



**HAL**  
open science

# Identification des Paramètres Caractéristiques d'un Phénomène Mécanique ou Thermique Régi par une Equation Différentielle ou aux Dérivées Partielles

Kossi Atchonouglo

► **To cite this version:**

Kossi Atchonouglo. Identification des Paramètres Caractéristiques d'un Phénomène Mécanique ou Thermique Régi par une Equation Différentielle ou aux Dérivées Partielles. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Poitiers; Université de Lomé, 2007. Français. NNT: . tel-00258795v1

**HAL Id: tel-00258795**

**<https://theses.hal.science/tel-00258795v1>**

Submitted on 25 Feb 2008 (v1), last revised 26 Feb 2008 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre :

# THESE

pour l'obtention du Grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS**

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur & Aéronautique

**Spécialité : Mécanique des Solides, des Matériaux, des Structures et des Surfaces**

Thèse présentée par

**Kossi ATCHONOU GLO**

---

---

## **Identification des Paramètres Caractéristiques d'un Phénomène Mécanique ou Thermique Régi par une Equation Différentielle ou aux Dérivées Partielles.**

---

---

Directeurs de Thèse : Claude VALLEE  
Magolmèèna BANNA

Date de Soutenance : 25 Octobre 2007

Devant la Commission d'Examen :

### **JURY**

A. CHRYSOCHOOS	Professeur, Université Montpellier II - France	Président
Z.-Q. FENG	Professeur, Université d'Evry - France	Rapporteur
K. NAPO	Professeur, Université de Lomé - Togo	Rapporteur
M. BANNA	Maître de Conférences, Université de Lomé - Togo	Examineur
J.-C. DUPRE	Chargé de recherches CNRS, Université de Poitiers - France	Examineur
S. Ya STEPANOV	Professeur, Russian Academy of Sciences - Russie	Examineur
C. VALLEE	Professeur, Université de Poitiers - France	Examineur



*À ma Famille*  
*À toi, Ablam Albert*



## REMERCIEMENTS

Cette thèse a été effectuée en grande partie au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Université de Poitiers, dirigé par Monsieur le Professeur Olivier Bonneau. Je lui suis très reconnaissant pour tous ses appuis qui ont facilités mes conditions de travail.

Je remercie vivement tout particulièrement Monsieur le Professeur Claude Vallée, qui m'a proposé ce sujet de recherche. Je lui exprime ma gratitude pour sa confiance, sa permanente disponibilité et son soutien qui m'ont été d'un encouragement et une aide pertinente tout au long de mes travaux. Il est, à mon avis, le directeur de thèse rêvé de tout doctorant !

Mes remerciements vont également à Monsieur le Professeur Fabrice Bremand, qui m'a accueilli au sein de l'Equipe Photomécanique et Rhéologie et m'a permis de participer à plusieurs congrès.

Je remercie Monsieur Magolmèèna Banna, Maître de Conférences à l'Université de Lomé (Togo) qui a accepté de co-encadrer cette thèse. Je ne saurais lui être suffisamment gré, pour la qualité et la précision de ses conseils sur mes travaux en thermique, sans oublier ses efforts inlassables en vue de m'obtenir de parfaites conditions de travail lors de mes séjours au Laboratoire sur l'Energie Solaire à Lomé.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Jean-Christophe Dupré, Chargé de Recherches CNRS à Poitiers pour ses conseils et sa sollicitude lors des manipulations expérimentales, mais aussi pour son sens du partage de ses connaissances en thermographie infrarouge.

Très sensible à l'attention qu'ils ont déjà apporté à mes travaux et à l'honneur que me font Messieurs Zhi-Qiang Feng, Professeur à l'Université d'Evry et Kossi Napo, Professeur à l'Université de Lomé, en acceptant de juger mes travaux et d'en être rapporteurs, je leur exprime ma très respectueuse gratitude. Le Professeur Napo s'est déjà illustré à plusieurs reprises par un soutien sans faille et une sollicitude à toute épreuve lors de mes séjours à l'Université de Lomé.

Je remercie vivement Monsieur André Chrysochos, Professeur à l'Université de Montpellier II, pour avoir accepté de consacrer du temps dans l'examination de ce manuscrit et de diriger le Jury de cette thèse. Mes vifs remerciements vont à Monsieur Serguei Ya Stepanov, Professeur à " Russian Accademy of Sciences ", pour avoir accepté d'examiner mes travaux et de participer au jury de cette thèse.

Je remercie Messieurs les Professeurs Messan Gbéassor et Claude Templier respectivement Directeur de la Formation Doctorale de la Faculté Des Sciences de l'Université de Lomé et Directeur de la formation Doctorale Sciences pour l'Ingénieur & Aéronautique de l'Université - ENSMA de Poitiers dont leurs aides m'ont été très précieuses pour régler les difficultés administratives.

Je remercie Messieurs H. Quadjovie et A. d'Almeida du département de Mathématiques de Lomé pour toutes leurs contributions tout au long de cette thèse.

Que Madame Danielle Fortuné d'une part, Maître de Conférences à l'université de Poitiers, qui a été ma tutrice pédagogique en enseignement et qui m'a guidé pendant mes travaux et Monsieur le Professeur Valérie Valle, qui a pu me faire passer de théoricien en praticien d'autre part, trouvent

ici mes sincères remerciements.

Une mention spéciale pour Monsieur le Professeur Saïd Zeghloul, aux informaticiens Franck et Mathieu, Jean-Jacques de la reprographie, Madame Françoise Foures de la Bibliothèque SP2MI, Djam, Lolotte et Nath de l'administration ; ils savent à quel point le présent travail doit à leurs efforts.

Mes remerciements vont à tous les membres du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Université de Poitiers et du Laboratoire sur l'Energie Solaire de l'Université de Lomé pour la contribution que chacun d'eux m'a apporté.

L'esprit d'équipe entre les doctorants du laboratoire a favorisé considérablement des échanges très constructifs. Sincères remerciements à Arnaud, Armel, Camélia, Claude, Eric, Khalil, Inès, Jean-Claude, Lilia, Marie-Eve, Mathieu, Paul, Stephen, Tony, ...

Mes remerciements vont enfin à ma famille et à toutes ces personnes chères à mon cœur (Atchez, Christophe, Verdier,...) qui n'ont ménagé aucun effort pour m'apporter leur soutien moral constant, leur appui logistique et financier, sans lesquels ce travail n'aurait pas été possible. Puisse Dieu les combler de sa grâce et rendre à chacun selon son mérite.

# Table des matières

Notations et abréviations	xv
Introduction Générale	1
Introduction Générale	1
Problématique . . . . .	1
Plan . . . . .	4
<b>I Problèmes Inverses en Mécanique</b>	<b>7</b>
<b>I Un problème Type d'Identification</b>	<b>9</b>
I.1 Introduction . . . . .	10
I.2 Position du problème . . . . .	11
I.3 Définitions et notations en algèbre linéaire . . . . .	11
I.4 Identification de la matrice $A$ . . . . .	14
I.5 Identification de $A$ symétrique . . . . .	17
I.5.1 Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	17
I.5.2 Elaboration de l'algorithme d'identification de $A$ symétrique . . . . .	19
I.5.3 Algorithme de projection pour les matrices symétriques . . . . .	21
I.6 Identification de $A$ symétrique tridiagonale . . . . .	21
I.6.1 Elaboration de la procédure d'identification de $A$ symétrique tri- diagonale . . . . .	24
I.6.2 Algorithme de la Méthode de Projection des Matrices symétriques Tridiagonales . . . . .	26
I.7 Méthode intermédiaire . . . . .	28
I.7.1 Elaboration de la méthode d'identification . . . . .	28



I.7.2	Algorithme d'identification . . . . .	31
I.8	Conclusion . . . . .	31
<b>II</b>	<b>Application à l'Identification des Coefficients d'une Equation Dif-</b>	
	<b>férentielle Linéaire</b>	<b>33</b>
II.1	Introduction . . . . .	33
II.2	Problème direct . . . . .	35
II.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	36
II.2.2	Dérivée de Gateaux de la fonctionnelle $J(v)$ . . . . .	38
II.2.3	Formulation faible . . . . .	39
II.2.4	Résolution du problème direct . . . . .	41
II.2.4.1	Approximation par méthode des éléments finis . . . . .	41
II.3	Problème inverse . . . . .	44
II.3.1	Hypothèse de détermination de la matrice $A$ . . . . .	44
II.3.2	Procédure de détermination de la matrice $A$ . . . . .	44
II.3.3	Procédure d'identification de $p$ et de $q$ . . . . .	45
II.4	Application à un cas simple . . . . .	48
II.5	Conclusion . . . . .	49
<b>III</b>	<b>Identification des Caractéristiques d'Inertie d'un Solide Rigide</b>	<b>51</b>
III.1	Introduction . . . . .	51
III.2	Position d'un solide dans l'espace . . . . .	53
III.2.1	Vecteur vitesse et vecteur accélération . . . . .	55
III.2.2	Principes fondamentaux de la dynamique . . . . .	55
III.2.2.1	Torseur dynamique . . . . .	55
III.2.2.2	Torseur des efforts extérieurs . . . . .	56
III.2.2.3	Principes fondamentaux de la dynamique . . . . .	56
III.2.3	Calcul de la résultante dynamique $\chi$ . . . . .	57
III.2.4	Calcul du moment dynamique $\delta(A)$ . . . . .	57
III.3	$\delta(A)$ et $\chi$ dans une matrice antisymétrique $4 \times 4$ . . . . .	58
III.4	Formulation matricielle des équations . . . . .	61
III.4.1	Travail virtuel des efforts . . . . .	61
III.4.2	Travail virtuel des accélérations . . . . .	62
III.4.3	Travail virtuel des liaisons "rotation" . . . . .	63
III.4.4	Equation matricielle du mouvement du solide rigide . . . . .	63

III.5	Identification de la matrice $\mathcal{J}$ . . . . .	66
III.6	Conclusion . . . . .	70
<b>II</b>	<b>Problèmes Inverses en Thermique</b>	<b>71</b>
<b>IV</b>	<b>Introduction aux Problèmes Direct et Inverse en Thermique</b>	<b>73</b>
IV.1	Introduction . . . . .	73
IV.2	Problème direct . . . . .	75
IV.2.1	Généralités et définitions . . . . .	75
IV.2.2	Equation de la chaleur dans un matériau . . . . .	78
IV.2.3	Condition initiale et conditions aux limites . . . . .	80
IV.2.3.1	Condition initiale . . . . .	81
IV.2.3.2	Conditions aux limites . . . . .	81
IV.2.4	Résolution du problème direct par la méthode des éléments finis (MEF) . . . . .	84
IV.2.4.1	Formulation de Galerkin . . . . .	86
IV.3	Problème inverse . . . . .	88
IV.3.1	Techniques de mesures de champs de température . . . . .	90
IV.3.2	Méthodes de résolution des problèmes inverses . . . . .	91
IV.3.2.1	Méthodes fréquentielles . . . . .	91
IV.3.2.2	Méthodes instationnaires comme la méthode flash . . . . .	91
IV.3.2.3	Méthode à fil chaud . . . . .	92
IV.3.2.4	Méthode à plan chaud . . . . .	93
IV.3.2.5	Technique numérique de résolution : gradient conjugué . . . . .	94
IV.4	Conclusion . . . . .	94
<b>V</b>	<b>Construction d'un Algorithme d'Identification de Paramètres Ther-</b> <b>mophysiques</b>	<b>95</b>
V.1	Introduction . . . . .	96
V.2	Problème direct . . . . .	97
V.2.1	Equation de conduction de la chaleur . . . . .	97
V.2.2	Formulation du problème direct . . . . .	98
V.3	Résolution du problème direct . . . . .	98
V.3.1	Discrétisation en espace par MEF . . . . .	98
V.3.2	Intégration dans le temps . . . . .	101

V.3.3	Algorithme de résolution du problème direct . . . . .	102
V.4	Choix des pas temporel et spatial . . . . .	103
V.4.1	Stabilité de l'algorithme du problème direct . . . . .	103
V.4.2	Tests de stabilité . . . . .	105
V.5	Formulation du problème inverse . . . . .	106
V.6	Procédure d'identification des paramètres thermophysiques . . . . .	106
V.6.1	Méthode des moindres carrés . . . . .	106
V.6.2	Calcul de précision sur les paramètres identifiés . . . . .	110
V.6.3	Construction d'un algorithme de résolution du problème inverse . .	113
V.7	Validation de l'algorithme . . . . .	113
V.7.1	Simulation du champ de température . . . . .	114
V.7.2	Exploitation du champ de température simulé . . . . .	115
V.7.2.1	Influence du schéma d'intégration ou de dérivation . . .	115
V.7.2.2	Influence de la finesse du maillage par éléments finis et du temps de contrôle du flux . . . . .	116
V.8	Conclusion . . . . .	118
<b>VI</b>	<b>Identification de Paramètres Thermophysiques de Polymères</b>	<b>121</b>
VI.1	Introduction . . . . .	122
VI.2	Méthodes de mesures de champ de température . . . . .	123
VI.3	Dispositifs expérimentaux . . . . .	124
VI.3.1	Mesure de la température par caméra infrarouge . . . . .	124
VI.3.2	Conditions expérimentales . . . . .	125
VI.4	Montage expérimental . . . . .	126
VI.5	Polymères translucide, semi-amorphe et amorphe étudiés . . . . .	127
VI.6	Traitement des images infrarouges . . . . .	128
VI.6.1	Historique des types de lissage . . . . .	128
VI.6.1.1	Lissage par moindre carré . . . . .	128
VI.6.1.2	Filtrage par convolution . . . . .	128
VI.6.2	Logiciel utilisé . . . . .	129
VI.6.2.1	Filtrage passe-bas . . . . .	129
VI.6.2.2	Filtrage temporel . . . . .	129
VI.7	Exploitation des données expérimentales . . . . .	129
VI.7.1	Calcul du flux de chaleur linéique . . . . .	130
VI.7.2	Paramètres thermophysiques du polyméthylméthacrylate . . . . .	131

---

VI.7.2.1	Cartographies expérimentales . . . . .	131
VI.7.2.2	Identification des paramètres thermophysiques du plexi- glass . . . . .	132
VI.7.3	Paramètres thermophysiques du polyéthylène transparent . . . . .	134
VI.7.3.1	Champs de température exploités . . . . .	134
VI.7.3.2	Identification des paramètres thermophysiques du polyéthylène transparent . . . . .	136
VI.7.4	Paramètres thermophysiques du polyéthylène amorphe . . . . .	138
VI.8	Conclusion . . . . .	142
<b>Conclusion Générale</b>		<b>143</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>146</b>
<b>ANNEXE A Calcul des Composantes des Matrices <math>\mathcal{C}</math> et <math>\mathcal{K}</math> Issues de la Discrétisation par Eléments Finis de l'Equation de Conduction de la Chaleur</b>		<b>157</b>
<b>ANNEXE B Calcul des Incertitudes sur les Paramètres Thermophy- siques</b>		<b>163</b>



# Table des figures

II.1	Poutre étirée par une force $P$ et soumise à une force transversale . . .	34
II.2	Génération de fonctions linéaires par morceaux . . . . .	41
III.1	Solide rigide en mouvement de rotation et de translation . . . . .	53
III.2	Simulation du mouvement d'un parallélépipède . . . . .	66
III.3	La force ponctuelle $f$ appliquée en $A$ , et les composantes de la force $F$ et du déplacement suivant les trois axes sont enregistrées. . . . .	67
IV.1	Densité locale du flux thermique . . . . .	75
IV.2	Eprouvette expérimentale de la méthode à plan chaud . . . . .	92
V.1	Conduction unidimensionnelle . . . . .	98
V.2	Génération de fonctions linéaires par morceaux . . . . .	99
V.3	Profil du champ de température au cours du temps . . . . .	106
V.4	Champ de température simulée suivant une ligne . . . . .	115
V.5	Profil de la température au cours du temps . . . . .	115
V.6	Profil comparatif du vecteur dérivées des trois méthodes . . . . .	115
V.7	Ecarts entre valeur simulée et valeurs identifiées pour la chaleur volumique; nombre d'intervalles et durée de contrôle du flux nécessaires pour une bonne estimation . . . . .	116
V.8	Ecarts entre valeurs simulées et valeurs identifiées pour la conductivité thermique; nombre d'intervalles et durée de contrôle du flux nécessaires pour une bonne estimation . . . . .	117
VI.1	Conduction unidimensionnelle . . . . .	122
VI.2	caméra Infrarouge . . . . .	125
VI.3	Eprouvette témoin et éprouvette étudiée . . . . .	125

---

VI.4 Schéma du principe . . . . .	126
VI.5 Montage Expérimental . . . . .	126
VI.6 Carte Thermique du Plexiglass . . . . .	131
VI.7 Champs de température pour le Plexiglass . . . . .	132
VI.8 Profils de température dans le Plexiglass pour $q = 256W/m$ ; seuls les champs de température relevés sur la partie $[0, 20]$ mm ont été exploités.	133
VI.9 Champs de température pour le PET transparent . . . . .	134
VI.10 Profils de température du PET transparent pour $q = 435, 15W/m$ . . . . .	135
VI.11 Profils du gradient de température du PET transparent pour $q =$ $104, 83W/m$ ; seuls les champs de température relevés sur la partie $[0, 20]$ mm ont été exploités. . . . .	137
VI.12 Champs de température pour le PET amorphe . . . . .	139
VI.13 Profils de température pour le PET amorphe pour $q = 227W/m$ ; seuls les champs de température relevés sur la partie $[0, 20]$ mm ont été exploités. . . . .	140

# Notations et abréviations

- $t$  : temps
- $x$  : coordonné cartésienne
- $x_i$  : coordonnés cartésiennes ( $i = 1, 2, 3$ )
- $y$  : coordonné cartésienne
- $z$  : coordonné cartésienne
- $\phi_i$  : Fonction élémentaires
- $\zeta$  : pas de discrétisation spatiale

## Mécanique

- $\mathbf{a}(M)$  : Vecteur accélération du solide
- $\mathbf{F}$  : Forces extérieures à l'exclusion du poids du solide
- $\mathcal{I}$  : Matrice inertielle classique
- $\mathcal{J}^0$  : Matrice d'inertie de Poinsot généralisée calculée à l'instant initial
- $\mathcal{J}$  : Matrice d'inertie de Poinsot généralisé
- $\mathcal{M}_{ex}$  : Moment des forces extérieures
- $m$  : masse
- $R$  : Matrice rotation  $3 \times 3$
- $\mathcal{R}_0$  : Repère fixe de  $\mathbb{R}^3$
- $\mathcal{R}'_0$  : Repère fixe de  $\mathbb{R}^4$
- $\mathcal{R}$  : Repère lié au solide de  $\mathbb{R}^3$
- $\mathcal{R}'$  : Repère lié au solide de  $\mathbb{R}^4$
- $\mathbf{T}$  : Vecteur translation
- $\mathbf{V}(M)$  : Vecteur vitesse d'un point  $M$  du solide



$\chi$  : Résultante dynamique

$\Upsilon$  : Torseur des forces et des moments : matrice  $4 \times 4$

contenant les composantes des forces extérieures et des moments

$\Theta$  : Matrice des accélérations dans  $\mathcal{R}'_0$

$\Omega$  : Matrice des rotations  $4 \times 4$

$\delta$  : Moment dynamique

### **Thermique**

$c$  : Chaleur spécifique

$\mathcal{C}$  : Matrice de Capacité

$e$  : Energie interne spécifique

$E$  : Energie interne spécifique

$\mathbf{F}$  : Vecteur résultant des conditions aux limites

$\mathcal{K}$  : Matrice de conductivité

$h$  : Coefficient d'échange de chaleur par convection

$h_r$  : Coefficient d'échange de chaleur par rayonnement

$k$  : Conductivité thermique

$\vec{n}$  : Vecteur normal unitaire, orienté vers l'extérieur

$q$  : Flux de chaleur constant

$s$  : Entropie spécifique

$S$  : Entropie

$T(x, t)$  : fonction température

$T_a$  : Température ambiante

$T_\Sigma$  : Température de la surface  $\Sigma$

$(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  :  $n + 1$  variables d'état définissant les propriétés du système

$\Omega$  : Domaine géométrique occupé par le matériau

$\Sigma$  : Bord de  $\Omega$

$\sigma$  : Constante de Stefan-Boltzmann

$\epsilon$  : Emissivité : facteur de forme gris

$\psi$  : Flux thermique

- $\Phi$  : Densité de flux thermique  
 $\Psi$  : Energie libre : transformée de Legendre de l'énergie interne spécifique  $e$   
 $\theta$  : Vecteur température  
 $\rho c$  : Chaleur volumique  
 $\alpha = k/\rho c$  : Diffusivité thermique  
 $\sqrt{k\rho c}$  : Effusivité thermique  
 $\dot{\theta}$  : Vecteur température dérivé  
 $\rho$  : Masse volumique

### Abréviations

- i.e. : du latin id est, c'est-à-dire  
EDP : Equation aux dérivées partielles  
EDO : Equation différentielle ordinaire  
FIG : Figure  
MDF : Méthode des différences finies  
MEF ou MEF : Méthode des éléments finis  
resp. : Respectivement  
TAB : Tableau

Une lettre écrite en gras désigne un vecteur : vecteur **u**



# Introduction Générale

## Problématique

Les lois physiques reliant la température aux flux de chaleur ou les déformations aux contraintes font intervenir des paramètres thermiques et mécaniques (conductivité thermique, module d'Young, etc,...) qui dépendent de la nature des matériaux ; ce sont les lois de comportement. Si les gradients de température ou les déformations sont petites, les lois de comportement sont en général linéaires. De ces lois de comportement et des bilans énergétiques, on déduit des équations d'évolution. Ces équations d'évolution sont décrites par des équations différentielles ordinaires (EDO) ou aux dérivées partielles (EDP). La linéarité des lois de comportement conduit à la linéarité des équations d'évolution. Les équations aux dérivées partielles linéaires que nous aborderons sont du type

$$a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b \frac{\partial y}{\partial x} + c \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + d \frac{\partial y}{\partial t} = f(x, t). \quad (1)$$

Les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  caractérisent le matériau. Les fonctions  $y$  et  $f$  dépendent des variables d'espace  $x$  et du temps  $t$ .

Chercher à exprimer  $y$  en fonction de  $x$  et  $t$  connaissant les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et la fonction  $f$  c'est résoudre le problème direct.

Le problème inverse se pose de deux manières.

Une première branche porte sur la recherche de la fonction  $f$  qui conduit pour des constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  connues, à une fonction  $y$  souhaitée. C'est le cas de la recherche du flux de chaleur conduisant à un champ de température souhaité.

Une seconde branche concerne la recherche des constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  lorsque  $y$  et  $f$  sont connues. Par exemple, on cherche la valeur de la conductivité thermique d'un matériau, le flux de chaleur et les températures étant connues.

Le but de notre travail est de développer des approches numériques permettant de résoudre les problèmes de la seconde branche. Ces approches sont appliquées à

une situation mécanique et à une situation thermique faisant intervenir des équations du type (1).

La situation mécanique concerne l'identification des dix caractéristiques d'inertie (masse, position du centre d'inertie et tenseur d'inertie) d'un solide rigide.

Dans l'analyse du mouvement d'un solide rigide, le calcul de la quantité de mouvement et du moment cinétique nécessite l'identification préalable de ses caractéristiques inertielles. De plus, en statique, un système est en équilibre si la projection de son centre d'inertie sur le sol est dans son polygone de sustentation. La finalité de ces recherches est l'identification des caractéristiques d'inertie d'un athlète dans le souci d'améliorer ses performances. En supposant l'athlète composé de 16 troncs de cône rigides, il s'agit donc d'identifier 160 caractéristiques d'inertie. C'est dans ce cadre que j'ai effectué des travaux de recherche en collaboration avec l'équipe du Geste Sportif de notre Laboratoire.

La situation thermique concerne les études thermomécaniques des matériaux, spécialement les polymères. Ces études, réalisées au sein de l'équipe Photomécanique et Rhéologie dont je fais partie, nécessitent la connaissance préalable de la conductivité thermique et de la chaleur volumique des matériaux. Notre travail est de développer et de valider une nouvelle méthode d'identification des paramètres thermophysiques. Pour cela, nous avons élaboré une méthode d'optimisation globale dans le cas unidimensionnel. Les paramètres thermophysiques sont identifiés à partir des champs de température obtenus expérimentalement pour des flux de chaleur de chauffe fixés. Ce travail est lié aux recherches menées au « Laboratoire sur l'Energie Solaire de l'Université de Lomé » sur la caractérisation de capteurs hybrides photovoltaïques intégrés aux bâtiments.

Une étape préliminaire à la résolution du problème inverse est la modélisation du phénomène : c'est le problème direct qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir de mesures expérimentales, la démarche va consister à approcher au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures.

Avant d'envisager la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles c'est-à-dire la résolution du problème direct, il convient d'analyser les équations du modèle. À ce niveau, on doit se poser des questions sur l'existence, l'unicité de la solution, la sensibilité des solutions aux perturbations, la croissance ou la décroissance des solutions en fonction du temps, etc. Cette analyse conduit à la résolution de problèmes mathématiques extrêmement complexes, qui cependant sont

des éléments de validation des modèles élaborés.

Ces études préliminaires sur les équations décrivant le problème direct, sont généralement suivies de sa résolution numérique.

La méthode des différences finies (MDF), la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des volumes finis, etc., sont les techniques numériques utilisées de nos jours.

La méthode des différences finies [25], [58], [59], [70] et [76] est très utilisée en mécanique des fluides. Elle consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences finies. La méthode des différences finies est l'une des plus anciennes méthodes de résolution numérique qui est encore utilisée dans certaines applications, comme la propagation d'ondes (sismiques ou électromagnétiques) ou la mécanique des fluides compressibles. Notons que de nombreux concepts des différences finies se retrouvent dans plusieurs méthodes numériques. Ainsi, on remarquera que certains schémas numériques combineront la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale et la méthode des différences finies pour la discrétisation temporelle.

Son principal avantage est sa simplicité de conception et de mise en œuvre informatique. Elle présente cependant un certain nombre de défauts qui lui font préférer d'autres méthodes de discrétisation pour de nombreux problèmes complexes. Une des principales limitations de cette méthode est qu'elle n'est efficace que pour des maillages réguliers, dits rectangulaires [58]. Or, il n'est pas facile de paver un domaine quelconque de l'espace par des maillages rectangulaires. Il est très difficile de raffiner localement le maillage pour avoir une meilleure précision en un endroit précis du domaine de calcul par la MDF. Notons enfin que la théorie comme la pratique des différences finies se compliquent singulièrement lorsque les coefficients des équations aux dérivées partielles sont variables et lorsque les problèmes sont non-linéaires.

La technique la plus utilisée aujourd'hui, est la méthode des éléments finis [3], [5], [58] et [67] en raison :

- de la généralité de ses domaines d'application : thermique, électromagnétisme, mécanique du solide, etc.,
- de son aptitude à traiter des problèmes présentant des géométries complexes,
- de sa facilité de mise en œuvre.

Historiquement, les premiers développements de la méthode des éléments finis ont été proposés par le mathématicien Richard Courant (sans l'utilisation de la dénomination "éléments finis") dans les années 1940. Les mécaniciens ont développé et démontré l'efficacité de cette méthode dans les années 1950-1960 (en plus de lui donner son nom actuel). Après ces premiers succès pratiques, les mathématiciens

ont développé les fondations théoriques de la méthode et proposé des améliorations significatives [58].

Une partie de notre travail a consisté à résoudre numériquement les problèmes directs par une méthode basée sur celle des éléments finis. Elle permet comme en différences finies d'avoir les valeurs discrètes de la solution du problème direct en plusieurs points. En plus, la solution peut être approchée en tout point par utilisation des fonctions élémentaires de discrétisation. Les matrices mises en jeu dans la discrétisation spatiale sont calculées préalablement sans aucune approximation. Nous avons simulé le champ de température dans un matériau isotrope après discrétisation en éléments finis suivi d'intégration en temps par la technique des trapèzes généralisées.

Rappelons qu'en plus des méthodes des différences finies et des éléments finis, qui seront les seules utilisées dans nos travaux, il existe bien d'autres méthodes numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles comme les méthodes de volumes finis, d'éléments finis de frontière, de Fourier, etc. (voir par exemple [58]). Pour plus de détails sur la méthode des éléments finis, le lecteur pourra consulter les livres de Ciarlet [25], Bergheau et al. [67] ou de Allaire [58].

## Plan

Le rapport concerne essentiellement deux thématiques : méthode inverse appliquée à la mécanique et méthode inverse appliquée à la thermique.

La première partie composée de trois chapitres porte sur l'identification des paramètres en mécanique.

Au chapitre I, nous commençons par le traitement d'un problème type d'identification qui se pose dans le domaine des équations linéaires. Traiter au préalable ce problème simple d'identification est important car dans les domaines d'identification de paramètres en mécanique et en thermique que nous développons par la suite, une étape intermédiaire consiste à identifier les coefficients  $A_{ij}$  d'une matrice  $A$  mise en jeu dans un système linéaire  $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$  connaissant un ou plusieurs couples  $(\mathbf{X}, \mathbf{b})$ .

Très souvent, la discrétisation par éléments finis des équations régissant les phénomènes mécaniques et thermiques conduit à un système linéaire mettant en jeu une matrice  $A$  symétrique ou symétrique tridiagonale.

Deux algorithmes sont développés afin de déterminer la matrice  $A$  dans ces deux cas.

Les algorithmes élaborés au chapitre I sont validés dans la suite en les appliquant à deux situations mécaniques :

1. chapitre II : Application à l'identification de la matrice tridiagonale symétrique issue de la modélisation par éléments finis d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables. Il s'agit d'identifier les coefficients de cette équation différentielle. Les coefficients variables se retrouvent incorporés dans des intégrales permettant de calculer les coefficients d'une matrice qui se révèle symétrique tridiagonale. Dans une première étape, les valeurs approchées des coefficients de la matrice symétrique tridiagonale sont identifiées par application de l'algorithme élaborés au chapitre I. Nous développons ensuite un algorithme permettant d'en déduire une approximation linéaire par morceaux des coefficients variables de l'équation différentielle de départ.
2. chapitre III : Identification des dix caractéristiques d'inertie d'un solide rigide. Nous regroupons les composantes du moment dynamique et de la résultante dynamique dans une matrice  $4 \times 4$  antisymétrique. Nous faisons de même pour la résultante dynamique et le moment résultant des efforts extérieurs. Les caractéristiques d'inertie du solide se retrouvent dans une matrice  $4 \times 4$  symétrique défini-positive  $\mathcal{J}$ . L'équation du mouvement est ramenée à une équation dans l'espace des matrices  $4 \times 4$  antisymétriques. Elle exprime l'égalité entre le torseur dynamique et le torseur des efforts extérieurs sous une forme matricielle appropriée à l'identification de la matrice  $\mathcal{J}$ . Une formulation directe des équations du mouvement du solide rigide dans l'espace des matrices  $4 \times 4$  est établie par application des travaux virtuels. L'identification de la matrice  $\mathcal{J}$  restitue la masse, la position du centre d'inertie et le tenseur d'inertie du solide.

Dans la deuxième partie, nous commençons par rappeler au chapitre IV la formulation de l'équation aux dérivées partielles de Fourier régissant la conduction de la chaleur dans un solide. La discrétisation spatiale par éléments finis de l'équation aux dérivées partielles nous conduit à remplacer le problème direct par la résolution d'une équation différentielle linéaire. C'est cette équation qui sera utilisée pour résoudre les problèmes inverses, c'est-à-dire pour identifier paramètres thermophysiques mis en jeu (conductivité thermique  $k$  et chaleur volumique  $\rho c$ ).

Au chapitre V, nous avons développé une nouvelle technique d'identification simultanée de la conductivité thermique  $k$  et de la chaleur volumique  $\rho c$ . Une première



étape consiste à élaborer un algorithme de résolution du problème direct. Dans une deuxième étape, nous proposons un algorithme d'identification des paramètres thermophysiques. Cette résolution du problème inverse est validé à partir d'un champ de température simulé par utilisation de notre algorithme de résolution du problème direct.

La procédure d'identification de paramètres thermophysiques proposé au chapitre V est appliquée au chapitre VI à des champs de température mesurés expérimentalement dans notre laboratoire (L.M.S.). L'algorithme a permis d'identifier les paramètres  $k$  et  $\rho c$  de plusieurs polymères. Les conditions expérimentales et le dispositif expérimental sont décrits avec précision. Les images thermographiques sont acquises par caméra infrarouge dont l'utilisation est bien maîtrisée par l'équipe Photomécanique et Rhéologie du L.M.S.

## Première partie

# Problèmes Inverses en Mécanique



# Chapitre I

## Un problème Type d'Identification

### Sommaire

---

<b>I.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>I.2</b>	<b>Position du problème</b>	<b>11</b>
<b>I.3</b>	<b>Définitions et notations en algèbre linéaire</b>	<b>11</b>
<b>I.4</b>	<b>Identification de la matrice <math>A</math></b>	<b>14</b>
<b>I.5</b>	<b>Identification de <math>A</math> symétrique</b>	<b>17</b>
I.5.1	Multiplicateurs de Lagrange	17
I.5.2	Elaboration de l'algorithme d'identification de $A$ symétrique	19
I.5.3	Algorithme de projection pour les matrices symétriques	21
<b>I.6</b>	<b>Identification de <math>A</math> symétrique tridiagonale</b>	<b>21</b>
I.6.1	Elaboration de la procédure d'identification de $A$ symétrique tridiagonale	24
I.6.2	Algorithme de la Méthode de Projection des Matrices symétriques Tridiagonales	26
<b>I.7</b>	<b>Méthode intermédiaire</b>	<b>28</b>
I.7.1	Elaboration de la méthode d'identification	28
I.7.2	Algorithme d'identification	31
<b>I.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

---

## I.1 Introduction

De nombreux phénomènes mécaniques sont régis par des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Ces équations mettent en jeu des paramètres ou des fonctions caractérisant les propriétés des matériaux étudiés.

De la discrétisation par éléments finis ou différence finie de l'équation différentielle :  $\frac{d}{dx}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = f(x)$ , régissant le moment fléchissant  $u$  d'une poutre soumise à une force  $f$  et étirée selon ses deux extrémités conduit à un système linéaire [25] :

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad (\text{I.1})$$

où  $A$  est une matrice symétrique tridiagonale. On verra plus loin que les coefficients de la matrice  $A$  sont :

$$A_{ij} = \int_0^L (p(x)\phi'_i(x)\phi'_j + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)) dx$$

D'une manière générale, les matrices issues de la discrétisation par éléments finis ou différences finies mettent en jeu les caractéristiques mécaniques du matériau. Les matrices symétriques tridiagonales sont aussi très courantes dans la résolution numériques des problèmes du type *Sturm-Liouville* [17].

Rappelons que l'espace des matrices symétriques et l'espace des matrices tridiagonales et symétriques sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des matrices carrées.

Dans le cas du système (I.1), le problème direct consiste à déterminer le vecteur  $\mathbf{X}$  pour  $A$  et  $\mathbf{b}$  connus. Dans la pratique, il s'agit de déterminer le moment fléchissant d'une poutre connaissant les caractéristiques d'inertie et les forces. Le problème inverse consiste à identifier la matrice  $A$  de l'équation (I.1). Lorsque cette matrice est de faible taille, les méthodes habituelles de résolution de système linéaire sont bien adaptées. Pour des matrices de grande taille ( matrices de taille supérieure à 4), certaines méthodes restituent difficilement la matrice attendue.

Le but de ce chapitre est de tenir compte de la symétrie et de la tridiagonalité de la matrice  $A$  lors de la résolution numérique et de chercher à réduire le coût des opérations.

Nous décrirons des procédure d'identification basée sur la la méthode des moindres carrés tenant compte de la symétrie ou de la tridiagonalité de  $A$  par introduction

des multiplicateurs de Lagrange. La résolution se fait ensuite par élimination des multiplicateurs de Lagrange.

Rappelons tout de même que des recherches sont menées sur la recherche de la matrice  $A$  du système (I.1) : gradient conjugué de Polak-Ribière [84], les méthodes de décomposition polaire de Higham [60], [61] et Erhel [40]. La méthode développée par Higham utilise les caractéristiques de la matrice  $A$  dans la résolution pour des systèmes linéaires. La plupart de ces méthodes de résolution numériques recherchent la matrice  $A$  dans l'espace des matrices carrées alors qu'avec un calcul dans le sous-espace vectoriel des matrices symétriques ou symétriques et tridiagonales pourrait réduire le nombre de coefficients recherchés.

## I.2 Position du problème

Considérons le système linéaire

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad (\text{I.2})$$

où  $A$  est une matrice  $n \times n$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{X}$  sont des vecteurs à  $n$  composantes.

Le problème inverse est le suivant :

considérons plusieurs mesures couples  $(\mathbf{X}, \mathbf{b})$  satisfaisant le système linéaire (I.2), peut-on identifier l'application linéaire  $A$  ?

Nous considérerons dans ce chapitre trois cas de figures :

- dans le premier cas la matrice  $A$  est quelconque ;
- dans le second cas la matrice  $A$  est symétrique ;
- dans le troisième cas la matrice  $A$  est symétrique et tridiagonale.

Après avoir défini certaines notions algébriques utilisées par la suite, nous aborderons les méthodes d'identification des matrices symétriques et des matrices symétriques tridiagonales. Nous utiliserons certaines propriétés de *Jean-Marie Souriau* qui nous permettront de simplifier des calculs.

### Remarque I.2.1

*Jean-Marie Souriau, Mécanicien, Normalien, est surtout connu pour ses travaux en mécanique symplétique, dont il est un des pères fondateurs. Il a publié plusieurs ouvrages dont deux manuels de calcul liéaire [92] et [93]*

## I.3 Définitions et notations en algèbre linéaire

**Définition I.3.1** *Trace d'une matrice*

Nous désignons par  $\mathcal{M}_n$  l'espace des matrices carrées réelles de tailles  $n \times n$ . Soit  $A$  une matrice carrée de composantes  $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  (les indices  $i$  et  $j$  désignent respectivement la ligne et la colonne).

La trace de la matrice  $A$  est la somme des éléments de la diagonale :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}.$$

**Définition I.3.2** *Transposée d'une matrice*

La transposée de la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n$  de composantes  $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est la matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_n$  définie par :

$$B_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

**Définition I.3.3** *Matrice symétrique*

Si une matrice  $A$  coïncide avec sa transposée, elle est dite symétrique et cela signifie que

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

**Définition I.3.4** *Matrice symétrique tridiagonale*

Si une matrice  $A$  coïncide avec sa transposée et  $A_{ij} = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ ;  $i+2 \leq j \leq n$ , alors elle est symétrique tridiagonale.

**Définition I.3.5** *Produit tensoriel*

Soit  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Le produit tensoriel de  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{v}$  est la matrice de composantes

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = \mathbf{u}_i \mathbf{v}_j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

**Proposition I.3.1**

Pour  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$$

**Définition I.3.6** *Produit scalaire de vecteurs*

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Le produit scalaire de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est le réel

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$$

**Proposition I.3.2**

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Le produit scalaire de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est le réel

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \text{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$$

**Proposition I.3.3**

Soient  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n$  et deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le produit scalaire de  $A\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \text{tr}(A(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})).$$

**Définition I.3.7** *Produit scalaire dans  $\mathcal{M}_n$*

Soient  $U$  et  $V$  deux matrices carrées. Le produit scalaire de  $U$  par  $V$  est le réel

$$\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij} V_{ij}$$

**Proposition I.3.4**

Soient  $P$  et  $Q$  deux matrices  $n \times n$  :

- (i) le produit scalaire est symétrique :  $\text{tr}(PQ) = \text{tr}(QP)$  ;
- (ii) une matrice et sa transposée ont la même trace :  $\text{tr}(P^T) = \text{tr}(P)$

**Définition I.3.8** *Produit d'une matrice et d'un vecteur*

Soient la matrice  $U$  de  $\mathcal{M}_n$  et le vecteur  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le produit de  $U$  par  $\mathbf{v}$  est le vecteur  $\mathbf{u}$  défini par

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} \mathbf{v}_j.$$

**Définition I.3.9** Soit  $U$  une matrice de  $\mathcal{M}_n$ .  $U$  est dite défini-positif si

- (i) pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\langle U\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ ,
- (ii)  $\langle U\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  implique  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

**Proposition I.3.5**

La trace du produit de deux matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n$  est un nombre positif.

*Preuve.* Soient  $U$  et  $V$  deux matrices symétriques positives de  $\mathcal{M}_n$ . La matrice symétrique et positive  $U$  est diagonalisable. Soient  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ses valeurs propres (elles sont positives), et  $\mathbf{u}_i$  les vecteurs propres associés. Alors

$$U = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i,$$



et

$$\begin{aligned} UV &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i) V \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes (V \mathbf{u}_i) \end{aligned}$$

Par suite

$$\text{tr}(UV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \mathbf{u}_i, V \mathbf{u}_i \rangle.$$

C'est positif puisque la matrice  $V$  est positive.  $\square$

#### I.4 Identification de la matrice $A$ : Méthode des moindres carrés

Nous allons élaborer une méthode pour identifier la matrice  $A$  du système linéaire :

$$A\mathbf{X} = \mathbf{b} \tag{I.3}$$

lorsque les vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{b}$  sont connus. Plus précisément, nous allons construire une procédure pour résoudre le problème inverse suivant :

"plusieurs couples  $(\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{b}^{(i)})$ , indices de  $i = 1$  à  $m$  ont été mesurés, peut-on identifier l'application linéaire  $A$  ?

Notre procédure d'identification est basée sur la méthode des moindres carrés

Pour déterminer la matrice  $A$ , nous minimiserons donc la forme quadratique

$$F(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|A\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{b}^{(i)}\|^2 \tag{I.4}$$

Les couples  $(\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{b}^{(i)})$  satisfont  $A\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{b}^{(i)}$  et  $m$  est le nombre de couples connus.

La matrice  $A$  sera identifiée par annulation du gradient de la forme quadratique  $F$ , i.e. en résolvant le système linéaire

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(A) = 0$$

Les propositions (I.3.2) et (I.3.4) permettent de développer la forme quadratique

$F(A)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
F(A) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle A\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{b}^{(i)}, A\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{b}^{(i)} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{b}^{(i)}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle A\mathbf{X}^{(i)}, A\mathbf{X}^{(i)} \rangle - \sum_{i=1}^m \langle A\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{b}^{(i)} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( A \left( \sum_{i=1}^m \mathbf{X}^{(i)} \otimes \mathbf{X}^{(i)} \right) A^T \right) - \operatorname{tr} \left( A \sum_{i=1}^m \mathbf{X}^{(i)} \otimes \mathbf{b}^{(i)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{b}^{(i)}\|^2
\end{aligned}$$

Définissons les matrices carrées suivantes :

$$B = \sum_{i=1}^m \mathbf{b}^{(i)} \otimes \mathbf{X}^{(i)} \quad H = \sum_{i=1}^m \mathbf{X}^{(i)} \otimes \mathbf{X}^{(i)} \quad (\text{I.5})$$

La matrice  $H$  est symétrique et positive. La matrice  $B$  n'a pas de propriétés particulières.

La détermination de la matrice  $A$  revient à la minimisation de la forme quadratique

$$F(A) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^T A H) - \operatorname{tr}(A B^T) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|\mathbf{b}^{(i)}\|^2$$

Il nous reste à calculer la dérivée de la forme quadratique  $F(A)$ . Pour cela, il est utile de rendre euclidien l'espace des matrices  $n \times n$  en le munissant du produit scalaire des matrices (I.3.7). La généralisation du gradient est alors

$$[(\operatorname{grad} F)(A)]_{ij} = \frac{\partial F}{\partial A_{ij}}$$

### Remarque I.4.1

Pour calculer la dérivée de la forme quadratique  $F$ , nous allons utiliser la remarque suivante de Jean-Marie Souriau.

Si  $\delta A$  est une petite variation de la matrice  $A$  et si  $\alpha$  est un réel alors,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(A + \alpha \delta A) - F(A)}{\alpha} = \langle \operatorname{grad} F(A), \delta A \rangle$$

Annuler le gradient de  $F$  en  $A$  revient à annuler la dérivée par rapport à  $\alpha$  de  $F(A + \alpha \delta A)$  pour toute variation  $\delta A$ .

Dans le cas (I.4)

$$\begin{aligned}
F(A + \alpha\delta A) &= \frac{1}{2}\text{tr} [(A + \alpha\delta A)^T(A + \alpha\delta A)H] - \text{tr} [(A + \alpha\delta A)B^T] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \|\mathbf{b}^{(i)}\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\alpha^2\text{tr} [(\delta A)^T(\delta A)H] + \frac{1}{2}\alpha\text{tr} [(\delta A)^T AH + (A^T \delta AH)] \\
&\quad - \alpha\text{tr}(\delta AB^T) + \frac{1}{2}\text{tr}(A^T AH) - \text{tr}(AB^T) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \|\mathbf{b}^{(i)}\|^2
\end{aligned}$$

La proposition (I.3.4) permet de simplifier le trinôme du second degré  $F(A + \alpha\delta A)$  en :

$$\begin{aligned}
F(A + \alpha\delta A) &= \frac{1}{2}\alpha^2\text{tr} [H(\delta A)^T(\delta A)] + \alpha\text{tr} [(\delta A)^T AH - B(\delta A)^T] \\
&\quad + \frac{1}{2}\text{tr} [A^T AH - AB^T] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \|\mathbf{b}^{(i)}\|^2
\end{aligned}$$

Les matrices  $H$  et  $\delta A(\delta A)^T$  sont symétriques et positives. Le réel  $\text{tr} [H(\delta A)^T \delta A]$  est donc positif d'après la proposition (I.3.5). Par suite le trinôme  $F(A + \alpha\delta A)$  est convexe en  $\alpha$ .

La dérivée de  $F(A + \alpha\delta A)$  en  $\alpha$  égale à zéro vaut

$$\text{tr}((\delta A)^T(AH - B)).$$

Ce réel est nul pour toute matrice  $\delta A$  si et seulement si :

$$AH = B \tag{I.6}$$

Dans l'espace des matrices carrées, le gradient de la forme quadratique  $F(A)$  est [96]

$$\frac{\partial F}{\partial A_{ij}} = (AH - B)_{ij}.$$

### Remarque I.4.2

Nous pouvons obtenir directement l'équation (I.6) en multipliant  $A\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{b}^{(i)}$  tensoriellement par le vecteur  $\mathbf{X}^{(i)}$  puis en sommant sur le nombre de mesures :

$$A \sum_{i=1}^m \mathbf{X}^{(i)} \otimes \mathbf{X}^{(i)} = \sum_{i=1}^m \mathbf{b}^{(i)} \otimes \mathbf{X}^{(i)} \tag{I.7}$$

Nous retrouvons bien l'équation  $AH = B$  en identifiant les expressions des matrices  $H$  et  $B$ .

On identifiera la matrice  $A$  en résolvant le système linéaire

$$AH = B$$

par tout algorithme de résolution de système linéaire, exemple des algorithmes du gradient ou du gradient conjugué [96].

### Remarque I.4.3

*Bien qu'elle soit basée sur la méthode des moindres carrés, notre procédure d'identification se révélera donc exacte lorsque la matrice  $H$  sera inversible.*

### Remarque I.4.4

*Si  $m$  est supérieur ou égal à  $n$ , la matrice  $H$  est attendue défini-positive, et donc inversible [99]. Et expérimentalement ceci revient à faire plusieurs mesures "indépendantes". Pour une poutre en flexion pure par exemple, il faut plusieurs mesures du moment fléchissant pour des forces distinctes.*

Dans la section suivante, nous adapterons notre procédure au cas où la matrice  $A$  est symétrique. Un algorithme d'identification sera élaboré en fin de section I.5.

## I.5 Identification de la matrice symétrique $A$

Une matrice symétrique  $n \times n$  possède  $n(n+1)/2$  indépendantes puisque la symétrie  $n(n-1)/2$  conditions de symétries. Il faut tenir compte des conditions de symétrie dans l'élaboration de la procédure d'identification. Nous élaborons une procédure tenant compte des conditions de symétrie par introduction de multiplicateurs de Lagrange.

### I.5.1 Multiplicateurs de Lagrange

Nous allons forcer la matrice  $A$  à être symétrique. Il suffit pour cela de reprendre la minimisation de (I.4) en respectant les conditions linéaires

$$A = A^T$$

Considérons la fonction  $f(A) = (A - A^T)/2$ . Il faut tenir compte de la symétrie de la matrice  $A$ . Elle devient symétrique lorsque  $f(A) = 0$ . On peut imposer la symétrie lors du calcul de la variation de  $F(A)$ .

On y arrive en introduisant une matrice antisymétrique  $\Lambda$  de multiplicateurs de

Lagrange ( $\Lambda^T = -\Lambda$ ). La variation  $DF(A)\delta A = \langle \overrightarrow{\text{grad}F(A)}, \delta A \rangle$ ,  $\delta A \in \mathcal{M}_n$  ne doit plus être nulle mais égale à  $\langle \delta f(A), \Lambda \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle \delta f(A), \Lambda &= \text{tr} \left[ \Lambda \frac{1}{2} (\delta A - \delta A^T) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\Lambda \delta A) - \frac{1}{2} \text{tr}(\Lambda \delta A^T) \\ &= \text{tr}(\delta A \Lambda) \end{aligned}$$

Ainsi on conclura à

$$AH = B + \Lambda \quad (\text{I.8})$$

### Commentaire I.5.1

La méthode que nous développons ici est inspirée de la technique de minimisation avec des contraintes, à la différence que nous restons dans l'espace des matrices.

On pourrait chercher à déterminer la matrice symétrique  $A$  directement par la minimisation de la fonction

$$F(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|AX^i - \mathbf{b}^i\|^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j (\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{a}_{ji})^2,$$

les réels  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Si la matrice  $\Lambda$  est connue, alors la résolution de l'équation (I.7.1) permettrait de déterminer la matrice  $A$ ; on arrive à deux inconnues : la matrice  $A$  et la matrice  $\Lambda$ .

Déterminons la matrice  $A$  de (I.7.1) par élimination de la matrice  $\Lambda$ . On y arrive par projection de la matrice  $AH - B - \Lambda$  sur une base des matrices symétriques.

Le sous-espace des matrices symétriques  $n \times n$  est un espace vectoriel de dimension  $n(n+1)/2$ . Pour construire une base, nous considérons la base canonique  $\{e_j, j = 1, \dots, n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Nous construisons  $n(n+1)/2$  matrices symétriques de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &e_j \otimes e_j, j = 1, \dots, n \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(e_j \otimes e_i + e_i \otimes e_j), 1 \leq i < j \leq n \end{aligned}$$

L'ensemble  $\{S_j, j = 1, \dots, n(n+1)/2\}$  est une base unitaire du sous-espace des matrices symétriques  $n \times n$ .

### I.5.2 Elaboration de l'algorithme d'identification de A symétrique

Pour trouver la matrice  $A$  solution de  $AH = B + \Lambda$ , nous procédons à l'élimination de  $\Lambda$  par projection de  $AH - B - \Lambda$  sur la base  $\{S_j, j = 1, \dots, n(n+1)/2\}$  de matrices  $n \times n$  symétriques

$$\text{tr}(S_j AH) = \text{tr}(S_j B) + \text{tr}(S_j \Lambda) = \text{tr}(S_j B) \quad \text{car } \text{tr}(S_j \Lambda) = 0,$$

soit  $n(n+1)/2$  équations permettant de déterminer les  $n(n+1)/2$  composantes indépendantes de la matrice symétrique  $A$ .

Sur la base des matrices symétriques,  $A$  peut se décomposer :

$$A = \sum_{k=1}^{n(n+1)/2} a_k S_k,$$

$a_k, k = 1, \dots, n(n+1)/2$  étant des réels. En fait ce sont les composantes de la matrice  $A$ .

Remplaçons dans l'équation de projection, la matrice  $A$  par sa décomposition sur la base  $S_j$  ; alors l'identification de la matrice  $A$  revient à la détermination des réels  $a_k$  dans

$$\sum_{k=1}^{n(n+1)/2} a_k \text{tr}(S_j S_k H) = \text{tr}(S_j B) \quad j = 1, \dots, n(n+1)/2. \quad (\text{I.9})$$

Montrons que le système (I.9) est résoluble.

#### Proposition I.5.1

La matrice  $M$  du système linéaire (I.9) de composantes

$$M_{jk} = \text{tr}(S_j S_k H)$$

est une matrice symétrique et défini-positive.

*Preuve.* La matrice  $M$  est symétrique.

En effet,

$$\begin{aligned} M_{jk} &= \text{tr}(S_j S_k H) \\ &= \text{tr}(H S_k S_j) \quad \text{car } \text{tr}(U) = \text{tr}(U^T) \\ &= \text{tr}(S_j H S_k) \quad \text{car } \text{tr}(UV) = \text{tr}(VU) \\ &= \text{tr}(S_k S_j H) \\ &= M_{kj} \end{aligned}$$

La matrice  $M$  est défini-positive.

Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  de composantes  $\mathbf{v}_i = a_i$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, M\mathbf{v} \rangle &= \sum_j \sum_h a_j a_k \text{tr}(S_j S_k H) \\ &= \text{tr} \left[ \left( \sum_j a_j S_j \right) \left( \sum_k a_k S_k \right) H \right] \\ &= \text{tr} \left[ \left( \sum_j a_j S_j \right)^2 H \right] \end{aligned}$$

La matrice carrée  $\left( \sum_j a_j S_j \right)^2$  est une matrice positive de  $\mathcal{M}_n$ , donc décomposable en une somme

$$\left( \sum_j a_j S_j \right)^2 = \sum_{l=1}^n \lambda_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l^T, \quad \text{avec } \lambda_l \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_l \neq 0$$

### Remarque I.5.1

*Toute matrice symétrique et positive de  $\mathcal{M}_n$  est toujours diagonalisable et admet  $n$  valeurs propres réelles positives.*

Cette expression de  $\left( \sum_j a_j S_j \right)^2$  est injectée dans celle de  $\langle \mathbf{v}, M\mathbf{v} \rangle$  :

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k a_j a_k \text{tr}(S_j S_k H) &= \sum_{l=1}^n \lambda_l \text{tr}(\mathbf{V}_l \mathbf{V}_l^T H) \\ &= \sum_{l=1}^n \langle \lambda_l \mathbf{V}_l, H \mathbf{V}_l \rangle \end{aligned}$$

C'est positif en tant que somme de nombres positifs puisque  $H$  est positive.

Puisque  $H$  est défini-positive, la somme ne peut être nulle que si tous les  $\lambda_l$  sont nuls. Et dans ce cas puisque  $H$  est défini-positive on aurait  $\left( \sum_j a_j S_j \right)^2 = 0$ , c'est-à-dire  $\sum_j a_j S_j = 0$ . Et comme les  $S_j$  constituent la base de l'espace des matrices symétriques, donc les  $a_j$  sont nuls.

La matrice du système linéaire de composantes  $\text{tr}(S_j S_k H)$  est défini-positive.  $\square$

La résolution de (I.9) tient bien compte de la symétrie imposée sur  $A$ .

Ainsi donc pour identifier la matrice symétrique  $A$  connaissant plusieurs couples  $(\mathbf{X}, \mathbf{b})$ , il revient à résoudre le système linéaire  $AH = B + \Lambda$ , où  $\Lambda$  est une matrice antisymétrique. La résolution se fait par projection sur l'espace des matrices symétriques.

### I.5.3 Algorithme de projection pour les matrices symétriques

Pour déterminer la matrice symétrique  $A$  de l'équation linéaire  $AH = B + \Lambda$ , il faut

1. calculer les matrices  $H$  et  $B$  ;
2. construire la base  $S_j$  des matrices symétriques  $n \times n$  ;
3. calculer composantes  $M_{jk} = \text{tr}(S_j S_k H)$  de la matrice symétrique  $M$  de composantes ;
4. calculer les  $n(n+1)/2$  composantes du vecteur  $\mathbf{z}$  :

$$\mathbf{z}_j = \text{tr}(S_j B) ;$$

5. résoudre algébriquement l'équation  $M\mathbf{a} = \mathbf{z}$  ;
6. calculer la matrice

$$A = \sum_{j=1}^{n(n+1)/2} a_j S_j.$$

#### Remarque I.5.2

*On vient de résoudre l'équation  $AH = B + \Lambda$  pour  $A$  inconnue. La différence est qu'en utilisant cet algorithme solution, on est sûr d'avoir la matrice  $A$  dans le sous-espace des matrices symétriques.*

La section suivante porte sur l'identification de la matrice symétrique tridiagonale  $A$  du système linéaire  $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$  pour plusieurs valeurs connues des vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{b}$ . Un algorithme d'identification sera présenté dans la section suivante après description de la procédure d'identification.

## I.6 Identification de la matrice symétrique tridiagonale $A$

Une matrice symétrique tridiagonale possède moins de composantes indépendantes qu'une matrice symétriques. Autrement dit, la recherche de la matrice symétrique tridiagonale est moins coûteuse qu'une matrice symétrique. La démarche que nous proposons ici tiens compte des critères de la symétrie et tridiagonalité de la matrice à identifier.

La procédure d'identification de la matrice symétrique tridiagonale est identique à celle décrite pour arriver à la construction de l'algorithme solution pour déterminer la matrice symétrique de  $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ .



Nous allons mettre en évidence quelques propriétés des matrices tridiagonales et symétriques pour arriver à l'algorithme de résolution.

Forçons la matrice  $A$  à être symétrique tridiagonale par introduction de multiplicateurs de lagrange.

Forcer une matrice  $n \times n$  à être symétrique tridiagonale, donc de la forme

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

peut se faire en imposant :

- les  $n - 1$  conditions de symétrie imposées aux  $\beta_i$  ( $A_{ii+1} = A_{i+1i}$   $i = 1$  à  $n - 1$ ,
  - les  $(n - 2)(n - 1)/2$  conditions de nullité au-dessus de la diagonale,
  - les  $(n - 2)(n - 1)/2$  conditions de nullité en dessous de la diagonale,
- soit en tout  $(n - 1)^2$  conditions linéaires à respecter.

Une manière d'écrire matriciellement ces  $(n - 1)^2$  conditions scalaires est

$$\text{tr}(A^T \Lambda) = 0.$$

### Proposition I.6.1

- (i) La matrice  $\Lambda$  est de la forme

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & \times & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_2 & \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \times \\ \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \times & -\lambda_{n-1} & 0 & \lambda_n \\ \times & \dots & \dots & \dots & \dots & \times & \times & -\lambda_n & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

où les valeurs en "  $\times$  " sont des réels quelconques.

Ces matrices sont orthogonales aux matrices tridiagonales symétriques.

- (ii) Toute matrice  $n \times n$  peut se décomposer en somme d'une matrice tridiagonale symétrique ( $n + n - 1$  coefficients indépendants) et d'une matrice  $\Lambda$  ( $(n - 1)^2$  coefficients). Cette décomposition est orthogonale.

*Preuve.* (i) L'orthogonalité se vérifie par le calcul du produit scalaire de  $A$  par  $\Lambda$ . Supposons  $\Lambda$  écrite sous la forme (I.11). Pour toute matrice tridiagonale symétrique  $A$  de la forme (I.10), le produit scalaire de  $\Lambda$  et  $A$  est :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A\Lambda) = \text{tr} & \left\{ \begin{array}{cccccccc} -\beta_1\lambda_1 & \times & \cdots & \cdot & \cdots & \times & & \\ \times & \beta_1\lambda_1 - \beta_2\lambda_2 & \times & \cdot & \cdots & \cdots & & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \times \\ \times & \cdots & \cdot & \cdot & \times & \times & -\beta_n\lambda_n + \beta_{n-1}\lambda_{n-1} & \\ \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times & \times & \beta_n\lambda_n & \end{array} \right\} \\ & = -\beta_1\lambda_1 + (\beta_1\lambda_1 - \beta_2\lambda_2) + \dots + (\beta_{n-1}\lambda_{n-1} - \beta_n\lambda_n) + \beta_n\lambda_n \\ & = 0. \end{aligned}$$

Signalons que nous n'avons représenté que les termes diagonaux du produit  $A\Lambda$  indispensables pour le calcul de la trace.

- (ii) Une matrice  $n \times n$  antisymétrique possède  $(n - 1)^2$  coefficients indépendants ; de même une matrice  $n \times n$  tridiagonale a  $(2n - 1)$  coefficients indépendants. On vérifie bien que  $n^2 = (2n - 1) + (n - 1)^2$ .

La somme des matrices  $A$  et  $\Lambda$  vaut

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 + \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ \beta_1 - \lambda_1 & \alpha_2 & \beta_2 + \lambda_2 & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \times \\ \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \times & \beta_{n-2} - \lambda_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} + \lambda_{n-1} \\ \times & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \times & \times & \beta_{n-1} - \lambda_{n-1} & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

qui est l'écriture générale d'une matrice carrée.

Pour la réciproque, il suffit de trouver  $\lambda_i$  et  $\beta_i$  tels que

$$\begin{cases} A_{ii+1} = \beta_i + \lambda_i \\ A_{i+1i} = \beta_i - \lambda_i, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \beta_i = (A_{ii+1} + A_{i+1i})/2 \\ \lambda_i = (A_{ii+1} - A_{i+1i})/2. \end{cases}$$

La décomposition est orthogonale car  $\text{tr}(\Lambda A) = 0$ . □

### I.6.1 Elaboration de la procédure d'identification de $A$ symétrique tridiagonale

Le système linéaire (I.6) ne permet pas de déterminer la matrice  $A$ . Au lieu d'imposer  $\langle \overrightarrow{\text{grad}}F(A), \delta A \rangle = 0$ , on impose

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}}F(A), \delta A \rangle = \langle \delta A^T, \Lambda \rangle$$

c'est-à-dire

$$\text{tr}(\delta A(HA^T - B^T)) = \text{tr}(\delta A\Lambda^T)$$

ou encore

$$AH = B + \Lambda. \tag{I.12}$$

Pour trouver la matrice  $A$  solution de  $AH = B + \Lambda$ , on peut éliminer la matrice  $\Lambda$  en projetant sur une base  $\{T_m, m = 1, \dots, 2n - 1\}$  de matrices  $n \times n$  symétriques tridiagonales.

Considérons  $\{e_j, j = 1, \dots, n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Nous construisons une base  $\{T_m, m = 1, \dots, 2n - 1\}$  du sous-espace des matrices symétriques tridiagonales de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_m &= e_m \otimes e_m, \quad m = 1, \dots, n \\ T_{m+n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_m \otimes e_{m+1} + e_{m+1} \otimes e_m), \quad m = 1, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

La matrice  $A$  peut se décomposer sur la base  $T_m$  des matrices symétriques tridiagonales :

$$A = \sum_{p=1}^{2n-1} \gamma_p T_p$$

où les  $\gamma_p$  sont des réels. Ce sont les composantes de la matrice symétrique tridiagonale  $A$ . multiplions l'équation (I.12) par  $T_m$  et prenons la trace :

$$\text{tr}(T_m AH) = \text{tr}(T_m B) + \text{tr}(T_m \Lambda). \quad (\text{I.13})$$

Utilisant le fait que  $\text{tr}(T_m \Lambda) = 0$  et en incorporant l'expression de la décomposition de  $A$  sur cette base dans (I.13), on obtient le système linéaire

$$\sum_{p=1}^{2n-1} \gamma_p \text{tr}(T_m T_p H) = \text{tr}(T_m B), \quad m = 1, \dots, 2n - 1 \quad (\text{I.14})$$

### Proposition I.6.2

La matrice symétrique  $M$  de composantes  $M_{mp} = \text{tr}(T_m T_p H)$  du système (I.14) est défini-positive.

*Preuve.* En effet

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{2n-1} \sum_{p=1}^{2n-1} \gamma_p \gamma_p \text{tr}(T_m T_p H) &= \text{tr} \left[ \left( \sum_m \gamma_m T_m \right) \left( \sum_p \gamma_p T_p \right) H \right] \\ &= \text{tr} \left[ \left( \sum_m \gamma_m T_m \right)^2 H \right] \end{aligned}$$

La matrice symétrique

$$\left( \sum_m \gamma_m T_m \right)^2$$

est positive, donc décomposable en une somme

$$\sum_{l=1}^n \mu_l W_l W_l^T, \quad \text{avec } \mu_l \geq 0 \quad \text{et } W_l \neq 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_p \gamma_m \gamma_p \text{tr}(T_m T_p H) &= \sum_{l=1}^n \mu_l \text{tr}(W_l W_l^T H) \\ &= \sum_{l=1}^n \mu_l (W_l^T H W_l) \end{aligned}$$

c'est positif comme somme de nombres positifs.

Puisque  $H$  est positive, cette somme ne peut être nulle que si tous les  $\mu_l$  sont nuls ou si  $(\sum_m \gamma_m T_m)^2 = 0$  ou si  $\sum_m \gamma_m T_m = 0$  ou si tous les  $\gamma_m$  sont nuls.

Ainsi la matrice  $(2n - 1) \times (2n - 1)$  du système est donc défini-positive.  $\square$

On peut donc déterminer la matrice  $A$  par la résolution du système (I.14). Par cette procédure, nous tenons compte de la symétrie et de la tridiagonalité de la matrice  $A$ .

### I.6.2 Algorithme de la Méthode de Projection des Matrices symétriques Tridiagonales

Pour déterminer la matrice  $A$  de  $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ , on procède ainsi numériquement :

1. Calculer les matrices  $H$  et  $B$ ;
2. Construire la base des matrices symétriques  $\{T_m, m = 1, \dots, 2n - 1\}$ ;
3. Calculer les  $n(2n - 1)$  composantes de la matrice  $M$ ;
4. Calculer les  $2n - 1$  composantes  $M_{mp} = \text{tr}(T_m T_p H)$  du vecteur  $\mathbf{z}$  :

$$\mathbf{z}_j = \text{tr}(T_j B)$$

5. Résoudre algébriquement l'équation  $M\mathbf{a} = \mathbf{z}$ ;
6. Calculer la matrice

$$A = \sum_{j=1}^{2n-1} a_j T_j$$

Cet algorithme tient compte de la symétrie et de la tridiagonalité de la matrice  $A$ .

**Exemple I.6.1**

Des couples  $(\mathbf{X}^i, \mathbf{b}^i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  sont obtenus d'un système linéaire  $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ , où  $A$  est une matrice  $4 \times 4$  symétrique tridiagonale.

Notons par

$$c = [\mathbf{X}^1 \ \mathbf{X}^2 \ \mathbf{X}^3 \ \mathbf{X}^4] = \begin{bmatrix} -20,3328 & -16,6024 & 0,630162 & -25,4173 \\ -31,2656 & -24,5509 & -1,53237 & -16,4179 \\ -31,7648 & -19,4545 & -3,58713 & 0,456126 \\ -21,89 & -11,054 & -0,927636 & -0,590235 \end{bmatrix}$$

la matrice obtenue par les vecteurs  $\mathbf{X}$

$$d = [\mathbf{b}^1 \ \mathbf{b}^2 \ \mathbf{b}^3 \ \mathbf{b}^4] = \begin{bmatrix} 200 & 200 & -100 & 1100 \\ 400 & 400 & 40 & 0 \\ 600 & 400 & 200 & -400 \\ 800 & 200 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

la matrice obtenue par les vecteurs  $\mathbf{b}$ .

Déterminons la matrice  $A$  par la résolution des systèmes  $AH = B$  et  $AH = B + \Lambda$ .  $\Lambda$  est la matrice des multiplicateurs de Lagrange. Les matrices  $H$  et  $B$  données par les formules (I.5) sont respectivement

$$H = \sum_{i=1}^4 \mathbf{X}^i \otimes \mathbf{X}^i = c.c^T = \begin{bmatrix} 1335,5 & 1459,65 & 955,005 & 643,026 \\ & 1852,18 & 1468,78 & 966,902 \\ & & 1400,56 & 913,44 \\ & & & 602,572 \end{bmatrix}$$

$$B = \sum_{i=1}^4 \mathbf{b}^i \otimes \mathbf{X}^i = d.c^T = \begin{bmatrix} -35409,1 & -29069,8 & -9383,41 & -7145,29 \\ -14748,9 & -22387,9 & -20631,2 & -13214,7 \\ -8547,69 & -22319 & -27740,6 & -17505 \\ -22191,5 & -31411,2 & -28898,4 & -19689,1 \end{bmatrix}$$

Du système linéaire  $AH = B$ , on suppose les matrices  $H$  et  $B$  connues.

Le déterminant de la matrice  $H$  vaut  $1,09 \cdot 10^7$ , donc elle est inversible. La détermination de la matrice  $A$  par inversion de la matrice  $H$  donne

$$A = \begin{bmatrix} -67,5005 & 37,5006 & -0,000208773 & 0,000123783 \\ & -57,5007 & 20,0003 & -0,000140429 \\ & & -79,7503 & 59,7504 \\ & & & -123,251 \end{bmatrix}$$

Si on considère les résultats à  $10^{-4}$  près, la matrice  $A$  n'est pas tridiagonale. Recherchons la matrice  $A$  par la deuxième méthode d'identification qui consiste à chercher  $A$  directement dans l'espace des matrices symétriques tridiagonales. Par cette procédure, la matrice  $A$  identifiée est :

$$A = \begin{bmatrix} -67,5004 & 37,5004 & 0 & 0 \\ & -57,5004 & 20 & 0 \\ & & -79,75 & 59,7502 \\ & & & -123,25 \end{bmatrix}$$

La matrice  $A$  obtenue est symétrique tridiagonale, et elle est la plus proche de la matrice recherchée.

## I.7 Autre méthode d'identification de la matrice $A$ symétrique ou symétrique tridiagonale

### I.7.1 Elaboration de la méthode d'identification

Nous proposons dans ce paragraphe une autre manière d'identifier la matrice  $A$  de l'équation (I.2).

Il revient encore à considérer le problème de minimisation suivante :

$$\min_{A^T=A} \frac{1}{2} \sum_i \|A\mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{b}^{(k)}\|^2. \quad (\text{I.15})$$

Nous nous limiterons dans ce paragraphe au cas des matrices symétriques.

Si  $E$  est le sous-espace des matrices  $n \times n$  symétriques, alors sa dimension est  $n(n+1)/2$ . Ce problème d'optimisation plus précis tient bien compte des  $n(n+1)/2$  conditions de symétrie.

Nous avons montré dans le sous paragraphe I.5.1 qu'on arrive à tenir compte de ces conditions sur  $A$  en y introduisant la matrice  $\Lambda$ . Par suite, la matrice est déterminée par la résolution du système

$$AH = B + \Lambda$$

Au lieu d'éliminer  $\Lambda$  de l'équation (I.7.1), cherchons plutôt à la déterminer premièrement.

L'équation (I.7.1) est résoluble si la matrice  $H$  est inversible, alors nous supposons  $H$  inversible. De  $AH = B + \Lambda$ , on en déduit la matrice  $A$  par

$$A = (B + \Lambda)H^{-1}.$$

La matrice  $\Lambda$  s'élimine par utilisation du critère  $A^T = A$ . En effet

$$\begin{aligned} A^T = A &\implies H^{-1}(B^T - \Lambda) = (B + \Lambda)H^{-1} \\ &\implies (B^T - \Lambda)H = H(B + \Lambda) \quad \text{en multipliant à gauche et à droite par } H \end{aligned}$$

De ces implications, on peut déterminer  $\Lambda$  en résolvant le système linéaire

$$H\Lambda + \Lambda H = B^T H - HB. \quad (\text{I.16})$$

Si les mesures ne sont pas entachées d'erreurs, on aurait  $AH = B$  puis  $A = BH^{-1}$ ; par suite  $A^T = H^{-1}B^T$  et  $BH^{-1} = H^{-1}B^T$  ou  $HB = B^T H$ . A cause des erreurs sur les mesures, la matrice antisymétrique  $B^T H - HB$  n'est pas sûrement nulle. On corrige le défaut de symétrie de  $A$  (calculée par  $AH = B$ ) par

$$AH = B + \Lambda$$

avec  $\Lambda$  solution de

$$H\Lambda + \Lambda H = B^T H - HB.$$

En procédant de cette manière, la symétrie de  $A$  est assuré.

En effet, d'une part, nous avons

$$AH = B + \Lambda \implies HA^T = B^T - \Lambda, \quad \text{par transposition.}$$

Et comme  $A^T = A$ , donc

$$AH + HA^T = B + B^T \quad (1)$$

D'autre part, de l'implication

$$\begin{cases} AH = B + \Lambda \\ H\Lambda + \Lambda H = B^T H - HB \end{cases} \implies \begin{cases} HAH = HB + H\Lambda \\ AH^2 = BH + \Lambda H \end{cases},$$

on obtient

$$(HA + AH)H = (HB + BH) + (B^T H - HB) \implies HA + AH = B + B^T \quad (2)$$

Par soustraction des relations (1) et (2), on a :  $H(A^T - A) = 0$  puis  $A^T = A$  si  $H$  est inversible.

Il reste à vérifier qu'il est possible de déterminer  $\Lambda$  par résolution de (I.16).



Pour cela, considérons l'application linéaire  $L_H$  de l'espace vectoriel  $E$  des matrices  $n \times n$  antisymétriques dans lui-même et définie par :

$$L_H = H\Lambda + \Lambda H.$$

L'équation (I.16) est résoluble si l'application  $L_H$  est inversible. Ceci peut se vérifier par le calcul du déterminant de  $L_H$ .

En effet, soit  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$  une base de vecteurs propres de la matrice  $H$  choisie orthonormée (l'existence de cette base est assurée par la défini-positivité de la matrice  $H$ ).

Choisissons ensuite dans  $E$  la base orthonormée ( $i < j$  par exemple)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)$$

Dans cette base nous déterminons la matrice de  $L_H$  par le calcul des images des éléments de la base de  $E$  :

$$\begin{aligned} L_H \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) \right] &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(He_i) \otimes e_j - (He_j) \otimes e_i + e_i \otimes (He_i) - e_j \otimes (He_i)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(h_j + h_i)(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) \end{aligned}$$

où  $h_i$  (resp.  $h_j$ ) est la valeur propre de la matrice  $H$  correspondant au vecteur propre  $e_i$  (resp.  $e_j$ ).

Alors dans la base choisie, la matrice de  $L_h$  est la matrice diagonale de composantes diagonales  $h_i + h_j$ .

Montrons à présent que l'application  $L_H$  est auto-adjointe.

Soit  $W$  une autre matrice antisymétrique de  $E$ ; l'espace  $E$  est rendu euclidien par le produit scalaire

$$\langle \Lambda, W \rangle = -\text{tr}(HW).$$

Calculons alors  $\langle L_H \Lambda, W \rangle$  :

$$\begin{aligned} -\text{tr}[(L_H \Lambda)W] &= -\text{tr}[(H\Lambda + \Lambda H)W] \\ &= -\text{tr}((H\Lambda)W) - \text{tr}(\Lambda(HW)) \\ &= -\text{tr}(WH\Lambda) - \text{tr}(HW\Lambda) \quad \text{par permutation} \\ &= -\text{tr}[(WH + HW)\Lambda] \quad \text{par factorisation} \\ &= -\text{tr}[(L_H W)\Lambda]. \end{aligned}$$

Ceci prouve que l'application  $L_H$  est auto-adjointe dans  $E$ . C'est pourquoi la méthode du gradient conjugué peut s'appliquer. La matrice de  $L_H$  est diagonalisable puisqu'elle est auto-adjointe; il existe donc une base où  $L_H$  est diagonalisable.

Les valeurs propres de la matrice de  $L_H$  sont les  $(n-2)(n-1)/2$  réels positifs  $h_i + h_j$ .

Les réels  $h_i + h_j$  sont strictement positifs si la matrice  $H$  est défini-positive.

le réel  $\det L_H = \prod_{i < j} (h_i + h_j)$  étant strictement positif, l'application  $L_H$  est donc auto-adjointe et positive dans l'espace  $E$ .

On peut donc déterminer la matrice  $\Lambda$  de l'équation (I.16).

## I.7.2 Algorithme d'identification

Numériquement :

1. résoudre le système linéaire de  $n(n+1)/2$  équations à  $n(n+1)/2$  inconnues

$$H\Lambda + \Lambda H = B^T H - HB$$

2. résoudre ensuite le système linéaire

$$AH = B + \Lambda$$

La détermination de  $\Lambda$  peut se faire facilement par la méthode du gradient conjugué, et une fois qu'elle est déterminée, on peut appliquer la même méthode pour déterminer enfin la matrice symétrique  $A$ .

### Remarque I.7.1

(i) Si  $A$  est une matrice symétrique tridiagonale, la procédure d'identification reste la *idem*.

(ii) Cette méthode intermédiaire paraît plus rapide en temps d'écriture du programme. En effet, pour les algorithmes de projections élaborées, il faut définir soi-même une base de matrices symétriques ou symétriques tridiagonales. Alors qu'avec la méthode intermédiaire, il s'agit de deux sous programmes de détermination de  $\Lambda$  et de  $A$ . Toutefois, lorsqu'on peut construire plus rapidement une base, les algorithmes de projections sont préférables.

## I.8 Conclusion

La discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP) et des équations aux dérivées ordinaires (EDO) conduit, lorsqu'elles sont linéaires à des équations

du type  $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ . Nous avons proposé dans ce chapitre deux méthodes permettant d'identifier la matrice  $A$  pour plusieurs valeurs connues de  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{b}$ , suivi d'une troisième considérée comme méthode intermédiaire. Les matrices attendues par les deux algorithmes proposés sont dans le sous-espace des matrices dans lequel elles sont cherchées.

Les deux algorithmes de projection nécessitent la construction d'une base des matrices symétriques ou symétriques tridiagonales. Cette opération risque d'être coûteuse en temps de calcul. Le troisième algorithme consiste à trouver d'abord la matrice des multiplicateurs de Lagrange par la méthode du gradient conjugué et ensuite déterminer la matrice symétrique ou symétrique tridiagonale.

Les méthodes développées dans ce chapitre seront exploitées dans la suite. D'abord dans le cadre de l'identification des coefficients variables d'une équation différentielle linéaire du second ordre, puis dans le cadre de l'identification des caractéristiques d'inertie d'un solide rigide.

# Chapitre II

## Application à l'Identification des Coefficients d'une Equation Différentielle Linéaire

### Sommaire

---

<b>II.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>33</b>
<b>II.2</b>	<b>Problème direct</b>	<b>35</b>
II.2.1	Formulation variationnelle	36
II.2.2	Dérivée de Gateaux de la fonctionnelle $J(v)$	38
II.2.3	Formulation faible	39
II.2.4	Résolution du problème direct	41
<b>II.3</b>	<b>Problème inverse</b>	<b>44</b>
II.3.1	Hypothèse de détermination de la matrice $A$	44
II.3.2	Procédure de détermination de la matrice $A$	44
II.3.3	Procédure d'identification de $p$ et de $q$	45
<b>II.4</b>	<b>Application à un cas simple</b>	<b>48</b>
<b>II.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>

---

### II.1 Introduction

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. Les équations différentielles interviennent dans la modélisation

mathématique de phénomènes physiques et biologiques. Ces équations régissant un phénomène d'évolution physique mettant en jeu des paramètres ou des fonctions caractérisant les propriétés des matériaux étudiés.

Un des exemples est le fléchissement d'une poutre de longueur  $L$ , étirée selon son axe par une force  $P$ , soumise à une charge transversale de densité  $f(x)$  par unité de longueur, et simplement appuyée à ses extrémités  $0$  et  $L$ . Le moment fléchissant de la poutre vérifie une équation différentielle faisant intervenir le module d'Young  $E$  et le moment principal d'inertie  $I(x)$  de la section de la poutre :

$$\begin{cases} -u''(x) + \frac{P}{EI(x)}u(x) = f(x) \\ u(0) = 0, u(L) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

FIG. II.1 – Poutre étirée par une force  $P$  et soumise à une force transversale

Pour ce type de problème, nous nous intéresserons plutôt à la recherche du moment principale d'inertie et du module d'Young.

Plus généralement, il s'agit des équations différentielles du type :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = \xi, u(L) = \eta \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$L$  est la longueur du système unidimensionnel considéré;  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $f(x)$  sont données en fonction de  $x \in [0, L]$ ; les fonctions  $p$  et  $q$  sont supposées continues;  $q$  est positive nulle à l'origine et  $p$  est strictement positive;  $f$  est dans l'espace de Hilbert  $L^2([0, L])$ .

La situation inverse qui nous intéresse est la recherche des fonctions  $p$  et  $q$  pour  $u$  et  $f$  connues.

Pour résoudre ce problème d'identification, nous étudierons le problème direct qui consiste à déterminer la fonction  $u$  en considérant les autres fonctions connues. La méthode des éléments finis est utilisée pour la discrétisation de l'équation différentielle (II.3).

La recherche des fonctions  $p$  et  $q$  reviendra à la recherche de la matrice symétrique tridiagonale issue de l'application de la méthode des éléments finis. Cette matrice sera identifiée par application de l'algorithme de projection sur l'espace des matrices symétriques tridiagonales (I.6.2).

## II.2 Problème direct

Considérons le problème direct suivant :

Trouver  $u$  satisfaisant l'équation différentielle ordinaire avec conditions non homogène de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = \xi, u(L) = \eta \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$L$  est la longueur du système unidimensionnel considéré;  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $f(x)$  sont données en fonction de  $x \in [0, L]$ ; les fonctions  $p$  et  $q$  sont supposées continues;  $q$  est négative nulle à l'origine et  $p$  est strictement positive;  $f$  est dans l'espace de Hilbert  $L^2([0, L])$ .

Un tel problème est appelé problème aux limites [25].

Pour résoudre le problème direct, nous allons successivement le formuler sous sa forme variationnelle puis sous sa forme faible.

Afin de rendre ce document aussi "autonome" que possible, nous rappelons quelques notions sur les espaces de Sobolev qui sont des espaces naturels de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles. Physiquement, les espaces de Sobolev s'interprètent comme des espaces de fonctions d'énergie finie. Ils se construisent à partir de la notion de fonctions mesurables et de l'espace  $L^2$  des fonctions de carrées sommables.

**Définition II.2.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  muni de la mesure de Lebesgue.

L'ensemble  $L^2(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables de carrées sommables dans  $\Omega$ . Muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

$L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

L'espace  $C_c^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ .

**Définition II.2.2** Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ .

On dit que  $v$  est dérivable au sens faible dans  $L^2(\Omega)$  s'il existe des fonctions  $w_i \in L^2(\Omega)$ , pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , telles que, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} w_i(x) \phi(x) dx.$$

Chaque  $w_i$  est appelée la  $i$ -ème dérivée partielle faible de  $v$  et notée  $\partial v/\partial x_i$ .

**Définition II.2.3** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ .

L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, N\}, \partial v/\partial x_i \in L^2(\Omega)\} \quad (\text{II.4})$$

où  $\partial v/\partial x_i$  est la dérivée partielle faible de  $v$  au sens de la définition précédente.

Muni de l'application

$$v \in H^1(\Omega) \longrightarrow \|v\|_{H^1} = \left( \int_{\Omega} |v'|^2 + |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

cet espace vectoriel est normé (c'est même un espace préhilbertien).

**Définition II.2.4** Soit  $C_c^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . L'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

La généralisation de la définition des espaces de Sobolev est la suivante.

**Définition II.2.5** Pour un entier  $m \geq 0$ , l'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est défini par

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\}, \quad (\text{II.5})$$

où la dérivée partielle

$$\partial^\alpha v = \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha$$

est à prendre au sens faible.

## II.2.1 Formulation variationnelle

Les méthodes variationnelles sont utilisées pour la résolution des problèmes de physique mathématique. Nombre de ces méthodes consistent à ramener le problème à chercher la solution  $u$  comme réalisant le minimum (généralement l'extrémum) d'une fonctionnelle. La difficulté est de trouver la fonctionnelle. Ensuite on cherche une suite minimisante. La solution de (II.3) est obtenue comme limite de cette suite. Aussi pour bien comprendre le fond des méthodes variationnelles, se propose-t-on

d'illustrer l'équivalence du problème de mécanique avec problème variationnel. Cherchons la fonctionnelle  $J$  telle que

$$J(v) = \int_0^L \Pi(x, v(x), v'(x)) dx \quad (\text{II.6})$$

où  $\Pi$  est une fonction continue du triplet  $(x, v, v')$  ainsi que ses dérivées première et seconde par rapport à  $x, v$  et.

Supposons que la fonction  $v$  soit continue, qu'elle possède une dérivée continue  $v'$  sur  $]0, L[$  et qu'elle prenne aux bornes de l'intervalle  $[0, L]$  les valeurs données

$$v(0) = \xi, v(L) = \zeta. \quad (\text{II.7})$$

Dans ces conditions, une fonction  $u$  minimisant  $J(v)$  satisfait l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \Pi}{\partial v'} - \frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0. \quad (\text{II.8})$$

Nous supposons que  $u$  satisfait les conditions nécessaires (de régularité) pour réaliser le minimum de  $J(v)$  [17] et [69].

Le théorème d'Euler-Lagrange assure que si  $u$  minimise  $J(v)$ , alors elle est solution de l'équation (II.3).

### **Théorème II.2.1**

*Si  $u$  minimise la fonctionnelle  $J(v)$  alors  $u$  est solution de l'équation différentielle (II.3)*

Il est facile de voir que le système (II.8) coïncide avec le système (II.3) en choisissant

$$\Pi(x, v(x), v'(x)) = \frac{1}{2} (p(x)v'(x))^2 + \frac{1}{2} q(x) (v(x))^2 - f(x)v(x).$$

Puisque la fonction  $v$  est supposée continue et dérivable de dérivée  $v'$  continue, alors le problème direct peut donc être formulé de manière équivalente sous la forme variationnelle :

Minimiser dans  $H^1([0, L])$  sous la condition  $v(0) = 0$  et  $v(L) = 0$  la fonctionnelle [17], [29] et [30]

$$J(v) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (p(x)v'(x))^2 + \frac{1}{2} q(x) (v(x))^2 - f(x)v(x) \right] dx \quad (\text{II.9})$$

les fonctions  $p, q$  et  $f$  sont respectivement dans  $C^1([0, L])$ ,  $C([0, L])$  et  $L^2([0, L])$ . Elles sont données ; la fonction  $p$  est strictement positive et la fonction  $q$  est positive et nulle à l'origine ; la fonction  $p$  peut être regardée comme un élément de  $H^1([0, L])$ .



En résumé, si la fonction  $u$  réalise l'extrémum de la fonctionnelle  $J(v)$ , alors elle remplit la condition (II.3), c'est-à-dire que  $u$  est solution du problème aux limites

$$-(pu')' + qu = f \quad u(0) = \xi, u(L) = \eta. \quad (\text{II.10})$$

La réciproque est aussi vraie : si  $u$  (supposée suffisamment régulière) est solution du problème (II.10), alors elle réalise l'extrémum de la fonctionnelle  $J(v)$  sur le domaine de définition de cette dernière [17] et [25]. On montre que la fonction  $u$  est un élément de  $H_0^1([0, L])$ .

## II.2.2 Dérivée de Gateaux de la fonctionnelle $J(v)$

**Définition II.2.6** Soit  $J$  une fonctionnelle définie sur un Hilbert  $V = H_0^1([0, L])$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- (i)  $J$  admet une dérivée directionnelle en  $u \in V$  dans la direction  $v \in V$  si la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon}$$

existe. Elle est notée  $J'(u, v)$ .

- (ii)  $J$  est dérivable au sens de Gateaux en  $u$  si elle admet une dérivée directionnelle dans toutes les directions et si l'application

$$v \in V \longrightarrow J'(u, v)$$

est linéaire continue. La dérivée de  $J$  en  $u$  (au sens de Gateaux) est notée  $J'(u)$ .

On vérifie facilement que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon} = \int_0^L [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x)] dx.$$

$u$  réalise le minimum de  $J$  sur  $V$  si

$$\int_0^L [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x)] dx = 0.$$

Mais on aurait pu le voir directement par multiplication de l'équation différentielle

(II.3) par  $v \in H_0^1([0, L])$  suivie d'une intégration par partie :

$$\begin{aligned} & \int_0^L ((p(x)u'(x))'v(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x))dx \\ &= \int_0^L (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x))dx - (v(L)u'(L) - v(0)u'(0)) \\ &= \int_0^L (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x))dx \quad \text{car } v \in V = H_0^1([0, L]) \end{aligned}$$

Il peut y arriver qu'il n'y ait pas de formulation variationnelle du problème direct, et dans ce cas, on procède par la formulation faible.

### II.2.3 Formulation faible

On se ramène à  $u(0) = 0$  et  $u(L) = 0$  avec la fonction  $u(x) + \xi x + (x - L)\eta$   
 Considérons la fonction  $v$  de l'espace convexe fermé

$$K = H_0^1([0, L]) = \{v \in H^1([0, L]) / v(0) = 0 \text{ et } v(L) = 0\}. \quad (\text{II.11})$$

On a montré qu'en multipliant l'équation différentielle (II.3) par  $v$  et en procédant à une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^L ((p(x)u'(x))'v(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x))dx = \\ & \int_0^L (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x) - f(x)v(x))dx. \end{aligned}$$

Le théorème de Stampacchia [17] permet une troisième formulation du problème direct considéré.

Introduisons la forme bilinéaire symétrique définie dans  $K \times K$  par

$$a(u, v) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2}p(x)u'(x)v'(x) + \frac{1}{2}q(x)u(x)v(x) \right] dx. \quad (\text{II.12})$$

L'inégalité de Poincaré assure la continuité et la stricte coercivité de la forme bilinéaire  $a(., .)$  [17] et [25].

Une formulation faible du problème direct est alors :

Trouver  $u$  dans l'espace  $K$  telle que

$$\forall v \in K, \quad a(u, v) = \int_0^L f(x)v(x)dx \quad (\text{II.13})$$

La coercivité de la forme bilinéaire implique l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (II.13) [17]. C'est dans le cadre de cette troisième formulation dite formulation faible que nous proposerons une méthode d'identification des fonctions  $p$  et  $q$  dans le problème inverse que nous développerons plus tard.

Continuons la résolution du problème direct par la détermination de la matrice de l'application linéaire de (II.13). Pour ce faire, nous considérons les applications

$$\mathcal{A} : H^1([0, L]) \longrightarrow H^1([0, L])^* \quad \text{et} \quad \mathcal{F} : H^1([0, L]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définies par

$$(\mathcal{A}u, v) = a(u, v) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(v) = (f, v) = \int_0^L f(x)v(x)dx.$$

Identifions l'espace de Hilbert  $H^1([0, L])$  à son dual  $H^1([0, L])^*$ .

La formulation du problème direct peut se transcrire [18] :

Trouver  $u$  dans  $K \cap H^2([0, L])$  telle que

$$(\mathcal{A}u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in K. \quad (\text{II.14})$$

Le passage de la formulation variationnelle à la formulation faible ou vice versa est assuré par le théorème suivant emprunté de Ciarlet [25] :

### **Théorème II.2.2**

(1) Si  $u$  est une fonction du problème aux limites (II.3), alors  $u$  vérifie

$$a(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \text{pour tout } v \in K,$$

où la forme bilinéaire  $a : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$  et la forme linéaire  $\mathcal{F} : K \longrightarrow \mathbb{R}$  ont respectivement pour expressions

$$a(u, v) = \int_0^L (p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x))dx, \quad \mathcal{F}(v) = (f, v) = \int_0^L f(x)v(x)dx$$

pour des fonctions quelconques  $u, v \in K$ .

(2) On suppose  $p > 0$  et  $q \geq 0$ . Une fonction  $u \in K$  est solution des équations  $a(u, v) = \mathcal{F}(v)$  pour tout  $v \in K$  si et seulement si

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v), \quad \text{où} \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \mathcal{F}(v).$$

Ce théorème que nous ne démontrerons pas fournit la preuve de l'unicité de la solution.

Pour la résolution numérique de notre problème direct, on construit un sous-espace de dimension finie de l'espace  $H^1([0, L])$  et on définit le problème discret associé par la méthode des éléments finis.

## II.2.4 Résolution du problème direct

Procédons à la discrétisation de l'équation différentielle (II.3) par la technique des éléments finis.

L'idée de base de la méthode des éléments finis à "pas constant  $\zeta$ " consiste à remplacer l'espace  $H^1([0, L])$  de dimension infinie dans lequel est cherchée la solution  $u$  par un sous-espace  $V_\zeta$  de  $H^1([0, L])$  de dimension finie [25] et [58].

### II.2.4.1 Approximation par méthode des éléments finis

Nous résolvons le problème direct avec les conditions  $u(0) = u(L) = 0$ ; pour se ramener aux conditions  $u(0) = \xi$ ,  $u(L) = \eta$ , il suffit de faire un changement de fonction inconnue en soustrayant la fonction  $\xi(L - x) + \eta x$ .

On construit  $V_\zeta$  de manière à ce qu'il soit une bonne approximation de  $H^1([0, L])$  et que la solution  $u_\zeta$  dans  $V_\zeta$  de la formulation faible soit la plus "proche" possible de la solution exacte  $u$  dans  $H^1([0, L])$ .

Pour ce faire, on découpe l'intervalle  $[0, L]$  en  $n$  morceaux égaux de longueur  $\zeta = \frac{L}{n}$  ( $n$  est supposé supérieur ou égal à 1).

Le sous-espace  $V_\zeta$  est engendré par les fonctions de base  $\phi_i, i = 1, \dots, n$  [58] et [87] :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta}x + 1 - i & \text{si } (i-1)\zeta \leq x \leq i\zeta \\ -\frac{1}{\zeta}x + 1 + i & \text{si } i\zeta \leq x \leq (i+1)\zeta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions  $\phi_i$  sont dans  $L^2([0, L])$ , leurs dérivées au sens des distributions sont

FIG. II.2 – Génération de fonctions linéaires par morceaux

dans  $L^2([0, L])$ , donc les fonctions  $\phi_i$  sont dans  $H^1([0, L])$ .

Le sous-espace  $V_\zeta$  de base  $\{\phi_i, i = 1, \dots, n\}$  est donc un sous-espace de dimension finie de  $H^1([0, L])$ , sa dimension est  $n$ .

Soit  $u_\zeta \in V_\zeta$ , alors elle est définie de manière unique par ses valeurs  $c_j = u_\zeta(x_j)$  aux  $n$  nœuds  $x_j = j\zeta$ ,  $1 \leq j \leq n$

$$u_\zeta(x) = \sum_{i=1}^n c_j \phi_j(x). \quad (\text{II.15})$$

La méthode des éléments finis consiste à remplacer l'équation (II.14) par sa projection sur le sous-espace  $V_h$  [30]

$$(\mathcal{A}u_\zeta, \phi_i) = \mathcal{F}(\phi_i) \quad (\text{II.16})$$

On a alors le résultat très simple d'existence, d'unicité, de caractérisation de la *solution approchée*  $u_\zeta$ , et enfin de comparaison avec la solution "exacte" [25] :

### **Théorème II.2.3**

On suppose la fonction  $q$  positive et  $p$  strictement positive.

(1) Étant donné un sous-espace  $V_\zeta$  de dimension finie de l'espace  $H^1([0, L])$ , il existe un et un seul élément  $u_\zeta \in V_\zeta$  qui vérifie

$$(\mathcal{A}u_\zeta, \phi_i) = \mathcal{F}(\phi_i) \quad \text{pour tout } u_\zeta \in V_\zeta.$$

(2) Cet élément est également caractérisé comme la solution unique du problème : trouver  $u_\zeta \in V_\zeta$  tel que

$$J(u_\zeta) = \inf_{v_\zeta \in V_\zeta} J(v_\zeta).$$

(3) Enfin, il existe une constante  $C$ , indépendante du sous-espace considéré et de la solution  $u$  telle que

$$\|u - u_\zeta\|_{H^1} \leq C \inf_{v_\zeta \in V_\zeta} \|u - v_\zeta\|_{H^1}.$$

Outre la démonstration de Ciarlet, on peut trouver une autre démonstration de la partie (3) de ce théorème dans le livre de Davies [30] avec un exemple.

On a alors l'équivalent du problème aux limites en dimension finie, propice pour une résolution numérique.

Incorporons l'expression (II.15) de  $u_\zeta$  dans l'équation (II.16) :

$$\sum_{j=1}^n (\mathcal{A}\phi_j, \phi_i) c_j = \mathcal{F}(\phi_i) \quad (\text{II.17})$$

### **Proposition II.2.1**

La matrice  $n \times n$   $A$  de composantes

$$A_{ij} = (\mathcal{A}\phi_i, \phi_j) = \int_0^L [p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx \quad (\text{II.18})$$

du système (II.17) est symétrique, tridiagonale et défini-positive.

*Preuve.* La matrice  $A$  est symétrique par définition.

Montrons qu'elle est tridiagonale : pour tout  $j > i+1$ ,  $\phi_i(x)\phi_j(x) = 0$  et  $\phi'_i(x)\phi'_j(x) = 0$ . On en déduit que  $A_{ij} = 0$  pour  $j > i + 1$  et par suite que la matrice  $A$  est tridiagonale.

Puisque les fonctions  $p$  et  $q$  sont positives, le scalaire

$$\sum_{ij} A_{ij}c_i c_j = \int_0^l [p(x)(\sum_i c_i \phi'_i)^2 + q(x)(\sum_i c_i \phi_i(x))^2] dx$$

est positif pour toutes valeurs des coefficients  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

La matrice  $A$  est donc positive. Mais est-elle défini-positive ?

L'intégrale d'une fonction positive ne peut être nulle que si cette fonction est nulle presque partout (p.p.).

Le scalaire  $\sum_{ij} A_{ij}c_i c_j$  n'est nul que si

$$\begin{cases} \sum_i c_i \phi'_i(x) = 0 & \text{p.p.} \\ \sum_i c_i \phi_i(x) = 0 & \text{si } q(x) = 0 \end{cases}$$

Ce n'est possible que si tous les coefficients  $c_i$  sont nuls. La matrice  $A$  est donc défini-positive.  $\square$

### Commentaire II.2.1

**La matrice  $A$  hérite sur le sous-espace  $V_\zeta$  de la symétrie et de la positivité de  $A$ . La coercivité de  $A$  entraîne la défini-positivité de  $A$ .**

Posons

$$b_i = \int_0^L f(x)\phi_i(x)dx \tag{II.19}$$

et interprétons les  $c_i$  comme valeurs de la fonction  $u_\zeta$  aux nœuds d'abscisse  $x_i$ .

Les valeurs optimales des composantes  $c_i$  sont obtenues en résolvant le système linéaire

$$\sum_j A_{ij}c_j = b_i.$$

Introduisons les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= [c_1 \dots c_n]^T \\ \mathbf{b} &= [b_1 \dots b_n]^T, \end{aligned}$$

et la matrice  $A$  de coefficients  $A_{ij}$ . Alors le système devient

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}. \tag{II.20}$$

La solution  $\mathbf{c}$  de ce système est unique puisqu'étant défini-positive, la matrice  $A$  est inversible.

### Remarque II.2.1

La matrice  $A$  de composantes  $A_{ij} = \int_0^L [p(x)\phi'_i(x)\phi'_j + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)]dx$  est la matrice de l'application linéaire régissant le problème direct.

La résolution du problème direct est la détermination du vecteur  $\mathbf{c}$  du système linéaire (II.20).

## II.3 Problème inverse

Connaissant les couples  $(u(x), f(x))$ , peut-on trouver deux fonctions  $p$  strictement positive et  $q$  positive telles que l'équation différentielle (II.3) soit vérifiée.

La procédure que nous allons suivre consiste à déterminer l'application linéaire  $\mathcal{A}$  ou sa version discrétisée  $A$  à partir de plusieurs données de couples  $(u^k, \mathcal{F}^k)$  solutions de (II.16). Ensuite les informations sur les fonctions  $p$  et  $q$  seront déduites de la connaissance des composantes de la matrice  $A$ .

### II.3.1 Hypothèse de détermination de la matrice $A$

Connaissant les solutions  $u^k(x)$  pour diverses excitations  $f^k(x)$ , nous souhaitons en extraire des informations sur les fonctions  $p$  et  $q$ .

Dans une situation expérimentale, les  $f^k(x)$  peuvent être les forces exercées sur une poutre, les  $u^k(x)$  sont les flèches. Au cours de  $m$  expériences indexées par  $k$ ,  $f^k(x)$  et  $u^k(x)$  sont mesurées aux points  $x_i = i\zeta$ .

La question devient plus réaliste : connaissant plusieurs couples  $(u^k(i\zeta), f^k(i\zeta))$  de flèches et de forces aux nœuds, peut-on en déduire les valeurs de  $p(x)$  et de  $q(x)$  ?

Dans la suite, nous noterons  $c_i^k$  la valeur approchée de  $u^k(x)$  au nœud  $x_i = i\zeta$  et  $b_i^k$  l'intégrale (II.19) calculée pour  $f = f^k$ .

### II.3.2 Procédure de détermination de la matrice $A$

Nous connaissons donc plusieurs couples  $(\mathbf{c}^k, \mathbf{b}^k)$  solutions de

$$A\mathbf{c}^k = \mathbf{b}^k. \quad (\text{II.21})$$

Nous pouvons espérer en déduire les composantes de la matrice symétrique  $A$ .

La procédure développée dans le chapitre I est suivie pour déterminer la matrice  $A$  de composantes

$$A_{ij} = \int_0^l [p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)]dx \quad (\text{II.22})$$

Rappelons brièvement qu'il s'agit de multiplier à droite l'équation (II.21) à droite par la transposée du vecteur  $\mathbf{c}^k$  et de sommer ensuite sur le nombre de mesures. Ces opérations conduisent au système d'équations

$$\sum_{k=1}^m A_{ij} c_i^k c_j^k = \sum_{k=1}^m b_i^k c_j^k.$$

L'espace des matrices carrées  $\mathcal{M}_{n \times n}$  est euclidien pour le produit scalaire

$$\forall Q, P \in \mathcal{M}_{n \times n} \quad \langle Q, P \rangle = \text{tr}(QP^T)$$

Introduisons les matrices  $H$  et  $B$  de composantes

$$H_{ij} = \sum_k c_i^{(k)} c_j^{(k)}, \quad B_{ij} = \sum_k b_i^{(k)} c_j^{(k)}. \quad (\text{II.23})$$

On déduit du système linéaire (II.21) l'équation

$$AH = B \quad (\text{II.24})$$

Si la matrice symétrique  $H$  est inversible alors la matrice  $A$  est obtenue comme solution du système linéaire (II.21). L'inversibilité de la matrice  $H$  est assurée si les  $n$  vecteurs  $\mathbf{c}^{(k)}$  sont indépendants [99].

Et par suite la matrice  $A$  s'obtient par l'algorithme de projection (I.6.2) sur l'espace des matrices tridiagonales symétriques.

### II.3.3 Procédure d'identification de $p$ et de $q$

Pour identifier les fonctions  $p$  et  $q$ , nous regarderons le système (II.22) à l'envers, les  $A_{ij}$  étant déterminés.

#### Remarque II.3.1

*Pour faciliter les calculs, nous chercherons à déterminer les approximations des fonctions  $p$  et  $q$  aux points  $x_i = i\zeta, i = 1, \dots, n$  où  $u$  et  $f$  ont été mesurées et nous conserverons les fonctions de bases  $\phi_i$  définies précédemment.*



Nous allons donc chercher une approximation des fonctions  $p$  et  $q$  dans l'espace  $V_\zeta$  :

$$p_\zeta(x) = \sum_{k=1}^n P_k \phi_k(x), \quad q_\zeta(x) = \sum_{k=1}^n Q_k \phi_k(x) \quad (\text{II.25})$$

$P_k$  et  $Q_k$  étant respectivement les valeurs aux nœuds des fonctions  $p$  et  $q$ .

La recherche de  $p$  et  $q$  revient à l'estimation de  $P_k$  et  $Q_k$ .

En reportant ces approximations de  $p$  et  $q$  dans l'équation (II.22), nous obtenons le système

$$\int_0^l [p_\zeta(x) \phi'_i(x) \phi'_j + q_\zeta(x) \phi_i(x) \phi_j(x)] dx = A_{ij}.$$

Pour obtenir un système linéaire en  $P_k$  et  $Q_k$ , nous devons au préalable calculer les intégrales

$$\begin{cases} \int_0^l [p_\zeta(x) \phi'_i(x) \phi'_i + q_\zeta(x) \phi_i(x) \phi_i(x)] dx = A_{ii}, & 1 \leq i \leq n \\ \int_0^l [p_\zeta(x) \phi'_i(x) \phi'_{i+1} + q_\zeta(x) \phi_i(x) \phi_{i+1}(x)] dx = A_{ii+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

En effectuant les intégrations, nous aboutissons au système d'équations

$$\begin{cases} \frac{1}{2\zeta} (P_{i-1} + 2P_i + P_{i+1}) + \frac{\zeta}{12} (Q_{i-1} + 6Q_i + Q_{i+1}) = A_{ii} \\ -\frac{1}{2\zeta} (P_i + P_{i+1}) + \frac{\zeta}{12} (Q_i + Q_{i+1}) = A_{ii+1} \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

Introduisant les matrices

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 6 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 6 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 6 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et les vecteurs

$$\mathbf{v} = [P_1, \dots, P_n]^T, \quad \mathbf{w} = [Q_1, \dots, Q_n]^T$$

$$\mathbf{y} = [A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}]^T, \quad \mathbf{z} = [A_{12}, A_{23}, \dots, A_{n-1n}, 0]^T,$$

le système (II.27) peut devenir

$$\begin{cases} M\mathbf{v} + \frac{\zeta^2}{6}N\mathbf{w} = 2\zeta\mathbf{y} \\ R\mathbf{v} - \frac{\zeta^2}{6}R\mathbf{w} = -2\zeta\mathbf{z}. \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Une condition nécessaire pour que ce système admette des solutions  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  est l'existence d'un vecteur  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_n]^T$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$R\mathbf{s} = \mathbf{z}.$$

Introduisons la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  inversible  $D$  obtenue par la suppression de la dernière colonne et de la dernière ligne de  $R$ , les vecteurs  $\mathbf{s}_1 = [s_1, \dots, s_{n-1}]^T$  et  $e_{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

La condition d'existence de solution devient

$$R\mathbf{s} = \begin{bmatrix} D & \mathbf{e}_{n-1} \\ 0_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\mathbf{s}_1 + s_n e_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{z}$$

Il se trouve qu'on peut toujours déterminer une solution particulière  $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_n]^T$  de  $R\mathbf{s} = \mathbf{z}$ . Le noyau de  $R$  étant

$$\text{Ker}R = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

nous avons pour tout vecteur  $\mathbf{r}' \in \text{Ker}R$ ,

$$M\mathbf{r}' = 0_n.$$

Le système est donc résoluble.

Nous avons donc identifier les fonctions  $p$  et  $q$  par leurs approximations dans  $V_\zeta$ .

### Remarque II.3.2

*La précision d'informations à avoir sur les fonctions  $p$  et  $q$  est liée au nombre de morceaux dont le matériau est découpé. La matrice  $A$  déterminée contient  $2n + 3$  coefficients ; On connaît la valeur de  $q$  à l'origine, donc il faut trouver  $2n + 3$  valeurs pour identifier les fonctions  $p$  et  $q$ .*

## II.4 Application à un cas simple

Considérons l'équation différentiel du second ordre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( (1+x) \frac{du}{dx} \right) &= f(x), \quad x \in [0, 1] \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned} \tag{II.29}$$

Pour résoudre ce problème numériquement, nous découpons la longueur unité en 7 morceaux égaux :  $\zeta = 1/7$ . Ce découpage donne 8 nœuds et les deux extrmités ne sont pas exploitées. Dans ce choix, la matrice  $A$  définie par l'expression (II.18) pour  $q = 0$  est une matrice  $6 \times 6$  symétrique et tridiagonale :

$$A_{ij} = \int_0^L p(x) \phi'_i(x) \phi'_j dx$$

Le problème inverse suppose les fonctions  $u$  et  $f$  connue et la fonction  $p$  non connue. Pour chercher la fonction  $p$ , nous avons considéré différentes fonctions  $f$ , et à chaque fonction nous déterminons la solution  $u$  du problème directe. L'intervalle  $[0, 1]$  est coupé en sept morceaux égaux. Pour que la matrice  $H$  donnée par l'expression (II.23) soit inversible, il faut au moins sept couples de fonctions  $(u, f)$ .

Par exemple pour  $f(x) = -x$ , la solution calculée algébriquement est

$$u(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln(1+x)}{4\ln 2}.$$

La recherche des valeurs discrètes de la fonction  $p$  par l'algorithme nous a conduit aux mêmes résultats. Les résultats obtenus par l'algorithme de projection sont donnés dans le tableau (II.1).

$x = i\zeta$	i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7
P identifiée	1	8/7	9/7	10/7	11/7	12/7	13/7	2
	1	1,1428	1,2857	1,4285	1,5174	1,7142	1,8571	2
p algébrique	?	1,142	1,282	1,429	1,57	1,718	1,854	?
Ecart		0,0008	0,0037	0,004	0,0014	0,0037	0,0031	

TAB. II.1 – Les valeurs réelles de la fonction  $p$  en différents points et les résultats obtenus par l'algorithme de projection

## II.5 Conclusion

Ce chapitre présente la résolution d'un problème inverse vu comme un problème d'identification de coefficients d'une équation différentielle linéaire du second ordre. La méthode des moindres carrés classique, i.e. la minimisation de fonction coût qui est la somme de la différence des carrés d'une solution analytique et d'une solution obtenue par mesure n'est pas utilisée. La matrice  $A$  est obtenue par l'algorithme de projection de matrice tridiagonale développé au chapitre I.

La difficulté à mettre en place un dispositif répondant à ce genre de problème est l'accès aux valeurs des excitations aux mêmes points que les réponses. L'exemple de la poutre pour l'accès au moment d'inertie et au module d'Young n'a pas assez d'intérêt en dimension 1. Nous envisageons développer cette approche en dimension 2, avec l'espoir de pouvoir mesurer les valeurs discrètes des excitations et leurs réponses expérimentalement.



# Chapitre III

## Identification des Caractéristiques d'Inertie d'un Solide Rigide

### Sommaire

---

<b>III.1 Introduction</b> . . . . .	<b>51</b>
<b>III.2 Position d'un solide dans l'espace</b> . . . . .	<b>53</b>
III.2.1 Vecteur vitesse et vecteur accélération . . . . .	55
III.2.2 Principes fondamentaux de la dynamique . . . . .	55
III.2.3 Calcul de la résultante dynamique $\chi$ . . . . .	57
III.2.4 Calcul du moment dynamique $\delta(A)$ . . . . .	57
<b>III.3 <math>\delta(A)</math> et <math>\chi</math> dans une matrice antisymétrique <math>4 \times 4</math></b> . . . . .	<b>58</b>
<b>III.4 Formulation matricielle des équations</b> . . . . .	<b>61</b>
III.4.1 Travail virtuel des efforts . . . . .	61
III.4.2 Travail virtuel des accélérations . . . . .	62
III.4.3 Travail virtuel des liaisons "rotation" . . . . .	63
III.4.4 Equation matricielle du mouvement du solide rigide . . . . .	63
<b>III.5 Identification de la matrice <math>\mathcal{J}</math></b> . . . . .	<b>66</b>
<b>III.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>70</b>

---

### III.1 Introduction

Le travail développé dans ce chapitre a été effectué en collaboration avec l'équipe *Geste Sportif* du LMS. Il concerne l'identification des caractéristiques d'inertie du

corps humain.

L'identification des caractéristiques d'inertie d'un athlète peut contribuer à l'amélioration de ses performances, or ces caractéristiques sont généralement mal connues. Auparavant, les caractéristiques d'inertie des segments du corps humain étaient obtenues par régression linéaire à partir des paramètres inertiels d'une certaine population.

On décompose l'athlète en un système composé de 16 troncs de cônes rigides reliés entre eux par des articulations. L'identification des caractéristiques d'inertie de l'athlète nécessite donc l'identification de 160 paramètres, un seul solide rigide étant caractérisé par 10 paramètres.

Afin d'identifier les caractéristiques d'inertie d'un système composé de plusieurs solides rigides, nous commençons par identifier celles d'un seul solide rigide. Ensuite nous identifierons celles d'un système de deux solides rigides en tenant compte des liaisons.

De nombreux auteurs ont identifié les dix caractéristiques d'inertie d'un solide rigide en les regroupant dans un même vecteur colonne  $10 \times 1$ . Ils utilisent ensuite pour déterminer ce vecteur  $10 \times 1$ , le formalisme récursif de Newton-Euler.

Nous avons cherché à améliorer les techniques existantes en commençant par formuler matriciellement les équations du mouvement. Dans cette formulation, les 10 caractéristiques d'inertie du solide sont regroupées dans une matrice symétrique  $4 \times 4$  où la matrice du tenseur d'inertie de Poinsot occupe un bloc  $3 \times 3$ . Cette matrice fut définie antérieurement par Fayet [42] qui la nomma " la matrice du tenseur d'inertie global " ; pour notre part, nous la nommerons "matrice de Poinsot généralisée". Une première formulation matricielle des équations du mouvement fut introduite en 1996 par Legnani et al.[72]. Dans leur formulation, la matrice de Poinsot généralisée n'est pas constante, elle varie suivant la position du solide. Nous faisons le choix d'exprimer la matrice de Poinsot dans le repère lié au solide, ainsi ses composantes sont constantes et nous pouvons appliquer plus facilement notre méthode d'identification. Le mouvement est dans  $\mathbb{R}^4$  en ajoutant une quatrième coordonnée fixe aux trois coordonnées d'un point du solide.

Les équations du mouvement sont alors formulées dans l'espace des matrices  $4 \times 4$  antisymétriques.

Pour identifier la matrice  $4 \times 4$  généralisée de Poinsot, nous avons utilisé l'algorithme de projection exposé au chapitre I. La méthode a été validée à partir de plusieurs mouvements simulés. Les simulations du mouvement du solide rigide ont été bruitées

afin de tester la performance de notre procédure d'identification.

### III.2 Position d'un solide dans l'espace

Considérons un système mécanique composé d'un seul solide rigide. Il est repéré dans un référentiel  $\mathcal{R}_0(O ; \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ . Le vecteur unitaire  $\mathbf{k}_0$  est choisi vertical ascendant et la base  $\mathcal{B}_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  est choisie orthonormée directe. Nous désignons par  $S_0$  le solide en sa position initiale et par  $S$  le solide en sa position à l'instant  $t$ . Soit  $M_0$  un point générique du solide  $S_0$ . À tout instant  $t$ , ce point occupe une position  $M$  dans  $S$ . Soit  $A$  un point particulier de  $S$  qui se trouve en  $A_0$  à l'instant initial. Un second référentiel d'origine  $A$ ,  $\mathcal{R}(A ; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , de base orthonormée directe  $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , est lié au solide  $S$  lors de son mouvement. Les référentiels considérés sont schématisés sur la figure III.1. Les seules transformations pouvant agir sur le solide

FIG. III.1 – Solide rigide en mouvement de rotation et de translation

sans le déformer sont les rotations et les translations. Pour passer de sa position initiale  $S_0$  à la position courante  $S$ , le solide subit une rotation composée avec une translation. A l'instant  $t$ , nous noterons

$$\vec{T}(t) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \vec{OA} \quad (\text{III.1})$$

le vecteur translation et

$$R(t) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

la matrice rotation.

Les composantes du vecteur  $\vec{T}$  et de la matrice rotation  $R$  sont exprimées dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

Le vecteur  $\vec{A_0M_0}$  subit la rotation du solide et se transforme en :

$$\vec{AM} = R(t)\vec{A_0M_0}. \quad (\text{III.3})$$

La relation qui définit à tout instant la position d'un point quelconque  $M$  du solide à partir de sa position initiale  $M_0$  est donc :

$$\vec{OM}(t) = \vec{T}(t) + R(t)\vec{A_0M_0}. \quad (\text{III.4})$$



Dans la suite, nous écrirons simplement :

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{T} + R\overrightarrow{A_0M_0} \quad (\text{III.5})$$

en omettant la variable  $t$ .

Une matrice rotation  $R$  est une matrice qui possède les deux propriétés fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad R^T R &= R R^T = I_3 \\ (ii) \quad \det R &= 1. \end{aligned}$$

$I_3$ ,  $R^T$  et  $\det$  désignant respectivement la matrice unité de  $\mathcal{M}_3$ , la matrice transposée de  $R$  et le déterminant.

De la propriété (i) découle la proposition suivante.

**Proposition III.2.1**

*L'inverse d'une matrice étant unique, la matrice transposée d'une matrice rotation est son inverse :*

$$R^T = R^{-1}.$$

Les trois colonnes de la matrice rotation  $R$  sont les composantes des vecteurs unitaires  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  de la base  $\mathcal{B}$  exprimées dans la base  $\mathcal{B}_0$  [35] :

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_0 \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_0 \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}_0 \rangle & \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_0 \rangle & \langle \mathbf{z}, \mathbf{z}_0 \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Les produits scalaires apparaissant dans les composantes de la matrice rotation s'interprètent comme les cosinus directeurs des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$  par rapport à la base  $\mathcal{B}_0$ . La matrice rotation, appelée dans ces circonstances matrice des cosinus directeurs, permet de calculer les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AM}$  à partir des composantes du vecteur  $\overrightarrow{A_0M_0}$ .

La matrice rotation  $R$  fait passer de la base orthonormée directe du référentiel fixe  $\mathcal{B}_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$  à la base orthonormée directe  $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  du référentiel attaché au solide  $S$ .

Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ ; nous noterons  $j(\mathbf{u})$ , l'application linéaire antisymétrique, qui à tout vecteur  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^3$ , associe le produit vectoriel

$$j(\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Si dans une base orthonormée,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  désignent les trois composantes du vecteur  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  les trois composantes du vecteur  $\mathbf{v}$ , alors :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_3 - \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}, \quad \text{i.e. } j(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{u}_3 & \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 & 0 & -\mathbf{u}_1 \\ -\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.7})$$

### III.2.1 Vecteur vitesse et vecteur accélération

Dérivons l'expression (III.5) de la position d'un point  $M$  par rapport au temps ; nous obtenons sa vitesse :

$$\mathbf{V}(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \dot{\mathbf{T}} + \dot{R} \overrightarrow{A_0 M_0}. \quad (\text{III.8})$$

En dérivant une seconde fois par rapport au temps, nous obtenons son accélération :

$$\mathbf{a}(M) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\mathbf{T}} + \ddot{R} \overrightarrow{A_0 M_0}. \quad (\text{III.9})$$

### III.2.2 Principes fondamentaux de la dynamique

#### III.2.2.1 Torseur dynamique

La résultante dynamique  $\chi$  et le moment dynamique  $\delta(A)$  en  $A$  sont définis par les intégrations par rapport à la masse de l'accélération et du moment en  $A$  de l'accélération :

$$\chi = \int_S \mathbf{a}(M) dm, \quad \delta(A) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{a}(M) dm.$$

Le moment dynamique peut être aussi regardé comme une matrice  $3 \times 3$  antisymétriques. Ceci est légitime puisqu'une matrice  $3 \times 3$  antisymétrique a 3 composantes indépendantes comme un vecteur.

En effet si  $\mathbf{y}, \mathbf{v}$ , et  $\mathbf{w}$  sont trois vecteurs, nous pouvons remarquer que la formule du double-produit vectoriel

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{w} = (\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{y} = \mathbf{y} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$$

implique

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v} = j(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}), \quad (\text{III.10})$$

où  $j$  est l'application définie par la relation (III.7).

Le vecteur  $\delta(A) = \int_S \overrightarrow{A_0M_0} \wedge \mathbf{a}(M) dm$  peut donc être remplacé par la matrice antisymétrique

$$\begin{aligned} \int_S \left[ \mathbf{a}(M) \otimes \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} \otimes \mathbf{a}(M) \right] dm &= \int_S j \left( \overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{a}(M) \right) dm \\ &= j \left( \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{a}(M) \right) \\ &= j(\delta(A)) \end{aligned}$$

La résultante dynamique  $\chi$  et le moment dynamique  $\delta(A)$  en  $A$  sont donc tels que :

$$\begin{cases} \chi = \int_S \mathbf{a}(M) dm \\ j(\delta(A)) = \int_S \left[ \mathbf{a}(M) \otimes \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} \otimes \mathbf{a}(M) \right] dm \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

### III.2.2.2 Torseur des efforts extérieurs

Notons  $\mathbf{F}(M)$  la densité massique des forces extérieures agissant sur le solide  $S$  autres que la pesanteur et  $-g\mathbf{z}_0$  la densité massique de la pesanteur ( $g$  désigne l'intensité de la pesanteur); alors la résultante des forces extérieures et le moment dynamique  $\mathcal{M}_{ex}(A)$  résultant en  $A$  sont tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ex} = \int_S (\mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0) dm \\ j(\mathcal{M}_{ex}(A)) = \int_S \left[ (\mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0) \otimes \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} \otimes (\mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0) \right] dm \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

### III.2.2.3 Principes fondamentaux de la dynamique

Les principes fondamentaux de la dynamique expriment l'égalité entre le torseur dynamique et le torseur des efforts extérieurs :

$$\begin{cases} \chi = \mathbf{F}_{ex} \\ \delta(A) = \mathcal{M}_{ex}(A). \end{cases}$$

Nous allons préférer la forme équivalente

$$\begin{cases} \chi = \mathbf{F}_{ex} \\ j(\delta(A)) = j(\mathcal{M}_{ex}(A)). \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

### III.2.3 Calcul de la résultante dynamique $\chi$

Notons  $m$ , la masse du solide et,  $G$ , le centre de masse du solide. En portant l'expression (III.9) de l'accélération  $\mathbf{a}(M)$  dans l'expression (III.11) de la résultante dynamique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\chi &= \int_{S_0} \left[ \ddot{\mathbf{T}} + \ddot{R} \overrightarrow{A_0M_0} \right] dm \\ &= m \ddot{\mathbf{T}} + \ddot{R} \int_{S_0} \left( \overrightarrow{A_0M_0} \right) dm.\end{aligned}\quad (\text{III.14})$$

Par définition du centre de masse

$$\int_{S_0} \left( \overrightarrow{A_0M_0} \right) dm = m \overrightarrow{A_0G_0}, \quad (\text{III.15})$$

ainsi

$$\chi = m \ddot{\mathbf{T}} + \ddot{R} m \overrightarrow{A_0G_0} \quad (\text{III.16})$$

### III.2.4 Calcul du moment dynamique $\delta(A)$

En portant l'expression (III.9) de l'accélération dans l'expression (III.11) du moment dynamique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}j(\delta(A)) &= \int_{S_0} \left[ \left( \ddot{\mathbf{T}} + \ddot{R} \overrightarrow{A_0M_0} \right) \otimes \left( R \overrightarrow{A_0M_0} \right) \right] dm - \\ &\quad \int_{S_0} \left[ \left( R \overrightarrow{A_0M_0} \right) \otimes \left( \ddot{\mathbf{T}} + \ddot{R} \overrightarrow{A_0M_0} \right) \right] dm\end{aligned}\quad (\text{III.17})$$

En utilisant de nouveau l'équation (III.15) et la propriété du produit tensoriel :  $\ddot{\mathbf{T}} \otimes \left( R \overrightarrow{A_0M_0} \right) = \left( \ddot{\mathbf{T}} \otimes \overrightarrow{A_0M_0} \right) R^T$  (ou  $R^T$  est la transposée de  $R$ ), nous pouvons réécrire l'équation (III.17) sous la forme :

$$\begin{aligned}j(\delta(A)) &= \left( \ddot{\mathbf{T}} \otimes m \overrightarrow{A_0G_0} \right) R^T - R \left( m \overrightarrow{A_0G_0} \otimes \ddot{\mathbf{T}} \right) + \ddot{R} \left[ \int_{S_0} \left( \overrightarrow{A_0M_0} \otimes \overrightarrow{A_0M_0} \right) dm \right] R^T \\ &\quad - R \left[ \int_{S_0} \left( \overrightarrow{A_0M_0} \otimes \overrightarrow{A_0M_0} \right) dm \right] \ddot{R}^T,\end{aligned}\quad (\text{III.18})$$

Nous reconnaissons dans l'intégrale  $\int_{S_0} \left( \overrightarrow{A_0M_0} \otimes \overrightarrow{A_0M_0} \right) dm$  le tenseur d'inertie de Poinot en  $A_0$  du solide  $S$  dans sa position initiale ; nous le notons  $\mathcal{J}^0$ , ainsi :

$$j(\delta(A)) = \left( \ddot{\mathbf{T}} \otimes m \overrightarrow{A_0G_0} \right) R^T - R \left( m \overrightarrow{A_0G_0} \otimes \ddot{\mathbf{T}} \right) + \ddot{R} \mathcal{J}^0 R^T - R \mathcal{J}^0 \ddot{R}^T. \quad (\text{III.19})$$

**Remarque III.2.1**

La résultante dynamique  $\chi$  calculée par la formule (III.16) est une fonction linéaire des caractéristiques d'inertie  $m$  et  $\overrightarrow{mA_0G_0}$  du solide. De même, le moment dynamique  $\delta(A)$  calculé par la formule (III.19) est une fonction linéaire des caractéristiques d'inertie  $\overrightarrow{mA_0G_0}$  et  $\mathcal{J}^0$ .

**Remarque III.2.2**

(i) Le tenseur d'inertie de Poinsot défini par

$$\mathcal{J}^0 = \int_{S_0} \overrightarrow{A_0M_0} \otimes \overrightarrow{A_0M_0} dm$$

est différent du tenseur d'inertie classique

$$\mathcal{I} = \int_S -[j(\overrightarrow{0M})]^2 dm.$$

On montre que  $\mathcal{J}^0$  est relié à  $\mathcal{I}$  par [35]

$$\mathcal{J}^0 = \frac{\text{tr}\mathcal{I}}{2} I - \mathcal{I}. \quad (\text{III.20})$$

(i) La positivité de  $\mathcal{J}^0$  équivaut à celle de  $\mathcal{I}$ .  $\mathcal{J}^0$  et  $\mathcal{I}$  sont positifs et même défini-positifs.

### III.3 Regroupement des composantes du moment dynamique et de la résultante dynamique dans une matrice $4 \times 4$ antisymétrique

Les principes fondamentaux de la dynamique se résument en :

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{T}} + \ddot{R}(\overrightarrow{mA_0G_0}) &= \mathbf{F}_{ex} \\ \left( \ddot{\mathbf{T}} \otimes \overrightarrow{mA_0G_0} \right) R^T - R(\overrightarrow{mA_0G_0} \otimes \ddot{\mathbf{T}}) + \\ \ddot{R}\mathcal{J}^0 R^T - R\mathcal{J}^0 \ddot{R}^T &= j(\mathcal{M}_{ex}(A)) \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Si  $\mathcal{M}(A)$  est le moment des forces extérieures autre que la pesanteur, alors

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ex} = \mathbf{F} - m\mathbf{g}\mathbf{z}_0 \\ j(\mathcal{M}_{ex}(A)) = j(\mathcal{M}(A)) - \mathbf{g}\mathbf{z}_0 \otimes m\overrightarrow{AG} + m\overrightarrow{AG} \otimes \mathbf{g}\mathbf{z}_0 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

Le mouvement du solide  $S$  est régi par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \left( \ddot{\mathbf{T}} + g\mathbf{z}_0 \right) + \ddot{R} \left( m\overrightarrow{A_0G_0} \right) = \mathbf{F} \\ \left[ \left( \ddot{\mathbf{T}} + g\mathbf{z}_0 \right) \otimes m\overrightarrow{A_0G_0} \right] R^T - R \left[ m\overrightarrow{A_0G_0} \otimes \left( \ddot{\mathbf{T}} + g\mathbf{z}_0 \right) \right] + \ddot{R}\mathcal{J}^0 R^T - R\mathcal{J}^0 \ddot{R}^T \\ = j(\mathcal{M}(A)) \end{array} \right. \quad (\text{III.23})$$

Nous pouvons remarquer que les équations qui régissent le mouvement de  $S$  peuvent s'exprimer sous la forme d'une égalité entre matrices  $4 \times 4$  antisymétriques :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} \ddot{R} & \left( \ddot{\mathbf{T}} + g\mathbf{z}_0 \right) \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \mathcal{J}^0 & m\overrightarrow{A_0G_0} \\ m\overrightarrow{A_0G_0}^T & m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] - \\ & \left[ \begin{array}{cc} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \mathcal{J}^0 & m\overrightarrow{A_0G_0} \\ m\overrightarrow{A_0G_0}^T & m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \ddot{R}^T & \mathbf{0} \\ \left( \ddot{\mathbf{T}} + g\mathbf{z}_0 \right)^T & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} j(\mathcal{M}(A)) & \mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

où  $\mathbf{0}$  représente le vecteur nul.

Dénotons par  $\Lambda$  et  $\Theta$  les matrices  $4 \times 4$

$$\Lambda = \left[ \begin{array}{cc} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \quad \Theta = \left[ \begin{array}{cc} \ddot{R} & \left( \ddot{\mathbf{T}} + g\mathbf{z}_0 \right) \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right]$$

Ces deux matrices contiennent les données cinématiques du solide. Dans un cadre expérimental, elles s'obtiennent à l'aide d'un ensemble de caméras enregistrant le mouvement du solide sur lequel sont positionnés des marqueurs rétro-réfléchissants. Les composantes de la matrice

$$\Upsilon(A) = \left[ \begin{array}{cc} j(\mathcal{M}(A)) & \mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{array} \right]$$

sont obtenues des efforts autres que la pesanteur agissant sur le solide au point  $A$ .

Des matrices  $4 \times 4$   $\Lambda$  et  $\Theta$  contenant les données cinématiques du solide et de la matrice antisymétrique  $\Upsilon(A)$  regroupant la résultante et le moment résultant des efforts extérieurs, nous formulons matriciellement l'équation régissant à tout instant  $t$  le mouvement du solide :

$$\Theta \mathcal{J} \Lambda^T - \Lambda \mathcal{J} \Theta^T = \Upsilon. \quad (\text{III.25})$$

Les dix caractéristiques d'inertie du solide  $S$  sont contenues dans la matrice

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}^0 & m\overrightarrow{A_0G_0} \\ m\overrightarrow{A_0G_0}^T & m \end{bmatrix}.$$

Elle correspond au tenseur d'inertie global défini par Fayet [42] pour un solide rigide isolé.

Cette formulation des équations du mouvement écrite sous forme de produit et somme de matrices  $4 \times 4$  est linéaire en  $\mathcal{J}$ . On espère donc que la matrice  $\mathcal{J}$  sera facilement identifiable.

### Remarque III.3.1

(i) Les six équations du mouvement sont exprimées en termes d'égalité entre matrice  $4 \times 4$  antisymétrique. Une matrice  $4 \times 4$  antisymétrique a six composantes indépendantes, ceci montre que nous avons traduit exactement les équations du mouvement.

(i) La matrice  $\Upsilon$  rassemble des forces et des moments, ses coefficients ne sont pas homogènes entre eux. De même la matrice  $\mathcal{J}$  rassemble des moments d'inertie, des masses et des vecteurs produits d'une masse par une longueur, ses coefficients ne sont pas homogènes non plus. Soit  $l$  une longueur de l'ordre de la dimension du solide. Les matrices  $\Upsilon$ ,  $\mathcal{J}$  et  $\Theta$  peuvent être rendues homogènes respectivement à des moments, à des moments d'inertie et des inverses de temps au carré :

$$\begin{aligned} \Upsilon(A) &= \begin{bmatrix} j(\mathcal{M}(A)) & l\mathbf{F} \\ -l\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{J} &= \begin{bmatrix} \mathcal{J}^0 & ml\overrightarrow{A_0G_0} \\ ml\overrightarrow{A_0G_0}^T & ml^2 \end{bmatrix} \\ \Theta &= \begin{bmatrix} \ddot{R} & (\ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{g}\mathbf{z}_0) / l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice  $\Lambda$  était déjà sans dimension. La formulation (III.25) reste inchangée.

Procédons à la formulation directe de l'équation (III.25) en se mettant dans un repère de  $\mathbb{R}^4$  où la quatrième composante de la position du solide est toujours égale à  $l$ .

### III.4 Génération des équations du mouvement par le principe des travaux virtuels

Soit  $l$  une longueur de l'ordre de la dimension du solide.

Introduisons le vecteur position généralisé  $\begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix}$  de  $A$  et  $M$ .

La formule (III.3) peut se transcrire :

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix}. \quad (\text{III.26})$$

Nous nommerons la matrice  $4 \times 4$   $\begin{bmatrix} R & 0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ , matrice rotation généralisée.

De même, la formule (III.5) peut se transcrire :

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{OA} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix}. \quad (\text{III.27})$$

Les vecteurs vitesses généralisés et accélérations généralisés

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}(M) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{\mathbf{T}}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(M) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{R} & \ddot{\mathbf{T}}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

dépendent donc linéairement du quadrivecteur  $\begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix}$ .

#### III.4.1 Travail virtuel des efforts

Soient  $\mathbf{F}(M)$  la densité des forces extérieures autres que la pesanteur et  $g$  l'intensité de la pesanteur. Le travail virtuel des efforts extérieurs qui agissent sur le solide  $S$  :  $\tau = \int_S (F(M) - gz_0) \cdot \delta M$  peut se transcrire :

$$\tau = \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) - gz_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta \left( \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} \\ l \end{bmatrix} \right) dm$$



Il vaut donc grâce à l'expression (III.27) :

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta R & \delta \mathbf{T}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} dm \\
&= \text{tr} \left\{ \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} dm \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R^T & \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{T}^T/l & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\langle \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} dm \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta R & \delta \mathbf{T}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

### III.4.2 Travail virtuel des accélérations

Le travail virtuel des accélérations peut aussi se transcrire :

$$\begin{aligned}
\tau' &= \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(M)} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta \left( \begin{bmatrix} \overrightarrow{OM} \\ l \end{bmatrix} \right) dm \\
&= \int_{S_0} \begin{bmatrix} \ddot{R} & \ddot{\mathbf{T}}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta R & \delta \mathbf{T}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} dm \\
&= \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \ddot{R} & \ddot{\mathbf{T}}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \int_{S_0} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} dm \begin{bmatrix} \delta R^T & \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{T}^T/l & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Nous allons calculer la somme du produit tensoriel du vecteur position généralisé par lui-même :

$$\begin{aligned}
\int_{S_0} \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} dm &= \begin{bmatrix} \int_{S_0} \overrightarrow{A_0M_0} \otimes \overrightarrow{A_0M_0} dm & \int_S l \overrightarrow{A_0M_0} dm \\ \left( \int_{S_0} l \overrightarrow{A_0M_0} dm \right)^T & \int_{S_0} l^2 dm \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{J}^0 & ml \overrightarrow{A_0G_0} \\ \left( ml \overrightarrow{A_0G_0} \right)^T & ml^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On reconnaît le tenseur de Poinsot généralisé  $\mathcal{J}$ .

L'expression du travail virtuel des accélérations devient :

$$\tau' = \left\langle \begin{bmatrix} \ddot{R} & \ddot{\mathbf{T}}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{J}, \begin{bmatrix} \delta R & \delta \mathbf{T}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

### III.4.3 Travail virtuel des liaisons "rotation"

La matrice rotation généralisée  $\begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$  vérifie la relation

$$\begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = I_4.$$

C'est donc une matrice rotation de  $\mathbb{R}^4$ .

La variation de cette identité conduit à

$$\begin{bmatrix} \delta R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = 0_4$$

Il existe donc une matrice  $3 \times 3$  symétrique  $\mathcal{L}$  de multiplicateur de Lagrange telle que la différence entre le travail virtuel des efforts extérieurs et le travail virtuel des quantités d'accélération soit égale à

$$\left\langle \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{ou encore} \quad \left\langle \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta R & \delta \mathbf{T}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Nous nommerons le travail virtuel des liaisons "rotation" :

$$\tau'' = \left\langle \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta R & \delta \mathbf{T}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

### III.4.4 Equation matricielle du mouvement du solide rigide

*Le Principe des travaux virtuels impose que : " Le travail virtuel des quantités d'accélération est égal au travail virtuel des efforts extérieurs pour tout déplacement virtuel rigidifiant. Le caractère rigidifiant du déplacement virtuel peut se résumer par  $\tau'' = 0$ . D'après la technique des multiplicateurs de Lagrange,*

$$\tau' = \tau + \tau''$$

pour tout déplacement virtuel c'est-à-dire pour toute variation  $\delta R$  de la rotation et toute variation  $\delta \mathbf{T}$  de la translation. Nous en déduisons

$$\begin{bmatrix} \ddot{R} & \ddot{\mathbf{T}}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{J} = \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} dm \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque l'inverse de la rotation généralisée est égale à sa transposée, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \ddot{R} & \ddot{\mathbf{T}}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{J} \begin{bmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} dm + \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous allons maintenant éliminer la matrice  $\mathcal{L}$  de multiplicateurs de Lagrange en utilisant la symétrie

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix},$$

il vient que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{R} & \ddot{\mathbf{T}}/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathcal{J} \begin{bmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathcal{J} \begin{bmatrix} \ddot{R}^T & \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{T}}^T/l & 0 \end{bmatrix} = \\ \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} dm - \int_S \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) - g\mathbf{z}_0 \\ 0 \end{bmatrix} dm. \end{aligned}$$

Retranchons  $g\mathbf{z}_0$  aux forces extérieurs revient au même que de rajouter  $g\mathbf{z}_0$  aux accélérations selon l'expérience de pensée d'Einstein dite de l'ascenseur en chute libre.

Si on ajoute  $\begin{bmatrix} g\mathbf{z}_0/l \\ 0 \end{bmatrix}$  à l'accélération généralisée (III.28), on obtient

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(M) + g\mathbf{z}_0/l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{R} & \ddot{\mathbf{T}}/l + g\mathbf{z}_0/l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\int_S \left( \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \overrightarrow{AM} \\ l \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{F}(M) \\ 0 \end{bmatrix} \right) dm$  se développe successivement en

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \int_S \left[ \mathbf{F}(M) \otimes \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} \otimes \mathbf{F}(M) \right] dm & l \int_S \mathbf{F}(M) dm \\ -l \left[ \int_S \mathbf{F}(M) dm \right]^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j \left( \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \mathbf{F}(M) dm \right) & l \int_S \mathbf{F}(M) dm \\ -l \left[ \int_S \mathbf{F}(M) dm \right]^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j(\mathcal{M}(A)) & l \int_S \mathbf{F}(M) dm \\ -l \left[ \int_S \mathbf{F}(M) dm \right]^T & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{III.30}$$

On reconnaît la matrice  $\Upsilon(M)$ .

Finalement

$$\begin{bmatrix} \ddot{R} & (\ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{gz}_0) / l \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J}^0 & ml\overrightarrow{A_0G_0} \\ ml\overrightarrow{A_0G_0}^T & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} - \\ \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J}^0 & ml\overrightarrow{A_0G_0} \\ ml\overrightarrow{A_0G_0}^T & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{R}^T & \mathbf{0} \\ (\ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{gz}_0)^T / l & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j(\mathcal{M}(A)) & l\mathbf{F} \\ -l\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix},$$

et nous retrouvons l'équation du mouvement (III.24).

### Proposition III.4.1

Le tenseur de Poinsot généralisé  $\mathcal{J}$  est une matrice défini-positive

*Preuve.* La forme intégrale du tenseur  $\mathcal{J}$  est :

$$\mathcal{J} = \int_{S_0} \left( \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \overrightarrow{A_0M_0} \\ l \end{bmatrix} \right) dm$$

Soit  $\mathbf{V}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^4$  décomposé sous la forme  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ v \end{bmatrix}$  avec  $\mathbf{U}$  dans  $\mathbb{R}^3$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}$ , alors le produit scalaire

$$\langle \mathbf{V}, \mathcal{J}\mathbf{V} \rangle = \int_{S_0} \left( \langle \overrightarrow{A_0M_0}, \mathbf{U} \rangle + lv \right)^2 dm$$

est positif comme intégrale d'une fonction positive.

De plus  $\langle \mathbf{V}, \mathcal{J}\mathbf{V} \rangle$  ne peut être nul que si  $\langle \overrightarrow{A_0M_0}, \mathbf{U} \rangle + lv$  est nul pour tout point  $M_0$  de  $S_0$ . En choisissant  $A_0 = M_0$ , on en déduit  $v = 0$ .

Ensuite puisque le solide  $S$  est tridimensionnel, on peut choisir trois points  $M_0$ ,  $M'_0$  et  $M''_0$  de façon que les trois vecteurs  $\overrightarrow{A_0M_0}$ ,  $\overrightarrow{A_0M'_0}$  et  $\overrightarrow{A_0M''_0}$  soient indépendants. La nullité des trois produits scalaires  $\langle \overrightarrow{A_0M_0}, \mathbf{U} \rangle$ ,  $\langle \overrightarrow{A_0M'_0}, \mathbf{U} \rangle$  et  $\langle \overrightarrow{A_0M''_0}, \mathbf{U} \rangle$  implique alors la nullité du vecteur  $\mathbf{U}$ .

Ainsi  $\langle \mathbf{V}, \mathcal{J}\mathbf{V} \rangle$  ne peut être nul que si le vecteur  $\mathbf{V}$  est nul.  $\square$

### Remarque III.4.1

La positivité de la matrice  $\mathcal{J}$  généralise la positivité du tenseur d'inertie de Poinsot  $\mathcal{J}^0$ .

### III.5 Identification de la matrice $\mathcal{J}$

Considérons le problème :

À partir des matrices  $4 \times 4$   $\Lambda$  et  $\Theta$  obtenues par l'enregistrement du mouvement d'un solide à différents instants, et de la matrice antisymétrique  $\Upsilon$  composée des forces et moments externes, trouvons la matrice  $4 \times 4$  symétrique et défini-positive  $\mathcal{J}$  telle que :

$$\Theta \mathcal{J} \Lambda^T - \Lambda \mathcal{J} \Theta^T = \Upsilon. \quad (\text{III.31})$$

L'algorithme de projection développé dans le chapitre premier est utilisé pour identifier la matrice  $\mathcal{J}$ .

En effet, on construit une base  $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, \dots, 10\}$  de matrices  $4 \times 4$  symétriques. La matrice  $\mathcal{J}$  se décompose sur cette base

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{10} h_i S_i$$

où les  $h_i$  représentent les dix composantes indépendantes de la matrice  $\mathcal{J}$ .

L'expression (III.25) est projetée sur la base des matrices  $4 \times 4$  symétriques et la décomposition de  $H$  est incorporée dans la projection :

$$\sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{10} h_i \text{tr} [S_j \Theta S_i \Lambda^T - \Lambda S_i \Theta^T] = \sum_{j=1}^{10} \text{tr} [S_j \Upsilon]. \quad (\text{III.32})$$

La matrice de composantes  $[S_j \Theta S_i \Lambda^T - \Lambda S_i \Theta^T]$  est défini-positive.

Différents types de mouvements ont été simulés à l'aide du logiciel Solid Dynamics. Les simulations représentaient des cas simples : un parallélépipède de masse  $m = 0,8 \text{ kg}$  et de côtés  $0,4m$ ,  $0,3m$  et  $0,5m$  est soumis à une force ponctuelle agissant en  $f$  en  $A$  (voir figure III.2). Les composantes des forces et des déplacements enregistrés sont données par la figure III.3. Ainsi, à chaque instant et pour chaque simulation, la matrice  $\Upsilon(A)$  est de la forme :  $\begin{bmatrix} [0] & \mathbf{F}_{\text{ex}} \\ -\mathbf{F}_{\text{ex}}^T & 0 \end{bmatrix}$ . Seule la valeur de la force ponctuelle  $f$  en  $A$  varie d'une simulation à l'autre.

FIG. III.2 – Simulation du mouvement d'un parallélépipède

FIG. III.3 – La force ponctuelle  $f$  appliquée en  $A$ , et les composantes de la force  $F$  et du déplacement suivant les trois axes sont enregistrées.

Le logiciel nous permet également d’obtenir la cinématique de tous les points du solide. Nous avons enregistré la position à chaque instant des points  $M_1$ ,  $A$  et  $M_2$ . Ainsi, nous pouvons définir un nouveau repère lié au solide  $\mathcal{R}(A, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  et nous pouvons calculer les matrices  $\Lambda$  et  $\Theta$  à chaque instant.

La matrice de Poinsot généralisée calculée pour le solide est

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0,1067 & 0,060 & 0,1000 & 0,4000 \\ & 0,0600 & 0,0750 & 0,3000 \\ & & 0,1667 & 0,5000 \\ & & & 2,0000 \end{bmatrix}$$

Pour passer de la matrice d’inertie de Poinsot identifié à la matrice d’inertie classique, nous utilisons la relation suivante :  $\mathcal{I}_{(A)} = \text{tr}(\mathcal{J}^0)I - \mathcal{J}^0$ . Ensuite, pour passer de l’inertie calculée en  $A$ ,  $\mathcal{I}_{(A)}$  à l’inertie calculée en  $G$ ,  $\mathcal{I}_{(G)}$ , nous utilisons la relation :  $\mathcal{I}_{(G)} = \mathcal{I}_{(A)} - m \left[ \left( \overrightarrow{AG}^T \overrightarrow{AG} \right) I - \left( \overrightarrow{AG} \overrightarrow{AG}^T \right) \right]$ . Ainsi, après ces calculs effectués, les caractéristiques attendues du parallélépipède sont les suivantes :

masse	0,8 kg
position du centre de masse	$\overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,15 \\ 0,25 \end{bmatrix} m$
matrice d’inertie en $G$	$\mathcal{I}_{(G)} = \begin{bmatrix} 0,02267 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02733 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01667 \end{bmatrix} m^2 kg$

Cinq mouvements sont simulés : pour deux mouvements, les forces extérieures agissant au point  $A$  sont restées relativement faible, et pour trois autres mouvements simulés, les variations des forces extérieures sont importantes.

Les résultats sont dans les tableaux suivants. Les analyses portent sur les résultats obtenus des données bruitées.

Nous avons examiné les rapports  $\|\mathcal{J} - \mathcal{J}_{id}\|/\|\mathcal{J}\|$  afin d’apprécier les résultats,  $\mathcal{J}_{id}$  étant la matrice du tenseur d’inertie identifiée. Pour :

Données non bruitées				Données bruitées			
0,1073	0,0621	0,1029	0,4039	0,1094	0,0780	0,1203	0,4283
	0,0600	0,0772	0,3027		0,0557	0,0859	0,3029
		0,1675	0,5046			0,1356	0,4653
			2,0184				1,9935

TAB. III.1 – Résultats de la simulation avec une force maximale de 91,6N ; la norme de l'écart entre la matrice identifiée et la matrice calculée  $\mathcal{J}$  est 0,0708

Données non bruitées				Données bruitées			
0,1067	0,0607	0,1009	0,4007	0,0997	0,0709	0,1035	0,3886
	0,0598	0,0757	0,3003		0,0505	0,0740	0,2754
		0,1666	0,5007			0,1518	0,4781
			2,0029				1,9390

TAB. III.2 – Résultats de la simulation avec une force maximale de 49.26N ; la norme de l'écart entre la matrice identifiée et la matrice calculée  $\mathcal{J}$  est 0.0782

Données non bruitées				Données bruitées			
0,1066	0,0602	0,1002	0,4000	0,1134	0,0596	0,0537	0,3440
	0,0599	0,0752	0,3000		0,0398	0,0467	0,2589
		0,1666	0,5000			0,1668	0,3450
			2,0000				1,8854

TAB. III.3 – Résultats de la simulation avec une force maximale de 21.15N ; la norme de l'écart entre la matrice identifiée et la matrice calculée  $\mathcal{J}$  est 0.2893

Données non bruitées				Données bruitées			
0,1067	0,0612	0,1016	0,4009	0,1115	0,0724	0,0991	0,3942
	0,0593	0,0761	0,2998		0,0510	0,0773	0,2950
		0,1667	0,5014			0,1333	0,4508
			2,0004				1,9334

TAB. III.4 – Résultats de la simulation avec une force maximale de 57.3N ; la norme de l'écart entre la matrice identifiée et la matrice calculée  $\mathcal{J}$  est 0.1022

Données non bruitées				Données bruitées			
0,1066	0,0601	0,1001	0,4000	0,1126	0,0690	0,0773	0,3689
	0,0600	0,0752	0,3002		0,0455	0,0578	0,2721
		0,1667	0,5001			0,1142	0,4160
			2,0004				1,8621

TAB. III.5 – Résultats de la simulation avec une force maximale de 23.6N ; la norme de l'écart entre la matrice identifiée et la matrice calculée  $\mathcal{J}$  est 0.2018

les 5 mouvements bruités				deux premiers mouvements bruités			
0,1049	0,0727	0,1055	0,3945	0,1034	0,0745	0,1126	0,4041
	0,0516	0,0789	0,2878		0,0539	0,0829	0,2917
		0,1352	0,4527			0,1475	0,4787
			1,9260				1,9696

TAB. III.6 – Résultats obtenus par exploitation simultanée des données bruitées des 5 simulations et par exploitation simultanée des données bruitées des forces de 49,26N et de 91,6N



1.  $F_{\max} = 91,6N$ , l'incertitude relative est : 1,4%
2.  $F_{\max} = 49,26N$ , l'incertitude relative est : 1,6%
3.  $F_{\max} = 21,15N$ , l'incertitude relative est : 6,9%
4.  $F_{\max} = 57,3N$ , l'incertitude relative est : 2,17%
5.  $F_{\max} = 23,6N$ , l'incertitude relative est : 4,7%
6. tous les mouvements bruités, nous identifions la matrice du tenseur d'inertie de Poinsot généralisé avec une incertitude relative de 2,24%, alors qu'elle est identifiée avec 1% en exploitant les données simulées avec des forces  $F_{\max} = 91,6N$  et  $F_{\max} = 49,26N$ .

Les résultats obtenus avec des incertitudes de 6,9% et 4,7% sont dus au fait que les données sont noyées dans les bruits, i.e le rapport données sur bruits est trop faible. Les résultats s'améliorent en effectuant plusieurs mouvements avec des forces produisant des déplacements remarquables.

#### Remarque III.5.1

*Ces résultats sont obtenus en imposant les critères de défini-positivité de la matrice  $\mathcal{J}$  lors de la résolution. Elle se fait par projection sur l'espace des matrices symétriques et défini-positives*

### III.6 Conclusion

Ce chapitre présente la résolution d'un problème inverse vu comme un problème d'identification des caractéristiques d'inertie d'un solide rigide. La démarche conduisant au succès de l'identification repose sur la formulation matricielle et l'utilisation directe de l'équation matricielle pour formuler le problème inverse.

La formulation matricielle des équations du mouvement permet de regrouper les dix caractéristiques d'inertie du solide dans une matrice. Cette manière d'écrire les équations du mouvement facilite l'identification des caractéristiques d'inertie du solide rigide  $S$ . La matrice de Poinsot identifiée est très proche de celle attendue pour des forces extérieures conséquentes. Les solutions sont relativement identiques pour des données non entachées d'erreurs. Les incertitudes relatives obtenues permettent de valider cette approche d'identification des caractéristiques d'inertie d'un solide rigide isolé.

L'application expérimentale de la partie mécanique de ce manuscrit a été réalisée par T. Monnet, dans le cadre de sa thèse de doctorat de notre laboratoire.

## Deuxième partie

# Problèmes Inverses en Thermique



# Chapitre IV

## Introduction aux Problèmes Direct et Inverse en Thermique

### Sommaire

---

<b>IV.1 Introduction</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>IV.2 Problème direct</b> . . . . .	<b>75</b>
IV.2.1 Généralités et définitions . . . . .	75
IV.2.2 Equation de la chaleur dans un matériau . . . . .	78
IV.2.3 Condition initiale et conditions aux limites . . . . .	80
IV.2.4 Résolution du problème direct par la méthode des éléments finis (MEF) . . . . .	84
<b>IV.3 Problème inverse</b> . . . . .	<b>88</b>
IV.3.1 Techniques de mesures de champs de température . . . . .	90
IV.3.2 Méthodes de résolution des problèmes inverses . . . . .	91
<b>IV.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>94</b>

---

### IV.1 Introduction

Avant d'aborder le problème inverse, nous commençons par une étude préliminaire du problème direct. Au cours de cette étude, nous décrirons le type de transfert considéré dans nos travaux et définirons les paramètres thermophysiques caractérisant les matériaux homogènes et isotropes. Nous introduirons quelques notions essentielles relatives à la conduction de la chaleur dans un solide opaque.

Le problème direct traité dans la deuxième partie de ce chapitre est restreint à la recherche du profil de température en tout point de la surface d'une plaque soumise à un flux de chaleur à une de ses surfaces. Il s'avère indispensable de décrire clairement les différents mécanismes responsables du phénomène de conduction de chaleur et de préciser les conditions physiques extérieures de température ou/et de flux de chaleur auxquelles un solide opaque peut être soumis.

Dans un solide opaque la conduction est le seul mode de transfert de chaleur. Elle est modélisée par la loi phénoménologique de Fourier. La conservation de l'énergie calorifique est traduite localement en tout point par une équation aux dérivées partielles (EDP) satisfaite en tout point du solide. Cette équation est dite *équation de la chaleur*. Cette équation fait intervenir les propriétés intrinsèques du matériau comme la conductibilité thermique  $k$  et chaleur volumique  $\rho c$ . Dans le cas unidimensionnel elle se réduit sous certaines conditions à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

où  $a = k/\rho c$  est la diffusivité thermique. A l'équation de la chaleur, il est indispensable d'adjoindre les conditions aux limites déterminant la valeur de la température et/ou la continuité de flux de chaleur aux frontières du matériau. On suppose aussi connue la répartition de température dans le matériau à l'instant initial. La résolution de l'équation de la chaleur munie des conditions aux limites et initiale, revient à exprimer  $T$  en fonction des variables d'espace  $(x_1, x_2, x_3)$  et du temps  $t$  : c'est résoudre le problème direct.

Pour résoudre le système d'équations comprenant l'équation de la chaleur et les équations de conditions aux limites et initiales, il existe plusieurs techniques numériques : les différences finies, les volumes finis, les éléments finis, etc. Nous nous intéressons essentiellement à la technique des éléments finis et nous montrerons comment l'équation aux dérivées partielles de la chaleur se réduit à un système différentiel ordinaire en appliquant la méthode de Galerkin.

Le problème inverse introduit dans la deuxième partie de ce manuscrit sera bien posé et nous donnerons quelques uns des aspects abordés par des recherches scientifiques.

Même si nos travaux sont développés en dimension 1, nous posons les deux problèmes dans le cadre de dimension 3 sur les matériaux homogènes et isotropes.

## IV.2 Problème direct

Nous allons procéder à la description du phénomène thermique et aux différents principes conduisant à l'équation de la conduction. Le principe de conservation d'énergie conduira à la formulation de l'équation de la chaleur. Nous présenterons ensuite quelques modèles de conditions aux limites.

### IV.2.1 Généralités et définitions

Avant d'aborder les généralités, donnons quelques définitions des notions fondamentales [52] :

(i) **Variable d'état** : L'ensemble des propriétés physiques que l'on peut représenter par une série de grandeurs macroscopiques  $\alpha$  (volume, masse, température, déformations...) caractérisent l'état d'un système.

(ii) **Fonction d'état** : Une fonction d'état décrit les propriétés du système et traduit par des égalités ou inégalités des lois de la thermodynamique.

(iii) **Température** : La température  $T$  est une variable d'état permettant de définir la notion d'équilibre thermique. C'est une fonction scalaire des coordonnées des points du domaine et du temps  $t$ .

(iv) **Capacité thermique** : La capacité thermique  $c_\alpha$  d'un corps est une grandeur permettant de quantifier la possibilité qu'a un corps d'absorber ou de restituer de l'énergie par échange thermique au cours d'une transformation pendant laquelle sa température varie.

(v) **Flux thermique et densité de flux thermique** : Considérons un matériau parallélépipédique occupant un domaine  $\Omega$  et chauffé de manière uniforme sur une de ses surfaces  $\Sigma$ . Soit  $Q$  la quantité de chaleur reçue par un élément de surface  $d\Sigma$ . On définit [86] :

FIG. IV.1 – Densité locale du flux thermique

– le flux thermique comme la puissance échangée  $\psi$  par la surface  $\Sigma$  du domaine :

$$\psi = \frac{dQ}{dt}. \quad (\text{IV.1})$$

– la densité de flux thermique comme la puissance échangée par *unité de surface*  $d\Sigma$

$$\Phi = \frac{dQ}{\Sigma dt} = \frac{\psi}{\Sigma}. \quad (\text{IV.2})$$

De manière générale si on considère une surface élémentaire  $d\Sigma$  de normale unitaire extérieure  $\vec{n}$  (voir figure IV.1), le flux élémentaire  $d\Phi$  est considéré comme le flux de vecteur densité  $\vec{\psi}$  à travers  $d\Sigma$  i.e.

$$d\Phi = \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\Sigma. \quad (\text{IV.3})$$

où le point "." symbolyse le produit scalaire.

(vi) **Conductivité thermique** : La conduction de chaleur est un mode d'échange de chaleur qui tend vers une distribution homogène au sein du milieu, de l'énergie cinétique moyenne de diverses particules par diffusion. Cette diffusion se fait des zones où la valeur moyenne de cette énergie, i.e. la température, est élevée vers les zones où elle est la plus faible.

La loi correspondant à ce processus particulier de diffusion de chaleur est telle que la diffusion de chaleur ou la densité de flux  $\vec{\psi}$  (quantité de chaleur qui traverse une unité de surface pendant une unité de temps) en un point est une fonction linéaire du gradient de température en ce point :

$$\vec{\psi} = -\bar{k} \overrightarrow{\text{grad}}(T).$$

Cette loi qui traduit la relation linéaire entre la densité de flux thermique et le gradient de température est dite Loi de Fourier (1882).

L'opérateur  $\bar{k}$ , qui définit la **conductivité thermique** du milieu considéré, est un tenseur du second ordre dépendant de la température  $T$  du point  $M$ . Par exemple, pour une conduction anisotrope comme dans les matériaux fibreux,  $k$  n'a pas la même valeur dans toutes les directions. Pour un milieu isotrope et homogène, la conductivité thermique se caractérise simplement par un scalaire  $k$  dépendant de la température  $T$  :  $\vec{\psi} = -k \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ . De plus, si les écarts de température ne sont pas trop élevés alors on peut considérer la conductivité  $k$  constante pour le milieu.

Par convention [86],  $\vec{\psi}$  est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur, donc dans le sens des températures décroissantes.

Pour un milieu unidimensionnel  $x$ , la loi de Fourier est traduite par :

$$\psi = -k \frac{dT}{dx} \quad \text{où } k \text{ est la conductivité thermique.}$$

(vii) **Energie interne** : L'énergie interne  $E$  d'un système de domaine d'extension  $\Omega$  est reliée à son énergie interne spécifique  $e$  par la relation :

$$E = \int_{\Omega} \rho e d\Omega.$$

(viii) **Entropie** : En thermodynamique, l'entropie est une fonction d'état introduite au milieu du  $XIX^e$  siècle par Rudolf Clausius dans le cadre du second principe, d'après les travaux de Carnot. Clausius a montré que le rapport  $\delta Q/T$ ,  $Q$  étant la quantité de chaleur échangée par un système à la température  $T$  correspond, en thermodynamique classique, à la variation d'une fonction d'état qu'il a appelée entropie,  $S$ .

En thermodynamique statistique, l'entropie mesure le degré de désordre d'un système au niveau microscopique : plus l'entropie du système est élevée, moins ses éléments sont ordonnés, liés entre eux et plus grande est la part de l'énergie inutilisée ou utilisée de façon incohérente.

En général, l'entropie d'un système ne se conserve pas. Elle peut augmenter spontanément lors d'une transformation irréversible. En effet, selon le second principe de la thermodynamique, l'entropie d'un système isolé ne peut pas diminuer, elle augmente ou elle reste constante si la transformation est réversible.

De la même manière que la fonction énergétique, nous pouvons exprimer l'entropie  $S$  en fonction de l'entropie spécifique exprimant une variation d'énergie associée  $s$ . Pour tout système de domaine d'extension  $\Omega$ , l'entropie se définit par :

$$S = \int_{\Omega} \rho s d\Omega \quad (\text{IV.4})$$

où  $\rho$  est la masse volumique du corps du système considéré.

(ix) **État d'équilibre et évolution d'un système thermique** : Un système, initialement en état d'équilibre, soumis à certaines sollicitations extérieures peut se mettre en état de déséquilibre.

La conduction de la chaleur est le cas particulier où la non-uniformité de la température entraîne un transfert d'énergie d'un point à un autre du système sans transport macroscopique de matière.

En "contact" avec des sources de chaleur externes, le champ de température d'un domaine d'extension  $\Omega$  peut évoluer dans le temps et dans l'espace. La variation de la température dépend des valeurs instantanées des sources et des évolutions antérieures.



### IV.2.2 Equation de la chaleur dans un matériau

L'équation de la chaleur est obtenue en appliquant le premier principe de la thermodynamique à un volume fini. Cette équation traduit la conservation d'énergie [58] :

**dans un volume du domaine  $\Omega$ , la variation de l'énergie interne est égale à la somme des travaux et de la chaleur échangée entre le domaine  $\Omega$  et son environnement. En d'autres termes, la variation de l'énergie interne d'un domaine est le bilan des énergies sources internes et des flux entrant et sortant du domaine à travers les parois.**

Sous les hypothèses suivantes :

absence de sources ou puits de chaleur dans le domaine ;

l'énergie cinétique des particules en déformation, les travaux des forces de pression et des contraintes ainsi que les travaux des forces volumiques de pesanteur sont négligeables ;

le bilan s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e d\Omega = \int_{\Sigma} \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (\text{IV.5})$$

où  $\Sigma$  est la surface de frontière du domaine  $\Omega$  (d'élément de surface  $d\Sigma$ ),  $\vec{n}$  est la normale unitaire extérieure à cette surface et  $\vec{\psi}$  est le vecteur flux de chaleur.

Par application du théorème de Gauss, on obtient :

$$\int_{\Sigma} \vec{\psi} \cdot \vec{n} d\Sigma = \int_{\Omega} \text{div } \vec{\psi} d\Omega. \quad (\text{IV.6})$$

Alors des équations (IV.5) et (IV.6), on obtient successivement [39] :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div } \vec{\psi} d\Omega &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho \frac{de}{dt} d\Omega \quad \text{principe de conservation de la masse.} \end{aligned}$$

L'énergie interne spécifique  $e$  et la densité d'entropie spécifique  $s$  sont fonctions des variables définissant l'état d'une particule assimilée localement à un système thermodynamique. On pose :

$$e = e(s, \alpha_j), \quad j = 1, \dots, n \quad \text{les } \alpha_j \text{ sont choisies telles que : } T = \frac{\partial e}{\partial s}.$$

On définit une fonction d'état  $\Psi$  appelée énergie libre. C'est la transformée de Legendre de l'énergie interne spécifique  $e$  par rapport à la variable d'état  $s$  faisant

apparaître la température comme variable d'état et disparaître l'entropie :

$$\begin{cases} \Psi = e - T.s \\ \Psi = \Psi(T, \alpha_j) \\ s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\psi} d\Omega &= \int_{\Omega} \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} + T \frac{ds}{dt} + \frac{dT}{dt} s \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} - T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_j} \frac{d\alpha_j}{dt} - T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) d\Omega, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$\alpha_j, j = 1, \dots, n$  sont les variables d'état définis plus haut.

La capacité calorifique  $c$  définie à  $\alpha_j$  constant est

$$c = -T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}.$$

$dT/dt$  représente la dérivée particulaire de la température. C'est la dérivée suivant le mouvement de déformation et de l'évolution temporelle du matériau. Elle s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) + \frac{\partial T}{\partial t},$$

où  $\vec{\mathbf{u}}$  est la vitesse des volumes élémentaires du matériau en déformation.

Certaines études [89] ont montré que dans le cas de sollicitations uniaxiales homogènes à faible vitesse de déformation dans les matériaux malgré la faible conductivité thermique, par exemple comme les polymères, le terme  $\vec{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)$  est négligeable devant  $\partial T/\partial t$ .

De même pour des variations très faible de température, les déformations et les effets sur la microstructure (énergie bloquée) sont négligeables.

De ces hypothèses réductrices, le bilan d'équilibre devient

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\psi} d\Omega = \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega.$$

La relation étant valable quel que soit le domaine  $\Omega$ , l'équation de conduction de la chaleur dans  $\Omega$  s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\psi} = 0. \quad (\text{IV.7})$$

L'équation (IV.7) représente donc l'équation générale de conduction de la chaleur dans un solide opaque sans source de chaleur.

La loi de Fourier fournit une relation qui relie le flux de conduction au gradient de température :

$$\vec{\psi} = -k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (\text{IV.8})$$

où la constante positive  $k$  est la conductivité thermique qui dépend du type de matériau.

En combinant les équations (IV.7) et (IV.8), on obtient l'équation générale de conduction de la chaleur valable pour un matériau homogène et isotrope de conductivité thermique positive et constante  $k$  :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(T)), \quad (\text{IV.9})$$

$\rho c$  est la chaleur volumique qui dépend aussi du type de matériau comme la conductivité thermique  $k$ .

L'équation (IV.9) ainsi obtenue est une équation aux dérivées partielles en  $T$ .

En coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ , et dans le cas d'un matériau isotrope dont la conductivité thermique  $k$  et la chaleur volumique  $\rho c$  sont indépendantes de la température, l'équation de conduction s'écrit :

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ valable en tout instant et en tout point de } \Omega.$$

Cette équation aux dérivées partielles linéaires, du deuxième ordre, admet mathématiquement une infinité de solutions faisant intervenir des constantes arbitraires. Elle n'a de sens physique que pour des conditions, appliquées à un domaine d'espace-temps. Ces conditions sont ici les causes qui déterminent l'évolution du phénomène.

Pour déterminer l'évolution physique de la température dans  $\Omega$ , il est indispensable de connaître la répartition initiale de la température en tout point du domaine et aussi la loi de variation de la température  $T$  et/ou de sa dérivée normale sur la frontière du domaine. Ces conditions interprétées par des équations sont dites condition initiale et conditions aux limites.

### IV.2.3 Condition initiale et conditions aux limites

Pour résoudre l'équation (IV.9) traduisant le bilan thermique dans le matériau, il est nécessaire d'y adjoindre des conditions aux limites et une condition initiale.

Ces conditions indiquent ce qui se passe à la frontière ou au bord du domaine et l'état initial de la température.

#### IV.2.3.1 Condition initiale

Par convention, on choisit l'instant  $t = 0$  pour être le temps initial, et on impose une **condition initiale**

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_0(x_i), \quad (\text{IV.10})$$

où  $T_0$  est la fonction de distribution initiale de température dans le domaine  $\Omega$ .

#### IV.2.3.2 Conditions aux limites

Ce sont des conditions que l'on impose sur la surface frontière ou limite  $\Sigma$ . Elles traduisent mathématiquement les conditions physiques réelles imposées. En thermique, il existe différents types de conditions aux limites. Les plus fréquentes rencontrées sont les suivantes :

##### *Température imposée*

Ce sont des problèmes dits de Dirichlet, où la température est une fonction donnée d'un point  $M$  et du temps  $t$ . Elle est dite condition d'isothermie et réalisée par contacte du domaine avec des thermostats :

$T_\Sigma = f(M_\Sigma, t)$  en tout point  $M_\Sigma$  de la frontière de  $\Sigma$ .

##### *Flux de chaleur imposé*

La densité de flux thermique est une fonction donnée du point à la frontière et/ou du temps : ces problèmes sont dits de Neumann et

$$\vec{\psi} \cdot \vec{n} = -k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} = f(M_\Sigma, t) \quad \text{en tout point } M_\Sigma \text{ de la frontière } \Sigma. \quad (\text{IV.11})$$

o Si le domaine est thermiquement isolé, le flux est nul en tout point de la frontière ; on parle d'adiabaticité :

$$\vec{\psi} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en tout point de la frontière } \Sigma. \quad (\text{IV.12})$$

##### *Condition de transfert par convection*

Si le flux à la surface frontière est un flux de transfert convectif, ces problèmes sont dits mixtes ou de Fourier. Dans ces cas la densité de flux de chaleur traversant la frontière est proportionnelle à la différence de température entre la surface frontière et le milieu environnant : c'est la condition courante de transfert de chaleur par

convection dite loi de Newton (condition mixte de Fourier).

La continuité des flux aux interfaces conduit à la relation :

$$-k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} = h(T_\Sigma - T_a) \quad \text{en tout point de la frontière } \Sigma. \quad (\text{IV.13})$$

$T_a$  désigne la température ambiante et  $h$  est une constante positive appelée *coefficient d'échange*.

o *Condition de transfert par rayonnement*

Si les transferts de chaleur se font par *rayonnement*, la densité de flux n'est plus linéaire. Le flux radiatif entre la surface frontière et l'environnement s'écrit sous la forme :

$$\vec{\psi} \cdot \vec{n} = \sigma F(T_\Sigma^4 - T_a^4) \quad (\text{IV.14})$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann ( $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2/\text{K}^4$ ),  $F$  est un paramètre appelé facteur de forme gris qui tient compte des propriétés radiatives, d'émissivité des corps en présence et de la géométrie du domaine, notamment des positions relatives des diverses surfaces. Cette relation n'est pas linéaire, mais dans de nombreux cas où la différence de température  $T_\Sigma - T_a$  est inférieure à environ  $100^\circ\text{C}$ , la densité de flux rayonné peut alors être " linéarisée " en fonction de  $T_\Sigma$  et  $T_a$  et s'écrire :

$$\vec{\psi} \cdot \vec{n} = h_r(T_\Sigma - T_a) \quad \text{où } h_r = g(T) = 4\sigma F T_m^3 \quad \text{avec } T_m \approx T_a \approx T_\Sigma \approx (T_\Sigma + T_a)/2.$$

Par analogie avec la loi de Newton,  $h_r$  est appelé *coefficient d'échange thermique par rayonnement*.

En utilisant la loi de Fourier et la continuité de flux à l'interface d'échange, la condition de transfert par rayonnement s'écrit :

$$-k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} = \sigma F(T_\Sigma^4 - T_a^4) \approx h_r(T_\Sigma - T_a) \quad (\text{IV.15})$$

Si la surface frontière rayonne de la chaleur dans un environnement supposé très grand par rapport à sa surface d'échange, alors le facteur de forme gris vaut simplement  $F = \epsilon$  où  $\epsilon$  est l'émissivité de la frontière  $\Sigma$ .

### Remarque IV.2.1

*Les équations de conduction de la chaleur que nous aurons à traiter sont linéaires au sens où les solutions  $T$  dépendent linéairement de la condition initiale  $T_0$ . En physique, cette propriété de linéarité est souvent utilisée sous la forme d'un principe*

de superposition : une combinaison linéaire de  $T_0$  conduit à une solution  $T$  qui est la même combinaison linéaire des solutions correspondant à chaque terme de la décomposition des données.

D'un point de vue physique, la linéarité n'est qu'une hypothèse parmi d'autres. En effet, pour les problèmes à forte variation de température, la loi de Fourier n'est pas valable ; il faut la corriger en supposant que la conductivité thermique  $k$  dépend de la température  $T$  et de son gradient  $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$ . Ceci rend le problème non-linéaire. Dans la suite, nous supposons le paramètre  $k$  constant.

On peut scinder la surface  $\Sigma$  en deux surfaces disjointes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  :

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma \quad \text{et} \quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$$

Imposons alors sur la frontière  $\Sigma_1$  la condition de flux imposé :  $-k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} = q$  et sur  $\Sigma_2$  une condition de transfert par convection :  $-k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} = h(T - T_a)$ .

Dans ce cas, si on adjoint la condition initiale à ces conditions, on peut décrire un phénomène de transfert de chaleur dans un matériau par les équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \operatorname{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(T)) = 0 & \text{pour } (\vec{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ -k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} = q & \text{en tout point de } \Sigma_1, t > 0 \\ -k \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{n} = h(T - T_a) & \text{en tout point de } \Sigma_2, t > 0 \\ T(\vec{x}, 0) = T_0(\vec{x}) & \text{pour } \vec{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (\text{IV.16})$$

### Remarque IV.2.2

Nous avons choisi ces conditions aux limites plutôt que celles de Dirichlet ( $T(x, t)$  connues sur  $\Sigma_2$ ) car nous voulons faire apparaître les termes de convection  $h$ .

Le problème (IV.16) est donc constitué d'une équation aux dérivées partielles munies de conditions aux limites et d'une condition initiale. A cause de la présence de conditions aux limites, on dit que le problème (IV.16) est un problème aux limites ; mais on dit aussi que c'est un problème de Cauchy à cause de la donnée initiale en temps.

Dans le cadre de la résolution du problème (IV.16), on peut y procéder directement pour déterminer le champ de température  $T(\vec{x}, t)$ . Ceci peut se faire de façon analytique, ou en utilisant la transformation de Laplace. Néanmoins, la plupart du temps on ne peut en déterminer qu'une solution approchée. Il existe de nos jours des méthodes numériques donnant plus d'informations sur le champ de température

$T(\vec{x}, t)$ . Parmi ces méthodes numériques, la méthode des éléments finis est la plus utilisée.

#### IV.2.4 Résolution du problème direct par la méthode des éléments finis (MEF)

La MEF est une des méthodes les plus efficaces et les plus populaires pour résoudre numériquement des problèmes aux limites. Le principe de cette méthode peut être basé sur l'**approximation variationnelle**. La formulation variationnelle est posée dans un espace de Hilbert (dans ce document c'est l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  [58]). Rappelons que les espaces de Sobolev qui sont des espaces "naturels" de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles. Le lecteur intéressé, ou tout simplement curieux, trouvera les idées et les arguments clés qui lui permettront de bien comprendre la structure et l'intérêt des espaces de Sobolev dans le second chapitre ou plus en détail dans les ouvrages [58] et [25].

L'idée de base est de remplacer l'espace  $H^1(\Omega)$  de dimension infinie par un sous-espace  $V_\zeta$  de dimension finie de  $H^1(\Omega)$ . Il faut d'une part construire une base  $\phi_i$  des fonctions à support borné, c'est-à-dire des fonctions non nulles uniquement sur une petite partie du domaine de définition, et d'autre part, la réunion des supports des fonctions  $\phi_i$  doit recouvrir  $\Omega$ . Ces fonctions sont généralement appelées fonctions "test".

##### Remarque IV.2.3

*Dans la pratique, il faut que la réunion des supports des fonctions  $\phi_i$  soit la plus proche possible du domaine  $\Omega$ . Cependant, il est difficile voire impossible dans le cas des figures à géométrie très complexe de reconstituer tout le domaine  $\Omega$  par la réunion des supports des fonctions test.*

*Cette difficulté s'élimine dans les cas unidimensionnels et la méthode des éléments finis conduit à des solutions exactes [30].*

La formulation variationnelle consiste à trouver une forme bilinéaire  $a(., .)$ , une forme linéaire  $L(.)$ , et un espace de Hilbert  $V = V_\zeta$  tels que le problème de conduction de la chaleur soit équivalent à :

$$\text{Trouver } T \in V_\zeta \text{ tel que } a(T, \phi_i) = L(\phi_i) \text{ pour tout } \phi_i \in V_\zeta.$$

En général, on multiplie l'équation de conduction de la chaleur par une fonction test régulière  $\phi_i$  et on intègre par partie. Ce calcul est principalement formel au sens où l'on suppose l'existence et la régularité de la solution  $T(x, t)$  afin que tous les calculs soient licites.

Exploitant le fait que les variables  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $t$  jouent des rôles très différents, nous pouvons séparer ces variables en considérant désormais  $T(x, t)$  comme une fonction du temps  $t$  à valeurs dans un espace de fonctions définies sur  $\Omega$ . Plus précisément, si l'on se donne un temps final  $t_f$ , on considère que  $T$  est définie par [58]

$$\begin{aligned} T : ]0, T[ &\longrightarrow H^1(\Omega) \\ t &\longrightarrow T(t), \end{aligned}$$

et  $T(x, t)$  est la valeur de  $T(t)(x)$ .

On choisit un sous-espace qui convient pour la formulation variationnelle du problème stationnaire étudié. En choisissant la fonction test dans le sous espace de  $H^1(\Omega)$ , on arrive à mettre l'équation de conduction de la chaleur sous la forme d'équation différentielle ordinaire en  $t$ . On peut consulter les autres points de la formulation variationnelle du problème de conduction dans l'ouvrage d'Allaire [58].

Dans ce rapport, la solution "approchée" cherchée dans le sous-espace  $V_{zeta}$  de dimension finie  $n+1$  est la fonction température  $T(x, t)$  de la forme

$$T(x, t) = \sum_{i=0}^n \theta_i(t) \phi_i(x) \tag{IV.17}$$

Les coefficients  $\theta_i(t)$  s'interprètent comme valeur numérique "approchée" de  $T(x, t)$  au point  $x_i$ . Dans le cadre expérimental,  $\theta_i(t)$  est la mesure de la température en un point  $x_i$ .

La méthode des éléments finis est basée sur la formulation de volume de contrôle [70] qui consiste à délimiter un volume élémentaire du domaine, dit "volume de contrôle", pour lequel sont appliquées les équations aux dérivées partielles. Le bilan énergétique et massique aboutit à deux équations algébriques, non linéaires, couplées, résolues grâce à une technique numérique simple, en l'occurrence.

Elle est aussi basée sur la formulation de Galerkin [70]. Nous présentons dans le paragraphe suivant la formulation de Galerkin sur l'équation de conduction de la chaleur.



Nous faisons le choix de la formulation de Galerkin, car contrairement aux autres formulations qui passent par la construction d'une application bilinéaire et d'une application linéaire continues, la formulation de Galerkin revient à la multiplication de l'équation de conduction de la chaleur par les fonctions  $\phi_i$ , puis passer à une intégration par partie.

#### IV.2.4.1 Formulation de Galerkin

La formulation de Galerkin est définie par deux intégrales représentant les poids résiduels [3] et [70]. La méthode résiduelle pondérée se traduit en choisissant un élément  $\phi_j$  de  $V_\zeta$  par :

$$\int_{\Omega} \phi_j \left( k \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega - \int_{\Sigma} \phi_j \left( k \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \vec{n} + q \right) d\Sigma = 0 \quad (\text{IV.18})$$

Par intégration par partie, l'équation (IV.18) devient [70]

$$- \int_{\Omega} k \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_j) d\Omega - \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \phi_j d\Omega - \int_{\Sigma} \phi_j \left( k \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \vec{n} + q \right) d\Sigma \quad (\text{IV.19})$$

Ces équations sont généralement écrites sur chaque domaine élémentaire, et après les intégrations, on passe à l'assemblage de chaque élément pour obtenir un système linéaire [58] et [67]. Nous définirons des fonctions élémentaires  $\phi_i(x)$  permettant d'avoir directement le système linéaire attendu.

Parmi les équations de conduction que nous utiliserons, une condition aux limites de Dirichlet sera imposée. Les conditions aux limites de type Dirichlet peuvent correspondre à la situation où des phénomènes physiques différents agissent sur des portions distinctes de la frontière. Si nous reprenons  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_1$  comme définis précédemment, et nous imposons les conditions

$$\begin{aligned} -k \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \vec{n} &= q && \text{sur } \Sigma_1 \\ k \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \vec{n} &= h(T - T_a) && \text{sur } \Sigma_2, \end{aligned}$$

alors l'équation (IV.19) peut s'écrire

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} k \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\phi_j) d\Omega - \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \phi_j(x) d\Omega - \int_{\Sigma} \phi_j k \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \cdot \vec{n} d\Sigma \\ - \int_{\Sigma_1} \phi_j q d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \phi_j h(T - T_a) d\Sigma = 0. \quad (\text{IV.20}) \end{aligned}$$

En injectant l'expression (IV.17) de  $T(x, t)$  dans l'équation (IV.20), on peut écrire matriciellement le système obtenu de la discrétisation spatiale :

$$\mathcal{C}\dot{\theta} + \mathcal{K}\theta = \mathbf{F} \quad (\text{IV.21})$$

où

- (i)  $\dot{\theta}$  désigne le vecteur dérivé temporelle du vecteur température  $\theta$ ,
- (ii)  $\mathcal{C}$  désigne la matrice de capacité, aussi appelée matrice d'amortissement,
- (iii)  $\mathcal{K}$  est la matrice de conductance, encore appelée matrice de raideur,
- (iv)  $\mathbf{F}$  est le vecteur flux résultant des conditions aux limites.

Les composantes des matrices  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{K}$  et du vecteur  $\mathbf{F}$  sont données par

$$\mathcal{C}_{ij} = \int_{\Omega} \rho c \phi_j \phi_i d\Omega \quad (\text{IV.22})$$

$$\mathcal{K}_{ij} = \int_{\Omega} k \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_j) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) d\Omega - \int_{\Sigma} \phi_j k \overrightarrow{\text{grad}}(\phi_i) \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \phi_j h \phi_i d\Sigma \quad (\text{IV.23})$$

$$\mathbf{F}_j = - \int_{\Sigma_1} \phi_j q d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \phi_j h T_a d\Sigma \quad (\text{IV.24})$$

#### Remarque IV.2.4

*La matrice  $\mathcal{C}$  est symétrique et défini-positive ; la matrice  $\mathcal{K}$  est symétrique et positive. Les matrices  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{K}$  sont tridiagonales.*

La résolution d'un problème de conduction en régime transitoire nous amène donc à la résolution d'un système différentiel du premier ordre par rapport au temps  $t$  (IV.21).

Notons que ce système différentiel ne prend pas en compte les conditions initiales, par exemple la température connue sur le bord, qu'il faut incorporer au fur et à mesure de la résolution. L'incorporation de la condition initiale se fait de la même manière que dans le cas stationnaire.

#### Remarque IV.2.5

*Dans la suite, on pourra, de manière analogue, discrétiser des problèmes aux limites munis de toutes les conditions aux limites considérées précédemment ; en fait nous ne considérerons que les conditions aux limites de Dirichlet homogènes.*

*Un calcul sera donné sur les composantes de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{K}$  et  $\mathbf{F}$  dans les chapitres sur l'identification des paramètres thermophysiques.*

En résumé, en se servant d'un algorithme variationnel avec des fonctions à support borné, on est conduit à un système d'équations qui est un système d'équations aux

différences, proche de celui de la méthode des différences finies.

Il faut noter que les fonctions de base à support borné se révèlent facilement "adaptables" à la géométrie du domaine ce qui écarte des difficultés rencontrées dans la méthode des différences finies.

La méthode d'identification de paramètres thermiques repose donc sur le système (IV.21) que nous rappelons :

$$\mathcal{C}\dot{\theta} + \mathcal{K}\theta = \mathbf{F}.$$

La résolution du différentielle (IV.21) avec condition initiale

$$\theta(0) = [\theta_1(0) \ \theta_2(0) \ \dots \ \theta_n(0)] = [T_0(0) \ T_0(\zeta) \ \dots \ T_0(i\zeta) \ \dots \ T_0(L)]$$

par n'importe quel algorithme d'intégration conduit à la résolution du problème direct.

### Remarque IV.2.6

*L'existence de solutions, l'unicité, la perturbation des solutions en fonction du temps, etc., de l'équation de conduction de la chaleur ont fait l'objet de plusieurs recherches : Martinet [77], [76], Sacadura [86], Wang et al. [102], Bergheau et al. [67], Allaire [58] etc. Nous considérerons leurs résultats comme acquis dans ce document.*

## IV.3 Problème inverse

Les échanges de chaleur interviennent dans de multiples procédés industriels. Ils interviennent directement, par exemple dans les processus d'induction, de refroidissement, d'utilisation de l'énergie solaire, d'isolation thermique, ou indirectement de façon inévitable dans les chocs thermiques, les pertes thermiques, le rayonnement, lors des déformations sollicitations mécaniques, etc. L'ingénieur ou le technicien a donc besoin des connaissances de base pour :

- ★ comprendre les phénomènes physiques qu'il observe,
- ★ maîtriser le procédé et donc la qualité des produits,
- ★ prédire certains phénomènes thermiques qui peuvent apparaître.

Afin de mieux comprendre, prédire ou expliquer ces phénomènes, l'expérimentateur a besoin de connaître les paramètres thermophysiques du matériau sur lequel les études vont porter. Ces propriétés sont caractérisées par des paramètres thermophysiques mis en jeu dans la conduction de la chaleur et dans les conditions aux limites de flux thermiques surfaciques.

Les études relatives à l'identification des paramètres thermophysiques des matériaux par des méthodes de mesure en régime permanent et en régime instationnaire connaissent un élan considérable depuis quelques années. L'élaboration de nouveaux matériaux de hautes performances thermophysiques a accéléré le développement des méthodes thermiques en régimes instationnaires. Les techniques récentes utilisant des mesures sans contact telle que la thermographie, présentent beaucoup d'intérêt sur le plan de la qualité et elles sont moins destructives par rapport aux méthodes anciennes.

Nous pouvons globalement distinguer deux directions de recherche dans les problèmes inverses d'identification en thermique :

- le premier axe regroupe les travaux de recherche destinés à trouver
  - ★ le flux de chaleur [21] et [59]
  - ★ la température initiale [78]
  - ★ le flux de chaleur et les coefficients convectifs [4], [5] et [81].

qui conduisent à un champ de température souhaité.

Les problèmes étudiés sont dits mal posés [8], c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes ou des hypothèses qui permettent de réduire l'espace des possibles de façon à aboutir à une solution unique.

- le deuxième axe de recherche porte sur l'estimation des paramètres thermophysiques telles que la diffusivité thermique, la conductivité thermique, la chaleur spécifique, etc. [7], [12], [26], [54], [32] et [33].

Les deux axes sont en fait liés : en général on suppose soit les conditions aux limites et initiales connues, et on cherche à identifier les paramètres thermophysiques, ou inversement ; soit ce sont les paramètres qui sont supposés connus et on cherche à déterminer les conditions aux limites ou initiales.

Toutefois, dans certains travaux, les deux axes sont abordés simultanément [56] et [70].

Notre travail s'inscrit dans le second axe de recherche où de nombreuses méthodes d'identification de paramètres thermophysiques ont été élaborées. Nous aborderons une étude sur les deux axes en théorie. L'intérêt de la présente étude repose sur le fait que les caractéristiques thermiques des nouveaux matériaux composites ou polymères : chaleur volumique, conductivité et diffusivité thermiques, coefficients d'échange sont souvent inconnues. Or, ces caractéristiques sont nécessaires dans le

modèle de connaissance pour la résolution des problèmes thermomécaniques.

L'approche que nous proposons consiste à identifier par un modèle réduit linéaire le comportement thermique instationnaire des matériaux solides opaques. En effet la méthode des éléments finis est utilisée pour réécrire l'équation aux dérivées partielles de conduction de la chaleur sous forme d'un système différentiel ordinaire plus propice à la résolution numérique. La méthode des moindres carrés est développée afin d'identifier *simultanément* les paramètres inconnus de conductivité thermique et de chaleur volumique.

L'algorithme d'identification est mise en œuvre pour la détermination de la conductivité thermique et de la chaleur volumique de polymères et validé à partir des données temporo-spatiales de température simulées. Il a permis ensuite d'estimer des paramètres thermophysiques de polymères à partir des données de mesures expérimentales de température à l'aide d'une caméra infrarouge.

Avant de cloturer ce chapitre de rappels, nous avons jugé important de rappeler quelques techniques de mesures de champs de température expérimentaux et les méthodes les plus utilisées dans l'estimation des paramètres thermophysiques.

### IV.3.1 Techniques de mesures de champs de température

Les méthodes d'identification des sources de chaleur, du flux de chaleur ou des paramètres thermophysiques nécessitent expérimentalement un instrument de mesure de température (appelé capteurs) en régime transitoire ou permanent en des points précis sur la surface arrière ou avant des échantillons. Divers moyens sont utilisés suivant les moyens et les besoins des chercheurs ou des ingénieurs.

Parmi les instruments de mesure avec contact, les plus utilisés sont le thermocouple, les sondes de platine et thermistance. Ceux-ci ne fournissent que des informations locales. Le thermocouple comme les deux autres capteurs sont faciles d'emploi ; de plus il permet une exploitation rapide des mesures et beaucoup moins coûteux qu'une caméra infrarouge. Néanmoins son utilisation nécessite un contact avec l'échantillon étudié ; ce contact peut modifier la géométrie du matériau et engendrer la présence d'une résistance de contact due à une fixation du thermocouple (colle, graisse,...).

Les techniques sans contact sont souvent préférées, basées sur le rayonnement émis par les corps étudiés. La radiométrie par caméra infrarouge (IR) est de nos jours utilisée pour la mesure de température de surface. Elle permet la réalisation sans contact de cartographies multidimensionnelles et transitoires de température

contrairement aux mesures ponctuelles effectuées par les thermocouples. À côté de ces avantages de la Caméra IR, elle est très onéreuse et nécessite un étalonnage de l'ensemble de la chaîne de mesure.

### IV.3.2 Méthodes de résolution des problèmes inverses

Pour la détermination des paramètres thermophysiques, différentes techniques et méthodes de mesures ont été utilisées par plusieurs auteurs. Nous avons résumé ici les principaux travaux.

#### IV.3.2.1 Méthodes fréquentielles

Les premières investigations sur les phénomènes thermiques furent celles de A. G. Bell en 1881 [13] qui analysa les phénomènes photo-acoustiques engendrés par l'excitation d'un échantillon par un faisceau lumineux modulé périodiquement. Ses études concernent essentiellement la détermination de la conductivité et de la diffusivité thermiques.

La diffusivité thermique, qui caractérise l'aptitude d'un matériau à diffuser la chaleur, est une propriété intervenant dans tous les processus de transfert de chaleur en régime instationnaire, c'est-à-dire pour lesquels la température varie avec le temps. La connaissance de ce paramètre est essentielle pour résoudre de nombreux problèmes de transfert thermique.

#### IV.3.2.2 Méthodes instationnaires comme la méthode flash

Les travaux de Bell ont été repris en 1961 par Parker et al. [103] en mettant au point la méthode flash. La méthode flash dans son principe, est une technique impulsionnelle qui consiste à soumettre la face avant d'un échantillon plan à une impulsion de flux de chaleur de courte durée et à observer l'évolution temporelle de la température en un ou plusieurs points de la face arrière de l'échantillon. Outre l'identification de la diffusivité thermique, elle permet d'accéder indirectement à la conductivité thermique lorsque la capacité massique et la masse volumique sont connues.

Les méthodes d'estimation de paramètres liées à la méthode flash ont fait l'objet de nombreuses études [11] et [100]. Ces méthodes ont été revisitées en tenant compte des outils liés aux méthodes d'estimation de paramètres (méthodes inverses). Les trois principaux types de méthodes flash sont présentées ci-après :

1. estimation à partir de quelques points du thermogramme (méthode des temps partiels),
2. somme pondérée du thermogramme (méthode des moments temporels partiels),
3. méthode itérative visant à minimiser l'écart quadratique moyen entre théorie et expérience.

Relativement peu destructive au départ (collage de thermocouple, impact du signal sur le matériau, etc.), la méthode flash a depuis quelques dizaines d'années subi des améliorations grâce au développement des méthodes d'exploitation et de traitement des thermogrammes et à l'apparition de nouveaux détecteurs thermiques : détecteurs photovoltaïques ( $I_n G_a A_s, S_i$  ou  $G_e$ ), détecteurs infrarouges centrés sur la bande 2 à 6  $\mu m$  ou détecteurs infrarouges centrés sur la bande 8 à 14  $\mu m$ . L'apparition de nouvelles sources d'énergie (faisceaux lasers, faisceaux d'électrons), de méthodes performantes de traitement du signal (détecteurs synchrones) et d'ordinateurs puissants a permis d'améliorer la précision sur l'estimation de la diffusivité thermique.

Toutefois, quel que soit le matériau, l'incertitude de mesure de la diffusivité thermique est comprise entre 3% et 5% en fonction de la température.

Les résultats des différentes recherches montrent qu'il est difficile de réaliser des mesures de diffusivité thermique avec une incertitude inférieure à 3% sur un matériau opaque, homogène et isotrope. Une telle incertitude de mesure nécessite impérativement, d'une part une bonne maîtrise du processus de mesure et des conditions expérimentales, et d'autre part une exploitation du thermogramme prenant en compte les effets parasites.

De plus cette technique n'est pas très pratique sur les polymères. L'énergie envoyée par rayon laser afin d'observer une cartographie thermique exploitable est forte. On aboutit généralement à la destruction de la géométrie du matériau.

### IV.3.2.3 Méthode à fil chaud

FIG. IV.2 – Eprouvette expérimentale de la méthode à plan chaud

Dans les années 1930, B. Stalhane et S. Pyk [95] développent la méthode du fil chaud pour estimer la conductivité thermique. La technique permet d'identifier

directement la conductivité thermique à partir du comportement asymptotique de l'évolution de la température du fil chaud aux temps longs et du formalisme quadripolaire.

Le principe de la méthode du fil chaud est le suivant : on dispose un fil résistif sur l'axe d'un échantillon cylindrique de grande longueur et d'extension radiale supposée infinie. L'échantillon, initialement isotherme, est soumis à un créneau en flux, délivré sous forme d'effet Joule par le fil résistif (voir la figure IV.2). Si le fil est supposé infiniment long et de rayon négligeable, le transfert est radial et la conductivité thermique peut être identifiée à partir de l'évolution de la température en un point donné [6], [54] et [107].

La conductivité des matériaux caractérisés avec ce dispositif doit être comprise entre 0.1 et 10  $W/m/K$  pour espérer une précision meilleure que 5%.

#### IV.3.2.4 Méthode à plan chaud

La méthode du plan chaud est une extension de la méthode du fil chaud à une géométrie plane. Elle permet d'identifier l'effusivité thermique du matériau [38].

Le principe est le suivant : un flux de chaleur uniforme est imposé à l'interface de deux échantillons symétriques de section quelconque et d'extension infinie dans la direction perpendiculaire à l'interface. Ceci est réalisé par la mise en place d'un élément chauffant mince occupant toute la section de l'interface. Les échantillons sont assimilables à un milieu infini si le rapport de leur longueur à l'épaisseur de l'élément chauffant est supérieur à 20. Par ailleurs, les faces latérales des deux échantillons sont isolées et le transfert peut être considéré comme unidirectionnel. La réponse en température au cours du temps est mesurée dans le plan du chauffage par un thermocouple. Le comportement asymptotique aux temps longs, du thermogramme ainsi obtenu, est proportionnel à la racine carrée du temps, le coefficient de proportionnalité étant directement lié à l'effusivité des échantillons. Le comportement aux temps courts est influencé par l'inertie thermique de la sonde (élément chauffant + thermocouple) et par la résistance de contact sonde-milieu.

Cette méthode permet de mesurer l'effusivité thermique avec une précision de l'ordre de  $\pm 6\%$  pour peu que l'intervalle de temps sur lequel est réalisée l'identification soit correctement choisi de sorte que puissent être négligés les effets inertiels de la sonde aux temps courts et les éventuelles pertes thermiques aux temps longs.



#### IV.3.2.5 Technique numérique de résolution : gradient conjugué

La plupart des méthodes utilisent la technique du gradient conjugué pour évaluer les paramètres. La forme quadratique minimisée par la technique du gradient conjugué est une somme des carrés de la différence de la solution théorique ou expérimentale et de l'expression analytique du problème direct. Cette expression analytique est, dans la plupart des cas, une série illimitée solution du problème direct de conduction considérée. La difficulté réside dans le fait qu'un programme ne peut pas calculer une série illimitée. Faisant ainsi on augmente les erreurs. En effet, il existe une erreur sur la discrétisation du domaine, une deuxième erreur sur la solution approchée et il y aura une troisième erreur sur la méthode de minimisation elle-même. La démarche que nous présentons dans ce document évite l'utilisation d'une série numérique comme solution.

### IV.4 Conclusion

La méthode des éléments finis qui est basée sur la technique des projections, permet donc d'adapter le mieux possible le maillage au domaine géométrique. Elle conduit à une réduction considérable des erreurs de résolution numérique. La formulation de Galerkin nous a emmené à écrire l'équation aux dérivées partielles de conduction en une équation différentielle du premier ordre en dimension finie. Ces circonstances expliquent notre engouement manifesté pour l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution de l'équation de conduction de la chaleur.

Quelle que soit la méthode utilisée, les différentes techniques relient le modèle théorique à l'observable physique c'est-à-dire aux paramètres de contrôle comme la température. Les mesures de température sur un échantillon sont ensuite injectées dans les équations régissant la conduction afin de remonter aux grandeurs inconnues recherchées. Toutes ces méthodes conduisent obligatoirement à la minimisation d'une fonction coût.

# Chapitre V

## Construction d'un Algorithme d'Identification de Paramètres Thermophysiques

### Sommaire

---

<b>V.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>96</b>
<b>V.2</b>	<b>Problème direct</b>	<b>97</b>
V.2.1	Equation de conduction de la chaleur	97
V.2.2	Formulation du problème direct	98
<b>V.3</b>	<b>Résolution du problème direct</b>	<b>98</b>
V.3.1	Discrétisation en espace par MEF	98
V.3.2	Intégration dans le temps	101
V.3.3	Algorithme de résolution du problème direct	102
<b>V.4</b>	<b>Choix des pas temporel et spatial</b>	<b>103</b>
V.4.1	Stabilité de l'algorithme du problème direct	103
V.4.2	Tests de stabilité	105
<b>V.5</b>	<b>Formulation du problème inverse</b>	<b>106</b>
<b>V.6</b>	<b>Procédure d'identification des paramètres thermophysiques</b>	<b>106</b>
V.6.1	Méthode des moindres carrés	106
V.6.2	Calcul de précision sur les paramètres identifiés	110

V.6.3	Construction d'un algorithme de résolution du problème inverse . . . . .	113
<b>V.7</b>	<b>Validation de l'algorithme . . . . .</b>	<b>113</b>
V.7.1	Simulation du champ de température . . . . .	114
V.7.2	Exploitation du champ de température simulé . . . . .	115
<b>V.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>118</b>

---

## V.1 Introduction

L'élaboration de nouveaux matériaux utilisés dans les technologies de hautes performances thermiques (matériaux d'isolation, thermoéléments, etc.), de matériaux composites à particules, mousse en fibres minérales ou végétales et de polymères est suivie de processus de caractérisation de leurs propriétés thermiques d'une part. D'autre part, les processus de déformation induisent des effets énergétiques (mécanique et thermique) qui doivent être correctement prédits afin de bien modéliser le comportement mécanique. Pour des essais quasi-statiques, les variations de température induites par la déformation restent souvent faibles. Le fait de négliger les variations élimine toute possibilité d'effectuer un bilan d'énergie complet, bilan de toutes les énergies mises en jeu, puisque les petites variations de température induisent de grandes variations d'énergie. Des travaux de recherches développés ces dernières années indiquent que la prise en compte systématique des phénomènes dissipatifs et de couplages thermocinétique contribue à l'amélioration des modèles de comportement [23]. Pour obtenir ces informations complémentaires à la réponse mécanique, il est nécessaire d'effectuer un bilan énergétique en s'appuyant sur la thermodynamique des processus irréversibles. Le bilan énergétique nécessite la connaissance des valeurs de la conductivité  $k$  et de la chaleur volumique  $\rho c$  intervenant dans la conduction de la chaleur [52].

Plusieurs études théoriques et expérimentales ont été développées pour la mesure des propriétés thermophysiques. Elles incluent, entre autres, la méthode équilibrée, la méthode de sonde, la méthode de chauffage périodique, la méthode des moindres carrés et la méthode de chauffage par impulsion.

Dans ce chapitre, la forme quadratique à minimiser sera définie à partir de l'équation différentielle linéaire qui est obtenue de l'équation de conduction de la chaleur par la méthode des éléments finis (MEF). La solution du problème direct s'obtient

par l'intégration (avec la technique des trapèzes généralisées) de l'équation différentielle linéaire. Les intégrales élémentaires mises en jeu dans la MEF sont calculées sans approximation.

Après la définition du phénomène et des concepts relatifs à la conduction de la chaleur dans un solide opaque, la méthode des moindres carrés est utilisée pour l'élaboration de l'organigramme d'évaluation des paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$ . La méthode inverse à développer utilise un champ de température simulé numériquement à partir d'un problème direct de conduction de chaleur dans un matériau homogène et isotrope. Nous avons ensuite effectué un bruitage des données par un ajout d'erreurs de type random dans le champ de température simulé afin de tester la sensibilité du modèle aux bruits.

Les étapes de base dans l'analyse incluent la recherche de solution du problème direct, et d'un problème inverse en passant par la construction d'algorithmes de résolution et d'identification.

## V.2 Problème direct

### V.2.1 Equation de conduction de la chaleur

Considérons une plaque solide rectangulaire de homogène d'épaisseur  $e$ , de largeur  $l$  et de longueur  $L$ . La distribution de température dans la plaque est évaluée en 3-D par la fonction température  $T(x, y, z, t)$ . En supposant la plaque homogène avec une faible épaisseur et la longueur très grande devant la largeur ( $l \ll L$ ), on peut valablement considérer une conduction de façon unidimensionnelle où la distribution de température dans la plaque est donnée par  $T(x, t)$ .

Supposons donc que cette plaque occupe l'intervalle  $[0, L]$  de l'axe  $Ox$  et qu'à l'instant  $t = 0$ , la distribution de température soit connue en tout point  $x \in [0, L]$  et égale à  $T_0(x)$ . Supposons en outre avoir placé à la surface limitée par  $x = 0$  un flux de chaleur constant  $q$ . La quantité  $q$  représente la puissance par unité de longueur fournie au point  $x = 0$  et à l'instant  $t > 0$ . La surface à  $x = L$  est supposée isolée. Les autres surfaces sont bien protégées contre tout courant convectif, radiatif et conductif.

La figure Fig.V.1 illustre la forme géométrique et les coordonnées unidimensionnelles du problème physique considéré.

Si  $\rho$ ,  $c$  et  $k$  sont des constantes positives données, représentant respectivement la densité volumique, la chaleur spécifique massique et la conductivité thermique, la

FIG. V.1 – Conduction unidimensionnelle

distribution de température de la plaque au point  $x$  et à l'instant  $t$  est donnée par l'équation aux dérivées partielles :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0. \quad (\text{V.1})$$

À cette équation, on adjoint les **conditions aux limites de flux**

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (\text{V.2a})$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L \quad t > 0 \quad (\text{V.2b})$$

et la **condition initiale**

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in [0, L]. \quad (\text{V.3})$$

Dans une condition expérimentale,  $T_0(x)$  est la température de la plaque à l'air ambiant.

### V.2.2 Formulation du problème direct

Connaissant la masse volumique  $\rho$  et les paramètres thermophysiques  $k$  et  $c$  ainsi que les conditions aux limites et initiales données par les équations (V.2-V.3), le problème direct consiste à déterminer une fonction  $T(x, t)$  dépendant des variables du temps  $t$  et de l'espace  $x$  dans la plaque.

Pour la résolution numérique du problème direct, la technique des éléments finis est utilisée pour la discrétisation en espace et la méthode des trapèzes généralisées pour l'intégration dans le temps.

## V.3 Construction d'un algorithme de résolution du problème direct

### V.3.1 Discrétisation en espace par MEF

Rappelons que la technique des éléments finis nous a permis de transformer l'équation aux dérivées partielles de conduction en un système différentiel linéaire du premier ordre. Le système différentiel obtenu par la MEF est donné par l'équation (IV.21). Remarquons que tous les termes multipliés par  $h$  sont nuls.

Cependant, pour connaître les composantes des matrices  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{K}$  et du vecteur  $\mathbf{F}$  de (IV.21), il faut définir les fonctions élémentaires  $\phi_i$ , base du sous-espace  $V_\zeta$  de  $H^1([0, L])$  dans lequel nous allons chercher la fonction température  $T(x, t)$ .

Le segment  $[0, L]$  est découpé en  $n$  morceaux égaux à  $\zeta = L/n$ ,  $n > 1$ . Les coordonnées des nœuds sont  $x_i = i\zeta$ ;  $i = 0, \dots, n$ . La méthode de Galerkin est alors appliquée avec les fonctions  $\phi_i$  représentées sur la figure V.2

FIG. V.2 – Génération de fonctions linéaires par morceaux

### Remarque V.3.1

*Les fonctions test ainsi définies sont bien dérivables au sens des distributions et leurs dérivées sont continues. Donc les fonctions  $\phi_i$  sont des éléments de  $V_\zeta$ .*

Les composantes des matrices  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{K}$  et du vecteur flux  $\mathbf{F}$  du système différentiel (IV.21) sont respectivement :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{ij} &= \rho c \int_0^L \phi_j(x) \phi_i(x) dx \\ \mathcal{K}_{ij} &= k \int_0^L \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \\ \mathbf{F}_i &= q \phi_i(0).\end{aligned}$$

Le vecteur température  $\theta$  dans le cadre unidimensionnel a pour composantes :

$$\theta_i(t) = T(x_i, t) \quad \theta_i(0) = T_0(x_i) \quad i = 0, \dots, n. \quad (\text{V.4})$$

La détermination du champ de température dans le matériau revient à chercher les valeurs de la température aux  $n + 1$  nœuds au cours du temps. La reformulation du problème direct en dimension finie s'écrit :

Trouver à chaque instant  $t$  le vecteur de température  $\theta(t)$  solution du système différentiel linéaire :

$$\mathcal{C} \dot{\theta}(t) + \mathcal{K} \theta(t) = \mathbf{F} \quad (\text{V.5})$$

$$\theta(0) = [T_0(0) \dots T_0(i\zeta) \dots T_0(L)]^T \quad (\text{V.6})$$

où  $\dot{\theta}(t)$  désigne le vecteur dérivé temporelle du vecteur température  $\theta(t)$  mesuré aux nœuds du maillage. La résolution numérique du système ordinaire (V.5) permet

de déterminer l'évolution de la température dans le matériau pour les paramètres thermophysiques connus.

Quand les intégrales mises en jeu dans les composantes des matrices  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{K}$  et le vecteur  $\mathbf{F}$  sont calculées sans aucune approximation, nous obtenons :

$$\mathcal{C} = \rho c C = \frac{\rho c \zeta}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K} = k K = \frac{k}{\zeta} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Remarque V.3.2

La somme des composantes de la matrice  $K$  suivant chaque ligne est nulle. On peut en conclure que le noyau de la matrice  $K$  est composé des vecteurs colinéaires au vecteur de composantes toutes égales à 1 ( $[1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]^T$ ) de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

La détermination du champ de température une fois les paramètres thermophysiques, les conditions initiales et aux limites connues, revient à la recherche du vecteur  $\theta(t)$  solution de

$$\begin{cases} \rho c C \dot{\theta}(t) + k K \theta(t) = \mathbf{F} \\ \theta(0) = [T_0(0) \dots T_0(i\zeta) \dots T_0(L)]^T \end{cases} \quad (\text{V.7})$$

**Remarque V.3.3**

On peut obtenir l'équation (V.7) par la formulation variationnelle et dans ce cas. Les calculs des composantes des matrices  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{K}$  et du vecteur  $\mathbf{F}$  sont détaillés dans l'annexe A.

**V.3.2 Intégration dans le temps**

Les algorithmes d'intégration directe permettent d'intégrer une équation différentielle telle que (V.5) pas à pas dans le temps [67]. Pour calculer les grandeurs  $\theta$  à l'instant  $t + \Delta t$ , on suppose connues toutes les autres grandeurs aux instants précédents ( $t$ ,  $t - \Delta t$ , etc.) et on applique un schéma numérique pour remplacer l'équation différentielle par une équation algébrique dont les inconnues sont les grandeurs à l'instant  $t + \Delta t$  par introduction d'un réel  $\nu$ ,  $0 < \nu \leq 1$ , appelé *coefficient de relaxation*.

Il existe plusieurs schémas pour intégrer le système (V.5). Nous avons opté pour la méthode des trapèzes généralisées. Elle consiste à supposer qu'au cours du temps, le vecteur température  $\theta(t)$  est connu, et que le vecteur dérivé de température  $\dot{\theta}$  est constant sur chaque intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ , et égal à un instant intermédiaire  $t + \nu\Delta t$

$$\begin{aligned} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} &= \dot{\theta}(t + \nu\Delta t) \\ &= (1 - \nu)\dot{\theta}(t) + \nu\dot{\theta}(t + \Delta t) \end{aligned}$$

Le vecteur  $\dot{\theta}(t + \Delta t)$  est calculé de l'expression précédente :

$$\dot{\theta}(t + \Delta t) = -\frac{1 - \nu}{\nu}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{\nu\Delta t}[\theta(t + \Delta t) - \theta(t)]$$

L'intégration du système (V.5) revient à la détermination à l'instant  $t + \Delta t$ , pour  $\dot{\theta}(t)$  et  $\theta(t)$  connus, du vecteur  $\theta(t + \Delta t)$  du système :

$$\begin{cases} (\mathcal{C} + \nu\Delta t\mathcal{K})\theta(t + \Delta t) = \nu\Delta t\mathbf{F} + \mathcal{C}\theta(t) + (1 - \nu)\Delta t\mathcal{C}\dot{\theta}(t) \\ \theta_0(t + \Delta t) = \theta_0 \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

**Remarque V.3.4**

Si les matrices  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{K}$  et le vecteur  $\mathbf{F}$  dépendent de la variable  $t$  du temps, il faut les calculer aussi à chaque instant.

Le vecteur dérivé température  $\dot{\theta}(t)$  est obtenu directement par l'équation différentielle (V.7).



Finalement, en utilisant une telle procédure, on part d'une condition initiale à  $t = 0$  (c'est-à-dire la température  $\theta(0)$ ), puis on estime la solution à chaque instant par incrémentation successive de  $\Delta t$ . La solution obtenue est une solution approchée en espace (par la méthode des éléments finis) et en temps (par la méthode des trapèzes généralisées). On est libre de choisir le pas d'intégration constante ou non.

### V.3.3 Algorithme de résolution du problème direct

Pour simplifier les écritures, définissons les matrices

$$\mathcal{S}(\theta) = (\mathcal{C} + \nu\Delta t\mathcal{K})\theta(t + \Delta t) - \nu\Delta t\mathbf{F} - \mathcal{C}\theta(t) - (1 - \nu)\Delta t\mathcal{C}\dot{\theta}(t)$$

et

$$\mathcal{N} = \mathcal{C} + \nu\Delta t\mathcal{K}$$

Nous avons utilisé l'algorithme du gradient conjugué pour la résolution de (V.8). C'est un algorithme à pas descents résumé en six étapes :

1. choisir  $\theta(0)$  conformément aux conditions initiales, initialiser  $\theta$  par  $\theta^0$ , calculer le gradient  $R^0$

$$R^0 = -\mathcal{S}(\theta^0),$$

puis choisir la première direction

$$D^0 = R^0.$$

S'il n'est pas nul, continuer

2. calculer

$$\mu^i = \frac{\langle D^i, R^i \rangle}{\langle \mathcal{N}D^i, D^i \rangle}.$$

Tant que  $\nu^i > \epsilon$ , pour un  $\epsilon$  bien choisi,

3. calculer

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \mu^i D^i$$

4. calculer le gradient  $R^{i+1} = -\mathcal{S}(\theta^{i+1})$ , puis évaluer  $\langle R^{i+1}, R^{i+1} \rangle$ . S'il n'est pas nul, continuer

5. calculer

$$\gamma^i = \frac{\langle (R^{i+1} - R^i), R^i \rangle}{\langle R^i, R^i \rangle}$$

6. Calculer la nouvelle direction  $D^{i+1} = R^{i+1} + \gamma^i D^i$  et  $R^i = R^{i+1}$  puis retourner à l'étape 2.

### Remarque V.3.5

La matrice  $\mathcal{N}$  étant défini-positive, l'algorithme converge au plus en  $(n+1)$ -itérations [84].

Le vecteur  $\dot{\theta}(t) = \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{F} - \mathcal{K}\theta(t))$  est calculé avant le calcul de  $\mathcal{S}(\theta)$ . Autrement dit, chaque fois qu'une solution  $\theta(t)$  est déterminée, il faut calculer  $\dot{\theta}(t)$  avec (V.5) afin de pouvoir l'incorporer dans (V.8) pour la détermination de  $\theta(t + \Delta t)$ .

## V.4 Choix des pas temporel et spatial

### V.4.1 Stabilité de l'algorithme du problème direct

La détermination du critère de stabilité est basée sur un développement de Greenberg [57].

L'intégration du système (V.7) conduit à l'obtention du champ de température avec des valeurs fixes des paramètres thermophysiques. Même si l'algorithme converge du point de vue mathématique, il faut étudier le comportement physique des solutions obtenues. Les paramètres thermophysiques du matériau étant fixés, l'analyse physique des solutions repose sur le pas spatial de discrétisation et le pas de temps d'intégration.

Pour ne pas alourdir les notations, nous considérerons l'intégration avec le coefficient de relaxation  $\nu = 1$  et nous écrirons exclusivement dans ce paragraphe

$$\frac{\partial^l f}{\partial u^l} = f_{u\dots u} \quad f \text{ est indicée en } u \text{ } l \text{ fois}$$

De la formule de Taylor avec le reste de Lagrange appliquée à  $T(x, t)$  pour  $(1 \leq i \leq n - 1)$  et  $(1 \leq j \leq n - 1)$ , on a :

★ d'une part à l'ordre 2 en t

$$T(x_i, t_{j+1}) = T(x_i, t_j) + T_t(x_i, t_j)\Delta t + \frac{1}{2}T_{tt}(x_i, \tau)(\Delta t)^2, \quad \tau \in [t_j, t_{j+1}] \quad (\text{V.9})$$

ou encore

$$T_t(x_i, t_j) = \frac{T(x_i, t_{j+1}) - T(x_i, t_j)}{\Delta t} - \frac{1}{2}T_{tt}(x_i, \tau)\Delta t, \quad \tau \in [t_j, t_{j+1}]$$

★ d'autre part avec  $\zeta = x_i - x_{i-1}$  à l'ordre 4 en  $x$

$$\begin{aligned} T(x_{i+1}, t_j) &= T(x_i, t_j) + T_x(x_i, t_j)\zeta + \frac{1}{2!}T_{xx}(x_i, t_j)\zeta^2 + \frac{1}{3!}T_{xxx}(x_i, t_j)\zeta^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}T_{xxxx}(\xi, t_j), \quad \xi \in [x_i, x_{i+1}] \\ T(x_{i-1}, t_j) &= T(x_i, t_j) - T_x(x_i, t_j)\zeta + \frac{1}{2!}T_{xx}(x_i, t_j)\zeta^2 - \frac{1}{3!}T_{xxx}(x_i, t_j)\zeta^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}T_{xxxx}(\zeta, t_j), \quad \zeta \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$

Le laplacien de  $T(x, t)$  peut s'écrire avec la formule de Taylor

$$T_{xx}(x_i, t_j) = \frac{T(x_{i+1}, t_j) - 2T(x_i, t_j) + T(x_{i-1}, t_j)}{\zeta^2} - \frac{2}{4!}T_{xxxx}(\varsigma, t_j); \quad \varsigma \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \quad (\text{V.10})$$

Remarquons qu'avec la MEF nous avons obtenu

$$\langle T_t(x, t), \phi_i(x) \rangle = \frac{\zeta}{6}(T_t(x_{i-1}, t) + 4T_t(x_i, t) + T_t(x_{i+1}, t)) \quad (\text{V.11})$$

De l'équation (V.9), on peut avoir les expressions de  $T_t(x_{i-1}, t) + 4T_t(x_i, t) + T_t(x_{i+1}, t)$  :

$$\begin{aligned} T_t(x_{i-1}, t_j) &= \frac{T(x_{i-1}, t_{j+1}) - T(x_{i-1}, t_j)}{\Delta t} - \frac{1}{2}T_{tt}(x_{i-1}, \tau)\Delta t, \quad \tau \in [t_j, t_{j+1}] \\ T_t(x_i, t_j) &= \frac{T(x_i, t_{j+1}) - T(x_i, t_j)}{\Delta t} - \frac{1}{2}T_{tt}(x_i, \tau)\Delta t, \quad \tau \in [t_j, t_{j+1}] \\ T_t(x_{i+1}, t_j) &= \frac{T(x_{i+1}, t_{j+1}) - T(x_{i+1}, t_j)}{\Delta t} - \frac{1}{2}T_{tt}(x_{i+1}, \tau)\Delta t, \quad \tau \in [t_j, t_{j+1}] \end{aligned}$$

En remplaçant  $T_t(x_{i-1}, t_j)$ ,  $T_t(x_i, t_j)$ ,  $T_t(x_{i+1}, t_j)$  et  $T_{xx}(x_i, t_j)$  par leurs expressions ci-dessus dans l'équation (V.7) et en tenant compte du fait que

$$T_{xxxx}(\varsigma, t_j)\zeta^2 = T_{xxxx}(x_i, t_j)\zeta^2 + O(\zeta^3)$$

$$T_{tt}(x_i, \tau)(\Delta t) = T_{tt}(x_i, t_j)(\Delta t) + O(\Delta t)^2,$$

il restera la fonction reste  $R(x, t)$  définie par

$$\begin{aligned} R(x, t) &= -\rho c [T_{tt}(x_{i-1}, t_j)(\Delta t) + T_{tt}(x_i, t_j)(\Delta t) + T_{tt}(x_{i+1}, t_j)(\Delta t)] + \\ &\quad O(\Delta t)^2 + kT_{xxxx}(x_i, t_j)\zeta^2 + O(\zeta^2) \end{aligned}$$

De l'équation différentielle  $\rho c T_t = k T_{xx}$ , on peut déduire l'équation différentielle  $\rho c T_{tt} = k T_{xxxx}$ , et la fonction reste devient

$$R(x_i, t_j) = T_{xxxx}(x_i, t_j)(-6\rho c + k\zeta^2) + O(\Delta t)^2 + O(\zeta^3) \quad (\text{V.12})$$

Il convient donc de choisir le pas de temps  $\Delta t$  et le pas spatial  $\zeta$  tels que  $-6\rho c + k\zeta^2 < 0$  pour réduire le reste  $R(x_i, t_j)$  de l'équation (V.12) inférieure ou égale à  $O(\Delta t)^2 + O(\zeta^3)$ .

Pour le calcul de  $d\theta/dt$  dans l'équation (V.7) avec la formule de Crank-Nicolson, il faut que  $\Delta t$  et  $\zeta$  vérifient

$$1 < \frac{6k\Delta t}{\rho c \zeta^2}. \quad (\text{V.13})$$

Si la condition (V.13) n'est pas respectée, alors la solution de l'équation (V.7) présentera des oscillations spatiales contraires à la physique. Cette condition concerne généralement l'épaisseur  $\zeta$  de la première maille concernée par le choc thermique. Cette contrainte donne la longueur maximale en fonction de l'incrément de temps utilisé :

$$\zeta \leq \zeta_{max} = \sqrt{\frac{6k\Delta t}{\rho c}}.$$

Avec la formule des trapèzes généralisées, l'algorithme d'intégration converge si

$$\zeta \leq \zeta_{max} = \sqrt{\frac{6\nu k \Delta t}{\rho c}}. \quad (\text{V.14})$$

On retrouve une autre démonstration de ce critère faite par J.-M. Bergheau et al. [67].

#### V.4.2 Tests de stabilité

Pour valider le critère de stabilité (V.14), nous avons effectué deux applications numériques. Nous avons choisi les valeurs fixes suivantes :

- longueur de la plaque :  $L = 0.04 \text{ m}$ ,
- pas de discrétisation :  $\zeta = 6.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,
- conductivité thermique :  $k = 0.45 \text{ W/m/}^\circ\text{C}$ ,
- température initiale :  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,
- chaleur volumique :  $\rho c = 1.74 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{}^\circ\text{C}$
- puissance de chauffage constante :  $q = 427.355 \text{ W/m}$ .

Pour ces valeurs choisies, le pas de temps (seuil inférieur) est de  $\Delta t_s = \frac{\rho c \zeta^2}{6k} \approx 0.57 \text{ s}$ . Nous avons choisi deux pas de temps d'intégration : dans un premier temps, un pas de temps supérieur au pas de temps seuil puis un second pas de temps inférieur au pas de temps seuil. On constate sur les figures (Fig.V.3) que les solutions obtenues dépendent du pas de temps choisi. Avec  $\Delta t = 1 \text{ s}$ , la solution est relativement

FIG. V.3 – Profil du champ de température au cours du temps

conforme à la physique, alors qu'avec le pas de temps  $\Delta t = 0.01$  s, la solution présente des oscillations contraires à la physique. En effet, la surface limitée en  $x = 0$  étant continuellement chauffée par une source continue non périodique, il devrait y avoir une évolution de la température dans le matériau conformément à la figure V.3(b).

## V.5 Formulation du problème inverse

Un champ de température est enregistré pendant une durée  $t_f$ . Peut-on trouver des paramètres  $k$  et  $\rho c$  d'un matériau pour lesquels le système linéaire (V.7) est satisfait ?

Dans les calculs inverses considérés, les mesures de température sont supposées provenir de la simulation numérique. Une fois la fonction  $T(x, t)$  obtenue, il existe des quantités inconnues mais fixées de paramètres thermophysiques telles que la valeur du coefficient de conductivité  $k$  et celle de la chaleur volumique  $\rho c$  satisfaisant l'équation de conduction de Fourier qui permet d'avoir la distribution de température.

Le problème inverse vise alors l'évaluation des paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  à partir des mesures de température prises en une série de points sur une direction à la surface d'une plaque et ceci en plusieurs instants.

## V.6 Procédure d'identification des paramètres thermophysiques

### V.6.1 Méthode des moindres carrés

Le problème inverse peut être considéré comme un problème d'optimisation qui vise à trouver le vecteur inconnu de paramètres thermophysiques  $\mathbf{u} = [\rho c \ k]^T$  qui réduise au minimum la fonction [18]

$$J(\rho c, k) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\| \rho c C \frac{d\theta}{dt} + k K \theta - \mathbf{F} \right\|^2 dt \quad (\text{V.15})$$

où  $\| \cdot \|$  est la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $t_f$  est la durée des mesures.

En utilisant la définition de la norme et la linéarité du produit scalaire, la fonction

$J(.,.)$  peut s'écrire

$$J(\rho c, k) = \frac{1}{2}(\rho c)^2 \int_0^{t_f} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, C \frac{d\theta}{dt} \right\rangle dt + \rho c k \int_0^{t_f} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \right\rangle dt + \frac{1}{2}k^2 \int_0^{t_f} \langle K\theta, K\theta \rangle dt \\ - \rho c \int_0^{t_f} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, \mathbf{F} \right\rangle dt - k \int_0^{t_f} \langle K\theta, \mathbf{F} \rangle dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle dt.$$

On peut s'arranger à mettre en évidence le vecteur de paramètres thermophysiques inconnu  $\mathbf{u}$

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho c & k \end{bmatrix} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, C \frac{d\theta}{dt} \right\rangle & \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \right\rangle \\ \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \right\rangle & \langle K\theta, K\theta \rangle \end{bmatrix} dt \begin{bmatrix} \rho c \\ k \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \rho c & k \end{bmatrix} \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, \mathbf{F} \right\rangle \\ \langle K\theta, \mathbf{F} \rangle \end{bmatrix} dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle dt$$

Le gradient de  $J(\mathbf{u})$  au point  $\mathbf{u}$  noté  $\nabla J(\mathbf{u})$  est la variation de  $J$  en ce point et il s'obtient de la façon suivante :

$$J(\mathbf{u} + \epsilon \Delta \mathbf{u}) - J(\mathbf{u}) = \langle \nabla J(\mathbf{u}), \epsilon \Delta \mathbf{u} \rangle + (\text{termes non linéaires en } \|\Delta \mathbf{u}\|) \quad (\text{V.16})$$

où  $\epsilon$  est un réel supposé très petit.

Le vecteur  $\mathbf{u}$  qui réalise le minimum de  $J$  s'obtient par annulation du gradient de  $J$ , i.e.  $\nabla J(\mathbf{u}) = 0$ . Ce vecteur  $\mathbf{u}$  réalisant le minimum serait donc solution du système linéaire tel que :

$$\left( \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, C \frac{d\theta}{dt} \right\rangle & \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \right\rangle \\ \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \right\rangle & \langle K\theta, K\theta \rangle \end{bmatrix} dt \right) \begin{bmatrix} \rho c \\ k \end{bmatrix} = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, \mathbf{F} \right\rangle \\ \langle K\theta, \mathbf{F} \rangle \end{bmatrix} dt.$$

Nous noterons la matrice  $2 \times 2$  symétrique  $A$  et le vecteur du second membre  $\mathbf{f}$  de  $\mathbb{R}^2$  du système linéaire précédent

$$A = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, C \frac{d\theta}{dt} \right\rangle & \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \right\rangle \\ \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \right\rangle & \langle K\theta, K\theta \rangle \end{bmatrix} dt \quad \mathbf{f} = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, \mathbf{F} \right\rangle \\ \langle K\theta, \mathbf{F} \rangle \end{bmatrix} dt$$

Ainsi, trouver les paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  revient à trouver le vecteur  $\mathbf{u}$  du système linéaire

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (\text{V.17})$$

La résolution du système (V.17) permet d'estimer les valeurs des paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$ .

### Remarque V.6.1

On peut avoir directement le système linéaire (V.17) en multipliant l'équation

$$\rho c C \frac{d\theta}{dt} + kK\theta(t) = \mathbf{F}$$

à droite par la transposée du vecteur  $\theta(t)$  puis on intègre sur la durée des mesures et on obtient

$$\rho c \int_0^{t_f} \langle C \frac{d\theta}{dt}, \theta(t) \rangle dt + k \int_0^{t_f} \langle K\theta(t), \theta(t) \rangle dt = \int_0^{t_f} \langle \mathbf{F}, \theta(t) \rangle dt$$

ou encore en se référant à (V.17)

$$A_{11}\mathbf{u}_1 + A_{12}\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_1.$$

Ensuite on multiplie l'équation

$$\rho c C \frac{d\theta}{dt} + kK\theta(t) = \mathbf{F}$$

à droite par le vecteur transposé de  $d\theta/dt$  puis on intègre sur la durée des mesures :

$$\rho c \int_0^{t_f} \langle C \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\theta}{dt} \rangle dt + k \int_0^{t_f} \langle K\theta(t), \frac{d\theta}{dt} \rangle dt = \int_0^{t_f} \langle \mathbf{F}, \frac{d\theta}{dt} \rangle dt$$

ou en utilisant encore la matrice  $A$  et les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{f}$  :

$$A_{21}\mathbf{u}_1 + A_{22}\mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2$$

On retrouve bien le système linéaire

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

### Remarque V.6.2

L'équation (V.17) est mal conditionnée. En effet,

(i) les composantes  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  et  $A_{22}$  de la matrice  $A$  sont respectivement homogènes à  $(m \cdot ^\circ C/s)^2$ ,  $(^\circ C)^2/s$  et  $(^\circ C/m)^2$ ,

(ii)  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  du vecteur  $\mathbf{u}$  sont respectivement homogènes à  $J/m^3/^\circ C$  et  $W/m/^\circ C$

(iii)  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{f}_2$  du vecteur  $\mathbf{f}$  sont respectivement homogènes à  $W \cdot ^\circ C/s$  et  $W \cdot ^\circ C/m^2$ , alors qu'une matrice ou un vecteur doit être homogène.

Par changement d'échelle, nous avons rendu homogène la matrice  $A$ , les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{f}$ . Le conditionnement donne :

$$A = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} \langle C \frac{d\theta}{dt}, C \frac{d\theta}{dt} \rangle & \frac{1}{t_f} \langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \rangle \\ \frac{1}{t_f} \langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \rangle & \frac{L^2}{t_f^2} \langle K\theta, K\theta \rangle \end{bmatrix} dt \quad \mathbf{f} = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \langle C \frac{d\theta}{dt}, \mathbf{F} \rangle \\ \frac{L^2}{t_f} \langle K\theta, \mathbf{F} \rangle \end{bmatrix} dt$$

et le vecteur  $\mathbf{u} = [\rho c L^2 \quad k t_f]^T$

Examinons l'existence et l'unicité de solution du système linéaire (V.17), ce qui assure la possibilité de déterminer les paramètres thermophysiques simultanément. Le système linéaire (V.17) est résoluble si la matrice  $A$  de ce système est inversible ; cette propriété est assurée par la défini-positivité de la matrice  $A$ .

### Proposition V.6.1

La matrice  $A$  du système (V.17) est défini-positif.

*Preuve.* Nous allons illustrer la démonstration de cette proposition par un exemple. La fonction température

$$T(x, t) = d(\alpha t + \frac{x^2}{2})$$

est une solution de l'équation de conduction de la chaleur.

En découpant la longueur  $L$  du matériau en deux morceaux égaux suivant un axe  $(0, x)$ , le vecteur température donné par l'expression (V.4) est ici

$$\theta(t) = d\alpha t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{L^2}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et le vecteur dérivé du vecteur température est

$$\frac{d\theta}{dt} = d\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que

$$K\theta = \frac{L}{4} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C\theta = \frac{Ld\alpha}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



On montre qu'une matrice  $n \times n$  symétrique  $M$  est défini-positive si et seulement si pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{v}, M\mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0.$$

Pour se faire, soit  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2]^T$ , alors  $\mathbf{V}_1 C d\theta/dt + \mathbf{V}_2 K\theta = 0$  implique

$$\begin{cases} -3\mathbf{V}_1 + d\alpha\mathbf{V}_2 & = 0 \\ -2\mathbf{V}_1 + 2\alpha\mathbf{V}_2 & = 0 \\ 3\mathbf{V}_2 + d\alpha\mathbf{V}_2 & = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = 0.$$

On peut étendre ce calcul à une dimension plus grande. □

Nous venons de décrire les différentes étapes pour la détermination simultanée des paramètres  $k$  et  $\rho c$ . La méthode sera complète une fois qu'on peut préciser les incertitudes sur chacun des paramètres identifiés.

### V.6.2 Calcul de précision sur les paramètres identifiés

Toute mesure d'une grandeur physique quelconque étant nécessairement entachée d'erreurs, les valeurs des paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  ne sont que des approximations respectivement des coefficients de la conductivité thermique et de la chaleur volumique.

Afin de prendre conscience du degré d'approximation de ces paramètres, nous estimons les erreurs commises sur les mesures de température et de flux de chaleur et nous calculons leurs conséquences sur les résultats obtenus. Ces conséquences peuvent être estimées par calcul d'erreurs, ou calcul d'incertitude.

Puisque les intégrales introduites par MEF ont été calculées sans aucune approximation, nous ne tiendrons compte que des incertitudes sur les données de température et du flux de chaleur. Nous supposons que les erreurs sur le champ de température sont additives, indépendantes, de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma$ .

L'*erreur absolue* d'une grandeur mesurée est l'écart qui sépare la valeur mesurée expérimentalement de la valeur que l'on a de bonne raison de considérer comme "valeur vraie".

L'*erreur relative* est le quotient de l'erreur absolue à la valeur vraie.

#### Remarque V.6.3

(i) L'*erreur absolue* et la *valeur vraie* ont même unité alors que l'*erreur relative* s'exprime en pourcentage (%).

(ii) On ne peut parler d'erreur que si l'on dispose d'une valeur de référence que l'on peut considérer comme valeur vraie. Le calcul d'erreur est possible lorsqu'il s'agit de résultats obtenus par simulation numérique, et dans ce cas, est considérée comme valeur vraie, toute valeur d'entrée.

Vu que pour la plupart des mesures, exemple des mesures de caractérisation de matériaux, on ne dispose pas souvent de valeur de référence, par des analyses objectives des moyens utilisés tout au long des calculs, nous pouvons nous faire une idée de l'erreur maximale commise : c'est l'*incertitude*.

Une mesure est complètement indiquée par la valeur estimée et l'intervalle à l'intérieur duquel on est à peu près certain que se situe la valeur vraie. L'*incertitude absolue* est, par définition, la demi-longueur de cet intervalle. Il existe deux manières de procéder au calcul d'incertitude absolue.

Lorsque la distribution du bruit est supposée **faiblement aléatoire**, on calcule des incertitudes maximales, alors qu'on calcule des *incertitudes probables* lorsque la distribution est supposée **fortement aléatoire et indépendantes**.

#### Remarque V.6.4

Les incertitudes sont calculées à partir des écarts types sur les données ou mesures. Les incertitudes probables  $\delta_{prob}$  calculées en prenant  $2\sigma$  sur les mesures expriment 68% de chance d'être dans l'intervalle de confiance déterminé. Avec une incertitude  $2\delta_{prob}$ , on a 95% de chance pour que la valeur estimée soit dans l'intervalle de confiance.

Des hypothèses faites sur la distribution des bruits, il est souhaitable de calculer les incertitudes probables.

Les composantes de la matrice  $A$  et du vecteur  $\mathbf{f}$  étant obtenues par produit scalaire de vecteurs, nous calculerons les incertitudes probables sur le réel

$$a = \int_0^{t_f} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle dt.$$

Par exemple, la première composante de la matrice  $A$  est  $A_{11} = \int_0^{t_f} \langle Cd\theta/dt, Cd\theta/dt \rangle dt$ , et donc  $x = y = Cd\theta/dt$ .

Avec la formule des trapèzes, nous avons successivement

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle dt \quad \text{avec } t_0 = 0, t_m = t_f \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (\langle \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle + \langle \mathbf{x}^{j+1}, \mathbf{y}^{j+1} \rangle) \frac{(t_{j+1} - t_j)}{2}, \quad \text{avec } x^j = x(t_j) \end{aligned}$$

Notons ensuite par

$$a^j = (\langle \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle + \langle \mathbf{x}^{j+1}, \mathbf{y}^{j+1} \rangle) \frac{(t_{j+1} - t_j)}{2}$$

Des égalités

$$\delta(\langle \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle) = \sqrt{(\langle \delta \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle)^2 + (\langle \mathbf{x}^j, \delta \mathbf{y}^j \rangle)^2} \quad \text{et} \quad \delta(\langle \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle) = \delta(\langle \mathbf{x}^{j+1}, \mathbf{y}^{j+1} \rangle),$$

nous obtenons la formule d'incertitude probable sur  $a^j$  :

$$\delta(a^j) = \frac{\sqrt{2 [(\langle \delta \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle)^2 + (\langle \mathbf{x}^j, \delta \mathbf{y}^j \rangle)^2]} (t_{j+1} - t_j)^2}{2}$$

et par suite celle de  $a$

$$\delta a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} [(\langle \delta \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle)^2 + (\langle \mathbf{x}^j, \delta \mathbf{y}^j \rangle)^2]} (t_{j+1} - t_j)^2 \quad (\text{V.18})$$

De la formule (V.18), on calcule les incertitudes probables sur chacune des composantes de  $A$  et  $\mathbf{f}$ .

### Remarque V.6.5

*Des hypothèses faites sur les mesures de température, les incertitudes relatives sur chaque mesure de température en tout point  $i$  est  $\delta\theta$  i.e.  $\delta(T(x_i, t)) = \delta\theta$ . Il vient que  $\delta(A_{22}) = 0$  puisque tout vecteur colinéaire au vecteur de composantes toutes égales à 1 est dans le noyau de la matrice  $K$ .*

Des égalités

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{f}_1)^2 &= (A_{11} \delta \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{u}_1 \delta A_{11})^2 + (A_{12} \delta \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{u}_2 \delta A_{12})^2 \\ (\delta \mathbf{f}_2)^2 &= (A_{12} \delta \mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{u}_1 \delta A_{12})^2 + (A_{22} \delta \mathbf{u}_2)^2, \end{aligned}$$

on obtient les incertitudes probables sur le vecteur  $\mathbf{u}$  par

$$\begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{12}^2 \\ A_{12}^2 & A_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_1^2 \\ \delta \mathbf{u}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{f}_1^2 \\ \delta \mathbf{f}_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta A_{11}^2 & \delta A_{12}^2 \\ \delta A_{12}^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^2 \\ \mathbf{u}_2^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{V.19})$$

Par exemple, l'incertitude probable  $\delta(k)$  est ainsi obtenue avec un niveau de confiance de 95%, c'est-à-dire que nous sommes certains 95 fois sur 100 que notre meilleure valeur estimée pour la conductivité thermique est comprise dans l'intervalle  $[k - \delta(k), k + \delta(k)]$ . Il en est de même pour le coefficient de la chaleur volumique. Finalement les résultats seront présentées de la façon suivante :

$$k = k_{id} \pm \delta(k) \quad \rho c = \rho c_{id} \pm \delta(\rho c)$$

où  $k_{id}$  et  $\rho c_{id}$  sont respectivement les valeurs estimées de la conductivité thermique et de la chaleur volumique par la méthode inverse.

### Remarque V.6.6

*Confère l'annexe B pour les calculs détaillés des incertitudes sur la matrice  $A$  ou le vecteur  $\mathbf{F}$*

### V.6.3 Construction d'un algorithme de résolution du problème inverse

Après avoir établi les étapes informatiques de base requises pour la solution du problème inverse ci-dessus, nous présentons maintenant l'algorithme permettant sa résolution.

Pour déterminer simultanément les paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  à partir d'un champ de température, il faut :

1. calculer par intégration numérique les trois coefficients de la matrice  $A$  ;
2. calculer par intégration numérique les deux coefficients du vecteur  $\mathbf{f}$  ;
3. déterminer algébriquement la solution  $\mathbf{u}$  de l'équation  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ .

### Remarque V.6.7

*Les mesures n'étant pas continues, on peut remplacer les intégrales par des sommes. Nous avons opté pour la méthode des trapèzes pour calculer les intégrales. Il existe d'autres méthodes d'intégration pour pouvoir calculer les composantes de la matrice  $A$  et du vecteur  $\mathbf{f}$ .*

*La matrice  $A$  et le vecteur  $\mathbf{v}$  sont appelés généralement matrice de mesures et vecteurs de mesures.*

## V.7 Validation de l'algorithme

Pour démontrer la validité et l'exactitude de la méthode inverse considérée, nous choisissons des valeurs numériques réalistes des paramètres thermophysiques pour

une simulation numérique du champ de température. Le champ de température est obtenu de la résolution du système (V.8) avec ajout de bruit aléatoire.

### V.7.1 Simulation du champ de température

Pour la simulation numérique, ont été choisis, la longueur de la plaque

$$L = 0.04 \text{ m}$$

le coefficient de conductivité thermique

$$k_{\text{si}} = 0,45 \text{ W/m/}^\circ\text{C}$$

et le coefficient de chaleur volumique

$$\rho c_{\text{si}} = 1,74 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3/\text{}^\circ\text{C}.$$

La température initiale est  $T_0(x) = 20^\circ\text{C}$  et le flux de chaleur auquel est soumis la plaque est choisi constant  $q_s = 397\text{W/m}$ .

#### Remarque V.7.1

*Les moyens expérimentaux dont nous disposons ne nous permettront pas d'évaluer le flux de chaleur variable dans le temps. Le flux de chaleur sera, dans les conditions expérimentales, la puissance électrique par unité de longueur fournie par un générateur.*

Pour se mettre dans les conditions expérimentales, un bruit aléatoire de type random  $a\omega$  est introduit dans le champ de température de la manière suivante

$$\theta_i = \Theta_i + a\omega$$

où  $\Theta_i$  est obtenu de la résolution de (V.8). La fonction C++ Rand génère le nombre  $\omega$  dans l'intervalle  $[-1 \ 1]$ . Un bruit aléatoire d'écart type 0.05 est imposé sur le flux de chaleur  $q$ .

Les figures V.4 et V.5 donnent respectivement le champ de température exploité et le profil de la température. Pour la figure V.4, le point  $x = 40$  représente la surface chauffée, et la cartographie illustre la variation de la température en temps sur le matériau réduit en une ligne.

FIG. V.4 – Champ de température simulée suivant une ligne

FIG. V.5 – Profil de la température au cours du temps

## V.7.2 Exploitation du champ de température simulé

La résolution numérique des problèmes inverses est extrêmement sensible à des petits écarts sur les données ; nous étudierons dans les sous sections suivantes, l'effet du bruit, du choix du schéma d'intégration, du choix du pas de discrétisation par éléments finis et du temps de contrôle du flux (durée des mesures) sur l'estimation des valeurs des paramètres thermophysiques.

### V.7.2.1 Influence du schéma d'intégration ou de dérivation

Le schéma d'intégration peut amplifier les bruits du champ de température. Schémas numériques :

FIG. V.6 – Profil comparatif du vecteur dérivées des trois méthodes

Les mesures de température ont été effectuées pendant une durée  $t_f$ . Supposons enregistrer  $m$  mesures de température à intervalle de temps constant  $\Delta t$  c'est-à-dire  $t_f = m\Delta t$ . Le vecteur  $\theta(t)$  n'est donc connu qu'aux instants  $0, \Delta t, \dots, i\Delta t, \dots, t_f$ . Nous définissons trois méthodes de dérivation première, et à titre d'exemple pour  $a = 0.02^\circ C$  (c'est l'écart-type des mesures effectuées par les caméras infrarouges actuelles), nous avons analysé les profils des vecteurs dérivés de chaque méthode.

★ dérivée première décentrée à droite

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}$$

#### Remarque V.7.2

*Cette formule ne permet pas de calculer la dérivée de  $\theta$  en  $t = t_f$ .*

★ dérivée première décentrée à gauche

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\theta(t - \Delta t) - \theta(t)}{-\Delta t}$$

**Remarque V.7.3**

*Cette formule ne permet pas de calculer la dérivée de  $\theta$  en  $t = 0$ .*

★ dérivée première centrée

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t - \Delta t)}{2\Delta t}$$

**Remarque V.7.4**

*Cette formule ne permet pas de calculer la dérivée de  $\theta$  en  $t = 0$  et en  $t = t_f$ .*

La figure Fig.V.6 illustre l'allure des courbes  $d\theta(t)/dt$  obtenues à partir de champs de température bruité et non bruité pour un même instant  $t$ . Il ressort des analyses que la dérivée centrée conviendrait mieux dans les techniques d'intégration et de dérivation numérique. Pour ne pas perdre des informations, la dérivée à l'instant  $t = 0$  est récupérée par la dérivée centrée à gauche alors que la dérivée à  $t = t_f$  est obtenue par la dérivée centrée à droite. Le graphe "Les trois Dérivées" correspond aux courbes obtenues par dérivation des données non brutées ; elles sont identiques.

### V.7.2.2 Influence de la finesse du maillage par éléments finis et du temps de contrôle du flux

Le rapport  $\zeta^2/\Delta t$  est homogène au coefficient de diffusivité  $\alpha = k/\rho c$  ; de plus la stabilité de l'algorithme d'intégration (V.8) impose pour  $\nu = 0.5$  le critère

$$\frac{3k\Delta t}{\rho c\zeta^2} > 1.$$

Pour  $k$  et  $\rho c$  spécifiés plus haut, nous avons choisi le pas d'intégration  $\Delta t = 1$  s et des pas de discrétisation spatiale  $\zeta$  tels le critère (V.13) soit toujours vérifié.

La précision des caméras infrarouges actuelles étant de l'ordre de 2%, nous avons donc bruité les valeurs de température simulées de  $\beta^\circ C$ , pour  $\beta \in [-0.02 \ 0.02]$

$\rho c_{si}$  (resp.  $k_{si}$ ) est la valeur simulée de la chaleur volumique (resp. conductivité thermique) et  $\rho c_{id}$  (resp.  $k_{id}$ ) est la valeur identifiée de la chaleur volumique (resp. conductivité thermique). La figure V.7 donne le profil de  $\rho c_{id} - \rho c_{si}$  pour diverses

FIG. V.7 – Ecart entre valeur simulée et valeurs identifiées pour la chaleur volumique ; nombre d'intervalles et durée de contrôle du flux nécessaires pour une bonne estimation

FIG. V.8 – Ecart entre valeurs simulées et valeurs identifiées pour la conductivité thermique; nombre d'intervalles et durée de contrôle du flux nécessaires pour une bonne estimation

valeurs de  $t_f$  et  $n$ . On constate que  $\rho c$  est sensible au temps de contrôle du flux de chaleur et du pas de discrétisation éléments finis. Quelle que soit la finesse du maillage, on peut toujours arriver à approcher au mieux la valeur  $\rho c_{si}$  pourvu qu'on soit capable de contrôler pour un temps relativement long le flux. Même pour  $n = 30$ , on peut avoir une incertitude de l'ordre de 2.29% si on est capable de contrôler le flux pendant 45 minutes.

La figure V.8 représente le profil de  $k_{id} - k_{si}$  pour diverses valeurs de  $t_f$  et  $n$ . Contrairement à  $\rho c$ , quel que soit le temps de contrôle du flux,  $k_{id} - k_{si}$  reste constant pour un pas  $\zeta$  fixé. On n'améliore donc pas les résultats en augmentant la durée du test. La finesse du maillage permet d'avoir de très bons résultats.

Des deux courbes, il ressort que pour  $n = 60$  et pendant un temps de contrôle relativement court (entre 2mn 20s et et 5mn 40s), on peut estimer les deux paramètres avec de très bonnes précisions.

Signalons que les écarts entre les valeurs simulées et les valeurs identifiées ne sont pas sensibles à la variation des incertitudes sur les flux de chaleur mais évoluent avec les incertitudes sur la température.

Notons enfin que le critère de stabilité  $\zeta \leq 6\nu k \Delta t / \rho c$  nous impose le choix de  $n \geq 30$ . La limite supérieure est donnée par la résolution de la caméra et le grandissement utilisée. Cette limite est dans notre cas de 60, donc prendre un maillage plus fin reviendrait à faire du suréchantillonnage.

Les valeurs des paramètres estimés pour  $n = 60$  et les incertitudes sur ces paramètres sont repertoriées dans le tableau (V.1).

Pour des données de température et de flux de chaleur bruitées conformément aux conditions expérimentales, la conductivité thermique et la chaleur volumique permettant de les avoir sont :

$$k_{id} = 0,438 \pm 0,034 \text{ W/m/}^\circ\text{C}$$

$$\rho c_{id} = (1,739 \pm 0,07) 10^6 \text{ J/m}^3/\text{}^\circ\text{C}.$$

Autrement dit, nous sommes certains 95 fois sur 100 que la conductivité thermique et



Paramètres	Simulation	Données non bruitées		Données bruitées		
		Estimation	Ecart	Estimation	Ecart	$\delta_{\text{prob}}$
$k(W/m/^\circ C)$	0,45	0,449	0,001	0,438	0,012	0,017
$\rho c(J/m^3/^\circ C)$	$1,74 \cdot 10^6$	$1,75 \cdot 10^6$	$0,01 \cdot 10^6$	$1,739 \cdot 10^6$	$0,011 \cdot 10^6$	$0,039 \cdot 10^6$

TAB. V.1 – Résultats des paramètres estimés à partir d'un champ de température simulé

la chaleur volumique estimées se situent respectivement dans les intervalles  $[0,404 - 0,472]$  et  $[1669000 - 1809000]$ .

## V.8 Conclusion

La MEF est utilisée pour écrire l'équation aux dérivées partielles de conduction en un système différentiel ordinaire. Puis la technique des trapèzes généralisées est utilisée pour les intégrations numériques dans le temps. Il ressort de l'analyse de stabilité de l'algorithme de résolution du problème direct qu'il existe une relation étroite entre le pas spatial de discrétisation et le pas d'intégration.

La défini-positivité de la matrice caractérisant le système linéaire du problème inverse assure qu'on peut identifier simultanément les deux paramètres thermophysiques.

Le champ de température et le vecteur flux de chaleur qui constituerait les données d'entrée pour la méthode inverse sont générés dans les mêmes conditions que les données d'entrée dans le cadre expérimental.

Les analyses statistiques des résultats pour divers pas spatiaux ont permis de choisir un pas spatial proche d'un pixel. Puisque les valeurs des coefficients de conductivité thermique des polymères sont faibles, nous choisirons un pas de temps supérieur ou égale au pas de temps lors de la simulation numérique. Le fait que les valeurs d'entrée pour la simulation se trouvent dans les intervalles de confiance permet de valider l'algorithme.

Le coût de calcul de cet algorithme est très réduit par rapport à l'algorithme du gradient conjugué.

Dans l'algorithme présenté pour identifier les paramètres thermophysiques, les vecteurs température sont directement incorporés dans le système différentiel ordinaire obtenu par la MEF

---

L'algorithme d'identification est basé sur des techniques des moindres carrés. Notre méthode des moindres carrés n'as pas consisté à minimiser des carrés des différences des solutions obtenues par séries et des solutions obtenues expérimentalement. Nous avons cherché directement à déterminer la conductivité et la chaleur volumique qui rendent le système linéaire résoluble. Faisant ainsi, nous avons utilisé la linéarité de ces paramètres. L'équation de conduction de la chaleur et sa forme discrétisée par éléments finis sont linéaires par rapport à la conductivité thermique et la chaleur volumique. Cet algorithme d'identification sera exploité dans le chapitre suivant pour identifier les paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  de polymères à partir de mesure de champs de température expérimentaux.



# Chapitre VI

## Identification de Paramètres Thermophysiques de Polymères

### Sommaire

---

<b>VI.1 Introduction</b> . . . . .	<b>122</b>
<b>VI.2 Méthodes de mesures de champ de température</b> . . . . .	<b>123</b>
<b>VI.3 Dispositifs expérimentaux</b> . . . . .	<b>124</b>
VI.3.1 Mesure de la température par caméra infrarouge . . . . .	124
VI.3.2 Conditions expérimentales . . . . .	125
<b>VI.4 Montage expérimental</b> . . . . .	<b>126</b>
<b>VI.5 Polymères translucide, semi-amorphe et amorphe étudiés</b>	<b>127</b>
<b>VI.6 Traitement des images infrarouges</b> . . . . .	<b>128</b>
VI.6.1 Historique des types de lissage . . . . .	128
VI.6.2 Logiciel utilisé . . . . .	129
<b>VI.7 Exploitation des données expérimentales</b> . . . . .	<b>129</b>
VI.7.1 Calcul du flux de chaleur linéique . . . . .	130
VI.7.2 Paramètres thermophysiques du polyméthylméthacrylate .	131
VI.7.3 Paramètres thermophysiques du polyéthylène transparent	134
VI.7.4 Paramètres thermophysiques du polyéthylène amorphe . .	138
<b>VI.8 Conclusion</b> . . . . .	<b>142</b>

---

## VI.1 Introduction

Pour valider expérimentation notre algorithme d'identification, nous avons choisi des matériaux solides dont les propriétés thermiques sont relativement bien connues et qui présente un intérêt d'études pour notre équipe. L'algorithme d'identification développé dans le chapitre précédent est appliqué pour caractériser trois types de polymères : le polyéthylène semi-amorphe, le polyéthylène transparent et le polyméthacrylate de méthyl (PMMA) ou le plexiglass dont les paramètres thermophysiques tels que la conductivité thermique  $k$  et la chaleur volumique  $\rho c$  sont bien connues.

Le problème direct considéré est relatif aux transferts de chaleur dans une plaque rectangulaire de polymère d'épaisseur  $e$ , de largeur  $l$  et de longueur  $L$ . En supposant la plaque homogène et isotrope de faible épaisseur, nous pouvons considérer la conduction unidimensionnelle.

Sur la surface définie en  $x = 0$ , est placée une résistance chauffante alimentée par un générateur électrique. Cette résistance fournit au matériau une quantité de chaleur constante  $q$ . La quantité  $q$  représente la puissance par unité de longueur fournie au point  $x = 0$  et à l'instant  $t > 0$  par le générateur. La surface en  $x = L$  est supposée isolée. Les autres surfaces sont bien protégées contre tout courant convectif. La température suivant l'axe  $(O, x)$  de la plaque avant la chauffe est donnée par la fonction  $T_0(x)$ .

La figure Fig.V.1 exprime la forme géométrique et les coordonnées unidimensionnelles du problème physique.  $\rho$ ,  $c$  et  $k$  étant des constantes positives données, représentant

FIG. VI.1 – Conduction unidimensionnelle

respectivement la densité volumique, la chaleur spécifique massique et la conductivité thermique du matériau, la température de la plaque au point  $x$  et à l'instant  $t$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L]. \quad (\text{VI.1})$$

A cette équation on adjoint les **conditions aux limites de flux** traduisant les

effets sur les surfaces

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (\text{VI.2a})$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L \quad t > 0 \quad (\text{VI.2b})$$

et la **condition initiale** décrivant l'état initial du matériau suivant une ligne

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in [0, L]. \quad (\text{VI.3})$$

La discrétisation spatiale de l'équation de conduction de la chaleur conduit au système différentiel ordinaire (confère chapitre V)

$$\rho c \frac{d\theta}{dt} + kK\theta(t) = \mathbf{F}.$$

La caractérisation des polymères passent donc pour l'estimation des paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  dans (V.7). Ceci revient à poser le problème inverse qui rappelons-le, consiste à déterminer  $\rho c$  et  $k$  à partir de champ de température mesuré sur des polymères. Il a été montré dans le chapitre précédent que la détermination de ces paramètres thermophysiques de l'équation (V.7) revient à la recherche du vecteur  $\mathbf{u}$  de (voir section V.6)

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Le calcul de la matrice  $A$  et du vecteur  $\mathbf{f}$  nécessite outre les matrices  $C$  et  $K$ , les mesures du flux de chaleur et les variations de température suivant l'axe  $(O, x)$  de la plaque.

Avant la mise en œuvre du montage du dispositif expérimental, décrivons les moyens utilisés pour le réaliser. Ensuite, nous exposons les méthodes de mesures de champ de température et la technique retenue pour effectuer les mesures et les traitements des images acquises afin de caractériser de trois polymères.

## VI.2 Méthodes de mesures de champ de température

Il est très difficile de classer les méthodes de mesure du champ de température ; la classification la plus naturelle consiste à considérer deux grands groupes :

- les méthodes en régime permanent,
- les méthodes en régime variable.

En régime permanent, le temps n'intervient pas et les mesures effectuées permettent d'atteindre uniquement la conductivité thermique. Alors qu'en régime variable, les mesures sont effectuées en fonction du temps. Cette dernière permet d'identifier plusieurs paramètres : conductivité, diffusivité, effusivité ou d'autres groupements de  $k$  et  $\rho c$ .

L'algorithme d'identification développé au chapitre V porte sur l'estimation des paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$ , donc nous nous plaçons dans les méthodes en régime variable.

Les méthodes en régime variable sont actuellement les plus utilisées. Elles consistent toutes à appliquer sur un échantillon à l'équilibre une perturbation thermique, et à mesurer une ou plusieurs températures (ou flux de chaleur) en fonction du temps. Une méthode en régime variable se différencie de l'une à l'autre par :

- le type de perturbation,
- le type de mesure ou le lieu de mesure,
- la géométrie du problème.

L'apport de chaleur, qui peut s'effectuer à partir de diverses sources se caractérise par son évolution temporelle. les sources de chaleur peut être [31], [33] :

- des perturbations de type échelon (flux constant),
- des perturbations de type Dirac (flux impulsionnel),
- des perturbations périodiques,
- des perturbations de formes quelconques mais finies.

La température est la grandeur mesurée à la surface des éprouvettes testées avec une perturbation de type échelon.

## VI.3 Dispositifs expérimentaux

### VI.3.1 Mesure de la température par caméra infrarouge

Nous utilisons une caméra infrarouge avec laquelle on peut avoir accès aux champs de température locaux ou une cartographie complète du matériau.

La mesure par rayonnement infrarouge émis par un corps opaque placé dans un environnement correspond :

- au rayonnement de l'objet qui est affecté par la traversée de l'atmosphère,
- au rayonnement émis par l'atmosphère elle-même,
- au rayonnement émis par l'environnement, réfléchi par l'échantillon et modifié par la traversée de l'atmosphère.

Une caméra de type FLIR SC3000 à matrice de détecteurs QWIP refroidie par cycle Stirling dont le domaine spectral est de 8 à 9  $\mu m$  (Fig.VI.2) est utilisée pour la prise des images. D'après les données techniques, données vérifiées par les travaux en

FIG. VI.2 – caméra Infrarouge

D.E.A de A. Germanau [52], la sensibilité de la caméra est inférieure à 0.02 °C. Ici, en chaque pixel est enregistrée une information qui contient toutes les caractéristiques thermiques du matériau. Un traitement statistique de l'ensemble des informations disponibles et un modèle inverse performant nous permettent d'extraire les mesures du bruit. Pour étalonner la caméra, des essais ont été effectués au sein de l'équipe. Il a été constaté une légère dérive et une légère évolution de la température dans le temps. Cette dernière ne provient pas forcément de la caméra mais peut-être de la variation de la température de l'enceinte dans laquelle se déroule la manipulation. Pour éliminer tout problème provenant d'une éventuelle dérive de la caméra ou d'une variation de la température ambiante, on place dans le même plan à côté de l'échantillon étudié un échantillon identique qui va servir de témoin (Fig.VI.3). La

FIG. VI.3 – Eprouvette témoin et éprouvette étudiée

température est mesurée sur les deux échantillons. La différence des mesures sur les deux éprouvettes donne la température relative en procédant de telle façon que l'éprouvette témoin ne soit soumise à aucun flux de chaleur pouvant faire varier sa température.

### VI.3.2 Conditions expérimentales

Afin d'avoir les meilleurs résultats possibles, nous devons nous placer dans de bonnes conditions expérimentales :

- l'échantillon est peint en noir mat afin de le considérer comme un corps noir avec une émissivité voisine de 1.
- la caméra infrarouge est placée le plus proche possible de l'échantillon et perpendiculairement à celui-ci.
- des obstacles sont mis en place de part et d'autre de la caméra pour minimiser les réflexions.



- l'éprouvette est suffisamment longue pour respecter la nullité du flux sur la face non chauffée.
- la puissance de chauffe est contrôlée par un générateur électrique. Afin d'éviter les pertes de flux et de fortes variations de température dans les polymères, nous imposerons de très faibles intensités de courant.

## VI.4 Montage expérimental

L'objectif étant de créer un champ de température, il va falloir chauffer l'échantillon étudié afin de relever les variations de température.

Le spécimen est constitué de deux plaques de propriétés thermiques, de nature et de dimensions identiques. Une résistance chauffante est confinée entre les deux plaques. Le spécimen est constitué de deux plaques de polymères identiques dans l'esprit d'utiliser toute la puissance électrique fournie par le générateur. Dans ces conditions, on suppose que le flux imposé se répartit de façon égale dans les deux plaques. De ces esprits de conception, une seule des deux plaques constituant le spécimen sera étudiée pour la détermination des paramètres thermophysiques.

Les éprouvettes sont suffisamment longues pour que le flux en  $x = L$  soit considéré nul. Confère le schéma du principe donné par la figure (VI.4). La chauffe est contrôlée

FIG. VI.4 – Schéma du principe

par un voltmètre et un ampèremètre. Les pas de temps et de l'espace pour l'acquisition sont choisis conformément aux analyses faites lors de la simulation numérique. Un moniteur vidéo reliant à la caméra infrarouge permet de suivre l'évolution de la cartographie thermique. Cette visualisation permet d'observer la condition de nullité du flux sur la surface  $x = L$ . En fait, si une variation de température est engendrée par un apport de chaleur, alors on peut conclure qu'il n'y a pas d'apport de flux de chaleur si la température reste constante et égale à  $T(L, 0)$  en  $x = L$ .

Le montage expérimental pour les mesure des champs de température est donné par la figure (VI.5).

FIG. VI.5 – Montage Expérimental

## VI.5 Polymères translucide, semi-amorphe et amorphe étudiés

La caractérisation sur trois polymères pour lesquels les paramètres thermophysiques sont connus. L'objectif est donc de retrouver ces valeurs fournies par les fabricants à partir des mesures de champs de température.

Les polymères homogènes et isotropes étudiés sont : le polyméthylméthacrylate de méthyl (PMMA) d'appellation courante plexiglass et le polyéthylène.

Au moins deux essais ont été effectués sur chacune des éprouvettes de polyéthylène d'épaisseurs différentes de formes parallélépipédiques. La géométrie de l'échantillon et l'axe des coordonnées sont bien choisies afin de décrire le problème de conduction en coordonnées cartésiennes en dimension un.

Notons que les dimensions des échantillons sont telles que les pertes latérales et surfaciques peuvent être négligeables, comme le suppose le modèle théorique.

Enfin, ces échantillons présentent les caractéristiques physiques suivantes : homogénéité et isotropie.

Voici les caractéristiques fournies par les fabricants. Seule la masse volumique de ces matériaux est précise. La conductivité thermique  $k$  et la capacité thermique  $c$  ne sont pas précises. L'épaisseur de l'éprouvette est notée  $e$ .

- ★ polyéthylène semi-amorphe (transparent) d'épaisseur  $e = 1$  mm, de longueur  $L = 9,4$  cm et de largeur  $l = 6,4$  cm :

$$\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 1200 \text{ à } 1350 \text{ J/kg/}^\circ\text{C}$$

$$k = 0,15 \text{ à } 0,4 \text{ W/m/}^\circ\text{C}$$

- ★ polyéthylène d'épaisseur  $e = 2,25$  mm, de longueur  $L = 9,1$  cm et de largeur  $l = 2,75$  cm

$$\rho = 940 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 1900 \text{ à } 1350 \text{ J/kg/}^\circ\text{C}$$

$$k = 0,42 \text{ à } 0,51 \text{ W/m/}^\circ\text{C}$$

- ★ plexiglas (PMMA) amorphe d'épaisseur  $e = 6,12$  mm, de longueur  $L = 14,5$  cm et de largeur  $l = 4,5$  cm :

$$\rho = 1190 \text{ kg/m}^3$$

$$c = 1400 \text{ à } 1500 \text{ J/kg/}^\circ\text{C}$$

$$k = 0,17 \text{ à } 0,19 \text{ W/m/}^\circ\text{C}$$

## VI.6 Traitement des images infrarouges

### VI.6.1 Historique des types de lissage

Le bruit des images infrarouges ( $\pm 0,02^\circ C$  sur la température relative) peut provenir du type de détecteur, des réflexions parasites à la surface du matériau ou du matériau lui-même. Le fait de calculer les dérivées successives engendre du bruit supplémentaire. Un lissage devient donc indispensable. Il existe plusieurs méthodes permettant d'améliorer les images afin d'obtenir les meilleures informations possibles.

#### VI.6.1.1 Lissage par moindre carré

Cette méthode consiste à approcher la carte de température par un polynôme du second degré en  $x$  à l'instant  $t$ . Le lissage du champ de température est tout à fait convenable, en revanche les dérivées successives sont mal estimées.

#### VI.6.1.2 Filtrage par convolution

Les hautes fréquences constituant le bruit sont éliminées en multipliant dans le domaine spectral la transformée de Fourier de la température par un filtre donné. Cette multiplication dans le domaine spectral correspond à un produit de convolution dans le domaine réel.

Une fenêtre de convolution  $\phi$  est définie (fenêtre de Hamming, fenêtre de Gauss, etc.); elle introduit une fréquence de coupure. L'opération suivante permet d'effectuer le filtrage de la température  $\theta$  :

$$\theta_f = Re [TF^{-1}(N.TF(\theta).TF(\phi))]$$

$TF$  et  $TF^{-1}$  correspondent respectivement à la transformée de Fourier et à la transformée de Fourier inverse du signal considéré.  $N$  définit la dimension des données filtrées,  $Re$  est la partie réelle de la transformée de Fourier inverse calculée.

Le laplacien et la dérivée par rapport au temps de la température peuvent être lissés de la même manière.

Le filtrage par convolution supprime les hautes fréquences du signal; il permet d'éviter les effets de crénelage. Cependant, la fréquence de coupure ne doit pas être trop proche de la fréquence du signal. Si le rapport signal sur bruit est trop faible, cette méthode devient inutilisable.

## VI.6.2 Logiciel utilisé

Notre logiciel d'acquisition repose sur deux types de filtrage : filtrage passe-bas et filtrage temporel. Ce logiciel de filtrage est développé au sein de l'équipe Photomécanique et Rhéologie du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Université de Poitiers. Il permet d'avoir la position, les valeurs de la température, les dérivées temporelles et spatiales (les gradients de température), le temps, etc.

### VI.6.2.1 Filtrage passe-bas

Pour éliminer le bruit provenant des dérivées spatiales, un filtre passe-bas classique peut être appliqué sur la température et ses dérivées spatiales. En dimension un, le principe du filtrage passe-bas de dimension  $\nu$  est :

$$\theta_i(t) = \frac{\sum_{l=1}^{\nu} \theta(i, j, t)}{\nu}, \quad j = 1, \dots, \nu; i = 0, \dots, n$$

L'utilisation d'un filtrage passe-bas avec une taille de filtre trop grande entraîne un écrasement des valeurs maximales.

### VI.6.2.2 Filtrage temporel

En général pour atténuer le bruit engendré par la dérivation par rapport au temps, un filtrage temporel peut être la solution. L'image filtrée correspond à la moyenne des  $\nu$  images précédentes :

$$\theta_i(t) = \frac{\sum_{l=t-j}^t \theta(i, l)}{j}.$$

Ainsi, les fluctuations entre deux images successives sont atténuées. La taille du filtre temporel ne doit pas être trop grande non plus car il pourrait y avoir un décalage et une atténuation par rapport aux phénomènes étudiés.

## VI.7 Exploitation des données expérimentales

Les paramètres thermophysiques sont supposés indépendants de la température. Des études dans la littérature ont montré que l'hypothèse d'indépendance n'est possible que pour de faibles variations de température.

Pour illustrer cette hypothèse, trois expériences ont été effectuées sur chaque éprouvette avec des flux de chaleur différents.

Dans les paragraphes suivants, les cartographies et les champs de température obtenus pour chaque polymère seront dépouillés pour l'estimation des paramètres thermophysiques.

Rappelons que l'algorithme d'identification développé dans le chapitre précédent est utilisé pour retrouver les paramètres thermophysiques à partir des champs de température enregistrés.

### VI.7.1 Calcul du flux de chaleur linéique

Dans les conditions expérimentales, le flux de chaleur est la puissance du générateur électrique. Pour effectuer ce calcul, on dénote par

- $R$  la résistance du fil chauffant,
- $r$  le rayon du fil chauffant,
- $l$  la largeur de la plaque suivant laquelle le fil est placé,
- $N$  le nombre d'enroulement du fil chauffant,
- $s = \pi r N l$  la surface de contact,
- $e$  l'épaisseur sur laquelle la température a été moyennée.

La puissance par unité de surface  $q_s$  est donnée par la relation

$$q_s = \frac{P}{s} = \frac{Ri^2}{\pi r N l}$$

La puissance  $q_M$  fournie à l'épaisseur sur laquelle la température est moyennée et s'identifie par

$$q_M = \frac{Pe}{s} = \frac{Ri^2 e}{\pi r N l}$$

La puissance du générateur est supposée répartie de manière égale dans les deux plaques. Finalement la puissance  $q$  fournie à une seule plaque est la moitié de la puissance moyenne

$$q = \frac{Ri^2 e}{2\pi r N l} \quad (\text{VI.4})$$

La puissance réelle fournie à chaque plaque est ainsi calculée. Nous venons de déterminer la puissance par unité de longueur puisque les champs de température sont unidimensionnels.

Les travaux de DEA de A. Germaneau [52] donnent une précision de l'ordre de 5% du flux de chaleur.

## VI.7.2 Paramètres thermophysiques du polyméthylméthacrylate

Le polyméthylméthacrylate de méthyl (PMMA ou le plexiglass) souvent nommé "acrylique", est utilisé notamment dans la fabrication d'éviers, de baignoires, de systèmes d'affichage, de lentilles et de vitrages, en particulier pour l'aviation.

Ces propriétés lui confèrent de nombreuses utilisations :

- enseignes, bandeaux lumineux, panneaux signalétiques et publicitaires,
- PLV, présentoir, gravure, ameublement, agencement de magasin, décoration,
- pièces industrielles,
- accessoires de sécurité,
- balle de contact,
- prothèse dentaire,
- membranes pour hémodialyseurs.

Il peut remplacer le verre dans la fabrication de vitres car il permet une excellente transmission de la lumière. Il transmet jusqu'à 92% de la lumière visible, soit plus que le verre. Pour sa résistance aux ultra-violet, il est utilisé pour les vitrages, les protections de tuiles ou certains éléments de voiture (feux arrières).

Les surfaces de PMMA montrent une grande dureté, difficilement rayable, ainsi qu'une bonne résistance aux produits chimiques. C'est aussi le matériau idéal pour les parois transparentes des grands aquariums devant supporter la pression de plusieurs tonnes d'eau.

Malgré ces avantages, le PMMA est assez fragile et brûle très facilement. Il a une faible résistance aux solvants, particulièrement aux carburants.

Deux tests ont été effectués à des puissances différentes. Les cartographies thermiques sont analysées afin d'estimer les paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$ .

### VI.7.2.1 Cartographies expérimentales

FIG. VI.6 – Carte Thermique du Plexiglass

L'éprouvette constituée de deux plaques identiques est chauffée avec des intensités de courant différentes. La carte thermique (VI.6) prise au cours du temps donne la température à la surface de l'éprouvette. La température initiale du spécimen enregistrée par la caméra infrarouge est de l'ordre de 20°C.

### VI.7.2.2 Identification des paramètres thermophysiques du plexiglass

Les champs de température exploités pour estimer les paramètres thermophysiques sont donnés par la figure VI.7. Les températures sont relevées suivant un

FIG. VI.7 – Champs de température pour le Plexiglass

axe  $(O, x)$  en se plaçant au milieu de l'éprouvette. Les champs de température sont des écarts ou des variations de température suivant l'axe  $(O, x)$ . La condition  $k\partial T/\partial x = 0$  pour  $x = L$ ; si tel n'était pas le cas, on devrait avoir une variation de la température en  $x = L$  et qui serait visible sur la figure VI.8 par une variation de température.

FIG. VI.8 – Profils de température dans le Plexiglass pour  $q = 256W/m$ ; seuls les champs de température relevés sur la partie  $[0, 20]$  mm ont été exploités.



Paramètres	$k(W/m/^\circ C)$	$\rho c(J/m^3/^\circ C)$
Valeurs Fabricants	0,17 – 0,19	(1,666 – 1,785) $10^6$
Valeurs Identifiées	$q = 396,99 W/m$ 0,181 ± 0,007	(1,692 ± 0,068) $10^6$
	$q = 256,35 W/m$ 0,1806 ± 0,004	(1,685 ± 0,06) $10^6$

TAB. VI.1 – Valeurs identifiées des paramètres thermophysiques du plexiglass

Comme le montre le tableau VI.1, les valeurs estimées pour les paramètres thermophysiques  $\rho c$  et  $k$  du plexiglass sont concordantes avec les données du fabricant. La sensibilité de  $\rho c$  et  $k$  n'est pas importante à la variation de température. Ceci peut confirmer l'hypothèse selon laquelle les paramètres thermophysiques  $\rho c$  et  $k$  pour de faibles variations de température sont des constantes.

### VI.7.3 Paramètres thermophysiques du polyéthylène transparent

#### VI.7.3.1 Champs de température exploités

Le polyéthylène transparent est inerte, facile à manier et résistant au froid. Le polyéthylène est thermoplastique ; c'est le plastique le plus employé dans la vie quotidienne. Il compose notamment la moitié des emballages plastiques. L'utilisation la plus visible du polyéthylène, abrégé PET, est la fabrication de sacs plastiques.

Il est aussi très apprécié par de très grandes entreprises. Par exemple, la fonte grise a été utilisée à partir des années 1940, et jusqu'à la fin des années 1960, pour constituer le réseau de distribution du gaz.

Depuis 1980, Gaz de France remplace systématiquement les canalisations en fonte grise par des canalisations en polyéthylène. Ce matériau présente en effet toutes les qualités requises pour la distribution du gaz : solidité et souplesse.

Les champs de température expérimentaux exploités sont donnés par la figure VI.9. Il s'agit des écarts de température suivant un segment  $[0, L]$  à la surface de l'éprouvette en fonction du temps.

FIG. VI.9 – Champs de température pour le PET transparent

FIG. VI.10 – Profils de température du PET transparent pour  $q = 435, 15W/m$ .

### VI.7.3.2 Identification des paramètres thermophysiques du polyéthylène transparent

Paramètres	$k(W/m/^\circ C)$	$\rho c(J/m^3/^\circ C)$
Valeurs Fabricants	0,42 – 0,51	1,786 10 <sup>6</sup>
Valeurs Identifiées	$q = 435,35W/m$	$0,422 \pm 0,012$ (1,787 $\pm$ 0,053)10 <sup>6</sup>
	$q = 104,83W/m$	$0,153 \pm 0,06$ (1,558 $\pm$ 0,32)10 <sup>6</sup>
	$q = 1749,35W/m$	$0,51 \pm 0,017$ (1,747 $\pm$ 0,074)10 <sup>6</sup>

TAB. VI.2 – Valeurs identifiées des paramètres thermophysiques du PET transparent

Les résultats obtenus sur trois essais sur polyéthylène transparent sont dans le tableau VI.2.

Pour une quantité de chaleur linéique  $q = 104,15 W/m$ , les valeurs estimées des paramètres thermophysiques sont très mauvaises. Nous expliquons cette situation par la très faible variation de la température qui rend le système (V.17) non résoluble. En effet, d'une part, la première composante  $A_{11}$  de la matrice  $A$  est calculée avec le vecteur gradient de température :

$$A_{11} = \int_0^{t_f} \left\langle C \frac{d\theta}{dt}, C \frac{d\theta}{dt} \right\rangle dt.$$

Le profil du gradient de température est donné par la figure VI.11 ; le produit scalaire  $\langle C d\theta/dt, C d\theta/dt \rangle$  est de l'ordre de  $10^{-6}$ , donc la composante  $A_{11}$  presque nulle.

D'autre part, nous avons

$$A_{22} = \int_0^{t_f} \langle K\theta(t), K\theta(t) \rangle dt,$$

et le produit de  $K$  par tout vecteur colinéaire au vecteur de composantes toutes égales à 1 est le vecteur nul. La quantité de chaleur  $q$  étant très faible, la variation de la température d'un instant  $t$  à un instant  $t + \Delta t$  est presque nulle (même sans passer par un lissage du gradient), du coup le vecteur  $\theta(t)$  a presque ses composantes identiques. On a encore dans ces conditions la deuxième composante  $A_{22}$  nulle. Si  $A_{11}$  et  $A_{22}$  sont nulles, il en est de même pour la composante  $A_{22}$ .

FIG. VI.11 – Profils du gradient de température du PET transparent pour  $q = 104, 83W/m$ ; seuls les champs de température relevés sur la partie  $[0, 20]$  mm ont été exploités.

Rappelons que les paramètres sont obtenus par la résolution de  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ . Mais la matrice  $A$  étant presque nulle donc non inversible, on ne peut pas résoudre l'équation  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  afin d'avoir les paramètres  $k$  et  $\rho c$ .

Le champ de température du polyéthylène transparent obtenu pour le flux de chaleur linéique  $q = 104,83 W/m$  (voir figure VI.9) est très fortement bruité. En effet, les variations de température étant relativement faibles, le champ de température est dominé par les bruits des mesures. Ceci peut expliquer aussi les mauvais résultats obtenus par l'algorithme d'identification.

Pour des flux de chaleur linéiques  $q = 435,15 W/m$  et  $q = 1739,25 W/m$ , la chaleur volumique  $\rho c$  est presque invariante. Par contre la conductivité thermique a beaucoup varié pour ces deux expériences. Cela peut s'expliquer par des pertes au cours des mesures. En effet, la variation de température est de l'ordre de  $5,1^\circ C$  pendant une durée de  $224,87s$  pour  $q = 435,15 W/m$  alors qu'elle est de  $20,21^\circ C$  pendant  $160,24s$  pour  $q = 1739,25 W/m$ . La variation de la conductivité thermique serait due alors à la forte diffusion pouvant entraîner des pertes de chaleur au niveau de la zone de chauffe par la relation

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q.$$

Cette perte n'a pas d'effet significatif sur l'estimation de la chaleur volumique  $\rho c$ .

Ces résultats montrent comment le rapport signal sur bruit joue beaucoup dans l'exploitation des données expérimentales. Par calcul symbolique, nous avons constaté (voir V.5) que les paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  sont simultanément identifiables. Des résultats obtenus dans ce paragraphe, nous concluons que cette hypothèse n'est vraie que pour des variations considérables de température.

#### VI.7.4 Paramètres thermophysiques du polyéthylène amorphe

Il a presque les mêmes utilités que le polyéthylène transparent. Ajoutons que ce polymère est largement connu sous forme de film orienté biaxialement et stabilisé thermiquement, appelé plus couramment sous les noms commerciaux Mylar, Melinex ou Hostaphan. A proprement parlé, ces appellations sont utilisées uniquement quand il s'agit du film dont les propriétés sont différentes et même supérieures aux PET "ordinaires".

La figure VI.12 illustre les champs de température expérimentaux suivant une ligne exploités pour l'estimation des paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$ .

FIG. VI.12 – Champs de température pour le PET amorphe

FIG. VI.13 – Profils de température pour le PET amorphe pour  $q = 227W/m$ ; seuls les champs de température relevés sur la partie  $[0, 20]$  mm ont été exploités.

Les résultats obtenus de l'exploitation des champs de température expérimentaux sont présentés dans le tableau VI.3.

Les valeurs de  $k$  (respectivement de  $\rho c$ ) sont presque identiques pour les trois flux de chaleur.

Pour un flux de chaleur linéique de  $1148 \text{ W/m}$ , la diffusion est de l'ordre de  $9^\circ\text{C}$  ; mais ceci n'a pas influencé sur la conductivité  $k$ , contrairement à ce qui a été constaté pour le polyéthylène amorphe. L'épaisseur des éprouvettes joue beaucoup dans le contrôle de la puissance électrique envoyée. Plus l'épaisseur est grande, mieux on arrive à poser la résistance chauffante entre les deux plaques de polymère.

Paramètres	$k(\text{W/m}/^\circ\text{C})$	$\rho c(\text{J/m}^3/^\circ\text{C})$
Valeurs Fabricants	0,15 – 0,4	(1,56 – 1,755) $10^6$
Valeurs Identifiées	$q = 285,36\text{W/m}$	$0,316 \pm 0,012$
	$q = 1148\text{W/m}$	$0,302 \pm 0,012$
	$q = 641,25\text{W/m}$	$0,310 \pm 0,008$
		$(1,632 \pm 0,07)10^6$
		$(1,658 \pm 0,07)10^6$
		$(1,617 \pm 0,04)10^6$

TAB. VI.3 – Valeurs identifiées des paramètres thermophysiques du PET amorphe

Des tableaux VI.1, VI.2 et VI.3, nous pouvons résumer les incertitudes relatives obtenues sur les paramètres identifiés dans le tableau VI.4

PMMA	$\Delta k/k$	2,7%	1,2%	
	$\Delta \rho c/\rho c$	3,01%	2,6%	
PET transparent	$\Delta k/k$	1,8%	2,9%	2,3%
	$\Delta \rho c/\rho c$	2%	19,5%	3,2%
PET Amorphe	$\Delta k/k$	2,8%	3%	1,6%
	$\Delta \rho c/\rho c$	3,3%	3,2%	1,5%

TAB. VI.4 – Incertitudes relatives sur la caractérisation des polymères

Nous constatons que les paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  sont déterminés à partir de champs de température expérimentaux avec des incertitudes relatives de



l'ordre de 3%. Les incertitudes relatives calculées sur  $k$  sont beaucoup plus faibles dans le cas expérimental que dans le cas simulé. Selon une loi édictée par Fourier, le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température et le coefficient de proportionnalité est égal à la conductivité thermique. Le bruit extrême sur les données de température non réalistes dans la simulation pourrait se répercuter sur la conductivité thermique et il en est de même pour le bruit sur le flux de chaleur.

## VI.8 Conclusion

L'identification des paramètres thermophysiques  $k$  et  $\rho c$  à partir de champs de température que nous proposons se compose des étapes suivantes :

- (i) Fabrication des éprouvettes et mise au point d'un dispositif expérimental conforme au modèle élaboré,
- (ii) Maîtrise de l'utilisation d'une caméra infrarouge permettant d'acquérir suffisamment de données très légèrement bruitées,
- (iii) Capacité d'exploitation de ces données,
- (iv) Mise en œuvre d'un algorithme permettant d'identifier simultanément les deux paramètres thermophysiques.

L'algorithme d'identification développé dans le chapitre V permet donc la caractérisation des polymères homogènes et isotropes. Cette caractérisation peut s'effectuer sur d'autres matériaux isotropes et homogènes.

Il est très important de bien contrôler le flux de chaleur à la surface de chauffe, et d'avoir une variation assez raisonnable de la température dans le matériau : cas du polyéthylène transparent.

Ces travaux expérimentaux ont permis de valider notre approche d'identification simultanée de  $k$  et  $\rho c$ . Cette approche est basée sur des techniques d'analyse du modèle direct, du modèle inverse, de filtrage et de moindres carrés.

Cet algorithme d'identification peut être appliqué aux matériaux isotropes et homogènes soumis à n'importe quelle source de chaleur pourvu qu'on soit capable d'estimer la quantité de chaleur de la source et la quantité de chaleur réellement absorbée par le matériau.

Son application sur des matériaux non homogènes nécessite le développement en 2D.

# Conclusion Générale

Dans nos travaux sur les problèmes inverses en mécanique et en thermique, nous avons présenté les problèmes d'identification de paramètres. Nous avons traité en particulier l'identification des caractéristiques d'inertie d'un solide rigide en mécanique et l'identification de la conductivité thermique et de la chaleur volumique de matériaux homogènes isotropes en thermique.

Dans le cas de la mécanique, les caractéristiques d'inertie du solide interviennent linéairement dans les équations du mouvement sans aucune approximation. En thermique, la chaleur volumique intervient linéairement ainsi que la conductivité thermique dans le cas de la loi linéaire isotrope de Fourier.

La procédure qui a conduit aux identifications se résume en quatre étapes :

(i) Etudier théoriquement le caractère identifiable des paramètres mécaniques ou thermophysiques du problème inverse.

(ii) Tenir compte des propriétés des matrices et vecteurs décrivant le problème inverse : si les paramètres à identifier se regroupent dans une matrice symétrique et positive, il faut tenir compte de la positivité de la matrice dans le processus de minimisation par la technique des moindres carrés.

(iii) Valider le modèle inverse à partir des simulations des données conformes à des conditions expérimentales.

(iv) Filtrer les mesures expérimentales afin de ne retenir que des matrices et des vecteurs de mesure peu bruités.

L'application de ces démarches nous a permis d'identifier les caractéristiques d'inertie d'un solide rigide. L'identification de ces paramètres est facilitée par la formulation matricielle des équations du mouvement du solide. Les caractéristiques d'inertie regroupées dans une matrice  $4 \times 4$  symétrique (tenseur d'inertie de Poinsot généralisé) sont identifiées par application d'un algorithme du type gradient conjugué projeté.

En thermique, nous avons commencé par résoudre le problème direct par la technique des éléments finis afin de réduire l'équation aux dérivées partielles de conduction de la chaleur à un système différentiel ordinaire, facilement résoluble numériquement à cause de sa linéarité. L'algorithme de résolution du problème direct en dimension 1 combine la discrétisation spatiale par la technique des éléments finis et l'intégration temporelle par la technique des trapèzes généralisées.

Le problème inverse est posé indirectement : au lieu de chercher à identifier les paramètres thermophysiques sur l'équation aux dérivées partielles de Fourier, nous avons cherché à identifier les paramètres thermophysiques sur l'équation différentielle ordinaire obtenue après discrétisation par éléments finis.

L'algorithme d'identification est basé sur des techniques des moindres carrés. Notre méthode des moindres carrés n'a pas consisté à minimiser des carrés des différences des solutions obtenues par séries et des solutions obtenues expérimentalement. Nous avons cherché directement à déterminer la conductivité et la chaleur volumique qui rendent le système linéaire résoluble. Faisant ainsi, nous avons utilisé la linéarité de ces paramètres. L'équation de conduction de la chaleur et sa forme discrétisée par éléments finis sont linéaires par rapport à la conductivité thermique et la chaleur volumique. L'efficacité de cet algorithme est validée sur des champs de température simulés. La simulation est faite par l'algorithme de résolution du problème direct.

La mesure de champs de température expérimentaux utilise un dispositif composé essentiellement d'une caméra infrarouge, d'un générateur électrique et de deux éprouvettes. Une première éprouvette sur laquelle est effectuée les mesures est composée de deux blocs de matériaux identiques séparés par une résistance chauffante, et une seconde éprouvette, appelée éprouvette témoin permet la régularisation des fluctuations dans la salle. Ce dispositif nous a permis un suivi en temps réel de la diffusion dans le matériau et une acquisition importante d'images sans détruire la géométrie des éprouvettes.

Nous avons bénéficié du savoir-faire de notre équipe Photomécanique et Rhéologie dans le filtrage des données expérimentales par des programmes de traitement d'images. Ainsi, les matrices de mesures et les vecteurs de mesures obtenus après ces filtrages sont très peu bruités.

L'algorithme de résolution du problème inverse en thermique nous a permis d'identifier la conductivité thermique et la chaleur volumique à partir des champs de température mesurés expérimentalement.

Nos travaux numériques et expérimentaux valident notre approche d'identifica-

tion :

1. Modélisation du phénomène mécanique ou thermique
2. Etude et construction d'un algorithme de résolution du problème direct
3. Etude et construction d'un algorithme de résolution du problème inverse
4. Validation de l'algorithme du problème inverse à partir de simulations
5. Application de l'algorithme du problème inverse à des mesures expérimentales.

En mécanique les perspectives concernent l'extension d'identification des caractéristiques d'inertie d'un solide à l'identification des caractéristiques d'inertie d'un système multicorps tel qu'un robot ou un athlète.

En thermique, toujours dans le cadre des lois de Fourier linéaires, nous envisageons d'étendre notre approche d'identification de paramètres thermophysiques des matériaux homogènes et isotropes aux matériaux homogènes non isotropes, puis aux matériaux non homogènes et non isotropes. Nous pensons que cette future approche pourra se transférer directement à la caractérisation des capteurs hybrides photovoltaïques intégrés aux bâtiments.



# Bibliographie

- [1] S. ABBASBANDY, A. JAFARIAN et R. EZZATI : Conjugate gradient method for fuzzy symmetric positive definite system of linear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 171(2):1184–1191, décembre 2005.
- [2] Refahi ABOU KHACHFE et Yvon JARNY : Determination of heat sources and heat transfer coefficient for two-dimensional heat flow - numerical and experimental study. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(7):1309–1322, avril 2001.
- [3] N. E. AKSAN : A numerical solution of burgers' equation by finite element method constructed on the method of discretization. *Appl. Math. Comput.*, 170:895–904, 2005.
- [4] Nehad AL-KHALIDY : On the solution of parabolic and hyperbolic inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(23):3731–3740, décembre 1998.
- [5] Nehad AL-KHALIDY : Analysis of boundary inverse heat conduction problems using space marching with savitzky-gollay digital filter. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 26(2):199–208, février 1999.
- [6] Ahmed AL-SALAYMEH et Moh'd Sami ASHHAB : Modelling of a novel hot-wire thermal flow sensor with neural nets under different operating conditions. *Sensors and Actuators A : Physical*, 126(1):7–14, janvier 2006.
- [7] Fethi ALBOUCHI, Mourad FETOUI, Fabrice RIGOLLET, Mohamed SASSI et Sassi BEN NASRALLAH : Optimal design and measurement of the effective thermal conductivity of a powder using a crenel heating excitation. *International Journal of Thermal Sciences*, 44(11):1090–1097, novembre 2005.
- [8] M. O. ALIFANOV : *Inverse Heat Transfer Problems*. Springer-Verlag, 1990.

- [9] Anis AMMOUS, Faycal SELLAMI, Kaïcar AMMOUS, Herve MOREL, Bruno ALLARD et Jean-Pierre CHANTE : Developing an equivalent thermal model for discrete semiconductor packages. *International Journal of Thermal Sciences*, 42(5):533–539, mai 2003.
- [10] Dominique BAILLIS et Jean-François SACADURA : Thermal radiation properties of dispersed media : theoretical prediction and experimental characterization. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 67(5):327–363, décembre 2000.
- [11] D. BALAGEAS, L. : Nouvelle méthode d'interprétation des thermogrammes pour la détermination de la diffusivité thermique par la méthode impulsionnelle (méthode "flash"). *Revue Phys. Appl.*, 17(4):227–237, 1982.
- [12] D. L. BALAGEAS : Nouvelle méthode d'interprétation des thermogrammes pour la détermination de la diffusivité thermique par la méthode impulsionnelle. *Rev. Phys. Appl.*, 17:227–237, 1982.
- [13] A.G. BELL : Upon the production of sound by radiant energy. *Phil Mag*, 11:510 – 528, 1881.
- [14] Rachid BENNACER, Abdelwahab TOBBAL, Hassen BEJI et Patrick VASSEUR : Double diffusive convection in a vertical enclosure filled with anisotropic porous media. *International Journal of Thermal Sciences*, 40(1):30–41, janvier 2001.
- [15] Martine BERGOUNIOUX et Fulbert MIGNOT : Contrôle dans les inéquations et multiplicateurs de Lagrange. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Séries I - Mathematics*, 329(7):607–612, octobre 1999.
- [16] S. BOYD et L. VANDENBERGHE : *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [17] Haïm BREZIS : *Analyse fonctionnelle : Théories et applications*. 1983.
- [18] Jean CEA : *Optimisation : théories et algorithmes*. DUNOD, 1971.
- [19] F. CERNUSCHI, P.G. BISON, A. FIGARI, S. MARINETTI et E. GRINZATO : Thermal diffusivity measurements by photothermal and thermographic techniques. *International Journal of Thermophysics*, 25(2):439–457, 2004.
- [20] Karine CHAMPION-RÉAUD : *Méthode d'étude des vibrations d'un système mécanique non basée sur le calcul de ses modes propres*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2002.

- [21] H.-T. CHEN, S.-Y. LIN, H.-R. WANG et L.-C. FANG : Estimation of two-sided boundary conditions for two-dimensional inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(1):15–23, 2002.
- [22] Y. CHEN et J.E. MCINROY : Estimating symmetric, positive definite matrices in robotic control. In *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 4269–4274, Dept. of Comp. Sci. and Engineering, Penn. State University, University Park, PA 16801, United States, 2002.
- [23] André CHRYSOCHOOS\* et Robert PEYROUX : Analyse expérimentale et modélisation numérique des couplages thermomécaniques dans les matériaux solides. *Rev. Gén. Therm.*, 37:582–606, 1998.
- [24] King-wah Eric CHU : Symmetric solutions of linear matrix equations by matrix decompositions. *Linear Algebra and its Applications*, 119:35–50, juillet 1989.
- [25] P. G. CIARLET : *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. MASSON, 1982.
- [26] Damien CLAIRE, Stephane ROUX et Francois HILD : Identification de conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs : Identification of thermal conductivities and elastic properties by field analyses. *Mecanique & Industries*, 4(6):655–665, 2003.
- [27] R. COQUARD, D. BAILLIS et D. QUENARD : Experimental and theoretical study of the hot-wire method applied to low-density thermal insulators. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49(23-24):4511–4524, novembre 2006.
- [28] S. André D. MAILLET et A. DEGIOVANNI : Les erreurs sur la diffusivité thermique mesurée par méthode flash : confrontation théorie-expérience. *J. Phys. III France*, 3:883–809, 1993.
- [29] B. DACCOROGNA : *Introduction au calcul des variations*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1992.
- [30] A. J. DAVIES : *Finite Element methods : A First Approach*. Clarendon Press. Oxford, 1980.
- [31] A. DEGIOVANNI : Correction de longueur d'impulsion pour la mesure de la diffusivité thermique par méthode flash. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30(10):2199–2200, octobre 1987.



- [32] A. DEGIOVANNI et C. MOYNE : Conductivité thermique de matériaux poreux humides : évaluation théorique et possibilité de mesure : Thermal conductivity of porous wet bodies : Theoretical examination and measurement feasibility. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30(11):2225–2245, novembre 1987.
- [33] Alain DEGIOVANNI : Conductivité et diffusivité thermique des solides, 2002.
- [34] Y.-B. DENG, X.-Y. HU et L. ZHANG : Least squares solution of  $bxat = t$  over symmetric, skew-symmetric, and positive semidefinite  $x$ . *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 25(2):486–494, 2004.
- [35] Dan DIMITRIU : *Modélisation dynamique des systèmes articulés par des vecteurs translations et des matrices rotation. Prise en compte des rigidité par des multiplicateurs de Lagrange. Simulation du mouvement à l'aide d'un code C++*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2003.
- [36] A. P. DONALD : *Optimization theory with applications*. Dover Publications, INC, 1986.
- [37] Gregory A. DORAI et Daniel A. TORTORELLI : Transient inverse heat conduction problem solutions via newton's method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(17):4115–4127, octobre 1997.
- [38] Wilson Nunes dos SANTOS : Thermal properties of melt polymers by the hot wire technique. *Polymer Testing*, 24(7):932–941, octobre 2005.
- [39] Jean-Christophe DUPRÉ : *Traitement et analyse d'images pour la mesure de grandeurs cinématiques, déplacements et déformations à partir de la granularité laser et de réseaux croisés, et pour l'étude de couplages thermomécaniques*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1992.
- [40] J. ERHEL et F. GUYOMARC'H : An augmented conjugate gradient method for solving consecutive symmetric positive definite linear systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(4):1279–1299, 2000.
- [41] M. FAYET et F. PFISTER : Analysis of multibody systems with direct coordinates and global inertia tensor. *European Journal Of Mechanics, A/Solids*, 13:431–457, 1994.
- [42] Michel FAYET et Marc RENAUD : Quasi-minimal computation under an explicit form of the inverse dynamic model of a robot manipulator. *Mechanism & Machine Theory*, 24(3):165–174, 1989.

- [43] Cristina FERREIRA et Fernando C. SILVA : Inertia theorems for pairs of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 381:37–52, avril 2004.
- [44] Cristina FERREIRA et Fernando C. SILVA : Inertia theorems for pairs of matrices, ii. *Linear Algebra and its Applications*, 413(2-3):425–439, mars 2006.
- [45] Ali FGURI, Naouel DAOUAS, Naceur BORJINI, M-Sassi RADHOUANI et Habib Ben AISSIA : Experimental inverse analysis for the determination of boundary conditions in the parallel hot wire technique. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 31(3):209–220, janvier 2007.
- [46] R. FLETCHER : Semi-definite matrix constraints in optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(4):493–513, 1984.
- [47] Mauri FORTESA et Wanyr Romero FERREIRAB : The one-dimensional transient diffusional method : finite element adaptive solutions to convection-diffusion problems. *International Journal of Thermal Sciences*, 38(9):780–796, octobre 1999.
- [48] Alessandro FRANCO : An apparatus for the routine measurement of thermal conductivity of materials for building application based on a transient hot wire method. *Applied Thermal Engineering*, In Press, Accepted Manuscript:–.
- [49] S. Lima FREDERICO, R., Guts SAULO, R. ALISSON, Machado et Guimarães GLIMAR : An inverse heat transfer problem for restoring the temperature field in a polymer melt flow through a narrow channel. *International Journal of Thermal Sciences*, 41(6):528–535, mai 2002.
- [50] T. GALLOUET et R. HERBIN : Convergence of linear finite elements for diffusion equations with measure data. *Comptes Rendus Mathématique*, 338(1):81–84, 2004.
- [51] V.A. GARANZHA : Quasi-isometric surface parameterization. *Applied Numerical Mathematics*, 55(3):295–311, novembre 2005.
- [52] Arnaud GERMANEAU : étude des dissipations thermiques - application aux polymères. Mémoire de D.E.A., Université de Poitiers, 2004.
- [53] Manuel GIRAULT, Stephanie DEROUINEAU, Jacques SALAT et Daniel PETIT : Reduction de modele en convection naturelle par une methode d'identification. *Comptes Rendus Mécanique*, 332(10):811–818, octobre 2004.

- [54] Claire GOBBÉ, Sébastien ISERNAA et Bruno LADEVIE : Hot strip method : application to thermal characterisation of orthotropic media. *International Journal of Thermal Sciences*, 43(10):951–958, octobre 2004.
- [55] G GOLUB, H. et F. VAN LOAN, C. : *Matrix Computations, Third Edition*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [56] C. GONCALVES, V., O. L. VILARINHO, A. SCOTTI et GUIMARÃES : Estimation of heat ant thermal efficiency in gtaw process bys using inverse techniques. *Journal of Materials Processing Technology*, 172:42–51, 2006.
- [57] M.D. GREENBERG : *Foundation of applied mathematics*. CPrentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New York 07632, 1978.
- [58] Allaire GREGOIRE : *Analyse numérique et optimisation*. 2005.
- [59] E. HENSEL : *Inverse Theory and Applications for Engineers*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1990.
- [60] Nicholas J. HIGHAM : Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 103:103–118, mai 1988.
- [61] Nicholas J. HIGHAM : Symmetric procrustes problem. *BIT (Copenhagen)*, 28(1):133–143, 1988.
- [62] Dai HUA : Completing a symmetric 2 x 2 block matrix and its inverse. *Linear Algebra and its Applications*, 235:235–245, mars 1996.
- [63] Cheng-Hung HUANG et Yan JAN-YUAN : An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(18):3433–3441, décembre 1995.
- [64] Peter IREMAN et Quoc-Son NGUYEN : Using the gradients of temperature and internal parameters in continuum thermodynamics. *Comptes Rendus Mécanique*, 332(4):249–255, avril 2004.
- [65] Kazufumi ITO et Karl KUNISCH : Parabolic variational inequalities : The lagrange multiplier approach. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 85(3):415–449, mars 2006.
- [66] Y. JARNY, M. N. OZISIK et J. P. BARDON : A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(11):2911–2919, novembre 1991.

- [67] Bergheau JEAN-MICHEL et Fortunier ROLAND : *Simulation numérique des transferts thermiques par éléments finis*. Lavoisier, 2004.
- [68] L. JÓDAR, J. PÉREZ et R. VILLANUEVA, J. : Analytic and numerical solution of coupled implicit semi-infinite diffusion problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 41(3-4):447–459, février 2001.
- [69] N. KIKUCHI : *Finite element methods in mechanics*. Cambridge University Press, 1986.
- [70] K. KURPISZ et J. A. NOWAK : *Inverse Thermal Problems*. Computational Mechanics Publications, 1995.
- [71] Patrick LACOSTE : La condensation de la matrice masse, ou mass-lumping, pour les éléments finis mixtes de raviart-thomas-nedelec d'ordre 1. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(10):727–732, novembre 2004.
- [72] G. LEGNANI, F. CASOLO, P. RIGHETTINI et B. ZAPPA : A homogeneous matrix approach to 3d kinematics and dynamics - i. theory. *Mech. Mach. Theory*, 31(5):573–587, 1996.
- [73] A.N.-P. LIAO, Z.-Z. BAI et Y. LEI : Best approximate solution of matrix equation  $axb + cyd = e$ . *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(3):675–688, 2005.
- [74] H. L. LYNN et S. SHLOMO : *Advanced Calculus*. Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
- [75] O.L. MANGASARIAN : Knowledge-based linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 15(2):375–382, 2005.
- [76] J. MARTINET : *Contribution à l'étude de la thermocinétique : les méthodes transitoires et leurs applications*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, 1962.
- [77] J. MARTINET : *Thermocinétique approfondie*. Lavoisier, 1990.
- [78] A. D. MURIO : On the estimation of the boundary temperature on a sphere from measurement at its center. *Journal of Comput. and Appl. Math.*, 8:111–119, 1982.
- [79] Diego A. MURIO : On the characterization of the solution of the inverse heat conduction problem. In *American Society of Mechanical Engineers (Paper)*, pages –, Univ of Cincinnati, Dep of, Mathematical Sciences, Cincinnati, OH,

- USA, Univ of Cincinnati, Dep of Mathematical Sciences, Cincinnati, OH, USA, 1985.
- [80] Diego A. MURIO : Parameter selection by discrete mollification and the numerical solution of the inverse heat conduction problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 22(1):25–34, avril 1988.
- [81] Diego A. MURIO : Solution of inverse heat conduction problems with phase changes by the mollification method. *Computers & Mathematics with Applications*, 24(7):45–57, octobre 1992.
- [82] Alberto MUSCIO, Paolo G. BISON, Sergio MARINETTI et Ermanno GRINZATO : Thermal diffusivity measurement in slabs using harmonic and one-dimensional propagation of thermal waves. *International Journal of Thermal Sciences*, 43(5):453–463, mai 2004.
- [83] W.J. PARKER, R.J. JENKINS, C.P. BUTLER et G.L. ABBETT : Flash method of determination thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity. *J. Appl. Phys.*, 32:1679–1684, 1961.
- [84] E. POLAK : *Computational methods in optimization - a Unified Approach*. Academic Press, New York and London, 1971.
- [85] P. A. RAVIART et J. M. THOMAS : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. MASSON, 1983.
- [86] J.F. SACADURA : *Initiation aux transferts thermiques*. 1978.
- [87] Lionnel SAINSAULIEU : *Calcul scientifique : Cours et exercices corrigés*. Edition 2, Dunod, Paris, 2000.
- [88] J.B. SAULNIER, P. DAURON et J. MARTINET : [quelques aspects nouveaux de la methode flash.]. *Entropie*, 11(64):44–51, 1975.
- [89] J.L. SAUREL : *Etude thermomécanique d'une famille d'élastomères thermo-plastiques*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, 1999.
- [90] A. J. SILVA NETO et M. N. OZISIK : An inverse problem of simultaneous estimation of radiation phase function, albedo and optical thickness. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 53(4):397–409, avril 1995.
- [91] Janusz SKOREK : Applying the least squares adjustment technique for solving inverse heat conduction problems, 1991.
- [92] J.-M. SOURIAU : *Calcul Linéaire, Tome 1*. Presses Universitaires de France, 1964.

- [93] J.-M. SOURIAU : *Calcul Linéaire, Tome 2*. Presses Universitaires de France, 1964.
- [94] Tatiana SRAMKOVA et Torgrim LOG : Using non-linear  $[\chi]^2$  fit in flash method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(15):2885–2891, octobre 1995.
- [95] Pyk S. STALHANE, B. : New method of measuring thermal conductivity coefficients. *Teknisk Tidsskrift*, Volume 61:339–393, 1931.
- [96] Charles SYLVAIN : *Mise en place d'un dispositif expérimental de caractérisation du comportement des lames fluides, identification des coefficients dynamiques*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2004.
- [97] C. VALLÉE et D. DUMITRIU : The lagrange multipliers associated with the rotation matrix characterizing the motion of a rigid body about its centre of mass. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 65(5):731–739, 2001.
- [98] C. VALLÉE, A. HAMDOUNI, F. ISNARD et D. FORTUNÉ : The equations of motion of a rigid body without parametrization of rotations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 63(1):25–30, 1999.
- [99] C. VALLÉE, S.Ya. STEPANOV et S. CHARLES : Evaluation of the determinant of identification equations for a linear model of a mechanical vibratory system. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(3):351–357, 2005.
- [100] L. VOZAR, J. GEMBAROVIC et V. MAJERNIK : New method for data reduction in flash method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(4-5): 1316–1318, 1991.
- [101] Libor VOZAR et Tatiana SRAMKOVA : Two data reduction methods for evaluation of thermal diffusivity from step-heating measurements. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(7):1647–1655, mai 1997.
- [102] Jingbo WANG et Nicholas ZABARAS : Simulation numérique des transferts thermiques par éléments finis. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48(1):15–29, janvier 2005.
- [103] C.P. Butler G.L. Abbett W.J. PARKER, R.J. Jenkins : Flash method of determination thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity. *J. Appl. Phys*, 32:1679 – 1684, 1961.
- [104] H. WONG, Y. : *Handbook of essential formulae and data on Heat Transfert for Engineers*. Longman Inc., New York, 1977.

- [105] Yongxin YUAN et Hua DAI : Inverse problems for symmetric matrices with a submatrix constraint. *Applied Numerical Mathematics*, --, --.
- [106] S. ZAGATTI : On the minimum problem for nonconvex scalar functionals. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 37(3):982–995, 2006.
- [107] Xing ZHANG, Hua GU et Motoo FUJII : Effective thermal conductivity and thermal diffusivity of nanofluids containing spherical and cylindrical nanoparticles. *Experimental Thermal and Fluid Science*, In Press, Corrected Proof:–4524.

# ANNEXE A Calcul des Composantes des Matrices $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ Issues de la Discrétisation par Eléments Finis de l'Equation de Conduction de la Chaleur

L'équation générale de diffusion de la chaleur dans le matériau est :

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{VI.5})$$

avec condition initiale

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad \text{donnée} \quad (\text{VI.6})$$

et conditions aux limites

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (\text{VI.7a})$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = L \quad t > 0. \quad (\text{VI.7b})$$

Pour la résolution numérique du problème, la méthode des éléments finis de Lagrange est utilisée. On considère les fonctions  $\phi_i$  définies sur  $[0, l]$  à valeurs réelles. Autrement dit, les fonctions  $\phi_i$  sont de la seule variable d'espace  $x$  à support compact. Les fonctions  $\phi_i$  correspondant aux graphes de la figure (V.2) sont :

$$\phi_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\zeta}x + 1 & \text{si } 0 \geq x \geq \zeta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta}x + 1 - i & \text{si } (i-1)\zeta \leq x \leq i\zeta \\ -\frac{1}{\zeta}x + 1 + i & \text{si } i\zeta \leq x \leq (i+1)\zeta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta}x - (n-1) & \text{si } (n-1)\zeta \leq x \leq n\zeta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour obtenir les matrices  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{K}$  et le vecteur  $\mathbf{F}$ , on multiplie directement l'équation aux dérivées partielles VI.5 par  $\phi_i(x)$  puis on l'intègre sur  $[0, l]$ .

$$\rho c \int_0^l \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \phi_i(x) dx = k \int_0^l \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \phi_i(x) dx \quad (\text{VI.8})$$

Calculons alors pour tout  $i$  compris entre 0 et  $n$ , l'intégrale  $k \int_0^l \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \phi_i(x) dx$ . Le vecteur température  $\theta$  dans le cadre unidimensionnel a pour composantes :

$$\theta_i(t) = T(x_i, t) \quad \theta_i(0) = T_0(x_i) \quad i = 0, \dots, n.$$

Pour  $i = 0$ , par intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} \rho c \int_0^l \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \phi_0(x) dx &= k \int_0^l \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \phi_0(x) dx \\ &= k \int_0^\zeta \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \phi_0(x) dx \\ &= -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + \frac{k}{\zeta} (\theta_1(t) - \theta_0(t)) \end{aligned}$$

De même pour  $1 \leq i \leq n-1$ , l'intégration par parties conduit à :

$$\begin{aligned} \rho c \int_0^l \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \phi_i(x) dx &= k \int_0^l \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \phi_i(x) dx \\ &= k \int_{(i-1)\zeta}^{(i+1)\zeta} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \phi_i(x) dx \\ &= \frac{k}{\zeta} \theta_{i-1}(t) - 2 \frac{k}{\zeta} \theta_i(t) + \frac{k}{\zeta} \theta_{i+1}(t) \end{aligned}$$

Enfin pour  $i = n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \rho c \int_0^l \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \phi_n(x) dx &= k \int_0^l \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \phi_n(x) dx \\ &= k \int_{(n-1)\zeta}^l \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \phi_n(x) dx \\ &= k \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} + \frac{k}{p} (\theta_{n-1}(t) - \theta_n(t)) \end{aligned}$$

Ainsi l'équation de diffusion de la chaleur et les conditions aux limites peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\begin{aligned}
 k \begin{bmatrix} \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \int_0^\zeta T(x,t)\phi_0(x)dx \\ \int_0^{2\zeta} T(x,t)\phi_1(x)dx \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_{(i-1)\zeta}^{(i+1)\zeta} T(x,t)\phi_i(x)dx \\ \vdots \\ \vdots \\ \int_{(n-1)\zeta}^l T(x,t)\phi_n(x)dx \end{bmatrix} \\
 = \frac{k}{\zeta} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0(t) \\ \theta_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{n-1}(t) \\ \theta_n(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Soit  $T(x,t) = \sum_{i=0}^n \theta_i(t)\phi_i(x)$ ; pour terminer la formulation variationnelle du problème, nous allons calculer les intégrales  $\int_0^l T(x,t)\phi_i(x)dx$ .

$$\begin{aligned}
 \int_0^l T(x,t)\phi_0(x)dx &= \int_0^l T(x,t)\phi_0(x)dx \\
 &= \theta_0(t) \int_0^\zeta (\phi_0)^2(x)dx + \theta_1(t) \int_0^\zeta \phi_1(x)\phi_0(x)dx \\
 &= \frac{\zeta}{6} [2\theta_0(t) + \theta_1(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^l T(x,t)\phi_i(x)dx &= \int_{(i-1)\zeta}^{(i+1)\zeta} T(x,t)\phi_i(x)dx \\
 &= \frac{\zeta}{6} [\theta_{i-1}(t) + 4\theta_i(t) + \theta_{i+1}(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l T(x,t)\phi_n(x)dx &= \int_{(n-1)\zeta}^l T(x,t)\phi_n(x)dx \\ &= \frac{\zeta}{6} [2\theta_n(t) + \theta_{n-1}(t)] \end{aligned}$$

Le résultat de ces calculs en forme matricielle donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \int_0^\zeta T(x,t)\phi_0(x)dx \\ \int_0^{2\zeta} T(x,t)\phi_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_{(i-1)\zeta}^{(i+1)\zeta} T(x,t)\phi_i(x)dx \\ \vdots \\ \int_{(n-1)\zeta}^l T(x,t)\phi_n(x)dx \end{bmatrix} \\ &= \rho c \frac{\zeta}{6} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0(t) \\ \theta_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{n-1}(t) \\ \theta_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En définissant les matrices carrées  $(n + 1) \times (n + 1)$

$$\mathcal{C} = \rho c \frac{\zeta}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K} = -\frac{k}{\zeta} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

et le vecteur  $n + 1$  lignes  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

On peut écrire finalement l'équation générale de diffusion et les conditions aux limites, sous la forme matricielle :

$$\mathcal{C} \frac{d\theta}{dt} + \mathcal{K}\theta = \mathbf{F} \quad (\text{VI.9})$$

$$\theta(0) = [T(0, 0), T(\zeta, 0) \dots T(i\zeta, 0) \dots T(L, 0)]$$



# ANNEXE B Calcul des Incertitudes sur les Paramètres Thermophysiques

Notons par  $\delta\theta[1 \dots 1]^T$  l'incertitude sur le vecteur de température  $\theta(t)$  et par  $\delta\dot{\theta}[1 \dots 1]^T$  l'incertitude sur le vecteur dérivé de température  $\dot{\theta}(t)$  à tout instant  $t$ .

Calcul des incertitudes sur la matrice  $A$  et le vecteur  $\mathbf{f}$ .

Sur la composante  $A_{11}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{y} = C\dot{\theta}(t)$  et  $\mathbf{x}^j = \mathbf{y}^j = C\dot{\theta}(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ .

$$\begin{aligned} \delta\langle \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle &= \delta \left( \langle C\dot{\theta}(t_j), C\dot{\theta}(t_j) \rangle \right) \\ &= 2\delta\dot{\theta} \left\langle C \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}, \dot{\theta}(t_j) \right\rangle \end{aligned}$$

Pour les composantes  $A_{12}$  et  $A_{21}$  qui sont égales, posons  $\mathbf{x}^j = C\dot{\theta}(t_j)$  et  $\mathbf{y}^j = K\theta(t_j)$

$$\begin{aligned} \delta\langle \mathbf{x}^j, \mathbf{y}^j \rangle &= \delta \left( \langle C\dot{\theta}(t_j), K\theta(t_j) \rangle \right) \\ &= \delta\dot{\theta} \left\langle K \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}, \theta(t_j) \right\rangle \quad \text{car} \quad K \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les composantes des matrices  $C$  et  $K$  ont été calculées dans la section V.3.1. On

peut vérifier facilement les calculs algébriques

$$C \begin{pmatrix} C \\ C \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \frac{3p^2}{36} \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 12 \\ \cdot \\ \cdot \\ 12 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{v} \text{ et } K \begin{pmatrix} C \\ C \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{w}$$

De ces calculs, on en déduit les expressions simplifiées des précisions sur les composantes de la matrice  $A$  :

$$\delta A_{11} = \frac{\delta \dot{\theta}}{L^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} (\langle \mathbf{v}, \dot{\theta}(t_j) \rangle)^2 (t_{j+1} - t_j)^2}$$

$$\delta A_{12} = \delta A_{21} = \frac{\delta \dot{\theta}}{t_f} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} (\langle \mathbf{w}, \theta(t_j) \rangle)^2 (t_{j+1} - t_j)^2}$$

$\delta A_{22} = 0$  puisque le noyau de  $K$  contient les vecteurs colinéaires au vecteur  $[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ .

Calculons les incertitudes sur les composantes du vecteur  $\mathbf{f}$ .

De l'expression  $\mathbf{f}_1 = \int_0^{t_f} \langle C\dot{\theta}(t), [q \ 0 \ \dots \ 0]^T \rangle dt$ , posons  $\mathbf{x}^j = C\dot{\theta}(t_j)$  et  $\mathbf{y}^j = [q \ 0 \ \dots \ 0]^T$

et de de  $\mathbf{f}_2 = L^2/t_f \int_0^{t_f} \langle K\theta, [q \ 0 \ \dots \ 0]^T \rangle$ , posons  $\mathbf{x}^j = K\theta(t_j)$  et  $\mathbf{y}^j = [q \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .

En procédant de la même manière que pour les composantes de la matrice  $A$ , nous obtenons

$$\delta \mathbf{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} \left[ q \delta \dot{\theta} (\langle C\mathbf{r}, \mathbf{e}_1 \rangle)^2 + \delta q (\langle \dot{\theta}(t_j), C\mathbf{e}_1 \rangle)^2 \right] (t_{j+1} - t_j)^2}$$

$$\delta \mathbf{f}_2 = \frac{\sqrt{2} L^2 \delta q}{2 t_f} \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} (\langle \theta(t_j), K\mathbf{e}_1 \rangle)^2 (t_{j+1} - t_j)^2}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$