



**HAL**  
open science

# Prise en compte du champ thermo-convectif pour le contrôle thermique des espaces habitables

Alain Sempey

► **To cite this version:**

Alain Sempey. Prise en compte du champ thermo-convectif pour le contrôle thermique des espaces habitables. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université de La Rochelle, 2007. Français. NNT : . tel-00259196

**HAL Id: tel-00259196**

**<https://theses.hal.science/tel-00259196>**

Submitted on 27 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE LA ROCHELLE  
UFR Sciences Fondamentales et Sciences pour l'ingénieur

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

Discipline : GENIE CIVIL

par

Alain SEMPEY

## **Prise en compte du champ thermo-convectif pour le contrôle thermique des espaces habitables**

Thèse dirigée par Christian INARD  
Thèse co-encadrée par Christian GHIAUS

soutenue le 12 Décembre 2007 devant le jury composé de

Cyrille ALLERY	Maître de conférences	Examineur
Christian GHIAUS	Professeur	Examineur
Gerard HÉGRON	Professeur	Examineur
Christian INARD	Professeur	Examineur
Pierre MICHEL	Ingénieur Divisionnaire HDR	Rapporteur
Jacques MIRIEL	Professeur	Rapporteur
Pierre-Jean VIALLE	Docteur	Examineur



# Prise en compte du champ thermo-convectif pour le contrôle thermique des espaces habitables

## Résumé

Le contrôle en temps réel des locaux climatisés requiert la connaissance de modèles de la distribution de température et du champ de vitesse. Des modèles complets, basés sur les codes CFD, donnent accès à ces informations, mais sont incompatibles avec des applications en temps réel. Ainsi, un modèle d'ordre réduit est nécessaire. Cette étude propose de réduire la taille d'un modèle CFD en adoptant, dans un premier temps, l'hypothèse d'un champ de vitesse fixé, ce qui permet de ne résoudre que l'équation de conservation de l'énergie. Puis, mis sous forme d'un système d'état, la décomposition orthogonale aux valeurs propres est utilisée pour réduire son ordre. Cette méthode est appliquée au cas d'un local équipé d'un ventilo-convecteur. La forme de système d'état du modèle réduit ainsi obtenu permet, par application de la théorie moderne du contrôle, d'estimer la température dans la zone d'occupation sans mesure directe, et ainsi de l'intégrer dans une boucle fermée de contrôle. Plusieurs contrôleurs sont comparés avec pour point commun d'être synthétisés sur le principe du modèle interne basé sur la connaissance d'un modèle d'ordre réduit de l'air du local.

Mots-clés : contrôle de la température, espace d'état, modèle d'ordre réduit, estimateur, CFD, décomposition orthogonale aux valeurs propres

# Taking into account the heat convection field in thermal control of indoor spaces

## Abstract

Real-time control of air-conditioned indoor spaces needs models of temperature distribution and air velocity field in rooms. Models, based on CFD, give this information but they are improper for real-time applications. Therefore, a reduced model is needed. The purpose of this study is to reduce the size of a CFD model by first considering the velocity field fixed and solving only the energy balance equation, then putting this equation in the form of state-space and finally by reducing its order by Proper Orthogonal Decomposition (POD). This algorithm was applied to a room equipped with a fan coil. The state space form of the reduced order model allows to estimate the temperature in the occupancy zone, without a direct measurement, and to feedback it to a controller. Several controllers are compared, they are all designed with the internal model theory.

Keywords : temperature control, state space, reduced order model, estimator, CFD, proper orthogonal decomposition

Cette thèse a été préparée au

Laboratoire d'Etude des Phénomènes de Transfert  
Appliqués au Bâtiment (LEPTAB)

Pôle Sciences et Technologie

Avenue Michel Crépeau

17042 La Rochelle Cedex 1



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Christian INARD. Ces questions toujours judicieuses m'ont permis d'avancer, sans me priver de mon initiative. En me soumettant une problématique nouvelle pour le laboratoire, il m'a ainsi accordé sa confiance.

Je remercie également Christian Ghiaus qui a su m'apporter son expertise dans plusieurs domaines abordés dans ce travail. Sa disponibilité et sa connaissance du milieu de la recherche m'ont beaucoup apporté.

Je suis très reconnaissant envers les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. En particulier, je remercie Pierre Michel et Jacques Miriel pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à mon travail en acceptant d'en être les rapporteurs. Je remercie également Gérard Hégron qui a bien voulu être membre de mon jury de thèse. Merci à Pierre-Jean Vialle qui par sa présence et ses remarques m'a apporté la première confrontation de mes travaux avec le milieu industriel. Enfin, je remercie Cyrille Allery qui tout au long de mon travail m'a aidé au delà de ses seuls conseils scientifiques.

Ces travaux de thèse ont été réalisés au sein du Laboratoire d'études des phénomènes de transfert appliqués au bâtiment de l'université de La Rochelle. Je saisis donc ici l'occasion pour remercier l'ensemble des personnes qui m'ont accordé leur temps pour faire avancer mon travail, en particulier Amina, Aziz, Claudine et Patrice. J'exprime également ma reconnaissance envers Francis Allard, directeur du laboratoire, pour m'avoir accueilli au sein de son équipe.

Ce laboratoire est aussi un cadre convivial, qui m'a permis de faire des rencontres très enrichissantes sur le plan personnel. Merci à Adriana, Agota, Cyrille, Erwan, Hassan, Jérôme, Ludovic, Marx, Nicolas, Philippe, Sylvain et Timea. Une mention toute particulière aux amis de La Rochelle, qui m'ont permis de m'intégrer dans cette ville à travers les parties de JDR, le BV ou autour de bons repas : Alexis, Marco, Fabien, Frédéric et Morgane, Emmanuel et Céline, et Sébastien. Quelques rencontres furent inoubliables de par leur richesse, merci à Martin et Emmanuelle.



Je remercie également Laurent pour son amitié et ses conseils toujours pertinents.

Au cours de ces quelques années, de nombreux amis, par leur curiosité, m'ont encouragé sans cesse dans mon travail : Anne et Fred, Fanny et Stéphane, Isabelle et Stéphane, Cécile et Fred, Tatiana et Cédric, Ghislaine et Olivier, Sandrine et Xavier, Josianne, Solène et Christophe, Nathalie et Alexandre, Gwénaelle et Ghislain.

Je souhaiterais également rendre hommage à l'ensemble de ma famille. Mes parents bien sûr dont l'éducation m'encouragea à aller de l'avant, en développant toujours ma curiosité et mon sens critique. Leur soutien ne me fit jamais défaut. Malgré l'éloignement imposé par ce travail, je sais que je peux compter sur tous, merci à Edith, ma grande soeur, et Laurent, à Vincent, Sophie et Katia qui me montrèrent l'exemple, à Maryse et Bernard, Francine et Guy, Colette et Yves, Marie-France et Claude, Sylvie, Didier et Gautier, et enfin à mes grands parents.

Il me reste à remercier Adeline qui m'a entouré pendant ces quelques années. Merci d'avoir su faire preuve d'autant de patience, et d'avoir toujours été là pour m'encourager et me soutenir. Sans l'avoir choisi, tu as aussi embrassé la vie de doctorant, je te dois beaucoup.

À ADELINÉ,  
À *mes parents*.



*Lorsque le ficus atteint le haut de son tuteur,  
le temps est venu de soutenir.*



# Table des matières

Liste des tableaux	<b>xix</b>
Liste des figures	<b>xxiv</b>
Nomenclature	<b>xxv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte et Objectifs</b>	<b>3</b>
1.1 Contrôle des systèmes de conditionnement d'air . . . . .	3
1.1.1 Stratégie de contrôle . . . . .	3
1.1.2 Théorie du contrôle . . . . .	5
1.1.2.1 Principe de la régulation . . . . .	5
1.1.2.2 Techniques de régulation . . . . .	5
1.1.3 Contrôle et confort thermique . . . . .	7
1.2 Prise en compte de l'hétérogénéité des températures . . . . .	7
1.3 Objectifs . . . . .	9
<b>2 Modélisation du champ thermo-aéraulique</b>	<b>13</b>
2.1 Application des CFD dans les locaux . . . . .	13
2.1.1 Couplage vitesse-pression . . . . .	15
2.1.2 Méthodes de résolution . . . . .	15
2.1.3 Schémas de discrétisation . . . . .	17
2.1.3.1 Discrétisation spatiale . . . . .	17
2.1.3.2 Discrétisation temporelle . . . . .	18
2.1.4 Modèles de turbulence . . . . .	19
2.1.4.1 Modèle $k - \epsilon$ standard . . . . .	20
2.1.4.2 Modèle à 0 équation . . . . .	21
2.1.4.3 Modèle à bas nombre de Reynolds . . . . .	22
2.1.4.4 Modèle RNG $k - \epsilon$ . . . . .	22
2.1.5 Maillage . . . . .	23
2.1.5.1 Taille de la maille adjacente aux parois . . . . .	23
2.1.5.2 Taille des mailles courantes . . . . .	24
2.1.6 Paramètres de simulation . . . . .	24

2.1.6.1	Conditions initiales . . . . .	24
2.1.6.2	Pas de temps des simulations . . . . .	24
2.1.6.3	Conditions turbulentes au soufflage . . . . .	25
2.1.6.4	Critères de convergence . . . . .	26
2.1.7	Conclusion . . . . .	26
2.2	Réduction des modèles . . . . .	27
2.2.1	Simplification de la description des phénomènes physiques . . . . .	27
2.2.1.1	Modèle thermique avec un champ de vitesse donné . . . . .	27
2.2.1.2	Modèles zonaux . . . . .	28
2.2.2	Réduction mathématique des modèles . . . . .	30
2.2.2.1	Méthodes de minimisation . . . . .	31
2.2.2.2	Méthodes spectrales : La décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) . . . . .	32
2.2.3	Conclusion . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Modèles d'ordre élevé</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1	Données de référence . . . . .	45
3.1.1	Description du local étudié . . . . .	46
3.1.2	Paramètres des simulations . . . . .	47
3.1.2.1	Méthodes de résolution . . . . .	47
3.1.2.2	Modèle de turbulence . . . . .	47
3.1.2.3	Conditions aux limites . . . . .	48
3.1.2.4	Maillage utilisé . . . . .	49
3.1.2.5	Autres paramètres . . . . .	50
3.1.3	Résultats des simulations . . . . .	52
3.2	Equation de conservation de l'énergie . . . . .	54
3.2.1	Equation moyennée de conservation de l'énergie . . . . .	55
3.2.2	Méthode d'intégration . . . . .	56
3.2.2.1	Correction de l'équation de conservation de l'énergie . . . . .	56
3.2.2.2	Intégration . . . . .	57
3.2.2.3	Traitement des conditions aux limites . . . . .	62
3.2.3	Mise sous forme d'un système d'état . . . . .	67
3.3	Mise en oeuvre du modèle d'ordre élevé . . . . .	67
3.3.1	Calcul des échanges convectifs superficiels . . . . .	69
3.3.1.1	Echanges convectifs superficiels dans les modèles CFD . . . . .	69
3.3.1.2	Echanges convectifs superficiels dans les modèles aé- rauliques du bâtiment . . . . .	70
3.3.1.3	Choix du traitement des échanges convectifs super- ficiels dans le modèle d'ordre élevé . . . . .	71
3.3.2	Résultats . . . . .	79
3.3.2.1	Cas a . . . . .	80
3.3.2.2	Cas b . . . . .	83

3.3.2.3	Cas c . . . . .	86
3.3.2.4	Cas d . . . . .	88
3.4	Conclusion . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Modèles d'ordre réduit</b>	<b>91</b>
4.1	Construction de la base de projection . . . . .	91
4.1.1	Les snapshots . . . . .	91
4.1.2	Décomposition de la distribution de température . . . . .	94
4.1.3	Base de projection minimale . . . . .	106
4.2	Construction des modèles d'ordre réduit . . . . .	107
4.2.1	Projection des modèles d'ordre élevé . . . . .	107
4.2.2	Correction des modèles d'ordre réduit . . . . .	109
4.2.3	Résultats des modèles d'ordre réduit . . . . .	116
4.3	Interpolation des modèles d'ordre réduit . . . . .	128
4.4	Conclusion . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Estimation et contrôle</b>	<b>137</b>
5.1	Propriétés des systèmes d'état . . . . .	138
5.1.1	Contrôlabilité . . . . .	138
5.1.2	Observabilité . . . . .	139
5.2	Estimation de la température . . . . .	140
5.2.1	Construction des estimateurs . . . . .	140
5.2.2	Résultats . . . . .	142
5.2.3	Interpolation des estimateurs . . . . .	154
5.2.4	Conclusion . . . . .	158
5.3	Contrôle de la température . . . . .	159
5.3.1	Contrôleur à modèle interne (IMC) . . . . .	159
5.3.1.1	Principe . . . . .	159
5.3.1.2	Contrôleur d'ordre 1 . . . . .	162
5.3.1.3	Contrôleur d'ordre 7 . . . . .	164
5.3.2	Contrôleur unique . . . . .	165
5.3.3	Résultats . . . . .	166
5.3.3.1	Variation de consigne . . . . .	167
5.3.3.2	Variation des températures de surface des parois . . . . .	172
5.3.4	Conclusion . . . . .	176
	<b>Conclusion</b>	<b>179</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>181</b>
	<b>Annexes</b>	<b>189</b>
<b>A</b>	<b>Méthode de discrétisation</b>	<b>191</b>



A.1	Calcul des températures aux frontières . . . . .	191
A.2	Calcul des flux diffusifs traversant les frontières . . . . .	193
A.3	Expression générale . . . . .	195
A.4	Conditions aux limites . . . . .	196
A.4.1	Au niveau de la paroi Ouest . . . . .	196
A.4.1.1	Volume de contrôle adjacent à la paroi . . . . .	196
A.4.1.2	Volume de contrôle adjacent à la paroi de second rang	199
A.4.2	Au niveau de la bouche de soufflage . . . . .	200
A.4.2.1	Volume de contrôle placé immédiatement en sortie du ventilo-convecteur . . . . .	201
A.4.2.2	Volume de contrôle adjacent à la sortie du ventilo- convecteur de second rang . . . . .	202
A.4.3	Au niveau de la bouche de reprise . . . . .	203
A.4.3.1	Volume de contrôle adjacent à la reprise . . . . .	203
A.4.3.2	Volume de contrôle en deuxième position par rapport à la reprise . . . . .	204
A.4.3.3	Equation de conservation de l'énergie . . . . .	205
<b>B</b>	<b>Représentation dans l'espace d'état</b>	<b>207</b>
B.1	De la matrice température au vecteur d'état . . . . .	207
B.2	La matrice d'état <b>A</b> . . . . .	208
B.3	La matrice d'état <b>B</b> . . . . .	212
<b>C</b>	<b>Problème d'optimisation avec contraintes</b>	<b>213</b>

# Liste des tableaux

2.2	Valeurs des résidus normalisés . . . . .	26
3.1	Valeurs de $y^+$ du maillage utilisé . . . . .	49
3.2	Conditions de soufflage pour chaque cas étudié . . . . .	52
3.3	Quelques expressions du coefficient d'échange superficiel convectif . . . . .	71
3.4	Cas à distinguer pour le champ thermo-aérouliquique . . . . .	78
3.5	Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime permanent . . . . .	80
3.6	Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime instationnaire . . . . .	81
3.7	Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime permanent . . . . .	83
3.8	Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime instationnaire . . . . .	84
3.9	Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime permanent . . . . .	86
3.10	Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime instationnaire . . . . .	87
3.11	Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime permanent . . . . .	88
3.12	Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime instationnaire . . . . .	89
4.1	Caractéristiques des snapshots . . . . .	94
4.2	Valeurs propres et contribution à l'énergie totale des 8 premiers modes . . . . .	96
4.3	Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime permanent . . . . .	118
4.4	Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime instationnaire . . . . .	118
4.5	Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime permanent . . . . .	121

4.6	Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime instationnaire . . . . .	121
4.7	Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime permanent . . . . .	124
4.8	Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime instationnaire . . . . .	124
4.9	Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE et du MOR non corrigé (MOR nc) avec les données de référence en régime permanent . . . . .	126
4.10	Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE et du MOR non corrigé (MOR nc) avec les données de référence en régime instationnaire . . . . .	126
4.11	Températures à la reprise calculées par les MOR en régime permanent ( $Re = 3846$ ) . . . . .	128
4.12	Valeurs des coefficients d'interpolation . . . . .	130
4.13	Equations dynamiques des coefficients d'interpolation . . . . .	131
4.14	Valeurs des constantes de temps . . . . .	131
5.1	Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime permanent . .	144
5.2	Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime instationnaire	146
5.3	Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime permanent . .	147
5.4	Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime instationnaire	147
5.5	Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime permanent . .	150
5.6	Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime instationnaire	150
5.7	Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE et du MOR non corrigé (MOR nc) avec les données de référence en régime permanent . . . . .	152
5.8	Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime instationnaire	152
5.9	Températures en [°C] dans la zone d'occupation en régime permanent	154
5.10	Equations dynamiques des pondérations de l'estimateur . . . . .	155
5.11	Valeurs propres de Hankel des modèles d'ordre réduit . . . . .	162
5.12	Fonctions de transfert d'ordre 1 du modèle . . . . .	163

5.13	Valeurs des paramètres des contrôleurs PI . . . . .	164
5.14	Numérateurs des fonctions de transfert du local . . . . .	164
5.15	Dénominateurs des fonctions de transfert du local . . . . .	165
5.16	Fonctions de transfert des contrôleurs à modèle interne d'ordre 7 . . .	165
5.17	Valeurs des temps de réponse [s] . . . . .	170
5.18	Valeurs du critère $I_1$ [ $^{\circ}C^2.s$ ] . . . . .	171
5.19	Valeurs du critère $I_2$ [ $^{\circ}C.s$ ] . . . . .	171
5.20	Valeurs du critère $I_3$ [ $^{\circ}C.s^2$ ] . . . . .	171
5.21	Valeurs des ouvertures de la vanne . . . . .	172
5.22	Températures en [ $^{\circ}C$ ] pour une variation de la température de surface du vitrage . . . . .	174
5.23	Températures en [ $^{\circ}C$ ] pour une variation de la température du plancher	175
5.24	Températures en [ $^{\circ}C$ ] pour une variation des températures de surface du plancher et du vitrage . . . . .	175



# Liste des figures

1.1	Contrôle de la température par les systèmes de conditionnement d'air	4
1.2	Schéma bloc du contrôle en boucle fermée . . . . .	5
1.3	Différentes configurations du champ thermoaéraulique dans un local équipé d'un ventilateur-convecteur . . . . .	8
1.4	Vue du local étudié . . . . .	10
2.1	Discrétisation d'un domaine 1D . . . . .	16
3.1	Conditions aux limites au niveau du ventilateur-convecteur . . . . .	48
3.2	Vue du maillage utilisé . . . . .	50
3.3	Volume de contrôle pour un champ en deux dimensions . . . . .	58
3.4	Maillage aux abords de la paroi Ouest . . . . .	64
3.5	Volume de contrôle au soufflage du ventilateur-convecteur . . . . .	65
3.6	Volume de contrôle à la reprise du ventilateur-convecteur . . . . .	66
3.7	Coefficients d'échange superficiel convectif pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar \in [0, 129 \ 0, 215]$ (en trait plein : valeurs extraites des résultats CFD, en pointillés : valeurs calculées avec les expressions du tableau(3.3)) . . . . .	73
3.8	Coefficients d'échange superficiel convectif pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar \in [0, 020 \ 0, 076]$ (en trait plein : valeurs extraites des résultats CFD, en pointillés : valeurs calculées avec les expressions du tableau(3.3)) . . . . .	74
3.9	Coefficients d'échange superficiel convectif pour un air soufflé à $Re = 5769$ et $Ar \in [0, 030 \ 0, 081]$ (en trait plein : valeurs extraites des résultats CFD, en pointillés : valeurs calculées avec les expressions du tableau(3.3)) . . . . .	75
3.10	Cas a : différence de température entre les données de référence et le MOE pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0, 215$ . . . . .	80
3.11	Cas a : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de $0, 215$ à $0, 195$ et un nombre de Reynolds de $3846$ . . . . .	82
3.12	Cas b : différence de température entre les données de référence et le MOE pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0, 194$ . . . . .	83
3.13	Cas b : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de $0, 142$ à $0, 194$ et un nombre de Reynolds de $3846$ . . . . .	85

3.14	Cas c : différence de température entre les données de référence et le MOE pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0,105$ . . . . .	86
3.15	Cas d : différence de température entre les données de référence et le MOE pour un air soufflé à $Re = 5769$ et $Ar = 0,069$ . . . . .	88
4.1	Températures moyennes . . . . .	95
4.2	cas a : coefficients temporels des 4 premiers modes . . . . .	98
4.3	cas a : 4 modes les plus énergétiques . . . . .	99
4.4	cas b : coefficients temporels des 4 premiers modes . . . . .	100
4.5	cas b : 4 modes les plus énergétiques . . . . .	101
4.6	cas c : coefficients temporels des 4 premiers modes . . . . .	102
4.7	cas c : 4 modes les plus énergétiques . . . . .	103
4.8	cas d : coefficients temporels des 4 premiers modes . . . . .	104
4.9	cas d : 4 modes les plus énergétiques . . . . .	105
4.10	Cas a : Correction des coefficients temporels des 4 modes les plus énergétiques, calculés par le MOR non corrigé, le MOR corrigé et par projection directe des snapshots . . . . .	112
4.11	Cas b : Correction des coefficients temporels des 4 modes les plus énergétiques, calculés par le MOR non corrigé, le MOR corrigé et par projection directe des snapshots . . . . .	113
4.12	Cas c : Correction des coefficients temporels des 4 modes les plus énergétiques, calculés par le MOR non corrigé, le MOR corrigé et par projection directe des snapshots . . . . .	114
4.13	Cas d : Correction des coefficients temporels des 4 modes les plus énergétiques, calculés par le MOR non corrigé, le MOR corrigé et par projection directe des snapshots . . . . .	115
4.14	Cas a : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0,215$ . . . . .	119
4.15	Cas a : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de $0,219$ à $0,195$ et un nombre de Reynolds de $3846$ . . . . .	120
4.16	Cas b : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0,194$ . . . . .	122
4.17	Cas b : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de $0,142$ à $0,194$ et un nombre de Reynolds de $3846$ . . . . .	123
4.18	Cas c : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0,105$ . . . . .	125
4.19	Cas d : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à $Re = 5769$ et $Ar = 0,069$ . . . . .	127
4.20	Valeur absolue de l'écart de température entre les MOR et les données de référence pour un nombre de Reynolds de $3846$ . . . . .	129
4.21	Coefficients d'interpolation . . . . .	130

4.22	Interpolation des MOR à $Re = 3846$ pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de : (a) $Ar = 0,215$ à $Ar = 0,183$ , (b) $Ar = 0,183$ à $Ar = 0,215$ . . . . .	132
4.23	Interpolation des MOR pour un échelon du nombre de Reynolds au soufflage de 5769 à 3846 . . . . .	133
4.24	Schéma de principe du modèle du local . . . . .	134
4.25	Contrôle de la température de reprise . . . . .	135
5.1	Schéma de contrôle de la température dans la zone d'occupation . . .	137
5.2	Caractéristique du ventilo-convecteur . . . . .	138
5.3	Cas a : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0,215$ . . . . .	145
5.4	Cas a : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,215 à 0,195 et un nombre de Reynolds de 3846 . . .	146
5.5	Cas b : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0,194$ . . . . .	148
5.6	Cas b : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,142 à 0,194 et un nombre de Reynolds de 3846 . . .	149
5.7	Cas c : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à $Re = 3846$ et $Ar = 0,105$ . . . . .	151
5.8	Cas d : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à $Re = 5769$ et $Ar = 0,069$ . . . . .	153
5.9	Valeur absolue de l'écart de température entre les estimateurs et les données de référence pour un nombre de Reynolds de 3846 . . . . .	155
5.10	Interpolation des estimateurs pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de : (a) $Ar = 0,215$ à $Ar = 0,183$ , (b) $Ar = 0,183$ à $Ar = 0,215$ . $Re = 3846$ . . . . .	156
5.11	Interpolation des estimateurs pour un échelon du nombre de Reynolds au soufflage de 5769 à 3846 . . . . .	157
5.12	Schéma de principe de l'estimateur . . . . .	158
5.13	Contrôle en boucle ouverte . . . . .	159
5.14	Principe du contrôle à modèle interne . . . . .	160
5.15	Transformation d'un contrôleur IMC en contrôleur classique . . . . .	161
5.16	Schéma du contrôle classique en boucle fermée . . . . .	161
5.17	Schéma de principe du contrôleur adaptatif . . . . .	166
5.18	Séquence de consigne . . . . .	168
5.19	Réponse du système contrôlé à une succession d'échelons de la température de consigne . . . . .	169
5.20	Réponse du système contrôlé pour une variation de la température de surface du vitrage . . . . .	173
5.21	Réponse du système contrôlé pour une variation de la température de surface du plancher . . . . .	174



5.22 Réponse du système pour une variation des températures de surface du plancher et du vitrage (tâche solaire) . . . . .	176
B.1 Maillage d'un cas simple en deux dimensions . . . . .	207

# Nomenclature

<b>Lettres latines majuscules</b>		[Unité]
<b>A, B, C, D</b>	Matrices du système d'état	[–]
<i>Ar</i>	Nombre d'Archimède	[–]
<b>C</b>	Matrice de contrôlabilité	[–]
<i>C<sub>kj</sub></i>	Coefficients du tenseur de corrélation temporel	[–]
<i>C<sub>p</sub></i>	Capacité calorifique massique	[J.kg <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> ]
<i>C<sub>μ</sub></i>	Constante empirique du modèle de turbulence	[–]
<i>E</i>	Coefficient empirique du modèle de turbulence	[–]
<i>E<sub>M</sub></i>	Amplitude relative des valeurs propres	[–]
<i>E(s)</i>	Fonction de transfert de l'écart	[–]
<i>Gr</i>	Nombre de Grashof	[–]
<i>G<sub>c</sub>(s)</i>	Fonction de transfert du contrôleur	[–]
<i>G<sub>IMC</sub>(s)</i>	Fonction de transfert du contrôleur à modèle interne	[–]
<i>G<sub>p</sub>(s)</i>	Fonction de transfert du procédé	[–]
<i><math>\tilde{G}_p(s)</math></i>	Fonction de transfert du modèle du procédé	[–]
<b>I</b>	Matrice identité	[–]
<i>I</i>	Fonctionnelle objectif	[–]
<i>K<sub>P</sub></i>	Gain proportionnel d'un régulateur	[–]
<i>L</i>	Largeur de la bouche de soufflage	[m]
<b>L</b>	Matrice de l'estimateur	[–]
<i>M</i>	Indice de troncature	[–]
<i>MOE</i>	Modèle d'ordre élevé	[–]
<i>MOR</i>	Modèle d'ordre réduit	[–]
<i>MOR<sub>nc</sub></i>	Modèle d'ordre réduit non corrigé	[–]
<i>N</i>	Nombre de snapshots	[–]
<i>N</i>	Contraintes	[–]
<i>N<sub>m</sub></i>	Nombre de mailles	[–]
<i>O</i>	Matrice d'observabilité	[–]
<b>P</b>	Matrice de pondération	[–]
<i>POD</i>	Proper Orthogonal Decomposition ou décomposition orthogonale aux valeurs propres	[–]
<i>Pr</i>	Nombre de Prandtl	[–]

		[Unité]
$R$	Tenseur de corrélation spatial	[—]
$Ra$	Nombre de Rayleigh	[—]
$R(s)$	Fonction de transfert de la consigne	[—]
$S_p$	Puissance volumique source	[W.m <sup>-3</sup> ]
$T_i$	Temps d'intégration d'un régulateur	[s]
$T_d$	Temps de dérivation d'un régulateur	[s]
$TI$	Intensité turbulente	[—]
$T_f$	Constante de temps du filtre	[s]
$U(f)$	Transformée de Fourier de l'échelon unitaire	[—]
$U(s)$	Fonction de transfert de la commande	[—]
$V$	Vitesse moyenne	[m.s <sup>-1</sup> ]
$W$	Puissance de chauffage	[W]
$\mathbf{W}_c$	Grammien de contrôlabilité	[—]
$\mathbf{W}_o$	Grammien d'observabilité	[—]
$\mathbf{X}$	Ensemble d'observations	[—]
$\mathbf{Y}$	Solution de l'équation de Riccati	[—]
$Y(s)$	Fonction de transfert de la sortie	[—]

<b>Lettres latines minuscules</b>		[Unité]
$a$	Diffusivité thermique de l'air	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$\mathbf{a}$	Vecteur d'état des coefficients temporels	[—]
$\tilde{\mathbf{a}}$	Multiplicateur de Lagrange	[—]
$a_n(t)$	Coefficient temporel de la décomposition de la température sur la base POD	[—]
$b_n(t)$	Coefficient temporel de la décomposition des snapshots sur la base POD	[—]
$c_{nk}$	$k^{ième}$ composante de la constante associée au $n^{ième}$ mode	[—]
$d_{KL}$	Dimension de Karhunen-Loève	[—]
$d(s)$	Fonction de transfert des perturbations	[—]
$e(t)$	Ecart entre la consigne et la grandeur réglée	[—]
$f$	Fréquence	[f]
$g$	Accélération de la pesanteur	[m.s <sup>2</sup> ]
$g1\ g2$	Coefficient du schéma QUICK	[—]
$h$	Coefficient d'échange superficiel convectif	[W.m <sup>-2</sup> .°C <sup>-1</sup> ]
$hr$	Hauteur de la bouche de reprise	[m]
$k$	Energie cinétique turbulente	[m <sup>2</sup> .s <sup>-2</sup> ]
$l$	Echelle de longueur	[m]
$l_m$	Longueur de mélange	[m]

		[Unité]
$l_r$	Longueur du tube de reprise	[m]
$\dot{m}$	Débit massique	[kg.s <sup>-1</sup> ]
$n,m$	Nombres de cellules dans les directions x et y	[-]
$\mathbf{n}$	Normale à une face du maillage	[-]
$n_c$	Nombre de composantes des vecteurs	[-]
$n_{CL}$	Nombre de conditions aux limites	[-]
$n_t$	Nombre de pas de temps	[-]
$p$	Coefficient d'interpolation	[-]
$q$	Débit de ventilation	[m <sup>3</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$r$	Ordre relatif de la fonction de transfert du modèle	[-]
$t$	Temps	[s]
$\mathbf{u}$	Vecteur d'état d'entrée	[°C]
$u(t)$	Commande du système	[-]
$u_c$	Vitesse caractéristique	[m.s <sup>-1</sup> ]
$u_\tau$	Vitesse de frottement	[m.s <sup>-1</sup> ]
$u,v$	Composantes du vecteur vitesse	[m.s <sup>-1</sup> ]
$\mathbf{v}$	Vecteur vitesse	[m.s <sup>-1</sup> ]
$\mathbf{w}_s$	Bruits du système	[-]
$\mathbf{w}_m$	Bruits de mesure	[-]
$\mathbf{w}_p$	Perturbations de l'état	[-]
$\mathbf{x}$	Vecteur d'état	[-]
$x,y$	Coordonnées d'une cellule	[m]
$x_i$	$i^{\text{ème}}$ coordonnée	[-]
$\mathbf{y}$	Vecteur d'état d'observation	[-]
$y^+$	Position adimensionnée de la première maille	[-]
$z^{-1}$	Opérateur dérivé discret	[-]

<b>Symboles grecs</b>		[Unité]
$\alpha$	Coefficient de correction de la diffusivité	[-]
$\beta$	Paramètre de pondération	[-]
$\delta(f)$	Fonction Dirac de la fréquence	[-]
$\delta_{nm}$	Symbole de Kronecker	[-]
$\Gamma$	Diffusivité thermique caractéristique	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$\delta L$	Dimension moyenne du maillage	[m]
$\Delta t$	Pas de temps	[s]
$\delta t_c$	Temps caractéristique	[s]
$\Delta x \Delta y$	Dimension de la maille dans les directions x et y	[m]
$\epsilon$	Taux de dissipation	[m <sup>2</sup> .s <sup>3</sup> ]

		[Unité]
$Z, X$	Polynômes	[-]
$\theta$	Température instantanée	[°C]
$\Theta$	Température moyenne au sens de Reynolds	[°C]
$\theta'$	Température fluctuante au sens de Reynolds	[°C]
$\kappa$	Coefficient empirique du modèle de turbulence	[-]
$\lambda$	Conductivité thermique	[W.m <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> ]
$\lambda_i$	$i^{\text{ième}}$ valeur propre	[-]
$\mu$	Viscosité dynamique moléculaire	[kg.s <sup>-1</sup> .m <sup>-1</sup> ]
$\nu$	Viscosité cinématique moléculaire	[m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> ]
$\rho$	Masse volumique de l'air	[kg.m <sup>-3</sup> ]
$\sigma$	Ecart quadratique moyen	[°C]
$\tau$	Contrainte tangentielle	[kg.m <sup>-1</sup> .s <sup>-2</sup> ]
$\varphi$	Densité de flux thermique	[W.m <sup>-2</sup> ]
$\Omega$	Domaine étudié	[-]
$\Phi_i$	$i^{\text{ième}}$ mode propre	[-]
$\Phi_c$	Fonction de contrôle	[-]

---

## Indices

---

0	Valeur d'une grandeur à l'instant initial
$c$	Grandeur locale, en référence à une cellule
$e, w, n, s$	Indices relatifs aux frontières Est, Ouest, Nord et Sud des cellules
$E, W, N, S$	Indices relatifs aux cellules Est, Ouest, Nord et Sud
$P$	Indice relatif à la maille centrale
$eff$	Grandeur effective
$i, j$	Positions indicielles d'une cellule suivant les axes x et y
$local$	Grandeur de référence à l'ensemble du local
$moy$	Grandeur moyenne
$obs$	Grandeur observée
$paroi$	Grandeur relative à la paroi
$r$	Matrice réduite
$ref$	Grandeur relative aux données de référence
$rep$	Grandeur se référant à la reprise
$souf$	Grandeur se référant à la bouche de soufflage
$t$	Grandeur turbulente
$u$	Grandeur relative aux entrées contrôlables
$w_s$	Grandeur relative aux bruits du système
$w_m$	Grandeur relative aux bruits de mesure
$w_p$	Grandeur relative aux perturbations
$zocc$	Grandeur se référant à la zone d'occupation

---

---

**Exposant**

---

---

$\cdot^+$	Partie inversible d'une fonction de transfert
$\cdot^-$	Partie non inversible d'une fonction de transfert
$\cdot^*$	Conjuguée
$\cdot^t$	Transposée
$\cdot^{\prime}$	Dérivée
$\cdot^{\wedge}$	Grandeur estimée

---



# Introduction générale

A l'heure où j'écris ces quelques lignes d'introduction se déroule, en France, le Grenelle de l'environnement qui réunit l'état et les représentants de la société civile afin de définir une feuille de route en faveur de l'écologie, du développement et de l'aménagement durables. Ces objectifs se dessinent dans le choix des appellations des différents groupes de travail parmi lesquelles apparaissent l'ambition de «maîtriser la demande d'énergie», d'«adopter des modes de consommation durables», ou encore de «préserver les ressources naturelles». Au regard de cette prise de conscience, le bilan du secteur du bâtiment est peu flatteur. C'est le premier consommateur d'énergie avec 43 % de l'énergie totale consommée contre 31 % pour les transports et 20 % pour l'industrie. De plus, cette consommation a augmenté de 25 % entre 1973 et 2002. Ce secteur représente également 21 % des émissions de CO<sub>2</sub>. Ainsi, non seulement le bâtiment se révèle être une source importante d'économies d'énergie, mais ce secteur ne pourra pas être ignoré pour atteindre les objectifs à venir. Pour y arriver, les spécialistes mettent en avant trois étapes :

- diminuer notre consommation énergétique, notamment en supprimant les gaspillages, ce qui passe notamment par un changement des comportements,
- optimiser le fonctionnement des équipements existants,
- faire appel à des technologies innovantes.

A l'opposé, les bâtiments ont dû répondre, ces dernières années, à une demande accrue en confort et en équipements. Alors que la climatisation était il y a encore peu de temps réservée aux bureaux et aux commerces, elle est en train de gagner le terrain des habitations, en particulier depuis la canicule de 2003. Ainsi, l'objectif des équipements de climatisation, de chauffage et de ventilation est double. Ils doivent, d'une part, assurer des conditions de vie confortables ou des conditions de travail favorisant la productivité et l'efficacité et, d'autre part, minimiser les consommations d'énergie.

Les travaux, présentés dans ce mémoire, peuvent très bien s'insérer dans le cadre des deux dernières étapes, en se focalisant sur l'amélioration du contrôle thermique des locaux. Partant du principe que le coût énergétique des bâtiments est directement influencé par notre capacité à bien les exploiter [1], il est raisonnable de penser qu'un perfectionnement du contrôle des installations de conditionnement d'air est



une des meilleures voies conduisant à l'amélioration de l'efficacité énergétique des bâtiments [2], tout en répondant aux besoins de confort. Or les technologies des contrôleurs terminaux utilisées actuellement dans le bâtiment sont extrêmement simples, en raison notamment d'un manque d'information sur la distribution de température dans les locaux. Notre premier objectif consiste alors à montrer qu'il est possible d'obtenir des informations précises sur les caractéristiques thermiques d'un local, utilisables en temps réel par un contrôleur. Ces caractéristiques étant liées au champ thermo-aéroulque du local, toute la difficulté consiste à passer des équations de Navier Stokes et de conservation de l'énergie, décrivant la physique du phénomène coûteuse en temps de calcul, à des modèles d'ordre faible, résolubles en temps réel. Parmi les solutions présentes dans la littérature, deux ont attirés notre attention : l'hypothèse de champ de vitesse fixé d'une part, et la réduction de modèle par la décomposition orthogonale aux valeurs propres (notée POD pour Proper Orthogonal Decomposition) d'autre part. Enfin, notre deuxième objectif a pour finalité d'appliquer aux bâtiments la théorie moderne du contrôle développée et utilisée dans d'autres secteurs industriels tels que l'aéronautique. L'écriture sous forme de systèmes d'état en est la clé afin de construire un estimateur capable de prédire en temps réel la température dans la zone d'occupation d'un local pour la contrôler.

Dans la première partie de ce document, nous présentons le contexte de l'étude afin d'en dégager la problématique et les objectifs.

Dans la deuxième partie, nous présentons les méthodes de modélisation du champ thermo-convectif actuellement utilisées dans le secteur du bâtiment. Elle permettra d'éclairer les choix faits dans nos travaux.

La troisième permet d'un part de construire un ensemble de données de référence à partir de simulations CFD et, d'autre part d'introduire l'hypothèse de champ de vitesse fixé à travers le développement d'un modèle d'ordre élevé du champ thermo-aéroulque.

La quatrième est consacrée à la réduction de l'ordre des modèles en appliquant la décomposition orthogonale aux valeurs propres.

Enfin, dans la dernière partie, nous utilisons les modèles d'ordre réduit afin de construire un estimateur de la température puis de synthétiser et tester plusieurs contrôleurs.

# Chapitre 1

## Contexte et Objectifs

Ce chapitre est consacré à l'introduction des méthodes actuellement utilisées pour le contrôle thermique des locaux. Leur confrontation avec les critères de confort thermique nous permettra d'en montrer les limites et ainsi de définir les objectifs de nos travaux.

### 1.1 Contrôle des systèmes de conditionnement d'air

#### 1.1.1 Stratégie de contrôle

Il existe plusieurs types de systèmes de conditionnement d'air dont le choix s'effectue en fonction des contraintes du projet (place et énergie disponibles, budget, rénovation ou neuf, ...). On distinguera :

- les systèmes tout air à volume d'air variable (VAV) ou à volume d'air constant (VAC),
- les systèmes air/eau tels que les ventilo-convecteurs, les systèmes à induction et les systèmes associant des émetteurs de chaleur à une ventilation,
- les systèmes frigorifiques.

Il est possible de les classer en fonction de leur mode de contrôle. La figure (1.1) montre comment la température est contrôlée avec ces systèmes [3]. Dans le cas des systèmes tout air, l'air neuf est tout d'abord traité dans une centrale de traitement d'air puis transporté dans les pièces. La température du local est régulée par le contrôleur CT en ajustant la température d'air soufflé grâce à la vanne de la batterie pour les systèmes VAC, ou en modifiant le débit d'air pour les systèmes VAV. Pour les systèmes à induction, l'air neuf est également traité en centrale avant

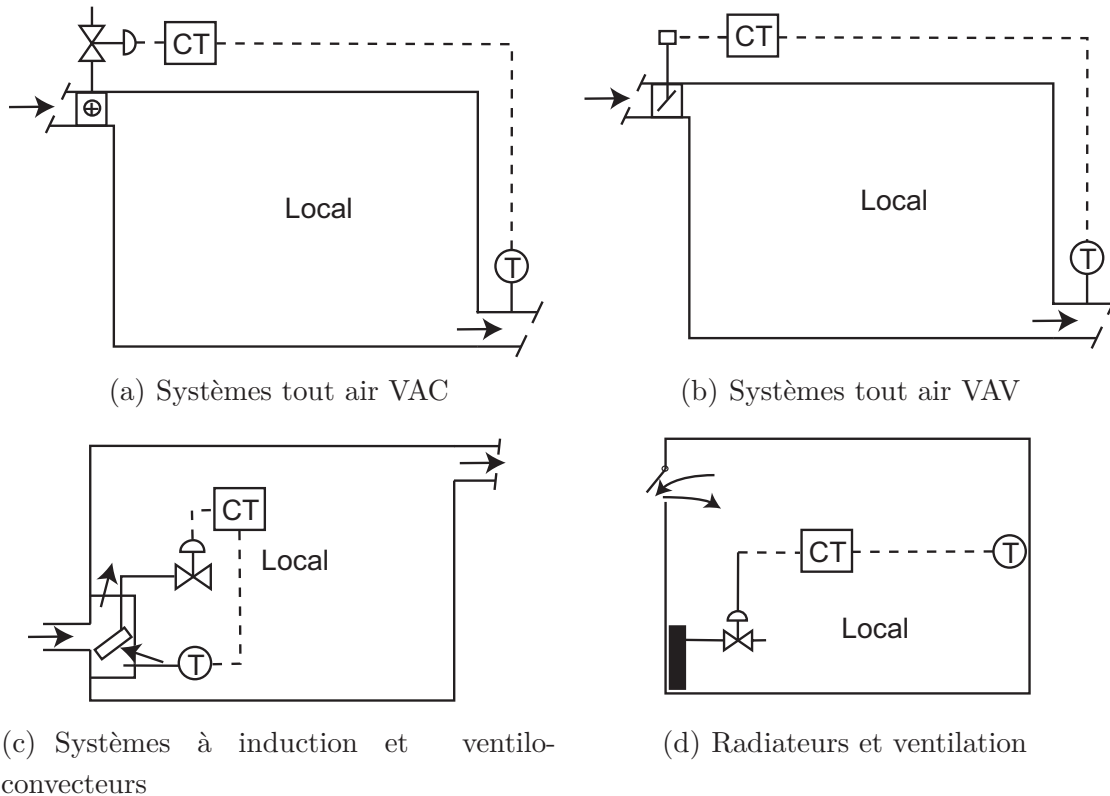


FIG. 1.1 – Contrôle de la température par les systèmes de conditionnement d'air

d'être introduit dans l'unité terminale à moyenne ou forte pression. Par induction, il se mélange à de l'air repris dans le local préalablement chauffé ou refroidi avec une batterie. La température du local est contrôlée en agissant sur cette batterie. Par contre, pour les ventilo-convecteurs, l'air neuf est d'abord mélangé avec l'air repris avant de traverser une batterie chaude ou froide. La température du local est influencée par la température de l'air soufflé réglée par le débit d'eau circulant dans la batterie et le débit d'air soufflé. L'air neuf peut soit provenir d'une centrale, soit directement de l'extérieur. Dans tous les cas, le système de régulation contient un capteur (T) qui mesure la grandeur réglée, et un régulateur (CT) qui définit la grandeur de réglage appliquée à l'actionneur (vanne ou registre). L'objectif du régulateur est de supprimer l'écart de réglage qui est la différence entre la grandeur réglée et la valeur de consigne fixée par l'utilisateur. Quelque soit le système étudié, la grandeur réglée n'est pas la grandeur à contrôler. Par exemple, dans le cas des systèmes tout air VAC (figure 1.1(a)), c'est la température de reprise qui est mesurée alors que c'est la température au centre du local qui doit être contrôlée.

## 1.1.2 Théorie du contrôle

### 1.1.2.1 Principe de la régulation

Les exemples précédents mettent en évidence les principaux éléments d'une boucle de contrôle :

- le capteur qui mesure la grandeur réglée,
- le régulateur qui calcule la grandeur de réglage et envoie le signal de commande,
- l'actionneur qui modifie la position de l'organe de réglage.

La figure (1.2) donne le principe général du contrôle en boucle fermée d'un système. Le régulateur compare la grandeur réglée à la consigne pour définir la commande donnée à l'actionneur (ou organe de réglage) afin de modifier éventuellement sa position. Ce principe de régulation est très couramment utilisé pour le contrôle thermique terminal dans l'habitat, il permet notamment de tenir compte des nombreuses perturbations difficilement prévisibles en temps réel (apports solaires, entrée ou sortie d'occupants, ouverture d'une fenêtre ou d'une porte, ...).

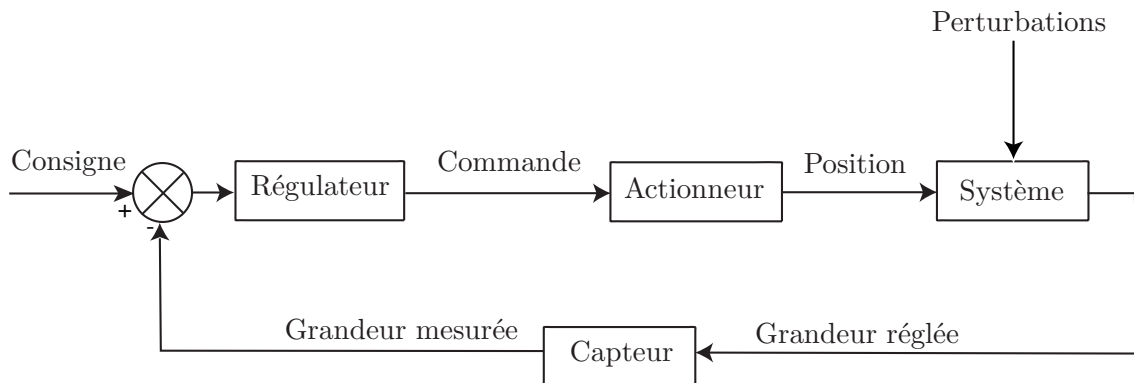


FIG. 1.2 – Schéma bloc du contrôle en boucle fermée

### 1.1.2.2 Techniques de régulation

La régulation appliquée au bâtiment s'appuie en général sur les techniques classiques de régulation telles que les régulateurs TOR (pour Tout Ou Rien) ou PID (pour Proportionnel Intégrateur Dérivé). Dans le premier cas, l'organe de réglage ne possède que deux positions (ouvert ou fermé par exemple) alors que dans le deuxième cas, l'action est progressive. Pour le régulateur PID, la commande  $u(t)$  est liée à l'écart  $e(t)$  entre la consigne et la grandeur réglée par la relation donnée par

l'équation(1.1).

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (1.1)$$

La détermination des paramètres  $K_P$ ,  $T_i$  et  $T_d$  constitue le dimensionnement ou paramétrage du contrôleur. Etant donné que le régulateur doit compenser l'erreur commise, ces constantes dépendent des caractéristiques du système et de critères (stabilité, performance et robustesse) à atteindre pour le système contrôlé. Dans la pratique, le choix des constantes s'avère assez délicat, et bien souvent dans le domaine du bâtiment seuls les régulateurs P ou PI sont utilisés. Largement employé pour les systèmes de conditionnement d'air, le contrôleur PI a été comparé au contrôleur TOR par Kulkarni et Hong [4] pour le chauffage d'un bâtiment résidentiel. Alors qu'au niveau du confort, le contrôleur PI devance son concurrent grâce à sa plus faible amplitude de température, il n'apporte pas d'amélioration notable sur le plan énergétique.

Pour améliorer la régulation, la théorie du contrôle moderne a initié le développement du contrôle dit «optimal». Cette théorie repose essentiellement sur la possibilité d'obtenir un modèle d'état (équation 1.2) du système contrôlé.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{w_p}\mathbf{w}_p(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_u\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}_{w_m}\mathbf{w}_m(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où :

- $\mathbf{x}$  : vecteur d'état qui contient toutes les variables permettant de décrire le système,
- $\mathbf{y}$  : vecteur de sortie qui contient les variables observées,
- $\mathbf{u}$  : vecteur d'entrée qui contient les grandeurs de commande,
- $\mathbf{A}$  : matrice d'état,
- $\mathbf{B}_u$  et  $\mathbf{D}_u$  : matrices d'entrée,
- $\mathbf{B}_{w_p}$  et  $\mathbf{D}_{w_m}$  : respectivement matrice des perturbations et matrice de bruit des mesures,
- $\mathbf{C}$  : matrice d'observation.

La première équation est l'équation différentielle d'état qui caractérise le comportement dynamique du système, alors que la deuxième est l'équation de sortie ou d'observation qui permet d'extraire la variable mesurée. La valeur de la commande  $\mathbf{u}(t)$  est obtenue par la minimisation d'une fonction coût intégrant divers critères tels que le respect d'une consigne ou la réduction de la consommation d'énergie. De nombreuses études ont été effectuées sur cette technique dans les années 1980 et 1990 [5] sans déboucher sur des applications. Mais avec l'accroissement important des capacités de calcul des ordinateurs, le contrôle optimal réapparaît dans certains secteurs comme l'aéronautique.

### 1.1.3 Contrôle et confort thermique

La régulation doit avant tout permettre au système de conditionnement d'air de répondre à ses objectifs, dont le confort. Or, le confort thermique de l'individu est une notion complexe qui repose à la fois sur des aspects physiologiques et psychologiques. Ainsi Fanger [6] a proposé l'emploi de l'indice PMV (pour Predicted Mean Vote ou vote moyen prévisible) issu d'une démarche théorique et empirique pour tenir compte des différents paramètres du confort que sont la température de l'air, la température moyenne de rayonnement, la vitesse de l'air, l'humidité de l'air ou encore, l'activité et les vêtements de l'occupant. Cet indice conduit au PPD (pour Predicted Percentage of Dissatisfied ou pourcentage prévisible d'insatisfait) qui donne des informations sur l'inconfort thermique en estimant le pourcentage de personnes susceptibles d'avoir trop chaud ou trop froid. La norme européenne ISO7730 [7] consacrée à l'évaluation des ambiances thermiques modérées s'appuie sur ces deux indices. Toutefois, elle met en évidence d'autres critères dans le cas des bureaux et des logements :

- la différence verticale de température de l'air entre la tête et le niveau des chevilles,
- la température de surface du sol,
- la vitesse moyenne de l'air,
- l'asymétrie de température rayonnante entre l'occupant et les parois,
- l'humidité relative de l'air.

Il apparaît donc que le confort thermique dépend d'une part de nombreuses grandeurs et d'autre part de la distribution de ces grandeurs dans le local.

## 1.2 Prise en compte de l'hétérogénéité des températures pour le contrôle thermique

Traditionnellement, lors du dimensionnement du système de contrôle, de l'évaluation de la consommation ou encore lors de l'évaluation du niveau de confort thermique, l'air intérieur est considéré comme bien mélangé, c'est-à-dire qu'une seule température peut caractériser l'ensemble du local. Bien que ce modèle soit très pratique et largement répandu pour calculer les charges de chauffage ou de climatisation, il conduit souvent à des systèmes de contrôle à l'origine de situations d'inconfort.

En réalité, la distribution de température dans un local est significativement hétérogène. Dans le cas d'un local équipé d'un ventilo-convecteur placé en allège, Peng [8] et Riederer [9] ont répertorié les différentes configurations possibles (figure 1.3). Elles dépendent de la température et de la vitesse de soufflage. Quelle que soit

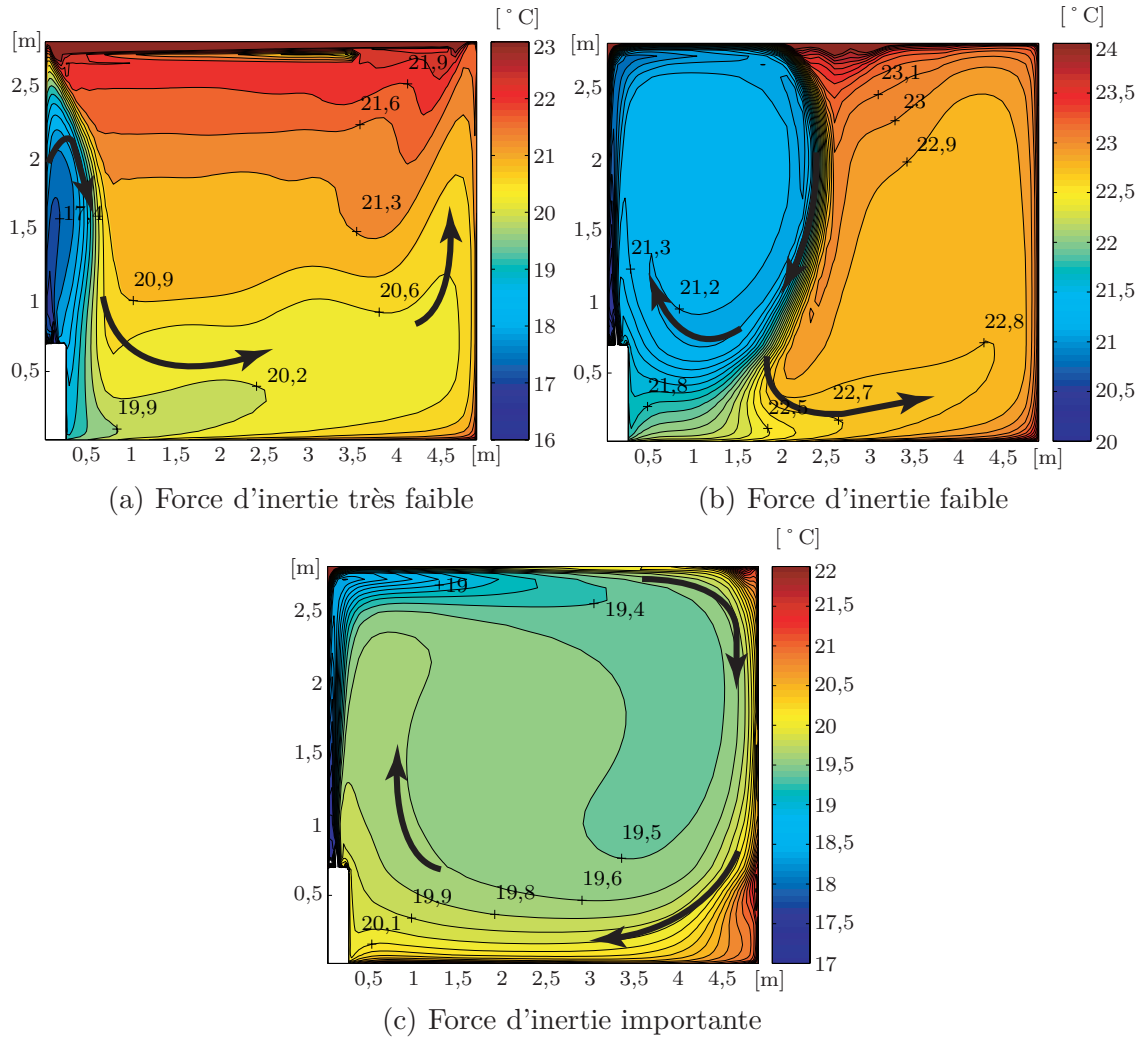


FIG. 1.3 – Différentes configurations du champ thermoaéroulque dans un local équipé d'un ventilo-convecteur

la configuration, il apparaît que l'hétérogénéité des températures ne peut pas être négligée. Elle devrait donc absolument être prise en compte lors du contrôle thermique des locaux. Pour être plus précis, prenons l'exemple de l'atrium expérimental de Kanagawa au Japon. Une campagne de mesures [10] a mis en évidence les larges variations temporelles et spatiales des températures et de l'écoulement d'air. Ainsi, dans le cas d'un refroidissement par air conditionné, une stratification thermique importante peut parfois être observée, avec un gradient vertical de température pouvant atteindre  $7,6\text{ °C}$  sur  $2\text{ m}$  de hauteur. Les mesures montrent de plus que ce gradient peut varier du simple au double en fonction des conditions de soufflage.

D'autre part, la figure (1.1) illustrant la régulation de la température pour plusieurs systèmes de conditionnement d'air met en évidence la différence entre la zone de mesure, où est placée la sonde de température (T), et la zone d'occupation au centre du local. Ainsi, pour contrôler la température dans la zone d'occupation,

plusieurs solutions apparaissent. Une solution simple consiste à déplacer la sonde de température dans la zone d'occupation, ce qui risque d'être incompatible avec l'utilisation de cette zone. Une deuxième solution nous amène à prendre en compte la différence entre la température mesurée et la température contrôlée de façon forfaitaire. L'exemple de l'atrium montre que cette méthode est peu fiable étant donné les fortes variations spatiales et temporelles des températures. Il semble donc plus judicieux d'estimer la température contrôlée en fonction de la température mesurée. Cette solution rend alors indispensable la connaissance du champ thermo-aéraulique qui lie ces deux variables.

Pourtant, Peng et Van Paassen ont montré dans leur recherche bibliographique [3] que la plupart des systèmes de contrôle de conditionnement d'air ne prennent pas en compte la distribution de température étant donné qu'un modèle dynamique applicable en temps réel n'est pas disponible. Pour pallier cette absence, les auteurs se sont appuyés sur la capacité des logiciels de CFD (Computational Fluid Dynamic) à calculer le champ thermo-aéraulique d'un local équipé d'un ventilo-convecteur. En couplant les modèles zonaux à un estimateur d'état, ils obtiennent un système dynamique résoluble en temps réel qui permet de contrôler la température dans la zone d'occupation. D'autres auteurs, tels que De Moor et Berckmans [11], Taylor [12] *et al.* et Zerihun Desta *et al.* [13] et [14] utilisent des données expérimentales afin d'identifier une fonction de transfert d'ordre faible représentant la dynamique des températures dans un local.

### 1.3 Objectifs

L'objectif de cette thèse consiste à montrer la faisabilité de la prise en compte du champ thermo-convectif pour le contrôle thermique des locaux. La section précédente a montré qu'il était nécessaire d'obtenir un modèle dynamique du champ thermo-aéraulique. De plus, la finalité du contrôle implique par définition que ce modèle soit résolu en temps réel.

Hormis les travaux de Peng et Van Paassen [3] et de Ghiaus et Ghiaus [15], peu de recherches ont à notre connaissance été réalisées sur ce sujet. Comme eux, nous avons choisi d'appuyer notre étude sur l'exemple d'un local équipé d'un ventilo-convecteur représenté sur la figure (1.4). Placé en allège, le ventilo-convecteur possède une bouche de soufflage de dimension  $(0,06 \times 0,40)$  et une bouche d'extraction de dimension  $(0,06 \times 0,76)$ . Un capteur de température est placé à la reprise pour mesurer la température de l'air extrait du local. Ce capteur est donc situé en dehors de la zone d'occupation (centre du local) dont la température doit être contrôlée. La



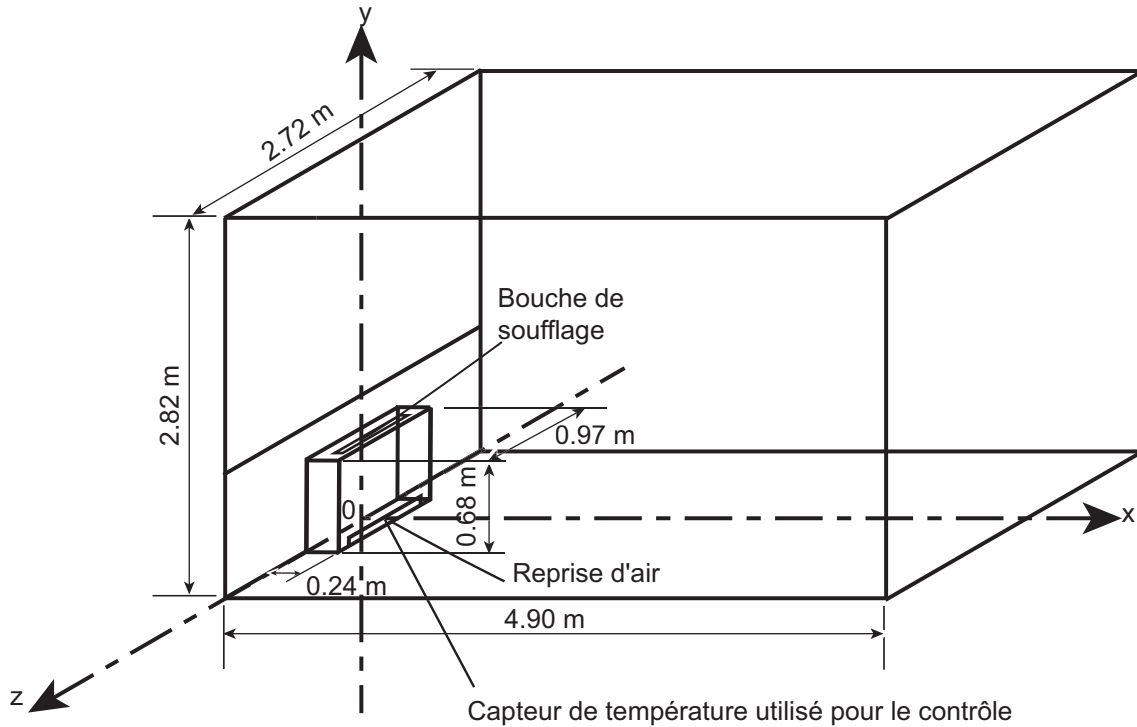


FIG. 1.4 – Vue du local étudié

bouche de soufflage oriente le jet vers le plafond avec une légère inclinaison vers le vitrage. Pour restreindre l'étude au champ thermo-convectif et diminuer les sources d'erreur lors de la modélisation, les échanges thermiques par rayonnement ne sont pas considérés. Le ventilo-convecteur et les parois seront considérés extérieurs au domaine étudié. Les conditions aux limites sont donc constituées des températures des surfaces internes des parois, ainsi que des conditions de température et de vitesse au niveau des bouches de soufflage et de reprise.

Néanmoins, il nous sera difficile de comparer nos résultats à ceux de Peng en raison du manque de données chiffrées sur ses travaux. C'est pourquoi nous mettrons l'accent sur l'utilisation de critères objectifs et chiffrés pour mesurer la qualité de nos résultats. Ceux-ci seront confrontés à des données de références obtenues avec un logiciel de dynamique des fluides. Par rapport à des données expérimentales, cet outil a l'avantage de donner plus de souplesse quant au nombre de configurations étudiées. Conscient du risque d'éloignement de ces données par rapport à des données expérimentales, nous essaierons autant que possible de comparer certains des éléments de nos modèles à des modèles empiriques. Nous pouvons également souligner l'intérêt du choix d'un local équipé d'un ventilo-convecteur qui nous donnera accès à des écoulements variés représentatifs des écoulements réels (figure 1.3).

Enfin, et suite aux travaux de Peng, nous aurons pour objectif de répondre à deux questions laissées en suspend :

- comment construire un modèle du champ thermo-aéraulique valable quelle que soit la configuration de l'écoulement ?
- est-il possible et souhaitable de construire des contrôleurs plus complexes que les contrôleurs actuellement utilisés dans le bâtiment ?



## Chapitre 2

# Modélisation du champ thermo-aéraulique à l'intérieur des bâtiments

La réalisation des objectifs de ces travaux repose sur notre capacité à modéliser le champ thermo-convectif à l'intérieur des locaux. Aussi, il nous a paru important de faire apparaître dans ce mémoire l'étude bibliographique que nous avons réalisée sur ce sujet, et qui éclaire nos choix. Les CFD pour Computational Fluid Dynamic vont constituer un des principaux outils de nos travaux, en particulier pour obtenir des données de référence. Ils font appel à de nombreuses techniques et nécessitent beaucoup d'expertise afin d'obtenir des résultats réalistes. Cette remarque est particulièrement vraie dans le cas des bâtiments où les écoulements sont souvent de nature complexe et multiple. De plus, cette partie va nous permettre d'identifier les différentes méthodes utilisables dans le bâtiment afin d'obtenir une modélisation d'ordre faible utilisable pour le contrôle thermique des locaux.

### 2.1 Application des CFD dans les locaux

La physique des phénomènes existants dans les locaux est complexe. Beausoleil-Morrison [16] en fait l'analyse suivante. Le mouvement de l'air y est provoqué à la fois par des forces mécaniques et par la poussée d'Archimède. Les forces mécaniques sont généralement causées par des ventilateurs ou par le vent entrant par des ouvertures, alors que les forces d'Archimède sont généralement engendrées par des sources de chaleur ou de froid présentes dans le local (radiateurs, occupants, équipements de bureau, ...) ou par la différence de température entre les parois et

l'air. De plus, l'air dans un local peut être considéré comme incompressible car les vitesses sont lentes, de l'ordre du  $[m/s]$  ou du  $[cm/s]$ . L'air, comme de nombreux fluides, est newtonien. Enfin, étant donné les faibles variations de température de l'air, ses propriétés thermodynamiques sont considérées comme indépendantes de la température. Les effets de densité sont alors représentés par l'approximation de Boussinesq.

Ce problème peut être décrit par les équations de Navier Stokes incompressible (2.2 et 2.1) et l'équation de conservation de l'énergie (2.3). Avec la convention d'Einstein, elles s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v_i) = 0 \quad (2.1)$$

équation de conservation du moment :

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_j v_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \beta(\theta_\infty - \theta)g_i \quad (2.2)$$

avec  $g_i$  l'accélération de pesanteur dans la direction  $i$  et  $\theta_\infty$  la température de référence.

équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_P \theta) + \frac{\partial}{\partial x_i}(C_P v_i \theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) + S_p \quad (2.3)$$

Elles sont hautement non linéaires et fortement couplées. Aussi ne peuvent-elles pas être résolues analytiquement, si ce n'est pour des problèmes très simples. Des techniques de discrétisation numérique ont été introduites pour ramener ce problème à un niveau résoluble. Le domaine fluide est tout d'abord découpé en volumes de contrôle. L'approximation des équations différentielles sur ces volumes conduit alors à un système de relations algébriques. C'est le principe de la dynamique des fluides numérique ou CFD (pour Computational Fluid Dynamics). Néanmoins, il n'existe pas de méthode universelle puisque chaque cas étudié constitue un cas particulier. Dans ce contexte, l'étude thermoaéraulique d'un local constitue un exemple complexe d'application en raison de la complexité et de la diversité d'une part des phénomènes physiques impliqués, et d'autre part des géométries étudiées.

Par ailleurs, la circulation de l'air dans un local est en général considérée comme un phénomène turbulent même dans le cas des salles propres [17]. Dans [18], il est précisé que l'écoulement de l'air dans un local n'est pas pleinement turbulent

mais seulement localement. La plupart des écoulements subissent des fluctuations turbulentes aléatoires qui sont dues aux instabilités entre les forces visqueuses et les forces d'inertie. Etant donné que les fluctuations turbulentes influencent le transport des moments et de l'énergie thermique, elles doivent être prises en compte dans la formulation et la solution des équations.

Il est enfin intéressant de remarquer [16] que la plupart des applications réussies des CFD dans les locaux ne permettaient de prédire que l'écoulement de l'air. Le calcul de la distribution des températures, et notamment des transferts thermiques convectifs aux parois, a eu beaucoup moins de succès.

### 2.1.1 Couplage vitesse-pression

Patankar relève que la réelle difficulté dans le calcul du champ de vitesse réside dans le champ de pression inconnu [19]. En effet, le gradient de pression fait partie du terme source des équations de Navier Stokes. Ce couplage de la vitesse et de la pression est résolu par des méthodes de prédiction-corrrection. Le logiciel StarCD en propose trois : une variante de la méthode SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked-Equations), PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) et SIMPISO une combinaison des deux premières. Pour plus de détails sur ces méthodes, on pourra se référer à [20] et [21]. SIMPLE et SIMPISO sont réservés aux calculs stationnaires, alors que PISO, plus récent, est très performant pour les calculs stationnaires et conseillé pour les calculs instationnaires.

Dans le cas des programmes CFD non commerciaux appliqués aux locaux, beaucoup d'auteurs, ([22], [23], [18], [17] et [24]), utilisent l'algorithme SIMPLE-Consistent (noté SIMPLEC). Comme le souligne Beausoleil-Morrison *et al.* dans [25], cette méthode a moins de simplifications que SIMPLE et donne de bons résultats.

Enfin, pour la méthode SIMPLE, de nombreux auteurs, [24] et [25] par exemple, rapportent qu'il est nécessaire de sous relaxer les termes de correction de pression pour obtenir la convergence. En d'autres termes, il faut ralentir la résolution itérative du couplage. La valeur de 0,3 semble satisfaisante pour le facteur de sous relaxation.

### 2.1.2 Méthodes de résolution

L'objectif des méthodes de résolution est de transformer le système d'équations aux dérivées partielles décrivant le problème en un système d'équations algébriques.

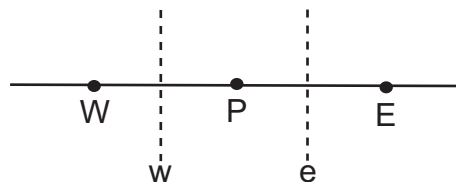


FIG. 2.1 – Discrétisation d'un domaine 1D

Il faut tout d'abord discrétiser le domaine de calcul. La figure (2.1) illustre la discrétisation d'un domaine en une dimension. Seules trois mailles (P, E et W) et leurs frontières respectives (w et e) sont représentées.

Trois types de méthodes sont principalement utilisées :

- **la méthode des différences finies.** Les inconnues  $\phi$  sont exprimées aux noeuds du maillage. Les dérivées sont approchées par des différences finies obtenues en utilisant des séries de Taylor tronquées. Ces expressions approchées, insérées dans les équations à résoudre, conduisent à des équations algébriques ayant pour inconnues la valeur des inconnues en chaque point du maillage.
- **la méthode des éléments finis.** Les variations locales des inconnues sont décrites par des fonctions simples (linéaires ou quadratiques). Les expressions ainsi obtenues sont introduites dans les équations à résoudre qui ne sont alors plus vérifiées de façon exacte. Un résidu est défini pour mesurer cette erreur. Sa minimisation avec des fonctions de pondération et par intégration conduit à un système d'équations algébriques dont les inconnues sont les coefficients des fonctions d'approximation.
- **les méthodes spectrales.** Les inconnues sont approchées par des séries de Fourier tronquées ou par des séries de polynômes de Chebyshev. A la différence des deux autres techniques, l'approximation n'est pas locale, mais valable sur l'ensemble du domaine.

Cependant, la plupart des codes CFD commerciaux (PHOENICS, FLUENT, FLOW3D et StarCD) utilisent la méthode des volumes finis qui est issue d'une formulation spéciale de la méthode des différences finies. Son algorithme suit trois étapes :

- l'intégration formelle des équations sur tous les volumes de contrôle composant le domaine,
- la discrétisation des termes des équations intégrées à partir d'un ensemble d'approximations du type différence finie,
- la résolution des équations algébriques par une méthode itérative.

Cette méthode exprime la conservation physique des quantités sur chaque volume de contrôle [26], ce qui est un de ses avantages majeurs. Ceci explique sans doute en grande partie sa fréquente utilisation dans le domaine des simulations aérodynamiques des locaux ([22] et [16]). L'application de cette méthode conduit à un système

d'équations permettant d'obtenir les valeurs des différentes grandeurs au centre des volumes de contrôle. Néanmoins, lors de l'intégration des équations (2.2 et 2.3), d'autres inconnues apparaissent : la valeur des grandeurs aux frontières des cellules (w et e sur la figure (2.1)). Il est donc nécessaire d'obtenir des équations supplémentaires.

### 2.1.3 Schémas de discrétisation

L'utilisation de schémas de discrétisation permet d'exprimer les grandeurs aux frontières des mailles en fonction de leur valeur au centre dans le cas de la discrétisation spatiale, et de calculer les dérivées temporelles en fonction des valeurs aux différents pas de temps dans le cas de la discrétisation temporelle.

#### 2.1.3.1 Discrétisation spatiale

**Le schéma centré** Le schéma centré suppose que les variations sont linéaires au niveau des frontières. Il est très largement utilisé pour les termes diffusifs, et notamment pour calculer les coefficients de diffusion aux interfaces. Par contre, pour les termes de transport, il peut conduire à des solutions irréalistes [16]. Ce résultat semble tout à fait logique puisque ce schéma par définition ne tient pas compte du transport, et vient confirmer qu'il ne peut être utilisé que pour des écoulements à faibles nombres de Reynolds [19], ou lorsque la diffusion est bien plus importante que le transport [27].

**Les schémas amonts** Contrairement au schéma centré, les schémas amonts tiennent compte du sens de l'écoulement. Leonard [28] compare des schémas amonts d'ordre différents pour le terme de transport.

- Les schémas amonts d'ordre 1 créent beaucoup de diffusion numérique due à l'erreur de troncature, c'est le cas du schéma «upwind».
- Les schémas amonts d'ordre 2 sont stables mais sont soumis à un risque d'oscillations non physiques.
- Les schémas amonts d'ordre 3 sont conditionnellement stables, c'est-à-dire que leur stabilité est soumise à condition.

Il propose le schéma QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics) dont voici les principales caractéristiques :

- interpolation quadratique à partir de 3 points (2 en amont de l'écoulement et 1 en aval). Il respecte donc le sens de l'écoulement,



- en raison d’une propriété géométrique de la parabole (i.e. que le gradient à mi-distance entre deux points est égal à celui d’une corde joignant les points), le gradient du schéma QUICK est identique à celui du schéma centré,
- conservation des grandeurs aux frontières et du gradient,
- très précis car du troisième ordre,
- les conditions aux limites sont délicates particulièrement dans les zones de fort gradient et les fortes valeurs du nombre de Péclet. Il est alors souhaitable de raffiner le maillage ou de faire appel à une interpolation alternative,
- dans les zones de fort gradient, l’interpolation quadratique peut être remplacée par une interpolation exponentielle.

Murakami [29] confirme qu’il est très utilisé dans le domaine du bâtiment en raison de son comportement stable et d’une diffusion numérique relativement faible.

### Le schéma MARS (Monotone Advection and Reconstruction Scheme

Pour atténuer les oscillations non-physiques apparaissant dans les schéma précédents, il est possible d’utiliser des schémas TVD (Total Variation Diminishing) tel que le schéma MARS. Proposé par StarCD, c’est un schéma d’ordre deux qui se déroule en deux étapes. La solution donnée par ce schéma est la moins sensible à la structure du maillage.

#### 2.1.3.2 Discrétisation temporelle

Le terme de dérivée temporelle peut être approché par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{t+1} - \phi^t}{\Delta t} \quad (2.4)$$

avec :

- $\phi^{t+1}$  la valeur de l’inconnue au temps  $t + \Delta t$ ,
- $\phi^t$  la valeur de l’inconnue au temps  $t$ ,
- $\Delta t$  le pas de temps.

Il s’agit maintenant de savoir à quel temps vont être exprimés les termes obtenus par la discrétisation spatiale.

**Le schéma explicite** Ce schéma utilise la valeur au temps  $t$  des termes issus de la discrétisation spatiale. Ce schéma conduit à des conditions de stabilité assez pénalisantes vis-à-vis du choix du pas temps.

**Le schéma pleinement implicite** La valeur des quantités au temps  $t + \Delta t$  est utilisée. Ce schéma est inconditionnellement stable quelque soit le pas de temps. Néanmoins, il peut manquer de précision si le pas de temps est trop important. Peng l'utilisa pour modéliser le champ de température dans un local [8].

**Le schéma Crank-Nicholson** Ce schéma utilise la moyenne des quantités entre les temps  $t$  et  $t + \Delta t$ . Sa précision est meilleure que pour le schéma pleinement implicite. Par contre, il peut conduire à des oscillations pour de grandes valeurs du pas de temps.

Le logiciel StarCD permet de coupler ces deux derniers schémas afin de tirer parti de leurs avantages en combinant leurs expressions. Le lecteur pourra se référer au manuel méthodologique de StarCD pour plus de détails [30].

#### 2.1.4 Modèles de turbulence

Pour le traitement général de la turbulence dans le cadre de simulations, il existe trois techniques différentes. Néanmoins, le choix s'impose vite dans le cadre de simulations dans les bâtiments [22] :

- la simulation numérique directe (DNS pour Direct Numerical Simulation) résout directement les équations de Navier Stokes. Elle n'est pas utilisée car elle nécessite un maillage très fin et un pas de temps très faible afin de résoudre les plus petites échelles de la turbulence,
- la simulation des grandes structures tourbillonnaires (LES pour Large Eddy Simulation) ne résout que les grandes structures. L'effet des petites structures sur l'écoulement est modélisé en introduisant des termes supplémentaires dans les équations. Mais là encore, les temps de calcul deviennent vite prohibitifs surtout pour un calcul en trois dimensions,
- la simulation par des modèles de transport des quantités moyennées dans le temps (modèles RANS pour Reynolds Averaged Navier Stokes) ne calcule que les grandeurs moyennes de l'écoulement. Aussi, chaque quantité est décomposée en un terme moyen qui est résolu et un terme fluctuant qui est modélisé en ajoutant de nouveaux termes dans les équations du problème. Ces termes sont généralement exprimés à partir du concept de viscosité turbulente  $\mu_t$  proposé par Boussinesq. En calculant la distribution de cette grandeur, les modèles de turbulence établissent implicitement le rapport de force entre les diffusions turbulente et moléculaire [18]. Murakami et Kato confirment que pour une utilisation de type ingénieur, une simulation basée sur les équations moyennées de Reynolds est la plus efficace et la plus utilisée [31]. Les modèles de turbu-

lence les plus courants calculent la distribution de la viscosité tourbillonnaire en rajoutant des équations au problème. Le lecteur voudra bien se référer à l'ouvrage de Chassaing [32], en particulier pour la formulation mathématique des modèles qui n'est pas ici notre objet.

#### 2.1.4.1 Modèle $k - \epsilon$ standard

L'étude bibliographique, réalisée dans [18], montre que le modèle  $k - \epsilon$  standard a majoritairement été utilisé. Comme exemple d'utilisation dans le bâtiment, on peut se référer à [33] et [31]. C'est un modèle à deux équations mis au point par Launder et Spalding [34]. La viscosité turbulente  $\mu_t$  y est exprimée en fonction de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et de son taux de dissipation  $\epsilon$  qui vérifient des équations de transport. Cette approche a été développée dans le cadre des écoulements pleinement turbulents. Ainsi l'utilisation du modèle standard impose l'hypothèse d'un écoulement pleinement turbulent ou du moins qui réagit comme tel. Un traitement différent doit être appliqué à proximité des parois, où la diffusion visqueuse domine la diffusion turbulente. Le plus souvent, la méthode des lois de paroi est utilisée. Le premier point de discrétisation est supposé placé dans la zone à turbulence développée. Les profils de température et de vitesse entre la paroi et ce point sont alors donnés par des lois logarithmiques. La sous-couche visqueuse n'a donc pas à être discrétisée ce qui évite l'emploi d'un maillage raffiné proche des parois.

Bien qu'elle ait eu beaucoup de succès pour prédire les écoulements, son utilisation a été moins efficace pour prédire les transferts thermiques convectifs à la surface des parois. Pour Beausoleil-Morrison [16], les mauvaises prévisions des échanges convectifs superficiels sont le résultat de l'inadéquation des lois de paroi logarithmiques pour résoudre les écoulements près des parois. Ceci est assez logique étant donné que dans le bâtiment, la condition d'écoulements pleinement turbulents n'est pas remplie puisque tous les types d'écoulement sont présents (laminaire, transitoire et turbulent). La viscosité turbulente est ainsi surestimée par le modèle près des parois. De nombreux auteurs ont montré que la loi logarithmique des fonctions de paroi ne pouvait pas conduire à des résultats réalistes dans la plupart des cas [18]. De plus, les résultats sont très sensibles à l'emplacement de la première maille par rapport à la paroi. Si elle est placée trop près, les échanges convectifs superficiels sont surestimés, et inversement si elle est trop éloignée.

Néanmoins, il conduit en général à des résultats qui, sans être toujours d'une précision suffisante, permettent à l'ingénieur de disposer d'une première approche des caractéristiques locales d'un écoulement turbulent pour une très large gamme de configurations. Dans le cas des écoulements à proximité des bouches de soufflage

[24], Einberg *et al.* précisent qu'il représente le modèle le mieux connu. Comparant les résultats obtenus en utilisant ce modèle avec des mesures expérimentales. Ces auteurs obtiennent une précision de  $\pm 0,02$   $m/s$  pour des vitesses comprises entre 0 et 1  $m/s$  et de  $\pm 0,1$   $K$  pour la température.

Chassaing [32] en liste les avantages :

- modèle largement répandu,
- prise en compte de la variabilité spatiale de l'agitation turbulente,
- relative simplicité de mise en oeuvre,
- bonne prédiction des écoulements cisailés simples,

et les défauts :

- dépendance locale et linéaire des tensions turbulentes et du champ moyen,
- schématisation de l'équation pour  $\epsilon$ ,
- peu adapté aux écoulements complexes (recirculations, anisotropie forte, production négative,...)

En dépit des efforts de certains auteurs [35] pour développer de nouvelles lois de paroi, celles-ci restent spécifiques à des régimes d'écoulement particuliers.

#### 2.1.4.2 Modèle à 0 équation

Dans le cadre de simulations du bâtiment, Chen et Xu [17] ont proposé un modèle de turbulence à 0 équation dans lequel la viscosité turbulente est définie par :

$$\mu_t = 0.03874\rho V_c l \quad (2.5)$$

où :

- $V_c$  : vitesse moyenne locale,
- $l$  : échelle de longueur.

Les auteurs ont comparé ce modèle au modèle  $k - \epsilon$  standard dans deux cas caractéristiques des écoulements dans les locaux. Dans le cas d'une ventilation forcée en deux dimensions, le modèle  $k - \epsilon$  se révèle plus performant que le modèle à 0 équation pour prédire la portée du jet et le retour de l'écoulement vers le plancher. Néanmoins, il ne permet pas, contrairement au modèle à 0 équation, de prévoir la seconde recirculation. Dans le cas d'une convection mixte en trois dimensions, la comparaison des deux modèles est très sensible au nombre d'Archimède. Ainsi, le modèle à 0 équation est meilleur pour les hauts nombres d'Archimède, mais moins bon pour les faibles nombres d'Archimède. Par contre, un nombre moins important de mailles est nécessaire pour le modèle à 0 équation.

Le principal avantage du modèle à 0 équation réside donc non pas dans sa précision, mais dans sa simplicité et son besoin plus faible en temps de calcul. Beausoleil

Morrison *et al.* l'utilisent ainsi pour initialiser les coefficients d'échange par convection aux parois [25].

### 2.1.4.3 Modèle à bas nombre de Reynolds

Le modèle  $k - \epsilon$  standard contenant des constantes empiriques, il n'est donc valable que pour des couches de cisaillement totalement turbulentes et des jets libres. L'amélioration de cet aspect des CFD est le but du modèle à bas nombre de Reynolds qui améliore le traitement des effets de la poussée d'Archimède. C'est en fait une variante du modèle standard qu'il complète par une meilleure prise en compte des effets de paroi. Comme nous le verrons dans la section (2.1.5), son inconvénient majeur réside dans la nécessité d'utiliser un maillage très fin qui augmente considérablement les temps de calcul par rapport au modèle standard.

Il a par exemple été utilisé pour simuler les écoulements de convection mixte dans une cavité carrée [36], pour des vitesses de soufflage de 0,3 à 0,6  $m/s$ .

### 2.1.4.4 Modèle RNG $k - \epsilon$

Le modèle de turbulence  $k - \epsilon$  RNG, initié par Yakhot et Smith [37] est obtenu à partir de l'application aux équations de Navier Stokes de la méthode mathématique appelée «renormalisation group». Il diffère du modèle standard par la valeur des constantes obtenues théoriquement, mais aussi par l'ajout de termes aux équations vérifiées par  $k$  et  $\epsilon$ . Ceux-ci tiennent compte des effets des bas nombres de Reynolds pour calculer la viscosité turbulente. Contrairement au modèle standard, le modèle RNG est donc compatible à la fois avec les écoulements à hauts nombres de Reynolds et à bas nombres de Reynolds. C'est une capacité particulièrement importante dans le cas des écoulements intérieurs qui sont souvent limités par des parois, et ont par conséquent des zones à bas nombre de Reynolds. De plus, les équations gouvernant l'écoulement peuvent être intégrées aussi bien dans la couche turbulente que dans la sous-couche visqueuse adjacente aux parois. Aussi les modèles de paroi utilisés avec le modèle standard ne sont plus nécessaires. Ceci constitue un avantage puisque ces fonctions sont souvent issues d'écoulements particuliers.

Ce modèle a déjà montré son potentiel dans plusieurs utilisations : [38], [39] ou encore [22]. Contrairement au modèle standard, il ne surestime pas la viscosité turbulente. Son principal inconvénient réside dans sa complexité qui engendre l'emploi de maillages plus fins et de pas de temps plus faibles que le modèle standard. Lors de l'étude de l'écoulement d'air dans une salle blanche [40], la convergence du modèle

RNG fut par exemple plus difficile à obtenir.

### 2.1.5 Maillage

Il existe deux types de maillages : les maillages structurés qui peuvent être générés en reproduisant plusieurs fois une maille, et les non structurés dont les éléments sont assemblés de manière quelconque. Le choix du type de maillage dépend de la complexité de la géométrie et des phénomènes physiques. Pour une salle vide [22], par exemple, le maillage structuré représente un choix évident, et permettra de représenter convenablement les phénomènes physiques tels que les couches limites aux parois. Ce n'est plus le cas si on rajoute de nombreux éléments.

Si la discrétisation était faite avec la forme instantanée des équations, alors elle impliquerait un maillage très fin pour que la maille adjacente aux parois soit située dans la couche laminaire de la couche limite [18]. En pratique, la section (2.1.4) a montré que des techniques de modélisation de la turbulence sont utilisées, ce qui conduit à ne résoudre que des équations moyennées dans le temps. La taille de la première maille dépend alors du modèle de turbulence utilisé.

#### 2.1.5.1 Taille de la maille adjacente aux parois

La taille de la première maille est caractérisée par la grandeur adimensionnelle  $y^+$  définie par :

$$y^+ = \frac{y_{paroi}}{\frac{\mu}{\rho} u_\tau} \quad (2.6)$$

où  $u_\tau = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|}$  est la vitesse de frottement. Il est intéressant de remarquer que cette grandeur dépend de la vitesse et donc des résultats de la simulation. Elle ne peut donc pas être déterminée à l'avance, mais seulement *a posteriori*.

Si l'on se réfère au manuel de StarCD [41], dans le cas du modèle standard  $k - \epsilon$ , la couche limite n'est représentée que par une seule maille dont la position  $y^+$  par rapport au mur doit être comprise entre 30 et 100. Si le noeud est placé trop près, l'utilité de la loi de paroi est en partie perdue. Dans le cas contraire, le profil de la vitesse s'éloignera du profil supposé. Dans le cas du modèle à bas nombre de Reynolds, il n'y a pas de loi de paroi, le maillage doit donc être beaucoup plus fin. Il est conseillé de choisir une valeur de  $y^+$  de l'ordre de l'unité.

Dans le cas des modèles à 0 équation, les coefficients d'échange convectif sont

fonction entre autre de la taille de la maille adjacente à la paroi. Il y a donc un risque de dépendance vis à vis du maillage. Un groupe d’auteurs [42] propose de fixer la taille de la première maille à  $0,1\text{ m}$  en convection forcée et à  $0,005\text{ m}$  en convection naturelle.

### 2.1.5.2 Taille des mailles courantes

Deux paramètres sont importants à vérifier pour les mailles qui ne sont pas adjacentes aux parois :

- le rapport de forme égal au rapport entre la plus petite et la plus grande dimension d’une maille,
- le pas de grossissement entre deux mailles successives. Il ne doit pas être excessif. Des valeurs maximales de 1,2 à 1,5 sont souvent préconisées.

De plus, Einberg *et al.* [24] précisent que le maillage doit être suffisamment fin au niveau du soufflage pour réduire les risques de diffusion numérique. En modélisant l’écoulement 3D dans un local [31], Murakami et Kato précisent que l’énergie cinétique de turbulence, son taux de production et son taux de dissipation atteignent des valeurs importantes à proximité des jets et notamment à leur périphérie. Un maillage fin est nécessaire pour tenir compte des brusques changements de leurs valeurs.

## 2.1.6 Paramètres de simulation

### 2.1.6.1 Conditions initiales

Pour un cas donné, il est assez logique de penser que plus les conditions initiales sont proches du résultat final, et plus la convergence sera rapide à obtenir. De plus, Rouaud et Havet [40] indiquent que pour le modèle de turbulence RNG, l’énergie cinétique turbulente initiale  $k$  influence énormément la validité des résultats. Dans le cas de simulations de phénomènes complexes, il sera certainement plus efficace de faire plusieurs simulations en complexifiant le modèle à chaque étape.

### 2.1.6.2 Pas de temps des simulations

Il est assez courant parmi les utilisateurs de CFD de choisir la valeur du pas de temps en utilisant la fonction de courant notée CFL (Courant-Friedrichs-Levy) et

définie par :

$$CFL = \frac{u_{max} \times \Delta t}{\Delta x_{min}} \quad (2.7)$$

Il est intéressant de remarquer qu'un  $CFL$  inférieur à 1 signifie qu'au cours d'un pas de temps, le fluide parcourt une distance inférieure à la taille de la plus petite maille du domaine.

Lors de l'étude de l'écoulement de l'air dans une salle blanche [40], les auteurs préconisent un  $CFL$  de 5 pour le modèle standard  $k - \epsilon$  et un  $CFL$  de 1 pour le modèle RNG qui est plus difficile à faire converger. Néanmoins, en étudiant la convection mixte turbulente dans une cavité, Matei *et al.* [36] ont obtenu un pas de temps calculé par le  $CFL$  de 0,004 s pour une taille minimum de maille de 1 mm. Ce pas de temps était incompatible avec l'échelle de temps thermique de la cellule étudiée égale à 320 s. Il apparaît donc ici que ce critère peut parfois être trop restrictif et qu'il doit être assoupli. Dans le manuel d'utilisation du logiciel StarCD [43], il est précisé que dans le cas d'une simulation instationnaire avec l'algorithme PISO, le pas doit être idéalement du même ordre de grandeur que  $\delta t_c$ , le plus petit des temps caractéristiques de la convection et de la diffusion, c'est-à-dire :

$$\delta t_c = \min \left( \frac{\delta L}{u_c}, \frac{\delta L^2}{\Gamma} \right) \quad (2.8)$$

où

- $u_c$  : vitesse caractéristique,
- $\delta L$  : dimension moyenne du maillage,
- $\Gamma$  : diffusivité thermique caractéristique.

En général, il est même possible d'utiliser une valeur du pas de temps  $\Delta t = 50\delta t_c$  tout en obtenant une bonne précision.

### 2.1.6.3 Conditions turbulentes au soufflage

L'utilisation des modèles de turbulence de type  $k - \epsilon$  introduit deux nouvelles variables  $k$  et  $\epsilon$  auxquelles il faut donner une valeur au niveau d'une condition aux limites de type soufflage.

Dans la pratique, il s'est révélé plus commode d'exprimer ces deux grandeurs en fonction de l'intensité turbulente  $TI$ , variant généralement entre 1 et 6 %, et d'une longueur de mélange notée  $l_m$  (équations 2.9 et 2.10). Cette dernière est donnée par  $l_m = 0,07L$  où  $L$  est la longueur caractéristique du diffuseur.

$$k = \frac{3}{2} (v_{soufflage} TI)^2 \quad (2.9)$$



$$\epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l_m} \quad (2.10)$$

où :

- $v_{soufflage}$  vitesse de soufflage,
- $C_\mu$  un coefficient empirique.

Il est conseillé de commencer par une valeur élevée de l'intensité turbulente puis de la diminuer. Dans le cas d'un diffuseur d'air industriel [24], les valeurs de 4 et 12 % ont été utilisées pour des vitesses de soufflage respectives de 0,2 m/s et 3,9 m/s.

#### 2.1.6.4 Critères de convergence

La résolution des équations de Navier Stokes et de conservation de l'énergie n'est pas exacte mais seulement approchée. Il faut donc se donner des critères de convergence pour savoir quand arrêter les simulations. Cette question est d'autant plus cruciale pour le calcul des vitesses et des températures que ce cas a rencontré beaucoup moins de succès que le seul calcul des vitesses [16].

Le tableau (2.2) donne les valeurs des résidus normalisés obtenues après convergence dans plusieurs études. Dans la dernière [40], la convergence était aussi vérifiée par le suivi de l'évolution des variables en trois points différents.

Référence de l'étude	Résidu normalisé				
	Vitesse	Continuité	$k$	$\epsilon$	Energie
[22]	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$
[24]	$10^{-4}$	$10^{-4}$	-	-	$10^{-7}$
[40]	$< 10^{-5}$				

TAB. 2.2 – Valeurs des résidus normalisés

#### 2.1.7 Conclusion

L'utilisation des CFD nécessite donc l'emploi de nombreuses techniques et de modèles variés. Encore une fois, notre objectif n'est pas d'obtenir des données reproduisant exactement le champ thermo-aéraulique dans un local expérimental, mais d'obtenir des données réalistes facilement reproductibles et aisément identifiables vis-à-vis des modèles utilisés. Aussi, les critères de choix seront plus basés sur les

connaissances disponibles que sur la capacités des modèles et des techniques utilisées à représenter une situation réelle.

## 2.2 Réduction des modèles

Avec l'augmentation des puissances de calcul, les CFD permettent maintenant d'étudier les distributions spatiales et temporelles de la vitesse, de la température ou de la concentration de façon détaillée. Mais ils sont trop gourmands en temps et sont donc incompatibles avec le contrôle en temps réel, ce qui implique le passage aux modèles réduits. Or, le passage d'un modèle détaillé du type CFD à un modèle réduit se caractérise de deux manières [44] :

- la diminution de l'ordre du modèle, donc de la mémoire nécessaire pour stocker les matrices du modèle ainsi que du temps de calcul associé à la résolution du problème,
- la perte de précision. Le créateur d'un modèle réduit doit donc toujours définir le compromis le plus judicieux entre gain de temps et précision recherchée, en fonction du problème physique étudié, de l'application à laquelle il est confronté et du cahier des charges qui lui est imposé.

Il est donc nécessaire d'établir un compromis entre le besoin de réduction de la taille des modèles et l'impératif de conserver suffisamment de précision.

Nous allons maintenant examiner plusieurs méthodes de réduction, classées en deux catégories :

- les méthodes de simplification de la description des phénomènes physiques qui s'accompagnent généralement d'une diminution de la résolution spatiale du modèle,
- les méthodes de réduction mathématiques qui engendrent une diminution de l'ordre de la représentation mathématique des modèles.

### 2.2.1 Simplification de la description des phénomènes physiques

#### 2.2.1.1 Modèle thermique avec un champ de vitesse donné

Lors de simulations CFD, c'est la résolution des équations de conservation de la quantité de mouvement qui consomme le plus de temps de calcul à cause de leur non linéarité. Par des visualisations dans une chambre test [8], Peng a observé que pour

une situation caractéristique de chauffage (ou de refroidissement), déterminée par la vitesse et la direction de l'écoulement, l'écoulement dominant pour le transport des masses d'air et la distribution des températures est relativement stable, bien que l'écoulement d'air varie en certains points de l'écoulement à cause de la turbulence et de perturbations. C'est particulièrement vrai dans le cas où l'air chaud (ou froid) est fourni par une unité de conditionnement d'air équipée d'un ventilateur, c'est-à-dire lorsque l'écoulement est principalement imposé par l'air soufflé. Ainsi, d'un côté, le calcul du champ de vitesse prend beaucoup de temps, et de l'autre, celui-ci ne change pas beaucoup. Peng et Van Paassen répertorient plusieurs références qui étudient la prédiction de la dynamique des températures intérieures en utilisant un champ de vitesse fixe obtenu par des simulations CFD [3]. Seule l'équation de conservation de l'énergie doit alors être résolue, alors que le champ de vitesse et la viscosité turbulente sont précalculés. Ils montrent de plus que cette méthode peut prédire de façon satisfaisante la réponse dynamique des températures intérieures et réduit nettement le temps de calcul en deux dimensions. L'erreur entre les résultats de ce modèle et des simulations CFD peut atteindre 2°C, mais la configuration de l'écoulement est toujours bien retrouvée. Néanmoins, cette hypothèse ne suffit pas pour utiliser ce modèle pour contrôler la température.

Toujours dans le cadre des travaux qui viennent d'être cités, Ghiaus et Ghiaus [15] mettent en évidence l'erreur commise par cette méthode lorsque les calculs CFD donnant le champ de vitesse et la viscosité turbulente ne convergent pas suffisamment. La conservation de la masse n'est alors pas respectée dans l'espace discrétisé ce qui induit une erreur sur la résolution de l'équation de conservation de l'énergie discrétisée : une masse est ajoutée ou enlevée à chaque itération. Habituellement, lors d'un calcul CFD des équations de continuité, de conservation de l'énergie et de conservation de la quantité de mouvement, cette erreur n'existe pas car le couplage entre ces équations induit le calcul de toutes les grandeurs à chaque itération. L'erreur commise à chaque itération est donc corrigée lors de la suivante. Pour tenir compte de cette erreur dans le cas du modèle thermique à champ de vitesse fixe, les auteurs rajoutent un terme correctif à l'équation de conservation de l'énergie. Les détails de cette correction sont donnés dans le paragraphe (3.2.2.1).

### 2.2.1.2 Modèles zonaux

Le domaine étudié est découpé en  $n$  zones isothermes à géométrie parallélépipédique suivant les trois dimensions, où  $n$  est bien moins grand que pour un calcul CFD. Toutes les zones sont couplées entre elles par des débits massiques d'air et, pour chacune d'entre elles les bilans massique et thermique (voire de concentration d'un polluant) sont écrits. Toutefois, la discrétisation du domaine étudié doit tenir

compte des spécificités des écoulements rencontrés. De plus, Bezzo *et al.* [45] notent qu'une des faiblesses de la méthode zonale réside dans la difficulté de caractériser les flux entre les zones adjacentes, ainsi que certaines quantités mécaniques telles que le taux de dissipation d'énergie turbulente, qui ont des effets importants sur le processus existant dans chaque zone.

Inard [46] propose de calculer les échanges de masse par une dégradation des équations de la mécanique des fluides. Une distinction est faite entre les zones dites courantes et les zones à écoulements moteurs. Les zones dites courantes ou à faible vitesse sont représentées par un champ de pression alors que les écoulements moteurs sont décrits par leur lois de comportement. Pour les premières citées, il est nécessaire d'introduire des coefficients de décharge qui tiennent compte empiriquement des effets de viscosité du fluide afin de calculer les débits massiques entre zones. Bien qu'il soit difficile d'obtenir des valeurs précises pour ce coefficient, les résultats obtenus pour une cellule d'habitation ou un atrium sont corrects (erreur de l'ordre du degré), notamment au regard de la précision des mesures servant de référence. Mais au delà de la connaissance précise des paramètres du cas étudié, Inard précise que la nécessité de maîtriser les lois physiques qui gouvernent les écoulements moteurs n'est après tout pas différente du rôle de l'expérience d'un modélisateur CFD lors, par exemple, de la construction d'un maillage.

Pour remédier à la difficulté du calcul des débits massiques, Bezzo *et al.* proposent [45] une approche multi-échelle associant les modèles zonaux et CFD. Cette méthode est applicable aux systèmes dans lesquels la dynamique du fluide est plus rapide que les autres phénomènes et peut être décrite par un calcul CFD stationnaire avec un fluide homogène. Le calcul CFD a pour charge de caractériser les flux entre zones ainsi que les quantités affectées par les processus de mélange. Ainsi, Peng [3] a associé, en deux dimensions, les modèles zonaux à l'hypothèse de champ de vitesse fixé et calculé par une simulation CFD. De plus, pour tenir compte des effets de la turbulence sur les échanges de chaleur entre zones, il propose une modification artificielle du modèle, sans pour autant modifier les débits massiques entre zones. Bien que la précision du modèle zonal soit diminuée par rapport au modèle à champ de vitesse fixé et à maillage fin, le temps de calcul se trouve maintenant réduit à l'ordre de la seconde ce qui devient compatible avec le contrôle en temps réel [8].

L'autre problème majeur des modèles zonaux est la définition de zones correctes. C'est un problème fondamental puisque la façon dont les zones vont être définies affecte la capacité du modèle à prédire les phénomènes critiques. D'après Bezzo et Macchietto [47] plusieurs critères gouvernent leur choix : la géométrie des équipements, les zones montrant des comportements différents, et éventuellement la structure du maillage CFD ou encore la puissance des ordinateurs. Un découpage manuel dépend entièrement de l'expérience de l'utilisateur pour identifier des régions bien

mélangées et homogènes. De plus, l'identification et la localisation de zones dans le cas d'une géométrie 3D complexe peuvent être compliquées et prendre beaucoup de temps. Plusieurs auteurs ([47] et [48]) proposent des méthodes pour générer automatiquement les zones. Néanmoins, une question demeure sans réponse. Au delà de quel nombre de zones, la précision du modèle zonal ne change plus de façon significative? Par contre, le nombre de zones nécessaires est nettement inférieur au nombre de mailles utilisées pour un calcul CFD et varie dans les exemples rencontrés de moins de 10 pour les cas 2D les plus simples à 10750 pour le cas 3D d'un atelier industriel [46]. Dans le cadre du contrôle thermique d'un local équipé d'un ventilateur-convecteur [3], Peng distingue plusieurs configurations de la distribution de température. Pour chacune d'elle, il calcule un champ de vitesse et construit un modèle zonal. Cependant, l'auteur ne précise pas comment passer d'un modèle à l'autre lors du contrôle en temps réel.

Ainsi, bien que les modèles zonaux conduisent à des modèles de taille nettement plus faible que dans le cas de modèles CFD, la réduction pourrait parfois s'avérer insuffisante pour les applications liées au contrôle, notamment dans le cas d'écoulements complexes. De plus, chaque découpage en zone du modèle est propre à l'écoulement spécifique pour lequel il a été obtenu. Il n'est donc plus valable si l'écoulement subit une évolution trop grande. Enfin, les modèles zonaux sont peu adaptés [46] à la prédiction du champ de vitesse, ce qui pourrait s'avérer à terme incompatible avec l'étude du confort dont fait partie le contrôle thermique. Basman et Kalifa [49] complètent en disant que bien que les modèles zonaux soient pratiques pour évaluer les flux entre zones, ils ne permettent pas d'étudier les distributions spatiales et temporelles de la vitesse, de la température ou de la concentration à l'intérieur d'une seule zone.

Enfin, alors que les modèles zonaux ont été initiés pour faire face notamment à la faiblesse des moyens de calcul, peut-être est-ce le moment de faire le point sur des techniques de réduction, certes plus gourmandes en calcul, mais exigeant moins de simplifications physiques.

### 2.2.2 Réduction mathématique des modèles

Palomo Del Barrio *et al.* [50] répertorient deux types principaux de méthodes mathématiques de réduction :

- les méthodes de minimisation : elles sont basées sur un problème de minimisation. Les paramètres du modèle réduit sont calculés pour que l'erreur de réduction soit minimisée au sens statistique.
- les méthodes spectrales : cette première approche consiste à représenter la

solution d'un problème physique par une combinaison linéaire des vecteurs (aussi appelés modes propres) d'une base particulière. Si la projection sur la base met en évidence un faible nombre de directions principales, alors la solution du problème physique peut être réduit au calcul des coefficients de projection associés à ces directions ;

### 2.2.2.1 Méthodes de minimisation

**Identification de fonctions de transfert :** cette technique est basée sur la nécessité de posséder une représentation linéaire du système pour développer un algorithme de contrôle. Or, même pour les systèmes non linéaires, les modèles sous forme de fonctions de transfert constituent une bonne approximation de leur comportement [12].

A l'origine de ces travaux figure le modèle boîte grise de De Moor et Berckmans [11]. Bien que la température dans un local ne soit pas homogène, il est possible de définir un volume de contrôle (ou volume de mélange actif) défini par le plus grand volume qui peut être considéré comme homogène au regard d'un critère sur le gradient de température. Cette définition peut aussi être appliquée à d'autres champs scalaires comme l'humidité relative ou la concentration. Deux types de variables peuvent alors être distinguées :

- les variables globales relatives à tout le local, le débit de ventilation  $q$  et la puissance de chauffage par exemple  $W$  ;
- les variables locales propres à chaque volume de contrôle, telles que  $q_c$  et  $W_c$  qui sont respectivement la part du débit total  $q$  et la part de la puissance de chauffe  $W$  qui rentrent dans le volume de contrôle. Elles sont évaluées à partir de données expérimentales.

En appliquant la loi de conservation de l'énergie à chaque volume de contrôle, les auteurs obtiennent :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\beta q_c \theta + \beta q_c \theta_{ext} + \delta W_c \quad (2.11)$$

où  $\theta_{ext}$  est la température extérieure,  $\beta$  et  $\delta$  dépendent uniquement des constantes physiques du fluide. Ce modèle est donc basé à la fois sur les lois physiques et sur des données, d'où le nom de modèle DBM (Data Based Mechanistic).

Par rapport aux modèles zonaux, cette méthode a l'avantage de ne pas prendre en compte les échanges entre les volumes de contrôle. Par contre, elle ne permet pas d'assurer que l'ordre du modèle est suffisamment élevé. De plus, elle repose sur l'hypothèse que les modes dominants des transferts d'énergie dans le bâtiment peuvent être capturés efficacement par des données expérimentales ou numériques [13]. L'efficacité de cette approche repose donc sur la représentativité et la qualité

des données temporelles.

Généralisant cette méthode, Taylor et Zerihun Desta partent d'une fonction de transfert dont les paramètres (ordres et coefficients) sont totalement inconnus. Dans [14], les auteurs proposent la représentation suivante du modèle :

$$\begin{pmatrix} \theta_1(k) \\ \theta_2(k) \\ \vdots \\ \theta_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_{11}(z^{-1})}{X_{11}(z^{-1})} & \frac{Z_{12}(z^{-1})}{X_{12}(z^{-1})} & \cdots & \frac{Z_{1m}(z^{-1})}{X_{1m}(z^{-1})} \\ \frac{Z_{21}(z^{-1})}{X_{21}(z^{-1})} & \frac{Z_{22}(z^{-1})}{X_{22}(z^{-1})} & \cdots & \frac{Z_{2m}(z^{-1})}{X_{2m}(z^{-1})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{Z_{n1}(z^{-1})}{X_{n1}(z^{-1})} & \frac{Z_{n2}(z^{-1})}{X_{n2}(z^{-1})} & \cdots & \frac{Z_{nm}(z^{-1})}{X_{nm}(z^{-1})} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_{soufflage\ 1}(k) \\ \theta_{soufflage\ 2}(k) \\ \vdots \\ \theta_{soufflage\ n}(k) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

où :

- $\theta_i$  : température du  $i^{\text{ème}}$  volume de contrôle,
- $\theta_{soufflage\ j}$  : température de soufflage de la  $j^{\text{ème}}$  bouche de soufflage,
- $X_{ij}$  et  $Z_{ij}$  : polynômes,
- $z^{-1}$  : opérateur dérivé discret.

L'ordre et les coefficients des polynômes sont obtenus par la minimisation du critère d'identification de Young (critère YIC) qui comporte deux termes :

- le premier mesure la qualité de reconstruction des données ;
- le deuxième mesure la qualité d'estimation des paramètres.

Bien que cette méthode ait donné de bons résultats dans le cadre du contrôle de grandeurs scalaires dans un local avec 36 volumes de contrôle, il est légitime de s'interroger sur sa faisabilité pour un problème plus complexe ou pour le contrôle d'une grandeur vectorielle comme la vitesse. De plus, la validité du modèle n'a semble-t'il pas été évaluée en dehors de l'intervalle des variables utilisé pour la construction.

**Autres méthodes :** d'autres méthodes [50] sont basées sur la minimisation d'une fonctionnelle de coût. Le choix de celle-ci dépend beaucoup du choix de la norme utilisée pour réduire l'effort de calcul. On donnera comme exemple la norme de Hankel (norme  $H_\infty$ ) et une norme quadratique (norme  $L2$ ). Malheureusement, la résolution numérique de tels problèmes s'avère généralement difficile.

### 2.2.2.2 Méthodes spectrales : La décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

De nombreuses méthodes de réduction sont basées sur ce principe [50] :

- les méthodes de troncature d’une base modale ;
- les méthodes de troncature d’une base singulière ;
- les méthodes de symétrisation basées sur l’équilibrage des résultats du modèle initial.

Il a été démontré que les méthodes basées sur la troncature d’une base singulière et les méthodes de symétrisation conduisent en général à de meilleurs résultats que les méthodes de troncature d’une base modale. Palomo Del Barrio [50] met cette remarque en évidence dans le cas d’un modèle représentant le comportement thermique d’un bâtiment. Utilisant plusieurs types de méthodes, elle obtient les meilleurs résultats avec la technique de Moore qui est une méthode de symétrisation. Toutefois, son modèle initial ne comportait que 163 équations. Effectivement, Videcoq et Petit [51] précisent que beaucoup de ces méthodes de réduction reposent sur la sélection de modes propres et donc l’inversion de matrices, ce qui peut être difficile dans le cas de systèmes importants. La décomposition orthogonale aux valeurs propres (ou POD pour Proper Orthogonal Decomposition) basée sur la troncature d’une base modale, réussit à contourner cette difficulté.

**Description de la POD :** La POD peut être définie comme une technique statistique qui calcule des fonctions physiques (structures) qui sont le mieux corrélées en moyenne avec un champ donné [52].

Considérons  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  un ensemble d’observations, aussi appelées snapshots, d’un processus physique, obtenues en  $N$  instants différents sur un domaine spatial noté  $\Omega$ . Ces observations peuvent être issues de données expérimentales ou numériques correspondant à des champs de vitesse, de vorticité, de température, ... Nous cherchons une fonction  $\Phi$  qui possède, au sens des moindres carrés, la plus grande projection sur les observations, c’est-à-dire :

$$\begin{cases} \overline{(\mathbf{X}, \Phi)} = \max_{\Psi \in L^2(\Omega)} \overline{(\mathbf{X}, \Psi)} \\ (\Phi, \Phi) = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

où :

- $L^2(\Omega)$  : espace des fonctions de carré intégrable sur le domaine  $\Omega$ ,
- $\overline{\bullet}$  : opérateur statistique de moyenne,
- $(\bullet, \bullet)$  : produit scalaire de  $L^2$  défini par  $(\Phi, \Psi) = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x})^t \Psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

Un calcul variationnel [53] permet de montrer que l’expression (2.13) est équivalente à l’intégrale de Fredholm définie par le problème aux valeurs propres suivant :

$$\text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \Phi \in L^2(\Omega) \text{ tels que } \int_{\Omega} R(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda \Phi(\mathbf{x}), \quad (2.14)$$

où  $R$  est le tenseur de corrélation spatiale défini par :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \overline{X_i(\mathbf{x}, t) X_j(\mathbf{x}', t)} \quad (2.15)$$



Les solutions  $\Phi_n$  sont communément appelées fonctions propres empiriques, modes propres orthogonaux ou modes principaux. Du fait de l'orthogonalité de la base ainsi constituée, le vecteur  $\mathbf{X}$  peut s'écrire :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \Phi_n(\mathbf{x}), \text{ avec } b_n(t) = (\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \Phi_n) \quad (2.16)$$

Cette formulation sera appelée la décomposition POD directe du champ  $\mathbf{X}$ . Les coefficients  $b_n(t)$  sont incorrélés et leurs valeurs moyennes sont les valeurs propres  $\lambda_n$  :

$$\overline{b_n(t) b_m^*(t)} = \delta_{nm} \lambda_n \quad (2.17)$$

$R$  étant symétrique et définie semi-positive, toutes les valeurs propres sont réelles et non négatives. Elles peuvent donc être ordonnées :  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ . Chaque valeur propre représente pour le mode correspondant sa contribution à une énergie moyenne [54] :

$$E = \overline{(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \quad (2.18)$$

Cette notion d'énergie ne représente pas forcément une énergie physique. Si  $\mathbf{X}$  est un champ de vitesse, alors cette notion est à rapprocher de l'énergie cinétique de l'écoulement, alors que pour la température, elle représente plutôt la quantité d'informations contenue dans le mode. Deane et Sirovich [54] en donnent l'illustration suivante : le fait que le premier mode capture par exemple 65% de l'énergie peut signifier statistiquement que l'écoulement dépense 65% de son temps à exécuter ce mouvement. La principale propriété de la POD est alors son habileté à donner la meilleure approximation de l'écoulement au sens énergétique. Ainsi, l'énergie contenue dans les  $M$  premiers modes est toujours supérieure à l'énergie contenue dans n'importe quelle autre base de dimension  $M$  comme par exemple la base de Fourier [55].

Dans la pratique, et notamment si les snapshots ont été obtenus par des simulations numériques, le calcul du tenseur  $R$  peut s'avérer très long. Aussi, pour réduire la taille du problème aux valeurs propres à résoudre, la méthode des snapshots, introduite par Sirovich [56], propose d'exprimer les modes propres en fonction des données originales :

$$\Phi_n(\mathbf{x}, t_k) = \sum_{k=1}^N \mathbf{X}(\mathbf{x}, t_k) c_{nk} \quad (2.19)$$

Le problème aux valeurs propres à résoudre devient alors :

$$\text{Trouver } \lambda_n \text{ et } c_{nj} \text{ tels que } \sum_{k=1}^N C_{kj} c_{nk} = \lambda_n c_{nj} \text{ pour } j \in [1, N] \quad (2.20)$$

où  $c_{nk}$  est la  $k^{\text{ième}}$  composante de la constante associée au  $n^{\text{ième}}$  mode, et  $C$  le tenseur de corrélation temporelle défini par :

$$C_{kj} = \frac{1}{N} \int_{\Omega} X_i(\mathbf{x}, t_j) X_i(\mathbf{x}, t_k) \quad (2.21)$$

Alors que le problème aux valeurs propres (2.14) est de dimension  $N_m \times N_m$ , où  $N_m$  est le nombre de mesures spatiales, le problème issu de la méthode des snapshots est de dimension  $N \times N$  où  $N$  est le nombre de mesures temporelles. Dans le cas de simulations numériques, le maillage spatial est important mais la taille temporelle est limitée, la méthode des snapshots est donc plus aisée à résoudre.

Plusieurs auteurs soulignent l'intérêt d'une telle méthode. Liang *et al.* [57] et Chatterjee [58] l'utilisent notamment pour l'analyse de données de grandes dimensions. En 1993, Christensen *et al.* [59] écrivent que la description d'un phénomène physique complexe peut ainsi être réduit de plusieurs ordres. Couplet *et al.* [60] confirment que puisque la POD extrait des données les structures les plus énergétiques en moyenne, la construction d'un modèle réduit avec la base POD permet une analyse physique de l'écoulement en termes de structures cohérentes.

**Construction du modèle d'ordre réduit :** il existe plusieurs méthodes pour construire un modèle d'ordre réduit à partir d'une base POD :

- Projection d'un modèle d'ordre élevé

La première étape consiste à discrétiser les équations différentielles qui décrivent le phénomène physique étudié. Alors que Videcoq et Petit [51] n'appliquent qu'une discrétisation spatiale afin d'obtenir un système d'état, van Doren *et al.* [61] réalisent également une discrétisation temporelle. Ce choix dépend en fait de l'utilisation qui sera faite du modèle. Mais dans les deux cas, la dimension du système obtenu est proportionnelle à la taille  $N_m$  du maillage spatial utilisé. Videcoq et Petit [51] obtiennent par exemple un système dynamique d'ordre élevé de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.22)$$

$\mathbf{X}$  est un vecteur qui peut contenir la température de chaque maille (système de dimension  $N_m$ ), la concentration, les composantes du vecteur vitesse (système de dimension  $3N_m$  en trois dimensions) ou bien plusieurs de ces grandeurs.

Ensuite, un ensemble de snapshots est construit à partir de simulations numériques ou de mesures. Il doit représenter le comportement dynamique du système. Par application de la POD, une base de projection est obtenue et

permet de décomposer tout vecteur  $\mathbf{X}$  :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (2.23)$$

où  $M$  est le nombre de modes conservés.

Après avoir remplacé  $\mathbf{X}$  par l'expression (2.23) dans l'équation (2.22), l'étape finale consiste ensuite à projeter le système d'état sur la base POD. Le système d'ordre réduit peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

Sa dimension est égale à  $M$  qui est nettement inférieure à  $N_m$  la dimension du système d'ordre élevé.

– Projection de Galerkin

Cette méthode est très similaire à la précédente dont elle diffère seulement par l'ordre des étapes de discrétisation et de projection. En effet, les équations différentielles décrivant le modèle physique sont d'abord projetées avant d'être discrétisées. Prenons l'exemple de l'équation de conservation de l'énergie sans terme source :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \theta + \text{div} \left( a \mathbf{grad} \theta \right) \quad (2.25)$$

Une fois la POD appliquée au champ de température, on obtient :

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

En substituant cette expression dans l'équation (2.25), il vient :

$$\sum_{i=1}^M \Phi_i \frac{da_i}{dt} = - \sum_{i=1}^M a_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \Phi_i + \sum_{i=1}^M a_i \text{div} \left( a \mathbf{grad} \Phi_i \right) \quad (2.27)$$

En projetant sur la base POD et en tenant compte de l'orthogonalité des vecteurs de la base, un système d'ordre réduit de  $M$  équations est obtenu :

$$\frac{da_m}{dt} = \sum_{i=1}^M \left( \Phi_m, -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \Phi_i + \text{div} \left( a \mathbf{grad} \Phi_i \right) \right) a_i \quad (2.28)$$

Dans l'hypothèse où  $\mathbf{v}$  et  $a$  sont constants, il suffit de calculer une fois pour toute le coefficient de l'équation (2.28).

Ainsi, Afanasiev et Hinze [62] utilisent la POD pour obtenir un modèle de dimension réduite des équations de Navier-Stokes afin de contrôler un écoulement. Gunes [63] applique cette méthode aux champs de vitesse et de température en créant une base pour chacune de ces deux grandeurs. Il obtient alors deux systèmes d'équations réduits qui conservent le couplage entre la température et la vitesse. Allery *et al.* [64] l'appliquent à l'écoulement dans une cavité ventilée pour étudier la dispersion particulaire.

Quelques soit la méthode utilisée, cette technique conduit à des modèles de dimensions très faibles ce qui en facilite [51] et en accélère [65] la résolution numérique. Dans ce dernier article, Ravindran s'en sert pour analyser les stabilités et les bifurcations de certains écoulements.

Il a été constaté que le premier mode de la décomposition représente le champ moyen. Ainsi le modèle est généralement calculé non pas pour le champ total, mais seulement pour le champ fluctuant obtenu par soustraction du champ moyen au champ total :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x},t) = \mathbf{X}_{moy}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^M a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (2.29)$$

Van Doren *et al.* [61] estiment que cette étape augmente le niveau de détail de la reconstruction par le modèle réduit, en particulier dans le cas de snapshots proches. En effet, l'écart entre le premier mode et les autres est alors plus faible.

Etudiant la validité de la projection de Galerkin, Couplet *et al.* [66] rappellent que les écoulements laminaires ou transitionnels sont souvent gouvernés par un faible nombre de structures cohérentes. Cette méthode permet donc d'obtenir un modèle d'ordre faible, et se révèle alors très intéressante pour le contrôle. Par contre, pour les écoulements turbulents, le modèle réduit obtenu peut être imprécis voire instable. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce phénomène :

- l'incompatibilité des données sur lesquelles la POD est appliquée avec la formulation variationnelle sur laquelle la méthode Galerkin est basée. Par exemple, des données extraites d'un code aux volumes finis ne sont pas compatibles avec la discrétisation numérique d'une formulation variationnelle,
- lors de la troncature, tous les transferts entre les larges et les petites échelles de l'écoulement sont négligés. Pourtant dans les écoulements turbulents, les petites échelles dissipent une partie de l'énergie des grandes échelles.

Pour corriger l'erreur de troncature, de nombreux auteurs (Sirovich et Deane [67], Podvin et Le Quere [68], Rempfer [69], Allery [53], Couplet *et al.* [70], ...) utilisent le modèle de Heisenberg basé sur l'hypothèse que l'effet des modes d'ordre élevé sur les modes d'ordre faible est équivalent à l'augmentation de la dissipation, d'où l'ajout d'une viscosité artificielle. Celle-ci dépend de l'indice du mode et de l'indice de troncature. Plusieurs observations en découlent :

- la valeur maximale est obtenue pour un indice proche de l'indice de troncature et reste quasiment constante quelque soit l'indice de troncature ;
- la viscosité est une fonction décroissante de l'indice de troncature pour un même mode.

Cordier et Bergmann [71] proposent de déterminer les viscosités tourbillonnaires à ajouter sur chacun des modes POD par une calibration optimale du modèle réduit. Cette technique conduit alors à un problème de minimisation sous contrainte, dans

lequel on cherche à minimiser l'écart entre les coefficients temporels calculés par le modèle réduit et ceux calculés par projection directe sur la base POD, en agissant sur la viscosité tourbillonnaire comme variable de contrôle. Allery propose quand à lui une correction qui se traduit par l'ajout d'un terme source et d'un terme linéaire au système différentiel initial. Ces termes supplémentaires sont obtenus à l'aide des coefficients temporels issus de la projection directe de la POD.

Bien que ce type de correction ait montré de bons résultats, Couplet *et al.* [66] rappellent que d'autres erreurs sont commises lors de la résolution d'un modèle réduit par la POD, telles que les erreurs numériques auxquelles sont très sensibles les systèmes d'équations différentielles ordinaires, ou encore les erreurs de traitement des conditions aux limites. Les méthodes de correction qu'il propose permettent d'ajuster les coefficients du modèle réduit en résolvant un problème de minimisation. Le nouveau modèle réduit devra alors retrouver de façon optimale les données utilisées pour calculer la base POD, en étant construit à partir du modèle réduit original. L'auteur s'interroge néanmoins sur l'interprétation physique des calibrations obtenues et sur son impact sur le contrôle actif d'un écoulement instationnaire

**Troncature de la base POD :** La taille du modèle d'ordre réduit du nombre de modes conservés. Pour le déterminer, Sirovich et Deane [67] proposent de calculer l'amplitude cumulée relative des valeurs propres :

$$E_k = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i} \quad (2.30)$$

Elle donne le pourcentage d'énergie contenue dans les k premiers modes. Dans le cas de la distribution de température dans un local, Basman et Khalifa [49] affirment qu'il suffit d'avoir  $E_M > 95\%$  et que ce critère peut être diminué en fonction de la précision désirée. Par contre, ils rajoutent qu'il ne permet pas de juger de la capacité d'un modèle réduit avec la base POD de prévoir des conditions non présentes dans les snapshots. Pour l'étude de la convection de Rayleigh-Benard [67], Sirovich et Deane utilisent un critère plus complet en introduisant la dimension de Karhunen-Loève  $d_{KL}$  définie par  $d_{KL} = M$  telle que  $E_M > 0,9$  et  $\frac{\lambda_M}{\lambda_1} < 10^{-2}$ . La deuxième condition permet de garantir que le premier mode exclu représente une amplitude au moins 100 fois plus faible que celle du premier mode conservé.

Ces critères doivent toutefois être pondérés en fonction de l'application. Par exemple, dans le cas du contrôle optimal d'un système, Atwell [72] met en évidence l'existence d'un gain fonctionnel issu du calcul du contrôleur optimal. Celui-ci représente l'action du paramètre contrôlé sur l'ensemble du domaine. La base construite avec la POD doit donc être capable de reconstruire correctement ce gain fonctionnel pour que le modèle réduit soit capable de bien contrôler le système.

Enfin, Doren remarque l'influence de la taille du maillage et du nombre de snapshots sur le nombre de modes conservés [61]. Ainsi la dimension du modèle augmente de façon asymptotique avec le nombre de snapshots utilisés, traduisant clairement l'augmentation des informations contenues dans les snapshots. Elle augmente également avec le raffinement du maillage.

**Contrôle des modèles réduits :** des travaux montrent une bonne adéquation entre les modèles réduits avec la base POD et le contrôle en temps réel. Ly et Tran [73] soulignent qu'en raison de l'optimalité de la POD, cette approche garantit que le nombre de paramètres décrivant le processus physique est le plus petit possible. En conséquence, le contrôle d'un tel processus devient évident. Podvin et Le Quéré [68] mettent également l'accent sur le potentiel de cette technique puisqu'il existe de nombreuses situations nécessitant des approximations rapides et peu coûteuses plutôt que des solutions complètes et précises ; par exemple, le contrôle en boucle fermée et en temps réel qui ne possède pas assez de temps pour calculer la solution complète entre la mesure et l'action. Basman et Khalifa [49] appliquent la POD au champ thermo-convectif d'un local de bureau ( $3 \times 3 \times 4$  m) climatisé par le plafond. Le vecteur  $\mathbf{X}$  à projeter sur la base POD est composé de l'amplitude de la vitesse et de la température en chaque point d'un maillage CFD en trois dimensions. A partir de snapshot calculés par les simulations CFD, il suffit de 3 modes pour capturer 96% de l'énergie. Le premier mode capture à lui seul 88% de l'énergie. Avec 8 modes, l'écart type entre le vecteur reconstruit par l'expression (2.29) et les résultats CFD est inférieur à 5 mm/s pour la vitesse et 0,05 °C pour la température. Les auteurs concluent que cette technique devrait être particulièrement adaptée au contrôle thermique des locaux en raison d'une part de la rapidité de reconstruction du champ (à peine quelques secondes), et d'autre part de leur capacité à calculer les distributions spatiales.

De plus, plusieurs auteurs étudient l'effet du contrôle sur la base POD. Dans le cas du contrôle du décollement sur un profil d'aile d'avion, Favier et Kourta [74] se rendent compte que la plus grosse influence du contrôle est subie par le premier mode. Prabhu *et al.* [75] observent l'effet de plusieurs stratégies de contrôle sur la structure d'une base POD dans le cas d'un écoulement turbulent bordé par des parois. Les résultats montrent que la base POD construite sur un écoulement non contrôlé doit absolument être complétée par des éléments extraits d'un écoulement contrôlé avant d'être utilisée dans un modèle d'ordre réduit pour du contrôle prédictif. Dans le cas d'écoulements laminaires, il y a eu plusieurs applications réussies. Cependant, l'état de la variable contrôlée était en général connue et la dimension du système était assez petite pour qu'une troncature importante de la base POD soit utilisée. Par contre, dans le cas d'écoulements turbulents, où la dimension des systèmes est plus importante, le succès de la POD pour construire des modèles d'ordre réduit n'est

pas aussi claire. Prabhu *et al.* [75] pointent le fait que la base POD est intrinsèque à l'écoulement avec lequel elle est calculée. Ainsi sous l'action du contrôle, l'écoulement étant modifié, elle doit aussi être modifiée. Ceci implique la recherche d'une base adaptative. Néanmoins, pour des écoulements utilisant des stratégies de contrôle peu efficaces, un modèle de dimension faible basé sur une base POD, construite avec un écoulement non contrôlé, peut donner de bons résultats avec un faible nombre de modes. Mais l'erreur augmente avec le nombre de modes conservés, ce qui traduit que les premiers modes traduisent peu l'influence d'un tel contrôle. Par contre, construire un modèle de dimension faible pour un écoulement contrôlé de manière plus efficace (contrôle optimal par exemple) avec cette même base POD nécessitera l'ajout d'un terme tenant compte des effets du contrôle. A l'opposé, dans [76], l'auteur applique la théorie du contrôle optimal à un modèle réduit avec la technique des snapshots. La base POD de dimension 5 est construite à partir de snapshots issus d'une simulation du système non contrôlé.

Enfin, Atwell s'interroge sur le moment où doit intervenir la réduction [72]. En effet, lorsque le contrôle est réellement appliqué, il est couplé avec un système réel, et non avec une équation différentielle discrétisée. Aussi, réduire l'ordre du modèle représentant le système physique n'est pas nécessaire pour le contrôle à partir du moment où il est possible de calculer un contrôleur d'ordre réduit. Trois méthodes différentes pour créer le contrôleur de taille réduite sont comparées :

- Approche «construction puis réduction» : les modèles d'état du système et de l'estimateur ainsi que le contrôleur sont d'abord calculés puis projetés sur la base. L'approximation de la loi de contrôle est bonne mais demande beaucoup de temps de calcul. Mais alors que la boucle fermée semble bien réagir, l'estimateur n'arrive pas à prédire l'état du système.
- Approche «réduction puis construction» : le modèle d'état du système est construit puis projeté. Le contrôleur et l'estimateur sont calculés à partir du modèle d'ordre réduit du système. Une mauvaise approximation de loi de contrôle du modèle d'ordre élevé est obtenue.
- Approche hybride : le modèle d'état du système et le contrôleur sont calculés puis réduits. L'estimateur réduit est ensuite calculé. La loi de contrôle est très bien retrouvée.

Pourtant dans le cas du contrôle en boucle fermée de la convection naturelle [77], Park et Lee montrent que l'approche «réduction puis construction» peut donner des résultats très convenables. A noter que dans cette étude, les équations du moment et de l'énergie sont réduites sur des bases différentes tout en conservant le couplage.

**Choix des snapshots :** en fin de compte, il apparaît que l'étape la plus importante dans la construction d'une base POD réside dans le choix des snapshots. Atwell [72] a bien identifié les difficultés inhérentes à ce choix :



- Combien de snapshots sont nécessaires pour avoir une bonne information ?
- Quelle doit être la durée des simulations pour générer les snapshots ?
- Quelle doit être la condition initiale ?
- Comment incorporer des informations relatives au contrôle ?

Bien qu'il n'existe pas de règles générales pour construire l'ensemble de données servant à la construction de la base POD [78], Singh *et al.* [79] donnent un principe à respecter pour ce choix : la réussite d'une telle méthode repose sur la capacité des modèles POD à capturer la dynamique des équations avec une bonne précision. Aussi la POD doit être construite à partir d'un écoulement suffisamment riche grâce à une excitation adéquate des modes pour capturer la majeure partie de l'énergie. Guidé par ce même principe Park et Lee [77] proposent d'appliquer la POD au contrôle en boucle fermée de la convection naturelle. Deux paramètres adimensionnels de contrôle sont identifiés :  $G$  qui caractérise l'amplitude de la source de chaleur et  $H$  le nombre d'Hartmann qui commande la vitesse.  $H$  peut varier entre 0 et 400, alors que  $G$  reste proche de 15. Il démontre alors que pour exciter tous les modes propres décrivant le comportement du système lorsque  $H$  varie arbitrairement, il suffit d'extraire les snapshots des simulations suivantes :

1. simulation à  $G = 15$  et  $H = 0$  afin d'obtenir la condition initiale,
2. simulation instationnaire avec  $G = 15$  et  $H$  passant de 0 à 400 à  $t = 0$ ; 500 snapshots sont enregistrés,
3. simulation instationnaire avec  $G = 15$  et  $H$  passant de 400 à 0 à  $t = 0$ ; 500 snapshots sont enregistrés.

Christensen *et al.* [59] ont utilisé un modèle réduit avec la POD pour retrouver les bifurcations d'un système fluide lors de son processus de transition entre un régime laminaire et turbulent. Le nombre de Reynolds est le paramètre gouvernant l'écoulement. Pour les nombres de Reynolds conduisant à un régime permanent, seul le snapshot contenant le régime permanent final est conservé. Pour les nombres de Reynolds conduisant à un régime pseudo permanent, plusieurs snapshots régulièrement répartis en temps sont gardés. A la base POD générée avec ces snapshots, sont rajoutés des modes supplémentaires. Ainsi pour tenir compte de la bifurcation, les régimes permanent et pseudo-permanent nés lors de la bifurcation sont rajoutés comme fonction du nombre de Reynolds. Pour être sûr que le modèle d'ordre réduit représente la dynamique non seulement aux nombres de Reynolds correspondant aux snapshots mais aussi pour toute valeur intermédiaire, des modes représentant la direction de déplacement sont rajoutés. Les vecteurs de déplacement sont définis comme les différences des moyennes des snapshots de chaque nombre de Reynolds. Plusieurs façons de rajouter ces modes ont été testées, toutes donnent de bons résultats.

Singh *et al.* [79] évitent le problème de l'influence du contrôle sur la base POD en utilisant la méthode de la fonction de contrôle basée sur une décomposition



du champ  $\mathbf{X}$ , non pas en deux parties, mais en trois : le champ moyen, le champ fluctuant projeté sur la base POD et le terme de contrôle :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{moy} + \sum_{k=1}^M a_k \Phi_k + \gamma \Phi_c \quad (2.31)$$

où  $\Phi_c$  est la fonction de contrôle.

Contrairement à la plupart des auteurs, Atwell [72] n'utilise pas de simulations temporelles pour calculer les snapshots. Dans certains cas, la loi de contrôle peut se mettre sous une forme intégrale dont le noyau, appelé gain fonctionnel, donne un aperçu de la dynamique du contrôleur ou de ses caractéristiques. Les régions où le gain fonctionnel est grand correspondent à une importante contribution à la valeur de l'état estimé lors du contrôle. La dimension du gain fonctionnel est égale au nombre de paramètres de contrôle. Si cette dimension n'est pas trop faible, ce gain fonctionnel peut être utilisé pour créer la base POD car il contient toutes les informations sur le comportement du système contrôlé. Par contre, cette base ne pourra pas servir à faire des simulations, mais seulement à définir un contrôleur. Quelque soit la méthode retenue pour construire la base, celle-ci doit être capable de bien reconstituer le gain fonctionnel. Atwell a comparé trois méthodes :

- à partir des gains fonctionnels. La base obtenue donne bien évidemment une bonne approximation des gains fonctionnels ;
- à partir de snapshots temporels issus d'une simulation longue du système contrôlé de façon optimale. La projection des gains fonctionnels sur cette base ne donne pas une bonne approximation. Par conséquent, l'approximation de la loi de contrôle optimal sera aussi mauvaise et affectera la performance et la robustesse du système ;
- à partir des snapshots issus des simulations d'une famille de contrôle (des échelons dans ce cas). Les résultats sont bien meilleurs que dans le cas précédent, mais moins bons que pour la première méthode.

Enfin Afanasiev et Hinze [62] ainsi que Ravindran [65] ont choisi de construire leur base de façon itérative en proposant des procédures assez similaires :

1. construction d'un modèle d'ordre réduit à partir d'une base POD extraite de la réponse du modèle d'ordre élevé contrôlé ou pas ;
2. résolution du problème de contrôle optimal avec ce modèle ;
3. la solution est utilisée en contrôle du modèle d'ordre élevé pour calculer de nouveaux snapshots rajoutés aux précédents pour Afanasiev, ou remplaçant les précédents pour Ravindran ;
4. l'étape 1 est de nouveau calculée jusqu'à convergence de la solution du problème de contrôle optimal.

La résolution de cet algorithme a besoin d'un très faible nombre d'itérations.

**Validité de la base et des modèles d'ordre réduit** Les snapshots sont donc extraits de simulations de conditions particulières. La question de la validité des bases ainsi obtenues et donc des modèles d'ordre réduit, en dehors de ces conditions de simulation, peut donc se poser

Gunes [80] applique la projection de Galerkin à un système gouverné par les nombres adimensionnels de Prandtl ( $Pr$ ) et de Grashof ( $Gr$ ), en construisant la base POD avec des simulations pour un couple  $(Pr_0, Gr_0)$  fixé, qui est nommé couple de design. Si le modèle réduit ainsi calculé arrive très bien à retrouver les résultats au couple de design, il obtient également de très bons résultats pour des conditions proches,  $(Pr_0, Gr)$  par exemple avec  $Gr$  proche de  $Gr_0$ . Loin des conditions de design, Gunes retrouve qualitativement les résultats du modèle d'ordre élevé.

Dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard [73], Ly et Tran utilisent 22 snapshots qui correspondent chacun à un régime permanent obtenu en faisant varier le paramètre principal, le nombre de Rayleigh  $Ra$ , sur un intervalle discret. Ils obtiennent la décomposition POD de dimension 3 de la distribution de température :

$$\theta^{Ra} = \theta_{moy} + \sum_{k=1}^3 a_k^{Ra} \Phi_k \quad (2.32)$$

où  $\theta_{moy}$  est la température moyenne calculée sur l'ensemble des snapshots. Pour les valeurs intermédiaires du nombre de Rayleigh, les coefficients temporels de la décomposition sont calculés par interpolation cubique. L'erreur obtenue lors de la reconstitution du champ est inférieure à 3%.

Doren *et al.* [61] confirme que plus l'entrée diffère de celle utilisée pour la construction des snapshots, plus les résultats du modèle réduit s'éloignent de ceux du modèle d'ordre élevé. De plus, il considère impossible de spécifier *a priori* la validité d'un modèle réduit. Il fait donc le choix de valider fréquemment le modèle réduit avec le modèle d'ordre élevé en recalculant régulièrement la base de projection.

Néanmoins, plusieurs auteurs estiment que dans certains cas, il est possible de déterminer un comportement spécifique de certains modes. Raju *et al.* [81] remarquent ainsi que la structure des modes dominants reste qualitativement la même quelque soit le nombre de Reynolds. Deane et Sirovich [54] vont plus loin en examinant la variation des modes de la base POD en fonction du nombre de Rayleigh dans le cas de la convection chaotique de Rayleigh-Bénard et pour de faibles nombres de Rayleigh. Ils obtiennent alors une base analytique.

### 2.2.3 Conclusion

Les nombreux exemples d'utilisation de la technique des snapshots montrent qu'il est possible de réduire l'étude de systèmes physiques à des systèmes de taille très limitée (inférieure à 10) que ce soit en 2 ou 3 dimensions. De plus, contrairement à d'autres techniques, elle n'est pas limitée par la puissance des moyens de calcul actuels, ni par le type de grandeurs étudiées (scalaires ou vectorielles). Cette technique de réduction semble donc présenter un bon potentiel dans le cadre du contrôle thermique des locaux et l'étude du confort. Finalement son inconvénient majeur réside sans doute dans l'absence de méthode précise afin de créer l'ensemble de snapshots. Les nombreuses applications citées ont du permettre au lecteur de s'en rendre compte, mais lui fournisse également de nombreuses pistes de réflexion dans l'optique d'une prochaine utilisation.

# Chapitre 3

## Modèles d'ordre élevé

Ce chapitre est consacré aux deux modèles d'ordre élevé que nous avons utilisé. Le premier est un modèle CFD complet qui va nous permettre entre autres d'obtenir des données de référence pour la suite de ce travail. Le deuxième est aussi un modèle CFD construit en appliquant l'hypothèse d'un champ de vitesse fixé.

### 3.1 Données de référence

L'objectif de notre travail est de montrer la faisabilité de la prise en compte du champ thermo-convectif pour le contrôle thermique des locaux. Il faudra donc notamment montrer que la méthode proposée permet de prédire avec une précision suffisante des données de référence supposées fidèles à la réalité. Il existe au moins deux alternatives pour construire un ensemble de données de référence. La première consiste à utiliser un local expérimental tel que la cellule d'essais étudiée par Meslem *et al.* [82] qui est très proche de notre configuration. Seulement, une expérimentation demande un travail amont important qui conduit à un projet souvent coûteux et limité quant au nombre de configurations réalisables. De plus, si cette approche nous assure par définition la proximité avec les phénomènes réels, elle ne nous permet pas un accès toujours suffisant à la nature et à la quantification des phénomènes physiques. En effet, il n'est pas toujours évident de les mesurer précisément. Par exemple, alors que la mesure du champ de vitesse est possible avec une bonne définition géométrique grâce à des techniques non intrusives comme la PIV (pour Particle Image Velocimetry) [39], la mesure des distributions de température est plus délicate surtout pour les faibles écarts de températures (quelques degrés) rencontrés dans les locaux. Ainsi, bien qu'il existe des modèles nous permettant de lever certaines de ces indéterminations, les erreurs commises risquent de se confondre

avec celles engendrées par nos propres modèles. La deuxième solution conduit à l'utilisation d'un logiciel de CFD afin de simuler le champ thermo-convectif. Seulement, l'obtention de données fidèles à un local réel nécessite beaucoup d'expertise de la part de l'utilisateur. De plus, certains phénomènes comme les recirculations s'avèrent parfois difficiles voir impossibles à retrouver. Néanmoins, cette approche garantit en principe la connaissance de tous les modèles utilisés, et diminue les incertitudes liées à la méconnaissance des phénomènes physiques. Enfin, les modèles CFD permettent d'étendre l'étude à des configurations non réalisables avec une cellule test donnée, mais pouvant exister avec d'autre.

### 3.1.1 Description du local étudié

Il s'agit ici de simuler le champ thermo-convectif existant dans le local représenté sur la figure (1.4). Les conditions aux limites sont constantes et uniformes pour les températures des surfaces internes des parois : 30 °C pour la paroi vitrée et 25 °C pour les autres parois. Ces températures ont été choisies en fonction de configurations réelles étudiées par Meslem [83] pour un fonctionnement en climatisation. Les conditions thermiques du local sont commandées par le jet d'air du ventilateur-convecteur dont la température et la vitesse de soufflage sont variables. Lors de ses mesures, Meslem fit varier ces deux paramètres respectivement entre 13,0 et 26,5 °C et 1,86 à 3,24 m/s. Bien que nous ne reprendrons pas exactement ces valeurs, elles représentent un intervalle de conditions de soufflage admissibles pour un ventilateur-convecteur réel. Ce choix des conditions aux limites marque notre volonté de laisser les parois et le ventilateur-convecteur en dehors du système étudié, ce qui est cohérent avec la perspective d'intégration de notre travail dans un modèle global du bâtiment construit par connexion des modèles des différents éléments du bâtiment (parois, équipement techniques, climat extérieur, champ thermo-convectif, ...). De plus, nous réalisons de fait une simplification de notre système en négligeant l'interaction entre le local et les équipements techniques qui nécessiterait une vision plus globale du bâtiment.

Avant de détailler les méthodes utilisées pour les simulations CFD et leur paramétrage, il est important de préciser que toutes les simulations présentées dans ce mémoire sont des simulations en deux dimensions appliquées au plan central vertical (xOy) du local. Les simulations nécessiteront alors beaucoup moins de temps de calcul notamment dans le cas des simulations instationnaires. D'autre part les données à traiter seront de tailles plus petites puisque le maillage comportera beaucoup moins de mailles. Dans la suite du mémoire, nous essaierons de mettre en évidence les avantages procurés par ce choix, et nous nous attacherons surtout à montrer qu'il est sans conséquence sur la faisabilité et la fiabilité de la méthode proposée. Par contre

et bien qu'il rende impossible la comparaison de nos résultats avec d'éventuelles données expérimentales, nous veillerons à travailler sur des configurations réalistes du champ thermo-convectif.

## 3.1.2 Paramètres des simulations

### 3.1.2.1 Méthodes de résolution

Les simulations ont été réalisées avec le logiciel commercial StarCD. Comme la plupart des codes CFD, il utilise la méthode des volumes finis. Le choix des méthodes et des paramètres est effectué en s'appuyant sur l'état de l'art présenté dans le chapitre 2. Ainsi le couplage entre la vitesse et la pression est résolu avec l'algorithme PISO associé à une sous relaxation des termes de correction. Pour la discrétisation spatiale, plusieurs schémas sont utilisés :

- le schéma centré pour la densité et les coefficients de diffusion,
- les schémas QUICK ou MARS pour les vitesses et la température. La priorité est donnée au schéma QUICK car il est parfaitement connu contrairement au schéma MARS. Néanmoins, des problèmes de stabilité nous obligerons à faire appel au schéma MARS dans de nombreuses configurations,
- le schéma amont UD d'ordre 2 pour les quantités turbulentes conformément aux indications d'un tutorial de StarCD [84],

La discrétisation temporelle est réalisée avec le schéma pleinement implicite qui est stable quelque soit le pas de temps.

### 3.1.2.2 Modèle de turbulence

Pour la turbulence, le modèle le plus fréquemment utilisé a été adopté, c'est-à-dire le modèle standard  $k - \epsilon$ . Bien qu'il soit moins adapté à notre cas que d'autres modèles présentés dans le chapitre 2, il a l'avantage de nécessiter un maillage moins fin que le modèle à bas nombre de Reynolds, et est plus facile à faire converger que le modèle RNG. Ce choix a une influence sur la construction du maillage puisqu'au contact des parois, le modèle standard est remplacée par des lois de paroi qui fixent le profil de la vitesse au sein de la maille adjacente à la paroi. La position du centre de cette maille est imposée par la valeur de  $y^+$  (équation 2.6) qui doit être comprise entre 30 et 100.

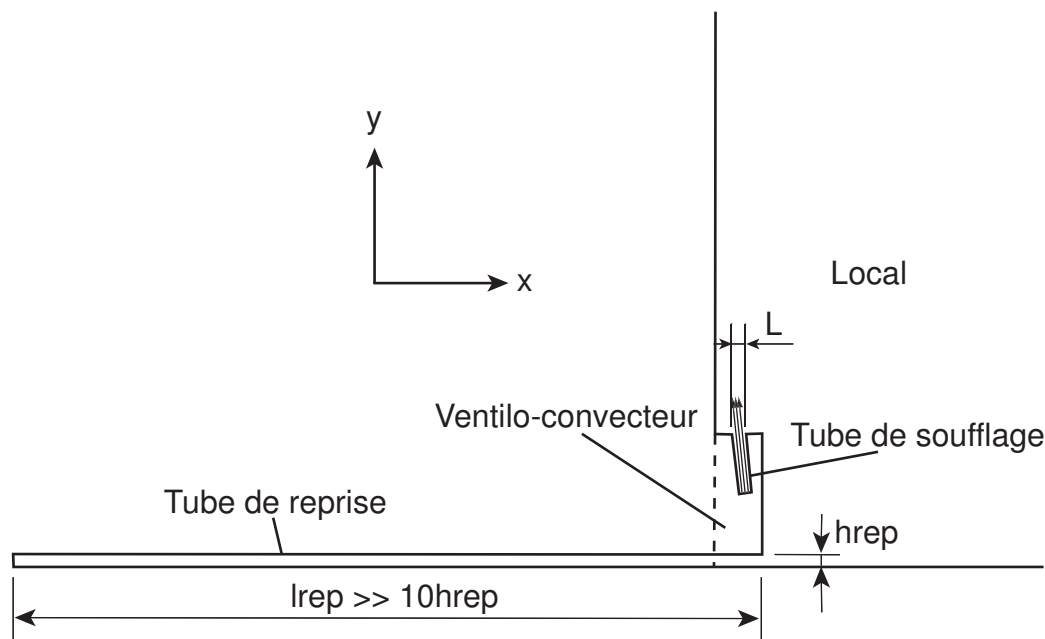


FIG. 3.1 – Conditions aux limites au niveau du ventilo-convecteur

### 3.1.2.3 Conditions aux limites

Trois types de conditions aux limites sont utilisées dans notre modèle.

– soufflage :

Au niveau de la bouche de soufflage du ventilo-convecteur, le vecteur vitesse et la température de l'air sont imposés. Le vecteur vitesse est incliné de  $5,7^\circ$  vers le vitrage par rapport à la verticale. De plus, cette condition aux limites a été appliquée à l'entrée d'un tube positionné en amont de la bouche de soufflage pour pouvoir obtenir des données relatives à l'amont de celle-ci (figure 3.1). De plus, lors de la résolution des équations de Navier Stokes, l'algorithme PISO conduit à une équation en pression relative. Pour obtenir une pression absolue, un des points de l'entrée est généralement choisi comme point de référence. Sa pression est fixée, en absence d'une connaissance plus fine, à la pression atmosphérique.

D'autre part, il faut aussi préciser les valeurs liées à la turbulence. Comme la plupart des codes commerciaux, StarCD permet d'exprimer  $k$  et  $\epsilon$  à partir de formules décrites dans la sous section (2.1.6) basées sur l'intensité turbulente  $TI$  (fixée à 6%) et d'une longueur de mélange  $l_m = 0.07L$ .  $L$  est la dimension caractéristique de la bouche de soufflage, c'est-à-dire dans notre cas sa largeur (6 cm).

– reprise :

Elle correspond à la reprise d'air du ventilo-convecteur. Les gradients  $y$  sont nuls dans la direction de l'écoulement, c'est à dire dans la direction  $\mathbf{x}$ . Elle

est appliquée non pas directement à la reprise mais à l'extrémité d'un tube de reprise pour s'affranchir des effets induits par le rétrécissement de l'écoulement au niveau de la reprise (figure 3.1). Le longueur du tube  $l_{rep}$  doit être supérieure à 10 fois la hauteur  $h_{rep}$  de la bouche de reprise [85]. De plus, le local étudié ne possède pas d'autre extraction d'air, le débit sortant au niveau du ventilo-convecteur est donc fixé égal au débit entrant.

– paroi :

Cette condition est appliquée sur toutes les parois. Le non glissement et l'imperméabilité imposent la nullité des deux composantes de la vitesse au niveau de la paroi. De plus, la température de surface des parois est fixée.

Pour plus d'information sur les conditions aux limites, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Versteeg et Malalasekera [21].

### 3.1.2.4 Maillage utilisé

Le maillage est en grande partie imposé par le choix du modèle de turbulence ainsi que par la géométrie. La figure (3.2) présente le maillage retenu. Partant d'une maille de 2 cm de large au niveau des parois, la taille des mailles est augmentée jusqu'à 9 cm au centre du local. Le ratio maximum entre les dimensions des mailles atteint donc la valeur de 4,5. Le pas d'augmentation de la taille des mailles a été fixé à 1,5 ce qui est le maximum que l'on puisse s'autoriser.

Ce maillage a été dans un premier temps utilisé pour simuler le champ thermo-aérodynamique pour une vitesse de soufflage de 1,5 m/s et une température de soufflage de 21 °C. Le tableau (3.1) donne les valeurs moyennes et maximales de  $y^+$  obtenues pour chaque paroi. Pour que les lois de paroi n'engendrent pas une erreur trop importante, nous nous sommes surtout attachés à ne pas avoir de valeurs supérieures à 100, quitte à perdre l'intérêt des lois de parois quand  $y^+$  est inférieur à 30.

	$y^+$ moyen	$y^+$ maximum
Paroi horizontale du ventilo-convecteur	31	39
Paroi verticale du ventilo-convecteur	36	76
Mur opposé au ventilo-convecteur	14	20
Plafond	25	33
Plancher	21	80
Vitrage	35	56

TAB. 3.1 – Valeurs de  $y^+$  du maillage utilisé



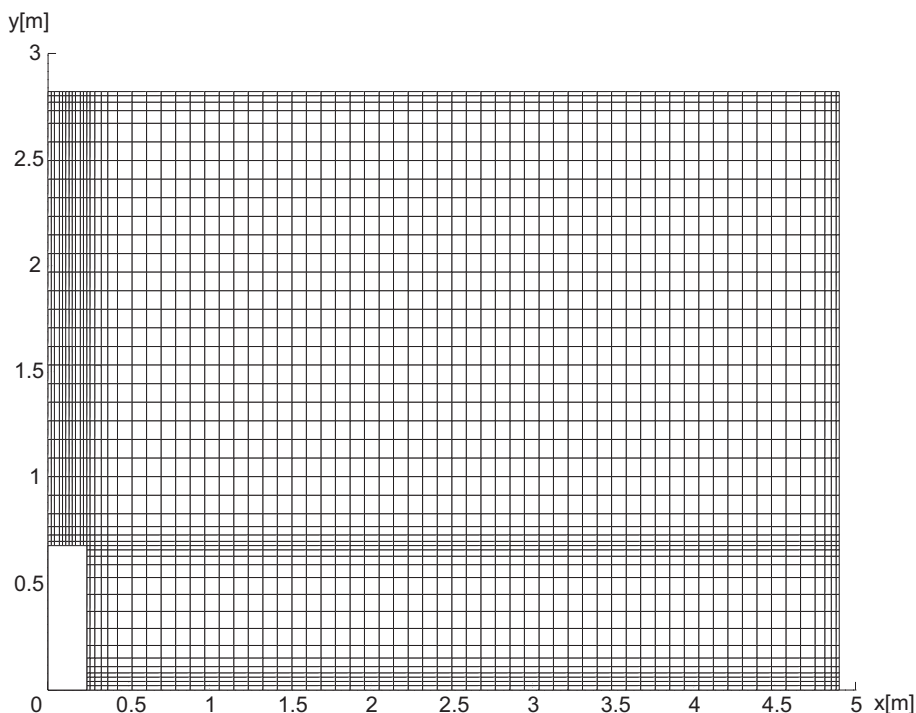


FIG. 3.2 – Vue du maillage utilisé

Enfin, pour réduire les risques de diffusion numérique, le maillage est affiné au niveau du soufflage [24].

### 3.1.2.5 Autres paramètres

Le premier objectif de ces simulations consiste à obtenir des données de référence nous permettant de tester les modèles que nous construisons ainsi que d'évaluer la possibilité de les intégrer dans une boucle de contrôle de la température. Le contrôle étant par définition instationnaire, il est nécessaire d'obtenir des simulations instationnaires du local. La question du choix de la commande de ces simulations se pose donc de façon cruciale car cette commande doit permettre de mettre en évidence et donc de capturer le comportement dynamique du local. L'échelon a ainsi été choisi comme signal de commande. En effet, celui-ci a la propriété d'exciter une large bande de fréquences du volume d'air intérieur, à la fois les hautes fréquences lors de l'impulsion initiale que les basses fréquences avec le maintien de la valeur de consigne. Mathématiquement, notre choix peut s'appuyer sur la transformée de Fourier du signal, qui pour un échelon unitaire est donnée par l'équation :

$$U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \quad (3.1)$$

où :

- $f$  fréquence,
- $\delta(f)$  Dirac à la fréquence  $f$ .

Cette transformée a la particularité d'être continue et donc de contenir un spectre continu de fréquences.

Pour un ventilo-convecteur, l'air soufflé peut être caractérisé par deux grandeurs : la vitesse et la température de soufflage. Afin de minimiser les paramètres de l'étude seule la température est ici considérée comme variable de commande. Ceci revient à choisir un ventilo-convecteur à commande de vitesse manuelle et à commande en température automatique. Les échelons s'appliqueront donc à la température de soufflage.

Pour réaliser ces simulations instationnaires, il est nécessaire de fixer un pas de temps de résolution des équations. Classiquement, celui-ci peut tout d'abord être calculé à partir de la fonction de courant notée CFL (équation 2.7). Dans notre cas, la plus petite maille à une largeur de 2 cm. Aussi pour une vitesse de l'air soufflé de 1,5 m/s, un CFL inférieur à l'unité conduit à un pas de temps inférieur à 0,013 s. Or cette valeur est incompatible avec la constante de temps du volume de l'air intérieur, de l'ordre de 200 s comme nous le verrons plus tard. L'utilisation de l'algorithme PISO nous permet d'utiliser un critère moins restrictif en calculant le temps caractéristique  $\delta t_c$  (équation 2.8) minimum des temps caractéristiques de la convection et de la diffusion. Une première simulation stationnaire pour un air soufflé à 16 °C et 1,5 m/s permet de calculer ce temps caractéristique pour chaque maille. Le temps caractéristique minimum, égal à 0,013 s, n'est obtenu qu'au niveau de la bouche de soufflage, alors que sur l'ensemble du maillage le temps caractéristique moyen est de 0,256 s. La valeur issue du CFL est ainsi retrouvée à la sortie du ventilo-convecteur, uniquement sur quelques mailles. L'étude bibliographique (§2.1.6) a montré que le pas de temps devait idéalement être égal au temps caractéristique, mais pouvait être augmenté jusqu'à 50 fois ce temps. Aussi, dans un souci de compromis avec l'échelle de temps thermique du local, nous avons choisi un pas de temps de 1 s.

Enfin, un critère de convergence doit être défini afin de fixer l'arrêt des simulations. Au vu de l'étude bibliographique (§2.2), celui-ci peut raisonnablement être fixé à un résidu normalisé de  $10^{-4}$ . L'évolution des grandeurs calculées est de plus surveillée en un point du domaine choisi au coeur de la zone d'occupation puisque notre étude a pour but d'y contrôler la température.

### 3.1.3 Résultats des simulations

De précédentes études ont mis en évidence l'existence de trois configurations différentes du champ thermo-convectif (§1.2) dépendant d'une part des conditions de l'air soufflé (vitesse et température) et d'autre part des conditions aux limites, puisque la température de la paroi vitrée a par exemple une grande influence sur la portée du jet d'air. Dans notre cas, les températures de paroi sont constantes. Les configurations sont donc uniquement fonction des conditions de soufflage qui peuvent être caractérisées [83] par :

- le nombre de Reynolds, pouvant être défini comme le rapport des forces d'inertie et visqueuse :

$$Re = \frac{v_{souf} L}{\nu} \quad (3.2)$$

- le nombre d'Archimède, pouvant être défini comme le rapport des forces d'inertie et de poussée

$$Ar = \frac{g\beta(\theta_{souf} - \theta_{\infty})L}{v_{souf}^2} \quad (3.3)$$

où

- $v_{souf}$  vitesse de soufflage,
- $L$  dimension caractéristique de la bouche de soufflage, 0,06 m dans notre cas,
- $\nu$  viscosité cinématique de l'air, soit  $1,56 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  à 20 °C,
- $g$  accélération de la pesanteur, soit  $9,81 \text{ m/s}^2$ ,
- $\beta$  coefficient d'expansion volumique,
- $\theta_{souf}$  température de soufflage,
- $\theta_{\infty}$  température de l'air ambiant.

Nous pouvons maintenant définir précisément dans le tableau (3.2) les conditions de soufflage qui nous ont permis d'obtenir les trois configurations présentées sur la figure (1.3).

Au vu des résultats du tableau (3.2), plusieurs remarques s'imposent. Tout d'abord, il peut être intéressant de différencier les cas en fonction de la vitesse de soufflage. D'un côté, la vitesse de 1,5 m/s conduit à un seul cas, alors que la vitesse de 1,0 m/s engendre deux cas séparés par une transition rapide. La limite entre les cas

	Conditions de soufflage			
	Vitesse [m/s]	Température [°C]	Nombre de Reynolds	Nombre d'Archimède
Cas 1 : force d'inertie très faible	1,0	16,0 à 19,7	3846	0,215 à 0,115
Cas 2 : force d'inertie faible	1,0	19,7 à 21,0	3846	0,115 à 0,076
Cas 3 : force d'inertie importante	1,5	16,0 à 21,0	5769	0,081 à 0,030

TAB. 3.2 – Conditions de soufflage pour chaque cas étudié

1) et 2) n'est pas précisément définie contrairement à ce que pourrait laisser croire ce tableau. En effet, la transition entre les deux cas est très instable, la convergence des simulations autour de la transition a donc été très difficile voire impossible à obtenir. C'est notamment le cas des simulations instationnaires conduisant à la température de soufflage de 20 °C. Par contre, nous pouvons définir de façon certaine que le cas 1) correspond à des températures de soufflage inférieures à 19,7 °C et que le cas 2) est bien obtenu pour des valeurs supérieures à 20 °C. Les simulations ne nous ont pas permis de définir ce qui se passe entre ces deux valeurs.

Par la suite, tous les résultats obtenus sont comparés à ces données de référence en utilisant l'écart quadratique moyen, noté  $\sigma$ . L'analyse de l'écart avec les données de référence s'affranchit ainsi du signe de la différence de température entre les résultats et les données de référence. Dans le cas de résultats en régime transitoire, l'écart quadratique moyen est donné pour une maille de coordonnées  $(x,y)$  par l'équation (3.4) :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^{n_t} (\theta_{ref}(x,y,t) - \theta(x,y,t))^2}{n_t}} \quad (3.4)$$

où :

- $n_t$  : nombre de pas de temps,
- $\theta_{ref}$  : température de la maille issue des données de référence à chaque pas de temps,
- $\theta$  : température de la maille du modèle évalué à chaque pas de temps,

Il est calculé en quatre points :

- $T_2$  : point au centre de la zone d'occupation à 0,10 m du sol correspondant à la hauteur des chevilles,
- $T_3$  : point au centre de la zone d'occupation à 1,10 m du sol correspondant à la hauteur de la tête d'un occupant en position assise,
- $T_4$  : point au centre de la zone d'occupation à 1,80 m du sol correspondant à la hauteur de la tête d'un occupant en position debout,
- $T_5$  : point situé à la reprise du ventilo-convecteur.

Dans le cas de l'analyse d'un régime permanent, l'écart quadratique moyen est calculé pour plusieurs zones du local :

- l'écart quadratique moyen pour la zone d'occupation, noté  $\sigma_{zocc}$ ,
- l'écart quadratique moyen à la reprise, noté  $\sigma_{reprise}$ ,
- l'écart quadratique moyen pour tout le local, noté  $\sigma_{local}$ .

Les trois ont pour expression générale :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\theta_{ref}(x_i,y_i) - \theta(x_i,y_i))^2}{N_m}} \quad (3.5)$$

où :

- $N_m$  : nombre maille dans la zone considérée,

- $\theta_{ref}(x_i, y_i)$  : température issue des données de référence pour une maille de coordonnées  $(x_i, y_i)$  de la zone,
- $\theta(x_i, y_i)$  : température du modèle pour chaque maille de coordonnées  $(x_i, y_i)$  de la zone considérée.

La zone d'occupation a les dimensions suivantes :

- hauteur : du sol jusqu'à 2,00 m pour prendre en compte une personne debout,
- la largeur : à la distance de 0,90 m de la paroi Est et à 0,60 m de la paroi Ouest.

L'écart quadratique moyen donnant une valeur globale, la différence de température entre les données de référence et les résultats est également calculée en tout point du maillage afin d'obtenir une valeur de comparaison locale.

## 3.2 Résolution de l'équation de conservation de l'énergie

Nous cherchons à résoudre dans l'espace d'état le problème physique associé au local étudié. Sur l'intervalle de température considéré pour l'air, la capacité calorifique de l'air varie peu. D'après l'hypothèse de Boussinesq, la masse volumique de l'air peut être considérée comme constante pour des variations de température inférieures à 30 °C. Ces deux grandeurs seront donc supposées constantes. Ce problème est décrit par l'équation de conservation de l'énergie et les conditions aux limites associées :

$$\rho C_p \frac{d\theta}{dt} = \text{div}(\lambda \mathbf{grad}\theta) + S_p \quad (3.6)$$

où :

- $\rho$  : masse volumique de l'air,
- $C_p$  : capacité calorifique massique de l'air,
- $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\theta$  : dérivée particulaire de la température,
- $\mathbf{v}$  : champ de vitesse,
- $\theta$  : champ de température instantané,
- $\lambda$  : conductivité thermique de l'air,
- $S_p$  : puissance volumique d'énergie.

Conformément à l'hypothèse proposée par Peng [8] et reprise par Ghiaus et Ghiaus [15], le champ de vitesse est supposé constant et est extrait des simulations CFD.

La résolution de l'équation doit conduire à des résultats proches des données de référence. A chaque fois que ce sera possible, les méthodes utilisées lors de simulations CFD seront donc conservées. En particulier, les conditions aux limites sont :

- au niveau des parois : les températures de surface des parois, notée  $\theta_{paroi}$  sont uniformes et constantes,
- au soufflage : la température et la vitesse de l'air sont imposées,
- à la reprise du ventilateur-convecteur : le gradient de température est nul.

### 3.2.1 Equation moyennée de conservation de l'énergie

Dans les conditions de cette étude, la variation de la température de l'air est faible (quelques degrés). La conductivité thermique de l'air peut donc être considérée comme constante. De plus, le terme source étant dans notre cas nul, l'équation (3.6) devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \theta + a \operatorname{div}(\mathbf{grad} \theta) \quad (3.7)$$

où  $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$  est la diffusivité thermique de l'air.

En utilisant la convention d'Einstein, il vient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} \quad (3.8)$$

Pour modéliser la turbulence, nous conservons le modèle retenu lors du calcul des données de référence basé sur les équations moyennées de Reynolds. La température et la vitesse instantanées sont décomposées en 2 parties :  $\psi = \Psi + \psi'$ , où :

- $\Psi$  est la moyenne calculée sur une durée grande par rapport à celle des fluctuations turbulentes,
- $\psi'$  est la fluctuation du champ autour de cette moyenne.

Après substitution et en calculant la moyenne de l'équation (3.8) sur une durée grande par rapport à celle des fluctuations turbulentes, il vient :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -V_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{-v'_i \theta'}) \quad (3.9)$$

où  $\overline{\bullet}$  est l'opérateur moyenne. Le terme  $\overline{-v'_i \theta'}$  est interprété comme un flux de chaleur turbulent. Par similitude avec l'équation de Fourier, on pose :

$$\overline{-v'_i \theta'} = a_t \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \quad (3.10)$$

où  $a_t$  est la diffusivité thermique turbulente. Elle est liée à la viscosité turbulente  $\nu_t$  par le nombre de Prandtl turbulent  $Pr_t$  suivant la relation  $Pr_t = \nu_t/a_t$ . Le nombre de Prandtl turbulent a été fixé à 0,9 lors des simulations CFD. Alors que la diffusivité moléculaire ne dépend que du fluide, la diffusivité turbulente dépend de

l'écoulement, et n'est donc pas uniforme. L'équation (3.9) devient alors :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -V_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_t \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) \quad (3.11)$$

En introduisant la diffusivité effective de l'air  $a_{eff} = a + a_t$ , il vient :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -V_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{eff} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) \quad (3.12)$$

## 3.2.2 Méthode d'intégration

### 3.2.2.1 Correction de l'équation de conservation de l'énergie

Comme lors des simulations CFD, la méthode des volumes finis est utilisée. Cette méthode est par construction conservative ce qui assure la conservation des flux (convectifs et diffusifs) aux frontières des volumes de contrôle. Il est donc plus cohérent d'appliquer la méthode des volumes finis à la forme dite "conservative" des équations (2.1 à 2.3). En appliquant les hypothèses développées dans la section précédente, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit sous forme conservative :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (V_i \Theta) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{eff} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) \quad (3.13)$$

Pour s'assurer que notre méthode reste similaire à la méthode utilisée lors du calcul des données de référence, il est important de vérifier sous quelles hypothèses, les équations (3.12) et (3.13) sont bien équivalentes.

Commençons par développer les deux premiers termes de l'équation (3.13) :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\Theta \frac{\partial V_i}{\partial x_i} - V_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{eff} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) \quad (3.14)$$

Or l'équation de continuité (2.1) donne :  $\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0$

d'où :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -V_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{eff} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) \quad (3.15)$$

Il y a donc équivalence seulement si l'équation de continuité est vérifiée. Or conformément à nos hypothèses, le champ de vitesse utilisé pour résoudre l'équation

de conservation de l'énergie est extrait des résultats obtenus lors des simulations CFD. L'équation de continuité n'est donc pas exactement vérifiée, mais seulement à la précision des résultats près. La résolution de la température par l'équation de conservation de l'énergie sous forme conservative est donc légèrement faussée. Les logiciels de CFD tiennent implicitement compte de cette erreur grâce au couplage entre les équations de continuité, du moment et de conservation de l'énergie. En effet à chaque itération, l'erreur induite sur le champ de température lors de l'itération précédente est prise en compte lors du calcul du champ de vitesse et ainsi corrigée. Dans notre cas, on ne résout que l'équation de conservation de l'énergie, le couplage entre les différentes équations est donc supprimé. Cette erreur n'est plus corrigée à chaque itération, elle est au contraire amplifiée. Ainsi Ghiaus et Ghiaus [15] affirment que dans le cas d'un calcul avec un grand nombre d'itérations, le cumul d'erreur est suffisant pour nettement fausser le résultat de la résolution de l'équation de conservation de l'énergie. Il faut donc apporter une correction lors de la résolution de l'équation de conservation de l'énergie sous forme conservative. D'après l'équation (3.14), cette correction est donnée par le terme  $\Theta \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$ , l'équation de conservation de l'énergie à intégrer devient alors :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(V_i \Theta) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{eff} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) + \Theta \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \quad (3.16)$$

Sans la convention d'Einstein, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -div(\mathbf{V}\Theta) + div(a_{eff} \mathbf{grad}\Theta) + \Theta div \mathbf{V} \quad (3.17)$$

### 3.2.2.2 Intégration

La première étape consiste à intégrer l'équation sur tous les volumes de contrôle composant le domaine. Le maillage utilisé pour le calcul des données de référence est de nouveau employé. La figure (3.3) précise les notations. Par convention, la notation des faces se fait en minuscules alors que la notation du centre des cellules se fait en majuscules. De plus, la vitesse et la température dans chaque volume élémentaire sont assimilées à leurs valeurs au centre sauf pour les frontières.

En intégrant l'équation (3.17) sur un volume de contrôle noté  $\Omega$  de la figure (3.3), on obtient :

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial \Theta}{\partial t} d\Omega}_1 = - \underbrace{\int_{\Omega} div(\mathbf{V}\Theta) d\Omega}_2 + \underbrace{\int_{\Omega} div(a_{eff} \mathbf{grad}\Theta) d\Omega}_3 + \underbrace{\int_{\Omega} \Theta div \mathbf{V} d\Omega}_4 \quad (3.18)$$



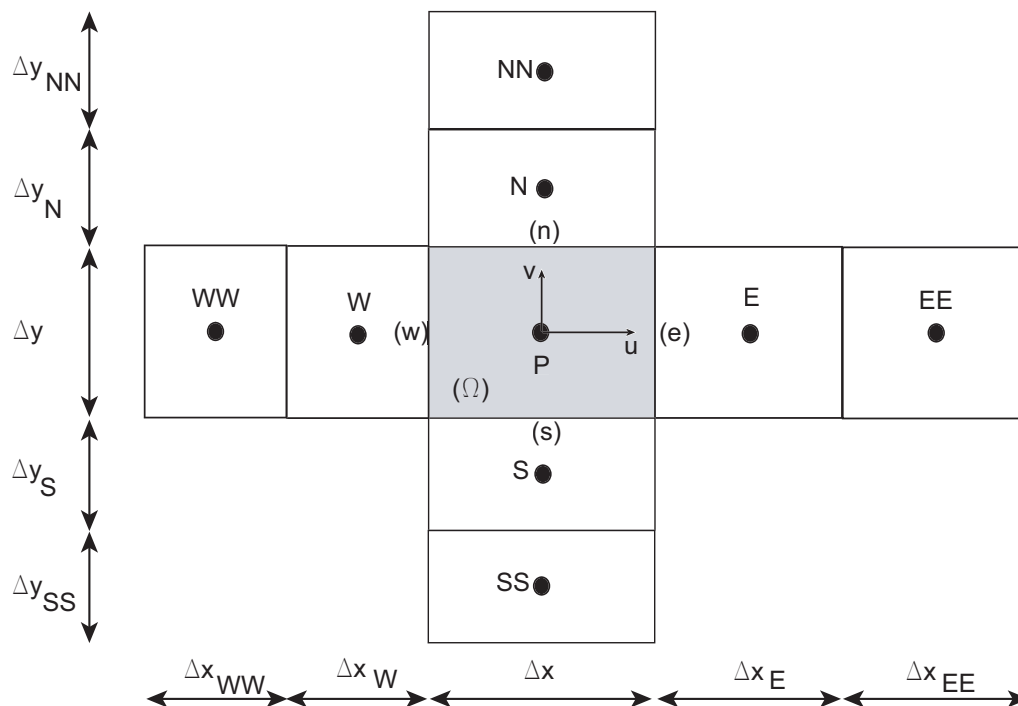


FIG. 3.3 – Volume de contrôle pour un champ en deux dimensions

Examinons ces 4 termes un par un et commençons par le terme 1 de dérivée temporelle. Le volume est invariable au cours du temps, on obtient donc :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Theta}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \Theta d\Omega = \frac{\partial \Theta_P}{\partial t} \Delta x \Delta y \quad (3.19)$$

Étudions le deuxième terme. En notant  $\delta\Omega$  la frontière du volume et  $\mathbf{n}$  la normale sortante, la formule de Stokes nous donne :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{v}\Theta) d\Omega &= - \oint_{\delta\Omega} \Theta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\gamma \\ &= - \left[ (\Theta_e u_e - \Theta_w u_w) \Delta y + (\Theta_n v_n - \Theta_s v_s) \Delta x \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pour déterminer complètement ce terme, il sera nécessaire d'évaluer les températures et les vitesses aux frontières.

La formule de Stokes peut également être appliquée au troisième terme de la façon suivante :

$$\int_{\Omega} \text{div}(a_{eff} \mathbf{grad}\Theta) d\Omega = \oint_{\delta\Omega} a_{eff} \mathbf{grad}\Theta \cdot \mathbf{n} d\gamma \quad (3.21)$$

Le flux d'énergie traversant chaque frontière peut s'exprimer par :

$$\varphi_{frontiere} = (-\lambda_{eff} \mathbf{grad}\Theta)_{frontiere} \quad (3.22)$$

En notant  $\mathbf{n}$  la normale sortant à la frontière, l'expression (3.21) devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div} \left( a_{eff} \mathbf{grad}\Theta \right) d\Omega &= -\frac{1}{\rho C_P} \left( \varphi_e \cdot \mathbf{n}_e + \varphi_w \cdot \mathbf{n}_w \right) \Delta y \\ &\quad - \frac{1}{\rho C_P} \left( \varphi_n \cdot \mathbf{n}_n + \varphi_s \cdot \mathbf{n}_s \right) \Delta x \end{aligned} \quad (3.23)$$

Il est intéressant de noter que  $\varphi \cdot \mathbf{n}$  est le flux sortant de la maille par la frontière.

Les flux aux frontières seront exprimés en utilisant les expressions des températures aux frontières calculées dans le cadre de la discrétisation du terme de transport. Quant aux conductivités effectives, elles sont obtenues par combinaison linéaire des conductivités effectives des mailles adjacentes au prorata des largeurs de mailles. Dans le cas de la frontière Est, il vient :

$$\lambda_{eff_e} = \frac{\Delta x_P \lambda_{eff_E} + \Delta x_E \lambda_{eff_P}}{\Delta x_E + \Delta x_P} \quad (3.24)$$

Dans le cas d'un maillage uniforme, l'expression précédente devient :

$$\lambda_{eff_e} = \frac{\lambda_{eff_E} + \lambda_{eff_P}}{2} \quad (3.25)$$

Reste le quatrième terme issu de la correction de l'équation de conservation de l'énergie sous forme conservative. Il est difficile d'en trouver une expression cohérente avec la méthode des volumes finis. Aussi, retiendrons nous l'expression donnée par Ghiaus [15], issue de la technique d'intégration par différences finies :

$$\int_{\Omega} \Theta \text{div} \mathbf{V} d\Omega = \Theta_P \left[ (u_e - u_w) \Delta y + (v_n - v_s) \Delta x \right] \quad (3.26)$$

En regroupant les 4 termes et en divisant par  $\Delta x \Delta y$ , on obtient l'équation de conservation de l'énergie intégrée sur un volume élémentaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_P}{\partial t} &= - \left[ \frac{\Theta_e u_e - \Theta_w u_w}{\Delta x} + \frac{\Theta_n v_n - \Theta_s v_s}{\Delta y} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\rho C_p \Delta x} \left( \varphi_e \cdot \mathbf{n}_e + \varphi_w \cdot \mathbf{n}_w \right) - \frac{1}{\rho C_p \Delta y} \left( \varphi_n \cdot \mathbf{n}_n + \varphi_s \cdot \mathbf{n}_s \right) \\ &\quad + \left( \frac{u_e - u_w}{\Delta x} + \frac{v_n - v_s}{\Delta y} \right) \Theta_P \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dans l'équation (3.27), interviennent les grandeurs caractérisant les frontières entre cellules voisines. En ce qui concerne les vitesses, les valeurs aux frontières sont

extraites des résultats des simulations numériques effectuées avec StarCD. Utilisant la méthode des volumes finis, StarCD doit aussi accéder aux valeurs des vitesses aux faces des cellules. Pour cela des équations supplémentaires en pression sont résolues. Néanmoins, l'utilisateur ne peut accéder aux valeurs des vitesses aux faces, mais il peut seulement extraire le flux massique traversant chaque face. Or au niveau d'une face  $i$  quelconque le flux massique a pour expression  $\dot{m}_i = \rho u_i dS_i$ ,  $dS_i$  étant la surface de la face. La vitesse au niveau de la face  $i$  a donc pour expression :

$$u_i = \frac{\dot{m}_i}{\rho dS_i} \quad (3.28)$$

Par contre, pour les températures, la résolution de l'équation nous permet seulement de connaître les valeurs au centre des cellules. L'utilisation d'un schéma de discrétisation s'impose donc pour exprimer les températures aux frontières des cellules en fonction des températures au centre des cellules.

### Calcul des températures aux frontières

Pour exprimer la température à la frontière d'une cellule, le schéma QUICK est appliqué. Ce schéma d'ordre trois devrait conduire à une bonne précision. Il utilise les valeurs des températures au centre de trois cellules, deux cellules en amont de la frontière et une cellule en aval de la frontière, relativement au sens de déplacement du fluide. L'évolution de la température entre ces trois cellules est supposée quadratique. Son expression est donc obtenue à partir de l'équation de la parabole passant par ces trois points :

$$\Theta = \Theta_U + g_1(\Theta_D - \Theta_U) + g_2(\Theta_U - \Theta_{UU}) \quad (3.29)$$

avec :

$$g_1 = \frac{(x - x_U)(x - x_{UU})}{(x_D - x_U)(x_D - x_{UU})} ; g_2 = \frac{(x - x_U)(x_D - x)}{(x_U - x_{UU})(x_D - x_{UU})} \quad (3.30)$$

et les indices suivants :

**D** pour le premier noeud aval (Downstream)

**U** pour le premier noeud amont (Upstream)

**UU** pour le deuxième noeud amont

Ce schéma fait donc appel à des cellules voisines de premier rang (premiers noeuds aval et amont) et des cellules voisines de second rang (deuxième noeud amont).

Dans la littérature, ce schéma est la plupart du temps appliqué à des maillages uniformes. Pour rappel, les coefficients des équations (3.30) prennent alors des valeurs constantes :  $g_1 = \frac{3}{8}$  et  $g_2 = \frac{1}{8}$ .

Les exemples d'utilisation de ce schéma dans le cas d'un maillage non uniforme sont beaucoup moins nombreux. Aussi, avons nous trouvé intéressant d'en donner l'expression dans le cas de la frontière Est d'une maille. Le lecteur voudra bien se référer à la figure (3.3) pour les notations. Deux cas sont à distinguer suivant le sens du flux :

- Si  $u_e \geq 0$ , alors  $(D,U,UU) = (E,P,W)$  et

$$\Theta_e = \Theta_P + g_1(\Theta_E - \Theta_P) + g_2(\Theta_P - \Theta_W) \quad (3.31)$$

avec :

$$g_1 = \frac{(x_e - x_P)(x_e - x_W)}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} ; g_2 = \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)}$$

où :

$$g_1 = \frac{\frac{\Delta x}{2}(\Delta x + \frac{\Delta x_W}{2})}{(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_E}{2})(\Delta x + \frac{\Delta x_W}{2} + \frac{\Delta x_E}{2})} ; g_2 = \frac{\frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta x_E}{2}}{(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_W}{2})(\Delta x + \frac{\Delta x_W}{2} + \frac{\Delta x_E}{2})}$$

- Si  $u_e < 0$ , alors  $(D,U,UU) = (P,E,EE)$  et

$$\Theta_e = \Theta_E + g_3(\Theta_P - \Theta_E) + g_4(\Theta_E - \Theta_{EE}) \quad (3.32)$$

avec :

$$g_3 = \frac{(x_e - x_E)(x_e - x_{EE})}{(x_P - x_E)(x_P - x_{EE})} ; g_4 = \frac{(x_e - x_E)(x_P - x_e)}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})}$$

où :

$$g_3 = \frac{\frac{\Delta x_E}{2}(\Delta x_E + \frac{\Delta x_{EE}}{2})}{(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_E}{2})(\frac{\Delta x}{2} + \Delta x_E + \frac{\Delta x_{EE}}{2})} ; g_4 = \frac{\frac{\Delta x_E}{2} \frac{\Delta x}{2}}{(\frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\Delta x_{EE}}{2})(\frac{\Delta x}{2} + \Delta x_E + \frac{\Delta x_{EE}}{2})}$$

En combinant ces 2 expressions, on obtient une expression du produit  $\Theta_e u_e$  :

$$\begin{aligned} \theta_e u_e &= -\frac{g_2}{2}(u_e + |u_e|)\Theta_W \\ &+ \frac{1}{2} \left( (1 - g_1 + g_2 + g_3)u_e + (1 - g_1 + g_2 - g_3)|u_e| \right) \Theta_P \\ &+ \frac{1}{2} \left( (1 + g_1 - g_3 + g_4)u_e + (-1 + g_1 + g_3 - g_4)|u_e| \right) \Theta_E \\ &- \frac{g_4}{2}(u_e - |u_e|)\Theta_{EE} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le détail et la suite des calculs sont donnés en annexe A.

### Calcul des flux diffusifs traversant les frontières

Rappelons que le flux diffusif traversant une face a pour expression :

$$\varphi_{frontiere} = (-\lambda_{eff} \mathbf{grad} \Theta)_{frontiere} \quad (3.34)$$

Ainsi à la frontière Est, il vient :

$$\varphi_e \cdot \mathbf{n}_e = -\lambda_{eff_e} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_e \quad (3.35)$$

En remplaçant  $\Theta$  par son expression (3.29) issue du schéma QUICK, on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_e \cdot \mathbf{n}_e = & -\lambda_{eff_e} \left[ \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e (\Theta_D - \Theta_U) + \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e (\Theta_U - \Theta_{UU}) \right] \\ & -\lambda_{eff_e} \left[ \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e \Theta_D + \left( \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e - \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e \right) \Theta_U - \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e \Theta_{UU} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec :

$$\left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e = \frac{2x_e - x_U - x_{UU}}{(x_D - x_U)(x_D - x_{UU})} ; \quad \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e = \frac{-2x_e + x_U + x_D}{(x_U - x_{UU})(x_D - x_{UU})} \quad (3.37)$$

L'annexe (A) présente le détail des calculs et conduit à l'expression :

$$-\frac{\varphi_e \cdot \mathbf{n}_e}{\rho C_P \Delta x} = D_{eW} \Theta_W + D_{eP} \Theta_P + D_{eE} \Theta_E + D_{eEE} \Theta_{EE} \quad (3.38)$$

#### Remarque :

Dans le cas d'un maillage uniforme, les coefficients de l'équation(3.38) ont pour expression :

$$D_{eW} = 0 ; \quad D_{eP} = -\frac{a_{eff_e}}{\Delta x^2} ; \quad D_{eE} = \frac{a_{eff_e}}{\Delta x^2} ; \quad D_{eEE} = 0$$

Soit

$$-\frac{\varphi_e \cdot \mathbf{n}_e}{\rho C_P \Delta x} = \frac{a_{eff_e}}{\Delta x^2} (\Theta_E - \Theta_P)$$

C'est l'expression obtenue avec un schéma centré.

### 3.2.2.3 Traitement des conditions aux limites

La section précédente a montré que l'intégration de l'équation de conservation de l'énergie pour tous les volumes de contrôle fait appel aux cellules voisines de la cellule

étudiée. Les cellules situées au bord du domaine vont donc nécessiter un traitement spécial. Lors de l'intégration traduite par l'équation (3.18), les quatre termes à calculer ont en fait été divisés en deux catégories : les intégrations volumiques (termes 1 et 4) et les intégrations surfaciques (termes 2 et 3).

Pour les premiers, l'intégration ne change pas pour un volume de contrôle placé au bord du domaine. Précisons tout de même l'expression du terme 4 :

$$\int_{\Omega} \Theta \text{div} \mathbf{v} \, d\Omega = \Theta_P \left[ (u_e - u_w) \Delta y + (v_n - v_s) \Delta x \right] \quad (3.39)$$

L'influence des conditions aux limites apparaît ici directement par les vitesses aux frontières :

- au contact des parois : en appliquant l'hypothèse d'imperméabilité, la composante normale de la vitesse est supposée nulle,
- au niveau de la bouche de soufflage : la vitesse est imposée par la vitesse de soufflage de l'air,
- au niveau de la reprise d'air du ventilo-convecteur : la vitesse non nulle est donnée par les résultats des calculs CFD.

Concernant les termes surfaciques, le traitement des conditions aux limites est beaucoup plus délicat puisque l'application du schéma QUICK fait apparaître des données (géométriques ou températures) des cellules voisines de premier rang et de deuxième rang, cellules n'existant pas au niveau des conditions aux limites. Les sources bibliographiques donnant le principe et le détail des calculs sont assez rares, nous avons donc décidé d'en présenter ci-dessous les grandes lignes et dans l'annexe (A) le détail.

### Au niveau des parois

Prenons l'exemple de la paroi Ouest (vitrage). Pour le terme de transport, les conditions au niveau de la paroi vont modifier le terme relatif à la cellule immédiatement adjacente à la paroi, mais aussi pour celle de second rang. Rappelons que le terme de transport s'exprime par :

$$\frac{\Theta_e u_e - \Theta_w u_w}{\Delta x} \quad (3.40)$$

La température des parois est imposée et notée  $\theta_{\text{paroi Ouest}}$ . De plus, d'après l'hypothèse d'imperméabilité, la vitesse  $u_w$  est nulle. D'autre part, le terme de transport à la frontière Est de la cellule adjacente à la paroi est donnée par l'expression (3.33). Pour pallier l'absence de cellule voisine Ouest, Leonard [28] a suggéré de créer un noeud fictif à la distance  $\frac{\Delta x}{2}$  à l'Ouest de la paroi (soit  $\Delta x_W = \Delta x$ ), comme illustré sur la figure (3.4(a)).

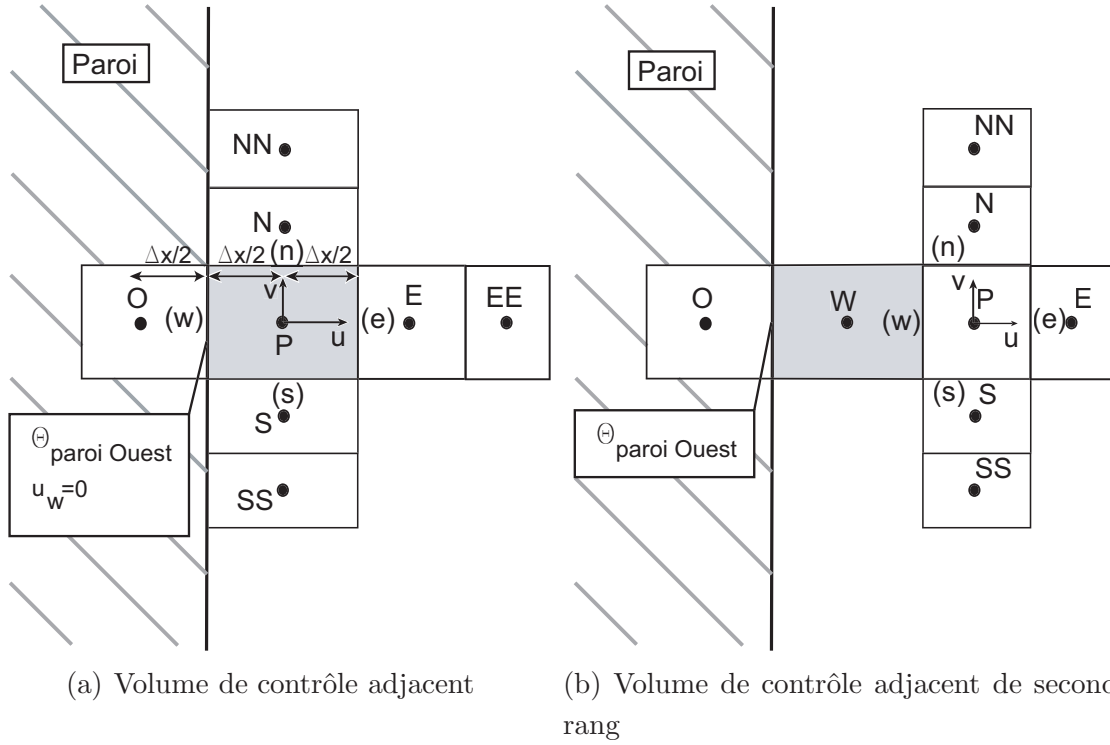


FIG. 3.4 – Maillage aux abords de la paroi Ouest

La température au noeud fictif est calculée par interpolation linéaire avec la température de la paroi et la température de la maille P :

$$\Theta_O = 2\Theta_{\text{paroi Ouest}} - \Theta_P \quad (3.41)$$

Cette expression permet d'obtenir la température de la maille voisine Ouest dans le cas de la cellule adjacente à la paroi mais également celle de la maille voisine Ouest de second rang dans le cas de la maille adjacente de second rang (figure (3.4(b))).

Concernant les termes de diffusion, la présence des parois va modifier le calcul des gradients de température pour les deux cellules adjacentes. Ces gradients doivent être calculés par une méthode cohérente avec le schéma QUICK. Malalasekera et Versteeg [21] proposent d'utiliser une interpolation quadratique entre la paroi et les noeuds des mailles adjacentes de premier et second rang, soit en s'inspirant de la formule (3.29) du schéma QUICK :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{dg_1}{dx}(\Theta_{\text{paroi Ouest}} - \Theta_P) + \frac{dg_2}{dx}(\Theta_P - \Theta_E) \quad (3.42)$$

avec

$$\frac{dg_1}{dx} = \frac{(x - x_E) + (x - x_P)}{(x_{\text{paroi Ouest}} - x_E)(x_{\text{paroi Ouest}} - x_P)} ; \quad \frac{dg_2}{dx} = \frac{(x_P - x) + (x_{\text{paroi Ouest}} - x)}{(x_{\text{paroi Ouest}} - x_E)(x_P - x_E)}$$

### Au niveau de la bouche de soufflage

Lors des simulations effectuées sur StarCD, un tube de soufflage a été défini afin d'assurer les conditions aux limites au soufflage, c'est-à-dire la température et la vitesse de soufflage. Ce tube de soufflage est extérieur au domaine étudié, mais contrairement au cas des cellules adjacentes aux parois, il assure l'existence de cellules voisines Sud (figure (3.5)).

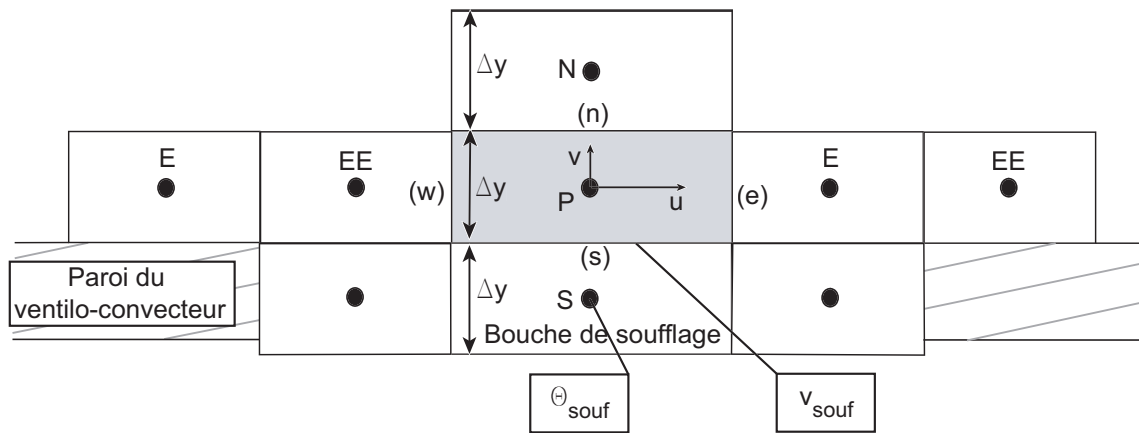


FIG. 3.5 – Volume de contrôle au soufflage du ventilo-convecteur

La température de la cellule basse a donc une température égale à la température de soufflage. La vitesse  $v_{souf}$  à la frontière avec la cellule en sortie du ventilo-convecteur (cellule de noeud P) est extraite des résultats des simulations CFD.

### Au niveau de la bouche de reprise

La reprise d'air est verticale (bouche de normale  $\mathbf{x}$ ), et constitue la frontière Ouest des mailles adjacentes (figure 3.6).

En condition de reprise, le gradient de température est nul. La température de l'air extrait est donc égale à la température des cellules adjacentes à la reprise. De plus, la vitesse  $u_w$  de la frontière est non nulle, et même négative par définition de la reprise. Il en est de même au niveau de la frontière Est des mailles adjacentes à la reprise. Lors des simulations CFD, un tube de reprise a été créé pour assurer les conditions aux limites, ce qui permet d'obtenir les vitesses pour les cellules voisines Ouest.



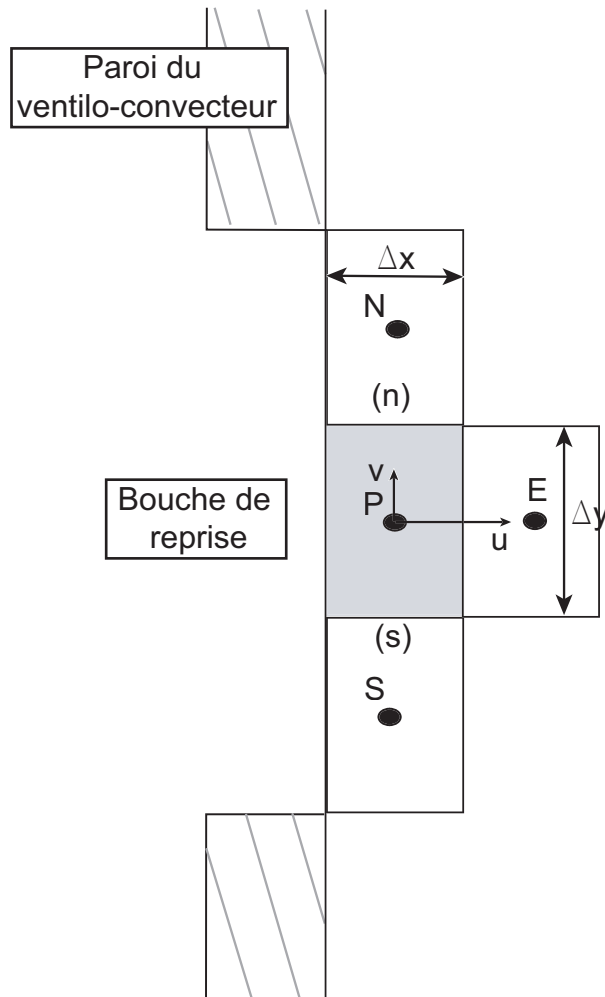


FIG. 3.6 – Volume de contrôle à la reprise du ventilo-convecteur

### Equation discrétisée en espace

En résumé, et en utilisant la notation  $\dot{\Theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial t}$ , l'équation de conservation de l'énergie intégrée (3.27) s'écrit alors pour chaque maille :

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}_P &= (a_P + a_{cor})\Theta_P + a_E\Theta_E + a_W\Theta_W + a_N\Theta_N + a_S\Theta_S \\
&+ a_{EE}\theta_{EE} + a_{WW}\Theta_{WW} + a_{NN}\Theta_{NN} + a_{SS}\Theta_{SS} \\
&+ H_{paroi\ Ouest}\Theta_{paroi\ Ouest} + H_{paroi\ Est}\Theta_{paroi\ Est} \\
&+ H_{paroi\ Nord}\Theta_{paroi\ Nord} + H_{paroi\ Sud}\Theta_{paroi\ Sud} \\
&+ H_{souf}\Theta_{souf}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

### 3.2.3 Mise sous forme d'un système d'état

Pour les systèmes dynamiques, la théorie du contrôle utilise l'espace d'état. Le modèle a alors la représentation générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = \mathbf{A}\Theta + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \Theta_{obs} = \mathbf{C}\Theta + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \tag{3.44}$$

où les vecteurs  $\Theta$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\Theta_{obs}$  sont :

- le vecteur d'état  $\Theta$  qui contient la température de chaque volume de contrôle,
- le vecteur d'entrée  $\mathbf{u}$  qui introduit les conditions aux limites ainsi que des variables indépendantes telles que les sources internes par exemple,
- le vecteur d'observation  $\Theta_{obs}$  qui regroupe uniquement les températures (ou grandeurs) dont la valeur doit être observée.

Les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont liées aux coefficients de l'équation de conservation de l'énergie intégrée calculés dans la section précédente, alors que les matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  dépendent seulement de la stratégie du contrôle par le choix des températures (ou grandeurs) observées.

Pour obtenir la représentation dans l'espace d'état, les matrices des températures devront être écrites sous la forme d'un vecteur, ce qui modifiera également les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . La méthode utilisée a été présentée dans [15]. L'annexe (B) en rappelle les principales lignes.

## 3.3 Mise en oeuvre du modèle d'ordre élevé

Les sections précédentes ont décrit la méthode suivie pour résoudre l'équation de conservation de l'énergie en se basant sur l'hypothèse d'un champ de vitesse fixe.

Plusieurs données sont nécessaires pour conduire à terme cette procédure :

- un maillage,
- un champ de vitesse,
- une distribution de diffusivité effective.

Pour le maillage, il paraît évident de garder celui utilisé lors des simulations CFD. Ce choix a, d'une part, l'avantage de nous prémunir de l'influence que pourrait avoir le maillage lors de la comparaison des résultats du modèle d'ordre élevé aux données de référence. D'autre part, la résolution spatiale des résultats n'est ainsi pas diminuée.

Dans le local équipé d'un ventilo-convecteur, rappelons que trois cas principaux ont été distingués (figure 1.3). Ils correspondent à des champs de vitesse bien différents dans leur morphologie. Il paraît donc intuitif de définir au moins trois champs de vitesse, un pour chaque cas (Tableau 3.2). Il faudra néanmoins vérifier que la définition de trois champs de vitesse et donc de trois cas est suffisante pour obtenir des résultats satisfaisants.

Concernant le choix de la diffusivité effective, il faut remarquer que l'intégration de l'équation de conservation de l'énergie ne nécessite que la connaissance de la diffusivité aux frontières des mailles. De façon générale, elle est obtenue par un schéma centré pondéré par les dimensions des mailles (équation 3.24), en utilisant les diffusivités effectives aux centres des mailles voisines. Cette expression sera donc valable dans tous le domaine, sauf au niveau des parois. Au niveau des bouches de soufflage et de reprise, l'expression est aussi applicable puisqu'il existe des cellules voisines en raison de l'existence des tubes de soufflage et de reprise. Ainsi, alors que pour les mailles non adjacentes aux parois, il suffit d'utiliser les résultats CFD pour obtenir les diffusivités effectives au centre des cellules, pour les mailles adjacentes au paroi, il faut trouver une autre méthode pour accéder à la diffusivité effective à la frontière entre les mailles et les parois. Celle-ci nous permettra alors d'évaluer l'échange superficiel convectif entre les parois et l'air (équation A.24).

Dans un premier temps nous nous proposons de décrire et de comparer la manière dont les échanges convectifs superficiels sont caractérisés dans les modèles CFD puis dans les modèles aérauliques du bâtiment.

### 3.3.1 Calcul des échanges convectifs superficiels

#### 3.3.1.1 Echanges convectifs superficiels dans les modèles CFD

Intéressons nous donc aux conditions aux limites implémentées lors des calculs CFD. Nous avons déjà vu (§2.1.4) que celles-ci sont liées au choix du modèle de turbulence. Dans notre cas, le modèle des hauts nombres de Reynolds, qui est conçu pour les écoulements pleinement turbulents, n'est pas adapté à proximité des parois. Des lois de paroi permettent donc de calculer les vitesses et la température au niveau de la paroi.

Pour la vitesse, la composante tangentielle à la paroi est donnée par :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & , y^+ \leq y_m^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & , y^+ > y_m^+ \end{cases} \quad (3.45)$$

avec

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\mu} y \quad (3.46)$$

et  $y_m^+$  satisfait l'équation :

$$y^+ - \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) = 0 \quad (3.47)$$

où

- $u$  : vitesse tangentielle du fluide,
- $u_\tau = (\tau_{paroi}/\rho)^{1/2}$ ,
- $\tau_{paroi}$  : contrainte tangentielle ,
- $k$  : énergie cinétique turbulente,
- $y$  : distance à la paroi du centre de la maille adjacente,
- $\mu$  : viscosité moléculaire,
- $C_\mu, \kappa, E$  : constantes empiriques.

La connaissance de  $u^+$  permet d'obtenir la température :

$$\Theta^+ = Pr_t(u^+ + P) \quad (3.48)$$

avec

$$\Theta^+ = \frac{\bar{C}_p \rho (\Theta_{paroi} - \Theta) u_\tau}{\varphi_{paroi}} \quad (3.49)$$

et  $P$ , le facteur de résistance de la sous-couche :

$$P \equiv 9,24 \left[ \left( \frac{Pr}{Pr_t} \right)^{3/4} - 1 \right] \left[ 1 + 0,28 \exp \left( \frac{-0.007 Pr}{Pr_t} \right) \right] \quad (3.50)$$

où

- $\bar{C}_p$  : capacité calorifique massique moyenne,
- $\Theta_{paroi}$  : température de surface de la paroi,
- $\varphi_{paroi}$  : flux convectif échangé à la paroi,
- $Pr$  : nombre de Prandtl moléculaire,
- $Pr_t$  : nombre de Prandtl turbulent.

Des formules précédentes, il est aisé de définir et calculer un coefficient de transfert convectif :

$$h = \frac{\varphi_{paroi}}{\Theta_{paroi} - \Theta} = \frac{\bar{C}_p \rho u_\tau}{Pr_t(u^+ + P)} \quad (3.51)$$

Pour chaque maille adjacente à la paroi, le coefficient d'échange superficiel convectif  $h$  dépend donc non seulement de la taille de la maille mais aussi des grandeurs turbulentes. Il apparaît donc souhaitable de garder le même maillage et la même diffusivité effective pour le calcul CFD et le modèle d'état.

### 3.3.1.2 Echanges convectifs superficiels dans les modèles aérauliques du bâtiment

Les modèles aérauliques du bâtiment les plus courant considèrent que chaque pièce est parfaitement mélangée (méthode nodale) ou qu'elle peut être divisée en un nombre faible de zones correspondant aux différentes parties de l'écoulement (méthode zonale). Dans les deux cas, l'échange thermique entre les parois et l'air du local est constitué d'un flux radiatif et d'un flux convectif, ce dernier étant déterminé par :

$$\phi_{conv} = hS(\Theta_{paroi} - \Theta_{air}) \quad (3.52)$$

avec

- $\phi_{conv}$  : flux convectif échangé entre l'air et la paroi,
- $h$  : coefficient d'échange superficiel convectif,
- $S$  : surface de la paroi,
- $\Theta_{air}$  : température de l'air,
- $\Theta_{paroi}$  : température de surface de la paroi.

Le tableau (3.3) donne quelques expressions extraites de la littérature concernant les coefficients d'échange superficiel convectif en fonction du régime d'écoulement et de l'orientation des parois. La température des parois est supposée uniforme, le coefficient d'échange superficiel convectif l'est donc aussi.

Orientation des parois	Expression	Régime d'écoulement	Référence
Verticale	$h = 3  \Theta_{air} - \Theta_{paroi} ^{1/3}$	Convection mixte	[86]
	$h = 1,5  \Theta_{air} - \Theta_{paroi} ^{1/3}$	Convection naturelle	[87]
Horizontale (plafond)	$h = 3  \Theta_{air} - \Theta_{paroi} ^{2/3}$	Convection mixte	[88]
	$h = 3$	Convection naturelle	[87]
Horizontale (plancher)	$h = 3$	Tous les cas	[87]

TAB. 3.3 – Quelques expressions du coefficient d'échange superficiel convectif

### 3.3.1.3 Choix du traitement des échanges convectifs superficiels dans le modèle d'ordre élevé

Rappelons que notre objectif consiste à obtenir avec le modèle d'ordre élevé des résultats les plus proches possibles des données de référence. Il serait donc logique d'utiliser la même méthode pour calculer l'échange superficiel convectif au niveau des parois. Néanmoins, les formules empiriques présentées dans le tableau (3.3) ont déjà fait leur preuve dans le domaine du bâtiment et sont d'une utilisation très simple. Nous nous proposons dans la suite de comparer ces formules avec les coefficients obtenus lors des simulations CFD. Cette comparaison devrait notamment nous permettre de juger de la qualité du traitement de l'échange superficiel convectif avec le modèle CFD.

De plus, Beausoleil-Morrison [18] a étudié le couplage entre un modèle CFD et un modèle global du bâtiment. Le couplage entre les deux s'effectue au niveau des parois par l'intermédiaire de la température des parois et d'un coefficient d'échange superficiel convectif. Il montre qu'il est essentiel d'adapter les coefficients de transfert en fonction de l'écoulement de l'air à proximité de chaque paroi. Il utilise donc différentes formules extraites de la littérature. Enfin, il rajoute qu'une simulation détaillée de l'écoulement d'air obtenue avec un modèle CFD nécessite un traitement détaillé de l'échange par convection au niveau de la paroi. En l'absence d'information suffisante sur cet échange, il pourra être difficile de calculer avec précision un écoulement complexe varié.

Le modèle des hauts nombres de Reynolds choisi pour la turbulence fait l'hypothèse que les échanges convectifs superficiels ont intégralement lieu dans la première maille adjacente à la paroi. Aussi, les coefficients d'échange superficiel convectif du tableau (3.3) sont calculés pour chaque maille en assimilant la température de l'air  $\Theta_{air}$  à la température au centre de la maille adjacente. Ce choix est également cohérent avec le calcul d'un coefficient d'échange superficiel pour chaque maille en contact

avec une paroi. De plus, quelque soit le cas et la paroi, le régime d'écoulement n'est jamais ou rarement en convection naturelle. Les relations en convection mixte sont donc utilisées. Néanmoins, l'analyse des résultats devra nous permettre de remettre ce choix en cause. Enfin, nous disposons de peu d'information sur le cas 3) en raison de l'instabilité présente lors des simulations CFD pour un nombre d'Archimède au soufflage compris entre 0,115 et 0,105 (soit une température de soufflage comprise entre 19,7 °C et 20,0 °C). Pour disposer de résultats plus significatifs sur ce cas, nous avons donc réalisé des simulations pour un nombre d'Archimède au soufflage pouvant atteindre 0,020 (soit une température de soufflage maximale de 24,0 °C). La portée du jet augmente sans pour autant atteindre la paroi Est.

Les figures (3.7), (3.8) et (3.9) présentent les coefficients d'échange superficiel convectif ainsi calculés (en pointillés) et ceux obtenus par le calcul CFD (en trait plein) pour les trois cas définis dans le tableau (3.2). En abscisse se trouve la position sur la paroi dont l'origine se situe sur la figure (1.4) en bas pour les parois verticales et à gauche pour les parois horizontales.

Dans tous les cas, il faut remarquer que les profils des coefficients des deux familles sont qualitativement assez semblables. Les différences principales se situent aux extrémités des parois, lieu de phénomènes locaux tels que des recirculations ou de l'induction. Mais ces zones ne représentent qu'une faible partie des parois. Par contre quantitativement, la comparaison est beaucoup moins flatteuse et met en évidence plusieurs points à discuter :

- le régime d'écoulement n'est pas tout le temps en convection mixte. Par exemple, dans le cas 1) (figures 1.3(a) et 3.7) l'écoulement le long du plafond correspond à un régime de convection naturelle pour lequel le coefficient d'échange superficiel convectif est constant et égal à  $3 \text{ W/m}^2\text{°C}$ , valeur très proche du profil issu des résultats CFD. Pour le cas 2) (figures 1.3(b) et 3.8) l'écoulement peut d'abord être identifié à un régime de convection mixte, puis à un régime de convection naturelle admettant de nouveau un coefficient de  $3 \text{ W/m}^2\text{°C}$ ,
- le calcul du coefficient d'échange superficiel convectif avec les formules du tableau (3.3) a été réalisé en prenant pour température de l'air de référence la température de la maille adjacente à la paroi. Cette hypothèse n'est pas tout à fait cohérente avec l'emploi habituel de ces formules. En effet, dans le cas de la méthode nodale, la température intérieure est assimilée à la température au centre du local ou de la zone considérée, c'est-à-dire à la température loin de la paroi. Des essais ont montré que l'éloignement du point de référence par rapport à la paroi ne changeait pas la forme du profil du coefficient, mais seulement les valeurs numériques (par exemple, augmentation du coefficient au niveau du plafond en s'éloignant de la paroi dans le cas 1), tout en conservant le même ordre de grandeur,
- le modèle des hauts nombres de Reynolds a été conçu et validé pour des écou-

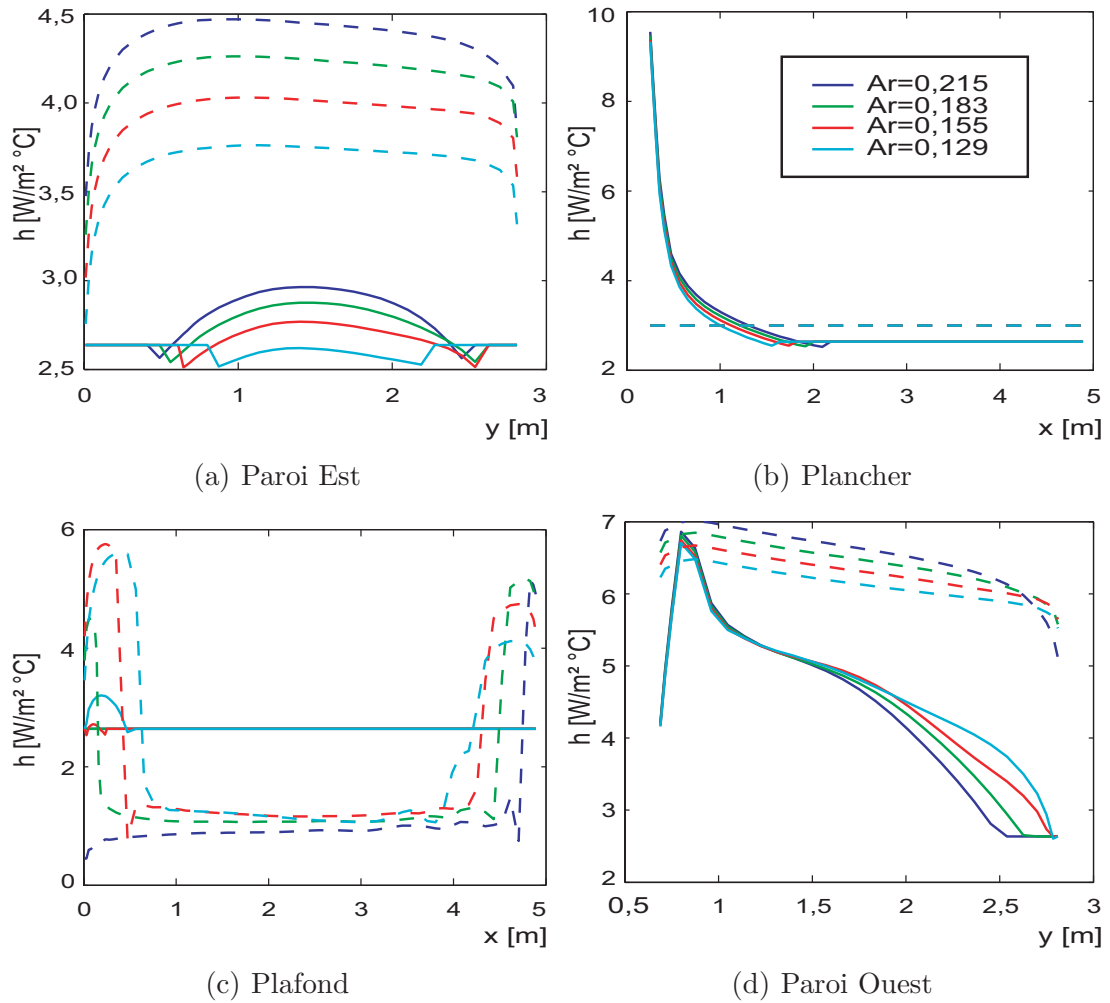


FIG. 3.7 – Coefficients d'échange superficiel convectif pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar \in [0,129 \ 0,215]$  (en trait plein : valeurs extraites des résultats CFD, en pointillés : valeurs calculées avec les expressions du tableau(3.3))



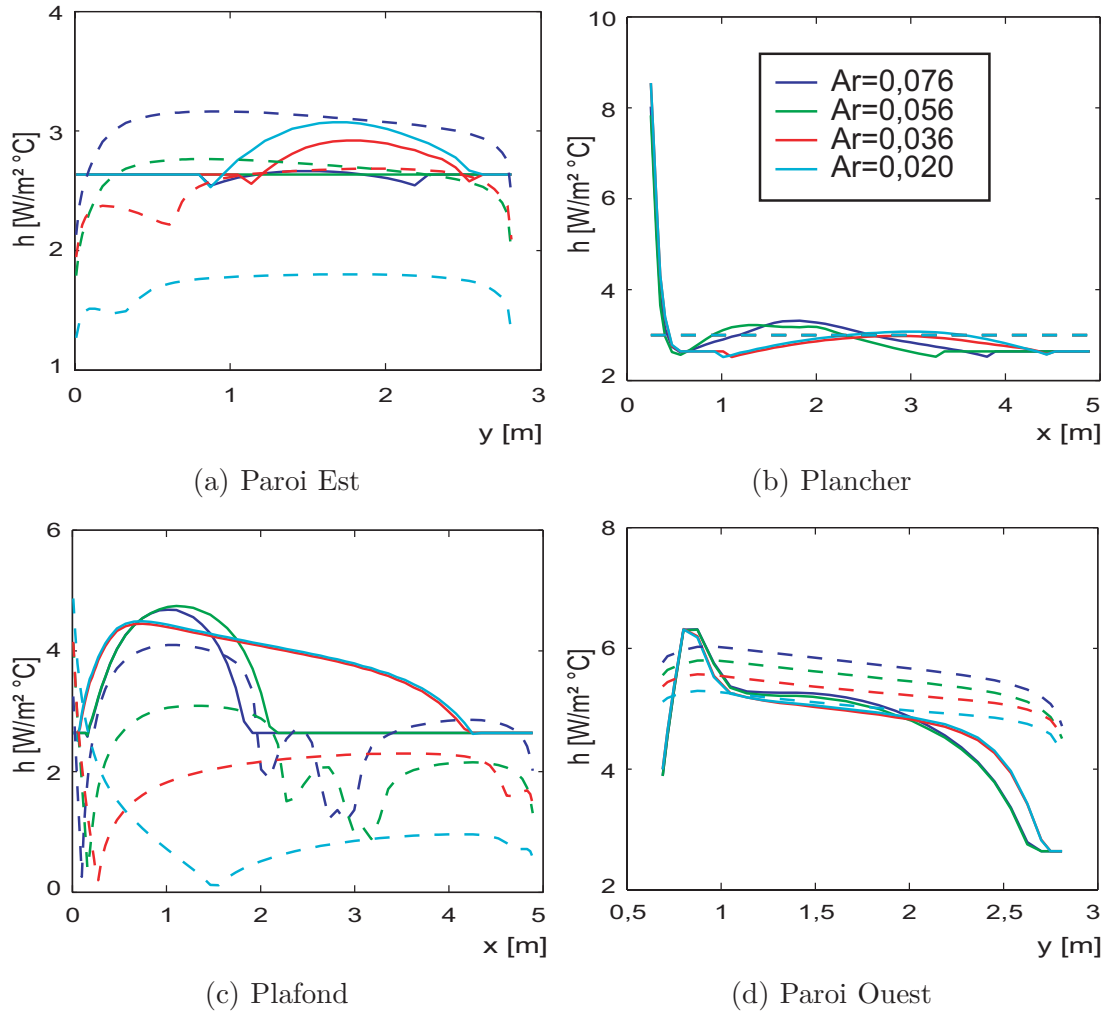


FIG. 3.8 – Coefficients d'échange superficiel convectif pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar \in [0,020 \ 0,076]$  (en trait plein : valeurs extraites des résultats CFD, en pointillés : valeurs calculées avec les expressions du tableau(3.3))

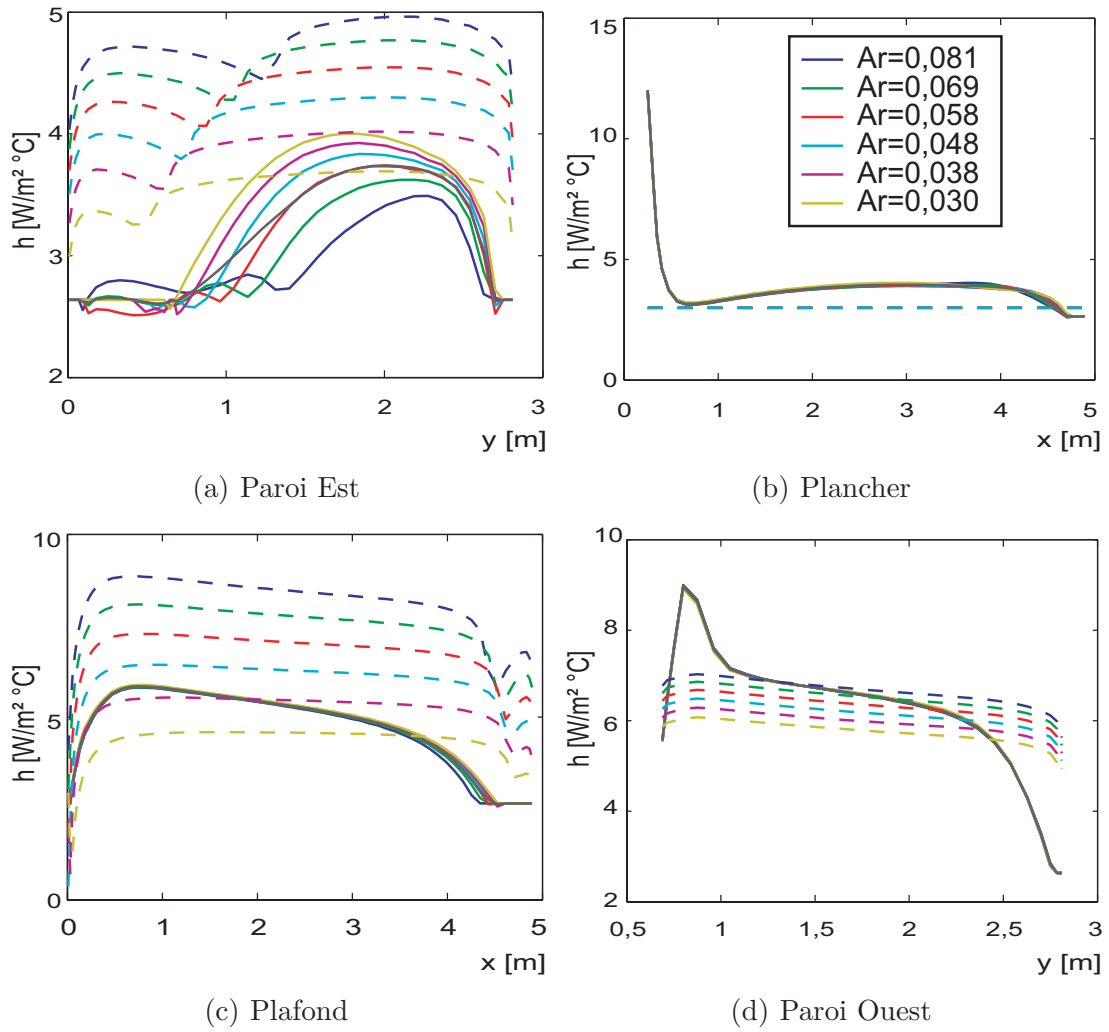


FIG. 3.9 – Coefficients d'échange superficiel convectif pour un air soufflé à  $Re = 5769$  et  $Ar \in [0,030 \ 0,081]$  (en trait plein : valeurs extraites des résultats CFD, en pointillés : valeurs calculées avec les expressions du tableau(3.3))

lements pleinement turbulents, et n'est donc pas totalement adapté aux transferts aérauliques dans le bâtiment,

- la taille de la maille adjacente à la paroi définie par  $y^+$  n'est pas, dans notre cas, toujours comprise entre 30 et 100. L'ordre de grandeur est tout de même respecté.

Ces remarques doivent donc nous conduire à beaucoup de prudence vis à vis de l'exploitation de ces résultats. Néanmoins, il est possible de conclure que les deux approches sont cohérentes entre elles au moins qualitativement. Les principales différences se situent aux extrémités sachant que les formules empiriques ne sont pas forcément adaptées aux phénomènes locaux, ainsi qu'au niveau du plafond et de la paroi Est où les échanges sont parfois sous-estimés dans les calculs CFD, certainement à cause d'un mauvais dimensionnement de la première maille.

Ainsi, pour être sûr de ne pas trop s'éloigner des données de référence, le choix d'utiliser la méthode du calcul CFD s'impose.

### Expression des échanges superficiels convectifs pour le modèle d'ordre élevé :

Dans le modèle d'état d'ordre élevé, l'échange thermique entre la paroi et l'air est caractérisé par la diffusivité thermique effective. Exprimons cette quantité en fonction des coefficients d'échange par convection calculés avec le logiciel de CFD. Pour plus de clarté le cas d'une paroi Ouest est étudié.

La discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie conduit avec le schéma QUICK à l'expression du flux d'énergie surfacique  $\varphi_{mur\ Ouest}$  transmis par le mur à l'air :

$$\begin{aligned}
 \varphi_{paroi\ Ouest} &= -\lambda_{effw} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_{paroi\ Ouest} \\
 &= -\lambda_{effw} \left[ \frac{dg_1}{dx} (\Theta_{paroi\ Ouest} - \Theta_P) + \frac{dg_2}{dx} (\Theta_P - \Theta_E) \right] \\
 &= -\lambda_{effw} \frac{dg_1}{dx} \left[ \Theta_{paroi\ Ouest} - \left( 1 - \frac{dg_2}{dg_1} \right) \Theta_P - \frac{dg_2}{dg_1} \Theta_E \right] \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

où :

- $\lambda_{effw} = \rho C_P a_{effw}$  : conductivité effective de l'air au niveau de la paroi, c'est-à-dire à la frontière Ouest de la cellule adjacente (cf. figure 3.4(a)),
- $g_1$  et  $g_2$  : coefficients introduits par le schéma de discrétisation QUICK,
- $\Theta_P$  et  $\Theta_E$  : températures au centre de la cellule adjacente à la paroi et de sa voisine Est respectivement.

En introduisant le coefficient  $h$  d'échange superficiel par convection au niveau de la paroi, on peut écrire :

$$\varphi_{paroi\ Ouest} = h(\Theta_{paroi\ Ouest} - \Theta_{air}) \quad (3.54)$$

soit,

$$a_{eff_w} = -\frac{h}{\rho C_P \frac{dg_1}{dx}} = \frac{\Delta x(2\Delta x + \Delta x_E)}{3\Delta x + \Delta x_E} \frac{h}{2\rho C_P} \quad (3.55)$$

avec :

- $\Delta x$  : épaisseur de la maille adjacente à la paroi de premier ordre,
- $\Delta x_E$  : épaisseur de la maille adjacente à la paroi de second rang,
- $h$  : coefficient de transfert par convection.

Pour que l'expression du flux soit bien consistante avec le schéma QUICK, la température de l'air utilisée a pour expression :

$$\Theta_{air} = \left(1 - \frac{\frac{dg_2}{dx}}{\frac{dg_1}{dx}}\right) \Theta_P + \frac{\frac{dg_2}{dx}}{\frac{dg_1}{dx}} \Theta_E \quad (3.56)$$

Cette expression illustre le fait que l'échange par convection entre l'air et la paroi se fait non pas sur une seule maille, mais sur les deux mailles adjacentes. C'est une particularité du schéma QUICK qui provient de l'utilisation d'une interpolation quadratique. Si  $\frac{dg_1}{dx}$  caractérise l'échange total réalisé entre le mur et l'air (équation 3.53), alors le rapport  $\frac{\frac{dg_2}{dx}}{\frac{dg_1}{dx}}$  donne la part de l'échange effectuée avec la maille adjacente de second rang et  $\left(1 - \frac{\frac{dg_2}{dx}}{\frac{dg_1}{dx}}\right)$  celle effectuée avec la maille adjacente de premier rang.

L'extraction des coefficients d'échange superficiel convectif calculés avec les données de référence permet donc d'obtenir la diffusivité effective aux parois et donc d'exprimer les conditions aux limites aux parois.

### Analyse des coefficients d'échange superficiel convectif :

Les figures (3.7) à (3.9) présentent en trait plein les coefficients d'échange superficiel convectif obtenus lors des calculs des données de référence.

Elles montrent que dans le cas du plancher et de la paroi Ouest, le profil du coefficient d'échange reste le même quelque soit le cas. Seule la valeur varie d'une vitesse de soufflage à l'autre. De plus, la valeur reste quasiment constante au sein d'un même cas.

Par contre pour la paroi Est et le plafond, les choses sont différentes. Néanmoins, des similitudes peuvent être définies en fonction de la configuration de l'écoulement.

Pour chaque paroi, trois configurations peuvent être définies à partir des conditions de soufflage.

– Pour le plafond :

1. Air soufflé à ( $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,036$  et  $0,020$ ) et ( $Re = 5769$ ,  $Ar = 0,030$  à  $0,081$ ). Le jet colle au plafond jusqu'à la paroi Est ou presque. Ici la forme du profil reste la même, sa valeur décroît avec la portée du jet.
2. Air soufflé à ( $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,056$ ,  $0,076$ ,  $0,129$  et  $0,155$ ). Le jet retombe bien avant d'atteindre la paroi Est. Le profil à la même forme par contre, la valeur diminue fortement quand le nombre d'Archimède augmente. Le profil tend à s'aplatir pour  $Ar = 0,155$  et devient très proche du cas suivant.
3. Air soufflé à ( $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,183$  et  $0,215$ ). Le jet retombe avant d'atteindre le plafond. La vitesse de l'air est très faible au niveau du plafond, les coefficients d'échange superficiel convectif sont faibles et constants.

– Pour la paroi Est :

1. Air soufflé à ( $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,036$  et  $0,020$ ) et ( $Re = 5769$ ,  $Ar = 0,030$  à  $0,081$ ). Plus le jet est froid et plus sa portée est faible. Le jet est donc moins en contact avec cette paroi lorsque le nombre d'Archimède au soufflage augmente. La valeur du coefficient d'échange superficiel par convection  $h$  diminue.
2. Air soufflé à ( $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,056$ ,  $0,076$ ,  $0,129$  et  $0,155$ ). Le profil est presque plat. La valeur du coefficient recommence à augmenter lorsque le nombre d'Archimède au soufflage est à  $0,155$ , la transition vers la configuration suivante a commencé.
3. Air soufflé à ( $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,183$  et  $0,215$ ). L'air remonte le long de la paroi Est, le coefficient d'échange superficiel convectif augmente quand le nombre d'Archimède au soufflage augmente.

Ainsi, les deux parois qui subissent les plus fortes variations du coefficient d'échange convectif sont le plafond et la paroi Est. Ces deux parois nous amènent à distinguer non pas trois, mais quatre cas (Tableau 3.4).

	Conditions de soufflage			
	Vitesse [m/s]	Température [°C]	Nombre de Reynolds	Nombre d'Archimède
Cas a	1,0	16,0 à 16,7	3846	0,215 à 0,194
Cas b	1,0	16,7 à 19,7	3846	0,194 à 0,115
Cas c	1,0	19,7 à 21,0	3846	0,115 à 0,076
Cas d	1,5	16,0 à 21,0	5769	0,081 à 0,039

TAB. 3.4 – Cas à distinguer pour le champ thermo-aéraulique

Les cas b) et c) sont différenciés non seulement par les valeurs du coefficient d'échange superficiel convectif, mais aussi et surtout par le champ de vitesse. Par contre, les cas a) et b) ne se distinguent que par les coefficients d'échange superficiel convectif. La limite  $Ar = 0,194$  entre les deux cas a été déterminée approximativement à partir des données de référence. Nous reviendrons plus tard sur sa signification. Concernant le cas d), nous pourrions également penser à distinguer plusieurs cas à cause de la variation du coefficient au plafond (variation de l'ordre de  $1 \text{ W/m}^2\text{°C}$ ). En réalité, pour cette configuration, les effets de la vitesse sont prépondérants, la variation des coefficients d'échange superficiel convectif reste faible.

Ainsi, quatre cas différents ont été identifiés. Pour chacun des cas, l'équation de conservation de l'énergie doit être intégrée en utilisant un champ de vitesse, des coefficients d'échange superficiel convectif et une diffusivité effective au centre des mailles fixes calculés par le code CFD (données de référence).

### 3.3.2 Résultats

Cette section est consacrée à la validation du modèle d'ordre élevé, noté MOE, c'est-à-dire à la comparaison de ses résultats avec les données de référence.

Précisons tout d'abord le choix des grandeurs extraites des simulations CFD. Pour chacun des quatre cas étudiés, un champ de vitesse, une distribution des diffusivités effectives et des coefficients d'échange superficiel convectif moyens sont calculés à partir des données de référence obtenues pour les régimes permanents suivant :

- cas a : air soufflé à  $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,194$  et  $0,215$ ,
- cas b : air soufflé à  $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,129$ ,  $0,155$  et  $0,183$ ,
- cas c : air soufflé à  $Re = 3846$ ,  $Ar = 0,076$ ,
- cas d : air soufflé à  $Re = 5769$ ,  $Ar = 0,030$ ,  $Ar = 0,038$ ,  $Ar = 0,048$ ,  $Ar = 0,058$ ,  $Ar = 0,069$  et  $0,081$ .

Notons que pour le cas c), une seule condition de soufflage a été retenue en raison des difficultés rencontrées pour obtenir une bonne convergence des données de référence pour un air soufflé à un nombre d'Archimède de  $0,105$ .

Les résultats de chaque cas sont examinés en régime permanent et en régime transitoire. Ce dernier correspond à la réponse du MOE à des échelons de la température de soufflage choisis pour représenter toute l'amplitude des températures de soufflage de chaque cas. Les simulations sont effectuées avec Simulink, boîte à outil de Matlab, en utilisant un solveur explicite de type Runge-Kutta à pas de temps variables.

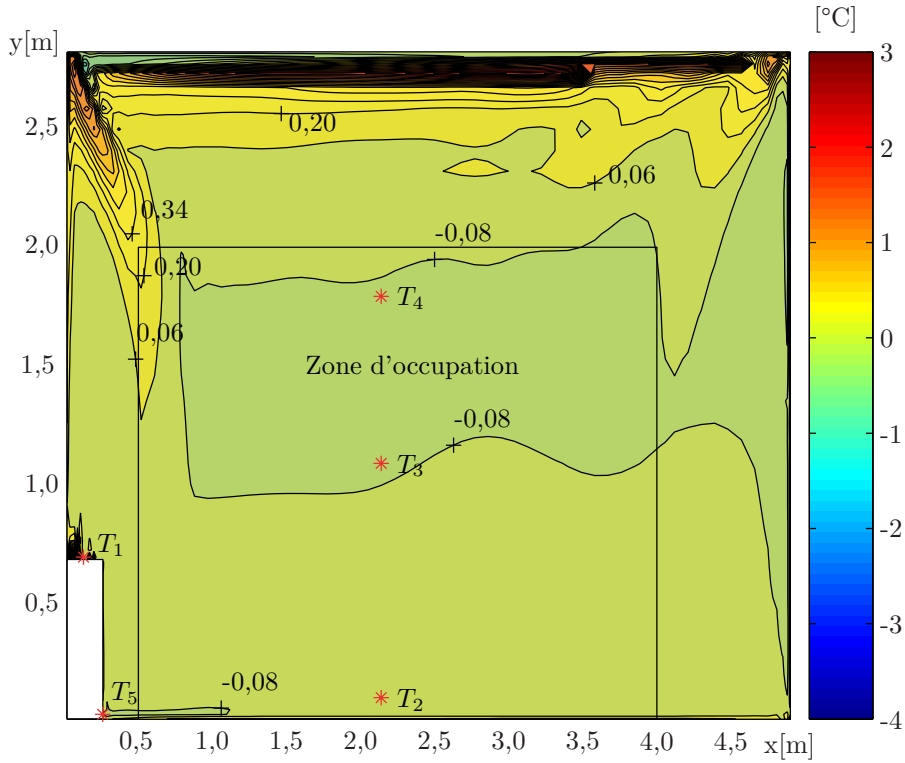


FIG. 3.10 – Cas a : différence de température entre les données de référence et le MOE pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,215$

### 3.3.2.1 Cas a

En régime permanent, la comparaison avec les données de référence est établie dans le tableau (3.5). Alors que l'écart quadratique moyen est inférieur à  $0,1\text{ °C}$  à la reprise et dans la zone d'occupation, sa valeur augmente fortement dans l'ensemble du local pour dépasser  $0,3\text{ °C}$ . La figure (3.10) présente la différence de température entre le MOE et les données de référence en régime permanent pour un air soufflé à  $Ar = 0,215$ . L'écart maximum, de l'ordre de  $-4\text{ °C}$ , est en fait circonscrit à un nombre restreint de points situés dans le coin supérieur gauche du ventilateur. La figure (3.10) permet en revanche d'identifier deux zones présentant des écarts importants, toutes deux situées en dehors de la zone d'occupation. La première correspond à la zone juste au dessus du jet et quantifie l'erreur commise par

$Ar$ au soufflage	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
	local	zone d'occupation	reprise
0,215	0,37	0,09	0,10
0,195	0,31	0,08	0,06

TAB. 3.5 – Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime permanent

l'hypothèse de champ de vitesse fixé qui surestime la portée du jet. La deuxième est située à proximité du plafond et est le siège d'une forte stratification thermique. Les isothermes  $y$  sont donc resserrées et une faible erreur de positionnement de celles-ci engendre par conséquent un fort écart de température.

Pour les régimes instationnaires, le tableau (3.6) donne les écarts quadratiques moyens entre les données de référence et le MOE pour plusieurs échelons. La figure (3.11) précise les résultats pour l'échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,215 à 0,195. L'erreur relative est presque toujours inférieure à 0,1 °C. Par contre, les figures (3.11(b) et 3.11(c)) mettent en évidence un comportement particulier du modèle CFD et du MOE à l'instant initial, c'est-à-dire la naissance d'une oscillation a priori non physique. Ce type de comportement est caractéristique des schémas de discrétisation «upwind» d'ordre élevé comme le schéma QUICK, et a déjà été identifié par plusieurs auteurs [28] et [89]. Aussi le choix de ce schéma pour sa précision doit être associé à une extrême prudence lors de l'interprétation des résultats, notamment en cas de difficultés de convergence ou d'oscillations non physiques.

$Ar$ au soufflage	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
	zone d'occupation			reprise
	T2	T3	T4	T5
échelon de 0,215 à 0,195	0,02	0,09	0,07	0,03
échelon de 0,195 à 0,215	0,05	0,11	0,07	0,04

TAB. 3.6 – Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime instationnaire



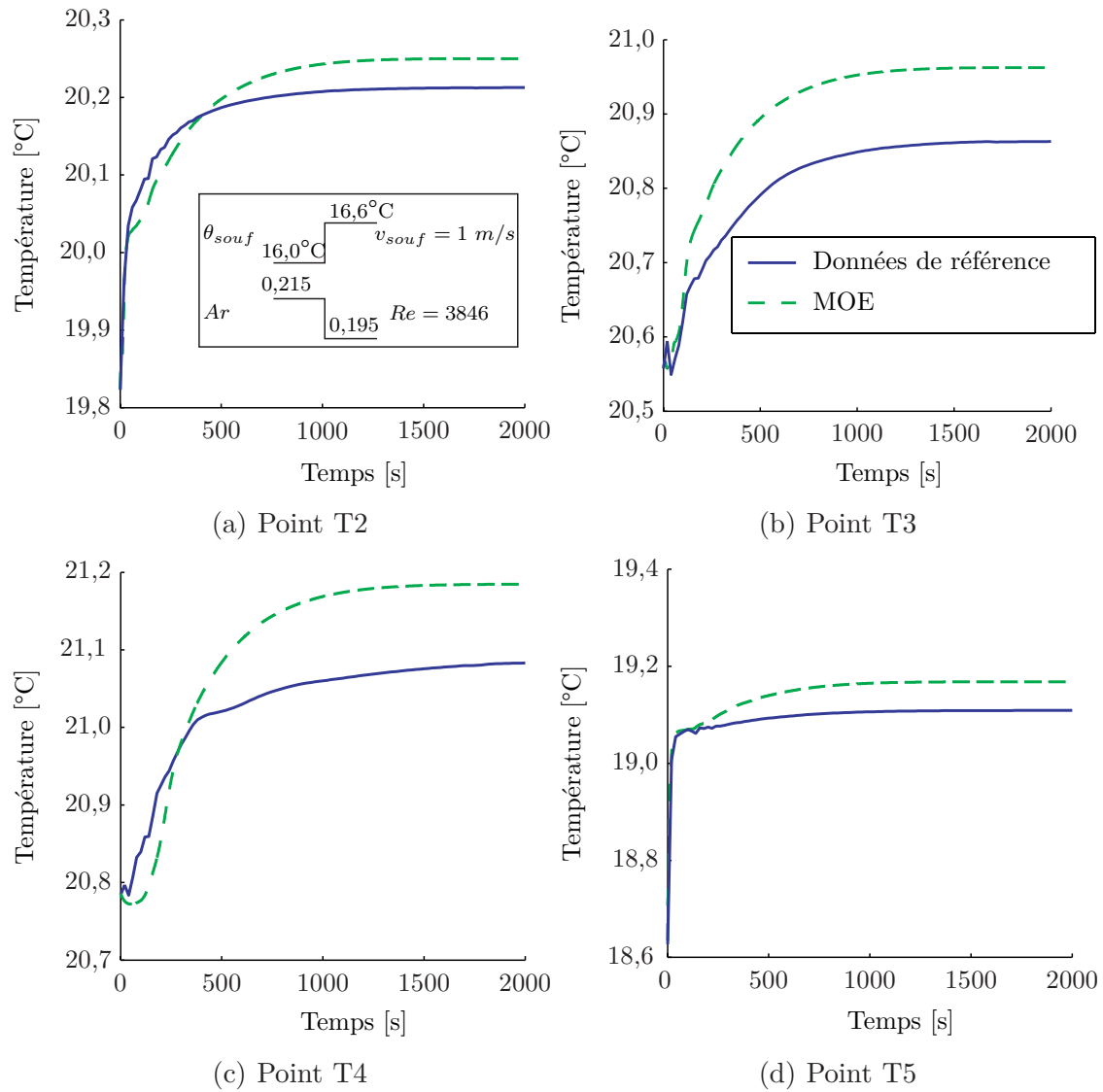


FIG. 3.11 – Cas a : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,215 à 0,195 et un nombre de Reynolds de 3846

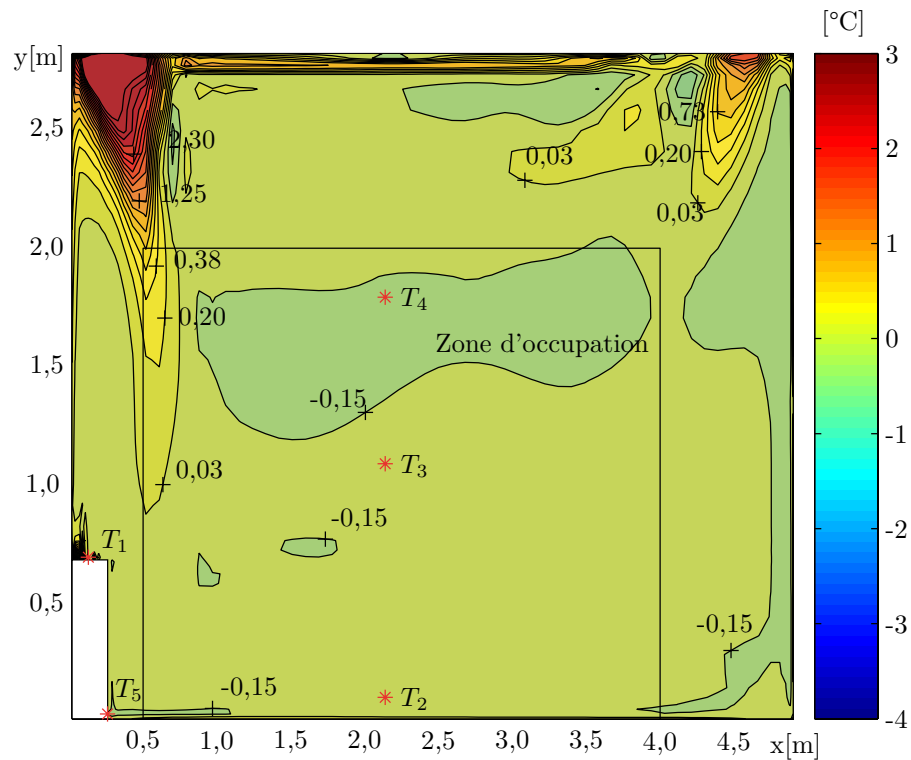


FIG. 3.12 – Cas b : différence de température entre les données de référence et le MOE pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,194$

### 3.3.2.2 Cas b

En régime permanent, la comparaison avec les données de référence est donnée dans le tableau (3.7). Comme dans le cas précédent, il existe une forte dégradation des résultats entre la zone d'occupation et l'ensemble du local. La figure (3.12) permet d'identifier deux zones qui présentent un fort écart de température, de l'ordre de 1 et 3 °C, entre le MOE et les données de référence dans le cas d'un air soufflé à  $Ar = 0,194$ . La figure (1.3(a)) fait apparaître que ces deux zones correspondent d'une part à l'extrémité du jet après sa première ascension et d'autre part à l'extrémité du jet après la deuxième ascension le long du mur Est. Nous pouvons donc conclure que dans les deux cas, l'écart provient de la surestimation de la portée du jet. De

$Ar$ au soufflage	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
	local	zone d'occupation	reprise
0,194	0,66	0,14	0,17
0,142	0,17	0,05	0,03
0,129	0,20	0,04	0,00

TAB. 3.7 – Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime permanent

plus, pour cette condition de soufflage, il apparaît dans le tableau (3.7) que l'écart quadratique moyen en régime permanent est nettement dégradé pour l'ensemble du local à 0,66 °C et que ces valeurs dans la zone d'occupation et à la reprise, bien qu'acceptables, sont supérieures à 0,1 °C. Les résultats du cas a) (tableau 3.5) pour un nombre d'Archimède au soufflage proche ( $Ar = 0,195$ ) sont bien meilleurs. Cette dernière remarque met en évidence la difficulté pour définir précisément la frontière entre deux configurations du champ thermo-aéraulique. Par contre, ces résultats montrent qu'il est nécessaire de différencier les cas a) et b) pour ne pas voir les résultats se dégrader de manière significative au niveau du jet.

Pour les régimes instationnaires, le tableau (3.8) donne les écarts quadratiques moyens entre les données de référence et le MOE pour plusieurs échelons de la température au soufflage. La figure (3.13) présente la réponse du MOE pour l'échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,142 à 0,194, qui des trois échelons présentés est celui possédant les écarts quadratiques moyens les plus élevés. Il est judicieux de remarquer que la température est systématiquement surestimée. L'écart de température varie autour de 0,2 °C, c'est-à-dire autour de l'écart quadratique moyen en régime permanent pour un nombre d'Archimède de 0,194. Les remarques faites pour le régime permanent sont donc toujours valables.

$Ar$ au soufflage	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
	zone d'occupation			reprise
	T2	T3	T4	T5
échelon de 0,194 à 0,142	0,13	0,07	0,16	0,11
échelon de 0,142 à 0,194	0,18	0,20	0,15	0,25
échelon de 0,155 à 0,129	0,11	0,08	0,18	0,05

TAB. 3.8 – Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime instationnaire

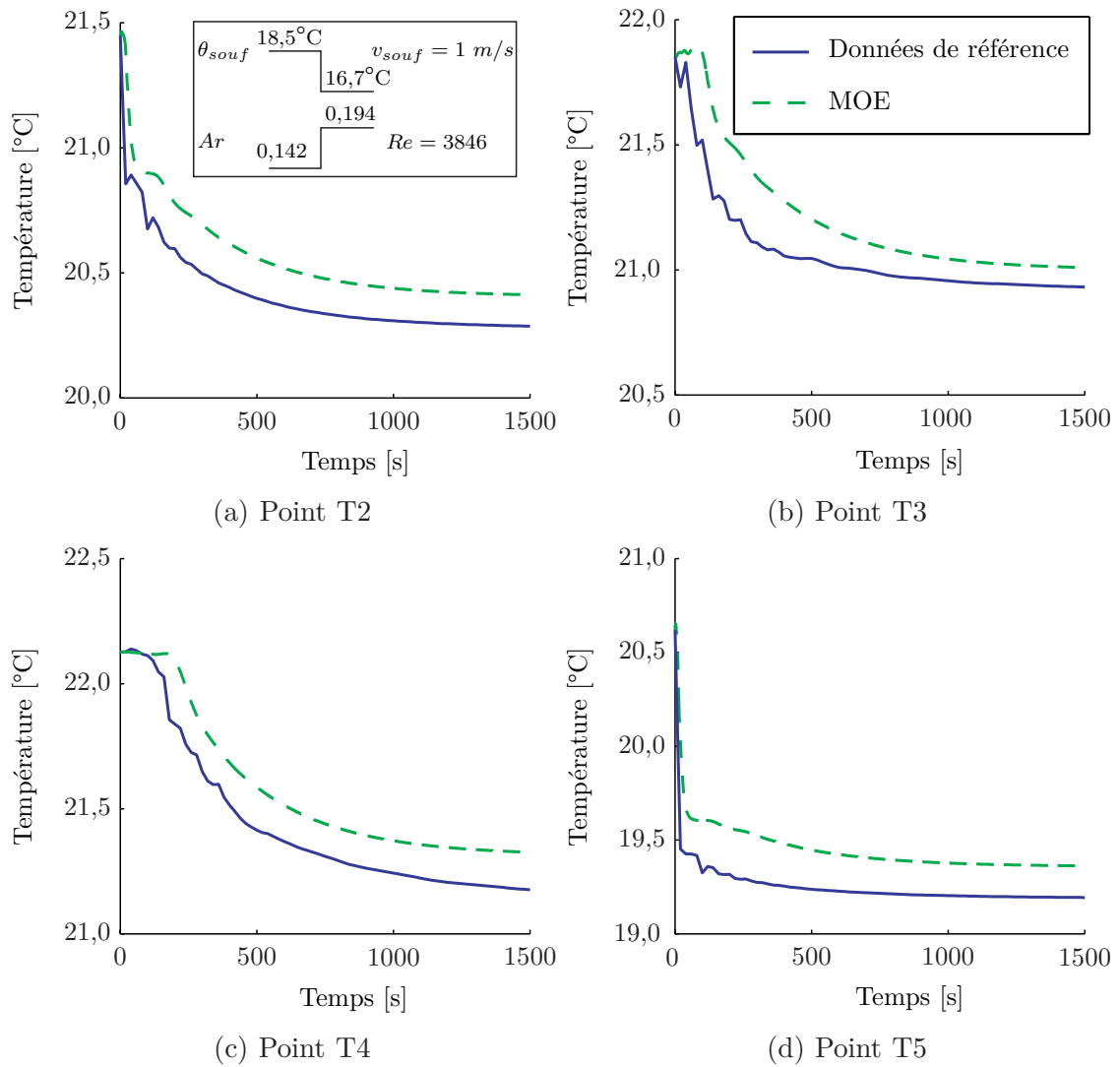


FIG. 3.13 – Cas b : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,142 à 0,194 et un nombre de Reynolds de 3846

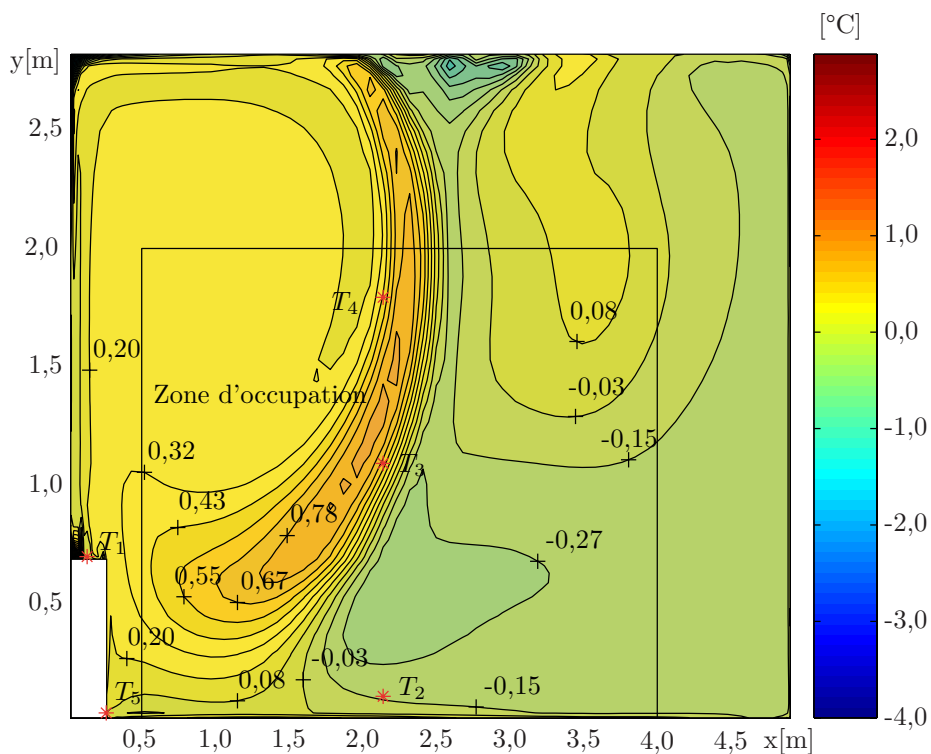


FIG. 3.14 – Cas c : différence de température entre les données de référence et le MOE pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,105$

### 3.3.2.3 Cas c

Le tableau (3.9) montre que l'écart quadratique moyen est supérieur à  $0,3\text{ °C}$  à la fois pour la zone d'occupation et l'ensemble du local. La figure (3.14) donne l'écart de température entre le MOE et les données de référence pour un nombre d'Archimède au soufflage de  $0,105$ . Elle confirme que l'écart n'est pas ici concentré sur quelques zones. Il faut tout de même distinguer la zone du jet qui connaît des écarts supérieurs à  $1\text{ °C}$ . Plusieurs facteurs peuvent expliquer cette dégradation des résultats :

1. contrairement aux autres cas, le jet pénètre ici largement dans la zone d'occupation, d'où la propagation de l'erreur dans cette zone,
2. le champ de vitesse est égal au champ de vitesse pour un nombre d'Archi-

$Ar$ au soufflage	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
	local	zone d'occupation	reprise
0,105	0,36	0,42	0,10
0,076	0,18	0,11	0,06

TAB. 3.9 – Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime permanent

mède au soufflage de 0,076, ce qui défavorise le calcul du jet pour un nombre d'Archimède au soufflage de 0,105,

- les points T3 et T4 sont situés à proximité ou à l'intérieur du jet, zone dans laquelle les gradients de température sont importants. Une faible erreur de positionnement de ces lignes par le MOE engendre donc une augmentation conséquente de l'écart quadratique moyen.

Pour les régimes instationnaires, le tableau (3.10) donne les écarts quadratiques entre les données de référence et le MOE pour plusieurs échelons du nombre d'Archimède au soufflage. Les observations précédentes sont aussi valables en régime transitoire pour le point T3, situé au coeur du jet.

$Ar$ au soufflage	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
	zone d'occupation			reprise
	T2	T3	T4	T5
échelon de 0,105 à 0,076	0,15	0,44	0,17	0,04

TAB. 3.10 – Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime instationnaire

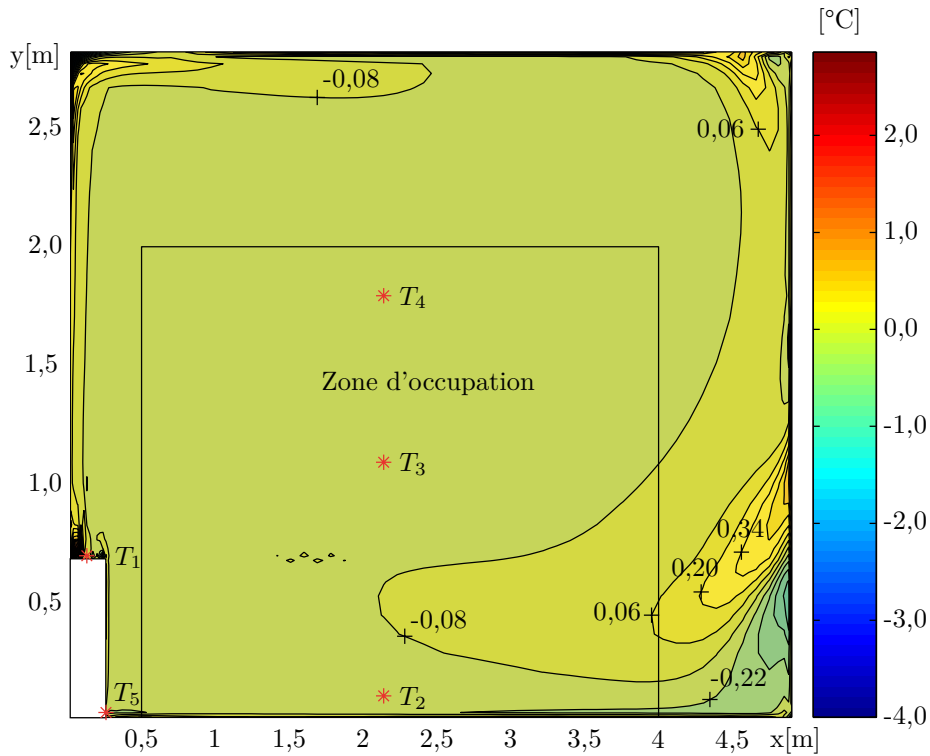


FIG. 3.15 – Cas d : différence de température entre les données de référence et le MOE pour un air soufflé à  $Re = 5769$  et  $Ar = 0,069$

### 3.3.2.4 Cas d

Les tableaux (3.11) et (3.12) donnent les écarts quadratiques moyens entre les données de référence et les résultats du MOE respectivement en régime permanent et en régime transitoire.

Ce cas est le plus avantageux vis-à-vis de l'hypothèse d'un champ de vitesse fixé. En effet, la force d'inertie entraîne le jet d'air jusqu'à la paroi Est, ce qui a pour effet de peu modifier la configuration du champ thermo-aéroulrique au sein du local. Il a ainsi été possible de garder le même champ de vitesse quelque soit la température de l'air soufflé. Les écarts quadratiques moyens restent ici tout à fait convenables

$Ar$ au soufflage	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
	local	zone d'occupation	reprise
0,069	0,29	0,10	0,20
0,048	0,22	0,05	0,10
0,038	0,19	0,04	0,06

TAB. 3.11 – Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime permanent

<i>Ar</i> au soufflage	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
	zone d'occupation			reprise
	T2	T3	T4	T5
échelon de 0,081 à 0,069	0,12	0,06	0,07	0,19
échelon de 0,058 à 0,048	0,06	0,01	0,02	0,10
échelon de 0,030 à 0,038	0,04	0,01	0,00	0,05

TAB. 3.12 – Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE avec les données de référence en régime instationnaire

notamment pour le régime transitoire. Dans le cas du régime permanent pour un nombre d'Archimède au soufflage de 0,069, la figure (3.15) montre en comparaison avec la figure (1.3(c)) que les écarts les plus importants se trouvent au niveau du jet et des zones de recirculation.

### 3.4 Conclusion

L'analyse des résultats du modèle d'état d'ordre élevé montre que sa précision est globalement satisfaisante, bien qu'apparaît souvent une dégradation au niveau des parois. Il s'avère de plus important d'insister sur plusieurs points. Tout d'abord, il apparaît que l'hypothèse d'un champ de vitesse fixé est la source d'une dégradation des écarts quadratiques moyens. Ainsi, le jet d'air s'avère délicat à prédire si sa configuration varie trop rapidement en fonction des conditions de soufflage. De plus, il est assez difficile, voire impossible de définir précisément la frontière entre deux cas successifs. Cette difficulté mise en évidence lors de la transition entre les cas a) et b) influencera le choix d'une solution pour effectuer le passage entre les différents cas. Enfin, lors d'un changement des conditions de soufflage, apparaissent dans les premiers instants des oscillations probablement d'origine numérique. Dans la suite du mémoire, l'interprétation des résultats devra en tenir compte.





# Chapitre 4

## Modèles d'ordre réduit

Dans le chapitre précédent, un modèle d'ordre élevé pour le calcul du champ de température a été obtenu. Bien que celui-ci puisse être résolu rapidement, c'est-à-dire en quelques minutes sur un ordinateur personnel, ce temps demeure trop long pour une application en temps réel. De plus, l'ordre du système d'état obtenu est égal à la dimension de la matrice d'état  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire au nombre de mailles utilisées, soit 2992 dans notre cas. Or, nous verrons qu'un contrôleur idéal doit avoir le même ordre que le système. L'ordre du modèle est donc toujours trop important. Aussi pour le réduire, nous commencerons par obtenir une base de projection pour chaque modèle d'ordre élevé en utilisant la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Nous tronquerons ensuite cette base pour diminuer l'ordre du modèle réduit. Enfin, un modèle unique sera construit en interpolant les modèles des quatre cas d'écoulements distingués.

### 4.1 Construction de la base de projection

#### 4.1.1 Les snapshots

Les méthodes spectrales décrites dans l'état de l'art (§2.2.2.2) sont basées sur la résolution d'un problème aux valeurs propres qui requiert la diagonalisation d'une matrice. L'avantage de la POD sur les autres techniques de cette famille réside dans la méthode des snapshots qui permet de travailler sur un problème de dimension nettement réduite puisque celle-ci dépend du nombre de pas de temps contenus dans l'échantillonnage et non de la dimension spatiale du problème. La taille du maillage utilisé n'a donc pas d'influence sur la possibilité de construire une base de projec-

tion avec cette technique. La généralisation du calcul bidimensionnel à un calcul tridimensionnel ne devrait donc pas poser de problème sur ce point. Néanmoins, la base POD est représentative de l'écoulement étudié, et donc de sa complexité. Or, l'écoulement de l'air dans un local réel, en trois dimensions, est plus complexe qu'un écoulement bidimensionnel. Nous pouvons donc supposer que la base tronquée contiendra plus de modes dans le cas tridimensionnel. Cependant, Basman et Khalifa [49] ont montré que l'application de la POD en trois dimensions à un local similaire à celui de notre étude conduisait à une base tronquée de dimension inférieure à 10, taille tout à fait correcte pour un modèle d'ordre réduit résolvable en temps réel. Cette étude permet donc de généraliser notre étude bidimensionnelle à des cas tridimensionnels similaires.

La première étape de la POD consiste à obtenir l'ensemble des snapshots, c'est-à-dire à réaliser l'échantillonnage caractéristique de la distribution de température dans le local. Il n'existe pas de règle générale pour construire les snapshots. Cependant, l'état de l'art a montré que pour obtenir une base destinée à construire un modèle d'ordre réduit servant au contrôle de la température, il est nécessaire que les snapshots capturent la dynamique de l'équation de conservation de l'énergie, et donc qu'ils soient issus d'une simulation avec une excitation adéquate. Utilisé par Park et Lee [77], l'échelon de température de soufflage permet d'exciter une large gamme de fréquences. Une simulation basée sur une telle consigne sera donc riche en information sur la dynamique de la distribution de température. Pour compléter la richesse de cette simulation, Park et Lee ont proposé d'associer deux échelons opposés dans la consigne de façon à balayer l'ensemble de l'intervalle de consigne admissible dans un sens puis dans l'autre. Ainsi pour chacun des cas identifiés dans la section (3.3), les snapshots sont extraits des simulations suivantes :

1. simulation à la température de soufflage minimale pour obtenir la condition initiale,
2. simulation instationnaire pour un échelon de température de soufflage de la température minimale à la température maximale jusqu'à obtention d'un régime permanent,
3. simulation instationnaire pour un échelon de température de soufflage de la température maximale à la température minimale jusqu'à obtention d'un régime permanent.

Ces simulations ont été réalisées en priorité avec StarCD. Elles contiennent donc la résolution de l'équation de conservation de l'énergie, mais aussi celle des équations de conservation du moment. Contrairement au modèle d'ordre élevé, l'hypothèse d'un champ de vitesse fixé n'a donc pas été faite. Les snapshots qui en sont extraits contiennent alors des informations supplémentaires, par rapport au MOE quant à l'influence de la variation du champ de vitesse sur la distribution de température. Néanmoins, comme nous l'avons déjà signalé lors de la description des données de

référence, il n'a pas été possible d'obtenir des simulations autour de la température de soufflage de 19,7 °C, pour une vitesse de soufflage de 1 m/s. La méthode de construction des snapshots doit donc être adaptée pour les cas b) et c). Deux stratégies différentes ont été utilisées. Pour le cas b), étant donnée que le MOE présente des résultats satisfaisants, celui-ci a été utilisé afin d'extraire les snapshots des simulations suivantes :

1. simulation à la température de soufflage de 16,7 °C pour obtenir la condition initiale,
2. simulation instationnaire pour un échelon de température de soufflage de 16,7 °C à 19,6 °C jusqu'à obtention d'un régime permanent,
3. simulation instationnaire pour un échelon de température de soufflage de 19,6 °C à 16,7 °C jusqu'à obtention d'un régime permanent.

Pour le cas c), nous avons choisi d'utiliser StarCD en se rapprochant au maximum de la frontière avec le cas b), quitte à obtenir une convergence médiocre des simulations, ce qui nous permettra de juger de la robustesse de la technique par rapport aux problèmes de convergence des simulations CFD. Ainsi les snapshots sont extraits des simulations suivantes :

1. simulation à la température de soufflage de 20,0 °C pour obtenir la condition initiale,
2. simulation instationnaire pour un échelon de température de soufflage de 20,0 °C à 21,0 °C jusqu'à obtention d'un régime permanent,
3. simulation instationnaire pour un échelon de température de soufflage de 21,0 °C à 20,0 °C jusqu'à obtention d'un régime permanent.

Une fois ces simulations réalisées, il faut choisir les snapshots à extraire. La méthode des snapshots n'impose qu'une seule contrainte : les snapshots doivent être incorrélés entre eux. Il est difficile de le vérifier concrètement. Par contre, nous pouvons prendre des précautions pour entre autres éviter d'extraire plusieurs snapshots du régime permanent de l'écoulement. Or, il est difficile, voire impossible de déterminer le temps d'établissement du régime permanent, d'où l'introduction du temps de réponse qui correspond à l'instant à partir duquel la variation de température reste comprise entre 95% et 105% de la variation finale. De plus, certains points du local n'atteignent pas un régime permanent établi, en particulier au niveau des recirculations ou à proximité du plafond. Il est donc impossible de tenir compte de la totalité des points pour déterminer le temps de réponse du local. Nous avons choisi d'attendre que 95% des points du local aient atteint leur temps de réponse. Ainsi pour chaque cas, entre 40 et 60 snapshots ont été extraits des simulations en veillant à n'extraire qu'un seul snapshot au delà du temps de réponse. Le tableau (4.1) donne les caractéristiques des snapshots.

	Echelon [°C]	Temps de réponse [s]	Intervalle de temps [s]	Nombre de snapshots	Instant du dernier snapshot [s]
Cas a)					
	16,0 à 16,6	1720	60	30	1740
	16,6 à 16,0	1980	60	34	3780
Cas b)					
	16,7 à 19,6	1200	60	21	1200
	19,6 à 16,7	1200	60	21	2460
Cas c)					
	20,0 à 21,0	1140	60	20	1140
	21,0 à 20,0	1760	60	31	3000
Cas d)					
	16,0 à 21,0	460	20	24	460
	21,0 à 16,0	420	20	22	900

TAB. 4.1 – Caractéristiques des snapshots

### 4.1.2 Décomposition de la distribution de température

La méthode des snapshots est appliquée à la partie fluctuante des snapshots et conduit à l'expression générale d'un snapshot au temps  $t_k$  :

$$\Theta(\mathbf{x}, t_k) = \Theta_{moy}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N b_i(t_k) \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

Pour chaque cas,  $\Theta_{moy}$  est le champ moyen calculé sur tous les snapshots du cas (figure 4.1). La deuxième partie de l'expression (4.1) est donc le champ fluctuant des snapshots autour de leur valeur moyenne. A chaque mode sont associées une valeur propre  $\lambda_k$  et l'énergie cumulée relative  $E$  (expression 2.30). Le tableau (4.2) donne pour chaque cas les valeurs propres et l'énergie cumulée relative des 8 premiers modes. L'analyse de ce tableau conduit à plusieurs remarques communes aux quatre cas :

- le premier mode est nettement dominant et capture au moins 70% de l'énergie (72,98% dans le cas c), et même 98,15% dans le cas d),
- un très faible nombre de modes est suffisant pour obtenir plus de 90% de l'énergie, au maximum trois dans le cas c),
- en corrélation avec les deux premières remarques, les valeurs propres décroissent très rapidement.

De plus, il est possible de lier ces remarques à la nature physique des écoulements. Ainsi, le cas d) possède un écoulement simple régit par la vitesse du jet d'air. Or, c'est celui qui affiche la plus grande prédominance du premier mode et qui nécessite le

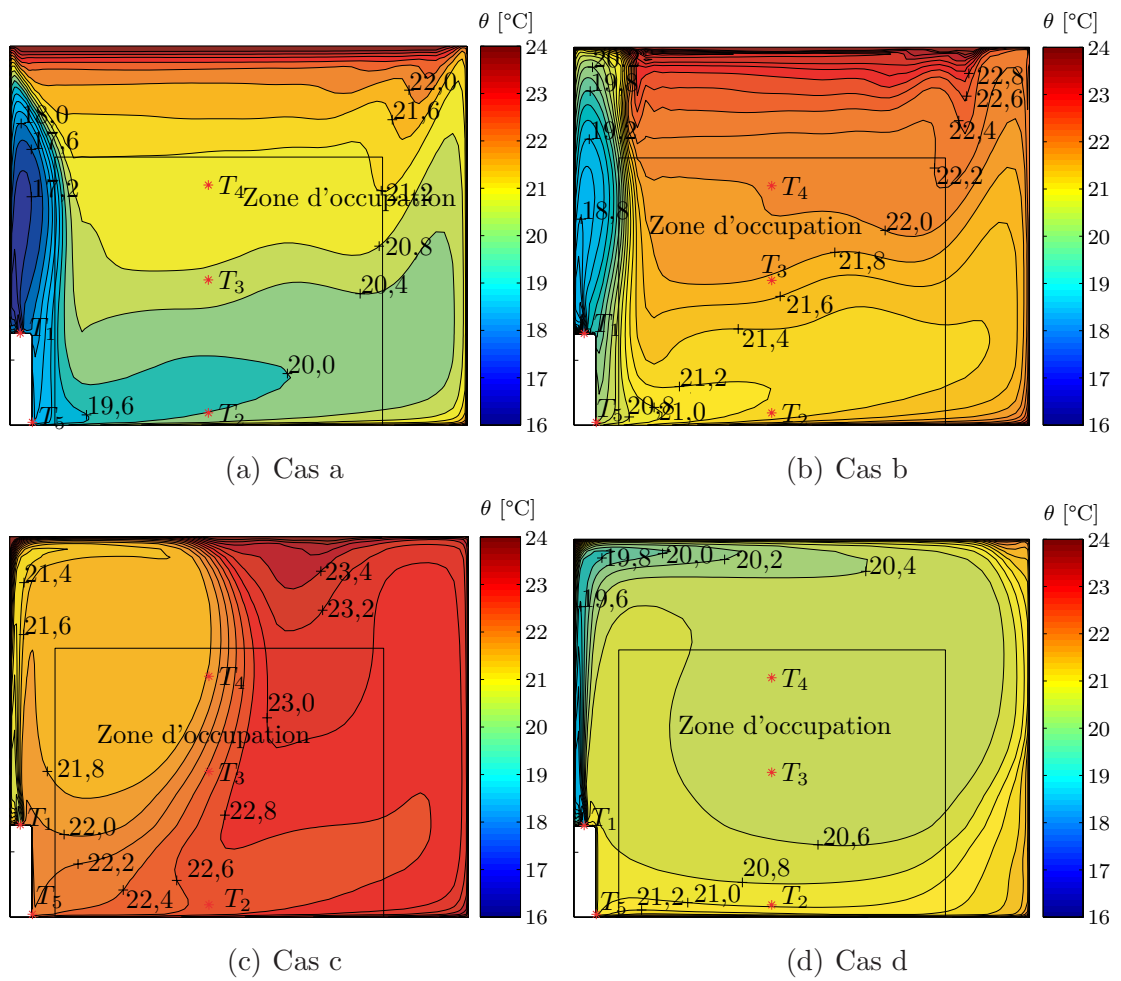


FIG. 4.1 – Températures moyennes

Mode	Valeur propre	Energie cumulée relative [%]
Cas a)		
1	0,2809	83,93
2	0,0439	97,05
3	$0,544 \cdot 10^{-2}$	98,68
4	$0,198 \cdot 10^{-2}$	99,27
5	$0,102 \cdot 10^{-2}$	99,58
6	$0,554 \cdot 10^{-3}$	99,74
7	$0,222 \cdot 10^{-3}$	99,81
8	$0,203 \cdot 10^{-3}$	99,87
Cas b)		
1	4,4437	84,98
2	0,7457	99,27
3	0,0287	99,82
4	$0,61 \cdot 10^{-2}$	99,94
5	$0,22 \cdot 10^{-2}$	99,98
6	$0,747 \cdot 10^{-3}$	99,99
7	$0,262 \cdot 10^{-3}$	100,00
8	$0,834 \cdot 10^{-4}$	100,00
Cas c)		
1	0,7379	72,98
2	0,1367	86,54
3	0,0492	91,42
4	0,0393	95,32
5	0,0128	96,58
6	$0,77 \cdot 10^{-2}$	97,35
7	$0,70 \cdot 10^{-2}$	98,05
8	$0,54 \cdot 10^{-2}$	98,58
Cas d)		
1	32,9710	98,15
2	0,5729	99,86
3	0,0234	99,93
4	$0,83 \cdot 10^{-2}$	99,95
5	$0,81 \cdot 10^{-2}$	99,98
6	$0,45 \cdot 10^{-2}$	99,99
7	$0,11 \cdot 10^{-2}$	99,99
8	$0,707 \cdot 10^{-3}$	100,00

TAB. 4.2 – Valeurs propres et contribution à l'énergie totale des 8 premiers modes

moins de modes pour atteindre un pourcentage d'énergie élevé. A contrario, le cas c) subit une variation d'écoulement rapide. La convergence des données de référence a de plus été difficile à obtenir. Il possède ainsi la répartition des modes la plus étendue. Quant aux cas a) et b), les répartitions de l'énergie en fonction des modes sont assez semblables. Or, leurs écoulements sont similaires d'autant plus que nous nous sommes affranchis des problèmes de convergence au voisinage de la transition avec le cas c), en utilisant des snapshots provenant du MOE.

Examinons maintenant la structure des modes et les coefficients temporels associés aux quatre valeurs propres les plus énergétiques (figures 4.2 à 4.9) :

- les trois premiers coefficients temporels ont le même comportement temporel que la consigne. Ils sont composés de deux signaux opposés situés de part et d'autre du pointillé sur les figures (4.2, 4.4, 4.6 et 4.8),
- le premier coefficient est caractéristique de la réponse d'un système du premier ordre à un échelon et représente le comportement global de l'air du local. Associé à la valeur du premier mode, il peut être comparé à l'amplitude de la variation de température. Par exemple pour le cas a), le coefficient temporel (figure 4.2), varie entre  $-0,13$  et  $0,13$ , et le mode 1 est égal à 2 au voisinage de la bouche de soufflage (figure 4.3). Leur produit donne une variation de  $\pm 0,26$  °C autour de la température moyenne, à comparer à la variation de la température de l'air soufflé de  $\pm 0,30$  °C. De la même façon, il est possible d'obtenir la variation de la température au centre du local, proche de  $\pm 0,10$  °C,
- le deuxième coefficient temporel se distingue du premier par le fait qu'il intervient surtout dans les premiers instants de la variation puisque sa valeur finale est faible. Son produit avec le deuxième mode a donc une faible influence sur la valeur de la température atteinte. Par contre, il apporte une correction importante sur le début du régime transitoire. De plus, les valeurs du mode 2 distinguent par leur signe les points dans le jet et hors du jet. Les premiers voient ainsi leur régime transitoire accéléré par rapport au comportement global donné par le mode 1, alors que les seconds voient leur régime transitoire ralenti. Physiquement, cette correction du régime transitoire peut être associée à l'existence d'un temps de transport au sein du local,
- le troisième mode et son coefficient temporel apportent une correction du régime transitoire similaire au deuxième, mais avec une amplitude moindre,
- le quatrième mode n'a pas un comportement aussi systématique pour tous les cas. Néanmoins, pour les cas a) et d), son coefficient temporel n'est plus constitué de deux signaux opposés, et met en valeur des zones sièges de phénomènes locaux (recirculations dans les coins) peu affectés par les changements de consigne.

Alors que ces remarques sont valables pour les cas a), b) et d), elles doivent être pondérées pour le cas c), notamment au niveau de la deuxième partie des coefficients temporels qui sont nettement fluctuants. Ce comportement est le reflet de



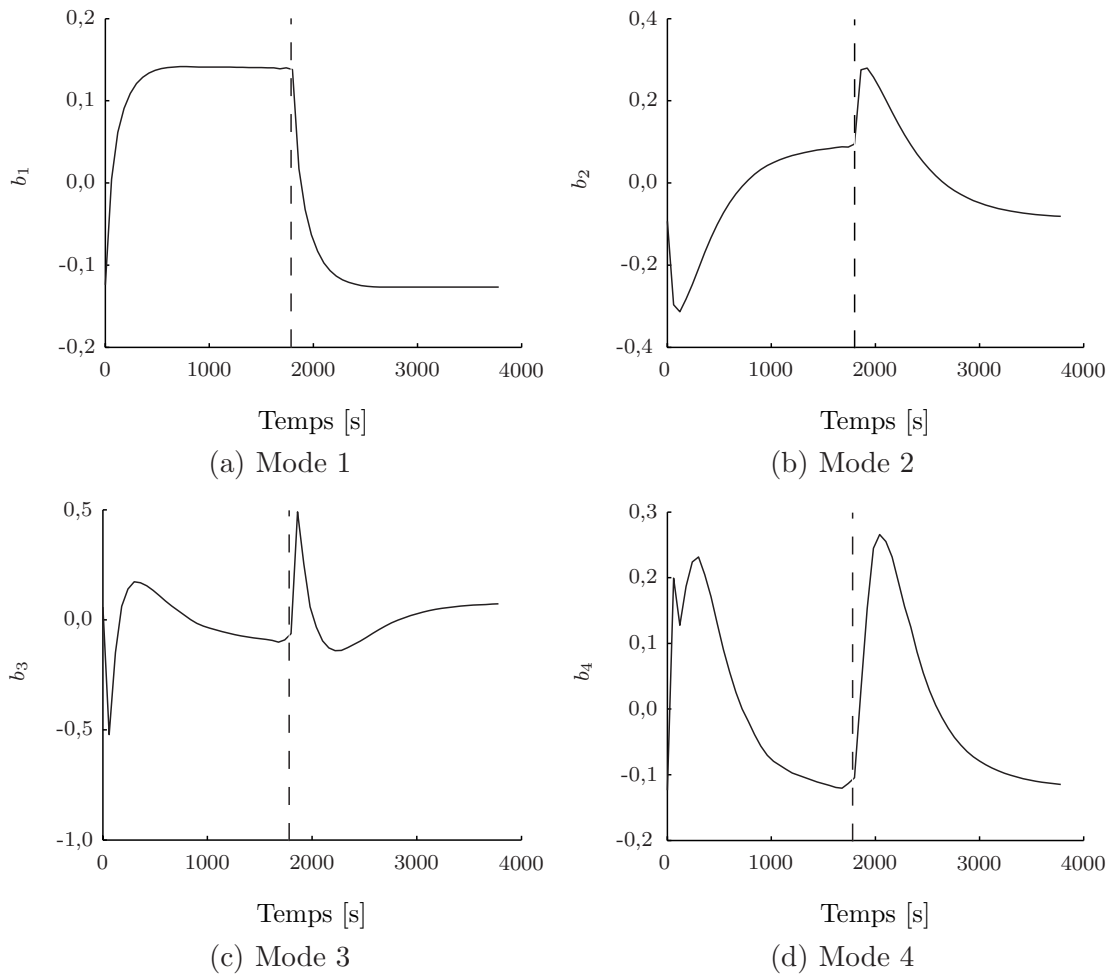


FIG. 4.2 – cas a : coefficients temporels des 4 premiers modes

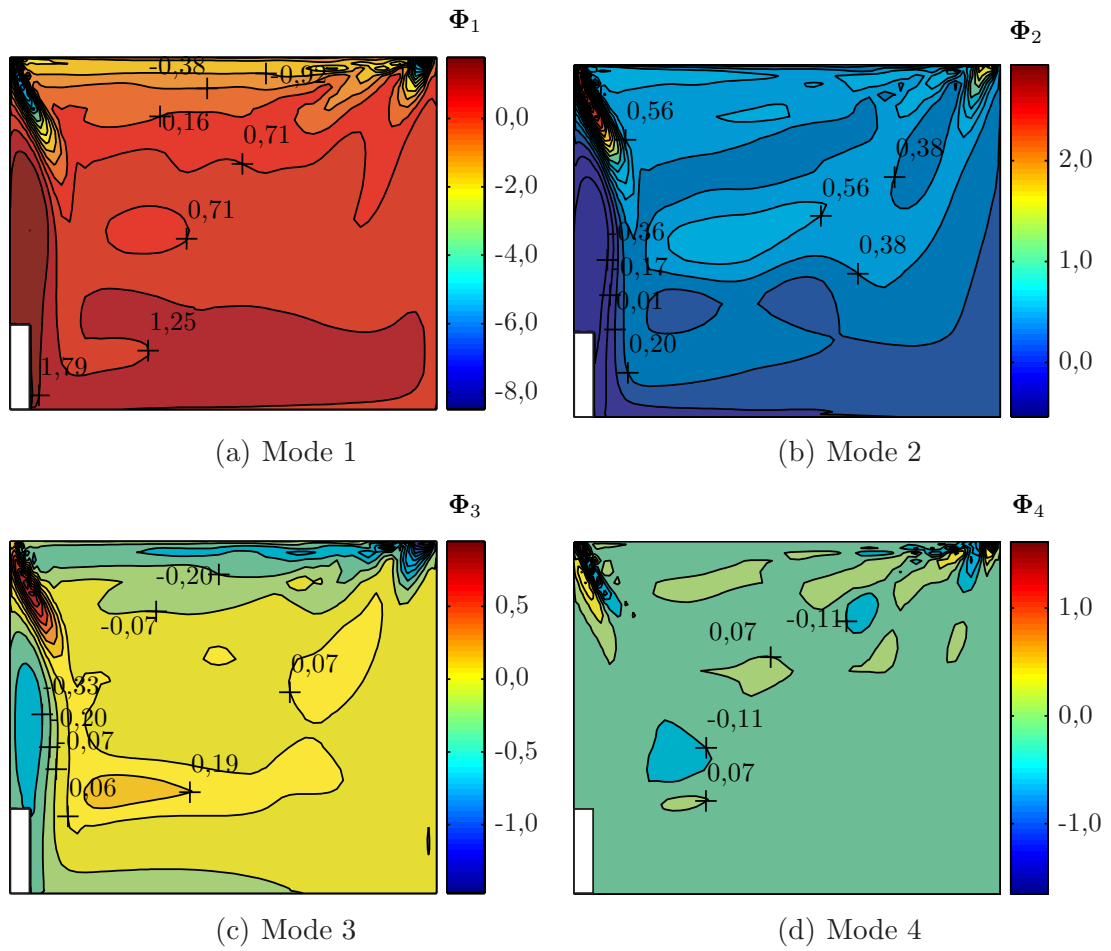


FIG. 4.3 – cas a : 4 modes les plus énergétiques

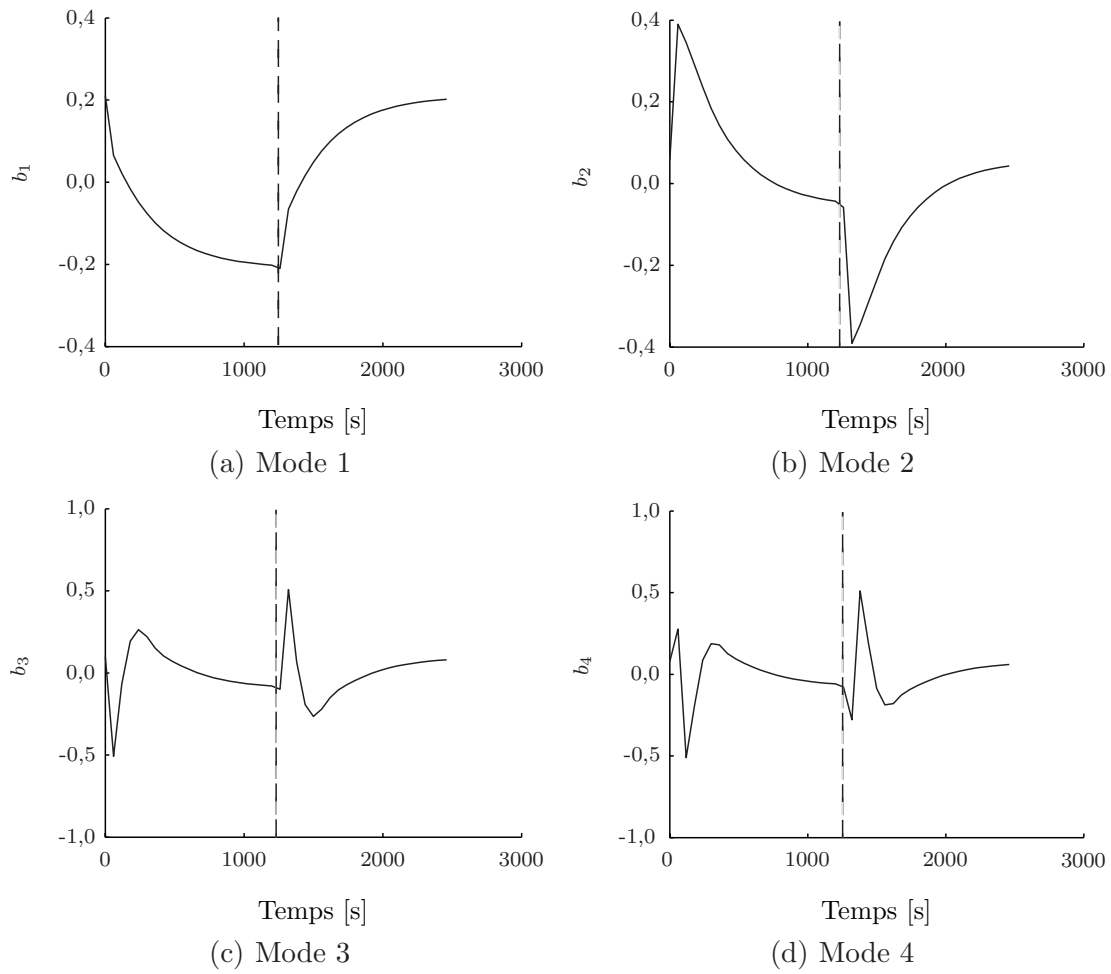


FIG. 4.4 – cas b : coefficients temporels des 4 premiers modes

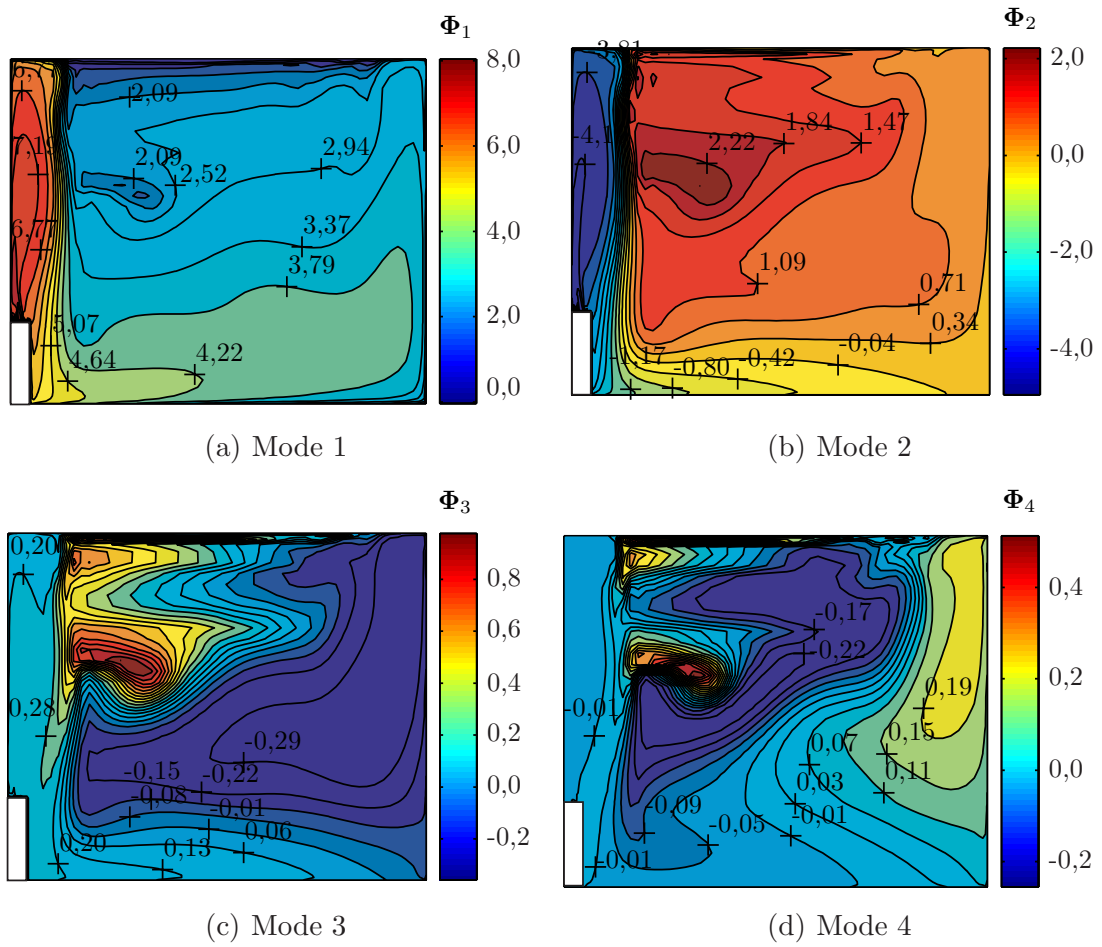


FIG. 4.5 – cas b : 4 modes les plus énergétiques

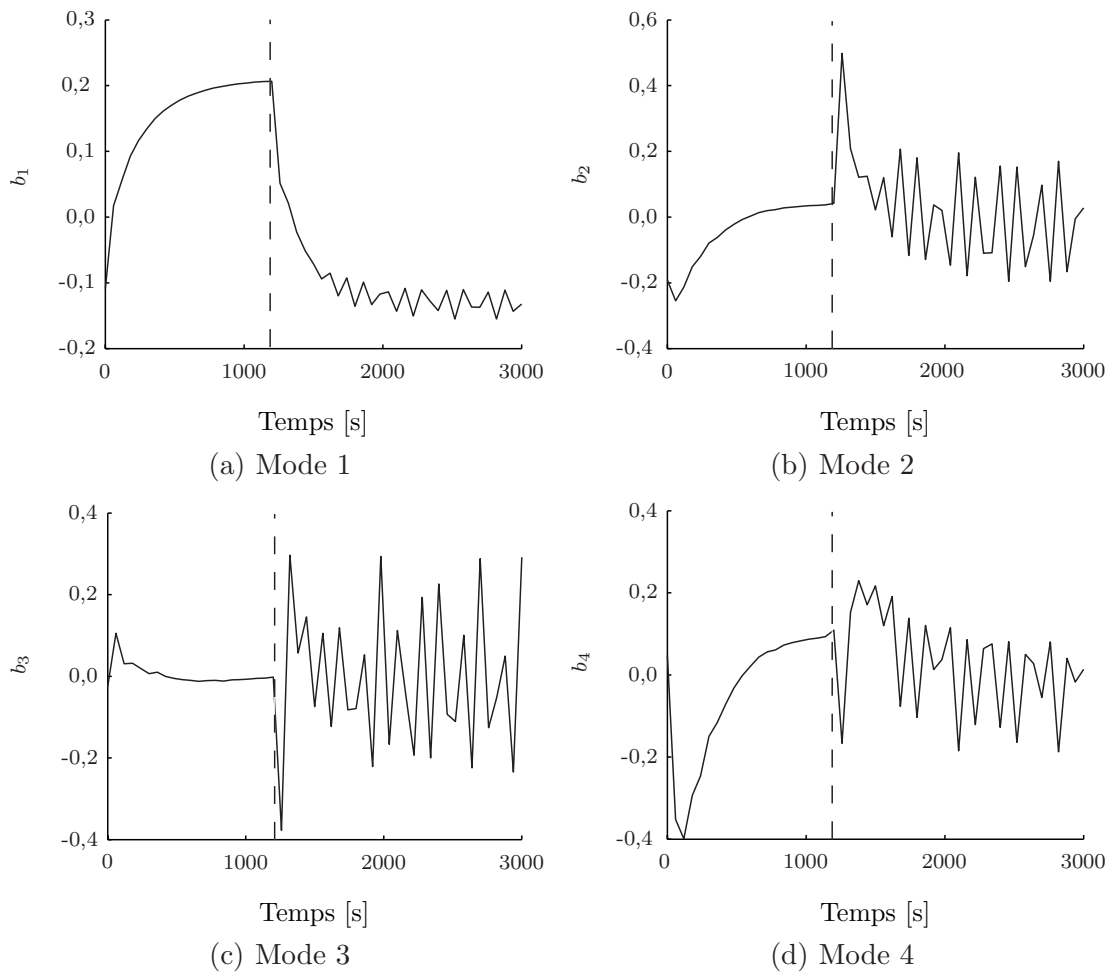


FIG. 4.6 – cas c : coefficients temporels des 4 premiers modes

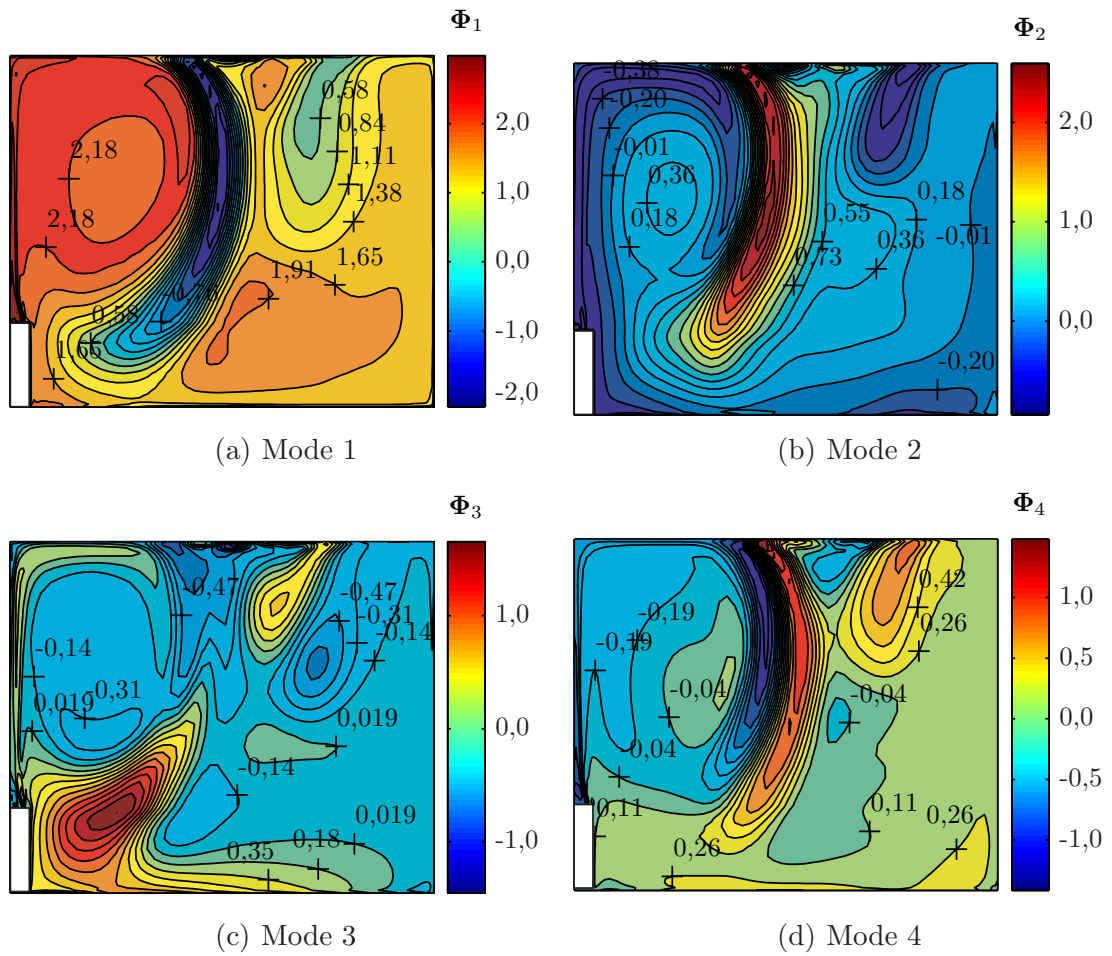


FIG. 4.7 – cas c : 4 modes les plus énergétiques

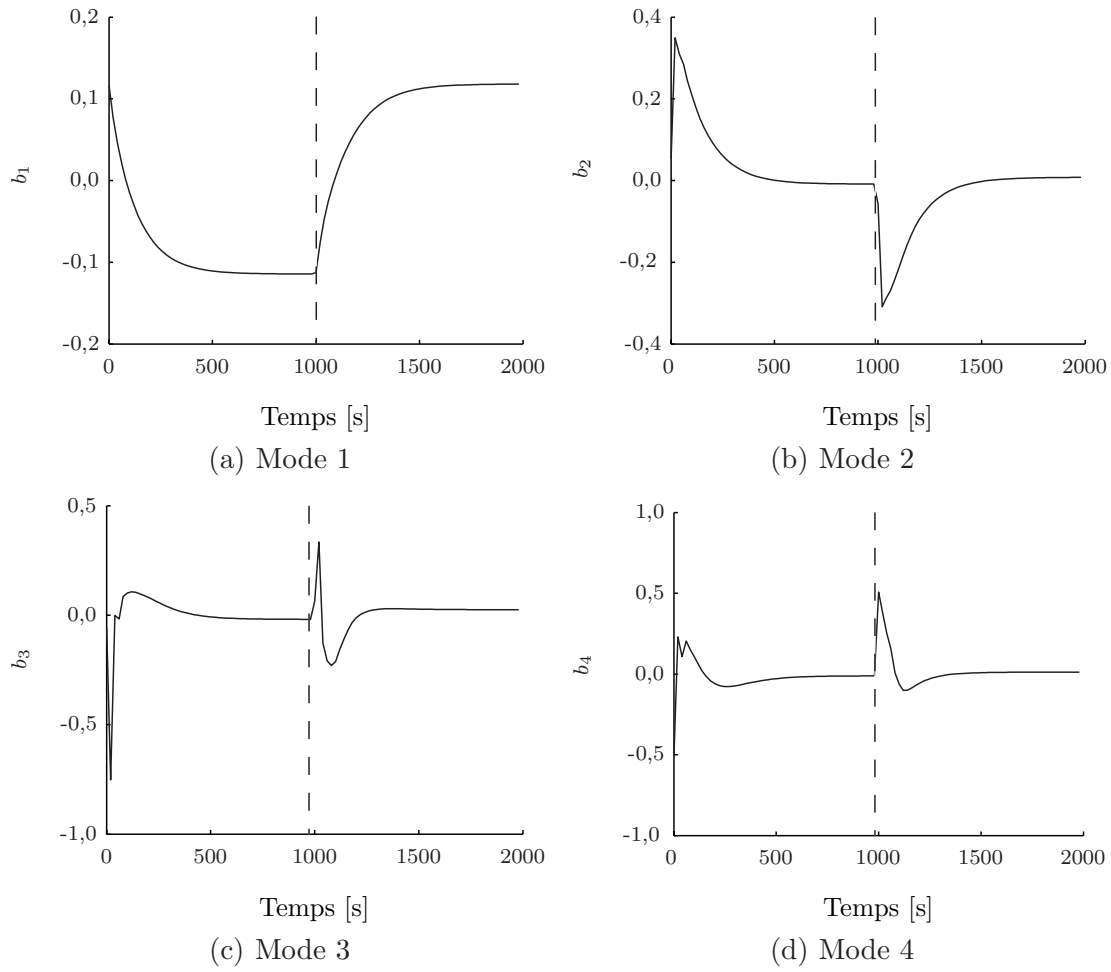


FIG. 4.8 – cas d : coefficients temporels des 4 premiers modes

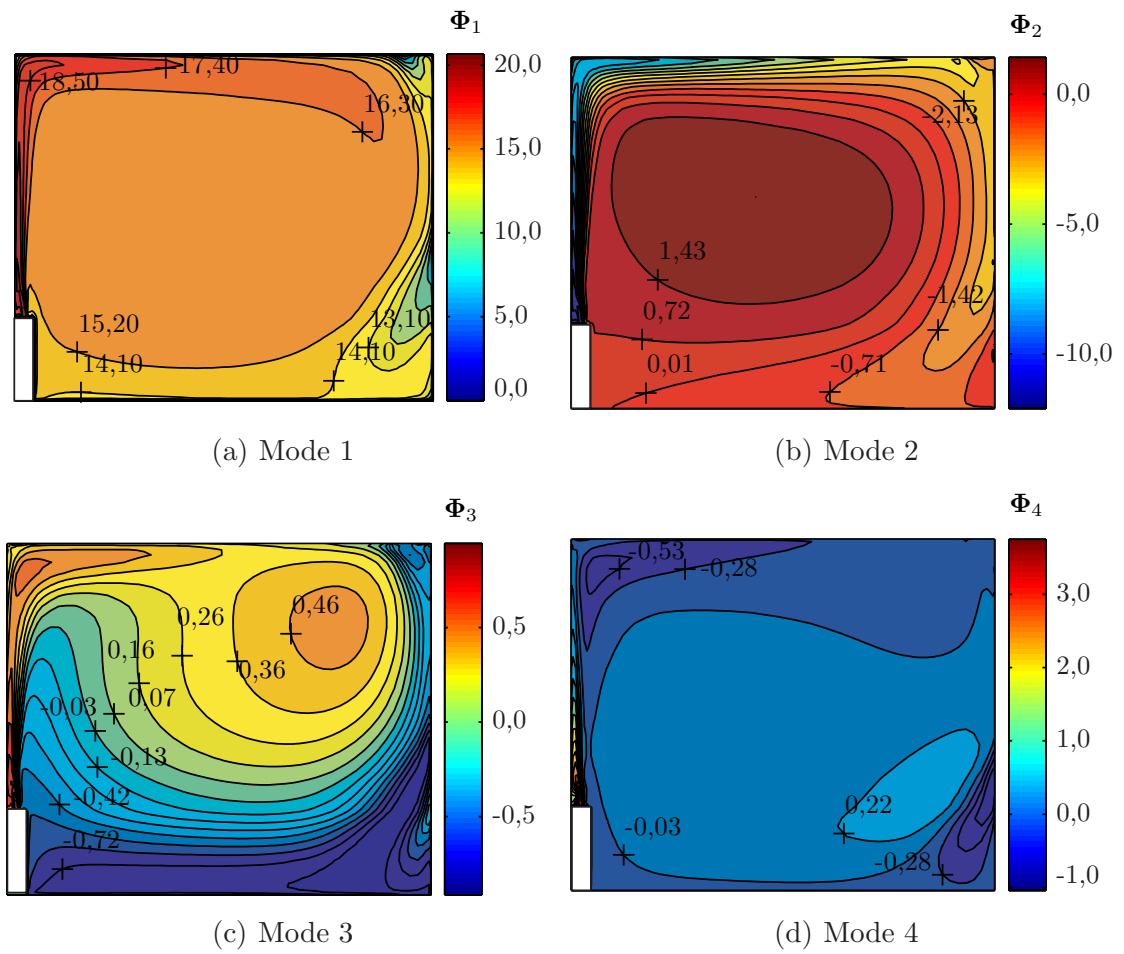


FIG. 4.9 – cas d : 4 modes les plus énergétiques



la mauvaise convergence des données de référence au voisinage de la transition avec le cas b). Toutefois, le coefficient temporel du premier mode a un régime transitoire relativement stable en comparaison des trois autres. Or, il permet de capturer un peu moins de 74 % de l'énergie. Son comportement est également caractéristique d'un premier ordre.

### 4.1.3 Base de projection minimale

Les modes et coefficients obtenus pour les 4 cas montrent que leur influence diminue très rapidement en fonction de leur indice. Ainsi, seules quelques valeurs propres sont nécessaires pour capturer une grande quantité d'énergie. Conformément à la définition de la dimension de Karhunen-Loève  $d_{KL}$  (§2.2.2.2), l'indice  $M$  de troncature de la base est choisi tel que :

$$E_M = \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} > 0,90 \text{ et } \frac{\lambda_M}{\lambda_1} < 10^{-2} \quad (4.2)$$

Ce critère permet non seulement de tenir compte de l'énergie cumulative, mais aussi de l'énergie capturée par chaque mode, et donc de ne pas négliger un mode contenant une part faible mais non négligeable d'énergie. Il vient ainsi :

- cas a :  $M = 4$
- cas b :  $M = 3$
- cas c :  $M = 7$
- cas d :  $M = 3$

A part le cas c) pour lequel ce critère assure la capture de 98 % de l'énergie, l'indice de troncature correspond pour les trois autres cas à une énergie cumulée supérieure à 99 %, ce qui correspond au critère utilisé par Basman et Khalifa pour le calcul de la distribution de température dans un local.

Afin d'obtenir des bases de projection de dimension identique, nous choisissons de conserver le même nombre de modes pour tous les cas, il vient donc  $M = 7$ .

La distribution de température des snapshots a maintenant pour expression réduite :

$$\forall k \in [1, N], \Theta(\mathbf{x}, t_k) = \Theta_{moy}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^M b_i(t_k) \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

## 4.2 Construction des modèles d'ordre réduit

### 4.2.1 Projection des modèles d'ordre élevé

Pour décrire le comportement thermique de l'air du local, nous disposons :

1. du modèle d'ordre élevé donné par le système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{\Theta}(t) = \mathbf{A}\Theta(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \Theta_{\text{obs}}(t) = \mathbf{C}\Theta(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}, \quad (4.4)$$

2. des snapshots dont l'expression réduite est donnée par l'équation (4.3).

Les distributions de température contenues dans les snapshots doivent vérifier le modèle d'ordre élevé. En introduisant l'expression (4.3) dans la première équation du système (4.4), il vient :

$$\sum_{i=1}^M \dot{b}_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \mathbf{A}b_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}) + \mathbf{A}\Theta_{\text{moy}}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.5)$$

Or, les modes  $(\Phi_i)_{i \in [1, M]}$  forment une base orthogonale, le produit scalaire de deux vecteurs de la base s'écrit donc :

$$\forall (i, j) \in [1, M]^2, (\Phi_i, \Phi_j) = \|\Phi_i\|^2 \delta_{ij} \quad (4.6)$$

où :

- $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker,
- $\|\Phi_i\|$  la norme de  $\Phi_i$ .

La projection de l'expression (4.7) sur tout vecteur  $\Phi_j$  donne :

$$\forall j \in [1, M], \sum_{i=1}^M (\Phi_j, \dot{b}_i(t) \Phi_i) = \sum_{i=1}^M (\Phi_j, \mathbf{A}b_i(t) \Phi_i) + (\Phi_j, \mathbf{A}\Theta_{\text{moy}}) + (\Phi_j, \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \quad (4.7)$$

$$\text{Soit } \forall j \in [1, M], \sum_{i=1}^M (\Phi_j, \Phi_i) \dot{b}_i(t) = \sum_{i=1}^M (\Phi_j, \mathbf{A}\Phi_i) b_i(t) + (\Phi_j, \mathbf{A}\Theta_{\text{moy}}) + (\Phi_j, \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \quad (4.8)$$

Du fait de l'orthogonalité des modes, il vient :

$$\forall j \in [1, M], (\Phi_j, \Phi_j) \dot{b}_j(t) = \sum_{i=1}^M (\Phi_j, \mathbf{A}\Phi_i) b_i(t) + (\Phi_j, \mathbf{A}\Theta_{\text{moy}}) + (\Phi_j, \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \quad (4.9)$$

$$\text{Soit } \forall j \in [1, M], \dot{b}_j(t) = \sum_{i=1}^M \frac{(\Phi_j, \mathbf{A}\Phi_i)}{\|\Phi_j\|^2} b_i(t) + \frac{(\Phi_j, \mathbf{A}\Theta_{\text{moy}})}{\|\Phi_j\|^2} + \frac{(\Phi_j, \mathbf{B}\mathbf{u}(t))}{\|\Phi_j\|^2} \quad (4.10)$$

Ce système d'équations s'écrit sous forme matricielle :

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{b}(t) + \mathbf{E}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \quad (4.11)$$

avec :

$$\begin{aligned} - \mathbf{A}_{r_{ij}} &= \frac{(\Phi_i, \mathbf{A} \Phi_j)}{\|\Phi_i\|^2}, \\ - \mathbf{E}_{r_i} &= \frac{(\Phi_i, \mathbf{A} \Theta_{moy})}{\|\Phi_i\|^2}, \\ - \mathbf{B}_{r_{ij}} &= \frac{(\Phi_i, \mathbf{B}(:,j))}{\|\Phi_i\|^2} \text{ où } \mathbf{B}(:,j) \text{ est la } j^{\text{ième}} \text{ colonne de la matrice } \mathbf{B}. \end{aligned}$$

De plus, l'équation (4.3) s'écrit matriciellement :

$$\Theta(t) = \Theta_{moy} + C_r \mathbf{b}(t) \quad (4.12)$$

où  $C_r$  est la matrice d'observation dont les colonnes sont constituées des modes propres  $\Phi_i$  dans le cas d'une observation totale.

Si l'ensemble formé par les snapshots constitue une bonne représentation de la dynamique de l'air du local en réponse à une variation du vecteur d'entrée  $u(t)$ , alors le système dynamique constitué des équations (4.11) et (4.12) peut être étendu à toutes les valeurs possibles de  $u(t)$  pour obtenir des coefficients temporels  $\mathbf{a}(t)$  étendus :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_r \\ \Theta_{\text{obs}}(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{a}(t) + \Theta_{moy} \end{cases}, \quad (4.13)$$

Nous voyons ici que le choix de la consigne lors du calcul des snapshots est primordial pour la construction d'un modèle réduit valable pour des conditions différentes de celles utilisées pour les snapshots.

Pour se rapprocher de la forme canonique d'un système d'état, le changement de variable  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{E}_r$  conduit au modèle d'ordre réduit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \Theta_{\text{obs}}(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{u}(t) + \Theta_{\text{moy}_r} \end{cases}, \quad (4.14)$$

Ce nouveau système d'état constitue un modèle d'ordre réduit puisque la variable d'état est le vecteur des coefficients temporels dont la dimension correspond au nombre  $M$  de modes conservés, c'est-à-dire 7. Ainsi :

- $\mathbf{a}(t)$  : vecteur d'état de dimension  $M$ ,
- $\mathbf{A}_r$  : matrice d'état de dimension  $M \times M$ ,
- $\mathbf{B}_r$  : matrice d'entrée de dimension  $M \times n_{CL}$ , où  $n_{CL}$  est le nombre de conditions aux limites en températures, c'est-à-dire 5 (températures de surface des quatre parois du local et température de l'air soufflé),
- $u(t)$  : vecteur des entrées de dimension  $n_{CL}$ ,

- $\mathbf{C}_r$  : matrice d'observation de dimension  $n_{obs} \times M$ , où  $n_{obs}$  est le nombre de températures observées. Dans le cas d'une observation complète,  $n_{obs} = 2992$ . Si seule la  $i^{ième}$  température est observée, alors  $n_{obs} = 1$ , et la matrice d'observation n'est composée que de la  $i^{ième}$  ligne de la matrice d'observation complète (équation 4.12),
- $\mathbf{D}_r = 0$  : deuxième matrice d'entrée de dimension  $n_{obs} \times n_{CL}$ ,
- $\Theta_{moy_r} = \Theta_{moy} - \mathbf{C}_r \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{E}_r$  : vecteur de dimension  $n_{obs}$ . Dans le cas d'une observation complète, son expression est donnée par l'équation (4.2.1). Pour une observation incomplète, seuls les éléments de  $\Theta_{moy}$  correspondant aux points observés sont conservés.

### 4.2.2 Correction des modèles d'ordre réduit

L'état de l'art (§2.2.2.2) a mis en évidence qu'il existe une erreur due à la troncature des modes de faible énergie. Pour en tenir compte, nous proposons d'utiliser, comme de nombreux auteurs, le modèle de Heisenberg basé sur l'augmentation de la dissipation en ajoutant une viscosité «tourbillonnaire» à chacune des équations du modèle d'état. Reprenons la première équation du système d'état avant changement de variable, en séparant les termes de diffusion (indice  $d$ ) et de transport (indice  $t$ ) provenant de la discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie (3.13) :

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = (\mathbf{A}_{rt} + \mathbf{A}_{rd})\mathbf{a}(t) + (\mathbf{B}_{rt} + \mathbf{B}_{rd})\mathbf{u}(t) + (\mathbf{E}_{rt} + \mathbf{E}_{rd}) \quad (4.15)$$

Pour tenir compte de l'effet de la troncature des modes de faible énergie sur le  $j^{ième}$  mode, l'ajout d'une viscosité se traduit par l'augmentation de la diffusivité par  $\alpha_j a_{eff}$  :

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{A}_{rt}\mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_{rt}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_{rt} + I_{1+\alpha} [\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_{rd}] \quad (4.16)$$

avec :

$$I_{1+\alpha} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 + \alpha_M \end{pmatrix}$$

Les coefficients de correction  $\alpha_j$  sont calculés par calibration optimale du modèle d'ordre réduit [71]. Ainsi, les contraintes  $\mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha)$  du système sont définies. Elles représentent les équations du système :

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = 0 \quad (4.17)$$

Soit,

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = \dot{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{A}_{rt}\mathbf{a}(t) - \mathbf{B}_{rt}\mathbf{u}(t) - \mathbf{E}_{rt} - I_{1+\alpha} [\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_{rd}] \quad (4.18)$$

L'objectif consiste à approcher au sens des moindres carrés les coefficients temporels  $\mathbf{b}$  des snapshots par les coefficients temporels  $\mathbf{a}$  calculés par la première équation du système (4.13). Ceci revient à minimiser la fonctionnelle objectif suivante :

$$\mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha) = \int_0^T \sum_{j=1}^M (a_j - b_j)^2 dt + \beta^2 \int_0^T \sum_{j=1}^M \alpha_j^2 dt \quad (4.19)$$

Le deuxième terme représente le coût lié à la distance entre la diffusivité effective  $a_{eff}$  et la diffusivité effective corrigée  $(1 + \alpha_j)a_{eff}$ . Il permet d'éviter que le problème d'optimisation soit mal posé, avec une fonctionnelle objectif non concave.  $\beta$  est un coefficient de pondération entre les deux termes de la fonctionnelle. Plus  $\beta$  est petit, plus la plage de contrôle pour minimiser le premier terme de la fonctionnelle est grande.

C'est un problème d'optimisation avec contraintes dont l'objectif consiste à minimiser la fonctionnelle objectif sous la contrainte du système :

$$\begin{cases} \min_{\alpha \in \mathbb{R}^M} \mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha) \\ \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Un tel problème de minimisation n'est pas simple à résoudre directement. Il est plus judicieux de créer un problème équivalent en introduisant la fonctionnelle Lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}}) = \mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha) - \langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle \quad (4.21)$$

où  $\tilde{\mathbf{a}}$  est un multiplicateur de Lagrange. Le produit scalaire est cette fois-ci défini par :

$$\langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle = \sum_{j=1}^M \int_0^T \tilde{\mathbf{a}}_j(t) \mathcal{N}_j(\mathbf{a}, \alpha) dt \quad (4.22)$$

Le problème consiste alors à déterminer le contrôle optimal  $\alpha$ , l'état  $\mathbf{a}$  et le multiplicateur de Lagrange  $\tilde{\mathbf{a}}$  tels que la fonctionnelle Lagrangienne  $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}})$  soit stationnaire :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \delta \tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad (4.23)$$

Les variables  $\mathbf{a}$ ,  $\alpha$  et  $\tilde{\mathbf{a}}$  étant indépendantes, la solution optimale est donc obtenue en annulant les premières variations de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\mathbf{a}$ ,  $\alpha$  et  $\tilde{\mathbf{a}}$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0 ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \delta \tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad (4.24)$$

Les calculs, décrits dans l'annexe (C), conduisent à un système de trois équations couplées qui peut être résolu avec un méthode itérative :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}} &= (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \mathbf{a} + (\mathbf{B}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{B}_{rd}) \mathbf{u} + \mathbf{E}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{E}_{rd} \\ -\dot{\tilde{\mathbf{a}}} &= {}^t (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} + 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) ; \quad \tilde{\mathbf{a}}(T) = 0 \\ \alpha &= -\frac{1}{2\beta^2} \int_0^T {}^t (\mathbf{A}_{rd} \mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd} \mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} dt \end{cases} \quad (4.25)$$

Les figures (4.10) à (4.13) comparent les coefficients temporels obtenus avec les modèles d'ordre réduit corrigé et non corrigé à ceux obtenus par projection directe des snapshots sur la base POD. Remarquons tout de suite que pour le cas b), les coefficients sont très proches. La correction du MOR n'apporte d'ailleurs pas une amélioration très nette. Pour les trois autres cas, les snapshots sont obtenus non pas à partir du MOE mais à partir de simulations CFD. Pour les cas a) et d), l'allure des deux coefficients temporels les plus énergétiques est assez bien retrouvée, pas pour les suivants. Pour le cas a), la correction est absolument nécessaire pour améliorer la précision du MOR. Mais il faut souligner que la méthode de calibration n'est pas très simple à mettre en oeuvre et nécessiterait des méthodes de résolution itérative performantes pour améliorer son efficacité. Pour le cas d), la correction a un effet paradoxal puisqu'elle diminue la précision du modèle sur les deux premiers coefficients, ce qui met en relief un inconvénient de la méthode de correction choisie. En effet, la minimisation de la fonctionnelle objectif (4.19) conduit à la minimisation de l'écart global entre les coefficients temporels issus de la projection des snapshots et ceux calculés avec le MOR. Ainsi, il est possible que certains coefficients soient améliorés alors que d'autres sont dégradés tout en minimisant la fonctionnelle. C'est ce qui arrive au cas d), d'autant plus que sept modes sont conservés alors que trois suffiraient. En conclusion, nous décidons de ne pas corriger le MOR du cas d). Il faudra vérifier que la précision du MOR est bien suffisante. Pour le cas c), il faut souligner que la correction a été peu perturbée par la fluctuation de la deuxième partie des coefficients temporels.

Enfin, cette méthode de calibration permet non seulement de corriger les erreurs de troncature mais aussi de tenir compte de l'ensemble des erreurs de modélisation. Cette remarque prend tout son sens pour expliquer les difficultés rencontrées pour corriger correctement les cas a), c) et d). Contrairement au cas b), la calibration tenait aussi compte de l'erreur commise par le MOE à cause de l'hypothèse d'un champ de vitesse fixe.

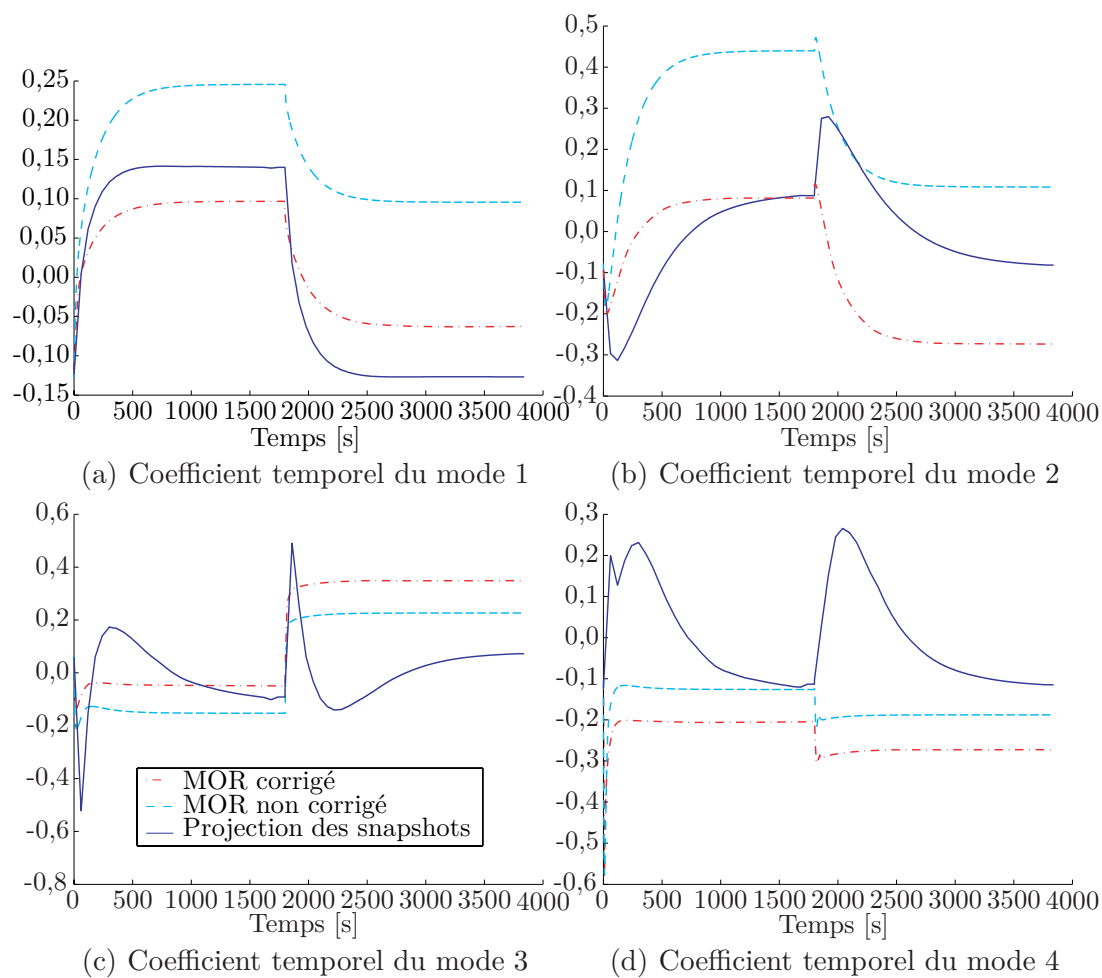


FIG. 4.10 – Cas a : Correction des coefficients temporels des 4 modes les plus énergétiques, calculés par le MOR non corrigé, le MOR corrigé et par projection directe des snapshots

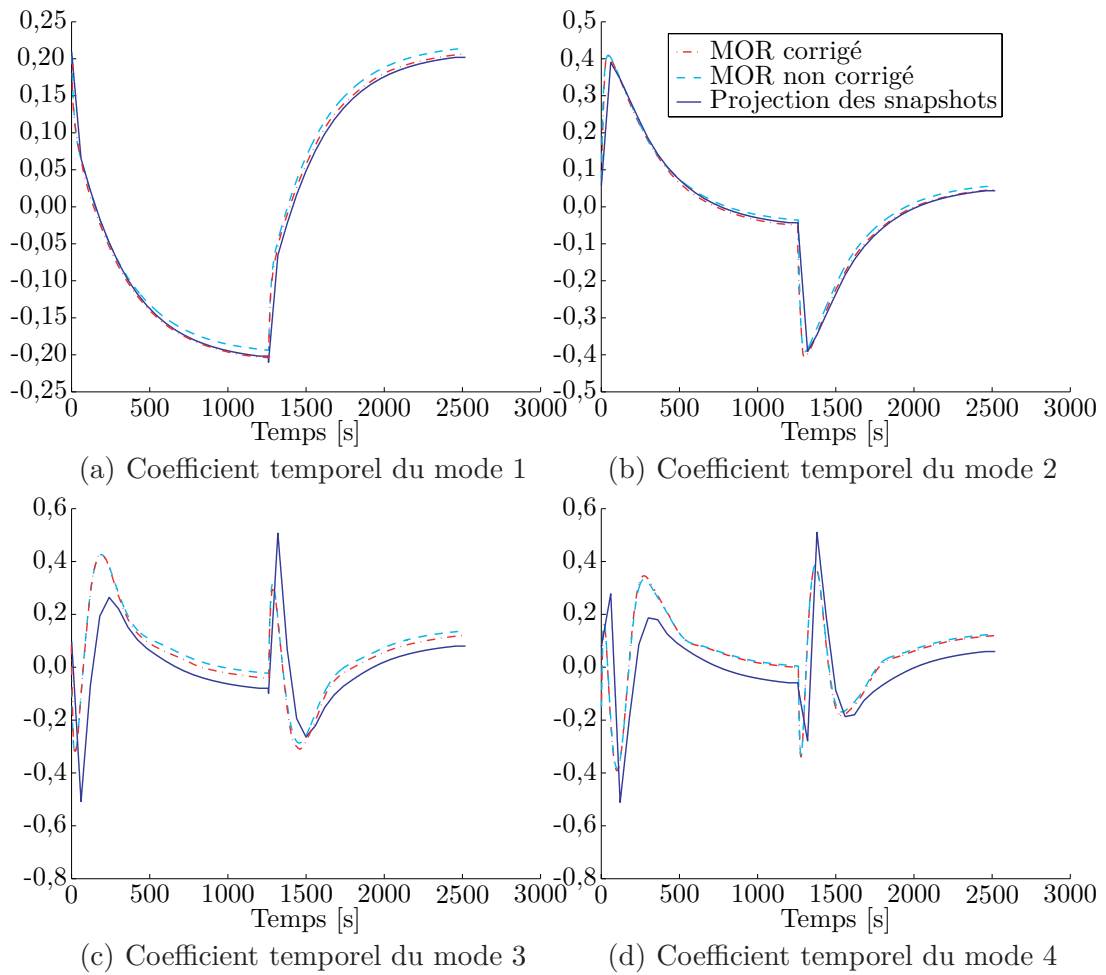


FIG. 4.11 – Cas b : Correction des coefficients temporels des 4 modes les plus énergétiques, calculés par le MOR non corrigé, le MOR corrigé et par projection directe des snapshots



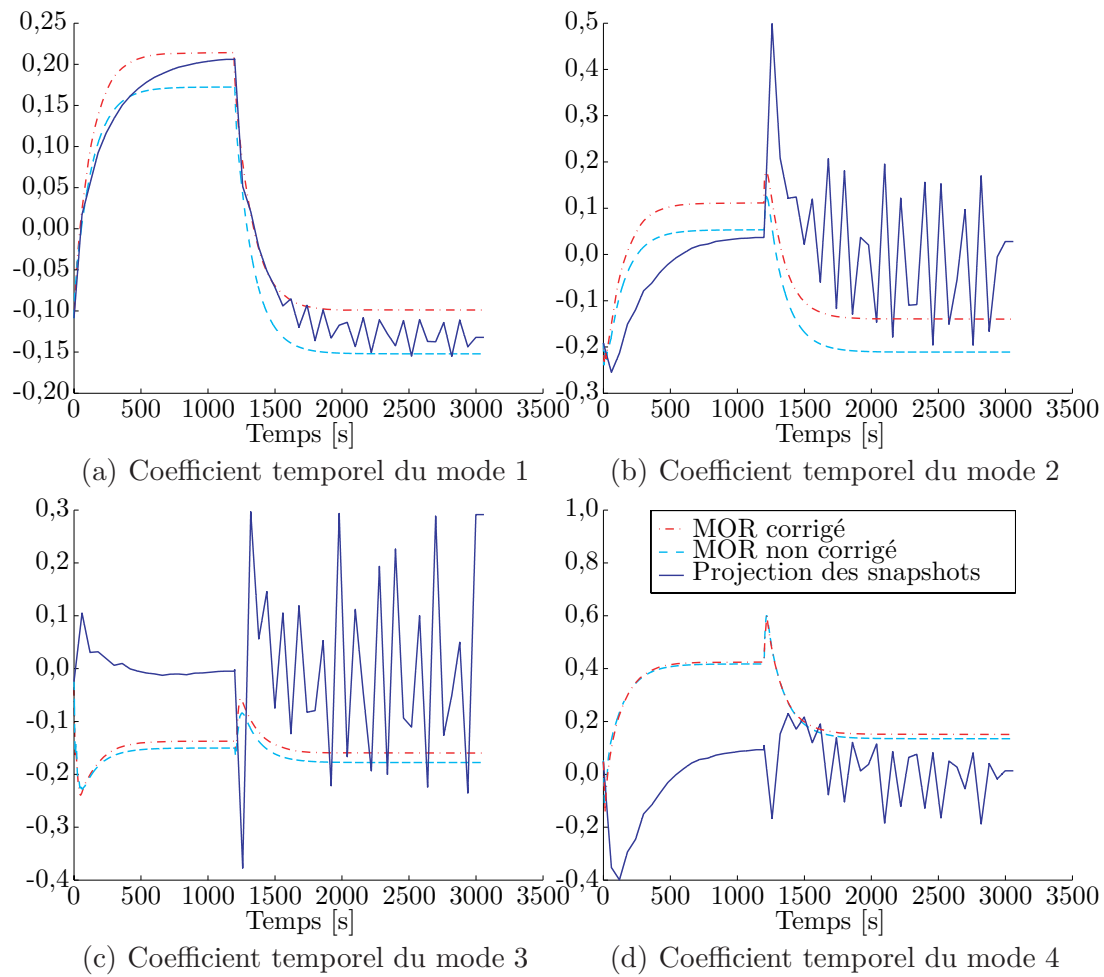


FIG. 4.12 – Cas c : Correction des coefficients temporels des 4 modes les plus énergétiques, calculés par le MOR non corrigé, le MOR corrigé et par projection directe des snapshots

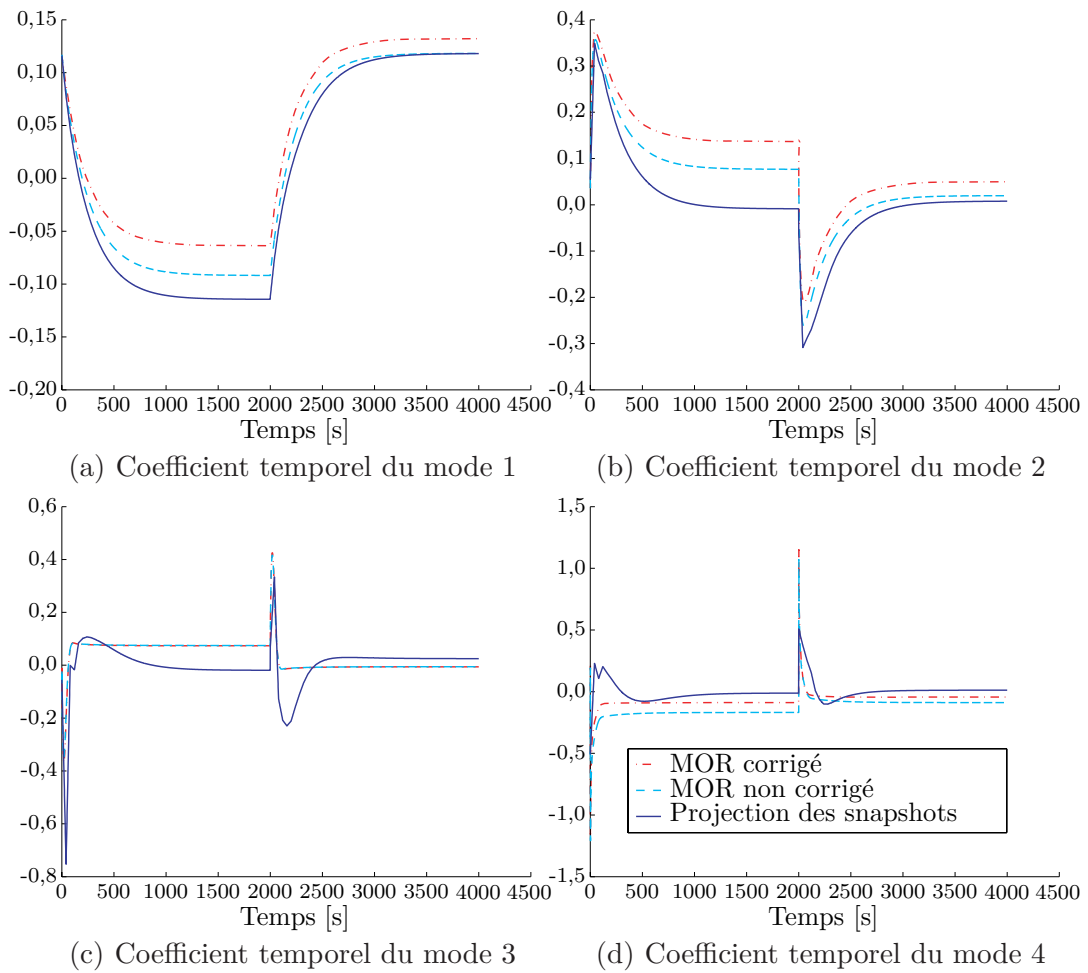


FIG. 4.13 – Cas d : Correction des coefficients temporels des 4 modes les plus énergétiques, calculés par le MOR non corrigé, le MOR corrigé et par projection directe des snapshots

### 4.2.3 Résultats des modèles d'ordre réduit

Examinons maintenant les résultats des modèles d'ordre réduit. Les tableaux (4.3), (4.5), (4.7) et (4.9) permettent de comparer les écarts quadratiques moyens en régime permanent des modèles d'ordre élevé, des modèles d'ordre réduit non corrigés (MOR nc) et des modèles d'ordre réduit corrigés (MOR). De plus, les figures (4.14), (4.16), (4.18) et (4.19) donnent les différences de températures entre d'une part le MOE et les données de référence et d'autre part le MOR corrigé (non corrigé pour le cas d) et les données de référence pour des conditions de soufflage représentatives de chaque cas. Pour le régime transitoire, les tableaux (4.4), (4.6), (4.8) et (4.10) contiennent les résultats des trois familles de modèles pour des échelons du nombre d'Archimède au soufflage. Pour les cas a) et b), ces tableaux sont complétés par les figures (4.15) et (4.17) qui illustrent l'évolution temporelle de la température des quatre points étudiés pour un échelon représentatif des cas.

Avec la réduction du modèle, une dégradation des résultats est attendue puisque la création de la base de projection passe par une diminution de l'information (mesurée par l'énergie) lors de la troncature. Pourtant, les résultats mettent en évidence que cette dégradation n'est pas systématique. Commençons par l'examen du cas b) pour lequel les snapshots ont été extraits des résultats du MOE. La troncature à l'ordre 7 de la base a permis de conserver la totalité de l'énergie. Les tableaux (4.5) et (4.6), ainsi que les figures (4.16) et (4.17) montrent que le MOR corrigé est extrêmement proche du MOE. Concernant la correction du MOR, son effet est faible sur les résultats comme le laissait penser la comparaison des coefficients temporels des modèles corrigé et non corrigé.

Pour les trois autres cas, les conclusions sont différentes. Rappelons tout d'abord que la principale différence avec le cas b) réside dans le fait que les snapshots sont extraits des simulations CFD. Pour les cas a) et c), les résultats en régime permanent (tableaux 4.3 et 4.7) mettent en évidence une nette amélioration de l'écart quadratique moyen dans tout le local passant par exemple de 0,37 °C à 0,18 °C pour un air soufflé à  $Ar = 0,215$  (cas a), ou encore de 0,36 °C à 0,16 °C pour un air soufflé à  $Ar = 0,105$  (cas c). De plus, les écarts quadratiques moyens ont également diminué dans la zone d'occupation et à la reprise pour certaines conditions d'air soufflé. En particulier pour un air soufflé à  $Ar = 0,105$  (cas c), la figure (4.18) met en évidence que le MOR est plus précis au niveau du jet d'air. L'amélioration de la prévision du jet peut ainsi expliquer la diminution de l'écart dans tout le local. Mais pourquoi la projection du MOE sur la base POD améliore-t-elle la précision du modèle au niveau du jet ? La réponse réside dans la nature même des snapshots qui, extraits des simulations CFD, contiennent des informations sur la variation du champ de vitesse, contrairement au MOE qui est basé sur l'hypothèse d'un champ

de vitesse fixe. Concernant le régime transitoire, l'amélioration de l'écart est plus aléatoire. Par exemple, dans le cas a), la réponse à l'échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,215 à 0,195 (tableau 4.4 et figure 4.15), donne un écart légèrement diminué de 0,09 °C à 0,05 °C pour le point  $T_3$  et plus nettement dégradé à la reprise (point  $T_5$ ) de 0,03 °C à 0,16 °C. Ce phénomène se répète dans le cas c) avec par exemple pour la réponse à l'échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,105 à 0,076 (tableau 4.8) une diminution de l'écart de 0,15 °C à 0,05 °C pour le point  $T_2$  et une augmentation de 0,11 °C à 0,23 °C pour le point  $T_3$ . Il est difficile de l'expliquer. Notons tout de même que le MOR est construit à partir de deux approximations du champ thermo-aéraulique, le MOE et la base POD construite à partir des snapshots issus des simulations CFD. Autant le cas b) semble montrer que lorsque les snapshots sont issus du MOE alors la projection de celui-ci donne des résultats très proches, autant lorsque le MOE et les snapshots sont indépendants, les résultats sont assez hétérogènes. Néanmoins, même dans ce deuxième cas, les résultats restent satisfaisants et les valeurs les plus importantes de l'écart quadratique moyen sont, en régime permanent, de 0,20 °C pour l'ensemble du local et un nombre d'Archimède au soufflage de 0,129 (tableau 4.6) et, en régime transitoire, de 0,23 °C pour le point  $T_3$  et un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,105 à 0,076 (tableau 4.8). Nous avons volontairement écarté la valeur de 0,66 °C obtenu pour tout le local et un nombre d'Archimède au soufflage de 0,195 car elle reste fidèle à la valeur, déjà importante, obtenue par le MOE. Concernant la correction du MOR, les résultats du MOR corrigé sont dans l'ensemble meilleurs. Le cas d) semble lui aussi satisfaire aux remarques précédentes. Toutefois, il est intéressant de noter que c'est le cas pour lequel le plus de modes superflus sont conservés. En effet, alors que seuls trois modes suffiraient largement à lui faire vérifier le critère de troncature (tableau 4.2), sept modes sont conservés. Les quatre modes les moins énergétiques contiennent seulement 0,04% de l'énergie. La conservation de ces modes augmente la taille du MOR et donc sa sensibilité aux erreurs numériques de résolution. Ses résultats (tableaux 4.9 et 4.10) sont néanmoins très satisfaisants sauf pour le régime permanent à  $Ar = 0,069$  et le régime instationnaire pour un échelon de  $Ar = 0,081$  à  $Ar = 0,069$  où les écarts quadratiques moyens peuvent atteindre 0,34 °C. Néanmoins, il faut remarquer que les écarts ont des valeurs homogènes avoisinant 0,30 °C.

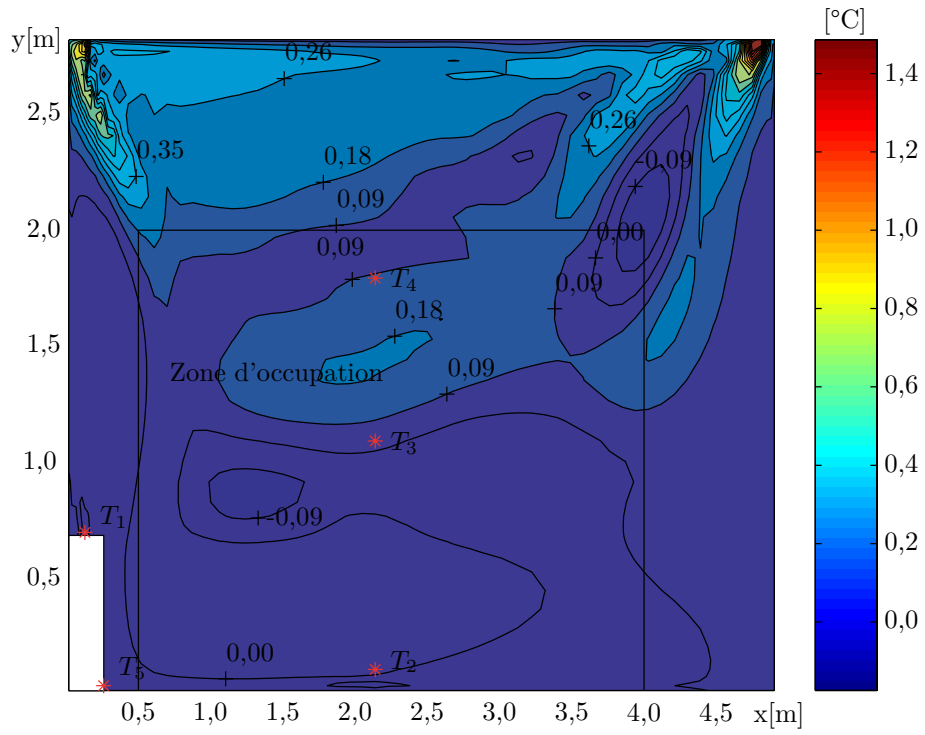
Enfin, ces résultats montrent que les MOR sont capables d'obtenir des résultats satisfaisants pour des échelons différents de ceux utilisés lors de la génération des snapshots, ce qui permet d'étendre leur validité.

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
		local	zone d'occupation	reprise
0,215	MOE	0,37	0,09	0,10
	MOR nc	0,24	0,25	0,26
	MOR	0,18	0,07	0,02
0,195	MOE	0,31	0,08	0,06
	MOR nc	0,14	0,14	0,07
	MOR	0,12	0,12	0,15

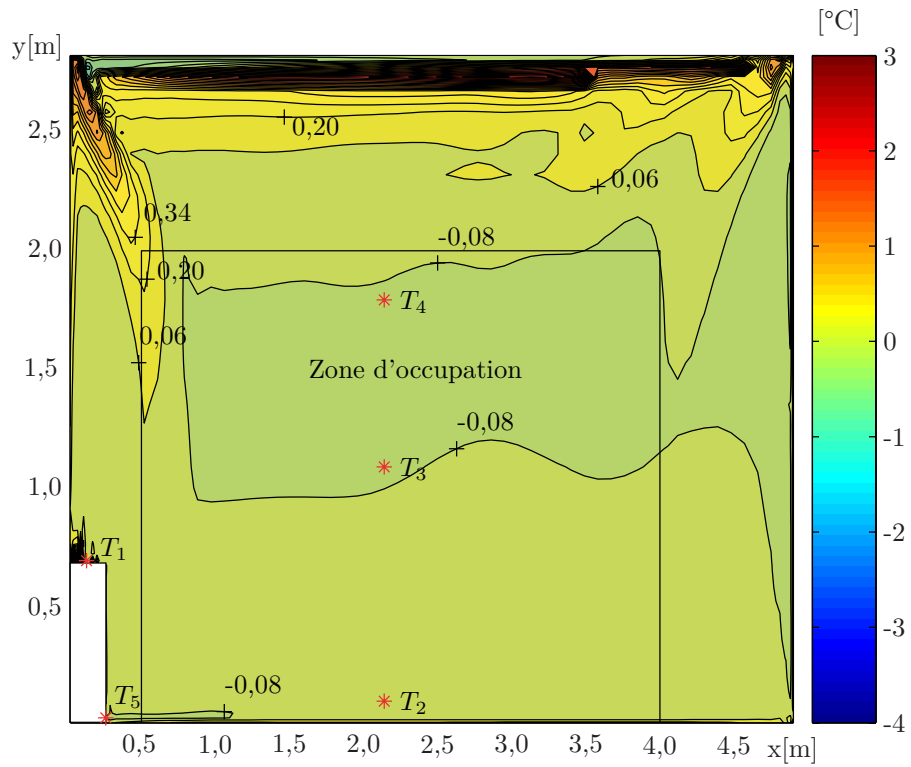
TAB. 4.3 – Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime permanent

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
		zone d'occupation			reprise
		T2	T3	T4	T5
échelon de 0,215 à 0,195	MOE	0,02	0,09	0,07	0,03
	MOR nc	0,08	0,17	0,17	0,05
	MOR	0,09	0,05	0,08	0,16
échelon de 0,195 à 0,215	MOE	0,05	0,11	0,07	0,04
	MOR nc	0,19	0,16	0,11	0,25
	MOR	0,02	0,04	0,16	0,08

TAB. 4.4 – Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime instationnaire



(a) MOR



(b) MOE

FIG. 4.14 – Cas a : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,215$

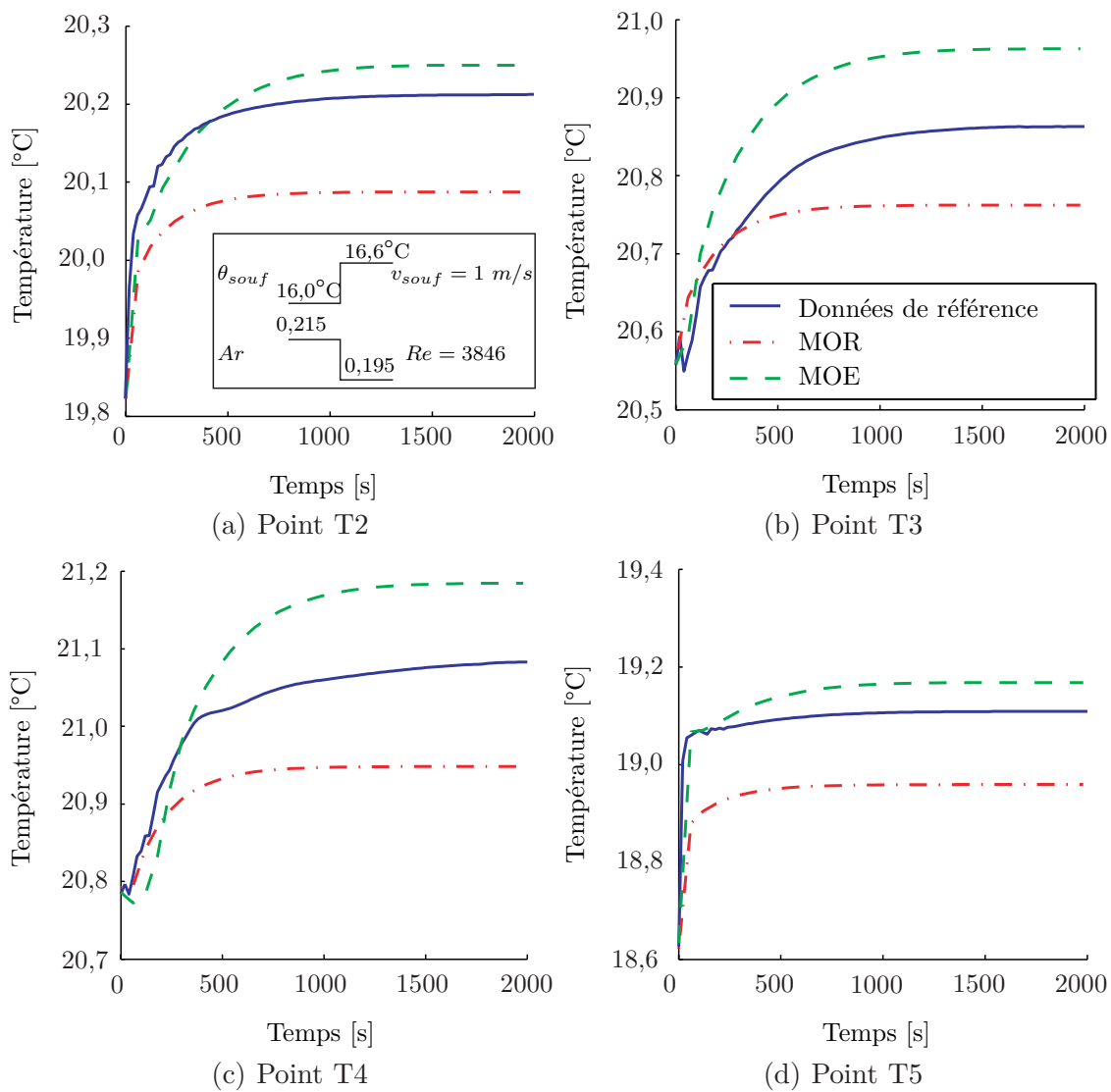


FIG. 4.15 – Cas a : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,219 à 0,195 et un nombre de Reynolds de 3846

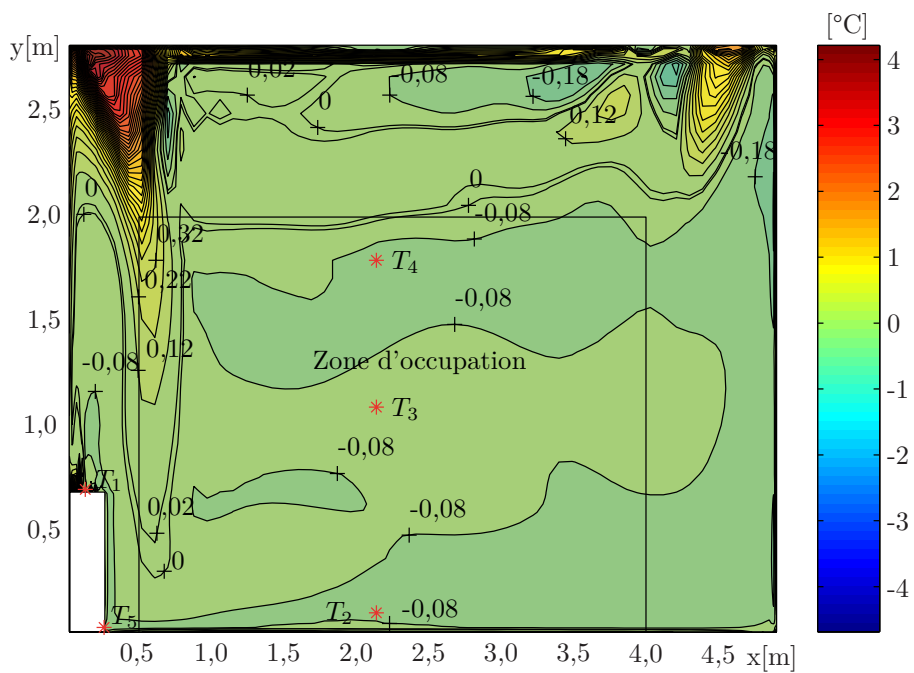
$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
		local	zone d'occupation	reprise
0,194	MOE	0,66	0,14	0,17
	MOR <sub>nc</sub>	0,66	0,13	0,17
	MOR	0,66	0,10	0,14
0,142	MOE	0,17	0,05	0,03
	MOR <sub>nc</sub>	0,17	0,06	0,04
	MOR	0,17	0,04	0,01
0, 129	MOE	0,20	0,04	0,00
	MOR <sub>nc</sub>	0,20	0,04	0,00
	MOR	0,20	0,05	0,02

TAB. 4.5 – Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR<sub>nc</sub>) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime permanent

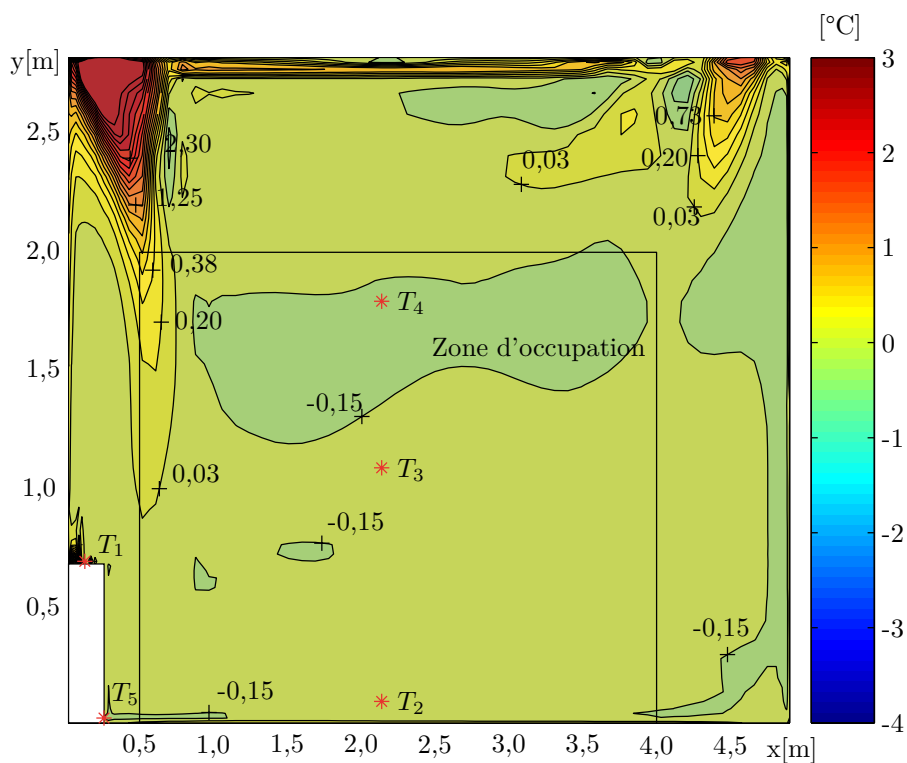
$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
		zone d'occupation		reprise	
		T2	T3	T4	T5
échelon de 0,194 à 0,142	MOE	0,13	0,07	0,16	0,11
	MOR <sub>nc</sub>	0,14	0,06	0,17	0,15
	MOR	0,15	0,07	0,19	0,15
échelon de 0,142 à 0,194	MOE	0,18	0,20	0,15	0,25
	MOR <sub>nc</sub>	0,17	0,20	0,14	0,25
	MOR	0,14	0,17	0,11	0,22
échelon de 0,155 à 0,129	MOE	0,11	0,08	0,18	0,05
	MOR <sub>nc</sub>	0,11	0,08	0,17	0,07
	MOR	0,12	0,09	0,19	0,08

TAB. 4.6 – Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR<sub>nc</sub>) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime instationnaire





(a) MOR



(b) MOE

FIG. 4.16 – Cas b : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,194$

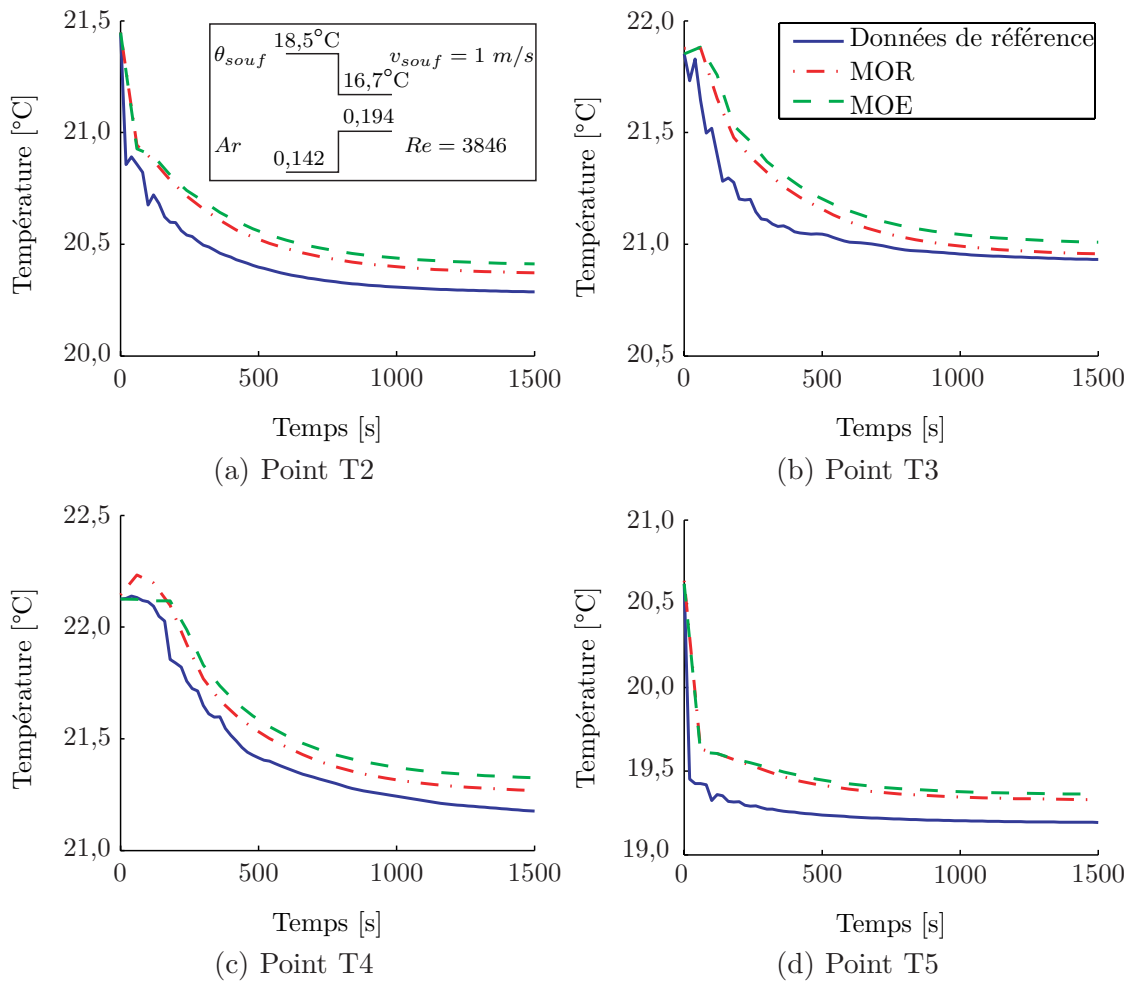


FIG. 4.17 – Cas b : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,142 à 0,194 et un nombre de Reynolds de 3846

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
		local	zone d'occupation	reprise
0,105	MOE	0,36	0,42	0,10
	MOR nc	0,32	0,39	0,16
	MOR	0,16	0,19	0,03
0,076	MOE	0,18	0,11	0,06
	MOR nc	0,21	0,18	0,13
	MOE	0,16	0,12	0,13

TAB. 4.7 – Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime permanent

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
		zone d'occupation			reprise
		T2	T3	T4	T5
échelon de 0,105 à 0,076	MOE	0,15	0,44	0,17	0,04
	MOR nc	0,06	0,15	0,15	0,24
	MOR	0,05	0,23	0,14	0,13

TAB. 4.8 – Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR non corrigé (MOR nc) et du MOR corrigé (MOR) avec les données de référence en régime instationnaire

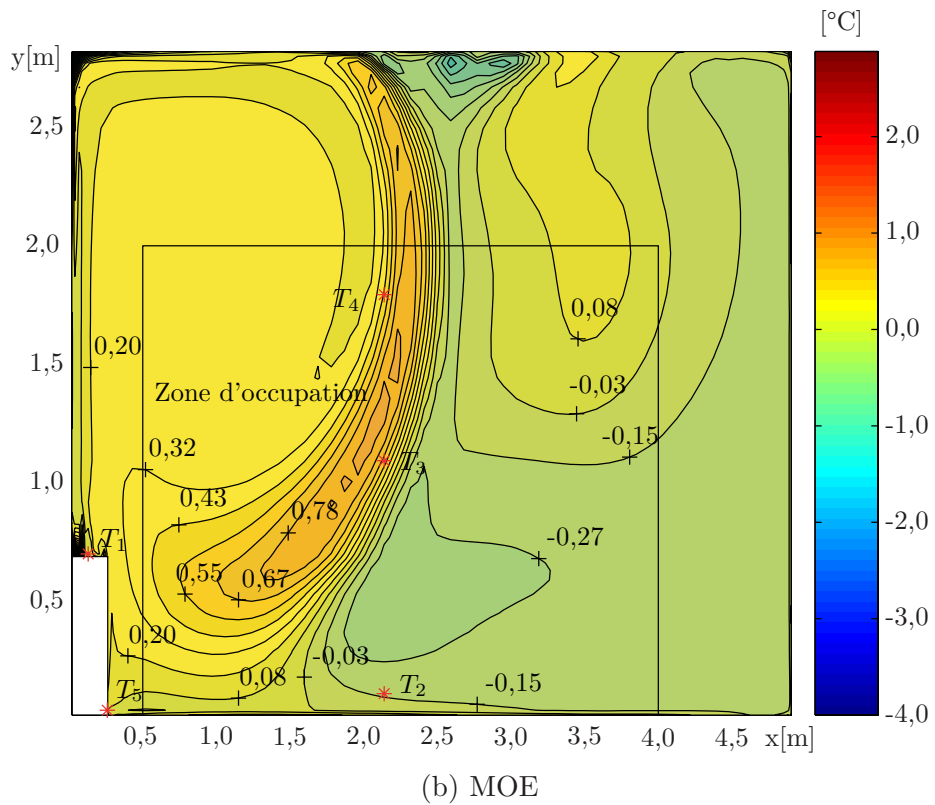
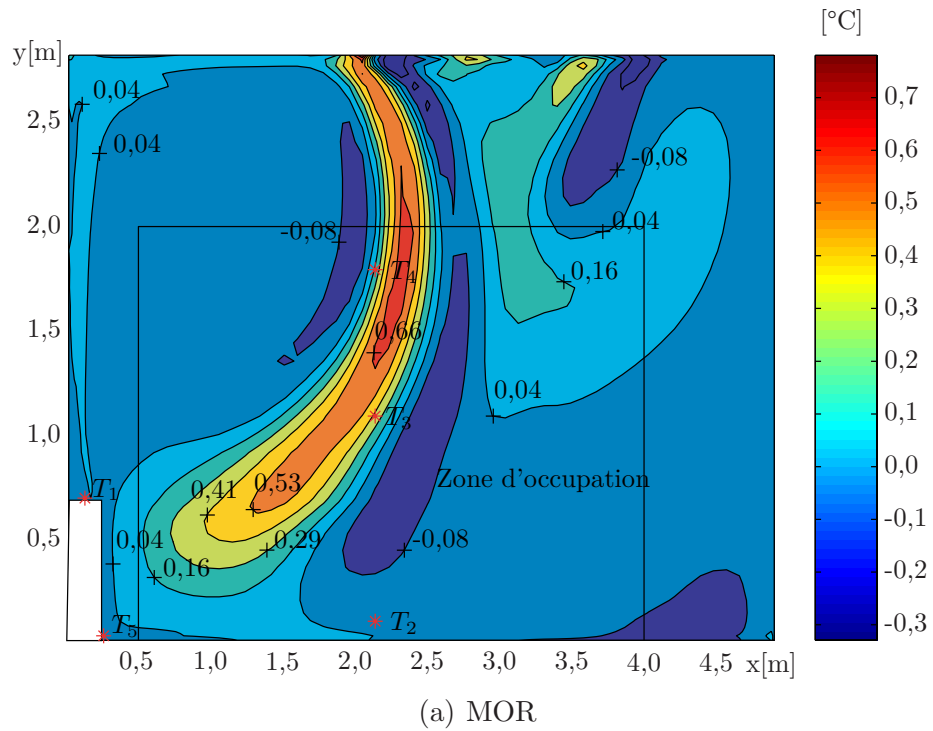


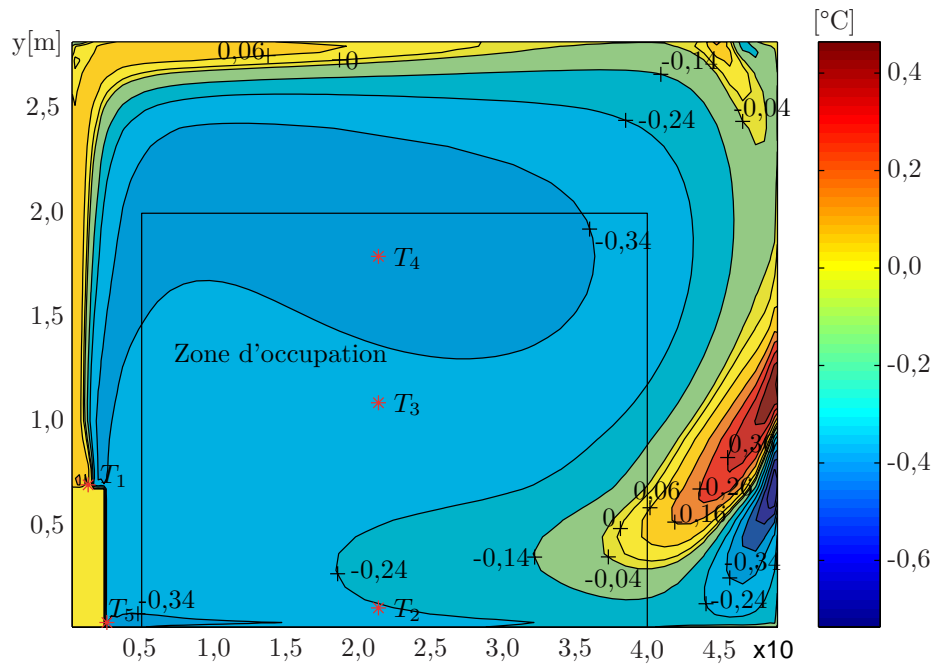
FIG. 4.18 – Cas c : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,105$

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
		local	zone d'occupation	reprise
0,069	MOE	0,29	0,10	0,20
	MOR <sub>nc</sub>	0,26	0,28	0,34
0,048	MOE	0,22	0,05	0,10
	MOR <sub>nc</sub>	0,12	0,10	0,14
0,038	MOE	0,19	0,04	0,06
	MOR <sub>nc</sub>	0,09	0,04	0,06

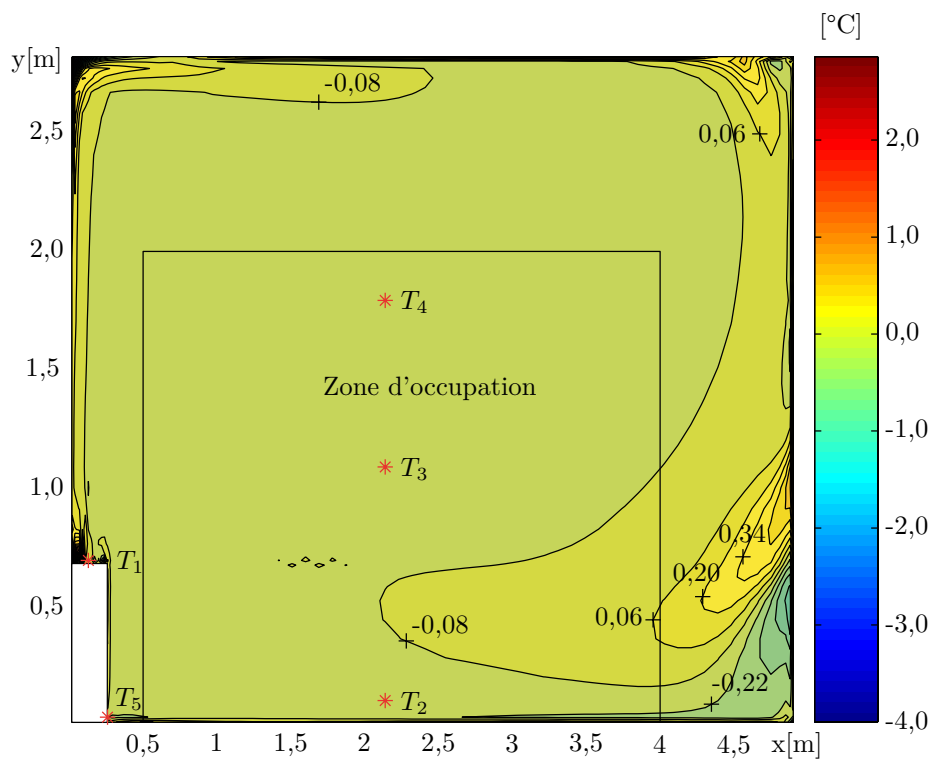
TAB. 4.9 – Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE et du MOR non corrigé (MOR<sub>nc</sub>) avec les données de référence en régime permanent

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
		zone d'occupation			reprise
		T2	T3	T4	T5
échelon de 0,081 à 0,069	MOE	0,12	0,06	0,07	0,19
	MOR <sub>nc</sub>	0,20	0,26	0,30	0,30
échelon de 0,058 à 0,048	MOE	0,06	0,01	0,02	0,10
	MOR <sub>nc</sub>	0,09	0,09	0,14	0,14
échelon de 0,030 à 0,038	MOE	0,04	0,01	0,00	0,05
	MOR <sub>nc</sub>	0,02	0,04	0,05	0,04

TAB. 4.10 – Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE et du MOR non corrigé (MOR<sub>nc</sub>) avec les données de référence en régime instationnaire



(a) MOR



(b) MOE

FIG. 4.19 – Cas d : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à  $Re = 5769$  et  $Ar = 0,069$

### 4.3 Interpolation des modèles d'ordre réduit

Nous disposons maintenant de quatre modèles d'ordre réduit applicables localement. Nous avons déjà mis en évidence qu'il était difficile de fixer la frontière entre deux cas successifs. Par exemple, pour les cas a) et b), les données de référence nous ont conduit à la fixer à une valeur du nombre d'Archimède au soufflage de 0,194. Or, la valeur de 0,66 °C pour l'écart quadratique moyen de tout le local du cas b) (tableau 4.5) est révélateur d'une erreur importante. Par contre, les données de référence indiquent que le cas a) est correctement applicable pour un air soufflé à  $Ar = 0,215$  et le cas b) pour un air soufflé à  $Ar = 0,183$ . Ainsi la validité locale des modèles nous conduit à utiliser une interpolation de type logique floue entre les températures obtenues avec les différents modèles. Commençons par étudier les cas a), b) et c) qui correspondent à un nombre de Reynolds au soufflage de 3846. Il peut être remarqué que les transitions entre les différents cas ne se font pas subitement, mais autour du point de transition. Par exemple, bien que la frontière entre les cas a) et b) ait été fixée à  $Ar = 0,215$ , la transition s'effectue progressivement autour de cette valeur.

Le tableau (4.11) permet de comparer, en régime permanent, les résultats des MOR pour ces trois cas. En gras sont repérées les valeurs du nombre d'Archimède marquant la frontière entre les cas. Autour de la transition, la température des données de référence est presque toujours comprise entre les températures des deux cas considérés, ou à défaut en est très proche. Physiquement, ces deux transitions ne se font pas de la même façon, la deuxième étant beaucoup plus rapide. Lors des simulations CFD, il a d'ailleurs été impossible de déterminer précisément la frontière

Archimède au soufflage	Températures [°C]			Données de référence
	cas a)	cas b)	cas c)	
0,215	18,65	18,82	19,91	18,63
0,195	18,96	19,25	20,21	19,11
<b>0,194</b>	19,01	19,33	20,27	19,19
0,183	19,16	19,54	20,42	19,44
0,155	19,67	20,27	20,93	20,24
0,142	19,93	20,63	21,19	20,62
0,129	20,19	20,99	21,45	21,01
<b>0,115</b>	20,49	21,43	21,76	21,47
0,105	20,70	21,72	21,96	21,98
0,076	21,22	22,45	22,48	22,60

TAB. 4.11 – Températures à la reprise calculées par les MOR en régime permanent ( $Re = 3846$ )

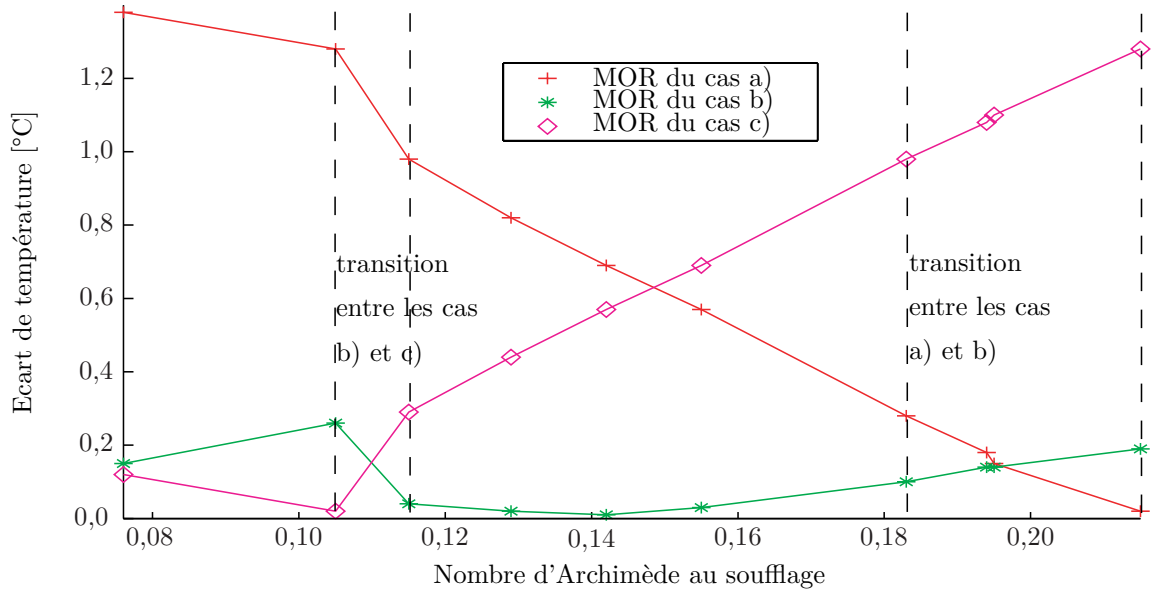


FIG. 4.20 – Valeur absolue de l'écart de température entre les MOR et les données de référence pour un nombre de Reynolds de 3846

entre les cas b) et c). Cette différence apparaît clairement sur la figure (4.20) qui représente la valeur absolue de l'écart de température entre chaque MOR et les données de référence en fonction du nombre d'Archimède au soufflage. En effet la pente des courbes est plus importante autour de la transition entre les cas b) et c) qu'entre les cas a) et b). L'intervalle d'interpolation sera donc plus large pour la deuxième citée. De plus, nous savons que pour un nombre d'Archimède au soufflage de 0,105, le cas b) n'est physiquement plus valable. Nous proposons ainsi d'effectuer l'interpolation entre les cas a) et b) pour des nombres d'Archimède au soufflage compris entre 0,215 et 0,183, et l'interpolation entre les cas b) et c) entre 0,115 et 0,105, comme indiquée sur la figure (4.20) par les pointillés. La température de l'air est alors donnée par :

$$\theta_{1 \text{ m/s}} = p_a \theta_{cas \ a} + p_b \theta_{cas \ b} + p_c \theta_{cas \ c} \quad (4.26)$$

où :

- $\theta_{1 \text{ m/s}}$  : température de l'air du local pour un air soufflé à 1 m/s,
- $\theta_{cas \ a}$ ,  $\theta_{cas \ b}$  et  $\theta_{cas \ c}$  : températures calculées par les MOR des cas a), b) et c),
- $p_a$ ,  $p_b$  et  $p_c$  : coefficients d'interpolation des cas a), b) et c).

Nous avons choisi d'exprimer les coefficients d'interpolation  $p$ , non pas en fonction des nombres d'Archimède, mais en fonction de la température de soufflage. En effet, lors de l'intégration de ce modèle dans une boucle de contrôle, le calcul en temps réel du nombre d'Archimède (equation 3.3) nécessiterait la donnée de la température et de la vitesse de soufflage qui peuvent être mesurées, mais aussi de la température de l'air ambiant qui doit être calculée par le modèle ce qui peut poser des problèmes de stabilité du système. Les valeurs des coefficients d'interpolation  $p$ , fonction de la température de soufflage, sont données dans le tableau (4.12). La figure (4.21)



	Température de soufflage [°C]			
	[16,0 17,0]	[17,0 19,5]	[19,5 20,0]	[20,0 21,0]
$p_a$	$-\theta_{souf} + 17,0$	0	0	0
$p_b$	$\theta_{souf} - 16,0$	1	$-2\theta_{souf} + 40,0$	0
$p_c$	0	0	$2\theta_{souf} - 39,0$	1

TAB. 4.12 – Valeurs des coefficients d'interpolation

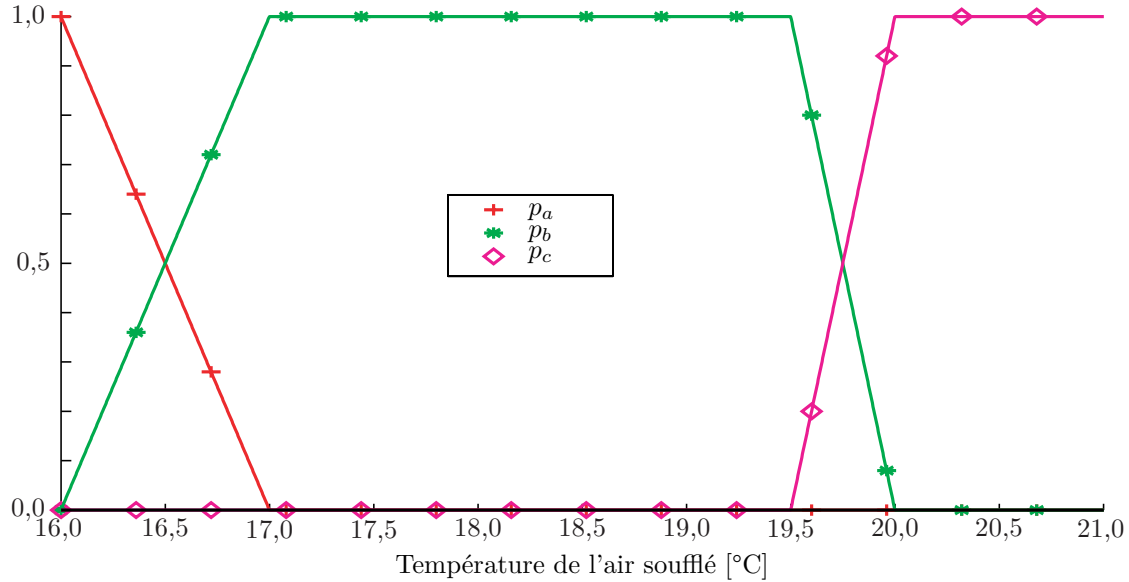


FIG. 4.21 – Coefficients d'interpolation

montre l'allure de ces coefficients.

Jusqu'à présent, seul le régime permanent a été abordé. Ces pondérations sont-elles également valables en régime transitoire? L'évidence nous pousse à dire que non. Par exemple, dans le cas d'un échelon de température de soufflage de 16,0 à 17,0 °C, l'expression (4.26) conduit à un passage brutal du cas a) au cas b), ce qui revient à négliger le temps de transport au sein du local. Il est difficile d'évaluer avec précision la dynamique exacte de la transition entre les cas. Par exemple, pour les cas b) et c), il nous a été impossible d'effectuer la simulation de cette transition. Aussi, nous proposons une approximation d'ordre 1 pour cette dynamique, c'est-à-dire dans le cas de la pondération du cas a) :

$$\tau \dot{p}_a + p_a = -\theta_{souf} + 17,0 \quad (4.27)$$

D'autre part, la somme des pondérations doit toujours être égale à 1, la constante de temps de la dynamique doit donc être la même pour les deux cas faisant l'objet de la transition. Le tableau (4.13) donne les expressions dynamiques des coefficients d'interpolation.

Les constantes de temps sont extraites des données de référence en régime tran-

Température de soufflage [°C]			
[16,0 – 17,0]	$\tau_{ab}\dot{p}_a + p_a = -\theta_{souf} + 17$	$p_b = 1 - p_a$	$p_c = 0$
[17,0 – 19,5]	$p_a = 0$	$p_b = 1$	$p_c = 0$
[19,5 – 20,0]	$p_a = 0$	$p_b = 1 - p_c$	$\tau_{bc}\dot{p}_c + p_c = 2\theta_{souf} - 39$
[20,0 – 21,0]	$p_a = 0$	$p_b = 0$	$p_c = 1$

TAB. 4.13 – Equations dynamiques des coefficients d'interpolation

sitaire. Tous les points du local n'ayant pas la même dynamique, il est nécessaire de choisir un point de référence. Lors des simulations du contrôle de la température du local que nous effectuerons dans le chapitre suivant, les MOR nous donneront la température à la reprise du ventilateur-convecteur, c'est-à-dire la température mesurée. Il est donc naturel de choisir un point à la reprise comme référence. Pour un modèle du premier ordre, la constante de temps d'un système est le tiers du temps de réponse. Le tableau (4.14) donne les constantes de temps de chaque cas.

	cas a)	cas b)	cas c)
Constante de temps [s]	162	210	137

TAB. 4.14 – Valeurs des constantes de temps

Par compromis entre deux cas successifs, la constante de temps d'interpolation est prise égale à la moyenne entre les constantes de temps des différents cas, d'où :

$$\begin{cases} \tau_{ab} = \frac{162+210}{2} = 186 \text{ s} \\ \tau_{bc} = \frac{210+137}{2} = 174 \text{ s} \end{cases} \quad (4.28)$$

La transition entre les deux vitesses de soufflage peut se faire exactement de la même façon, c'est-à-dire en réalisant une interpolation entre la température dans la zone d'occupation calculée pour une vitesse d'air soufflé de 1 m/s, donnée par l'équation (4.26), et la température donnée par le MOR du cas d). Il vient :

$$\theta = p_{1 \text{ m/s}} \theta_{1 \text{ m/s}} + p_d \theta_{cas \ d} \quad (4.29)$$

avec :

$$\begin{cases} \tau_{vitesse} \dot{p}_{1 \text{ m/s}} + p_{1 \text{ m/s}} = -2(v_{souf} - 1) + 1 \\ p_d = 1 - p_{1 \text{ m/s}} \end{cases} \quad (4.30)$$

D'après les données de référence, la transition entre les deux vitesses se fait avec une constante de temps de 260 s pour la température à la reprise.

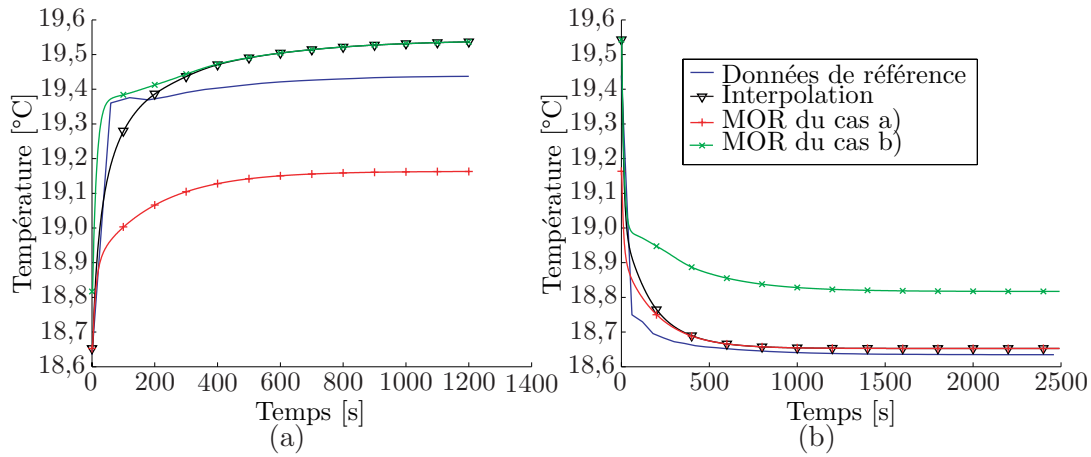


FIG. 4.22 – Interpolation des MOR à  $Re = 3846$  pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de : (a)  $Ar = 0,215$  à  $Ar = 0,183$ , (b)  $Ar = 0,183$  à  $Ar = 0,215$

Pour valider cette approche, nous nous proposons de tester deux transitions, et tout d'abord le passage du cas a) au cas b) en testant la réponse du modèle à l'échelon de soufflage de  $Ar = 0,215$  à  $Ar = 0,183$  (figure 4.22(a)) et à l'échelon opposé de  $Ar = 0,183$  à  $Ar = 0,215$  (figure 4.22(b)). Les écarts quadratiques moyens instationnaires sont respectivement de  $0,09$  °C et  $0,10$  °C pour les deux échelons, ce qui correspond à de bons résultats par rapport aux résultats instationnaires des cas a) et b) (tableaux 4.4 et 4.6). Dans le cas de l'échelon de  $Ar = 0,215$  à  $Ar = 0,183$ , le modèle interpolé améliore nettement la précision par rapport aux modèles respectifs des cas a) et b).

Le manque de données de référence pour le cas c) ne nous a pas permis de tester l'interpolation pour la transition entre les cas a) et b).

Examinons maintenant la transition entre le cas d) et le cas (a) correspondant à une variation du nombre de Reynolds au soufflage de 5769 à 3846 (soit une variation de la vitesse de soufflage de 1,5 m/s à 1 m/s), en conservant la même température de soufflage de 16 °C (cf. figure 4.23). Il est difficile de tirer des conclusions pour cette transition tant la validité des données de référence peut être mise en doute en raison d'une mauvaise convergence.

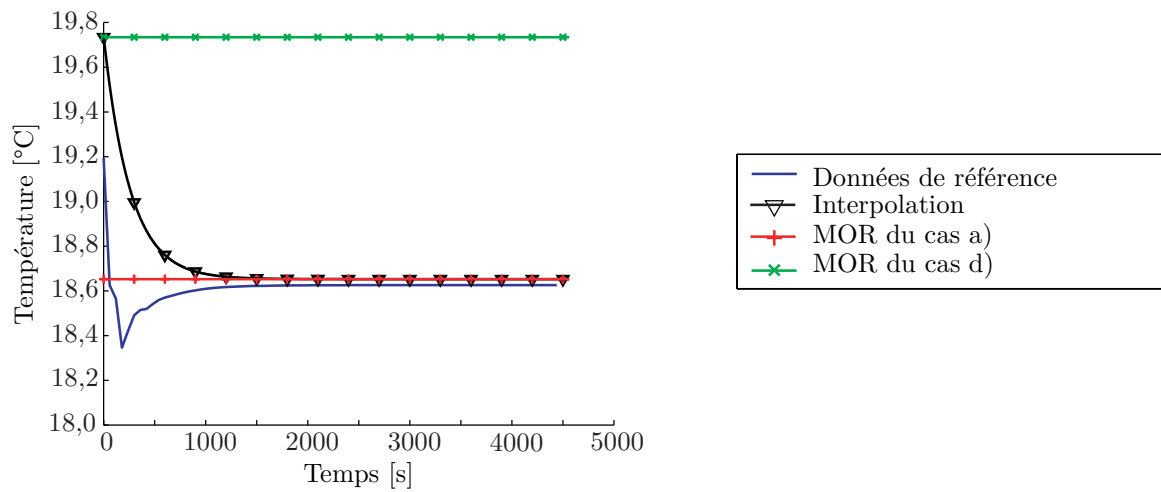


FIG. 4.23 – Interpolation des MOR pour un échelon du nombre de Reynolds au soufflage de 5769 à 3846

## 4.4 Conclusion

Un modèle d'ordre réduit est disponible pour chaque cas. Mis sous forme d'un système d'état d'ordre faible, ils sont résolubles en temps réel. L'interpolation des températures calculées par ces quatre modèles permet d'obtenir la température dans le local en fonction de la température et de la vitesse de l'air soufflé (figure 4.24).

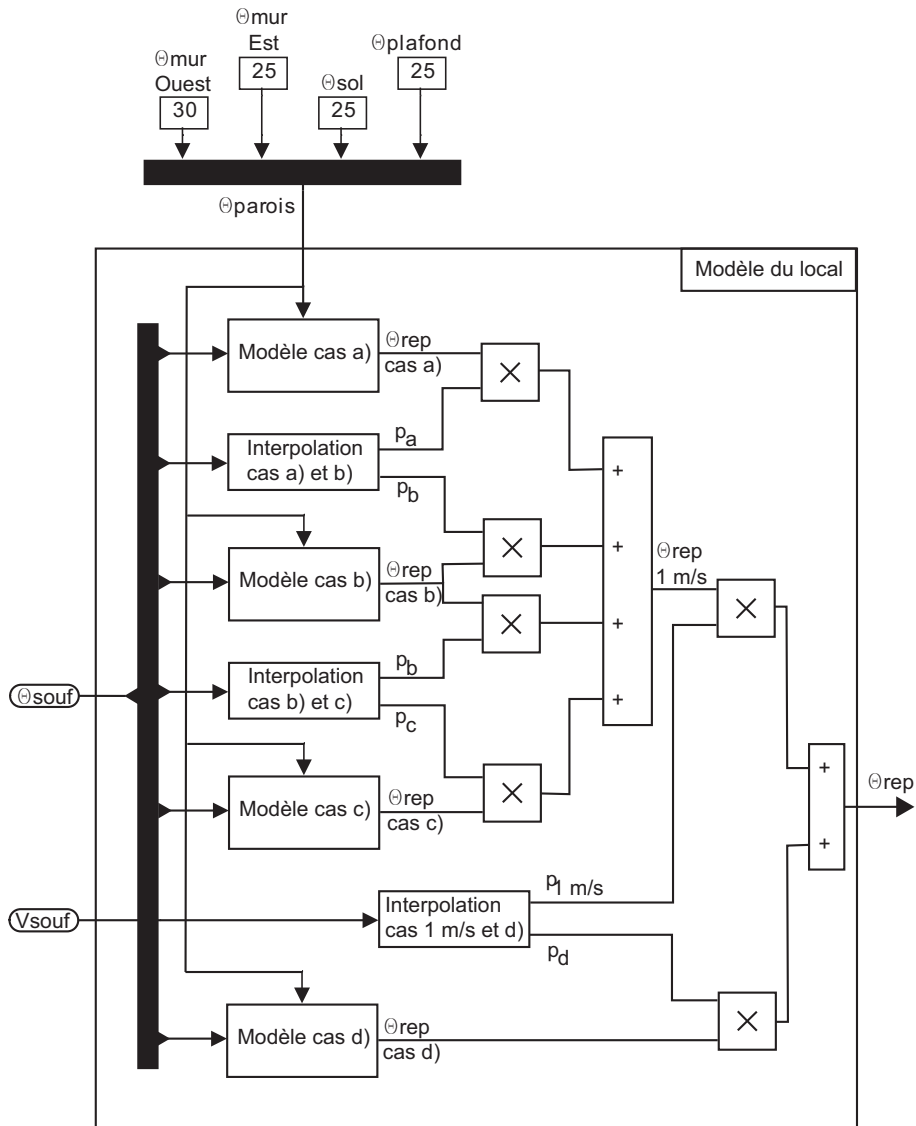


FIG. 4.24 – Schéma de principe du modèle du local

Bien que sa précision soit encore perfectible, nous pourrions maintenant intégrer ce modèle dans une boucle de contrôle afin de simuler la régulation de la température dans le local. Conformément à la description de la figure (4.25), ce modèle permettrait d'une part de simuler la mesure de la température à la reprise du ventilo-

convecteur et de la comparer à la température de consigne pour définir la commande du ventilo-convecteur (contrôle classique), et d'autre part de calculer la température dans la zone d'occupation. Dans le chapitre suivant, les modèles d'ordre réduit seront utilisés afin de simuler le comportement du local contrôlé. Dans le cas d'un local réel, ces modèles ne seraient pas nécessaires puisque la température de reprise serait directement mesurée dans le local.

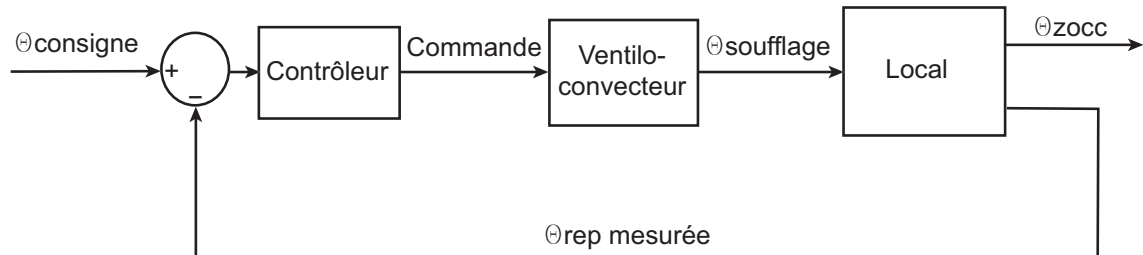


FIG. 4.25 – Contrôle de la température de reprise



## Chapitre 5

### Estimation et contrôle

Dans le chapitre précédent, un modèle d'ordre réduit a été construit pour chaque configuration thermo-aéraulique identifiée. Ces modèles mis sous la forme de système d'état sont résolubles en temps réel, et donne la distribution de température dans tout le local.

En utilisant les propriétés des systèmes d'état et la théorie du contrôle, l'objectif de ce chapitre consiste à estimer la température dans la zone d'occupation en comparant les résultats des modèles d'ordre réduit à la température mesurée à la reprise du ventilo-convecteur, puis à créer un contrôleur. La figure (5.1) présente le schéma de commande qui sera utilisé pour tester le contrôle.

Le rôle de l'estimateur consiste à utiliser la température mesurée afin de corriger l'erreur des modèles d'ordre réduit du local pour calculer la température dans la zone d'occupation avec une meilleure précision. La température dans cette zone pourra

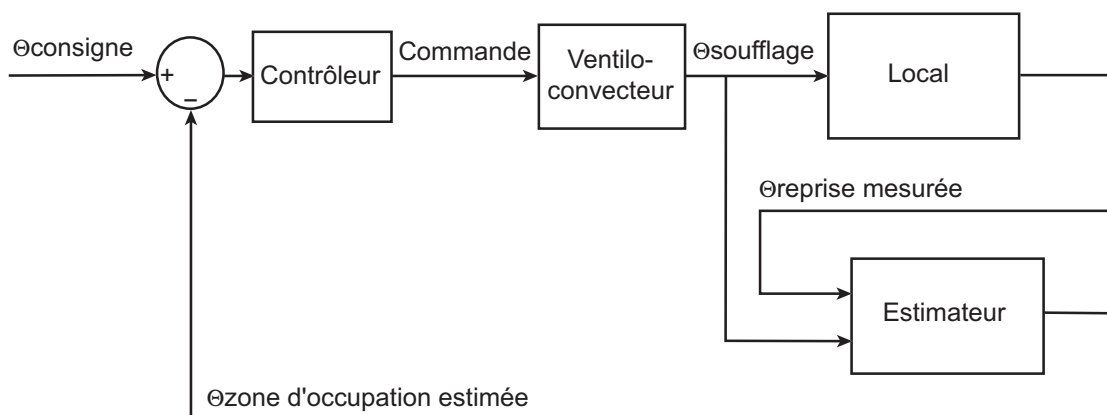


FIG. 5.1 – Schéma de contrôle de la température dans la zone d'occupation



alors être directement contrôlée.

Plaçant la modélisation du ventilo-convecteur hors de notre étude, celui-ci est simplement représenté par une loi linéaire liant l'ouverture de la vanne de la batterie froide à la température de l'air soufflé (figure 5.2). Le gain du ventilo-convecteur est donc de  $-\frac{5}{100}$ . De plus, pour tenir compte de l'inertie du ventilo-convecteur, un filtre du premier ordre est rajouté pour la température et la vitesse de soufflage. Sa constante de temps est fixée à 20 s.

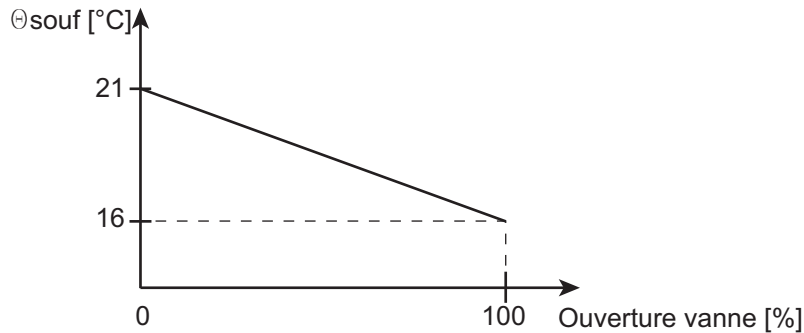


FIG. 5.2 – Caractéristique du ventilo-convecteur

## 5.1 Propriétés des systèmes d'état

Avant toute chose, il est nécessaire de vérifier certaines propriétés du système d'état : sa contrôlabilité et son observabilité. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Bergounioux pour plus de détails et notamment les démonstrations des propriétés mathématiques [90].

### 5.1.1 Contrôlabilité

L'état  $\mathbf{a}(t)$  du système, à valeurs dans  $\mathbb{R}^M$  sur  $]0, +\infty[$ , est donné par l'équation différentielle ordinaire (EDO) à coefficients constants :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \text{ sur } ]0, +\infty[ \\ \mathbf{a}(t=0) = \mathbf{a}_0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

Un problème de contrôle consiste en :

- une classe de contrôles  $\mathbf{u}$  admissibles, qui correspond à l'intervalle de température de l'air soufflé [16 21],

- une EDO de la forme (5.1) décrivant l'état du système,
- une famille d'ensembles cibles, également appelés les consignes.

Soit  $\mathbf{a}_0$  dans  $\mathbb{R}^M$ . S'il existe un contrôle  $\mathbf{u}$  admissible et un instant  $t_1$  tels que  $\mathbf{a}(t_1)$  appartient à l'ensemble cible,  $\mathbf{u}$  envoie  $\mathbf{a}_0$  à la cible, alors  $\mathbf{a}_0$  est dit contrôlable. Cette définition conduit alors à plusieurs questions :

1. trouver l'ensemble des états initiaux  $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^M$  qui peuvent être envoyés à la cible, c'est-à-dire l'ensemble des états initiaux contrôlables. C'est alors un problème de contrôlabilité. Si cet ensemble est  $\mathbb{R}^M$  alors le système est dit complètement contrôlable,
2. si un état initial  $\mathbf{a}_0$  est connu, alors un deuxième problème consiste à trouver et décrire au moins un contrôle qui réalise la jonction de  $\mathbf{a}_0$  à la cible. C'est un problème de synthèse,
3. Quand il n'y a pas unicité du contrôle, il est possible de chercher le « meilleur » relativement à un critère (ou coût) donné. C'est alors un problème de contrôle optimal.

Pour déterminer la contrôlabilité d'un système, la matrice de contrôlabilité est définie :

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r) = [\mathbf{B}_r, \mathbf{A}_r \mathbf{B}_r, \mathbf{A}_r^2 \mathbf{B}_r, \dots, \mathbf{A}_r^{M-1} \mathbf{B}_r]. \quad (5.2)$$

C'est une matrice  $M \times M$ . Le système est alors complètement contrôlable si la matrice de contrôlabilité  $\mathcal{C}$  est de rang maximal, égal à  $M$ . De façon équivalente, la contrôlabilité peut être calculée par le grammien de contrôlabilité défini par :

$$\mathbf{W}_c = \int_0^\infty e^{A\tau} \mathbf{B}^t \mathbf{B} e^{tA\tau} d\tau \quad (5.3)$$

Le système est alors contrôlable si et seulement si le grammien est défini positif.

Après vérification, les modèles d'ordre réduit des quatre cas ont tous une matrice de contrôlabilité de rang sept, ils sont donc complètement contrôlables.

### 5.1.2 Observabilité

Dans notre cas, l'état du système n'est pas directement mesurable ou observable. Par contre, il est lié aux températures par l'équation de sortie :

$$\Theta_{\text{obs}}(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{u}(t) + \Theta_{\text{moy}_r} \quad (5.4)$$

Le système dynamique, décrit par l'équation d'état et par l'équation de sortie, est alors dit observable si l'état  $\mathbf{a}$  peut être déterminé de manière unique à partir des

mesures  $\Theta_{\text{obs}}$ . L'observabilité se détermine à partir du calcul du rang de la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  définie par :

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}_r, \mathbf{A}_r) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r \\ \mathbf{C}_r \mathbf{A}_r \\ \mathbf{C}_r \mathbf{A}_r^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_r \mathbf{A}_r^{M-1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

De façon équivalente, l'observabilité peut être calculée par le grammien d'observabilité défini par :

$$\mathbf{W}_o = \int_0^\infty e^{A\tau} C^t C e^{-A\tau} d\tau \quad (5.6)$$

Le système est alors observable si et seulement si le grammien est défini positif.

Plaçons nous dans le cas réaliste où seule la température de l'air à la reprise du ventilo-convecteur est mesurée, alors pour les quatre cas, la matrice d'observabilité est de rang sept, c'est-à-dire de rang maximal. Les modèles d'ordre réduit sont donc observables

## 5.2 Estimation de la température

Replaçons nous dans le contexte du contrôle thermique d'un local équipé d'un ventilo-convecteur. Comme pour un contrôle classique, nous disposons de la mesure d'une température donnée par le capteur placé à la reprise du ventilo-convecteur. Ainsi, seule une connaissance incomplète de l'état est disponible à travers la température observée. Il est alors souhaitable de concevoir un filtre afin d'extraire autant d'information que possible de la température observée avant d'utiliser cette information pour calculer la commande. En théorie moderne du contrôle, un modèle du système lui-même est utilisé comme filtre et l'information ainsi obtenue constitue une estimation de l'état du système. La seule condition pour pouvoir construire un tel estimateur repose sur l'observabilité des MOR, propriété vérifiée dans la section précédente.

### 5.2.1 Construction des estimateurs

La température mesurée est donnée par quatre systèmes d'état de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_r \mathbf{a} + \mathbf{B}_r \mathbf{u} \\ \Theta_{rep} = \mathbf{C}_{r_{rep}} \mathbf{a} + \Theta_{moy,r_{rep}} \end{cases} \quad (5.7)$$

L'estimateur consiste alors en un système analogue :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{A}_r \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_r \mathbf{u} - \mathbf{L}(\Theta_{rep} - \hat{\Theta}_{rep}) \\ \hat{\Theta}_{rep} = \mathbf{C}_{r_{rep}} \hat{\mathbf{a}} + \Theta_{moy,r_{rep}} \end{cases}, \quad (5.8)$$

où :

- $\mathbf{L}$  : matrice de l'estimateur à déterminer,
- $\hat{\mathbf{a}}$  : estimation de l'état,
- $\hat{\Theta}_{rep}$  : estimation de la mesure.

$\mathbf{L}(\Theta_{rep} - \hat{\Theta}_{rep})$  constitue le «feedback» de l'estimateur basé sur la différence entre la mesure  $\Theta_{rep}$  et son estimation par le modèle  $\hat{\Theta}_{rep}$ . Il a pour fonction d'agir sur l'estimation afin de ramener  $\hat{\mathbf{a}}$  vers  $\mathbf{a}$ .

Pour déterminer la matrice de l'estimateur, il est utile de considérer le système régissant l'évolution de l'erreur :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_e = \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}} \\ \Theta_{rep_e} = \Theta_{rep} - \hat{\Theta}_{rep} \end{cases} \quad (5.9)$$

En retranchant membre à membre l'estimateur (5.8) du système (5.7), il vient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}}_e = \mathbf{A}_r \mathbf{a}_e + \mathbf{L} \Theta_{rep_e} \\ \Theta_{rep_e} = \mathbf{C}_{r_{rep}} \mathbf{a}_e \end{cases}, \quad (5.10)$$

soit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}}_e = (\mathbf{A}_r + \mathbf{L} \mathbf{C}_{r_{rep}}) \mathbf{a}_e \\ \Theta_{rep_e} = \mathbf{C}_{r_{rep}} \mathbf{a}_e \end{cases}. \quad (5.11)$$

La fonction de l'estimateur est de minimiser l'écart entre  $\mathbf{a}$  et  $\hat{\mathbf{a}}$ , c'est-à-dire la fonctionnelle de coût :

$$\mathcal{I} = \int_0^T {}^t \mathbf{a}_e \mathbf{a}_e dt. \quad (5.12)$$

Le calcul de l'estimateur revient alors à un problème d'optimisation sous la contrainte du système (5.8) avec la fonctionnelle objectif  $\mathcal{I}$ . Il peut donc être résolu par des méthodes proches de celle décrite dans l'annexe C qui appartiennent à la théorie des compensateurs linéaires quadratiques gaussiens (ou LQG pour «Linear Quadratic Gaussian») [91]. Son expression est alors donnée par :

$$\mathbf{L} = -\mathbf{Y} {}^t \mathbf{C}_{r_{rep}}, \quad (5.13)$$

où  $\mathbf{Y}$  est solution de l'équation de Riccati :

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} {}^t \mathbf{A} - \mathbf{Y} {}^t \mathbf{C}_{r_{rep}} \mathbf{C}_{r_{rep}} \mathbf{Y} + \mathbf{I} = 0, \quad (5.14)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

L'estimateur d'état va alors nous permettre de tenir compte de l'erreur commise par le modèle d'état, quantifiée en temps réel par la mesure de  $\Theta_{rep}$ , pour estimer la valeur de la température dans tout le local, et en particulier dans la zone d'occupation :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{A}_r \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_r \mathbf{u} - \mathbf{L}(\Theta_{rep} - \hat{\Theta}_{rep}) \\ \hat{\Theta}_{rep} = \mathbf{C}_{rrep} \hat{\mathbf{a}} + \Theta_{moyrrep} \\ \hat{\Theta}_{zocc} = \mathbf{C}_{rzocc} \hat{\mathbf{a}} + \Theta_{moyrzocc} \end{cases} . \quad (5.15)$$

## 5.2.2 Résultats

Pour illustrer le fonctionnement de l'estimateur, nous nous proposons d'assimiler les données de référence à des mesures en temps réel. Notre objectif est donc de corriger les résultats des MOR présentés dans le chapitre précédent en utilisant la valeur de la température de reprise donnée à chaque pas de temps par les données de référence.

Les résultats des figures (5.3 à 5.8) et des tableaux (5.1 à 5.8) sont assez hétérogènes, mais néanmoins révélateurs de plusieurs caractéristiques de l'estimateur d'état. L'ensemble des résultats montrent tout d'abord le rôle joué par l'introduction dans l'estimateur de l'erreur entre la mesure et l'estimation au point de mesure puisque les écarts quadratiques moyens sont très faibles, voire nuls à la reprise aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire. La valeur maximale est atteinte pour le nombre d'Archimède de 0,105 en régime permanent avec un écart quadratique moyen de 0,06. En régime transitoire, les figures (5.4(d) et 5.6(d)) montrent que la courbe de la température à la reprise donnée par l'estimateur colle parfaitement à celle donnée par les résultats de référence.

Pour le reste du local, les écarts quadratiques moyens sont meilleurs pour la zone d'occupation que pour l'ensemble du local, notamment pour les cas a) et b). Il n'y a rien d'étonnant à retrouver cette tendance déjà observée pour les modèles d'ordre élevés et réduits puisque l'estimateur contient par construction le MOR. Par contre, l'estimateur fait apparaître une nouvelle caractéristique mise en évidence par la figure (5.5) qui représente les différences de température entre d'une part les résultats de l'estimateur et le MOR et d'autre part les données de référence pour le cas b) et un nombre d'Archimède de 0,194. Bien que les résultats soient globalement dégradés par l'estimateur, ils ne le sont pas de façon homogène pour l'ensemble du local. Ainsi, les points situés en partie basse du local, c'est-à-dire près de la reprise, obtiennent de meilleurs résultats. Les tableaux de résultats en régime transitoire corroborent ce fait en montrant que les points proches de la reprise par rapport à l'écoulement voient leurs températures mieux estimées. Par exemple, dans les cas

a) et b), le point  $T_2$  a un régime transitoire mieux estimé que les points  $T_3$  et  $T_4$  (tableaux 5.2 et 5.4), même dans le cas où les résultats du MOR étaient moins bons pour ce point (échelon de 0,215 à 0,195 pour le cas a). La figure (5.7) illustre de nouveau cette caractéristique. En effet, la reprise se situe dans ce cas à l'extrémité du jet. Ainsi l'écart de température diminue dans le jet alors qu'il augmente en dehors du jet. Cette remarque semble mettre en évidence la contre partie du principe de l'estimateur. La mesure ne se faisant qu'en un point, l'estimateur assimile l'erreur à la reprise à l'erreur dans tout le local. Par exemple, dans le cas de la figure (5.2), le MOR sous-estime la température à la reprise ainsi que la vitesse de son évolution. L'effet de l'estimateur consiste donc à augmenter la température et à accélérer son évolution à la reprise mais aussi en tout point du local. Pour le cas a), les résultats restent acceptables avec des écarts quadratiques moyens presque toujours inférieurs à 0,20 °C. Par contre, dans le cas b), l'écart quadratique moyen atteint 0,43 °C au point  $T_4$  pour un échelon de 0,142 à 0,194 (tableau 5.4). Il faut remarquer que cet échelon présentait déjà les écarts quadratiques moyens les plus élevés, notamment à la reprise, avec une valeur de 0,22 °C, soit le double de la valeur au point  $T_4$ . La figure (5.6) montre que la correction effectuée par l'estimateur est alors nettement surévaluée pour le point  $T_4$ . Le cas d) semble au contraire être l'exemple d'un bon fonctionnement de l'estimateur. Pour ce cas, les résultats du MOR sont tout à fait convenables sauf pour un nombre d'Archimède de 0,069 et un échelon de 0,081 à 0,069. Les tableaux (5.7) et (5.2) montrent que les écarts quadratiques moyens sont voisins de 0,30 °C, et surtout qu'ils sont assez homogènes d'une zone à l'autre, d'un point à l'autre. De plus, l'écoulement d'air est tel qu'il balaye l'ensemble du local avant d'arriver à la reprise et donc au point  $T_5$ . Contrairement aux autres cas, la température en ce point est donc directement corrélée à la température des autres points par l'intermédiaire du jet. L'estimateur améliore alors nettement les résultats qui deviennent tous inférieurs à 0,20 °C. Ainsi, le bon fonctionnement de l'estimateur semble répondre à deux conditions. Le point de mesure doit tout d'abord être caractéristique des points dont la température doit être estimée comme dans le cas d). C'est plus discutable dans les trois autres cas. De plus, l'erreur commise par les MOR à la reprise doit aussi être caractéristique de l'erreur commise dans l'ensemble du local ou du moins dans la zone étudiée. La réponse à ces conditions pourrait résider dans l'étude de la position optimale du capteur, et pourquoi pas de leur nombre optimal. L'existence des MOR pourrait grandement y contribuer, notamment en accélérant la vitesse d'une telle étude. Une autre réponse pourrait consister à contourner cette difficulté en modifiant le calcul de la matrice de l'estimateur  $\mathbf{L}$ . Détaillé dans la sous-section (5.2.1), il peut être assimilé à un problème d'optimisation sous contrainte. Or le résultat d'un tel problème repose en grande partie sur le choix de la fonctionnelle objectif  $\mathcal{I}$  :

$$\mathcal{I} = \int_0^T {}^t \mathbf{a}_e \mathbf{a}_e dt. \quad (5.16)$$

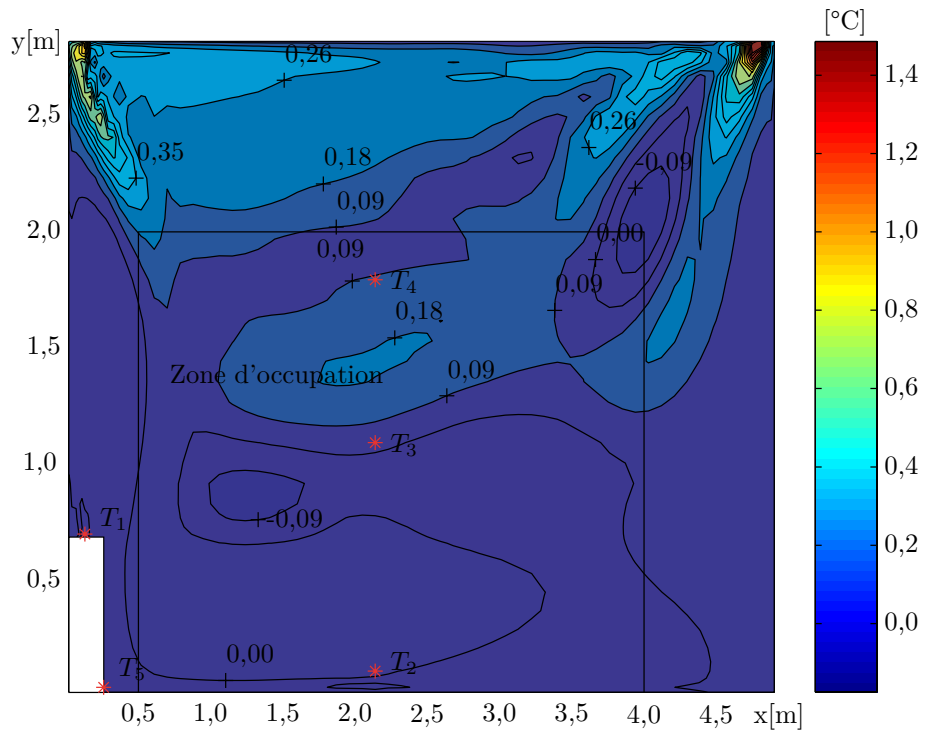
Une première remarque consiste à dire que les coefficients  $y$  ont tous le même poids. Or, nous avons vu dans la sous-section (4.1.2) que les coefficients associés aux vecteurs de la base n'agissent pas tous sur les mêmes zones, et n'ont pas la même contribution énergétique. Ainsi, il pourrait être judicieux de pondérer les coefficients en fonction de leur influence sur les zones étudiées, ou de leur contenu énergétique. La fonctionnelle deviendrait alors :

$$\mathcal{I} = \int_0^T {}^t \mathbf{a}_e \mathbf{P} \mathbf{a}_e dt. \quad (5.17)$$

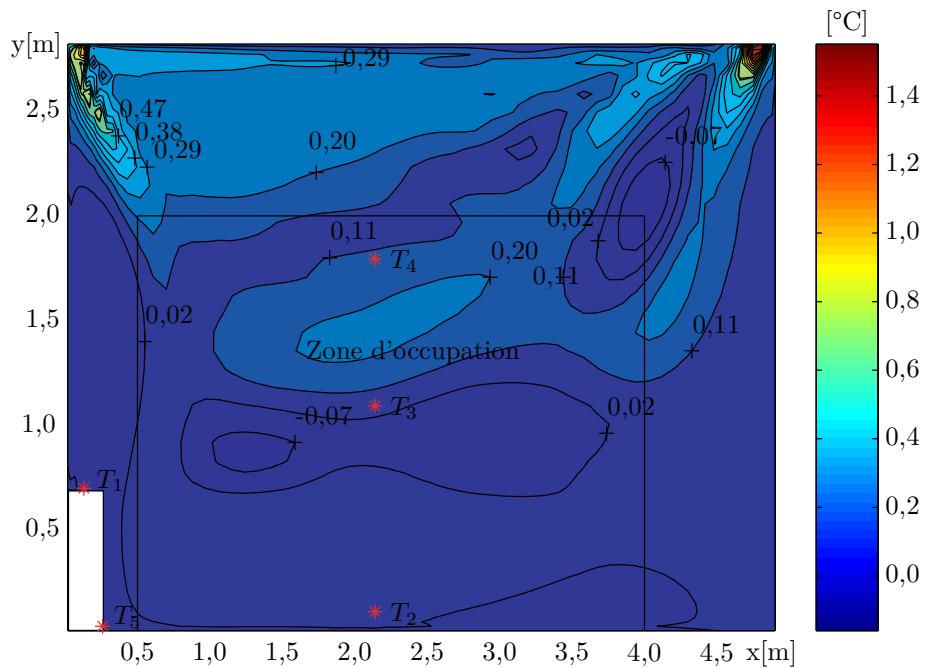
D'autre part, la fonctionnelle objectif (5.16) ne contient qu'un seul terme traduisant la différence temporelle des coefficients temporels. Pour diminuer le poids de la correction sur le régime transitoire, un terme supplémentaire dépendant du régime permanent atteint pourrait être introduit.

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
		local	zone d'occupation	reprise
0,215	MOE	0,37	0,09	0,10
	MOR	0,18	0,07	0,02
	Estimateur	0,19	0,09	0,01
0,195	MOE	0,31	0,08	0,06
	MOR	0,12	0,12	0,15
	Estimateur	0,12	0,10	0,00

TAB. 5.1 – Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime permanent



(a) MOR



(b) Estimateur

FIG. 5.3 – Cas a : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,215$



Ar au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
		zone d'occupation		reprise	
		T2	T3	T4	T5
échelon de 0,215 à 0,195	MOE	0,02	0,09	0,07	0,03
	MOR	0,09	0,05	0,08	0,16
	Estimateur	0,08	0,16	0,16	0,00
échelon de 0,195 à 0,215	MOE	0,05	0,11	0,07	0,04
	MOR	0,02	0,04	0,16	0,08
	Estimateur	0,07	0,10	0,23	0,00

TAB. 5.2 – Cas a ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime instationnaire

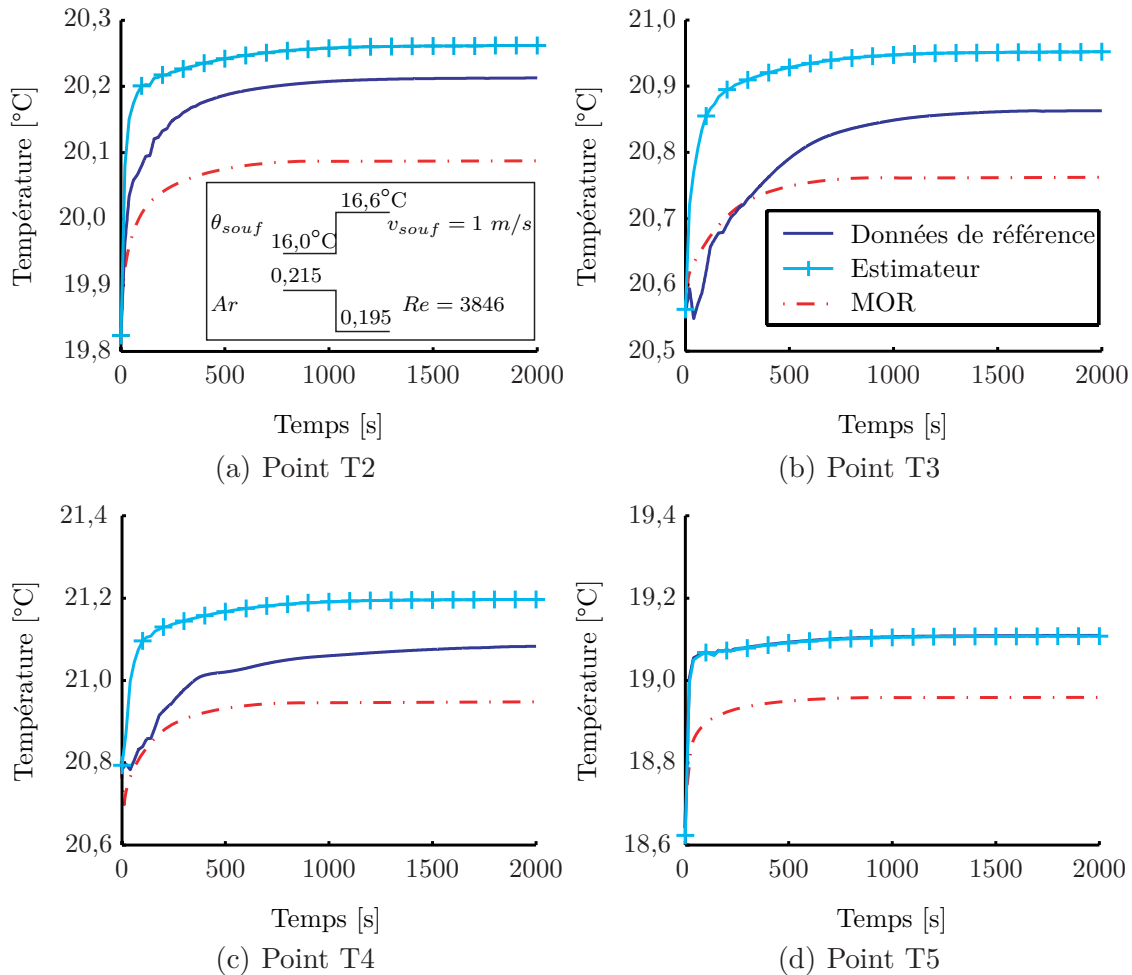


FIG. 5.4 – Cas a : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,215 à 0,195 et un nombre de Reynolds de 3846

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
		local	zone d'occupation	reprise
0,194	MOE	0,66	0,14	0,17
	MOR	0,66	0,10	0,14
	Estimateur	0,70	0,21	0,01
0,142	MOE	0,17	0,05	0,03
	MOR	0,17	0,04	0,01
	Estimateur	0,18	0,06	0,01
0, 129	MOE	0,20	0,04	0,00
	MOR	0,20	0,05	0,02
	Estimateur	0,20	0,04	0,01

TAB. 5.3 – Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime permanent

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
		zone d'occupation			reprise
		T2	T3	T4	T5
échelon de 0,194 à 0,142	MOE	0,13	0,07	0,16	0,11
	MOR	0,15	0,07	0,19	0,15
	Estimateur	0,10	0,29	0,20	0,01
échelon de 0,142 à 0,194	MOE	0,18	0,20	0,15	0,25
	MOR	0,14	0,17	0,11	0,22
	Estimateur	0,20	0,30	0,43	0,00
échelon de 0,155 à 0,129	MOE	0,11	0,08	0,18	0,05
	MOR	0,12	0,09	0,19	0,08
	Estimateur	0,08	0,12	0,14	0,01

TAB. 5.4 – Cas b ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime instationnaire

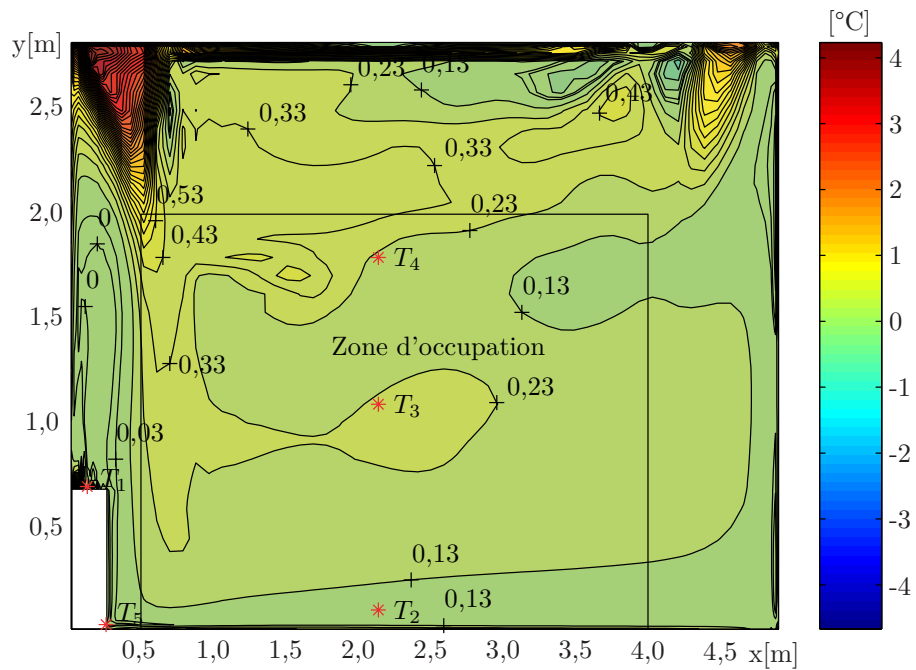
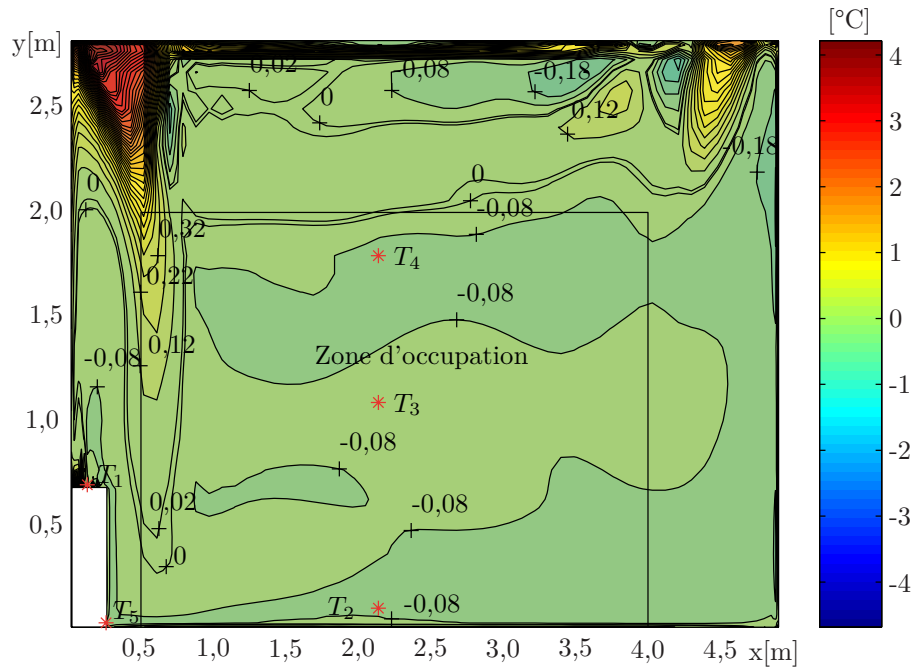


FIG. 5.5 – Cas b : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,194$

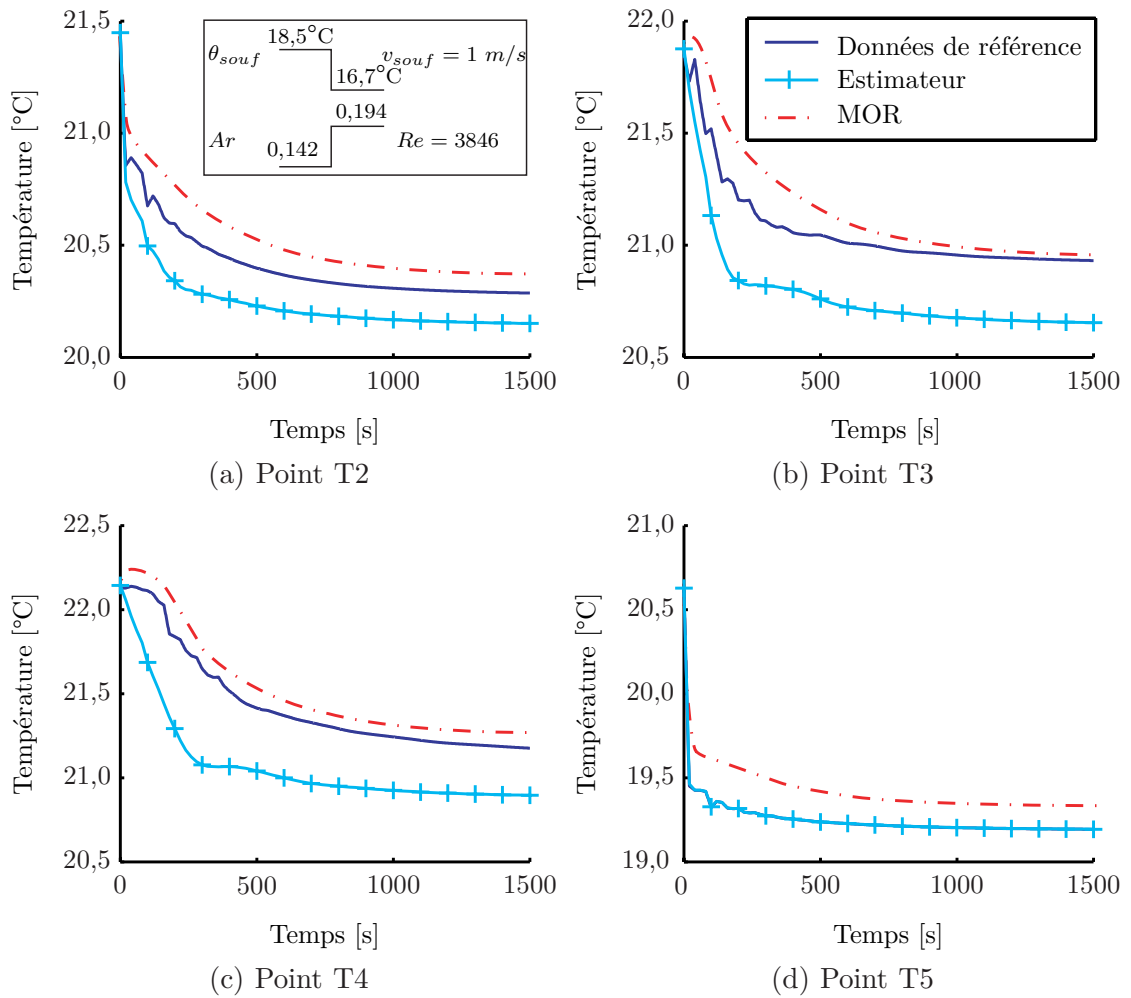


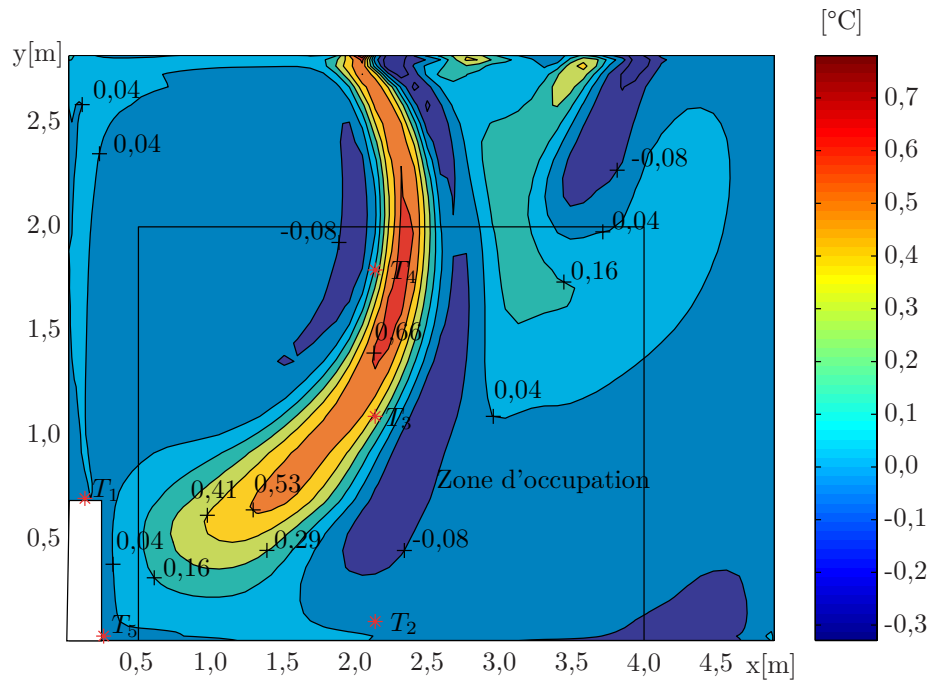
FIG. 5.6 – Cas b : régime transitoire pour un échelon du nombre d'Archimède au soufflage de 0,142 à 0,194 et un nombre de Reynolds de 3846

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
		local	zone d'occupation	reprise
0,105	MOE	0,36	0,42	0,10
	MOR	0,16	0,19	0,03
	Estimateur	0,18	0,21	0,06
0,076	MOE	0,18	0,11	0,06
	MOE	0,16	0,12	0,13
	Estimateur	0,19	0,18	0,01

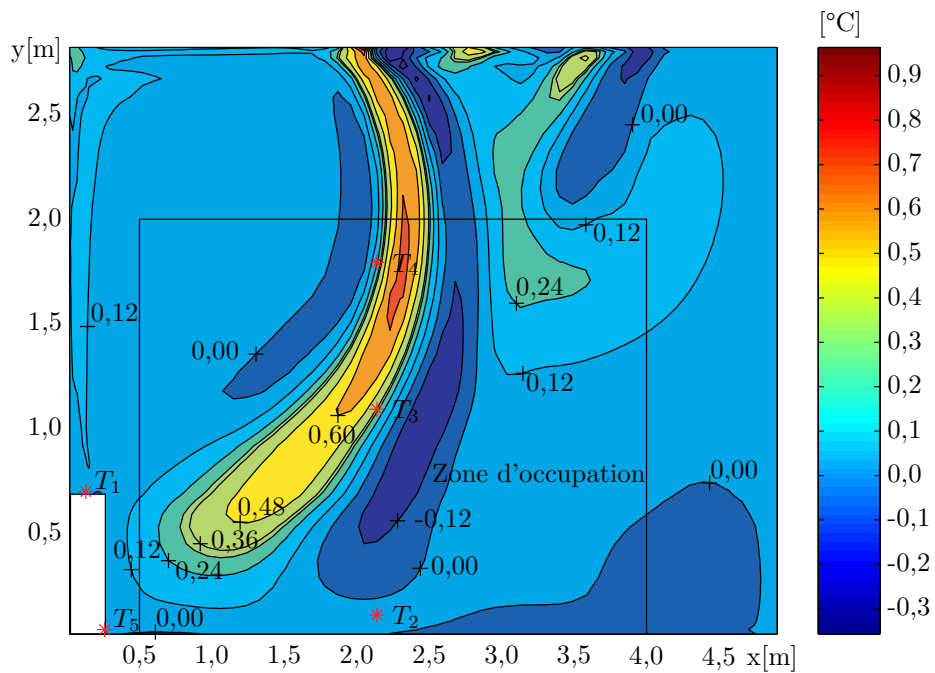
TAB. 5.5 – Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime permanent

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
		zone d'occupation		reprise	
		T2	T3	T4	T5
échelon de 0,105 à 0,076	MOE	0,15	0,44	0,17	0,04
	MOR	0,05	0,23	0,14	0,13
	Estimateur	0,16	0,32	0,09	0,01

TAB. 5.6 – Cas c ( $Re = 3846$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime instationnaire



(a) MOR



(b) Estimateur

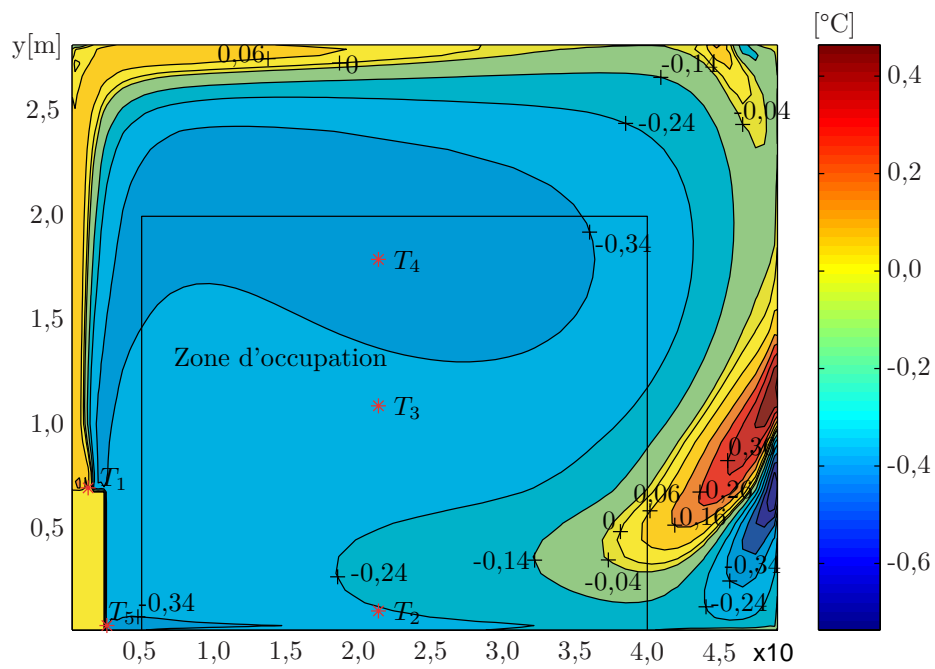
FIG. 5.7 – Cas c : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à  $Re = 3846$  et  $Ar = 0,105$

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime permanent		
		local	zone d'occupation	reprise
0,069	MOE	0,29	0,10	0,20
	MOR	0,26	0,28	0,34
	Estimateur	0,18	0,13	0,00
0,048	MOE	0,22	0,05	0,10
	MOR	0,12	0,10	0,14
	Estimateur	0,11	0,09	0,00
0,038	MOE	0,19	0,04	0,06
	MOR	0,09	0,04	0,06
	Estimateur	0,10	0,08	0,00

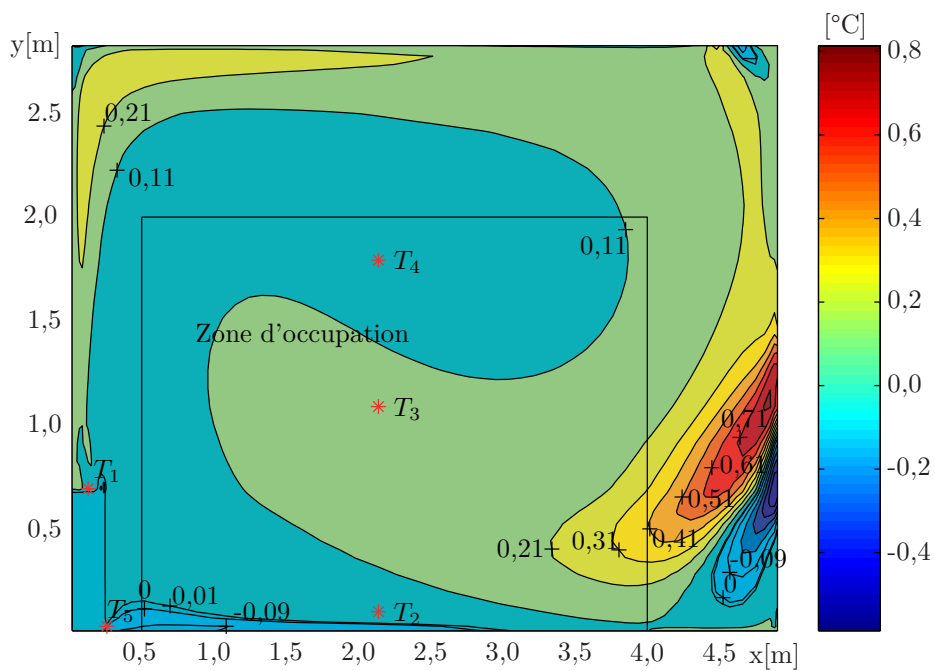
TAB. 5.7 – Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE et du MOR non corrigé (MOR nc) avec les données de référence en régime permanent

$Ar$ au soufflage	Modèle	$\sigma$ [°C] en régime transitoire			
		zone d'occupation			reprise
		T2	T3	T4	T5
échelon de 0,081 à 0,069	MOE	0,12	0,06	0,07	0,19
	MOR	0,20	0,26	0,30	0,30
	Estimateur	0,07	0,14	0,14	0,00
échelon de 0,058 à 0,048	MOE	0,06	0,01	0,02	0,10
	MOR	0,09	0,09	0,14	0,14
	Estimateur	0,05	0,10	0,07	0,00
échelon de 0,030 à 0,038	MOE	0,04	0,01	0,00	0,05
	MOR	0,02	0,04	0,05	0,04
	Estimateur	0,04	0,08	0,02	0,00

TAB. 5.8 – Cas d ( $Re = 5769$ ) : comparaison des résultats du MOE, du MOR et de l'estimateur avec les données de référence en régime instationnaire



(a) MOR



(b) Estimateur

FIG. 5.8 – Cas d : différence de température avec les données de référence pour un air soufflé à  $Re = 5769$  et  $Ar = 0,069$



### 5.2.3 Interpolation des estimateurs

Pour gérer les transitions entre deux cas, nous allons procéder pour les estimateurs comme pour les MOR. Commençons par les cas a), b) et c) qui correspondent à un nombre de Reynolds au soufflage de 3846. Le tableau (5.9) permet de comparer, en régime permanent, les résultats des estimateurs pour ces trois cas. Il montre que

Archimède au soufflage	Températures estimées			Données de référence
	cas a)	cas b)	cas c)	
0,215	20,53	20,21	20,28	20,56
0,195	20,98	20,63	20,56	20,86
<b>0,194</b>	21,08	20,73	20,62	20,92
0,183	21,39	21,11	20,83	21,07
0,155	22,05	21,63	21,20	21,57
0,142	22,37	21,90	21,39	21,85
0,129	22,70	22,16	21,58	22,16
<b>0,115</b>	23,14	22,56	21,85	22,53
0,105	23,66	23,23	22,20	22,58
0,076	24,04	23,29	22,37	22,25

TAB. 5.9 – Températures en [°C] dans la zone d’occupation en régime permanent

les données de référence peuvent tout à fait être retrouvées par interpolation des résultats des différents cas. En gras sont repérées les nombres d’Archimède marquant la frontière entre les cas.

Comme lors de la construction du modèle d’ordre réduit du local, il peut être remarqué que les transitions entre les différents cas ne se font pas subitement, mais autour du point de transition. Par exemple, bien que la frontière entre les cas a) et b) ait été fixée à  $Ar = 0,194$ , la transition s’effectue progressivement autour de cette valeur. La figure (5.9) montre de plus une différence de cinétique entre les deux transitions.

Au vu des connaissances sur les transitions dont nous disposons, nous proposons à nouveau d’effectuer la transition de l’estimateur du cas a) vers l’estimateur du cas b) entre  $Ar = 0,215$  et  $Ar = 0,183$ , et la transition entre les cas b) et c) entre  $Ar = 0,115$  et  $Ar = 0,105$ . La température dans la zone d’occupation est alors donnée par :

$$\theta_{zocc \text{ à } 1 \text{ m/s}} = p_a \theta_{zocc \text{ cas a}} + p_b \theta_{zocc \text{ cas b}} + p_c \theta_{zocc \text{ cas c}} \quad (5.18)$$

La valeur des coefficients d’interpolation pour les estimateurs des cas a), b) et c), fonction de nouveau de la température de soufflage, sont données dans le tableau

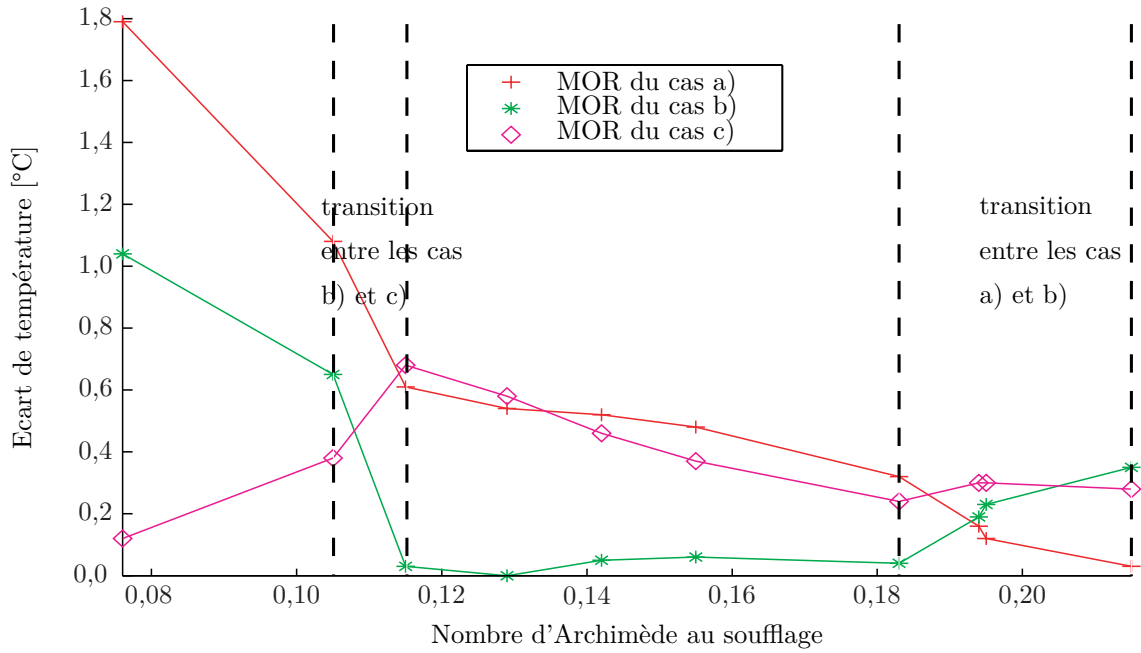


FIG. 5.9 – Valeur absolue de l'écart de température entre les estimateurs et les données de référence pour un nombre de Reynolds de 3846

(5.10). La température dans la zone d'occupation est donc calculée par interpolation linéaire des températures calculées par les estimateurs des différents cas, avec des coefficients qui dépendent de la température de soufflage.

Par compromis entre deux cas successifs, la constante de temps d'interpolation est prise égale à la moyenne entre les constantes de temps des modèles du premier ordre des cas (cf. tableau 5.12), d'où :

$$\begin{cases} \tau_{ab} = \frac{201+294}{2} = 248 \text{ s} \\ \tau_{bc} = \frac{294+131}{2} = 213 \text{ s} \end{cases} \quad (5.19)$$

De la même façon, la transition entre les deux valeurs du nombre de Reynolds au soufflage peut se faire exactement de la même façon, c'est-à-dire en réalisant une interpolation entre la température dans la zone d'occupation calculée pour une vitesse

Température d'air soufflé [°C]			
[16,0 – 17,0]	$\tau_{ab}\dot{p}_a + p_a = -\theta_s + 17$	$p_b = 1 - p_a$	$p_c = 0$
[17,0 – 19,5]	$p_a = 0$	$p_b = 1$	$p_c = 0$
[19,5 – 20,0]	$p_a = 0$	$p_b = 1 - p_c$	$\tau_{bc}\dot{p}_c + p_c = 2\theta_s - 39$
[20,0 – 21,0]	$p_a = 0$	$p_b = 0$	$p_c = 1$

TAB. 5.10 – Equations dynamiques des pondérations de l'estimateur

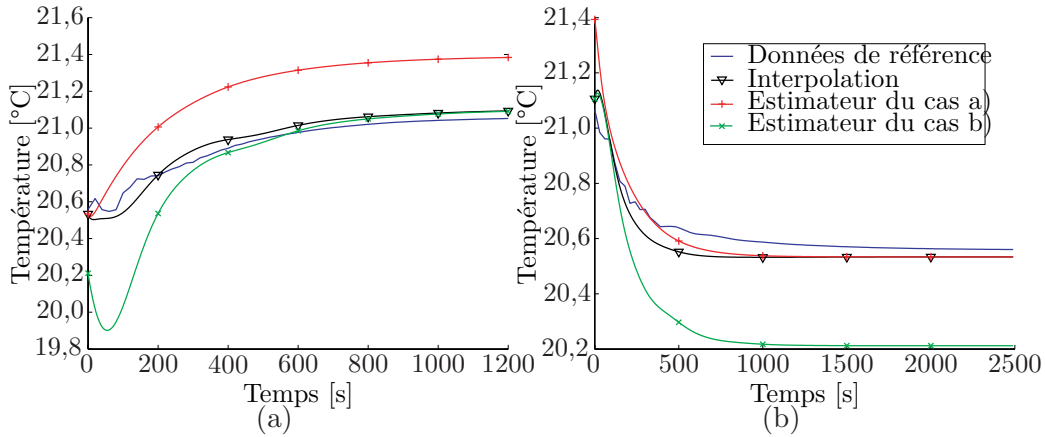


FIG. 5.10 – Interpolation des estimateurs pour un échelon du nombre d’Archimède au soufflage de : (a)  $Ar = 0,215$  à  $Ar = 0,183$ , (b)  $Ar = 0,183$  à  $Ar = 0,215$ .  $Re = 3846$

de 1 m/s, donnée par l’équation (5.18), et la température donnée par l’estimateur du cas d). Il vient :

$$\theta_{zocc} = p_{1 \text{ m/s}} \theta_{zocc \text{ à } 1 \text{ m/s}} + p_d \theta_{zocc \text{ cas } d} \quad (5.20)$$

avec :

$$\begin{cases} \tau_{vitesse} p_{1 \text{ m/s}} + p_{1 \text{ m/s}} = -2(v_{soufflage} - 1) + 1 \\ p_d = 1 - p_{1 \text{ m/s}} \end{cases} \quad (5.21)$$

D’après les données de référence, cette transition se fait avec une constante de temps de 313 s pour la température dans la zone d’occupation.

Pour valider cette approche, nous nous proposons de tester deux cas, et tout d’abord le passage du cas a) au cas b) en testant la réponse de l’estimateur à l’échelon du nombre d’Archimède au soufflage de  $Ar = 0,215$  à  $Ar = 0,183$  (figure 5.10(a)) et à l’échelon inverse de  $Ar = 0,183$  à  $Ar = 0,215$  (figure 5.10(b)).

L’écart quadratique moyen instationnaire obtenu est vraiment très faible, respectivement 0,05 °C et 0,07 °C. Dans le cas de l’échelon de  $Ar = 0,215$  à  $Ar = 0,183$ , l’interpolation améliore nettement la précision par rapport aux estimateurs respectifs des cas a) et b).

Examinons maintenant un deuxième cas test correspondant au passage du cas d) au cas a), c’est-à-dire une variation du nombre de Reynolds au soufflage de 5769 à 3846 (soit une variation de la vitesse de soufflage de 1,5 m/s à 1 m/s), en conservant la même température de soufflage de 16 °C (cf. figure 5.11).

L’augmentation de l’écart quadratique moyen à 0,20 °C en comparaison du cas test précédent provient notamment d’une moins bonne précision des données de

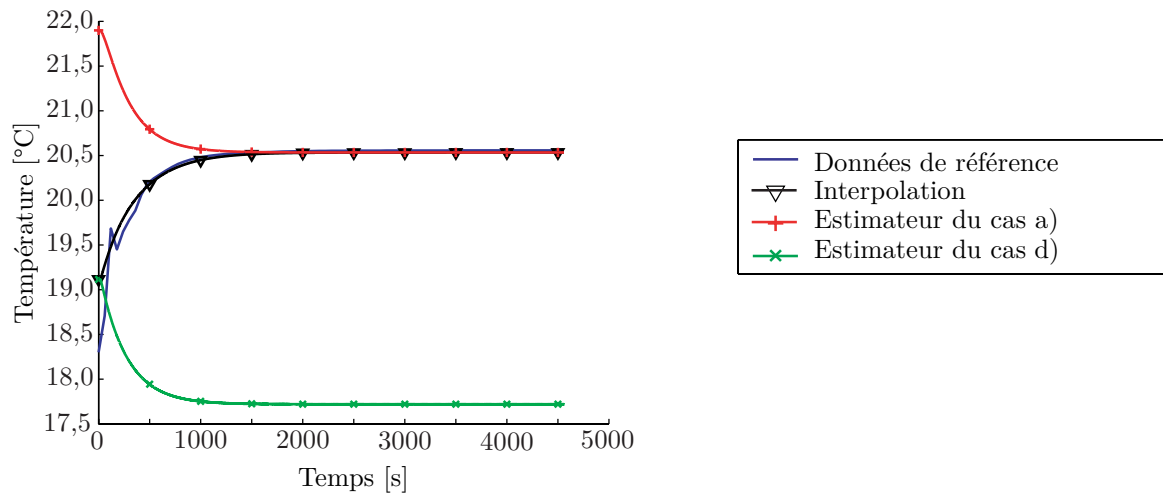


FIG. 5.11 – Interpolation des estimateurs pour un échelon du nombre de Reynolds au soufflage de 5769 à 3846

référence au voisinage de l'instant initial. Les résultats montrent tout de même une assez bonne concordance entre l'estimateur interpolé et les données de référence.

### 5.2.4 Conclusion

La figure (5.12) résume le principe d'interpolation des estimateurs qui nécessite trois données (température de reprise, température de soufflage et vitesse d'air soufflé) pour une sortie (température de la zone d'occupation). Il faut noter que , contrairement au modèle du local, les températures de surface des parois sont une donnée interne à l'estimateur, fixée une fois pour toute.

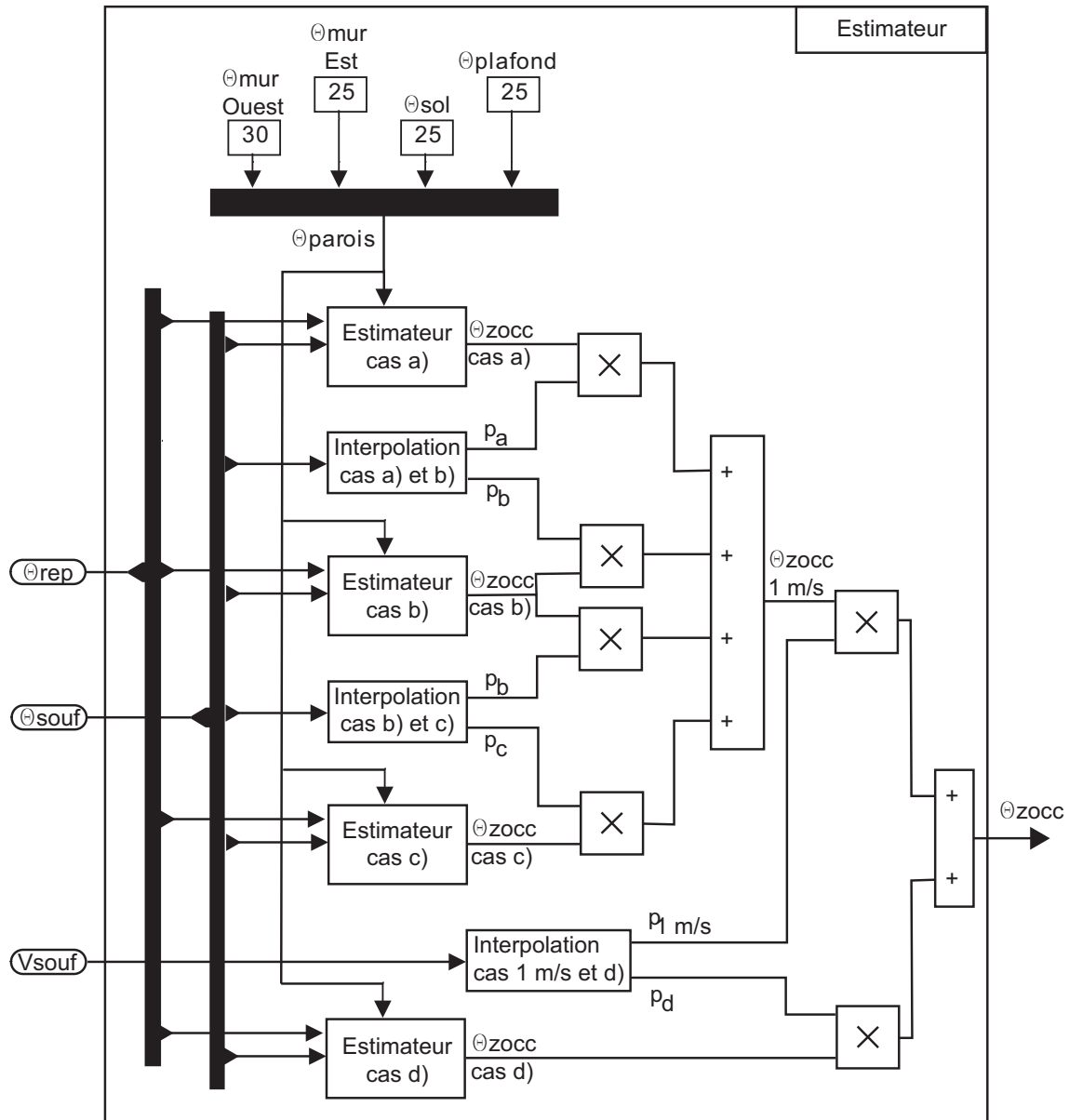


FIG. 5.12 – Schéma de principe de l'estimateur

## 5.3 Contrôle de la température

Dans cette section, un contrôleur est construit afin de réguler la température dans la zone d'occupation, à une hauteur de 1,10 m. Bien que cette température ne soit pas mesurée, mais estimée à partir de la mesure de la température de reprise, la théorie moderne du contrôle nous conduit à calculer le contrôleur comme si la température à contrôler était mesurée. En d'autres termes, il est fait abstraction de la présence de l'estimateur et le modèle du local à contrôler est :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{A}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \theta_{\text{zocc}}(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{a}(t) + \mathbf{D}_r \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (5.22)$$

A partir de ce système d'état, il est tout à fait possible de synthétiser un contrôleur en résolvant un problème de contrôle optimal. Toutefois, afin de montrer les possibilités offertes par les modèles d'ordre réduit, nous avons choisi une autre méthode de synthèse : les contrôleurs à modèle interne notés IMC (pour Internal Model Controller). Cette méthode utilise les fonctions de transfert, aussi les MOR sont préalablement mis sous cette forme avec Matlab.

### 5.3.1 Contrôleur à modèle interne (IMC)

#### 5.3.1.1 Principe

Le principe du contrôleur à modèle interne repose sur la constatation que le contrôle ne peut être convenablement assuré que si le système de contrôle contient une représentation du procédé à contrôler. Ainsi, si le contrôleur est développé sur la base d'un modèle exact du procédé, alors un contrôle parfait est théoriquement possible. Considérons par exemple la stratégie de contrôle de la figure (5.13).

En prenant comme contrôleur  $G_c$  l'inverse du modèle du procédé  $G_p$ , il est clair que la sortie sera toujours égale à la consigne. Ce contrôle en boucle ouverte n'est possible qu'en cas d'une connaissance complète et exacte du procédé. En pratique, celui-ci n'est pas parfaitement modélisé, pas totalement inversible et souvent soumis à des perturbations inconnues. Aussi, est-il nécessaire de passer à une stratégie de

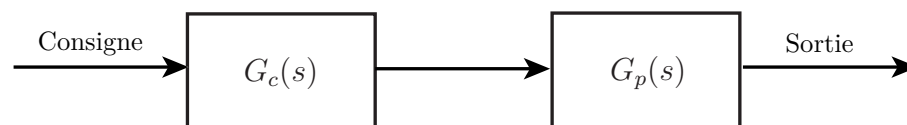


FIG. 5.13 – Contrôle en boucle ouverte

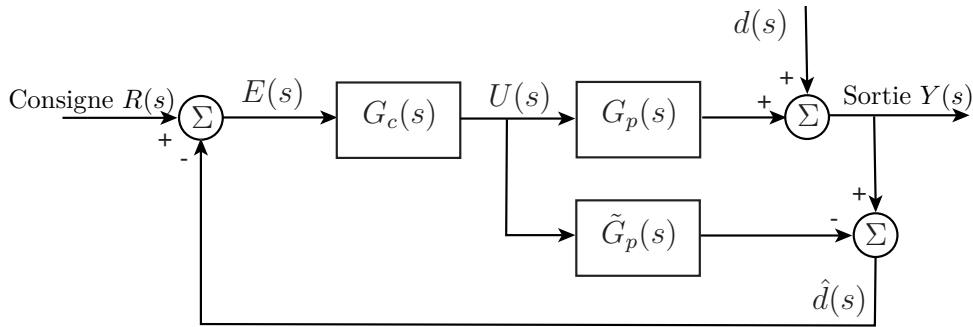


FIG. 5.14 – Principe du contrôle à modèle interne

contrôle en boucle fermée. La stratégie de contrôle à modèle interne conduit alors au schéma de contrôle de la figure (5.14), où  $d(s)$  est la perturbation inconnue et  $U(s)$  la commande. La sortie du procédé est comparée à celle du modèle pour former un signal  $\hat{d}(s)$  :

$$\hat{d}(s) = [G_p(s) - \tilde{G}_p(s)] U(s) + d(s) \quad (5.23)$$

S'il n'y a pas de perturbation, alors  $\hat{d}(s)$  mesure l'écart entre le procédé et son modèle. Si le procédé est parfaitement modélisé,  $\hat{d}(s)$  est égal à la perturbation. Ainsi  $\hat{d}(s)$  peut être assimilé aux informations manquant dans le modèle. Il peut donc être utilisé pour améliorer le contrôle en corrigeant la consigne. La fonction de transfert en boucle fermée du schéma de contrôle est donnée par l'équation (5.24).

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)R(s) + [1 - G_c(s)\tilde{G}_p(s)] d(s)}{1 + [G_p(s) - \tilde{G}_p(s)] G_c(s)} \quad (5.24)$$

D'après cette expression, il apparaît que si le procédé est parfaitement modélisé et si le contrôleur est l'inverse du modèle du procédé, alors la consigne est parfaitement suivie par le système avec un rejet complet des perturbations. Même en l'absence d'un modèle parfait, utiliser un contrôleur égal à l'inverse du modèle du procédé suffit à obtenir un rejet parfait des perturbations.

De plus, l'effet des erreurs de modélisation doit être minimisé pour augmenter la robustesse du contrôleur. Or, les erreurs de modélisation se font en général sentir pour les hautes fréquences. Il suffit donc de rajouter, en série avec le contrôleur, un filtre passe bas de fonction de transfert :

$$G_f(s) = \frac{1}{(1 + T_f s)^r} \quad (5.25)$$

Le filtre doit être au moins deux fois plus rapide que le modèle du local ce qui implique que sa constante de temps  $T_f$  est au moins deux fois plus petite que la constante de temps du modèle du local. La fonction de transfert du contrôleur à

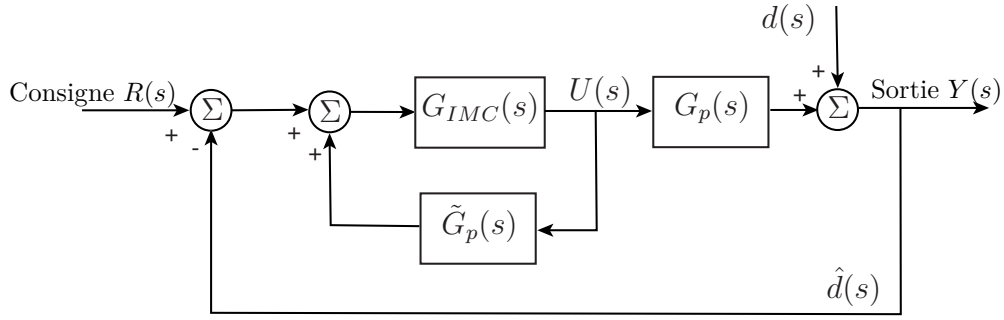


FIG. 5.15 – Transformation d'un contrôleur IMC en contrôleur classique

modèle interne s'écrit alors :

$$G_{IMC}(s) = G_c(s)G_f(s) \quad (5.26)$$

$r$  est choisi pour que le contrôleur soit réalisable, c'est-à-dire pour que l'ordre du dénominateur de la fonction de transfert du contrôleur soit au moins égal à celui du numérateur.

Dans la pratique, la fonction de transfert du système n'est pas totalement inversible. Elle peut être décomposée en deux fonctions de transfert, l'une correspondant à la partie inversible  $\tilde{G}_p^+$  et l'autre à la partie non inversible  $\tilde{G}_p^-$  telles que :

$$\tilde{G}_p(s) = \tilde{G}_p^+(s)\tilde{G}_p^-(s) \quad (5.27)$$

Le terme non inversible contient des éléments dont l'inversion provoquerait des instabilités ou des difficultés de réalisation, c'est-à-dire des termes contenant des zéros positifs et des temps de retard. En général, le contrôleur sera alors l'inverse de la partie inversible, soit :

$$G_{IMC}(s) = \tilde{G}_p^+(s)^{-1}G_f(s), \quad (5.28)$$

et son ordre est le même que celui du modèle du procédé.

Enfin, il est possible de se ramener à un schéma de contrôle en boucle fermée en transformant le schéma (5.14) comme indiqué sur les figures (5.15) et (5.16) . Soit :

$$G_c(s) = \frac{G_{IMC}(s)}{1 - \tilde{G}_p(s)G_{IMC}(s)} = \frac{\tilde{G}_p^+(s)^{-1}G_f(s)}{1 - \tilde{G}_p^-(s)G_f(s)} \quad (5.29)$$

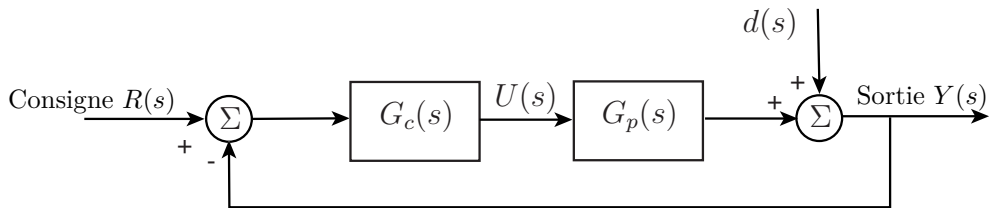


FIG. 5.16 – Schéma du contrôle classique en boucle fermée



### 5.3.1.2 Contrôleur d'ordre 1

Dans un premier temps, nous nous proposons d'appliquer le principe du contrôle à modèle interne à la construction d'un contrôleur d'ordre 1. Nous obtiendrons ainsi un contrôleur PI (Proportionnel Intégral), qui est le contrôleur majoritairement utilisé pour les ventilo-convecteurs.

L'ordre du contrôleur étant égal à celui du modèle, il est tout d'abord nécessaire de réduire le modèle du système à l'ordre 1. Etant donné la finalité de cette réduction, la théorie des réalisations équilibrées est ici fortement recommandée. En effet, elle est basée sur les notions de contrôlabilité et d'observabilité. Or, pour une variable d'état donnée, il peut y avoir un conflit entre ces deux propriétés. Aussi avant de réduire la taille du système, il est judicieux de le transformer afin de les équilibrer. Chaque variable d'état possède alors une valeur identique d'observabilité et de contrôlabilité. Les grammians de contrôlabilité et d'observabilité en résultant, sont égaux à une matrice diagonale composée des valeurs singulières dites de Hankel rangées par ordre croissant. Les nouvelles variables d'état sont alors classées par degré d'observabilité et de contrôlabilité. La réduction de modèle peut ensuite être réalisée en supprimant les parties du modèle associées à des variables d'état possédant un faible degré d'observabilité et de contrôlabilité. Les valeurs singulières de Hankel peuvent aussi être interprétées comme une indication de la corrélation entre les états et l'entrée du système. Une faible valeur est donc synonyme d'un état qui peut être supprimé. Le lecteur pourra se référer aux travaux de Palomo Del Barrio *et al.* [50] portant sur une utilisation en contrôle thermique du bâtiment.

Le tableau (5.11) donne les valeurs singulières de Hankel du modèle d'ordre réduit de chaque cas. Il apparaît clairement ici que la réduction à l'ordre 1 des modèles conduit à une mauvaise approximation au sens de la contrôlabilité et de l'observabilité des systèmes. Cette remarque met en évidence la nécessité de travailler avec des modèles d'ordre supérieur à 1 aussi bien pour le local que pour le

Mode	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)	Cas (d)
1	$1,067.10^{-2}$	$1,512.10^{-2}$	$1,392.10^{-2}$	$1,817.10^{-2}$
2	$1,144.10^{-3}$	$3,448.10^{-3}$	$1,038.10^{-2}$	$2,589.10^{-3}$
3	$9,640.10^{-5}$	$1,637.10^{-3}$	$6,877.10^{-4}$	$5,420.10^{-4}$
4	$8,381.10^{-5}$	$3,688.10^{-4}$	$3,096.10^{-4}$	$5,731.10^{-5}$
5	$8,123.10^{-6}$	$3,502.10^{-4}$	$3,069.10^{-4}$	$1,163.10^{-5}$
6	$1,194.10^{-6}$	$1,344.10^{-4}$	$1,325.10^{-5}$	$3,468.10^{-7}$
7	$5,300.10^{-8}$	$1,617.10^{-6}$	$6,274.10^{-6}$	$2,573.10^{-7}$

TAB. 5.11 – Valeurs propres de Hankel des modèles d'ordre réduit

	Cas a	Cas b	Cas c	Cas d
$G_o$	-0,019	-0,026	-0,008	-0,032
$T_e$ [s]	201,47	294,09	131,46	127,63
$\tau$ [s]	24,08	42,95	301,60	16,83

TAB. 5.12 – Fonctions de transfert d'ordre 1 du modèle

contrôleur. Néanmoins, pour garder une possibilité de comparaison avec les techniques de contrôle classique, il est intéressant de construire un contrôleur à modèle interne d'ordre 1 et de le mettre sous la forme d'un contrôleur PI :

$$G_c(s) = K_c \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} \right] \quad (5.30)$$

La réduction à l'ordre 1 des modèles d'ordre réduit conduit ainsi pour chaque cas à une fonction de transfert de la forme :

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{G_o}{1 + T_e s} e^{-\tau s} \quad (5.31)$$

avec :

- $G_o$  : gain du modèle,
- $T_e$  : constante de temps,
- $\tau$  : retard.

Le tableau (5.12) donne les valeurs de ces trois grandeurs pour chaque cas.

La partie contenant le retard,  $\tilde{G}_p^-(s) = e^{-\tau s}$  n'est pas inversible. En approchant ce terme par un développement limité au premier ordre,  $\tilde{G}_p^-(s) = 1 - \tau s$ , la construction des contrôleurs à modèle interne (équation 5.26) conduit à des contrôleurs de la forme :

$$G_{IMC}(s) = \frac{1 + T_e s}{G_o(1 + T_f s)} \quad (5.32)$$

soit,

$$G_c(s) = \frac{1 + T_e s}{G_o(T_f + \tau)s} \quad (5.33)$$

La valeur de  $T_f$  est choisie pour que le filtre soit deux fois plus rapide que le modèle, c'est-à-dire  $T_f = \frac{T_e}{2}$ . Les équations (5.30) et (5.33) permettent alors d'identifier l'expression des paramètres du contrôleur PI :

$$K_c = \frac{T_e}{G_o(T_f + \tau)} ; T_i = T_e \quad (5.34)$$

Le tableau (5.13) en donne les valeurs numériques.

	Cas a	Cas b	Cas c	Cas d
$K_c$	-84,71	-58,63	-42,34	-49,31
$T_i$ [s]	201,47	294,09	131,46	127,63
$T_f$ [s]	100,73	147,05	65,73	63,81

TAB. 5.13 – Valeurs des paramètres des contrôleurs PI

### 5.3.1.3 Contrôleur d'ordre 7

La construction d'un contrôleur à modèle interne d'ordre 7 est plus délicate, néanmoins, elle suit les mêmes étapes.

La fonction de transfert du procédé peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5.35)$$

Les tableaux (5.14) et (5.15) donnent la composition des numérateurs et des dénominateurs des fonctions de transfert pour chaque cas.

Dans notre cas, les numérateurs contiennent des termes de la forme  $(-\tau s + 1)$  ou  $(\tau^2 s^2 - 2\tau\zeta s + 1)$ , avec  $\tau$  et  $\zeta$  positif, dont les inverses sont instables. Dans ce cas, le choix optimal du contrôleur à modèle interne, au sens de l'erreur quadratique<sup>1</sup>, consiste à inverser la partie du modèle possédant des zéros dans le moitié gauche du plan et d'ajouter des pôles miroirs des zéros placés dans le plan droit. Ainsi, en écrivant la fonction de transfert sous la forme

$$G_p(s) = \frac{N^-(s)N^+(s)}{D(s)} \quad (5.36)$$

le contrôleur à modèle interne s'écrit :

$$G_{IMC}(s) = \frac{D(s)}{N^-(s)N^+(-s)(T_f s + 1)^r} \quad (5.37)$$

où :

–  $N^-$  : partie du numérateur inversible,

$${}^1 ISE = \int_0^\infty (y(t) - r(t))^2 dt$$

	$N(s)$
Cas a	$-0,019(17,14s^2 + 5,74s + 1)(98,18s^2 + 19,25s + 1)(-19,57s + 1)$
Cas b	$-0,026(1000,35s^2 + 29,20s + 1)(3582,57s^2 + 90,67s + 1)(-40,74s + 1)$
Cas c	$-0,008(7,39s^2 + 1,04s + 1)(154,18s^2 + 18,05s + 1)(18,74s + 1)(-301,24s + 1)$
Cas d	$-0,032(38,15s^2 + 9,26s + 1)(4,76s + 1)(-0,57s + 1)(37,31s^2 - 5,37s + 1)$

TAB. 5.14 – Numérateurs des fonctions de transfert du local

	$D(s)$
Cas a	$(2,50s + 1)(4,70s + 1)(55,59s^2 + 11,15s + 1)(12,81s + 1)(199,31s + 1)$
Cas b	$(13,06s + 1)(1105,65s^2 + 18,00s + 1)(3977,06s^2 + 67,37s + 1)(324,99s + 1)$
Cas c	$(7,68s^2 + 1,23s + 1)(161,63s^2 + 19,07s + 1)(164,04s^2 + 23,85s + 1)(128,19s + 1)$
Cas d	$(0,41s + 1)(7,85s + 1)(45,44s^2 + 10,14s + 1)(39,27s^2 + 10,88s + 1)(122,25s + 1)$

TAB. 5.15 – Dénominateurs des fonctions de transfert du local

- $N^+$  : partie du numérateur non inversible,
- $r$  : ordre relatif de la fonction de transfert du modèle. (5.35)

Le tableau (5.16) donne les fonctions de transfert des contrôleurs à modèle interne ainsi obtenus.

	$G_{IMC}(s)$
Cas a	$-\frac{(2,50s+1)(4,70s+1)(55,59s^2+11,15s+1)(12,81s+1)(199,31s+1)}{0,019(17,14s^2+5,74s+1)(98,18s^2+19,25s+1)(19,57s+1)(T_f s+1)}$
Cas b	$-\frac{(13,06s+1)(1105,65s^2+18,00s+1)(3977,06s^2+67,37s+1)(324,99s+1)}{0,026(1000,35s^2+29,20s+1)(3582,57s^2+90,67s+1)(40,74s+1)(T_f s+1)}$
Cas c	$-\frac{(7,68s^2+1,23s+1)(161,63s^2+19,07s+1)(164,04s^2+23,85s+1)(128,19s+1)}{0,008(7,39s^2+1,04s+1)(154,18s^2+18,05s+1)(18,74s+1)(301,24s+1)(T_f s+1)}$
Cas d	$-\frac{(0,41s+1)(7,85s+1)(45,44s^2+10,14s+1)(39,27s^2+10,88s+1)(122,25s+1)}{0,032(37,31s^2+5,37s+1)(38,15s^2+9,26s+1)(4,76s+1)(T_f s+1)^2}$

TAB. 5.16 – Fonctions de transfert des contrôleurs à modèle interne d'ordre 7

### 5.3.2 Contrôleur unique

Nous disposons à présent de quatre contrôleurs, un pour chaque cas. Pour obtenir un seul contrôleur, la première méthode consiste à construire un contrôleur à partir des quatre contrôleurs obtenus par la méthode des modèles internes. Ce contrôleur doit donc être suffisamment robuste pour pouvoir contrôler le système quelque soit le cas de fonctionnement. Dans le cas d'un contrôleur d'ordre 1, il suffit de choisir comme paramètres du contrôleur PI, le gain le plus faible en valeur absolue et le temps d'intégration le plus élevé. Il vient donc :

$$K_c = -42,34 ; T_i = 294,09 \text{ s} \quad (5.38)$$

Dans le cas d'un contrôleur d'ordre 7, cette méthode devient plus hasardeuse. De plus, pourquoi supprimer l'avantage de posséder un contrôleur adapté à chaque configuration. De la même façon que pour les quatre modèles du local et de l'estimateur, il est possible de créer un contrôleur adaptatif en utilisant le concept de logique floue. L'adaptation du contrôleur se fait autour de l'intervalle de transition



### 5.3.3.1 Variation de consigne

Pour évaluer les performances de chacun de ces contrôleurs, plusieurs critères sont utilisés en fonction de la propriété étudiée :

- l'erreur statique est égale à l'écart entre la consigne et la valeur finale atteinte par la température dans la zone d'occupation à 1,10m,
- le temps de réponse correspond au temps pour que la variation de la température dans la zone d'occupation atteigne 95 % de la variation totale qui définit la fin du régime transitoire. C'est une mesure de la rapidité du contrôleur,
- l'erreur en régime transitoire est quantifiée par trois critères complémentaires :

1. le critère de Hall-Sartorius définit par :

$$I_1 = \int_0^{\infty} (\theta_{zocc}(t) - consigne(t))^2 dt \quad [^{\circ}C^2.s]. \quad (5.39)$$

Il favorise les régimes transitoires rapides car l'écart initial est prépondérant, mais ne tient que peu compte de l'amortissement en pénalisant surtout les forts écarts,

2. pour tenir compte de l'amortissement, le critère précédent est complété par l'intégrale de la valeur absolue de l'écart :

$$I_2 = \int_0^{\infty} |\theta_{zocc}(t) - consigne(t)| dt \quad [^{\circ}C.s], \quad (5.40)$$

3. pour donner un poids plus important aux faibles écarts survenant en fin du régime transitoire, la quantité suivante est utilisée :

$$I_3 = \int_0^{\infty} t |\theta_{zocc}(t) - consigne(t)| dt \quad [^{\circ}C.s^2], \quad (5.41)$$

- la variation de l'ouverture de la vanne est quantifiée par :

$$\sqrt{\int (ouverture(t) - ouverture(t_{final}))^2 dt} \quad (5.42)$$

Cette expression a l'avantage de pénaliser un ouverture oscillante. Elle peut être reliée à la fatigue de la vanne.

Le système contrôlé est soumis à une succession d'échelons de consigne pour la température dans la zone d'occupation permettant de balayer l'ensemble de la plage de fonctionnement. La figure (5.18) représente ces échelons ainsi que la température et la vitesse de l'air soufflé correspondantes d'après les données de référence.

La figure (5.19) donne la réponse du système contrôlé pour les trois types de contrôleur.

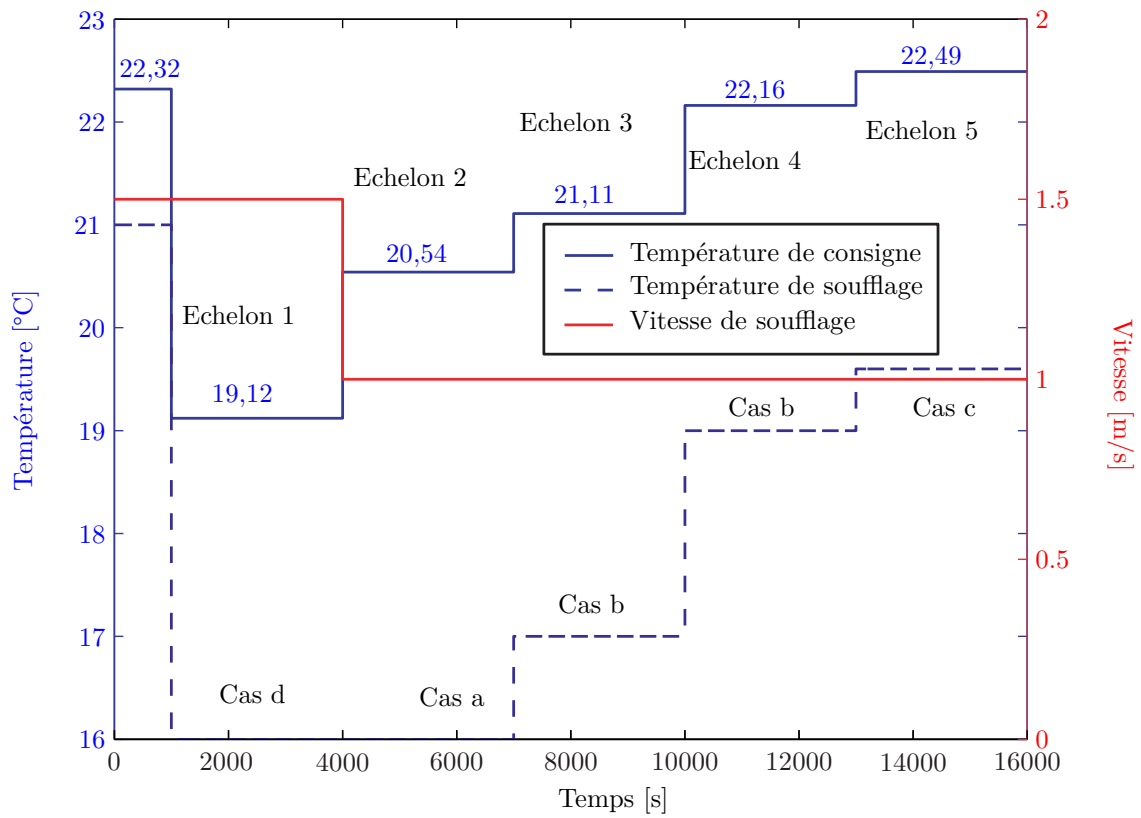
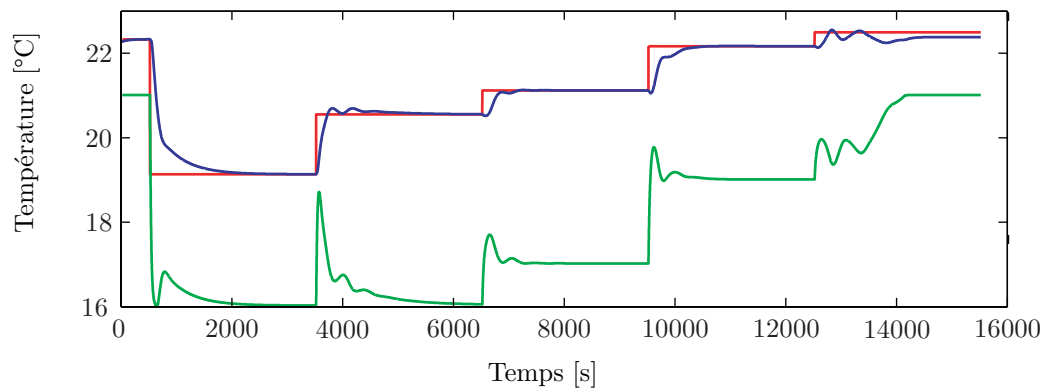
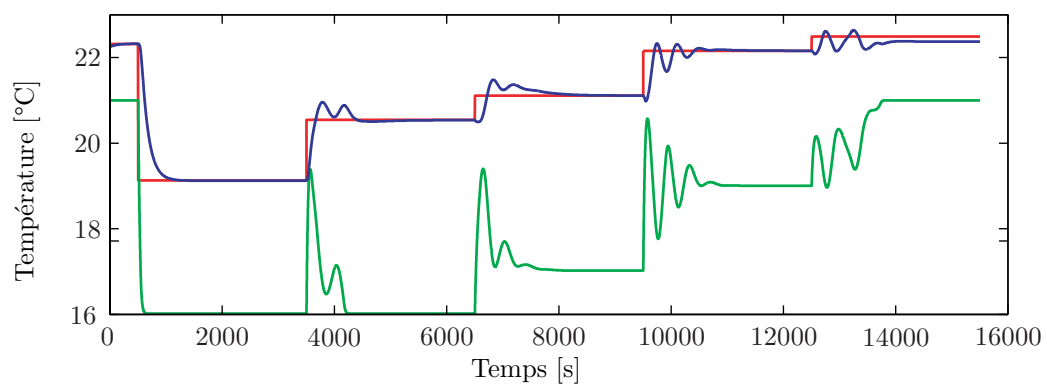


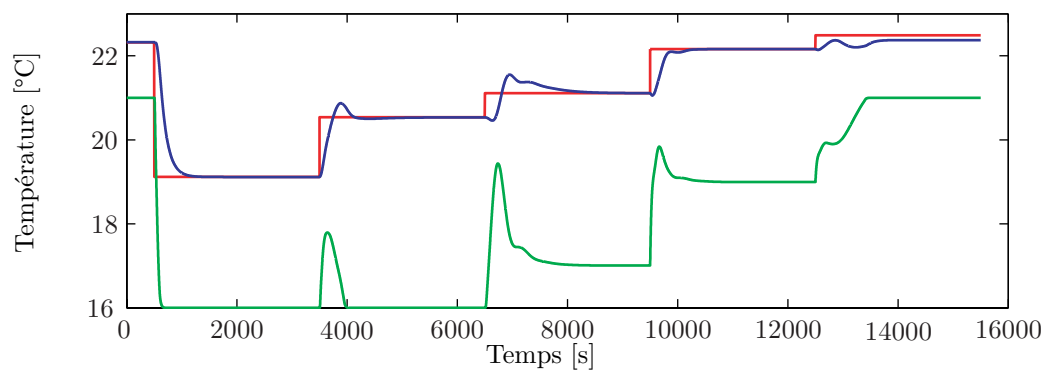
FIG. 5.18 – Séquence de consigne



(a) Contrôleur robuste



(b) Contrôleur adaptatif d'ordre 1



(c) Contrôleur adaptatif d'ordre 7

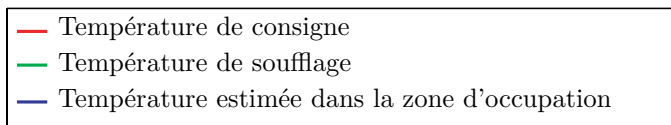


FIG. 5.19 – Réponse du système contrôlé à une succession d'échelons de la température de consigne



### Ecart statique

Quelque soit le contrôleur, l'écart statique est nul sauf pour le dernier échelon. Rappelons que le passage du cas b) au cas c) correspond à une diminution de la température dans la zone d'occupation à 1,10 m lorsque la température de soufflage augmente (cf. tableau 5.9). Or, les trois contrôleurs ont pour caractéristique commune d'augmenter la température de soufflage lorsque la différence entre la consigne et la température estimée est positive. En conséquence, pour cet échelon, ils tendent forcément à augmenter la température de soufflage au maximum, c'est-à-dire à 21 °C. Le régime permanent obtenu pour la température dans la zone d'occupation correspond effectivement bien à cette température de soufflage.

### Temps de réponse

	Echelon 1	Echelon 2	Echelon 3	Echelon 4	Echelon 5
Contrôleur robuste	931	1077	596	710	1829
Contrôleur adaptatif d'ordre 1	421	836	1632	1035	1393
Contrôleur adaptatif d'ordre 7	446	569	1787	625	1210

TAB. 5.17 – Valeurs des temps de réponse [s]

Pour les échelons 1, 2 et 5, il ne fait aucun doute de la supériorité des contrôleurs adaptatifs sur le contrôleur robuste, ainsi que du contrôleur d'ordre 7 sur le contrôleur d'ordre 1. Les choses ne semblent pas aussi claires dans le cas des échelons 3 et 4. Rappelons dans un premier temps que ces deux échelons correspondent pour le premier au cas b) et pour le second à la transition entre les cas b) et c). Pour ces deux échelons, le modèle du local connaît une oscillation initiale non physique contraire à la consigne. Il est donc normal que la commande augmente fortement. Par contre, pour le contrôleur robuste et l'échelon 3, ce saut de la commande est atténué car le gain du contrôleur est plus faible (-42,34) que celui des contrôleurs adaptatifs (-56,63), d'où un temps de réponse plus court. Concernant l'échelon 4, seul le contrôleur adaptatif d'ordre 7 possède un temps de réponse plus court.

### Erreur en régime transitoire

Au vu des résultats du tableau (5.18), il semble que le contrôleur robuste donne globalement les meilleures performances. Néanmoins, nos connaissances sur le fonctionnement des modèles d'ordre réduit, ainsi que les résultats des tableaux (5.19) et (5.20) vont nous permettre de discuter plus en profondeur les résultats des différents

	Echelon 1	Echelon 2	Echelon 3	Echelon 4	Echelon 5
Contrôleur robuste	1748	138	61	182	72
Contrôleur adaptatif d'ordre 1	1108	162	98	185	83
Contrôleur adaptatif d'ordre 7	1327	195	158	181	89

TAB. 5.18 – Valeurs du critère  $I_1$  [ $^{\circ}C^2.s$ ]

	Echelon 1	Echelon 2	Echelon 3	Echelon 4	Echelon 5
Contrôleur robuste	788	259	141	280	409
Contrôleur adaptatif d'ordre 1	555	304	321	298	439
Contrôleur adaptatif d'ordre 7	627	284	434	240	476

TAB. 5.19 – Valeurs du critère  $I_2$  [ $^{\circ}C.s$ ]

	Echelon 1	Echelon 2	Echelon 3	Echelon 4	Echelon 5
Contrôleur robuste	$2,69.10^5$	$1,40.10^5$	24715	63753	$5,85.10^5$
Contrôleur adaptatif d'ordre 1	88522	$1,36.10^5$	$1,78.10^5$	$1,02.10^5$	$5,72.10^5$
Contrôleur adaptatif d'ordre 7	$1,02.10^5$	95461	$2,57.10^5$	39625	$5,93.10^5$

TAB. 5.20 – Valeurs du critère  $I_3$  [ $^{\circ}C.s^2$ ]

contrôleurs. Dans le cas de l'échelon 3 par exemple, il est manifeste que le contrôleur robuste est plus performant. Comme nous l'avons déjà remarqué dans l'analyse des temps de réponse, la valeur plus faible de son gain apporte pour cet échelon la robustesse que ne contient pas le MOR du local, notamment aux instants initiaux. Par contre, dans le cas de l'échelon 2, le critère  $I_1$  met en avant sa plus faible erreur initiale alors que le critère  $I_3$  montre qu'il est moins performant que le contrôleur adaptatif d'ordre 7 en fin du régime transitoire. Quant au cas de l'échelon 5, l'ensemble des contrôleurs donne des résultats médiocres du fait de la présence d'une erreur statique. Pour les échelons 1 et 4, les contrôleurs adaptatifs sont plus performants. Il est intéressant de constater que le contrôleur adaptatif d'ordre 1 obtient de meilleurs résultats sur l'échelon 1 qui correspond au cas d). Or, la création de la base de projection a montré que seuls trois modes auraient été nécessaires afin de construire un modèle d'ordre réduit et que le mode le plus énergétique contient à lui seul 98,15 % de l'énergie (cf. tableau 4.2). Ainsi, les résultats du contrôleur d'ordre 7 semble montrer ici que la conservation de modes de très faible énergie tend à diminuer les performances du contrôleur.

Enfin, pour l'échelon 4, le contrôleur adaptatif d'ordre 7 fait preuve de meilleures performances notamment en fin de régime transitoire (critère  $I_3$ ). Cet échelon correspond au cas b) pour lequel le MOR n'aurait, comme pour le cas a), nécessité que 4 modes, mais dont le premier mode ne contient pas autant d'énergie. D'autre part, ce cas correspond aussi au MOR corrigé donnant le plus faible écart entre les coefficients temporels calculés par le MOR et ceux obtenus par projection directe des snapshots sur la base. Ainsi, le contrôleur d'ordre 7 semble ici bénéficier d'une meilleure robustesse que les autres contrôleurs.

### Ouverture

	Echelon 1	Echelon 2	Echelon 3	Echelon 4	Echelon 5
Contrôleur robuste	305	677	174	184	849
Contrôleur adaptatif d'ordre 1	201	884	614	479	790
Contrôleur adaptatif d'ordre 7	440	546	712	216	546

TAB. 5.21 – Valeurs des ouvertures de la vanne

Le tableau (5.21) montre que l'intégrale de l'ouverture de la vanne est généralement plus faible pour les contrôleurs adaptatifs sauf pour l'échelon 3 et dans une moindre mesure l'échelon 4. Hormis pour le cas de l'échelon 1, le contrôleur adaptatif d'ordre 7 entraîne une ouverture de la vanne nettement moins oscillante (cf figure 5.19(c)) que le contrôleur adaptatif d'ordre 1 (cf figure 5.19(b)) et le contrôleur robuste (cf figure 5.19(a)).

#### 5.3.3.2 Variation des températures de surface des parois

Etudions maintenant le comportement du système contrôlé par le contrôleur adaptatif d'ordre 7 lorsque les températures de surface du vitrage et du plancher varient. A l'instant initial, la température de consigne est à 22,2 °C ce qui correspond à une température de soufflage de 19,0 °C. La consigne étant maintenue constante, la température de soufflage varie seulement en réponse à la variation des températures de surface des parois. Les premiers résultats ont montré que le modèle d'ordre réduit du local ne permet pas d'obtenir des valeurs cohérentes avec celles issues des simulations StarCD. Ce n'est pas étonnant puisque ce modèle est basé sur des simulations CFD au sein desquelles les températures de paroi étaient constantes. Pour corriger ce défaut, il faudrait utiliser la linéarité des modèles afin

d'obtenir des MOR constitués de deux systèmes d'état d'ordre réduit, l'un réagissant aux variations des conditions de soufflage, et l'autre réagissant aux variations des températures de surface des parois construit de façon similaire au premier. Aussi, l'objectif de cette partie consiste à montrer que l'estimateur est capable de tenir compte de la variation de la température des parois du local par comparaison avec les valeurs données par le modèle d'ordre réduit du local, et que le contrôleur peut maintenir la température de consigne malgré cette perturbation

### Variation de la température de surface du vitrage

A l'instant  $t = 100$  s, la température de surface du vitrage passe de 30 à 35 °C. La température de soufflage varie alors de 19,0 à 18,8 °C pour maintenir la température de consigne dans la zone d'occupation (figure 5.20).

Le tableau (5.22) donne les températures de reprise et de la zone d'occupation obtenues pour ses deux températures de soufflage avec le modèle d'ordre réduit en boucle ouverte et le système contrôlé en boucle fermé composé du MOR, de l'estimateur et du contrôleur.

Les températures obtenues avec le système contrôlé sont cohérentes (erreur de 0,1 °C) avec celles du modèle d'ordre réduit. Néanmoins, il faut remarquer que les

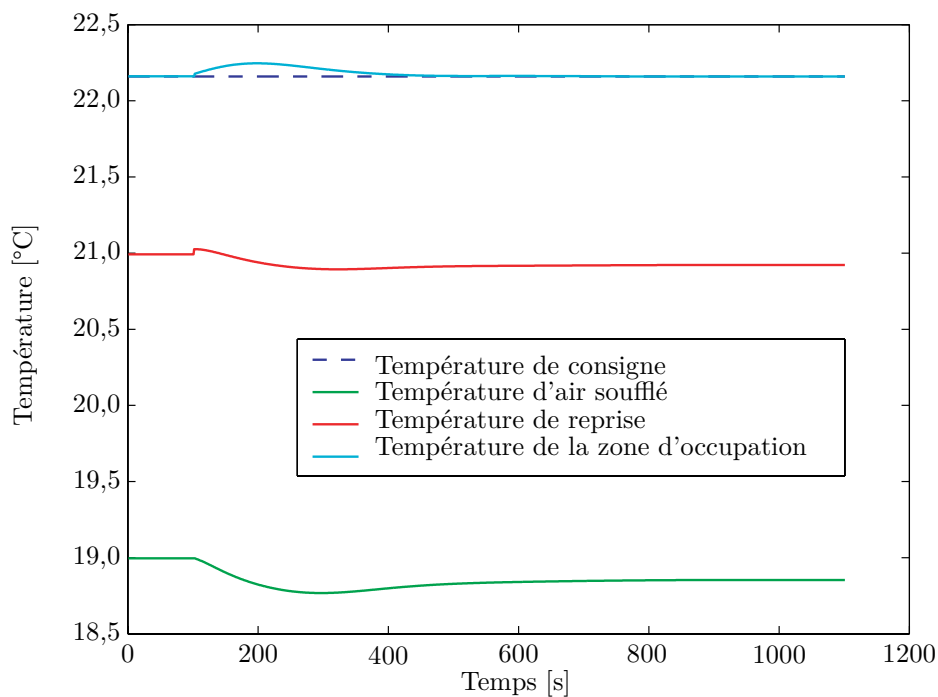


FIG. 5.20 – Réponse du système contrôlé pour une variation de la température de surface du vitrage

	Température de soufflage	19,0	18,8
Modèle du local en boucle ouverte	Température de reprise	21,0	20,9
	Température de la zone d'occupation	22,2	22,1
Système contrôlé	Température de reprise	21,0	20,9
	Température de la zone d'occupation	22,2	22,2

TAB. 5.22 – Températures en [°C] pour une variation de la température de surface du vitrage

variations de température sont ici très faibles.

### Variation de la température de surface du plancher

A l'instant  $t = 100$  s, la température de surface du plancher passe de 25 à 30 °C. La température de soufflage varie alors de 19,0 à 18,1 °C pour maintenir la température de consigne dans la zone d'occupation (figure 5.21).

Le tableau (5.23) donne les températures de reprise et de la zone d'occupation obtenues pour ses deux températures de soufflage avec le modèle d'ordre réduit en boucle ouverte et le système contrôlé en boucle fermé.

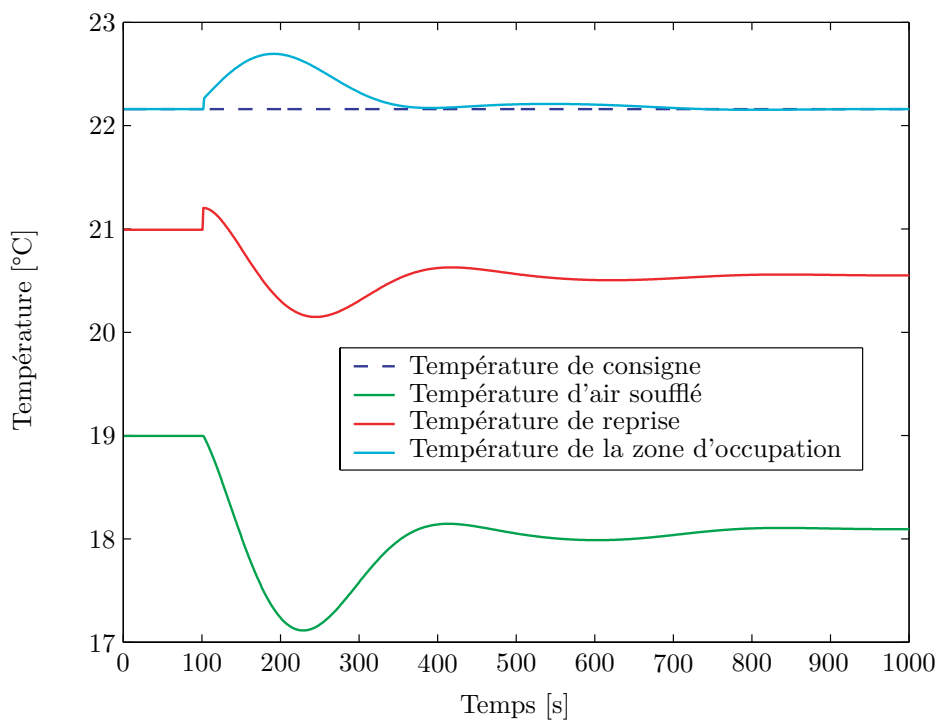


FIG. 5.21 – Réponse du système contrôlé pour une variation de la température de surface du plancher

	Température de soufflage	19,0	18,1
Modèle du local en boucle ouverte	Température de reprise	21,0	20,6
	Température de la zone d'occupation	22,2	22,0
Système contrôlé	Température de reprise	21,0	20,6
	Température de la zone d'occupation	22,2	22,2

TAB. 5.23 – Températures en [°C] pour une variation de la température du plancher

Les variations de température sont cette fois-ci conséquentes et permettent de conclure que l'estimateur arrive à prendre en compte la variation de la température de surface du plancher avec une précision suffisante à savoir inférieure à 0,2 °C, ce qui reste inférieur à l'écart de température minimal ressenti par le corps humain. De plus, l'écart entre les températures de reprise initiale et finale est de 0,4 °C pour les deux modèles. Ceci met en évidence l'intérêt du contrôle à partir d'une estimation en temps réel de la température de la zone d'occupation, et non à partir d'une estimation forfaitaire qui dans ce cas aurait conduit à un maintien de la température de reprise mais pas de la température de la zone d'occupation.

### Variation des températures de surface du vitrage et du plancher

A l'instant  $t = 100$  s, la température de surface du plancher passe de 25 à 30 °C et celle du vitrage de 30 à 40 °C pour simuler l'apparition d'une tâche solaire. La température de soufflage varie alors de 19,0 à 17,8 °C pour maintenir la température de la zone d'occupation (figure 5.22). Le tableau (5.24) donne les températures de reprise et dans la zone d'occupation obtenues pour ses deux températures de soufflage avec le modèle d'ordre réduit en boucle ouverte et le système contrôlé.

	Température de soufflage	19,0	17,8
Modèle du local en boucle ouverte	Température de reprise	21,0	20,6
	Température de la zone d'occupation	22,2	22,1
Système contrôlé et estimateur	Température de reprise	21,0	20,4
	Température de la zone d'occupation	22,2	22,2

TAB. 5.24 – Températures en [°C] pour une variation des températures de surface du plancher et du vitrage

De nouveau, l'écart entre la température estimée et la température donnée par le MOR est inférieure 0,1 °C. De plus, la température de l'air à la reprise varie suivant le modèle de 0,4 à 0,6 °C.

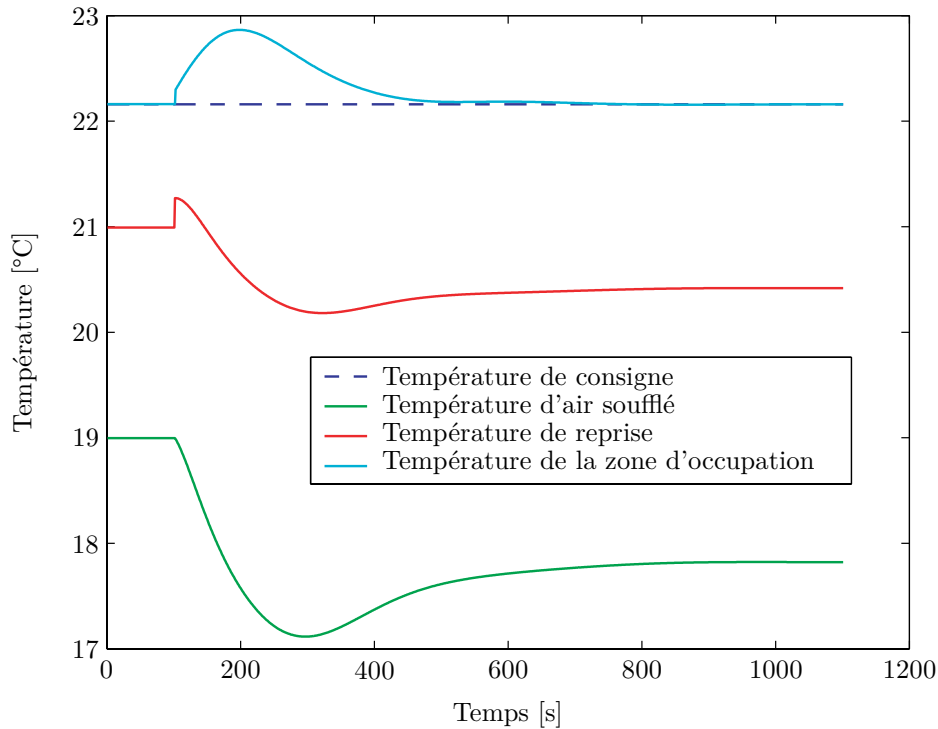


FIG. 5.22 – Réponse du système pour une variation des températures de surface du plancher et du vitrage (tâche solaire)

### 5.3.4 Conclusion

Ces différents tests de contrôle mettent en évidence plusieurs enseignements concernant l'utilisation des modèles d'ordre réduit afin de tenir compte du champ thermo-aéraulique pour le contrôle de la température dans la zone d'occupation :

1. l'écriture des modèles sous forme de système d'état nous ouvre les portes de la théorie moderne du contrôle peu utilisée dans le domaine du bâtiment,
2. la synthèse de contrôleur par modèle interne permet d'intégrer le modèle du local au sein même du contrôleur. Ainsi, la construction d'un contrôleur d'ordre 1 se révèle être très simple et rapide. La synthèse d'un contrôleur d'ordre 7 apparaît plus délicate, mais est maintenant envisageable,
3. l'ensemble des résultats donne un léger avantage au contrôleur adaptatif d'ordre 7, et notamment du fait de sa plus grande stabilité. Néanmoins, il s'avère aussi plus sensible aux erreurs de modélisation (oscillations initiales non physiques) que le contrôleur d'ordre 1 robuste. Pour améliorer cette caractéristique, il pourrait être envisagé de tenir compte des erreurs de modélisation lors de la construction de l'estimateur ou du contrôleur (contrôle robuste),
4. les variations des températures de surface des parois a montré que les MOR, les estimateurs et les contrôleurs y sont sensibles bien que la base de réduction ait été construite à partir de snapshots n'intégrant pas cette variation. Il sera

intéressant d'associer les estimateurs et les contrôleurs avec un local réel et non un modèle, et de voir dans quelle mesure la variation de température de surface des parois doit être intégrée à la construction des snapshots.

5. enfin, les derniers tests mettent en évidence la différence de comportement entre les températures de reprise et de la zone d'occupation lorsqu'elles sont contrôlées, et donc la nécessité de modèles d'ordre réduit du champ thermo-aérodynamique.





## Conclusion générale

Notre objectif était de montrer la faisabilité de la prise en compte du champ thermo-aéroulque pour le contrôle thermique d'un local. Les deux difficultés majeures de ce travail résidaient dans le difficulté à modéliser le champ thermo-aéroulque d'un local puis à construire un modèle résoluble en temps réel et d'ordre suffisamment faible pour être éligible à la synthèse d'un contrôleur.

Tout d'abord, nous avons obtenu des données de référence à partir d'un logiciel de CFD. Bien que moins réalistes que celle issues de mesures, elle nous ont d'une part permis de mieux maîtriser leurs paramètres, et d'autre part de traiter plus de cas que nous l'aurait autorisé un local expérimental.

La construction d'un modèle thermo-aéroulque a donné lieu à la première hypothèse en utilisant un champ de vitesse fixé, nous obligeant à distinguer quatre cas différents. La limite d'une telle hypothèse s'est donc rapidement faite sentir en restreignant l'intervalle de validité de chaque champ lorsque la force d'inertie du jet diminue. Par contre, cette hypothèse a permis la simplification des équations décrivant la physique du phénomène, ainsi que la linéarisation de l'équation de conservation de l'énergie. Enfin, la finesse du maillage utilisé a nécessité l'usage de conditions aux limites détaillées variant elles aussi en fonction des cas. Au final, un modèle d'ordre élevé a été obtenu pour chacun des cas, et validé en le comparant aux données de référence.

Dans l'étape suivante, un modèle d'ordre réduit a été obtenu par projection des modèles d'ordre élevé. La construction de la base de projection a été réalisée en utilisant la décomposition aux valeurs propres. Des simulations instationnaires en réponse à deux échelons successifs ont permis d'extraire les snapshots avec pour objectif d'obtenir une bonne représentation des champs thermo-aéroulques contrôlés. Dans cette optique l'utilisation des modèles d'ordre élevés en lieu et place de simulations CFD peut se révéler d'un gain de temps très appréciable dans le cas où le champ thermo-aéroulque est suffisamment stable ou lorsque les modèles d'ordre élevé sont suffisamment précis. Dans le cas contraire, l'extraction des snapshots à partir de simulations CFD peut dans un sens apporter des informations supplémen-

taires suite à l'hypothèse d'un champ de vitesse fixé, et dans l'autre sens complexifier la correction des modèles réduits par la confrontation des erreurs de modélisation des modèles d'ordre élevés et les CFD. Concernant l'ordre de la réduction, nous avons fait le choix de garder le même nombre de modes pour tous les cas pour anticiper la synthèse d'un contrôleur de même taille. Finalement, ce choix a pu réduire la précision des modèles d'ordre réduit quand le nombre de modes conservés était bien supérieur au nombre minimal imposé par le critère de troncature.

Pour contrôler directement la température dans la zone d'occupation en s'affranchissant d'une approximation forfaitaire à partir de la température de reprise, nous avons fait appel aux estimateurs d'état qui s'appuient sur le formalisme du système d'état et ses propriétés. Bien qu'inégaux suivant les cas, les résultats sont encourageants sachant que l'estimateur utilisé a une expression simple et pourrait être enrichi. Disposant d'une estimation de la température dans la zone d'occupation, et de modèles d'ordre réduit, nous étions en mesure de synthétiser un contrôleur. Devant les possibilités offertes par la théorie moderne du contrôle, notre choix s'est porté sur les contrôleurs à modèle interne dont l'avantage réside dans la simplicité de leur principe, bien que leur synthèse puisse parfois être délicate lorsque l'ordre augmente. Nos conclusions, qui s'appuient à la fois sur les résultats des simulations de contrôle et sur le calcul des valeurs de Hankel, montrent l'intérêt de rechercher la synthèse de contrôleurs d'ordre supérieur à un qui sont seuls à même de tenir compte de la complexité du système thermo-aéraulique régissant la température dans un local.

Ces conclusions mettent en évidence de nombreux points à approfondir. Par exemple, la construction de la base de projection et des snapshots doit encore être étudiée en utilisant d'autres méthodes pour extraire les snapshots, ou en enrichissant itérativement la base avec des modes issus des résultats des modèles d'ordre réduit contrôlés. Il serait également intéressant de comparer notre démarche de projection à une projection de Galerkin, c'est-à-dire d'examiner les conséquences du moment de la discrétisation spatiale (avant la projection dans notre cas, après dans le cas de la méthode de Galerkin). De plus, du fait de l'hypothèse du champ de vitesse fixé, seule l'équation de conservation de l'énergie a dû être réduite conduisant à plusieurs modèles interpolés pour couvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement. A l'avenir, il pourrait être envisagé de réduire également les équations de Navier-Stokes ce qui donnerait accès au champ de vitesse de l'air en temps réel et permettrait ainsi l'utilisation de critères de confort plus complexes que la seule température de l'air.

La perspective d'une confrontation avec un local exige également de compléter les modèles d'ordre réduit, en tenant compte du rayonnement et en déplaçant les conditions aux limites à l'extérieur du local. Le modèle ainsi complété pourrait alors

largement trouver sa place au sein d'une plate-forme de simulation dynamique du bâtiment. Dans le cadre de ces deux applications, la linéarisation pourrait alors se révéler d'un apport important en isolant l'influence et la modélisation des différents paramètres de l'environnement thermique d'un local.

Enfin, les perspectives de ces travaux sont importantes au sein du laboratoire, puisqu'ils permettent d'associer les recherches sur les méthodes spectrales de réduction à l'ouverture d'une nouvelle voie induite par les possibilités de la théorie moderne du contrôle, en passant par les recherches expérimentales visant à l'amélioration du confort thermique. Bien que nos travaux aient porté sur le contrôle de la température, la méthode pourrait également être appliquée à d'autres grandeurs scalaires comme les concentrations en polluant. Ainsi, ces travaux peuvent être vu comme un premier travail de recherche dont le but était d'introduire de nouvelles méthodes dans le domaine de l'aérodynamique du bâtiment et d'en montrer le potentiel.



# Bibliographie

- [1] E. H. MATHEWS et C. P. BOTHA : Improved thermal building management with the aid of integrated dynamic HVAC simulation. *Building and Environment*, 38(12):1423–1429, 2003.
- [2] E. H. MATHEWS, C. P. BOTHA, D. C. ARNDT et A. MALAN : HVAC control strategies to enhance comfort and minimise energy usage. *Energy and Buildings*, 33(8):853–863, 2001.
- [3] X. PENG et A. H. C. VAN PAASSEN : A state space model for predicting and controlling the temperature responses of indoor air zones. *Energy and Buildings*, 28(2):197–203, 1998.
- [4] M. R. KULKARNI et F. HONG : Energy optimal control of a residential space-conditioning system based on sensible heat transfer modeling. *Dans Building and Environment*, volume 39, pages 31–38. 2004.
- [5] P. MICHEL : Conduite des systèmes climatiques. *Dans ETI Sciences et TECHNIQUES*, éditeur : *Techniques de l'ingénieur*, volume BE5. 2002.
- [6] P. O. FANGER : *Thermal Comfort*. Mac Graw-Hill Book company, New York, 1973.
- [7] NF EN ISO 7730 : Ambiances thermiques modérées - Détermination des indices PMV et PPD et spécifications des conditions de confort thermique, 1995.
- [8] X. PENG : *Modeling of indoor thermal conditions for comfort control in buildings*. Thèse de doctorat, Delft university of technology, 1996.
- [9] P. RIEDERER : *Thermal room modelling adapted to the test of HVAC control systems*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2002.
- [10] T. HIRAMATSU, T. HARADA, S. KATO, S. MURAKAMI et H. YOSHINO : Study of thermal environment in Experimental Real-scale Atrium. *Dans ROOMVENT'96, 5th International Conference on Air Distribution in Rooms*, volume 1, pages 523–530, Yokohama, 1996.
- [11] M. DE MOOR et D. BERCKMANS : Building a grey box model to model the energy and mass transfer in an imperfectly mixed fluid by using experimental data. *Mathematics and Computers in Simulation*, 42(2-3):233–244, 1996.

- [12] C. J. TAYLOR, P. LEIGH, L. PRICE, P. C. YOUNG, E. VRANKEN et D. BERCKMANS : Proportional-integral-plus (PIP) control of ventilation rate in agricultural buildings. *Control Engineering Practice*, In Press, Corrected Proof, 2003.
- [13] T. ZERIHUN DESTA, A. V. BRECHT, J. MEYERS, M. BAELMANS et D. BERCKMANS : Combining CFD and data-based mechanistic (DBM) modelling approaches. *Energy and Buildings*, 36(6):535–542, 2003.
- [14] T. ZERIHUN DESTA, K. JANSSENS, A. VAN BRECHT, J. MEYERS, M. BAELMANS et D. BERCKMANS : CFD for model-based controller development. *Building and Environment*, 39(6):621–633, 2004.
- [15] C. GHIAUS et A. G. GHIAUS : Evaluation of the indoor temperature field using a given air velocity distribution. *Building and Environment*, 34(6):671–679, 1999.
- [16] I. BEAUSOLEIL-MORRISON : The adaptive conflation of computational fluid dynamics with whole-building thermal simulation. *Energy and Buildings*, 34(9): 857–871, 2002.
- [17] Q. CHEN et W. XU : A zero-equation turbulence model for indoor airflow simulation. *Energy and Buildings*, 28(2):137–144, 1998.
- [18] I. BEAUSOLEIL-MORRISON : *The adaptive coupling of heat and air flow modeling within dynamic whole-building simulation*. Thèse de doctorat, Strathclyde, 2000.
- [19] S. V. PATANKAR : *Numerical heat transfert and fluid flow*. Hemisphere Publishing corporation, New York, taylor and francis group édition, 1980.
- [20] STARCD : Solution algorithms and flow initialisation. *Dans Methodology*, pages 7–1 à 7–11. Adapco, Melville, USA, 1999.
- [21] W. MALALASEKERA et H. K. VERSTEEG : *An introduction to computational fluid dynamics - the finite volume method*. Prentice Hall, 1995.
- [22] J. ABANTO, D. BARRERO, M. REGGIO et B. OZELL : Airflow modelling in a computer room. *Building and Environment*, In Press, Corrected Proof, 2004.
- [23] M. BARTAK, I. BEAUSOLEIL-MORRISON, J. A. CLARKE, J. DENEV, F. DRKAL, M. LAIN, I. A. MACDONALD, A. MELIKOV, Z. POPIOLEK et P. STANKOV : Integrating CFD and building simulation. *Building and Environment*, 37:865–871, 2002.
- [24] G. EINBERG, K. HAGSTROM, P. MUSTAKALLIO, H. KOSKELA et S. HOLMBERG : CFD modelling of an industrial air diffuser—predicting velocity and temperature in the near zone. *Building and Environment*, In Press, Corrected Proof, 2004.
- [25] I. BEAUSOLEIL-MORRISON, J. A. CLARKE, J. DENEV, I. A. MACDONALD, J. MEYERS et P. STANKOV : Further developments in the conflation of CFD

- and building simulation. *Dans Seventh International IBPSA Conference*, pages 1267–1273, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.
- [26] W. MALALASEKERA et H. K. VERSTEEG : Introduction. *Dans An introduction to computational fluid dynamics - the finite volume method*, pages 3–4. Prentice Hall, 1995.
- [27] W. MALALASEKERA et H. K. VERSTEEG : The central differencing scheme. *Dans An introduction to computational fluid dynamics - the finite volume method*, pages 105–110. Prentice Hall, 1995.
- [28] B. P. LEONARD : A survey of finite difference with upwinding for numerical modelling of incompressible convective diffusion equation. *Dans Computational techniques in transient and turbulent fluid flow*, volume 2. Electronic digital computers-Scientific applications. Pineridge Press Limited, 1981.
- [29] S. MURAKAMI : Computational wind engineering. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 36(1-3):517–538, 1990.
- [30] STARCD : Discretization practices. *Dans Methodology*, pages 4–1 à 4–10. Adapco, Melville, USA, 1999.
- [31] S. MURAKAMI et S. KATO : Numerical and experimental study on room airflow, 3D predictions using the k- $\epsilon$  turbulence model. *Building and Environment*, 24(1):85–97, 1989.
- [32] P. CHASSAING : *Turbulence en mécanique des fluides - Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*. Cépadués, Toulouse, 2000.
- [33] W. LU, A. T. HOWARTH et A. P. JEARY : Prediction of airflow and temperature field in a room with convective heat source. *Building and Environment*, 32(6): 541–550, 1997.
- [34] B. E. LAUNDER et D. B. SPALDING : The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2):269–289, 1974.
- [35] T. J. CRAFT, S. E. GANT, A. V. GERASIMOV, H. IACOVIDES et B. E. LAUNDER : Development and application of wall-function treatments for turbulent forced and mixed convection flows. *Fluid Dynamics Research*, In Press, Uncorrected Proof, 2004.
- [36] J. D. MATEI, B. LIONNET et D. LAURENCE : Computations of turbulent mixed convection in square cavities. *Dans International symposium on turbulence, heat and mass transfert*, pages 1–6, Lisbon, 1994.
- [37] V. YAKHOT et L. M. SMITH : Renormalization Group, The  $\epsilon$ -Expansion and Derivation of Turbulence Models. *Journal of Scientific Computing*, (7):35–61, 1992.
- [38] G. T. ANALYTIS : Implementation of the renormalization group (RNG) k- $\epsilon$  turbulence model in GOTHIC/6.lb : solution methods and assessment. *Annals of Nuclear Energy*, 30(3):349–387, 2003.



- [39] J. D. POSNER, C. R. BUCHANAN et D. DUNN-RANKIN : Measurement and prediction of indoor air flow in a model room. *Energy and Buildings*, 35(5):515–526, 2003.
- [40] O. ROUAUD et M. HAVET : Computation of the airflow in a pilot scale clean room using  $k - \epsilon$  turbulence models. *International Journal of Refrigeration*, 25(3):351–361, 2002.
- [41] STARCD : Turbulent Flow boundary conditions. *Dans Methodology*, pages 6–1 à 6–10. Adapco, Melville,USA, 1999.
- [42] Z. ZHAI et Q. (YAN) CHEN : Numerical determination and treatment of convective heat transfert coefficient in the coupled building energy and CFD simulation. *Building and Environment*, 39(8):1001–1009, 2004.
- [43] STARCD : Basic principles of CFD Modelling. *Dans User Guide*, pages 1–1 à 1–22. Adapco, Melville,USA, 1999.
- [44] M. GIRAULT : *Résolution de problèmes inverses en thermique par modèle réduits : applications en conduction non linéaire et en convection forcée*. Thèse de doctorat, Faculté des sciences pour l'ingénieur de Poitiers, 2003.
- [45] F. BEZZO, S. MACCHIETTO et C. C. PANTELIDES : A general methodology for hybrid multizonal/CFD models : Part I. Theoretical framework. *Computers and Chemical Engineering*, 28(4):501–511, 2004.
- [46] C. INARD : Les modèles zonaux en thermique du bâtiment. Mémoire présenté en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger les travaux de recherche, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1, 1996.
- [47] F. BEZZO et S. MACCHIETTO : A general methodology for hybrid multizonal/CFD models : Part II. Automatic zoning. *Computers and Chemical Engineering*, 28(4):513–525, 2004.
- [48] S. GUERNOUTI, G. HÉGRON et M. MUSY : Automatisation des modèles zonaux : concept et application. Rapport technique, Ecole d'architecture de Nantes.
- [49] E. BASMAN et E. H. KHALIFA : Application of proper orthogonal decomposition to indoor airflows. *ASHRAE Transactions*, 111:625–634, 2005.
- [50] E. PALOMO DEL BARRIO, G. LEFEBVRE, P. BEHAR et N. BAILLY : Using model size reduction techniques for thermal control applications in buildings. *Energy and Buildings*, 33(1):1–14, 2000.
- [51] E. VIDECOQ et D. PETIT : Model reduction for the resolution of multidimensional inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44(10):1899–1911, 2001.
- [52] J. L. LUMLEY : The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Dans* A.M. YAGLOW et V.I. TATARSKI, éditeurs : *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pages 166–178, Nauka, Moscou, 1967.

- [53] C. ALLERY : *Contribution à l'identification des bifurcations et à l'étude des écoulements fluides par des systèmes dynamiques d'ordre faible (P.O.D.)*. Thèse de doctorat, Poitiers, 2002.
- [54] A. E. DEANE et L. SIROVICH : A computational study of Rayleigh-Bénard convection. Part 1. Rayleigh-number scaling. *Journal of Fluid Mechanics*, 222: 231–250, 1991.
- [55] G. BERKOOZ, P. HOLMES et J. L. LUMLEY : The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual reviews of fluid mechanics*, 25:539–575, 1993.
- [56] L. SIROVICH : Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part 1 : Coherent structures. Part 2 : Symmetries and transformations. Part 3 : Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mechanics*, 45:561–590, 1987.
- [57] Y. C. LIANG, H. P. LEE, S. P. LIM, W. Z. LIN, K. H. LEE et C. G. WU : Proper orthogonal decomposition and its applications, Part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3):527–544, 2002.
- [58] A. CHATTERJEE : An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current science*, 78, No. 7:808–817, 2000.
- [59] E. A. CHRISTENSEN, J. N. SORESENSEN, M. BRONS et P. L. CHRISTIANSEN : Low-dimensional representations of early transition in rotating fluid flow. 1993.
- [60] M. COUPLET, C. BASDEVANT et P. SAGAUT : Modélisation d'un écoulement turbulent par un système dynamique de dimension réduite. *Dans 35<sup>ième</sup> congrès national d'Analyse numérique*, La grande Motte - Herault (30) France, 2003.
- [61] J. VAN DOREN, R. MARKOVINOVA et J.-D. JANSEN : Reduced-order optimal control of water flooding using proper orthogonal decomposition. *Computational Geosciences*, pages 1–22, 2006.
- [62] K. AFANASIEV et M. HINZE : Adaptive control of a wake flow using proper orthogonal decomposition. Technical report 648/1999, Technische Universität Berlin, (to appear in *Shape Optimization and Optimal Design : Proceedings of the IFIP Conference, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, edited by M. Dekker) 1999.
- [63] H. GUNES : Low-dimensional modeling of non-isothermal twin-jet flow. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 29(1):77–86, 2002.
- [64] C. ALLERY, C. BEGHEIN et A. HAMDOUNI : Applying proper orthogonal decomposition to the computation of particle dispersion in a two-dimensional ventilated cavity. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10(8):907–920, 2005.
- [65] S. S. RAVINDRAN : Control of flow separation over a forward-facing step by model reduction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(41-42):4599–4617, 2002.

- [66] M. COUPLET, C. BASDEVANT et P. SAGAUT : Calibrated reduced-order POD-Galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, 207(1):192–220, 2005.
- [67] L. SIROVICH et A. E. DEANE : A computational study of Rayleigh-Benard convection. Part 2. Dimension considerations. *Journal of Fluid Mechanics*, 222:251–265, 1991.
- [68] B. PODVIN et P. L. QUERE : Low-order models for the flow in a differentially heated cavity. *Physics of Fluids*, 13(11):3204–3214, 2001.
- [69] D. REMPFER : On the structure of dynamical system describing the evolution of coherent structures in a convective boundary layer. *Physics of fluids*, 6(3):1402–1404, 1994.
- [70] M. COUPLET, P. SAGAUT et C. BASDEVANT : Intermodal energy transfers in a proper orthogonal decomposition-Galerkin representation of a turbulent separated flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 491:275–284, 2003.
- [71] L. CORDIER et M. BERGMANN : Réduction de dynamique par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). *Dans Ecole de printemps OCET*, Aussois, 2006.
- [72] J. A. ATWELL : *Proper Orthogonal Decomposition for Reduced Order Control of Partial Differential Equations*. Thèse de doctorat, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2000.
- [73] H. V. LY et H. T. TRAN : Modeling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition. *Mathematical and Computer Modelling*, 33(1-3):223–236, 2001.
- [74] J. FAVIER et A. KOURTA : Etude du contrôle du décollement sur un profil d’aile par mesures PIV et analyse POD. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(4):272–278, 2006.
- [75] R. D. PRABHU, S. SCOTT COLLIS et Y. CHANG : The influence of control on proper orthogonal decomposition of wall-bounded turbulent flows. *Physics of Fluids*, 13(2):520–537, 2001.
- [76] F. LEIBFRITZ et S. VOLKWEIN : Reduced order output feedback control design for PDE systems using proper orthogonal decomposition and nonlinear semidefinite programming. *Linear Algebra and its Applications Special Issue on Order Reduction of Large-Scale Systems*, 415(2-3):542–575, 2006.
- [77] H. M. PARK et W. J. LEE : Feedback control of natural convection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(8-10):1013–1028, 2001.
- [78] L. G. BLERIS et M. V. KOTHARE : Low-order empirical modeling of distributed parameter systems using temporal and spatial eigenfunctions. *Computers and Chemical Engineering*, 29(4):817–827, 2005.

- [79] S. N. SINGH, J. H. MYATT, G. A. ADDINGTON, S. BANDA et J. K. HALL : Optimal feedback control of vortex shedding using proper orthogonal decomposition models. *Journal of Fluids Engineering*, 123(3):612–618, 2001.
- [80] H. GUNES : Low-order dynamical models of thermal convection in high-aspect ratio enclosures. *Fluid Dynamics Research*, 30(1):1–30, 2002.
- [81] R. RAJU, S. BALACHANDAR, D. F. HILL et R. J. ADRIAN : Reynolds number scaling of flow in a stirred tank with Rushton turbine. Part II – Eigen decomposition of fluctuation. *Chemical Engineering Science*, 60(12):3185–3198, 2005.
- [82] A. MESLEM, C. BEGHEIN, C. INARD et F. ALLARD : Lois de décroissance d’un jet turbulent tridimensionnel vertical de paroi impactant a forces de poussees defavorables. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 26(4): 487–498, 1999.
- [83] A. MESLEM : *Contribution a l’étude du couplage thermique entre un jet et un local climatisé*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, 1997.
- [84] C. a. GROUP : Tutorial 10 : Buoyancy driven flow around a heated fin. *Dans Tutorials*, pages 10–1 : 10–40. CD adapco Group, 2004.
- [85] W. MALALASEKERA et H. K. VERSTEEG : Implementation of boundary conditions. *Dans An introduction to computational fluid dynamics - the finite volume method*, page 207. Prentice Hall, 1995.
- [86] J. LEBRUN : *Exigences physiologiques et modalités physiques de la climatisation par source statique concentrée*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique, 1970.
- [87] F. ALLARD : *Contribution à l’étude des transferts de chaleur dans les cavités thermiquement entraînées : Application aux cellules d’habitation*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Insa de Lyon, 1987.
- [88] C. INARD : *Contribution à l’étude du couplage thermique entre une source de chaleur et un local*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, INSA de Lyon, 1988.
- [89] D. AIULFI, G. V. FRACASTORO, C. INARD, K. KOLSAKER et S. TOGARI : Field Models. *Dans* Per HEISELBERG, Shuzo MURAKAMI et Claude-Alain ROULET, éditeurs : *Ventilation of large Spaces in buildings Analysis and prediction technique*, page 75. IEA Annex 26, 1998.
- [90] M. BERGOUNIOUX : *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*. Dunod, Paris, 2001.
- [91] H. KWAKERNAAK et R. SIVAN : *Linear Optimal Control System*. John Wiley and Sons, New York, 1972.



# Annexe A

## Méthode de discrétisation

Cette annexe donne les détails de l'intégration et de la discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie.

### A.1 Calcul des températures aux frontières

L'application du schéma QUICK pour le calcul des températures aux frontières d'une cellule de centre (P) donne :

– Frontière Est (E)

$$\begin{aligned}
 \Theta_e u_e &= -\frac{g_2}{2}(u_e + |u_e|)\Theta_W \\
 &+ \frac{1}{2}\left((1 - g_1 + g_2 + g_3)u_e + (1 - g_1 + g_2 - g_3)|u_e|\right)\Theta_P \\
 &+ \frac{1}{2}\left((1 + g_1 - g_3 + g_4)u_e + (-1 + g_1 + g_3 - g_4)|u_e|\right)\Theta_E \\
 &- \frac{g_4}{2}(u_e - |u_e|)\Theta_{EE}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Les valeurs de  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  sont celles de la cellule (P).

– Frontière Ouest (O)

Pour la frontière Ouest de la cellule P, on posera par continuité, que sa température est égale à la température de la face Est de la cellule W, c'est-à-dire de la cellule voisine Ouest. On obtient ainsi l'expression du produit  $\Theta_w u_w$  en

décalant une fois les indices vers l'Ouest :

$$\begin{aligned}
\Theta_w u_w &= -\frac{g_2}{2}(u_w + |u_w|)\Theta_{WW} \\
&+ \frac{1}{2}\left((1 - g_1 + g_2 + g_3)u_w + (1 - g_1 + g_2 - g_3)|u_w|\right)\Theta_W \\
&+ \frac{1}{2}\left((1 + g_1 - g_3 + g_4)u_w + (-1 + g_1 + g_3 - g_4)|u_w|\right)\Theta_P \\
&- \frac{g_4}{2}(u_w - |u_w|)\Theta_E
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Les valeurs de  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  sont celles de la cellule voisine Ouest.

– Frontière Nord (N)

$$\begin{aligned}
\Theta_n v_n &= -\frac{g_2}{2}(v_n + |v_n|)\Theta_S \\
&+ \frac{1}{2}\left((1 - g_1 + g_2 + g_3)v_n + (1 - g_1 + g_2 - g_3)|v_n|\right)\Theta_P \\
&+ \frac{1}{2}\left((1 + g_1 - g_3 + g_4)v_n + (-1 + g_1 + g_3 - g_4)|v_n|\right)\Theta_N \\
&- \frac{g_4}{2}(v_n - |v_n|)\Theta_{NN}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Les valeurs de  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  sont celles de la cellule de centre (P) mais calculées par rapport à la deuxième coordonnée  $y$ .

– Frontière Sud (S)

$$\begin{aligned}
\Theta_s v_s &= -\frac{g_2}{2}(v_s + |v_s|)\Theta_{SS} \\
&+ \frac{1}{2}\left((1 - g_1 + g_2 + g_3)v_s + (1 - g_1 + g_2 - g_3)|v_s|\right)\Theta_S \\
&+ \frac{1}{2}\left((1 + g_1 - g_3 + g_4)v_s + (-1 + g_1 + g_3 - g_4)|v_s|\right)\Theta_P \\
&- \frac{g_4}{2}(v_s - |v_s|)\Theta_N
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Les valeurs de  $(g_1, g_2, g_3, g_4)$  sont celles de la cellule voisine Sud calculées par rapport à la deuxième coordonnée  $y$ .

En divisant par  $\Delta x$  ou  $\Delta y$  et en simplifiant l'écriture, on obtient les termes convectifs de l'équation (3.27) :

$$\begin{aligned}
\frac{\Theta_e u_e}{\Delta x} &= F_{eW}\Theta_W + F_{eP}\Theta_P + F_{eE}\Theta_E + F_{eEE}\Theta_{EE} \\
\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x} &= F_{wWW}\Theta_{WW} + F_{wW}\Theta_W + F_{wP}\Theta_P + F_{wE}\Theta_E \\
\frac{\Theta_n w_n}{\Delta y} &= F_{nS}\Theta_S + F_{nP}\Theta_P + F_{nN}\Theta_N + F_{nNN}\Theta_{NN} \\
\frac{\Theta_s w_s}{\Delta y} &= F_{sSS}\Theta_{SS} + F_{sS}\Theta_S + F_{sP}\Theta_P + F_{sN}\Theta_N
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Les expressions des coefficients F sont obtenues à partir des équations (A.1) à (A.4).

## A.2 Calcul des flux diffusifs traversant les frontières

Pour obtenir le terme diffusif à la frontière Est (équation (3.27)) d'une cellule de centre (P), il est nécessaire d'obtenir (équation (3.36)) :

$$\begin{aligned} \varphi_e \cdot \mathbf{n}_e = & - \lambda_{eff_e} \left[ \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e (\Theta_D - \Theta_U) + \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e (\Theta_U - \Theta_{UU}) \right] \\ & - \lambda_{eff_e} \left[ \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e \Theta_D + \left( \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e - \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e \right) \Theta_U - \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e \Theta_{UU} \right] \end{aligned} \quad (A.6)$$

avec :

$$\left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e = \frac{2x_e - x_U - x_{UU}}{(x_D - x_U)(x_D - x_{UU})} ; \quad \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e = \frac{-2x_e + x_U + x_D}{(x_U - x_{UU})(x_D - x_{UU})} \quad (A.7)$$

– Si  $u_e \geq 0$ ,  $(D,U,UU) = (E,P,W)$ , alors

$$\left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e = \frac{x_P - x_W + \Delta x}{(x_E - x_P)(x_E - x_W)} ; \quad \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e = \frac{x_E - x_P - \Delta x}{(x_P - x_W)(x_E - x_W)}$$

soit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e &= \frac{\frac{3\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_W}{2}}{\left( \frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\Delta x}{2} \right) \left( \frac{\Delta x_E}{2} + \Delta x + \frac{\Delta x_W}{2} \right)} \\ \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e &= \frac{\frac{\Delta x_E}{2} - \frac{\Delta x}{2}}{\left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_W}{2} \right) \left( \frac{\Delta x_E}{2} + \Delta x + \frac{\Delta x_W}{2} \right)} \\ \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e - \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e &= \frac{\frac{\Delta x_E}{2} - \Delta x - \frac{\Delta x_W}{2}}{\left( \frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\Delta x}{2} \right) \left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_W}{2} \right)} \end{aligned} \quad (A.8)$$

– Si  $u_e < 0$ ,  $(D,U,UU) = (P,E,EE)$ , alors

$$\left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e = \frac{(x_P - x_E) + (x_P - x_{EE}) + \Delta x}{(x_P - x_E)(x_P - x_{EE})} ; \quad \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e = \frac{x_E - x_P - \Delta x}{(x_E - x_{EE})(x_P - x_{EE})}$$

soit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e &= - \frac{\frac{3\Delta x_E}{2} + \frac{\Delta x_{EE}}{2}}{\left( \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_E}{2} \right) \left( \frac{\Delta x}{2} + \Delta x_E + \frac{\Delta x_{EE}}{2} \right)} \\ \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e &= \frac{\frac{\Delta x_E}{2} - \frac{\Delta x}{2}}{\left( \frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\Delta x_{EE}}{2} \right) \left( \frac{\Delta x}{2} + \Delta x_E + \frac{\Delta x_{EE}}{2} \right)} \\ \left( \frac{dg_2}{dx} \right)_e - \left( \frac{dg_1}{dx} \right)_e &= \frac{\frac{\Delta x_{EE}}{2} + \Delta x_E - \frac{\Delta x}{2}}{\left( \frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\Delta x}{2} \right) \left( \frac{\Delta x_{EE}}{2} + \frac{\Delta x_E}{2} \right)} \end{aligned} \quad (A.9)$$



Or,

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_e = \text{signe}(u_e) \left(\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_e\right)_{u_e \geq 0} + \left(1 - \text{signe}(u_e)\right) \left(\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_e\right)_{u_e < 0}$$

avec  $\text{signe}(x)$  la fonction définie par :

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

En rappelant que  $\lambda_{eff} = a_{eff}\rho C_P$ , il vient :

$$-\frac{\varphi_e \cdot \mathbf{n}_e}{\rho C_P \Delta x} = D_{eW}\Theta_W + D_{eP}\Theta_P + D_{eE}\Theta_E + D_{eEE}\Theta_{EE} \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{eW} &= -2a_{effe} \frac{\Delta x_E - \Delta x}{\Delta x(\Delta x + \Delta x_W)(\Delta x_E + 2\Delta x + \Delta x_W)} \text{signe}(u_e) \\ D_{eP} &= \frac{2a_{effe}}{\Delta x(\Delta x_E + \Delta x)} \left[ \frac{\Delta x_E - 2\Delta x - \Delta x_W}{\Delta x + \Delta x_W} \text{signe}(u_e) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\Delta x_E + \Delta x_{EE}}{\Delta x + 2\Delta x_E + \Delta x_{EE}} \left(1 - \text{signe}(u_e)\right) \right] \\ D_{eE} &= \frac{2a_{effe}}{\Delta x(\Delta x_E + \Delta x)} \left[ \frac{3\Delta x + \Delta x_W}{\Delta x_E + 2\Delta x + \Delta x_W} \text{signe}(u_e) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta x_{EE} + 2\Delta x_E - \Delta x}{\Delta x_{EE} + \Delta x_E} \left(1 - \text{signe}(u_e)\right) \right] \\ D_{eEE} &= -2a_{effe} \frac{\Delta x_E - \Delta x}{\Delta x(\Delta x_E + \Delta x_{EE})(\Delta x + 2\Delta x_E + \Delta x_{EE})} \left(1 - \text{signe}(u_e)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A la frontière Ouest de la maille, le flux sortant  $\varphi_w \cdot \mathbf{n}_w$  est opposé au flux sortant de la cellule voisine Ouest  $\left(\varphi_e \cdot \mathbf{n}_e\right)_{\text{cellule } W}$ , c'est-à-dire :

$$-\frac{\varphi_w \cdot \mathbf{n}_w}{\rho C_P \Delta x} = D_{wWW}\Theta_{WW} + D_{wW}\Theta_W + D_{wP}\Theta_P + D_{wE}\Theta_E \quad (\text{A.13})$$

Par glissement d'indice vers l'Ouest dans les équations (A.11) et (A.12), il vient :

$$\begin{aligned}
D_{wWW} &= 2a_{effw} \frac{\Delta x - \Delta x_W}{\Delta x(\Delta x_W + \Delta x_{WW})(\Delta x + 2\Delta x_W + \Delta x_{WW})} \text{signe}(u_w) \\
D_{wW} &= -\frac{2a_{effw}}{\Delta x(\Delta x + \Delta x_W)} \left[ \frac{\Delta x - 2\Delta x_W - \Delta x_{WW}}{\Delta x_W + \Delta x_{WW}} \text{signe}(u_w) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3\Delta x + \Delta x_E}{\Delta x_W + 2\Delta x + \Delta x_E} \left(1 - \text{signe}(u_w)\right) \right] \\
D_{wP} &= -\frac{2a_{effw}}{\Delta x(\Delta x + \Delta x_W)} \left[ \frac{3\Delta x_W + \Delta x_{WW}}{\Delta x + 2\Delta x_W + \Delta x_{WW}} \text{signe}(u_w) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta x_E + 2\Delta x - \Delta x_W}{\Delta x_E + \Delta x} (1 - \text{signe}(u_w)) \right] \\
D_{wE} &= 2a_{effw} \frac{\Delta x - \Delta x_W}{\Delta x(\Delta x + \Delta x_E)(\Delta x_W + 2\Delta x + \Delta x_E)} \left(1 - \text{signe}(u_w)\right)
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Pour les autres frontières, des expressions similaires sont obtenues :

$$-\frac{\varphi_n \cdot \mathbf{n}_n}{\rho C_P \Delta y} = D_{nS} \Theta_S + D_{nP} \Theta_P + D_{nN} \Theta_N + D_{nNN} \Theta_{NN} \tag{A.15}$$

$$-\frac{\varphi_s \cdot \mathbf{n}_s}{\rho C_P \Delta y} = D_{sSS} \Theta_{SS} + D_{sS} \Theta_S + D_{sP} \Theta_P + D_{sN} \Theta_N \tag{A.16}$$

### A.3 Expression générale de l'équation de conservation de l'énergie discrétisée

Avec la notation  $\dot{\Theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial t}$ , l'équation de conservation de l'énergie intégrée (3.27) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}_P &= (a_P + a_{cor}) \Theta_P + a_E \Theta_E + a_W \Theta_W + a_N \Theta_N + a_S \Theta_S \\
&\quad + a_{EE} \Theta_{EE} + a_{WW} \Theta_{WW} + a_{NN} \Theta_{NN} + a_{SS} \Theta_{SS}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

où :

$$\begin{aligned}
a_P &= -F_{eP} + F_{wP} + D_{eP} + D_{wP} \\
&\quad -F_{nP} + F_{sP} + D_{nP} + D_{sP} \\
a_{cor} &= \frac{u_e - u_w}{\Delta x} + \frac{v_n - v_s}{\Delta y} \\
a_E &= D_{eE} + D_{wE} - F_{eE} + F_{wE} & a_W &= D_{wW} + D_{eW} - F_{eW} + F_{wW} \\
a_N &= D_{nN} + D_{sN} - F_{nN} + F_{sN} & a_S &= D_{sS} + D_{nS} - F_{nS} + F_{sS} \\
a_{EE} &= D_{eEE} - F_{eEE} & a_{WW} &= D_{wWW} + F_{wWW} \\
a_{NN} &= D_{nNN} - F_{nNN} & a_{SS} &= D_{sSS} + F_{sSS}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

## A.4 Conditions aux limites

Pour faciliter la programmation et la résolution de l'équation de conservation de l'énergie, nous essaierons systématiquement de nous rapprocher d'expressions similaires aux équations (A.17) et (A.18).

### A.4.1 Au niveau de la paroi Ouest

Le lecteur se référera aux figures (3.4(a)) et (3.4(b)) pour les notations.

La température des parois est imposée et notée pour la paroi Ouest  $\Theta_{paroi\ Ouest}$ . De plus, par hypothèse d'imperméabilité, la vitesse  $u_w$  est nulle.

Pour surmonter l'absence de la cellule voisine Ouest, un noeud fictif est créé à la distance  $\frac{\Delta x}{2}$  à l'Ouest de la paroi (soit  $\Delta x_W = \Delta x$ ). La température au noeud fictif est calculée par interpolation linéaire avec la température de la paroi et la température de la maille P :

$$\Theta_O = 2\Theta_{mur\ Ouest} - \Theta_P \tag{A.19}$$

#### A.4.1.1 Volume de contrôle adjacent à la paroi

La figure (3.4(a)) illustre la configuration propre à cette maille.

#### Termes de transport

Le produit  $\frac{\Theta_e u_e}{\Delta x}$  (équation (A.5)) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_e u_e}{\Delta x} &= F_{eW}(2\Theta_{mur\ Oouest} - \Theta_P) + F_{eP}\Theta_P + F_{eE}\Theta_E + F_{eEE}\Theta_{EE} \\ &= F_{e_{paroi\ Oouest}}\Theta_{mur\ Oouest} + (F_{eP} - F_{eW})\Theta_P + F_{eE}\Theta_E + F_{eEE}\Theta_{EE} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

L'expression précédente peut être reformulée pour obtenir :

$$\frac{\Theta_e u_e}{\Delta x} = F_{eW}\Theta_W + F_{eP}\Theta_P + F_{eE}\Theta_E + F_{eEE}\Theta_{EE} + F_{e_{paroi\ Oouest}}\Theta_{mur\ Oouest} \quad (\text{A.21})$$

avec

$$\begin{aligned} F_{eW} &= 0 & F_{eP} &= (F_{eP} - F_{eW})_{\text{equation(A.5)}} & F_{eE} &= (F_{eE})_{\text{equation(A.5)}} \\ F_{eEE} &= (F_{eEE})_{\text{equation(A.5)}} & F_{e_{paroi\ Oouest}} &= 2(F_{eW})_{\text{equation(A.5)}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Quant au produit  $\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x}$ , son expression reste la même. En notant que  $u_w = 0$ , il vient :

$$\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x} = F_{wWW}\Theta_{WW} + F_{wW}\Theta_W + F_{wP}\Theta_P + F_{wE}\Theta_E = 0 \quad (\text{A.23})$$

### Termes de diffusion

Le flux diffusif au niveau de la paroi doit être calculé en utilisant une expression consistante avec celle du schéma QUICK :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{dg_1}{dx}(\Theta_{paroi\ Oouest} - \Theta_P) + \frac{dg_2}{dx}(\Theta_P - \Theta_E)$$

$$\frac{dg_1}{dx} = \frac{(x - x_E) + (x - x_P)}{(x_{paroi\ Oouest} - x_E)(x_{paroi\ Oouest} - x_P)} ; \quad \frac{dg_2}{dx} = \frac{(x_P - x) + (x_{paroi\ Oouest} - x)}{(x_{paroi\ Oouest} - x_E)(x_P - x_E)}$$

– Au niveau de la paroi,  $x = x_{paroi\ Oouest}$ , soit :

$$\frac{dg_1}{dx} = \frac{(x_{paroi\ Oouest} - x_E) + (x_{paroi\ Oouest} - x_P)}{(x_{paroi\ Oouest} - x_E)(x_{paroi\ Oouest} - x_P)} ; \quad \frac{dg_2}{dx} = \frac{x_P - x_{paroi\ Oouest}}{(x_{paroi\ Oouest} - x_E)(x_P - x_E)}$$

ou encore :

$$\frac{dg_1}{dx} = -\frac{\frac{3\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_E}{2}}{(\Delta x + \frac{\Delta x_E}{2})(\frac{\Delta x}{2})} ; \quad \frac{dg_2}{dx} = \frac{\frac{\Delta x}{2}}{(\Delta x + \frac{\Delta x_E}{2})(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_E}{2})}$$

En rappelant que  $\boldsymbol{\varphi}_w \cdot \mathbf{n}_w = \lambda_{effw} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_w$ , les termes diffusifs peuvent de nouveau se mettre sous la forme :

$$-\frac{\boldsymbol{\varphi}_w \cdot \mathbf{n}_w}{\rho C_P \Delta x} = D_{wWW} \Theta_{WW} + D_{wW} \Theta_W + D_{wP} \Theta_P + D_{wE} \Theta_E + D_{w_{paroi\ Ouest}} \Theta_{paroi\ Ouest} \quad (\text{A.24})$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{wWW} &= 0 & D_{wW} &= 0 \\ D_{wP} &= -2a_{effw} \frac{2\Delta x + \Delta x_E}{\Delta x^2 (\Delta x + \Delta x_E)} & D_{wE} &= 2a_{effw} \frac{1}{(2\Delta x + \Delta x_E)(\Delta x + \Delta x_E)} \\ D_{w_{paroi\ Ouest}} &= 2a_{effw} \frac{3\Delta x + \Delta x_E}{\Delta x^2 (2\Delta x + \Delta x_E)} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

– Au niveau de la frontière Est de la cellule,

Le noeud miroir créé précédemment permet d'appliquer la formule générale (A.11) pour calculer le flux diffusif transmis par cette frontière :

$$-\frac{\boldsymbol{\varphi}_e \cdot \mathbf{n}_e}{\rho C_P \Delta x} = D_{eW} \Theta_W + D_{eP} \Theta_P + D_{eE} \Theta_E + D_{eEE} \Theta_{EE} \quad (\text{A.26})$$

Or, la cellule voisine W est ici la cellule fictive, il vient donc :

$$\Theta_W = \Theta_O = 2\Theta_{mur\ Ouest} - \Theta_P \text{ et } \Delta x_W = \Delta x \quad (\text{A.27})$$

soit :

$$-\frac{\boldsymbol{\varphi}_e \cdot \mathbf{n}_e}{\rho C_P \Delta x} = D_{eW} \Theta_W + D_{eP} \Theta_P + D_{eE} \Theta_E + D_{eEE} \Theta_{EE} + D_{e_{paroi\ Ouest}} \Theta_{mur\ Ouest} \quad (\text{A.28})$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{eW} &= 0 & D_{eP} &= (D_{eP} - D_{eW})_{equation(\text{A.12})} \\ D_{eE} &= (D_{eE})_{equation(\text{A.12})} & D_{eEE} &= (D_{eEE})_{equation(\text{A.12})} \\ D_{e_{paroi\ Ouest}} &= 2(D_{eW})_{equation(\text{A.12})} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

## Equation de conservation de l'énergie intégrée

L'équation de conservation de l'énergie intégrée devient :

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= (a_P + a_{cor}) \Theta_P + a_E \Theta_E + a_W \Theta_W + a_N \Theta_N + a_S \Theta_S + a_{EE} \Theta_{EE} + a_{WW} \Theta_{WW} \\ &\quad + a_{NN} \Theta_{NN} + a_{SS} \Theta_{SS} + H_{paroi\ Ouest} \Theta_{paroi\ Ouest} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

où :

$$H_{paroi\ Ouest} = -F_{e_{paroi\ Ouest}} + D_{w_{paroi\ Ouest}} + D_{e_{paroi\ Ouest}}$$

Par rapport aux expressions (A.18) des coefficients  $a$  de l'équation de conservation de l'énergie intégrée dans le cas général, on remarque que :

- le coefficient  $F_{eP}$  de transport de la cellule  $P$  s'exprime en fonction des coefficients  $F_{eP}$  et  $F_{eW}$  du cas général :  $F_{eP} = (F_{eP} - F_{eW})_{equation(A.5)}$ ,
- les coefficients des températures  $\Theta_W$  et  $\Theta_{WW}$  sont nuls,
- tous les termes de transport relatifs à la face  $w$ , c'est-à-dire  $F_{wWW}$ ,  $F_{wW}$ ,  $F_{wP}$  et  $F_{wE}$  sont nuls,
- le coefficient diffusif  $D_{eW}$  est nul,
- les coefficients  $D_{wP}$ ,  $D_{wE}$ ,  $D_{eP}$  ont une expression particulière à cette condition aux limites,
- tous les autres coefficients sont identiques.

#### A.4.1.2 Volume de contrôle adjacent à la paroi de second rang

La figure (3.4(b)) illustre la configuration propre à cette maille.

#### Termes de transport

Dans le cas général, on a :

$$\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x} = F_{wWW}\Theta_{WW} + F_{wW}\Theta_W + F_{wP}\Theta_P + F_{wE}\Theta_E \quad (A.31)$$

Or, d'après l'hypothèse (A.19) on a :  $\Theta_{WW} = 2\Theta_{mur\ Ouest} - \Theta_W$ . Il vient donc :

$$\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x} = F_{w_{paroi\ Ouest}}\Theta_{mur\ Ouest} + (F_{wW} - F_{wWW})\Theta_W + F_{wP}\Theta_P + F_{wE}\Theta_E \quad (A.32)$$

L'expression précédente peut être reformulée pour obtenir :

$$\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x} = F_{wWW}\Theta_{WW} + F_{wW}\Theta_W + F_{wP}\Theta_P + F_{wE}\Theta_E + F_{w_{paroi\ Ouest}}\Theta_{mur\ Ouest} \quad (A.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} F_{wWW} &= 0 & F_{wW} &= (F_{wW} - F_{wWW})_{equation(A.5)} & F_{wP} &= (F_{wP})_{equation(A.5)} \\ F_{wE} &= (F_{wE})_{equation(A.5)} & F_{w_{paroi\ Ouest}} &= 2(F_{wWW})_{equation(A.5)} \end{aligned} \quad (A.34)$$

#### Termes de diffusion

A la frontière Ouest de la maille, le flux diffusif sortant  $\varphi_w \cdot \mathbf{n}_w$  est opposé au flux sortant de la cellule voisine Ouest  $\left( \varphi_e \cdot \mathbf{n}_e \right)_{cellule\ W}$  comme dans le cas général, c'est-à-dire :

$$-\frac{\varphi_w \cdot \mathbf{n}_w}{\rho C_P \Delta x} = D_{wWW}\Theta_{WW} + D_{wW}\Theta_W + D_{wP}\Theta_P + D_{wE}\Theta_E + D_{w_{paroi\ Ouest}}\Theta_{paroi\ Ouest} \quad (A.35)$$

avec :

$$\begin{aligned}
D_{wWW} &= 0 & D_{wW} &= (D_{wW} - D_{wWW})_{\text{equation(A.14)}} \\
D_{wP} &= (D_{wP})_{\text{equation(A.14)}} & D_{wE} &= (D_{wE})_{\text{equation(A.14)}} \\
D_{w_{\text{paroi Ouest}}} &= (2D_{wWW})_{\text{equation(A.14)}}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

### Equation de conservation de l'énergie intégrée

L'équation de conservation de l'énergie intégrée devient :

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta} &= (a_P + a_{cor})\Theta_P + a_E\Theta_E + a_W\Theta_W + a_N\Theta_N + a_S\Theta_S + a_{EE}\Theta_{EE} + a_{WW}\Theta_{WW} \\
&\quad + a_{NN}\Theta_{NN} + a_{SS}\Theta_{SS} + H_{\text{paroi Ouest}}\Theta_{\text{paroi Ouest}}
\end{aligned} \tag{A.37}$$

où :

$$H_{\text{paroi Ouest}} = F_{w_{\text{paroi Ouest}}} + D_{w_{\text{paroi Ouest}}}$$

Par rapport aux expressions (A.18) des coefficients  $a$  de l'équation de conservation de l'énergie discrète calculés dans le cas général, on remarque que :

- le coefficient  $F_{wW}$  de transport de la cellule  $W$  s'exprime en fonction des coefficients  $F_{wW}$  et  $F_{wWW}$  du cas général :  $F_{wW} = (F_{wW} - F_{wWW})_{\text{equation(A.5)}}$ ,
- le coefficient de la température  $\Theta_{WW}$  est nul,
- le terme diffusif  $D_{wWW}$  est nul,
- le terme diffusif  $D_{wW}$  a une expression propre à la condition aux limites,
- tous les autres coefficients sont identiques.

Des expressions similaires sont obtenues pour toutes les autres parois.

#### A.4.2 Au niveau de la bouche de soufflage

Si nous reprenons les intégrations de surface (équations (3.20) et (3.23)), il apparaît qu'il n'est plus nécessaire de faire appel à une méthode de discrétisation pour calculer les termes de transport relatifs à la frontière basse des volumes de contrôle situés à la sortie du ventilateur. Il nous faut néanmoins prendre en compte les cellules voisines basses pour appliquer le schéma QUICK au niveau de la frontière haute du volume de contrôle de noeud P et pour le calcul des termes diffusifs.

La figure (3.5) illustre la configuration propre à cette maille.

### A.4.2.1 Volume de contrôle placé immédiatement en sortie du ventilo-convecteur

#### Termes de transport

$$\frac{\Theta_s v_s}{\Delta y} = F_{s_{souf}} \Theta_{souf} \text{ et } \frac{\Theta_n v_n}{\Delta y} = F_{nS} \Theta_S + F_{nP} \Theta_P + F_{nN} \Theta_N + F_{nNN} \Theta_{NN} + F_{n_{souf}} \Theta_{souf} \quad (\text{A.38})$$

avec :

$$\begin{aligned} F_{nS} &= 0 & F_{s_{souf}} &= \frac{v_s}{\Delta y} \\ F_{n_{souf}} &= \left( F_{nS} \right)_{\text{equation(A.5)}} \end{aligned}$$

#### Termes de diffusion

– Au niveau de la frontière Nord

$$-\frac{\varphi_n \cdot \mathbf{n}_n}{\rho C_P \Delta y} = D_{nS} \Theta_S + D_{nP} \Theta_P + D_{nN} \Theta_N + D_{nNN} \Theta_{NN} + D_{n_{souf}} \Theta_{souf} \quad (\text{A.39})$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{nS} &= 0 \\ D_{nP} &= \frac{2a_{effn}}{\Delta y(\Delta y_N + \Delta y)} \left[ \frac{\Delta y_N - 3\Delta y}{2\Delta y} \text{signe}(v_n) - \frac{3\Delta y_N + \Delta y_{NN}}{\Delta y + 2\Delta y_N + \Delta y_{NN}} \left( 1 - \text{signe}(v_n) \right) \right] \\ D_{nN} &= \frac{2a_{effn}}{\Delta y(\Delta y_N + \Delta y)} \left[ \frac{4\Delta y}{\Delta y_N + 3\Delta y} \text{signe}(v_n) + \frac{\Delta y_{NN} + 2\Delta y_N - \Delta y}{\Delta y_{NN} + \Delta y_N} \left( 1 - \text{signe}(v_n) \right) \right] \\ D_{nNN} &= -2a_{effn} \frac{(\Delta y_N - \Delta y) (1 - \text{signe}(v_n))}{\Delta y(\Delta y_N + \Delta y_{NN})(\Delta y + 2\Delta y_N + \Delta y_{NN})} \\ D_{n_{souf}} &= -2a_{effn} \frac{\Delta y_N - \Delta y}{2\Delta y^2(\Delta y_N + 3\Delta y)} \text{signe}(v_n) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

– Au niveau de la frontière Sud

Au contact de la bouche de soufflage, le tube de soufflage assure l'existence de cellules voisines Sud. La dimension de ces cellules  $\Delta y$  est par construction la même que celle de la cellule adjacente. Le maillage est donc localement uniforme. Dans ce cas, nous avons vu (§3.2.2.2) que le schéma QUICK était équivalent pour les termes diffusifs au schéma centré, c'est-à-dire :

$$-\frac{\varphi_s \cdot \mathbf{n}_s}{\rho C_P \Delta y} = \frac{a_{effs}}{\Delta y^2} (\Theta_S - \Theta_P) \text{ avec } \Theta_S = \Theta_{souf} \quad (\text{A.41})$$

$$\text{soit : } -\frac{\varphi_s \cdot \mathbf{n}_s}{\rho C_P \Delta y} = D_{sSS} \Theta_{SS} + D_{sS} \Theta_S + D_{sP} \Theta_P + D_{sN} \Theta_N + D_{s_{souf}} \Theta_{souf} \quad (\text{A.42})$$

avec :

$$D_{sSS} = 0 \quad D_{sS} = 0 \quad D_{sP} = -\frac{a_{effs}}{\Delta y^2} \quad D_{sN} = 0 \quad D_{s_{souf}} = \frac{a_{effs}}{\Delta y^2} \quad (\text{A.43})$$



### Equation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie intégrée devient :

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = & (a_P + a_{cor})\Theta_P + a_E\Theta_E + a_W\Theta_W + a_N\Theta_N + a_S\Theta_S + a_{EE}\Theta_{EE} + a_{WW}\Theta_{WW} \\ & + a_{NN}\Theta_{NN} + a_{SS}\Theta_{SS} + H_{souf}\Theta_{souf} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

où :

$$H_{souf} = -F_{n_{souf}} + F_{s_{souf}} + D_{n_{souf}} + D_{s_{souf}}$$

Par rapport aux expressions (A.18) des coefficients  $a$  de l'équation de conservation de l'énergie intégrée dans le cas général, on remarque que :

- tous les termes de transport, notés F, relatifs à la frontière  $s$  ou aux mailles voisines  $S$  et  $SS$  sont nuls,
- les termes de diffusion,  $D_{nS}, D_{sSS}$  et  $D_{sS}$  relatifs aux cellules voisines basses sont nuls
- tous les autres coefficients sont identiques

#### A.4.2.2 Volume de contrôle adjacent à la sortie du ventilo-convecteur de second rang

##### Termes de transport

$$\frac{\Theta_s v_s}{\Delta y} = F_{sSS}\Theta_{SS} + F_{sS}\Theta_S + F_{sP}\Theta_P + F_{sH}\Theta_N + F_{s_{souf}}\Theta_{souf} \quad (\text{A.45})$$

avec :

$$F_{s_{souf}} = \left( F_{sSS} \right)_{\text{equation(A.5)}} \quad F_{sSS} = 0 \quad (\text{A.46})$$

##### Termes de diffusion

A la frontière basse de la maille, le flux diffusif sortant  $\varphi_s \cdot \mathbf{n}_s$  est opposé au flux sortant de la cellule voisine Sud  $\left( \varphi_n \cdot \mathbf{n}_n \right)_{\text{cellule } S}$ , c'est-à-dire :

$$-\frac{\varphi_s \cdot \mathbf{n}_s}{\rho C_P \Delta y} = D_{sSS}\Theta_{SS} + D_{sS}\Theta_S + D_{sP}\Theta_P + D_{sH}\Theta_N + D_{s_{souf}}\Theta_{souf} \quad (\text{A.47})$$

avec :

$$\begin{aligned}
D_{sSS} &= 0 \\
D_{sS} &= -\frac{2a_{effs}}{\Delta y(\Delta y + \Delta y_S)} \left[ \frac{\Delta y - 3\Delta y_S}{2\Delta y_S} \text{signe}(v_s) - \frac{3\Delta y + \Delta y_H}{\Delta y_S + 2\Delta y + \Delta y_H} \left(1 - \text{signe}(v_s)\right) \right] \\
D_{sP} &= -\frac{2a_{effs}}{\Delta y(\Delta y + \Delta y_S)} \left[ \frac{4\Delta y_S}{\Delta y + 3\Delta y_S} \text{signe}(v_s) + \frac{\Delta y_H + 2\Delta y - \Delta y_S}{\Delta y_H + \Delta y} \left(1 - \text{signe}(v_s)\right) \right] \\
D_{sH} &= 2a_{effs} \frac{\Delta y - \Delta y_S}{\Delta y(\Delta y + \Delta y_H)(\Delta y_S + 2\Delta y + \Delta y_H)} (1 - \text{signe}(v_s)) \\
D_{s_{souf}} &= 2a_{effs} \frac{\Delta y - \Delta y_S}{2\Delta y\Delta y_S(\Delta y + 3\Delta y_S)} \text{signe}(v_s)
\end{aligned} \tag{A.48}$$

### Equation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie intégrée devient :

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta} &= (a_P + a_{cor})\Theta_P + a_E\Theta_E + a_W\Theta_W + a_N\Theta_N + a_S\Theta_S + a_{EE}\Theta_{EE} + a_{WW}\Theta_{WW} \\
&\quad + a_{NN}\Theta_{NN} + a_{SS}\Theta_{SS} + H_{souf}\Theta_{souf}
\end{aligned} \tag{A.49}$$

où :

$$H_{souf} = F_{souf} + D_{souf}$$

Par rapport aux expressions (A.18) des coefficients  $a$  de l'équation de conservation de l'énergie intégrée dans le cas général, on remarque que :

- tous les termes relatifs à la maille voisine Sud de second rang notée  $SS$  sont nuls,
- tous les autres coefficients sont identiques,

### A.4.3 Au niveau de la bouche de reprise

#### A.4.3.1 Volume de contrôle adjacent à la reprise

##### Termes de transport

Le gradient de température est nul, soit  $\Theta_w = \Theta_P$ . De plus,  $u_w < 0$  et  $u_e < 0$ , d'où :

$$\Theta_e = \Theta_E + g_3(\Theta_P - \Theta_E) + g_4(\Theta_E - \Theta_{EE}) = g_3\Theta_P + (1 - g_3 + g_4)\Theta_E - g_4\Theta_{EE} \tag{A.50}$$

où  $g_3$  et  $g_4$  conservent leur expression générale :

$$g_3 = \frac{\frac{\Delta x_E}{2}(\Delta x_E + \frac{\Delta x_{EE}}{2})}{(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x_E}{2})(\frac{\Delta x}{2} + \Delta x_E + \frac{\Delta x_{EE}}{2})} ; g_4 = \frac{\frac{\Delta x_E}{2} \frac{\Delta x}{2}}{(\frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\Delta x_{EE}}{2})(\frac{\Delta x}{2} + \Delta x_E + \frac{\Delta x_{EE}}{2})}$$

Le produit  $\frac{\Theta_e u_e}{\Delta x}$  s'écrit alors :

$$\frac{\Theta_e u_e}{\Delta x} = \frac{u_e}{\Delta x} g_3 \Theta_P + \frac{u_e}{\Delta x} (1 - g_3 + g_4) \Theta_E - \frac{u_e}{\Delta x} g_4 \Theta_{EE} = F_{eP} \Theta_P + F_{eE} \Theta_E + F_{eEE} \Theta_{EE} \quad (\text{A.51})$$

Quant au produit  $\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x}$ , il devient :

$$\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x} = \frac{u_w}{\Delta x} \Theta_P = F_{wP} \Theta_P \quad (\text{A.52})$$

### Termes de diffusion

Le flux diffusif au niveau de la reprise est nul puisque les températures ne varient pas.

$$-\frac{\varphi_w \cdot \mathbf{n}_w}{\rho C_P \Delta x} = D_{wWW} \Theta_{WW} + D_{wW} \Theta_W + D_{wP} \Theta_P + D_{wE} \Theta_E = 0 \quad (\text{A.53})$$

soit :

$$D_{wWW} = 0 \quad D_{wW} = 0 \quad D_{wP} = 0 \quad D_{wE} = 0 \quad (\text{A.54})$$

Au niveau de la frontière Est de la cellule, le sens de la vitesse est connu. Il est possible d'exprimer le flux diffusif grâce à l'expression du flux diffusif sortant de la cellule voisine Est :  $\varphi_e \cdot \mathbf{n}_e = - \left( \varphi_w \cdot \mathbf{n}_w \right)_{\text{cellule } E}$ ,

$$\text{c'est-à-dire : } -\frac{\varphi_e \cdot \mathbf{n}_e}{\rho C_P \Delta x} = D_{eW} \Theta_W + D_{eP} \Theta_P + D_{eE} \Theta_E + D_{eEE} \Theta_{EE} \quad (\text{A.55})$$

avec :

$$\begin{aligned} D_{eW} &= 0 \\ D_{eP} &= -2a_{effe} \frac{3\Delta x_E + \Delta x_{EE}}{\Delta x(\Delta x_E + \Delta x)(\Delta x + 2\Delta x_E + \Delta x_{EE})} \\ D_{eE} &= 2a_{effe} \frac{\Delta x_{EE} + 2\Delta x_E - \Delta x}{\Delta x(\Delta x_E + \Delta x)(\Delta x_{EE} + \Delta x_E)} \\ D_{eEE} &= -2a_{effe} \frac{\Delta x_E - \Delta x}{\Delta x(\Delta x_E + \Delta x_{EE})(\Delta x + 2\Delta x_E + \Delta x_{EE})} \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

#### A.4.3.2 Volume de contrôle en deuxième position par rapport à la reprise

### Termes de transport

Dans le cas général, on a :

$$\frac{\Theta_w u_w}{\Delta x} = F_{wWW} \Theta_{WW} + F_{wW} \Theta_W + F_{wP} \Theta_P + F_{wE} \Theta_E \quad (\text{A.57})$$

Etant donné le sens de la vitesse, le coefficient  $F_{wWW}$  est nul. Les autres coefficients restent inchangés.

### Termes de diffusion

A la frontière Ouest de la maille, le flux diffusif sortant  $\varphi_w \cdot \mathbf{n}_w$  conserve la même expression que dans le cas d'une cellule ordinaire :

$$-\frac{\varphi_w \cdot \mathbf{n}_w}{\rho C_P \Delta x} = D_{wWW} \Theta_{WW} + D_{wW} \Theta_W + D_{wP} \Theta_P + D_{wE} \Theta_E \quad (\text{A.58})$$

avec  $D_{wWW} = 0$  en raison du sens négatif de la vitesse. Les autres coefficients restent inchangés.

#### A.4.3.3 Equation de conservation de l'énergie

Pour les deux cellules, l'équation de conservation de l'énergie intégrée conserve la même expression :

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = (a_P + a_{cor}) \Theta_P &+ a_E \Theta_E + a_W \Theta_W + a_N \Theta_N + a_S \Theta_S + a_{EE} \Theta_{EE} + a_{WW} \Theta_{WW} \\ &+ a_{NN} \Theta_{NN} + a_{SS} \Theta_{SS} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$



## Annexe B

# Représentation dans l'espace d'état

Cette annexe décrit la procédure suivie pour transformer l'équation de conservation de l'énergie intégrée en un système d'état de forme générale :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

### B.1 De la matrice température au vecteur d'état

Considérons tout d'abord un cas simple en 2 dimensions contenant seulement 12 cellules, (figure B.1). Notons  $m$  le nombre de lignes et  $n$  le nombre de colonnes, respectivement 3 et 4 dans notre cas.

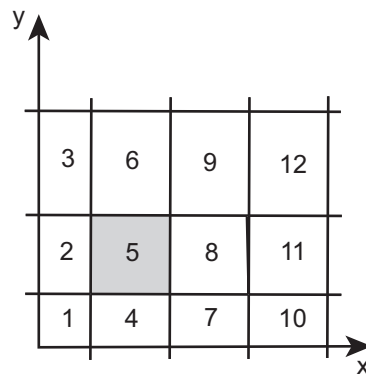


FIG. B.1 – Maillage d'un cas simple en deux dimensions

Il est aisé d'obtenir une matrice des températures en gardant la même structure que celle du maillage :

$$\begin{pmatrix} \Theta_3 & \Theta_6 & \Theta_9 & \Theta_{12} \\ \Theta_2 & \Theta_5 & \Theta_8 & \Theta_{11} \\ \Theta_1 & \Theta_4 & \Theta_7 & \Theta_{10} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

ce qui en écriture indicielle donne :

$$\begin{pmatrix} \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \\ \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  de dimension 12 est alors obtenu en écrivant les colonnes de la matrice les unes à la suite des autres :

$$\begin{aligned} & (\Theta_{11} \ \Theta_{21} \ \Theta_{31} \ \Theta_{12} \ \Theta_{22} \ \Theta_{32} \ \Theta_{13} \ \Theta_{23} \ \Theta_{33} \ \Theta_{14} \ \Theta_{24} \ \Theta_{34})^T \\ & \equiv (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12})^T \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Pour la cellule numéro 5 (figure B.1), par exemple, sa température notée  $\Theta_{22}$  a pour voisine dans le vecteur d'état les températures de ses cellules voisines Hautes et Basses. Les températures des cellules voisines Ouest et Est sont décalées de  $m = 3$  respectivement en amont et en aval.

La généralisation à un maillage de dimension  $(m,n)$  conduit à un vecteur d'état de dimension  $(m \times n, 1)$ . La position de la température de la cellule  $(i,j)$  dans le vecteur d'état est alors définie par l'indice  $m(j-1) + i$ .

## B.2 La matrice d'état $\mathbf{A}$

L'écriture de la matrice  $\mathbf{A}$  est liée à la forme de l'équation (3.43). On peut la décomposer en une somme de plusieurs matrices correspondant chacune à un coefficient de l'équation.

Reprenons l'exemple en deux dimensions étudié dans la section précédente. Alors matriciellement, le premier terme  $a_P \Theta$  prendra la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} \times^* \begin{pmatrix} \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \\ \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

où  $\times^*$  est le produit matriciel élément par élément. Dans l'espace d'état, cette expression devient :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{14} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{24} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{34} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{21} \\ \Theta_{31} \\ \Theta_{12} \\ \Theta_{22} \\ \Theta_{32} \\ \Theta_{13} \\ \Theta_{23} \\ \Theta_{33} \\ \Theta_{14} \\ \Theta_{24} \\ \Theta_{34} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Concernant le deuxième terme  $a_E \Theta_E$  de l'équation (3.43) exprimant l'influence de la cellule voisine Est sur la cellule étudiée, le produit matriciel suivant est obtenu :

$$\begin{pmatrix} a_{E31} & a_{E32} & a_{E33} & 0 \\ a_{E21} & a_{E22} & a_{E23} & 0 \\ a_{E11} & a_{E12} & a_{E13} & 0 \end{pmatrix} \times^* \begin{pmatrix} \Theta_{32} & \Theta_{33} & \Theta_{34} & 0 \\ \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} & 0 \\ \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Les deux colonnes de 0 indiquent que les cellules à la frontière Est du domaine d'étude n'ont pas de cellule voisine. Dans l'espace d'état, ce terme devient alors :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & a_{E11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{E21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{E31} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{E12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{E22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{E23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{E13} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{E23} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{E33} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{21} \\ \Theta_{31} \\ \Theta_{12} \\ \Theta_{22} \\ \Theta_{32} \\ \Theta_{13} \\ \Theta_{23} \\ \Theta_{33} \\ \Theta_{14} \\ \Theta_{24} \\ \Theta_{34} \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Il faut remarquer ici que les coefficients  $a_E$  sont sur la diagonale  $+m$ .



De la même façon, les coefficients  $a_W$  seront placés sur la  $-m$  diagonale :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{W12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{W22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{W32} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{W13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{W23} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{W33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{W14} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{W24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{W34} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{21} \\ \Theta_{31} \\ \Theta_{12} \\ \Theta_{22} \\ \Theta_{32} \\ \Theta_{13} \\ \Theta_{23} \\ \Theta_{33} \\ \Theta_{14} \\ \Theta_{24} \\ \Theta_{34} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Pour le terme  $a_H \Theta_H$ , représentant l'influence de la cellule haute, l'écriture matricielle donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{H21} & a_{H22} & a_{H23} & a_{H24} \\ a_{H11} & a_{H12} & a_{H13} & a_{H14} \end{pmatrix} \times^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Dans l'espace d'état, il vient :

$$\begin{pmatrix} \cdot & a_{H11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{H21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{H12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{H22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{H13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{H23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{H14} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{H24} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{21} \\ \Theta_{31} \\ \Theta_{12} \\ \Theta_{22} \\ \Theta_{32} \\ \Theta_{13} \\ \Theta_{23} \\ \Theta_{33} \\ \Theta_{14} \\ \Theta_{24} \\ \Theta_{34} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Les coefficients des cellules voisines hautes sont ainsi placés sur la diagonale  $+1$ .

De la même façon, les coefficients des cellules voisines basses seront sur la  $-1$



### B.3 La matrice d'état $\mathbf{B}$

Cette matrice permet d'introduire les conditions aux limites contenues dans le vecteur  $\mathbf{u}$ . Celui-ci est formé par les températures des quatre parois du local et de la température de soufflage :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Theta_{mur\ Ouest} \\ \Theta_{mur\ Est} \\ \Theta_{sol} \\ \Theta_{plafond} \\ \Theta_{souf} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$\mathbf{B}$  est alors une matrice de dimension  $(m \times n, 5)$ , chaque ligne correspondant à une cellule du local étudié. Seuls les coefficients correspondants aux cellules adjacentes aux parois et au ventilo-convecteur, de premier et de second rang, sont différents de zéro et égaux aux coefficients d'influence des parois et du soufflage  $H$ .

## Annexe C

# Résolution du problème d'optimisation avec contraintes

Un problème d'optimisation avec contraintes consiste à minimiser une fonctionnelle objectif sous la contrainte d'un système :

$$\begin{cases} \min_{\alpha \in \mathcal{R}^m} \mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha) \\ \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = \dot{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{A}_{rt}\mathbf{a}(t) - \mathbf{B}_{rt}\mathbf{u}(t) - \mathbf{E}_{rt} - I_{1+\alpha} [\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a}(t) + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}_{rd}] \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha) = \int_0^T \sum_{j=1}^M (a_j - b_j)^2 dt + \beta^2 \int_0^T \sum_{j=1}^M \alpha_j^2 dt \quad (\text{C.2})$$

Ce problème de minimisation n'étant pas simple à résoudre directement, il est judicieux de créer un problème équivalent plus facile à résoudre. Considérons la fonctionnelle Lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}}) = \mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha) - \langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle \quad (\text{C.3})$$

où  $\tilde{\mathbf{a}}$  est un multiplicateur de Lagrange et le produit scalaire est défini par :

$$\langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle = \sum_{j=1}^m \int_0^T \tilde{\mathbf{a}}_j(t) \mathcal{N}_j(\mathbf{a}, \alpha) dt \quad (\text{C.4})$$

Le problème consiste alors à déterminer le contrôle optimal  $\alpha$ , l'état  $\mathbf{a}$  et le multiplicateur de Lagrange  $\tilde{\mathbf{a}}$  tels que la fonctionnelle Lagrangienne  $\mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}})$  soit stationnaire :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \delta \tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Les variables  $\mathbf{a}$ ,  $\alpha$  et  $\tilde{\mathbf{a}}$  étant indépendantes, la solution optimale est alors obtenue en annulant les premières variations de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\mathbf{a}$ ,  $\alpha$  et  $\tilde{\mathbf{a}}$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} = 0 ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0 ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \delta \tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Pour ce faire, introduisons les gradients de  $\mathcal{L}$  :

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}}, \delta \tilde{\mathbf{a}} \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}} + \epsilon \delta \tilde{\mathbf{a}}) - \mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}})}{\epsilon} \quad (\text{C.7})$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}}, \delta \mathbf{a} \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{a} + \epsilon \delta \mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}}) - \mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}})}{\epsilon} \quad (\text{C.8})$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}, \delta \alpha \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha + \epsilon \delta \alpha, \tilde{\mathbf{a}}) - \mathcal{L}(\mathbf{a}, \alpha, \tilde{\mathbf{a}})}{\epsilon} \quad (\text{C.9})$$

## Première variation de $\mathcal{L}$ par rapport à $\tilde{\mathbf{a}}$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}}, \delta \tilde{\mathbf{a}} \right\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha) - \mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha)}{\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} + \epsilon \delta \tilde{\mathbf{a}} \rangle - \langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle}{\epsilon} \\ &= 0 - \langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \delta \tilde{\mathbf{a}} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\text{Soit, } \langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \delta \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 0 \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{a}} \quad (\text{C.11})$$

$$\text{D'où, } \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha) = 0 \quad (\text{C.12})$$

C'est l'équation d'état du système.

## Première variation de $\mathcal{L}$ par rapport à $\mathbf{a}$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}}, \delta \mathbf{a} \right\rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(\mathbf{a} + \epsilon \delta \mathbf{a}, \alpha) - \mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha)}{\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \mathcal{N}(\mathbf{a} + \epsilon \delta \mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle - \langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle}{\epsilon} \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \mathcal{N}(\mathbf{a} + \epsilon \delta \mathbf{a}, \alpha) - \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle}{\epsilon} \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} - \langle \dot{\delta} \mathbf{a} - A_{rt} \delta \mathbf{a} - I_{1+\alpha} A_{rd} \delta \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

- Premier terme

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{a}} = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \delta \mathbf{a} \rangle + \langle \delta \mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle$$

or en introduisant l'adjoint  ${}^t$  :

$$\langle \delta \mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \int_T^0 {}^t \delta \mathbf{a} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) dt \text{ et } \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \delta \mathbf{a} \rangle = \int_T^0 {}^t (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \delta \mathbf{a} dt \quad (\text{C.14})$$

$$\text{Soit, } \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{a}} = 2 \langle \delta \mathbf{a}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle \quad (\text{C.15})$$

- Deuxième terme

$$\langle \delta \dot{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = \int_0^T {}^t \delta \dot{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}} dt = [{}^t \delta \mathbf{a} \tilde{\mathbf{a}}]_0^T - \int_0^T {}^t \delta \mathbf{a} \dot{\tilde{\mathbf{a}}} dt \quad (\text{C.16})$$

$\delta \mathbf{a}$  doit vérifier la condition initiale :  $\delta \mathbf{a}(0) = \mathbf{0}$

Pour faire disparaître le terme en  $t = T$ , il faut imposer  $\tilde{\mathbf{a}}(T) = \mathbf{0}$

$$\text{Soit, } \langle \delta \dot{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle = \langle \delta \mathbf{a}, -\dot{\tilde{\mathbf{a}}} \rangle \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \delta \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}} \rangle &= \int_0^T {}^t [(\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \delta \mathbf{a}] \tilde{\mathbf{a}} dt \\ &= \int_0^T {}^t \delta \mathbf{a} {}^t (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} dt \\ &= \langle \delta \mathbf{a}, {}^t (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$$\text{Soit, } \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}}, \delta \mathbf{a} \rangle = \langle \delta \mathbf{a}, 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \rangle + \langle \delta \mathbf{a}, \dot{\tilde{\mathbf{a}}} + {}^t (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 0 \quad \forall \delta \mathbf{a} \quad (\text{C.19})$$

$$\text{D'où, } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{a}) + \dot{\tilde{\mathbf{a}}} + {}^t (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} = 0 \quad (\text{C.20})$$

Ce qui conduit à l'équation de l'état adjoint :

$$\begin{cases} -\dot{\tilde{\mathbf{a}}} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + {}^t (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha} \mathbf{A}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} \\ \tilde{\mathbf{a}}(T) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

## Première variation de $\mathcal{L}$ par rapport à $\alpha$

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}, \delta \alpha \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha + \epsilon \delta \alpha) - \mathcal{I}(\mathbf{a}, \alpha)}{\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha + \epsilon \delta \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle - \langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle}{\epsilon} \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \alpha} \delta \alpha - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha + \epsilon \delta \alpha) - \mathcal{N}(\mathbf{a}, \alpha), \tilde{\mathbf{a}} \rangle}{\epsilon} \\ &= \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \alpha} \delta \alpha + \langle I_{\delta \alpha} (\mathbf{A}_{rd} \mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd} \mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}), \tilde{\mathbf{a}} \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\text{Avec } I_{\delta\alpha} = \begin{pmatrix} \delta\alpha_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \delta\alpha_M \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

- Premier terme

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \mathbf{a}} \delta\alpha = \beta^2 [\langle \alpha, \delta\alpha \rangle + \langle \delta\alpha, \alpha \rangle] = 2\beta^2 \langle \delta\alpha, \alpha \rangle \quad (\text{C.24})$$

- Deuxième terme

$$\begin{aligned} \langle I_{\delta\alpha} (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}), \tilde{\mathbf{a}} \rangle &= \int_0^T {}^t [I_{\delta\alpha} (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd})] \tilde{\mathbf{a}} dt \\ &= \int_0^T {}^t (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) I_{\delta\alpha} \tilde{\mathbf{a}} dt \\ &= \int_0^T {}^t \delta\alpha {}^t (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} dt \\ &= \langle \delta\alpha, {}^t (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} \rangle \quad (\text{C.25}) \end{aligned}$$

$$\text{Soit, } \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}, \delta\alpha \right\rangle = \langle \delta\alpha, 2\beta^2\alpha + {}^t (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} \rangle = 0 \quad \forall \delta\alpha \quad (\text{C.26})$$

En imposant que  $\alpha$  est constant, son expression s'obtient en développant le produit scalaire :

$$\int_0^T {}^t \delta\alpha [2\beta^2\alpha + {}^t (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}}] dt = 0 \quad \forall \delta\alpha \quad (\text{C.27})$$

$$\text{Soit, } \int_0^T [2\beta^2\alpha + {}^t (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}}] dt = 0 \quad (\text{C.28})$$

$$\text{Il vient alors : } \alpha = -\frac{1}{2\beta^2} \int_0^T {}^t (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} dt \quad (\text{C.29})$$

L'écriture des premières variations de  $\mathcal{L}$  conduit ainsi à un système de trois équations couplées qui peut être résolue avec une méthode itérative :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{a}} = (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha}\mathbf{A}_{rd}) \mathbf{a} + (\mathbf{B}_{rt} + I_{1+\alpha}\mathbf{B}_{rd}) \mathbf{u} + \mathbf{E}_{rt} + I_{1+\alpha}\mathbf{E}_{rd} \\ -\dot{\tilde{\mathbf{a}}} = {}^t (\mathbf{A}_{rt} + I_{1+\alpha}\mathbf{A}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} + 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) ; \tilde{\mathbf{a}}(T) = 0 \\ \alpha = -\frac{1}{2\beta^2} \int_0^T {}^t (\mathbf{A}_{rd}\mathbf{a} + \mathbf{B}_{rd}\mathbf{u} + \mathbf{E}_{rd}) \tilde{\mathbf{a}} dt \end{cases} \quad (\text{C.30})$$