



HAL
open science

Une contribution à la modélisation et à la commande des systèmes non linéaires à commutation

Romain Bourdais

► **To cite this version:**

Romain Bourdais. Une contribution à la modélisation et à la commande des systèmes non linéaires à commutation. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Lille, 2007. Français. NNT: . tel-00259420

HAL Id: tel-00259420

<https://theses.hal.science/tel-00259420>

Submitted on 28 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR

Doctorat délivré par l'École Centrale de Lille

Discipline : AUTOMATIQUE et INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

par

Romain Bourdais

Ingénieur diplômé de l'École Centrale de Lille

**UNE CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION
ET À LA COMMANDE DES
SYSTÈMES NON LINÉAIRES À COMMUTATION**

soutenue publiquement le 29 novembre 2007

JURY :

M. Hervé Guéguen	Président	Professeur à Supélec
M ^{me} Isabel Demongodin	Rapporteur	Professeur à l'Université Paul Cézanne
M. Jamal Daafouz	Rapporteur	Professeur à l'ENSEM
M. Cédric Join	Examineur	Maître de conférences à l'Université Henri Poincaré
M. Thierry Floquet	Examineur	Chargé de recherche au LAGIS
M. Wilfrid Perruquetti	Codirecteur	Professeur à l'École Centrale de Lille
M. Pascal Yim	Codirecteur	Professeur à l'École Centrale de Lille



Figure 1 – Dessin de Franquin dans *Gaston Lagaffe*, n°7, page 30

Je ne crois pas que mon entrée dans le monde de la recherche a été la conséquence d'un trop plein de lecture des aventures de Gaston Lagaffe, bien que ce dernier représente parfaitement l'image du savant — ou de l'artiste mal compris — derrière ses éprouvettes.

Aussi quand on me demande dans quel domaine s'inscrivent mes travaux, ma réponse provoque généralement la surprise, « *C'est quoi comme domaine ?* », voire l'incompréhension, « *Pourquoi étudies-tu ça ?* ».

Si je ne peux être comparé ni physiquement ni intellectuellement à Albert, j'ai néanmoins gardé à l'esprit ces questions. C'est pourquoi, j'ai essayé dans la mesure du possible, de rédiger cette thèse avec un souci d'accessibilité, bien que la nature de ce mémoire se place sous le sceau de la théorie. J'espère que cette contribution intéressera — au moins en partie — aussi bien les néophytes que les initiés, et que notre courageux lecteur sera sensible à cette démarche.

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier les nombreuses personnes qui directement comme indirectement, dans la joie comme dans la haine m'ont permis de vivre aussi bien jusqu'à présent.

*

Je pense naturellement à ma famille, Cathie, Jean-Do et tous les autres. Je pense aussi à mes amis de toujours et de tous les jours. Des coutançais Aurélie, Christelle, Elise, Hugo, Sophie aux pornichetains Ben, Benoît, Sylvain, en passant par les lillois Damien, Grhil et Mathieu. Je salue également mes collègues de bureau, et néanmoins amis, Nima, Alex, Michaël, Jean-David, sans oublier les marquettois volleyeurs et autres coéquipiers.

*

Je tiens à remercier chaleureusement mes encadrants, messieurs les professeurs Wilfrid Perruquetti et Pascal Yim. Chacun a réussi, à sa manière, à s'adapter à mon caractère pour que je puisse mener à bien le travail de cette thèse. Si le côté professionnel de nos relations est vide de reproche, les côtés amical et humain n'en sont pas plus remplis.

*

Il convient de remercier également mes deux rapporteurs, madame le professeur Isabel Demongodin et monsieur le professeur Jamal Daafouz, pour le temps consacré à l'étude de ce mémoire.

*

La vie de laboratoire a toujours été des plus plaisantes. L'ambiance y est rendue unique

grâce à notre artiste Bernard et son génie créateur qui a toujours eu mon admiration, sans un zeste de Larsen. Je tiens également à saluer Patrick, dont la sympathie n'a d'égale que ses compétences informatiques, Jacques, Marie-Françoise, Christine et Brigitte par qui toute tâche administrative devient une simple formalité. Je pense aussi aux nombreuses personnes qui m'ont côtoyé durant ces années.

*

Une mention spéciale est décernée à mademoiselle Marion Grenèche, qui depuis les prémisses m'accompagne au quotidien, qui tolère mes défauts, supporte mes traits d'humeur et mes sautes d'humeur.

*

Enfin, j'aimerais conclure en dédiant ce mémoire aux personnes qui sont parties trop vite. Qu'elles se marrent entre elles !

Table des matières

Notations	15
Introduction générale	19
1 Concepts de stabilité	33
1.1 D'un système dynamique hybride à un système à commutation	33
1.1.1 Présentation	33
1.1.2 Extensions et classes particulières	35
1.1.2.1 Cas temps discret	35
1.1.2.2 Systèmes contrôlés à commutation	36
1.1.2.3 Systèmes linéaires à commutation	36
1.2 Concepts de stabilité et problématiques	36
1.2.1 Introduction	36
1.2.2 Définitions	37
1.2.2.1 Équilibre stable	39
1.2.2.2 Équilibre attractif	40
1.2.2.3 Équilibre asymptotiquement stable	41
1.2.2.4 Équilibre exponentiellement stable	42

1.2.3	Approches	43
1.3	Un petit survol de l'existant	45
1.3.1	Quelques résultats sur les inclusions différentielles	45
1.3.1.1	Définition et généralités	45
1.3.1.2	Stabilité pour une inclusion différentielle	47
1.3.2	Stabilité uniforme	49
1.3.2.1	Approche par fonction commune de Lyapunov	50
1.3.2.2	Approche par l'algèbre de Lie	53
1.3.3	Fonctions multiples de Lyapunov	59
1.3.3.1	Fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux	59
1.3.3.2	Fonctions de Lyapunov poly–quadratiques	60
1.3.3.3	Fonctions poly–quadratiques et partition de l'espace d'état	63
1.3.4	Stabilité conditionnelle	64
1.3.4.1	Recherche d'une loi de commutation stabilisante	64
1.3.4.2	Correcteurs stabilisant le système indépendamment de la loi de commutation	68
1.4	Bilan	69
2	Construction d'un signal stabilisant par une représentation polytopique	73
2.1	Introduction	73
2.2	Mise sous forme polytopique d'un système à commutation	76
2.2.1	Représentation polytopique d'un système non linéaire à commutation.	77
2.2.2	Construction d'un modèle sous forme (SP)	78
2.2.2.1	Première étape	79
2.2.2.2	Seconde étape	79
2.2.2.3	Dernière étape	80
2.3	Stabilisation quadratique des systèmes à commutation	81
2.3.1	Première Approche : Cas de deux sous–systèmes	82

2.3.2	Généralisation	85
2.3.3	Exemple	85
2.4	Relaxation des conditions	87
2.5	Extension aux systèmes contrôlés	91
2.5.1	Cas de la commande par retour d'état	91
2.5.2	Le cas des systèmes PDC	92
2.6	Conclusion	94
3	Stabilisation uniforme	95
3.1	Introduction	95
3.2	Notations et définitions	96
3.2.1	Prémises mathématiques	97
3.2.1.1	Espace topologique	97
3.2.1.2	Fonctions	97
3.2.2	Systèmes à commutation et fonctions de Lyapunov communes	97
3.3	Une condition nécessaire et suffisante pour le problème de stabilisation	100
3.4	Une formule explicite de la loi de commande	102
3.4.1	Le contrôle par retour d'état de Lin–Sontag	102
3.4.2	Un exemple académique	103
3.5	Une condition suffisante pour construire une fonction commune	105
3.6	Conclusion	111
4	Systèmes à commutations restreintes	115
4.1	Introduction	115
4.2	Séquences de commutation construites à partir d'un réseau de Petri temporel	119
4.2.1	Quelques rappels sur les réseaux de Petri temporels	119
4.2.1.1	Premières définitions	119
4.2.1.2	États et échéanciers de tir	119

4.2.2	Définition formelle du modèle hybride proposé	121
4.2.3	Exemple	123
4.2.4	Construction de l'ensemble des scénarios admissibles	124
4.2.5	Quelques remarques	126
4.3	Stabilité et Stabilisabilité	130
4.3.1	Première approche	130
4.3.2	Aspects cycliques du graphe des classes	133
4.3.3	Vers une combinaison d'atteignabilité et de stabilité	136
4.4	Conclusion	136
5	Commande sans modèle	139
5.1	Introduction	139
5.2	Idées développées	142
5.2.1	Formulation du problème	142
5.2.2	Procédure de construction du contrôle	143
5.2.3	Un premier exemple	144
5.3	Quelques rappels sur les techniques algébriques d'estimation rapide	145
5.3.1	Estimation de dérivées	146
5.3.1.1	Principes	146
5.3.1.2	Un exemple	148
5.3.2	Estimation de paramètre	148
5.3.2.1	Démarche pour une équation différentielle d'ordre 1	149
5.3.2.2	Cas général	150
5.4	Quelques commentaires sur la procédure de commande	154
5.4.1	Commentaires sur l'hypothèse 5.2.1	154
5.4.1.1	Conditions requises dans le premier cas	155
5.4.1.2	Conditions requises dans le second cas	155
5.4.2	Commentaires sur l'implémentation numérique	155

5.4.3	Stabilité pratique en boucle fermée	158
5.5	Exemples	159
5.6	Conclusion et perspectives	165
Conclusion générale		167



Annexes **171**

A Rappels sur les réseaux de Petri **173**

A.1	Présentation générale	173
A.2	Les réseaux de Petri places/transitions	174
A.2.1	Définition formelle	174
A.2.2	Représentation graphique	174
A.2.3	Comportement d'un réseau de Petri	175
A.3	Formulation algébrique	176
A.3.1	Vecteurs et Matrices Caractéristiques	176
A.3.2	Équation d'état	177
A.4	Analyse de réseaux de Petri	178
A.4.1	Accessibilité	179
A.4.2	Propriétés structurelles	180
A.4.3	Propriétés comportementales génériques	182
A.4.4	Propriétés spécifiques	182
A.4.4.1	Propriétés d'accessibilité	184
A.4.4.2	Propriétés de sûreté, de vivacité et d'équité	184



Liste des figures **188**

TABLE DES MATIÈRES

Index	192
Bibliographie	195



Figure 2 – Dessin de Pancho dans le journal *Le Monde* du 11 janvier 2004 illustrant l'article intitulé "La révolte des chercheurs contre le gouvernement"

Notations

Acronymes

- 1) EDO : Équation différentielle ordinaire.
- 2) TS : Takagi-Sugeno.
- 3) LMI : *linear matriciel inequalities*.
- 4) RdPT : Réseau de Petri temporel.
- 5) CSC : Caractérisation d'une séquence de commutation.

Ensembles et nombres

- 1) \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- 2) \mathbb{R}_+ : ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
- 3) \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.
- 4) \mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
- 5) $[a, b]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- 6) $]a, b[$: intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- 7) $[a, b[$ ou $]a, b]$: intervalle semi-ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- 8) I_n : entiers naturels de 1 à n .
- 9) Γ : ensemble d'index.

- 10) \mathcal{K} : ensemble des fonctions continues de $[0, a) \rightarrow [0, \infty)$, où a est un réel positif (éventuellement infini), strictement croissantes et nulles en zéro.
- 11) \mathcal{KL} : une fonction continue $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe \mathcal{KL} si, pour s fixé, la fonction $\beta(\cdot, s)$ est de classe \mathcal{K} par rapport à la première variable et si, pour r fixé, la fonction $\beta(r, \cdot)$ est décroissante par rapport à la deuxième variable avec $\beta(r, s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow 0$.
- 12) $t \in \mathbb{R}_+$: variable temporelle.
- 13) $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: dérivée de la variable x par rapport au temps.
- 14) $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$: seconde dérivée de x par rapport au temps.

Vecteurs et fonctions

- 1) x^T : transposé du vecteur x .
- 2) $x \in \mathbb{R}^n$: vecteur de composantes x_i .
- 3) sgn : fonction signe qui renvoie le signe d'un scalaire $a \in \mathbb{R}$ et 0 en 0.
- 4) $|\cdot|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
- 5) $\|\cdot\|$: norme sur \mathbb{R}^n .
- 6) e^x : fonction exponentielle de x .
 $\ln(x)$: fonction logarithme népérien de x .
- 7) \max : fonction maximum.
- 8) \min : fonction minimum.
- 9) $\deg(P)$: renvoie le degré du polynôme P .
- 10) ∇f : gradient de la fonction f .
- 11) $\langle f, g \rangle$: produit scalaire de f et de g .

Matrices

- 1) A^T : transposée de la matrice A .
- 2) $A > 0$ (respectivement $A < 0$) : la matrice A est définie positive (respectivement définie négative).
- 3) $\|A\|$: norme euclidienne de la matrice A .
- 4) $\text{rang}(A)$: rang de la matrice A .

- 5) $\text{spec}(A)$: spectre de la matrice A .
- 6) $\dim(A)$: dimension de la matrice A .
- 7) I : matrice identité, dont la dimension sera précisée, si besoin est.
- 8) $[A, B]$: crochet de Lie de A et B , défini par $[A, B] = AB - BA$.
- 9) $\text{span}\{A, B, C, \dots\}$: espace vectoriel engendré par les matrices A, B, \dots

Introduction générale : à propos des systèmes à commutation

Peut-on appeler "écrire" n'importe quelle tentative de représentation d'une ébauche de pensée par le biais de symboles graphiques incohérents couchés dans le désordre au mépris total de la grammaire, de la syntaxe, de l'orthographe et du souvenir de mon aïeule Germaine Philippin, institutrice de l'époque missionnaire, qu'une cédille oubliée décourageait aux larmes.

— P. Desproges¹

DANS ce chapitre introductif, nous présentons dans un premier temps les systèmes à commutation et les notions mathématiques qui s'y rapportent, de manière à être compris le plus largement possible. Ensuite, nous faisons le point sur la *problématique* de la thèse et sur l'état de l'art associé. Nous proposons, pour conclure, un rapide survol des éléments présentés dans ce manuscrit et la façon dont ils s'enchaînent.

Un peu comme Dr Jekyll et Mr Hyde, les systèmes que nous étudions ont la faculté d'évoluer selon plusieurs dynamiques possibles, parfois complètement différentes voire contradictoires.

Le cadre de notre travail se limite à une classe particulière de systèmes dynamiques hybrides : les systèmes continus à commutation, qui peuvent être considérés comme une abstraction de haut niveau d'un système hybride, dans lequel la dynamique discrète est complètement omise.

Pour nous guider dans nos travaux, de nombreux ouvrages nous ont accompagné durant ces mois de recherche. L'ouvrage [Zaytoon, 2001] a été le point de départ de notre démarche pour la vision globale de ces systèmes qu'il propose ainsi que les diverses problématiques (modélisation, analyse, commande, ...) qui découlent de leur étude. Par suite, et au fur et à mesure que notre problématique se dessinait, les livres [Liberzon, 2003] et [Sun et Ge, 2005] sont venus enrichir notre arsenal d'outils spécifiques pour leur analyse, tout en y présen-

¹Pierre Desproges, *Chroniques de la haine ordinaire*.

tant clairement les divers enjeux liés. Par ailleurs, nous nous sommes également référé aux articles [Branicky, 1998, Daafouz et al., 2002, Decarlo et al., 2000, Hespanha et Morse, 1999], [Hespanha, 2004, Liberzon et Morse, 1999, Vu et Liberzon., 2005, Lin et Antsaklis, 2005] ou encore [Pettersson et Lennartson, 1996] ainsi qu’aux travaux de thèse [Champagnat, 1998], [Pettersson, 1999] et bien d’autres. Cette liste, bien entendu non exhaustive, sera complétée au fur et à mesure.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, les quelques lignes qui vont suivre sont destinées aux lecteurs non avertis, qui voudraient se sensibiliser aux systèmes dynamiques, avec notamment une première approche des systèmes à commutation. Elles n’ont pas pour but de définir ces systèmes avec une rigueur mathématique² indiscutable, mais plutôt de mettre en avant les diverses définitions et notions à travers cet exemple introductif : un modèle Proie–Prédateur à commutation.

Vers un modèle Proie–Prédateur à commutation

En 1859, Thomas Austin, britannique de naissance, importe 12 couples de lapins dans sa terre d’accueil, l’Australie. Suite à un incendie, un des couples arrive à s’échapper. Suivant leur instinct, leur passion ou simplement les lois de la nature, le jeune couple animal produit alors une portée, qui à son tour en produira une autre, . . . Le taux de natalité des lapins étant largement supérieur au taux de mortalité, on imagine ainsi facilement qu’au bout de plusieurs générations, le nombre de lapins devient rapidement considérable.

Si l’on note $x(t)$ (abusivement x) le nombre de lapins à une date t , $\dot{x}(t)$ (abusivement \dot{x}) la dérivée de ce nombre à une date t (en d’autres termes, le taux de croissance du nombre de lapins sur une courte durée) et $\alpha > 0$ le taux de reproduction, on peut décrire la croissance d’une population animale, ici des lapins, par l’équation suivante :

$$\dot{x} = \alpha x, \tag{1}$$

qui traduit bien le fait que plus les lapins sont nombreux, plus ils se reproduisent. On parle alors de croissance exponentielle (figure 3).

Bien entendu, cette relation n’est vraie que si l’on considère que l’espace dans lequel les lapins vivent est suffisamment grand pour accueillir toute la population. Un modèle plus fin peut être proposé, ainsi décrit :

²Cet aspect sera longuement repris dans la partie suivante

$$\dot{x} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{x_{max}}\right). \quad (2)$$

Le facteur supplémentaire en $(1 - \frac{x}{K})$ caractérise la saturation de l'environnement : plus on est nombreux, plus il est difficile de se nourrir. x_{max} représente alors le nombre maximal d'individus qui peuvent être accueillis (figure 4).

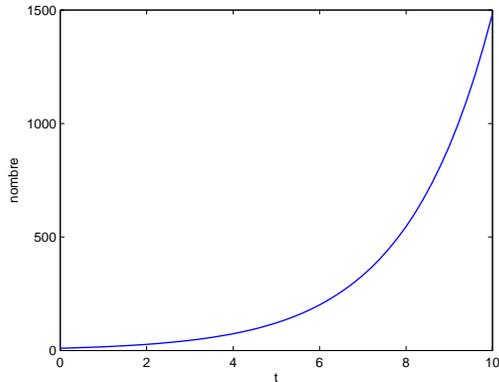


Figure 3 – Croissance exponentielle d'une population en l'absence de prédateurs

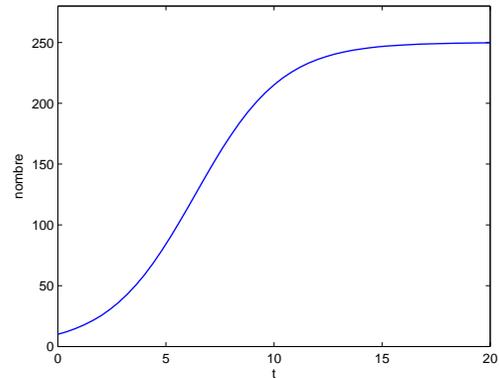


Figure 4 – Démographie d'une population dans un environnement limité en ressources

Ces modèles traduisent l'évolution d'une espèce dans un environnement dépourvu de prédateurs, et c'est là tout le problème auquel l'Australie a dû faire face : les lapins n'avaient pas de prédateurs directs. Conséquence immédiate : une explosion démographique de la population lapine, entraînant notamment un saccage des ressources initialement prévues pour d'autres espèces qui sont maintenant menacées de disparition³ . . .

Étudions maintenant le cas d'une population de prédateurs, espèce qui ne peut survivre sans la présence de proies. En notant $y(t)$ (abusivement y) le nombre de prédateurs à l'instant t , et $\dot{y}(t)$ (abusivement \dot{y}) la variation de ce nombre sur un court intervalle de temps, il vient alors la relation suivante :

$$\dot{y} = -\beta y. \quad (3)$$

³L'histoire peut faire sourire mais ne s'arrête pas là : d'une poignée en 1860, ils sont 600 millions 50 ans plus tard. Devenus un fléau, toutes les méthodes sont bonnes pour tenter de stopper l'évolution : chasse, explosif, pièges, poison, clôture, un mur de 3000 km pour stopper leur progression . . . Mais rien n'y fait. C'est par l'arme bactériologique que les experts ont réussi à stopper cette évolution. Mais les plus résistants sont encore là et se sont adaptés au virus . . . qui les laissent encore apparaître aux actualités.

Relation assez proche de la précédente, dans laquelle $\beta > 0$ représente le taux de mortalité naturelle des prédateurs. En l'absence de proies, on assiste alors à une disparition exponentielle de la population prédatrice (figure 5).

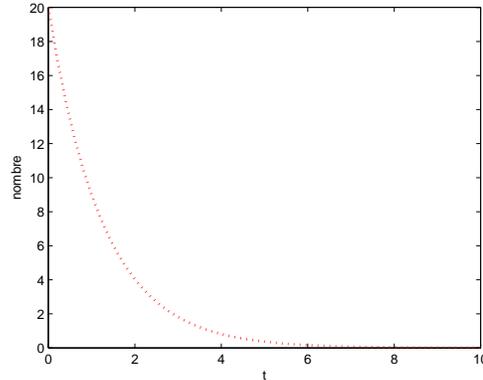


Figure 5 – Démographie d’une population de prédateurs

Considérons maintenant que les deux espèces cohabitent dans un même espace. Comme bien souvent, la loi du plus fort s’applique, et chaque rencontre entre un prédateur et sa proie suit un scénario bien connu que nous ne détaillerons pas ici, pour ne pas heurter la sensibilité de nos plus jeunes lecteurs. Il va de soi qu’après chaque rencontre le nombre de proies diminue, et que parallèlement par le fruit de leur chasse, les prédateurs vont pouvoir se développer. De même, plus le nombre de proies et de prédateurs est important, plus la probabilité qu’il y ait des rencontres est grande. En reprenant les notations précédentes, on obtient le célèbre modèle proie–prédateur de Lotka–Volterra [Volterra, 1931] :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \gamma xy \\ \dot{y} = -\beta y + \delta xy \end{cases}, \quad (4)$$

dans lequel les coefficients γ et δ traduisent l’impact d’une rencontre proie–prédateur sur le groupe.

A partir d’un nombre initial de proies et de prédateurs, la dynamique démographique est *unique* et parfaitement *connue*, régie par l’équation (4). Remarquons au passage que l’évolution proposée par notre modèle (figure 7) est assez similaire⁴ de celle d’un modèle réel (figure 7), provenant d’une étude démographique de lièvres et de lynx au Canada.

Afin d’introduire les systèmes à commutation, nous proposons un exemple quelque peu

⁴à quelques virus près.

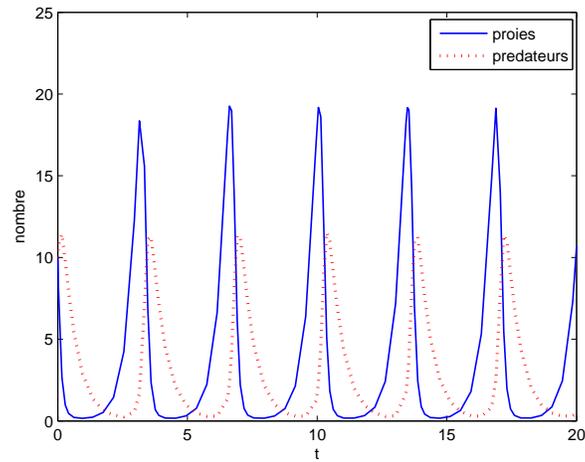


Figure 6 – Modèle proie prédateur simulé

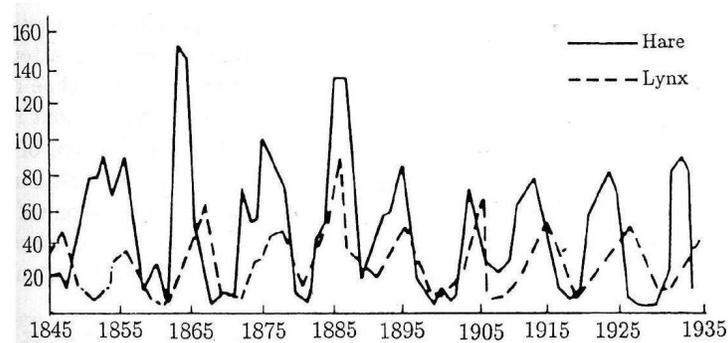


Figure 7 – Modèle proie prédateur réel

capillo-tracté⁵, mais qui, nous l’espérons, permettra aux lecteurs de comprendre les diverses notions qui se rapportent à ces systèmes. Le scénario est le suivant : deux familles de lapins et une famille de loups cohabitent dans un même environnement.

- La première famille de lapins est composée de x_1 individus, des Argentés de Champagne⁶. Cette famille, « assez civilisée », habite des terriers situés à l’abri des prédateurs, mais qui ne peuvent accueillir qu’un nombre restreint d’individus. Cependant, elle a pris l’habitude de passer une partie de l’année vers des terres plus riches, qui lui permettrait de mieux se développer, si les lieux n’étaient pas plus hostiles.

⁵plus couramment « tiré par les cheveux ».

⁶race de lapins, reconnue par les hommes pour leur couleur de poil, par les loups pour leur chair tendre.

- La deuxième famille de lapins, composée de x_2 individus, est celle des Nains de couleur⁷. Bien que partageant leur terre avec les loups, ils ne sont que rarement attaqués, sauf quand les prédateurs se sentent menacés de disparition. Par manque d’organisation, cette famille n’arrive pas à se gérer quand elle compte trop de membres.
- La famille de loups est composée de y individus. Ils privilégient généralement la chasse aux Argentés de Champagne, plus dodus, mais ne se privent pas de quelques Nains de couleurs quand l’occasion se présente. Cependant, si la nourriture se rarifie, ils mènent un combat sans relâche à ces derniers. « Survie oblige ».

Ce qu’il faut retenir d’un tel scénario, outre son aspect académique et peu réaliste, c’est que l’évolution démographique de ces familles ne peut être connue sans connaître les *comportements* adoptés par chacune des espèces. En effet, il faut distinguer plusieurs évolutions possibles.

- Premier mode : les trois espèces cohabitent. On peut alors obtenir un modèle similaire à celui proposé par Lotka–Volterra (équation (4)), moyennant peu de modifications :

$$(S_1) : \begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 - \gamma_1 x_1 y \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \gamma_2 x_2 y \\ \dot{y} &= -\beta y + \delta_1 x_1 y + \delta_2 x_2 y \end{cases} , \quad (5)$$

- Deuxième mode : les Argentés de Champagne vivent réfugiés, et les loups ne changent en rien leurs habitudes alimentaires.

$$(S_2) : \begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \gamma_2 x_2 y \\ \dot{y} &= -\beta y + \delta_2 x_2 y \end{cases} , \quad (6)$$

- Troisième mode : les loups manquent de nourriture et décident pour survivre de s’attaquer plus sérieusement aux Nains de couleur.

$$(S_3) : \begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \gamma'_2 x_2 y \\ \dot{y} &= -\beta y + \delta'_2 x_2 y \end{cases} , \quad (7)$$

- Quatrième mode : les Argentés de Champagne retournent vers le lieu commun, mais les

⁷race de lapins sauvages, de faible poids, généralement peu chassés par les loups par le faible rendement chasse–nourriture.

loux ne se rendent pas compte de leur retour.

$$(S_4) : \begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 - \gamma'_1 x_1 y \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - \gamma'_2 x_2 y \\ \dot{y} &= -\beta y + \delta'_1 x_1 y + \delta'_2 x_2 y \end{cases}, \quad (8)$$

- Cinquième mode : les loups repèrent la présence des Argentés de Champagne et reviennent à leur instinct primaire, on retrouve alors le premier cas (équation 5).

On a donc défini ici *une famille de systèmes dynamiques*, composée de (S_1) , (S_2) , (S_3) et (S_4) . Notre *état*, ici la démographie des trois espèces, va varier au cours du temps, mais contrairement au cas ordinaire de Lotka–Volterra (équation (4)), on ne peut pas déterminer quelle va être le comportement démographique sans connaître le mode d'évolution choisi. Parmi toutes les dynamiques possibles, une seule est active à un instant donné, et celle-ci sera active pendant un certain temps. Par suite, un changement de dynamique, nommé *commutation* peut arriver, et l'état évolue alors suivant cette nouvelle dynamique. Ces changements de dynamique sont orchestrés par une fonction qui indique le système actif à tout instant. Cette fonction est communément appelée *loi de commutation* ou *signal commutant*.

Cette combinaison d'une famille de systèmes dynamiques avec une loi de commutation donne naissance à ce qui sera l'objet d'étude de cette thèse, les *systèmes à commutation*. L'évolution temporelle de l'état, appelée *trajectoire*, dépend donc non seulement de l'état initial **mais aussi** de la loi de commutation choisie. Les figures suivantes (8 et 9) illustrent parfaitement l'influence de la loi de commutation sur l'évolution. Elles correspondent à des trajectoires obtenues pour un même état initial mais pour des signaux à commutation différents.

Variétés des systèmes à commutation. Deux approches

Il existe différents types de systèmes à commutation. L'élément retenu pour réaliser cette classification est la nature dont les commutations sont régies.

Dans notre exemple, les migrations de la première famille de lapins sont cycliques. Les changements de dynamique liés à ces migrations ne dépendent donc que du temps. Les loups quant à eux ne modifient leur comportement envers les Nains de couleur que lorsque leur espèce se sent menacée, en d'autres termes quand leur nombre y atteint un certain seuil. Les commutations ici ne dépendent que de l'état de notre système.

C'est là un premier élément de classification : savoir si les commutations *dépendent du temps* ou *dépendent de l'état*.

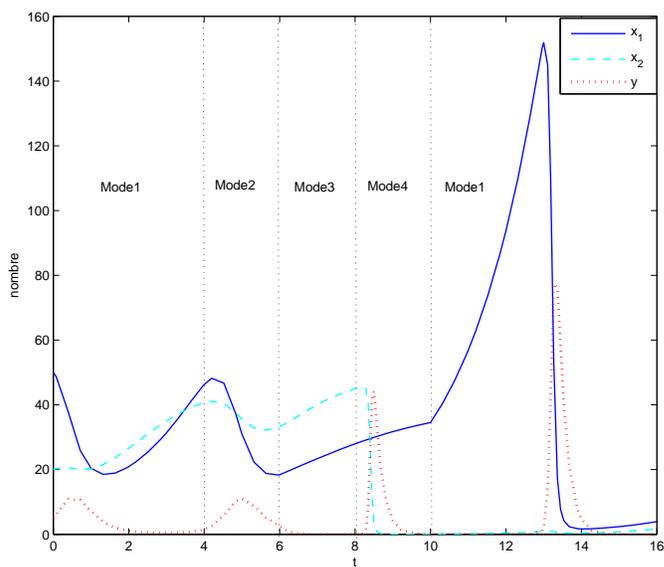


Figure 8 – Évolution démographique sous le scénario 1

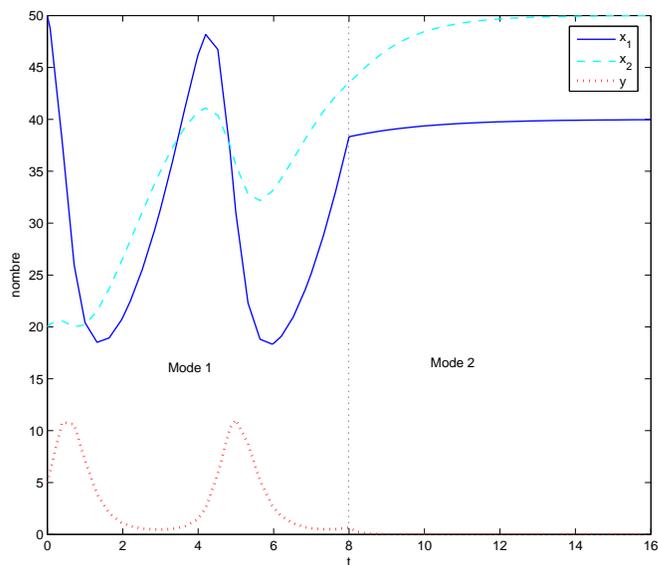


Figure 9 – Évolution démographique sous le scénario 2

Dans notre exemple, tous les changements de dynamique, qu'ils soient liés à l'état ou à un

facteur temporel sont inhérents au système. On les qualifie alors de *commutations autonomes*. Dans certains systèmes, un opérateur extérieur peut provoquer des changements de dynamique, on les qualifie alors de *commutations contrôlées*. Ceci constitue le second critère de classification des systèmes à commutation.

Comme bien souvent, les outils d'analyse et de commande dépendent de la nature du système à commutation étudié. Mais outre cette nature, quand on s'intéresse à une certaine propriété du système à commutation, la question qu'il faut se poser également est de savoir si l'on veut étudier cette propriété pour **une** séquence de commutation donnée ou pour **toutes** les séquences de commutation possibles. On emploiera dans le premier cas le terme de *propriété conditionnelle* et dans le second de *propriété uniforme*. Évidemment, si une propriété est vraie uniformément, elle l'est de surcroît conditionnellement, mais sa garantie impose des conditions beaucoup plus fortes ; on comprend alors facilement que les outils à mettre en œuvre seront différents d'une approche à l'autre. Parmi les propriétés étudiées, celle qui a retenu notre attention est la *stabilité* que nous allons maintenant expliciter.

Caractère physique de la stabilité

Comme précédemment, l'objectif de cette introduction n'est pas de décrire entièrement les notions de stabilité mais simplement d'en donner l'idée générale.

Bien que la notion de stabilité soit assez intuitive, le premier à avoir formulé mathématiquement cette idée est Lyapunov à la fin du 19^e siècle. Son nom y est depuis associé, que ce soit pour s'y référer — “stable au sens de Lyapunov” — ou pour s'en distinguer. Partant d'une *position d'équilibre*, elle sera dite stable si, en s'en écartant, on en reste “proche”. C'est, par exemple, ce que nous observons sur les montagnes russes d'une fête foraine. Imaginons qu'aucune force ne soit appliquée sur le chariot et qu'il se trouve dans un creux de la montagne : cette position serait alors une position d'équilibre stable puisqu'un léger mouvement du chariot ne provoquerait qu'un faible déplacement de ce dernier. Par contre, il semble naturel, pour tout un chacun, qu'un léger mouvement en haut de la montagne déstabilise le chariot et entraîne une irrémédiable descente pour le plaisir du plus grand nombre. Une bosse est donc un point d'équilibre instable et un creux, stable, bien que plus ennuyeux...

Pour permettre d'étudier mathématiquement la stabilité d'un point d'équilibre, Lyapunov généralise la notion d'énergie et regarde l'évolution de cette dernière. Pour notre chariot sur son manège, l'énergie serait, par exemple, la somme de l'énergie potentielle due à la gravitation de la terre et de l'énergie cinétique liée au mouvement du chariot.

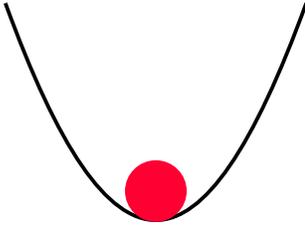


Figure 10 – Un équilibre stable

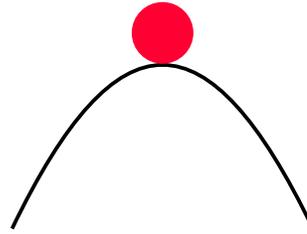


Figure 11 – Un équilibre instable

Revenons un instant aux systèmes à commutation. Il faut dans un premier temps définir le concept de point d'équilibre pour ces systèmes, à savoir un état à partir duquel le système n'évolue plus et ce **quelle que soit** la dynamique choisie. Si la généralisation de la définition d'un point d'équilibre aux systèmes à commutation semble naturelle, il n'en est rien de la généralisation de la stabilité.

En effet, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il faut déjà préciser si l'on s'intéresse à la stabilité du système pour une séquence de commutation donnée (stabilité dite alors conditionnelle) ou pour toutes les séquences de commutations possibles (stabilité dite uniforme). De plus, et c'est ce point qu'il faudra garder en tête tout au long de ce mémoire, contrairement à ce qui pourrait sembler « logique », à partir de deux sous-systèmes dynamiques stables, on peut (dans certains cas) trouver une séquence de commutation qui déstabilise le système, et réciproquement, on peut *construire* une loi de commutation qui permette d'assurer la stabilité conditionnelle de notre position d'équilibre à partir de sous-systèmes instables. Par conséquent, une étude séparée des sous-systèmes qui composent le système à commutation bien que nécessaire n'est plus suffisante pour garantir ses stabilités (uniforme et conditionnelle). Il faudra donc en plus déterminer des conditions sur la loi de commutation pour y parvenir, point sur lequel de nombreux travaux ont apporté leur contribution, comme nous l'illustrerons dans les pages à venir.

Problématique

Bien que l'intérêt de la communauté scientifique pour l'étude des systèmes à commutation soit assez récent — depuis les années 90 —, de multiples pistes ont déjà été explorées en profondeur. Les nouvelles niches d'étude se font donc rares et demandent une spécialisation de plus en plus importante.

Ceci étant, la recherche en automatique, comme la recherche scientifique en générale, s'est toujours orientée vers des domaines pratiques, et l'analyse de systèmes de plus en plus complexes est une étape indispensable pour répondre à des exigences techniques. Parmi ces objets d'étude, certains présentent des commutations entre différentes dynamiques, que ce soit par inhérence à la physique du système (telles les réactions entre composants au cours d'un procédé chimique, . . .), ou suite à l'intervention d'un opérateur, qui peut tant provoquer une commutation (un automobiliste et sa boîte de vitesse, . . .), que générer une commande commutant entre divers contrôleurs (contrôleurs hiérarchisés, . . .). Dans cette optique, la stabilité représente un enjeu double, tant de sécurité que de performances.

L'approximation de ces systèmes par des modèles linéaires a permis d'obtenir une première vague de résultats estimés suffisants, du moins en première approche. Pour répondre à des soucis de performances de plus en plus exigeantes, les études ont été étendues aux systèmes non linéaires, pouvant éventuellement être perturbés, se rapprochant alors davantage à la réalité physique.

C'est en ce sens que nos travaux ont été menés, pour répondre à la **problématique** suivante : considérant des systèmes non linéaires à commutation, quels sont les verrous scientifiques qui empêchent l'analyse de stabilité et la construction de lois de commande adéquates ? Comment alors mettre en œuvre des outils mathématiques aptes à les débloquent ? Est-ce que l'apport de connaissances sur l'ensemble de commutations admissibles par la physique du système peut se modéliser et le cas échéant permettre d'affiner certains résultats ? A l'opposé, peut-on encore commander ces systèmes quand on ignore tout, ou presque, de ce modèle ? Ce sont sur ces questions que nous avons concentré notre travail.

Pour conclure cette introduction, présentons la structure de ce mémoire.

Sommaire général

Nous commencerons dans le **chapitre 1** par aborder le problème général de la stabilité, afin que tout lecteur puisse avoir les bases nécessaires à la compréhension de nos travaux. Nous définirons ainsi, dans le cadre des systèmes à commutation, les premières notions de stabilité au sens de Lyapunov, et rappellerons les principaux résultats existants.

Dans le **chapitre 2**, nous proposerons une réécriture des systèmes à commutation sous une forme polytopique afin de dégager des conditions suffisantes pour expliciter une séquence de commutation stabilisante. Par suite, nous verrons comment utiliser cette représentation pour atténuer les effets des perturbations.

Ensuite, dans le **chapitre 3**, nous proposerons une extension des résultats de Mancilla–Aguilar sur la stabilité uniforme aux systèmes contrôlés à commutation. Nous définirons ainsi une nouvelle notion : la notion de fonction de Lyapunov contrôlée commune, pour obtenir une condition nécessaire et suffisante de stabilisation uniforme, tout en explicitant la loi de commande associée.

Le **chapitre 4**, quant à lui, sera dévolu à une façon originale d’étudier ces systèmes, par l’introduction d’un modèle formel pour représenter un ensemble de contraintes sur les commutations. Pour ce faire, nous présenterons un formalisme hybride associant une famille de systèmes dynamiques continus à un réseau de Petri temporel. Contrairement aux nombreux modèles hybrides existant dans la littérature [Nenninger et Krebs, 1997, Demongodin et Koussoulas, 1998, Lygeros et al., 2003], celui que nous définirons aura comme avantage de garder indépendante la partie discrète, permettant ainsi de conserver les propriétés bien connues des réseaux de Petri. Par suite, ces propriétés seront employées à déterminer des critères spécifiques de stabilité.

Dans le chapitre 4, le nombre d’informations sur le modèle étudié est conséquent. En effet les dynamiques sont connues et de plus, certaines restrictions sur les commutations sont formalisées. Dans le **chapitre 5**, nous présenterons une approche totalement opposée des systèmes à commutation, où, cette fois-ci, ni les dynamiques, ni les commutations ne sont connues. L’idée présentée est alors d’utiliser des techniques algébriques pour développer une commande sans modèle des systèmes à commutation.

Enfin, nous concluons ce travail par un bilan puis soulignerons les pistes qu’il permet d’ouvrir.

Concepts de stabilité

L'instabilité est nécessaire pour progresser.

Si on reste sur place, on recule.

— Coluche¹

DANS ce chapitre, nous présentons mathématiquement le concept de stabilité pour les systèmes à commutation. L'étendue de données que recouvre ce terme impose de faire des choix dans ce chapitre. Aussi avons-nous pris soin de ne présenter que les travaux qui ont apporté un rocher à l'édifice, ainsi que les pierres qui nous seront utiles pour la suite de ce mémoire.

Il convient, dans un premier temps, de revenir sur les définitions formelles des systèmes à commutation et des notions de stabilité qui s'y rapportent. Par suite, nous revenons sur la panoplie de résultats et d'outils qui ont vu le jour ces dernières années.



1.1 D'un système dynamique hybride à un système à commutation

1.1.1 Présentation

Nous nous attacherons dans ce premier paragraphe à définir formellement notre objet d'étude : les systèmes à commutation. Comme ces systèmes correspondent à une classe particulière de systèmes dynamiques hybrides, il convient de rappeler, du moins brièvement, les esquisses mathématiques qui définissent ces systèmes.

¹Michel Colucci, *L'horreur est humaine*.

Depuis une décennie et demie, les innovations technologiques (l'omniprésence d'ordinateurs, de réseaux de communication par exemple) ont suscité un intérêt considérable pour l'étude de processus dynamiques complexes caractérisés par une interaction forte entre des dynamiques continues, régies par des équations différentielles ou aux différences, et des dynamiques discrètes, décrites par des machines à états finis, ou plus généralement par un système à événements discrets. De tels systèmes appelés *systèmes dynamiques hybrides (SDH)* sont caractérisés par des commutations entre plusieurs modes de fonctionnement où chaque mode est régi par ses propres lois dynamiques continues. Les transitions entre les modes peuvent alors être déclenchées selon un modèle événementiel :

- lorsque des variables continues atteignent certains seuils spécifiques (événements d'état),
- après une certaine durée ou période de temps (événements de temps),
- ou par des entrées externes (événements d'entrée).

Un système hybride peut donc s'écrire sous la forme du système d'équations (1.1), qui associe dynamique continue et dynamique discrète :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), q(t)) \\ q(t^+) &= g(t, x(t), q(t), u_d) \end{cases}, \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, q \in \mathcal{Q}, t \in \mathbb{R}_+, u_d \in \mathcal{Q}_d. \quad (1.1)$$

L'état continu x évolue dans un espace continu \mathcal{X} , tandis que l'état discret et la commande discrète évoluent dans des espaces discrets dénombrables \mathcal{Q} et \mathcal{Q}_d .

De nombreux outils de modélisation, combinant des évolutions continues et discrètes, sont ainsi apparus, avec leurs propres caractéristiques. Pour tout œil curieux, en voici quelques uns et les références qui vont avec. Les Bond Graphs à commutation présentés dans ([Buisson, 1993], [Strömberg et al., 1993]), les réseaux de Petri hybrides ([Bail et al., 1991], [David et Alla, 1987], [David et Alla, 2004], [Nenninger et Krebs, 1997]), les automates hybrides avec les formalismes proposés par [Lygeros et al., 2003] ou [Goebel et al., 2004]), ...

Parmi les diverses classes de systèmes hybrides, celle qui a retenu notre attention sont les *systèmes à commutation*, pour lesquels l'état continu évolue sur un intervalle de temps selon une certaine dynamique (parmi un ensemble fini de dynamiques) puis selon une autre sur l'intervalle de temps suivant. De manière concrète, pour cette classe de systèmes hybrides, la dynamique discrète est en quelque sorte omise.

Soit Γ un ensemble d'index. Un **système à commutation** est constitué d'une famille de sous-systèmes dynamiques :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_i(x(t), t), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+, \\ f_i &: \mathcal{X} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{X}, \quad i \in \Gamma. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dans la famille (1.2), seul un sous-système est actif à un instant donné. Cette loi qui orchestre les commutations entre les sous-systèmes est appelée **loi de commutation** ou **signal de commutation** . Dans la plupart des travaux menés, cette loi est une fonction constante par morceaux, et ne présente pas de phénomène de Zénon, à savoir que sur tout intervalle de temps fini, il n'existe qu'un nombre fini de commutations. Nous noterons par la suite $\mathcal{S}(\Gamma)$, l'ensemble des fonctions constantes par morceaux, définies sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans Γ , et qui respectent la propriété de non Zénon.

Formellement, on représente alors un système à commutation par :

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), t), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \sigma(t) \in \mathcal{S}(\Gamma). \tag{1.3}$$

dans lequel $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Gamma$ est la loi de commutation.

Dans les systèmes que nous étudions, chacun des champs de vecteurs est autonome², dans le sens où ils ne font pas apparaître explicitement le temps. Nous utiliserons donc par la suite la description suivante :

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma), \tag{1.4}$$

1.1.2 Extensions et classes particulières

1.1.2.1 Cas temps discret

Si la majeure partie de nos travaux reposent sur une approche en temps continu (aboutissant à une description par des équations différentielles), certains résultats seront proposés pour des systèmes — temps discret — à commutation, qui donnent naissance à une mise sous forme d'équations de récurrence, décrite par :

²autre terminologie : stationnaire.

$$x_{k+1} = f_{\sigma(t_k)}(x_k), \quad x_k \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma). \quad (1.5)$$

1.1.2.2 Systèmes contrôlés à commutation

Notre étude se portera aussi sur une classe particulière de systèmes à commutation dans lesquels chacun des sous-systèmes est contrôlé. Leur description est la suivante :

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x, u), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma), \quad (1.6)$$

où u représente la commande continue.

1.1.2.3 Systèmes linéaires à commutation

Parmi les classes particulières, celle pour laquelle les résultats sont les plus « denses » est la classe des systèmes linéaires à commutation, pour lesquels chacun des sous-systèmes est linéaire.

Ces systèmes sont généralement notés

$$\dot{x} = A_{\sigma}x, \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma). \quad (1.7)$$

On retrouvera de même cette caractéristique pour les systèmes temps discrets : $x_{k+1} = A_{\sigma}(x_k)$, comme pour les systèmes contrôlés : $\dot{x} = A_{\sigma}x + B_{\sigma}u$.

1.2 Concepts de stabilité et problématiques

1.2.1 Introduction

Les ensembles remarquables (équilibres, orbites périodiques, ...) peuvent caractériser des configurations à énergie minimale pour un système physique. Ces systèmes peuvent avoir tendance à rechercher une de ces configurations plutôt qu'une autre : c'est ce que les concepts de stabilité traduisent d'une certaine façon. Comme nous l'avons évoqué dans notre chapitre introductif, l'évolution de notre état est gouvernée tant par les champs de vecteurs que par le signal de commutation. Dans ce sens, les concepts de stabilités, qui portent sur des propriétés

qualitatives des solutions, peuvent être définis :

- seulement sur l'état continu x , et ce indépendamment du signal de commutation : on parlera de *propriété uniforme* (sous entendu par rapport à σ),
- sur x et ce pour un signal de commutation : on parlera de *propriété conditionnelle* (sous entendu par rapport à une évolution de σ donnée).

Si notre lecteur est déjà familiarisé avec les systèmes dynamiques, précisons que pour une équation différentielle ordinaire (EDO) non autonome (dont le temps apparaît explicitement dans le second membre), on parle de stabilité uniforme si elle **n'est pas** conditionnée par un ensemble d'instant initiaux. Dans le cas contraire, on parle de stabilité non uniforme. Cette notion est évidemment différente de celle présentée dans le cadre des systèmes dynamiques hybrides.

1.2.2 Définitions

La *stabilité* d'un point d'équilibre d'un système, qu'il soit à commutation ou non, consiste toujours à observer que son évolution reste proche du point d'équilibre lorsqu'on s'en écarte, dans un certain voisinage, appelé le domaine de stabilité. L'*attractivité*, quant à elle, revient à traduire que, s'écartant légèrement de cette position d'équilibre, le système reviendra dessus, au bout d'un certain temps et d'un temps certain (voire infini). La *stabilité asymptotique* combine à la fois la stabilité et l'attractivité, et indique donc que le système reviendra au bout d'un temps qui peut être infini, au point d'équilibre, tout en restant proche de celui-ci au cours du temps. Notons que la notion de stabilité asymptotique est la plus exigée en pratique. Ceci s'explique certainement parce qu'elle constitue une première approche pouvant s'adapter à plusieurs situations (précision en régulation, poursuite d'une trajectoire de référence, ...). La *stabilité exponentielle* vient ajouter au caractère asymptotique un critère de rapidité de convergence.

Avant de détailler les diverses définition de la stabilité, il convient en premier lieu de définir la notion d'*équilibre* pour un système à commutation.

Soit le système à commutation suivant :

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x), \quad x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma). \quad (1.8)$$

Partant d'un état initial $x_0 \in \mathcal{X}$, pour une loi de commutation $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$ donnée, l'état de notre système va évoluer tout au long du temps. Cette évolution, dénommée *trajectoire* d'un système à commutation, sera notée $x(t, x_0, \sigma)$.

Définition 1.2.1. *L'état $x_e \in \mathcal{X}$ est un équilibre pour le système à commutation (1.8) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$x(t, x_e, \sigma) = x_e, \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma). \quad (1.9)$$

Notons au passage que si les champs de vecteurs assurent l'unicité des solutions entre deux commutations, la relation (1.9) est équivalente à $\forall i \in \Gamma, f_i(x_e) = 0$.

Afin de ne pas alourdir les définitions et sans perte de généralité, nous pouvons les restreindre à l'étude de la stabilité de l'origine — si le point d'équilibre est non nul, un simple changement de variable peut le ramener à l'origine.

1.2.2.1 Équilibre stable

Définition 1.2.2. [Bourdais et al., 2007b] L'origine du système à commutation (1.8) est dite :

- **uniformément stable** par rapport à $\mathcal{S}(\Gamma)$ si, $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\epsilon)\mathcal{B}^n \implies x(t, x_0, \sigma) \in \epsilon\mathcal{B}^n, \quad \forall t \geq 0, \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma), \quad (1.10)$$

- **conditionnellement stable** par rapport à σ si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon, \sigma) > 0$ tel que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\epsilon, \sigma)\mathcal{B}^n \implies x(t, x_0, \sigma) \in \epsilon\mathcal{B}^n, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.11)$$

Cette définition est illustrée par la figure 1.1.

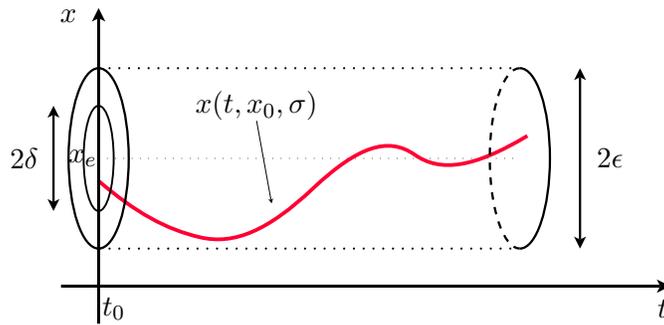


Figure 1.1 – Stabilité pour un point d'équilibre

1.2.2.2 Équilibre attractif

La propriété d'attractivité d'un équilibre traduit le rapprochement asymptotique des solutions vers cet équilibre.

Définition 1.2.3. [Bourdais et al., 2007b] L'origine du système à commutation (1.8) est dite :

– **uniformément attractive** par rapport à $\mathcal{S}(\Gamma)$ s'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta \mathcal{B}^n \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, \sigma) = 0, \quad \forall t \geq 0, \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma), \quad (1.12)$$

– **conditionnellement attractive** par rapport à σ s'il existe $\delta(\sigma) > 0$ tel que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta(\sigma) \mathcal{B}^n \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, \sigma) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.13)$$

Cette définition est illustrée par la figure 1.2.

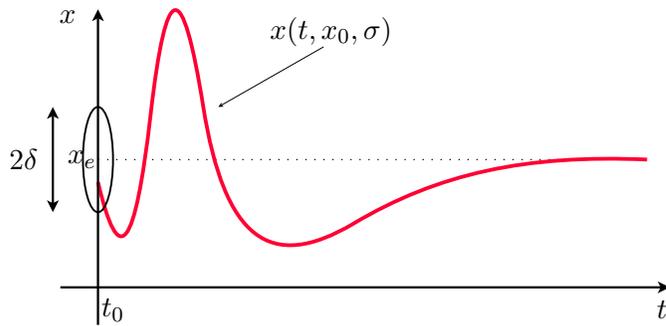


Figure 1.2 – Attractivité pour un point d'équilibre

1.2.2.3 Équilibre asymptotiquement stable

Il est important de noter qu'un équilibre peut être attractif sans être stable, et réciproquement. La notion de stabilité asymptotique est la combinaison des notions de stabilité et d'attractivité.

Définition 1.2.4. [Bourdais et al., 2007b] L'origine du système à commutation (1.8) est dite :

- *uniformément asymptotiquement stable* par rapport à $\mathcal{S}(\Gamma)$ si elle est uniformément stable et uniformément attractive,
- *conditionnellement asymptotiquement stable* par rapport à σ si elle est conditionnellement stable et conditionnellement attractive.

Cette définition est illustrée par la figure 1.3.

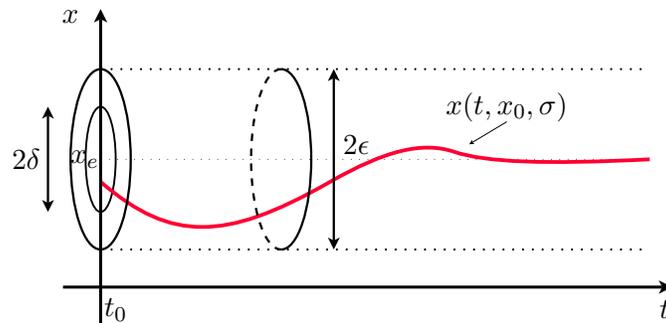


Figure 1.3 – Stabilité asymptotique d'un point d'équilibre

1.2.2.4 Équilibre exponentiellement stable

Le concept de stabilité exponentielle contient une information supplémentaire : la rapidité de la convergence vers l'origine.

Définition 1.2.5. [Bourdais et al., 2007b] L'origine du système à commutation (1.8) est dite :

- **uniformément exponentiellement stable** par rapport à $\mathcal{S}(\Gamma)$ s'il existe $\delta > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta \geq 1$ tels que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta \mathcal{B}^n \implies x(t, x_0, \sigma) \in \beta \exp(-\alpha t) \|x_0\| \mathcal{B}^n, \quad \forall t \geq 0, \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma), \quad (1.14)$$

- **conditionnellement exponentiellement stable** par rapport à σ si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta \geq 1$ tels que :

$$\forall x_0 \in \mathcal{X} : x_0 \in \delta \mathcal{B}^n \implies x(t, x_0, \sigma) \in \beta \exp(-\alpha t) \|x_0\| \mathcal{B}^n, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.15)$$

Cette définition est illustrée par la figure 1.4.

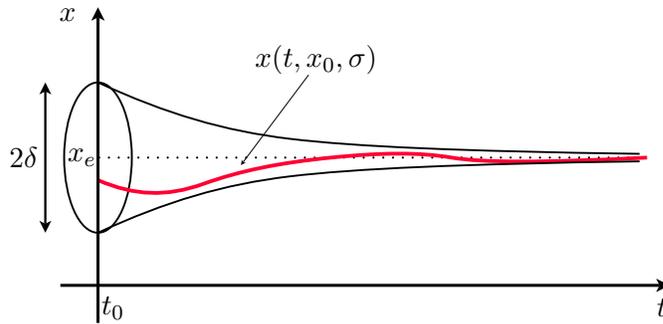


Figure 1.4 – Stabilité exponentielle d'un point d'équilibre

1.2.3 Approches

Maintenant que ces propriétés sont clairement définies, il se pose le problème classique de savoir s'il est possible de statuer sur ces propriétés sans avoir à calculer explicitement les solutions du système à commutation considéré. Tout comme pour les EDO, cela se fait notamment avec des fonctions de Lyapunov³. Évidemment, du fait de la distinction entre propriétés uniformes ou conditionnelles, les formes des résultats seront différentes. Les difficultés rencontrées vont être dans le premier cas de dégager des propriétés sur les champs de vecteurs tandis que dans le second cas, l'idée sera de construire le signal de commutation qui permet de garantir la propriété conditionnelle. La suite de ce chapitre présente un aperçu des travaux déjà menés, mais nous revenons, dans un premier temps, à un exemple bien connu dans le milieu des systèmes à commutation.

Considérons un système à commutation linéaire, composé des deux sous-systèmes $f_i(x) = A_i x$, dans lesquels :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Pour chacun des sous-systèmes, l'origine est asymptotiquement stable (les spectres des deux matrices sont les suivants : $\text{spec}(A_i) = \{-1 \pm 10i\sqrt{10}\}$), comme l'illustrent les figures 1.5 et 1.6.

Regardons maintenant l'évolution de l'état pour la séquence de commutation suivante : $i = 1$ si $x_1 x_2 \leq 0$ et $i = 2$ si $x_1 x_2 > 0$, la trajectoire générée (voir figure 4.1) devient instable. Comme nous l'avons déjà dit en introduction, la stabilité asymptotique de chacun des sous-systèmes **ne suffit pas** à garantir la stabilité asymptotique uniforme d'un système à commutation, et c'est ce sur quoi de nombreux travaux ont été menés.

Évidemment, on peut, dans certains cas, construire une séquence qui stabilise le système, à partir de deux sous-systèmes instables, mais nous aurons l'occasion d'y revenir dans la partie suivante, qui s'attache à présenter les principaux résultats développés ces dernières années.

³consulter notamment le livre [Richard, 2002] pour plus de détails.

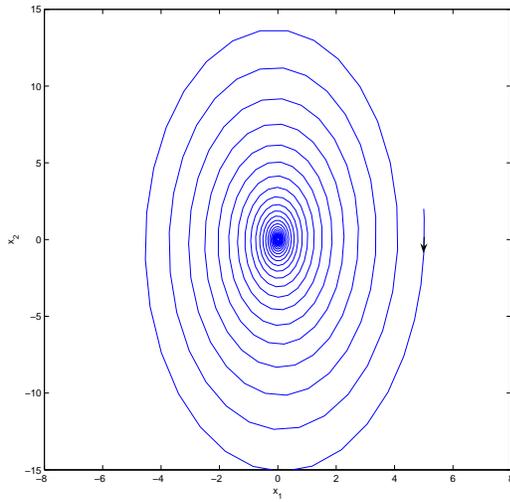


Figure 1.5 – Stabilité asymptotique du sous-système 1

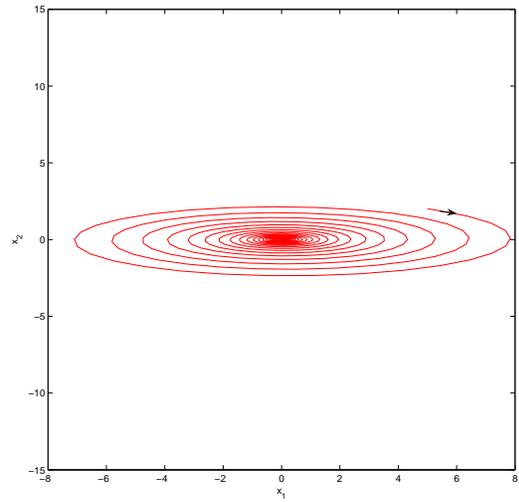


Figure 1.6 – Stabilité asymptotique du sous-système 2

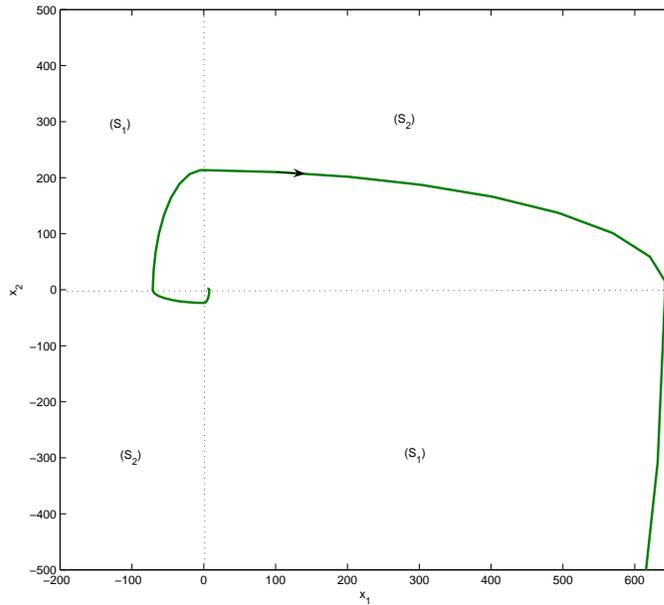


Figure 1.7 – Instabilité pour une séquence de commutation donnée

1.3 Un petit survol de l'existant

1.3.1 Quelques résultats sur les inclusions différentielles

On ne peut aborder les systèmes à commutation sans présenter dans un premier temps les inclusions différentielles. Il s'agit en fait d'une description encore plus abstraite des systèmes dynamiques hybrides, car avec les inclusions, la séquence de commutation elle aussi est omise, et seuls les champs de vecteurs persistent et signent. A la lecture de ce paragraphe, nous verrons comment les adjectifs qualificatifs « fort » et « faible » dédiés aux inclusions se rapprochent des termes « uniforme » et « conditionnel » pour les systèmes à commutation.

1.3.1.1 Définition et généralités

Pour étudier une EDO à second membre discontinu (systèmes à structure variable, systèmes hybrides, commande adaptative, hacheur, phénomène de friction, . . .) de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathcal{X}, \quad (1.17)$$

où $f(t, x)$ est définie et continue sur $\mathcal{I} \times (\mathcal{X}_p \setminus \mathcal{M})$ (\mathcal{X}_p une partition de \mathcal{X} , \mathcal{M} un ensemble de mesure nulle⁴), il apparaît intéressant de la remplacer par l'*inclusion différentielle* suivante :

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad (1.18)$$

où $F(t, x)$ est un ensemble, que l'on peut construire selon différentes techniques, qui pour $(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathcal{X}_p \setminus \mathcal{M}$ est défini par $F(t, x) = \{f(t, x)\}$. Cette inclusion doit permettre de "capturer" les comportements de (1.17). Si on s'intéresse au problème de Cauchy (PC) suivant : "existe-t-il une fonction ϕ telle que $\frac{d\phi}{dt} \in F(t, \phi(t))$ presque partout (p.p.) et $\phi(t_0) = x_0$?".

Définition 1.3.1. *On appelle solution de (1.18) passant par x_0 à t_0 , toute fonction ϕ absolument continue⁵ définie sur un intervalle non vide $(\mathcal{I}(t_0, x_0) \subset \mathcal{I} \subset \mathbb{R})$ contenant t_0 :*

$$\begin{aligned} \phi & : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \\ t & \mapsto \phi(t; t_0, x_0), \end{aligned}$$

notée plus simplement $\phi(t)$, vérifiant $\frac{d\phi}{dt} \in F(t, \phi(t))$ presque partout sur $\mathcal{I}(t_0, x_0)$ et telle que $\phi(t_0) = x_0$.

⁴au sens de Lebesgue, voir [Richard, 2001].

⁵ $\phi : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^n$ est absolument continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \{\alpha_i, \beta_i\}_{i \in \{1..n\}}, \alpha_i, \beta_i \subset [\alpha, \beta] \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \|\phi(\beta_i) - \phi(\alpha_i)\| \leq \varepsilon$.

Si ϕ est une fonction *absolument continue*, il existe χ une fonction Lebesgue intégrable qui soit presque partout égale à la dérivée de ϕ : $\phi(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t \chi(u)du$. Si de plus $\frac{d\phi}{dt} \in F(t, \phi(t))$, alors $\chi(u) \in F(u, \phi(u))$ et donc on obtient la représentation intégrale suivante :

$$\phi(t) \underset{\text{p.p.}}{\in} \phi(t_0) + \int_{t_0}^t F(u, \phi(u))du.$$

La réciproque n'est vraie que si la multifonction F vérifie certaines hypothèses de régularité (par exemple, si F est compact, convexe, semi-continue supérieurement). Pour plus de détails, le lecteur pourra notamment consulter le chapitre 7 du livre [Richard, 2002]. Puisqu'un problème de Cauchy peut avoir une ou plusieurs solutions, les notions d'équilibre, ensemble invariant et donc de stabilité sont dites fortes (respectivement faibles) si leurs définitions sont vraies pour toutes les solutions (respectivement pour au moins une solution) issues d'une condition initiale donnée.

Considérons l'inclusion différentielle autonome :

$$\frac{dx}{dt} \in F(x). \tag{1.19}$$

Définition 1.3.2. *Un compact convexe $K \subset \text{dom}(F)$ est dit **viable** ou **faiblement invariant** (respectivement, **fortement invariant**) si au moins une trajectoire (respectivement, toute trajectoire) issue d'une condition initiale appartenant à K évolue dans K : $\forall x_0 \in K, \exists x(t)$ définie sur \mathbb{R}_+ solution de (1.19) avec $x(0) = x_0$, telle que $x(t) \in K, \forall t \in \mathbb{R}_+$ (respectivement $\forall x_0 \in K, \forall x(t)$ solution de (1.19) avec $x(0) = x_0$ est définie sur \mathbb{R}_+ et vérifie $x(t) \in K, \forall t \in \mathbb{R}_+$).*

Une condition nécessaire et suffisante d'invariance faible (viabilité) est

$$F(x) \cap T_K^B(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in K, \tag{1.20}$$

où $T_K^B(x)$ est le *cône contingent* (dit de *Bouligand*) ou *cône tangent* à K défini par :

$$T_K^B(x) \triangleq \{v \in \mathbb{R}^n : \exists t_i \searrow 0, \exists v_i \rightarrow v : x + t_i v_i \in K\}.$$

Dans ce cas, la condition (1.20), dite aussi condition de tangence, est suffisante pour l'existence d'un point d'équilibre faible dans K :

$$(1.20) \Rightarrow \exists x_e \in K : 0 \in F(x_e).$$

Notons que lorsque K est une variété différentiable (c'est-à-dire lorsque la frontière de K est suffisamment lisse), $T_K^B(x)$ est l'espace tangent à K au point x .

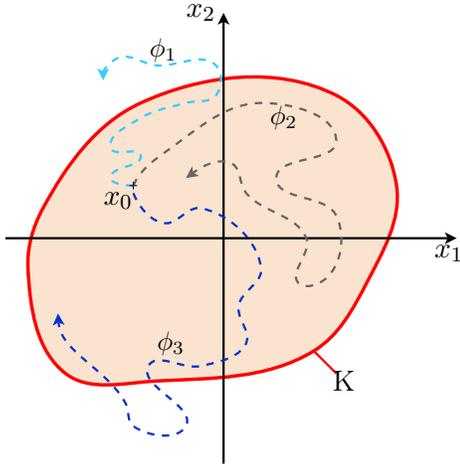


Figure 1.8 – Invariance faible de l'ensemble K

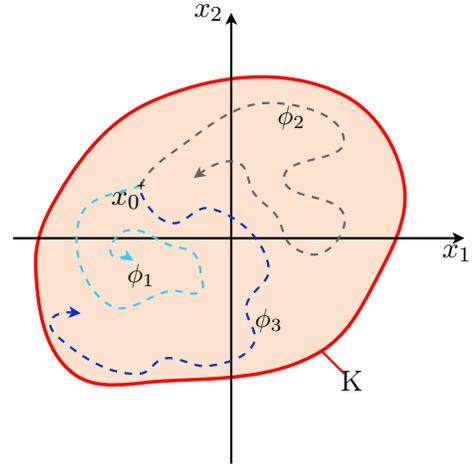


Figure 1.9 – Invariance forte de l'ensemble K

1.3.1.2 Stabilité pour une inclusion différentielle

Avant tout, notons que si $K \subset \text{dom}(F)$ est un compact et si F vérifie les hypothèses classiques (convexe, semi-continue supérieurement), alors toute trajectoire issue d'un point intérieur à K vérifie les propriétés topologiques suivantes : elle atteint la frontière de K ou diverge, l'ensemble limite positif (respectivement négatif) associé vérifie presque les mêmes propriétés que dans le cas d'une EDO. De même, pour traiter de la stabilité d'un système, on peut utiliser des fonctions de Lyapunov. On peut noter les résultats suivants :

Théorème 1.3.1. [Filippov, 1988] Soit $F(x)$ vérifiant les hypothèses⁶ du théorème d'existence de solutions dans un domaine fermé borné K . Supposons que :

$$\begin{aligned} 0 &\in F(0), \\ \exists V &\in C^1(K, \mathbb{R}_+), V(0) = 0 : V \text{ est définie positive,} \\ \dot{V}^* &\triangleq \sup_{y \in F(x)} \left(\frac{\partial V}{\partial x} y \right) \leq 0 \text{ sur } K. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Alors, l'origine est stable pour (1.19). Si de plus :

$$\begin{aligned} \exists(w) &\in C^0(K, \mathbb{R}_+) \text{ définie positive sur } K, \\ \dot{V}^* &\leq -w(x) \text{ sur } K, \end{aligned} \quad (1.22)$$

alors l'origine est asymptotiquement stable pour (1.19).

⁶Par exemple $F(x)$ semi-continue supérieurement, non vide, compact et convexe.

Théorème 1.3.2. [Filippov, 1988] Si, dans le théorème précédent, on remplace \dot{V}^* , dans (1.21) ou dans (1.22), par :

$$\dot{V}^* \triangleq \inf_{y \in F(x)} \left(\frac{\partial V}{\partial x} y \right), \quad (1.23)$$

alors les conclusions restent valables pour les notions faibles.

Pour les inclusions différentielles linéaires décrites par

$$\dot{x} \in F(x) = \{y : y = Ax, A \in \mathcal{A}\}, \quad (1.24)$$

où \mathcal{A} est un ensemble compact, l'analyse de stabilité est liée à l'analyse des inclusions différentielles convexes. En fait, l'inclusion (1.24) est asymptotiquement stable si et seulement si l'inclusion différentielle convexe

$$\dot{x} \in \{y : y = Ax, A \in \text{co}(\mathcal{A})\}. \quad (1.25)$$

est stable. Molchanov et Pyatnitskiy [Molchanov et Pyatnitskiy, 1989] expriment la stabilité de l'inclusion différentielle (1.24) en termes de fonction de Lyapunov quasi-quadratique :

Théorème 1.3.3. L'origine $x = 0$ de l'inclusion différentielle linéaire (1.24) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ strictement convexe, homogène (du second ordre) quasi-quadratique :

$$V(x) = x^T \mathcal{P}(x)x, \quad (1.26)$$

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}^T(x) = \mathcal{P}(\tau x), \quad x \neq 0, \tau \neq 0, \quad (1.27)$$

dont la dérivée satisfait l'inégalité :

$$\dot{V}^* = \sup_{y \in F(x)} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \{V(x + hy) - V(x)\} \leq -\gamma \|x\|^2, \gamma > 0.$$

Comme remarque, le caractère suffisant de cette condition découle du théorème 1.3.1. A partir de ce théorème, un critère algébrique peut être déduit :

Théorème 1.3.4. Pour la stabilité asymptotique de l'origine $x = 0$ de l'inclusion différentielle linéaire convexe

$$\dot{x} \in F(x) = \{y : y = Ax, A \in \text{co}\{A_1, \dots, A_M\}\} \quad (1.28)$$

il est nécessaire et suffisant qu'il existe un nombre $m > n$, une matrice $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang n et une famille de matrices $\{\Lambda_s \in \mathbb{R}^{n \times m}, s = 1, \dots, M\}$, tels que la relation

$$A_i^T L = L \Lambda_i^T, \quad i = 1, \dots, M,$$

soit vérifiée et tels que $v(z) = z^T z$ soit une fonction de Lyapunov pour l'inclusion

$$\dot{z} \in G(z) = \{y : y = \Lambda z, \Lambda \in \text{co}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_M\}\}.$$

Intuitivement, ce critère de stabilité implique la recherche d'une nouvelle inclusion différentielle stable $\dot{z} \in G(z)$ dans un espace de dimension augmentée \mathbb{R}^m qui contient les solutions de l'inclusion originelle, où L avec $z = L^T x$ représente la matrice de transformation qui relie les deux inclusions.

Ces deux théorèmes peuvent être appliqués directement aux systèmes linéaires à commutation [Dayawansa et Martin, 1999, Liberzon et Morse, 1999]. Cela signifie que la stabilité des systèmes commutés est liée à l'existence d'une fonction de Lyapunov commune pour l'ensemble de sous-systèmes. Malheureusement, d'un point de vue pratique, il est très difficile de vérifier les critères proposés par les deux théorèmes précédents. En général, la recherche numérique ou analytique d'une fonction de Lyapunov quasi-quadratique $V(x) = x^T \mathcal{P}(x)x$ ou d'une matrice de transformation L n'est pas facile.

Afin de trouver une méthode simple pour déterminer la stabilité asymptotique des inclusions différentielles, plusieurs auteurs ont restreint leur attention à la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$. L'existence d'une telle fonction, une condition suffisante pour la stabilité, peut être exprimée en termes d'inégalités matricielles linéaires (de l'anglais linear matrix inequality - LMI) [Boyd et al., 1994] dont la solution peut être trouvée à l'aide d'algorithmes d'optimisation convexe.

Théorème 1.3.5. *Considérons le système (1.28). S'il existe une matrice P définie positive, $P > 0$, solution des inégalités matricielles suivantes :*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad (1.29)$$

alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$ pour le système (1.28) i.e. l'origine $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

1.3.2 Stabilité uniforme

Pour démontrer la stabilité uniforme d'un système à commutation (1.8), deux approches ont été largement popularisées : une approche par une fonction de Lyapunov commune à tous les systèmes, et une approche par l'algèbre de Lie. Il est évident que pour qu'un système à commutation soit uniformément asymptotiquement stable, une condition nécessaire est que chacun des sous-systèmes soit également asymptotiquement stable⁷.

⁷En effet, considérons un sous-système instable (S_j), une loi de commutation qui l'active à tout instant est évidemment une séquence de commutation déstabilisante.

1.3.2.1 Approche par fonction commune de Lyapunov

On s'intéresse à la famille composée des sous-systèmes suivants :

$$\dot{x} = f_i(x), \quad i \in \Gamma. \quad (1.30)$$

Pour la première approche, afin de démontrer le théorème 1.3.7, des conditions sur les champs de vecteur sont ainsi introduites :

Hypothèse 1.3.6. *La famille (1.30) vérifie les deux conditions suivantes :*

- 1) *La famille est équibornée, i.e. $\sup_{i \in \Gamma} \|f_i(x)\| < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*
- 2) *La famille est localement uniformément lipchitzienne, i.e. pour tout $\delta \in \mathbb{N}$, il existe $l_\delta \geq 0$ tel que*

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| \leq l_\delta \|x - y\|,$$

pour tout $(x, y) \in \delta\mathcal{B}^n \times \delta\mathcal{B}^n$ et tout $i \in \Gamma$.

Ces hypothèses sont automatiquement satisfaites pour l'ensemble Γ considéré ici, puisque borné, mais elles deviennent nécessaires dans le cas où Γ est dénombrable.

On rappelle ici la définition d'une **fonction de Lyapunov commune** :

Définition 1.3.3. *[Mancilla-Aguilar et García, 2000] Soit \mathcal{V} , un ouvert contenant l'origine. Une fonction de Lyapunov commune V pour la famille (1.30) est une fonction, $V : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^1 , telle qu'il existe deux fonctions α_1 et α_2 de classe \mathcal{K}^8 et une fonction α_3 continue, définie semi-positives, vérifiant :*

- 1) $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall x \in \mathcal{V},$
- 2) $\langle \nabla V(x), f_s(x) \rangle \leq -\alpha_3(\|x\|), \quad \forall x \in \mathcal{V}, \forall s \in \mathcal{S}(\Gamma).$

L'intérêt d'une fonction de Lyapunov commune est que son existence est une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

Théorème 1.3.7. *[Mancilla-Aguilar et García, 2000] Sous l'hypothèse 1.3.6, le système (1.8) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov commune pour la famille (1.30).*

⁸Une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite de classe \mathcal{K} si elle est continue, strictement croissante et nulle en 0.

On retrouve un théorème similaire dans [Vu et Liberzon., 2005], cependant, la classe des systèmes étudiés dans ce cas est plus restrictive. Ce résultat très général représente une extension au cas des systèmes non-linéaires à commutation du théorème de Molchanov et Pyatnitskiy pour les inclusions différentielles linéaires (Théorème 1.3.4). Dans ce cas aussi, l'existence et la construction d'une fonction de Lyapunov pose des problèmes et on revient dans la plupart des cas à la recherche d'une fonction quadratique commune (dont l'existence est suffisante pour assurer la stabilité, mais pas nécessaire).

☆☆☆☆

Avant de présenter l'approche par l'algèbre de Lie, revenons quelques instants sur le caractère nécessaire et suffisant d'une telle fonction de Lyapunov, ou plus précisément sur la *non suffisance* de la stabilité asymptotique de chacun des sous-systèmes (Exemple présenté au paragraphe 1.2.3).

Prenons l'exemple de deux sous-systèmes linéaires (S_1) et (S_2), asymptotiquement stables. Ils sont chacun munis d'une fonction de Lyapunov, respectivement V_1 et V_2 . Partant d'une condition initiale x_0 , le système (S_1) est actif. La trajectoire va alors converger vers l'origine tout en restant dans le domaine délimité par l'équipotentielle de Lyapunov $V_1(x_0) = cste$ (figure 1.10).

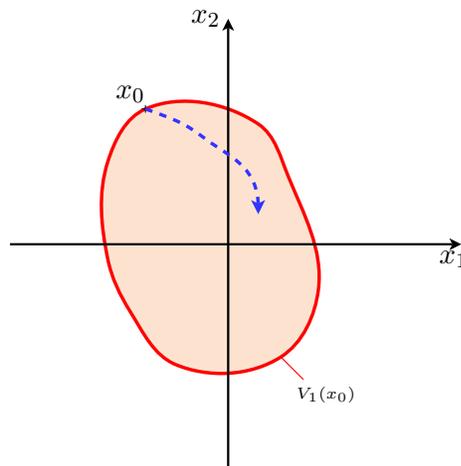


Figure 1.10 – Convergence durant l'activation de (S_1)

Au moment de la commutation, la trajectoire va alors converger vers l'origine, tout en restant dans le domaine délimité par l'équipotentielle de Lyapunov $V_2(x_1) = cste_2$ (figure 1.11). Mais, rien ne contraint ce domaine à être inclus dans le précédent.

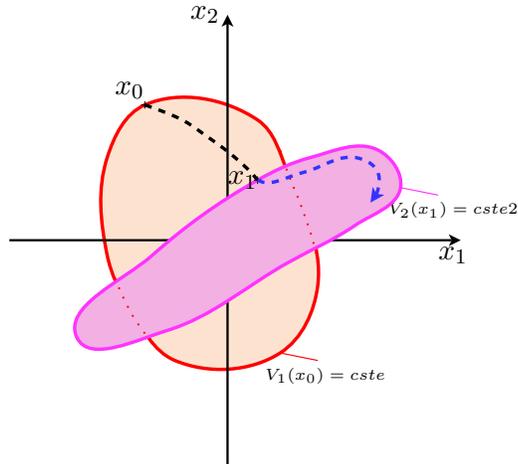


Figure 1.11 – Instabilité pour une séquence de commutation donnée

C'est pourquoi, lors de la prochaine commutation, le système va encore converger vers l'origine, tout en restant dans le domaine délimité par l'équipotentielle de Lyapunov $V_1(x_2) = cste3$, mais le niveau de cette équipotentielle peut être supérieur à celui de la précédente. Et ainsi, on peut déstabiliser notre système à commutation (figure 1.12).

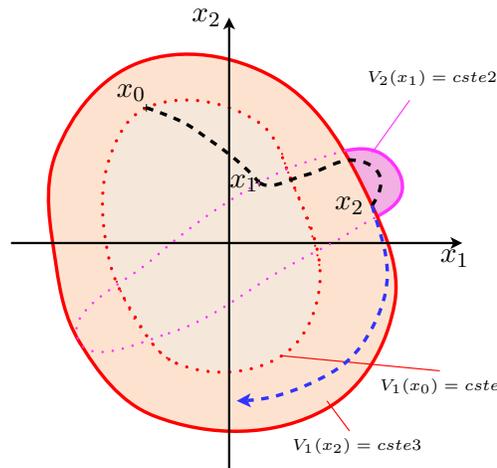


Figure 1.12 – Instabilité pour une séquence de commutation donnée

Si maintenant les deux sous-systèmes partagent une même fonction de Lyapunov, au moment de la commutation, le domaine délimité par l'équipotentielle de Lyapunov est strictement inclus dans le précédent, ainsi, même si la trajectoire évolue différemment, celle ci convergera vers l'origine (figure 1.13).

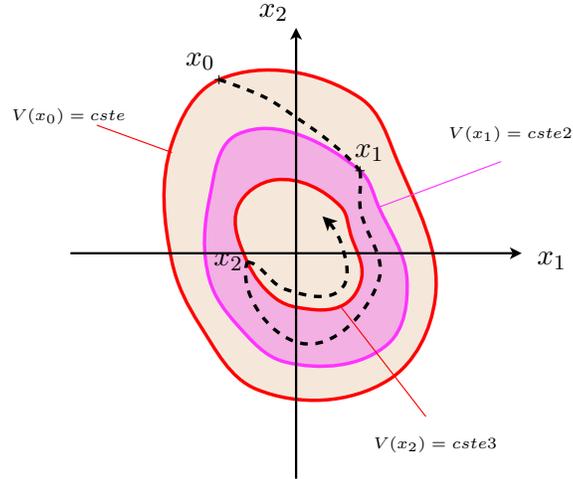


Figure 1.13 – Fonction de Lyapunov commune

1.3.2.2 Approche par l'algèbre de Lie

Comme autre approche pour garantir la stabilité uniforme d'un système linéaire à commutation on peut utiliser l'algèbre de Lie. Considérons le système linéaire à commutation suivant :

$$\dot{x} = A_{\sigma}x, \quad \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma), \quad (1.31)$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}\{A_i : i \in \Gamma\}$ correspond à l'ensemble de toutes les matrices A_i et les commutateurs itérés définis à partir des crochets de Lie, $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$. Ce critère algébrique, fortement lié à l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune, a une longue histoire dans le domaine de la stabilité des systèmes à commutation.

Plusieurs critères algébriques ont été donnés pour la stabilité uniforme. Si toutes les matrices d'état A_i , $i \in \Gamma$, sont de Hurwitz et commutent par paire, i.e.

$$A_i A_j = A_j A_i \quad \forall \{i, j\} \in \Gamma^2,$$

alors le système à commutation (1.31) est uniformément asymptotiquement stable, ce qui est démontré dans [Narendra et Balakrishnan, 1994] et [Agrachev et Liberzon, 2001]. Ce critère implique que le crochet de Lie $[A_i, A_j]$ s'annule pour toute paire A_i, A_j , $i \in \Gamma$ des matrices d'état. Gurvits précise que si l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est nilpotente, alors le système est uniformément asymptotiquement stable [Gurvits, 1994]. Indépendamment de ces travaux, Yoshihiro Mori et

Kuroe [Mori et Kuroe, 1997] montrent que si les matrices A_i , $i \in \Gamma$, acceptent une triangulation supérieure (ou inférieure) simultanée, alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique commune.

Théorème 1.3.8. *Considérons le système (1.31). Si toutes les matrices A_i , $i \in \Gamma$, sont de Hurwitz⁹ et s'il existe une matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible telle que toutes les matrices $\Lambda_i = T^{-1}A_iT$, $i \in \Gamma$, soient triangulaires supérieures (ou inférieures), alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique commune $V(x) = x^T Px$ pour la famille des systèmes $\{\dot{x} = A_i x, \quad i \in \Gamma\}$ et le système à commutation (1.31) est uniformément asymptotiquement stable par rapport à $\mathcal{S}(\Gamma)$.*

Liberzon généralise les résultats précédents pour des matrices de transformation T complexes et donne une condition suffisante pour la triangulation simultanée d'un ensemble de matrices en termes d'algèbre de Lie [Liberzon et al., 1999]. Le résultat s'énonce ainsi :

Théorème 1.3.9. *Si $\mathfrak{g} = \text{Lie}\{A_i : i \in \Gamma\}$ est une algèbre de Lie solvable, alors la famille des systèmes $\{\dot{x} = A_i x, \quad i \in \Gamma\}$ accepte une triangulation supérieure (ou inférieure) simultanée et le système linéaire à commutation $\dot{x} = A_\sigma x$, $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$, est uniformément asymptotiquement stable.*

L'idée proposée par Liberzon est assez puissante, car quand les matrices $\{A_i, i \in \Gamma\}$ commutent deux à deux ou génèrent une algèbre de Lie \mathfrak{g} nilpotente alors elles génèrent une algèbre de Lie \mathfrak{g} solvable. L'intérêt de cette approche est d'établir un lien entre ces diverses méthodes d'analyse de stabilité quadratique basées sur les crochets de Lie et la triangulation simultanée.



Pour bien comprendre les diverses approches, nous proposons l'exemple d'un système linéaire à commutation, composé des deux sous-systèmes $f_i(x) = A_i x, i \in \{1, 2\}$, avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Rappelons rapidement les notions de solvabilité et de nilpotence d'une algèbre de Lie. Soient deux sous-espaces linéaires \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , on note $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$ l'espace linéaire généré par les crochets de Lie de $[g_1, g_2]$, avec $g_1 \in \mathfrak{g}_1$ et $g_2 \in \mathfrak{g}_2$.

⁹à valeurs propres dans le demi-plan complexe gauche.

- Considérons la suite définie par induction comme suit : $\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k+1)} := [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subseteq \mathfrak{g}^{(k)}$. S'il existe k suffisamment grand tel que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, alors \mathfrak{g} est dite solvable.
- Considérons la suite définie par induction comme suit : $\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subseteq \mathfrak{g}^k$. S'il existe k suffisamment grand tel que $\mathfrak{g}^k = 0$, alors \mathfrak{g} est dite nilpotente. Remarquons que pour tout k , $(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$, et que par suite, toute matrice nilpotente est solvable.

Dans notre exemple, en notant $\mathfrak{a} = \text{Lie}\{A_1, A_2\}$, il vient :

- dans un premier temps :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}^{(1)} &= \text{span} \{A_1, A_2, [A_1, A_2], \dots\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

- puis :

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}^{(2)} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

- et enfin :

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^3 &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathfrak{a}^{(3)} &= 0. \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{a} , générée par les deux matrices A_1 et A_2 n'est donc pas nilpotente. En revanche, elle est solvable, et donc, étant donné que les deux sous-systèmes sont asymptotiquement stables, le système à commutation est uniformément asymptotiquement stable.

Nous pouvons vérifier également que les deux matrices acceptent une triangulation simultanée, avec le changement de base :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

On a alors :

$$T_{A_1} = PA_1P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad T_{A_2} = PA_2P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

☆☆☆☆

A partir de cette idée, certaines extensions ont été proposées. Le théorème 1.3.9 est notamment généralisé dans [Agrachev et Liberzon, 2001], en utilisant la décomposition de Levi¹⁰ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$. Ce qui donne :

Théorème 1.3.10. [Agrachev et Liberzon, 2001] *Si \mathfrak{s} est une algèbre de Lie compacte, alors le système linéaire à commutation $\dot{x} = A_\sigma x$, $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$, est uniformément asymptotiquement stable.*

Dans le cas des systèmes linéaires, les conditions de stabilité sont globales. On peut ainsi les appliquer localement aux systèmes non linéaires, en étudiant le système linéarisé $\dot{x} = F_\sigma = \frac{\partial f_\sigma}{\partial x}(0)x$.

Une deuxième extension aux systèmes non linéaires à commutation est proposée dans [Margaliot et Liberzon, 2006]. L'idée développée par les auteurs est, partant du système non linéaire (1.8) $\dot{x} = f_\sigma(x)$, $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$, d'étudier l'inclusion différentielle :

$$\dot{x} \in \text{co}\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)\}. \quad (1.33)$$

En effet, les solutions de cette inclusion différentielle sont des fonctions absolument continues et incluent toutes les solutions de (1.8). Par suite, les auteurs proposent le théorème suivant :

Théorème 1.3.11. [Margaliot et Liberzon, 2006] *Soient les champs de vecteurs f_0, \dots, f_m tels que les systèmes $\dot{x} = f_i(x)$, $i = 0, \dots, m$ soient globalement asymptotiquement stables. S'il existe un entier positif r tel que pour tout index $l \in \{0, \dots, m\}$ on ait*

$$(\text{ad } f_l)^r(f_i)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i \neq l,$$

et

$$[f_k - f_l, (\text{ad } f_l)^s(f_i - f_l)](x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i, k \neq l, s = 0, \dots, r-1,$$

alors l'inclusion différentielle (1.33) est globalement asymptotiquement stable, donc en particulier, le système à commutation (1.8) est uniformément asymptotiquement stable.

D'autres critères algébriques pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune, moins connus, sont donnés dans [Zhai et al., 2002], où les auteurs montrent que pour les systèmes symétriques ($A_i = A_i^T$, $i \in \Gamma$) et normaux ($A_i \cdot A_i^T = A_i^T \cdot A_i$, $i \in \Gamma$), une condition

¹⁰Nous ne détaillerons pas ici comment obtenir cette décomposition, en revanche, nous invitons le lecteur à consulter l'annexe B du livre de Liberzon, [Liberzon, 2003].

nécessaire et suffisante de stabilité est que chacun des sous-systèmes soit asymptotiquement stable.

Le principal inconvénient des critères algébriques de stabilité quadratique est leur manque de robustesse. Toute propriété (triangulation simultanée, solvabilité, symétrie, normalité, ...) peut être perdue pour des petites perturbations. Cependant l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique est une propriété robuste. Pour réduire le conservatisme des approches précédentes, Shorten et Narendra [Shorten et Narendra, 1999] ont proposé une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune pour une paire de matrices de dimension deux.

Considérons l'enveloppe convexe générée par deux matrices $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\text{co}\{A_1, A_2\} \triangleq \{\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Théorème 1.3.12. *Les systèmes $\{\dot{x} = A_1x, \dot{x} = A_2x\}$, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ possèdent une fonction de Lyapunov quadratique commune si et seulement si toutes les matrices des enveloppes convexes $\text{co}\{A_1, A_2\}$ et $\text{co}\{A_1, A_2^{-1}\}$, sont asymptotiquement stables.*

Des extensions ont également été proposées pour le cas de plusieurs systèmes du second ordre [Shorten et Narendra, 2002], et également pour une paire de systèmes de troisième ordre [King et Shorten, 2004], mais l'extension au cas général s'avère très difficile.

L'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune peut être déterminée de façon numérique, par le système d'inégalités linéaires matricielles (1.29) utilisé pour les inclusions différentielles linéaires et convexes. Notons qu'on peut aussi dans certains cas obtenir cette fonction de façon analytique. C'est le cas par exemple d'une classe de convertisseurs statiques décrits dans [Buisson et al., 2005] où cette fonction permet aussi de proposer une loi de stabilisation pour ces systèmes. Pour illustrer l'approche numérique, considérons, par exemple, un système à commutation composé de deux sous-systèmes, décrits par les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 1/a & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

où a représente un scalaire constant [Dayawansa et Martin, 1999]. Pour $a \in [1, 6]$ le système d'inégalités matricielles linéaires (1.29) est solvable et permet de déterminer une fonction de Lyapunov quadratique commune.

Inversement, il est possible de vérifier qu'une fonction de Lyapunov quadratique commune n'existe pas pour une famille de systèmes [Boyd et al., 1994] :

Théorème 1.3.13. *Il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune pour la famille de systèmes*

$$\dot{x} = A_i x, \quad i \in \Gamma,$$

s'il existe des matrices $R_i = R_i^T$, $i \in \Gamma$ solutions des inégalités linéaires matricielles :

$$R_i > 0, \forall i \in \Gamma, \quad \sum_{i=1}^M A_i^T R_i + R_i A_i > 0.$$

S'il existe des matrices R_i satisfaisant cette inégalité matricielle linéaire, alors il existe une séquence de commutations qui déstabilise le système. L'inconvénient de l'utilisation des inégalités linéaires matricielles est que pour certains systèmes de grande dimension, mal conditionnés ou pathologiques, les algorithmes numériques actuels, basés sur la méthode des points intérieurs, peuvent ne pas donner de résultats. En effet, il existe des exemples pour lesquels l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune peut être déterminée de façon analytique mais les algorithmes numériques usuels (LMI Toolbox de MATLAB) ne la trouvent pas.

Dans la littérature de spécialité il existe des méthodes d'analyse de la stabilité qui ne sont pas fondées sur la recherche d'une fonction de Lyapunov. Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes incertains avec incertitude polytopique a été formulée par Bauer [Bauer et al., 1993]. L'extension au cas des systèmes à commutation est immédiate :

Théorème 1.3.14. *Considérons le système linéaire à commutation $x_{k+1} = A_\sigma x_k$ avec $A_\sigma \in \{A_1, \dots, A_M\}$. Le système est globalement asymptotiquement stable pour une loi de commutation arbitraire si et seulement s'il existe un nombre p fini tel que*

$$\|A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots A_{i_p}\| < 1,$$

pour tout produit de n matrices $A_{i_j} \in \{A_1, \dots, A_M\}$, $j = 1, \dots, p$.

Déterminer s'il existe un nombre p fini pour lequel tous les produits de p matrices quelconques dans A_1, \dots, A_M s'annulent est un problème très complexe (couramment qualifié de *NP-Hard*). Une manière d'appréhender ce problème est le **calcul du rayon spectral joint**. Le rayon spectral joint signifie le taux maximal de croissance qui peut être obtenu en formant des produits longs avec les matrices d'un ensemble. Considérons la notation $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_M\}$. Le rayon spectral joint de l'ensemble \mathcal{A} est défini formellement par :

$$\rho(\mathcal{A}) \triangleq \limsup_{p \rightarrow \infty} \rho_p(\mathcal{A}) \quad \text{où} \quad \rho_p(\mathcal{A}) = \sup_{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots A_{i_p}\|^{1/p}.$$

Si le rayon spectral joint satisfait l'inégalité $\rho(\mathcal{A}) < 1$, alors le système à commutation est asymptotiquement stable. Une approximation du rayon spectral joint par des normes ellipsoïdales est donnée par Blondel dans [Blondel et al., 2003] et utilisée pour déterminer la stabilité des systèmes à commutation.

1.3.3 Fonctions multiples de Lyapunov

Nous avons vu précédemment plusieurs critères de stabilité qui se basent sur une fonction de Lyapunov quadratique commune. Cependant, cette existence n'est qu'une condition suffisante pour la stabilité mais elle n'en est pas nécessaire. La recherche d'une telle fonction peut être alors trop contraignante. On peut prendre par exemple l'illustration proposée dans [Dayawansa et Martin, 1999], dans laquelle les auteurs démontrent analytiquement que l'on peut avoir des systèmes à commutation qui sont stables mais pour lesquels il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune. Ceci est le cas du système décrit par les matrices (1.34), pour $a \in [7, 10]$.

En appliquant les critères de Molchanov et Pyatnitskiy dans le contexte des systèmes à commutation, on peut constater qu'il est nécessaire et suffisant d'avoir une fonction de Lyapunov quasi-quadratique commune $V(x) = x^T P(x)x$, dont la matrice de Lyapunov change (voir le théorème 1.3.3). C'est dans la lignée de cette idée que les scientifiques ont construit des *fonctions de Lyapunov multiples*, c'est-à-dire plusieurs fonctions de Lyapunov, chacune valable à un moment donnée. Ces fonctions, par la suite concaténées, déterminent une seule fonction de Lyapunov commune mais qui n'est pas quadratique.

1.3.3.1 Fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux

Une première approche pour déterminer de telles fonctions a été d'approximer les surfaces de niveaux de la fonction de Lyapunov quasi-quadratique $V(x) = x^T P(x)x$, (voir notamment le théorème 1.3.3) par des fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux, comme le proposent les auteurs de [Molchanov et Pyatnitskiy, 1989] et de [Ohta et al., 1993] :

$$V_m(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |\langle l_i, x \rangle|. \quad (1.35)$$

Les éléments $l_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, représentent des vecteurs constants appelés vecteurs générateurs. Pour un nombre de vecteurs générateurs m suffisamment grand, il a été démontré dans [Molchanov et Pyatnitskii, 1986] qu'une fonction ainsi construite, est nécessaire et suffisante pour la stabilité.

Cependant, il existe très peu de méthodes pour vérifier l'existence d'une telle fonction pour les systèmes à commutation. L'existence d'une fonction de Lyapunov linéaire par morceaux peut être déduite de l'analyse du spectre de l'enveloppe convexe des matrices $A_i, i \in \Gamma$. Pour une paire de matrices du second ordre, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Lyapunov linéaire par morceaux avec $m = 4$ générateurs sont données dans [Wulff et al., 2002] :

Théorème 1.3.15. *Considérons le système à commutation $\dot{x} = A_i x, i = 1, 2$, où les matrices $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telles que le spectre $\text{spec}(A_i) \in \mathbb{R}_-, i = 1, 2$ et $\text{spec}(\text{co}\{A_1, A_2\}) \notin \mathbb{R}$. Il existe une fonction de Lyapunov linéaire par morceaux (1.35) avec $m = 4$ si et seulement si la partie réelle du spectre $\text{spec}(\text{co}\{A_1, A_2\})$ est plus grande que la partie imaginaire.*

D'autres critères de construction de fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux sont donnés dans [Yfoulis, 2001, Yfoulis et al., 1998], pour les systèmes non linéaires en général, et [Yfoulis et Shorten, 2004] pour les systèmes à commutation. Un problème particulier rencontré pour la recherche des fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux est la difficulté de spécifier a priori le nombre m de vecteurs générateurs.

1.3.3.2 Fonctions de Lyapunov poly–quadratiques

Une autre approche est l'utilisation des fonctions de Lyapunov poly–quadratiques. Celles–ci représentent des fonctions de Lyapunov quadratiques continues et différentiables par morceaux.

Le papier [Peleties et DeCarlo, 1991] fait partie des tous premiers résultats. Le raisonnement des auteurs est le suivant : la structure discontinue du système suggère l'utilisation des fonctions de Lyapunov discontinues, il devient alors intéressant d'utiliser des fonctions de Lyapunov multiples telles que chaque champ de vecteurs $A_i x$ ait sa propre fonction $V_i(x) = x^T P_i x$ satisfaisant :

- $V_i(x) = x^T P_i x$ est définie positive dans un ensemble $\epsilon \mathcal{B}^n$ autour de l'origine et $V_i(0) = 0$;
- quelle que soit la loi de commutation, on a

$$\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x(t) \leq 0, \quad (1.36)$$

pour tous les instants t pour lesquels le sous–système i est actif.

Les théorèmes de stabilité élaborés dans ce contexte sont fondés sur la décroissance de la fonction de Lyapunov à chaque fois qu'un même sous–système $\dot{x} = A_i x$ est activé.

Théorème 1.3.16. *Considérons un ensemble de fonctions de Lyapunov V_i , chacune étant associée au champ de vecteurs $A_i x$. Soient deux instants de commutations t_k et t_l tels que $t_k < t_l$, $\sigma(t_k) = \sigma(t_l) = j$ et que pour tout $t \in [t_{k+1}, t_l[$, $\sigma(t) \neq j$. S'il existe un $\gamma > 0$ tel que*

$$V_j(x(t_{l+1})) - V_j(x(t_{k+1})) \leq -\gamma \|x(t_{k+1})\|^2,$$

alors le système à commutation est asymptotiquement stable (conditionnellement).

Des extensions au cas non linéaire ont été proposées dans [Branicky, 1994, Branicky, 1998] et [Decarlo et al., 2000]. Un résultat plus général, qui introduit la notion de fonction de Lyapunov faible, est donné dans [Ye et al., 1998]. Dans cet article, la condition (1.36) est remplacée par

$$V_i(x(t)) \leq \alpha V_j(x(t_j)), \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

où $[t_j, t_{j+1}]$ est l'intervalle de temps durant lequel le sous-système i est actif, t_j, t_{j+1} sont des instants de commutation et $\alpha : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ est une fonction continue qui satisfait $\alpha(0) = 0$.

Deux possibilités sont alors envisageables :

- Si au moment de la commutation à la date t_j , $V_{\sigma_{t_{j+1}}}(t_j) = V_{\sigma_{t_j}}(t_j)$, la fonction de Lyapunov sera alors continue, conduisant à la stabilité asymptotique (conditionnelle), comme l'illustre la figure 1.14.

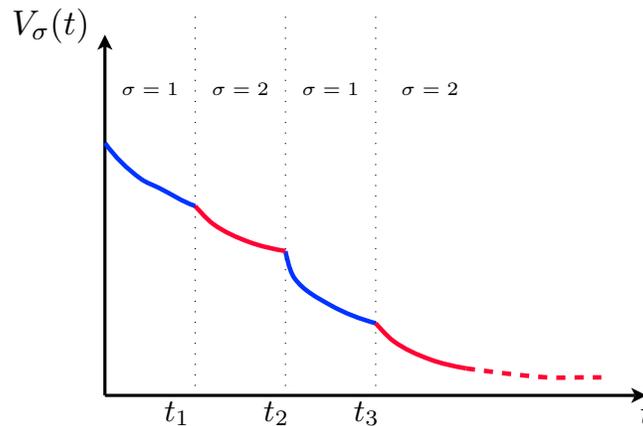


Figure 1.14 – Fonctions multiples de Lyapunov

- Dans un cas plus général, la continuité n'est pas nécessaire, et l'on impose juste que le niveau de la fonction V_j décroisse à chaque fois que l'on active le sous-système j , comme l'illustre la figure 1.15.

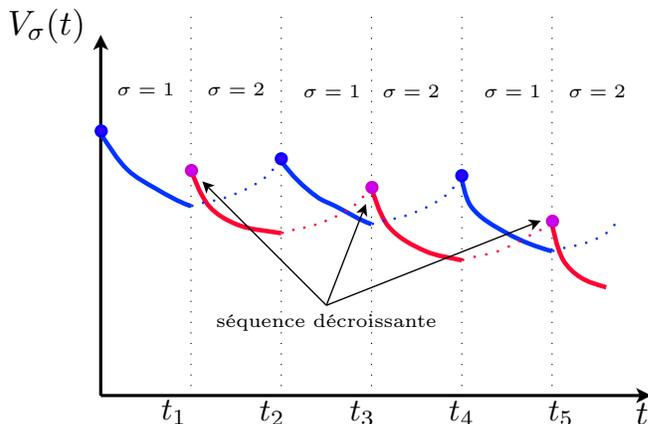


Figure 1.15 – Fonctions multiples de Lyapunov 2

Ces résultats s’appliquent difficilement dans le cas des commutations arbitraires : on peut constater que pour que les conditions du théorème précédent soient vérifiées, il est nécessaire que la trajectoire du système soit connue au moins aux instants de commutation. Un autre problème est le fait qu’il n’y a pas de méthode pour la construction analytique ou numérique de la fonction de Lyapunov poly–quadratique. Cependant, dans certains cas particulier, ces problèmes peuvent être résolus, notamment lorsque la loi de commutation est déterminée par une partition de l’espace d’état. Une autre approche intéressante pour la stabilité asymptotique des systèmes à commutation est proposée dans [Hespanha, 2004]. Le principe d’invariance de LaSalle est étendu aux systèmes à commutation à l’aide des fonctions de Lyapunov multiples.

Pour les systèmes à commutation en temps discret

$$x_{k+1} = A_\sigma x_k, \quad (1.37)$$

soumis à une loi de commutation arbitraire, l’analyse de stabilité peut être exprimée en termes d’inégalités matricielles linéaires qui déterminent une fonction de Lyapunov poly–quadratique. Ce résultat, proposé dans [Daafouz et Bernussou, 2001] est fondé sur l’extension des critères de stabilité des systèmes incertains avec incertitude polytopique au cas des systèmes à commutation [Daafouz et al., 2002]. Les auteurs proposent alors :

Théorème 1.3.17. [Daafouz et al., 2002] *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une fonction de Lyapunov poly–quadratique $V(x, \sigma) = x^T P_\sigma x$ strictement décroissante, assurant la stabilité asymptotique du système (1.37).*

2) Il existe des matrices $P_1 = \dots = P_M$ satisfaisant l'inégalité matricielle linéaire :

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0, \forall (i, j) \in \Gamma \times \Gamma. \quad (1.38)$$

Ces conditions de stabilité s'avèrent moins conservatives que celles construites à partir d'une fonction de Lyapunov quadratique commune.

1.3.3.3 Fonctions poly-quadratiques et partition de l'espace d'état

Nous avons vu que le théorème 1.3.16 présente des résultats très généraux sur la stabilité des systèmes à commutations mais qu'il demande la connaissance de l'état du système au moins aux instants de commutations. Il est évident que ces résultats ne peuvent pas s'appliquer dans le cas des commutations arbitraires, mais ils s'avèrent très intéressants dès que la loi de commutation est connue, comme par exemple dans le cas des systèmes linéaires par morceaux.

Considérons le système dynamique :

$$\dot{x} = A_i x \text{ pour } x \in X_i, \quad (1.39)$$

où $X_i, i \in \Gamma$ sont des ensembles dont les intérieurs sont disjoints et tels que $\cup_i X_i = \mathbb{R}^n$. Soit S_{ij} la région dans l'espace d'état où les commutations depuis le sous-système i vers le sous-système j sont permises, $i, j \in \Gamma$. Considérons un ensemble de fonctions de Lyapunov $V_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, chacune associée au champ de vecteurs $A_i x$ et les régions :

$$\Omega^i \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} A_i x(t) \leq 0 \right\}, \quad (1.40)$$

$$\Omega^{ij} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V_i(x) \geq V_j(x)\}. \quad (1.41)$$

Si on peut trouver des fonctions de Lyapunov $V_i, i \in \Gamma$ telles que $X_i \subseteq \Omega^i$ et $S_{ij} \subseteq \Omega^{ij}$, alors on peut montrer par une extension du théorème 1.3.16 que le système (1.39) est stable [Pettersson et Lennartson, 1996, Pettersson et Lennartson, 1997]. Si de plus, on considère des fonctions de Lyapunov poly-quadratiques $V_i = x^T P_i x$ et des régions X_i et S_{ij} coniques

$$X_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q_i x \leq 0, Q_i = Q_i^T\}, \quad (1.42)$$

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q_{ij} x \leq 0, Q_{ij} = Q_{ij}^T\}. \quad (1.43)$$

alors on obtient, à l'aide de la S -procédure [Johansson et al., 1999, Rantzer et al., 2000], des conditions de stabilité en termes d'inégalités matricielles linéaires.

Théorème 1.3.18. *S'il existe des matrices $P_i > 0$ et des constantes $\alpha_i \geq 0$ et $\alpha_{ij} \geq 0$ pour $i, j \in \Gamma$ telles que :*

$$A_i^T P_i + P_i A_i - \alpha_i Q_i \leq 0, \quad (1.44)$$

$$(P_i - P_j) - \alpha_{ij} Q_{ij} \leq 0, i \neq j, \quad (1.45)$$

alors le système (1.39) est asymptotiquement stable.

Ce théorème présente beaucoup d'avantages d'ordre pratique. En comparaison avec le théorème 1.3.16, ces conditions de stabilité peuvent être vérifiées par des algorithmes numériques. De plus elles s'avèrent très flexibles : les fonctions de Lyapunov $x^T P_i x$ sont contraintes à être décroissantes seulement localement, dans la partition X_i où le champ de vecteurs $A_i x$ est actif. Il est aussi possible d'étendre l'approche proposée pour utiliser plusieurs fonctions de Lyapunov dans le même champ de vecteurs ou des partitions de l'espace d'état différentes de celles dictées par la structure du système [Pettersson et Lennartson, 1997, Rantzer et al., 2000].

1.3.4 Stabilité conditionnelle

1.3.4.1 Recherche d'une loi de commutation stabilisante

Existence d'une loi de commutation stabilisante

Nous avons vu qu'il est possible, pour deux systèmes stables, d'avoir une séquence de commutations qui déstabilise le système. Inversement, pour deux systèmes instables, il est possible d'obtenir une trajectoire asymptotiquement stable. Ici nous allons étudier le problème de l'existence d'une loi de commutation stabilisante. Dans le cas où au moins une des matrices A_i est stable, le problème est trivial : il suffit d'activer le sous-système stable pour stabiliser le système. Un problème plus délicat à étudier est le cas où toutes les matrices A_i , $i \in \Gamma$ sont instables, ce à quoi s'intéresse les théorèmes suivants.

Théorème 1.3.19. *[Wicks et al., 1994],[Feron et al., 1996] Considérons une paire de systèmes instables $\{A_1, A_2\}$ ($M = 2$). S'il existe une combinaison convexe stable, c'est-à-dire s'il existe un $\alpha \in (0, 1)$ tel que la matrice $A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$ a toutes ses valeurs propres dans le demi-espace gauche du plan complexe, il existe une séquence de commutation $S(\Gamma)$ telle que le système $\dot{x} = A_\sigma x$, $\sigma \in \{1, 2\}$ soit AS.*

Le théorème est fondé sur le fait que la trajectoire de toute combinaison convexe de $\{A_1 x, A_2 x\}$ peut être approximée par des commutations rapides entre les deux sous-systèmes.

Une généralisation pour le cas de plusieurs systèmes est proposée dans [Wicks et al., 1998]. Des méthodes pour la construction de A_{eq} sont données dans [Wicks et al., 1994]. Cependant, trouver une combinaison convexe stable est un problème NP-hard [Skafidas et al., 1999, Blondel et Tsitsiklis, 1997]. Il faut remarquer que le théorème propose une condition seulement suffisante pour la stabilisabilité. Il existe des classes de systèmes pour lesquelles il n'y a pas de combinaison convexe stable et une séquence de commutation stabilisante peut être trouvée malgré tout.

Une condition nécessaire pour la stabilisation par loi de commutation est proposée dans [Sun et al., 2002] :

Théorème 1.3.20. *S'il existe une séquence de commutation stabilisante $\sigma \in S(\Gamma)$ alors il existe un sous-système $\dot{x} = A_i x$, $i \in \Gamma$ tel que au moins une valeur propre de $A_i + A_i^T$ soit un nombre réel négatif.*

Des conditions qui sont à la fois nécessaires et suffisantes existent pour le cas de systèmes de deuxième ordre [Xu et Antsaklis, 2000] où l'existence de la loi de commutation stabilisante peut être vérifiée en analysant les champs des vecteurs.

Synthèse d'une loi de commutation stabilisante

Dans la sous-section précédente, nous nous sommes interrogé sur l'existence d'une loi de commutation qui stabilise le système. Ici nous allons voir comment la synthétiser (Pour ce qui est de la construction d'une loi de commutation adaptative dans le cas des systèmes linéaires, notre lecteur pourra consulter [Fu et Barmish, 1986]). Le problème de stabilisation peut se reformuler de la façon suivante : quelles restrictions doit-on considérer — sur la loi de commutation — afin de garantir la stabilité du système ?

A. Restrictions dans le domaine temporel

Ici nous allons étudier l'intervalle de temps entre deux commutations et son rôle dans la stabilisation d'un système. L'idée de base est très simple. Considérons que tous les sous-systèmes $\dot{x} = A_i x$, $i \in \Gamma$ sont exponentiellement stables. Il est naturel de penser que le système à commutation est exponentiellement stable si le temps de séjour dans un mode est suffisamment long pour que le sous-système actif arrive en régime permanent. Le problème qui se pose maintenant est de calculer le temps minimum τ_D entre deux commutations successives pour assurer la stabilité du système [Zheng, 1993, Morse, 1996]. Soit $\Phi_i(t, \tau)$ la matrice de transition du sous-système $\dot{x} = A_i x$, $i \in \Gamma$. Comme tous les sous-systèmes sont exponentiellement stables, on peut trouver un $\mu > 0$ et des $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\|\Phi_i(t, \tau)\| \leq \mu e^{-\lambda_0(t-\tau)}, \quad t \geq \tau \geq 0, \quad i \in \Gamma.$$

La constante λ_0 peut être vue comme une marge de stabilité commune pour tous les sous-systèmes. Considérons t_1, t_2, \dots, t_k les instants de commutation dans l'intervalle (τ, t) , tels que $t_i - t_{i-1} \geq \tau_D$. Alors la valeur de l'état à un moment donné est

$$x(t) = \Phi_{\sigma(t_k)}(t, t_k) \Phi_{\sigma(t_{k-1})}(t_k, t_{k-1}) \dots \Phi_{\sigma(t_1)}(t_2, t_1) \Phi_{\sigma(t_1)}(t_1, \tau) x(\tau).$$

Les matrices de transition sur un intervalle entre deux commutations successives respectent la relation :

$$\|\Phi_{\sigma(t_l)}(t_l, t_{l-1})\| \leq \mu e^{-\lambda_0(t_l - t_{l-1})} \leq \mu e^{-\lambda_0 \tau_D}, \quad \forall l \in \{2, 3, \dots, k\}.$$

Le système sera AS si $\mu e^{-\lambda_0 \tau_D} \leq 1$. Cette condition peut être satisfaite pour

$$\tau_D \geq \frac{\log \mu}{\lambda_0 - \lambda}, \quad (1.46)$$

pour un $\lambda \in (0, \lambda_0)$ quelconque.

Théorème 1.3.21. *Considérons le système à commutation $\dot{x} = A_\sigma x$, $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma, \tau_D)$ où tous les sous-systèmes $\dot{x} = A_i x$, $i \in \Gamma$ sont AS avec la marge de stabilité λ_0 . Ici $\mathcal{S}(\Gamma, \tau_D)$ signifie l'ensemble des séquences de commutation telles que le temps entre deux commutation successives soit toujours supérieur à τ_D . Pour un $\lambda \in (0, \lambda_0)$ désiré, le système à commutation sera stable avec la marge de stabilité λ si le temps minimum de séjour τ_D satisfait la condition (1.46).*

Une extension pour ce théorème est donnée par [Hespanha et Morse, 1999] avec l'introduction du temps moyen de séjour pour garantir la stabilité, τ_{moy} . L'idée est que le système est stable si en moyenne on commute plus lentement que τ_{moy} . Cela permet occasionnellement des commutations plus rapides que le temps de séjour moyen τ_{moy} . L'approche a été généralisée au cas des systèmes non linéaires [Persis et al., 2003, Persis et al., 2004] et des systèmes à commutation dont tous les sous-systèmes ne sont pas asymptotiquement stables [Zhai et al., 2000, Yedavalli, 2001].

Dans le cas des systèmes à commutation en temps discret, le problème de stabilisation par restriction du temps de séjour peut être exprimé comme un ensemble d'inégalités matricielles linéaires.

Théorème 1.3.22. *[Geromel et Colaneri, 2006] Considérons le système $x_{k+1} = A_\sigma x_k$. Si pour un $\tau_D \geq 1$ il existe un ensemble de matrices $\{P_1, \dots, P_m\}$ définies positives telles que*

$$A_i^T P_i A_i - P_i < 0, \quad \forall i \in \Gamma,$$

et

$$A_i^{T \tau_D} P_j A_i^{\tau_D} - P_i < 0, \quad \forall i, j \in \Gamma, \quad i \neq j,$$

alors le système à commutation est globalement asymptotiquement stable pour un temps minimum entre deux commutations successives supérieur à τ_D .

Remarquons au passage que pour ce théorème, si l'on impose $\tau_D = 1$, on retrouve alors la condition de stabilité (1.38), proposée dans [Daafouz et al., 2002].

B. Restrictions déterminées par des domaines dans l'espace d'état

Une autre méthode pour synthétiser une loi de commutation stabilisante peut être de diviser l'espace d'état en plusieurs régions, telles que le système linéaire par morceaux qui résulte de cette décomposition soit stable. Le théorème 1.3.19 indique que pour une paire de systèmes déterminée par les matrices A_1, A_2 , il suffit d'avoir une combinaison convexe stable pour qu'il existe une loi de commutation stabilisante [Wicks et al., 1994, Wicks et DeCarlo, 1997]. Soit $A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$, $\alpha \in (0, 1)$ la combinaison stable. Dans ce cas il existe deux matrices P et Q positives définies telles que :

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q.$$

Cette condition peut être réécrite comme :

$$\alpha(A_1^T P + P A_1) + (1 - \alpha)(A_2^T P + P A_2) = -Q,$$

ou

$$\alpha x^T (A_1^T P + P A_1) x + (1 - \alpha) x^T (A_2^T P + P A_2) x = -x^T Q x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Les deux termes, $x^T (A_1^T P + P A_1) x$ et $x^T (A_2^T P + P A_2) x$, sont pondérés par des coefficients positifs ($\alpha \in (0, 1)$). Pour assurer la négativité dans l'équation précédente, il faut qu'au moins un des deux termes soit négatif pour toute valeur du vecteur d'état, i.e. $x^T (A_1^T P + P A_1) x < 0$ ou $x^T (A_2^T P + P A_2) x < 0$. Autrement dit, l'espace d'état peut être couvert par deux régions coniques :

$$X_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T (A_i^T P + P A_i) x < 0\}, \quad i = 1, 2.$$

La fonction $V(x) := x^T P x$ est strictement décroissante dans la région X_1 pour les solutions de $\dot{x} = A_1 x$ et dans la région X_2 pour les solutions de $\dot{x} = A_2 x$. En utilisant cette propriété il est possible de construire des surfaces de commutation tel que V soit strictement décroissante pour toutes les solutions du système à commutation. Nous utiliserons cette idée dans le chapitre suivant.

1.3.4.2 Correcteurs stabilisant le système indépendamment de la loi de commutation

Quand le signal de commutation n'est pas contrôlable, le problème de stabilisation des systèmes à commutation est lié à la stabilisation des systèmes incertains (si le signal de commutation est inconnu) ou au contrôle des champs de vecteurs (si le signal de commutation est disponible en temps réel).

Considérons le système linéaire polytopique suivant :

$$\dot{x} = A(\lambda)x + B(\lambda)u, \quad (1.47)$$

dans lequel

$$A(\lambda) = \sum_{i=1}^M \lambda_i A_i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=1}^M \lambda_i B_i,$$

et

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_M] \in \mathbb{R}^M : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1 \right\}.$$

Le système à commutation décrit par l'équation :

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u, \quad \sigma \in S(\Gamma), \quad (1.48)$$

peut être écrit comme un cas particulier de système polytopique pour des paramètres λ_i restreints à deux valeurs discrètes $\lambda_i \in \{0, 1\}$, tels que $\lambda_i = 1$ quand $\sigma(t) = i$.

Il existe une large variété d'approches pour la stabilisation des systèmes polytopiques. La synthèse d'un retour d'état statique est proposée par Boyd [Boyd et al., 1994] en termes d'inégalités matricielles linéaires. Le résultat est fondé sur l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune $V(x) = x^T P x$ pour le système en boucle fermée.

S'il existe une matrice S symétrique et définie positive et une matrice Y telles que

$$S A_i^T + A_i S + B_i Y + Y^T B_i < 0, \quad i = 1 \dots M,$$

alors le retour d'état $u = Kx$ stabilise le système à commutation (1.48) où $K = Y S^{-1}$. Dans ce cas la fonction de Lyapunov est construite avec $P = S^{-1}$.

Cette approche peut être directement appliquée au cas des systèmes à commutation. Si le signal de commutation est disponible en temps réel, alors on peut rechercher un retour d'état, qui commute également sous la forme :

$$u = K_\sigma x. \quad (1.49)$$

Dans ce cas la stabilisation dépend de l'existence de plusieurs matrices Y_i et l'inégalité matricielle linéaire est remplacée par

$$SA_i^T + A_iS + B_iY_i + Y_i^TB_i < 0, \quad i = 1 \dots M.$$

Le retour d'état commuté est alors donné par l'équation (1.49) avec $K_i = Y_iS^{-1}$, $i \in \Gamma$.

Une approche plus générale est l'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres, $V(x) = x^T \sum_{i=1}^M \lambda_i P_i x$ proposés par Daafouz et Bernoussou [Daafouz et Bernoussou, 2001] pour les systèmes polytopiques en temps discret. L'extension au cas des systèmes à commutation est donnée dans [Daafouz et al., 2002].

Théorème 1.3.23. *Le système à commutation*

$$x_{k+1} = A_\sigma x_k + B_\sigma u_k, \quad \sigma \in S(\Gamma),$$

est stabilisable par le retour d'état commuté $u = F_\sigma x$ s'il existe des matrices S_i définies positives et des matrices R_i et G_i telles que l'inégalité matricielle linéaire

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & (A_i^T G_i + B_i R_i)^T \\ A_i^T G_i + B_i R_i & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \Gamma \times \Gamma. \quad (1.50)$$

soit satisfaite $\forall i, j \in \Gamma$. Le retour d'état est construit avec $K_i = R_i G_i^{-1}$ et les matrices de Lyapunov sont données par $P_i = S_i^{-1}$.

L'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendantes de paramètres en temps continu s'avère très difficile. Dans ce cas on obtient des fonctions de Lyapunov avec une dépendance lisse par rapport aux paramètres. En raison de la nature discontinue des systèmes à commutation, une fonction de Lyapunov lisse ne peut pas avoir de dérivée lisse pour les solutions d'un système à commutation. Ce qui pose donc des problèmes, lors de la dérivation de la fonction de Lyapunov. Si des conditions particulières sont respectées par la loi de commutation, ces difficultés peuvent être surmontées, comme le proposent les travaux de [Johansson, 2002], dans un contexte des systèmes linéaires par morceaux. L'auteur utilise des fonctions de Lyapunov poly-quadratiques pour la synthèse d'un retour d'état qui commute. Le contrôleur y est déterminé par des méthodes de contrôle optimal, en considérant les *inégalités* de Hamilton–Jacobi–Bellman.

1.4 Bilan

Revenons quelque peu sur les divers points abordés dans ce chapitre. Après avoir rappelé les diverses notions mathématiques se rapportant aux systèmes à commutation, nous avons

ensuite effectué un petit tour d’horizon sur les diverses problématiques générées par l’étude des systèmes à commutation, ainsi que les outils qui ont été développés pour y répondre. Nous encourageons le lecteur, s’il le désire, à approfondir chacun des résultats en allant consulter les références données. Bien entendu, cet état de l’art n’est pas complet, mais nous avons essayé d’être objectif quant à son contenu. Sans avoir à faire du dénombrement, on peut rapidement constater la richesse des résultats produits pour les systèmes linéaires, mais qu’en revanche pour des systèmes non linéaires, les résultats sont moins nombreux. Le problème de la commande de tels systèmes représente alors un enjeu double, tant sur le plan scientifique que pratique. C’est un peu dans cette direction que les travaux, qui vont être présentés dans la suite de ce mémoire, s’inscrivent. Aussi avons-nous cherché à étudier la **commande** des systèmes **non linéaires** à commutation, sous différentes formes possibles : Existe-t-il un contrôle des commutations qui garantisse la stabilité conditionnelle, et le cas échéant comment est-il possible de le générer ? A l’inverse, quelles conditions peuvent assurer la stabilité uniforme ? Est-il intéressant de sortir un peu du cadre classique d’étude, en les structurant davantage ? Ou par opposition, peut-on encore les commander si on ne connaît pas grand chose sur les champs de vecteurs ou sur les commutations ?

Le prochain chapitre propose un algorithme de construction d’un signal stabilisant, et vient ainsi s’ajouter à la partie 1.3.4. Par suite, nous aborderons le problème de la stabilisation uniforme, qui est en fait une extension des notions de fonctions de Lyapunov communes à des systèmes contrôlés à commutation.

Construction d'un signal stabilisant par une représentation polytopique

Employons-nous à scier la branche sur laquelle nous sommes posés.

Tombera ? Tombera pas ?

— R. Humeau¹

Nous abordons dans ce chapitre le problème de la commande d'un signal de commutation qui stabilise conditionnellement un système à commutation non linéaire. Notre approche repose sur une réécriture de ces systèmes sous une forme polytopique : exprimer chacun des sous-systèmes comme une somme de systèmes linéaires à pondérations non linéaires. Par suite, nous utilisons cette représentation pour dégager des conditions suffisantes pour construire un algorithme de commande stabilisant.



2.1 Introduction

Parmi l'ensemble des problèmes qui se dressent quand on s'intéresse à la stabilité d'un système hybride, nous allons traiter ici celui de la **construction** d'un signal de commutation qui assure la stabilité asymptotique de l'origine. Comme nous l'avons rappelé dans notre état de l'art, ce problème a déjà été abordé par diverses méthodes. Cependant, dans la quasi majorité des cas, les résultats sont cantonnés aux systèmes linéaires. Si la difficulté liée à l'étude des systèmes non linéaires fait l'unanimité, on peut néanmoins, et fort heureusement, se demander comment aborder ce problème pour ces systèmes. Les raisons de cette barrière sont connues : difficultés à expliciter les trajectoires, à exhiber des fonctions de Lyapunov, ... Quel est alors

¹Romain Humeau, extrait de la chanson *Bigger than the Biggest*.

le prix à payer, en hypothèses, pour pouvoir utiliser les connaissances développées pour les systèmes linéaires sur les systèmes non linéaires? Si la première approche qui vient en tête est l'étude du linéarisé autour de l'origine, pourquoi ne pas essayer d'agrandir quelque peu le domaine d'étude? C'est dans ce sens que les travaux que nous allons exposer dans ce chapitre ont été menés. L'idée est la suivante : représenter le système non linéaire comme une somme polytopique de systèmes linéaires, mais **sans** faire d'approximation! Pour ce faire, nous avons reporté les non linéarités sur les pondérations de notre somme polytopique.

Afin de comprendre notre approche nous proposons dans un premier temps l'exemple introductif suivant.

Soit le système à commutation composé des deux sous-systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(S_2) : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 + \cos(x_1x_2)x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous pouvons rapidement remarquer que les deux sous-systèmes sont instables, comme l'illustrent les figures suivantes :

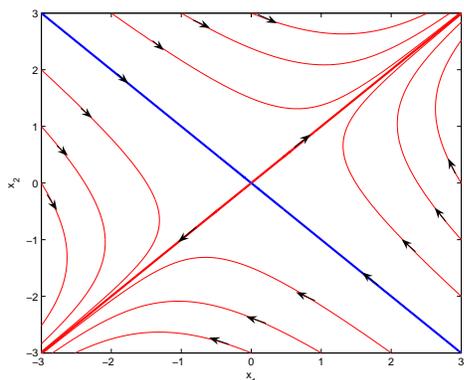


Figure 2.1 – Portrait de phase du sous-système linéaire instable (2.1)

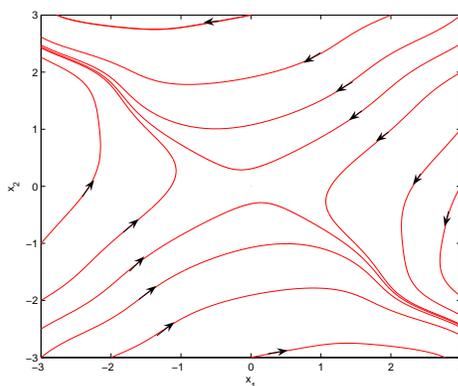


Figure 2.2 – Portrait de phase du sous-système non linéaire instable (2.2)

Par suite, regardons avec un peu plus d'attention le second sous-système (S_2). Celui-ci présente un terme en $\cos(x_1x_2)x_2$, et par conséquent est non linéaire. Mais, réécrivons (2.2)

sous la forme $\dot{x} = A_2(x)x$. On peut constater alors que la matrice $A_2(x)$ est bornée par les deux matrices suivantes :

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Toujours par réécriture, le sous-système (2.2) peut être alors vu comme une somme convexe de sous-systèmes linéaires, mais dont les pondérations sont bien entendues non linéaires, comme le décrit l'équation suivante :

$$\dot{x} = \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(x_1x_2))A_{21} + \frac{1}{2}(1 - \cos(x_1x_2))A_{22} \right) x. \quad (2.4)$$

L'idée que nous allons développer est d'étudier ces matrices extrêmes (A_{21} et A_{22}) pour pouvoir construire une loi de commutation qui garantisse la stabilité conditionnelle de notre système hybride.

Le premier sous-système étant linéaire, utilisons la notation usuelle $\dot{x} = A_1x$.

Définissons alors les deux régions suivantes :

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T(A_1^T + A_1)x < 0\}, \quad (2.5)$$

$$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T(A_{21}^T + A_{21})x < 0 \& x^T(A_{22}^T + A_{22})x < 0\}. \quad (2.6)$$

L'objectif des théorèmes développés est de trouver des conditions qui assurent que la réunion des deux régions recouvre l'espace d'état tout entier, autrement dit, que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{R}^2$. Par suite, une loi de commutation qui laisse actif le sous-système (S_i) tant que l'état x reste dans la région Ω_i , va garantir la convergence de la trajectoire vers l'origine.

Pour notre exemple, une telle loi de commande donne alors la simulation décrite dans la figure (2.3).

Le chapitre est construit ainsi : nous introduisons tout d'abord dans la section 2.2 une méthode pour représenter des systèmes à commutation non linéaires sous une forme polytopique. Par suite, nous dégagons dans la partie 2.3 des conditions pour construire une loi de commande qui garantisse la stabilité conditionnelle du système. Nous essayons par la suite de relaxer les conditions obtenues dans la section 2.4 puis proposons diverses extensions dans la partie 2.5.

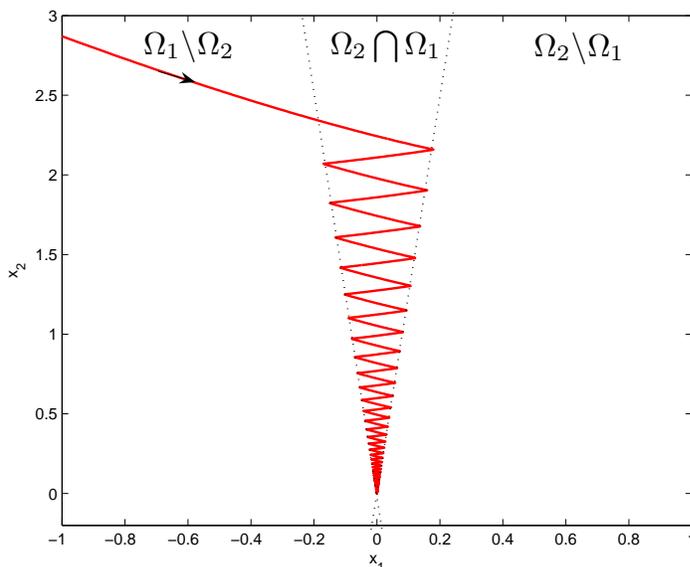


Figure 2.3 – Trajectoire du système sous un signal de commutation judicieusement contrôlé

2.2 Mise sous forme polytopique d'un système à commutation

Si dans un premier temps, les modèles de Takagi–Sugeno ont été introduits dans un contexte de modèles flous [Takagi et Sugeno, 1985], ils ont été, par la suite, présentés sous une formulation analytique [Tanaka et Sugeno, 1992]. Comme nous l'avons brièvement rappelé dans le paragraphe précédent, l'idée principale est de transformer un système non linéaire en une somme convexe de systèmes linéaires, dont les pondérations sont non linéaires.

La première notion qu'il convient de définir est la propriété de somme convexe, notée par la suite CSP² :

Définition 2.2.1 (Propriété de somme convexe, CSP). *Considérons r fonctions $h_i(z) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$. Ces fonctions $h_i(z)$ vérifient la propriété de somme convexe si et seulement si :*

$$\begin{cases} h_i(z) \geq 0, \forall i \in I_r, & z \in \mathbb{R}^p, \\ \sum_{i=1}^r h_i(z) = 1, & z \in \mathbb{R}^p. \end{cases}$$

²CSP, de la désignation anglaise : Convex Sum Property

La démarche pour aborder la reformulation va être la suivante : identifier les termes non linéaires, calculer les matrices extrêmes, puis déterminer les fonctions de pondération qui satisfassent la propriété de somme convexe. C'est ce à quoi s'attache la partie suivante.

2.2.1 Représentation polytopique d'un système non linéaire à commutation.

Considérons un système à commutation, constitué de N sous-systèmes $S_i, i \in I_N$, décrits ainsi :

$$(S_i) : \dot{x} = f_i(x) + B_i(x)u_i, i \in I_N, \quad (2.7)$$

dans lequel $x \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $B_i(x) \in \mathbb{R}^{n \times m_i}$.

Pour tout $i \in I_N$, les fonctions $f_i(x)$ et $B_i(x)$ satisfont les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.2.1. $f_i(x)$ est analytique et $f_i(0) = 0$, pour tout $i \in I_N$.

Hypothèse 2.2.2. $B_i(x)$ est continue, pour tout $i \in I_N$.

Venons-en maintenant à l'existence de la forme polytopique.

Théorème 2.2.3. [Bourdais et Perruquetti, 2007] Soit le système à commutation, composé des sous-systèmes (2.7). Si les hypothèses 2.2.1 et 2.2.2 sont satisfaites, alors pour tout ensemble compact \mathcal{D} contenant l'origine, il existe un nombre fini de matrices $(A_{ij}, B_{ij}), i \in I_N, j \in I_{N_i}$ et de fonctions $h_{ij}(x)$ telles que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, on ait :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\sigma(x) + B_\sigma(x)u_i & = \sum_{j=1}^{N_\sigma} h_{\sigma j}(x)(A_{\sigma j}x + B_{\sigma j}u_i), \\ \sum_{j=1}^{N_\sigma} h_{\sigma j}(x) = 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Démonstration. Intéressons-nous dans un premier temps à un sous-système donné. Soit $i \in I_N$. Sous l'hypothèse 2.2.1, il existe une matrice $A_i(x)$ telle que l'on peut réécrire le sous-système sous la forme $\dot{x} = A_i(x)x + B_i(x)u_i$.

Étant donné que \mathcal{D} est borné et que les fonctions sont continues, il existe alors deux ensembles compacts \mathcal{D}_{A_i} et \mathcal{D}_{B_i} tels que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $A_i(x) \in \mathcal{D}_{A_i}$ et $B_i(x) \in \mathcal{D}_{B_i}$.

Par suite, si l'on considère la fonction continue $E_i(x) = [A_i(x) \ B_i(x)]$, cette fonction est alors également bornée, $E_i(x) \in \mathcal{D}_{E_i}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times n + m_i \times n}$. Il existe donc N_i points, notés $[A_{ij} \ B_{ij}], j \in I_{N_i}$ tels que tout point du domaine \mathcal{D}_{E_i} est égal à une somme convexe de

ces N_i points. Ainsi, pour tout $x_0 \in \mathcal{D}$, on peut déterminer r_i coefficients h_{ij} tels que :

$$\begin{cases} A_i(x_0) = \sum_{j=1}^{N_i} h_{ij}(x_0)(A_{ij}), \\ B_i(x_0) = \sum_{j=1}^{N_i} h_{ij}(x_0)(B_{ij}). \end{cases}$$

On peut par suite construire les fonctions de pondérations de manière à ce qu'elles satisfassent la propriété de somme convexe.

La construction reste évidemment valide pour tous les autres sous-systèmes, et l'on peut obtenir, en introduisant le signal de commutation σ , la représentation (2.8).

La reformulation (2.8) sera appelée dans la suite de nos travaux la forme polytopique à commutation du système hybride, que l'on désignera par forme (SP)³. Notons au passage que celle-ci n'est pas unique. Elle dépend du choix des matrices extrêmes. Nous allons désormais présenter une méthode pour l'obtenir.

2.2.2 Construction d'un modèle sous forme (SP)

Dans cette section, nous proposons une méthode pour réécrire un système non linéaire à commutation, composé de N sous-systèmes, sous une forme (SP). Comme nous l'avons déjà énoncé, cette décomposition n'est en rien unique, tout comme la méthode qui permet de l'obtenir.

Pour exposer les principes de la manière la plus claire possible, nous présentons la méthodologie pour un seul sous-système (S_i), et nous supposons, sans restriction, que les matrices $A_i(x)$ et $B_i(x)$ sont bornées. Pour illustrer le tout, nous utilisons l'exemple du sous-système (S_1), défini ainsi :

$$(S_1) : \dot{x} = A_1(x_1)x + B_1(x_2)u_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sin(x_1) & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sin^2(x_2) \end{pmatrix} u_1, \quad (2.9)$$

dans lequel $x \in \mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}$.

³De l'anglais, the switch polytopic form.

2.2.2.1 Première étape

La première étape a pour but de déterminer les bornes atteintes par chacun des termes non linéaires. Une fois ce calcul effectué, nous utilisons le lemme 2.1 suivant, pour déterminer les fonctions de pondération.

Lemme 2.1. *[Morère et al., 2000] Soit, $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, une fonction continue et non constante. Pour tout $x \in [a, b]$, il existe deux fonctions $F^m, F^M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété de somme convexe, ainsi que deux réels α et β , $\alpha < \beta$, tels que $f(x) = F^m(x)\alpha + F^M(x)\beta$.*

En effet, comme f est continue, elle atteint ses bornes sur le compact $[a, b]$. Notons $\alpha = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $\beta = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Comme f n'est pas constante, on a alors $\alpha \neq \beta$, et l'on peut obtenir ainsi :

$$f(x) = \frac{\beta - f(x)}{\beta - \alpha} \alpha + \frac{f(x) - \alpha}{\beta - \alpha} \beta$$

Exemple 2.1. *Appliquons cette démarche à l'exemple du sous-système (S_1) . Nous avons alors les équations suivantes :*

$$\sin(x_1) = F_1^m(x_1)(-1) + F_1^M(x_1)(1), \quad 1 + \sin^2(x_2) = F_2^m(x_2)(1) + F_2^M(x_2)(2).$$

ainsi que les fonctions de pondération associées :

$$\begin{cases} F_1^m = \frac{1}{2}(1 - \sin(x_1)), & F_1^M = \frac{1}{2}(1 + \sin(x_1)), \\ F_2^m = 1 - \sin^2(x_2), & F_2^M = \sin^2(x_2). \end{cases} \quad (2.10)$$

2.2.2.2 Seconde étape

Maintenant que les bornes sont calculées, il faut maintenant calculer les matrices extrêmes de $C_i(x) = [A_i(x) \ B_i(x)]$, puis exprimer la matrice $C_i(x)$ comme une somme convexe de ces matrices extrêmes. C'est ce à quoi s'attache la deuxième étape.

Supposons que la matrice $C_i(x)$ soit composée de nc_i termes non constants. Pour chacun de ces termes, il existe deux bornes, la borne inférieure α_i et la borne supérieure β_i . On en déduit donc que pour cette matrice $C_i(x)$, il existe 2^{nc_i} matrices extrêmes, C_{ij} , ainsi construites : $(\alpha_1 \text{ ou } \beta_1) \times \dots \times (\alpha_{nc_i} \text{ ou } \beta_{nc_i})$.

Pour construire les fonctions de pondération, l'idée est de multiplier les diverses fonctions F^m ou F^M suivant l'extremum choisi. Ce qui amène à $h_{ij} = (F_1^m \text{ ou } F_1^M) \times \dots \times (F_{nc_i}^m \text{ ou } F_{nc_i}^M)$. Ceci nous permet d'obtenir la décomposition de C_i comme suit :

$$C_i(x) = \sum_{j=1}^{2^{nc_i}} h_{ij}(x) C_{ij}.$$

Exemple 2.2. Dans l'exemple (S_1) , on a :

$$C_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \vdots & 1 \\ \sin(x_1) & -2 & \vdots & 1 + \sin^2(x_2) \end{pmatrix}.$$

Il y a deux termes non constants, nous devons donc construire 2^2 matrices extrêmes C_{ij} , et déterminer leur fonction de pondération associée. La méthode présentée conduit au résultat suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \vdots & 1 \\ -1 & -2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{11}(x) = F_1^m(x_1) \times F_2^m(x_2), \\ C_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & \vdots & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{12}(x) = F_1^M(x_1) \times F_2^m(x_2), \\ C_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \vdots & 1 \\ -1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}, \quad h_{13}(x) = F_1^m(x_1) \times F_2^M(x_2), \\ C_{14} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -2 & \vdots & 2 \end{pmatrix}, \quad h_{14}(x) = F_1^M(x_1) \times F_2^M(x_2). \end{array} \right. \quad (2.11)$$

2.2.2.3 Dernière étape

Le plus gros du travail a déjà été effectué. Il reste maintenant à extraire les matrices A_{ij} et B_{ij} de la matrice C_{ij} . Par suite, en choisissant $N_i = 2^{nc_i}$, on obtient la représentation du système à commutation sous une forme (SP), donnée par l'équation (2.8).

Exemple 2.3. Sur l'exemple (S_1) étudié, on peut réécrire le sous-système sous la forme :

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^4 h_{1j}(x) (A_{1j}x + B_{1j}u_1), \quad (2.12)$$

avec

$$\begin{cases} A_{11} = A_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, & A_{12} = A_{14} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \\ B_{11} = B_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & B_{13} = B_{14} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (2.13)$$

et les fonctions de pondération associées :

$$\begin{cases} h_{11}(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin(x_1))(1 - \sin^2(x_2)), \\ h_{12}(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin(x_1))(1 - \sin^2(x_2)), \\ h_{13}(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin(x_1))\sin^2(x_2), \\ h_{14}(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin(x_1))\sin^2(x_2). \end{cases} \quad (2.14)$$

Désormais, nous avons vu comment transformer un système à commutation en une forme polytopique. Nous allons dans les paragraphes suivants l'utiliser pour l'étude de la stabilité et de la stabilisation.

2.3 Stabilisation quadratique des systèmes à commutation

Pour analyser la stabilité d'un système dynamique, mis sous forme polytopique, correspondant en fait à l'équation (2.16), avec $N = 1$, Tanaka a proposé la condition suffisante suivante :

Théorème 2.3.1. [Tanaka et Sugeno, 1992] Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(x)A_i x, \quad \sum_{i=1}^r h_i(x) = 1, \quad h_i(x) \geq 0, \forall i \in I_r. \quad (2.15)$$

S'il existe une matrice définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telle que

$$A_i^T P + P A_i < 0, \forall i \in [1, \dots, r],$$

alors, l'origine du système est globalement asymptotiquement stable.

Dans cette partie, le problème qui nous intéresse est celui de la stabilisation quadratique d'un système à commutation, par construction d'une loi de commutation dépendante de l'état. La définition de cette notion est rappelée dans les lignes qui suivent :

Définition 2.3.1. *Le système (2.16) est stabilisable quadratiquement, par construction d'une loi de commande dépendant de l'état, s'il existe une fonction définie positive $V(x) = x^T P x$, un nombre réel positif $\epsilon > 0$ et un signal de commutation tels que, le long des trajectoires, la relation suivante soit vérifiée :*

$$\dot{V}(x) < -\epsilon x^T x.$$

Comme toujours, nous considérons dans un premier temps les systèmes autonomes non contrôlés ($u \equiv 0$), ainsi décrits :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f_{\sigma(x,t)}(x) = \sum_{j=1}^{N_{\sigma(x,t)}} h_{\sigma(x,t)j}(x) A_{\sigma(x,t)j} x, \\ \sum_{j=1}^{N_{\sigma(x,t)}} h_{\sigma(x,t)j}(x) = 1, \quad h_{\sigma(x,t)j}(x) \geq 0, \forall j \in I_{N_i}. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

La question qui se pose alors naturellement est de savoir sous quelles conditions un signal de commutation peut stabiliser, et le cas échéant, comment il peut être déterminé. Nous nous dégageons du cas trivial dans lequel l'un des sous-systèmes est asymptotiquement stable. En effet, une loi de commutation qui active ce sous-système est suffisante pour répondre à notre problème. C'est ce que formule le théorème suivant :

Théorème 2.3.2. *[Bourdais et Perruquetti, 2007] Considérons un système à commutation, mis sous une forme polytopique (2.16). S'il existe $i \in I_N$ et une matrice définie positive P , tels que pour tout $j \in I_{N_i}$, on ait*

$$A_{ij}^T P + P A_{ij} < 0,$$

alors le système est stabilisable quadratiquement, par construction d'une loi de commande dépendant de l'état.

Démonstration. Nous passons brièvement sur cette preuve, qui comme nous l'avons énoncé est assez évidente. L'idée est d'appliquer le théorème de Tanaka (2.3.1) au sous-système S_i , qui amène à la stabilité de ce sous-système. Par suite, la loi de commutation est la suivante $\sigma(x) = i, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et notre système à commutation est alors conditionnellement asymptotiquement stable.

2.3.1 Première Approche : Cas de deux sous-systèmes

Désormais, nous ne considérons ici que le cas de sous-systèmes instables. Afin de bien comprendre l'idée développée, nous nous limitons dans un premier temps au cas de deux

sous-systèmes. Comme nous le verrons, les raisonnements sont les mêmes pour un système à commutation composé de plusieurs sous-systèmes. Cette généralisation est proposée dans la section 2.3.2.

Le théorème suivant s'attache à donner des conditions suffisantes pour garantir la stabilité quadratique tout en explicitant une loi de commutation adéquate. Il s'énonce ainsi :

Théorème 2.3.3. *[Bourdais et Perruquetti, 2007] Le système à commutation (2.16) est stabilisable quadratiquement, par construction d'une loi de commande dépendant de l'état, s'il existe $N_1 \times N_2$ constantes $\lambda_{ij} \in [0, 1]$ et une matrice définie positive P telle que pour tout ($i = \{1, \dots, N_1\}, j = \{1, \dots, N_2\}$), la relation suivante soit vérifiée :*

$$[\lambda_{ij}A_{1i} + (1 - \lambda_{ij})A_{2j}]^T P + P [\lambda_{ij}A_{1i} + (1 - \lambda_{ij})A_{2j}] < 0. \quad (2.17)$$

Démonstration. Nous présentons ici les grandes lignes de la preuve. Pour qu'elle soit la plus claire possible, nous nous limitons au cas où $N_1 = N_2 = 2$, c'est-à-dire au cas où chacun des sous-systèmes ne présente qu'une seule non linéarité. La généralisation est immédiate et suit le raisonnement que voici. Il est inspiré de celui proposé dans [Wicks et al., 1994], dont les grandes idées sont rappelées dans la partie 1.3.4.1, paragraphe B.

Suivant les conditions du théorème 2.3.3, il existe quatre constantes λ_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$ et une matrice définie positive P telles que l'équation (2.17) soit vraie. Il existe donc un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \neq 0$, on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^T [\lambda_{11}A_{11} + (1 - \lambda_{11})A_{21}]^T P x + x^T P [\lambda_{11}A_{11} + (1 - \lambda_{11})A_{21}] x < -\epsilon x^T x, \\ x^T [\lambda_{12}A_{11} + (1 - \lambda_{12})A_{22}]^T P x + x^T P [\lambda_{12}A_{11} + (1 - \lambda_{12})A_{22}] x < -\epsilon x^T x, \\ x^T [\lambda_{21}A_{12} + (1 - \lambda_{21})A_{21}]^T P x + x^T P [\lambda_{21}A_{12} + (1 - \lambda_{21})A_{21}] x < -\epsilon x^T x, \\ x^T [\lambda_{22}A_{12} + (1 - \lambda_{22})A_{22}]^T P x + x^T P [\lambda_{22}A_{12} + (1 - \lambda_{22})A_{22}] x < -\epsilon x^T x. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

On peut alors réécrire ce jeu d'équations sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{11}x^T(A_{11}^T P + PA_{11})x + (1 - \lambda_{11})x^T(A_{21}^T P + PA_{21})x < -\epsilon x^T x, \\ \lambda_{12}x^T(A_{11}^T P + PA_{11})x + (1 - \lambda_{12})x^T(A_{22}^T P + PA_{22})x < -\epsilon x^T x, \\ \lambda_{21}x^T(A_{12}^T P + PA_{12})x + (1 - \lambda_{21})x^T(A_{21}^T P + PA_{21})x < -\epsilon x^T x, \\ \lambda_{22}x^T(A_{12}^T P + PA_{12})x + (1 - \lambda_{22})x^T(A_{22}^T P + PA_{22})x < -\epsilon x^T x. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Comme les constantes $\lambda_{ij} \in [0, 1]$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'une des deux assertions suivantes (E_1 ou E_2) doit être vraie :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(x) : x^T(A_{11}^T P + PA_{11})x < -\epsilon x^T x \ \& \ x^T(A_{12}^T P + PA_{12})x < -\epsilon x^T x, \\ E_2(x) : x^T(A_{21}^T P + PA_{21})x < -\epsilon x^T x \ \& \ x^T(A_{22}^T P + PA_{22})x < -\epsilon x^T x. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Notons Ω_i , l'ensemble des états x tels que l'assertion $E_i(x)$ soit vraie,

$$\Omega_i = \{x : E_i(x) \text{ est vraie}\},$$

on peut alors affirmer que la réunion de ces deux ensembles couvre l'espace d'état entier : $\mathbb{R}^n = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Il suffit alors de choisir le sous-système (S_i) tant que l'état reste dans l'ensemble Ω_i . En effet, son activation assurera la décroissance de la fonction $V(x) = x^T P x$, dans la région Ω_i le long des trajectoires du système.

Nous détaillons dans l'algorithme 2.2 comment construire le signal à commutation.

Algorithme 2.2. *Chaque sous-système S_i reste actif tant que l'état reste dans l'ensemble Ω_i . Le contrôle doit alors mémoriser quel est le sous-système actif à l'instant présent. Pour ce qui est de l'initialisation, il suffit d'appliquer la formule à l'état initial. Ce qui donne l'algorithme suivant :*

Début

Tant que ($x \neq 0$) Faire

Si ($\sigma(x, t) = 1$)

Si $x \in \Omega_1$ alors $\sigma(x, t^+) = 1$; sinon $\sigma(x, t^+) = 2$;

Sinon (cas ($\sigma(x, t) = 2$))

Si $x \in \Omega_2$ alors $\sigma(x, t^+) = 2$; sinon $\sigma(x, t^+) = 1$;

Fin Tant que

Fin

2.3.2 Généralisation

Venons maintenant à la généralisation à plusieurs sous-systèmes. Le principe est exactement le même. Seul un problème, certes non négligeable, d'explosion combinatoire peut apparaître. En effet, le nombre de LMI croît rapidement, comme nous pouvons le constater dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.4. [Bourdais et Perruquetti, 2007] *Soit le système (2.16) composé de N sous-systèmes non linéaires. Pour $i \in \Gamma$, notons N_i le nombre de matrices présentes dans la représentation polytopique du sous-système S_i . S'il existe $N \times N_1 \times N_2 \times \dots \times N_N$ constantes $\lambda_{i_1, \dots, i_N}^k$, appartenant à l'intervalle $[0, 1]$, et une matrice définie positive P telle que, pour tout $l \in \{1, \dots, N\}, i_l \in \{1, \dots, N_l\}$, on ait :*

$$\sum_{k=1}^N \lambda_{i_1, \dots, i_N}^k = 1, \tag{2.21}$$

$$\left[\sum_{k=1}^N \lambda_{i_1, \dots, i_N}^k A_{ki_l} \right]^T P + P \left[\sum_{k=1}^N \lambda_{i_1, \dots, i_N}^k A_{ki_l} \right] < 0, \tag{2.22}$$

alors le système (2.16) est stabilisable quadratiquement, par construction d'une loi de commande dépendant de l'état.

Démonstration. La preuve de ce théorème reste identique à la preuve du théorème (2.3.3). La principale différence est le nombre d'équations à tester, qui peut devenir rapidement imposant. Par exemple, pour un système composé de 4 sous-systèmes, chacun présentant 2 termes non linéaires, il faut déjà vérifier 256 équations ...

2.3.3 Exemple

Nous proposons maintenant, pour illustrer les paragraphes précédents, l'exemple d'un système à commutation composé des deux sous-systèmes non linéaires et instables suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2 \sin x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 \sin x_2 + \frac{5}{2}x_1 - x_2, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$(S_2) : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1 \cos x_1 - \frac{5}{2}x_1 - x_2. \end{cases} \quad (2.24)$$

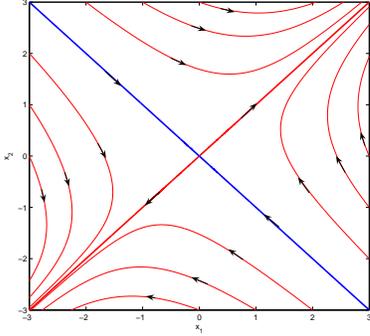


Figure 2.4 – Portrait de phase du sous-système instable (2.23)

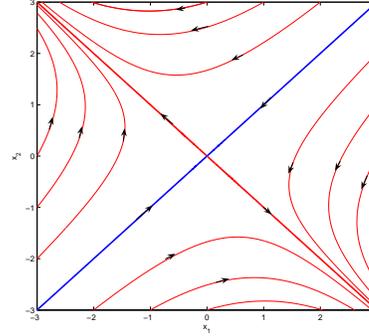


Figure 2.5 – Portrait de phase du sous-système instable (2.24)

La première étape de notre étude va être de réécrire le système à commutation sous une forme polytopique. Pour ce faire, nous utilisons la méthode proposée dans la section 2.2.2.

Ainsi, nous obtenons pour le sous-système (2.23) l'équation suivante :

$$\dot{x} = h_{11}(x)A_{11}x + h_{12}(x)A_{12}x, \quad (2.25)$$

dans laquelle

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Et les fonctions de pondération associées :

$$h_{11}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sin x_2 + \frac{1}{2}, \quad h_{12}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \sin x_2 + \frac{1}{2}.$$

On reproduit une approche identique pour le second sous-système (2.24) et l'on obtient :

$$\dot{x} = h_{21}(x)A_{21}x + h_{22}(x)A_{22}x, \quad (2.26)$$

dans laquelle

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

et les fonctions de pondération associées :

$$h_{21}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \cos x_1 + \frac{1}{2}, \quad h_{22}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \cos x_1 + \frac{1}{2}.$$

On peut remarquer au passage qu'aucune des quatre matrices n'est stable. Vérifions maintenant les conditions du théorème (2.3.3). On peut rapidement obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_{11} + \frac{1}{2}A_{22} &= -I, & \frac{3}{5}A_{11} + \frac{2}{5}A_{21} &= -I, \\ \frac{1}{2}A_{12} + \frac{1}{2}A_{21} &= -I, & \frac{2}{5}A_{12} + \frac{3}{5}A_{22} &= -I. \end{aligned}$$

Par suite, une matrice candidate P peut être la matrice identité I . Suivant l'algorithme (2.2), on peut alors expliciter la loi de commutation adéquate, construite sur l'état, qui assure la stabilité quadratique de notre système hybride. La figure (2.6) met en avant les résultats obtenus par simulation.

2.4 Relaxation des conditions

L'intérêt de notre approche repose sur la transformation d'un système non linéaire en une somme polytopique de systèmes linéaires. Les théorèmes proposés reposent sur des conditions qui sont assez conservatives. En effet, celles-ci reposent sur l'étude des matrices extrêmes, et ne prennent pas en compte les fonctions de pondération associées. Le but de cette section est de relâcher ces conditions pour répondre au même problème. Nous verrons ainsi comment prendre en compte les fonctions de pondération, puis dégagerons des conditions suffisantes de stabilité, moins restrictives, ce que nous illustrerons sur un exemple.

Avant de poursuivre, introduisons quelques notations supplémentaires. Pour un sous-système S_i :

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^{N_i} h_{ij}(x) A_{ij} x, \tag{2.27}$$

considérons :

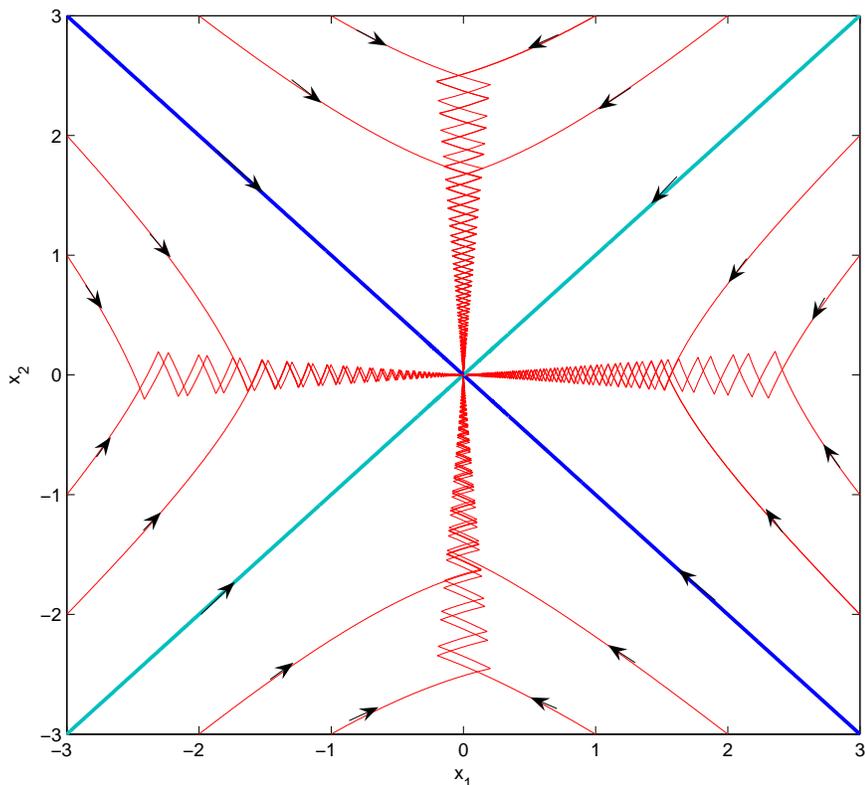


Figure 2.6 – Trajectoire du système (2.16) sous le signal de commutation commandé

– $H_i(x) \in \mathbb{R}^{N_i}$ le vecteur composé des éléments suivants :

$$H_i^T(x) = [h_{i1}(x), \dots, h_{iN_i}(x)],$$

– et son image dans l'espace d'état : le domaine D_{H_i} défini par :

$$D_{H_i} = \{H_i(x) : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Étant donné que $0 \leq h_{ij}(x) \leq 1, j \in I_{N_i}$, le domaine D_{H_i} est inclus dans le domaine $[0, 1]^{N_i}$, il vient alors le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Il existe q_i points, $\Gamma_k^i \in \mathbb{R}^{N_i} = [\Gamma_{k1}^i, \dots, \Gamma_{kN_i}^i]^T$ tels que tout point de D_{H_i} peut être écrit comme une combinaison convexe de ces q_i points.*

Remarque 2.1. *Il faut souligner que cette décomposition n'est pas unique.*

Introduisons maintenant $D_i = \overline{\text{conv}}\{\Gamma_1^i, \dots, \Gamma_{q_i}^i\}$ qui représente l'ensemble convexe délimité par ces q_i points. Nous le nommerons par la suite l'ensemble polytopique limite de D_{H_i} , comme l'illustre la figure (2.7).

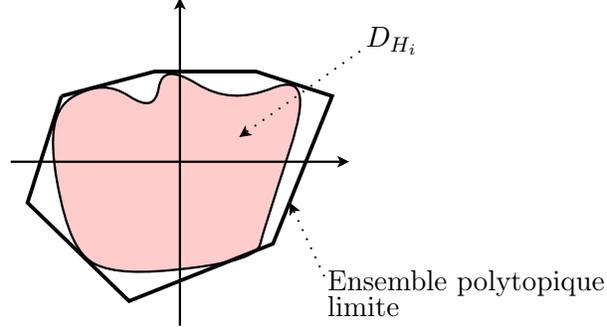


Figure 2.7 – Caractérisation de l'ensemble polytopique limite des fonctions de pondération

Utilisant ces notations, et l'ensemble polytopique limite, on arrive ainsi à relâcher les conditions de stabilisabilité. Ceci est énoncé dans le théorème que voici :

Théorème 2.4.1. [Bourdais et Perruquetti, 2007] *Le système à commutation (2.16), composé de $N = 2$ sous-systèmes, est stabilisable quadratiquement, par construction d'une loi de commande dépendant de l'état, s'il existe $q_1 \times q_2$ scalaires $\lambda_{ij} \in [0, 1]$ et une matrice définie positive P , tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, q_1\}, j \in \{1, \dots, q_2\}$, on ait*

$$\begin{aligned} & \left[\lambda_{ij} \left(\sum_{k=1}^{N_1} \Gamma_{ik}^1 A_{1k} \right) + (1 - \lambda_{ij}) \left(\sum_{k=1}^{N_2} \Gamma_{jk}^2 A_{2k} \right) \right]^T P \\ & + P \left[\lambda_{ij} \left(\sum_{k=1}^{N_1} \Gamma_{ik}^1 A_{1k} \right) + (1 - \lambda_{ij}) \left(\sum_{k=1}^{N_2} \Gamma_{jk}^2 A_{2k} \right) \right] < 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Démonstration. Comme dans la preuve proposée pour le théorème 2.3.3, l'idée va être d'obtenir une décomposition de l'espace d'état pour laquelle, dans chaque région, un des sous-systèmes vérifie des conditions relaxées de stabilité. Ces conditions sont détaillées dans le lemme suivant :

Lemme 2.4. [Blanco et al., 2001] *Considérons le modèle de Takagi-Sugeno suivant,*

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^r h_j(x) A_j x, \quad (2.29)$$

avec les notations suivantes⁴ : $H^T(x) \in \mathbb{R}^{N_r}$ le vecteur $H(x) = [h_1(x), \dots, h_r(x)]$, D_H le domaine $D_H = \{H(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Par le lemme 2.3, il existe q points, notés $\Gamma_k^T = [\Gamma_{k1}, \dots, \Gamma_{kr}]$, tels que tout point de D_H peut s'écrire comme une combinaison convexe de ces q points.

⁴Il s'agit en fait des mêmes notations que précédemment, adaptées au cas d'un système ordinaire.

Si pour $j \in I_r$, les matrices $Q_j = (A_j^T P + P A_j)$ vérifient

$$\sum_{k=1}^r \Gamma_{kj} Q_j < 0, \forall j \in I_q, \quad (2.30)$$

alors le système (2.29) est quadratiquement stable.

Si l'on procède maintenant à quelques manipulations sur l'équation (2.28), manipulations similaires à celles proposées dans la preuve du théorème 2.3.3, on aboutit alors au caractère vrai de l'une des deux assertions suivantes :

$$E_1(x) : x^T \left(\sum_{k=1}^{N_1} \Gamma_{ik}^1 (A_{1k}^T P + P A_{1k}) \right) x < -\epsilon x^T x, \forall i \in I_{q_1} \quad (2.31)$$

$$E_2(x) : x^T \left(\sum_{k=1}^{N_2} \Gamma_{jk}^2 (A_{2k}^T P + P A_{2k}) \right) x < -\epsilon x^T x, \forall j \in I_{q_2} \quad (2.32)$$

En notant Ω_i , l'ensemble $\Omega_i = \{x | E_i(x) \text{ est vrai}\}$, on peut alors garantir que $\mathbb{R}^n = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Il est, par suite, suffisant d'activer le sous-système (S_i) tant que l'état reste dans le domaine Ω_i . En effet, l'activation de (S_i) dans la région Ω_i fera décroître la fonction $V(x) = x^T P x$ le long des trajectoires, comme le prouve le lemme 2.4. Pour la loi de commande, l'algorithme 2.2 reste adéquat.

Le principal intérêt de ce théorème est que les conditions à vérifier sont moins restrictives que celles du théorème 2.3.3. Comme pour le théorème 2.3.3, celui-ci peut être généralisé au cas de N sous-systèmes.

Nous allons maintenant illustrer ce théorème, par l'exemple suivant :

Exemple 2.4. On considère ici le système à commutation composé des deux sous-systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \dot{x} = h_{11}(x)A_{11}x + h_{12}(x)A_{22}x = h_{11}(x) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x + h_{12}(x) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, \\ h_1(x), h_2(x) \geq 0.2, \end{cases} \quad (2.33)$$

$$(S_2) : \begin{cases} \dot{x} = A_2 x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x. \end{cases} \quad (2.34)$$

Regardons maintenant la différence entre les deux théorèmes proposés.

Le premier théorème 2.3.3 impose la recherche d'une matrice définie positive P et de coefficients $\lambda_{11}, \lambda_{21}$ tels que l'on ait :

$$\begin{cases} [\lambda_{11}A_{11} + (1 - \lambda_{11})A_2]^T P + P [\lambda_{11}A_{11} + (1 - \lambda_{11})A_2] < 0, \\ [\lambda_{21}A_{12} + (1 - \lambda_{21})A_2]^T P + P [\lambda_{21}A_{12} + (1 - \lambda_{21})A_2] < 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

D'un autre côté, le théorème 2.4.1 impose la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} [\lambda_{11}(0.2A_{11} + 0.8A_{12}) + (1 - \lambda_{11})A_2]^T P \\ \quad + P [\lambda_{11}(0.2A_{11} + 0.8A_{12}) + (1 - \lambda_{11})A_2] < 0, \\ [\lambda_{21}(0.8A_{11} + 0.2A_{12}) + (1 - \lambda_{21})A_2]^T P \\ \quad + P [\lambda_{21}(0.8A_{11} + 0.2A_{12}) + (1 - \lambda_{21})A_2] < 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

L'utilisation du logiciel Matlab, permet de trouver des couples de solutions pour le système (2.36), parmi elles, $P = I, \lambda_{11} = 0.6, \lambda_{21} = 0.9$. Par suite, si l'on utilise l'algorithme 2.2, on obtient alors la stabilité conditionnelle de notre système. Si, en revanche, on cherche à résoudre le système (2.35), il n'existe pas de solution. Cet exemple illustre ainsi l'avantage du théorème 2.4.1 sur le théorème 2.3.3. On peut d'ailleurs vérifier rapidement que si les conditions du premier théorème sont satisfaites, alors les conditions relâchées le sont aussi.

2.5 Extension aux systèmes contrôlés

Maintenant que nous avons vu comment le problème de la stabilisabilité a été abordé pour les systèmes à commutation non contrôlés, nous allons, dans cette partie, étudier comment adapter les théorèmes proposés aux systèmes contrôlés affines (2.8). Plus particulièrement, nous allons nous intéresser à deux cas particuliers de systèmes contrôlés : les systèmes commandés par retour d'état (RE) puis les systèmes contrôlés à compensation parallèle distribuée (PDC, de l'anglais Parallel Distributed Compensation).

2.5.1 Cas de la commande par retour d'état

Partons du système à commutation (2.8). Le problème est de construire un contrôle par retour d'état $u_\sigma = -K_\sigma x$ qui assure la stabilité conditionnelle du système en boucle fermée, et

ce par la construction d'un signal de commutation stabilisant. L'équation de notre système en boucle fermée peut être décrite par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{j=1}^{N_{\sigma(x,t)}} h_{\sigma(x,t)j}(x)(A_{\sigma(x,t)j} - B_{\sigma(x,t)j}K_{\sigma(x,t)})x, \\ \sum_{j=1}^{N_{\sigma(x,t)}} h_{\sigma(x,t)j}(x) = 1, \quad h_{\sigma(x,t)j}(x) \geq 0, \forall j \in I_{N_i}. \end{cases} \quad (2.37)$$

On peut constater alors que les théorèmes précédents s'adaptent parfaitement à ces systèmes, il suffit pour ce faire de remplacer les matrices A_{ij} par $(A_{ij} - B_{ij}K_i)$. Remarquons au passage que si l'on peut trouver une matrice K_i telle que l'un des sous-systèmes soit asymptotiquement stable, on retrouve alors le cas trivial énoncé par le théorème 2.3.2, et il suffit de laisser actif ce sous-système .

2.5.2 Le cas des systèmes PDC

Le principe d'une commande [Wang et al., 1996] est de créer un contrôleur qui terme à terme va être construit pour agir sur les matrices extrêmes. Pour un sous-système (S_i) , un contrôleur PDC peut être exprimé ainsi :

$$u_i = - \left(\sum_{j=1}^{N_i} h_{ij}(x)K_{ij} \right) x, \quad K_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n}, j \in I_{N_i}.$$

On peut donc par suite décrire un système à commutation contrôlé (2.8) par une commande PDC par l'équation (2.38).

$$\dot{x} = \left(\sum_{j=1}^{N_{\sigma}} \sum_{k=1}^{N_{\sigma}} h_{\sigma j}(x)h_{\sigma k}(x) (A_{\sigma j} - B_{\sigma j}K_{\sigma k}) \right) x. \quad (2.38)$$

Afin d'utiliser les théorèmes précédents, nous devons dans un premier temps réécrire l'équation (2.38) sous une forme polytopique. Pour ce faire, introduisons d'abord quelques notations supplémentaires. Pour un sous-système (S_i) , introduisons l'entier $s_i = N_i(N_i + 1)/2$. Puis pour tout $l \in I_{s_i}$, définissons les fonctions ξ_{il} et les matrices T_{il} par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_{i1}(x) = h_{i1}^2(x), & T_{i1} = (A_{i1} - B_{i1}K_{i1}), \\ \vdots & \vdots \\ \xi_{iN_i}(x) = h_{iN_i}^2(x), & T_{iN_i} = (A_{iN_i} - B_{iN_i}K_{iN_i}), \\ \xi_{iN_i+1}(x) = 2h_{i1}(x)h_{i2}(x), & T_{iN_i+1} = \frac{1}{2}(A_{i1} - B_{i1}K_{i2}) + \frac{1}{2}(A_{i2} - B_{i2}K_{i1}), \\ \vdots & \vdots \\ \xi_{is_i}(x) = 2h_{iN_i-1}(x)h_{iN_i}(x), & T_{is_i} = \frac{1}{2}(A_{iN_i-1} - B_{iN_i-1}K_{iN_i}) + \frac{1}{2}(A_{iN_i} - B_{iN_i}K_{iN_i-1}). \end{array} \right.$$

On peut donc réécrire le système (2.38) sous la forme suivant :

$$\dot{x} = \sum_{l=1}^{s_\sigma} \xi_{\sigma l}(x) T_{\sigma l} x. \quad (2.39)$$

On peut vérifier ainsi aisément que pour tout $i \in I_N$, les fonctions ξ_{il} vérifient la propriété de somme convexe, en utilisant le fait que pour tout $i \in I_N$ on ait

$$\sum_{l=1}^{s_i} \xi_{il}(x) = \left(\sum_{j=1}^{s_i} h_{ij}(x) \right) \left(\sum_{k=1}^{N_i} h_{ik}(x) \right) = 1.$$

On peut ainsi utiliser les théorèmes précédents pour le système (2.39).

Pour illustrer ce que nous venons de voir, nous proposons maintenant l'exemple suivant :

Exemple 2.5. *Considérons les deux sous-systèmes (S_1) et (S_2) décrits par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_1) : \dot{x} = \sum_{j=1}^2 h_{1j}(x)(A_{1j}x + B_{1j}u_1), \\ \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ (S_2) : \dot{x} = A_2(x) = \begin{pmatrix} -1.54 & 1.64 \\ 2.46 & -2.36 \end{pmatrix} x. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Une commande PDC adéquate pour le sous-système (S_1) peut être par exemple obtenue avec les matrices $K_{11} = [3 \ 0]$, $K_{12} = [0 \ 2]$.

Suivant le schéma indiqué, nous devons construire les matrices T_{1l} , $l \in I_3$, ce qui donne :

$$T_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{13} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

A partir de ce jeu de matrices, on peut vérifier que les matrices extrêmes T_{1l} , $l \in I_3$ ainsi que la matrice A_2 vérifient bien les conditions du théorème 2.3.3, et on peut donc exhiber une séquence de commutation qui assure la stabilité conditionnelle du système, en utilisant l'algorithme 2.2.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de la commande d'un système non linéaire à commutation par contrôle de la séquence de commutation. L'idée déployée a été de représenter chaque sous-système non linéaire, comme une somme polytopique non linéaire de systèmes linéaires.

Reporter les non linéarités sur les pondérations nous a permis d'étudier dans un premier temps le système à commutation par l'analyse des matrices extrêmes de la forme polytopique obtenue. Nous avons ainsi développé un théorème qui donne des conditions suffisantes tant pour garantir la stabilité conditionnelle que pour obtenir explicitement la loi de commande.

Pour réduire le conservatisme du théorème, nous avons, dans un second temps, relaxé les conditions requises en prenant en compte les fonctions de pondération de la forme polytopique. Nous avons enfin dans une dernière partie proposé des extensions de l'approche aux systèmes contrôlés.

Nous avons ici arrêté notre étude à la stabilité quadratique, mais l'étude de la stabilité non quadratique peut aussi permettre de construire des algorithmes de commande qui assurent la stabilité conditionnelle. C'est une des perspectives de travail que nous sommes en train d'approfondir dans ce domaine.

Par ailleurs, pour les modèles de Takagi–Sugeno, de nombreux autres résultats concernant la stabilité sont proposés pour des systèmes à commutation temps–discret [Kruszewski, 2006]. Pour ces systèmes, un théorème similaire peut être proposé, moyennant quelques modifications. Cependant, le nombre de résultats présents pour ces systèmes nous incite également à poursuivre davantage nos efforts pour relaxer encore les conditions.

Stabilisation uniforme

Le noir est l'uniforme de la démocratie.

— C. Baudelaire

Nous abordons dans ce chapitre le problème de la stabilisation uniforme d'un système à commutation. Nous proposons dans cette optique, une condition nécessaire et suffisante qui permette tant de garantir la stabilité de notre système en boucle fermée, que de déterminer la loi de commande correspondante. Notre approche repose sur une notion nouvelle : la fonction de Lyapunov contrôlée commune. Par suite, nous utilisons des travaux proposés par Lin–Sontag pour obtenir une loi de commande explicite, et dégageons un critère pour construire une telle fonction.



3.1 Introduction

Si dans le chapitre précédent, il était question de contrôler la séquence de commutation pour stabiliser notre système hybride, nous nous attaquons cette fois-ci à la ***stabilisation uniforme*** d'un système à commutation.

Le problème que l'on se pose est le suivant : à chaque instant la loi de commutation est *connue* mais on *ne peut pas* la contrôler. En revanche, on peut commander chacun des sous-systèmes. On sous-entend ici que si l'on considère un seul sous-système, il existe une loi de commande qui assure la stabilité asymptotique de l'origine. Mais comme nous l'avons déjà vu, si, pour des systèmes autonomes, la stabilité asymptotique de chacun des sous-systèmes est insuffisante pour garantir la stabilité uniforme, il en est de même avec la stabilisation.

Quelles conditions supplémentaires sur nos champs de vecteurs et sur nos contrôles sont

alors requises pour garantir la stabilisation uniforme de notre système à commutation ? C'est à cette question que se consacre ce chapitre. L'idée à développer est d'étendre les résultats obtenus pour les systèmes autonomes aux systèmes contrôlés.

Comme nous l'avons présenté dans notre état de l'art, deux méthodes ont été proposées : une approche par fonction de Lyapunov commune, et une approche par algèbre de Lie. Nous avons laissé de côté cette dernière, car outre son manque de robustesse, son extension aux systèmes contrôlés se limiteraient aux systèmes linéaires, or les systèmes que nous étudions ici sont non linéaires. C'est donc naturellement que notre choix s'est porté vers une adaptation des fonctions de Lyapunov commune. La base de notre travail est le théorème 1.3.7, proposé par Mancilla–Aguilar [Mancilla-Aguilar et García, 2000].

L'existence d'une fonction de Lyapunov commune étant une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes autonomes à commutation, l'idée que nous avons voulu développer est de pouvoir obtenir un théorème similaire dans le cadre des systèmes contrôlés à commutation, et c'est pour ce faire que nous avons introduit une notion nouvelle : la *fonction de Lyapunov contrôlée commune*.

Le chapitre est construit ainsi. Nous procédons dans la section 3.2 à un rappel des notations et définitions utilisées par la suite. Nous présentons dans la section 3.3 notre théorème sur la stabilisation des systèmes non linéaires à commutation. Par suite, nous explicitons dans la section 3.4 la loi de commande par retour d'état qui permet de stabiliser le système, et l'appliquons à un exemple académique. Notre théorème repose sur l'existence d'une fonction de Lyapunov contrôlée commune à tous les sous-systèmes, nous proposons dans la partie 3.5 une condition suffisante pour construire une telle fonction, à l'aide de plusieurs fonctions de Lyapunov contrôlées.

3.2 Notations et définitions

Si nous avons déjà abordé diverses définitions et notations relatives aux systèmes à commutation dans les pages précédentes, il va falloir pour bien comprendre le contenu de ce chapitre revenir plus précisément sur quelques notions mathématiques, quitte à faire quelques redites.

3.2.1 Prémises mathématiques

3.2.1.1 Espace topologique

Si \mathbb{R}^n est l'espace euclidien de dimension n , on note $\|\cdot\|_n$ sa norme. \mathcal{V} désigne un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^n .

Soit A un sous-espace d'un espace topologique. Par hypothèse, celui-ci est muni de la topologie induite. On note \bar{A} sa fermeture, $\overset{\circ}{A}$ son intérieur et $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ sa frontière.

On note $\epsilon \mathcal{B}^n$ la boule ouverte centrée en l'origine et de rayon ϵ . \mathcal{B}^n est la boule ouverte unité, et $\overset{\bullet}{\mathcal{B}}^n = \mathcal{B}^n \setminus \{0\}$ est la boule unité, privée de l'origine.

3.2.1.2 Fonctions

$C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ représente l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n , munie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ représente l'ensemble des fonctions différentiables dont les dérivées partielles sont continues.

Une fonction continue $\alpha : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite de *classe* \mathcal{K} si elle est strictement croissante et si $\alpha(0) = 0$. Elle est de *classe* \mathcal{K}_∞ si $a = +\infty$ et si $\alpha(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$.

Une *fonction multivaluée* Φ de \mathcal{X} vers \mathcal{Y} est une application qui à $x \in \mathcal{X}$ associe un ensemble $\Phi(x) \subset \mathcal{Y}$.

Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} deux espaces vectoriels et $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ une fonction multivaluée, Φ est *semi-continue inférieurement* si $\{x \in \mathcal{X} : \Phi(x) \cap O \neq \emptyset\}$ est un ouvert de \mathcal{X} pour tout sous-ensemble ouvert $O \subset \mathcal{Y}$.

Φ est *localement lipschitzienne* si pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(x_0) \subset \mathcal{X}$ et une constante $l \geq 0$ tels que pour tous $x, x' \in \mathcal{N}(x_0)$,

$$\Phi(x) \subset \Phi(x') + l \|x - x'\|_{\mathcal{X}} \mathcal{B}^{\mathcal{Y}},$$

où $\mathcal{B}^{\mathcal{Y}}$ est la boule unité dans \mathcal{Y} et $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ la norme sur \mathcal{X} .

Ces quelques rappels mathématiques donnés, nous allons maintenant revenir sur quelques notions propres aux systèmes à commutation.

3.2.2 Systèmes à commutation et fonctions de Lyapunov communes

Partons d'un ensemble d'index, $\Gamma \subset \mathbb{N}$, ou plus généralement *dénombrable*.

Nous allons dans un premier temps définir les deux ensembles suivants :

Définition 3.2.1 (Ensemble $\mathcal{P}(\Gamma)$). $\mathcal{P}(\Gamma)$ est l'ensemble $\{f_i \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : i \in \Gamma\}$ tel que,

- 1) $\mathcal{P}(\Gamma)$ est équiborné, i.e. $\sup_{i \in \Gamma} \|f_i(x)\|_n < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
- 2) $\mathcal{P}(\Gamma)$ est localement uniformément lipchitzien, i.e. pour tout $\delta \in \mathbb{N}$, il existe $l_\delta \geq 0$ tel que

$$\|f_i(x) - f_i(y)\|_n \leq l_\delta \|x - y\|_n,$$

pour tout $(x, y) \in \delta\mathcal{B}^n \times \delta\mathcal{B}^n$ et pour tout $i \in \Gamma$.

Définition 3.2.2 (Ensemble $\dot{\mathcal{P}}(\Gamma)$). $\dot{\mathcal{P}}(\Gamma)$ est l'ensemble $\{f_i \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n) : i \in \Gamma\}$ tel que,

- 1) $\dot{\mathcal{P}}(\Gamma)$ est équiborné,
- 2) $\dot{\mathcal{P}}(\Gamma)$ est localement uniformément lipchitzien en dehors de l'origine, i.e. pour tout $\delta \in \mathbb{N}$, il existe $l_\delta \geq 0$ tel que

$$\|f_i(x) - f_i(y)\|_n \leq l_\delta \|x - y\|_n,$$

pour tout $(x, y) \in \delta\dot{\mathcal{B}}^n \times \delta\dot{\mathcal{B}}^n$ et pour tout $i \in \Gamma$.

Remarquons au passage que les conditions (1) des deux définitions sont toujours vérifiées si l'ensemble d'index Γ est fini.

Les systèmes à commutation sur lesquels nous allons travailler sont contrôlés. Nous les définissons ainsi :

$$\dot{x} = f_\sigma(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\mathcal{B}^m}, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma). \quad (3.1)$$

Comme toujours, nous nous intéressons à l'équilibre de l'origine. Remarquons au passage que l'on considère ici, sans perte de généralité, la boule unité fermée $\overline{\mathcal{B}^m}$. En effet, on ne restreint pas le champ d'application, car tout ensemble compact peut être inclus dans une boule fermée, qui est topologiquement équivalente à la boule unité fermée. Ainsi, les résultats que nous allons proposer s'appliquent de manière générale à tout compact.

Venons-en maintenant à la définition de la stabilisation uniforme. Pour rester le plus rigoureux possible nous distinguons deux formes de stabilisabilité : la stabilisation faible et la stabilisation. Cette distinction explique la nécessité de définir les deux ensembles $\mathcal{P}(\Gamma)$ et $\dot{\mathcal{P}}(\Gamma)$, comme le suggère la définition que voici :

Définition 3.2.3. Soit $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$. Le système (3.1) est uniformément faiblement stabilisable (respectivement uniformément stabilisable), s'il existe un contrôle $u_\sigma \in \dot{\mathcal{P}}(\Gamma)$ (respectivement $u_\sigma \in \mathcal{P}(\Gamma)$) tel que le système en boucle fermée

$$\dot{x} = f_\sigma(x, u_\sigma(x)), \quad (3.2)$$

soit uniformément asymptotiquement stable.

On considère donc ici que même si l'on ne peut connaître à l'avance le signal de commutation, le contrôle que l'on propose commute suivant la même loi de commutation. Il s'agit d'une hypothèse classique faite dans l'étude des systèmes à commutation, dans laquelle les informations relatives aux commutations sont disponibles en temps réel pour la loi de commande.

Remarque 3.1. La différence entre stabilisation et stabilisation faible vient de la continuité du contrôle à l'origine. En effet, dans le cas de la stabilisation faible, le système en boucle fermée peut être discontinu à l'origine. Ce problème peut être résolu comme dans [Artstein, 1983]. En effet, le système en boucle fermée peut être étendu à un système asymptotiquement continu en raison de la propriété d'autonomie (le temps n'apparaît pas explicitement dans l'équation (3.2)). Le fait que le contrôle u_σ ne soit pas continu à l'origine pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$ ne pose pas de problème quant à l'unicité des solutions. Ceci peut se voir en regardant la définition de la stabilité asymptotique.

Revenons sur une des bases de l'automatique. Pour une EDO, la recherche d'une fonction de Lyapunov permet d'assurer la stabilité d'un point d'équilibre. Pour un système dynamique contrôlé, ce que l'on recherche est une fonction de Lyapunov contrôlée. Nous avons donné dans le chapitre 2 la définition d'une fonction de Lyapunov commune (voir section 1.3.2), et nous avons vu que son existence était nécessaire et suffisante pour la stabilité uniforme. Pourquoi ne pas essayer alors d'obtenir un résultat similaire pour les systèmes contrôlés à commutation ? C'est ainsi que nous avons défini la notion de fonction de Lyapunov contrôlée commune que voici :

Définition 3.2.4 (Fonction de Lyapunov contrôlée commune). [Bourdais et al., 2006a] Une fonction C^1 définie positive $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$, est une fonction de Lyapunov contrôlée commune pour le système (3.1) si, pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$

$$\min_{u \in B^m} \langle \nabla V(x), f_\sigma(x, u) \rangle < 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma).$$

Donnons également la *propriété de petit contrôle* :

Définition 3.2.5 (Propriété de petit contrôle). *Soit V , une fonction de Lyapunov contrôlée commune. Elle satisfait la propriété de petit contrôle si, pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x \in \delta\mathcal{B}^n \subset \mathcal{V}$, alors il existe $u \in \epsilon\mathcal{B}^m$ tel que*

$$\langle \nabla V(x), f_\sigma(x, u) \rangle < 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma).$$

Évidemment, il serait trop simple de ne donner qu'une définition pour garantir la stabilisabilité de notre système hybride. Nous allons voir dans la partie suivante quel est le rôle d'une telle fonction.

3.3 Une condition nécessaire et suffisante pour le problème de stabilisation

Si le titre de cette section ne ménage pas le suspense, nous allons essayer de comprendre les diverses étapes qui ont permis d'obtenir un tel résultat, et à quel prix.

Rappelons que pour la stabilité des systèmes dynamiques à commutation, Mancilla et Aguilar ont proposé une condition nécessaire et suffisante (voir théorème 1.3.7).

L'extension aux systèmes contrôlés a été possible, grâce notamment au théorème de Mickael, dont la preuve a été donnée dans [Aubin et Frankowska, 1990, théorème 9.5.3]. Son énoncé est le suivant :

Théorème 3.3.1 (de Mickael). *[Mickael, 1956] Soient deux espaces métriques \mathcal{X} et \mathcal{Y} , pour toute fonction multivaluée semi-continue inférieurement (respectivement localement lipschitzienne) $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$, $x \mapsto \Phi(x)$ où $2^{\mathcal{Y}}$ désigne la famille des sous-ensembles non-vides, fermés et convexes de \mathcal{Y} , il est possible d'extraire une fonction continue (respectivement localement lipschitzienne) f telle que $f(x) \in \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.*

Afin de pouvoir appliquer le théorème de Mickael, nous devons restreindre notre étude aux systèmes contrôlés, affines en u , qui se définissent par l'équation :

$$\dot{x} = f_\sigma(x) + g_\sigma(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma), \quad (3.3)$$

dans laquelle les champs de vecteur $f_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{P}(\Gamma)$, et bien évidemment, $f_i(0) = 0$ pour tout $i \in \Gamma$.

Pour une meilleure compréhension, nous introduisons quelques notations supplémentaires. Pour une fonction C^1 définie positive V on notera :

$$\begin{aligned} a_i(x) &= \langle \nabla V(x), f_i(x) \rangle, \\ B_i(x) &= \langle \nabla V(x), g_i(x) \rangle \in \mathbb{R}^m, \\ b_i &= \|B_i(x)\|_m^2. \end{aligned}$$

Remarque 3.2. *Si $m = 1$, la propriété de petit contrôle est équivalente à :*

$$\limsup_{\|x\|_n \rightarrow 0} \frac{a_\sigma(x)}{|B_\sigma(x)|} \in \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{-\infty\} \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{S}(\Gamma).$$

Le théorème suivant énonce le principal résultat de ce chapitre. Son intérêt est double : il donne une condition *nécessaire et suffisante* de stabilisation, et contrairement aux divers outils présentés dans notre premier chapitre, comme par exemple les fonctions multiples de Lyapunov, les conditions à vérifier **ne font pas appel** aux *trajectoires* du système dynamique, qui dans un cadre non linéaire, sont loin d'être connues.

Théorème 3.3.2. *[Moulay et al., 2006a] Le système (3.3) est uniformément faiblement stabilisable si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov contrôlée commune V pour le système (3.3).*

En outre, si V vérifie la propriété de petit contrôle, le système (3.3) est uniformément stabilisable.

Démonstration. Sens 1. Si le système contrôlé (3.3) est uniformément faiblement stabilisable alors le système en boucle fermée

$$\dot{x} = f_\sigma(x) + g_\sigma(x)u_\sigma(x), \tag{3.4}$$

est uniformément asymptotiquement stable. En utilisant le théorème 1.3.7, il existe V , une fonction de Lyapunov commune pour le système en boucle fermée (3.4). Il est alors évident que V est une fonction de Lyapunov contrôlée commune pour le système (3.3).

Sens 2.

Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov contrôlée commune $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ pour le système (3.3). Soit $\sigma \in \mathcal{S}(\Gamma)$, introduisons la fonction multivaluée Φ_σ définie pour $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ par

$$\Phi_\sigma(x) = \{v \in \overline{\mathcal{B}^m} : a_\sigma(x) + \langle B_\sigma(x), v \rangle < 0\}.$$

La fonction $v \mapsto a_\sigma(x) + \langle B_\sigma(x), v \rangle$ est affine, ceci implique que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $\Phi_\sigma(x)$ appartient à la famille des sous-ensembles non vides, fermés et convexes de $\overline{\mathcal{B}^m}$ pour la topologie induite.

Comme f_σ et g_σ appartiennent à la classe $\mathcal{P}(\Gamma)$ et comme V est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , $a_\sigma(x) + \langle B_\sigma(x), v \rangle$ est localement lipchitzienne pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. On peut alors utiliser le théorème 3.3.1 de Mickael pour trouver une fonction u_σ localement lipchitzienne pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ telle que $u_\sigma(x) \in \Phi_\sigma(x)$.

Étant donné que $u_\sigma(\mathcal{V}) \subset \overline{\mathcal{B}^m}$, on peut finalement déduire que $f_\sigma + g_\sigma u_\sigma$ appartient à $\dot{\mathcal{P}}(\Gamma)$. Par suite, le système (3.3) est alors faiblement stabilisable par le retour d'état u_σ .

De plus, si V satisfait la propriété de petit contrôle, il est démontré dans [Artstein, 1983, Theorem 4.3] que l'on peut étendre Φ_σ sur \mathcal{V} par $\Phi_\sigma(0) = \{0\}$ telle que Φ_σ soit maintenant semi-continue inférieurement sur \mathcal{V} . En appliquant le théorème 3.3.1 de Mickael, il existe $u_\sigma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ qui stabilise le système (3.3).

Nous avons donc obtenu une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir garantir la stabilisabilité d'un système à commutation, non linéaire et contrôlé. La question que l'on peut naturellement se poser est la suivante : si l'on sait désormais que l'on peut stabiliser le système, comment déterminer alors la loi de commande correspondante ? C'est ici tout l'intérêt de la partie suivante.

3.4 Une formule explicite de la loi de commande

Regardons dans cette section comment utiliser une fonction de Lyapunov contrôlée commune pour déterminer une loi de commande qui assure la stabilité du système en boucle fermée. Une fois la formule explicite donnée, nous illustrons notre démarche par un exemple.

3.4.1 Le contrôle par retour d'état de Lin–Sontag

L'idée développée est d'utiliser la loi de commande proposée par Lin-Sontag [Lin et Sontag, 1991] pour la stabilisation par contrôle borné, adaptée aux systèmes à commutation. Ceci nous amène au théorème suivant :

Théorème 3.4.1. [Moulay et al., 2006b] Si V est une fonction de Lyapunov contrôlée commune pour le système (3.3), alors le contrôle par retour d'état

$$u_\sigma(x) = \begin{cases} -\frac{a_\sigma(x) + \sqrt{a_\sigma(x)^2 + b_\sigma(x)^2}}{b_\sigma(x)(1 + \sqrt{1 + b_\sigma(x)})} B_\sigma^T(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad (3.5)$$

appartient à $C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \overline{\mathcal{B}^m})$ et stabilise faiblement le système (3.3).

De plus, si V satisfait la propriété de petit contrôle, alors le contrôle par retour d'état (3.5) est aussi continu à l'origine, et de ce fait, il stabilise le système (3.3).

Démonstration. La preuve découle de celle proposée par Lin et Sontag dans [Lin et Sontag, 1991]. Remarquons juste que si V appartient à $C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \overline{\mathcal{B}^m})$, alors le contrôle u_σ appartient alors à $C^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \overline{\mathcal{B}^m})$.

Afin d'illustrer ce théorème, nous proposons dans la partie suivante de l'appliquer à un exemple certes académique mais qui permettra de bien comprendre les idées présentées.

3.4.2 Un exemple académique

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-x_2 + u}{1+k} \end{cases}, \quad (3.6)$$

dans lequel $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, $u \in \mathbb{R}$.

Nous proposons ici la fonction de Lyapunov contrôlée commune candidate : $V = \frac{x_1^2 + (x_1^2 + x_2)^2}{2}$. Vérifions rapidement qu'il s'agit d'une candidate acceptable.

On a

$$\dot{V}(x) = x_1^2 x_2 + (x_2 + x_1^2) \left(2x_1^2 x_2 - \frac{x_2 + u}{1+k} \right),$$

d'où

$$a_k(x) = x_1^2 x_2 + (x_2 + x_1^2) \left(2x_1^2 x_2 - \frac{x_2}{1+k} \right),$$

$$B_k(x) = \frac{x_1^2 + x_2}{1+k},$$

Il est évident que V est bien une fonction de Lyapunov contrôlée commune. En effet, pour $x \neq 0$, $B_k(x) = 0$ implique $a_k(x) = -x_1^4 < 0$.

Par ailleurs, on a

$$a_k(x) = -\frac{x_2^2}{1+k} - 2x_1^4 B_k(x) + 2(x_1 B_k(x)(1+k))^2.$$

Ceci implique, d'après la remarque 3.2, que la propriété de petit contrôle est vérifiée.

Ainsi, le système est stabilisable par le retour d'état suivant :

$$u_k(x) = \begin{cases} -\frac{a_k(x) + \sqrt{a_k(x)^2 + b_k(x)^2}}{b_k(x)(1 + \sqrt{1 + b_k(x)})} B_k^T(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

La figure 3.1 représente le portrait de phase du système (3.6) par le retour d'état (3.7), obtenu par simulation.

Les diverses courbes de la figure 3.7 ont été obtenues pour une même séquence de commutation, représenté par la figure 3.2.

Regardons maintenant ce qu'il en est pour divers scénarios. Nous avons ici fait d'autres simulations avec divers lois de commutation, plus lentes (figures 3.2 et 3.3) et d'autres plus rapides (figures 3.4 et 3.5). On obtient alors les trajectoires présentées par la figure 3.6, des résultats qui sont satisfaisants.

Cependant, expliciter la loi de commande repose sur l'existence d'une fonction de Lyapunov contrôlée commune à tous les sous-systèmes. Or, pratiquement, il est difficile de trouver une telle fonction. La partie suivante propose des conditions suffisantes à vérifier pour construire une fonction de Lyapunov contrôlée commune à partir d'un ensemble de plusieurs fonctions de Lyapunov contrôlées, dans lequel chacune est associée à un sous-système.

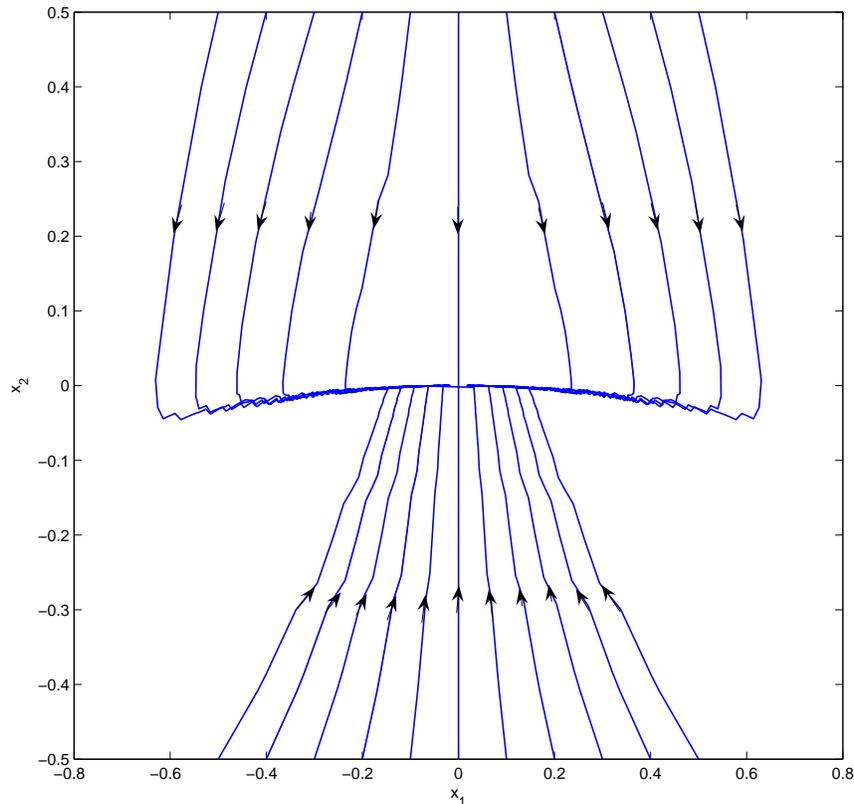


Figure 3.1 – Portrait de phase du système (3.6) contrôlé par (3.7)

3.5 Une condition suffisante pour construire une fonction commune

Une condition nécessaire à la stabilisation uniforme est évidemment que chacun des sous-systèmes soit stabilisable. On peut naturellement supposer que chacun des sous-systèmes dispose d'une fonction de Lyapunov contrôlée. L'idée présentée ici est une méthode constructive pour obtenir une fonction de Lyapunov contrôlée commune, à partir d'une famille de fonction de Lyapunov. Nous supposons en outre, contrairement à ce qui a été vu dans ce chapitre que Γ est un ensemble *fini* d'index.

On considère la famille de systèmes dynamiques

$$\dot{x} = f_i(x) + g_i(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\mathcal{B}^m}, i \in \Gamma, \quad (3.8)$$

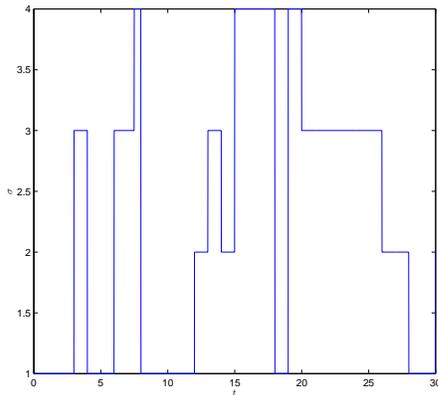


Figure 3.2 – Loi de commutation σ_1

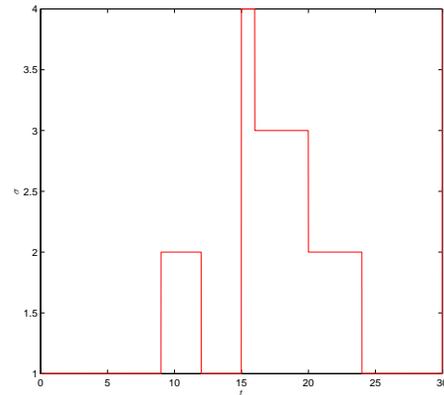


Figure 3.3 – Loi de commutation σ_2

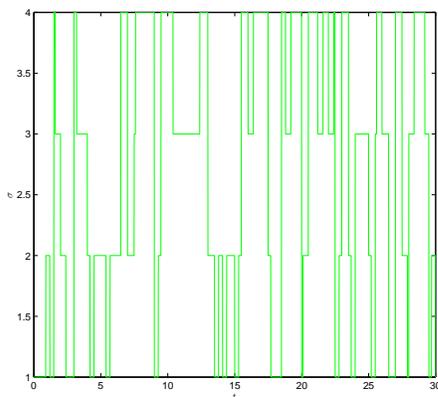


Figure 3.4 – Loi de commutation σ_3

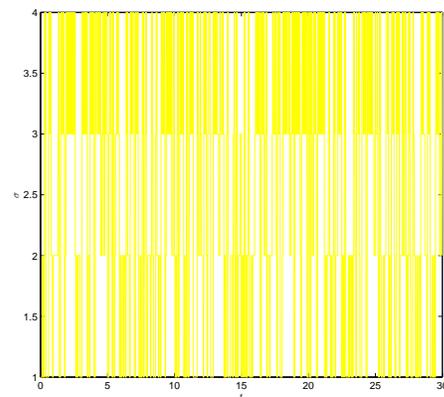


Figure 3.5 – Loi de commutation σ_4

dans laquelle on suppose que pour tout $i \in \Gamma$, les fonctions f_i et g_i sont localement lipchitziennes.

Revenons dans un premier temps à la notion de fonction de Lyapunov contrôlée pour un sous-système de la famille 3.8.

Définition 3.5.1. Soit $i \in \Gamma$. Une fonction définie positive $V_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ propre, de classe C^1 est une fonction de Lyapunov contrôlée pour le sous-système

$$\dot{x} = f_i(x) + g_i(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \overline{\mathcal{B}^m},$$

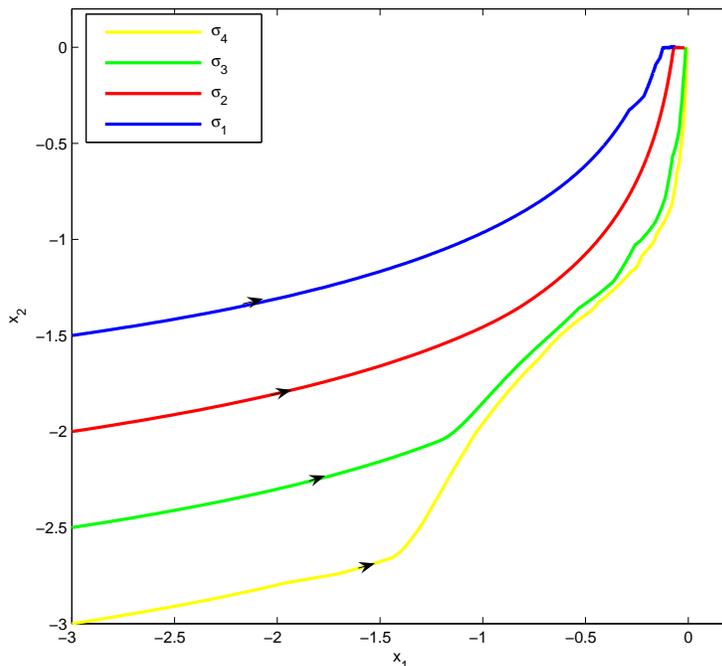


Figure 3.6 – Portrait de phase du système (3.6) contrôlé par (3.7)

si pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$

$$\min_{u \in \mathcal{B}^m} \langle \nabla V_i(x), f_i(x) + \langle g_i(x), u \rangle \rangle < 0. \quad (3.9)$$

Comme la fonction $u \rightarrow \langle \nabla V_i(x), f_i(x) + \langle g_i(x), u \rangle \rangle$ est continue sur l'ensemble compact $\overline{\mathcal{B}^m}$, pour tout $x \in \mathcal{V}$ il existe un ensemble ouvert, non vide $\mathcal{U}_i(x) \subset \overline{\mathcal{B}^m}$ tel que

$$\langle \nabla V_i(x), f_i(x) + \langle g_i(x), u \rangle \rangle < 0,$$

pour tout $u \in \mathcal{U}_i(x)$. Par la suite, on notera cet ensemble $\mathcal{U}_i(x)$.

Nous allons maintenant proposer un critère permettant d'expliciter une fonction de Lyapunov contrôlée commune à partir des fonctions de Lyapunov contrôlées attachées aux sous-systèmes.

Théorème 3.5.1. [Bourdais et al., 2006b] Soit la fonction $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle que $\gamma(\mathbb{R}_+^n) \subseteq \mathbb{R}_+$ et telle que $\nabla_j \gamma(V_1(x), \dots, V_n(x)) > 0$, pour tout $j \in \Gamma$.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) pour tout $i \in \Gamma$, $V_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de Lyapunov contrôlée pour le système $\dot{x} = f_i(x) + g_i(x)u$,
- 2) pour tout $i \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, il existe $u_0 \in \mathcal{U}_i(x)$ tel que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j \in \Gamma \\ j \neq i}} \langle \nabla_j \gamma(V_1(x), \dots, V_n(x)) \nabla V_j(x), f_i(x) + g_i(x)u_0 \rangle \\ & < - \langle \nabla_i \gamma(V_1(x), \dots, V_n(x)) \nabla V_i(x), f_i(x) + g_i(x)u_0 \rangle, \end{aligned}$$

alors $V(x) = \gamma(V_1(x), \dots, V_n(x))$ est une fonction de Lyapunov contrôlée commune pour le système à commutation construit à partir de la famille (3.8), et le contrôle par retour d'état est donné par :

$$u_i(x) = \begin{cases} -\frac{a_i(x) + \sqrt{a_i(x)^2 + b_i(x)^2}}{b_i(x)(1 + \sqrt{1 + b_i(x)})} B_i^T(x) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

où :

$$\begin{aligned} a_i(x) &= \langle \nabla V(x), f_i(x) \rangle, \\ B_i(x) &= \langle \nabla V(x), g_i(x) \rangle \in \mathbb{R}^m, \\ b_i &= \|B_i(x)\|_m^2. \end{aligned}$$

De plus, si pour tout $i \in \Gamma$, V_i satisfait la propriété de petit contrôle, alors V satisfait également cette propriété, et le contrôle par retour d'état (3.10) est continu à l'origine.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $i \in \Gamma$. Supposons qu'il existe γ répondant aux conditions de l'algorithme, on a :

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), f_i(x) + g_i(x)u \rangle &= \left\langle \sum_{j \in \Gamma} \nabla_j \gamma(\widehat{V}(x)) \nabla V_j(x), f_i(x) + g_i(x)u \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_i \gamma(\widehat{V}(x)) \nabla V_i(x), f_i(x) + g_i(x)u \right\rangle + \sum_{\substack{j \in \Gamma \\ j \neq i}} \left\langle \nabla_j \gamma(\widehat{V}(x)) \nabla V_j(x), f_i(x) + g_i(x)u \right\rangle, \end{aligned}$$

avec $\widehat{V}(x) = (V_1(x), \dots, V_n(x))$.

En utilisant l'hypothèse (2), on sait qu'il existe $u_0 \in \mathcal{U}_i(x)$ tel que

$$\sum_{j \in \Gamma} \langle \nabla_j \gamma(V_1(x), \dots, V_n(x)) \nabla V_j(x), f_i(x) + g_i(x)u_0 \rangle < 0.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\min_{u \in \mathcal{B}^m} \langle \nabla V(x), f_i(x) + g_i(x)u \rangle < 0.$$

Par conséquent V est une fonction de Lyapunov contrôlée commune pour le système à commutation construit à partir de la famille (3.8)

En utilisant le théorème 3.4.1, le contrôle par retour d'état (3.10) stabilise ce système.

Pour la propriété de petit contrôle, la preuve découle de la définition (3.2.4).

Par exemple, on peut choisir $\gamma(x) = \sum_{i \in \Gamma} x_i$ qui donne la fonction de Lyapunov contrôlée commune $V(x) = \sum_{i \in \Gamma} V_i(x)$. Cependant, la fonction γ peut être parfois difficile à construire. Comme premières pistes, on peut tester une combinaison linéaire des fonctions de Lyapunov, puis des fonctions plus complexes en introduisant des termes croisés ou des exponentielles.

Afin d'illustrer ce théorème, nous proposons maintenant de l'appliquer à l'exemple suivant.

Exemple 3.1. *On considère le système qui commute entre les deux sous-systèmes suivants :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + ux_2 \end{cases}. \quad (S_2)$$

Les deux fonctions de Lyapunov contrôlées candidates sont : $V_1(x) = x_1^2 + x_2^2$ pour (S_1) et $V_2(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ pour (S_2) .

Soient $(i, j) \in \{1, 2\}^2$. Notons

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &= \langle \nabla V_i(x), f_j(x) \rangle, \\ B_{ij}(x) &= \langle \nabla V_i(x), g_j(x) \rangle, \end{aligned}$$

où f_j et g_j sont les composantes du système S_j . On a :

$$\begin{aligned} a_{11}(x) &= -2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2, & B_{11}(x) &= 2x_2, \\ a_{21}(x) &= 3x_1(x_2 - x_1), & B_{21}(x) &= 2(x_2 - x_1), \\ a_{12}(x) &= 0, & B_{12}(x) &= 2x_2^2, \\ a_{22}(x) &= -2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2, & B_{22}(x) &= 2x_2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $x \neq 0$, $B_{ii}(x) = 0$ implique bien que $a_{ii}(x) < 0$, ce qui montre que V_i est une fonction de Lyapunov contrôlée pour le système (S_i) . Comme $a_{12} = 0$, et comme $B_{21}(x) = 0$ implique $a_{21}(x) = 0$, on en déduit que pour $i \neq j$ V_i n'est pas une fonction de Lyapunov contrôlée pour le système (S_j) .

On vérifie les conditions du critère 3.5.1 avec la fonction $\gamma(x) = x_1 + x_2$ pour construire notre fonction de Lyapunov commune.

On a alors à vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $a_{11}(x) + a_{21}(x) < 0$ quand $b_{11}(x) + b_{21}(x) = 0$ et $a_{22}(x) + a_{12}(x) < 0$ quand $b_{22}(x) + b_{12}(x) = 0$. Ce qui donne :

- $b_{11}(x) + b_{21}(x) = 4x_2 - 2x_1 = 0$ pour $x_1 = 2x_2$, ce qui implique que $a_{11}(x) + a_{21}(x) = -6x_2^2$ qui est donc strictement négatif.
- $b_{22}(x) + b_{12}(x) = 2x_2(2x_2 - x_1) = 0$ pour $x_2 = 0$ ou $x_1 = 2x_2$, ce qui implique pour si $x_2 = 0$, $a_{22}(x) + a_{12}(x) = -2x_1^2$ et pour $x_1 = 2x_2$, $a_{22}(x) + a_{12}(x) = -8x_2^2$. La condition est vérifiée.

Ainsi la fonction $V = V_1 + V_2$ est par conséquent une fonction de Lyapunov contrôlée commune pour le système à commutation sur tous les ensembles compacts

$$I_c = \{V(x) \leq c\},$$

avec $c > 0$. En effet, tous les I_c sont invariants et attractifs, et l'état du système et le contrôle y sont bornés. Le contrôle par retour d'état (3.10) permet ainsi de stabiliser le système. La figure 3.7 présente le portrait de phase du système en boucle fermée en fonction de différentes conditions initiales pour la loi de commutation σ_1 , représentée par la figure 3.8, et la figure 3.12 présente les trajectoires pour différents signaux de commutation.

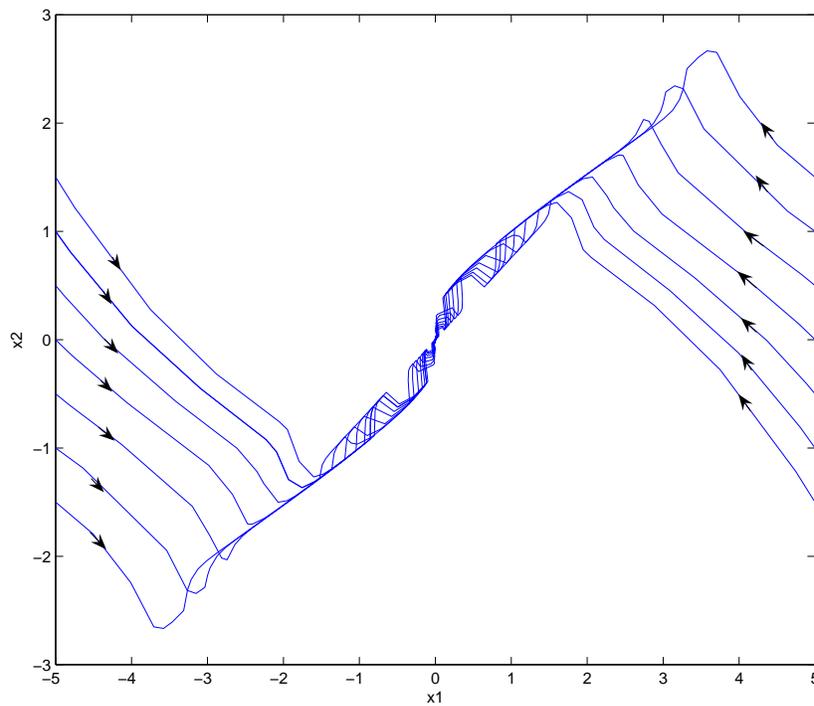
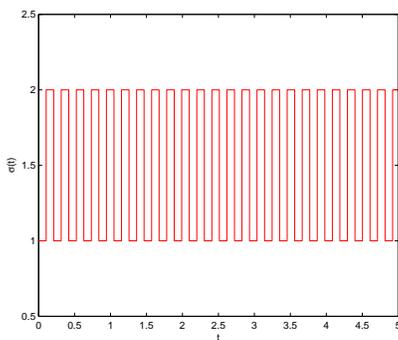
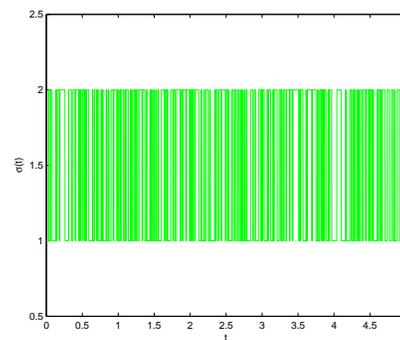


Figure 3.7 – Portrait de phase du système en boucle fermée

Figure 3.8 – Loi de commutation σ_1 Figure 3.9 – Loi de commutation σ_2

3.6 Conclusion

Revenons un instant sur ce que nous avons développé dans ce chapitre. La problématique fixée était de trouver des conditions assurant la stabilisation uniforme d'un système à commutation. Pour ce faire, nous avons introduit dans un premier temps une nouvelle notion, à savoir

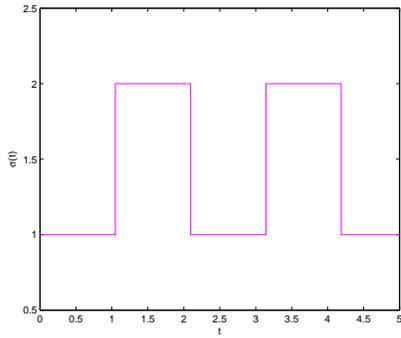


Figure 3.10 – Loi de commutation σ_5

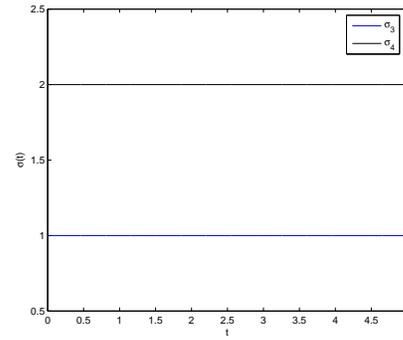


Figure 3.11 – Lois de commutation σ_3
 et σ_4

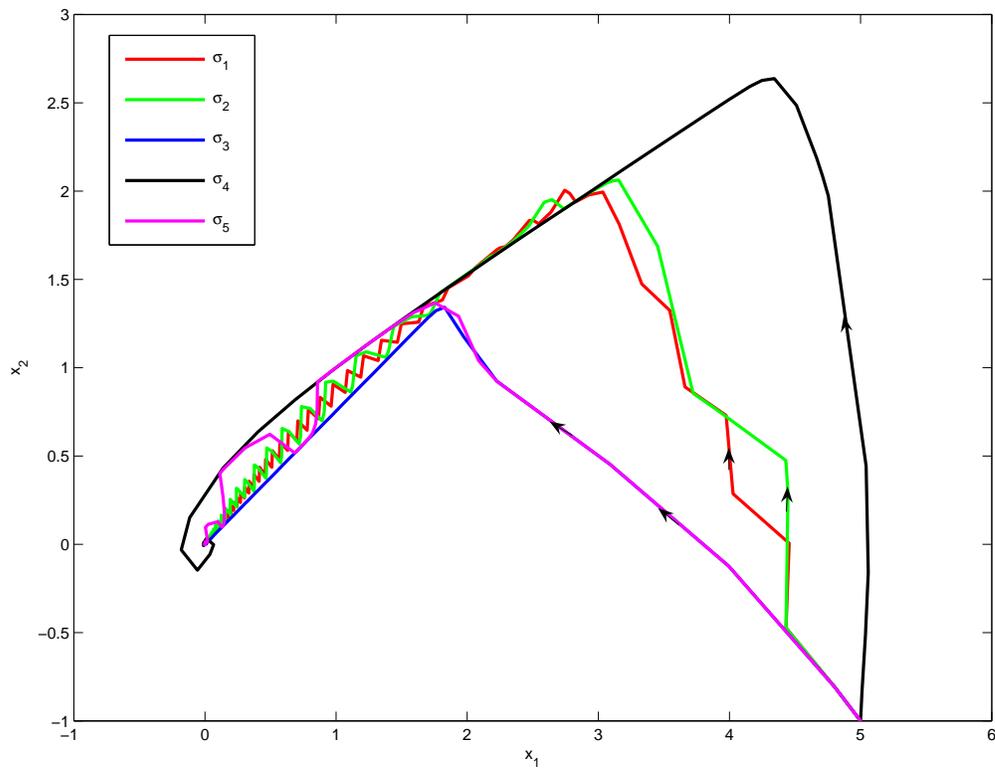


Figure 3.12 – Portrait de phase pour différents signaux commutants

une fonction de Lyapunov contrôlée commune. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante de stabilisation uniforme a pu être déterminée, que nos systèmes soient linéaires ou non linéaires. L'idée est de prouver l'existence d'une telle fonction.

Si par chance, on peut exhiber une fonction de Lyapunov contrôlée commune, une adaptation du contrôle proposé par Lin–Sontag permet alors d'obtenir une loi de commande qui stabilise uniformément notre système. Cependant, une telle fonction est difficile à trouver en pratique. C'est pourquoi, nous avons dans un second temps présenté un critère permettant de construire une fonction de Lyapunov commune à partir de famille de fonctions de Lyapunov contrôlées, associées à chacun des sous-systèmes.

Pour un système dynamique, il existe un lien direct entre fonction de Lyapunov contrôlée et la commande optimale. Une des perspectives de travail est d'utiliser cette approche pour pouvoir résoudre des problèmes de commande optimale pour les systèmes à commutation.

Par ailleurs, le fait de construire un contrôle qui soit valable quelle que soit la loi de commutation est une condition très forte qui restreint la classe du système pouvant être traitée. Une étude réduite à certains signaux de commutation pourrait peut-être permettre d'obtenir des résultats plus souples. C'est pourquoi dans la partie suivante, nous proposons un modèle formel pour représenter un ensemble de lois de commutation, basé sur des réseaux de Petri temporels.

Systemes à commutations restreintes

Il faut reconstruire son monde pierre par pierre.

— J. Wassermann¹

DANS ce chapitre, nous nous intéressons à la stabilité et la stabilisabilité d'un système à commutation, dont les séquences de commutation *respectent des contraintes temporelles et ne sont pas quelconques*. Pour ce faire, l'idée développée est d'introduire dans un premier temps un modèle formel hybride pour décrire un tel système. La partie discrète, représentée par un réseau de Petri temporel, caractérise ainsi un ensemble de séquences de commutation admissibles, tout en étant complètement *découplée* de la partie continue. Une loi de commutation est par suite donnée par une séquence de tir dans le graphe de classes d'état. A plus long terme, un tel outil peut permettre l'étude des propriétés de stabilité et de stabilisabilité, restreintes à cet ensemble.



4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons abordé le problème de la commande des systèmes à commutation sous deux formes distinctes : par contrôle des commutations et par contrôle des champs de vecteurs. La première étude a conduit à trouver des conditions suffisantes pour garantir la stabilité *conditionnelle* de notre système, tandis que dans la seconde, nous avons dégagé une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation *uniforme*.

¹Jacob Wassermann (auteur allemand du début du 20e siècle), *Joseph Kerkhoven*, éditions mémoire du livre, Paris, 2002, p.202.

Cependant, dans le cas où un phénomène réel est modélisé par un système à commutation, seules quelques séquences de commutation sont permises. Par conséquent, l'étude de la stabilité uniforme peut amener à trouver des critères trop contraignants, alors qu'une étude réduite à un ensemble de scénarios admissibles pourrait être suffisante pour garantir la stabilité du système hybride. De même, pour les problèmes de stabilité conditionnelle, on peut arriver à exhiber une séquence de commutation qui théoriquement est adéquate, mais qui n'est pas en cohérence avec le système réel. Il devient donc légitime d'étudier non plus tout l'ensemble des lois de commutation mais uniquement un ensemble réduit de séquences admissibles. Le problème qui se pose alors est de savoir comment représenter ces restrictions, ce qui sous-entend un travail de modélisation : quel modèle choisir (ou définir) pour représenter au mieux un ensemble de contraintes sur les lois de commutation ?

Pour formaliser cet ensemble, l'idée présentée dans ce chapitre est d'introduire un modèle discret qui puisse caractériser *toutes* les évolutions *admissibles* entre les différentes dynamiques du système considéré. Si ceci a été suggéré dans [Sun et Ge, 2005], dans lequel les auteurs utilisent un automate hybride pour décrire les scénarios admissibles, le modèle proposé se cantonne à des contraintes non temporelles. Par ailleurs, on pourrait rapidement proposer un modèle de type automate hybride, comme le proposent divers auteurs dans [Lygeros et al., 2003, Goebel et al., 2004], mais les études présentées sont limitées à des cas déterministes.

Dans ce chapitre, ce problème est abordé par l'introduction d'un réseau de Petri temporel pour caractériser les signaux de commutation. L'utilisation d'un tel formalisme présente deux grands avantages.

- D'un côté les problèmes de parallélisme, synchronisation, partage de ressources, peuvent être explicitement représentés, et de ce fait, on n'est pas limité à un modèle déterministe.
- De l'autre les résultats théoriques autour de cet outil sont nombreux, et on peut ainsi l'exploiter pour l'analyse de diverses propriétés.

L'aspect temporel permet quant à lui d'introduire des contraintes supplémentaires sur les commutations, notamment le temps minimum et temps maximum entre deux commutations. La combinaison d'un réseau de Petri temporel avec une famille de systèmes dynamiques conduit à définir un système hybride.

Les premières définitions formelles de systèmes hybrides basées sur un réseau de Petri ont été introduites par David et Alla dans [David et Alla, 1987], et un état de l'art ainsi que de nombreuses références sont présentés dans [David et Alla, 2004]. Pour représenter certains phénomènes particuliers, quelques extensions ont également été proposées, comme par exemple les réseaux de Petri différentiels présentés dans [Demongodin et Koussoulas, 1996] et [Demongodin et Koussoulas, 1998], les réseaux de Petri hybrides de haut niveau introduits dans

[Wieting et Sonnenschein, 1995], les réseaux de Petri fluides [Silva et Recalde, 2004],...

Cependant, ces modèles, qui étendent un modèle discret vers un modèle hybride ne peuvent être utilisés que lorsque la partie continue du processus est très simple. Pour des procédés dont les complexités, discrète et continue, sont équivalentes, R. Champagnat propose les réseaux de Petri Prédicats Transitions Différentiels [Champagnat, 1998]. Mais dès l'introduction de prédicats sur l'état, ces réseaux de Petri ne sont plus autonomes, et leur analyse devient bien plus délicate, compte-tenu de l'explosion combinatoire de l'espace d'état. C'est pourquoi nous avons choisi une représentation certes hybride mais dans laquelle la partie discrète est complètement *découplée* de la partie continue.

Afin d'illustrer notre approche, nous proposons l'exemple introductif suivant 4.1.

Exemple 4.1. Reprenons notre système présenté dans la section 1.2.3, à savoir le système à commutation composé des sous-systèmes $(S_i) : \dot{x} = A_i x, i \in \{1, 2\}$ avec $x \in \mathbb{R}^2$ et

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà vu que chaque sous-système (S_i) est asymptotiquement stable pour $i = 1, 2$: ($\text{spec}(A_i) = \{-1 \pm 10i\sqrt{10}\}$), mais que si l'on étudie l'évolution de ce système, régie par la loi de commutation suivante $\sigma(x) \in \mathcal{S}(\Gamma) : i = 1$ si $x_1 x_2 \leq 0$ et $i = 2$ si $x_1 x_2 > 0$, le système devient alors instable, comme l'illustre la figure 4.1. Par conséquent, le système à commutation n'est pas uniformément stable.

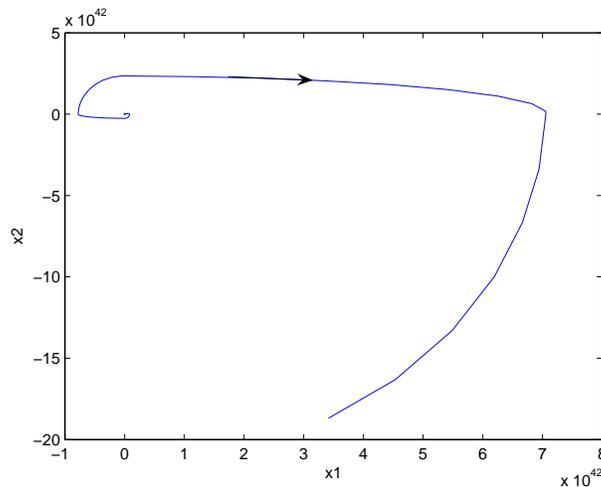


Figure 4.1 – Instabilité du système à commutation

Mais si l'on regarde maintenant le même système avec des commutations contraintes (existence d'un temps minimum entre deux commutations, délai imposé, . . .), peut-on alors garantir les mêmes propriétés ?

Réduisons par exemple la classe des signaux admissibles aux signaux dont les instants de commutations $\theta_1, \theta_2, \dots$ vérifient l'inéquation $\theta_{i+1} - \theta_i \geq 1$, pour tout i , et notons $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma) \subset \mathcal{S}(\Gamma)$ cet ensemble. Le réseau de Petri temporel de la figure 4.2 représente cette condition, en supposant que le tir de t_i active le sous-système (S_i). En respectant cette condition, on peut alors garantir que pour tout signal commutant $\sigma \in \mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$, le système à commutation est asymptotiquement stable (voir chapitre 1.3.4.1, partie B, avec l'introduction du « dwell-time »).

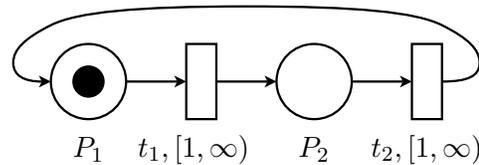


Figure 4.2 – Un réseau de Petri temporel pour caractériser les séquences de commutation

L'idée développée est de donner une caractérisation formelle de ces contraintes, en utilisant un réseau de Petri temporel [Merlin, 1974]. Par suite, une étude du graphe des classes d'état résultant [Berthomieu et Menasche, 1982, Berthomieu et Diaz, 1991] permet de définir proprement l'ensemble des séquences admissibles $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$. Le travail de modélisation n'a pour but que de rendre possible l'analyse des propriétés du système hybride dont les signaux de commutation respectent l'ensemble $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$.

Le chapitre est construit ainsi. Dans la partie 4.2, nous présentons dans un premier temps les notions basiques liées au réseau de Petri temporel. Par suite, nous donnons une définition formelle de notre modèle hybride, illustrée par un exemple académique. Dans la section 4.3, nous introduisons les propriétés de notre modèle et les premiers liens avec stabilité et stabilisation. Les conclusions et perspectives de travail sont énoncées dans la partie 4.4.

4.2 Séquences de commutation construites à partir d'un réseau de Petri temporel

4.2.1 Quelques rappels sur les réseaux de Petri temporels

4.2.1.1 Premières définitions

Pour toute notion de base sur les réseaux de Petri, le lecteur pourra consulter [Diaz, 2001], ou consulter l'annexe A. Notons \mathcal{I}^+ l'ensemble non vide des intervalles réels dont les bornes sont positives et rationnelles². Pour $i \in \mathcal{I}^+$, on note $\downarrow i$ sa borne inférieure, et $\uparrow i$ sa borne supérieure (dans le cas où i est borné).

Définition 4.2.1. [Berthomieu et Diaz, 1991][Time Petri Net] Un réseau de Petri temporel (RdPT) est un tuple $\langle P, T, Pre, Post, m_0, I_s \rangle$ dans lequel $\langle P, T, Pre, Post, m_0 \rangle$ est un réseau de Petri et $I_s : T \rightarrow \mathcal{I}^+$ est une fonction appelée fonction Intervalle Statique .

On associe à chaque transition $t \in T$ un intervalle temporel $I_s(t) \in \mathcal{I}^+$. Après sa sensibilisation, une transition doit être tirée entre $EF_s(t) = \downarrow I_s(t)$ (date de tir au plus tôt) et $LF_s(t) = \uparrow I_s(t)$ (date de tir au plus tard)³.

En supposant que t est sensibilisée à la date absolue θ_{abs} , alors t ne peut être tirée, en étant continûment sensibilisée, avant la date $\theta_{abs} + EF_s(t)$ et doit être tirée avant, ou au plus tard à la date $\theta_{abs} + LF_s(t)$.

Par exemple, pour le réseau de Petri de la figure (4.2), la transition t_1 est sensibilisée à la date $\theta_{abs} = 0$, elle ne peut être tirée avant la date $\theta = 1$. Notons que cette transition n'a pas de limite de tir au plus tard.

4.2.1.2 États et échéanciers de tir

Dans un RdPT, l'état est non seulement caractérisé par le marquage courant mais aussi par des informations relatives aux intervalles temporels de tir, car ils influencent le comportement du réseau.

²Nous faisons cette hypothèse ici car les divers théorèmes développés pour vérifier les propriétés d'un réseau de Petri temporel la bornitude, la vivacité, ... ne sont valables que pour des bornes rationnelles, et n'ont pu être prouvés dans le cas des bornes réelles.

³de l'anglais *static Earliest Firing Time*, et *static Latest Firing Time*

Définition 4.2.2. *L'état d'un RdPT est un couple $s = (m, I)$ dans lequel m est un marquage et $I : T \rightarrow \mathcal{I}^+$, appelée la fonction intervalle, associe un intervalle temporel à chaque transition sensibilisée par le marquage m .*

Dans un RdPT, pour une transition sensibilisée t_i à la date τ , les deux conditions formelles de tir sont les suivantes :

- 1) $\forall p \in P, m(p) \geq \text{Pre}(p, t_i)$,
- 2) le temps relatif de tir θ n'est pas plus grand que la plus petite des dates de tir au plus tard de toutes les transitions t_k sensibilisées m :

$$EF_s(t_i) \leq \theta \leq \min(LF_s(t_k)).$$

Par suite le tir d'une transition t_i à la date $\tau + \theta$ fait évoluer le réseau de Petri de l'état $S = (m, I)$ à l'état $S' = (m', I')$, noté $S[(t_i, \theta)]S'$, selon les règles suivantes :

- 1) m' est calculé comme dans un réseau de Petri :

$$\forall p \in P, m'(p) = m(p) - \text{Pre}(p, t_i) + \text{Post}(p, t_i),$$

- 2) I' est calculé en trois étapes :

- a) Supprimer les expressions des intervalles de tir de I relatifs aux transitions sensibilisées par m , mais non sensibilisées par $m(\cdot) - \text{Pre}(\cdot, t_i)$,
- b) Pour toute transition t sensibilisée par m et par $m(\cdot) - \text{Pre}(\cdot, t_i)$, soustraire θ des bornes de $I(t)$ (la borne gauche est égale à zéro si $(\downarrow I(t) - \theta < 0)$),
- c) Ajouter pour toute transition non sensibilisée par $m(\cdot) - \text{Pre}(\cdot, t_i)$ mais par m' , leur intervalle de tir statique.

Par suite, un **échancier de tir** (FS, de l'anglais *firing schedule*) est une séquence finie ou infinie de couples $(t_{i_1}, \theta_1), (t_{i_2}, \theta_2), \dots, (t_{i_N}, \theta_N)$, dans lesquels pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, (t_{i_j}) est une transition, et θ_j est une date relative. Un échancier de tir est dit réalisable depuis un état initial S_0 si et seulement s'il existe des états S_1, S_2, \dots, S_n tels que :

$$S_0 [(t_{i_1}, \theta_1)] S_1 [(t_{i_2}, \theta_2)] S_2 \dots [(t_{i_n}, \theta_n)] S_n.$$

Pour un échancier de tir FS , le nombre de commutations est noté $N(FS)$, $\theta^+(FS)$ et $\theta^-(FS)$ représentent respectivement les temps maximum et minimum entre deux commutations. Pour toute question concernant les RdPTs et leurs propriétés, le lecteur pourra consulter [Berthomieu et Diaz, 1991] ainsi que les références proposées.

Pour le réseau de Petri de la figure (4.2), un échancier de tir réalisable depuis l'état initial est par exemple : $(1, 4), (2, 2), (1, 5)$, et sa réalisation conduit à l'enchaînement d'états suivants :

$$S_1 \quad [(1, 4)\rangle \quad S_2 \quad [(2, 2)\rangle \quad S_3 \quad [(1, 5)\rangle \quad S_4,$$

avec

$$S_1 = ([1, 0]^T, [1, +\infty)),$$

$$S_2 = ([0, 1]^T, [1, +\infty)),$$

$$S_3 = ([1, 0]^T, [1, +\infty)),$$

$$S_4 = ([0, 1]^T, [1, +\infty)).$$

4.2.2 Définition formelle du modèle hybride proposé

Dans cette partie, nous définissons formellement un modèle de caractérisation des séquences de commutation à l'aide d'un RdPT. Un exemple est proposé afin d'illustrer les différentes notions introduites.

L'idée développée est la suivante : nous considérons ici un modèle hybride, dont la partie continue est un système à commutation, et dont les signaux commutant respectent un ensemble de contraintes, représentées par un RdPT. Comment alors une évolution dans le RdPT peut-elle être interprétée comme une loi de commutation ? C'est pour répondre à cette question que nous introduisons une définition formelle de cette interface hybride.

Dans ce chapitre, nous nous limitons à un ensemble *fini* d'index Γ . Par ailleurs, nous avons dû faire un choix quand aux notations, et contrairement au reste du mémoire, nous avons choisi de représenter la variable temporelle par θ et utiliser t pour désigner les transitions de notre réseau de Petri. Par ailleurs, si le modèle proposé intègre des champs de vecteurs non contrôlés, et que notre approche se fait en temps continu, tout le formalisme reste inchangé pour les autres variétés de système à commutation.

Définition 4.2.3. [Bourdais et al., 2007d] Une caractérisation d'une séquence de commutation à l'aide d'un réseau de Petri temporel, (CSC), est un tuple $\langle P, T, Pre, Post, m_0, I_s, \Gamma, i_0, E \rangle$, dans lequel :

- $\langle P, T, Pre, Post, m_0, I_s \rangle$ est une réseau de Petri temporel,
- $\Gamma = \{1, \dots, M\}$ est un ensemble fini d'index, sur lequel le système à commutation est construit,

- $i_0 \in \Gamma$ est le sous-système actif à l'instant initial,
- $E : T_d \subseteq T \rightarrow \Gamma$ est une fonction qui associe à certaines transitions un élément de Γ .

Remarque 4.1. La fonction E précise ici comment le tir d'une transition entraîne le changement de dynamique de notre système hybride. Il convient de noter que certaines transitions sont « muettes », dans le sens où elles ne provoquent pas de changement de dynamique, c'est pourquoi on ne la définit que sur un sous-ensemble T_d de T .

La construction du signal commutant est directement liée à l'évolution du RdPT, et donc du tir des transitions. Quand une transition $t \in T_d$ est tirée à l'instant θ , une commutation se produit suivant la loi :

$$\sigma(\theta^+) = E(t).$$

Par suite, à partir d'un échancier de tir réalisable, $(t_{i_1}, \theta_1), (t_{i_2}, \theta_2), \dots, (t_{i_N}, \theta_N)$ du RdPT, on peut construire le signal correspondant σ , suivant la CSC. Notons τ_j , $j \in \{1, \dots, N\}$ les temps absolus de tir, définis par $\tau_j = \tau_{j-1} + \theta_j$, $\tau_0 = 0$. Avec cette notation, le signal de commutation s'exprime alors comme une fonction constante par morceaux que l'on peut construire ainsi :

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \text{pour } \theta \in [0, \tau_1[, & i_0, \\ \text{pour } \theta \in [\tau_1, \tau_2[, & \begin{cases} \text{si } t_{i_1} \in T_d, & E(t_{i_1}), \\ \text{sinon,} & \sigma(\tau_1^-), \end{cases} \\ \text{pour } \theta \in [\tau_2, \tau_3[, & \begin{cases} \text{si } t_{i_2} \in T_d, & E(t_{i_2}), \\ \text{sinon,} & \sigma(\tau_2^-), \end{cases} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \text{pour } \theta \in [\tau_{N-1}, \tau_N[, & \begin{cases} \text{si } t_{i_{N-1}} \in T_d, & E(t_{i_{N-1}}), \\ \text{sinon,} & \sigma(\tau_{N-1}^-), \end{cases} \\ \text{pour } \theta \geq \tau_N, & \begin{cases} \text{si } t_{i_N} \in T_d, & E(t_{i_N}), \\ \text{sinon,} & \sigma(\tau_N^-). \end{cases} \end{cases} \quad (4.1)$$

La dernière ligne de cette équation n'est présente que dans le cas où notre échancier de tir est fini.

Hypothèse 4.2.1. Nous faisons ici l'hypothèse que deux événements ne peuvent se produire en même temps. Par conséquent, la construction du signal commutant est unique pour tout échancier de tir respectant cette hypothèse.

4.2.3 Exemple

Afin d'illustrer les différentes notions introduites, nous étudions dans cette partie le système à commutation composé des trois sous-systèmes dynamiques linéaires suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}, \quad (S_2) : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}, \quad (S_3) : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Les contraintes sont représentées par le réseau de Petri temporel de la figure 4.3.

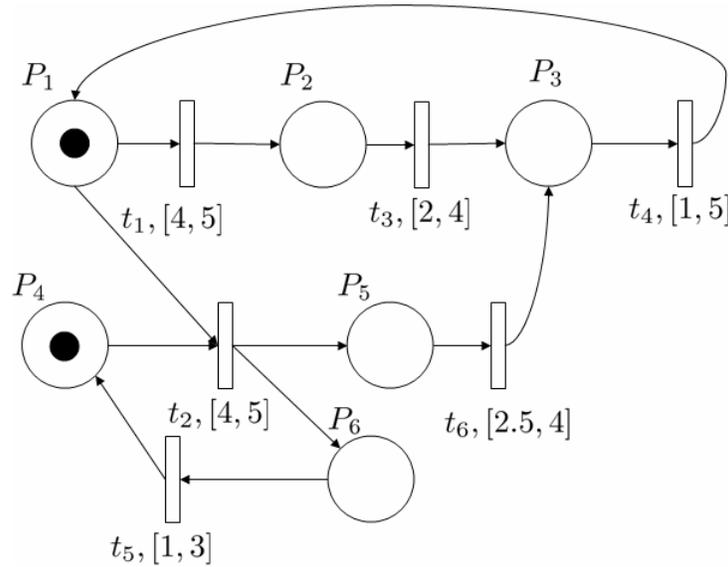


Figure 4.3 – Réseau de Petri temporel du système hybride

L'interface hybride est la suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{1, 2, 3\}, i_0 = 1, T_d = \{t_1, t_3, t_4, t_6\}, \\ E(t_1) &= 2, E(t_3) = 3, \\ E(t_4) &= 1, E(t_6) = 3. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'échéancier de tir réalisable suivant :

$$FS_1 : (t_1, 4), (t_3, 3), (t_4, 1), (t_1, 4), (t_3, 3), \dots \quad (4.2)$$

On peut alors exprimer la séquence de commutations associée, comme l'illustre la figure 4.4. Ainsi, à partir de cet échéancier de tir FS_1 , le système évolue suivant la loi de commutation correspondante (figure 4.5).

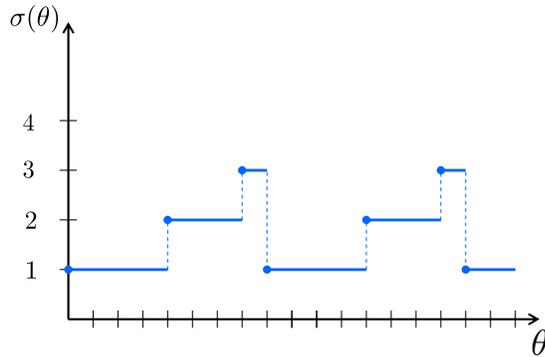


Figure 4.4 – Signal commutant associé à FS_1

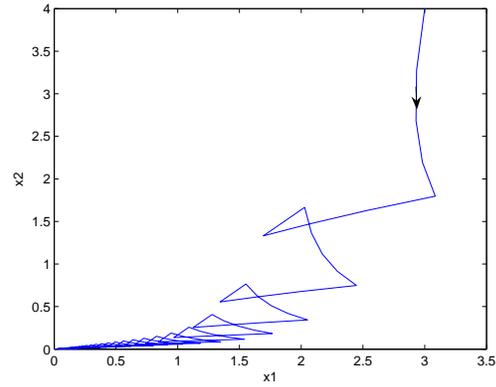


Figure 4.5 – Portrait de phase sous l'échéancier de tir FS_1

En utilisant les outils classiques d'analyse de stabilité, on peut montrer⁴ que le système à commutation est asymptotiquement stable pour le signal commutant construit à partir de SF_1 . Mais en est-il de même pour toutes les séquences admises par le réseau de Petri temporel? Avant de trouver des conditions qui assurent la stabilité du système, une première question se pose : comment, étant donné un réseau de Petri temporel et une interface hybride, peut-on construire l'ensemble des signaux commutant admissibles? C'est ce que propose la section suivante.

4.2.4 Construction de l'ensemble des scénarios admissibles

Sous l'hypothèse 4.2.1, un échéancier de tir peut être interprété comme une séquence de commutation, et ce de manière unique. La construction de l'ensemble des séquences admissibles découle donc du problème d'accessibilité dans les réseaux de Petri temporel. A cause du nombre infini d'états, Berthomieu et Diaz ont proposé dans [Berthomieu et Diaz, 1991] d'introduire la notion de classe d'états pour définir une méthode énumérative finie d'analyse pour caractériser le comportement du RdPT. Pour information, une classe d'états $C = (m, D)$ peut être définie comme l'union de tous les instants de tir possibles depuis un marquage donné m . D représente ce nombre infini d'instant de tir depuis m , défini par un ensemble de solutions d'un système d'inégalités.

Définition 4.2.4. Une classe d'états est un couple $C = (m, D)$ dans lequel m est un marquage, et $D = \{\underline{d} \mid A.\underline{d} \leq b\}$ est un domaine temporel de tir. Les vecteurs \underline{d} ont une composante pour

⁴Nous y reviendrons un peu plus loin.

tout transition sensibilisée par m .

Si $\underline{d} \in D$, notons \underline{d}_t la composante de \underline{d} relative à la transition t . L'atteignabilité entre deux classes d'états peut être définie ainsi : une transition t peut être tirée depuis une classe $C = (m, D = \{\underline{d} \mid A.\underline{d} \leq b\})$ si :

- (i) $m(\cdot) \geq Pre(\cdot, t)$,
- (ii) le système $\underline{d} \mid A.\underline{d} \leq b$ sous les contraintes $\forall k \neq t, \underline{d}_t \leq \underline{d}_k$ est consistant⁵.

Le tir de t conduit à la classe $C' = (m', D')$, construite selon les règles suivantes :

- $\forall p \in P, m'(p) = m(p) - Pre(p, t_i) + Post(p, t_i)$,
- le domaine D' est calculé en quatre étapes :
 - a) Les conditions de tir (ii) de t sont ajoutées au système $A.\underline{d} \leq b$,
 - b) Les variables associées aux transitions en conflit avec t sont éliminées,
 - c) Chaque variable $\underline{d}_k, k \neq t$ est remplacée par $\underline{d}_k + \underline{d}_t$; puis \underline{d}_t est éliminée,
 - d) Pour chaque transition k nouvellement sensibilisée, les contraintes $EF_s(k) \leq \underline{d}_k \leq LF_s(k)$ sont ajoutées.

Par exemple, pour le réseau de Petri temporel de la figure 4.3, la classe d'états initiale peut être ainsi décrite (On note θ_t la date de tir de la transition t) :

$$C_0 : \begin{cases} m_0 : p_1 p_4, \\ D_0 : (\theta_{t_1}, \theta_{t_2}) : \\ \quad 4 \leq \theta_{t_1} \leq 5 \\ \quad 4 \leq \theta_{t_2} \leq 5. \end{cases}$$

Le tir de t_1 amène à construire la classe C_1 définie par :

$$C_1 : \begin{cases} m_1 : p_2 p_4, \\ D_1 : (\theta_{t_3}) : \\ \quad 2 \leq \theta_{t_3} \leq 4. \end{cases}$$

En utilisant les différentes lois d'évolution, on construit le graphe de classe d'états. Le logiciel *Tina* [Berthomieu, 2001] associe à un réseau de Petri temporel son graphe de classe d'états correspondant. Si l'on considère maintenant l'interface hybride de notre modèle, on peut facilement ajouter sur ce même graphe la dynamique associée à chaque classe. On obtient ainsi une description complète de $S_{Ad}(\Gamma)$, l'ensemble des séquences admissibles. La figure 4.6 représente la structure des séquences autorisées, dans laquelle :

⁵ t est tirée dans son intervalle de tir, et peut l'être avant les autres transitions sensibilisées.

$$C_2 : \begin{cases} m_2 : p_5 p_6, \\ D_2 : (\theta_{t_5}, \theta_{t_6}) : \\ 1 \leq \theta_{t_5} \leq 3 \\ 2.5 \leq \theta_{t_6} \leq 4. \end{cases}, \quad C_3 : \begin{cases} m_3 : p_3 p_4, \\ D_3 : (\theta_{t_4}) : \\ 1 \leq \theta_{t_4} \leq 5. \end{cases},$$

$$C_4 : \begin{cases} m_4 : p_4 p_5, \\ D_4 : (\theta_{t_6}) : \\ 0 \leq \theta_{t_6} \leq 3. \end{cases}, \quad C_5 : \begin{cases} m_5 : p_3 p_6, \\ D_5 : (\theta_{t_3}, \theta_{t_5}) : \\ 1 \leq \theta_{t_3} \leq 5 \\ 0 \leq \theta_{t_5} \leq 0.5. \end{cases}.$$

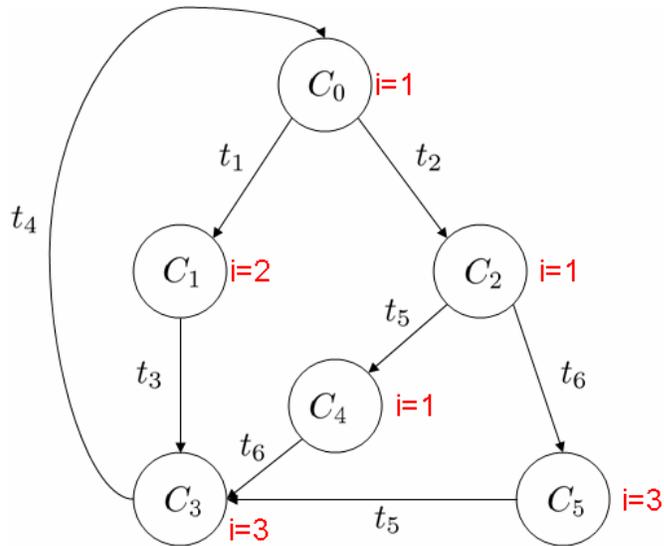


Figure 4.6 – Graphe de classes et les sous-systèmes actifs correspondant.

4.2.5 Quelques remarques

Nous allons voir dans la partie suivante comment sont abordés les problèmes de stabilité pour l'ensemble $S_{Ad}(\Gamma)$. Comme pouvait le suggérer la section précédente, l'idée est d'utiliser le graphe des classes associé à notre réseau de Petri temporel. Or le graphe des classes que l'on obtient est équivalent à un automate hybride temporel. On peut alors se demander, à juste titre, pourquoi adopter ce formalisme alors qu'une modélisation par un automate hybride temporel pourrait être suffisante et même plus aisée. Il est clair que pour des cas simples, la construction du graphe des classes est immédiate, et l'utilisation du modèle proposé ne se justifie pas. En

revanche, quand le cas d'étude devient plus complexe, l'introduction d'un réseau de Petri s'avère plus judicieuse voire indispensable, notamment dans le cadre des systèmes collaboratifs.

Pour illustrer, nous proposons de revenir un instant sur l'exemple des lapins et des loups proposé en introduction. Pour rappel, nous avons identifié quatre modes de fonctionnement. Redonnons brièvement les hypothèses qui étaient à l'origine des commutations. Une des familles de lapin déménage de manière chronique (mais pas forcément de manière périodique), et provoque ainsi les changements de mode $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$. Les loups quant à eux pouvaient changer d'habitude alimentaire en cas d'absence prolongée de cette famille de lapins (changement de mode $2 \rightarrow 3$), ou reprendre leur habitude en cas de retour (changement de mode $4 \rightarrow 1$). Évidemment, les lapins peuvent revenir avant que les loups ne changent d'habitude (changements de mode $2 \rightarrow 1$ et $4 \rightarrow 3$). On peut donc représenter ces changements de dynamique par l'automate hybride de la figure (4.7).

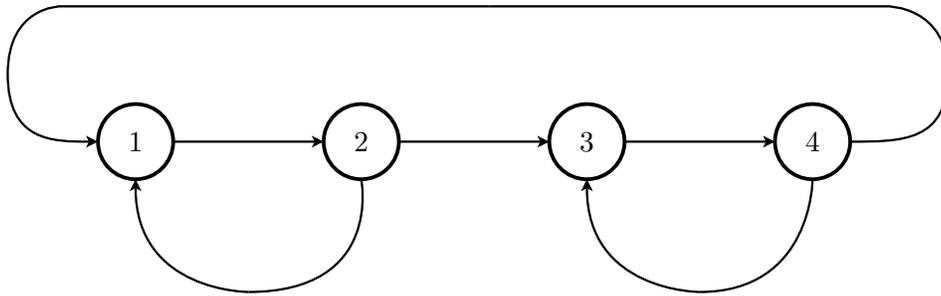


Figure 4.7 – Automate représentatif des commutations

Ajoutons maintenant des critères temporels sur cet automate. Nous sommes partis du fait que les migrations de lapins ne dépendent en rien du comportement des loups. Si maintenant, on fait l'hypothèse que ces lapins restent par exemple entre 2 et 6 unités de temps dans un endroit, il devient alors impossible de construire l'automate temporel équivalent, autrement dit, on ne peut pas faire d'hypothèse quant au temps de séjour dans un mode. Si par exemple, partant du mode 2 (les lapins sont partis pour une durée de 2 à 6 unités de temps), les loups changent leur habitude au bout de cinq unités de temps : on passe au mode 3. Suivant ce scénario, le mode 3 sera activé au plus pendant 1 unité de temps, alors qu'a priori, il devrait rester actif pendant une durée comprise entre 2 et 6 unités de temps.

Grâce à notre modèle, de telles hypothèses peuvent être représentées, ce que propose le modèle RdPT de la figure (4.8), avec l'interface hybride suivante :

$$\Gamma = \{1, 2, 3, 4\}, i_0 = 1,$$

$$T_d = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\},$$

$$E(t_1) = 2, E(t_2) = 1,$$

$$E(t_3) = 3, E(t_4) = 4,$$

$$E(t_5) = 3, E(t_6) = 1.$$

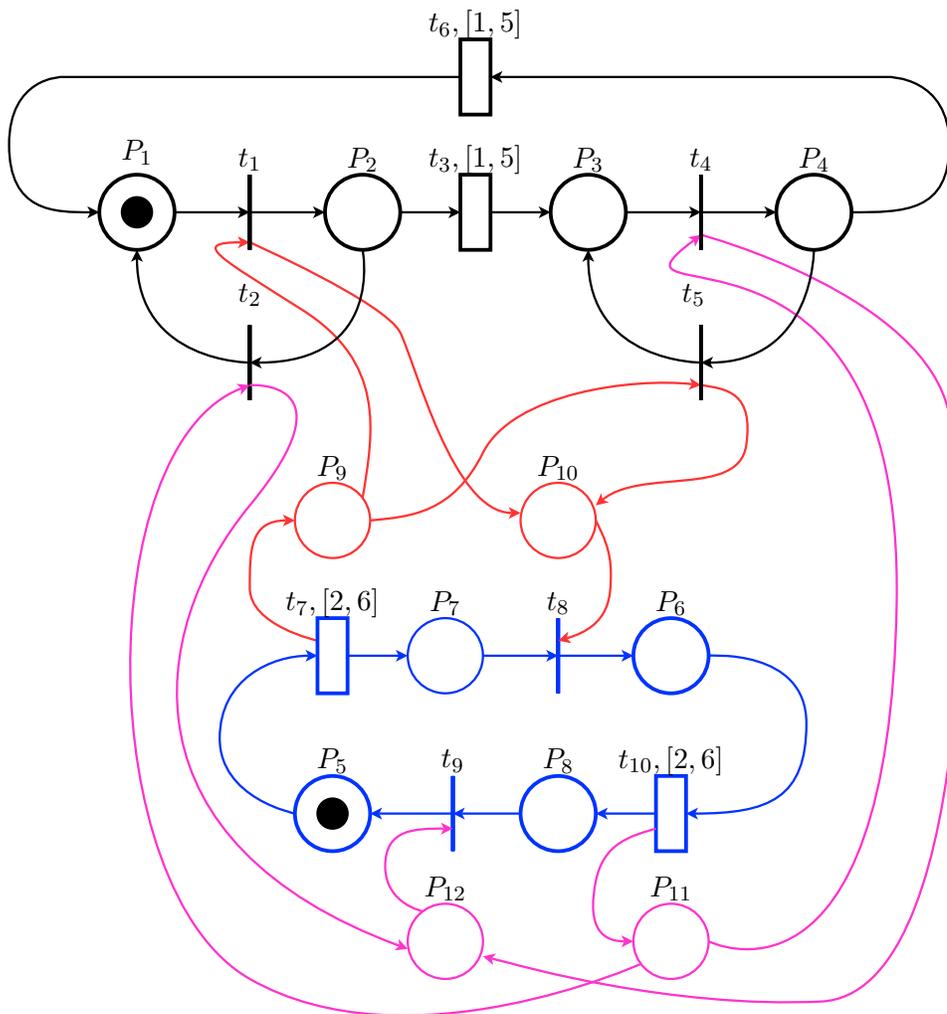


Figure 4.8 – Représentation par RdPT

Regardons de plus près le réseau de Petri proposé. Tout d'abord, on peut remarquer que celui-ci vérifie les propriétés usuelles : bornitude, vivacité, réinitialisabilité⁶. On peut le décomposer en plusieurs parties :

- En noir⁷, avec les places $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ et les transitions $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ on retrouve à peu de chose près l'automate, si on les combine avec l'interface hybride.
- En bleu, places $\{P_5, P_6, P_7, P_8\}$, on retrouve ici le comportement temporel du lapin.
- Les autres places et transitions permettent de représenter comment le comportement des lapins *influe sur le système global*.

Par suite, ce modèle implémenté sous le logiciel *Tina*, peut être analysé, et l'on peut générer le graphe des classes correspondant, avec les sous-systèmes actifs correspondants.

Avant de passer à la suite, nous mettons en avant les deux remarques suivantes :

Remarque 4.2. *Les transitions t_3 et t_6 représentent ici les commutations provoquées par les changements de comportement des loups. Il s'agit de transitions temporelles. En introduction, nous avons rapidement évoqué que ces changements dépendaient du nombre de loups, et donc par conséquent dépendaient de l'état. Or, dans notre modèle, elles ne dépendent que du temps. Nous avons fait ici une **abstraction temporelle** de cette dépendance [Medjoudj, 2006a], en faisant l'hypothèse que les loups allaient changer de comportement au bout d'un temps compris entre 1 et 5 unités de temps. Dans un cadre plus général, pour représenter des commutations qui dépendent de l'état, on pourra soit ne pas contraindre la transition (l'intervalle associé devient alors $[0, +\infty)$, soit faire une abstraction temporelle, en donnant un intervalle plausible de tir.*

Remarque 4.3. *Le modèle que nous avons présenté dans ce chapitre diffère quelque peu du modèle que nous avons développé dans [Bourdais et al., 2007d]. Dans cet article, nous avons proposé une interface hybride dans laquelle :*

- $\Gamma = \{1, \dots, M\}$ est toujours notre ensemble d'index,
- $i_0 \in \Gamma$ est le sous-système actif à l'instant initial,
- $E : \Gamma \times T \rightarrow \Gamma$ est un ensemble de commutations, qui diffère de celui que nous avons proposé dans ce mémoire. En effet, cet ensemble définit un automate dans lequel il n'y a pas d'aspect temporel, celui-ci étant spécifié par le RdPT. Nous n'avons pas gardé cette définition pour que toute l'information relative aux commutations soit contenue dans un et un seul réseau de Petri.

⁶Pour le rappel des propriétés, consulter l'annexe A .

⁷Pour ceux qui ont de la couleur !

4.3 Stabilité et Stabilisabilité

4.3.1 Première approche

Dans un système hybride, l'état global du système est l'union d'un état continu et d'un état discret, de ce fait, différents concepts de stabilité peuvent être donnés. Cependant, tel que nous l'avons présenté, la partie discrète ne représente qu'un ensemble de contraintes, par conséquent, seule la stabilité de la partie continue est intéressante, du moins dans un premier temps, selon les deux points de vue évoqués en introduction : la stabilité uniforme et la stabilité conditionnelle. Cette partie s'attache plus à définir formellement ces concepts qu'à donner des résultats.

Pour une CSC $\langle P, T, Pre, Post, m_0, I_s, \Gamma, i_0, E \rangle$, on note $S_{Ad}(\Gamma)$ l'ensemble des séquences de commutation admissibles, obtenu par la méthode proposée dans la partie précédente. Par suite, un système à commutation, doté d'une CSC, est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f_{\sigma(\theta)}(x), \sigma \in S_{Ad}(\Gamma). \quad (4.3)$$

Pour un signal commutant σ , on note $x(\theta, \xi, \sigma)$ la trajectoire du système (4.3) depuis l'état initial ξ . Comme d'habitude, les champs de vecteurs vérifient l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.3.1. *Pour tout $i \in \Gamma$, f_i est uniformément localement lipchitzienne. Par conséquent, x_e est un point d'équilibre pour le système (4.3), si pour tout $i \in \Gamma$, $f_i(x_e) = 0$.*

Comme précédemment, si les définitions qui suivent sont proposées pour la stabilité de l'origine $x = 0$, elles restent valables quel que soit l'équilibre étudié.

Étant donné un système à commutation doté d'une CSC, la propriété de stabilité uniforme pour S_{Ad} revient à assurer que pour toute séquence de commutation admissible, et pour tout état initial, la trajectoire converge vers l'origine.

Définition 4.3.1. *[Bourdais et al., 2007c] L'origine du système à commutation (4.3) est **a-symptotiquement stable, uniformément par rapport à $S_{Ad}(\Gamma)$** , si et seulement si :*

- pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\xi \in \delta\mathcal{B}$, on ait $x(\theta, \xi, \sigma) \in \epsilon\mathcal{B}$ pour tout $\sigma \in S_{Ad}(\Gamma)$,
- $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} x(\theta, \xi, \sigma) = 0$, pour tout $\sigma \in S_{Ad}(\Gamma)$.

Contrairement à la stabilité uniforme, la stabilisabilité revient à trouver *une* séquence de commutation qui assure la convergence du système vers le point d'équilibre considéré.

Définition 4.3.2. [Bourdais et al., 2007c] *L'origine du système à commutation (4.3) est **a-symptotiquement stable, conditionnellement par rapport à $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$, si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$ telle que***

- pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\xi \in \delta\mathcal{B}$, on ait $x(\theta, \xi, \sigma) \in \epsilon\mathcal{B}$,
- $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} x(\theta, \xi, \sigma) = 0$.

*Par suite, le système à commutation est **asymptotiquement stabilisable par rapport à $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$ tel que l'origine du système soit asymptotiquement stable, conditionnellement par rapport à $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$.***

Bien entendu, les outils classiques d'analyse de stabilité s'appliquent à ces systèmes, mais l'introduction d'un modèle formel va permettre d'utiliser ses propriétés (invariants, bornitude, ...) pour analyser la stabilité du système hybride. Nous ne donnons ici qu'un exemple simple de combinaison : invariants de transitions et dwell-time.

Rappelons qu'à un chemin dans le graphe des classes correspond une séquence de commutation. Pour un chemin S , on note $N(S)$ le nombre de commutations effectives, $\theta^+(S)$ et $\theta^-(S)$ sont respectivement les temps maximum et minimum autorisés entre deux commutations. Un graphe de classes d'états est *réinitialisable* si pour toute classe C_i , il existe un chemin (S) tel que $C_i[S]C_0$. Le caractère réinitialisable est une conséquence directe des propriétés d'invariance du réseau de Petri.

Maintenant, rappelons la notion de dwell-time. Pour un système linéaire stable $\dot{x} = Ax$, on peut trouver deux constantes positives c et λ_0 telles que $\|e^{A\theta}\| \leq ce^{-\lambda_0\theta}$. On a alors pour un temps θ suffisamment grand, $ce^{-\lambda_0\theta} < 1$. Pour un système linéaire à commutation, le dwell-time impose un délai suffisamment long entre deux commutations pour que la trajectoire se rapproche de l'origine, ce qui donne une condition suffisante de stabilité [Hespanha et Morse, 1999]. Le théorème suivant combine les deux idées présentées :

Théorème 4.3.2. *Soit le système linéaire à commutation (4.3) doté d'une CSC, composé uniquement de sous-systèmes stables. Supposons que le graphe des classes d'états associé est fini et réinitialisable. S'il existe un échéancier de tir FS tel que $\theta^-(FS) > \theta_{dwell}$ alors le système à commutation est asymptotiquement stabilisable par rapport à $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$. De plus, si pour tout chemin S , $\theta^-(S) > \theta_{dwell}$ alors le système à commutation est asymptotiquement stable uniformément par rapport à $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$.*

Démonstration. La preuve découle des définitions ci-dessus. Nous ne la détaillerons pas ici, mais en illustrerons les grandes lignes à travers l'exemple 4.2. Pour un système qui n'est composé que de sous-systèmes stables, tout chemin fini dans le graphe des classes amènerait à un état

final stable, ainsi pour de tels systèmes, seuls les chemins non finis sont intéressants à étudier, ce qui explique le caractère de réinitialisabilité présent dans les conditions du théorème.

Exemple 4.2. Reprenons les sous-systèmes présentés en introduction :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 100 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\theta > \theta_{dwell} \simeq 0.3$, on a $\|e^{A_i\theta}\| < 1$, pour $i \in \{1, 2\}$. Supposons que les séquences de commutation sont caractérisées par le réseau de Petri de la figure 4.9, et que l'interface hybride est donnée ainsi ($i_0 = 1$) :

$$T_d = T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\},$$

$$E(t_1) = 2, E(t_2) = 2, E(t_3) = 1, E(t_4) = 1.$$

A l'aide du logiciel Tina, on peut construire le graphe des classes d'états (figure 4.10) avec :

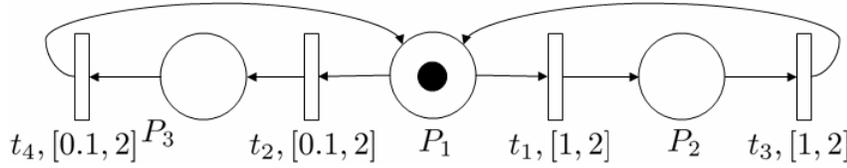


Figure 4.9 – Réseau de Petri temporel du système hybride

$$C_0 : \left\{ m_0 : p_1, D_2 : (\theta_{t_1}, \theta_{t_2}) : 1 \leq \theta_{t_1} \leq 2, 0.1 \leq \theta_{t_2} \leq 2 \right\},$$

$$C_1 : \left\{ m_1 : p_2, D_2 : (\theta_{t_3}) : 1 \leq \theta_{t_3} \leq 2 \right\},$$

$$C_2 : \left\{ m_2 : p_3, D_2 : (\theta_{t_4}) : 0.1 \leq \theta_{t_4} \leq 2 \right\}.$$

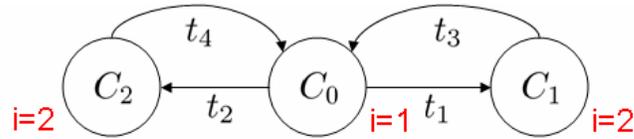


Figure 4.10 – Graphe de classes d'états correspondant

Celui-ci est fini et réinitialisable. L'échéancier de tir composé par les sous-séquences $sFS = (t_1, 1), (t_3, 1)$ vérifient les conditions du théorème 4.3.2 ($\theta^-(SF) = 1 > \theta_{dwell}$), le système

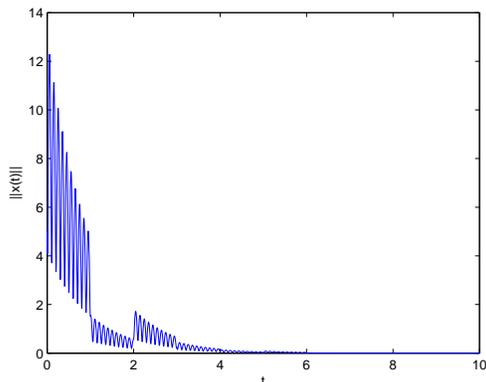


Figure 4.11 – Norme de l'état, sous l'échéancier de tir sFS , vérifiant le théorème 4.3.2

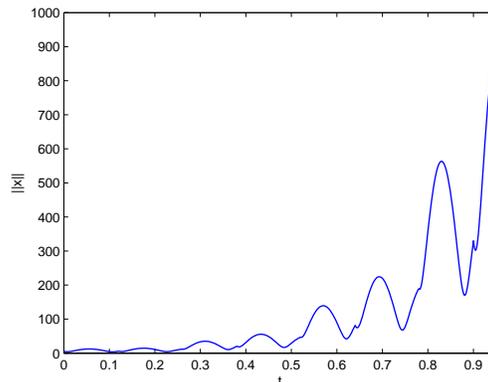


Figure 4.12 – Norme de l'état, sous un échéancier de tir ne satisfaisant pas les conditions du théorème 4.3.2

hybride est alors stabilisable en respectant la CSC. En effet, après le tir d'une sous-séquence, on a :

$$\|e^{A_2}e^{A_1}\| \leq \|e^{A_2}\| \cdot \|e^{A_1}\| \leq \|e^{A_2\theta_{dwell}}\| \cdot \|e^{A_1\theta_{dwell}}\| < 1,$$

donc en répétant sFS , la trajectoire converge vers l'origine (figure 4.11). Cependant, toute sous-séquence composée de $(t_2), (t_4)$ ne vérifie pas les conditions de stabilité uniforme, et effectivement, on peut construire un échéancier de tir qui rende le système instable (figure 4.12).

Le but ici n'était que d'illustrer comment on peut combiner des propriétés discrètes avec des outils du continu pour prouver la stabilité du système hybride, au sens continu du terme.

4.3.2 Aspects cycliques du graphe des classes

La démarche que nous avons adoptée dans la partie précédente part de l'hypothèse forte que chacun des sous-systèmes est asymptotiquement stable. Comment étendre alors cette démarche à des systèmes qui peuvent être composés de sous-systèmes linéaires instables ? Notre approche démarre par l'étude du graphe des classes, et plus particulièrement du *temps de séjour* dans chacun des sous-systèmes.

Regardons plus précisément la trajectoire du système à commutation de la section 4.2.3, sous l'échéancier de tir FS_1 , donnée par la figure 4.5. On peut constater que pour cette séquence de commutation, la trajectoire converge vers l'origine, alors que la loi de commutation active le sous-système instable (S_3). Le but de cette section est de chercher une condition à satisfaire

pour exhiber une loi de commutation, admissible par le réseau de Petri, et qui assure cette convergence.

Dans la section précédente, nous cherchions à vérifier que le temps de séjour dans chacun des sous-systèmes était supérieur au dwell-time. Ici, nous nous intéressons toujours à un graphe des classes fini et réinitialisable, mais ce que nous allons prendre en considération, ce sont les *cycles* de ce graphe des classes, qui caractérisent en fait un aspect cyclique de notre loi de commutation. Ils peuvent être obtenus directement à partir des invariants de transitions.

Par exemple, sur le graphe des classes de la figure 4.6, on peut obtenir les cycles de transitions suivants :

- Le cycle \mathcal{C}_1 : t_1, t_3, t_4 ,
- Le cycle \mathcal{C}_2 : t_2, t_5, t_6, t_3 ,
- Le cycle \mathcal{C}_3 : t_2, t_6, t_5 .

Plus précisément, on peut alors déterminer les cycles qui composent la loi de commutation. Ce qui donne alors les relations :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ [4-5] & [2-4] & [1-5] \end{cases}, \\ \mathcal{C}_2 &: \begin{cases} 1 & 3 \\ [5-11] & [1-5] \end{cases}, \\ \mathcal{C}_3 &: \begin{cases} 1 & 3 \\ [5.5-8] & [1-5.5] \end{cases}, \end{aligned}$$

dans lesquelles la première ligne indique le sous-système actif et la seconde l'intervalle du temps de séjour admissible.

De manière plus générale, on peut interpréter un cycle de transition comme un morceau de loi de commutation, que l'on peut écrire ainsi :

$$\mathcal{C}_i : \begin{cases} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ [\theta_{m1} - \theta_{M1}] & [\theta_{m2} - \theta_{M2}] & \dots & [\theta_{mr} - \theta_{Mr}] \end{cases}. \quad (4.4)$$

Par suite, partant d'un état x_0 , l'état x_f obtenu après un cycle peut donc se calculer directement, ce qui donne :

$$x_f = x(\theta_f) = e^{A_{i_r}\theta_r} e^{A_{i_{r-1}}\theta_{r-1}} \dots e^{A_{i_2}\theta_2} e^{A_{i_1}\theta_1} x_0, \quad (4.5)$$

où $\theta_f = \sum_{j=1}^r (\theta_j)$ et chacun des temps θ_j , pour $j \in I_r$, appartient à l'intervalle $[\theta_{m_j} - \theta_{M_j}]$.

La condition que l'on recherche ne doit pas être tributaire de l'état initial x_0 , par conséquent, on s'en affranchit en regardant uniquement le produit de matrices

$$e^{A_{i_r}\theta_r} e^{A_{i_{r-1}}\theta_{r-1}} \dots e^{A_{i_2}\theta_2} e^{A_{i_1}\theta_1},$$

et plus particulièrement la norme de ce produit. En effet, si l'on exhibe une séquence de temps $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ satisfaisant les contraintes $\theta_j \in [\theta_{m_j} - \theta_{M_j}]$, pour tout $j \in I_r$, telle que

$$\|e^{A_{i_r}\theta_r} e^{A_{i_{r-1}}\theta_{r-1}} \dots e^{A_{i_2}\theta_2} e^{A_{i_1}\theta_1}\| < 1, \quad (4.6)$$

alors, on peut trouver une séquence de commutation, admissible par le réseau de Petri temporel, qui stabilise conditionnellement le système à commutation.

Si l'on reprend notre exemple, avec l'échéancier

$$FS_1 : (t_1, 4), (t_3, 3), (t_4, 1), (t_1, 4), (t_3, 3), \dots,$$

on peut vérifier que cet échéancier est composé du cycle $(t_1, 4), (t_3, 3), (t_4, 1)$, qui appartient bien à \mathcal{C}_1 . Par suite, si l'on calcule la norme du produit de matrices associé, on obtient :

$$\|e^{A_3} e^{3A_2} e^{4A_1}\| = 0.98,$$

ce qui justifie, en répétant ce cycle, que notre trajectoire va converger vers l'origine, et ce, quel que soit l'état initial de notre système. Par conséquent, pour cette séquence de commutation, le système est conditionnellement asymptotiquement stable.

Pour le moment, nous ne disposons pas encore d'algorithmes ou de méthodes qui permettent de trouver une séquence de temps $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ telle que la norme du produit soit plus petite que 1. On pourrait alors en premier lieu rechercher des scénarii pour lesquels on maximise le temps de séjour si le sous-système activé est stable et on le minimise s'il est instable. Mais, comme nous l'avons déjà vu, un tel scénario ne correspond ni au meilleur des cas, ni au pire ! Ceci étant, et c'est sur quoi nous sommes en train de travailler actuellement, l'idée que nous développons est de chercher à résoudre ce problème par une approche de *commande optimale sous contraintes*. L'idée étant, partant d'un cycle sous la forme (4.4), de rechercher les séquences de temps $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ qui minimisent et maximisent le critère :

$$J(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \|e^{A_{i_r}\theta_r} e^{A_{i_{r-1}}\theta_{r-1}} \dots e^{A_{i_2}\theta_2} e^{A_{i_1}\theta_1}\|,$$

sous les contraintes

$$\theta_j \in [\theta_{m_j} - \theta_{M_j}], \forall j \in I_r.$$

4.3.3 Vers une combinaison d'atteignabilité et de stabilité

Dans ce qui vient d'être présenté, le modèle RdPT proposé ne représente qu'un ensemble de contraintes sur les commutations. On peut naturellement, en gardant le même formalisme, donner plus d'importance à la partie discrète en l'utilisant pour modéliser le système étudié. Dans cette optique, il n'est plus nécessaire de connaître *tous* les scénarios admissibles, mais seule est pertinente l'étude de l'ensemble des séquences de tir qui, partant d'un marquage initial donné, conduisent à un marquage final désiré. Ceci permet entre autre de palier le problème d'explosion combinatoire que l'on pourrait rencontrer pour construire le graphe des classes d'états d'un réseau de Petri temporel de grande dimension.

La question soulevée devient alors une combinaison entre un problème d'atteignabilité du point de vue discret avec un problème de stabilité, au sens défini dans le paragraphe précédent. Pour ce faire, on peut y répondre en deux temps :

- La recherche de l'ensemble des séquences de tir qui permettent de passer de M_0 à M_f , dont un algorithme de résolution est proposé dans [Medjoudj, 2006a, Medjoudj, 2006b]. Notons $\mathcal{S}_{Ad, M_0 \rightarrow M_f}(\Gamma)$ cet ensemble.
- L'étude des propriétés de stabilité et de stabilisabilité, **par rapport à** $\mathcal{S}_{Ad, M_0 \rightarrow M_f}(\Gamma)$, et non plus par rapport à $\mathcal{S}_{Ad}(\Gamma)$, suivant les démarches proposées dans la section précédente.

Ainsi avec le formalisme proposé, on peut analyser d'une manière similaire un système à commutation dont un modèle RdPT représente tant un simple modèle de contraintes qu'un modèle complexe.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini un modèle formel pour caractériser un ensemble admissible de séquences de commutation d'un système hybride. La partie discrète est construite sur un réseau de Petri temporel, et une interface hybride associe un échancier de tir à un signal commutant. Pour déterminer l'ensemble des séquences de commutation, on utilise une étude d'accessibilité dans le graphe des classes d'états. Par suite, le système à commutation peut être analysé : stabilité uniforme et stabilisabilité. Les travaux présentés ne sont qu'une première étape d'une étude plus complète, qui inclura notamment une panoplie d'outils pour les problèmes de stabilité.

L'intérêt de l'approche proposée repose sur la combinaison des propriétés de la partie discrète avec les outils classiques d'analyse de stabilité. Une perspective de travail est le déve-

loppement d'outils spécifiques à ce genre de système. Autrement dit, comment les propriétés du réseau de Petri peuvent être utilisées pour construire des séquences de commutation qui stabilisent notre système ?

Tout en gardant le même formalisme, mais en utilisant une représentation discrète du système étudié par un réseau de Petri temporel, le modèle décrit peut permettre l'étude de propriété totale, combinant une atteignabilité d'un état désiré avec les notions de stabilisation de la partie continue.

Commande sans modèle

Je sais, je sais qu'on ne sait jamais.

— J. Gabin¹

Nous abordons le dernier chapitre de notre mémoire. Il s'articule autour de la question simple suivante : peut-on encore commander un système à commutation, sans connaître les différents sous modèles qui le composent ? Pour répondre à cette question, nous développons des outils d'estimations rapides de paramètres et de dérivées, basées sur des méthodes algébriques, pour obtenir la stabilité pratique de notre système à commutation.



5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons essayé d'aborder le problème de la stabilisation des systèmes à commutation sous différentes formes. Si les résultats proposés dans les chapitres 2 et 3 nous apportent des solutions quant à ce problème, toutes nos démarches ne sont possibles que si l'on dispose d'une *parfaite* connaissance des divers sous-systèmes. De plus, les travaux menés dans le chapitre 4 requièrent davantage d'informations, car ils suggèrent également une certaine structure de notre signal de commutation. Même si ces résultats sont assez robustes par rapport à de faibles perturbations, nous devons aussi constater que chercher une combinaison stable de sous-systèmes, tout comme exhiber une fonction de Lyapunov contrôlée commune ne sont en rien des problèmes triviaux.

C'est pourquoi nous avons essayé d'aborder la commande des systèmes à commutation sous un point de vue radicalement différent. Supposons que l'on ne dispose **ni** d'une description complète des sous-dynamiques **ni** du signal de commutation, peut-on encore contrôler le

¹Jean Gabin, extrait de la chanson *Maintenant je sais*, paroles de J.L. Dabadie.

système ?²

Il est clair que pour développer un contrôle *efficace*, il faut une *certaine* connaissance des dynamiques. Or nous avons fait ici l'hypothèse que nous ne disposons pas de descriptions précises des sous-systèmes. Une étape préalablement indispensable à la construction de la loi de commande va donc être une phase d'*estimation* de la dynamique active. Notons alors que pour ce faire, il est nécessaire d'étudier le comportement entrée/sortie du système, or, pour mesurer la sortie de notre système, des capteurs sont requis, et donc les signaux que nous manipulons sont *bruités*. Si cette étape est réussie, alors on peut proposer un contrôle stabilisant.

Nous voyons ici que la tâche est hardue, mais malheureusement, et c'est là une difficulté supplémentaire, des commutations peuvent aussi avoir lieu, et on ne peut ni les prévoir ni les détecter. Dès lors, l'estimation précédente n'est plus adaptée, et par conséquent le contrôle non plus. Pour pallier ce problème, il faut nécessairement procéder à une estimation rapide, voire en temps réel, de la dynamique active pour être le plus réactif possible par rapport aux commutations.

Les grandes lignes de la méthodologie développée dans ce chapitre sont les suivantes³ : nous nous intéressons à un système à commutation dont chacun des sous-systèmes peut être représenté par une relation algèbro-différentielle entre l'entrée et la sortie⁴. Par suite on peut réécrire cette relation sous la forme simplifiée suivante :

$$y^{(p)} = a(.) + b(.)u, \quad (5.1)$$

dans laquelle $a(.)$ et $b(.)$ peuvent changer en fonction du signal de commutation.

Rappelons que nous ne disposons que de la sortie y . Partons de la mesure que l'on a de la sortie, qui est éventuellement bruitée, sur un bref intervalle de temps, dénommé fenêtre temporelle. Sur cet intervalle, nous procédons à l'interpolation de cette fonction par un polynôme en t , la variable temporelle. Si l'on arrive à estimer correctement les fonctions $a(.)$ et $b(.)$, et que notre interpolation de y est correcte (éventuellement de ces dérivées successives jusqu'à l'ordre $(p - 1)$), on peut alors générer une commande qui permette d'assurer le suivi de trajectoire, comme par exemple un contrôleur PID ([Aström et Hägglund, 1995], [O'Dwyer, 2003]), ou encore un contrôleur PID généralisé ([Fliess et al., 2002]). Si l'on désire suivre une trajectoire de référence y_{ref} , on peut par exemple utiliser un contrôle de la forme :

²Comme nous pourrions le constater, et contre toute volonté, nous devons quand même effectuer quelques hypothèses sur les sous-dynamiques ainsi que sur la loi de commutation.

³Les principales idées et techniques de ce chapitre ont été développées au sein du projet INRIA Alien.

⁴Au moins localement, en utilisant le théorème de la forme implicite.

$$[b(\cdot)]_{\text{estim}} u = -[a(\cdot)]_{\text{estim}} - \sum_{i=-1}^{(p-1)} \alpha_i \left([y^{(i)}]_{\text{estim}} - y_{\text{ref}}^{(i)} \right) + y_{\text{ref}}^{(p)}, \quad (5.2)$$

dans lequel les coefficients α_i sont choisis en fonction des performances de suivi désirées. En effet, le système en boucle fermée aura alors comme erreur de suivi, $e = y - y_{\text{ref}}$, la dynamique suivante :

$$e^{(p)} + \sum_{i=-1}^{(p-1)} \alpha_i e^{(i)} = 0.$$

Comme le système que l'on étudie n'est pas ordinaire mais à commutation, l'idée n'est pas de procéder à de l'estimation sur une fenêtre temporelle fixe, mais sur une fenêtre temporelle glissante. Autrement dit, pour arriver à notre fin, nous devons disposer d'une estimation en temps réel des fonctions $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ qui interviennent dans la relation (5.1), ainsi que des dérivées successives de y , jusqu'à l'ordre $(p - 1)$.

Pour ce faire, notre étude repose sur des *techniques algébriques* pour l'*estimation rapide* de dérivées de signaux bruités. Ces techniques ont, dans un premier temps, été développées pour des problèmes d'identification paramétrique en boucle fermée de systèmes linéaires ([Fliess et Sira-Ramírez, 2003]), et se sont révélées comme des alternatives efficaces aux techniques d'identification existantes, comme on peut trouver dans [Sjöberg et al., 1995], [Kerschen et al., 2006], [Ljung et Glad, 1994b] ou encore [Ljung et Glad, 1994a]. Par suite, ces résultats ont été étendus pour des processus de commande, mettant en avant de nouveaux points de vue [Fliess, 2006].

Le développement de telles techniques a un impact assez conséquent dans le milieu de l'automatique, notamment pour les problèmes suivants :

- les observateurs non linéaires, et le contrôle par retour d'état, développé notamment dans [Fliess et Sira-Ramírez, 2004],
- le contrôle tolérant aux fautes (voir [Fliess et al., 2005]),
- la commande sans modèle (voir [M. Fliess, 2006, Fliess et al., 2006] et [Join et al., 2006] pour un exemple concret d'étude),

Nous utilisons ici ces méthodes algébriques pour mener à bien le suivi de trajectoires pour un système à commutation dont les champs de vecteurs et le signal commutant ne sont pas connus.

Le chapitre est construit ainsi : tout d'abord nous formulons proprement le problème posé, puis illustrons la démarche proposée à l'aide d'un exemple assez simple. Par suite, dans la section 3, nous faisons quelques rappels sur les méthodes algébriques d'estimations rapides.

Puis en section 4, nous explicitons notre démarche ainsi que l'implémentation numérique de la loi de commande. Nous proposons avant de conclure les résultats obtenus pour quelques exemples académiques, pour des systèmes linéaires comme non linéaires.

5.2 Idées développées

5.2.1 Formulation du problème

Comme dans le reste de ce mémoire, Γ désigne un ensemble d'index, mais si nous nous intéressons toujours à des systèmes à commutation non linéaires, cette fois-ci, nos champs de vecteurs peuvent être non autonomes et nous prenons également en considération la sortie du système. On obtient alors la représentation suivante :

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(t, x, u, d), \quad (5.3)$$

$$y = h_{\sigma(t)}(t, x), \quad (5.4)$$

dans laquelle $\sigma(t)$ est la loi de commutation, $u \in \mathbb{R}$ est l'entrée de notre système, $y \in \mathbb{R}$ la sortie mesurée, d représente des perturbations éventuelles et $x \in \mathbb{R}^{n_{\sigma(t)}}$ est le vecteur d'état qui appartient à un espace vectoriel de *dimension variable*⁵, $n_{\sigma(t)}$.

Plus précisément, on suppose que notre système à commutation est obtenu à partir d'une *description physique* du système qu'il représente, et que par conséquent, on peut le réécrire sous la forme entrée/sortie suivante :

$$0 = f_{\sigma(t)}(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(p_{\sigma(t)})}, u, \dots, u^{(m_{\sigma(t)})}, d). \quad (5.5)$$

Dans ce chapitre, **nous ne faisons pas** l'hypothèse que l'origine de chacun des sous-systèmes $0 = f_{\sigma(t)}(t, 0, 0, \dots, 0, u, \dots, u^{(m_{\sigma(t)})}, d)$ est asymptotiquement stable. En revanche, on suppose que ces sous-systèmes sont à *minimum de phase*⁶, et qu'il existe un temps minimum d'activation fini : T_{\min}^{act} , ce qui signifie qu'un sous-système est actif pendant un temps au moins égal à T_{\min}^{act} . Ici, seule la sortie est mesurée, et cette dernière peut être éventuellement bruitée. Le problème que nous fixons alors est d'assurer un suivi de trajectoire, qui dans ces conditions n'a

⁵C'est parce que l'on prend en considération la sortie que l'on peut se permettre d'avoir un état qui évolue dans un espace de dimension variable.

⁶Pour un système linéaire, les zéros sont tous stables. Pour un système non linéaire, la dynamique résiduelle en entrée est stable; pour plus de détails, consulter [Richard, 2002].

jamais pu être traité par des méthodes conventionnelles : en effet, le signal de commutation est inconnu, et chacun des sous-systèmes peut être complexe (non linéaire, instables, à paramètres lentement variables, ...). En outre, la dynamique exacte des sous-systèmes n'est pas requise. Nous allons maintenant voir comment un tel problème peut être traité. On commence dans le paragraphe suivant à expliciter un peu plus la procédure pour construire un contrôle adéquat.

5.2.2 Procédure de construction du contrôle

Nous avons évoqué l'absence totale de connaissance des champs de vecteurs qui composent notre modèle. Modulons quelque peu notre propos, en faisant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.2.1. *Pour toutes les équations différentielles de notre système à commutation, il existe un entier $p \in \{1, \dots, \min_{i \in I} (p_i)\}$, tel que, au moins localement, on vérifie la relation suivante :*

$$y^{(p)} = a_{\sigma(t)}(\cdot) + b_{\sigma(t)}(\cdot)u, \quad (5.6)$$

dans laquelle, les fonctions $a_{\sigma(t)}(\cdot)$ et $b_{\sigma(t)}(\cdot)$ dépendent des variables

$$(t, y, \dots, y^{(p_{\sigma(t)})}, u, \dots, u^{(m_{\sigma(t)})}, d).$$

A partir de cette hypothèse, il est clair que si l'on peut disposer des estimations rapides de $a_{\sigma(t)}$ et de $b_{\sigma(t)}$, alors le problème de suivi de trajectoire peut être résolu en utilisant la loi de commande (5.2) [Bourdais et al., 2007a].

Pour valider notre approche, il reste alors à vérifier les points suivants :

- 1) Il existe une classe assez « large » de systèmes à commutation qui vérifient l'hypothèse 5.2.1, ce que nous verrons dans la sous-section 5.4.1).
- 2) On dispose d'estimations en temps réel « correctes » des dérivées de notre signal bruité, ce que nous étudierons dans la partie 5.3.1.
- 3) On dispose également d'estimations en temps réel « correctes » de $a_{\sigma(t)}$ et de $b_{\sigma(t)}$, en utilisant uniquement notre sortie bruitée et notre entrée, ce que nous présenterons dans la section 5.3.2,
- 4) Notre système en boucle fermée vérifie bien les conditions de la stabilité pratique, uniformément par rapport à l'ensemble des signaux de commutation, ce que la section 5.4.3 développe.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous proposons d'illustrer quelque peu la méthode développée par un exemple pratique d'étude.

5.2.3 Un premier exemple

On va s'intéresser ici au problème de régulation en vitesse d'une voiture munie d'une boîte de vitesse manuelle. On considère alors le modèle simplifié des dynamiques de la voiture [Brockett, 1993], que l'on représente par l'équation suivante :

$$\dot{v} = -\frac{\beta v^2}{M} \operatorname{sgn}(v) - g \sin(\alpha(t)) + \frac{T(i)}{M} u, \quad (5.7)$$

dans laquelle v est la sortie de notre système en l'occurrence, la vitesse, M la masse du véhicule, $\alpha(t)$ l'inclinaison de la route et $T(i)$ est le couple moteur, qui dépend évidemment du rapport de la boîte de vitesse choisi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Remarquons que dans la pratique, les coefficients $a(\cdot) = -\frac{\beta v^2}{M} \operatorname{sgn}(v) - g \sin(\alpha(t))$ ne sont pas connus parfaitement, car β et M évoluent suivant la configuration de la voiture : bagages, charges supplémentaires, et certains paramètres qui évoluent lors du déplacement : $\alpha(t)$ dépend de la route. De plus, $b(\cdot) = \frac{T(i)}{M}$ change de valeur en fonction de la vitesse sélectionnée par le conducteur.

Supposons maintenant que l'on dispose d'une estimation de $a(\cdot)$ et de $b(\cdot)$, le problème que l'on se pose ici est de construire une loi de commande telle que la vitesse du système, v , suive une trajectoire de référence notée v_{ref} . On peut rapidement remarquer que notre système est plat⁷ pour la sortie $y = v$. De ce fait, on peut alors définir une trajectoire planifiée v_{ref} qui sera suivie par la sortie du système. Supposons que sur une fenêtre temporelle, on puisse écrire nos estimations de paramètre sous la forme $\dot{y} = a_0 + b_0 u$, ce qui est possible si la fenêtre est suffisamment petite et si notre sortie $y = v$ est suffisamment lisse. Maintenant regardons la sortie mesurée y : si l'on peut obtenir des estimations rapides de $\dot{y} = \dot{v}$ et de b_0 , il suffit alors d'appliquer le contrôle échantillonné suivant⁸

$$u((k+1)T_s) = -\frac{(k_p e_y + k_i \int e_y) - (([\dot{v}]_{\text{estim}} - \dot{v}_{\text{ref}}) - b_{0_{\text{estim}}} u(kT_s))}{b_{0_{\text{estim}}}},$$

⁷On peut exprimer les variables d'état et la commande en fonction de la sortie et de ses dérivées. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [Sira-Ramírez et Agrawal, 2004].

⁸Il s'agit ici de la version échantillonnée du contrôle (5.2), vu que $([\dot{v}]_{\text{estim}} - b_{0_{\text{estim}}} u(kT_s)) \approx a_{0_{\text{estim}}}$ dès que T_s est suffisamment petit par rapport aux variations de $a(\cdot)$ et de $b(\cdot)$, qui sont ici approximées par les constantes $(a_{0_{\text{estim}}}, b_{0_{\text{estim}}})$ sur une fenêtre glissante de longueur $T_{\text{fen}} : T_{\text{fen}} \gg T_s$.

dans lequel $e_y = v - v_{\text{ref}}$ est l'erreur relative de la mesure de y . On obtient alors

$$\ddot{e}_y + k_p \dot{e}_y + k_i e_y \cong 0, \text{ plus pr\u00e9cis\u00e9ment en } o(T_s),$$

ce qui implique que la stabilisation d\u00e9sir\u00e9e est belle et bien obtenue.

La figure (5.1) repr\u00e9sente le rapport de vitesse s\u00e9lectionn\u00e9 (autrement dit le signal de commutation) et la figure (5.2) met en avant la r\u00e9gulation en vitesse. Comme nous pouvons le constater, la r\u00e9gulation propos\u00e9e est bien effective, m\u00eame si un ph\u00e9nom\u00e8ne oscillatoire appara\u00eet sur la trajectoire (voir (1) sur la figure 5.2). Ces oscillations s'expliquent par le fait que pour obtenir une bonne estimation, le syst\u00e8me doit \u00eatre excit\u00e9. Les pics (2) sur cette m\u00eame figure sont le r\u00e9sultats d'une forte perturbation sur la sortie. Comme on peut le remarquer, notre r\u00e9gulation s'y adapte tr\u00e8s rapidement, ce qui met en avant sa robustesse.

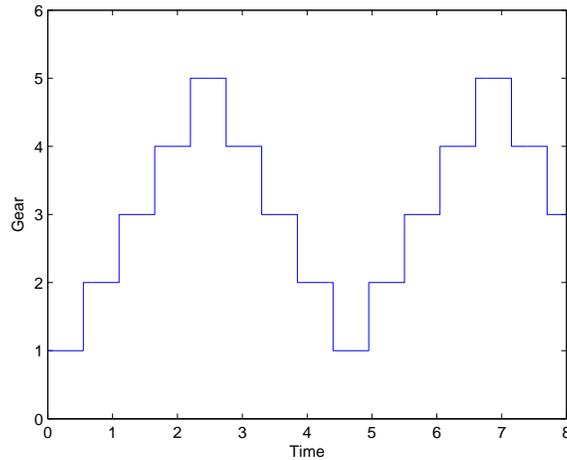


Figure 5.1 – Signal de commutation de la bo\u00eete de vitesse

Maintenant que les principales \u00e9tapes de notre raisonnement ont \u00e9t\u00e9 pr\u00e9sent\u00e9es, nous allons voir, dans la partie suivante, quels sont les outils math\u00e9matiques qui permettent d'obtenir la loi de commande ad\u00e9quate.

5.3 Quelques rappels sur les techniques alg\u00e8briques d'estimation rapide

Nous proc\u00e9dons ici \u00e0 quelques rappels sur les techniques alg\u00e8briques d'estimation rapide. Notre lecteur pourra trouver dans [Fliess, 2006, Fliess et Sira-Ram\u00edrez, 2003] toutes les fonda-

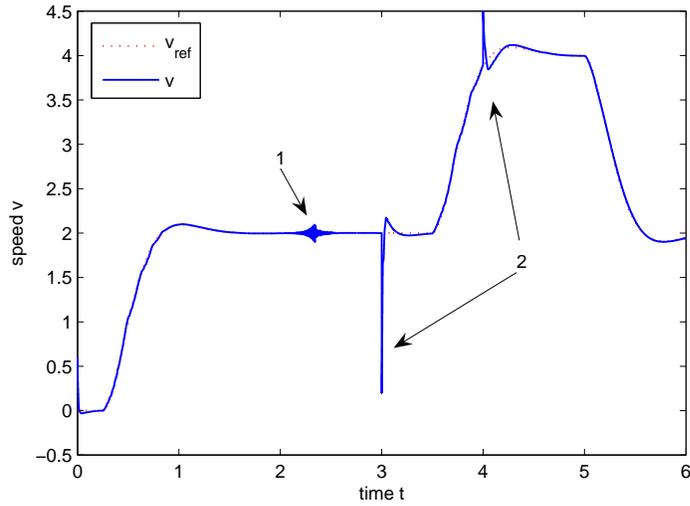


Figure 5.2 – Suivi de trajectoire du système (5.7)

tions théoriques de ces méthodes. Nous allons voir comment les utiliser pour l'estimation de dérivées ainsi que pour l'estimation « en ligne » de paramètres.

5.3.1 Estimation de dérivées

5.3.1.1 Principes

Le but de cette section est de mettre en avant les diverses étapes de calcul qui permettent d'obtenir l'estimation des dérivées d'un signal, par des manipulations algébriques.

Considérons un signal $y(t)$ que l'on suppose analytique en $t = 0$:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}.$$

Nous représentons sa série de Taylor tronquée à l'ordre N par :

$$y_N(t) = \sum_{i=0}^N y^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}.$$

Ce polynôme, qui appartient à l'anneau $\mathbb{R}[t]$, correspond en fait à une approximation de notre fonction $y(t)$ sur un petit intervalle temporel. On peut notamment remarquer que la différence $y(t) - y_N(t) = o(t^N)$. Utilisons maintenant quelques règles usuelles de calcul symbolique

[Schwartz, 1966]. On a, au sens des distributions :

$$y_N^{(N+1)}(t) = y(0)\delta^{(N)} + \dots + y^{(N)}(0)\delta,$$

dans laquelle δ est la mesure de Dirac en 0. Multiplions cette expression par $(-t)^i$. On obtient alors

$$(-t)^i y_N^{(N+1)}(t) = (-t)^i \left(y(0)\delta^{(N)} + \dots + y^{(N)}(0)\delta \right).$$

Étant donné que $t\delta = 0$, $t\delta^{(i)} = -i\delta^{(i-1)}$, $i \geq 1$, on peut alors obtenir le système triangulaire d'équations linéaires dans lequel les dérivées $y^{(i)}(0)$ peuvent être exprimées, pour $(1 \leq i \leq N)$:

$$(-t)^i y_N^{(N+1)}(t) = \left(\frac{N!}{(N-i)!} \delta^{(N-i)} y(0) + \dots + \delta y^{(N-i)}(0) \right), \quad (5.8)$$

ce qui implique notamment que les coefficients $y(0), \dots, \delta y^{(N)}(0)$ sont *identifiables linéairement* [Fliess et al., 2004, Fliess et Sira-Ramírez, 2003]. Les dérivées temporelles de $y_N(t)$, les mesures de Dirac et leurs dérivées sont éliminées en intégrant par rapport au temps chacun des membres de l'équation (5.8) au moins N fois, ici on a procédé à ν intégrations ($\nu > N$). Elles amènent alors à considérer le système suivant : pour $(1 \leq i \leq N)$

$$\int_0^t \int_0^{t_{\nu-1}} \dots \int_0^{t_1} (-\tau)^i y_N^{(N+1)} dt_{\nu-1} \dots dt_1 d\tau = \frac{N!}{(N-i)!} \frac{t^{\nu-N-i-1}}{(\nu-N-i-1)!} y(0) + \dots + \frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} y^{(N-i)}(0).$$

Pour remplacer les diverses intégrales, on utilise alors la formule suivante :

$$\int_0^t \int_0^{t_{\nu-1}} \dots \int_0^{t_1} \tau^\alpha x(\tau) dt_{\nu-1} \dots dt_1 d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \tau^\alpha x(\tau) d\tau. \quad (5.9)$$

Cette estimation numérique, utilisant des intégrales, repose sur le fait suivant :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} [y_N^{(i)}(0)]_{\text{estim}}(t) = y^{(i)}(0).$$

Sur ce que nous venons de voir, nous émettons les remarques suivantes :

Remarque 5.1. *Ces intégrales itérées jouent un rôle de filtre passe-bas, et permettent ainsi d'atténuer très nettement les bruits de mesure (voir [Fliess, 2006]).*

Remarque 5.2. Ici, les résultats obtenus ne sont valables que pour un fenêtrage temporelle $[0, t[$. Mais en pratique, on peut facilement étendre ces formules pour travailler sur une fenêtrage glissante de longueur T_{fen} , et donc sur l'intervalle de temps $[t - T_{fen}, t]$. C'est en travaillant sur cette fenêtrage glissante que l'on peut obtenir une estimation en « temps-réel » des dérivées de $y^{(i)}(t)$. On aurait pu proposer une solution alternative pour faire cette estimation en ligne, en combinant un filtre temporel avec les interpolations polynomiales, comme le proposent les auteurs de [Reger et al., 2005] et de [Sira-Ramírez et Fliess, 2006].

Avant de passer à la suite, nous illustrons dans le paragraphe suivant la démarche à travers un exemple académique.

5.3.1.2 Un exemple

Pour ne pas alourdir les calculs, nous arrêtons la troncature à $N = 3$. En reprenant des manipulations algébriques similaires à celles proposées dans le paragraphe précédent, on peut obtenir les formules suivantes, valables sur une fenêtrage temporelle de longueur T_{fen} . Pour $i = 0, 1, 2$, on a :

$$\left[y^{(i)}(t) \right]_{\text{estim}} = \frac{(-1)^i \left(\int_{t-T_{fen}}^t P_i(t, \tau) y(\tau) d\tau \right)}{T_{fen}^{4+i}}, \quad (5.10)$$

où

$$\begin{aligned} P_0(t, \tau) &= [16\tau^3 - 72(t - \tau)\tau^2 + 48(t - \tau)^2\tau - 4(t - \tau)^3] \\ P_1(t, \tau) &= [-120\tau^3 + 840(t - \tau)\tau^2 - 660(t - \tau)^2 + 60(t - \tau)^3] \\ P_2(t, \tau) &= [480\tau^3 - 3960(t - \tau)\tau^2 + 3600(t - \tau)^2 - 360(t - \tau)^3] \end{aligned}$$

Remarquons sur cet exemple que l'équation (5.10) pour $i = 0$ donne une valeur filtrée de notre signal de sorti bruité y .

Nous avons vu comment des manipulations algébriques pouvaient permettre d'obtenir des estimations de dérivées, nous allons étudier, dans la section suivante, comment utiliser des manipulations similaires pour faire de l'estimation en ligne de paramètres.

5.3.2 Estimation de paramètre

Pour ne pas noyer notre lecteur sous trop de lignes de calcul, nous présentons dans un premier temps la démarche pour une équation différentielle ordinaire d'ordre 1. La généralisation

est proposée dans la sous-section 5.3.2.2.

5.3.2.1 Démarche pour une équation différentielle d'ordre 1

Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme suivante :

$$\dot{y} = a(\cdot) + b(\cdot)u, \quad (5.11)$$

pour laquelle $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ sont des fonctions qui, sur une fenêtre temporelle de faible longueur, peuvent être approximées par des fonctions polynomiales par morceaux. Par exemple, si les approximations se font par des polynômes de degré zéro (des formules similaires peuvent être obtenues pour des ordres plus grands), on a alors les relations suivantes :

$$a(\cdot) = a_0, \quad b(\cdot) = b_0, \quad (5.12)$$

sur une petite fenêtre glissante, ce qui signifie que notre équation (5.11) est de la forme :

$$\dot{y} = a_0 + b_0u.$$

On peut alors soit développer cette équation par des calculs symboliques ou soit la développer en utilisant la transformée de Laplace (voir notamment la méthode développée dans les articles [Fliess et Sira-Ramírez, 2003] et [Fliess et al., 2003] sur l'identification de paramètres). Par cette seconde alternative, on a alors :

$$sY(s) - y_0 = \frac{a_0}{s} + b_0U(s).$$

Pour éliminer la condition initiale, dérivons l'expression par rapport à s puis multiplions le résultat par s^2 . Ceci amène alors à :

$$s^2Y(s) + s^3\frac{d}{ds}Y(s) = -a_0 + b_0s^2\frac{d}{ds}U(s). \quad (5.13)$$

Par suite, pour éliminer le paramètre a_0 , dérivons à nouveau par rapport à s , puis multiplions par s^{-4} . En appliquant la transformée inverse de Laplace, on retourne alors dans le domaine temporel, ce qui donne :

$$b_0 = \frac{\int_0^t P_1(t, \tau)y(\tau)d\tau}{\int_0^t Q_1(t, \tau)u(\tau)d\tau}, \quad (5.14)$$

$$P_1(t, \tau) = (t - \tau)^2 - 4\tau(t - \tau) + \tau^2,$$

$$Q_1(t, \tau) = -\tau(t - \tau)^2 + \tau^2(t - \tau).$$

Nous avons donc obtenu une estimation de notre paramètre b_0 . Revenons une étape en arrière dans l'équation (5.13). En la multipliant par s^{-4} , on a alors le résultat suivant :

$$s^{-2}Y(s) + s^{-1} \frac{d}{ds}Y(s) = -\frac{a_0}{s^4} + b_0s^{-2} \frac{d}{ds}U(s).$$

En revenant dans le domaine temporel, il vient :

$$a_0 = \frac{b_0 \int_0^t R_1(t, \tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t S_1(t, \tau)y(\tau)d\tau}{t^3},$$

$$R_1(t, \tau) = 6\tau(t - \tau), S_1(t, \tau) = -6(t - 2\tau).$$

On a donc ici obtenu une estimation du paramètre a_0 . Avant de passer à la suite, remarquons qu'en utilisant une fenêtre glissante, une singularité peut apparaître dans l'équation (5.14), notamment quand la stabilisation de (5.11) est obtenue. En effet, dans ce cas-ci, les deux termes du quotient sont égaux à 0. Cette remarque aura toute son importance quand nous appliquerons ces méthodes aux systèmes à commutation.

5.3.2.2 Cas général

Les résultats obtenus dans la section précédente peuvent être étendus aux équations différentielles d'ordre plus élevé. Considérons alors l'équation suivante :

$$y^{(p)} = a(.) + b(.)u. \quad (5.15)$$

Nous supposons encore que l'on peut approximer, sur une petite fenêtre temporelle, les fonctions $a(.)$ et $b(.)$ par des constantes, comme en (5.12). Comme pour le cas $p = 1$, la démarche se fait en deux étapes : l'estimation dans un premier temps du paramètre b_0 , puis du paramètre a_0 .

Estimation de b_0 :

En utilisant la transformée de Laplace, il vient :

$$s^p Y(s) - \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i y_0^{(i)} s^i = \frac{a_0}{s} + b_0 U(s). \quad (5.16)$$

Comme précédemment, nous devons éliminer les conditions initiales $y_0^{(i)}, i = 0, \dots, p-1$. Pour ce faire, dérivons cette expression p fois par rapport à s . On a alors :

$$\frac{d^p}{ds^p} (s^p Y(s)) = a_0 \frac{d^p}{ds^p} (s^{-1}) + b_0 \frac{d^p}{ds^p} U(s). \quad (5.17)$$

Rappelons alors la règle de Leibniz :

$$\frac{d^p (X(s)Y(s))}{ds^p} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{d^{p-i}(X(s))}{ds^{p-i}} \frac{d^i(Y(s))}{ds^i}. \quad (5.18)$$

Par ailleurs, on a :

$$\frac{d^k (s^l)}{ds^k} = \begin{cases} \frac{l!}{(l-k)!} s^{l-k}, & \text{if } 0 < k < l \\ 0, & \text{if } 0 < l < k \\ \frac{(-1)^k (k-l-1)!}{(-l-1)!} s^{l-k}, & \text{if } l < 0 < k \end{cases}, \quad (5.19)$$

En combinant ces deux dernières lignes, on peut alors voir l'équation (5.17) comme

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{p!}{i!} s^i \frac{d^i(Y(s))}{ds^i} = (-1)^p p! a_0 s^{-(p+1)} + b_0 \frac{d^p}{ds^p} U(s). \quad (5.20)$$

En multipliant cette expression par s^{p+1} , il vient :

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{p!}{i!} s^{p+i+1} \frac{d^i(Y(s))}{ds^i} = (-1)^p p! a_0 + b_0 s^{p+1} \frac{d^p}{ds^p} U(s). \quad (5.21)$$

Par suite, pour supprimer le paramètre a_0 , dérivons à nouveau par rapport à s . Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{p!}{i!} s^{p+i} \left((p+i+1) \frac{d^i(Y(s))}{ds^i} + s \frac{d^{i+1}(Y(s))}{ds^{i+1}} \right) \\
 & = b_0 \left((p+1) s^p \frac{d^p U(s)}{ds^p} + s^{p+1} \frac{d^{p+1} U(s)}{ds^{p+1}} \right). \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

En multipliant par $s^{-(2p+2)}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{p!}{i!} s^{-p+i-2} \left((p+i+1) \frac{d^i(Y(s))}{ds^i} + s \frac{d^{i+1}(Y(s))}{ds^{i+1}} \right) \\
 & = b_0 \left((p+1) s^{-p-2} \frac{d^p U(s)}{ds^p} + s^{-p-1} \frac{d^{p+1} U(s)}{ds^{p+1}} \right). \tag{5.23}
 \end{aligned}$$

L'utilisation de la transformée inverse de Laplace permet de revenir dans le domaine temporel. Pour $i < j$, on a :

$$\mathcal{L}^{-1} \left(s^{i-j} \frac{d^i Y(s)}{ds^i} \right) = \int_0^t \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{(j-i)-1}} (-z)^i y(z) dz,$$

ce qui nous permet d'obtenir une estimation du paramètre b_0 , par la relation $b_0 = \frac{n(t)}{d(t)}$ dans laquelle :

$$\begin{aligned}
 n(t) &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{p!}{i!} (p+i+1) \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{(p+1-i)}} (-\tau)^i y(\tau) d\tau \\
 &+ \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{p!}{i!} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{(p-i)}} (-\tau)^{i+1} y(\tau) d\tau \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(t) &= (p+1) \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{p+1}} (-\tau)^p u(\tau) d\tau \\
 &+ \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_p} (-\tau)^{p+1} u(\tau) d\tau. \tag{5.25}
 \end{aligned}$$

Ces intégrales multiples peuvent être transformées, en utilisant la relation (5.9), ce qui donne :

$$b_0 = \frac{\int_0^t P(t, \tau) y(\tau) d\tau}{\int_0^t Q(t, \tau) u(\tau) d\tau},$$

avec

$$P(t, \tau) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i}^2 (t - \tau)^{p-i} (-\tau)^i \left[\frac{(p+i+1)}{(p-i+1)} (t - \tau) - \tau \right],$$

$$Q(t, \tau) = (-\tau)^p \frac{(t - \tau)^p}{p!} (t - 2\tau).$$

Estimation de a_0 :

Comme précédemment, maintenant que nous avons une estimation du paramètre b_0 , en la combinant avec l'équation (5.20), multipliée par (s^{-p-1}) , on peut obtenir directement l'estimation de a_0 par l'utilisation de la transformée inverse de Laplace. En effet, on a :

$$\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{p!}{i!} s^{i-p-1} \frac{d^i(Y(s))}{ds^i} = (-1)^p p! a_0 s^{-2(p+1)} + b_0 s^{-(p+1)} \frac{d^p}{ds^p} U(s). \quad (5.26)$$

On retourne dans le domaine par la transformée inverse de Laplace, et l'on peut obtenir la relation :

$$s_a(t) = a_0 \alpha_a(t) + b_0 r_a(t),$$

dans laquelle :

$$s_a(t) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \frac{p!}{i!} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{p-i}} (-\tau)^i y(\tau) d\tau \quad (5.27)$$

$$r_a(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_p} (-\tau)^p u(\tau) d\tau \quad (5.28)$$

$$\alpha_a(t) = (-1)^p p! \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}. \quad (5.29)$$

Ce qui donne, en transformant les intégrales multiples par la relation (5.9), l'expression de a_0 suivante :

En revenant dans le domaine temporel, il vient :

$$a_0 = \frac{b_0 \int_0^t R(t, \tau) u(\tau) d\tau + \int_0^t S(t, \tau) y(\tau) d\tau}{t^{2p+1}},$$

avec

$$S(t, \tau) = (-1)^p \frac{(2p+1)!}{p!} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i}^2 (t - \tau)^{p-i} (-\tau)^i,$$

$$R(t, \tau) = \tau^p \frac{(2p+1)! (t - \tau)^p}{(p!)^2}.$$

Nous pouvons remarquer au passage que si l'on applique les formules pour $p = 1$, on retrouve bien les coefficients des polynômes P_1 , Q_1 , R_1 et S_1 calculés précédemment.

Nous avons ici mis en avant les outils mathématiques qui sont à la base du développement de notre loi de commande. Nous n'avons présenté ici que les calculs pour une approximation des fonctions $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ par des constantes. Pour ne pas perdre en clarté, nous ne détaillerons pas la généralisation dans ce mémoire. Pour le lecteur qui voudrait dépasser l'ordre 0, il faut alors procéder à une démarche similaire, constructive, qui permet d'obtenir un par un les divers coefficients à estimer.

Avant de présenter les résultats obtenus, nous faisons dans la partie suivante différents commentaires sur la procédure mise en place.

5.4 Quelques commentaires sur la procédure de commande

5.4.1 Commentaires sur l'hypothèse 5.2.1

Regardons de plus près l'équation (5.6). Pour que notre procédure soit valide, nous avons évoqué la nécessité d'estimer les paramètres $a_{\sigma(t)}(\cdot)$ et $b_{\sigma(t)}(\cdot)$. Cependant, dans notre évaluation, le paramètre $a_{\sigma(t)}(\cdot)$ peut contenir les effets de la commande u , par conséquent, nous n'avons pas besoin d'une estimation très précise de $b_{\sigma(t)}(\cdot)$, mais uniquement d'un ordre de grandeur. Autrement dit, les erreurs d'estimations sur le paramètre $b_{\sigma(t)}(\cdot)$ seront compensées dans l'estimation de $a_{\sigma(t)}(\cdot)$. Ceci nous amène alors à distinguer deux cas d'étude : si dans notre famille f_i de sous-systèmes (5.5), on peut trouver un entier p tel que, dans la réécriture (5.6) de notre système à commutation, les coefficients b_i sont :

- 1) de même ordre de grandeur : nous ne procédons pas à l'estimation de $b_{\sigma(t)}(\cdot)$.
- 2) différents d'un sous-système à l'autre, alors nous procédons à une estimation en ligne de ce paramètre.

Il est clair que si l'on procède à l'estimation de $b_{\sigma(t)}(\cdot)$, notre contrôle sera toujours opérationnel alors que ne pas l'estimer pourrait entraîner l'instabilité de notre système. On peut se demander alors pourquoi distinguer ces deux cas. Si nous avons quand même voulu procéder à cette distinction, l'explication se trouve dans l'implémentation numérique de notre loi de commande, qui est bien plus simple et bien plus efficace dans le premier cas.

Ceci nous amène alors à vérifier des conditions un peu différentes dans chacun des cas.

5.4.1.1 Conditions requises dans le premier cas

Quand les coefficients b_i sont de même ordre de grandeurs, pour pouvoir exécuter notre procédé, nous devons vérifier les conditions suivantes :

- 1) $\forall i \in \Gamma$: il existe un ensemble d'entiers $p_{i,j} \in \{1, \dots, p_i\}$, que l'on note P_i , tel que $\frac{\partial f_i}{\partial y^{(p_{i,j})}} \neq 0$. Par suite, définissons p par $p = \min(\cap_i P_i)$, qui est le plus petit entier tel que, pour $i \in \Gamma$, $\frac{\partial f_i}{\partial y^{(p)}} \neq 0$. Par suite, par le théorème de la forme implicite, on a, au moins localement :

$$y^{(p)} = F_{\sigma(t)}(t, y, \dots, y^{(p-1)}, y^{(p+1)}, \dots, y^{(n_{\sigma(t)})}, u, d). \quad (5.30)$$

- 2) $\forall i \in \Gamma$: $\frac{\partial f_i}{\partial u} \Big|_{u=0} \neq 0$, donc par une modélisation physique du système, ou par diverses expériences, on peut alors obtenir une estimation grossière du coefficient $\alpha_i = \frac{\partial F_i}{\partial u} \Big|_{u=0}$. Par suite, on a alors $\alpha_{\sigma(t)} \in [m, M] : \alpha_{\sigma(t)}$ qui est de l'ordre de grandeur de 10^o , $o \in \mathbb{N}$. Nous verrons dans la section suivante en quoi cette ordre de grandeur a de l'importance. On peut finalement réécrire l'équation (5.30) sous la forme suivante :

$$y^{(p)} = a_{\sigma(t)}(\cdot) + 10^o u. \quad (5.31)$$

5.4.1.2 Conditions requises dans le second cas

- 1) $\forall i \in \Gamma$, il existe un entier $p \in \{1, \dots, p_i\}$ tel que $\frac{\partial f_i}{\partial y^{(p)}} \neq 0$, et donc par suite on retombe sur l'équation (5.30).
- 2) $\forall i \in \Gamma$: $\frac{\partial f_i}{\partial u} \Big|_{u=0} \neq 0$, et on peut réécrire le système (5.30) sous la forme :

$$y^{(p)} = a_{\sigma(t)}(\cdot) + b_{\sigma(t)}(\cdot)u. \quad (5.32)$$

Remarquons qu'en pratique, choisir $p = 1$ ou $p = 2$ est suffisant dans la plupart des cas, ce qui n'implique en rien que le système étudié est du premier ou du second ordre !

5.4.2 Commentaires sur l'implémentation numérique

Nous mettons en avant dans cette section quelques petites remarques quant à l'implémentation numérique de notre commande. Les problèmes que l'on va rencontrer sont liés au passage d'une étude en temps continu à une loi de commande numérique, et donc par conséquent,

en temps discret. Nous vérifions notamment que notre discrétisation assure la convergence de l'erreur d'estimation.

Regardons de plus près notre contrôle. Dans l'équation (5.2), on peut remarquer que celui-ci est de type continu. Cependant, en pratique, pour pouvoir l'implémenter, une discrétisation est nécessaire. Notons la période d'échantillonnage par T_s . Par suite, la version discrète de notre contrôleur (5.2) devient :

$$\begin{aligned}
 [b(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s)u(kT_s) &= -[a(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s) + y_{\text{ref}}^{(p)}(kT_s) \\
 &\quad - \sum_{i=-1}^{(p-1)} \alpha_i \left([y^{(i)}]_{\text{estim}}(kT_s) - y_{\text{ref}}^{(i)}(kT_s) \right).
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Les estimations $[a(\cdot)]_{\text{estim}}$, $[b(\cdot)]_{\text{estim}}$ et $[y^{(i)}]_{\text{estim}}$ sont effectuées sur une fenêtre glissante de durée⁹ $T_{\text{fen}} = \kappa T_s$, en ne prenant en compte que les valeurs successives de la sortie mesurée et de l'entrée. L'utilisation d'une fenêtre glissante entraîne alors les erreurs d'estimations.

Partons de l'équation (5.32). On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 y^{(p)}(kT_s) &\cong \left[y^{(p)}(kT_s) \right]_{\text{estim}} + o(T_s) \\
 &= a_{\sigma(t)}(\cdot)|_{(kT_s)} + b_{\sigma(t)}(\cdot)|_{(kT_s)} u(kT_s).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut obtenir directement $[a(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s)$, en utilisant :

$$[a(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s) \cong \left[y^{(p)}(kT_s) \right]_{\text{estim}} - [b_{\sigma(t)}(\cdot)]_{\text{estim}} u(kT_s).$$

Si nous reportons maintenant cette expression dans l'équation (5.33), nous faisons apparaître une *boucle algébrique*, qui ne nous permet plus d'exprimer la loi de commande. En effet, on obtiendrait la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 [b(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s)u(kT_s) &= [b(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s)u(kT_s) + y_{\text{ref}}^{(p)}(kT_s) - \left[y^{(i)} \right]_{\text{estim}} \\
 &\quad - \sum_{i=-1}^{(p-1)} \alpha_i \left(\left[y^{(i)} \right]_{\text{estim}}(kT_s) - y_{\text{ref}}^{(i)}(kT_s) \right),
 \end{aligned}$$

⁹En pratique, on choisit κ entre 100 et 300, et par suite, la fenêtre glissante est de la forme $[kT_s - T_{\text{window}}, kT_s]$.

qui ne nous permet plus d'exprimer le contrôle !

On peut cependant palier ce problème, en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} [a(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s) &\cong [a(\cdot)]_{\text{estim}}((k-1)T_s), \\ [b(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s) &\cong [b(\cdot)]_{\text{estim}}((k-1)T_s). \end{aligned}$$

Ce qui amène alors à exprimer le contrôle $u(kT_s)$ pour $t \in [kT_s, (k+1)T_s[$ par la relation :

$$\begin{aligned} [b_{\sigma(t)(\cdot)}]_{\text{estim}}(kT_s) [u(kT_s) - u((k-1)T_s)] = \\ y_{\text{ref}}^{(p)}(kT_s) - [y^{(p)}]_{\text{estim}}((k-1)T_s) - \sum_{i=-1}^{p-1} \alpha_i \left([y^{(i)}]_{\text{estim}} - y_{\text{ref}}^{(i)} \right) \Big|_{kT_s}. \end{aligned}$$

On exprime ainsi la commande à l'instant kT_s en fonction de la commande précédente. Ce qui nous permet, en reportant maintenant ce résultat dans la relation (5.32), d'obtenir la relation sur l'intervalle $[kT_s, (k+1)T_s[$:

$$\begin{aligned} y^{(p)}(t) = &a_{\sigma(t)(\cdot)}(t) + \frac{b_{\sigma(t)(\cdot)}(t)}{[b_{\sigma(t)(\cdot)}]_{\text{estim}}(kT_s)} \left(y_{\text{ref}}^{(p)}(kT_s) - [y^{(p)}]_{\text{estim}}((k-1)T_s) \right) \\ &- \frac{b_{\sigma(t)(\cdot)}(t)}{[b_{\sigma(t)(\cdot)}]_{\text{estim}}(kT_s)} \left(\sum_{i=-1}^{p-1} \alpha_i \left([y^{(i)}]_{\text{estim}} - y_{\text{ref}}^{(i)} \right) \Big|_{kT_s} + [b_{\sigma(t)(\cdot)}]_{\text{estim}}((k-1)T_s) \right), \end{aligned}$$

Ce qui donne alors, partant du fait que $\frac{b_{\sigma(t)(\cdot)}(t)}{[b_{\sigma(t)(\cdot)}]_{\text{estim}}(kT_s)} \cong 1$, l'expression :

$$y^{(p)}(t) - y_{\text{ref}}^{(p)}(kT_s) = [a_{\sigma(t)(\cdot)}(t) - [a(\cdot)]_{\text{estim}}(kT_s)] \tag{5.34}$$

$$- \sum_{i=-1}^{p-1} \alpha_i \left([y^{(i)}]_{\text{estim}} - y_{\text{ref}}^{(i)} \right) \Big|_{kT_s}. \tag{5.35}$$

Ainsi, si sur cet intervalle de temps aucune commutation n'est effectuée, on peut vérifier, si $a_{\sigma(t)}$ est suffisamment régulière, que :

$$\left| a_{\sigma(t)(\cdot)}(t) - [a(\cdot)]_{\text{estim}} \Big|_{kT_s} \right| = o(T_s). \tag{5.36}$$

On constate alors qu'il en est de même pour les dérivées temporelles de notre signal de sortie : si aucune commutation n'a lieu durant cette période, on a :

$$\left| \left[y^{(i)} \right]_{\text{estim}}(kT_s) - y^{(i)}(t) \right| = o(T_s). \quad (5.37)$$

Si l'on regarde maintenant ce qu'il en est de notre erreur d'estimation ($e_y = y(t) - y_{\text{ref}}(t)$), on peut donc, en utilisant les relations (5.36) et (5.37), constater que :

$$e_y^{(p)} + \sum_{i=-1}^{p-1} \alpha_i e_y^{(i)} = o(T_s), \text{ pour } t \in [kT_s, (k+1)T_s],$$

qui assure la stabilité tant qu'aucune commutation n'est présente.

Nous venons de nous assurer que notre algorithme était correct quand aucune commutation n'a lieu. La partie suivante s'attache à vérifier la stabilité du système à commutation.

5.4.3 Stabilité pratique en boucle fermée

Revenons un instant sur notre démarche. Nous procédons à une estimation en ligne de paramètres et de dérivées. Au bout d'une durée égale à la longueur de la fenêtre glissante, notre estimateur est adapté, et dès lors on peut stabiliser correctement notre système. En ajustant les coefficients de notre P.I.D., on peut alors définir un temps de réponse t_r de notre système en boucle fermée. Par conséquent, après un temps total de $T_{\text{fen}} + t_r$, l'erreur de suivi est proche de zéro.

Si l'on combine alors ce résultat avec ce que nous avons vu sur le dwell-time¹⁰, nous pouvons alors garantir que pour assurer la stabilité de notre système, nous devons vérifier que :

$$T_{\text{window}} + t_r < T_{\text{min}}^{\text{active}}, \quad (5.38)$$

dans laquelle $T_{\text{min}}^{\text{active}}$ correspond au temps minimum autorisé entre deux commutations.

Sachant que le temps de réponse t_r peut être choisi par le réglage du P.I.D et que la taille de notre fenêtre glissante est $T_{\text{fen}} = \kappa T_s$, notons que l'inéquation (5.38) définit une règle pour choisir la période d'échantillonnage en connaissant que le temps d'activation $T_{\text{min}}^{\text{active}}$:

$$T_s < \frac{T_{\text{min}}^{\text{active}} - t_r}{\kappa}. \quad (5.39)$$

¹⁰Voir par exemple la partie 1.3.4.1, section B.

Maintenant, on peut facilement en déduire, d'après la section 5.4.2, que l'erreur de suivi sera comprise dans une boule de rayon $o(T_s)$, centrée à l'origine. Nous ne pouvons pas cependant qualifier la stabilité obtenue d'asymptotique mais de pratique. En effet, le fait d'introduire un échantillonnage ne peut garantir la convergence asymptotique vers l'équilibre (erreur qui persiste entre deux instants d'échantillonnage). De plus, lorsque qu'une commutation apparaît, les estimations effectuées ne sont pas correctes *avant* une durée égale à la taille de la fenêtre glissante, et par conséquent le contrôle appliqué ne permet pas de stabiliser le système durant cette période, voire peut engendrer une trajectoire aberrante. C'est ce qu'illustre la figure (5.3), et c'est un point sur lequel nos recherches se poursuivent, à savoir réduire l'influence du contrôle après une commutation.

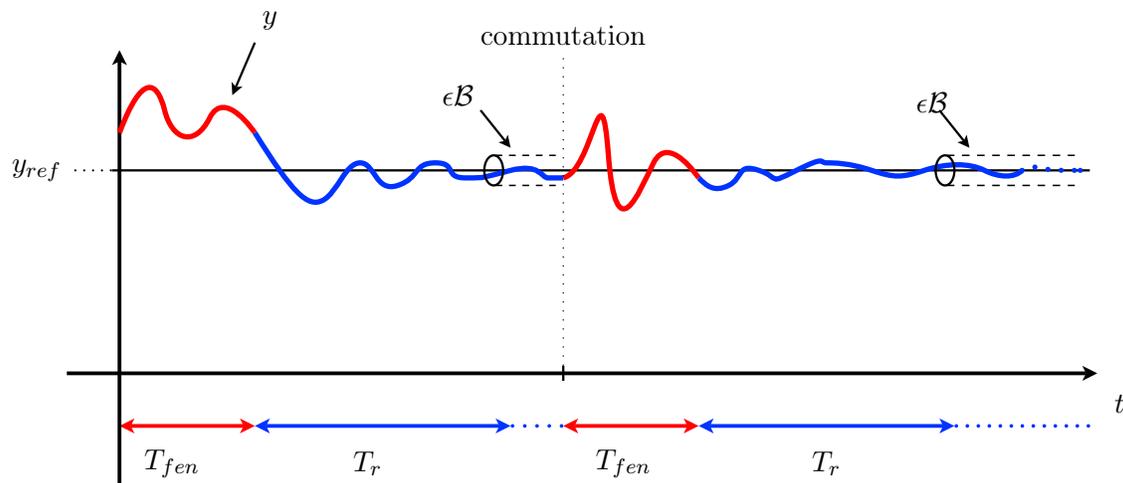


Figure 5.3 – Suivi de trajectoire : effet d'une commutation

Nous retrouverons ce phénomène dans la partie suivante dans laquelle nous illustrons la démarche effectuée dans ce chapitre par une batterie d'exemples.

5.5 Exemples

Afin de démontrer l'efficacité de nos résultats, nous proposons dans cette section de les utiliser sur un exemple de système à commutation, que nous définissons ainsi :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_i(x) + g_i(x)u + d, & x \in \mathbb{R}^{n_i} \\ y &= h_i(x, u) + n,\end{aligned}$$

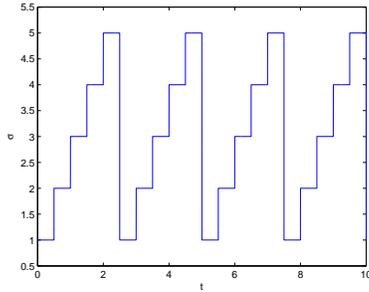
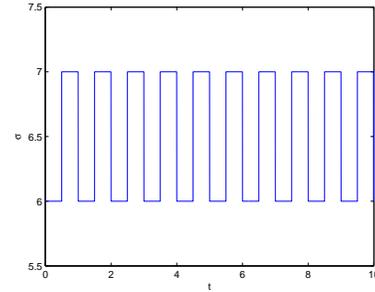
dans lequel n est un bruit, d est une perturbation, et les autres fonctions qui composent notre système hybride sont données dans le tableau récapitulatif suivant :

i	$f_i(x)$	$g_i(x)$	$h_i(x, u)$	n
1	$-x$	1	x	1
2	$2x$	1	x	1
3	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_1 + 3x_2 + x_3$	3
4	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$	2
5	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x$	2
6	$5x + 10 \sin(x)$	1	x	1
7	$-2x + 10 \exp(x)$	1	x	1

Nous avons pris soin de choisir des sous-systèmes de natures différentes, linéaire et stable ($i = 1$), linéaires et instables ($i = 2, 3, 4, 5$) et même non linéaires ($i = 6, 7$) ; Par ailleurs, la dimension de l'espace d'état n'est pas la même d'un sous-système à l'autre.

Notre signal de commutation active arbitrairement l'un des sous-systèmes, avec pour seule contrainte une commutation toutes les demi-secondes, $T_{\min}^{\text{active}} = 0.5$ s. Le temps de réponse désiré est calibré à $t_r = 0.4$ s, et le nombre de points choisi sur notre fenêtre glissante est de $\kappa = 100$. Nous avons par conséquent choisi comme temps d'échantillonnage la période $T_s = 0.001$ s. Notons qu'avec ces critères, la taille de notre fenêtre glissante est de $T_{\text{fen}} = \kappa T_s =$, soit 0.1 s. On pourrait penser que plus la fenêtre glissante est petite, plus notre estimation est rapide, et donc plus on arriverait à stabiliser vite notre système, ceci étant, si la fenêtre est trop petite, l'estimation portera non plus sur le signal mais uniquement sur le bruit et les perturbations. Il faut donc faire attention à choisir *judicieusement* la taille de cette fenêtre.

Dans les deux premières figures, étant donné que les coefficients b_i sont de même ordre de grandeur, on se retrouve dans le cas 1, équation (5.31), avec $p = 1$. Par conséquent, on utilise le contrôle donné par l'équation (5.34) avec les estimations de dérivées données par (5.10).

Figure 5.4 – Loi de commutation σ_1 Figure 5.5 – Loi de commutation σ_2

Dans la figure 5.6 précédente, le signal de commutation active successivement chacun des sous-systèmes. Comme nous pouvons le remarquer, le temps entre deux commutations est suffisant pour assurer l'estimation en ligne des dérivées, tout comme la convergence de l'erreur de suivi.

La figure 5.7 quant à elle met en avant les simulations obtenues dans un cadre perturbé, avec du bruit supplémentaire qui incluent des dynamiques non linéaires. Si du bruit apparaît dans l'estimation des dérivées, la loi de commande garantit néanmoins la régulation, même quand une grosse perturbation apparaît à $t = 3s$.

Comme l'illustrent les différentes figures, les techniques présentées donnent des résultats encourageants, et le contrôle obtenu assure le suivi de trajectoire. Mais la commande proposée ne reste valable que pour des sous-systèmes qui ont des paramètres b_i de même ordre de grandeur dans la représentation (5.6). En effet, si l'on reprend l'exemple introductif de la boîte de transmission, les coefficients $\frac{T(i)}{M}$ ont des valeurs assez différentes¹¹, parmi $\{1, 5, 10, 30, 50\}$. Par suite, la loi de commande (5.33), sans une estimation préalable de ce coefficient, n'est plus suffisante pour obtenir un suivi de trajectoire satisfaisant. C'est ce qu'illustre la figure 5.8 : les oscillations qui apparaissent sont les conséquences directes de la non-estimation du paramètre b . Si l'on peut croire que les oscillations se réduisent, ce n'est que la conséquence des commutations qui réactivent un sous-système pour lequel l'estimation n'est pas nécessaire. C'est pour cette raison que nous avons appliqué en introduction un contrôle de la forme (5.33) avec en plus une estimation en ligne du paramètre b donné par l'équation (5.14).

¹¹Évidemment, le comportement de la voiture est différent entre la première vitesse et la dernière.

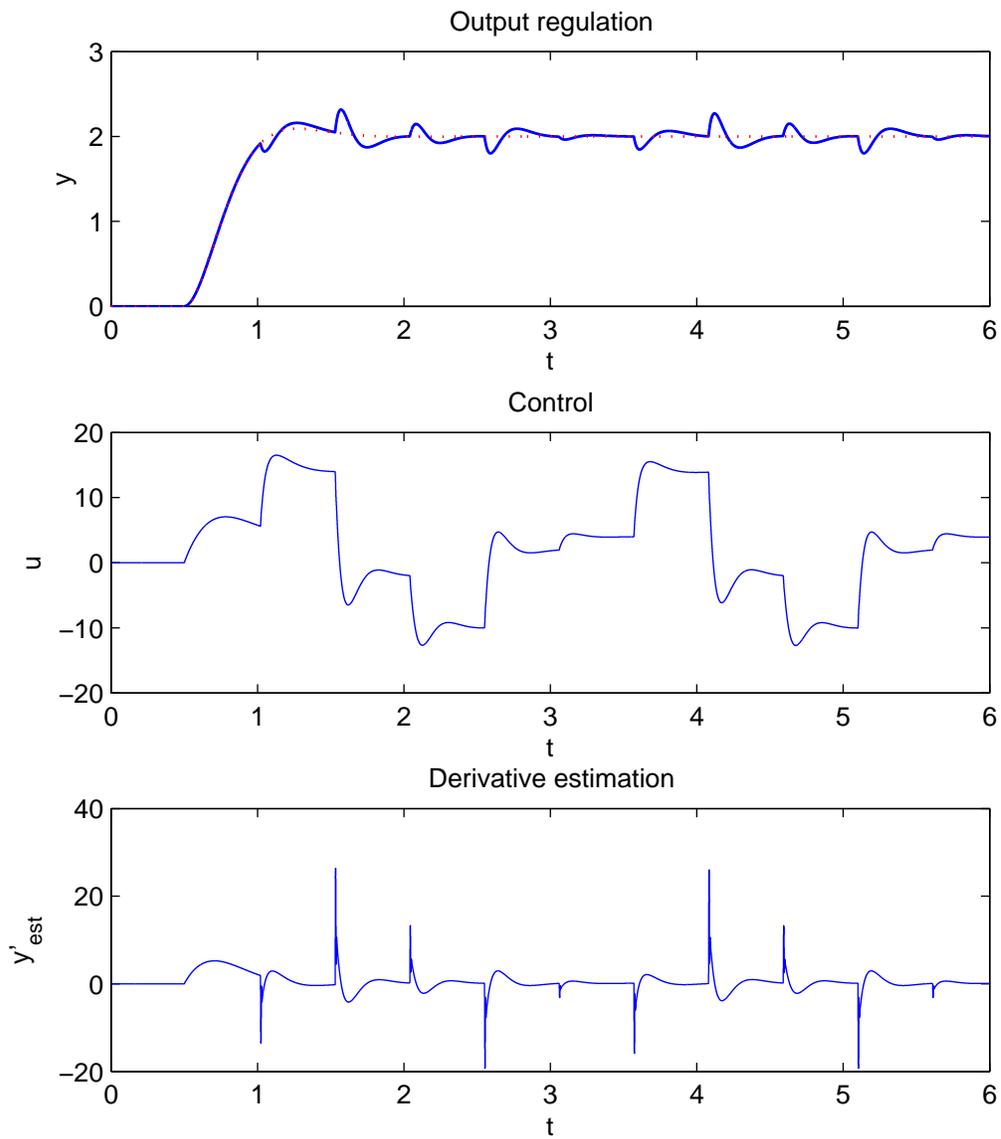


Figure 5.6 – Simulations obtenues dans le cas linéaire, loi de commutation σ_1

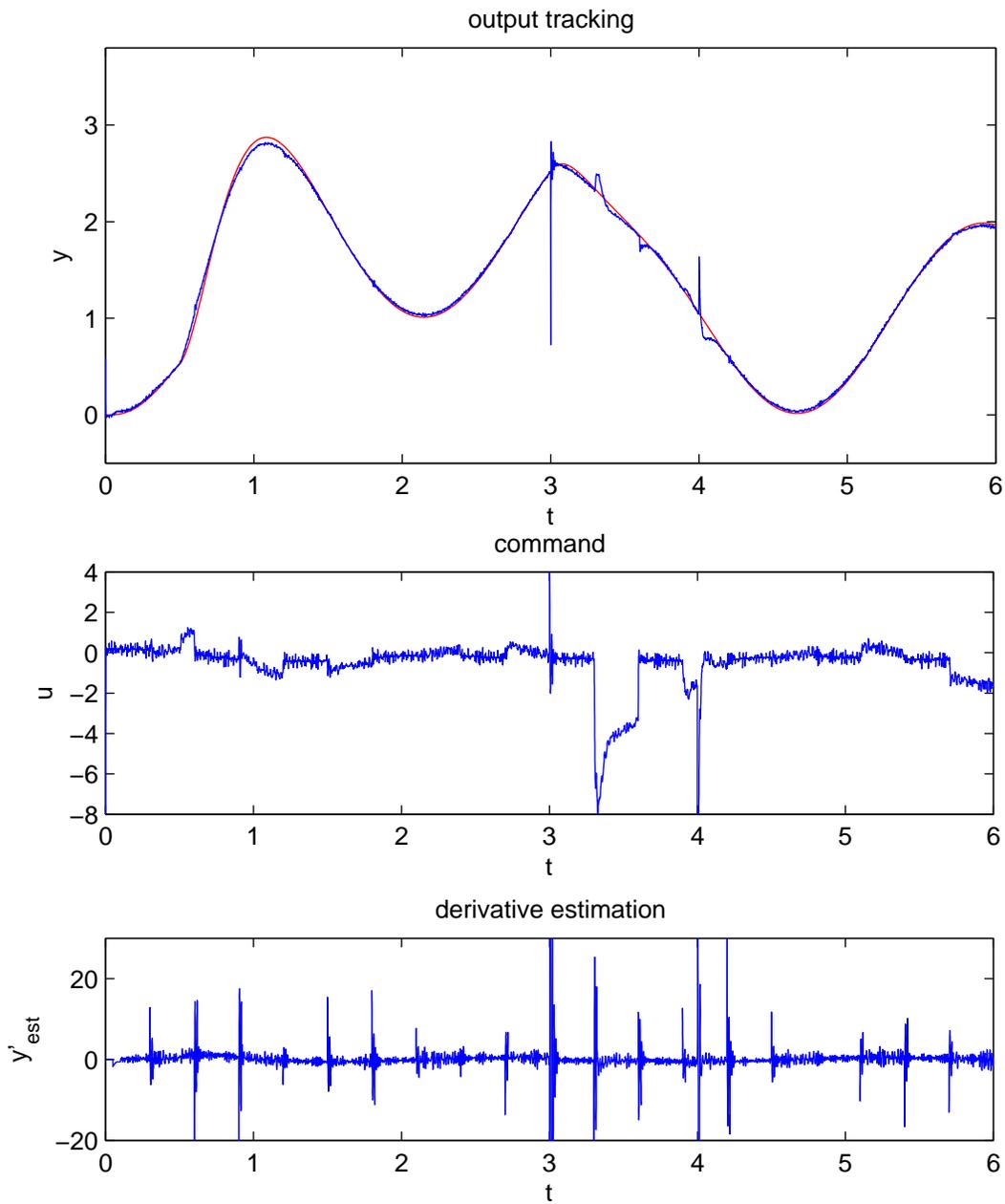


Figure 5.7 – Simulations obtenues dans le cas non linéaire, loi de commutation σ_2

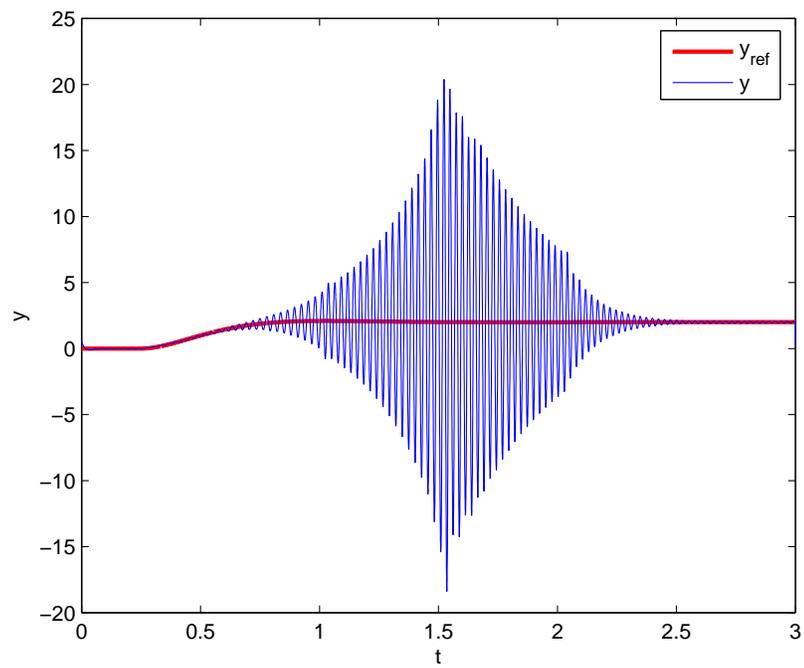


Figure 5.8 – Simulation sans l'estimation du paramètre b

5.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, et contrairement aux autres, nous avons approché les systèmes à commutation sans avoir de description précise des sous-dynamiques. L'idée principale développée est d'utiliser des techniques algébriques pour obtenir des estimations rapides de paramètres et de dérivées, et ce, même en présence de bruits de mesure. Par suite, nous avons donné une formule explicite de la loi de commande pour qu'elle assure un suivi de trajectoire. Une partie de ce chapitre illustre les résultats par de nombreuses simulations.

L'utilisation de telles techniques n'est permise et efficace que si le temps entre les commutations est suffisamment grand pour permettre tant l'identification en ligne que la stabilisation du système par un contrôleur PID. Lorsqu'une commutation se produit, le contrôleur mis en place n'est plus adapté durant le temps d'estimation. Une piste de travail en cours de développement est d'améliorer la qualité de notre algorithme de commande, pour limiter l'influence du contrôleur durant cette période. Une autre piste de travail est aussi d'utiliser ces méthodes algébriques pour détecter les commutations au sein du système.

Conclusion générale et perspectives

*À Marcos, À la joie,
À la beauté des rêves
À la mélancolie, À l'espoir qui nous tient
À la santé du feu, et de la flamme
À ton étoile*

— B. Cantat¹

L'ENSEMBLE de ce mémoire est dévolu à l'étude des systèmes à commutation. Quatre points particuliers ont été développés dans les chapitres présentés, à savoir, la stabilisation conditionnelle par construction du signal de commutation, la stabilisation uniforme par retour d'état, la commande sans modèle par estimation rapide et enfin la définition d'un modèle formel pour représenter des restrictions sur la loi de commutation. Dans chaque chapitre, ces problèmes sont définis et analysés, par suite les différentes contributions que nous apportons sont mises en évidence. Il s'agit ici d'exposer les temps forts de cette étude et, en particulier, de dégager les futures pistes de recherches envisagées.



Synthèse

Cette thèse est construite autour de la problématique de la commande des systèmes non linéaires à commutation.

Le chapitre 1 présente, dans un premier temps, les systèmes à commutation ainsi que divers résultats trouvés dans la littérature, concernant l'étude de leur stabilité. De par leur nature, cette analyse se fait, soit pour une séquence de commutation donnée, soit pour un ensemble de séquences. Nous y rappelons ainsi les définitions et théorèmes généraux de ces deux dernières décennies, puis y développons également quelques points spécifiques qui nous sont utiles dans les chapitres suivants. Cette étude permet de mettre en avant quelques verrous scientifiques dans

¹Bertrand Cantat, extrait de la chanson *À ton étoile*.

l'étude des systèmes à commutation, notamment quand les sous-systèmes sont non linéaires. Nous préparons ainsi les investigations qui sont menées dans la suite du mémoire.

Le chapitre 2 propose une solution au problème suivant : comment construire une séquence de commutation qui assure la **stabilité conditionnelle**, quand les champs de vecteurs sont non linéaires et que le point d'équilibre est instable? L'idée développée est, par un jeu de réécriture, de transformer un système non linéaire en une somme polytopique de systèmes linéaires à pondérations non linéaires. À partir de cette reformulation, des conditions suffisantes sont exprimées et permettent ainsi d'exhiber une loi de commutation qui stabilise le système.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons au problème de la **stabilisation uniforme** d'un système contrôlé à commutation. Le problème est alors de trouver sous quelles conditions notre système est asymptotiquement stable, quelle que soit la séquence de commutation appliquée. Nous y dégagons ainsi une condition nécessaire et suffisante, qui repose sur l'existence d'une notion que nous introduisons : la notion de fonction de Lyapunov contrôlée commune. Nous proposons par suite une loi de commande explicite, construite sur cette fonction de Lyapunov. Devant la difficulté à exhiber une fonction de Lyapunov contrôlée commune, une dernière partie s'attache à développer un critère de construction à partir d'une famille de fonctions de Lyapunov contrôlées.

Dans ces premiers chapitres, on recherche des conditions de stabilité, uniforme ou conditionnelle, qui n'imposent aucune réserve quant à la structure des commutations. Par conséquent, ces études peuvent s'avérer trop contraignantes, ou en désaccord avec la physique du système. C'est ce qui a motivé les travaux du chapitre 4, dans lequel nous définissons dans une première partie un modèle formel pour décrire un système à commutation dont la loi de commutation respecte un ensemble de contraintes, temporelles et non quelconques. Une partie de ce modèle est composée d'un réseau de Petri temporel dont l'analyse permet de définir un **ensemble réduit de lois de commutation admissibles**. La seconde partie du chapitre consiste à présenter comment un tel modèle peut servir à l'étude de la stabilité du système à commutation considéré.

Le chapitre 5 approche la commande des systèmes à commutation, sans connaître ni description précise des sous-dynamiques ni même connaître les instants de commutation. Pour ce faire, l'idée est d'utiliser des méthodes algébriques pour faire de l'estimation rapide de la dynamique et des dérivées successives de la sortie. Après une première partie consacrée à expliquer notre démarche, nous mettons en avant, dans un second temps, l'efficacité de nos travaux en appliquant les résultats à une famille de sous-systèmes, non linéaires, non autonomes, et même en présence de bruit de mesure.

Le tableau suivant récapitule brièvement les hypothèses relatives à chacun des chapitres et les résultats obtenus ².

Chapitres	Sous-systèmes	Loi de commutation	Résultats
2	Connus, Non Linéaires, Autonomes, Instables.	A construire, Contrôlable.	Stabilisation conditionnelle, CS - Loi de commande.
3	Connus, Non Linéaires, Autonomes, Contrôlés.	Connue, Non contrôlable.	Stabilisation uniforme, CNS - Loi de commande.
4	Connus, Non Linéaires, Autonomes, Stable ou non.	Restreinte.	Modèle formel.
5	Inconnus, Non Linéaires, Non Autonomes, Contrôlés.	Inconnue, Non contrôlable.	Stabilisation pratique, Loi de commande.

Problèmes ouverts

A l'issue de ce mémoire, plusieurs problèmes demeurent toutefois en suspens. Nous présentons ici ce qui nous semble être le cadre d'investigations où des avancées importantes sont tout à fait envisageables.

Le chapitre 2 met en avant l'utilisation d'une représentation polytopique d'un système à commutation pour étudier la stabilité quadratique. Les conditions suffisantes proposées peuvent être relâchées en s'intéressant à la stabilité non quadratique de ces systèmes. Par ailleurs, une étude en temps discret des systèmes peut également amener à des conditions plus souples pour construire une règle de commutation.

Dans le chapitre 3, l'approche proposée repose sur une fonction de Lyapunov contrôlée commune. Dans un système différentiel ordinaire, il existe un lien entre une fonction de Lyapunov

²Les acronymes suivants ont été utilisés : CS : condition suffisante, CNS : condition nécessaire et suffisante.

punov contrôlée et la commande optimale. Une des perspectives de travail est d'utiliser cette approche pour pouvoir résoudre des problèmes de commande optimale pour les systèmes à commutation. Une autre piste de recherche peut être l'utilisation de la fonction de Lyapunov contrôlée commune pour le rejet de perturbations.

Le chapitre 4 définit un modèle hybride pour caractériser un ensemble réduit de scénarios. Une des pistes de travail est d'utiliser cet ensemble réduit pour dégager des conditions de stabilité relâchées. Notons que les discussions récentes que nous avons pu avoir avec A. Giua nous incitent également à aborder les aspects cycliques de tels systèmes par des techniques de commande optimale. Mes premières expériences dans le monde de la recherche furent consacrées à la modélisation de systèmes collaboratifs par des réseaux de Petri [Bourdais et al., 2004] et [Bourdais et al., 2006c]. Si dans un souci de cohérence par rapport au reste du travail effectué, nous avons pris soin de ne pas les présenter dans ce mémoire, l'introduction des dynamiques continues peut s'avérer une piste intéressante pour compléter l'analyse des modèles proposés.

Dans le dernier chapitre, nous utilisons des méthodes algébriques pour proposer une commande sans modèle des systèmes à commutation. Il est clair que l'algorithme proposé, bien que donnant des résultats convainquants, peut être largement amélioré, notamment en limitant l'influence du contrôleur durant les instants qui suivent une commutation. Pour ce faire, l'utilisation de détecteurs de rupture peut être un outil plus qu'intéressant. C'est notamment dans ces directions que s'orientent les travaux que nous menons actuellement. Enfin, il serait bien de pouvoir relâcher l'hypothèse cruciale des sous-systèmes à non minimum de phase.

De manière plus générale, notre contribution est placée sous le sceau de la théorie. Notre laboratoire dispose de différents robots mobiles (Peekee, Miabot), une des perspectives est d'appliquer les divers résultats obtenus, notamment sur la commande sans modèle, à des systèmes de robots coopératifs.

ANNEXES



Figure 9 – Dessin de Franquin dans *Gaston Lagaffe*, n°15, page 19

Rappels sur les réseaux de Petri

Nous rappelons ici les premières définitions et notions consacrées aux réseaux de Petri. L'idée de cet annexe est de permettre à tout lecteur non initié d'avoir une vision assez globale de ce qu'est un réseau de Petri. Nous proposons également quelques notions de logique temporelle, qui pourra être utile pour approfondir des pistes de travail évoquées dans la partie 4 (Recherche d'accessibilité dans les réseaux de Petri temporels).



A.1 Présentation générale

Les réseaux de Petri (RdP, PN¹) ont été introduits par C.A. Petri, en 1962, qu'il présente dans sa thèse [Petri, 1962], afin de modéliser la composition et la communication entre automates. Les réseaux de Petri, comme peuvent l'être les équations différentielles, sont un **formalisme mathématique**. Ils se fondent sur quelques objets, relations et règles simples, mais permettent de représenter des comportements très complexes. Plus précisément, il s'agit d'un outil théorique, s'appuyant sur les graphes, particulièrement adapté pour la modélisation et l'analyse des systèmes à événements discrets. Ils permettent de prendre en compte les notions de parallélisme, de synchronisation et de ressources, et sont utilisés par exemple dans l'étude des réseaux de communication, des systèmes de transport ou de production manufacturière.

La présentation qui suit s'inspire largement des définitions et propriétés énoncées par Murata dans [Murata, 1989] et par Diaz dans [Diaz, 2001] et [Diaz, 2003].

¹De l'anglais, Petri Net.

A.2 Les réseaux de Petri places/transitions

A.2.1 Définition formelle

Définition A.2.1 (Réseau de Petri places/transitions). *Un réseau de Petri places/transitions R est un triplet $(\mathbb{P}, \mathbb{T}, W)$ défini par la donnée :*

- d'un ensemble fini non vide de **places** $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_m\}$, où $|\mathbb{P}|$ est le nombre de places ;
- d'un ensemble fini non vide de **transitions** $\mathbb{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$, où $|\mathbb{T}|$ est le nombre de transitions, avec $\mathbb{P} \cap \mathbb{T} = \emptyset$;
- d'une **relation d'incidence** $W : \mathbb{P} \times \mathbb{T} \cup \mathbb{T} \times \mathbb{P} \mapsto \mathbb{N}$ correspondant aux arcs :
 - $W(p, t)_{p \in \mathbb{P}, t \in \mathbb{T}}$ contient la valeur entière associée à l'arc allant de p à t ;
 - $W(t, p)_{p \in \mathbb{P}, t \in \mathbb{T}}$ contient la valeur entière associée à l'arc allant de t à p ;
 - dans le cas où une place p n'est pas reliée à la transition t , on a simplement $W(t, p) = 0$ et $W(p, t) = 0$.

Définition A.1 (Réseau de Petri Marqué). *Un réseau de Petri places/transitions **marqué** se définit par un couple (R, m_0) dans lequel R est un réseau de Petri places/transitions et $m_0 : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application appelée **marquage** de R qui associe à toute place $p \in \mathbb{P}$ un entier positif $m_0(p)$ ou m_{0p} appelé **marquage** de la place p .*

Dans la suite, le terme *réseau de Petri* désigne, à la fois, la structure R et le réseau marqué (R, m_0) .

A.2.2 Représentation graphique

Un réseau de Petri peut se représenter graphiquement sous la forme d'un **graphe orienté pondéré biparti**. Les places sont représentées sous forme de **cercles** et les transitions sous forme de **rectangles**. On associe à chaque place p du réseau un nombre de **jetons** équivalent à son marquage $m(p)$. Les jetons sont représentés par des **disques pleins** à l'intérieur des places, ou plus simplement par un **entier** étiquetant la place.

Exemple A.1 (Réseau de Petri). *Un exemple de réseaux de Petri (R, m_0) est présenté sur la figure A.1. On a :*

- $|\mathbb{P}| = 4$, $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$;
- $|\mathbb{T}| = 4$, $\mathbb{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$;

- $W(p_1, t_1) = 1, W(p_1, t_2) = 1, W(t_1, p_2) = 1, W(t_2, p_2) = 1, W(t_2, p_3) = 2, W(p_2, t_3) = 1, W(p_3, t_3) = 1, W(t_3, p_4) = 1, W(p_4, t_4) = 1, W(t_4, p_1) = 1, W(x, y) = 0$ sinon ;
- $m(0p_1) = 1, m(0p_2) = 0, m(0p_3) = 0, m(0p_4) = 0$;
- $\bullet t_3 = \{p_2, p_3\}, p_1^\bullet = \{t_1, t_2\}$.

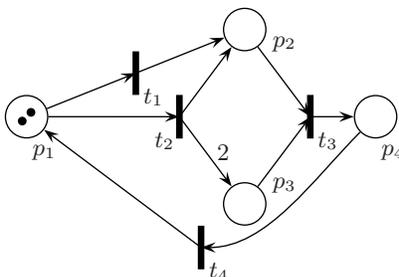


Figure A.1 – Exemple de réseau de Petri marqué

On note respectivement $\bullet p$ et p^\bullet l'ensemble des prédécesseurs et des successeurs de la place p , et réciproquement : $\bullet t$ et t^\bullet représentent les places prédécesseurs et successeurs de la transition t . Formellement, $\bullet p = \{t \in \mathbb{T} | W(t, p) \neq 0\}$, $p^\bullet = \{t \in \mathbb{P} | W(p, t) \neq 0\}$ et réciproquement. On emploiera indifféremment les termes « *amont* » ou « *entrée* » et « *aval* » ou « *sortie* » pour désigner respectivement les prédécesseurs et les successeurs d'un nœud dans la représentation graphique du réseau.

A.2.3 Comportement d'un réseau de Petri

Le marquage des places d'un réseau de Petri représente l'état du système modélisé à un instant donné. Ce marquage peut être modifié au fur et à mesure de l'occurrence de **franchissements** de transitions. Pour pouvoir être **franchie**, une transition doit être **franchissable**. Informellement, une transition est franchissable lorsque les places amont contiennent assez de jetons.

Définition A.2 (Franchissabilité d'une transition). Soit $R = (\mathbb{P}, \mathbb{T}, W)$ un réseau de Petri, $m \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ un marquage et $t \in \mathbb{T}$ une transition. t est dite **franchissable à partir de m** si et seulement si :

$$\forall p \in \bullet t, m(p) \geq W(p, t). \tag{A.1}$$

Cette propriété est notée $m[t]$.

Dans la suite, on utilisera indifféremment les termes *franchissable*, *tirable*, *sensibilisée* ou *validée* pour traduire la condition précédente. Lorsque cette condition est satisfaite, un nouveau marquage est produit par la suppression des jetons des places en amont de la transition et la création de nouveaux jetons en aval, en respectant les poids des arcs qui les relient.

Définition A.3 (Franchissement d'une transition). Soit $R = (\mathbb{P}, \mathbb{T}, W)$ un réseau de Petri, $m \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ un marquage et $t \in \mathbb{T}$ une transition franchissable à partir de m . Le **franchissement** de t provoque la création d'un nouveau marquage $m' \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ à partir de m , défini par :

$$\forall p \in \bullet t \cup t^\bullet, m'(p) = m(p) - W(p, t) + W(t, p). \quad (\text{A.2})$$

Ce franchissement est noté $m[t]m'$.

Dans la suite, on utilisera indifféremment les termes *franchissement* ou *tir* pour désigner le franchissement d'une transition.

Il faut noter que puisque $W(p, t) = W(t, p) = 0$ lorsque p et t ne sont pas connectés, et puisque $\forall p \in \mathbb{P}, m(p) \geq 0$, on peut étendre les définitions précédentes à la totalité des places du réseau pour obtenir les relations suivantes :

$$m[t] \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P}, m(p) \geq W(p, t). \quad (\text{A.3})$$

$$m[t]m' \Rightarrow \forall p \in \mathbb{P}, m'(p) = m(p) - W(p, t) + W(t, p). \quad (\text{A.4})$$

Définition A.4 (Réseau de Petri Pur). Soit $R = (\mathbb{P}, \mathbb{T}, W)$ un réseau de Petri. R est dit **pur** s'il ne contient pas de boucle élémentaire, i.e. si $\forall t \in \mathbb{T}, \bullet t \cap t^\bullet = \emptyset$.

On montre que la réciproque de l'équation (A.4) est vraie si le réseau R considéré est pur.

A.3 Formulation algébrique

A.3.1 Vecteurs et Matrices Caractéristiques

La définition mathématique d'un réseau de Petri permet de reformuler les définitions précédentes sous la forme d'équations d'algèbre linéaire. Nous les utiliserons dans la suite de façon à rendre notre exposé plus concis. Dans les définitions qui suivent, nous considérons toujours un réseau de Petri $(\mathbb{P}, \mathbb{T}, W)$ muni d'un marquage $m \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}}$, avec $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ et $\mathbb{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

Définition A.5 (Vecteur Canonique). *Le vecteur **canonique** (ou **caractéristique**) \vec{e}_{p_i} associé à la place p_i (resp. \vec{e}_{t_j} associé à la transition t_j) est le vecteur de $\mathbb{N}^{|\mathbb{T}|}$ (resp. de $\mathbb{N}^{|\mathbb{P}|}$) dont la $i^{\text{ième}}$ composante vaut 1 et les autres sont nulles : $\vec{e}_{p_i} = (\delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_{|\mathbb{P}|}^i)^\top \in \mathbb{N}^{|\mathbb{P}|}$, $\vec{e}_{t_j} = (\delta_1^j, \delta_2^j, \dots, \delta_{|\mathbb{T}|}^j)^\top \in \mathbb{N}^{|\mathbb{T}|}$.*

Définition A.6 (Vecteur de Marquage). *On associe à m son **vecteur de marquage** \vec{M} défini par $\vec{M} = (m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_{|\mathbb{P}|}))^\top \in \mathbb{N}^{|\mathbb{P}|}$.*

Définition A.7 (Matrices d'Incidence). *Les matrices d'**incidence arrière** $C^- (|\mathbb{P}| \times |\mathbb{T}|)$, d'**incidence avant** $C^+ (|\mathbb{P}| \times |\mathbb{T}|)$ et d'**incidence** $C (|\mathbb{P}| \times |\mathbb{T}|)$ sont définies par :*

- $\forall p_i \in \mathbb{P}, \forall t_j \in \mathbb{T}, C^-(p_i, t_j) = k \Leftrightarrow W(p_i, t_j) = k$;
- $\forall p_i \in \mathbb{P}, \forall t_j \in \mathbb{T}, C^+(p_i, t_j) = k \Leftrightarrow W(t_j, p_i) = k$;
- $\forall p_i \in \mathbb{P}, \forall t_j \in \mathbb{T}, C(p_i, t_j) = \text{Post}(p_i, t_j) - \text{Pre}(p_i, t_j)$.

Exemple A.2 (Matrices d'Incidence). *Les matrices correspondant au réseau de la figure A.1 sont reproduites dans la figure A.2.*

$$\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
C^- & C^+ & C
\end{array}$$

Figure A.2 – Matrices d'incidences du réseau de la figure A.1

A.3.2 Équation d'état

Les notations introduites précédemment nous permettent de reformuler les équations (A.3) et (A.4) de la façon suivante :

$$m[t] \Leftrightarrow C^- \cdot \vec{e}_t \leq \vec{M}. \quad (\text{A.5})$$

$$m[t]m' \Rightarrow \vec{M}' = \vec{M} + C \cdot \vec{e}_t. \quad (\text{A.6})$$

On généralise les équations précédentes aux tirs de *séquences de transitions franchissables* (ou *séquence de franchissements*). Pour cela, on définit le vecteur de Parikh associé à une séquence de tirs comme suit :

Définition A.8 (Vecteur de Parikh). Soit (R, m_0) un réseau de Petri, dans lequel on a $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ et $\mathbb{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$. Soit $\sigma = t_{\sigma_1} t_{\sigma_2} \dots t_{\sigma_r}$ une suite de r transitions de \mathbb{T} . Le **vecteur de Parikh** $\vec{\sigma}$ associé à σ est le vecteur de $\mathbb{N}^{|\mathbb{T}|}$ dont la $j^{\text{ième}}$ composante est égale au nombre d'occurrences de la transition t_j dans la séquence σ : $\vec{\sigma} = \sum_{j=1}^r \vec{e}_{t_{\sigma_j}}$.

En utilisant le vecteur de Parikh et les notations algébriques précédentes, on obtient une propriété classique des réseaux de Petri.

Proposition A.1 (Équation d'état). Soit (R, m_0) un réseau de Petri et $m_f \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ un marquage. Soit $\sigma = t_{\sigma_1} t_{\sigma_2} \dots t_{\sigma_r}$ une suite de r transitions de \mathbb{T} . On a :

$$m_0[\sigma]m_f \Rightarrow \vec{M}_f = \vec{M}_0 + C \cdot \vec{\sigma}. \quad (\text{A.7})$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur le nombre de transitions utilisées dans la séquence σ . Pour une séquence vide, le résultat est immédiat. Le pas de la récurrence s'obtient par la définition du franchissement d'une transition. ■

L'équation précédente est connue sous le nom d'*équation d'état* ou *équation fondamentale* des réseaux de Petri. Cette fois, la réciproque n'est pas vraie même si le réseau est pur. On notera \mathbb{T}^* l'ensemble des suites — potentiellement infinies — d'éléments de \mathbb{T} et $\mathcal{T}(R, m)$ l'ensemble des séquences — potentiellement infinies également — de transitions *franchissables* à partir de m .

A.4 Analyse de réseaux de Petri

L'un des principaux intérêts des réseaux de Petri est de proposer une représentation *compacte* pour définir des comportements qui peuvent contenir un nombre infini d'états ou d'événements. Cette propriété confère aux réseaux de Petri la capacité de modéliser une grande variété de systèmes discrets. Les capacités de modélisation des réseaux de Petri leur permettent ainsi d'être un support particulièrement intéressant pour la vérification d'un large éventail de propriétés de ces systèmes. Nous présentons dans cette section les propriétés les plus significatives

qui peuvent être vérifiées sur les réseaux de Petri dans le cadre de l'analyse des systèmes à événements discrets.

A.4.1 Accessibilité

La manière la plus simple de définir le comportement d'un réseau est de considérer l'ensemble des marquages *accessibles* depuis un marquage initial.

Définition A.9 (Marquage Accessible). *Soit R un réseau de Petri, $m, m' \in \mathbb{N}^P$ deux marquages. m' est dit **accessible à partir de m** si et seulement s'il existe une séquence de franchissements $\sigma = t_{\sigma_1} t_{\sigma_2} \dots t_{\sigma_k} \in \mathcal{T}(R, m)$ telle que :*

$$m[t_{\sigma_1}]m_1[t_{\sigma_2}]m_2 \dots [t_{\sigma_k}]m'. \quad (\text{A.8})$$

On reprend les notations précédentes pour désigner par $m[\sigma]m'$ la propriété d'accessibilité entre deux marquages. L'ensemble des marquages accessibles à partir de m (ou *ensemble d'accessibilité* de (R, m)) est noté $\mathcal{A}(R, m)$.

Une manière plus complète de décrire le comportement d'un réseau de Petri consiste à prendre en considération la relation d'accessibilité immédiate entre marquages accessibles à travers le *graphe d'accessibilité*.

Définition A.10 (Graphe d'Accessibilité). *Soit (R, m_0) un réseau de Petri. Son graphe d'accessibilité, noté $\mathcal{G}(R, m_0)$, est défini par :*

- L'ensemble de nœuds $\mathcal{A}(R, m_0)$;
- L'ensemble des arcs : un arc étiqueté t joint m à m' ssi $m[t]m'$

On dénote par $m \xrightarrow{t} m'$ un arc de $\mathcal{G}(R, m)$ étiqueté par $t \in \mathbb{T}$ reliant dans cet ordre les marquages m et m' . L'ensemble des arcs de $\mathcal{G}(R, m_0)$ est dénoté $\mathcal{G}_a(R, m_0)$.

Exemple A.3 (Graphe d'Accessibilité). *La figure A.3 présente une partie du graphe d'accessibilité du réseau de la figure A.1.*

Pour un marquage de départ donné, l'ensemble d'accessibilité et le graphe associé ne sont pas forcément finis. Par exemple, l'ensemble des marquages accessibles depuis $(1, 0, 0, 0)^\top$ pour le réseau de la figure A.1 est infini. Pour s'en convaincre, il suffit d'étudier la séquence de tirs de transitions $t_2 t_3 t_4$, qui répétée n fois permet d'atteindre le marquage $(1, 0, n, 0)^\top$.

Définition A.11 (Réseau de Petri Borné). *Soit (R, m_0) un réseau de Petri marqué. Il est dit **borné** s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathcal{A}(R, m_0)$, $\forall i \in \llbracket 1, |P| \rrbracket$, $m(p_i) \leq k$.*

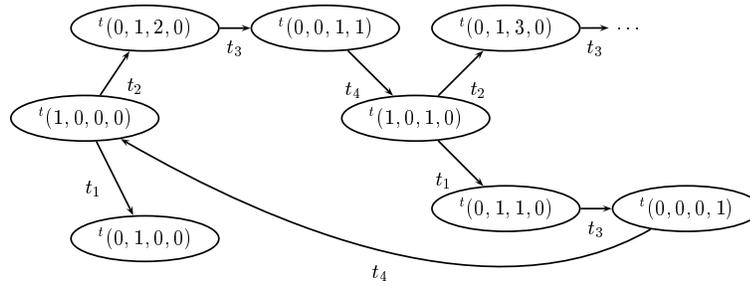


Figure A.3 – Graphe d’accessibilité du réseau de la figure A.1

Dans le cas de réseaux *bornés*, l’ensemble d’accessibilité est *fini* (il est trivialement borné par $k^{|\mathbb{P}|}$).

La propriété d’accessibilité permet de définir le *problème d’accessibilité* de la façon suivante :

Définition A.12 (Problème d’accessibilité). Soit R un réseau de Petri, $m, m' \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ deux marquages. Le problème qui consiste à décider si $m' \in \mathcal{A}(R, m)$ est appelé **problème d’accessibilité** des réseaux de Petri.

La résolution du problème de l’accessibilité revêt une grande importance dans les réseaux de Petri. En effet, on montre qu’un grand nombre de problématiques d’analyse des réseaux de Petri sont équivalentes au problème de l’accessibilité, ou à certaines de ses variantes ou sous-problèmes ([Keller, 1976]).

Ce problème revient à trouver une suite σ de transitions franchissables de $\mathcal{T}(R, m_0)$ t.q. $m[\sigma]m'$. Une des techniques de résolution possibles consiste alors à *parcourir* le graphe d’accessibilité de manière exhaustive. On peut montrer ainsi que le problème de l’accessibilité est **décidable** [Kosaraju, 1982], mais qu’il est **EXP-TIME** et **EXP-SPACE difficile** dans le cas général [Lipton, 1976].

A.4.2 Propriétés structurelles

Les *propriétés structurelles* des réseaux de Petri s’expriment à l’aide d’invariants linéaires. Ce sont les propriétés les plus simples à vérifier puisqu’elles n’exigent pas le parcours du graphe d’accessibilité du réseau, et qu’elles bénéficient d’algorithmes efficaces développés dans le cadre de l’algèbre linéaire.

Les invariants linéaires sont définis à partir de l’équation d’état, ils correspondent aux différentes façons d’« annuler » la matrice C .

Définition A.13 (Flots d'un réseau). Soit (R, m_0) un réseau de Petri et C sa matrice d'incidence.

- Un *P-flot* est un vecteur non nul \vec{v} de $\mathbb{Z}^{|\mathbb{P}|}$ qui vérifie $\vec{v}^\top \cdot C = \vec{0}$;
- Un *P-semiflot* est un vecteur non nul \vec{v} de $\mathbb{N}^{|\mathbb{P}|}$ qui vérifie $\vec{v}^\top \cdot C = \vec{0}$;
- Un *T-flot* est un vecteur non nul \vec{v} de $\mathbb{Z}^{|\mathbb{T}|}$ qui vérifie $C \cdot \vec{v} = \vec{0}$;
- Un *T-semiflot* est un vecteur non nul \vec{v} de $\mathbb{N}^{|\mathbb{T}|}$ qui vérifie $C \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Un *P-flot* (resp. un *P-semiflot*) est une somme pondérée de places à coefficients entiers (resp. naturels). Un *P-flot* peut donc servir à obtenir une valeur entière, à partir d'un marquage quelconque, en pondérant les marquages de chaque place et en les sommant. Le résultat obtenu est une valeur *caractéristique* qui restera constante quelle que soit l'évolution du réseau. On appelle également un *P-flot* « *invariant de place* ».

Un *T-semiflot* peut s'interpréter comme le vecteur d'occurrences d'une séquence de transitions, tandis qu'un *T-flot* peut s'interpréter comme la différence de deux vecteurs d'occurrences. Physiquement — lorsqu'ils sont franchissables — les *P-flots*, également appelés « *invariants de transition* », correspondent à des *cycles* du graphe de marquage, i.e. des séquences de franchissement ne modifiant pas le marquage atteint.

Les notions de *P-flots* et *T-flots* sont dites *duales*, dans le sens où les *P-flots* associés à la matrice C correspondent exactement aux *T-flots* de la matrice C^\top et vice-versa.

Les invariants permettent de définir quatre grandes propriétés structurelles que nous présentons ci-dessous.

Définition A.14 (Propriétés structurelles). Soit R un réseau de Petri.

- R est *conservatif* s'il existe un *P-semiflot* \vec{v} tel que $\|\vec{v}\| = \mathbb{P}$.
- R est *consistant* s'il existe un *T-semiflot* \vec{v} tel que $\|\vec{v}\| = \mathbb{T}$.
- R est *répétitif* s'il existe un *T-semiflot* $\vec{v} > \vec{0}$ tel que $C \cdot \vec{v} \geq \vec{0}$.
- R est *structurellement borné* si il existe un *P-semiflot* $\vec{v} > \vec{0}$ tel que $\vec{v}^\top \cdot C \leq 0$.

Ces propriétés seront à l'origine de nombreuses conditions nécessaires ou suffisantes de propriétés comportementales sur lesquelles nous reviendrons dans la section suivante. Par exemple, les propriétés structurelles de *consistance* et de *conservativité* possèdent un lien direct avec les propriétés de *vivacité* et de *bornitude* du réseau :

- 1) R conservatif $\Rightarrow R$ structurellement borné $\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}^{|\mathbb{P}|}$, (R, m) borné ;
- 2) (R, m_0) borné $\Rightarrow R$ consistant.

Nous renvoyons le lecteur intéressé à [Diaz, 2001], chapitre 3, page 83, pour une démonstration complète de ces résultats.

A.4.3 Propriétés comportementales génériques

Un certain nombre de propriétés classiques significatives des réseaux de Petri peuvent être définies et vérifiées à l'aide du graphe d'accessibilité sous-jacent. Les méthodes d'analyse correspondantes fondées sur sa construction et son parcours en tout ou partie sont appelées *méthodes comportementales*. Ces méthodes ont l'avantage d'être conceptuellement simples, mais leur complexité dépend de la taille du graphe très supérieure à la taille du réseau (et parfois infinie), et elles nécessitent de fixer le marquage initial. Nous présentons dans le tableau A.1 les principales propriétés d'intérêt.

A.4.4 Propriétés spécifiques

Les propriétés génériques décrites dans la section précédente renseignent le modélisateur sur le comportement général du réseau. Celles-ci doivent être complétées par l'analyse de propriétés *spécifiques* du système modélisé.

De façon générale, de telles propriétés peuvent être décrites de deux façons :

- Soit à l'aide d'un modèle de comportement ;
- Soit à l'aide d'un ensemble de formules d'une logique adéquate.

La spécification de propriétés sous forme d'un comportement est relativement immédiate. On utilise généralement une structure appelée *système de transition étiqueté*, très proche du graphe des marquages accessibles d'un réseau de Petri. Nous ne nous étendons pas sur ce type de formulation ici, nous renvoyons le lecteur à [Diaz, 2003] pour une bibliographie détaillée sur la question.

Au contraire, les approches logiques pour la vérification, également appelées *model-checking*, nécessitent quelques objets théoriques que nous allons définir dans cette section. L'objectif n'est pas ici de donner un état de l'art sur les techniques de *vérification* adaptées à la logique temporelle, mais de présenter les opérateurs de cette logique et de quelle façon ils sont utilisés pour décrire des propriétés à vérifier. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les techniques de vérification correspondant à ce type de spécification à [Diaz, 2003], chapitre 1.

Plusieurs types de propriétés peuvent être décrites à l'aide de techniques de model-checking. On recense des propriétés d'accessibilité, de sûreté, de vivacité et d'équité.

Soit (R, m_0) un réseau de Petri avec $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_{ \mathbb{P} }\}$ et $\mathbb{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_{ \mathbb{T} }\}$:	
Propriété	Définition
Accessibilité	Soit un vecteur de marquage $m \in \mathbb{N}^m$, m est accessible depuis m_0 si $\exists \sigma \in \mathcal{T}(R, m_0), m_0[\sigma]m$
Blocage	Un marquage pour lequel aucune transition n'est tirable est appelé un blo-cage ou un marquage mort
RDP borné	(R, m_0) est k-borné si le marquage de chacune de ses places est borné : $\exists k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathcal{A}(R, m_0), \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, m(p_i) \leq k$
RDP sauf	(R, m_0) est sauf s'il est 1-borné
Exclusion mutuelle	Deux places p_i et p_j sont en exclusion mutuelle si elles ne peuvent pas être simultanément marquées : $\forall m \in \mathcal{A}(R, m_0), \neg(m(p_i) \neq 0 \wedge (m(p_j) \neq 0))$
	Deux transitions t_i et t_j sont en exclusion mutuelle si elles ne peuvent jamais être tirées simultanément : $\forall m \in \mathcal{A}(R, m_0), \neg(m[t_i + t_j])$
RDP persistant	(R, m_0) est persistant si pour tout couple de transitions validées pour le même marquage, le franchissement de l'une d'entre elles laisse l'autre tirable : $\forall t_i, t_j \in \mathbb{T}, \forall m \in \mathcal{A}(R, m_0)$ t.q. $\exists m', m'' \in \mathcal{A}(R, m_0), m[t_i]m'$ et $m[t_j]m''$, on a $m''[t_i]$ et $m'[t_j]$
RDP pseudo-vivant	(R, m_0) est pseudo-vivant si on peut tirer une transition depuis tout marquage accessible : $\forall m \in \mathcal{A}(R, m_0), \exists t \in \mathbb{T}$ t.q. $m[t]$
RDP quasi-vivant	(R, m_0) est quasi-vivant si l'on peut tirer chacune de ses transitions au moins une fois en partant de l'état initial : $\forall t \in \mathbb{T}, \exists m \in \mathcal{A}(R, m_0)$ t.q. $m[t]$
RDP vivant	(R, m_0) est vivant si l'on peut tirer chacune de ses transitions depuis tout marquage accessible : $\forall m \in \mathcal{A}(R, m_0), \forall t \in \mathbb{T}, \exists m' \in \mathcal{A}(R, m)$, t.q. $m'[t]$
Etat d'accueil	(R, m_0) admet un état d'accueil m_a si on peut revenir à cet état à partir de tout marquage du graphe d'accessibilité : $\forall m \in \mathcal{A}(R, m_0), \exists \sigma \in \mathcal{T}(R, m)$ t.q. $m[\sigma]m_a$.
RDP réinitialisable	Si m_0 est un état d'accueil, le réseau est dit réinitialisable
Séquence répétitive	Une séquence de franchissements σ t.q. $m[\sigma]m'$ est répétitive ssi $m \leq m'$, répétitive stationnaire ssi $m = m'$ et répétitive croissante ssi $m < m'$.
Terminaison	(R, m_0) vérifie la propriété de terminaison si $\mathcal{T}(R, m_0)$ ne contient pas de séquence répétitive.

Tableau A.1 – Propriétés comportementales des réseaux de Petri

- Les propriétés d'*accessibilité* (« *reachability* ») ont pour but de déterminer si lors du parcours du graphe d'accessibilité, une situation est ou non accessible.
- Les propriétés de *sûreté* (« *safety* ») permettent de spécifier que certaines situations ne devront *jamais* être atteintes.
- Les propriétés de *vivacité* (« *liveness* ») énoncent que quelque chose *finira par avoir lieu*.
- Les propriétés d'*équité* (« *fairness* ») indiquent que quelque chose aura lieu une *infinité de fois*.

Ces propriétés sont exprimées par des formules portant sur divers éléments du système modélisé par le réseau de Petri sous-jacent. Nous distinguerons plus bas deux types de propriétés selon les éléments utilisés dans leur description : les propriétés d'accessibilité d'une part, et les propriétés de sûreté, de vivacité et d'équité d'autre part.

A.4.4.1 Propriétés d'accessibilité

On entend par *propriété d'accessibilité* une formule portant sur les *états* du système. Par exemple, la propriété d'exclusion mutuelle peut être comprise comme une propriété d'accessibilité dans le sens où elle revient à décider s'il *existe un état accessible global* du système dans lequel deux processus sont entrés dans une section critique en même temps.

Ces propriétés sont décrites à l'aide de *formules d'états*. Une formule d'état est une formule de logique propositionnelle utilisant des propositions atomiques et des opérateurs logiques. Quelques détails concernant ces éléments sont donnés dans le tableau A.2.

A.4.4.2 Propriétés de sûreté, de vivacité et d'équité

Les propriétés de sûreté, de vivacité et d'équité sont exprimées à l'aide de *logiques temporelles* comme *CTL* ou *LTL*. Ces dernières sont les logiques les plus populaires et peuvent décrire la plupart des propriétés considérées ici. Nous en proposons une courte introduction d'après Emerson[Emerson, 1990].

LTL signifie « *Linear Temporal Logic* » (*logique temporelle linéaire*). C'est une logique qui se focalise sur la notion de *séquence*. La structure temporelle sous-jacente est un ensemble totalement ordonné, par exemple $(\mathbb{N}, <)$. Sous cette hypothèse, le temps est discret, commence à un instant initial sans prédécesseur et se poursuit infiniment loin dans le futur. Les exécutions possibles sont considérées comme des séquences distinctes.

Les formules *LTL* se fondent sur des formules d'état, des connecteurs booléens et des

Formules d'état	<ul style="list-style-type: none"> ○ Proposition atomique ○ <opérateur unaire> Formule d'état ○ Formule d'état <opérateur binaire> Formule d'état ○ (Formule d'état)
Opérateurs unaires	<ul style="list-style-type: none"> ○ ! ou - (négation)
Opérateurs binaires	<ul style="list-style-type: none"> ○ & ou * (conjonction) ○ ou + (disjonction) ○ => (implication)
Propositions atomiques	<p>(elles peuvent être différentes suivant les langages sous-jacents utilisés)</p> <ul style="list-style-type: none"> ○ Identifiants de places, e.g. p_1, p_2, p_3 ○ Noms des places, e.g. <i>mutex, init</i> ○ Expressions arithmétiques utilisant les labels précédents : $p_1 = valeur, p_2 \neq valeur, p_3 < valeur, p_3 > valeur, p_3 \leq valeur, p_3 \geq valeur.$

Tableau A.2 – Opérateurs et formules de logique propositionnelle

opérateurs temporels. Les principaux opérateurs temporels utilisés sont :

- Gp (« toujours p », « dorénavant p »);
- Fp (« finalement, p »);
- Xp (« juste après, p »);
- et pUq (« p jusqu'à ce que q »).

La figure A.4 illustre leur signification intuitive.

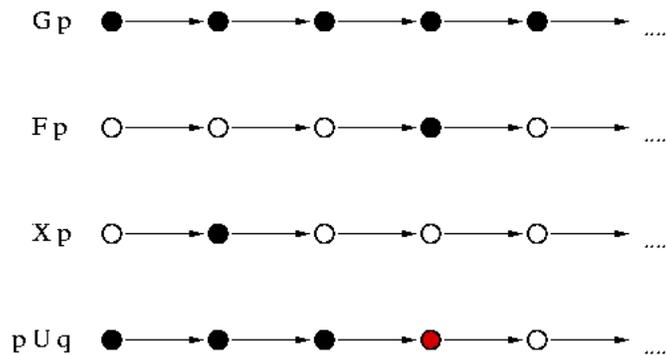


Figure A.4 – Opérateurs temporels de \mathcal{LTL}

\mathcal{CTL} signifie « *Computation tree Logic* » (logique temporelle arborescente). C'est une logique

qui se focalise sur la notion d'état. La structure temporelle sous-jacente est supposée avoir une nature arborescente. Elle correspond à un arbre infini dans lequel chaque nœud peut avoir un nombre fini de successeurs mais doit en avoir au moins un. Les exécutions possibles forment donc un arbre dans lequel les différents successeurs d'un état sont obtenus par les instances d'événements possibles en cet état.

Une formule de logique CTL consiste en un opérateur modal — un « *quantificateur de chemin* » — suivi par une formule quelconque de logique CTL , autorisant les combinaisons et les enchevêtrements des opérateurs G , F , X et U . Les opérateurs modaux sont repris dans le tableau A.3 : on définit l'opérateur universel A (« *Pour tous les chemins ...* »), et l'opérateur existentiel E (« *Il existe un chemin ...* »). La figure A.5 illustre quelques formules utilisant les opérateurs de CTL .

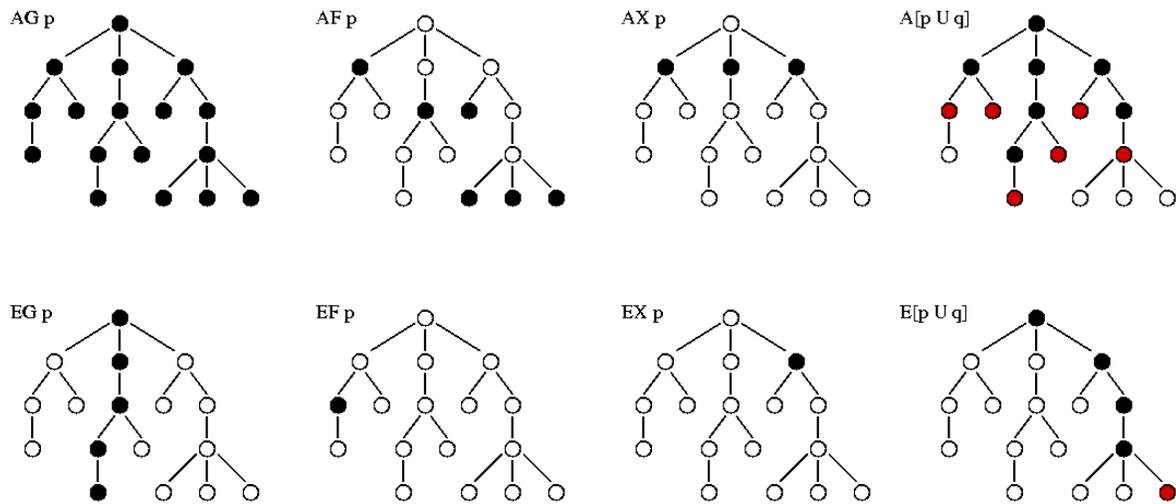


Figure A.5 – Opérateurs temporels de CTL

Il existe bien entendu d'autres logiques plus ou moins expressives permettant de s'intéresser à des propriétés différentes. Par exemple, certaines propriétés d'équité ne sont pas exprimables en CTL , il faut donc parfois recourir à des extensions (ajouter des opérateurs) pour atteindre l'expressivité souhaitée. Il faut alors opérer un compromis entre la complexité des propriétés pouvant être formulées et la difficulté de leur résolution en pratique. Les logiques CTL et LTL permettent de spécifier la majorité des propriétés d'intérêt d'un réseau de Petri et autorisent la définition d'algorithmes d'évaluation efficaces (les méthodes de vérification de la satisfaction d'une formule par un modèle ont une complexité en temps de calcul proportionnelle à la taille du modèle et à la taille de la formule).

Opérateur	Description	Origine
Gp ou $\Box p$	« toujours p » « dorénavant p »	Globally
Fp ou $\Diamond p$	« finalement, p »	Finally
Xp	« juste après, p »	Next
pUq	« p jusqu'à ce que q »	Until
A	« Pour tous les chemins ... »	For All
E	« Il existe un chemin ... »	Exists

Tableau A.3 – Les opérateurs de logique temporelle et modale

Liste des figures

1	Dessin de Franquin dans <i>Gaston Lagaffe</i> , n°7, page 30	3
2	Dessin de Pancho dans le journal <i>Le Monde</i> du 11 janvier 2004 illustrant l'article intitulé "La révolte des chercheurs contre le gouvernement"	13
3	Croissance exponentielle d'une population en l'absence de prédateurs	21
4	Démographie d'une population dans un environnement limité en ressources	21
5	Démographie d'une population de prédateurs	22
6	Modèle proie prédateur simulé	23
7	Modèle proie prédateur réel	23
8	Évolution démographique sous le scénario 1	26
9	Évolution démographique sous le scénario 2	26
10	Un équilibre stable	28
11	Un équilibre instable	28
1.1	Stabilité pour un point d'équilibre	39
1.2	Attractivité pour un point d'équilibre	40
1.3	Stabilité asymptotique d'un point d'équilibre	41

1.4	Stabilité exponentielle d'un point d'équilibre	42
1.5	Stabilité asymptotique du sous-système 1	44
1.6	Stabilité asymptotique du sous-système 2	44
1.7	Instabilité pour une séquence de commutation donnée	44
1.8	Invariance faible de l'ensemble K	47
1.9	Invariance forte de l'ensemble K	47
1.10	Convergence durant l'activation de (S_1)	51
1.11	Instabilité pour une séquence de commutation donnée	52
1.12	Instabilité pour une séquence de commutation donnée	52
1.13	Fonction de Lyapunov commune	53
1.14	Fonctions multiples de Lyapunov	61
1.15	Fonctions multiples de Lyapunov 2	62
2.1	Portrait de phase du sous-système linéaire instable (2.1)	74
2.2	Portrait de phase du sous-système non linéaire instable (2.2)	74
2.3	Trajectoire du système sous un signal de commutation judicieusement contrôlé	76
2.4	Portrait de phase du sous-système instable (2.23)	86
2.5	Portrait de phase du sous-système instable (2.24)	86
2.6	Trajectoire du système (2.16) sous le signal de commutation com- mandé	88
2.7	Caractérisation de l'ensemble polytopique limite des fonctions de pon- dération	89
3.1	Portrait de phase du système (3.6) contrôlé par (3.7)	105
3.2	Loi de commutation σ_1	106
3.3	Loi de commutation σ_2	106
3.4	Loi de commutation σ_3	106

3.5	Loi de commutation σ_4	106
3.6	Portrait de phase du système (3.6) contrôlé par (3.7)	107
3.7	Portrait de phase du système en boucle fermée	111
3.8	Loi de commutation σ_1	111
3.9	Loi de commutation σ_2	111
3.10	Loi de commutation σ_5	112
3.11	Lois de commutation σ_3 et σ_4	112
3.12	Portrait de phase pour différents signaux commutants	112
4.1	Instabilité du système à commutation	117
4.2	Un réseau de Petri temporel pour caractériser les séquences de commutation	118
4.3	Réseau de Petri temporel du système hybride	123
4.4	Signal commutant associé à FS_1	124
4.5	Portrait de phase sous l'échéancier de tir FS_1	124
4.6	Graphe de classes et les sous-systèmes actifs correspondant.	126
4.7	Automate représentatif des commutations	127
4.8	Représentation par RdPT	128
4.9	Réseau de Petri temporel du système hybride	132
4.10	Graphe de classes d'états correspondant	132
4.11	Norme de l'état, sous l'échéancier de tir sFS , vérifiant le théorème 4.3.2	133
4.12	Norme de l'état, sous un échéancier de tir ne satisfaisant pas les conditions du théorème 4.3.2	133
5.1	Signal de commutation de la boîte de vitesse	145
5.2	Suivi de trajectoire du système (5.7)	146
5.3	Suivi de trajectoire : effet d'une commutation	159
5.4	Loi de commutation σ_1	161

5.5	Loi de commutation σ_2	161
5.6	Simulations obtenues dans le cas linéaire, loi de commutation σ_1	162
5.7	Simulations obtenues dans le cas non linéaire, loi de commutation σ_2	163
5.8	Simulation sans l'estimation du paramètre b	164
9	Dessin de Franquin dans <i>Gaston Lagaffe</i> , n°15, page 19	172
A.1	Exemple de réseau de Petri marqué	175
A.2	Matrices d'incidences du réseau de la figure A.1	177
A.3	Graphe d'accessibilité du réseau de la figure A.1	180
A.4	Opérateurs temporels de \mathcal{LTL}	185
A.5	Opérateurs temporels de \mathcal{CTL}	186

Index

- Algèbre de Lie, 53
- Atteignabilité, 136
- Attractivité, 37

- Cône
 - contingent, 46
 - de Bouligand, 46
 - tangent, 46

- Ensemble
 - faiblement invariant, 46
 - fortement invariant, 46
 - viable, 46
- Equilibre, 37

- Fonction
 - absolument continue, 46
 - de Lyapunov commune, 50
 - de Lyapunov contrôlée, 99
 - de Lyapunov contrôlée commune, 96
 - de Lyapunov poly-quadratique, 60
 - multiple de Lyapunov, 59
 - multivaluée, 97
 - semi-continue inférieurement, 97
- Forme polytopique, 76

- Inclusion différentielle, 45

- Loi de commutation, 35

- Petit contrôle, 100

- Rayon spectral joint, 58
- Réseau de Petri, 173

- Signal de commutation, 35
- Somme convexe, 76
- Stabilisation uniforme, 95
- Stabilité, 37
 - asymptotique, 37
 - conditionnelle, 64
 - exponentielle, 37
 - pratique, 159
 - quadratique, 81
 - uniforme, 49

- Trajectoire, 38

Bibliographie

- [Agrachev et Liberzon, 2001] Agrachev, A. et Liberzon, D. (2001). Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM J Control Optimization*, 40(1) :253–269.
- [Artstein, 1983] Artstein, Z. (1983). Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 7(11) :1163–1173.
- [Aström et Hägglund, 1995] Aström, K. et Hägglund, T. (1995). *PID Controllers : Theory, Design and Tuning*. Instrument Soc. Amer., Research Triangle Park.
- [Aubin et Frankowska, 1990] Aubin, J. P. et Frankowska, H. (1990). *Set-Valued Analysis*. Springer-Verlag, New-York.
- [Bail et al., 1991] Bail, J. L., Alla, H., et David, R. (1991). Hybrid petri nets. *Proc. European Control Conference*, pp. 1472–1477.
- [Bauer et al., 1993] Bauer, P., Premaratne, K., et Duran, J. (1993). A necessary and sufficient condition for robust asymptotic stability of time-variant discrete systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(9) :1427–1430.
- [Berthomieu, 2001] Berthomieu, B. (2001). The Tina V2 Toolbox. <http://www.laas.fr/tina>.
- [Berthomieu et Diaz, 1991] Berthomieu, B. et Diaz, M. (1991). Modeling and verification of time dependant systems using time Petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 17(3) :259–273.
- [Berthomieu et Menasche, 1982] Berthomieu, B. et Menasche, M. (1982). A state enumeration approach for analysing time petri nets. *Proc. of applications and theory of Petri nets ATPN82*, pp. 27–56.

- [Blanco et al., 2001] Blanco, Y., Perruquetti, W., et Borne, P. (2001). Stability and stabilization of nonlinear systems and Takagi-Sugeno's fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, 7 :221–240.
- [Blondel et al., 2003] Blondel, V., Nesterov, Y., et Theys, J. (2003). Approximations of the rate of growth of switched linear systems. Dans *Proceedings of HSSC*.
- [Blondel et Tsitsiklis, 1997] Blondel, V. et Tsitsiklis, J. N. (1997). NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(6) :2118–2127.
- [Bourdais et al., 2007a] Bourdais, R., Fliess, M., Join, C., et Perruquetti, W. (2007a). Towards a model-free output tracking of switched nonlinear systems. *Proc. NOLCOS'07*.
- [Bourdais et al., 2007b] Bourdais, R., Hetel, L., Daafouz, J., et Perruquetti, W. (2007b). Stabilité et stabilisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides. *Journal Européen des Systèmes Automatisés, JESA*.
- [Bourdais et al., 2006a] Bourdais, R., Moulay, E., et Perruquetti, W. (2006a). Stabilisation de systèmes non linéaires à commutation à l'aide de fonctions de Lyapunov contrôlées. *e-sta*, 3(4).
- [Bourdais et al., 2006b] Bourdais, R., Moulay, E., et Perruquetti, W. (2006b). Stabilisation de systèmes non linéaires à commutation à l'aide de fonctions de Lyapunov contrôlées. *Proc. Conference Internationale Francophone d'Automatique, CIFA*.
- [Bourdais et Perruquetti, 2007] Bourdais, R. et Perruquetti, W. (2007). Stabilization of nonlinear switched systems by state-dependant switching : a polytopic approach. *Proc. European Control Conference*.
- [Bourdais et al., 2006c] Bourdais, R., Perruquetti, W., et Yim, P. (2006c). Modélisation multi-agents à l'aide des réseaux de Petri. *Proc. Conference Internationale Francophone d'Automatique, CIFA*.
- [Bourdais et al., 2004] Bourdais, R., Trouillet, B., et Yim, P. (2004). Étude de noeuds ferroviaires à l'aide des réseaux de petri temporisés stochastiques. *Proc. Conference Internationale Francophone d'Automatique, CIFA*.
- [Bourdais et al., 2007c] Bourdais, R., Yim, P., et Perruquetti, W. (2007c). Stabilité des systèmes à commutation caractérisés par un réseau de petri temporel. *Proc. Modélisation des systèmes réactifs*.
- [Bourdais et al., 2007d] Bourdais, R., Yim, P., et Perruquetti, W. (2007d). Time petri nets based switching sequences of hybrid systems. *Proc. ISMS : International Modeling and Simulation Multiconference*.
- [Boyd et al., 1994] Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., et Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia.

- [Branicky, 1994] Branicky, M. (1994). Stability of switched and hybrid systems. *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 4 :3498 – 3503.
- [Branicky, 1998] Branicky, M. (1998). Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :475–482.
- [Brockett, 1993] Brockett, R. (1993). Hybrid models for motion control systems. *Essays on Control : Perspectives in the Theory and its Applications*, pp. 29–53.
- [Buisson, 1993] Buisson, J. (1993). Analysis of switching devices with Bond Graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 330(6) :1165–1175.
- [Buisson et al., 2005] Buisson, J., Richard, P., et Cormerais, H. (2005). On the stabilisation of switching electrical power converters. *Eighth International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control, HSCC, Zurich*.
- [Champagnat, 1998] Champagnat, R. (1998). *Supervision des systèmes discontinus : définition d'un modèle hybride et pilotage en temps-réel*. Thèse de Doctorat, LAAS Toulouse.
- [Daafouz et Bernussou, 2001] Daafouz, J. et Bernussou, J. (2001). Parameter dependent lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and Control Letters*, 43 :355–359.
- [Daafouz et al., 2002] Daafouz, J., Riedinger, P., et Iung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems : A switched lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1883–1887.
- [David et Alla, 1987] David, R. et Alla, H. (1987). Continuous Petri nets. *Proc. of the 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets*, pp. 275–294.
- [David et Alla, 2004] David, R. et Alla, H. (2004). *Discrete, continuous, and hybrid Petri Nets*. Springer-Verlag.
- [Dayawansa et Martin, 1999] Dayawansa, W. et Martin, C. (1999). A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4).
- [Decarlo et al., 2000] Decarlo, R., Branicky, M., Pettersson, S., et Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 88(7) :1069–1082.
- [Demongodin et Koussoulas, 1996] Demongodin, I. et Koussoulas, N. (1996). Modeling dynamic systems through Petri nets. *Proc. IEEE-SMC-CESA '96 Symposium on Discrete Events and Manufacturing Systems*, pp. 279–284.
- [Demongodin et Koussoulas, 1998] Demongodin, I. et Koussoulas, N. (1998). Differential petri nets : Representing continuous systems in a discrete event world. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :573–579.

- [Diaz, 2001] Diaz, M. (2001). *Les Réseaux de Petri : modèles fondamentaux*. Hermès, Paris.
- [Diaz, 2003] Diaz, M. (2003). *Vérification et Mise en œuvre des réseaux de Petri*. Hermes Science, Traité IC2 Information-Commande-Communication.
- [Emerson, 1990] Emerson, E. A. (1990). *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, chapter Temporal and modal logic, pp. 995–1072. MIT Press.
- [Feron et al., 1996] Feron, E., Apkarian, P., et Gahinet, P. (1996). Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :1041–1046.
- [Filippov, 1988] Filippov, A. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Kluwer Academic Publishers.
- [Fliess, 2006] Fliess, M. (2006). Analyse non standard du bruit. *C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I*, 342. online at <http://hal.inria.fr/inria-00001134>.
- [Fliess et al., 2004] Fliess, M., Join, C., Mboup, M., et Sira-Ramírez, H. (2004). Compression différentielle de transitoires bruités. *C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I*, 339 :821–826.
- [Fliess et al., 2006] Fliess, M., Join, C., Mboup, M., et Sira-Ramirez, H. (2006). Vers une commande multivariable sans modèle. *Proc. Conference Internationale Francophone d'Automatique, CIFA*. online at <http://hal.inria.fr/inria-00001139>.
- [Fliess et al., 2005] Fliess, M., Join, C., et Sira-Ramírez, H. (2005). *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*, volume 322, chapter Closed-loop fault-tolerant control for uncertain nonlinear systems, pp. 217–233. T. Meurer, K. Graichen, E.D. Gilles (Eds), springer, berlin edition.
- [Fliess et al., 2002] Fliess, M., Marquez, R., Delaleau, E., et Sira-Ramírez, H. (2002). Correcteurs proportionnels-intégraux généralisés. *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, 7 :23–41.
- [Fliess et al., 2003] Fliess, M., Mboup, M., Mounier, H., et Sira-Ramírez, H. (2003). Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples. *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation, H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.)*, pp. 1–21.
- [Fliess et Sira-Ramírez, 2003] Fliess, M. et Sira-Ramírez, H. (2003). An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, 9 :151–168.
- [Fliess et Sira-Ramírez, 2004] Fliess, M. et Sira-Ramírez, H. (2004). Control via state estimations of some nonlinear systems. *Proc. Symp. Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*. online at <http://hal.inria.fr/inria-00001096>.
- [Fu et Barmish, 1986] Fu, M. et Barmish, B. (1986). Adaptative stabilization of linear systems via switching control. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 31(12) :1097–1103.

- [Geromel et Colaneri, 2006] Geromel, J. C. et Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of discrete time switched systems. *International Journal of Control*, 79(7) :719–728.
- [Goebel et al., 2004] Goebel, R., Hespanha, J., Teel, A., Cai, C., et Sanfelice, R. (2004). Hybrid systems : Generalized solutions and robust stability. *Proceedings of the 6th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems*.
- [Gurvits, 1994] Gurvits, L. (1994). Stability of linear inclusions. *part 2. Tech. rep., NECI*.
- [Hespanha, 2004] Hespanha, J. (2004). Uniform stability of switched linear systems : Extension of LaSalle’s invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(4) :470–482.
- [Hespanha et Morse, 1999] Hespanha, J. et Morse, A. (1999). Stability of switched systems with average dwell-time. *Proc of the 38th IEEE CDC*, pp. 2655–2660.
- [Johansson, 2002] Johansson, M. (2002). *Piecewise Linear Control Systems - A Computational Approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany.
- [Johansson et al., 1999] Johansson, M., Rantzer, A., et Arzen, K. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7 :713–722.
- [Join et al., 2006] Join, C., Masse, J., et Fliess, M. (2006). Commande sans modèle pour l’alimentation de moteurs : résultats préliminaires et comparaisons. *Actes 2^{es} Journées Identif. Modélis. Expérim. (JIME 2006)*. online at <http://hal.inria.fr/inria-00093695>.
- [Keller, 1976] Keller, R. (1976). Formal verification of parallel programs. *Comm. of the ACM*, 19(7) :371–384.
- [Kerschen et al., 2006] Kerschen, G., Worden, K., Vakakis, A., et Golinval, J.-C. (2006). Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mech. Systems Signal Process.*, 20 :505–592.
- [King et Shorten, 2004] King, C. et Shorten, R. (2004). A singularity test for the existence of common quadratic lyapunov functions for pairs of stable lti systems. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3881–3884.
- [Kosaraju, 1982] Kosaraju, S. R. (1982). Decidability of reachability in vector addition systems. Dans *Proc. of the 14th Annual ACM Symp. on Theory of Computing*, pp. 267–281, San Francisco.
- [Kruszewski, 2006] Kruszewski, A. (2006). *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI*. Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes.
- [Liberzon, 2003] Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Systems and Control : Foundation and Applications. Birkhäuser.

- [Liberzon et al., 1999] Liberzon, D., Hespanha, J., et Morse, A. (1999). Stability of switched linear systems : a Lie-algebraic condition. *Systems & Control Letters*, 37(3) :117–122.
- [Liberzon et Morse, 1999] Liberzon, D. et Morse, A. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Mag.*, pp. 59–70.
- [Lin et Antsaklis, 2005] Lin, H. et Antsaklis, P. (2005). Stability and stabilizability of switched linear systems : A short survey of recent results. *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 1 :24–29.
- [Lin et Sontag, 1991] Lin, Y. et Sontag, E. (1991). A universal formula for stabilization with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 16 :393–397.
- [Lipton, 1976] Lipton, R. (1976). The reachability problem requires exponential space. Rapport Technique 62, Yale University, Computer Science Dept.
- [Ljung et Glad, 1994a] Ljung, L. et Glad, T. (1994a). *Modeling of Dynamic System*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [Ljung et Glad, 1994b] Ljung, L. et Glad, T. (1994b). On global identifiability of arbitrary model parameterization. *Automatica*, 30(2) :265–276.
- [Lygeros et al., 2003] Lygeros, J., Johansson, K., Simić, S., Zhang, J., et Sastry, S. (2003). Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1) :2–17.
- [M. Fliess, 2006] M. Fliess, C. J. e. H. S.-R. (2006). Complex continuous nonlinear systems: their black box identification and their control. *Proc. 14th IFAC Symp. System Identif. (SYSID 2006)*. online at <http://hal.inria.fr/inria-00000824>.
- [Mancilla-Aguilar et García, 2000] Mancilla-Aguilar, J. et García, R. (2000). A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems. *Systems & Control Letters*, 41 :67–71.
- [Margaliot et Liberzon, 2006] Margaliot, M. et Liberzon, D. (2006). Lie-algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions. *Systems and Control Letters*, 55(1) :8–16.
- [Medjoudj, 2006a] Medjoudj, M. (2006a). *Contribution à l'analyse des systèmes pilotés par calculateurs : Extraction de scénarios redoutés et vérification de contraintes temporelles*. Thèse de Doctorat, LAAS, Toulouse.
- [Medjoudj, 2006b] Medjoudj, M. (2006b). Esa petrinet tool : Extraction scenarios and analyzer by petri net model application to the extraction of feared scenarios in a landing gears system. *Proc. European Simulation and Modeling Conference*, pp. 375–382.
- [Merlin, 1974] Merlin, P. (1974). *A study of the recoverability of computer system*. Thèse de Doctorat, Université of California.

- [Mickael, 1956] Mickael, E. (1956). Continuous selections. *Anal. Math.*, 63(2) :361–382.
- [Molchanov et Pyatnitskiy, 1989] Molchanov, A. et Pyatnitskiy, E. (1989). Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems and Control Letters*, 13 :59–64.
- [Molchanov et Pyatnitskii, 1986] Molchanov, A. P. et Pyatnitskii, E. S. (1986). Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions of absolute stability of nonlinear nonstationary control systems iii. *Automation and Remote Control*, 47 :620–630.
- [Morère et al., 2000] Morère, Y., Guerra, T., Vermeiren, L., et Kamoun, A. (2000). Non quadratic stability and stabilization of discrete fuzzy models. *Proc. of the IEEE Conference ACIDCA '2000*.
- [Mori et Kuroe, 1997] Mori, T. Y. et Kuroe, Y. (1997). A solution to the common Lyapunov function problem for continuous-time systems. Dans *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, volume 3, pp. 3530–3531.
- [Morse, 1996] Morse, A. S. (1996). Supervisory control of families of linear set-point controllers - part 1 : Exact matching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :1413–1431.
- [Moulay et al., 2006a] Moulay, E., Bourdais, R., et Perruquetti, W. (2006a). Stabilization of nonlinear switched systems using control lyapunov functions. *Nonlinear Analysis : Hybrid System*.
- [Moulay et al., 2006b] Moulay, E., Bourdais, R., et Perruquetti, W. (2006b). Stabilization of nonlinear switched systems using control Lyapunov functions. *Proc. ICHSA 06 International Conference on Hybrid Systems and Applications*.
- [Murata, 1989] Murata, T. (1989). Petri nets : Properties, analysis and applications. Dans *Proceedings of the IEEE*, volume 77(4), pp. 541–580.
- [Narendra et Balakrishnan, 1994] Narendra, K. et Balakrishnan, J. (1994). A common Lyapunov function for stable lti systems with commuting A-matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12) :2469–2471.
- [Nenninger et Krebs, 1997] Nenninger, G. et Krebs, V. (1997). Modeling and analysis of hybrid systems : A new approach integrating petri nets and differential equations. *The Joint Workshop on Parallel and Distributed Real-Time Systems*.
- [O'Dwyer, 2003] O'Dwyer, A. (2003). *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Imperial College Press, Londres.
- [Ohta et al., 1993] Ohta, Y., Imanishi, H., Gong, L., et Haneda, H. (1993). Computer generated lyapunov functions for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40 :343–354.

- [Peleties et DeCarlo, 1991] Peleties, P. et DeCarlo, R. (1991). Asymptotic stability of m -switched systems using Lyapunov-like functions. *Proc. of American Control Conference*, pp. 1679–1684.
- [Persis et al., 2003] Persis, C. D., Santis, R., et Morse, A. (2003). Switched nonlinear systems with state dependent dwell time. *Automatica*, 50 :291–302.
- [Persis et al., 2004] Persis, C. D., Santis, R., et Morse, A. (2004). Supervisory control with state-dependent dwell-time logic and constraints. *Automatica*, 40 :269–275.
- [Petri, 1962] Petri, C. (1962). *Kommunikation mit Automaten*. Thèse de Doctorat, University of Bonn, Bonn, West Germany.
- [Pettersson, 1999] Pettersson, S. (1999). *Analysis and design of hybrid systems*. Thèse de Doctorat, Chalmers University of Technology, Sweden.
- [Pettersson et Lennartson, 1996] Pettersson, S. et Lennartson, B. (1996). Stability and robustness for hybrid systems. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pp. 1202–1207.
- [Pettersson et Lennartson, 1997] Pettersson, S. et Lennartson, B. (1997). Lmi for stability and robustness for hybrid systems. *Proceedings of the American Control Conference*.
- [Rantzer et al., 2000] Rantzer, A., Johansson, M., et Arzen, K. (2000). Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 45 :629–637.
- [Reger et al., 2005] Reger, J., Sira-Ramírez, H., et M.Fliess (2005). On non-asymptotic observation of nonlinear systems. *Proc. CDC-ECC'05*.
- [Richard, 2001] Richard, J.-P. (2001). *Algèbre et analyse pour l'automatique*. Hermès Science Publication, Paris.
- [Richard, 2002] Richard, J.-P. (2002). *Mathématiques pour les systèmes dynamiques*. Hermès Science Publication, Paris.
- [Schwartz, 1966] Schwartz, L. (1966). *Théorie des distributions. 2nd ed.* Hermann, Paris.
- [Shorten et Narendra, 1999] Shorten, R. et Narendra, K. (1999). Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems. Dans *In Proc. of the 1999 Amer. Contr. Conf.*, pp. 1410–1414.
- [Shorten et Narendra, 2002] Shorten, R. et Narendra, K. (2002). Necessary and sufficient conditions for the existence of a cqlf for a finite number of stable lti systems. *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(10) :709–728.
- [Silva et Recalde, 2004] Silva, M. et Recalde, L. (2004). On fluidification of Petri net models : from discrete to hybrid and continuous models. *Annual Reviews in Control*, 28(2) :253–266.

- [Sira-Ramírez et Agrawal, 2004] Sira-Ramírez, H. et Agrawal, S. (2004). *Differentially Flat Systems*. Marcel Dekker, New York.
- [Sira-Ramírez et Fliess, 2006] Sira-Ramírez, H. et Fliess, M. (2006). An algebraic state estimation approach for the recovery of chaotically encrypted messages. *Internat. J. Bifurc. Chaos*, 16 :1–15.
- [Sjöberg et al., 1995] Sjöberg, J., Zhang, Q., L.Ljung, Benveniste, A., Delyon, B., Glorennec, P.-Y., Hjalmarsson, H., et A.Juditsky (1995). Nonlinear black-box modeling in system identification : a unified overview. *Automatica*, 31 :1691–1724.
- [Skafidas et al., 1999] Skafidas, E., Evans, R. J., Savkin, A. V., et Petersen, I. R. (1999). Stability results for switched controller systems. *Automatica*, 35(4) :553–564.
- [Strömberg et al., 1993] Strömberg, J., Top, J., et Soderman, U. (1993). Variable causality in Bond-Graphs caused by discrete effects. *Proc. International Conference on Bond Graph Modeling*, 25.
- [Sun et Ge, 2005] Sun, Z. et Ge, S. (2005). *Switched Linear Systems*. Springer.
- [Sun et al., 2002] Sun, Z., Ge, S., et Lee, T. (2002). Controllability and reachability criteria for switched linear control systems. *Automatica*, 38 :775–786.
- [Takagi et Sugeno, 1985] Takagi, T. et Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to prediction of complex systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15 :116–132.
- [Tanaka et Sugeno, 1992] Tanaka, K. et Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 45 :135–156.
- [Volterra, 1931] Volterra, V. (1931). Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. *Animal Ecology*.
- [Vu et Liberzon., 2005] Vu, L. et Liberzon., D. (2005). Common Lyapunov functions for families of commuting nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 54 :405–416.
- [Wang et al., 1996] Wang, H., Tanaka, K., et Griffin, M. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : Stability and design issue. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1).
- [Wicks et DeCarlo, 1997] Wicks, M. et DeCarlo, R. (1997). Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1709–1713.
- [Wicks et al., 1994] Wicks, M., Peleties, P., et DeCarlo, R. (1994). Construction of piecewise lyapunov functions for stabilizing switched systems. Dans *Proceedings 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3492–3497, Lake Buena Vista, FL.

- [Wicks et al., 1998] Wicks, M., Peleties, P., et DeCarlo, R. (1998). Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems. *Eur. J. Contr.*, 7 :140–147.
- [Wieting et Sonnenschein, 1995] Wieting, R. et Sonnenschein, M. (1995). Extending high-level Petri nets for modeling hybrid systems. *Proc. IMACS Symposium on System Analysis and Simulation*, 18-19 :259–262.
- [Wulff et al., 2002] Wulff, K., Shorten, R., et Curran, P. (2002). On the 45 degree region and the uniform asymptotic stability of classes of second order parameter varying and switched systems. *International Journal of Control*, 75 :812–823.
- [Xu et Antsaklis, 2000] Xu, X. et Antsaklis, P. (2000). Stabilization of second-order lti switched systems. *International Journal of Control*, 73(14) :1261–1279.
- [Ye et al., 1998] Ye, H., Michel, A., et Hou, L. (1998). Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :461–474.
- [Yedavalli, 2001] Yedavalli, R. K. (2001). Ultimate boundedness control of linear switched systems using controlled dwell time approach. Dans *Proceedings of 40th Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida,.
- [Yfoulis, 2001] Yfoulis, C. (2001). *Stabilizing of Nonlinear Systems : the piecewise linear approach*. Research Studies Press Limited, Hertfordshire, England.
- [Yfoulis et al., 1998] Yfoulis, C., Muir, A., Pettit, N., et Wellstead, P. (1998). Stabilization of orthogonal piecewise linear systems using piecewise linear Lyapunov-like functions. Dans *Proceedings 37th Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida.
- [Yfoulis et Shorten, 2004] Yfoulis, C. et Shorten, R. (2004). A numerical technique for the stability analysis of linear switched systems. *International Journal of Control*, 77 :1019–1039.
- [Zaytoon, 2001] Zaytoon, J. (2001). *Systèmes dynamiques hybrides*. Hermès Science Publication, Paris.
- [Zhai et al., 2000] Zhai, G., Ho, B., Yasuda, K., et Michel, A. N. (2000). Piecewise lyapunov functions for switched systems with average dwell time. *Asian Journal of Control*, 2 :192–197.
- [Zhai et al., 2002] Zhai, G., Hu, B., Yasuda, K., et Michel, A. N. (2002). Qualitative analysis of discrete-time switched systems. Dans *Proceedings of the American Control Conference*, volume 3, pp. 1880–1885.
- [Zheng, 1993] Zheng, J. (1993). General lemmas for stability analysis of linear continuous-time systems with slowly time-varying parameters. *International Journal of Control*, 58 :1437–1444.

Titre : UNE CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION ET À LA COMMANDE DES SYSTÈMES NON LINEAIRES À COMMUTATION

Ce mémoire est dédié à l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires à commutation, systèmes qui peuvent être considérés comme une abstraction de haut niveau d'un système hybride, dans lequel la dynamique discrète est complètement omise. Ce problème est abordé de manières différentes : la stabilité conditionnelle par contrôle des commutations, la stabilisation uniforme et la commande sans modèle. Après une large introduction, le second chapitre se focalise sur la construction d'une séquence de commutation qui assure la stabilité du système. Cette approche repose sur la réécriture du système non linéaire par une représentation polytopique, utilisée pour dégager des conditions suffisantes en termes d'inégalités matricielles. Dans le troisième chapitre, la stabilisation uniforme est abordée. Une condition nécessaire et suffisante y est dégagée, construite sur la notion nouvelle de fonction de Lyapunov contrôlée commune. Dans le quatrième chapitre, un modèle formel est introduit pour représenter uniquement l'ensemble des scénarios admissibles par la physique du système. Pour ce faire, un réseau de Petri temporel est utilisé, permettant ainsi par son analyse la caractérisation de l'ensemble des scénarios admissibles. Divers concepts de stabilité sont par suite appliqués au modèle résultant. Un dernier chapitre propose une approche originale des systèmes à commutation, par une commande sans modèle de ces derniers, c'est-à-dire sans en connaître la dynamique des différents modes. L'algorithme proposé est basé sur des méthodes algébriques d'estimations rapides de dérivées et de paramètres, assurant ainsi une stabilité pratique si les commutations ne sont pas trop rapides.

Mots clés : Systèmes à commutation, Systèmes dynamiques hybrides, systèmes non-linéaires, Stabilité, Théorie de Lyapunov, Commande, Méthodes algébriques, Réseaux de Petri temporel.

Title : A CONTRIBUTION TO THE MODELING AND THE CONTROL OF NONLINEAR SWITCHED SYSTEMS

The focus of this work is the stability analysis of nonlinear switched systems, which can be considered as a high level abstraction of hybrid systems. Five different chapters are devoted to this issue. After a general introduction, the second chapter proposes an algorithm to control the commutations, which ensures the conditional stability. The approach lies on the representation of the non linearities by a polytopic description. Then, some sufficient conditions are given by several matrix inequalities. The next chapter presents a necessary and sufficient condition to guarantee the uniform stabilization of the switched system. This condition is based on a new notion : the common control Lyapunov function, which is used to have an explicit stabilizing control law. In the fourth chapter, we introduce a new formal model to represent switched systems in which some switchings are forbidden by the physics of the systems. The structure is composed of a switched system and a Time Petri Nets whose analysis is used to characterize all the allowed switching laws. Then, different stability tools are applied to this kind of hybrid systems. In the last chapter, we propose a new approach of the control of switched systems. The problem is tackled without a complete description of the sub-dynamics and even without knowing the switching signal. The proposed control design methodology is based on fast estimations of derivatives and parameters. The proposed algorithm ensures the practical stability, if the time between commutations is not too small, even if the signals are disturbed.

Keywords : Switched Systems, Hybrid Dynamical Systems, Nonlinear systems, Stability, Lyapunov theory, Control, Algebraic methods, Time Petri Nets.