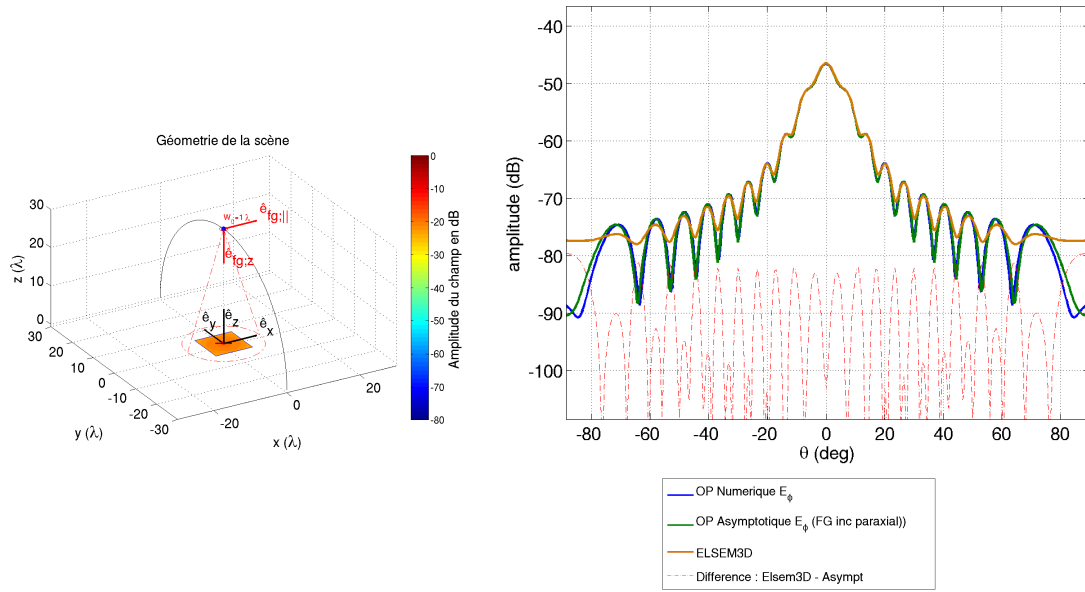


FIG. 2.54: Géométrie et champs  $E_\phi$  rayonnés.  $kW_0 = 2\pi$ ,  $\phi = 90^\circ$ .

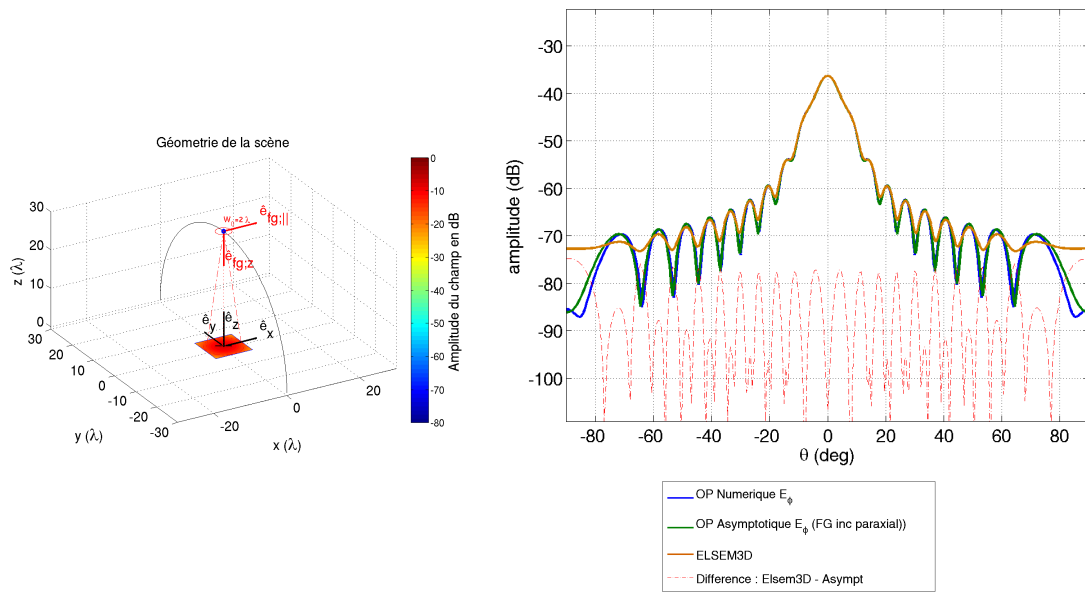


FIG. 2.55: Géométrie et champs  $E_\phi$  rayonnés.  $kW_0 = 4\pi$ ,  $\phi = 90^\circ$ .

Comme on peut le constater sur les figures précédentes, sous incidence normale, la divergence du faisceau influe peu sur le diagramme de rayonnement des champs. Seule l'amplitude des champs rayonnés diffère, en relation avec l'amplitude du champ incident sur la surface.

### II.3.3 Angle d'incidence

On place un faisceau incident de telle sorte que l'intersection avec la plaque soit centrée en  $O(0,0,0)$ . On fait varier l'angle d'incidence  $\theta_i$  du faisceau, c'est-à-dire l'angle entre l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z$  et la direction de propagation  $\hat{\mathbf{e}}_{fg,z}$  du faisceau. La largeur du faisceau est  $kW_0 = 2\pi$  (assez divergent) et son origine est située à une distance de  $30\lambda$  du centre de la plaque.

Le cas  $\theta_i = 0^\circ$  a été traité dans des conditions similaires sur la figure (2.51). Les figures suivantes représentent les cas  $\theta_i = 20^\circ, 45^\circ, 70^\circ$  et  $85^\circ$ . On visualise la composante principale du champ dans le plan d'incidence et dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence<sup>14</sup>.

#### II.3.3.a Plan d'incidence ( $E_\theta$ )

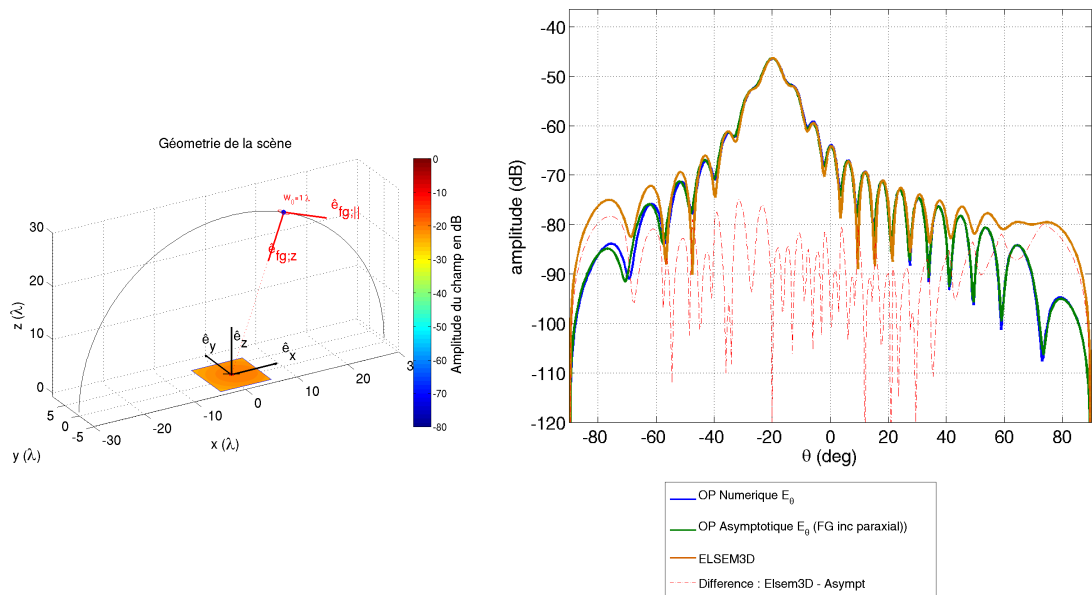


FIG. 2.56: Géométrie et amplitude  $E_\theta$  des champs rayonnés. Faisceau de largeur  $kW_0 = 2\pi$  et d'angle d'incidence  $\theta_i = 20^\circ$ .  $\phi = 0^\circ$ .

<sup>14</sup>c'est-à-dire sur un demi *grand-cercle* centré en  $O$ .

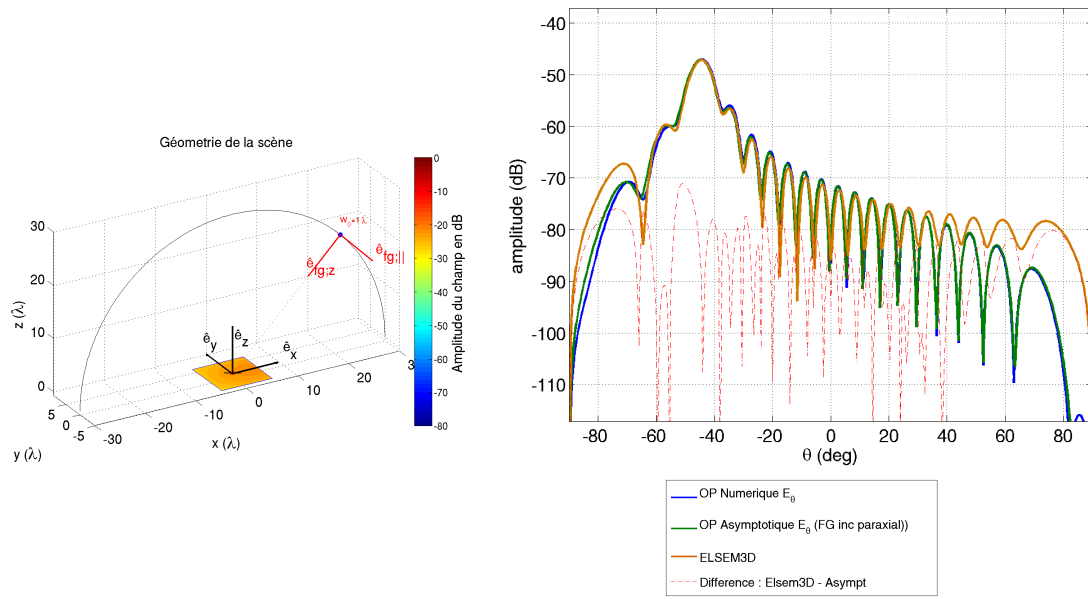


FIG. 2.57: Géométrie et amplitude  $E_\theta$  des champs rayonnés. Faisceau de largeur  $kW_0 = 2\pi$  et d'angle d'incidence  $\theta_i = 45^\circ$ .  $\phi = 0^\circ$ .

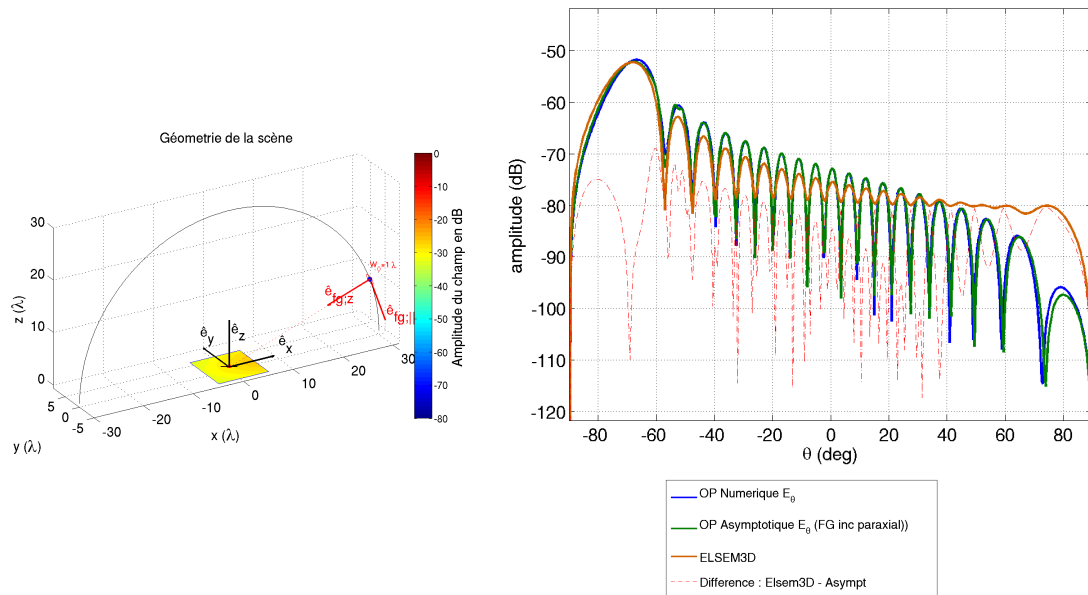


FIG. 2.58: Géométrie et amplitude  $E_\theta$  des champs rayonnés. Faisceau de largeur  $kW_0 = 2\pi$  et d'angle d'incidence  $\theta_i = 70^\circ$ .  $\phi = 0^\circ$ .

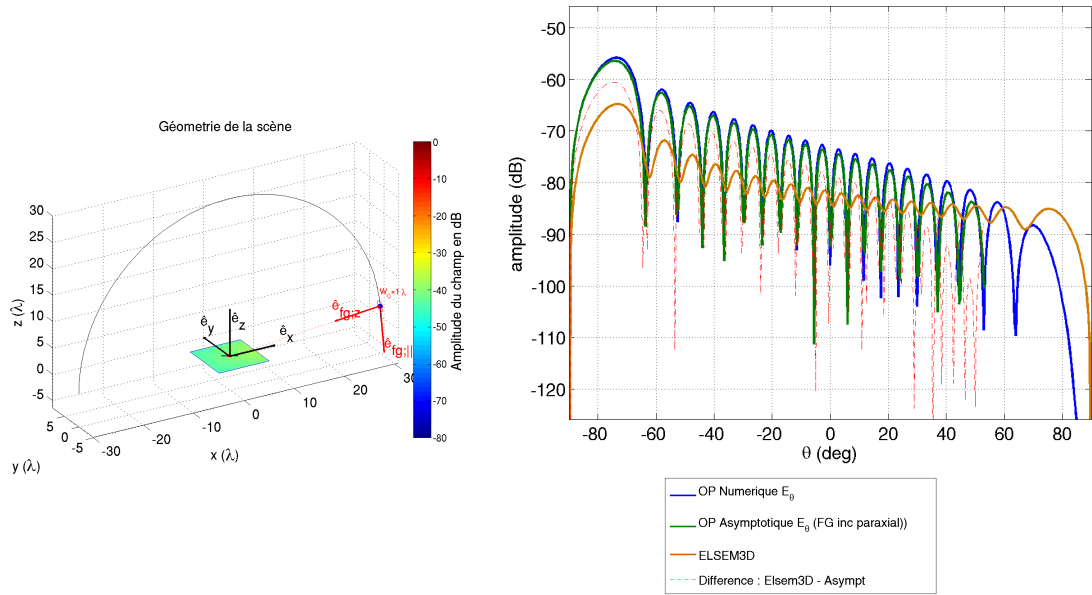


FIG. 2.59: Géométrie et amplitude  $E_\theta$  des champs rayonnés. Faisceau de largeur  $kW_0 = 2\pi$  et d'angle d'incidence  $\theta_i = 85^\circ$ .  $\phi = 0^\circ$ .

Pour des angles d'incidence (définis par rapport à la normale de la plaque) inférieurs à 70 degrés, le champ rayonné dans l'hypothèse de l'optique physique est correct pour les premiers lobes. La formulation analytique donne des résultats très similaires à l'évaluation numérique des intégrales de rayonnement.

Au delà de 70 degrés, par exemple sur la figure (2.59) où le faisceau possède un angle d'incidence de  $85^\circ$ , on remarque que le champ analytique correspond toujours à l'intégration numérique, mais ne correspond plus à la solution exacte calculée par le code ELSEM3D. L'angle d'incidence est donc limité (à  $\theta_i < 70^\circ$ ) concernant les premiers lobes, vraisemblablement à cause de l'hypothèse de l'optique physique. On remarque de plus que pour une incidence supérieure à 80 degrés, le champ analytique n'est plus donné au delà d'un certain angle : il s'agit d'un artefact numérique dû à l'implémentation de la fonction d'erreur complexe utilisée<sup>15</sup>.

<sup>15</sup>Au-delà de  $|z| > 10$ ,  $\text{erf}(z) \rightarrow \text{NaN}$ . Cette limite est dû au fait que l'on doit évaluer  $f(z) * \exp(-z)$  où  $z \rightarrow \infty \pm j\infty$  et  $f$  une fonction régulière.

II.3.3.b Plan perpendiculaire au plan d'incidence ( $E_\phi$ )

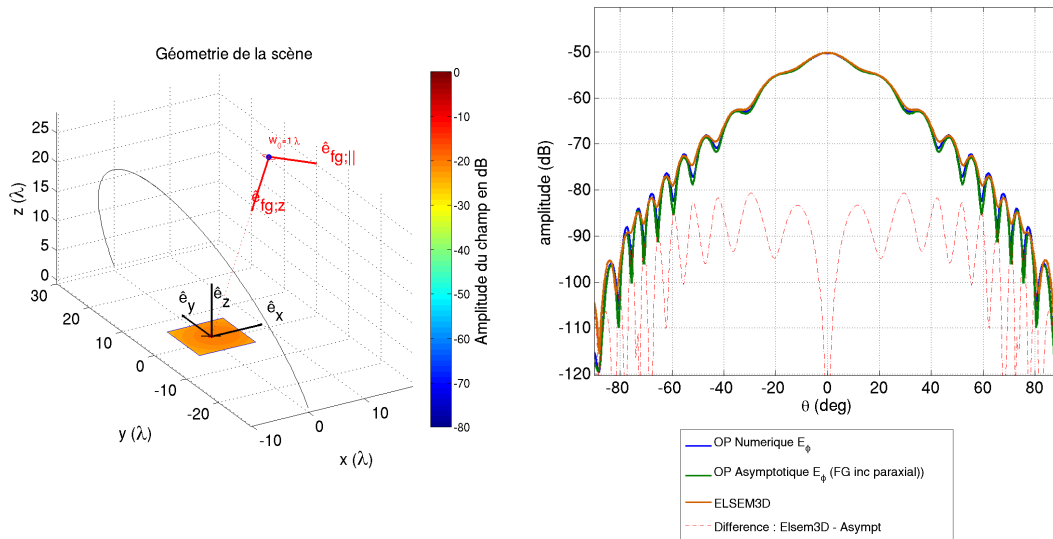


FIG. 2.60: Géométrie et amplitude  $E_\phi$  des champs rayonnés. Faisceau de largeur  $kW_0 = 2\pi$  et d'angle d'incidence  $\theta_i = 20^\circ$ .  $\phi = 90^\circ$ .

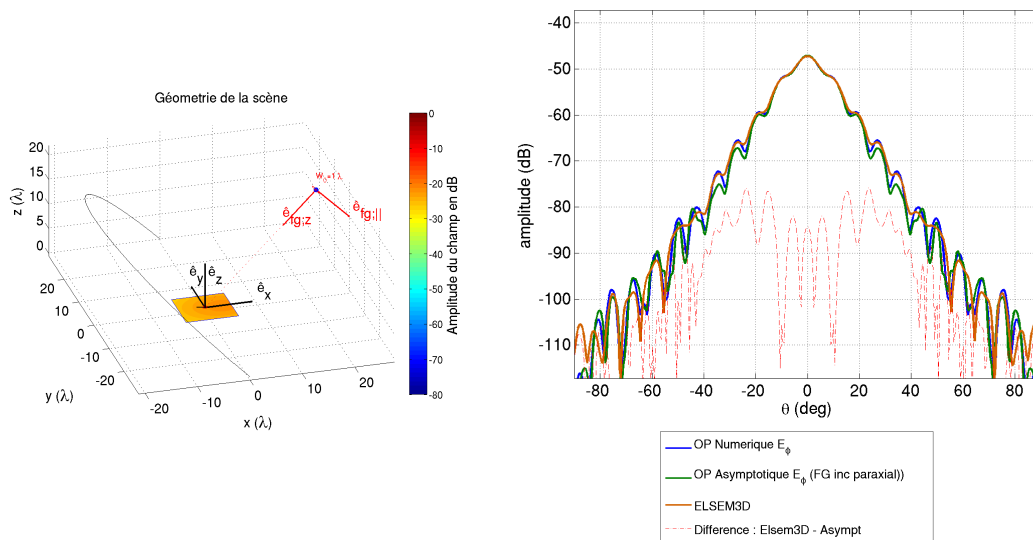


FIG. 2.61: Géométrie et amplitude  $E_\phi$  des champs rayonnés. Faisceau de largeur  $kW_0 = 2\pi$  et d'angle d'incidence  $\theta_i = 45^\circ$ .  $\phi = 90^\circ$ .

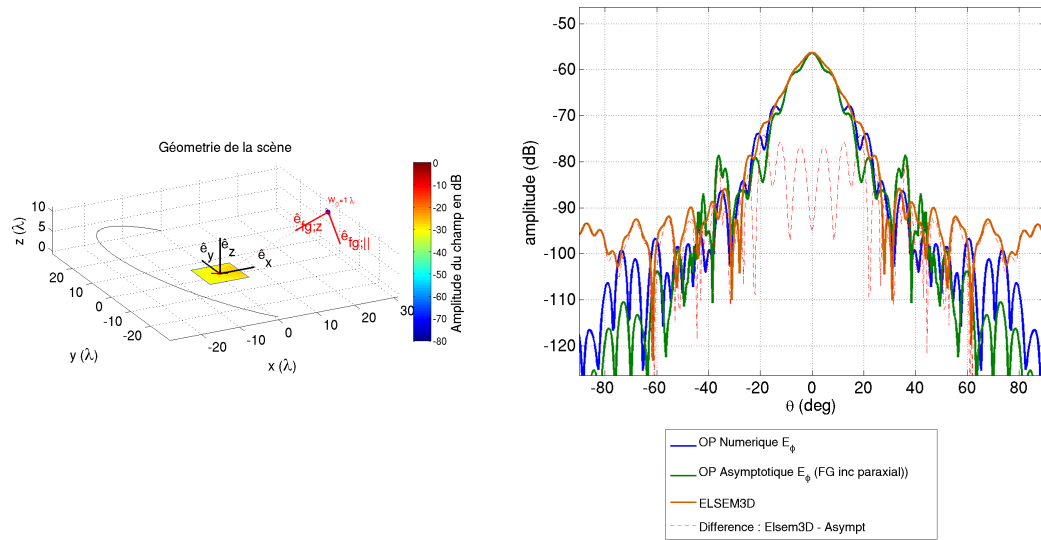


FIG. 2.62: Géométrie et amplitude  $E_\phi$  des champs rayonnés. Faisceau de largeur  $kW_0 = 2\pi$  et d'angle d'incidence  $\theta_i = 70^\circ$ .  $\phi = 90^\circ$ .

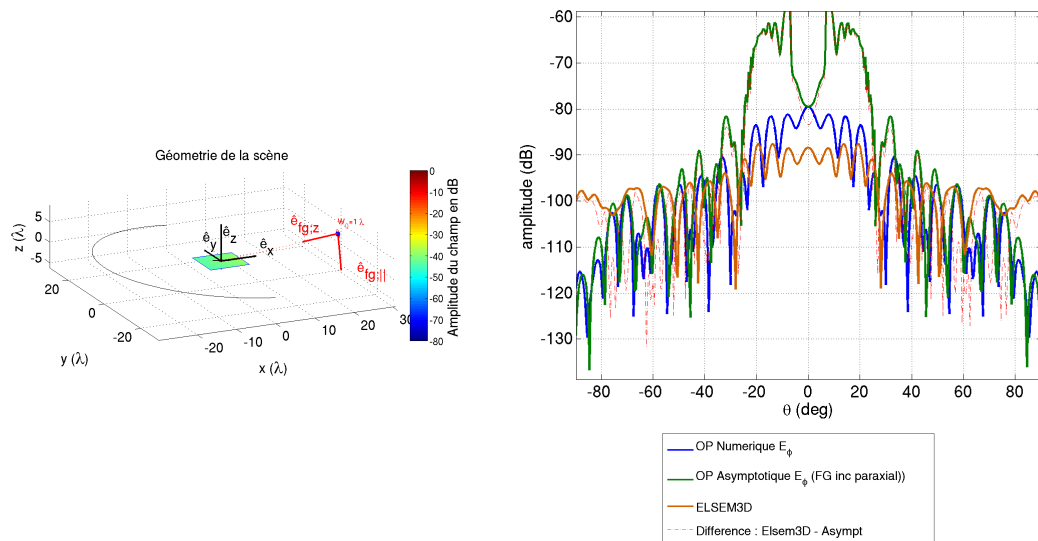


FIG. 2.63: Géométrie et amplitude  $E_\phi$  des champs rayonnés. Faisceau de largeur  $kW_0 = 2\pi$  et d'angle d'incidence  $\theta_i = 85^\circ$ .  $\phi = 90^\circ$ .

On observe dans les figures précédentes que la composante copolaire  $E_\phi$  dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence du champ analytique rayonné est un peu plus limitée par l'incidence du faisceau que dans le plan d'incidence. Les résultats restent corrects pour des angles d'incidence inférieurs à 60 degrés.

Au-delà, l'expression analytique diverge de l'évaluation numérique des intégrales de rayonnement, tout comme diverge l'optique physique numérique de notre référence donnée par la méthode des moments.

### II.3.4 Configurations plus générales

Afin de mettre en évidence et de quantifier les limitations de la formulation uniforme, nous présentons quelques cas de figure plus généraux.

Deux hypothèses limitent principalement la validité de l'expression asymptotique développée par rapport à une intégration numérique réalisée dans l'hypothèse de l'optique physique. D'une part, l'hypothèse de constance de la matrice de courbure d'un faisceau paraxial sur la surface<sup>16</sup>, limite l'angle d'incidence à des angles non rasants par rapport à la surface. D'autre part, l'évaluation asymptotique des intégrales possédant deux bornes finies ( $I_{ij}$ ) est réalisée dans l'hypothèse où les termes anti diagonaux de la matrice Hessienne de la phase sont nuls.

Enfin, nous étudions également la validité de nos résultats lorsque les champs sont observés dans un plan quelconque.

#### II.3.4.a Influence de l'approximation réalisée sur les intégrales doubles avec deux bornes

L'approximation (2.178) utilisée pour calculer un développement asymptotique des intégrales doubles possédant deux bornes finies est pénalisante lorsque le faisceau incident éclaire principalement les zones correspondantes au domaine d'intégration de ces intégrales<sup>17</sup>. Cette situation est illustrée sur la figure (2.64), où le centre d'un faisceau paraxial incident de largeur  $kW_0 = 4\pi$  est situé en  $(15\lambda, 15\lambda, 10\lambda)$ , soit clairement en dehors de la plaque. L'observation des champs rayonnés se fait à une distance de  $1000\lambda$ . Dans ce cas, on observe que l'évaluation asymptotique du champ rayonné est clairement erronée.

<sup>16</sup>Ou du développement limité utilisé pour simplifier l'expression d'un faisceau champ lointain.

<sup>17</sup>c'est-à-dire les zones représentées en rouge sur la figure (2.39)



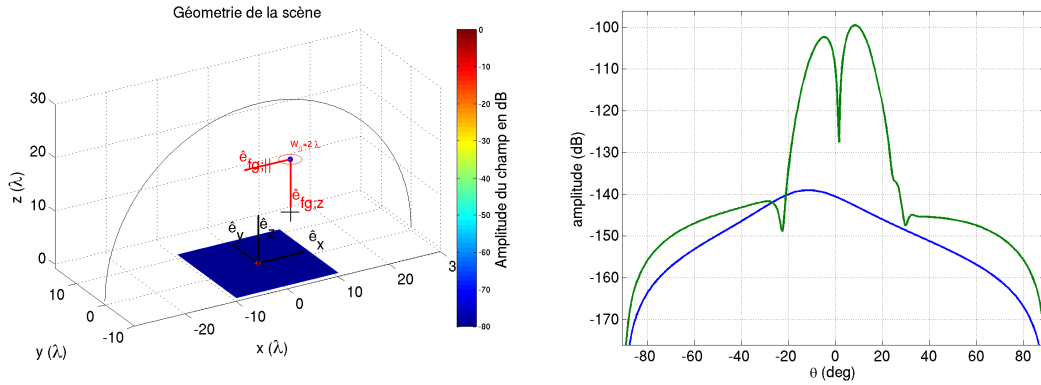


FIG. 2.64: Géométrie et amplitudes des champs  $E_\theta$  rayonnés (en dB). Carré de côté  $20\lambda, \phi = 0^\circ$ . En bleu : OP numérique. En vert : OP asymptotique uniforme. L'observation est réalisée à une distance de  $1000\lambda$

Lorsque l'on augmente la distance d'observation, par exemple pour  $r = 1000000\lambda$ , le résultat tend à converger vers la référence comme cela est illustré sur la figure (2.65).

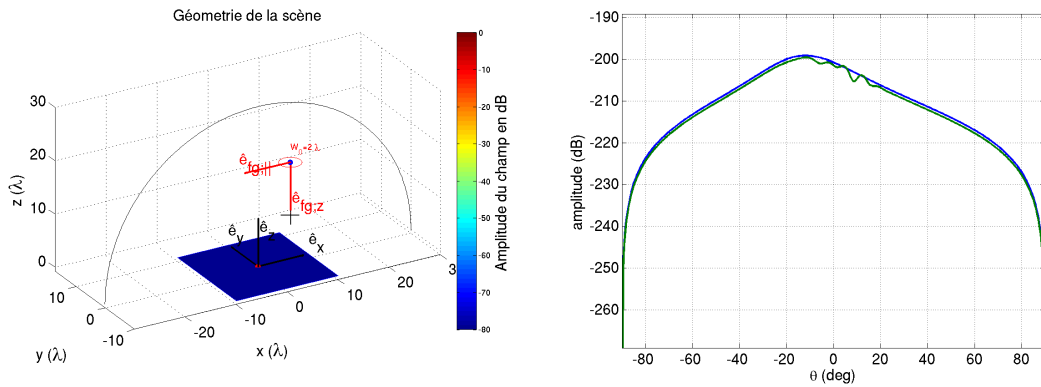


FIG. 2.65: Géométrie et amplitudes des champs  $E_\theta$  rayonnés (en dB). Carré de côté  $20\lambda, \phi = 0^\circ$ . En bleu : OP numérique. En vert : OP asymptotique uniforme. L'observation est réalisée à une distance de  $1000000\lambda$

De plus, lorsque l'amplitude du champ incident sur la surface est plus importante, par exemple en prenant un faisceau plus divergent ou plus proche de la surface, on retrouve une bonne correspondance avec la référence. Nous avons illustré cette situation sur la figure (2.66), où le faisceau incident, toujours situé en  $(15\lambda, 15\lambda, 10\lambda)$ , est plus divergent que précédemment ( $kW_0 = \pi/2$ ). Par conséquent, l'amplitude du champ incident sur la plaque est plus importante et on observe que le champ rayonné calculé avec l'expression

analytique est beaucoup plus correct.

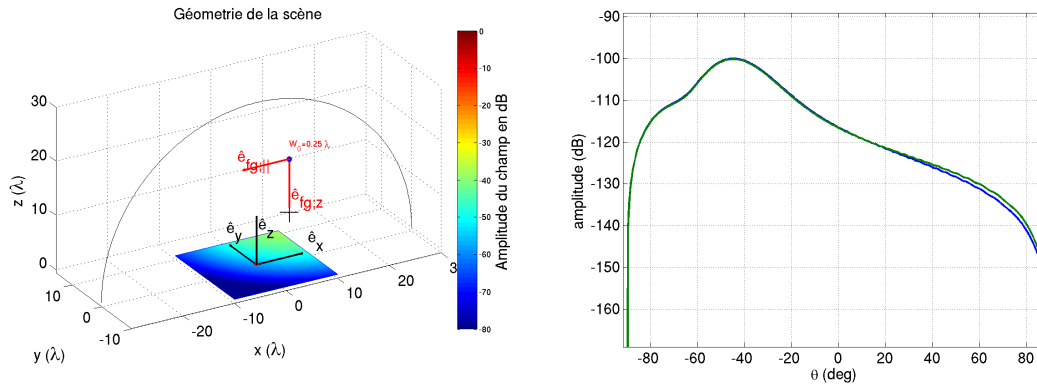


FIG. 2.66: Géométrie et amplitudes des champs  $E_\theta$  rayonnés (en dB). Carré de côté  $20\lambda$ ,  $\phi = 0^\circ$ . En bleu : OP numérique. En vert : OP asymptotique uniforme. L'observation est réalisée à une distance de  $1000\lambda$ . Le faisceau incident est plus divergent que sur la figure (2.64).

Finalement, cette limitation n'est pas trop restrictive, dans la mesure où un algorithme de lancer de faisceaux gaussiens peut trier les faisceaux incidents sur la plaque et ne conserver que ceux interceptant le voisinage de la surface. De cette manière, seuls les faisceaux induisant un champ incident non négligeable sur la plaque seraient conservés. Les faisceaux éclairant peu la plaque peuvent être négligés, dans la mesure où ils contribueront peu au champ rayonné final.

### II.3.4.b Observation dans un plan quelconque

Afin de quantifier l'erreur commise lorsque l'observation est réalisée dans un plan quelconque, on place un faisceau dont la polarisation est contenue dans le plan d'incidence, en  $O_{fg}(50\lambda, 0, 50\lambda)$ , avec un angle d'incidence de  $\theta_i = 45^\circ$ . Nous avons représenté sur la figure (2.67) deux géométries, relatives à des angles d'observation  $\phi = 37^\circ$  et  $\phi = 112^\circ$ .

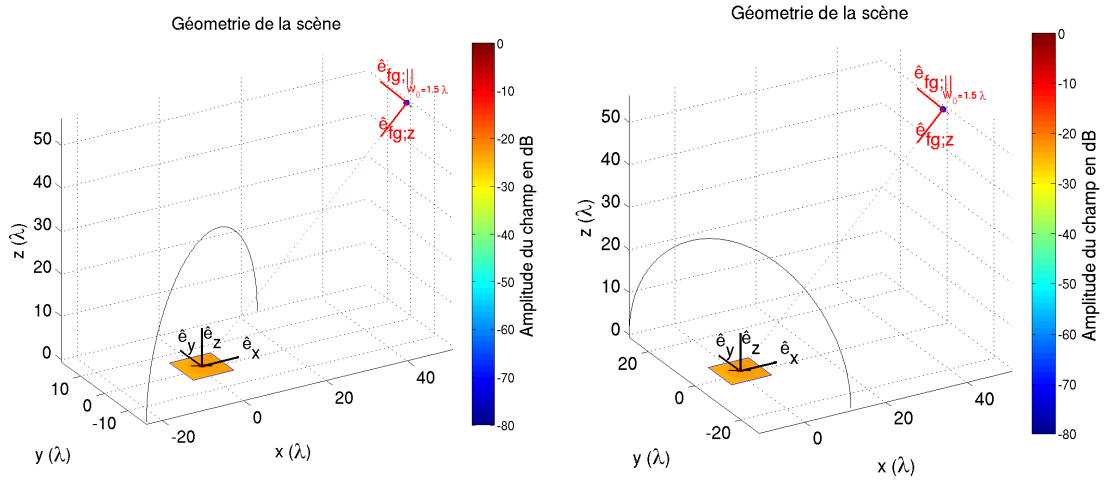


FIG. 2.67: Géométries. À gauche,  $\phi = 37^\circ$ . À droite,  $\phi = 112^\circ$ .

Les composantes  $E_\theta$  des champs rayonnés à une distance de  $1000\lambda$  de la surface sont représentées sur la figure 2.68. Les composantes  $E_\phi$  des champs rayonnés sont représentées sur la figure 2.69. Comme on peut le constater sur ces figures, l'évaluation asymptotique utilisée permet d'obtenir l'allure globale du champ, sans toutefois suivre exactement le calcul numérique.

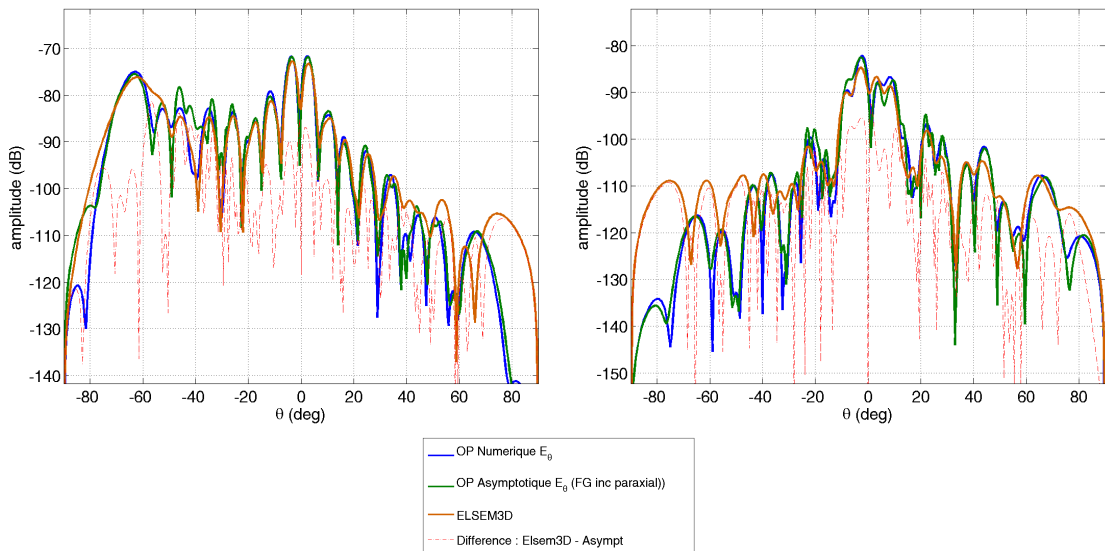


FIG. 2.68: Composantes  $E_\theta$  des champs rayonnés. À gauche, pour  $\phi = 37^\circ$ . À droite, pour  $\phi = 112^\circ$ .

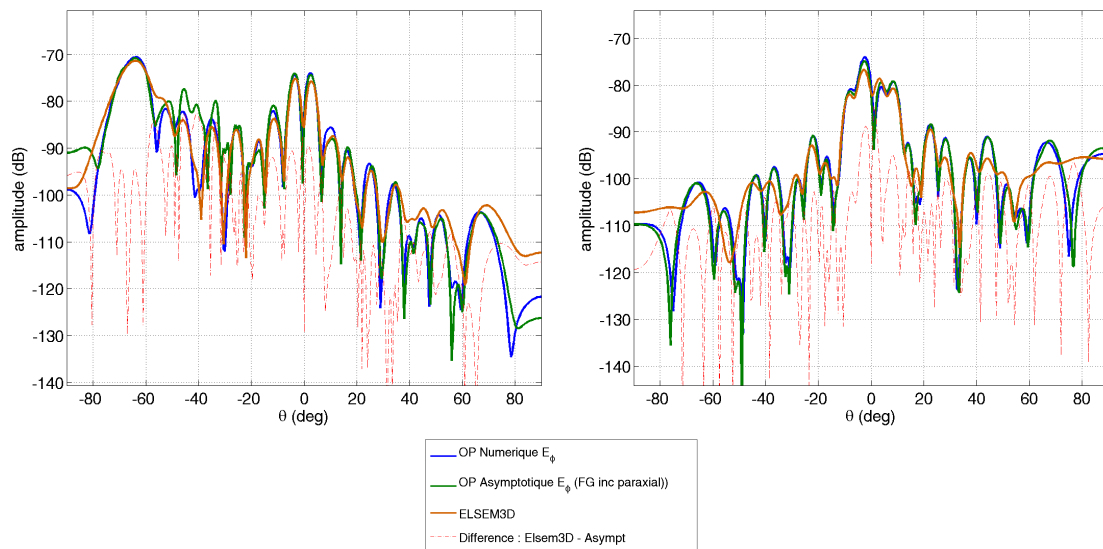


FIG. 2.69: Composantes  $E_\phi$  des champs rayonnés. À gauche, pour  $\phi = 37^\circ$ . À droite, pour  $\phi = 112^\circ$ .

Le cas dual, pour une polarisation du champ incident perpendiculaire au plan d'incidence, est représenté sur la figure (2.70).

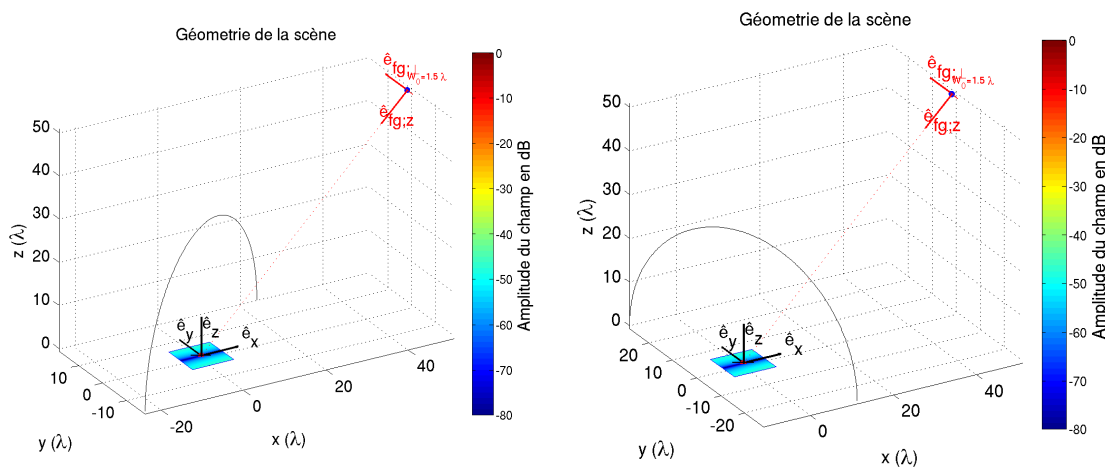


FIG. 2.70: Géométries. À gauche,  $\phi = 37^\circ$ . À droite,  $\phi = 112^\circ$ .

Les composantes  $E_\theta$  des champs rayonnés à une distance de  $1000\lambda$  de la surface sont représentées sur la figure 2.71. Les composantes  $E_\phi$  des champs rayonnés sont représentées sur la figure 2.72.

La formulation analytique reste très proche de l'évaluation numérique de l'intégrale

de l'optique physique. Toutefois, on constate que l'hypothèse de l'optique physique est particulièrement mise en défaut dans ces conditions.

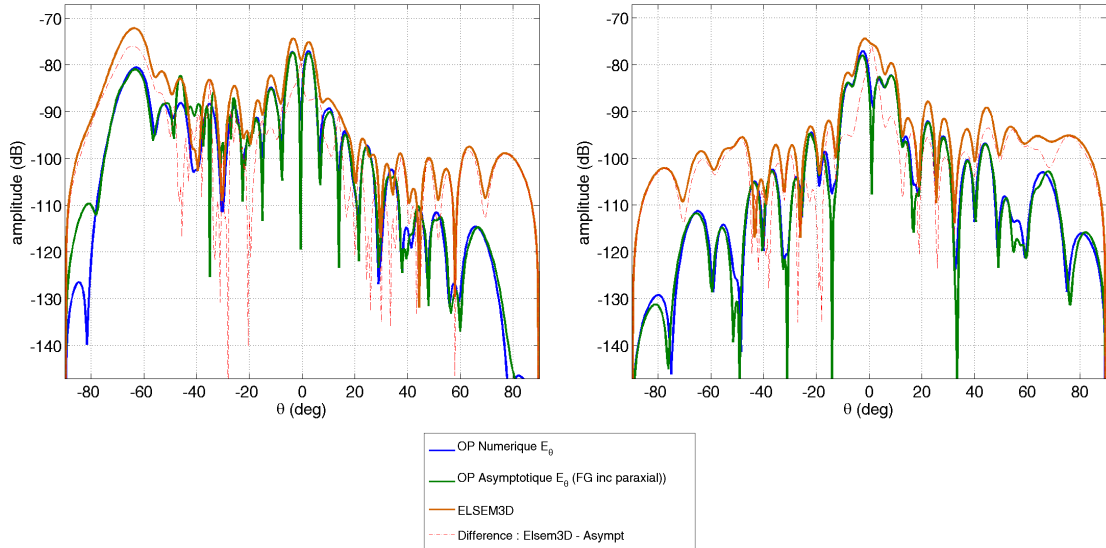


FIG. 2.71: Composantes  $E_\theta$  des champs rayonnés. À gauche, pour  $\phi = 37^\circ$ . À droite, pour  $\phi = 112^\circ$ .

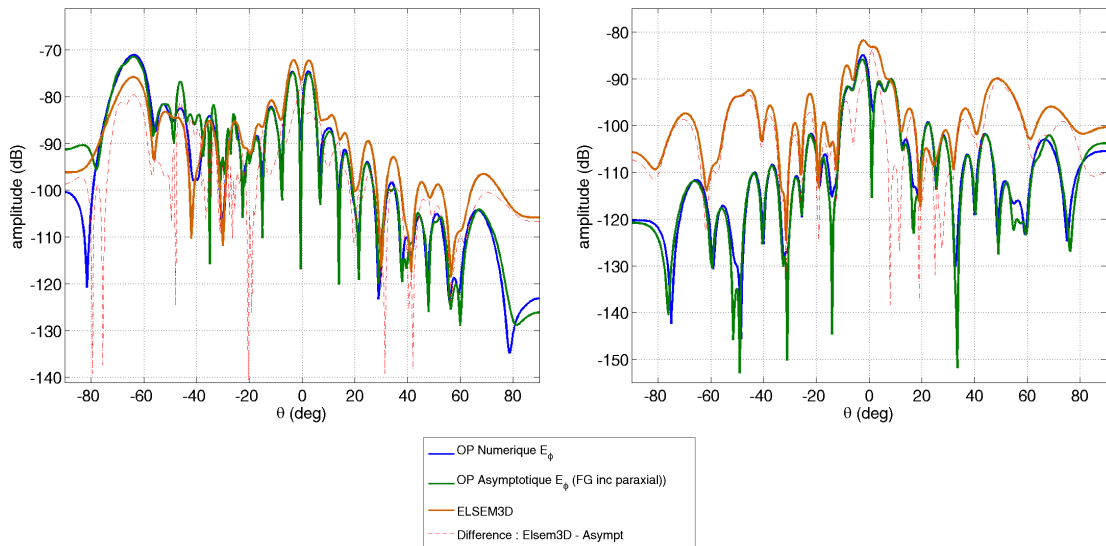


FIG. 2.72: Composantes  $E_\phi$  des champs rayonnés. À gauche, pour  $\phi = 37^\circ$ . À droite, pour  $\phi = 112^\circ$ .

**Synthèse.** Les hypothèses utilisées pour obtenir un développement asymptotique des intégrales possédant deux bornes finies ( $I_{ij}$ ) restreignent le domaine de validité du calcul. Lorsqu'un faisceau intercepte très faiblement la plaque, on obtiendra de meilleurs résultats pour des points d'observations situés à grande distance de la surface.

Il serait nécessaire de trouver une meilleure approximation des intégrales  $I_{ij}$ . On pourrait par exemple penser à deux développements asymptotiques successifs. Toutefois, on se retrouve dans ce cas à devoir traiter une intégrale dont l'intégrande contient une fonction d'erreur. On retrouve donc le même verrou mathématique observé lors de l'évaluation asymptotique de la solution exacte du champ diffracté par un demi-plan (cf. section I.1.5). Dans cette situation, on observait que les fonctions d'erreur<sup>18</sup> variaient trop rapidement pour être approchées dans un large domaine de validité avec un développement asymptotique et on devait dans ce cas utiliser une intégration numérique.

Toutefois, cette limitation peut être contournée lorsque la plaque est éclairée par plusieurs faisceaux. En ne conservant que les faisceaux énergétiques par rapport à la surface, un algorithme de lancer de faisceaux assurera ainsi un calcul correct du champ rayonné.

### II.3.5 Utilisation d'un faisceau gaussien champ lointain

L'utilisation d'un faisceau gaussien exprimé avec la formulation champ lointain donne des résultats similaires, à condition que l'origine du faisceau gaussien incident se trouve à grande distance du point d'intersection  $0'$ . Cette condition correspond au domaine de validité d'un faisceau gaussien champ lointain.

À titre d'exemple, on traite un cas de figure où la formulation paraxiale d'un faisceau gaussien n'est plus valide (cf. Chapitre 1) : une plaque carrée de côté  $10\lambda$  est éclairée par un faisceau très divergent de taille  $kW_0 = \pi$ , situé à  $500\lambda$  de la surface (cf. figure (2.73)).

---

<sup>18</sup>Ou de manière équivalente les fonctions de FRESNEL.

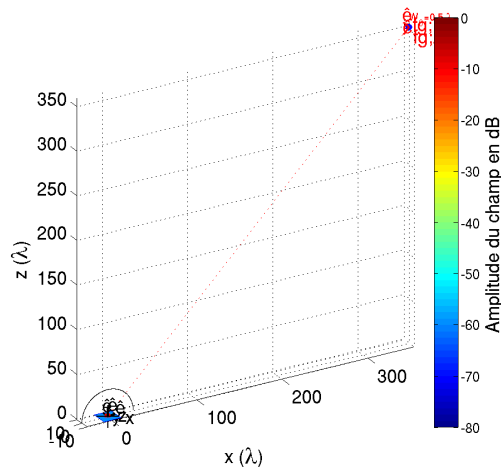


FIG. 2.73: Géométrie.

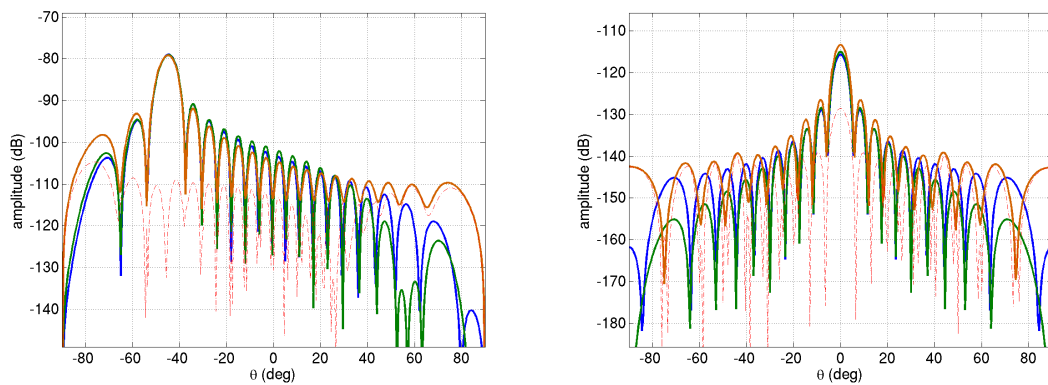


FIG. 2.74: Champs rayonnés par la plaque. À gauche :  $E_\theta$  pour  $\phi = 0^\circ$ . À droite :  $E_\phi$  pour  $\phi = 90^\circ$ . En bleu : optique physique numérique. En vert : optique physique analytique. En rouge : module de l'erreur entre les deux.

Les champs rayonnés par la formulation analytique sont valides en particulier dans les directions principales de rayonnement.

### II.3.6 Conclusion

La solution proposée permet de décrire le champ rayonné par une surface rectangulaire conductrice dans l'hypothèse de l'optique physique lorsqu'elle est éclairée par un faisceau gaussien. L'approche utilisée combine plusieurs termes qui se compensent entre

---

eux afin d'éliminer les singularités inhérentes aux développements asymptotiques des intégrales et est par conséquent uniforme.

Les hypothèses utilisées pour formuler cette solution limitent son domaine d'application à des angles d'incidence non rasants sur la surface ( $> 30^\circ$  par rapport à la surface).



### III Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre nous avons étudié le rayonnement d'objets parfaitement conducteurs éclairés par un faisceau gaussien.

Nous avons tout d'abord étudié le cas d'un demi-plan conducteur infini, pour lequel nous avons formulé une expression intégrale exacte du champ rayonné, c'est-à-dire du champ réfléchi par le plan et diffracté par l'arête. Afin d'obtenir une expression analytique du champ rayonné, nous avons utilisé l'hypothèse de l'optique physique. Dans cette hypothèse, l'expression obtenue donne de bons résultats à grande distance du plan et dans les directions principales de rayonnement.

L'obtention d'une expression analytique du champ rayonné à partir de la solution intégrale exacte reste non résolue. En effet, dans ce cas, l'expression asymptotique obtenue possède un domaine de validité trop restreint.

Nous avons étendu les formulations approchées dans l'hypothèse de l'optique physique à des conducteurs de taille finie. Plusieurs expressions analytiques ont été développées. La première utilise une extension de la méthode de la phase stationnaire pour des intégrales doubles. Cette méthode fait apparaître un certain nombre de points, dit *critiques*, qui sont à l'origine des contributions principales du champ rayonné. Toutefois, la formulation obtenue avec cette technique est non-uniforme, c'est-à-dire qu'elle est pourvue de discontinuités et de singularités dans des directions d'observation particulières.

Pour pallier ces défauts, nous avons développé une formulation uniforme du champ rayonné par une surface rectangulaire, dépourvue de discontinuités et de singularités. Nous avons montré que cette expression était valide dans un large domaine de largeurs de faisceau, d'angles d'incidence et d'observation, et de tailles de surface. La solution obtenue est particulièrement valide dans les plans d'observations parallèles aux arêtes de la surface conductrice ou dans les directions principales de rayonnement (spéculaire). En dehors de ces zones, le domaine de validité de l'expression analytique du champ rayonné est restreint par l'hypothèse de l'optique physique ainsi que par la validité du développement asymptotique.

Les résultats présentés sont en accord avec la théorie de l'optique physique. Par conséquent, les champs calculés correspondent à une approximation des champs réellement rayonnés. Une correction supplémentaire devrait être utilisée afin d'obtenir de meilleurs résultats, en particulier dans les zones d'observation éloignées des directions principales de rayonnement. Dans un algorithme de lancer de faisceaux, les faisceaux dont l'incidence est trop rasante par rapport à la surface peuvent toujours être calculés numériquement.

Enfin, dans le cadre de l'interaction d'un champ décrit comme une superposition de faisceaux gaussiens avec une plaque métallique, l'erreur sur les lobes secondaires de chaque faisceau élémentaire est à relativiser par rapport à l'amplitude des faisceaux gaussiens élémentaires adjacents. C'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant, consacré aux applications des faisceaux gaussiens pour des géométries ou des champs complexes.



## Chapitre 3

# Applications des faisceaux gaussiens

Dans ce chapitre, nous utilisons le formalisme des faisceaux gaussiens appliqué à divers problèmes canoniques de calcul de rayonnement et de propagation électromagnétique.

### I Décomposition d'un champ en faisceaux gaussiens

Dans cette section, nous faisons un état de l'art des méthodes et techniques permettant d'exprimer un champ électromagnétique connu en un ensemble de faisceaux gaussiens. Nous appliquons la décomposition en faisceaux gaussiens aux faisceaux conformes et nous en cernons le domaine de validité. Les techniques de décomposition présentées seront utilisées par la suite dans des exemples d'applications.

La décomposition rigoureuse d'un champ en faisceaux gaussiens repose généralement sur l'utilisation de bases complètes de faisceaux élémentaires. Ces faisceaux émergent d'un ensemble de points situés sur la distribution de champ initiale et dans un ensemble de directions [137, 54, 55, 138].

Plusieurs méthodes et techniques existent pour décomposer un champ sur une surface en un ensemble de faisceaux gaussiens. Lorsque la surface initiale correspond à un plan [80, 139] ou à une surface cylindrique [140], la distribution de champ peut être rigoureusement décomposée en une somme discrète de faisceaux gaussiens en utilisant la décomposition de GABOR ou plus avantageusement les frames de GABOR [55]. Toutefois, bien qu'exacte, ces méthodes de décomposition sont sujettes à plusieurs limitations.

D'une part, la surface initiale doit être plane ou cylindrique. D'autre part, le nombre de faisceaux élémentaires nécessaire pour effectuer la décomposition peut devenir très important [64].

Pour pallier ces inconvénients, certains auteurs ont proposé des techniques de décomposition alternatives, non exactes, mais dont les résultats restent satisfaisant [57, 141]. Ces techniques sont décrites dans [64]. Dans ses travaux de doctorat, A. CHABORY a proposé une nouvelle technique de décomposition appliquée aux surfaces (localement) ellipsoïdales, la décomposition *multi faisceaux gaussiens*. Dans la mesure où cette technique est détaillée dans [64], nous nous contenterons d'en rappeler les principaux résultats dans la section suivante. Nous détaillerons davantage cette technique lorsqu'elle sera appliquée aux faisceaux gaussiens conformes.

## I.1 Décomposition multi faisceaux gaussiens

La décomposition *multi-faisceaux gaussiens* (DMFG) est une approche pragmatique de la décomposition d'un champ en une somme de faisceaux gaussiens.

Contrairement aux méthodes rigoureuses de décomposition, un seul faisceau gaussien est disposé sur chacun des points du maillage d'une surface modérément courbe  $\Sigma$ . Le nombre de faisceaux utilisé dépend donc de la précision du maillage<sup>1</sup>. L'axe de propagation de chaque faisceau est orienté dans la direction du vecteur de POYNTING calculé au point du maillage. Le champ initial (sur la figure (3.1) en bleu) est exprimé comme une superposition de faisceaux gaussiens pondérés par des coefficients complexes. Ces coefficients de décomposition sont calculés en inversant un système linéaire.

---

<sup>1</sup>Ce maillage ne correspond pas obligatoirement au maillage initial sur lequel est décrit le champ que l'on décompose. Un maillage plus lâche permettra éventuellement de réduire le nombre de faisceaux.

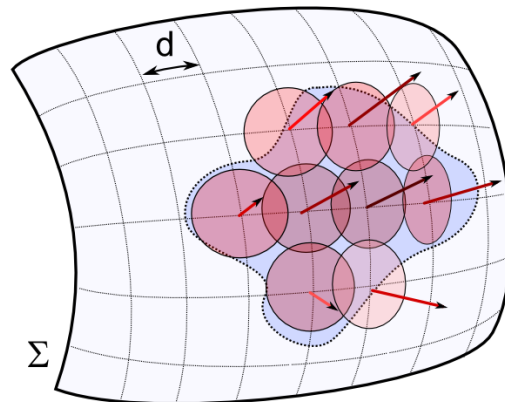


FIG. 3.1: Illustration de la *Décomposition Multi-Faisceaux Gaussiens* (DMFG).

Une analyse paramétrique de cette technique de décomposition a montré que la distance élémentaire  $d$  entre deux faisceaux et la largeur d'un faisceau sont de l'ordre de [64] :

$$w_0 = \frac{d}{0.9} \quad (3.1)$$

Le choix précis de la taille  $d$  est dicté par la configuration et par la précision recherchée. Cette technique est particulièrement adaptée lorsque les champs sont suffisamment réguliers et leurs incidences restent modérées en tout point de la surface de décomposition.

Toutefois, dans certains cas de figure, ces hypothèses ne sont pas respectées et la technique montre ses limites. Ces limitations ont été à l'origine de la création des faisceaux gaussiens conformes. La technique précédente peut être appliquée également aux faisceaux gaussiens conformes, qui sont plus adaptés aux surfaces courbes.

## I.2 Décomposition multi faisceaux gaussiens conformes

L'objectif de cette section est d'utiliser la technique de décomposition multi faisceaux gaussiens (DMFG) en prenant comme faisceau élémentaire un faisceau conforme (FGC). Contrairement à un faisceau gaussien classique ou généralisé, la direction de propagation d'un FGC est décorrélée de sa variation d'amplitude et offre ainsi un degré de liberté supplémentaire lors de la décomposition. De plus, un FGC est également caractérisé par la courbure de la surface qui le supporte. Ainsi, ces faisceaux sont mieux adaptés pour décrire le champ issu d'une surface courbe, en particulier lorsque l'incidence du champ incident est forte par rapport à cette surface.

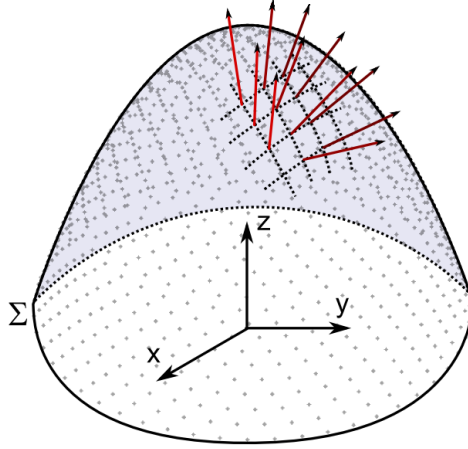


FIG. 3.2: Exemple de maillage d'une surface quadratique  $\Sigma$ . En rouge, quelques vecteurs normaux aux points de la surface.

### I.2.1 Principe de la décomposition

Soient  $P$  et  $Q$  des points d'échantillonnage de la surface  $\Sigma$ . À l'instar de la DMFG, on ne place qu'un seul courant élémentaire sur chaque point du maillage. Les courants  $\mathbf{J}_Q(P)$  et  $\mathbf{M}_Q(P)$  correspondent aux expressions des courants gaussiens élémentaires (1.63,1.64) centrés au point  $Q$  et exprimés au point  $P$ , dont le rayonnement est un FGC. On rappelle les expressions de ces courants élémentaires, à partir des définitions du chapitre 1 :

$$\mathbf{J}_Q(P) = \mathbf{e}^J(P) w_Q(P) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{M}_Q(P) = \mathbf{e}^M(P) w_Q(P) \quad (3.3)$$

avec :

$$w_Q(P) = \exp \left[ -j \frac{k}{2} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \mathbb{Q}_Q^f \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \right] \exp \left[ -j \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{x;Q} \\ \beta_{y;Q} \end{pmatrix} \right] \quad (3.4)$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}^J(P)$  et  $\mathbf{e}^M(P)$  dépendent du point  $P$  sur lequel sont évalués ces courants. En chacun des points  $P$  du maillage, on définit ainsi un repère propre  $(P, \hat{\mathbf{e}}_x(P), \hat{\mathbf{e}}_y(P), \hat{\mathbf{n}}(P))$  où  $\hat{\mathbf{n}}(P)$  correspond à la normale unitaire au point  $P$  (cf. figure 3.3). Les vecteurs  $\hat{\mathbf{e}}_x(P), \hat{\mathbf{e}}_y(P)$  correspondent à deux vecteurs orthogonaux du plan tangent à la surface au point  $P$ .

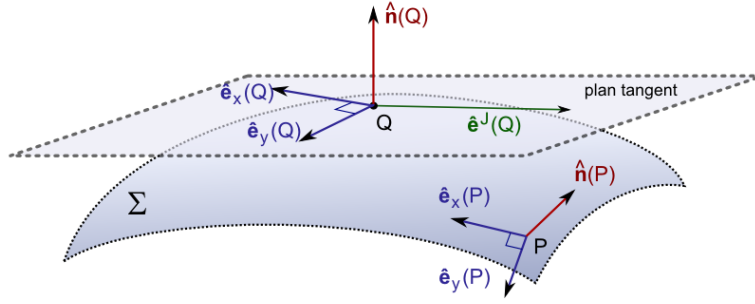


FIG. 3.3: Géométrie et notations.

Soit  $\hat{\mathbf{e}}_0$  un vecteur constant non nul et non normal à la surface, choisi arbitrairement. Les vecteurs tangents  $\hat{\mathbf{e}}_x(P), \hat{\mathbf{e}}_y(P)$  sont calculés par :

$$\hat{\mathbf{e}}_x(P) = -\frac{\hat{\mathbf{n}}(P) \times \hat{\mathbf{n}}(P) \times \hat{\mathbf{e}}_0}{\|\hat{\mathbf{n}}(P) \times \hat{\mathbf{n}}(P) \times \hat{\mathbf{e}}_0\|} \quad \hat{\mathbf{e}}_y(P) = \frac{\hat{\mathbf{n}}(P) \times \hat{\mathbf{e}}_0}{\|\hat{\mathbf{n}}(P) \times \hat{\mathbf{e}}_0\|} \quad (3.5)$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}^J(P)$  et  $\mathbf{e}^M(P)$  des courants  $\mathbf{J}_Q(P)$  et  $\mathbf{M}_Q(P)$  en un point  $P$  peuvent être exprimés comme une combinaison linéaire des vecteurs directeurs de leur repère propre :

$$\mathbf{e}^J(P) = a_{x;Q}^J \hat{\mathbf{e}}_x(P) + a_{y;Q}^J \hat{\mathbf{e}}_y(P) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{e}^M(P) = a_{x;Q}^M \hat{\mathbf{e}}_x(P) + a_{y;Q}^M \hat{\mathbf{e}}_y(P) \quad (3.7)$$

d'où :

$$\mathbf{J}_Q(P) = (a_{x;Q}^J \hat{\mathbf{e}}_x(P) + a_{y;Q}^J \hat{\mathbf{e}}_y(P)) w_Q(P) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{M}_Q(P) = (a_{x;Q}^M \hat{\mathbf{e}}_x(P) + a_{y;Q}^M \hat{\mathbf{e}}_y(P)) w_Q(P) \quad (3.9)$$

Les coefficients  $a_{x;Q}^J, a_{y;Q}^J$  et  $a_{x;Q}^M, a_{y;Q}^M$  vont être déterminés par la suite.

Les paramètres de phase linéaire  $\beta_{x;Q}, \beta_{y;Q}$  sont déterminés à partir de la direction du vecteur de Poynting local  $\mathbf{\Pi}(Q)$  du champ sur la surface au point  $Q$  :

$$\beta_{x;Q} = k \frac{\mathbf{\Pi}(Q)}{\|\mathbf{\Pi}(Q)\|} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x(Q) \quad \beta_{y;Q} = k \frac{\mathbf{\Pi}(Q)}{\|\mathbf{\Pi}(Q)\|} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y(Q) \quad (3.10)$$

Enfin, les matrices de courbure des courants élémentaires sont identiques et définies par :

$$\mathbb{Q}_Q^f = \mathbb{Q}^f = \frac{2}{jkW_0^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

où  $W_0$  est la largeur d'un faisceau élémentaire. Cette largeur peut être ajustée afin d'améliorer la précision du calcul.



La matrice de courbure locale de la surface  $(\mathbb{Q}_Q^\Sigma)$  supportant les courants gaussiens au point  $Q$  intervient également dans les expressions des FGC. Pour certain type de surfaces connues analytiquement, comme les surfaces ellipsoïdales, cette matrice peut être déterminée analytiquement[64, Annexe G]. Pour une surface plus générale, cette matrice peut être calculée en déterminant la surface quadratique passant par les points situés au voisinage de  $Q$  (cf. annexe D).

### I.2.2 Calcul des coefficients de décomposition

On souhaite déterminer les coefficients  $a_{x;Q}^J, a_{y;Q}^J$  et  $a_{x;Q}^M, a_{y;Q}^M$  en utilisant la technique dite du *point matching*<sup>2</sup>. Pour cela, les courants initiaux  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  en un point  $P$  du maillage sont exprimés comme la somme des courants élémentaires gaussiens, exprimés dans le repère propre relatif au point  $P$ , soit :

$$\mathbf{J}(P) = \sum_Q \mathbf{J}_Q(P) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{M}(P) = \sum_Q \mathbf{M}_Q(P) \quad (3.13)$$

En décomposant le courant électrique initial sur la surface selon les directions du repère propre relatif à chacun des points  $Q$ , on obtient :

$$\mathbf{J}(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x^J(P) = \sum_Q (a_{x;Q}^J \hat{\mathbf{e}}_x(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x(P) + a_{y;Q}^J \hat{\mathbf{e}}_y(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x(P)) w_Q(P) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{J}(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y^J(P) = \sum_Q (a_{x;Q}^J \hat{\mathbf{e}}_x(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y(P) + a_{y;Q}^J \hat{\mathbf{e}}_y(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y(P)) w_Q(P) \quad (3.15)$$

Le choix d'exprimer les courants élémentaires dans ce repère propre permet de simplifier ces relations, car par définition  $\hat{\mathbf{e}}_x(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y(P) = 0$  et  $\hat{\mathbf{e}}_x(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x(P) = 1$ , d'où :

$$\mathbf{J}(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x(P) = \sum_Q a_{x;Q}^J w_Q(P) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{J}(P) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y(P) = \sum_Q a_{y;Q}^J w_Q(P) \quad (3.17)$$

<sup>2</sup>On peut également utiliser une méthode des moindres carrés, en particulier si le nombre de point du maillage est supérieur au nombre de courants élémentaires souhaité.

En notant  $N$  le nombre de points du maillage et  $P_1 \dots P_N$  les points du maillage, on peut mettre ces systèmes linéaires sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}(P_1) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x^J(P_1) \\ \vdots \\ \mathbf{J}(P_N) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x^J(P_N) \end{pmatrix} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} a_{x;1}^J \\ \vdots \\ a_{x;N}^J \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}(P_1) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y^J(P_1) \\ \vdots \\ \mathbf{J}(P_N) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y^J(P_N) \end{pmatrix} = \mathbb{A} \begin{pmatrix} a_{y;1}^J \\ \vdots \\ a_{y;N}^J \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

où la matrice  $\mathbb{A}$  correspond à :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} w_{P_1}(P_1) & \cdots & w_{P_N}(P_1) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{P_1}(P_N) & \cdots & w_{P_N}(P_N) \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

L'inversion de la matrice  $\mathbb{A}$  permet d'obtenir les coefficients de décomposition  $a_x^J$  et  $a_y^J$ . On procède de la même manière pour les coefficients  $a_x^M$ ,  $a_y^M$ .

Le formalisme des faisceaux gaussiens généralisés ou conformes peut donc être utilisé pour décomposer et propager un champ électromagnétique [63, 64]. Le calcul de la propagation et des interactions d'un champ électromagnétique avec certains objets peut ainsi être abordé grâce à ce formalisme. C'est le propos des paragraphes suivants.

### I.3 Comparaisons des décompositions pour des surfaces courbes

Afin de mettre en évidence l'intérêt des faisceaux gaussiens conformes, nous comparons dans cette section la décomposition en faisceaux gaussiens et en faisceaux gaussiens conformes d'un champ sur une surface courbe. La géométrie générale est présentée sur la figure (3.4). On place une ouverture circulaire dont on calcule le rayonnement sur la surface de décomposition  $\Sigma$ . La distribution d'amplitude sur l'ouverture correspond à une arche de cosinus de diamètre  $L = 8\lambda$  à une fréquence  $f = 10$  GHz. Le centre de l'ouverture est décalé d'un facteur  $d = 4\lambda$  (12 cm) par rapport à l'origine. La surface  $\Sigma$  correspond à une ellipsoïde dont les demi grands axes sont  $A, B$  et  $C$ .

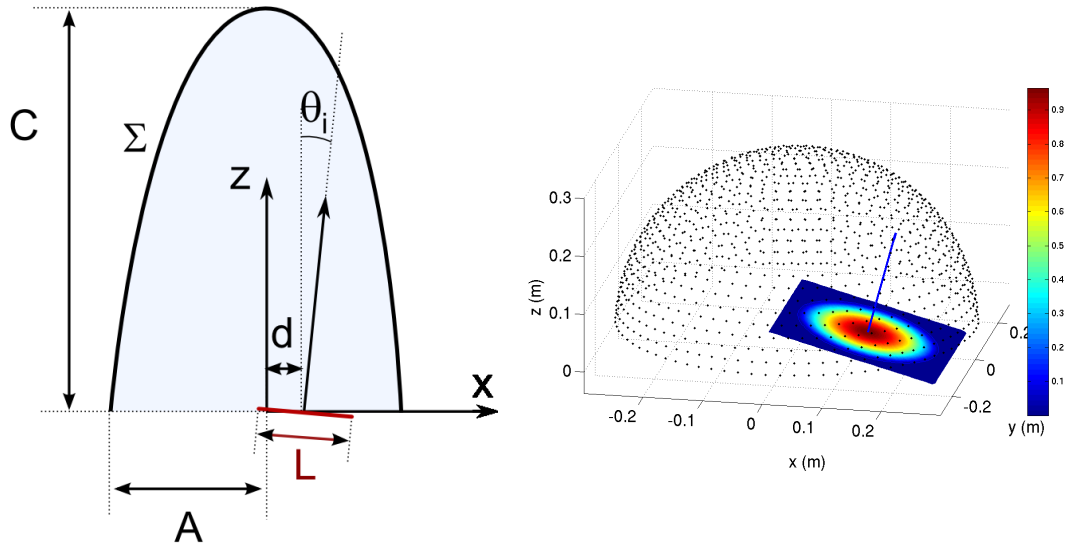


FIG. 3.4: À gauche : géométrie de la configuration. À droite : représentation du champ électrique sur la surface ( $C = 0.3\text{m}$  et  $d = 4\lambda \approx 12\text{cm}$ ).

Dans les exemples qui suivent, les demi grands axes horizontaux  $A$  et  $B$  sont égaux et valent  $0.3\text{ m}$ . Pour un angle d'incidence  $\theta_i$  de  $15^\circ$ , on fait varier la longueur du demi grand axe vertical  $C$ , et par conséquent la courbure de la surface. Les paramètres des FGC relatifs à la courbure locale en un point de la surface sont calculés analytiquement[64, Annexe G].

Sur la figure (3.5), on décompose le champ électromagnétique rayonné par l'ouverture sur une surface sphérique, en 1133 faisceaux gaussiens généralisés et conformes, uniformément répartis. Dans ce cas, la courbure de la surface est faible et l'utilisation de faisceaux gaussiens généralisées pour décomposer le champ reste possible<sup>3</sup>. À partir de ces décompositions, on calcule le champ à grande distance ( $R = 1000\lambda$ ) et on compare les composantes  $E_\theta$ . La référence (en bleu) correspond au calcul numérique du rayonnement de l'ouverture.

<sup>3</sup>La direction de propagation de chacun des FGs est choisie selon la direction du vecteur de Poynting local[64]

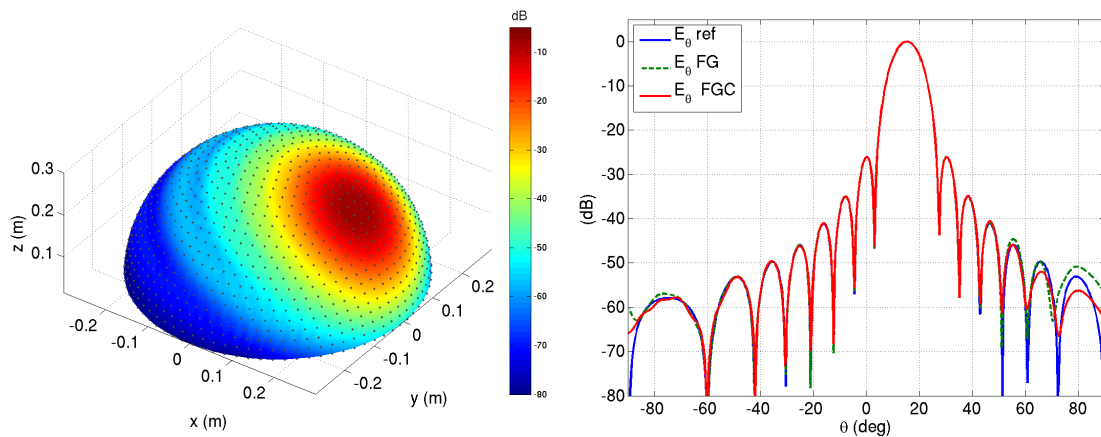


FIG. 3.5: À gauche : géométrie de la configuration. À droite : représentation des composantes  $E_\theta$  du champ électrique en zone lointaine (normalisé). Surface ellipsoïdale :  $A = B = C = 0.3\text{m}$  (sphérique).

Sur la figure (3.6), la surface de décomposition est plus effilée, avec  $C = 0.6\text{m}$ .

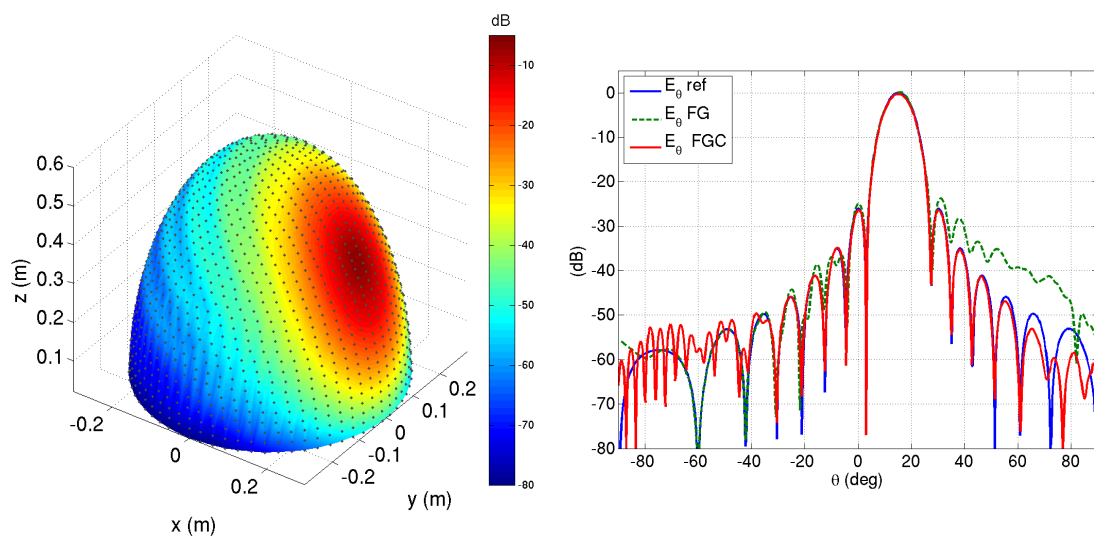


FIG. 3.6: À gauche : géométrie de la configuration. À droite : représentation des composantes  $E_\theta$  du champ électrique en zone lointaine (normalisé). Surface ellipsoïdale :  $A = B = 0.3\text{m}$ ,  $C = 0.6\text{m}$ .

Dans cette situation, l'angle entre la direction de la normale à la surface et la direction du vecteur de Poynting du champ incident devient important, en particulier dans la direction principale de rayonnement. Or, lorsque cet angle devient important (typi-

quement lorsqu'il est supérieur à  $50^\circ$ ), les résultats obtenus avec la décomposition multi faisceaux gaussiens généralisés ne sont plus corrects[64]. C'est pourquoi on obtient une moins bonne correspondance entre les faisceaux gaussiens généralisés et la référence. La décomposition multi faisceaux gaussiens conformes, quant à elle, permet d'obtenir de meilleurs résultats. Sur cette figure, le champ sur la surface  $\Sigma$  est décomposé en 1576 faisceaux.

Enfin, pour des courbures supérieures, par exemple pour  $C = 1.2\text{m}$  (figure (3.7)), l'angle d'incidence du champ initial sur la surface de décomposition devient important pour la majorité des points. On constate alors que la décomposition basée sur les faisceaux gaussiens généralisés n'est plus utilisable contrairement à celle basée sur les faisceaux gaussiens conformes qui reste relativement adaptée. Sur cette figure, le champ incident est décomposé en 3186 faisceaux.

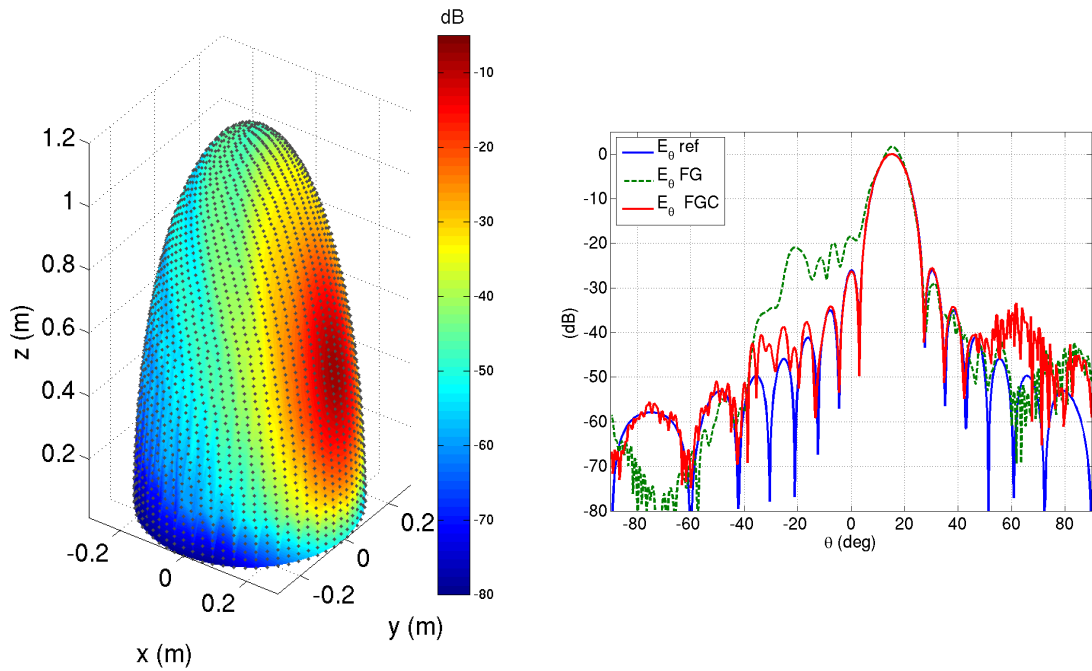


FIG. 3.7: À gauche : géométrie de la configuration. À droite : représentation des composantes  $E_\theta$  du champ électrique en zone lointaine (normalisé). Surface ellipsoïdale :  $A = B = 0.3\text{m}$ ,  $C = 1.2\text{m}$ .

Dans cette section nous avons montré sur quelques exemples que les faisceaux gaussiens conformes représentent un outil supplémentaire pour exprimer un champ défini sur une surface courbe en faisceaux élémentaires. Ils sont particulièrement adaptés lorsque la courbure de la surface est importante et que l'angle entre la direction de propagation

du champ et la normale à la surface devient grand.

Dans la section suivante, nous allons utiliser les faisceaux gaussiens conformes pour calculer le champ transmis par une interface diélectrique.

## II Applications des Faisceaux Gaussiens Conformes

Dans cette section, nous utilisons les Faisceaux Gaussiens Conformes (FGC) présentés au chapitre 1, pour traiter l'interaction d'un champ électromagnétique avec une interface diélectrique.

En zone lointaine d'une ouverture, le champ incident sur une interface correspond localement à une onde plane. Dans ce cas de figure, l'application de l'optique géométrique associée aux coefficients de transmission de FRESNEL donne de bons résultats et permet d'évaluer le champ transmis.

En zone proche ou intermédiaire, le champ incident n'a pas la structure d'une onde plane. Dans ce cas, on peut alors décrire le champ comme une superposition d'ondes planes grâce à la méthode du spectre d'ondes planes, et affecter à chacune d'elles le coefficient de FRESNEL approprié. Une autre possibilité consiste à décrire le champ comme la superposition du rayonnement issu de sources ponctuelles réparties sur l'ouverture. L'interaction peut alors être traitée en utilisant l'optique géométrique.

Cependant, ces deux méthodes impliquent généralement de considérer un très grand nombre d'ondes planes ou de rayons. L'exemple qui suit reprend le principe de ces techniques avec pour objectif de remplacer les ondes planes ou les sources ponctuelles par un nombre réduit de faisceaux gaussiens conformes. Cette technique peut être utilisée lorsque l'interface qui interagit avec le champ incident est en zone proche ou intermédiaire de l'ouverture, mais en zone lointaine de chacun des FGC utilisés.

Nous avons vu dans le chapitre 1, que le champ d'un faisceau gaussien conforme peut se mettre sous la forme d'un spectre d'ondes planes. L'expression analytique de ce spectre a été déterminée dans la section III.2.2. Or, un développement asymptotique de l'intégrale sur le spectre d'ondes planes d'un champ permet d'obtenir, grâce à l'utilisation des coefficients de réflexion et de transmission de FRESNEL, les champs réfléchis et transmis par une interface diélectrique. Cette approche a été utilisée avec succès pour le calcul des interactions antenne/radôme diélectriques (multicouches) avec les faisceaux gaussiens généralisés[142].

Toutefois, comme nous l'avons exposé dans le chapitre 1, nous n'avons pas pu déterminer un développement asymptotique de l'intégrale sur le spectre d'ondes planes d'un FGC qui soit valide en champ proche (cf. section III.4). Par contre, un développement asymptotique de cette intégrale est possible en zone lointaine d'un FGC.

Nous allons calculer le champ transmis par une interface diélectrique plane située à une distance  $D$  d'une ouverture rayonnante. Cette interface sépare deux milieux de

permittivité  $\varepsilon_1 = 1$  et  $\varepsilon_2 = 4$  et est éclairée par une ouverture de diamètre  $L = 8\lambda$  (cf. figure (3.8)). L'ouverture utilisée est circulaire et équiphasé, avec une amplitude constante sur l'ouverture donnée par la loi :

$$A(\rho) = 1 \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < L/2 \quad (3.21)$$

$$= 0 \quad \rho > L/2 \quad (3.22)$$

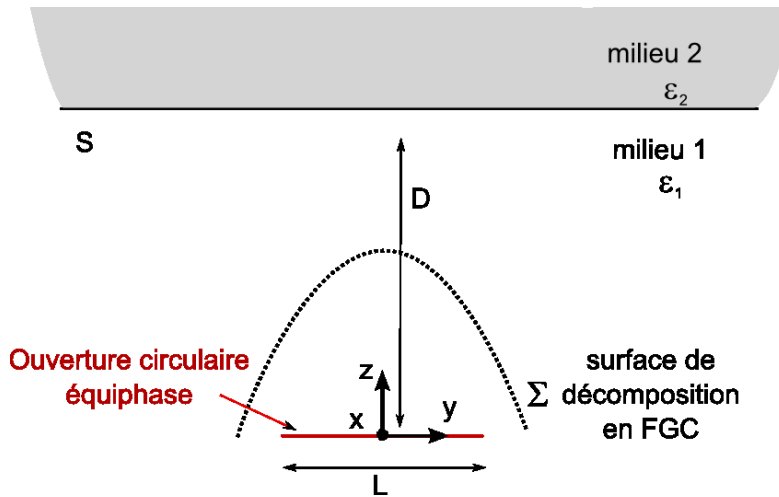


FIG. 3.8: Géométrie du cas de validation des champs transmis par des FGC.

Le champ rayonné par l'ouverture est décomposé sur une surface virtuelle en faisceaux gaussiens conformés. Cette surface est suffisamment courbe pour que la décomposition en faisceaux gaussiens classiques soit moins pertinente qu'une décomposition en FGC.

La définition classique de la zone lointaine d'une ouverture, distance au-delà de laquelle on peut employer la formule de FRESNEL pour calculer son rayonnement, est  $2L^2/\lambda$ [143]. À une fréquence de 10 GHz, cette valeur correspond à 3.8 m ( $L \approx 24$  cm).

On calcule les champs transmis de l'autre côté de l'interface de deux façons différentes. La première technique consiste à utiliser l'optique géométrique et les coefficients de transmissions de FRESNEL[18]. La seconde méthode consiste en l'application de la méthode de la phase stationnaire sur l'intégrale spectrale d'un faisceau gaussien conforme, pour laquelle le spectre d'ondes planes est pondéré par les coefficients de transmission  $\overline{\overline{T}}$ . Ce résultat correspond à l'expression (1.136) du chapitre 1, que l'on rappelle ici :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left( \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_s^J + \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_s^M \right) \overline{\overline{T}} \left( \frac{k}{r} \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}} \right) u_{\text{loin}}(\mathbf{r}) \quad (3.23)$$



Pour s'assurer que la méthode basée sur l'optique géométrique fonctionne, on place l'interface en zone lointaine, à la distance  $D = 30$  m. Les champs transmis sont représentés sur la figure (3.9).

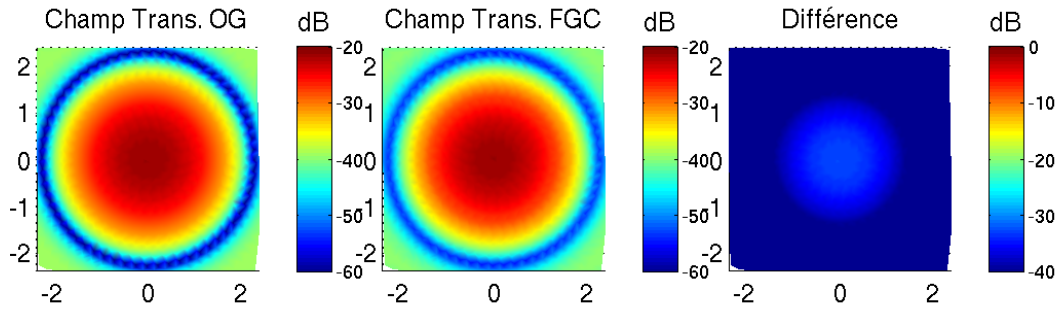


FIG. 3.9: Comparaisons des champs transmis par l'interface diélectrique.  
L'interface est placée à une distance  $D = 30$  m.

Si on rapproche la surface diélectrique, par exemple à une distance  $D = 3$  m, soit en zone "proche" de l'ouverture, le champ incident sur l'interface n'est plus correctement modélisé par l'optique géométrique comme on peut le voir sur la figure (3.10) où on compare le champ incident par rapport à une intégration numérique des intégrales de rayonnement.

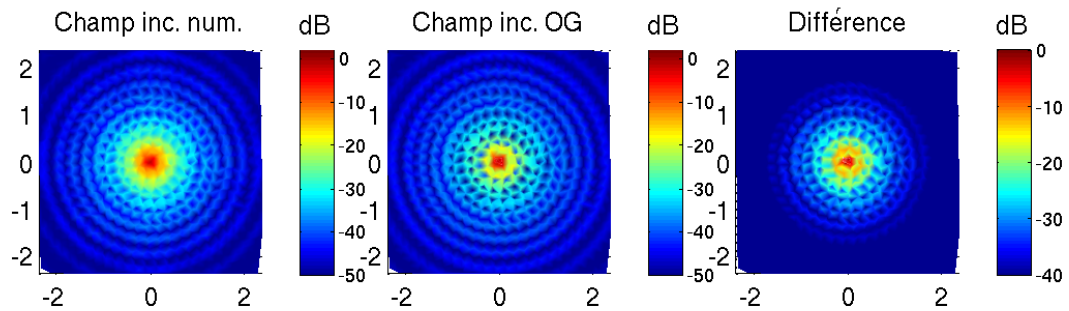


FIG. 3.10: Comparaisons des champs incidents sur l'interface diélectrique.  
L'interface est placée à une distance  $D = 3$  m.

Par contre, l'interface étant encore en zone lointaine de chaque faisceaux gaussiens conformes, le champ incident calculé à partir des FGC reste valide pour les premiers lobes, comme on peut le voir sur la figure (3.11).

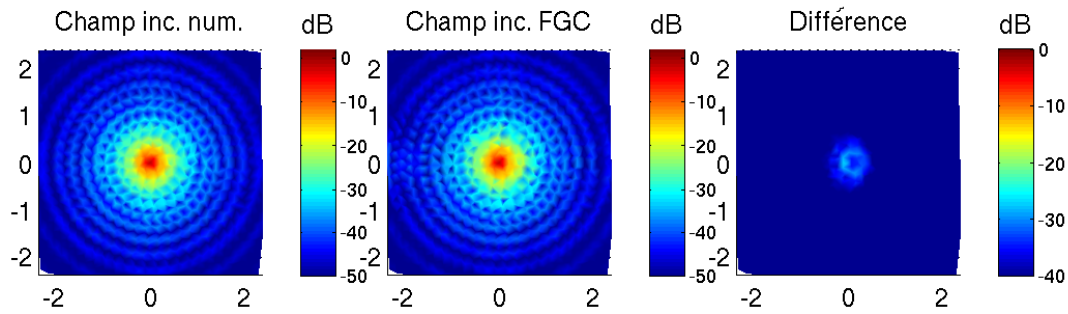


FIG. 3.11: Comparaisons des champs incidents sur l'interface diélectrique.  
L'interface est placée à une distance  $D = 3$  m.

Par conséquent, le champ transmis calculé à partir des FGC est également valide. Pour vérifier cette hypothèse, on compare le champ transmis ainsi calculé à la méthode du spectre angulaire d'ondes planes. On compare sur la figure (3.12) les champs transmis, calculés à partir du spectre angulaire d'ondes planes et à partir des FGC.

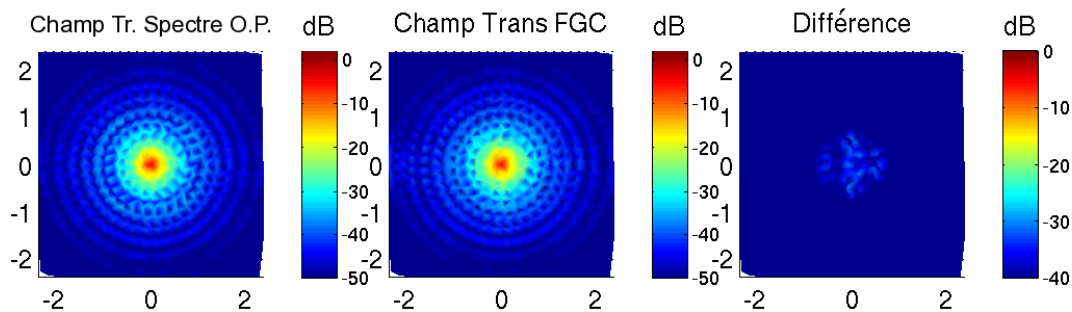


FIG. 3.12: Comparaisons des champs transmis par l'interface diélectrique.  
L'interface est placée à une distance  $D = 3$  m.

Comme on peut le constater, le champ transmis reste encore valide pour les premiers lobes, car la surface se situe toujours en champ lointain de chacun des FGC issus de la décomposition. Ce résultat peut être affiné en décomposant le champ initial avec plus de précision, auquel cas le domaine de validité sera élargi. Si la taille des faisceaux utilisés pour la décomposition diminue, alors la distance pour laquelle chacun des faisceaux sera en champ lointain de la surface diminuera également, permettant ainsi d'augmenter le domaine de validité.

Cet exemple simple et canonique nous permet de valider l'utilisation des faisceaux gaussiens conformes pour non seulement la décomposition de champ sur des surfaces de

forte courbure, mais aussi une bonne approximation des champs transmis (et réfléchis) par une interface diélectrique située dans une zone intermédiaire, où l'utilisation de l'optique géométrique devient moins précise.

### III Mesures en chambre anéchoïque

Afin de valider les expressions analytiques développées dans le chapitre précédent permettant le calcul du champ rayonné par une plaque métallique, nous avons mis en place une série de mesures en chambre anéchoïque.

La chambre anéchoïque du DEMR est une chambre adaptée aux mesures d'antennes, utilisable de 8 à 35 GHz. Un générateur HF issu d'un analyseur de réseau<sup>4</sup> alimente une antenne cornet non corrugué. Un dipôle fait office de récepteur. Le signal du dipôle est amplifié avant de rejoindre l'analyseur de réseau et permet de mesurer l'amplitude et la phase du champ reçu. Le dispositif de réception est placé sur un banc pilotable par ordinateur, le tout commandé par un logiciel d'acquisition. (cf. schéma (3.13)).

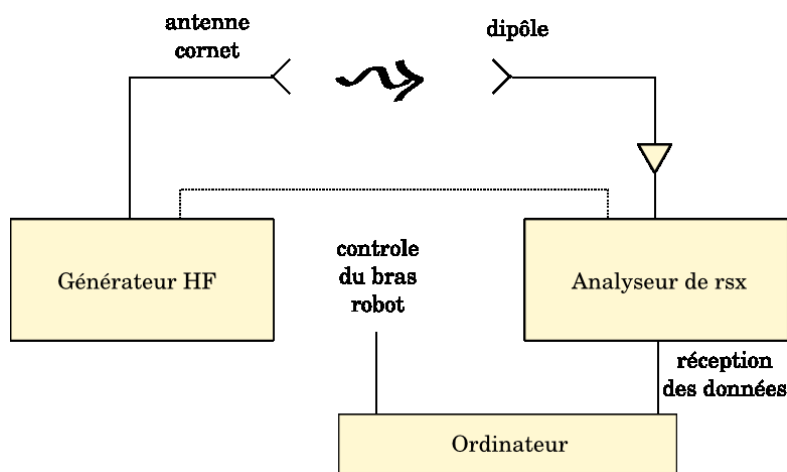


FIG. 3.13: Schéma de principe de la disposition des appareils de mesure.

<sup>4</sup>Analyseur de réseau vectoriel 40MHz-40GHz ANRITSU 37269D.

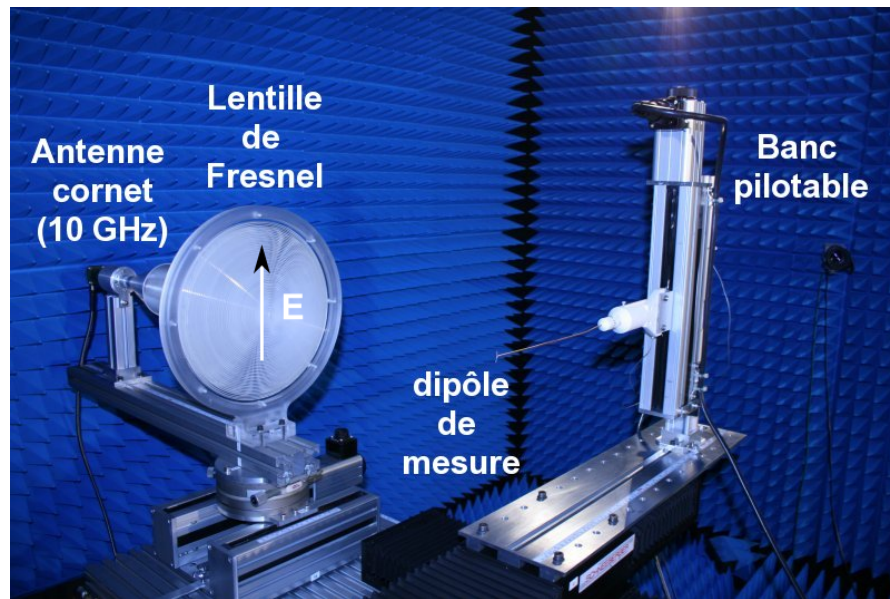


FIG. 3.14: Description des éléments du banc de mesure avec la lentille.

### III.1 Décomposition en faisceaux gaussiens et propagation du champ

La première étape des validations concerne la décomposition d'un champ électromagnétique en faisceaux gaussiens et sa propagation sous cette forme.

L'antenne utilisée est un cornet circulaire non corrugué, émettant à 9,97 GHz<sup>5</sup>. Une lentille de FRESNEL est placée devant le cornet circulaire afin de focaliser la majorité du champ émis dans la zone de mesure accessible au bras robot. Tous les éléments (antenne, lentille, bras robot) reposent sur une table d'environ un mètre de hauteur. Le dipôle de mesure associé à un amplificateur faible bruit permet d'obtenir une dynamique de mesure d'environ 30dB. Le dispositif de mesure est illustré sur la figure (3.14).

Une mesure "initiale" du champ est effectuée à une dizaine de centimètre de l'ensemble cornet-lentille. On décompose cette mesure "initiale" en un ensemble de faisceaux gaussiens. Chacun de ces faisceaux est ensuite propagé jusqu'à un second plan de mesure, situé à plusieurs dizaines de centimètres du premier. Une représentation schématique de la géométrie est illustrée sur la figure (3.15). Sur cette figure, nous avons représenté la position du cornet et de la lentille, ainsi que le plan de mesure "initial" en bleu, et le plan de mesure "propagé", en rouge. Dans cette configuration, la distance entre les deux plans de mesure est de 110 cm.

<sup>5</sup>Fréquence correspondant à l'adaptation optimale du dipôle.

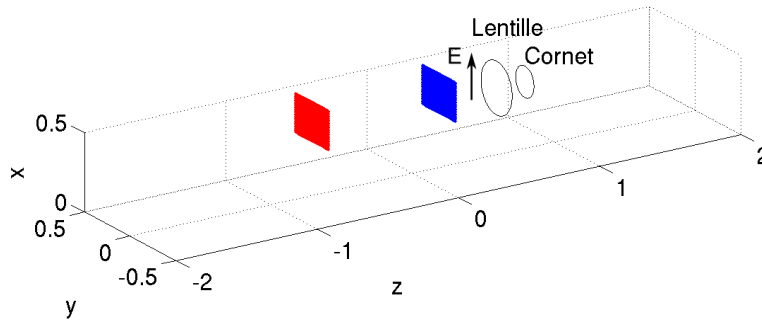


FIG. 3.15: Configuration des mesures. En bleu : le plan de mesure du champ "initial". En rouge, le plan de mesure du champ "propagé".

Le champ initial mesuré  $E_{\text{mes}}$  est décomposé en 176 faisceaux gaussiens. Le champ recomposé  $E_{\text{FG}}$  correspond à la sommation des 176 faisceaux. La sommation est effectuée aux points correspondant aux mesures afin d'évaluer la précision de la décomposition. Sur la figure (3.16), nous avons représenté le champ mesuré, recomposé ainsi que l'erreur entre les deux champs définie par  $\Delta = |E_{\text{mes}} - E_{\text{FG}}|$ .

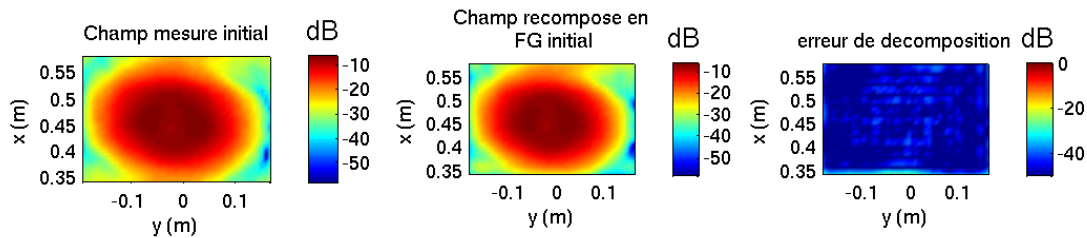


FIG. 3.16: À gauche : mesure du champ dans le plan "initial". Au milieu : champ recomposé à partir de 176 FGs. À droite : module de l'erreur commise.

À partir de la décomposition initiale en faisceaux gaussiens, chacun des faisceaux est propagé jusqu'aux points correspondant à la seconde mesure (points rouges sur la figure (3.15)). Le champ "propagé" (mesuré aux points rouges) est représenté sur la figure suivante. Nous avons également représenté l'erreur commise entre le champ mesuré et le champ propagé obtenu par la recombinaison de 176 faisceaux.

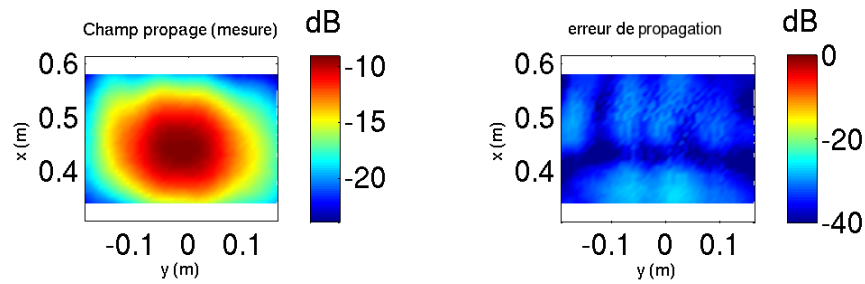


FIG. 3.17: Champ mesuré à une distance de 110 cm de la mesure initiale. À droite : module de la différence entre cette mesure et le champ propagé issu de la recombinaison des faisceaux gaussiens aux mêmes points.

L'erreur de recombinaison est insignifiante en comparaison de la dynamique de la mesure. Pour 176 faisceaux, les erreurs de recombinaison sont inférieures à -25 dB. L'utilisation d'un plus grand nombre de faisceaux diminue cette erreur. Le nombre de faisceaux utilisé permet d'ajuster le compromis entre précision et vitesse de calcul.

### III.2 Rayonnement d'une plaque métallique

Afin de mesurer le champ rayonné par un objet conducteur diffractant éclairé par le dispositif cornet-lentille, nous avons placé une plaque métallique de dimensions  $50 \times 45$  cm entre la lentille et le bras de mesure. La figure (3.18) est un aperçu du dispositif mis en place.



FIG. 3.18: Aperçu du dispositif de mesure du champ rayonné. Une plaque métallique est placée devant la lentille. Les mesures de champs sont effectuées derrière la plaque.

Afin de se placer dans le domaine de validité des formulations développées, on dispose la plaque à proximité de la lentille afin que le dispositif de réception soit en zone lointaine des faisceaux utilisés pour la décomposition. On fait l'hypothèse que le champ incident sur la plaque correspond au champ incident "à vide", c'est-à-dire sans la présence de la plaque. On utilise alors des mesures effectuées dans la section précédente pour déterminer le champ incident sur la plaque.

### III.2.1 Diffraction par une arête horizontale en polarisation verticale

La configuration générale est illustrée sur la figure (3.19). Le repère absolu est défini relativement à la position de la plaque (en noir). Les points bleus et rouges correspondent aux mesures effectuées sans la présence de la plaque. Les points de mesure représentés en bleu correspondent aux points sur lesquels on décompose le champ mesuré en faisceaux gaussiens. Les points noirs correspondent aux points de mesure en présence de la plaque.

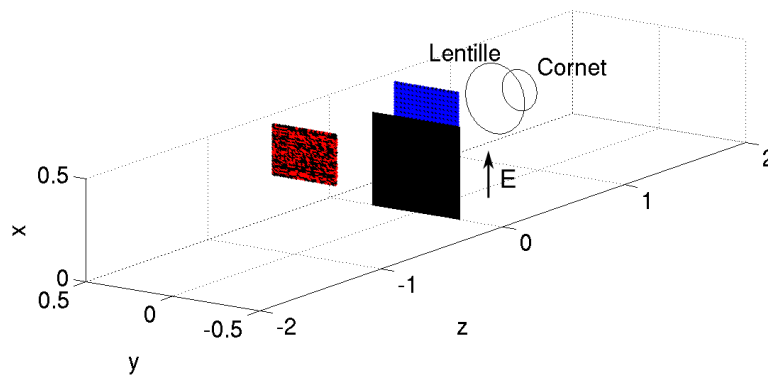


FIG. 3.19: Illustration de la configuration générale des mesures de champ rayonné par la plaque. Les points bleus et rouges correspondent aux points de mesure du champ sans la présence de la plaque. Les points noirs correspondent aux points de mesure en présence de la plaque. Les points rouges et noirs sont confondus.

Le champ incident mesuré sans la présence de la plaque correspond au champ décomposé en faisceaux gaussiens de la section précédente (176 faisceaux gaussiens). Le champ incident sur la plaque est calculé en faisant propager ces faisceaux sur la plaque. La mesure du champ derrière la plaque est comparée à plusieurs techniques :

- La formulation analytique développée au chapitre 2 ;
- L'intégration numérique de l'intégrale de rayonnement des courants dans l'hypothèse de l'optique physique ;
- La méthode des moments, à partir du code ELSEM3D de l'ONERA-DEMR.



L'utilisation de l'intégration numérique dans l'hypothèse de l'optique physique nous permet de valider notre formulation analytique. L'utilisation de la méthode des moments nous permet d'observer quels sont les effets dûs à la diffraction qui ne sont pas pris en compte par l'hypothèse de l'optique physique. Nous avons représenté sur la figure (3.20) les champs totaux mesurés et calculés par ces trois techniques<sup>6</sup>.

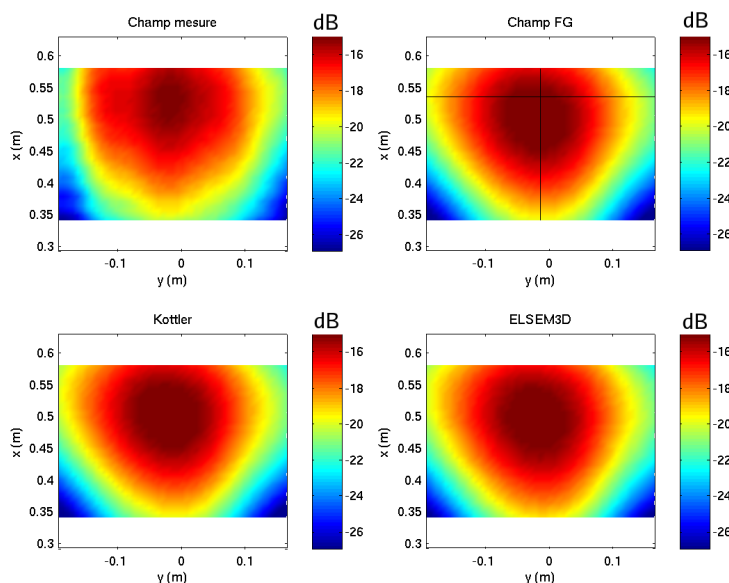


FIG. 3.20: Comparaison de l'amplitude en dB du champ mesuré (en haut à gauche) avec les champs totaux calculés. En haut à droite : OP analytique. En bas à gauche : OP numérique. En bas à droite : MoM (ELSEM3D). Les lignes noires correspondent aux coupes réalisées sur la figure (3.21).

On remarque que l'allure du champ mesuré diffère de l'allure des champs calculés. On peut faire plusieurs remarques sur ce point, pour tenter d'expliquer cette différence.

Tout d'abord, l'utilisation de la formulation analytique uniforme du champ rayonné est justifiée dans la mesure où les points d'observation sont situés en zone lointaine du point d'intersection des faisceaux avec le plan conducteur. Pour vérifier cette hypothèse, on compare le résultat obtenu avec le calcul numérique de l'intégrale de rayonnement dans l'hypothèse de l'optique physique. On constate sur la figure (3.20) que les résultats

<sup>6</sup>Le champ incident, c'est-à-dire le champ sans la présence de la plaque, doit être ajouté aux champs rayonnés de façon à obtenir le champ total, celui que l'on mesure. On peut également retrancher le champ incident au champ mesuré, afin de comparer uniquement les champs rayonnés par la plaque et non plus le champ total.

sont similaires. Par conséquent, nous en déduisons que l'hypothèse champ lointain est vérifiée dans cette situation.

Cette différence pourrait éventuellement s'expliquer par l'utilisation de l'hypothèse de l'optique physique pour calculer le courant sur la plaque. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons calculé le champ rayonné en utilisant la méthode des moments. Or, on constate sur la figure (3.20) que les résultats obtenus par cette méthode sont similaires aux résultats obtenus avec l'optique physique. Par conséquent, nous en déduisons que l'approximation de l'optique physique est donc justifiée dans cette situation.

Aussi, il apparaît envisageable que le champ incident sur la plaque ne correspond pas en réalité au champ incident à vide. Cela peut provenir en partie du couplage entre la plaque et la source. Dans cette configuration de mesure, nous n'avons pas pu éliminer ce couplage ou tout autre perturbation.

Afin de visualiser avec plus de précision ces résultats, nous avons représenté une coupe horizontale et verticale des champs rayonnés, passant par le maximum du champ mesuré. Elles sont représentées sur la figure (3.21).

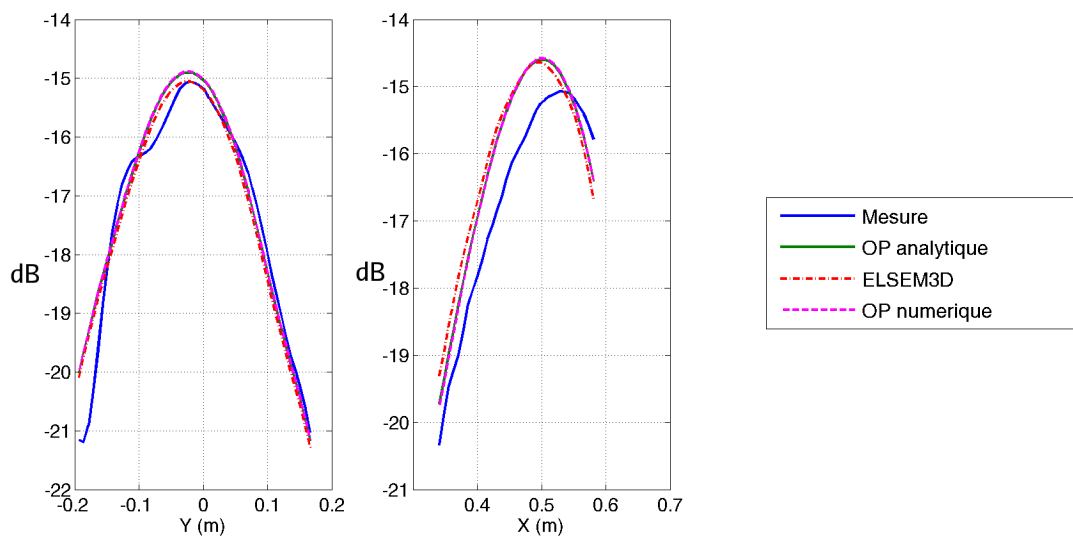


FIG. 3.21: Comparaison de l'amplitude en dB des champs totaux. À gauche : coupe en  $X=0.536$  m. À droite : coupe en  $Y=-0.01344$  m.

On note que les coupes des champs évalués de façon analytique et numérique dans l'hypothèse de l'optique physique coïncident. L'erreur moyenne constatée entre l'optique physique analytique et numérique est de -50 dB. Le champ rayonné calculé avec la méthode des moments reste quant à lui très proche des deux précédents. L'erreur moyenne

constatée entre l'optique physique analytique et la méthode des moments est de -40 dB. À titre d'information, les temps de calcul moyens de ces cartographies (576 points, correspondant aux points de mesure) sont reportés dans le tableau suivant<sup>7</sup> :

Technique	Temps de calcul
OP analytique	0.5 min pour 176 FGs
OP numérique	5 min
MoM/FMM	31 min

L'expression analytique développée dans le chapitre 2 est en accord avec le calcul numérique dans l'hypothèse de l'optique physique. Lorsque l'observation se fait dans le voisinage des directions principales de rayonnement, comme dans le cas présent, l'hypothèse de l'optique physique donne de bons résultats en comparaison de méthodes exactes.

Nous avons représenté sur les figures (3.22, 3.23, 3.24) page 173, les cartographies du champ total, calculés dans le plan  $zOx$  par la méthode des moments puis par notre technique analytique et enfin l'erreur entre les deux. Sur ces figures, le champ incident provient de la droite des images. Les erreurs observées entre les deux champs sont principalement de deux natures :

- le champ analytique semble "traverser" le plan métallique à son proche voisinage (figure (3.23)). Cette erreur est liée à l'hypothèse champ lointain de la formulation analytique. Au-delà d'une certaine distance, on retrouve un champ à l'allure correcte.
- un champ total plus intense en dehors de la zone principale de rayonnement et des différences dans les figures d'interférences, repérables sur la figure (3.24). Ces différences sont principalement dues à l'utilisation de l'approximation de l'optique physique. Cette différence d'amplitude et de phase a pour origine le champ diffracté par les arêtes. Or, ce champ n'est pas correctement modélisé avec l'optique physique<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>Le temps de calcul des courants sur la plaque par ELSEM3D est de l'ordre de 25 min. Le reste du temps correspond au calcul du rayonnement de ces courants.

<sup>8</sup>On remarque d'ailleurs sur cette figure l'importance du rayonnement de l'arête inférieure de la plaque. Cet effet est beaucoup moins important dans l'hypothèse de l'optique physique.

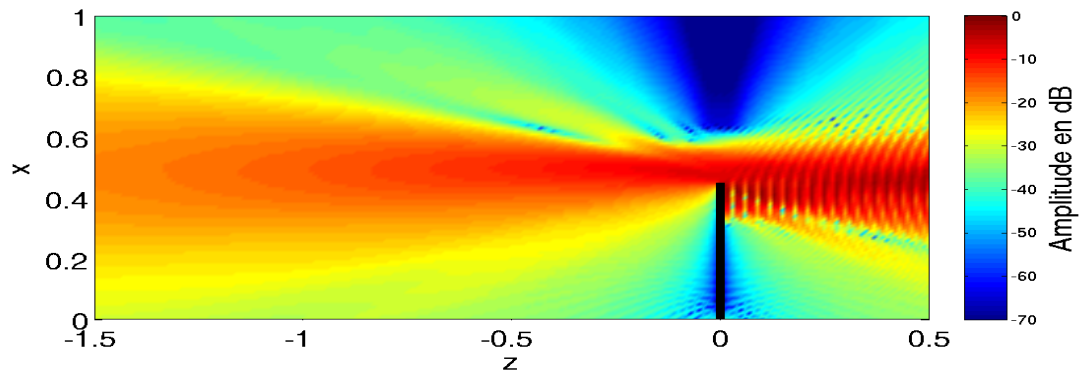


FIG. 3.22: Cartographie de l'amplitude du champ total calculé avec la méthode des moments (ELSEM3D). La source du champ incident créé par l'antenne et la lentille par situé à la droite de l'image.

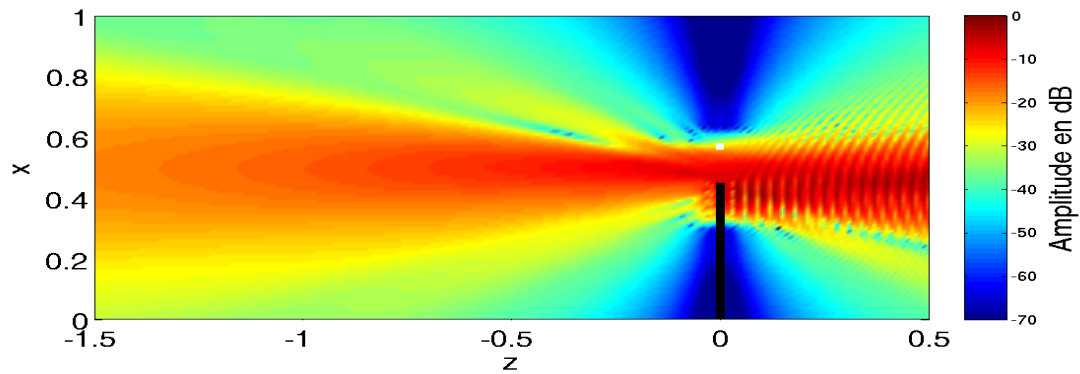


FIG. 3.23: Cartographie de l'amplitude du champ total calculé avec la technique analytique.

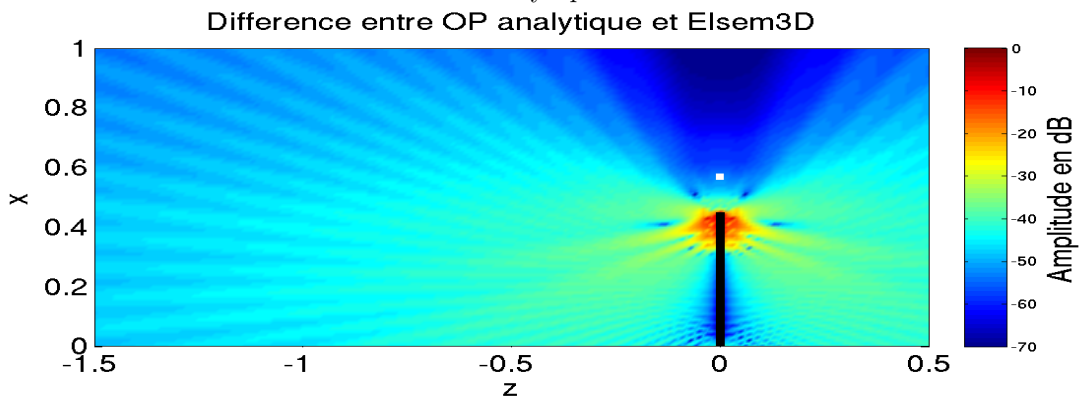


FIG. 3.24: Différence entre la formulation analytique (Optique Physique) et la méthode des moments (ELSEM3D).

Enfin, sur la figure (3.25), nous avons représenté le module de l'erreur entre la formulation analytique et l'évaluation numérique des intégrales de rayonnement des courants de l'optique physique. L'hypothèse *grande distance* utilisée dans le calcul de la formulation analytique est visible sur cette cartographie : on constate que les différences entre les deux approches sont principalement localisées en champ proche de la plaque.

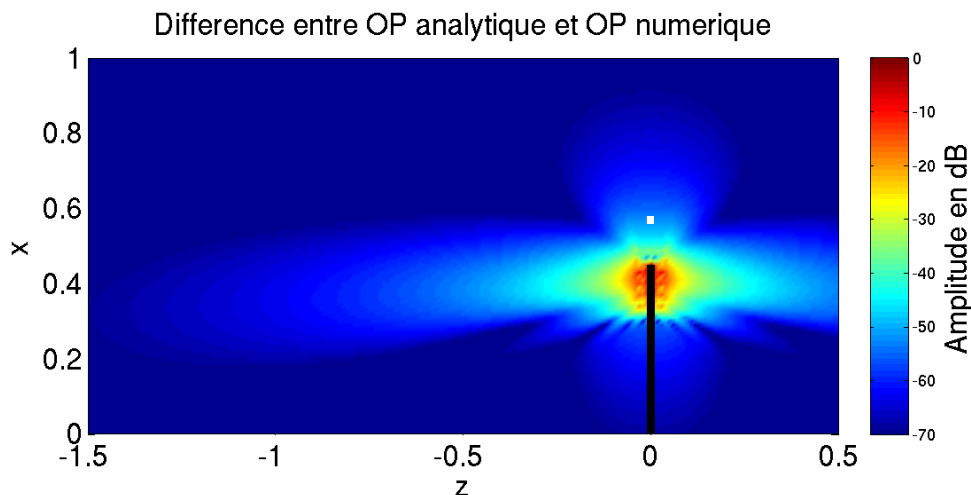


FIG. 3.25: Différence entre la formulation analytique et l'intégration numérique (Optique Physique).

Les temps de calculs nécessaires pour calculer ces cartographies (20301 points) sont reportés dans le tableau suivant<sup>9</sup> :

Technique	Temps de calcul
OP analytique	<5 min pour 176 FGs
OP numérique	60 min
MoM/FMM	157 min

Sur ce cas concret, on constate que le résultat analytique est similaire à l'intégration numérique (OP) à grande distance de la plaque, conformément aux hypothèses utilisées. Les différences avec la méthode des moments sont principalement dues aux effets de diffraction de l'arête, effets qui ne sont pas pris en compte par l'hypothèse de l'optique physique. Bien que l'amplitude des effets de diffraction soit faible, ils deviennent non

<sup>9</sup>Le temps de calcul des courants sur la plaque par ELSEM3D est de l'ordre de 25 min. Le reste du calcul correspond au rayonnement de ces courants. (La précision du maillage de la plaque étant plus fine ( $\lambda/7$ ), le temps de calcul du champ rayonné par ces courants est plus important que pour la technique de l'OP numérique.)

négligeables en dehors des zones de rayonnement principales. Ces constatations sont en accord avec les conclusions établies dans le chapitre 2.

### III.2.2 Diffraction par une arête verticale en polarisation verticale

Dans la configuration suivante, le faisceau incident éclaire principalement l'arête verticale de la plaque métallique. La géométrie de cette configuration est illustrée sur la figure (3.26). La plaque est légèrement décentrée par rapport au centre de la lentille afin de mettre en évidence l'effet du champ diffracté sur la symétrie du champ total.

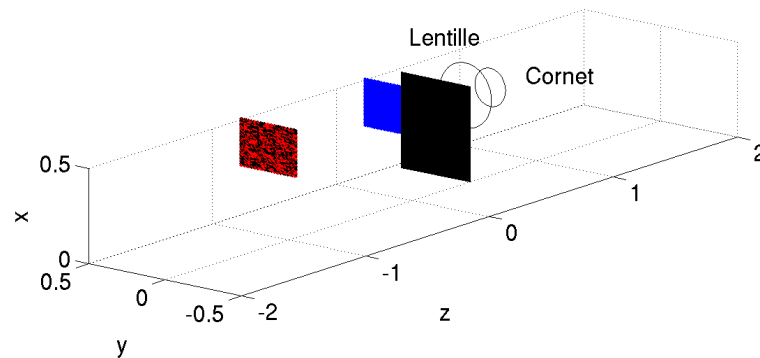


FIG. 3.26: Illustration de la configuration générale des mesures de champ rayonné par la plaque. Les points de mesures en rouge (sans le plan) et noir (avec la plaque) sont confondus.

Le champ rayonné par la plaque est calculé après avoir décomposé le champ incident en faisceaux gaussiens. On compare ces résultats à la mesure effectuée. Le champ total mesuré et calculé derrière la plaque est représenté sur la figure (3.27). Deux coupes de ces cartographies, correspondant à l'axe vertical et horizontal passant par le centre de la lentille, sont effectuées sur la figure (3.28).

Le calcul du champ rayonné avec la méthode analytique correspond bien aux champs évalués par l'optique physique numérique et avec la méthode des moments. La correspondance avec le champ mesuré est un peu moins bonne, en particulier dans l'axe vertical. En revanche, elle apparaît meilleure que dans la mesure précédente. Cela est sûrement lié à un couplage moins important entre la plaque et la source, du fait du décalage de la plaque.

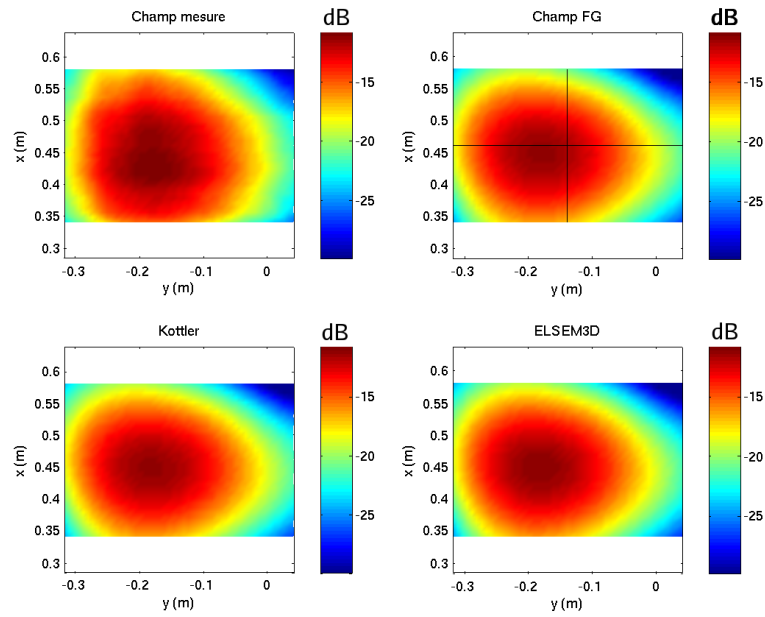


FIG. 3.27: Comparaison de l'amplitude en dB du champ mesuré (en haut à gauche) avec les champs totaux calculés. En haut à droite : OP analytique. En bas à gauche : OP numérique. En bas à droite : MoM (ELSEM3D). Les lignes noires correspondent aux coupes réalisées sur la figure (3.28).

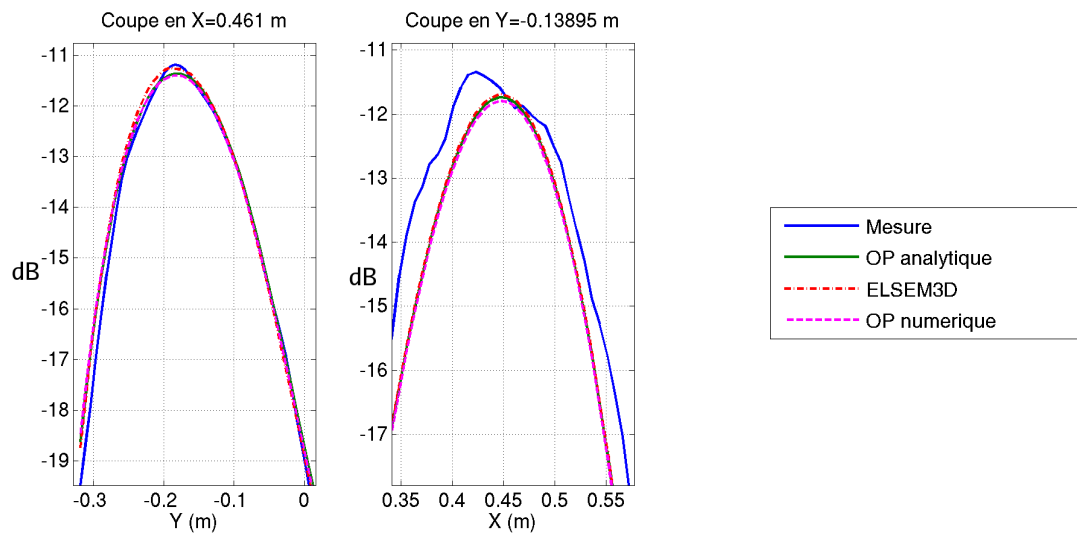


FIG. 3.28: Comparaison des champs rayonnés. À gauche : coupe en  $X=0.461$  m. À droite : coupe en  $Y=-0.13895$  m.



## IV Application des faisceaux gaussiens aux calculs de propagation

Dans cette section, nous appliquons le formalisme des faisceaux gaussiens aux calculs de propagation électromagnétique sur de grandes distances.

La prédiction des performances des systèmes électromagnétiques est nécessaire pour améliorer leur conception ou pour aider la prise de décision en contexte opérationnel. Les domaines d'applications sont nombreux : télécommunications terrestres ou Terre-espace, applications navales ou systèmes de défense aérienne. De nombreux modèles sont ramenés à des problèmes 2D et peu de techniques rapides et précises existent pour modéliser la propagation en 3D sur de grandes distances. Dans ce domaine, les méthodes les plus connues sont :

- Le lancer de rayons. La propagation des rayons dans une scène ainsi que leurs interactions avec objets sont calculées analytiquement. Les méthodes de lancer de rayons sont bien connues dans la littérature et de nombreux codes opérationnels existent. Toutefois, en présence d'objets diffractants, le nombre de rayons à traiter peu rapidement devenir très important, limitant d'autant les performances. Enfin, il peut être nécessaire de décrire les obstacles par des surfaces paramétrées ou par des facettes polygonales, dont la taille dépend de la fréquence[18].
- La résolution de l'équation parabolique 2D et 3D[144]. Cette solution est robuste en cas d'incidence rasante et permet de traiter la diversité des reliefs rencontrés dans ce contexte ainsi que de modéliser le gradient d'indice de l'atmosphère. Les hypothèses utilisées lors de la résolution de l'équation parabolique ne permettent pas de calculer le champ rétro-diffusé par les obstacles<sup>10</sup> et contraignent les champs à peu s'écarter de la direction de propagation (hypothèse paraxiale)[145].

Les exemples qui suivent sont purement canoniques. Ils n'ont pour d'autres objectifs que de montrer le potentiel du formalisme des faisceaux gaussiens appliqué à la problématique de la propagation 3D, en complémentarité des techniques et méthodes citées ou existantes.

---

<sup>10</sup>Bien que cela soit possible en propageant le champ en sens inverse une fois la propagation calculée dans un sens.

### IV.1 Propagation d'un champ au dessus d'un sol plan conducteur

Dans cet exemple, nous faisons propager le champ électromagnétique rayonné par une antenne dont le champ dans l'ouverture est connu. Le sol est modélisé comme une surface plane parfaitement conductrice. La réflexion est gérée par un algorithme de lancer de faisceaux gaussiens, ce qui revient dans ce cas à l'utilisation du *théorème des images* [146, 147]. L'émetteur est modélisé par une ouverture en arche de cosinus d'une largeur  $L = 8\lambda$  à 10 GHz, situé au point  $(x = 0, y = 0, z = h = 30m)$ . La polarisation de l'ouverture est horizontale. Le phénomène de réfraction induit par l'atmosphère n'est pas pris en compte et l'indice de l'atmosphère est égal à 1.

La configuration générale est représentée sur la figure (3.29). Le champ propagé est calculé sur une distance d'un kilomètre sur deux plans d'observation. Le plan vertical (en rouge) est située en  $x = 0m$ ,  $y \in [0, 100]m$ ,  $z \in [0, 1000]m$  avec un pas d'un demi mètre en  $x$  et d'un mètre en  $z$  (soit 201201 points). Le plan horizontal (en bleu) est situé en  $x \in [-150, 150]m$ ,  $y = h/2 = 15m$ ,  $z \in [0, 1000]m$  (soit 601601 points). Une fois le champ décomposé en faisceaux gaussiens, on calcule sa propagation en sommant le champ propagé de chacun des faisceaux aux points d'observation.

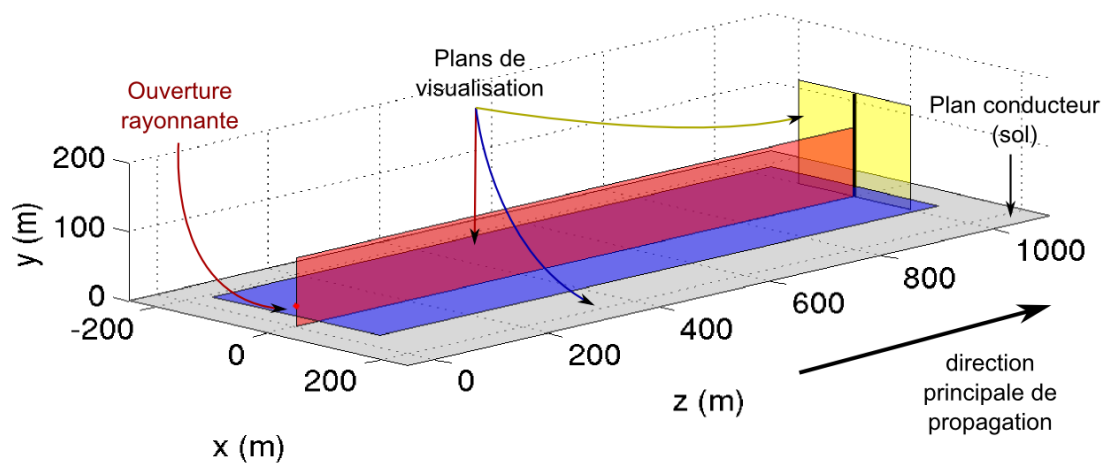


FIG. 3.29: Géométrie de l'exemple de propagation au-dessus d'un sol plan.

La démarche utilisée est la suivante : le champ issu de l'ouverture est décomposé en faisceaux gaussiens. La propagation de chacun de ces faisceaux (et de leurs faisceaux images) est calculée analytiquement aux points d'observations.

Le choix du champ dans l'ouverture est *a priori* arbitraire, dans la mesure où il peut être décomposé en faisceaux gaussiens généralisés ou conformes. Pour illustrer la généralité de la démarche proposée, le champ de la source est décomposé sur une surface

sphérique située à quelques longueurs d'ondes de l'ouverture en 472 faisceaux (figure 3.30). Les paramètres de décompositions correspondent à ceux définis dans la section (I).

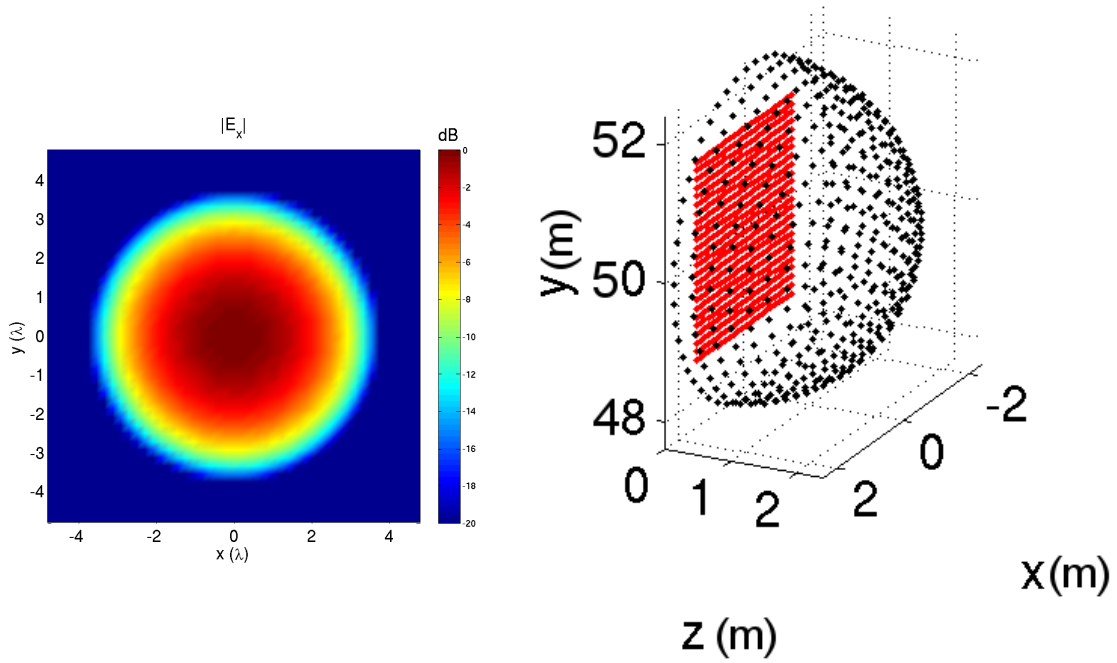


FIG. 3.30: À gauche : champ électrique dans l'ouverture. À droite : surface (virtuelle) de décomposition en FGs (noir) placée autour de l'ouverture (en rouge).

Sur la figure (3.31), on représente le *facteur de propagation*, c'est-à-dire le champ normalisé par rapport à une source ponctuelle, de la composante parallèle  $E_x$  du champ propagé. Le calcul est effectué en 150 secondes pour les 472 faisceaux sur 201201 points.

On observe sur cette figure des interférences régulières en hauteur. Ces interférences sont dues à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi par le sol. La distance entre deux zéros dépend de la distance par rapport à la source et se calcule analytiquement à grande distance[143] :

$$\Delta_h(d) = \frac{\lambda d}{2h_e} \quad (3.24)$$

où  $\lambda$  correspond à la longueur d'onde (soit environ 3cm ici),  $d$  la distance par rapport à la source et  $h_e$  la hauteur de l'émetteur, ici 30 mètres.

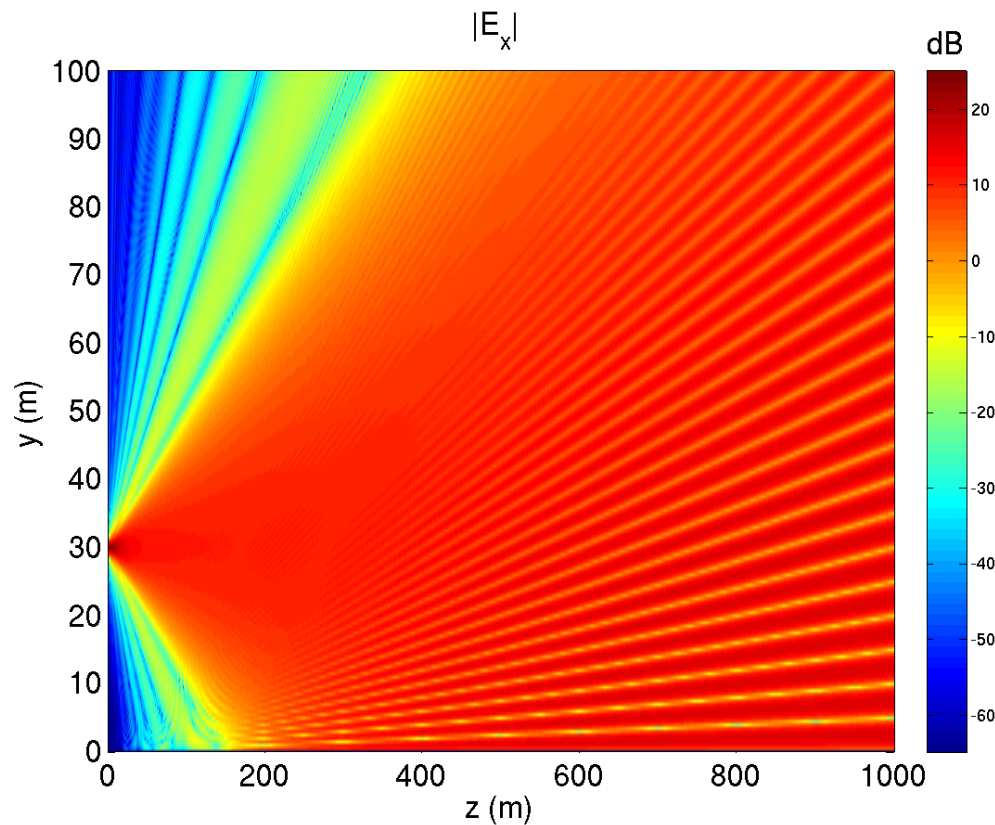


FIG. 3.31: Facteur de propagation de la composante  $E_x$  du champ propagé dans le plan vertical (la figure n'est pas à l'échelle).

On représente sur la figure (3.32) la cartographie du plan ( $xOy$ ) calculée à une distance  $z = 1000$  m de la source. On effectue une coupe en  $y$  située en  $x = 0$  sur la figure (3.33), où nous avons représenté par des lignes verticales bleues le lieu théorique des zéros d'interférences  $\Delta_h$ . On observe qu'ils correspondent au calcul.

Sur la figure (3.33), on vérifie également que la composante horizontale  $E_x$  du champ est nulle en  $y = 0$ , satisfaisant aux conditions de continuité imposées par la présence du sol conducteur<sup>11</sup>.

<sup>11</sup>On vérifie également que la seconde composante horizontale  $E_z$  est nulle et que la composante perpendiculaire  $E_y$  est maximum en  $y = 0$ .

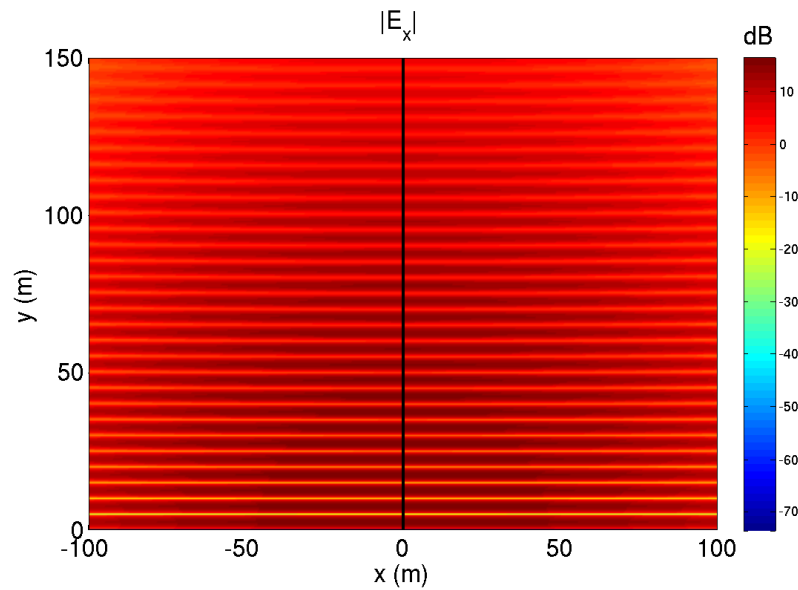


FIG. 3.32: Amplitude (en dB) de la composante parallèle  $|E_x|$  du champ électrique, à une distance de  $z = 1000$  mètres de la source. La ligne noire au centre représente la coupe illustrée sur la figure (3.33)

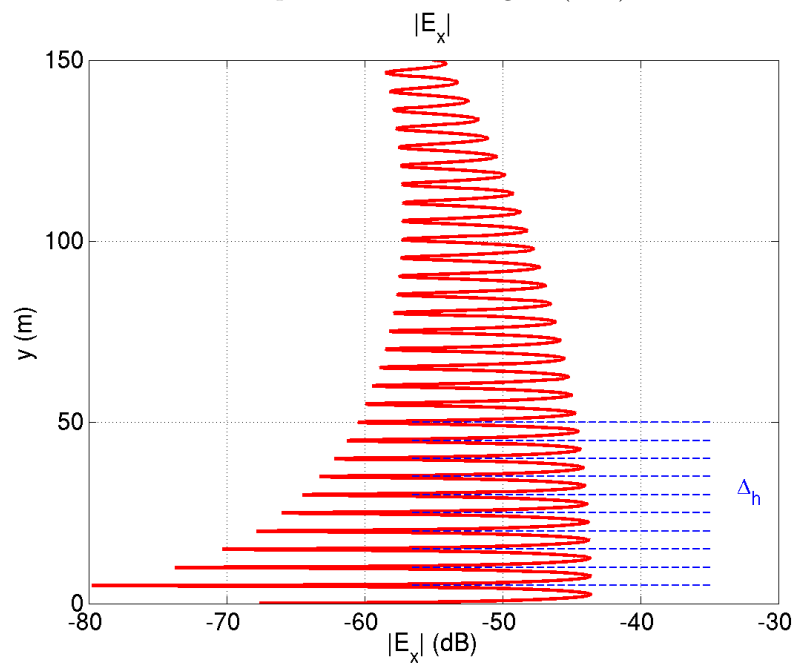


FIG. 3.33: Amplitude (en dB) de la composante parallèle  $|E_x|$  du champ électrique, à une distance de  $z = 1000$  mètres de la source sur une coupe  $y$  située en  $x=0$ .

Sur la figure (3.34), nous avons représenté les facteurs de propagation relatifs aux composantes  $E_x$  et  $E_z$  du champ électrique dans les coupes horizontales ( $xOz$ ).

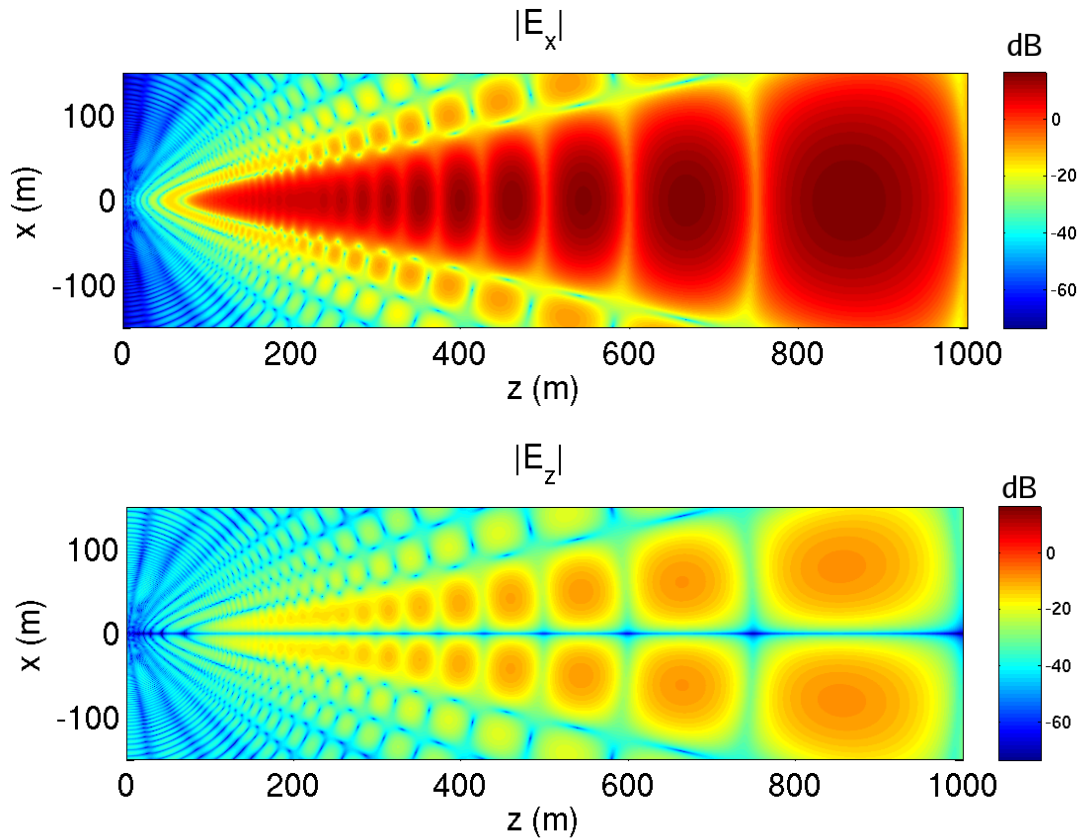


FIG. 3.34: Facteur de propagation (en dB) de la composante  $E_x$  et  $E_z$  du champ propagé dans le plan horizontal.

On observe également des figures d'interférences dues à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi sur le sol. La distance  $d$  entre deux maxima (respect. deux minima) peut également être déterminée analytiquement et vaut approximativement [143] :

$$\Delta_d = \frac{\lambda d^2}{2h_e h_r} \quad (3.25)$$

où  $h_r$  correspond à la hauteur d'observation, ici 15 mètres. On vérifie cette périodicité sur une coupe à hauteur constante pour  $y = h/2 = 15\text{m}$  de la composante  $E_x$ , représenté sur la figure (3.35).

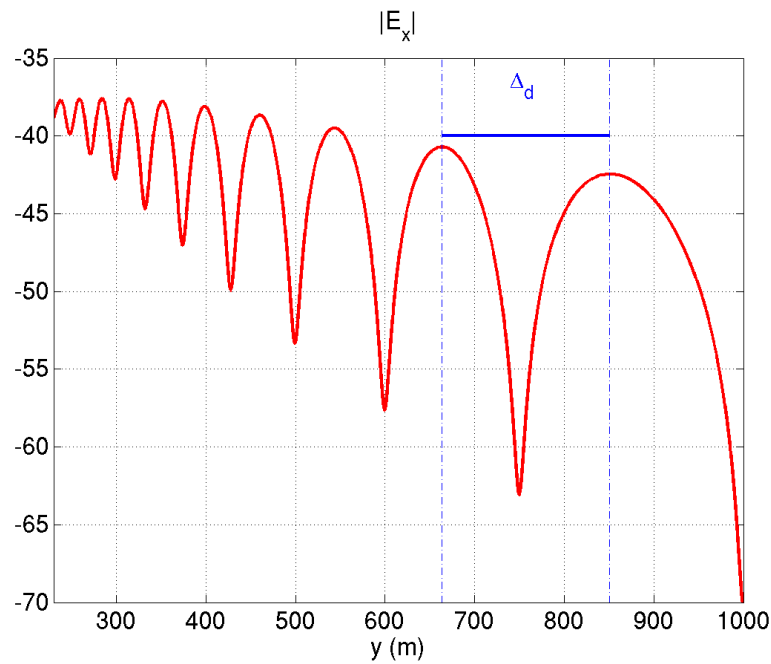


FIG. 3.35: Coupe de l'amplitude (en dB) de la composante parallèle  $|E_x|$  du champ électrique, à une hauteur  $y = 15$  m.

## IV.2 Plaque conductrice perpendiculaire au sens de propagation

Dans cette section, on teste les performances des expressions analytiques modélisant le rayonnement d'un plan conducteur éclairé par une onde électromagnétique dans un contexte de propagation.

Ainsi, on place un émetteur à une hauteur  $h_e = 50$  m, situé à 6,5 km d'un écran conducteur. L'écran a une largeur de 100 m et une hauteur de 50 m. Afin de simplifier l'analyse des résultats obtenus, le champ de la source correspond à un unique faisceau gaussien circulaire de demi-largeur  $W_0 = 8\lambda$  à une fréquence de 1 GHz. Le faisceau est polarisé horizontalement (axe  $x$ ). La configuration est représentée sur la figure (3.36).

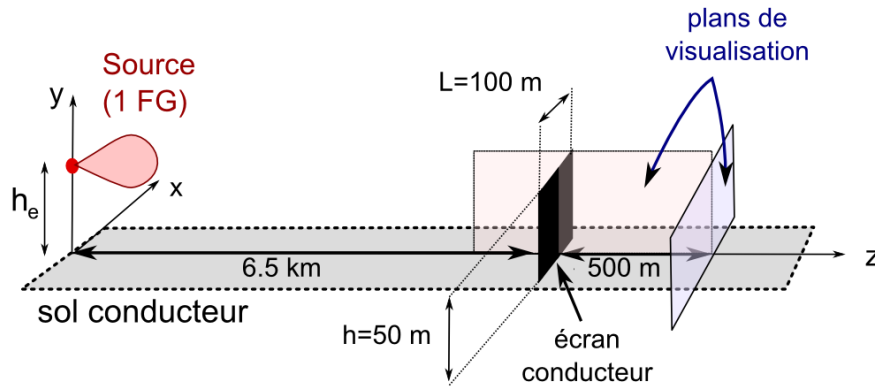


FIG. 3.36: Géométrie du cas test.

Afin d'illustrer la généralité de la démarche, on décompose le champ incident en faisceaux gaussiens juste devant l'écran conducteur. Le champ incident devant l'écran conducteur ainsi que le champ recomposé à partir de 576 faisceaux sont illustrés sur la figure (3.37). Le nombre de ces faisceaux est défini par leur disposition sur une grille régulière dont les points sont espacés de  $20\lambda$ . La largeur de chaque faisceau est déterminée à partir de la relation (3.1), c'est-à-dire  $W_0 = \frac{d}{9}$  où  $d$  est la distance entre deux faisceaux.

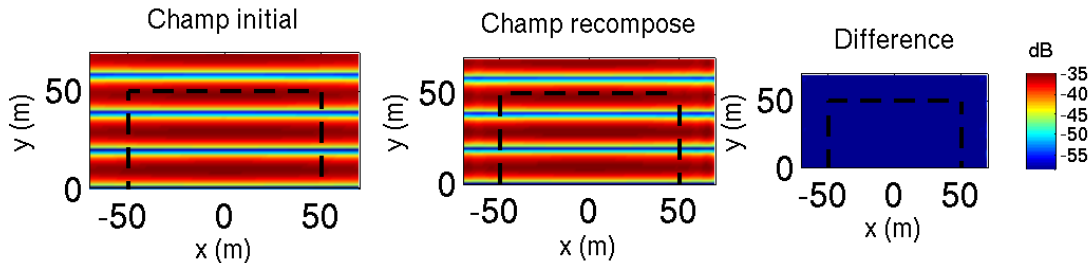


FIG. 3.37: Champ incident devant l'écran conducteur (représenté en ligne brisée), champ recomposé en 576 FGs et erreur de décomposition.

Le champ total correspond au champ rayonné par l'écran éclairé par les 576 FGs issus de la décomposition, sommé au champ incident en tous points de l'espace. La recombinaison du champ rayonné dans l'hypothèse de l'optique physique avec le champ incident annule le champ derrière l'écran. Pour modéliser la présence du sol, on utilise un faisceau gaussien "image" ainsi qu'un écran "image", symétrique de l'écran par rapport au sol. Le champ total, somme des champs rayonnés et des champs incidents, est représenté dans une coupe dans le plan  $yOz$  sur la figure (3.38).



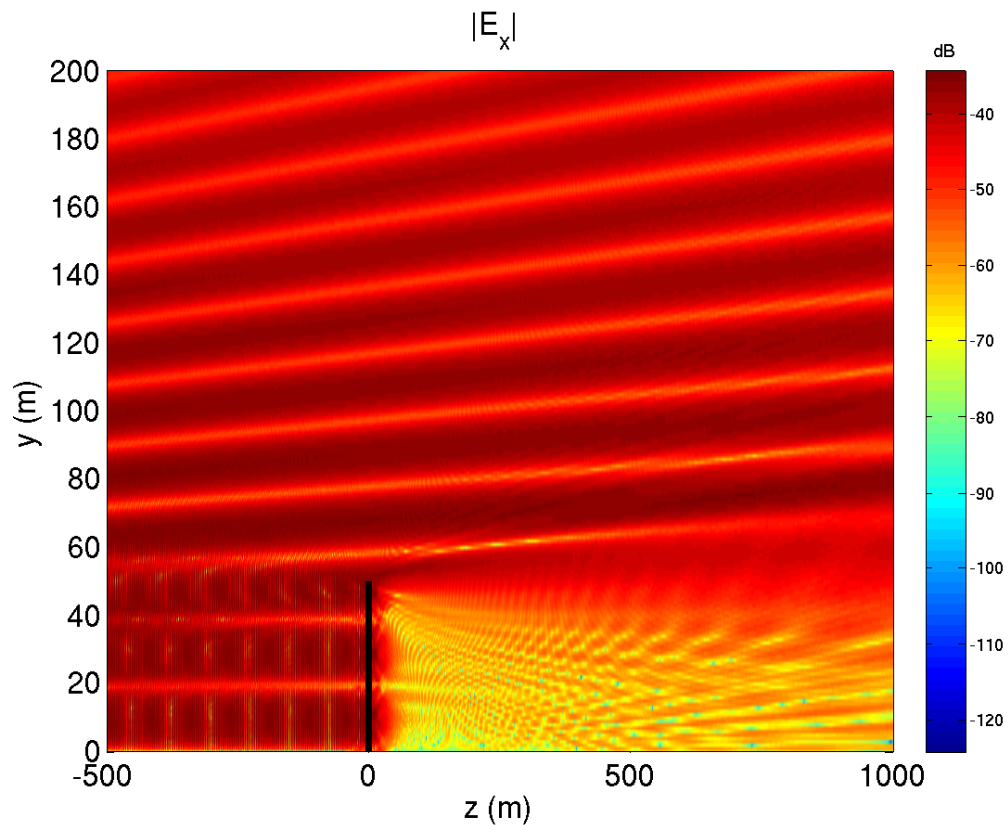
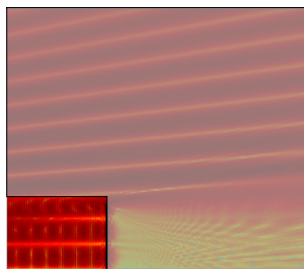
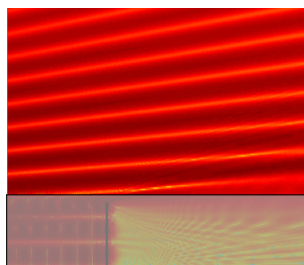


FIG. 3.38: Cartographie  $yOz$  du champ total ( $x=0$  m). Le champ incident sur l'écran est décomposé en 576 FGs

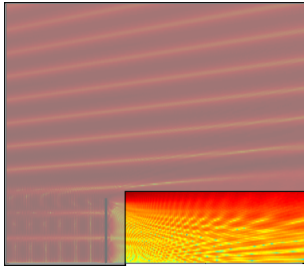


À gauche de l'écran conducteur, on observe le champ réfléchi par ce dernier. La source étant située à grande distance de l'écran, le front d'onde sphérique incident est quasiment plan au niveau de l'écran. Par conséquent, le champ réfléchi par le plan conducteur superposé au champ incident donne naissance à des interférences verticales.

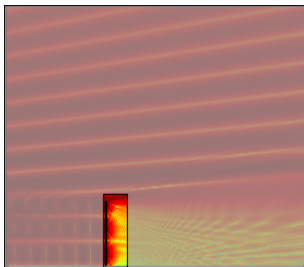


Au-dessus du plan, on observe le champ incident et les interférences dues à la réflexion par le sol. On observe également un effet de "diffraction"<sup>a</sup> dû à l'arête du plan.

<sup>a</sup>Dans la mesure où le champ rayonné est calculé dans l'hypothèse de l'optique physique, il ne s'agit réellement de diffraction au sens où nous l'avons défini, mais plutôt du rayonnement par une discontinuité.



Derrière l'écran, les recombinaisons entre le champ rayonné par le plan éclairé par la source ainsi que par le champ rayonné "image" se propagent et forment des figures d'interférences. On vérifie que les conditions de continuité sont satisfaites au sol où les composantes parallèles sont nulles.



Juste derrière l'écran, on remarque la présence d'un champ non physique, qui "traverse" l'écran là où il devrait être nul car masqué par l'écran. Cette erreur est due aux hypothèses champ lointain utilisées dans la formulation analytique. Par conséquent, il est nécessaire de se trouver en zone lointaine de la zone éclairée par un faisceau élémentaire.

En décomposant le champ incident sur une grille de faisceaux plus fine, par exemple sur une grille dont les points sont espacés de  $10\lambda$  (soit 2209 FGs), la largeur des faisceaux élémentaires va diminuer et avec elle la distance nécessaire pour être en zone lointaine de chacun des faisceaux. Le champ total calculé avec 2209 FGs est représenté sur la figure (3.39). On remarque sur la figure que le champ total est mieux décrit au voisinage du plan et que la précision du champ rayonné est améliorée. Le nombre de faisceaux utilisé pour la décomposition du champ incident devant l'écran conducteur permet d'ajuster la précision du calcul, en particulier en champ proche des objets rayonnants. À titre indicatif, cette figure contient 301701 points et est calculée pour 576 FGs en environ 60 minutes. Ce temps de calcul peut être réduit en utilisant des algorithmes de lancer de faisceaux plus adaptés : par exemple, en négligeant le rayonnement des arêtes de l'écran pour les faisceaux élémentaires qui en sont suffisamment éloignés, le temps de calcul est réduit d'une dizaine de minute. Il est également envisageable de ne prendre en compte en un point d'observation donné que les faisceaux dont la contribution est non négligeable.

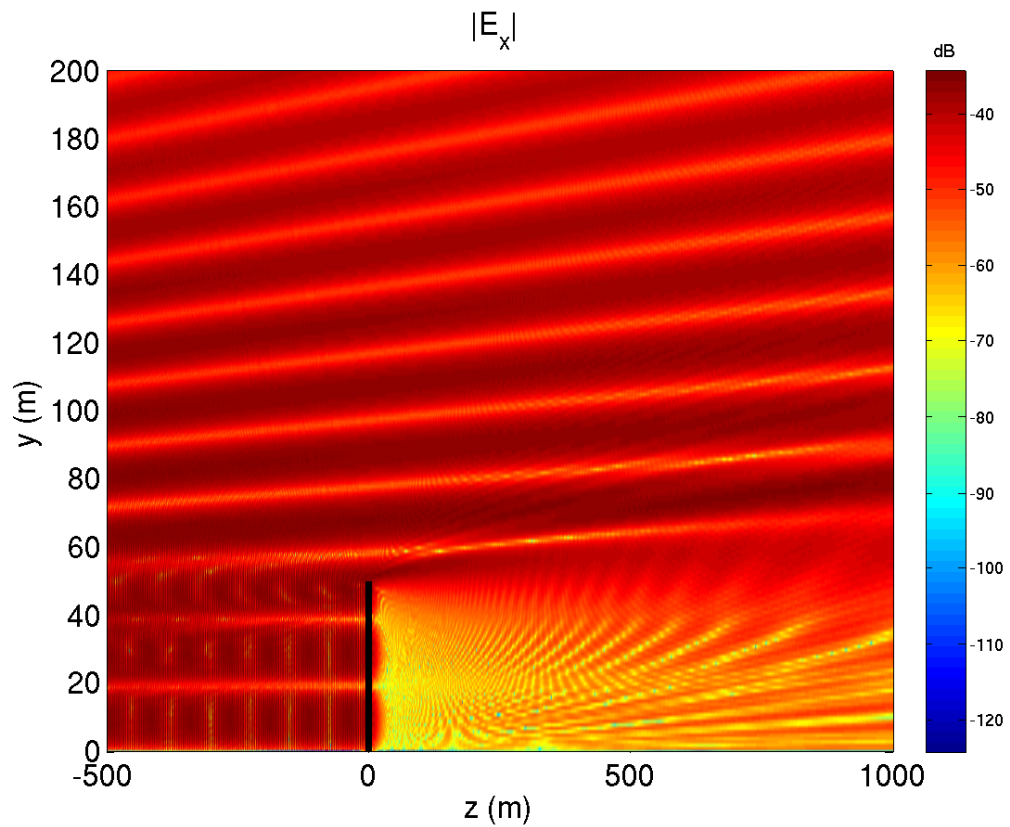


FIG. 3.39: Cartographie  $yOz$  du champ total ( $x=0$  m). Le champ incident sur l'écran est décomposé en 2209 FGs.

On représente maintenant une cartographie du champ total à 500m derrière le plan conducteur, sur une largeur de 400m et une hauteur de 150m. Sur les figures (3.40) et (3.41) page (187), on représente les cartographies des deux composantes horizontales du champ total.

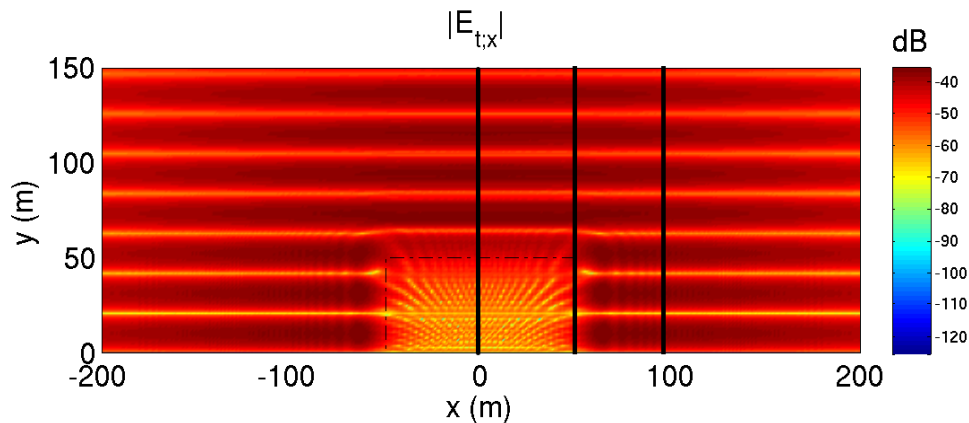


FIG. 3.40: cartographie  $xOy$  du champ total 500 m derrière l'écran. Composante  $E_x$  (composante principale). Les lignes noires correspondent aux coupes réalisées sur la figure (3.42).

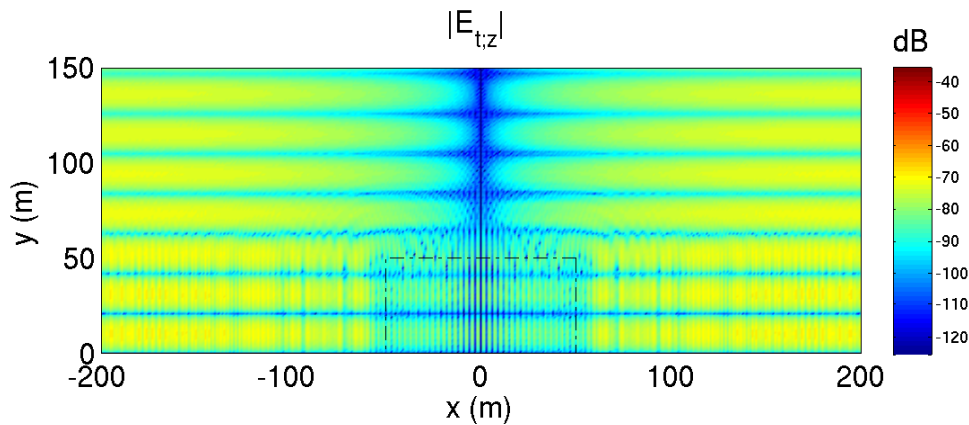


FIG. 3.41: cartographie  $xOy$  du champ total 500 m derrière l'écran. Composante  $E_z$  (composante longitudinale).

Afin de valider ces calculs, on calcule numériquement le champ rayonné dans l'hypothèse de l'optique physique sur des coupes selon  $y$  situées en  $z = 500\text{m}$ , pour  $x = 0, 50$  et  $100$  m. Ces coupes sont représentées sur la figure (3.42) page 188. Le champ rayonné par l'écran correspond au champ calculé numériquement dans l'hypothèse de l'optique physique, dans la zone de masquage comme en dehors, en modélisant le sol par le problème image. Comme pour le champ incident, on vérifie également que les composantes horizontales du champ rayonné par l'écran sont nulles en  $y = 0$ , satisfaisant aux conditions aux limites imposées par le sol conducteur.

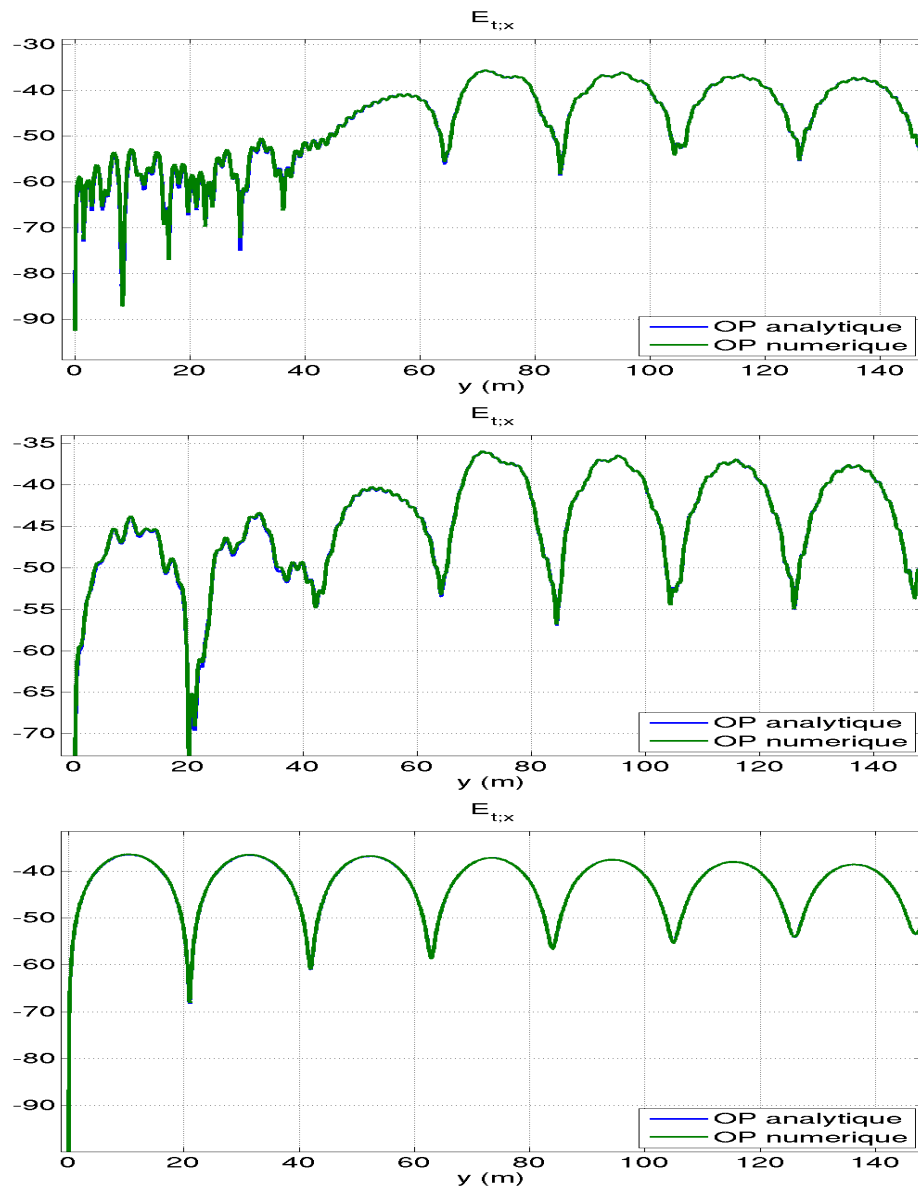
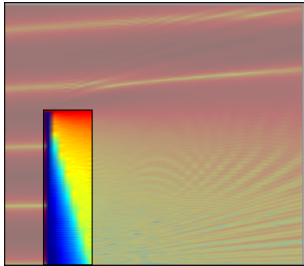


FIG. 3.42: Coupes du champ total 500 m derrière l'écran. De haut en bas :  $x=0$ , 50, 100 m.

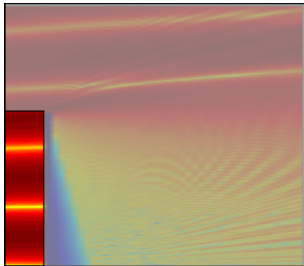
Afin de comparer notre technique avec un autre code de calcul basé sur d'autres hypothèses, on utilise le code de calcul EPEE3D de l'ONERA, basé sur la résolution de l'équation parabolique 3D[145]. Le facteur de propagation du champ total calculé avec EPEE3D est représenté sur la figure (3.43) page 190. Le facteur de propagation du champ total calculé avec les faisceaux gaussiens est représenté sur la figure (3.44) page

190. À titre d'information, il faut pour cette cartographie environ 6h40m pour EPEE3D et 43 minutes avec les faisceaux gaussiens<sup>12</sup>.

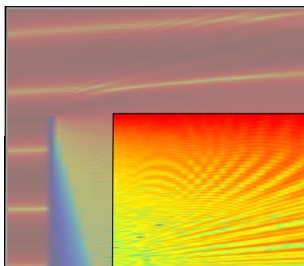
On peut faire plusieurs commentaires sur cette comparaison :



Derrière l'écran, la résolution de l'équation parabolique permet d'obtenir un champ qui satisfait les conditions aux limites et modélise le masquage. Par conséquent, le champ total est nul derrière l'écran, contrairement à la technique basée sur les faisceaux gaussiens qui par hypothèse n'est pas valide en zone proche.



La résolution de l'équation parabolique n'étant réalisée que dans un seul sens (vers l'avant), le champ réfléchi par l'écran n'est pas calculé, contrairement à la technique basée sur les faisceaux gaussiens.



Enfin, on constate que les champs loin derrière l'écran sont similaires et présentent les mêmes figures d'interférences. Des coupes verticales et horizontales de ces résultats sont présentées ci-après.

---

<sup>12</sup>Ce temps correspond au temps de calcul du champ incident, incident "image", rayonné et rayonné "image", où l'on a préalablement décomposé le champ incident en 2209 faisceaux devant l'écran. Si on réduit la précision, par exemple en décomposant le champ incident en 576 faisceaux devant le plan, on ramène le temps de calcul total à 10 minutes.

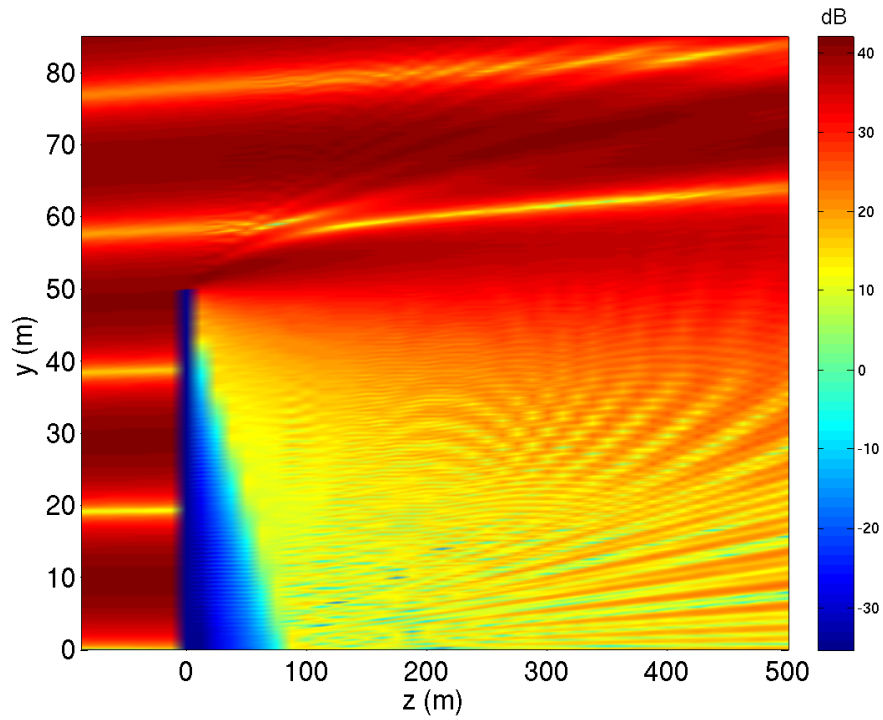


FIG. 3.43: Champ total calculé par résolution de l'équation parabolique 3D (EPEE3D).

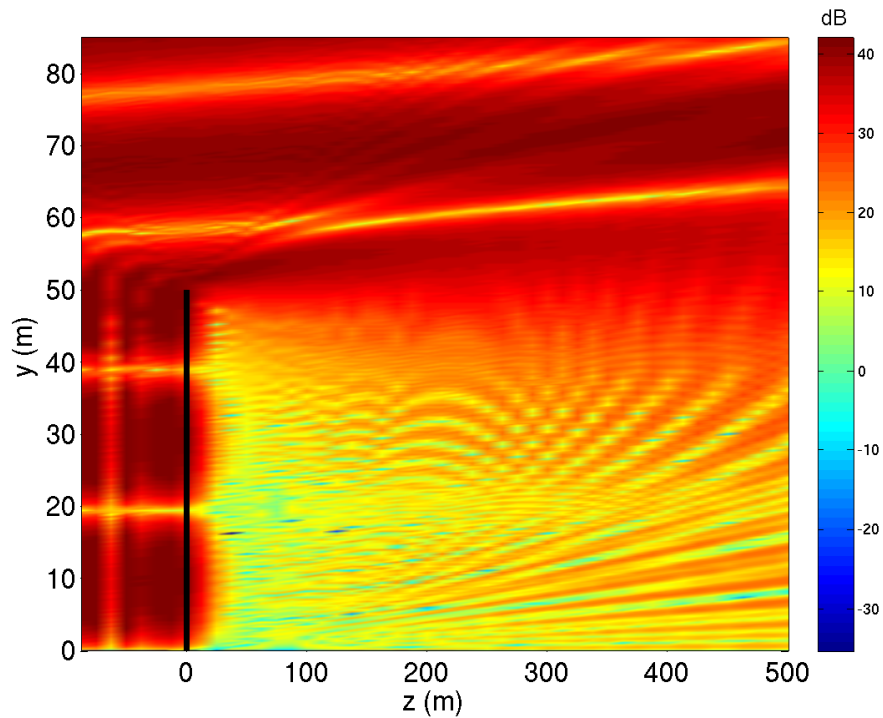


FIG. 3.44: Champ total calculé avec le formalisme des faisceaux gaussiens. Le champ devant l'écran est décomposé en 2209 FGs.

Nous avons représenté une coupe le long de l'axe  $y$  à une distance  $z = 500\text{m}$  de l'écran sur la figure (3.45).

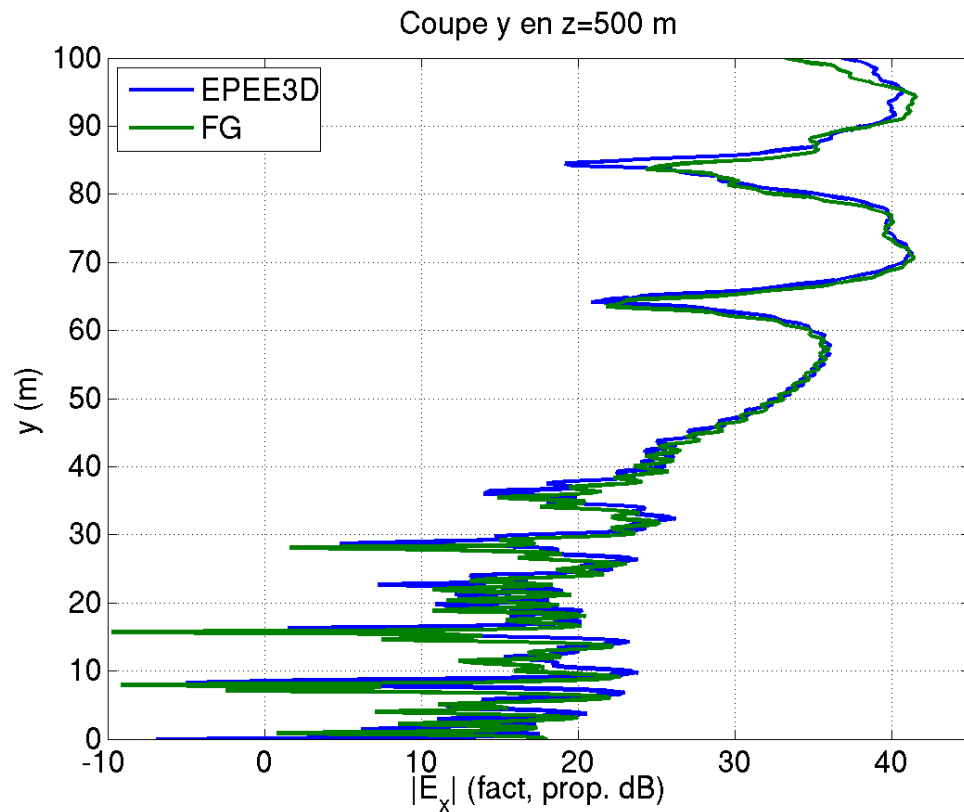


FIG. 3.45: Comparaison des champs totaux obtenus avec EPEE3D et les faisceaux gaussiens. Coupe le long de l'axe  $y$  à une distance  $z = 500\text{m}$  de l'écran

La différence de position des interférences que l'on peut observer, en particulier celles produites par l'arête, peut s'expliquer par le fait que la résolution de l'équation parabolique repose sur une discrétisation de l'espace. Aussi, l'arête supérieure de l'écran conducteur n'est pas exactement située en  $z = 50$  m mais en  $z = 50.1433$  m dans le cas présent. La précision de l'échantillonnage peut bien sûr être affinée, au dépend du temps de calcul.

Enfin, nous avons représenté une coupe horizontale le long de l'axe  $z$  à une hauteur  $y$  voisine de 60 m sur la figure (3.46).



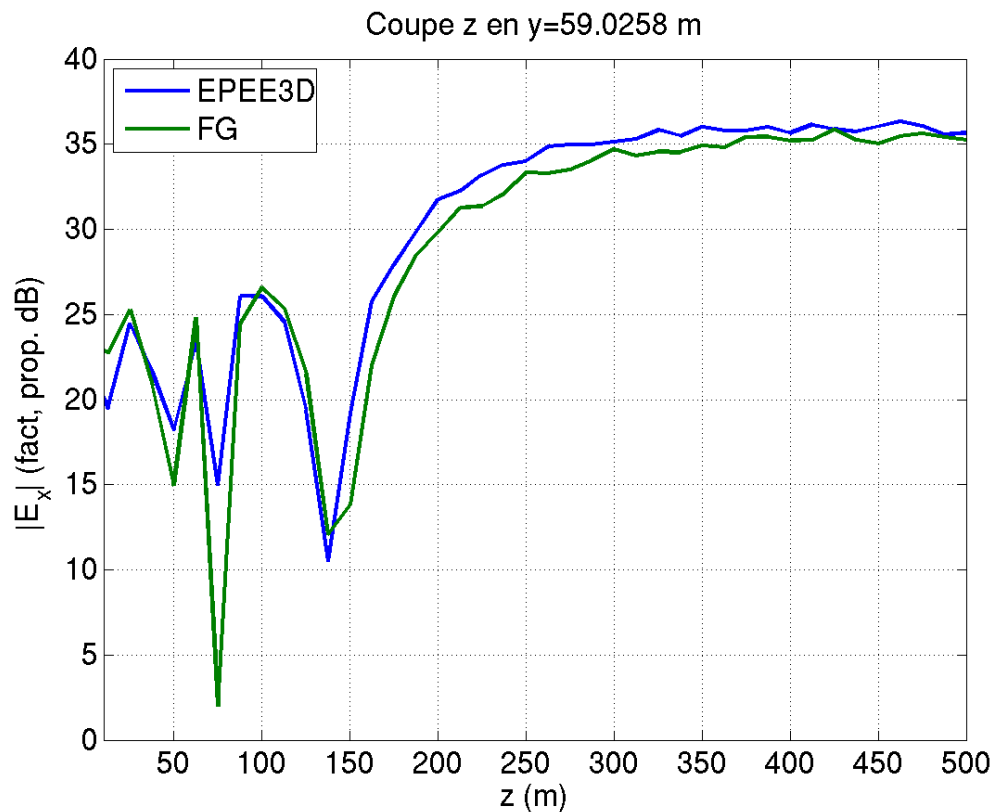


FIG. 3.46: Comparaison des champs totaux obtenus avec EPEE3D et les faisceaux gaussiens. Coupe le long de l'axe  $z$  à une distance  $y = 60$  m de l'écran

De 0 à 150 mètres, on observe les interférences dues à la recombinaison du champ incident et du champ rayonné par le plan, en particulier du champ diffracté par l'arête. Au-delà, on observe le champ d'un lobe d'interférence dû à la recombinaison du champ incident et du champ réfléchi par le sol.

Dans cette partie, nous avons comparé des techniques de calcul basées sur des hypothèses différentes avec succès. Nous avons calculé le champ rayonné par un écran conducteur de grande dimension dans un contexte de propagation avec la méthode de l'équation parabolique et avec la technique du lancer de faisceaux gaussiens.

Par la suite, nous appliquons les faisceaux gaussiens au calcul du champ propagé dans une configuration où l'on doit tenir compte de multiples réflexions.

### IV.3 Propagation dans une vallée

Une autre problématique actuelle liée à la propagation est la modélisation des effets transverses au plan émetteur-récepteur. Dans de nombreuses situations, une modélisation 2D dans ce plan peut suffire à décrire assez précisément la propagation. Toutefois, dans une scène vallonnée ou dans une vallée, les réflexions en dehors de ce plan sont à prendre en compte. Pour des méthodes comme l'équation parabolique (EP) 3D dont la résolution se fait dans selon un axe de propagation principal, ces réflexions ne peuvent sortir du cône de paraxialité autour de cette direction[144, 145]. Nous proposons d'utiliser la technique du lancer de faisceaux gaussiens pour pallier ce problème.

Dans cet exemple, on propage un champ électromagnétique rayonné par une ouverture dans une "vallée" dont les parois sont conductrices, modélisée par une portion d'ellipsoïde. La vallée est haute de 3 kilomètres et large de 400 mètres au maximum. La distribution de champ dans l'ouverture utilisée dans ce cas est une arche de cosinus. Le centre de la source est placé à une hauteur de 2000 m et orienté avec un angle  $\phi$  par rapport à l'axe  $y$ . L'objectif de ce cas de figure est de calculer les réflexions multiples occasionnées par la paroi de la vallée. Le formalisme des faisceaux gaussiens permet en effet de calculer analytiquement les propriétés des faisceaux réfléchis par des interfaces courbes.

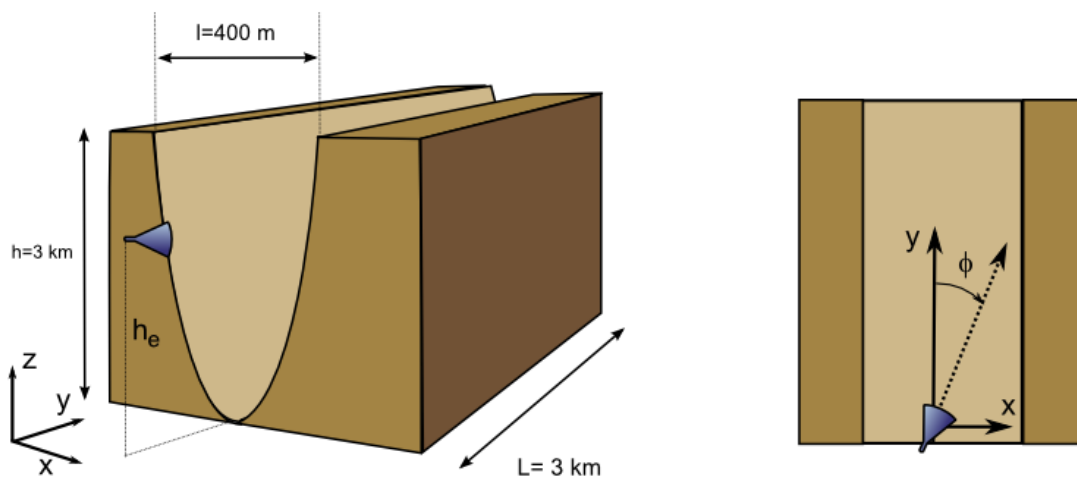


FIG. 3.47: Géométrie de la vallée. À droite, vue du dessus.

Lorsque l'angle  $\phi$  est supérieur à  $20^\circ$ , le champ propagé dans la vallée par réflexions successives sur les parois ne peut plus être correctement modélisé par l'équation parabolique 3D. En revanche, le formalisme des faisceaux gaussiens semble être un bon candidat

pour traiter ce problème. De plus, compte tenu des dimensions de la scène, un calcul numérique précis est hors de portée d'ordinateurs personnels.

La démarche de ce cas test est la suivante : une fois le champ de l'ouverture décomposé en faisceaux gaussiens (472), ces derniers sont propagés dans la vallée en utilisant un algorithme de *lancer de faisceaux gaussiens*. L'algorithme détermine les caractéristiques des faisceaux réfléchis par la paroi de la vallée<sup>13</sup>. Sur la figure (3.48), on visualise les trajectoires de quelques faisceaux utilisés pour calculer le champ propagé<sup>14</sup>.

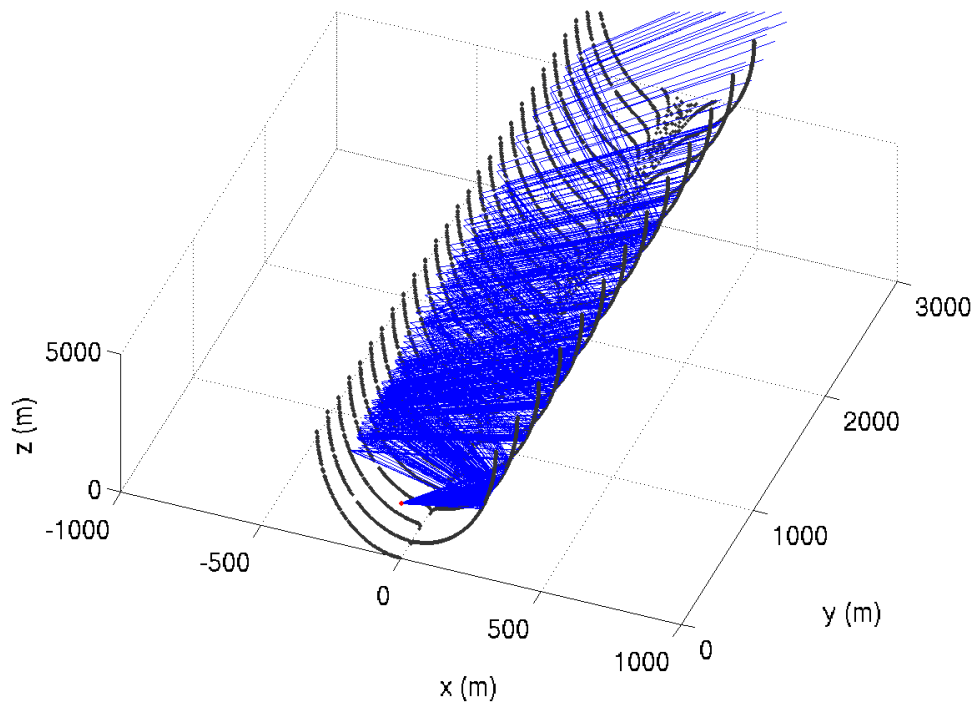


FIG. 3.48: Visualisation des trajectoires de quelques faisceaux dans la vallée.  
 $\phi = 30^\circ$ .

Les caractéristiques des champs réfléchis (courbures, amplitude et centres des faisceaux) sont déterminées en utilisant la technique de *l'accord de phase (phase matching)*[67], qui est une généralisation des lois ABCD utilisées en optique[92, 72, 64].

Le champ propagé calculé sur une distance de 500 m à une hauteur de 2 km est représenté sur la figure (3.49). À titre d'information, cette cartographie sur 321201 points

<sup>13</sup>Et éventuellement les faisceaux transmis en cas de paroi diélectrique. Cette technique a été appliquée avec succès aux calculs de radômes[64].

<sup>14</sup>Le nombre de trajectoires représentées est limité afin de faciliter la visualisation.

a été réalisée en 1h30 (lancer de faisceau compris).

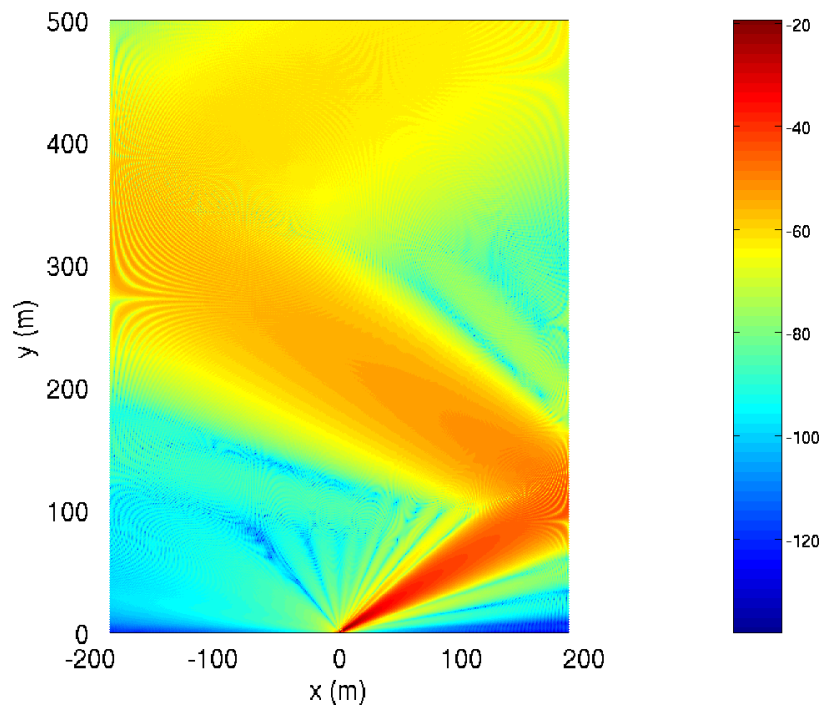


FIG. 3.49: Cartographie dans le plan  $xOy$  à une hauteur  $z=2000$  m du champ propagé dans la vallée.

Enfin, on représente une cartographie du champ propagé dans la vallée à une distance de 2 km de la source sur la figure (3.50).

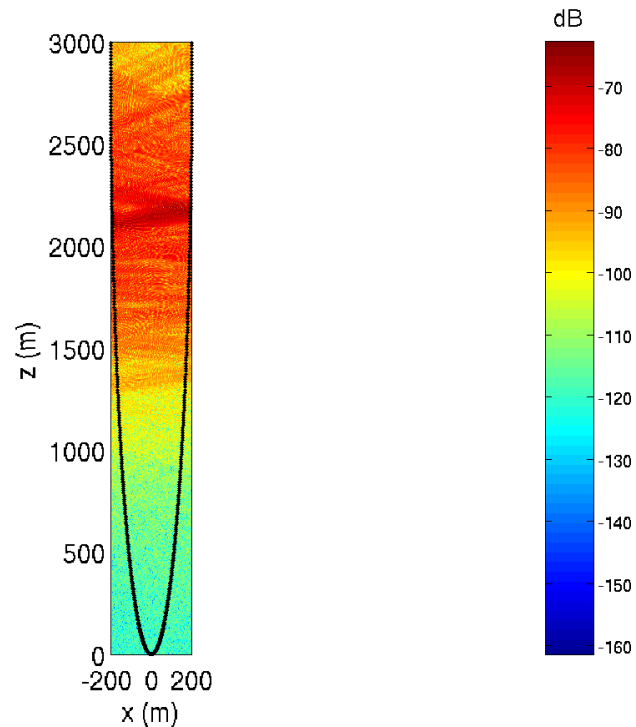


FIG. 3.50: Cartographie dans le plan  $xOz$  en  $y=2$  km du champ propagé.

#### IV.4 Synthèse

Dans cette partie, nous avons appliqué le formalisme des faisceaux gaussiens au domaine de la propagation électromagnétique. Plusieurs méthodes de référence ont été utilisées pour valider avec succès les calculs effectués. L'objectif de ces applications est avant tout de démontrer le potentiel des faisceaux gaussiens dans ce domaine.

Le formalisme des faisceaux gaussiens permet facilement d'exprimer des champs connus comme des sommes de faisceaux. La propagation de ces faisceaux étant calculée analytiquement, les temps de calcul sont réduits par rapport aux méthodes purement numériques. Dans un contexte de propagation sur de grandes distances, les objets avec lesquels interagissent les faisceaux gaussiens sont très grands devant la longueur d'onde et ainsi l'optique physique est parfaitement indiquée. De plus, les objets (montagnes, vallées, etc.) avec lesquels interagissent les FGs présentent principalement de grands rayons de courbure locaux. Cela autorise l'utilisation du lancer de faisceaux gaussiens, permettant de calculer analytiquement les faisceaux réfléchis.

Contrairement à l'équation parabolique 3D, le formalisme des faisceaux gaussiens

permet de calculer le champ rétro-diffusé et les réflexions sortant du cône de paraxialité. Enfin, lorsque la scène peut se décrire avec des objets de géométries simples, le temps de calcul est nettement inférieur. En revanche, lorsque la scène présente des irrégularités, des incidences rasantes ou une atmosphère modélisée par un gradient d'indice, l'équation parabolique 3D reste la seule méthode efficace. C'est pourquoi on peut envisager une hybridation de ces deux méthodes.

## V Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons utilisé le formalisme des faisceaux gaussiens à différentes problématiques. Nous avons tout d'abord montré que des champs électromagnétiques connus sur des surfaces courbes pouvaient être exprimés sous la forme d'une somme de faisceaux gaussiens. Lorsque la courbure de la surface de décomposition est trop importante pour les faisceaux gaussiens généralisés, on peut employer les faisceaux gaussiens conformes. Nous avons démontré que les faisceaux gaussiens conformes permettaient de calculer le champ transmis par une interface diélectrique dans la mesure où la surface est en zone lointaine de chacun des faisceaux.

Nous avons mis en place une série d'expérimentations afin de valider d'une part notre méthode de décomposition en faisceaux gaussiens à partir de champs réels et d'autre part valider les expressions du champ rayonné par une surface conductrice éclairée par des faisceaux gaussiens développées dans le chapitre 2. Le champ rayonné calculé avec nos expressions analytiques a également été validé par l'intermédiaire du code ELSEM3D basé sur la méthode des moments.

Enfin, nous avons appliqué les faisceaux gaussiens au domaine de la propagation électromagnétique. Nous avons montré que les faisceaux gaussiens permettent le calcul rapide avec une bonne précision des champs électromagnétiques sur de grands domaines. De plus, nous avons comparé notre approche au code de résolution de l'équation parabolique EPEE3D avec succès sur le cas d'une source éclairant un écran conducteur de grande taille. Il apparaît que les faisceaux gaussiens peuvent, dans la limite de leurs hypothèses de validité, modéliser des phénomènes de propagation complexes. Une hybridation avec une méthode de résolution de l'équation parabolique semble envisageable et même prometteuse.

# Conclusion

L'objectif de ces travaux de thèse était d'analyser et d'approfondir les méthodes asymptotiques basées sur les faisceaux gaussiens pour modéliser en particulier deux problématiques distinctes. La première concernait le rayonnement de surfaces conductrices planes de dimensions finies en trois dimensions, éclairées par des faisceaux gaussiens vectoriels. La seconde poursuivait les travaux précédemment effectués sur le rayonnement de surface diélectriques présentant une forte courbure et éclairée sous forte incidence.

Pour atteindre ce but, nous avons dans un premier temps fait un état de l'art des différentes techniques hautes-fréquences. Puis, nous avons défini ce qu'est un faisceau gaussien et nous avons synthétisé les différentes formulations issues des travaux précédents, à savoir les faisceaux gaussiens généralisés et les faisceaux gaussiens conformes. Nous avons également précisé les hypothèses utilisées ainsi que le domaine de validité de chacune de ces formulations. Enfin, nous avons proposé un calcul original permettant d'exprimer le spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme.

Nous avons ensuite étudié plus spécifiquement la diffraction d'un faisceau gaussien par un plan conducteur. Dans un premier temps, nous avons restreint notre étude au cas bi-dimensionnel et à l'étude de la diffraction d'un demi-plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien. Nous avons développé une approche intégrale exacte du champ rayonné, puis nous avons calculé une approximation analytique uniforme de ce champ à partir de l'hypothèse de l'optique physique. Nous avons également appliqué la méthode du point source complexe au cas du demi-plan conducteur. Enfin, nous avons étudié et comparé le domaine de validité de chacune de ces approches.

Notre étude s'est ensuite portée sur la diffraction de surfaces planes conductrices de dimensions finies, éclairées par un faisceau gaussien généralisé. Deux cas de figure ont été traité en parallèle, selon la formulation employée pour le faisceau gaussien incident : formulation paraxiale ou formulation champ lointain. À partir des techniques de développement asymptotique existantes pour des intégrales doubles bornées, nous avons



tout d'abord développé une expression analytique non uniforme du champ rayonné par une surface rectangulaire dans l'hypothèse de l'optique physique. Cette approche fait intervenir un ensemble de contributions asymptotiques de l'intégrale de rayonnement, provenant de points particuliers dit "critiques". Ces points dépendent de la géométrie de la surface éclairée ainsi que de la position du point d'observation du champ rayonné.

Afin de pallier les singularités et les discontinuités inhérentes à la formulation précédente, nous avons construit une solution uniforme du champ rayonné par une surface plane rectangulaire, éclairée par un faisceau gaussien généralisé. Nous avons déterminé le domaine de validité de cette solution en comparant les résultats obtenus à une solution rigoureuse basée sur la méthode des moments.

Dans la troisième partie de cette thèse, nous avons illustré les possibilités d'applications qu'offrent les faisceaux gaussiens pour modéliser des problématiques différentes. Nous avons d'abord rappelé les principaux résultats concernant la décomposition de champs électromagnétiques en faisceaux gaussiens généralisés puis en faisceaux gaussiens conformes. Ces techniques ont été appliquées et comparées à des mesures réalisées en chambre anéchoïque. Nous avons également mesuré le champ rayonné par une plaque métallique lorsqu'elle est éclairée par une antenne cornet. Nous avons appliqué la décomposition multi-faisceaux gaussiens pour exprimer le champ incident de l'antenne sous la forme d'un ensemble de faisceaux gaussiens, puis nous avons calculé les interactions de ces faisceaux avec le plan conducteur. Nous avons comparé les mesures réalisées avec l'utilisation des expressions analytiques développées au chapitre deux. Nous avons également comparé ces résultats à des approches purement numériques, basées sur l'intégration de l'intégrale de rayonnement dans l'hypothèse de l'optique physique ainsi que par la méthode des moments.

Afin d'illustrer l'application de l'expression analytique du spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme, nous avons calculé le champ transmis par une interface diélectrique éclairée par des faisceaux gaussiens conformes. La géométrie du problème modélisé ne permet pas d'utiliser les solutions classiques comme l'optique géométrique. En revanche, dans cette situation, l'utilisation de faisceaux gaussiens conformes reste possible et est moins coûteuse en terme de temps de calcul qu'une solution exacte basée sur le spectre d'ondes planes.

Enfin, nous avons appliqué l'ensemble des résultats précédents, décomposition, propagation et rayonnement par des surfaces conductrices rectangulaires, à des problèmes de propagation électromagnétique sur de grandes distances. Nous avons tout d'abord traité le cas de la propagation d'une source électromagnétique au-dessus d'un sol plan

---

conducteur. Nous avons ensuite modélisé un cas de propagation au-dessus d'un sol métallique et en présence d'un écran conducteur de grande dimension. Nous avons comparé les résultats obtenus dans cette situation à une méthode de résolution de l'équation parabolique, particulièrement adaptée à ce genre de problématique. Enfin, nous avons présenté un cas de propagation dans une vallée métallique. Dans cette situation, l'incidence de la source illuminant la vallée génère des réflexions qui sortent du cône de paraxialité utilisé pour résoudre l'équation parabolique 3D et ne permet pas d'utiliser cette technique. En revanche, l'utilisation des faisceaux gaussiens reste possible et permet de traiter les réflexions multiples occasionnées par les parois courbes de la vallée.

## Perspectives théoriques

Plusieurs problèmes n'ont pas trouvé de solution durant cette thèse et restent ouverts. D'un point de vue purement mathématique, certaines expressions comme la solution intégrale exacte du problème de la diffraction par un faisceau gaussien en deux dimensions ou un développement asymptotique de l'intégrale spectrale d'un faisceau gaussien conforme, n'ont pas pu être résolue asymptotiquement.

Concernant la diffraction, le problème est identifié et provient du fait que l'on intègre une expression définie à partir d'intégrales de Fresnel ou de manière équivalente à partir de fonction d'erreur. Ces fonctions, définies par des intégrales, varient très rapidement, en particulier pour des valeurs complexes, et se prêtent mal à un développement asymptotique valide pour le domaine d'intégration.

Concernant le spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme, le problème est également identifié et provient du fait que la phase de cette expression ne correspond pas à une forme quadratique classique. Par conséquent, le calcul du point col ne peut être réalisé de façon exacte. Une approximation de ce point, pour lequel un développement asymptotique dont le domaine de validité soit suffisamment large, reste à déterminer.

Toujours dans le domaine des intégrales, un développement asymptotique rigoureux d'une intégrale double contenant une borne finie pour chacune des intégrales serait nécessaire pour être appliqué dans le calcul du champ rayonné uniforme par une surface rectangulaire dans l'hypothèse de l'optique physique.

Dans cette thèse, les calculs du champ rayonné par des surfaces conductrices sont restreints aux surfaces rectangulaires. La démarche utilisée pour le calcul de la solution non uniforme est applicable à tout type de surface, par exemple des triangles ou des polygones, plus adaptés aux maillages d'objets complexes.

Toutefois, les singularités et les discontinuités sont inhérentes à l'utilisation de cette technique et il serait intéressant d'étudier la possibilité de calculer le champ rayonné de manière uniforme pour ces autres types de surfaces.

Enfin, l'ajout de termes de courbure dans l'expression de la surface éclairée semble envisageable afin de calculer le champ rayonné par une surface courbe.

La décomposition en faisceaux gaussiens, qu'elle soit rigoureuse ou non, est l'un des principaux avantages de la méthode. La facilité de décomposer un champ sur une surface courbe permet l'hybridation de la technique avec d'autres méthodes, par exemple aux codes de résolution de l'équation parabolique ou à la méthode des moments. Cet aspect semble très prometteur et riches d'applications.

## Perspectives pratiques

Bien que non rigoureuse mais plutôt basée sur des considérations physiques, la décomposition multi faisceaux gaussiens n'en est pas moins performante. Il serait intéressant d'utiliser la technique pour des échantillonnages non uniformes, générant des faisceaux de tailles différentes, mieux adaptés aux variations des champs à décomposer. Cette perspective pourrait être associée à une mise en forme plus rigoureuse de cette approche de la décomposition. Il serait également intéressant de développer des critères permettant de décomposer les champs avec une erreur donnée. Dans un contexte opérationnel, comme dans le cadre d'une optimisation, les premiers calculs doivent être rapides, quitte à modifier ensuite le critère d'erreur souhaité, afin de procéder à une décomposition plus précise en fin de processus par exemple.

Plusieurs approches permettraient d'améliorer les algorithmes utilisés dans cette thèse et avec eux les temps de calcul.

D'un point de vue physique tout d'abord, le calcul d'un champ en un point peut être accéléré en négligeant les faisceaux qui ne contribuent pas (ou très peu) au champ en ce point. Cette "troncature" est d'ailleurs appliquée couramment par d'autres auteurs.

D'un point de vue informatique et à plus long terme, un recodage dans un langage compilé (type FORTRAN ou C/C++) des fonctions "critiques" (décomposition, lancer de faisceaux, sommations de faisceaux, etc.) permettrait d'utiliser pleinement le formalisme des faisceaux gaussiens. Les fonctions développées et utilisées dans cette thèse l'ont été avec le langage et le logiciel MATLAB. Les progrès constants des langages interprétés dans le domaine du calcul scientifique, en particulier celui du langage objet libre

PYTHON[148, 149]<sup>15</sup>, offrirait une architecture plus robuste et adaptée à l'évolution constante du code, tout en permettant facilement l'utilisation de fonctions compilées dans d'autres langages.

---

<sup>15</sup>cf. <http://python.org> ou <http://www.scipy.org>.



# Liste des publications

## Reuves écrites internationales

- *Uniform analytic scattered fields of a PEC plate illuminated by a vector paraxial gaussian beam*, Julien Hillairet, Sylvain Bolioli et Jérôme Sokoloff, Soumission à IEEE Antenna and Propagation prévue fin décembre 2007

## Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

- *Analytical Physical Optic Scattering under Vectorial Gaussian Beams Illumination of a PEC's Finite Plate*, Julien Hillairet, Sylvain Bolioli, Jérôme Sokoloff et Paul Combes, ICEAA 2007, Septembre 2007, Turin ;
- *Computation of Electromagnetic Scattering by Heavy Curved Interfaces Under Grazing Incidence Using Conformal Gaussian Beams*, Julien Hillairet, Sylvain Bolioli et Jérôme Sokoloff, EUCAP Novembre 2006, Nice.

## Congrès nationaux avec comité de lecture et actes

- *Champs diffractés par un demi-plan conducteur illuminé par un Faisceau Gaussien : comparaison de différentes approches*, Julien Hillairet, Jérôme Sokoloff, Sylvain Bolioli, JNM 2007, Mai 2007, Toulouse.



# Bibliographie

- [1] M. BORN et E. WOLF, *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge U.P., New York, 7th éd., 1999 [1959].
- [2] L. B. FELSEN et N. MARCUVITZ, *Radiation and Scattering of Waves*. New York, IEEE Press, 1994.
- [3] E. J. ROTHWELL et M. J. CLOUD, *Electromagnetics*. CRC Press, 2001.
- [4] D. R. WILTON, *Scattering : Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, chap. Chap. 1.5.5, Computational Methods, p. 316–365. Academic Press, R.Pike and P.Sabatier, 2002.
- [5] M. N. O. SADIKU, *Numerical Techniques in Electromagnetics*. CRC Press, 2001.
- [6] L. GREENGARD et V. ROKHLIN, « A fast algorithm for particle simulations », *Journal of Computational Physics*, vol. 73, p. 325–348, déc. 1987.
- [7] D. BOUCHE et F. MOLINET, *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*. Springer-Verlag, 1994.
- [8] P. H. PATHAK et R. J. BURKHOLDER, *Scattering : Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, chap. Chap. 1.5.2, High frequency scattering, p. 245–275. E.R. Pike and P. Sabatier, Academic Press, Ltd., London, 2002.
- [9] S. MACI et AL., « High frequency methods and traveling wave antennas », in *UNISI - Siena / Sapienza - Rome*, 2005. <http://ace1.antennasvce.org/Education/ESoA/view?folder=15>.
- [10] C. J. BOUWKAMP, « Diffraction theory », *Rep. Prog. Phys.*, vol. 17, p. 35–100, 1954.
- [11] P. Y. UFIMTSEV, « Comments on diffraction principles and limitations of rcs reduction techniques », *Proc. of the IEEE*, vol. 84, p. 1830–1851, déc. 1996.
- [12] P. H. PATHAK, « High-frequency techniques for antenna analysis », *Proc. of the IEEE*, vol. 80, p. 44–65, jan. 1992.



- [13] D. P. BOUCHE, F. A. MOLINET et R. MITTRA, « Asymptotic and hybrid techniques for electromagnetic scattering », *Proc. of the IEEE*, vol. 81, p. 1658–1684, déc. 1993.
- [14] E. F. KNOTT, M. T. TULEY et J. F. SHAEFFER, *Radar Cross Section*. SciTech, jan. 2004 (2nd. Ed.).
- [15] P. Y. UFIMTSEV, *Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction*. SciTech Publishing Inc., 2007.
- [16] N. BLEISTEIN, « Me n ray theory, an evolutionary tale of mathematics applied to the real world », 2007. <http://www.cwp.mines.edu/~norm/>.
- [17] G. RAMIERE, *Couplage de méthodes asymptotiques et de la technique du lancer de rayons pour le calcul du champ rayonné par des objets métalliques 3D complexes*. Thèse doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier - U.F.R. P.C.A., sept. 2000.
- [18] S. LAYBROS, *Utilisation du lancer de rayons pour le calcul de l'interaction d'un rayonnement électromagnétique avec des objets complexes métalliques et diélectriques*. Thèse doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier - U.F.R. P.C.A., oct. 2004.
- [19] J. B. KELLER, « The geometric optics theory of diffraction », in *Symp. Microwave Opt.. p. II, McGill Univ., Montreal, Canada*, juin 1953.
- [20] J. B. KELLER, « Geometrical theory of diffraction », *J. Opt. Soc. Am.*, p. 116–130, fév. 1962.
- [21] R. G. KOUYOUMJIAN et P. H. PATHAK, « An uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface », *Proc. of the IEEE*, vol. 62, p. 1448–1461, 1974.
- [22] P. PATHAK, N. WANG, W. BURNSIDE et R. KOUYOUMJIAN, « A uniform gtd solution for the radiation from sources on a convex surface », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 29, p. 609–622, juil. 1981.
- [23] D. S. AHLUWALIA, R. M. LEWIS et J. BOERSMA, « Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen », *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 16, p. 783–807, juil. 1968.
- [24] S.-W. LEE et G. DESCHAMPS, « A uniform asymptotic theory of electromagnetic diffraction by a curved wedge », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 24, p. 25–34, jan. 1976.
- [25] Y. RAHMAT-SAMII et R. MITTRA, « Spectral analysis of high-frequency diffraction of an arbitrary incident field by a half-plane – comparison with four asymptotic techniques », *Radio Science*, vol. 13, p. 31–48, January-February 1978.

- [26] R. F. HARRINGTON, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. Wiley-IEEE Press, 2001 [1961].
- [27] S. A. SCHELKUNOFF, « On diffraction and radiation of electromagnetic waves », *Phys. Review*, vol. 56, p. 308–316, août 1939. Preuve du théoreme d'équivalence/induction.
- [28] A. J. BOOYSEN, « Aperture theory and the equivalence principle », *IEEE Antenna Propagat. Magazine*, vol. 3, p. 29–40, juin 2003.
- [29] P. Y. UFIMTSEV, *Method Of Edge Waves In The Physical Theory Of Diffraction*, vol. traduit de “Metod krayevykh Voln v Fizicheskoy Teorii Difraktsii”, Izd-Vo Sovetskoye Radio, pp. 1-243, 1962. Foreign Technology Division, 1971.
- [30] P. Y. UFIMTSEV, « Comments on : “comparison of three high-frequency diffraction techniques” », *Proc. of the IEEE*, p. 1734–1737, déc. 1975.
- [31] P. Y. UFIMTSEV, « Theory of acoustical edge waves », *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 86, p. 463–474, août 1989.
- [32] P. Y. UFIMTSEV, « Elementary edge waves and the physical theory of diffraction », *Electromagn.*, vol. 11, p. 125–159, April-June 1991.
- [33] P. Y. UFIMTSEV, « Improved physical theory of diffraction : Removal of the grazing singularity », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 54, p. 2698–2702, oct. 2006.
- [34] K. M. MITZNER, « Incremental length difiaction coefficients », Rap. tech. AFAL-TR-73-296, Aircraft Division Northrop Corp., avril 1974.
- [35] A. MICHAELI, « Equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-32, p. 252–258, mars 1984.
- [36] E. F. KNOTT, « The relationship between mitzner’s ilde and michaeli’s equivalent currents », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-33, p. 112–114, jan. 1985.
- [37] A. MICHAELI, « Elimination of infinities in equivalent edge currents, part I : Fringe current components », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-34, p. 912–918, juil. 1986.
- [38] A. MICHAELI, « Elimination of infinities in equivalent edge currents, part II : Physical optics components », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-34, p. 1034–1037, août 1986.
- [39] P. M. JOHANSEN, « Uniform physical theory of diffraction equivalent edge currents for truncated wedge strips », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 44, p. 989–995, juil. 1996.

- [40] P. M. JOHANSEN, « Physical theory of diffraction equivalent edge currents for truncated wedge strips », rap. tech., ROME Laboratory, Air Force Materiel Command, Griffiss Air Force Base, New York, sept. 1995. <http://handle.dtic.mil/100.2/ADA302034>.
- [41] R. A. SHORE et A. D. YAGHJIAN, « Incremental diffraction coefficients for planar surfaces », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-36, p. 55–70, jan. 1988.
- [42] A. MICHAELI, « Incremental diffraction coefficients for the extended physical theory of diffraction », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-43, p. 732–734, juil. 1995.
- [43] R. TIBERIO et S. MACI, « An incremental theory of diffraction : Scalar formulation », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 42, p. 600–612, mai 1994.
- [44] R. TIBERIO, S. MACI et A. TOCCAFONDI, « An incremental theory of diffraction : Electromagnetic formulation », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-43, p. 87–96, jan. 1995.
- [45] R. TIBERIO, A. TOCCAFONDI, A. POLEMI et S. MACI, « Incremental theory of diffraction : A new-improved formulation », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-52, p. 2234–2243, sept. 2004.
- [46] S. MACI, E. HEYMAN et H. L. BERTONI, « Guest editorial », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 55, p. 1478–1487, juin 2007.
- [47] G. SUEDAN et E. JULL, « Two-dimensional beam diffraction by a half-plane and wide slit », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-35, p. 1077–1083, sept. 1987.
- [48] G. SUEDAN et E. JULL, « Beam diffraction by half planes and wedges : Uniform and asymptotic solutions », *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 3, no. 1, p. 17–26, 1989.
- [49] G. SUEDAN et E. JULL, « Beam diffraction by planar and parabolic reflectors », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-39, no. 4, p. 521–527, 1991.
- [50] G. SUEDAN et E. JULL, « Three-dimensional scalar beam diffraction by a half plane », *Computer Physics Communications*, vol. 68, p. 346–352, 1991.
- [51] E. MARTINI, G. PELOSI et S. SELLERI, « Line integral representation of physical optics scattering from a perfectly conducting plate illuminated by a gaussian beam modeled as a complex point source », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 51, p. 2793–2800, oct. 2003.
- [52] R. MITTRA, R.-S. Y. et K. W.L., « Spectral theory of diffraction », *Appl. Phys.*, vol. 10, p. 1–13, 1976.

- [53] L. E. R. PETERSSON et G. S. SMITH, « Three-dimensional electromagnetic diffraction of a gaussian beam by a perfectly conducting half-plane », *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 19, p. 2265–2280, nov. 2002.
- [54] E. HEYMAN, *Scattering : Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*, vol. 1, chap. Chap.1.5.4. Pulsed beam solutions for propagation and scattering problems, p. 295–315. Academic Press, R.Pike and P.Sabatier, 2002.
- [55] D. LUGARA, C. LETROU, A. SHLIVINSKI, E. HEYMAN et A. BOAG, « Frame-based gaussian beam summation method : Theory and applications », *Radio Science*, vol. 38, no. 2, 2003.
- [56] H.-T. CHOU et P. H. PATHAK, « Uniform asymptotic solution for electromagnetic reflexion and diffraction of an arbitrary gaussian beam by a smooth surface with an edge », *Radio Science*, vol. 32, no. 4, p. 1319–1336, 1997.
- [57] H.-T. CHOU, P. H. PATHAK et R. J. BURKHOLDER, « Novel gaussian beam method for the rapid analysis of large reflector antennas », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 49, p. 880–893, juin 2001.
- [58] H.-T. CHOU, P. H. PATHAK et R. J. BURKHOLDER, « Application of gaussian-ray basis functions for the rapid analysis of electromagnetic radiation from reflector antennas », *IEE Proc.-Microw. Antennas Propag.*, vol. 150, p. 177–183, juin 2003.
- [59] T. LERTWIRIYAPRAPA et P. PATHAK, « Diffraction of an electromagnetic gaussian beam by using TUD concepts ». ACE Virtual Center of Excellence, High Frequency methods and traveling wave antennas course, UNISI - Siena / Sapienza - Rome., 2005.
- [60] C. LETROU, « A gaussian beam shooting scheme for fast multidimensional physical simulation of propagation channels in wireless communication systems. », in *International Conference on Electromagnetic in Advanded Applications (ICEAA)*, 2007.
- [61] M. KATSAV et E. HEYMAN, « Gaussian beam summation representation of a two-dimensional gaussian beam diffraction by a half plane », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 55, p. 2247–2257, 2007.
- [62] M. KATSAV et E. HEYMAN, « Beam summation representation of edge diffraction : The beam to beam (B2B) scattering matrix », in *International Conference on Electromagnetic in Advanded Applications (ICEAA)*, 2007.
- [63] J. SOKOLOFF, *Modélisation par la méthode des faisceaux gaussiens vectoriels et multimodes de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un diélectrique épais*

- ou un réflecteur métallique. Thèse doctorat, Université de Toulouse III - Paul Sabatier - U.F.R. P.C.A., nov. 2001.
- [64] A. CHABORY, *Modélisation électromagnétique des radômes par des techniques basées sur les faisceaux gaussiens*. Thèse doctorat, Université de Toulouse III - Paul Sabatier - U.F.R. P.C.A., oct. 2004.
- [65] D. H. MARTIN et J. W. BOWEN, « Long-wave optics », *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 41, p. 1676–1690, oct. 1993.
- [66] H.-T. CHOU et P. H. PATHAK, « Use of gaussian ray basis functions in ray tracing methods for applications to high frequency wave propagation problems », *IEE Proceedings - Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 147, p. 77–81, avril 2000.
- [67] D. LUGARA, *Modélisation d'antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens*. Thèse doctorat, Université de Marne La Vallée, 2001.
- [68] A. CHABORY, S. BOLIOLI et J. SOKOLOFF, « Novel gabor-based gaussian beam expansion for curved aperture radiation in dimension two », *Progress In Electromagnetics Research*, vol. PIER 58, p. 171–185, 2006.
- [69] G. DESCHAMPS, « Gaussian beam as a bundle of complex rays », *Electronics letters*, vol. 7, p. 684–685, nov. 1971.
- [70] Y. A. KRAVTSOV, G. FORBES et A. ASATRYAN, « Theory and applications of complex rays », *Progress in optics*, vol. 39, p. 1–62, 1999.
- [71] E. HEYMAN et L. B. FELSEN, « Gaussian beam and pulsed-beam dynamics : complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 18, p. 1588–1610, juil. 2001.
- [72] A. E. SIEGMAN, *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [73] L.-G. GOUY, « Sur une propriété nouvelle des ondes lumineuses », *Compt. Rendue Acad. Sci. Paris*, vol. 110, p. 1251–1253, 1890.
- [74] L.-G. GOUY, « Sur la propagation anormale des ondes », *Compt. Rendue Acad. Sci. Paris*, vol. 111, p. 33–35, 1890.
- [75] J. A. ARNAUD et H. KOGELNIK, « Gaussian light beams with general astigmatism », *Appl. Opt.*, vol. 8, p. 1687–1694, août 1969.
- [76] R. ARORA et Z. LU, « Graphical depiction of the electromagnetic fields of hermite-gaussian modes », *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings H*, vol. 139, p. 369–375, août 1992.

- [77] P. CLEMMOW, *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields*. Wiley-IEEE Press, sept. 1996.
- [78] J. T. FOLEY et E. WOLF, « Note on the far field of a gaussian beam », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 69, p. 761–764, mai 1979.
- [79] R. PRATESI et L. RONCHI, « Generalized gaussian beams in free space », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 67, p. 1274–1276, 1977.
- [80] P. D. EINZIGER, S. RAZ et M. SHAPIRA, « Gabor representation and aperture theory », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 3, p. 508–522, avril 1986.
- [81] P. G. MANTICA, I. MONTROSSET, R. TASCONE et R. ZICH, « Source-field representation in terms of gaussian beams », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 3, p. 497–507, avril 1986.
- [82] P.-F. COMBES, *Étude de la zone de Rayleigh des ouvertures circulaires par les formules de Kottler et la Théorie Géométrique de la Diffraction*. Thèse doctorat, Université Paul-Sabatier, Toulouse. Revue du CETHEDDEC numéro spécial 78-2, Gauthier Villars Paris., 1978.
- [83] C.-T. TAI, « Kirchhoff theory : Scalar, vector, or dyadic? », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-20, p. 114–115, jan. 1972.
- [84] A. D. YAGHJIAN, « Equivalence of surface current and aperture field integrations for reflector antennas », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-32, p. 1355–1358, déc. 1984.
- [85] C.-T. TAI, « Direct integration of field equations », *Progress In Electromagnetics Research*, no. 28, p. 339–359, 2000.
- [86] W. C. CHEW, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, 1995 [1990].
- [87] E. WOLF et M. NIETO-VESPERINAS, « Analyticity of the angular spectrum amplitude of scattered field and some of its consequences », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 2, p. 886–890, juin 1985.
- [88] W. C. CHEW, « A quick way to approximate a sommerfeld-weyl type integral », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 36, no. 11, p. 1654–1657, 1988.
- [89] A. NAGAMUNE et P. H. PATHAK, « An efficient plane wave spectral analysis to predict the focal region fields of parabolic reflector antennas for small and wide angle scanning », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-38, p. 1746–1756, nov. 1990.

- [90] A. P. ANSBRO et J. M. ARNOLD, « Spectral asymptotics for general curved reflecting surfaces », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, p. 590–599, avril 1993.
- [91] G. DESCHAMPS et MAS, « Beam tracing and applications », in *Proceedings of the symposium on quasioptics* (N. Y. POLYTECHNIC PRESS, éd.), p. 379–395, 1964.
- [92] G. DESCHAMPS, « Ray techniques in electromagnetics », *Proc. of the IEEE*, vol. 60, p. 1022–1035, sept. 1972.
- [93] J. KELLER et W. STREIFER, « Complex rays with an application to gaussian beams », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 61, p. 40–43, jan. 1971.
- [94] L. BERTONI, L. FELSEN et J. RA, « Evanescent fields produced by totally reflected beams », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 21, p. 730–732, sept. 1973.
- [95] L. FELSEN, « Evanescent waves », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 66, p. 751–760, août 1976.
- [96] J. W. RA, H. L. BERTONI et L. B. FELSEN, « Reflection and transmission of beams at a dielectric interface », *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 24, p. 396–413, mai 1973.
- [97] S. J. CHAPMAN, J. M. H. LAWRY, J. R. OCKENDON et R. H. TEW, « On the theory of complex rays », *SIAM Review*, vol. 41, no. 3, p. 417–509, 1999.
- [98] E. GAGO-RIBAS et M. GONZÁLEZ MORALES, « 2d complex point source radiation problem i. complex distances and complex angles », *Turk. J. Elec. Engin.*, vol. 10, no. 10, p. 345–369, 2002.
- [99] M. GONZÁLEZ MORALES et E. GAGO-RIBAS, « 2d complex point source radiation problem ii. complex beams », *Turk. J. Elec. Engin.*, vol. 10, no. 10, p. 345–369, 2002.
- [100] S. CHOUDHARY et L. B. FELSEN, « Analysis of gaussian beam propagation and diffraction by inhomogeneous wave tracking », *Proc. of the IEEE*, vol. 62, p. 1530–1541, nov. 1974.
- [101] N. CALANDER, « Focused optical beams obtained at planar structures by imaginary shift in position », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 24, p. 2513–2515, sept. 2007.
- [102] L. FELSEN, « Geometrical theory of diffraction, evanescent waves, complex ray and gaussian beams », *Geophys. J. R. astr. Soc.*, vol. 79, p. 77–88, 1984.
- [103] E. HEYMAN et L. B. FELSEN, « Complex-source pulsed-beam fields », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 6, p. 806–817, juin 1989.

- [104] Y. RAHMAT-SAMII et R. MITTRA, « A spectral domain interpretation of high frequency diffraction phenomena », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. AP-25, p. 676–687, sept. 1977.
- [105] J. M. ARNOLD, « Spectral methods in edge-diffraction theories », *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 9, p. 2192–2205, déc. 1992.
- [106] G. JAMES, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*. Peter Peregrinus Ltd. (for IEE), Stevenage, U.K., 2nd éd., 1980.
- [107] M. KEER, *La Représentation Spectrale de la Diffraction dans le Domaine Spatial*. Thèse doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1992.
- [108] A. C. GREEN, H. L. BERTONI et L. B. FELSEN, « Properties of the shadow cast by a half-screen when illuminated by a gaussian beam », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 69, p. 1503–1508, nov. 1979.
- [109] S. G. HAY, « A double-edge-diffraction gaussian-series method for efficient physical optics analysis of dual-shaped-reflector antennas », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 53, p. 2597–, août 2005.
- [110] N. BLEISTEIN et R. A. HANDELSMAN, *Asymptotic Expansions of Integrals*. Dover Publications, Inc, New-York, 1986 [1975].
- [111] R. WONG, *Asymptotic approximations of integrals*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2001. Corrected reprint of the 1989 original.
- [112] D. S. JONES et N. KLINE, « Asymptotic expansion of multiple integrals and the method of stationary phase », *J. Math. Phys.*, vol. 37, p. 1–28, 1958.
- [113] N. CHAKO, « Asymptotic expansions of double and multiple integrals occurring in diffraction theory », *J. Inst. Maths Applics*, vol. 1, p. 372–422, 1965.
- [114] R. B. DINGLE, *Asymptotic Expansions : Their Derivation and Interpretation*. Academic Press, 1973.
- [115] R. WONG et J. MCCLURE, « On a method of asymptotic evaluation of multiple integrals », *Math. of Computation*, vol. 37, p. 509–521, oct. 1981.
- [116] J. COOKE, « Stationary phase in two dimensions », *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 29, p. 25–37, 1982.
- [117] M. V. BERRY et H. C. J., « Hyperasymptotics for integrals with saddles », *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 434, p. 657–675, 1991.
- [118] C. J. HOWLS, « Hyperasymptotics for integrals with finite endpoints », *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 439, p. 373–396, 1992.



- [119] J. P. BOYD, « The devil's invention : Asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series », *Acta Applicandae*, vol. 56, p. 1–98, 1999.
- [120] E. DELABAERE et C. HOWLS, « Global asymptotics for multiple integrals with boundaries », *Duke Math. J.*, vol. 112, no. 2, p. 199–264, 2002.
- [121] N. G. VAN KAMPEN, « The method of stationary phase and the method of fresnel zones », *Physica*, vol. XXIV, p. 437–444, 1958.
- [122] N. D. TAKET et R. E. BURGE, « A physical optics version of the geometrical theory of diffraction », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 39, p. 719–731, juin 1991.
- [123] J. PEREZ et M. F. CÁTEDRA, « Application of physical optics to the rcs computation of bodies modeled with nurbs surfaces », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 42, p. 1404–1411, oct. 1994.
- [124] O. M. CONDE, J. PÉREZ et M. F. CÁTEDRA, « Stationary phase method application for the analysis of radiation of complex 3-d conducting structures », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 49, p. 724–731, mai 2001.
- [125] F. Saez de ADANA, I. GONZALEZ, O. GUTIERREZ et M. CÁTEDRA, « Asymptotic method for analysis of rcs of arbitrary targets composed by dielectric and/or magnetic materials », *IEE Proc.-Radar Sonar Navig.*, vol. 150, p. 375–378, oct. 2003.
- [126] F. ADANA, I. DIEGO, O. BLANCO, P. LOZANO et M. CATEDRA, « Method based on physical optics for the computation of the radar cross section including diffraction and double effects of metallic and absorbing bodies modeled with parametric surfaces », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 52, p. 3295–3303, déc. 2004.
- [127] W. B. GORDON, « Far-field approximationsto the kirchhoff-helmholtz representations of scattered fields », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, p. 590–592, juil. 1975.
- [128] K.-I. SAKINA et M. ANDO, « The asymptotic reduction of po surface integral », *in Radio and Wireless Conference, 1999. RAWCON 99*, p. 207–210, 1999.
- [129] P. M. JOHANSEN et O. BREINBJERG, « An exact line integral representation of the physical optics scattered field : The case of a perfectly conducting polyhedral structure illuminated by electric hertzian dipoles », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 43, p. 689–696, juil. 1995. Correction : Vol.44 N.2 Feb. 1996 p.272.
- [130] P. MEINCKE, O. BRINBJERG et E. JORGENSEN, « An exact line integral representation of the magnetic physical optics scattered field », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 51, p. 1395–1398, juin 2003.

- [131] J. S. ASVESTAS, « Line integrals and physical optics. part i. the transformation of the solid-angle surface integral to a line integral », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 2, p. 891–895, juin 1985.
- [132] J. S. ASVESTAS, « Line integrals and physical optics. part ii. the conversion of the kirchhoff surface integral to a line integral », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 2, p. 896–902, juin 1985.
- [133] J. S. ASVESTAS, « The physical optics fields of an aperture on a perfectly conducting screen in termes of line integrals », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 34, p. 1155–1159, sept. 1986.
- [134] J. J. STAMNES, « Waves, rays, and the method of stationary phase », *Optics Express*, vol. 10, p. 740–751, août 2002.
- [135] J. J. STAMNES, « Uniform asymptotic theory of diffraction by apertures », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 73, p. 96–109, jan. 1983.
- [136] J. J. STAMNES, « Hybrid integration technique for efficient and accurate computation of diffraction integrals », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 6, p. 1330–1342, sept. 1989.
- [137] B. Z. STEINBERG, E. HEYMAN et L. B. FELSEN, « Phase-space beam summation for time-harmonic radiation from large apertures », *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 8, p. 41–59, jan. 1991.
- [138] A. SHLIVINSKI, E. HEYMAN, A. BOAG et C. LETROU, « A phase-space beam summation formulation for ultrawide-band radiation », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 52, p. 2042–2056, août 2004.
- [139] P. D. EIZIGER, Y. HARAMATY et L. B. FELSEN, « Complex rays for radiation from discretized aperture distribution », *IEEE Trans. Antenna Propagat.*, vol. 35, p. 1031–1044, sept. 1987.
- [140] C. LETROU, A. BOAG et E. HEYMAN, « Gaussian beams representation based on periodic frames for radiation from cylindrical apertures », in *IEEE/AP-S and URSI meeting, Monterey (CA), USA*, p. 1979–1982, juin 2004.
- [141] P. SCHOTT, F. LEMAÎTRE et O. PASCAL, « Use of gaussian beams to compute antenna pattern », *Annales des télécommunications*, vol. 57, no. 7-8, p. 775–797, 2002.
- [142] S. BOLIOLI, J. SOKOLOFF et A. CHABORY, « Multilayer radome computation – comparison between gaussian beam formalism and plane wave spectrum – application to airbus a380 », *ICEAA, Turino (Italy)*, sept. 2005.

- [143] P.-F. COMBES, *Micro-ondes - Cours et exercices avec solutions, tome 2 : Circuits passifs, propagation, antennes*. 1997.
- [144] M. LEVY, *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation*. IEE Electromagnetic Waves Series 45, 2000.
- [145] A. GINESTET, *Modélisation de la Propagation d'une onde électromagnétique sur des scènes de grande taille par résolution de l'équation parabolique 3D vectorielle*. Thèse doctorat, Université de Toulouse III - Paul Sabatier - U.F.R. P.C.A., 2007.
- [146] J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*. 1941.
- [147] C. A. BALANIS, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York : Wiley, 1989.
- [148] H. P. LANGTANGEN, *Python Scripting for Computational Science*. 2004. <http://folk.uio.no/hpl/scripting>.
- [149] T. E. OLIPHANT, « Python for scientific computing », *Computing in Science and Engineering*, vol. 9, p. 10–20, mai 2007.
- [150] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 9th éd., 1972. <http://www.math.hkbu.edu.hk/support/aands/toc.htm>.
- [151] B. SIMONS, *Quantum Condensed Matter Field Theory*. 2005. <http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~bds10/tp3.html>.
- [152] N. DE BRUIJN, *Asymptotic Methods in Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1981 [1958].
- [153] E. T. COPSON, *Asymptotic Expansions*. Cambridge University Press, 1965.
- [154] F. OLVER, *Asymptotics and Special Functions*. 1974.
- [155] N. M. TEMME, « Uniform asymptotic expansions of integrals : a selection of problems », in *Conference in honour of Thomas Jan Stieltjes Jr.*, 1994.
- [156] J. J. STAMNES, « Diffraction, asymptotics and catastrophes », *Optica Acta*, vol. 29, no. 6, p. 823–842, 1982.
- [157] D. W. LOZIER et F. W. J. OLVER, « Numerical evaluation of special functions », in *Mathematics of Computation 1943-1993 : A Half-Century of Computational Mathematics (W. Gautschi, ed.)*, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* (A. M. SOCIETY, éd.), vol. 48, p. 79–125, 2000 [1994]. <http://math.nist.gov/mcsd/Reports/2001/nesf/>.
- [158] N. M. TEMME, « Recent problems from uniform asymptotic analysis of integrals in particular in connection with tricomi's *psi*-function », 1998.
- [159] N. BLEISTEIN, « Mathematics of modeling, migration and inversion with gaussian beams », août 2007. <http://www.cwp.mines.edu/~norm/>.

- 
- [160] N. N. YOUSSEF, « Radar cross section of complex targets », *Proc. of the IEEE*, vol. 77, p. 722–734, mai 1989.
- [161] C.-T. TAI, *Generalized Vector and Dyadic Analysis*. IEEE Press, New York, 1992.



## ANNEXES



## Annexe A

# Intégrales gaussiennes

### I Intégrale gaussienne unidimensionnelle

Soient  $a$  et  $b$  deux paramètres complexes indépendants de  $x$  tels que  $\operatorname{Re}[a] > 0$ , on a [150, §7.4] :

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{a}{2}x^2 + bx\right] dx = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{b^2}{2a}\right] \quad (\text{A.1})$$

### II Généralisation aux dimensions supérieures

Soient  $\mathbf{x}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{A}$  une matrice complexe de dimension  $n \times n$  et  $\mathbf{b}$  un vecteur complexe de  $\mathbb{C}^n$  indépendant de  $\mathbf{x}$ , tels que  $\mathbb{A}$  soit définie de partie réelle positive, on a [151, §3] :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-\frac{1}{2} {}^t\mathbf{x}\mathbb{A}\mathbf{x} + {}^t\mathbf{x}\mathbf{b}\right] d\mathbf{x} = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbb{A})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} {}^t\mathbf{b}\mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}\right] \quad (\text{A.2})$$





## Annexe B

# Intégrales de rayonnement des courants

## I Formulation de Kottler

### I.1 Intégrales en trois dimensions

Soient  $\mathbf{r}$  un point d'observation,  $\mathbf{r}'$  un point d'une surface  $\Sigma$  sur laquelle circulent les densités de courant électriques  $\mathbf{J}$  et magnétiques  $\mathbf{M}$ . On définit  $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ ,  $R$  la norme de  $\mathbf{R}$  et  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ .

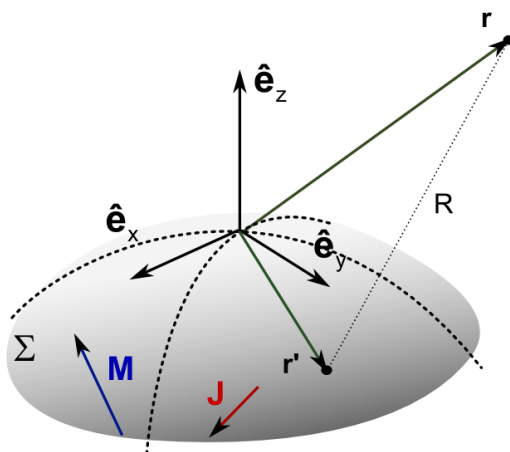


FIG. B.1: Géométrie et notations.

Le champ électrique rayonné par ces courants dans la formulation de KOTTLER

s'écrit [82, 143, 85] :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4j\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( 1 - \frac{j}{kR} - \frac{1}{(kR)^2} \right) \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \left( -1 + \frac{3j}{kR} + \frac{3}{(kR)^2} \right) (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \hat{\mathbf{R}} - \left( 1 - \frac{j}{kR} \right) (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')) \right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma \quad (\text{B.1})$$

et le champ magnétique :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4j\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} \left( 1 - \frac{j}{kR} - \frac{1}{(kR)^2} \right) \mathbf{M}(\mathbf{r}') + \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} \left( -1 + \frac{3j}{kR} + \frac{3}{(kR)^2} \right) (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')) \hat{\mathbf{R}} + \left( 1 - \frac{j}{kR} \right) (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) \right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma \quad (\text{B.2})$$

Au delà de quelques longueurs d'ondes, on peut négliger les termes en  $1/kR$  et  $1/(kR)^2$ . Grâce au fait que  $\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{J} = (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{J}) \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{J}$ , on a :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{jk}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{jk}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] \frac{e^{-jkR}}{R} d\Sigma \quad (\text{B.4})$$

## I.2 Intégrales en deux dimensions

Supposons que les variables du problème puissent être ramenées à une dépendance selon  $x, y$  seulement, indépendamment de l'axe  $z$ . Aussi [2, 3] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jkR}}{R} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} dz \quad (\text{B.5})$$

$$= -j\pi H_0^{(2)}(k\rho) \quad (\text{B.6})$$

où  $H_0^{(2)}$  est la fonction de HANKEL du second type et de premier ordre<sup>1</sup> et  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Le champ rayonné s'exprime alors à grande distance :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4} \int_{\ell} \left[ -\frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') \right] H_0^{(2)}(k\rho) d\ell \quad (\text{B.7})$$

où  $d\ell$  correspond à l'élément de longueur de long de la courbe  $\ell$ .

<sup>1</sup>Car la convention temporelle choisie est  $+j\omega t$ . Pour la convention  $-j\omega t$ , il convient de prendre la fonction de HANKEL du premier type et de premier ordre  $H_0^{(1)}$  [3].

## Annexe C

# Évaluation asymptotique d'intégrales

### I Intégrales simples

Dans cette section, nous calculons le développement asymptotique d'intégrales de la forme :

$$I = \int_{\mathcal{D}} f(x) e^{-kg(x)} dx \quad (\text{C.1})$$

dans l'hypothèse où  $k$  est un grand réel positif. Les fonctions  $f$  et  $g$  sont à variables réelles et à valeurs complexes. On suppose que  $\operatorname{Re}[g(x)] < 0, \forall x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$  pour que l'intégrale soit définie. On suppose par ailleurs que la fonction  $f$  varie lentement par rapport à la fonction  $\exp(-kg)$  sur le domaine d'intégration réel  $\mathcal{D}$ . Nous discutons deux cas de figure :

- $\mathcal{D}$  n'est pas borné :  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  ;
- $\mathcal{D}$  est borné (ou semi-borné).

Lorsque le domaine d'intégration correspond à l'espace des réels, les approximations asymptotiques de l'intégrale (C.1) sont bien connues et font l'objet d'une littérature conséquente [152, 153, 114, 154, 110, 111] et [2, chap.4]. Pour cette raison, seuls les principaux résultats concernant les intégrales simples seront donnés ici. Sauf mentions contraires, nous supposerons dans la suite que les fonctions  $f$  et  $g$  sont continues et infiniment dérivables sur leur domaine d'intégration. De plus, nous supposerons que la fonction  $g$  possède un seul et unique point stationnaire  $x_s$  d'ordre un<sup>1</sup>. Le point stationnaire de la fonction  $g$  correspond au point qui annule sa dérivée, soit :

$$g'(x_s) = 0 \quad (\text{C.2})$$

---

<sup>1</sup>Soit un point pour lequel la dérivée seconde de la fonction  $g$  ne s'annule pas.

### I.1 domaine non borné

Soit  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ . L'intégrale :

$$I_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-kg(x)} dx \quad (\text{C.3})$$

a pour développement asymptotique au premier ordre :

$$I_\infty \approx \sqrt{\frac{2\pi}{k}} (g''(x_s))^{-\frac{1}{2}} f(x_s) e^{-kg(x_s)} \quad (\text{C.4})$$

### I.2 domaine borné

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine borné tel que  $\mathcal{D} = [a, b]$ . L'intégrale (C.1) peut alors se décomposer comme tel :

$$I_{[a,b]} = \int_a^b f(x) e^{-kg(x)} dx \quad (\text{C.5})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-kg(x)} dx - \int_{-\infty}^a f(x) e^{-kg(x)} dx - \int_b^{+\infty} f(x) e^{-kg(x)} dx \quad (\text{C.6})$$

$$= I_\infty - I_a - I_b \quad (\text{C.7})$$

La première intégrale se ramène au cas précédent, et il convient alors de calculer deux intégrales semi-bornées. Nous étudierons plus particulièrement l'intégrale suivante :

$$I_b = \int_b^{+\infty} f(x) e^{-kg(x)} dx \quad (\text{C.8})$$

posons  $s^2 = g(x) - g(x_s)$ . L'intégrale s'écrit alors :

$$I_b = e^{-kg(x_s)} \int_{s_b}^{\infty} e^{-ks^2} \underbrace{f(x) \frac{2s}{g'(x)}}_{F(s)} ds \quad (\text{C.9})$$

avec  $s_b = (g(b) - g(x_s))^{\frac{1}{2}}$ . Le point stationnaire  $x_s$ , à priori complexe, correspond maintenant à  $s = 0$ . Deux cas de figure se présentent alors, selon si le point stationnaire appartient au domaine d'intégration ou non ( $\text{Re}[s_b] \leq 0$ ). Pour obtenir une expression permettant de décrire à la fois ces deux cas (et continûment), on décompose l'intégrale et on intègre par parties[2, 155] :

$$I_b = e^{-kg(x_s)} \int_{s_b}^{\infty} e^{-ks^2} [F(s) - F(0) + F(0)] ds \quad (\text{C.10})$$

$$= e^{-kg(x_s)} \left[ \int_{s_b}^{\infty} \frac{F(s) - F(0)}{-2ks} d(e^{-ks^2}) + F(0) \int_{s_b}^{\infty} e^{-ks^2} ds \right] \quad (\text{C.11})$$

$$= e^{-kg(x_s)} \left[ \frac{F(s_b) - F(0)}{2ks_b} e^{-ks_b^2} + \frac{1}{k} \int_{s_b}^{\infty} \frac{d}{ds} \left( \frac{F(s)}{2s} \right) e^{-ks^2} ds + \frac{F(0)}{\sqrt{k}} Q(\sqrt{k}s_b) \right] \quad (\text{C.12})$$

où  $Q$  est une fonction intégrale que l'on peut écrire sous la forme d'une fonction d'erreur complémentaire :

$$Q(y) = \int_y^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(y) \quad (\text{C.13})$$

$$\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2y} e^{-y^2} + \sqrt{\pi} \Gamma(-\operatorname{Re}[y]) \quad \text{si } |y| \gg 1 \quad (\text{C.14})$$

Le terme intégral restant est d'un ordre supérieur du développement asymptotique. Au premier ordre, il peut donc être négligé et l'on obtient [2, §4.6a] :

$$I_b \approx e^{-kg(x_s)} \left[ \frac{F(s_b) - F(0)}{2ks_b} e^{-ks_b^2} + \frac{F(0)}{\sqrt{k}} Q(\sqrt{k}s_b) \right] \quad (\text{C.15})$$

De la même manière, pour l'intégrale  $I_a$ , on obtient :

$$I_a \approx e^{-kg(x_s)} \left[ -\frac{F(s_a) - F(0)}{2ks_a} e^{-ks_a^2} + \frac{F(0)}{\sqrt{k}} \left( \sqrt{\pi} - Q(\sqrt{k}s_a) \right) \right] \quad (\text{C.16})$$

Ces expressions sont dites *uniformes*, car elles ne sont pas discontinues lorsque  $x_s \rightarrow b$ . Le choix du signe des racines carrées complexes doit permettre de vérifier  $F(s_b) \rightarrow F(0)$  lorsque  $s_b \rightarrow 0$  [2, 106, 156]. Pour cela, on peut utiliser le développement de TAYLOR de  $g(b) - g(x_s)$  lorsque  $b \rightarrow x_s$ <sup>2</sup> :

$$g(b) - g(x_s) \approx \frac{(b - x_s)^2}{2} g''(x_s) \quad (\text{C.17})$$

Le signe de la racine carrée de  $s_b$  peut par exemple être choisi comme :

$$s_b = |g(b) - g(x_s)|^{\frac{1}{2}} e^{j \operatorname{Arg}[\frac{1}{2}(b - x_s)^2 g''(b)]} \quad (\text{C.18})$$

On peut également utiliser le développement de TAYLOR de  $g(b) - g(x_s)$  lorsque  $x_s \rightarrow b$  :

$$g(b) - g(x_s) \approx g'(b)(b - x_s) - \frac{1}{2} g''(x_s)(x_s - b)^2 \quad (\text{C.19})$$

Or, puisque l'on doit avoir  $g(b) - g(x_s) \rightarrow 0$  lorsque  $b \rightarrow x_s$ , aussi on a, à la limite  $g''(b) \rightarrow g''(x_s)$  d'où :

$$g'(b) \approx (b - x_s) g''(b) \quad (\text{C.20})$$

<sup>2</sup>En suivant la démarche de [2]. [106, 156] utilisent la démarche inverse, en partant de  $x_s \rightarrow b$ .

et par conséquent :

$$F(0) = \lim_{s_b \rightarrow 0} F(s_b) \quad (\text{C.21})$$

$$= g(x_s) \lim_{b \rightarrow x_s} \frac{2(g(b) - g(x_s))^{\frac{1}{2}}}{g'(b)} \quad (\text{C.22})$$

$$= g(x_s) \left( \frac{2}{g''(b)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.23})$$

La fonction d'erreur complémentaire  $\text{erfc}$  est tabulée dans de nombreuses bibliothèques informatiques, en particulier pour des arguments  $y$  réels. Toutefois, les implémentations peuvent varier pour des arguments complexes<sup>3</sup>. Il peut être utile d'exprimer la fonction d'erreur complexe par rapport à la fonction de FADEEVA  $w(z)$ , pour laquelle il existe de nombreuses implémentations :

$$w(z) = e^{-z^2} \left[ 1 + \frac{2j}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right] \quad (\text{C.24})$$

$$= e^{-z^2} \text{erfc}(-jz) \quad (\text{C.25})$$

Remarque : lorsque  $\text{Im}(z) \gg \text{Re}(z)$ , la fonction  $\text{erfc}(z)$  n'est généralement plus définie car elle donne lieu à une forme indéterminée  $(\infty \pm j\infty) \times \text{C}^{\text{te}}$ .

---

<sup>3</sup>On trouvera dans [157, 158] des informations supplémentaires sur l'évaluation numérique de ces fonctions spéciales

## II Intégrales doubles

Dans les sections suivantes, nous nous intéressons au comportement asymptotique des intégrales doubles de la forme :

$$I = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) e^{-kg(x, y)} dx dy \quad (\text{C.26})$$

où  $\mathcal{D}$  est un domaine inclus dans  $\mathbb{R}^2$  et simplement connexe<sup>4</sup>. Nous supposons qu'il n'existe qu'un seul et unique point stationnaire  $\mathbf{x}_s = {}^t(x_s, y_s)$ , c'est-à-dire un seul point pour lequel

$$\nabla g(\mathbf{x}_s) = \mathbf{0}$$

De plus, on suppose que ce point stationnaire est d'ordre un<sup>5</sup>, soit :

$$\det \mathbb{H} \neq 0 \quad \text{avec} \quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbb{H}$  représente la matrice Hessienne de la fonction  $g$ . Enfin, on suppose que les fonctions  $f$  et  $g$  sont infiniment dérivables par rapport à  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{D}$ , à valeurs complexes et définies telle que l'intégrale existe. Ces hypothèses correspondent aux intégrales généralement rencontrées dans cette thèse.

### II.1 domaine non borné

Dans cette section, on s'intéresse à l'évaluation asymptotique d'intégrales doubles du type

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-kg(x, y)} dx dy \quad (\text{C.27})$$

L'évaluation asymptotique d'intégrales doubles non bornées fait l'objet d'une littérature importante, en particulier [114, 110, 2, 111, 159]. Aussi, nous nous contenterons dans cette section de donner les résultats principaux sans démonstration. Le développement asymptotique de l'intégrale (C.27) est :

$$I \approx \frac{2\pi}{k} (\det \mathbb{H}_s)^{-\frac{1}{2}} f(x_s, y_s) e^{-kg(x_s, y_s)} \quad (\text{C.28})$$

où  $\mathbb{H}_s$  correspond à la matrice Hessienne évaluée au point col  $(x_s, y_s)$ .

<sup>4</sup>C'est-à-dire une surface sans "trous". Plus précisément, tout lacet (i.e. chemin fermé) tracé sur sa surface peut se déformer continûment en un point.

<sup>5</sup>Soit un point pour lequel les dérivées secondes de la fonction  $g$  ne sont pas nulles



### II.1.1 Phase quadratique

Lorsque la fonction  $g$  est une forme quadratique du type :

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{x} \mathbb{G} \mathbf{x} - {}^t \mathbf{x} \mathbf{b} \quad (\text{C.29})$$

où  $\mathbf{x} = {}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{b} = {}^t(b_x, b_y)$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{C}^2$  et  $\mathbb{G}$  une matrice symétrique  $2 \times 2$ , le point col a pour expression :

$$\mathbf{x}_s = \mathbb{G}^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{C.30})$$

et par conséquent, le résultat (C.28) s'écrit directement :

$$I \approx \frac{2\pi}{k} (\det \mathbb{G})^{-\frac{1}{2}} f(x_s, y_s) \exp \left[ + \frac{k}{2} {}^t \mathbf{b} \mathbb{G}^{-1} \mathbf{b} \right] \quad (\text{C.31})$$

### II.1.2 Application au calcul du champ propagé par le spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien dans l'hypothèse paraxiale

Dans cette section nous calculons le développement asymptotique de l'intégrale :

$$U(x, y, z) = \frac{(\det \mathbb{Q}(0))^{-\frac{1}{2}}}{2\pi j k} e^{-jkz} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(k_x, k_y) \cdot \exp \left[ \frac{j}{2k} {}^t \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \mathbb{Q}^{-1}(z) \begin{pmatrix} k_{\parallel} \\ k_{\perp} \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] dk_x dk_y \quad (\text{C.32})$$

On exprime l'argument de l'exponentielle de l'intégrande sous la forme  $-kg(k_x, k_y)$  où  $g$  est une forme quadratique (C.29) :

$$g(k_x, k_y) = \frac{1}{2} {}^t \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \left( -\frac{j}{k^2} \mathbb{Q}^{-1}(z) \right) \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} jx/k \\ jy/k \end{pmatrix} \quad (\text{C.33})$$

Le point col  $k_{x_s}, k_{y_s}$  correspond à :

$$\begin{pmatrix} k_{x_s} \\ k_{y_s} \end{pmatrix} = k \mathbb{Q}(z) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{C.34})$$

La matrice Hessienne et son déterminant :

$$\mathbb{H} = -\frac{j}{k^2} \mathbb{Q}^{-1}(z) \Rightarrow \det \mathbb{H} = (-k^4 \det \mathbb{Q}(z))^{-1} \quad (\text{C.35})$$

L'évaluation asymptotique par la méthode du point col donne :

$$U(x, y, z) \approx \left( \frac{\det \mathbb{Q}(z)}{\det \mathbb{Q}(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{U}(k_{x_s}, k_{y_s}) \exp \left[ -\frac{jk}{2} {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{Q}(z) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - jkz \right] \quad (\text{C.36})$$

### II.1.3 Application au calcul du champ lointain d'un spectre d'ondes planes

Dans cette section, nous calculons le développement asymptotique de l'expression intégrale d'un spectre d'ondes planes :

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \quad (\text{C.37})$$

pour  $z > 0$  et dans l'hypothèse où le point d'observation  $\mathbf{r}$  est en champ lointain, c'est-à-dire que  $kr \gg 1$ . On pose  $\phi(k_x, k_y) = jk_x/kx/r + jk_y/ky/r + jk_z/kz/r$  avec  $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et en utilisant des coordonnées spatiales sphériques, l'intégrale s'écrit :

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(k_x, k_y) e^{-kr\phi(k_x, k_y)} dk_x dk_y \quad (\text{C.38})$$

avec

$$\phi(k_x, k_y) = \frac{k_x}{k} \cos\phi \sin\theta + \frac{k_y}{k} \sin\phi \sin\theta + \frac{k_z}{k} \cos\theta \quad (\text{C.39})$$

Le point stationnaire de la fonction  $\phi$  se calcule analytiquement et a pour valeur :

$$k_{x_s} = k \cos\phi \sin\theta \quad (\text{C.40})$$

$$k_{y_s} = k \sin\phi \sin\theta \quad (\text{C.41})$$

L'intégrale possède une forme adaptée à l'application de la méthode de la phase stationnaire (ou du point col) où l'on suppose que la variation de phase du terme  $\tilde{U}$  est négligeable devant les variations de phase du terme  $\phi$ . La fonction  $\phi$  et le déterminant de sa matrice Hessienne sont évalués au point col sont :

$$\phi(k_{x_s}, k_{y_s}) = +j \quad (\text{C.42})$$

$$\det \mathbb{H}_s = -\frac{1}{k^4 \cos^2\theta} \quad (\text{C.43})$$

Le signe de la racine carrée complexe imposé par la condition sur le signe de la partie imaginaire de  $k_z$  doit être respecté lors de l'application de la méthode du col. Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$(z)^{\frac{1}{2}} = -j\sqrt{-z} \quad (\text{C.44})$$

où  $\sqrt{\phantom{x}}$  est la racine carrée usuelle dont la partie réelle est strictement positive. Alors :

$$(\det \mathbb{H}_s)^{-\frac{1}{2}} = +jk^2 |\cos\theta| = jk^2 \cos\theta \quad (\text{C.45})$$

car  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  puisque par hypothèse  $z > 0$ . (C.38) est évaluée asymptotiquement en utilisant (C.28) pour tout  $z > 0$  :

$$U(x, y, z) \approx jk \frac{e^{-jkr}}{r} \cos\theta \tilde{U}(k \cos\phi \sin\theta, k \sin\phi \sin\theta) \quad (\text{C.46})$$

### II.1.4 Application au calcul du spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme

On écrit les intégrales centrales de (1.101) sous une forme canonique :

$$\mathbf{I}^\pm = \iint_{\Sigma} \hat{\mathbf{e}}^C(\mathbf{r}') \exp \left[ -j \frac{k}{2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mathbb{Q}_f \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} + j \mathbf{k}^\pm \cdot \mathbf{r}' \right] d\Sigma \quad (\text{C.47})$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{r}') e^{-k\phi^\pm(\mathbf{r}')} dx' dy' \quad (\text{C.48})$$

avec

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{e}}^C(\mathbf{r}') g^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.49})$$

$$\phi^\pm(\mathbf{r}') = j \left( \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mathbb{Q}_f \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} - \frac{1}{k} \mathbf{k}^\pm \cdot \mathbf{r}' \right) \quad (\text{C.50})$$

Où on a utilisé  $d\Sigma = g^{\frac{1}{2}} dx' dy'$ ,  $g$  étant la métrique de la quadrique  $\Sigma^6$ , dont l'expression est :

$$g(\mathbf{r}') = (q_{11}^\Sigma x' + q_{12}^\Sigma y')^2 + (q_{12}^\Sigma x' + q_{22}^\Sigma y')^2 + 1 \quad (\text{C.51})$$

La composante  $z'$  du vecteur  $\mathbf{r}'$  peut être approximée localement par l'expression de la quadrique (1.61) et amène à :

$$\phi^\pm(\mathbf{x}') = \frac{j}{2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \left[ \mathbb{Q}_f \pm \frac{k_z}{k} \mathbb{Q}^\Sigma \right] \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \frac{j}{k} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} \quad (\text{C.52})$$

Le point stationnaire de la fonction  $\phi$  est :

$$\begin{pmatrix} x'_s \\ y'_s \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \left[ \mathbb{Q}_f \pm \frac{k_z}{k} \mathbb{Q}^\Sigma \right]^{-1} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} \quad (\text{C.53})$$

L'application de la méthode du point col donne :

$$\mathbf{I}^\pm = \frac{2\pi}{k} \hat{\mathbf{e}}^{C;\pm}(x'_s) (-g_s / \det \mathbb{Q}_\pm)^{\frac{1}{2}} \exp \left( + \frac{j}{2k} {}^t \zeta \mathbb{Q}_\pm^{-1} \zeta \right) \quad (\text{C.54})$$

avec

$$\zeta = \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} \quad (\text{C.55})$$

$$\mathbb{Q}_\pm = \mathbb{Q}_f \pm \frac{k_z}{k} \mathbb{Q}^\Sigma \quad (\text{C.56})$$

$$g_s = g(\mathbf{r}'_s) = g(k_x, k_y) \quad (\text{C.57})$$

<sup>6</sup>Où de manière équivalente, en utilisant l'identité de LAGRANGE :  $g^2 = \|\mathbf{N}\| = \left\| \frac{\partial z'}{\partial x'} \times \frac{\partial z'}{\partial y'} \right\|$ ,  $\mathbf{N}$  étant alors le vecteur normal à la surface  $\Sigma$  au point  $(x', y')$ .

## II.2 domaine borné

Dans cette section, on étudie le comportement asymptotique de l'intégrale canonique :

$$I = \iint_S f(x, y) e^{-kg(x, y)} dx dy \quad (\text{C.58})$$

où  $\mathbf{x} = (x, y)$  représente la position d'un point sur le domaine  $S$  (généralement inclus dans  $\mathbb{R}^2$ , en particulier pour les intégrales de surface).

### II.2.1 Évaluation non uniforme

On fait l'hypothèse que  $g(x, y) = -j\phi(x, y)$  où la fonction  $\phi$  est à valeur réelle pour se placer dans le cadre de la méthode de la phase stationnaire [121, 112, 116] :

$$I = \iint_S f(x, y) e^{jk\phi(x, y)} dx dy \quad (\text{C.59})$$

Le domaine d'intégration  $S$  est considéré ici comme une surface dont le contour  $\partial S$  d'équation  $s(x, y) = 0$  est continu<sup>7</sup>.

Comme dans le cas unidimensionnel, les contributions principales de l'intégrale (C.59) vont provenir d'un certain nombre de points dit *critiques*. Ce sont des points particuliers où la contribution de la fonction  $\phi$  est maximale pour le domaine. Ils sont généralement classés en points critiques du *premier*, *second* et *troisième* ordre. Dans cette annexe, nous exprimerons seulement les formulations utiles pour une surface rectangulaire comprise entre  $X_- < x < X_+$ ,  $Y_- < y < Y_+$ , illustrée sur la figure (C.1). Un cas plus général pourra être trouvé dans [112, 116].

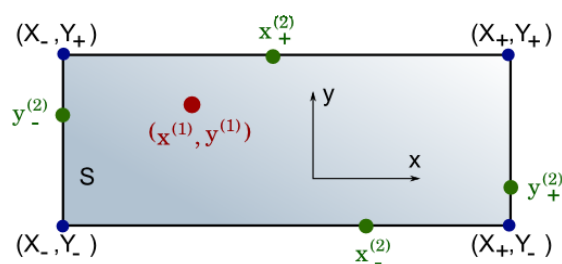


FIG. C.1: Illustration de la surface rectangulaire  $S$  et de la position des points critiques par rapport à la surface.

<sup>7</sup>Le contour peut être coudé, mais il ne fait pas de boucles.

### II.2.1.a Points critiques du premier ordre

Les points critiques du premier ordre, ou plus communément *points de phase stationnaire* ou *points col*, sont les points pour lequel le gradient de la fonction  $\phi$  est nul, *i.e.* :

$$I = \nabla\phi(x^{(1)}, y^{(1)}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.60})$$

Lorsque ce point appartient au domaine d'intégration, la contribution de l'intégrale (C.59) s'écrit alors comme la contribution du point stationnaire classique pour un domaine non borné :

$$I^{(1)} \approx \frac{2\pi}{k} \frac{f^{(1)}}{|\phi_{11}^{(1)}\phi_{22}^{(1)} - \phi_{12}^{(1)}|^{\frac{1}{2}}} e^{jk\phi^{(1)}} e^{j\frac{\pi}{4}(\delta+1)\sigma} \quad (\text{C.61})$$

où  $f^{(1)} = f(x^{(1)}, y^{(1)})$ ,  $\phi^{(1)} = \phi(x^{(1)}, y^{(1)})$ ,  $\phi_{11} = \partial^2\phi/\partial x^2$ ,  $\phi_{22} = \partial^2\phi/\partial y^2$  et  $\phi_{12} = \partial^2\phi/\partial x\partial y$ .  $\delta$  et  $\sigma$  correspondent au signe des dérivées secondes :

$$\sigma = \text{sign}(\phi_{22}^{(1)}) \quad , \quad \delta = \text{sign}(\phi_{11}^{(1)}\phi_{22}^{(1)} - \phi_{12}^{(1)}) \quad (\text{C.62})$$

### II.2.1.b Points critiques du second ordre

Pour une surface  $S$  rectangulaire comprise entre  $X_- < x < X_+$  et  $Y_- < y < Y_+$ , les 4 points critiques du second ordre  $(X_+, y_+^{(2)})$ ,  $(X_-, y_-^{(2)})$ ,  $(x_+^{(2)}, Y_+)$  et  $(x_-^{(2)}, Y_-)$  sont les points situés sur le contour  $\partial S$  de  $S$  pour lesquels :

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(X_{\pm}, y_{\pm}^{(2)}) = 0 \quad (\text{C.63})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_{\pm}^{(2)}, Y_{\pm}) = 0 \quad (\text{C.64})$$

La contribution des deux premiers s'écrit :

$$I_{X;\pm}^{(2)} \approx \mp \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \frac{f_{X;\pm}^{(2)} e^{jk\phi_{X;\pm}^{(2)}}}{k\phi_1^{(2)} |\phi_{22}^{(2)}|^{\frac{1}{2}}} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_y} \quad (\text{C.65})$$

et pour les deux suivants :

$$I_{Y;\pm}^{(2)} \approx \mp \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \frac{f_{Y;\pm}^{(2)} e^{jk\phi_{Y;\pm}^{(2)}}}{k\phi_2^{(2)} |\phi_{11}^{(2)}|^{\frac{1}{2}}} e^{j\frac{\pi}{4}\sigma_x} \quad (\text{C.66})$$

où on a utilisé :

$$f_{X;\pm}^{(2)} = f(X_{\pm}, y_{\pm}^{(2)}) \quad \phi_{X;\pm}^{(2)} = \phi(X_{\pm}, y_{\pm}^{(2)}) \quad (\text{C.67})$$

$$f_{Y;\pm}^{(2)} = f(x_{\pm}^{(2)}, Y_{\pm}) \quad \phi_{Y;\pm}^{(2)} = \phi(x_{\pm}^{(2)}, Y_{\pm}) \quad (\text{C.68})$$

$$\phi_1^{(2)} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(X_{\pm}, y_{\pm}^{(2)}) \quad \phi_2^{(2)} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_{\pm}^{(2)}, Y_{\pm}) \quad (\text{C.69})$$

$$\phi_{11}^{(2)} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_{\pm}^{(2)}, Y_{\pm}) \quad \phi_{22}^{(2)} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(X_{\pm}, y_{\pm}^{(2)}) \quad (\text{C.70})$$

$$\sigma_x = \text{sign}(\phi_{11}^{(2)}) \quad \sigma_y = \text{sign}(\phi_{22}^{(2)}) \quad (\text{C.71})$$

### II.2.1.c Points critiques du troisième ordre

Pour la surface rectangulaire  $S$  comprise entre  $X_- < x < X_+$  et  $Y_- < y < Y_+$ , les 4 points critiques du troisième ordre correspondent aux 4 coins  $(X_{\pm}, Y_{\pm})$ . La contribution de l'intégrale s'écrit alors :

$$I_{X_{\pm}; Y_{\pm}}^{(3)} = \epsilon_{X_{\pm}; Y_{\pm}} \frac{f^{(3)}}{k^2 \phi_1^{(3)} \phi_2^{(3)}} e^{jk\phi^{(3)}} \quad (\text{C.72})$$

avec

$$f^{(3)} = f(X_{\pm}, Y_{\pm}) \quad \phi^{(3)} = \phi(X_{\pm}, Y_{\pm}) \quad (\text{C.73})$$

$$\phi_1^{(3)} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(X_{\pm}, Y_{\pm}) \quad \phi_2^{(3)} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(X_{\pm}, Y_{\pm}) \quad (\text{C.74})$$

et

$$\epsilon_{X_{\pm}; Y_{\pm}} = \begin{cases} -1 & \text{pour } (X_+, Y_+), (X_-, Y_-) \\ +1 & \text{pour } (X_-, Y_+), (X_+, Y_-) \end{cases} \quad (\text{C.75})$$

### II.2.1.d Singularités

L'intégrale (C.59) est calculée en sommant la contribution de chacun des points critiques, si et seulement si ils appartiennent au domaine d'intégration[116]. On peut alors observer des discontinuités dans l'évaluation de l'intégrale, lorsque pour un ensemble de fonctions  $(f, \phi)$  des points critiques appartiennent au domaine, tandis que pour un autre ensemble voisin  $(f', \phi')$ , ce n'est plus le cas. C'est typiquement le cas lorsque l'on évalue un

champ électromagnétique : en fonction de la position d'observation, les points critiques du premier et second ordre peuvent varier, auquel cas ils peuvent "sortir" ou "entrer" dans le domaine d'intégration.

De plus, les formulations asymptotiques des points du second et du troisième ordre (C.65), (C.66) et (C.72) peuvent être singulières lorsque les fonctions  $\phi_j^{(i)}$  sont voisines de zéro. Autrement dit, elles sont singulières lorsque le point critique du premier ordre s'approche des points critiques des second et troisième ordre[110].

Enfin, il est clair que cette méthode s'adresse à une fonction  $\phi$  à valeurs réelles. En effet, quelle interprétation donner aux points critiques à valeurs complexes, en particulier lorsqu'il s'agit de définir leur position relative au domaine d'intégration ? La méthode du point col, adaptée aux intégrales à valeurs complexes, n'est pas formulée pour des domaines bornés. On peut toutefois obtenir un développement uniforme lorsque le point critique du premier ordre approche le contour du domaine[110]. Cette approche est évoquée dans la section suivante.

## II.2.2 Évaluation uniforme

Puisque la nature du développement asymptotique change selon si le point  $\mathbf{x}_s$  :

- est contenu à l'intérieur de  $S$  ;
- appartient au contour  $\partial S$  de  $S$
- n'appartient pas à  $S$ ,

nous cherchons ici un développement valide quelque soit la position du point stationnaire, qu'il soit inclus ou non dans le domaine d'intégration.

### II.2.2.a Décomposition d'intégrales doubles en deux intégrales simples

Lorsque le domaine d'intégration le permet, on peut considérer des intégrales doubles comme l'intégration successive de deux intégrales simples. Par conséquent, on peut obtenir un développement asymptotique d'une intégrale double par deux développements asymptotiques successifs, à partir des méthodes décrites dans la section I.

**Intégrales doubles avec une seule borne ramené au calcul de deux intégrales simples.** Dans le cadre du calcul de champ rayonné par des surfaces finies, on s'intéresse aux intégrales du type :

$$I_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_X^{+\infty} \varphi(x, y) e^{-k\psi(x, y)} dx dy \quad (\text{C.76})$$

L'intégrale étant définie sur le domaine d'intégration, on peut appliquer le théorème de FUBINI et inverser l'ordre d'intégration :

$$I_1(X) = \int_X^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) e^{-k\psi(x, y)} dy dx \quad (C.77)$$

L'intégrale centrale est évaluée asymptotiquement par la méthode du point col (cf. section (I.1)) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{-k\psi(x, y)} dy \approx \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, y_s) \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x, y_s) e^{-k\psi(x, y_s)} \quad (C.78)$$

où  $y_s$  correspond à :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y_s) = 0 \quad \forall x \in [X, +\infty[ \quad (C.79)$$

On pose  $\Phi(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, y_s) \right)^{-\frac{1}{2}} \varphi(x, y_s)$  et  $\Psi(x) = \psi(x, y_s)$ . L'intégrale  $I_1$  est maintenant réduite à :

$$I_1(X) \approx \int_X^{+\infty} \Psi(x) e^{-k\Phi(x)} dx \quad (C.80)$$

L'évaluation asymptotique uniforme de cette intégrale est effectuée à partir des résultats de la section précédente. On a :

$$I_1(X) \approx e^{-k\Psi(x_s)} \left[ \frac{F_X(0)}{\sqrt{k}} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_X) + \frac{1}{2k} \frac{F_X(s_X) - F_X(0)}{s_X} e^{-ks_X^2} \right] \quad (C.81)$$

avec

$$s_X = \sqrt{\Psi(X) - \Psi(x_s)} \quad (C.82)$$

$$x_s \quad \text{tq} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x_s) = 0 \quad (C.83)$$

$$F_X(s_X) = \Phi(X) \frac{s_X}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}(X)} \quad (C.84)$$

$$F_X(0) = \Phi(x_s) \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x_s)}} \quad (C.85)$$

$$\mathcal{Q}(t) = \int_t^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(t) \quad (C.86)$$

**Intégrales doubles avec deux bornes.** On s'intéresse à l'évaluation asymptotique des intégrales du type

$$I_{11} = \int_X^{\infty} \int_Y^{\infty} \varphi(x, y) e^{-k\psi(x, y)} dx dy \quad (C.87)$$



Une expression asymptotique uniforme de ce type d'intégrale a été publiée par CONDE[124], sans démonstration. Afin de déterminer le domaine de validité de l'expression proposée, nous le redémontrons ci-dessous. Pour cela, on utilise un développement de TAYLOR de la fonction d'amplitude  $\varphi$  et de phase  $\psi$  au voisinage du point  $(X, Y)$  :

$$\psi(x, y) \approx \psi(X, Y) - \begin{pmatrix} x - X \\ y - Y \end{pmatrix} \nabla \psi(X, Y) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - X \\ y - Y \end{pmatrix} \mathbb{H}(X, Y) \begin{pmatrix} x - X \\ y - Y \end{pmatrix} \quad (\text{C.88})$$

$$\varphi(x, y) \approx \varphi(X, Y) \quad (\text{C.89})$$

où  $\mathbb{H}(X, Y)$  correspond à la matrice Hessienne évaluée au point  $(X, Y)$ . Dans l'hypothèse où les termes anti-diagonaux de la matrice, correspondant à  $\partial^2 \psi / \partial x \partial y = h_{12}$  sont nul, l'intégrale double peut se découpler en un produit de deux intégrales :

$$I_{11} = \varphi(X, Y) e^{-k\psi(X, Y)} \int_X^\infty e^{-k\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}(X, Y)(x-X) + \frac{h_{11}}{2}(x-X)^2\right)} dx \int_Y^\infty e^{-k\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}(X, Y)(y-Y) + \frac{h_{22}}{2}(y-Y)^2\right)} dy \quad (\text{C.90})$$

L'évaluation de chacune de ces intégrales peut alors s'effectuer à partir de la méthode présentée dans la section (I.2). Le résultat présenté par CONDE suit la méthode employée par JAMES : le développement asymptotique est réalisé autour de la borne de l'intégrale. En posant :

$$t = \sqrt{\frac{kh_{11}}{2}}(x - X) + \mu \quad (\text{C.91})$$

avec  $\mu = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(X, Y) \sqrt{\frac{k}{2h_{11}}}$ , on ramène la première intégrale à :

$$I_{11} \approx \int_X^\infty e^{-k\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}(X, Y)(x-X) + \frac{h_{11}}{2}(x-X)^2\right)} dx = \sqrt{\frac{2}{kh_{11}}} e^{\mu^2} \int_\mu^\infty e^{-t^2} dt \quad (\text{C.92})$$

Avec un changement de variable similaire  $y \rightarrow v$  pour la seconde intégrale, on retrouve le résultat de CONDE :

$$I_{11} \approx \frac{2\varphi(X, Y)}{k} e^{-k\psi(X, Y)} (h_{11}h_{22})^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Q}(\mu) e^{\mu^2} \mathcal{Q}(v) e^{v^2} \quad (\text{C.93})$$

### II.2.2.b Formulation uniforme généralisée

La démarche qui suit est valide quel que soit le domaine d'intégration considéré, mais reste difficilement applicable en pratique. Elle est décrite ici à titre indicatif.

La première étape est de procéder à quelques changements de variables afin d'obtenir une expression simplifiée de l'intégrale (C.58). Pour cela, on utilise le fait que  $\mathbf{x}_s$  soit un

point stationnaire de  $g$ . Ainsi, au voisinage de  $\mathbf{x}_s$ , un développement de Taylor de la fonction  $g$  s'écrit :

$$g(\mathbf{x}) \simeq g(\mathbf{x}_s) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \mathbb{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (\text{C.94})$$

Il existe une matrice orthogonale  $\mathbb{P}$  qui diagonalise la matrice symétrique  $\mathbb{H}$  :

$${}^t\mathbb{P}\mathbb{H}\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de  $\mathbb{H}$ . Ces valeurs propres doivent être de parties réelles positives, afin d'assurer la convergence de l'intégrale (C.58). On a également  $\lambda_1\lambda_2 = \det\mathbb{H}$ .

Introduisons maintenant le vecteur  $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$  tel que :

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_s = \mathbb{P}\mathbb{N}\mathbf{u} \quad (\text{C.95})$$

où  $\mathbb{N}$  est une matrice de normalisation définie par :

$$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_s) &\simeq \frac{1}{2} {}^t\mathbf{u} \underbrace{{}^t\mathbb{N}{}^t\mathbb{P}\mathbb{H}\mathbb{P}\mathbb{N}}_{\mathbb{I}_2} \mathbf{u} \\ &\simeq \frac{1}{2} {}^t\mathbf{u}\mathbf{u} \\ &\simeq \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \end{aligned}$$

Le Jacobien de cette transformation s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(\mathbf{u}) &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque : son déterminant en  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  vaut en particulier

$$J(\mathbf{0}) = \det \mathbb{J}(\mathbf{0}) = (\det \mathbb{H})^{-1/2} \quad (\text{C.96})$$

Avec ces notations, l'intégrale (C.58) s'écrit maintenant :

$$I = e^{-kg(x_s, y_s)} \iint_{\mathcal{L}} F(u, v) e^{-\frac{k}{2}(u^2 + v^2)} dudv \quad (\text{C.97})$$

où  $\mathcal{S}$  correspond à l'image de  $S$  par les transformations précédentes et

$$F(u, v) = J(u, v) f(x, y).$$

On va maintenant chercher à évaluer asymptotiquement l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{S}} F(u, v) e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} du dv \quad (\text{C.98})$$

Pour cela, afin de mettre en évidence le comportement asymptotique de l'intégrale au voisinage du point  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , on va introduire l'écriture suivante :

$$F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{0}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{u})$$

où  $\mathbf{P}$  peut être choisi de manière quelconque tant qu'il ne modifie pas  $F(\mathbf{u})$  sur le domaine. Par exemple :

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u}(F(u, v) - F(0, v)) \\ \frac{1}{v}(F(0, v) - F(0, 0)) \end{pmatrix}$$

Cette écriture permet de remarquer que<sup>8</sup> :

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} = -\frac{1}{k} \left[ \nabla \cdot (\mathbf{P} e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)}) - (\nabla \cdot \mathbf{P}) e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} \right]$$

et d'après le théorème de la divergence (Ostrogradsky-Gauss) :

$$\iint_{\mathcal{S}} \nabla \cdot \mathbf{f} dS = \oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} F(u, v) e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} du dv &= F(0, 0) \iint_{\mathcal{S}} e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} du dv \\ &\quad - \frac{1}{k} \oint_{\partial \mathcal{S}} (\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}) e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} d\ell \\ &\quad + \frac{1}{k} \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \cdot \mathbf{P}) e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} du dv \end{aligned}$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale unitaire extérieure au contour  $\partial \mathcal{S}$  du domaine  $\mathcal{S}$ .

**Remarque :** si le domaine  $\mathcal{S}$  correspond à  $\mathbb{R}^2$ , alors les secondes et troisièmes intégrales peuvent être négligées lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Alors, avec l'identité suivante :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} du dv = \frac{2\pi}{k}$$

<sup>8</sup>Pour simplifier l'écriture on ne note pas la dépendance en  $\mathbf{u}$  de  $\mathbf{P}$

on retrouve le résultat classique de la méthode du col pour des intégrales doubles non bornées :

$$I \approx \frac{2\pi}{k} (\det \mathbb{P})^{-\frac{1}{2}} f(x_s, y_s) e^{-kg(x_s, y_s)} + O(1/k)$$

Poursuivons le calcul sur une surface polygonale  $\mathcal{S}$  de  $N$  côtés, dont le contour est défini par un ensemble de segments de longueur  $\ell_i$  associés à leur normale unitaire sortante  $\hat{\mathbf{n}}_i$  (cf schéma)[127, 160]. En négligeant en première approximation la troisième intégrale qui est d'ordre supérieur[110], on obtient :

$$I(S) \approx e^{-kg(\mathbf{x}_s)} \left[ F(\mathbf{0}) \iint_{\mathcal{S}} e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} dudv - \frac{1}{k} \sum_i^N \int_{\ell_i} (\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) e^{-\frac{k}{2}(u^2+v^2)} d\ell \right] \quad (\text{C.99})$$

Bien qu'élégante, cette formulation est limitée par l'intégrale double, qui est une généralisation à deux dimensions de la fonction d'erreur pour laquelle il existe peu d'implémentations, en particulier pour des arguments complexes. On pourra également se référer à la démarche utilisée par [109] pour traiter ce type d'intégrales.



## Annexe D

# Formes quadratiques

Dans cette annexe nous rappelons les principaux résultats concernant les formes et surfaces quadratiques définies par l'équation paramétrique :

$$z(x, y) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \mathbb{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

où  $\mathbb{Q}$  est une matrice symétrique :

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Lorsque la matrice  $\mathbb{Q}$  est réelle, le théorème spectral en dimension finie énonce que la matrice est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Dans ce cas, ses valeurs propres sont réelles et correspondent aux rayons de courbure principaux de la surface paramétrique  $z(x, y)$  :

$$\text{diag}[\mathbb{Q}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_y} \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

et sa matrice de vecteurs propres correspond à une matrice de rotation d'angle  $\alpha$  tel que (cf figure [D.1](#)) :

$$\tan 2\alpha = \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}} \quad (\text{D.4})$$

Les vecteurs propres correspondent aux directions principales de courbure de la surface.

Ces remarques ne se généralisent pas forcément aux matrices symétriques complexes, certaines matrices symétriques complexes n'étant pas diagonalisables.

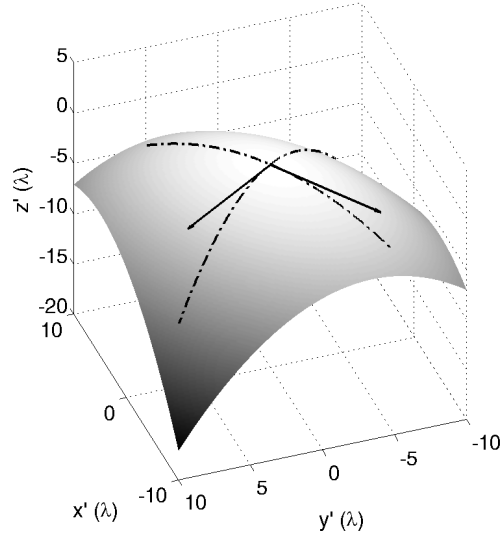


FIG. D.1: Exemple de surface quadratique définie par (D.1) avec  $q_{11} = 1/7$ ,  $q_{22} = 1/20$  et  $q_{12} = -1/20$ . Les vecteurs directeurs représentés sur la figure correspondent aux vecteurs propres de la matrice  $\mathbb{Q}^\Sigma$ .

Le vecteur normal  $\mathbf{N}$  à l'élément  $dS$  de la surface définie par (D.1) correspond à [161, §3.3] :

$$\mathbf{N} = \nabla z = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

L'élément de surface  $dS$  est donné par la relation :

$$dS = \|\mathbf{N}\| dx dy \quad (\text{D.6})$$

soit :

$$dS = \sqrt{(q_{11}x + q_{12}y)^2 + (q_{12}x + q_{22}y)^2 + 1} dx dy \quad (\text{D.7})$$

On peut également relier ces notations à la métrique  $g$  de la surface. À partir de l'expression (D.1) donnant les relations entre l'espace cartésien et la surface  $z$ , la métrique se calcule comme le produit de la transposée de la matrice Jacobienne avec elle-même. On retrouve alors :

$$dS = \sqrt{g} dx dy \quad (\text{D.8})$$

où  $g = (q_{11}x + q_{12}y)^2 + (q_{12}x + q_{22}y)^2 + 1$ .

## Annexe E

# Évaluations asymptotiques du spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme

Dans cette annexe on s'intéresse aux évaluations asymptotiques du spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme.

### I Point col

la première étape est de déterminer une expression analytique du point col. On s'intéresse à la fonction de phase  $g(k_x, k_y)$  tirée de l'expression du spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme :

$$g(k_x, k_y) = -\frac{j}{2k^2} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} \left[ \mathbb{Q}^f + \frac{k_z}{k} \mathbb{Q}^\Sigma \right]^{-1} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} k_z z \quad (\text{E.1})$$

#### I.1 Hypothèse paraxiale

Dans l'hypothèse paraxiale où  $k^2 \gg k_x^2 + k_y^2$ , on montre que :

$$k_z = k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} + O(k_x^3, k_y^3) \quad (\text{E.2})$$

$$\mathbb{Q}^{-1}(k_x, k_y) = \mathbb{Q}_0^{-1} + O(k_x, k_y) \quad (\text{E.3})$$



avec  $Q_0 = Q(0,0) = Q^f + Q^\Sigma$ . Ainsi :

$$g(k_x, k_y) = -\frac{j}{2k^2} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix}^t Q_0^{-1} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} z \left( k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \right) \quad (E.4)$$

$$= -\frac{j}{2k^2} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix}^t Q_0^{-1} \begin{pmatrix} k_x - \beta_x \\ k_y - \beta_y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + jz - \frac{jz}{2k^2} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \quad (E.5)$$

On en déduit le point col :

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \Big|_s = k \underbrace{(Q_0^{-1} + zI)^{-1}}_{Q(z)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k^{-1} Q_0^{-1} \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} \quad (E.6)$$

et la matrice Hessienne :

$$H = (jk^2 Q(z))^{-1} \quad (E.7)$$

$$\Rightarrow \det H = (-k^4 \det Q(z))^{-1} \quad (E.8)$$

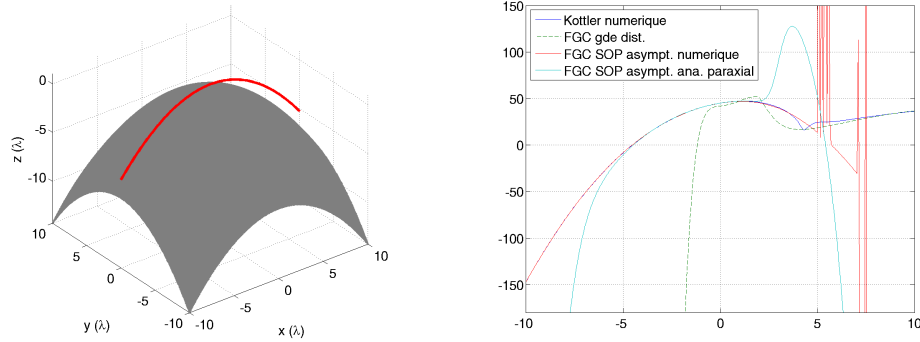


FIG. E.1: Comparaison entre calcul numérique du rayonnement d'un courant électrique gaussien et les formulations "grande distance" et spectrale d'un FGC. À gauche : géométrie du calcul. L'observation est réalisée à une longueur d'onde de distance de la surface dont le rayon de courbure est  $R_x = R_y = 7\lambda$ .  $\theta_\beta = 45^\circ$ ,  $\phi_\beta = 0^\circ$ ,  $W_0 = 2\lambda$ .

On compare sur la figure (E.1) le calcul numérique du rayonnement d'un courant élémentaire avec la formulation "grande distance" et spectrale d'un faisceau gaussien conforme. Sur la courbe rouge, le point col de la fonction  $g$  est calculé numériquement, et injecté dans l'expression asymptotique de l'intégrale. La courbe bleu claire correspond quant à elle à l'approximation paraxiale réalisée dans cette annexe. On remarque que la formulation "grande distance" est incorrecte si près de la surface. De plus, le calcul

numérique du point col diverge à plusieurs endroits : dans ces situations, l'existence d'un unique point col n'est pas assurée et l'algorithme de recherche de minimum du gradient de  $g$  peut ne pas converger. Dans ce cas, les hypothèses du calcul asymptotique ne sont alors plus vérifiées, donnant lieu à une évaluation incorrecte des champs.

## I.2 Deuxième hypothèse : approximation paraxiale oblique

On pose  $\zeta_x = k_x - \beta_x$ ,  $\zeta_y = k_y - \beta_y$ . On écrit la fonction  $g$  en fonction des nouvelles variables  $\zeta_{x,y}$  lorsque  $\zeta_{x,y} \approx 0$  :

$$g(\zeta_x, \zeta_y) \approx -\frac{j}{2k^2} \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \end{pmatrix} \mathbb{Q}_{\beta_z}^{-1} \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} \begin{pmatrix} \zeta_x + \beta_x \\ \zeta_y + \beta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{j}{k} z k_z \quad (\text{E.9})$$

avec

$$k_z \approx \beta_z - \frac{1}{\beta_z} \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} - \frac{1}{2\beta_z} \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta_x^2}{\beta_z^2} & \frac{\beta_x \beta_y}{\beta_z^2} \\ \frac{\beta_x \beta_y}{\beta_z^2} & 1 + \frac{\beta_y^2}{\beta_z^2} \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \end{pmatrix} \quad (\text{E.10})$$

a pour point col :

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \Big|_s = k \left( \mathbb{Q}_{\beta_z}^{-1} - z \frac{k}{\beta_z} \mathbb{B} \right)^{-1} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{z}{\beta_z} \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} \quad (\text{E.11})$$

Les résultats sont toutefois moins bons pour cette hypothèse.



## Annexe F

# Évaluation asymptotique du champ rayonné par un demi plan conducteur éclairé par un faisceau gaussien 2D

Dans cette annexe, nous évaluons asymptotiquement l'intégrale de rayonnement du courant électrique dans l'hypothèse de l'optique physique :

$$\mathbf{E}^r(x, y) = -\frac{kZ_0}{4\sqrt{\epsilon_r}} \int_0^{+\infty} \mathbf{J}_{OP}(x') H_0^{(2)}(k\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) dx' \quad (\text{F.1})$$

avec :

$$\mathbf{J}_{OP}(x) = \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{Z_0} \left[ 2 \sin \phi_0 \left( -\frac{1}{2} q^2(z_{(0)}^{\text{fg}}) y_{(0)}^{\text{fg}2} - \frac{j}{2k} q(z_{(0)}^{\text{fg}}) + 1 \right) - 2 \cos \phi_0 q(z_{(0)}^{\text{fg}}) y_{(0)}^{\text{fg}} \right] E_{x^{\text{fg}}}^i(y_{(0)}^{\text{fg}}, z_{(0)}^{\text{fg}}) \quad (\text{F.2})$$

$$y_{(0)}^{\text{fg}} = -\sin \phi_0 (x - x_{O^{\text{fg}}}) - \cos \phi_0 y_{O^{\text{fg}}} \quad (\text{F.3})$$

$$z_{(0)}^{\text{fg}} = -\cos \phi_0 (x - x_{O^{\text{fg}}}) + \sin \phi_0 y_{O^{\text{fg}}} \quad (\text{F.4})$$

$$E_{x^{\text{fg}}}^i(y^{\text{fg}}, z^{\text{fg}}) = \sqrt{\frac{q(z^{\text{fg}})}{q(0)}} \exp \left[ -\frac{jk}{2} q(z^{\text{fg}}) y^{\text{fg}2} - jkz^{\text{fg}} \right] \quad (\text{F.5})$$

$$q(z^{\text{fg}}) = \frac{1}{z^{\text{fg}} + j \frac{kW_0^2}{2}} \quad (\text{F.6})$$

Pour une observation à grande distance, on peut utiliser un développement de TAYLOR pour simplifier l'expression de la distance  $\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|$  où les points d'observation  $(x, y)$  sont

exprimés en coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi)$  :

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \sqrt{(x - x')^2 + y^2} \approx \rho - x' \cos \phi + \frac{\sin^2 \phi}{2\rho} x'^2 \quad (\text{F.7})$$

Dans ces conditions, l'expression de la fonction de HANKEL peut s'écrire :

$$H_0^{(2)}(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \simeq \sqrt{\frac{2j}{\pi k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}} e^{-jk\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (\text{F.8})$$

$$\simeq \sqrt{\frac{2j}{\pi k\rho}} e^{-jk\rho} e^{jkx' \cos \phi} e^{-jk \frac{x'^2}{2\rho} \sin^2 \phi} \quad (\text{F.9})$$

Finalement, les champs électriques et magnétiques rayonnés dans l'hypothèse de l'optique physique s'écrivent sous forme intégrale :

$$E^r(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z \int_0^{+\infty} f(x') e^{-kg(x')} dx' \quad (\text{F.10})$$

avec

$$f(x') = - \left[ 2 \sin \phi_0 \left( -\frac{1}{2} q^2(z_{(0)}^{\text{fg}}) y_{(0)}^{\text{fg}^2} - \frac{j}{2k} q(z_{(0)}^{\text{fg}}) + 1 \right) - 2 \cos \phi_0 q(z_{(0)}^{\text{fg}}) y_{(0)}^{\text{fg}} \right] \sqrt{\frac{jk}{8\pi\rho}} \sqrt{\frac{q(z_{(0)}^{\text{fg}})}{q(0)}} e^{-jk\rho} \quad (\text{F.11})$$

$$g(x') = -jx' \cos \phi + j \frac{x'^2}{2\rho} \sin^2 \phi + \frac{j}{2} q(z_{(0)}^{\text{fg}}) y_{(0)}^{\text{fg}^2} + jz_{(0)}^{\text{fg}} \quad (\text{F.12})$$

**Hypothèse simplificatrice.** Afin de permettre le calcul analytique du point col, on considère le paramètre de courbure  $q$  du faisceau incident constante sur le plan. On utilise  $q(z_{(0)}^{\text{fg}}) \approx q(z_{\cap}^{\text{fg}}) \stackrel{\text{def}}{=} q_{\cap}$  où  $z_{\cap}^{\text{fg}}$  correspond à la distance entre l'origine du repère local du faisceau et le plan  $y = 0$  du repère absolu[56, 57].

$$z_{\cap}^{\text{fg}} = -\cos \phi_0 (x_{\cap} - x_{O^{\text{fg}}}) + \sin \phi_0 y_{O^{\text{fg}}} \quad (\text{F.13})$$

où  $x_{\cap}$  est le point d'intersection entre l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z^{\text{fg}}$  du faisceau et le plan  $y = 0$  est donné par :

$$x_{\cap} = -\frac{x_{O^{\text{fg}}}}{\hat{\mathbf{e}}_z^{\text{fg}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x} \quad (\text{F.14})$$

Avec cette hypothèse, la fonction de phase de l'intégrale devient :

$$g(x') \approx -jx' \cos \phi + j \frac{x'^2}{2\rho} \sin^2 \phi + \frac{j}{2} q_{\cap} y_{(0)}^{\text{fg}^2} + jz_{(0)}^{\text{fg}} \quad (\text{F.15})$$

$$\approx \left( \frac{j q_{\cap}}{2} \sin^2 \phi_0 + \frac{j}{2\rho} \sin^2 \phi \right) x'^2 \quad (\text{F.16})$$

$$\begin{aligned} &+ (-j \cos \phi - j q_{\cap} (\sin \phi_0 x_{O^{\text{fg}}} - \cos \phi_0 y_{O^{\text{fg}}}) \sin \phi_0 - j \cos \phi_0) x' \\ &+ j (\cos \phi_0 x_{O^{\text{fg}}} + \sin \phi_0 y_{O^{\text{fg}}}) + \frac{j q_{\cap}}{2} (\sin \phi_0 x_{O^{\text{fg}}} - \cos \phi_0 y_{O^{\text{fg}}})^2 \\ \stackrel{\text{def}}{=} &\frac{a}{2} x'^2 - b x' + c \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

ou l'on a posé :

$$a = j q_{\cap} \sin^2 \phi_0 + \frac{j}{\rho} \sin^2 \phi \quad (\text{F.18})$$

$$b = j \cos \phi + j q_{\cap} (\sin \phi_0 x_{O^{\text{fg}}} - \cos \phi_0 y_{O^{\text{fg}}}) \sin \phi_0 + j \cos \phi_0 \quad (\text{F.19})$$

$$c = j (\cos \phi_0 x_{O^{\text{fg}}} + \sin \phi_0 y_{O^{\text{fg}}}) + \frac{j q_{\cap}}{2} (\sin \phi_0 x_{O^{\text{fg}}} - \cos \phi_0 y_{O^{\text{fg}}})^2 \quad (\text{F.20})$$

Avec cette notation, le point col a pour expression :

$$\frac{\partial g}{\partial x'} = 0 \Rightarrow x'_s = \frac{b}{a} \quad (\text{F.21})$$

L'intégrale :

$$E^r(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z \int_0^{+\infty} f(x') e^{-kg(x')} dx' \quad (\text{F.22})$$

peut être évaluée asymptotiquement par la méthode du col uniforme (cf annexe C). On pose  $s^2 = g(x') - g(x'_s)$ ,  $F(s) = f(x') 2s / g'(x')$ , d'où :

$$E^r(\rho, \phi) = \hat{\mathbf{e}}_z e^{-kg(x'_s)} \int_{s_0}^{+\infty} F(s) e^{-ks^2} ds \quad (\text{F.23})$$

Cette intégrale a pour développement asymptotique :

$$E^r(\rho, \phi) \approx \hat{\mathbf{e}}_z e^{-kg(x'_s)} \left[ \frac{F(s_0) - F(0)}{2ks_0} e^{-ks_0^2} + \frac{F(0)}{\sqrt{k}} \mathcal{Q}(\sqrt{k}s_0) \right] \quad (\text{F.24})$$

$$\mathcal{Q}(y) = \int_y^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{erfc}(y) \quad (\text{F.25})$$

soit :

$$g(x'_s) = -\frac{b^2}{2a} + c \quad (\text{F.26})$$

$$F(0) = f(x'_s) \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (\text{F.27})$$

$$F(s_0) = f(0) \frac{2s_0}{-b} \quad (\text{F.28})$$

$$s_0 = \frac{-b}{(2a)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{F.29})$$

L'expression précédente est valide en zone lointaine mais aussi à grande distance du plan conducteur lorsque l'axe de propagation du faisceau coupe exactement l'arête du plan, en  $x = 0$ . Pour élargir le domaine de validité, il convient de faire le développement limité à partir du point  $(x_\cap, 0)$ , correspondant à l'intersection de l'axe  $\hat{\mathbf{e}}_z^{\text{fg}}$  du faisceau avec le plan  $y = 0$ . Ceci pour exprimer le fait que le centre de phase du faisceau réfléchi correspond au point d'intersection du faisceau avec le demi-plan. Dans ce cas on a :

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \|(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\cap) - (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_\cap)\| \quad (\text{F.30})$$

$$= \left[ ((x - x_\cap) - \underbrace{(x' - x_\cap)}_{\mu})^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{F.31})$$

$$\approx \frac{\sin^2 \phi}{2\rho} \mu^2 - \frac{\rho \cos \phi + x_\cap \cos^2 \phi - x_\cap}{\rho} \mu + \rho - x_\cap \cos \phi + \frac{\sin^2 \phi}{2\rho} x_\cap^2 \quad (\text{F.32})$$

Et on procède ensuite de la même manière avec la variable d'intégration  $\mu$ . Et le domaine d'intégration devient alors  $\mu \in [-x_\cap; +\infty]$ .

TITLE : Applications of gaussian beams to the evaluation of the interactions between an electromagnetic wave and a complex 3D object.

ABSTRACT : The interactions of an electromagnetic wave and a complex 3D object lead to numerous investigations of modelisation, as much for military than for civil applications. When the objects present a complex geometry and large dimensions compared to the wavelenght, the evaluation of the radiated fields become costly in computation time. To overcome this problem, we use a formulation based on gaussian beams, which are a paraxial solution of the Helmolzt equation. Gaussian Beams do not suffer from caustic problems and may lead to smaller computation time than conventionnal ray techniques. However, some situations such as the diffraction of gaussian beams by metallic edges or the interactions between gaussian beams and heavy curved surface remained unsolved.

The gaussian beam diffraction is modelised using the Spectral Theory of Diffraction in two dimension and the Physical Optic approximation for finite rectangular conducting surfaces in three dimensions. In order to deal with heavy curved surface, we have expressed the plane wave spectrum of a Conformal Gaussian Beam, a Gaussian Beam adapted to curved surface.

We made some measurements into an anechoic chamber to confirm the fact that a known electromatic field can be expand into gaussian beams, before being propagated using analytical expressions. Finally, we use a gaussian beam tracking method in order to evaluate the propagation of electromagnetic waves on large distances.





AUTEUR : Julien HILLAIRET

TITRE : Applications du formalisme des faisceaux gaussiens à la modélisation de l'interaction d'une onde électromagnétique avec un objet 3D complexe.

CO-DIRECTEURS DE THÈSE : Sylvain Bolioli et Jérôme Sokoloff.

DATE ET LIEU DE SOUTENANCE : Le 06 décembre 2007, auditorium de l'ONERA, Toulouse.

RÉSUMÉ :

Depuis plusieurs années, des travaux ont été menés avec succès par le laboratoire LAME de l'UPS et le DEMR de l'ONERA sur le formalisme des faisceaux gaussiens pour modéliser l'interaction d'une onde électromagnétique avec un ensemble antenne-radôme. Ce formalisme est basé sur l'utilisation de faisceaux élémentaires gaussiens et a pour principal avantage l'obtention d'une expression analytique des champs électromagnétiques. Toutefois, ce modèle devait être complété par la description du champ électromagnétique rayonné par des discontinuités éclairées par un faisceau gaussien et par le traitement des surfaces de fortes courbures.

Pour traiter le cas de la diffraction, l'utilisation de la méthode spectrale de la diffraction permet d'exprimer sous forme intégrale le champ diffracté par un objet canonique, par exemple un demi-plan conducteur, lorsqu'il est éclairé par un faisceau gaussien. L'approximation de l'optique physique permet d'obtenir une expression approchée analytique des champs rayonnés en 3D par des surfaces conductrices finies rectangulaires éclairées par un faisceau gaussien. Pour les surfaces de forte courbure et éclairées sous forte incidence, les faisceaux gaussiens conformes permettent de calculer analytiquement les champs lointains rayonnés. Afin de pouvoir traiter les interactions électromagnétiques (réflexions et transmissions) entre un faisceau gaussien conforme et une paroi diélectrique, le spectre d'ondes planes d'un faisceau gaussien conforme a été formulé.

Ces techniques ont été implémentées et validées sur différents cas tests canoniques. Les résultats théoriques ont été confrontés à des mesures en chambre anéchoïque ainsi qu'à plusieurs méthodes numériques. Les résultats obtenus montrent que les faisceaux gaussiens permettent de décrire une grande variété de problèmes électromagnétiques, des interactions antennes-radômes à la propagation sur de longues distances en présentant un bon compromis entre précision et temps de calcul.

MOTS-CLEFS : Modélisation électromagnétique, Faisceaux Gaussiens, méthodes asymptotiques, diffraction, propagation.

DISCIPLINE ADMINISTRATIVE : électronique, micro-ondes.

LABORATOIRE : Laboratoire Micro-ondes et Électromagnétisme (LAME), UPS 118 route de

**Annexe F. Évaluation asymptotique du champ rayonné par un demi plan  
266 conducteur éclairé par un faisceau gaussien 2D**

---

Narbonne, 31062 Toulouse Cedex.