



HAL
open science

SYNTHÈSES D'OBSERVATEURS A ENTREES INCONNUES POUR LES SYSTÈMES NON LINEAIRES

Fenglong Liu

► **To cite this version:**

Fenglong Liu. SYNTHÈSES D'OBSERVATEURS A ENTREES INCONNUES POUR LES SYSTÈMES NON LINEAIRES. Automatique / Robotique. Université de Caen, 2007. Français. NNT : tel-00259428

HAL Id: tel-00259428

<https://theses.hal.science/tel-00259428>

Submitted on 28 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

U.F.R. : SCIENCES CAEN

ECOLE DOCTORALE : SIMEM

THÈSE

présentée par

Fenglong LIU

et soutenue

le 06 décembre 2007

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN/BASSE-NORMANDIE

Spécialité : Automatique, robotique

(Arrêté du 07 avril 2006)

TITRE :

**SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS À ENTRÉES INCONNUES
POUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES**

MEMBRES du JURY

- | | |
|------------------------------------|--|
| M. M. FLIESS | Dr. de recherche CNRS, Ecole polytechnique, Paris. (Président) |
| G. BORNARD | Dr. de recherche CNRS, GIPSA-LAB, Grenoble. (Rapporteur) |
| H. HAMMOURI | Pr. à l'Université Claude Bernard Lyon I. (Rapporteur) |
| Mme. F. LAMNABHI-LAGARRIGUE | Dr. de recherche CNRS, LSS, Supélec, Paris. (Examinatrice) |
| M. M. FARZA | Pr. à l'Université de Caen (Directeur de thèse) |
| M. M'SAAD | Pr. des Universités à l'ENSICAEN (Co-Directeur de thèse) |

Liste des publications de Fenglong LIU

Reuves internationales

1. F.L. Liu, M. Farza and M. M'Saad (2007), "Nonlinear observers for state and unknown inputs estimation", IJMIC : Int. Journal of Modelling, Identification and Control, Page 24-32, Vol 2, Issue 1, 2007.
2. M. Farza, M. M'Saad and F.L. Liu (2007) "Generalized observers for a class of nonlinear systems", IJMIC : Int. Journal of Modelling, Identification and Control, page 33-48, Vol 2, Issue 1, 2007.

Conférences invitées

1. F.L. Liu, M. Farza, M. M'Saad and H. Hammouri (2007) "High Gain Observer based on coupled structures", Conference on Systems and Control (CSC '2007), May 16-18, Marrakech, Morocco.
2. F.L. Liu, M. Farza, and M. M'Saad (2006) "Observateur à entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires", Actes de la Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA), 30 mai - 1 juin , Bordeaux, France.
3. F.L. Liu, M. Farza, and M. M'Saad (2006) "Unknown input observers design for a class of nonlinear systems - Application to biochemical processes", Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'06), 5-7 July, Toulouse, France.
4. F.L. Liu, M. Farza, and M. M'Saad (2006) "Generalized nonlinear observers design", Proceedings of the 2nd International Symposium on Control, Communications, and Signal Processing, 13-15 March, Marrakech, Morocco.
5. F.L. Liu, M. Farza, and M. M'Saad (2006) "Unknown inputs estimation for a class of nonlinear systems", Proceedings of the 2nd International Symposium on Control, Communications, and Signal Processing, 13-15 March, Marrakech, Morocco.

Congrès internationaux avec actes

1. F.L. Liu, M. Farza, M. M'Saad and H. Hammouri (2008) "Observer Design for a class of uniformly observable MIMO nonlinear systems with coupled structure", Proceedings of the 17th IFAC World Congress, 6-11 July, Seoul, Korea.
2. M. Farza, M. M'Saad, F.L. Liu and B. Targui (2005) "State and unknown inputs estimation for a class of nonlinear systems", Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 4-8 July, Prague, Czech Republic.
3. F.L. Liu, M. Sekher, M. Farza and M. M'Saad (2005) "Nonlinear observers design for state and unknown inputs", Proceedings of the Third IEEE International Conference on Systems, Signals & Devices, 21-24 March, Sousse, Tunisia.

Congrès nationaux avec actes

1. F.L. Liu, M. Farza and M. M'Saad (2007) "Observateur à grand gain pour des systèmes non linéaires avec couplage non complètement triangulaire", 2ème Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS, 9-11 juillet 2007, Reims, France.

Remerciements

Un travail de trois ans ne pourrait pas se concrétiser sans un ensemble d'aides souvent nécessaires mais toujours précieuses. C'est pourquoi je voudrais remercier ici tout ceux qui ont contribué au bon déroulement de ce travail aussi bien par leur encadrement, leurs compétences que par leur soutiens.

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués au Laboratoire de **G**roupe de **R**echerche en **I**nformatique, **I**mage, **A**utomatique et **I**nstrumentation de Caen (GREYC-UMR6072) au sein du groupe Automatique sous la direction de Monsieur le professeur Mohamed M'saad que je remercie vivement pour m'avoir accueilli et dirigé en tant qu'un co-encadrant pendant ces dernière années. Grace à lui, j'ai eu cette occasion de poursuivre la recherche et de monter ce présent mémoire aux lecteurs.

Je remercie particulièrement Monsieur Michel Fliess, Directeur de recherche CNRS à l'Ecole Polytechnique de Paris, pour m'avoir honoré en acceptant d'être le président du jury.

Je suis très reconnaissant par Monsieur Guy Bonard, Directeur de recherche CNRS au GIPSA-LAB à Grenoble et par Monsieur Hassan Hammouri, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon I pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Ils ont pris le temps de discuter avec moi. Leur précieuses et fructueuses remarques m'ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit.

J'exprime ma profonde gratitude à Madame Françoise Lamnabhi-Lagarrigue, Directrice de recherche CNRS à Supelec de Paris, pour l'honneur qu'elle ait accepté d'examiner mon mémoire et de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse, Mondher Farza, Professeur à l'université de Caen, pour le temps immense qui a consacré à l'encadrement de ma thèse, une disponibilité d'esprit considérable qui m'a fait découvrir la recherche tout au long de ces dernières années. Son rôle, ses critiques constructives, ses précieux conseils

et ses propositions m'ont permis de mener cette thèse jusqu'à la fin. Cette thèse n'aurait jamais paru sans lui.

Je voudrais aussi remercier tous mes collègues de l'équipe Automatique pour leur soutien durant ces années passées avec eux. Mes remerciements vont également envers toutes les secrétaires, en particulier Nicole Delamotte pour sa disponibilité et son efficacité.

J'adresse mes vifs remerciements à tous mes amis, doctorants du bureau 131, Marc, Malik, Elamari, Anès, Amin, Boubakeur et Abdesselem pour les jours qu'on a partagé ensemble et aussi pour leur sympathie. Je n'oublierai pas mes autres amis parmi lesquels je remercierai Jin Yao, Lehui Ding et Wei Guo pour les discussions que nous avons eues sur les sujets quotidiens lors de leurs séjours en France.

Enfin, je ne remercierai sans doute jamais assez à ma chère famille qui m'accompagnait et supportait sans trêve depuis toujours.

Table des matières

Liste des figures	9
1 Introduction	13
2 Notions d'observabilité	17
2.1 Observabilité	17
2.1.1 Quelques définitions	18
2.1.2 U -uniforme observabilité	20
2.1.3 Observabilité des systèmes mono-sortie bilinéaires	20
2.1.4 Observabilité des systèmes mono-sortie affines en la commande	21
2.1.5 Observabilité des systèmes affines en l'état	22
2.2 Observateurs	23
2.2.1 Systèmes linéaires stationnaires : observateur de Luenberger	24
2.2.2 Systèmes linéaires temps variant : Filtre de Kalman	25
2.2.3 Systèmes mono-sortie affines en la commande	26
2.2.4 Systèmes mono-sortie non affines en la commande	28
3 SNL MIMO uniformément observables	31
3.1 Première forme canonique	32
3.2 Deuxième forme canonique	34
3.3 Classe particulière de SNL MIMO uniformément observable	35
4 Observateurs à Entrées Inconnues (OEI)	41
4.1 Rappels sur la synthèse d'OEI pour les systèmes linéaires	41
4.2 Classe des systèmes non linéaires considérée	48
4.3 Procédure de synthèse d'observateur	48
4.3.1 Synthèse d'observateur avec $m \leq m_1 < p$	52
4.3.1.1 Equations de l'observateur dans les coordonnées originales	66
4.3.2 Synthèse d'observateur avec $m_1 = p$	69
4.3.2.1 Equations de l'observateur dans les coordonnées originales	73

4.4	Exemple	74
4.4.1	Résultats de simulation	76
4.5	Conclusion	78
5	Observateurs avec entrées inconnues affectant la sortie	81
5.1	Introduction	81
5.2	Rappels sur la synthèse pour les systèmes linéaires	81
5.3	Classe des systèmes non linéaires considérée	86
5.4	Synthèse de l'observateur	87
5.4.1	Synthèse de l'observateur avec $m_1 < p$	88
5.4.2	Synthèse d'observateur avec $m_1 = p$	88
5.5	Exemples	89
5.5.1	Exemple pour le cas $m_1 = p$	89
5.5.2	Exemple pour le cas $m_1 < p$	92
5.6	Conclusion	94
6	Nouvelle forme canonique observable pour les SNL MIMO	97
6.1	Classe de systèmes uniformément observables avec un couplage non triangulaire	97
6.2	Nouvelle forme canonique observable	101
6.3	Synthèse de l'observateur	102
6.4	Exemple	108
6.5	Conclusion	111
7	Application aux réacteurs biochimiques	113
7.1	Modèle du réacteur biochimique	114
7.2	Exemples	117
7.2.1	Exemple 1 : bioréacteur	118
7.2.1.1	Résultats de simulation	118
7.2.2	Exemple 2 : réacteur chimique	120
7.2.2.1	Résultats de simulation	122
7.3	Conclusion	124
8	Conclusions et perspectives	125
	Bibliographie	127

Table des figures

4.1	Mesures bruitées de x_1, x_2 et x_3	77
4.2	Estimation de x_4, x_5 et v	78
5.1	Mesures bruitées de la sortie	91
5.2	Estimation de x_1, x_2 et x_3	91
5.3	Estimation de l'entrée inconnue v	92
5.4	Mesures bruitées de y_1 et y_2	93
5.5	Estimation de x_1, x_2 et v	94
6.1	Comparaison des états estimés et simulés pour $z_i, i = 1, 2$	110
6.2	Comparaison des états estimés et simulés pour $z_i, i = 3, 4$	111
6.3	Comparaison des états estimés et simulés pour $z_i, i = 5, \dots, 7$	111
7.1	Mesures bruitées du substrat x_1	119
7.2	Evolution du taux de dilution $D(t)$	119
7.3	Estimation de la biomasse x_2 et de la vitesse de réaction r	120
7.4	Evolution du coefficient U	122
7.5	Mesures bruitées de T_R et C_A	123
7.6	Estimation de r_1 et de r_2	123
7.7	Estimation de C_B et de C_C	123

Notations, symboles et abréviations

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{R}^+	ensemble des nombres réels positives ou nuls
\mathbb{R}^n	espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
I_n	matrice identité de dimension $n \times n$ (appropriées)
$0_{n \times m}$	matrice nulle de dimension $n \times m$ (appropriées)
$[a, b]$	intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b
$]a, b[$	intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b
t	variable temporelle
$[a, b[$	intervalle semi-fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	dérivée temporelle de l'état x
C^ω	ensembles des fonctions continûment différentiables ω fois dans \mathbb{R}^n
$X > 0$ (≥ 0)	X définie positive (semi définie positive)
$X < 0$ (≤ 0)	X définie négative (semi définie négative)
$\dim(X)$	dimension de la matrice X
$(\cdot)^T$	transposée du bloc symétrique
\triangleq	égal par définition
$\lambda_{min}(P)$	la plus petite valeur propre de la matrice carrée P
$\lambda_{max}(P)$	la plus grande valeur propre de la matrice carrée P
$\ \cdot\ $	norme Euclidienne
$ a $	valeur absolue du nombre réel a

Acronymes

SNL	Système non linéaire (Non Linear System)
SISO	Mono-entrée Mono-sortie (Single Input Single Output)
MIMO	Entrées multiples sorties multiples (Multiple Input Multiple Output)
OEI	Observateur à entrées inconnues (Unknown input observer)

Introduction

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse porte essentiellement sur la synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires. Une partie de ce travail est aussi dédiée à la synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes qui, à notre connaissance, inclut toutes les classes de systèmes uniformément observables considérés dans la littérature pour la synthèse d'observateurs.

Durant les trois dernières décennies, plusieurs travaux ont été consacrés à la synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires à entrées inconnues ([MH74, Joh75, WDD75, Bha78, KVR80, YW88, HM92, GS91, DZX94]). D'une manière générale, les solutions apportées à ce problème peuvent être classées en trois catégories ou approches. Dans la première approche, certaines hypothèses relatives à la structure des entrées inconnues sont considérées et un observateur approprié est alors proposé (cf. par exemple [MH74, Joh75]). Dans la deuxième approche, les algorithmes proposés consistent à introduire des changements de coordonnées qui permettent de générer un système dynamique indépendant des entrées inconnues. Le système ainsi généré est ensuite exploité pour la synthèse d'observateurs (classiques) permettant l'estimation des états non mesurés de ce système (cf. par exemple [WDD75, KVR80, YW88, HM92, GS91, DZX94]). Dans la troisième approche, les solutions proposées consistent à estimer simultanément les états non mesurés et les entrées inconnues. L'inconvénient majeur de la première approche réside dans les hypothèses faites sur la structure des entrées inconnues. De telles hypothèses nécessitent la disponibilité d'une certaine connaissance sur la nature des entrées inconnues qui pourrait ne pas être disponible. Dans la deuxième approche, les algorithmes proposés ne fournissent aucune estimation ni information sur les entrées inconnues. Dans un travail relativement récent [CT98] entrant dans le cadre de la troisième approche, l'auteur utilise des techniques LMI pour calculer le gain d'observation. Toutefois, des conditions assez fortes sur la variation de l'erreur d'estimation ont été supposées pour assurer sa convergence. Dans un article plus récent [XS03], les auteurs ont proposé un observateur d'ordre réduit pour estimer simultanément l'état et les entrées inconnues lorsque celles-ci varient lentement en fonction du temps. D'autres travaux concernant la synthèse d'observateurs pour des classes particulières de systèmes non linéaires sont décrits dans ([XS01, BDR02, FMR04]).

Notre contribution en termes de synthèse d'observateurs à entrées inconnues se situe dans le cadre de la troisième approche. Il s'agit de faire la synthèse d'un observateur de type grand gain pour l'estimation conjointe de l'état non mesuré et des entrées inconnues pour des classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. La synthèse de cet observateur ne suppose, ni adopte aucun modèle mathématique pour les entrées inconnues. Plus précisément, notre objectif consiste à estimer tous les états non mesurés sans l'adoption d'aucune hypothèse relative aux entrées inconnues. Pour l'estimation conjointe de ces entrées avec tous les états non mesurés, nous supposons simplement que la dérivée première par rapport au temps de chacune de ces entrées est bornée.

En ce qui concerne la synthèse d'observateurs standards (avec entrées connues) pour les systèmes non linéaires multi-sorties, notons qu'en dépit d'une activité de recherche intense et continue (cf. par exemple [BH91, CMG93, FMR04, GB81, GHO92, GK94, HF03, HP99, KI83, KR85, Nij81, XW89]), ce problème reste encore ouvert. D'une manière générale, on peut répartir sur cinq classes les différentes approches de synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires. La première est basée sur le filtre de Kalman et a suscité beaucoup d'intérêt pendant longtemps. Ceci est essentiellement dû à une simplicité relative dans sa mise en oeuvre même pour des systèmes de taille importante. De plus, ce filtre constitue souvent le point de départ pour la synthèse d'observateurs pour de tels systèmes. Toutefois, dans la plupart des cas, on manque de preuve de convergence du filtre. La deuxième approche est basée sur la linéarisation de l'erreur. Elle consiste à considérer des transformations appropriées qui mettent le système à étudier sous une forme où les non linéarités ne dépendent que des entrées et des sorties (cf. par exemple [HP99, KI83, KR85, Gua02, XW89]). Dans les premiers travaux relatifs à cette approche, une difficulté essentielle réside dans la recherche de la transformation appropriée qui nécessite la résolution de systèmes d'Equations à Dérivées Partielles (EDP). Plus récemment, cette difficulté est surmontée par la proposition d'algorithmes constructifs qui permettent de transformer le système original sous la forme appropriée sans avoir à résoudre de systèmes EDP [SGS03]. La troisième approche est basée sur des techniques LMI. Les systèmes considérés sont composés d'une partie linéaire constante qui sert à calculer le gain d'observation et d'une partie non linéaire qui est supposée être globalement lipschitzienne. Le calcul du gain se fait simultanément avec la recherche de la plus grande valeur de la constante de Lipschitz pour laquelle la synthèse de l'observateur est possible. Cette méthode ne tient pas compte la structure de la non linéarité, ce qui réduit parfois considérablement l'ensemble des solutions [Raj98]. La quatrième approche utilise des outils de l'algèbre différentiel. Elle consiste à exprimer les états non mesurés en fonction des sorties, des entrées et de leurs dérivées (par rapport au temps) successives, ces dérivées étant calculées par des différentiateurs numériques (cf.

par exemple [DF91b, DF91a, FJSR08]). La cinquième et dernière approche se base sur des formes canoniques observables. La première contribution qui entre dans le cadre de cette approche est celle de [GHO92] où les auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour caractériser les systèmes mono-sorties uniformément observables et elle consiste en l'existence d'une transformation qui mette le système sous la forme triangulaire. Cette forme canonique est ensuite exploitée pour la synthèse d'un observateur à grand gain sous certaines conditions, notamment le caractère global Lipschitz des non linéarités. On notera que le gain de l'observateur proposé est issu de la résolution d'une équation algébrique de Lyapunov et son expression a été donnée. La généralisation de ce résultat aux systèmes multi-sorties a fait l'objet de plusieurs travaux dont notamment [BFH98, DBG92, FMR04, GK94, HF03, HBS00, HYJ01, RZ94].

Notre contribution en terme de synthèse d'observateurs standards consiste à proposer un observateur de type grand gain pour une classe de systèmes qui inclut, à notre connaissance, toutes les classes de systèmes uniformément observables considérés dans la littérature pour la synthèse d'observateurs.

Ce mémoire est composé de huit chapitres dont l'introduction et la conclusion.

Quelques définitions inhérentes à l'observation des systèmes non linéaires et quelques résultats concernant la synthèse d'observateurs pour les systèmes uniformément observables mono-sortie sont rapportés au chapitre 2.

Dans le chapitre 3, nous rappelons quelques résultats concernant la synthèse d'observateurs de type grand gain pour des classes particulières de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. Plus précisément, nous présentons deux formes canoniques observables différentes auxquelles nous nous référeront au dernier chapitre pour la présentation de notre contribution relative à la présentation d'une forme canonique observable incluant ces deux formes. Nous présentons aussi dans ce chapitre une classe de systèmes non linéaires uniformément observables qui peut se mettre sous l'une des deux formes présentées précédemment. Nous nous sommes basés sur cette dernière classe pour la synthèse d'observateurs à entrées inconnues.

Le quatrième chapitre est dédié à notre première contribution qui consiste en la synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires dont l'expression des sorties ne dépend pas des entrées inconnues. Avant de présenter l'approche proposée, des rappels sur la synthèse de tels observateurs dans le cas linéaire sont rapportés.

Le chapitre 5 concerne aussi la synthèse d'observateurs à entrées inconnues mais cette fois-ci et contrairement au chapitre précédent, les expressions des sorties sont supposées dépendre des entrées inconnues.

Au chapitre 6, nous présentons la nouvelle forme canonique observable ainsi que la synthèse de l'observateur associé.

Au chapitre 7, l'approche proposée pour la synthèse des observateurs à entrées inconnues est appliquée aux réacteurs biochimiques pour l'estimation des vitesses de réactions et des concentrations en composés.

Nous terminons ce mémoire par une conclusion et les perspectives de recherche dans le contexte des résultats obtenus.

Notions d'observabilité

Dans ce qui suit, la classe des problèmes considérés concerne les procédés qui admettent un modèle dynamique écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(u, x) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'état $x(t) \in \mathcal{V}$ une variété analytique (\mathcal{C}^ω , l'entrée $u \in U \subset \mathbb{R}^\mu$; la sortie $y \in \mathbb{R}^p$. Pour tout $u \in U$, $f_u(x) = f(u, \cdot)$ dénote un champ de vecteur \mathcal{C}^ω sur M et la fonction $h = (h_1, \dots, h_p)$ est aussi \mathcal{C}^ω . La variable t représente le temps.

Ces systèmes constituent une représentation du comportement du procédé. Pour une entrée donnée, les trajectoires au cours du temps des variables d'états dépendent de leurs conditions initiales. Par la suite, étant donné t_0 un instant initial, $T > 0$ un horizon temporel (éventuellement infini) et $u(t, t_0)$ une entrée, on note $x(t, x(t_0), u(t))$ la trajectoire du système lorsqu'elle existe de manière unique pour tout temps $t \in [t_0, t_0 + T[$ (Problème de Cauchy).

2.1 Observabilité

L'observabilité d'un système exprime la possibilité de reconstruire l'état initial $x(t_0)$ à partir de la seule connaissance des sorties $y(t, t_0)$ et des entrées $u(t, t_0)$ pendant un intervalle de temps suffisamment long contenu dans $[t_0, t_0 + T[$.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler certaines définitions inhérentes à l'observabilité des systèmes non linéaires, que l'on peut retrouver dans [\[HK77, BCDT⁺93\]](#).

2.1.1 Quelques définitions

La notion d'observabilité est basée sur la possibilité de différencier deux conditions initiales distinctes. On parlera ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales.

Définition 2.1. (*Distinguabilité - Indistinguabilité*) : Deux états initiaux $x_0, x_1 \in \mathcal{V}$ tel que $x_0 \neq x_1$ sont dits distinguables dans \mathcal{V} si $\exists t \geq 0$ et $\exists u : [0, t] \rightarrow U$ une entrée admissible telle que les trajectoires des sorties issues respectivement de x_0 et x_1 restent dans \mathcal{V} pendant la durée $[0, t]$ et vérifient $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$. Dans ce cas, on dira que u distingue x_0 et x_1 dans \mathcal{V} . Réciproquement, deux états initiaux $x_0, x_1 \in \mathcal{V}$ tel que $x_0 \neq x_1$ sont dits indistinguables si $\forall t \geq 0$ et $\forall u : [0, t] \rightarrow U$ pour lesquels les trajectoires issues de x_0, x_1 restent dans \mathcal{V} on a : $y(t, x_0, u(t)) = y(t, x_1, u(t))$.

Il est maintenant possible de donner une définition de l'observabilité d'un système en un point, et par extension, de définir un système observable.

Définition 2.2. (*Observabilité*) : Un système est observable en $x_0 \in \mathcal{V}$ si tout autre état $x_1 \neq x_0$ est distinguable de x_0 dans \mathcal{V} . Un système est observable s'il est observable en tout point $x_0 \in \mathcal{V}$.

Pour les systèmes linéaires stationnaires

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^\mu, y \in \mathbb{R}^p \quad (2.2)$$

l'observabilité est caractérisée par la fameuse condition du rang : le système (2.2) est

observable si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ est de rang plein (= n).

La distinguabilité est un concept global. Il arrive souvent que pour engendrer deux trajectoires à partir de x_0 et x_1 , on ait besoin de s'éloigner suffisamment de x_0 et x_1 . Les deux définitions qui suivent sont de nature locale.

Définition 2.3. (*observabilité locale*) : On dit que le système Σ est localement observable en x_0 si pour tout voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 , l'ensemble des points qui sont indistinguables de x_0 dans V_{x_0} via les trajectoires dans V_{x_0} est le point x_0 lui-même.

Lorsqu'il s'agit de distinguer x_0 de ses voisins, on peut affaiblir la notion d'observabilité locale. Dans cette optique, on a :

Définition 2.4. (*observabilité locale faible*) : On dit que le système Σ est localement faiblement observable en x_0 s'il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 tel que pour tout voisinage ouvert $V'_{x_0} \subset V_{x_0}$, l'ensemble des points qui sont indistinguables de x_0 dans V'_{x_0} via les trajectoires dans V'_{x_0} est le point x_0 lui-même.

Un système est donc localement faiblement observable si tout état x_0 peut être instantanément distingué de ses voisins en utilisant les trajectoires qui restent dans un voisinage de x_0 .

Dans le but de traduire cette propriété d'observabilité par une condition de rang comme dans le cas des systèmes linéaires, nous sommes amenés à définir l'espace d'observation.

Définition 2.5. (*Espace d'observation*) : L'espace d'observation du système Σ est le plus petit sous-espace vectoriel, \mathcal{O} , de fonctions de \mathcal{V} à valeurs dans l'espace de sortie qui contienne h_1, \dots, h_p , et qui soit fermé pour la dérivation de Lie par rapport à tous les champs de vecteurs du type $f_u(x) = f(u, x)$, $u \in U$, fixé.

Définition 2.6. (*Observabilité au sens du rang*) : Soit $d\mathcal{O}$ l'espace des différentielles des éléments de \mathcal{O} . Désignons par $d\mathcal{O}(x_0)$ l'évaluation de $d\mathcal{O}$ en x_0 . Le système Σ est localement faiblement observable en x_0 si

$$\dim d\mathcal{O}(x_0) = n \tag{2.3}$$

La condition (2.3) est appelée condition du rang. Si cette condition est satisfaite pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, on dit que le système Σ est observable au sens du rang.

Le théorème précédent donne une condition suffisante d'observabilité locale faible. Le théorème suivant donne une condition nécessaire :

Théorème 2.1. : Supposons que le système Σ est localement faiblement observable. Alors la condition (2.3) est vérifiée presque partout dans \mathcal{V} , c'est-à-dire, $\dim d\mathcal{O}(x) = n$ en tout point x appartenant à un ouvert \mathcal{V}' dense dans \mathcal{V} .

On remarque que les définitions d'observabilité données précédemment n'impliquent pas que toute entrée distingue des couples de points de \mathcal{V} . En pratique, on aimerait se placer

dans le cas où l'entrée u étant fixée, tout couple d'états distincts donne lieu à des sorties différentes. En effet, ce n'est que dans ce cas que l'on peut reconnaître l'état initial du système à partir des informations antérieures sur l'entrée et la sortie. Ceci nous conduit au concept des entrées universelles et des systèmes qui sont observables au sens du rang pour toutes les entrées appliquées.

2.1.2 U -uniforme observabilité

Lorsqu'une entrée distingue tous les couples d'état initiaux sur \mathcal{V} , celle-ci est dite universelle.

Définition 2.7. (*Entrée universelle*) : Une entrée $u : [0, T] \rightarrow U$ admissible est dite universelle pour le système Σ sur $[0, T]$ si, pour tout couple d'états initiaux distincts x_0 et x_1 , il existe au moins un temps $t \in [0, T]$ tel que $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$. Une entrée non universelle est dite singulière.

Lorsqu'il n'existe pas d'entrée singulière parmi l'ensemble des entrées admissibles U , alors tout couple d'états initiaux sont distinguables. Cette propriété est appelée la U -uniforme observabilité.

Définition 2.8. (*U -uniforme observabilité*) : Un système dont toutes les entrées admissibles à valeur dans U sont universelles est dit U -uniformément observable.

Dans le cas où l'ensemble de toutes les entrées à valeurs bornées dans \mathbb{R}^m sont universelles, ce système sera dit \mathbb{R}^m -uniformément observable (et l'on dira par la suite seulement uniformément observable).

Le problème de la caractérisation des systèmes uniformément observables dans le cas mono-sortie a été abordé par Williamson [Wil77] pour les systèmes bilinéaires et par Gauthier et Bornard [GB81] pour les systèmes affines en la commande. Ces résultats peuvent se résumer par les deux théorèmes des paragraphes suivants. Dans le cas multi-sorties, certaines conditions suffisantes de structure seront données plus loin.

2.1.3 Observabilité des systèmes mono-sortie bilinéaires

Théorème 2.2. : *Considérons le système bilinéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx + Fu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.4)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$; A, B, F, C sont des matrices de dimensions appropriées. Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (2.4) soit uniformément observable est qu'il puisse être transformé par un changement de coordonnées $z = Tx$, en :

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + u\bar{B}z + \bar{F}u \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\text{où } \bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ a_1 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}, \bar{B} = TBT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \bar{b}_{n1} & \dots & \dots & \bar{b}_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = TF, \bar{C} = CT^{-1} = [1, 0, \dots, 0].$$

2.1.4 Observabilité des systèmes mono-sortie affines en la commande

Considérons le système affine en la commande :

$$\Sigma_0 \begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.6)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}$.

Le résultat suivant, dû à J.P. Gauthier et G. Bornard [GB81], donne une condition nécessaire et suffisante pour que le système Σ_0 soit uniformément observable.

Théorème 2.3. : *Le système (2.6) est \mathbb{R}^m -uniformément observable, si et seulement si, il existe un système de coordonnées locales sur \mathbb{R}^n tel que (2.6) soit presque partout localement de la forme*

$$\Gamma_0 \begin{cases} \dot{z} = Az + \psi(z) + \Phi(z)u \\ y(t) = Cz \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{où } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \psi(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_n(z) \end{bmatrix}, C = [1, 0, \dots, 0];$$

$$\Phi(z) = [\Phi^1(z) \ \Phi^2(z) \ \dots, \Phi^m(z)] \text{ où chaque vecteur colonne, } \Phi^k(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1^k(z) \\ \vdots \\ \Phi_n^k(z) \end{bmatrix} \text{ de la}$$

matrice $\Phi(z)$ est triangulaire par rapport à z , c'est-à-dire $\Phi_i^k(z) \triangleq \Phi_i^k(z_1, z_2, \dots, z_i)$ pour $k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$.

Nous proposons maintenant de rappeler quelques définitions relatives à l'observation des systèmes affines en l'état qui sont un cas particulier des systèmes non-linéaires présentés précédemment. La motivation derrière la mise en avant de ces systèmes réside dans deux faits :

- les modèles physiques de plusieurs procédés (notamment les procédés biochimiques, le moteur asynchrone) se présentent sous cette forme.
- la synthèse de l'observateur pour ces systèmes est basée sur la partie affine en l'état.

2.1.5 Observabilité des systèmes affines en l'état

Un système affine en l'état est de la forme :

$$\mathcal{L} \begin{cases} \dot{x} = A(u)x + B(u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.8)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in U$ sont les entrées appartenant à un borélien et $y \in \mathbb{R}^p$ sont les signaux de sortie. Les matrices $A(u)$ et $B(u)$ sont mesurables en u , respectivement de dimension $n \times n$ et $n \times 1$. C est une matrice $p \times n$ constante.

On appelle matrice de transition du système \mathcal{L} la matrice $n \times n$ inversible solution de :

$$\begin{cases} \frac{d\phi_u(t, t_0)}{dt} = A(u)\phi_u(t, t_0) \\ \phi(t_0, t_0) = I \end{cases} \quad (2.9)$$

I étant la matrice identité.

Posons $\phi_u(t_0, t) = \phi_u^{-1}(t, t_0)$. Il s'ensuit que pour tout t_1, t_2 et t_3 , on vérifie :

$$\phi_u(t_1, t_2)\phi_u(t_2, t_3) = \phi_u(t_1, t_3)$$

Comme la sortie $y(t, x(t_0), u)$ de \mathcal{L} est de la forme :

$$y(t, x(t_0), u) = C(t)\phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{\tau=t_0}^t C(t)\phi(t, \tau)B(u(\tau))d\tau$$

on peut montrer facilement que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u est universelle sur $[0, T]$ pour le système \mathcal{L} .
- u est universelle sur $[0, T]$ pour le système homogène :

$$\mathcal{L} \begin{cases} \dot{x} = A(u)x \\ y = Cx \end{cases}$$

iii) Si la sortie du système homogène est nulle sur $[0, T]$, alors la condition initiale x est nulle.

iv) le Grammien d'observabilité de \mathcal{L} i.e.

$$G(u, t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \phi_u^T(t, t_0) C^T C \phi_u(t, t_0) dt$$

est symétrique défini positif.

La définition de la complète uniforme observabilité du système \mathcal{L} fait recours à la notion d'entrée régulièrement persistante que nous rappelons ici.

Définition 2.9. (*entrée régulièrement persistante*) : Une entrée $u \in U$ est dite régulièrement persistante si le Grammien d'observabilité du système \mathcal{L} vérifie :

$$\exists t_0 \geq 0; \exists T > 0; \exists \alpha_1; \exists \alpha_2 > 0; \forall t \geq t_0 : \alpha_1 I \leq \int_t^{t+T} \phi_u^T(\tau, t) C^T C \phi_u(\tau, t) d\tau \leq \alpha_2 I$$

Nous donnons maintenant la définition suivante :

Définition 2.10. (*Système complètement uniformément observable*) : Lorsque toutes les entrées $u \in U$ sont régulièrement persistantes, le système \mathcal{L} est dit complètement uniformément observable.

Nous allons maintenant nous intéresser à la synthèse d'observateurs. Dans ce qui suit, nous allons rappeler ce que c'est un observateur puis présenter quelques résultats sur la synthèse d'observateurs. L'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman seront tout d'abord présentés. Ensuite, on s'intéressera à certaines classes de systèmes non-linéaires uniformément observables pour lesquelles nous présenterons des observateurs de type grand gain.

2.2 Observateurs

Un observateur ou reconstituteur d'état est un système dynamique qui permet d'obtenir une estimation de la valeur courante de l'état non mesuré d'un système à partir des informations antérieures sur les entrées et la sortie de ce dernier.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z} = \bar{f}(z, u, y) \\ \hat{x} = \bar{h}(z) \end{cases} \quad (2.10)$$

où $z \in M$ une variété différentiable telle que $\bar{h} : M \rightarrow \mathcal{V}$ soit une submersion, \mathcal{V} étant l'ouvert de \mathbb{R}^n constituant l'espace d'état de Σ ; u et y sont respectivement les entrées et les sorties de Σ .

Définition 2.11. (*Observateur*) : (i) Le système \mathcal{O} est un observateur asymptotique local s'il existe $x_0 \in \mathcal{V}$ et un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

pour toute condition initiale $x(0) \in V_{x_0}$ et $z(0) \in \bar{h}^{-1}(V_{x_0})$.

(ii) Le système \mathcal{O} est un observateur global si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

pour toute condition initiale $x(0) \in \mathcal{V}$ et $z(0) \in M$.

(iii) Dans les deux cas ci-dessus, \mathcal{O} est dit observateur exponentiel si :

$$\exists \lambda, \mu > 0 \text{ tel que } \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \mu e^{-\lambda t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

La structure d'observateur la plus utilisée est :

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{x} = f(\hat{x}, u) - G(g)(h(\hat{x}) - y) \\ \dot{g} = \varphi(\hat{x}, u, y, g) \end{cases} \quad (2.11)$$

$G(g)$ est appelé *gain d'observation* et $G(g)(h(\hat{x}) - y)$ est le terme de correction.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler quelques résultats existants sur la synthèse d'observateurs.

2.2.1 Systèmes linéaires stationnaires : observateur de Luenberger

Soit le système linéaire stationnaire suivant.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.12)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^\mu$, $y \in \mathbb{R}^p$ et A , B , C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

Le système suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - K(C\hat{x} - y) \quad (2.13)$$

où la matrice K est choisie telle que les valeurs propres de $A - KC$ sont à parties réelles négatives, est un observateur exponentiel pour le système (2.12), communément appelé par le nom de son auteur i.e. observateur de Lunenberger .

2.2.2 Systèmes linéaires temps variant : Filtre de Kalman

Soit le système linéaire temps variant suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^\mu$, $y \in \mathbb{R}^p$, les matrices A , B et C étant de dimensions appropriées.

Pour les systèmes linéaires temps variant de la forme (2.14), il existe des observateurs de type Kalman. La synthèse de ces observateurs suppose que les entrées sont régulièrement persistantes. Les observateurs de Kalman prennent les deux formes suivantes selon que l'on utilise une équation dynamique de Lyapunov (2.15) ou de Riccati (2.16) pour le gain.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x} + B(t)u(t) - S^{-1}(t)C^T(t)(C(t)\hat{x} - y(t)) \\ \dot{S}(t) = -\theta S(t) - A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)C(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x} + B(t)u(t) - S^{-1}(t)C^T(t)(C(t)\hat{x} - y(t)) \\ \dot{S}(t) = -SQS - A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)C(t) \\ S(0) = S_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

$\theta > 0$ et S_0 , Q_0 étant définies positives.

La convergence de ces observateurs est garantie sous l'hypothèse de l'uniforme complète observabilité du système. Dans ce type de synthèse, il faut assurer non seulement la stabilité de l'équation d'erreur, mais aussi celle de la matrice de gain S . Celle-ci doit être symétrique définie positive et bornée pour tout t .

Dans ce qui suit, nous allons rappeler la synthèse d'observateurs à grand gain pour certaines classes de systèmes uniformément observables.

2.2.3 Systèmes mono-sortie affines en la commande

Soit le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) = f(x) + G(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.17)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^\mu$, $G(x)$ une matrice $n \times m$.

Dans [GHO92], les auteurs ont démontré que si le système (2.17) est uniformément observable, alors il peut se transformer via le changement de variable

$$z = \Phi(x) = [h(x), L_f(h)(x), \dots, L_f^{n-1}(h)(x)]^T \quad (2.18)$$

sous la forme canonique d'observabilité suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(z) + \Psi(z)u \\ y = Cz \end{cases} \quad (2.19)$$

où

- A est la matrice anti-décalage, c'est-à-dire

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

- C est la matrice d'observation ayant la structure particulière suivante :

$$C = [1, 0, \dots, 0] \quad (2.21)$$

- la matrice $\Psi(z) = [\Psi^1(z) \ \Psi^2(z) \ \dots \ \Psi^m(z)]$ est telle que chacun de ses vecteurs colonnes $\Psi^k(z)$, $k = 1, \dots, m$ a une structure triangulaire par rapport à z , c'est-à-dire

$$\Psi^k(z) = \begin{pmatrix} \Psi_1^k(z_1) \\ \Psi_2^k(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \Psi_n^k(z) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Les auteurs ont ensuite utilisé la forme (2.19) pour faire la synthèse de l'observateur exponentiel, de type grand gain, suivant :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(\hat{z}) + \Psi(\hat{z})u - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{z} - y) \quad (2.23)$$

où

- $\theta > 0$ est le paramètre de réglage de l'observateur.
- S est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + SA = C^T C \quad (2.24)$$

- Δ_θ est la matrice diagonale suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left(1, \frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^{n-1}} \right) \quad (2.25)$$

Pour la synthèse de l'observateur, les hypothèses suivantes doivent être vérifiées :

- (H1) Les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi_i(z)$ sont globalement Lipschitz par rapport à z .
- (H2) Les entrées u_i sont mesurables et bornées dans \mathbb{R} .

Notons que la solution S de l'équation (2.24) peut s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{(i+j)} C_{i+j-2}^{j-1} \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n$$

où C_n^p est le symbole désignant la binômiale, c'est-à-dire $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

De même, le terme $S^{-1}C^T$ intervenant dans le gain d'observation peut s'exprimer aussi comme suit :

$$S^{-1}C^T = \begin{pmatrix} C_n^1 \\ C_n^2 \\ \vdots \\ C_n^n \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Notons que l'estimation \hat{x} de l'état x de (2.17), peut s'obtenir par $\hat{x} = \Phi^{-1}(\hat{z})$. Parfois, la fonction Φ^{-1} ne peut pas être exprimée en fonction de z et un autre moyen pour contourner cette difficulté consiste à exprimer l'équation de l'observateur directement dans les coordonnées originales en x . En effet, en tenant compte du fait que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

l'équation de l'observateur dans les coordonnées originales s'écrit comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + G(\hat{x})u - \theta \left(\frac{\partial \Phi(\hat{x})}{\partial x} \right)^{-1} \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (h(\hat{x}) - y)$$

Notons ici la similitude de cet observateur avec le modèle original i.e. le système (2.17). En effet, cet observateur est une copie du modèle, plus un terme correctif qui est explicitement donné. De plus, son réglage se fait à travers le choix d'un seul paramètre, i.e. θ .

Le résultat présenté reste valable même pour des systèmes avec des non linéarités non affines en la commande [GK94, HF03].

2.2.4 Systèmes mono-sortie non affines en la commande

Soit le système non-linéaire de la forme triangulaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x, u) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.27)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^\mu$, $y \in \mathbb{R}$.

Le système (2.27) peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.28)$$

où $C = [1, \dots, 0]$.

On considère les hypothèses suivantes :

(H1') $\exists \alpha > 0, \beta > 0$ telle que :

$$\alpha \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(u, x_1, \dots, x_{i+1}) \leq \beta; \forall (x, u). \quad (2.29)$$

(H2') les fonctions $f_i, i = 1, \dots, n$ sont globales Lipschitz.

Soit maintenant le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - \Delta_\theta K(C\hat{x} - y) \quad (2.30)$$

où $\Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$, $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix}$ est un vecteur constant choisi de telle manière

que l'inégalité de stabilité suivante soit vérifiée :

$$(A(t) - KC)^T S + S(A(t) - KC) \leq -\eta I_n. \quad (2.31)$$

où $\eta > 0$, S est une matrice constante de dimension $(n \times n)$, I_n est la matrice identité

de dimension $(n \times n)$, $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & a_1(t) & 0 & 0 \\ \vdots & & a_2(t) & 0 \\ 0 & & & \ddots & a_{n-1}(t) \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ où les $a_i(t)$ sont données

par :

$$a_i(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(u, x_1, \dots, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$$

Le résultat suivant est dû à J.P. Gauthier et I. Kupka [GK94] :

Théorème 2.4. *Sous les trois hypothèses (H1') et (H2'), le système (2.30) est un observateur exponentiel pour le système (2.27).*

Remarquons que la synthèse de l'observateur (2.30), dont le gain est constant, ne nécessite pas la connaissance des $a_i(t)$ mais utilise simplement le fait que ces variables sont bornées.

SNL MIMO uniformément observables

Dans ce chapitre, nous présentons deux formes observables caractérisant des classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. Nous nous référeront à ces deux formes, que l'on appellera respectivement première forme et deuxième forme, au chapitre 6 dans lequel nous proposerons une nouvelle forme observable incluant ces deux formes. Ensuite, nous présenterons une classe particulière de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée qui sera aussi présentée sous la première forme canonique présentée. Cette classe particulière sera considérée dans toute la partie qui traite de la synthèse des observateurs à entrées inconnues, c'est-à-dire dans les chapitres 4 et 5.

La première forme canonique a été proposée par [HF03]. Le système considéré se compose de plusieurs blocs dont chacun est associé à une composante vectorielle de l'état. La caractéristique principale de ce système réside dans le fait que le premier bloc est associé à toutes les sorties et que les non linéarités du système ont une structure triangulaire, c'est-à-dire la non linéarité d'un bloc ne dépend que des variables propres du bloc ou de celles des blocs supérieurs. Cette forme peut être interprétée comme une généralisation de la forme canonique caractérisant les systèmes mono-sortie uniformément observables [GB81, GH02, GK94].

La deuxième forme canonique a été proposée par [Shi00, HYJ01]. Le système considéré se compose d'un nombre de blocs égal au nombre de sorties et chacun est associé à une composante vectorielle de l'état. La caractéristique principale de ce système réside dans le fait que la première variable de chaque bloc est une sortie du système. Pour cette forme aussi, les non linéarités du système ont une structure triangulaire.

Chacune de ces formes ne caractérisent que certaines classes de systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables. En effet, il existe des classes de systèmes uniformément observables qui peuvent se mettre sous les deux formes, d'autres classes qui peuvent se mettre sous l'une des deux formes sans se mettre sous l'autre forme et enfin des classes de systèmes uniformément observables qui ne peuvent se mettre ni sous la première, ni la deuxième forme.

Nous proposons maintenant de présenter les deux formes canoniques ainsi que la classe particulière de systèmes non linéaires uniformément observables.

3.1 Première forme canonique

On considère les systèmes qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) \\ y = Cx = x^1 \end{cases} \quad (3.1)$$

où l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^k \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, \dots, q$, $n = qp$, la sortie $y \in \mathbb{R}^p$, l'entrée $u \in \mathbb{R}^\mu$ et $\varphi(u, x)$ a une structure triangulaire par rapport à x , c'est-à-dire

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x^1) \\ \varphi^2(u, x^1, x^2) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix};$$

La matrice A de dimension $n \times n$ est la matrice anti-décalage par bloc :

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & 0_p \\ \vdots & & I_p & 0_p \\ 0_p & & \ddots & I_p \\ 0_p & \dots & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

La matrice d'observation C a la structure particulière suivante :

$$C = [I_p \ 0_p \ \dots \ 0_p] \quad (3.3)$$

On remarque que la structure de ce système multi-sortie étend directement celle du système mono-sortie (2.17) dans le sens où toutes les quantités scalaires sont remplacées maintenant par des vecteurs de dimension p . Le système (3.1) est ainsi formé par un ensemble de blocs, chacun de ses blocs décrivant la dynamique de la composante vectorielle x^k , $k = 1, \dots, q$ et toutes les sorties sont rassemblées au sein du premier bloc x^1 .

Pour la synthèse de l'observateur, les hypothèses suivantes sont adoptées :

(H1) la fonction $\varphi(u, x)$ est globalement Lipschitz par rapport à x , localement uniformément en u .

(H2) L'entrée u est bornée.

Rappelons que l'hypothèse (H1) est classique et elle est généralement adoptée lors de la synthèse d'observateurs de type grand gain (se référer par exemple à [GHO92, HF03]). Cette hypothèse est bien sûr restrictive par son caractère global. Toutefois, en pratique, la trajectoire du système (physique) reste généralement confinée dans un domaine compact borné $\Omega \in \mathbb{R}^n$ sur lequel les non linéarités sont lipschitziennes. Dans ce cas, ils suffit de les étendre sur tout \mathbb{R}^n par une fonction globalement lipschitziennes. On pourra se référer par exemple à ([HYJ01, FMR04]) où ces problèmes sont traités.

Dans la suite de ce mémoire, on adoptera des hypothèses similaires à (H1) tout en gardant en mémoire la remarque formulée précédemment.

Un observateur à grand gain pour le système (3.1) est le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(u, \hat{x}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (C\hat{z} - y) \quad (3.4)$$

où

- $\theta > 0$ est le paramètre de réglage de l'observateur.
- S est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S + A^T S + SA = C^T C \quad (3.5)$$

- Δ_θ est la matrice diagonale par bloc suivante :

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left(I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \quad (3.6)$$

Il est clair que l'observateur (3.4) est la simple généralisation de l'observateur (2.23) au cas multi-sorties. De manière similaire au cas mono-sortie, la solution S de l'équation (3.5) ainsi que le vecteur $S^{-1}C^T$ peuvent s'exprimer comme suit :

$$S(i, j) = (-1)^{(i+j)} C_{i+j-2}^{j-1} I_p \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n \quad (3.7)$$

$$S^{-1}C^T = \begin{pmatrix} C_q^1 I_p \\ C_q^2 I_p \\ \vdots \\ C_q^q I_p \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

où I_p est la matrice identité $p \times p$.

3.2 Deuxième forme canonique

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = A_1 x^1 + \varphi^1(u, x^1, y_2, \dots, y_p) \\ \dot{x}^2 = A_2 x^2 + \varphi^2(u, x^1, x^2, y_3, \dots, y_p) \\ \vdots \\ \dot{x}^p = A_p x^p + \varphi^p(u, x) \\ y_1 = C_1 x^1 = x_1^1 \\ y_2 = C_2 x^2 = x_1^2 \\ \vdots \\ y_p = C_p x^p = x_1^p \end{cases} \quad (3.9)$$

où l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\lambda_k}$, $x_i^k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, p$, $i = 1, \dots, \lambda_k$,

$n = \sum_{k=1}^p \lambda_k$, la sortie $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, $y_i \in \mathbb{R}$, l'entrée $u \in \mathbb{R}^\mu$ et φ^k a la structure

suivante

$$\varphi^k(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(u, x^1, \dots, x^{k-1}, x_1^k, y_{k+1}, \dots, y_p) \\ \varphi_2^k(u, x^1, \dots, x^{k-1}, x_1^k, x_2^k, y_{k+1}, \dots, y_p) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(u, x^1, \dots, x^k, y_{k+1}, \dots, y_p) \end{pmatrix};$$

Chaque matrice A_k est une matrice anti-décalage $\lambda_k \times \lambda_k$ et chaque matrice d'observation C_k est une matrice ligne avec λ_k colonnes nulles, exceptée la première qui est égale à 1 ($C_k = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$).

Sous l'hypothèse classique que chacune des fonction φ^k est globalement lipschitzienne par rapport à x uniformément en u , les auteurs dans [HYJ01] ont proposé l'observateur à grand gain suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^1 = A_1 \hat{x}^1 + \varphi^1(u, \hat{x}^1, y_2, \dots, y_p) - \theta_1 \Delta_1^{-1}(\theta) S_1^{-1} C_1^T C_1 (\hat{x}^1 - x^1) \\ \dot{\hat{x}}^2 = A_2 \hat{x}^2 + \varphi^2(u, \hat{x}^1, \hat{x}^2, y_3, \dots, y_p) - \theta_2 \Delta_2^{-1}(\theta) S_2^{-1} C_2^T C_2 (\hat{x}^2 - x^2) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}^p = A_p \hat{x}^p + \varphi^p(u, \hat{x}) - \theta_p \Delta_p^{-1}(\theta) S_p^{-1} C_p^T C_p (\hat{x}^p - x^p) \end{cases} \quad (3.10)$$

pour $k = 1, \dots, p$.

- S_k est l'unique matrice symétrique définie positive $\lambda_k \times \lambda_k$ solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S_k + A_k^T S_k + S_k A_k = C_k^T C_k$$

- $\Delta_k(\theta)$ est la matrice diagonale $\lambda_k \times \lambda_k$ suivante :

$$\Delta_k(\theta) = \text{diag} \left(1, \frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^{\lambda_k - 1}} \right)$$

- $\theta_1, \dots, \theta_p$ sont les paramètres de réglage de l'observateur dont le choix doit satisfaire : $\theta_1 \geq 1$ et pour $k = 2, \dots, p$, $\theta_k \geq \theta_{k-1}^{\lambda_k - 1}$.

3.3 Classe particulière de SNL MIMO uniformément observable

Nous allons présenter maintenant une classe particulière de systèmes non linéaires uniformément observables qui peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée sous la première forme canonique présentée ci-dessus. Toutefois, ceci n'est plus vraie lorsque certaines entrées du système ne sont pas connues. C'est pourquoi nous introduisons cette forme particulière d'observabilité sur laquelle nous nous sommes appuyés dans les chapitres suivants pour la synthèse d'observateurs à entrées inconnues.

Soit la classe de systèmes non linéaires MIMO suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = f^0(u, x^1) \end{cases} \quad (3.11)$$

Avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} ; f(u, x) = \begin{pmatrix} f^1(u, x^1, x^2) \\ f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, x) \\ f^q(u, x) \end{pmatrix} ;$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \dots, q$ et $p = n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$, $\sum_{k=1}^q n_k = n$; l'entrée $u(t) \in \mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions absolument continues à dérivées bornées de \mathbb{R}^+ dans U un compact de \mathbb{R}^μ ; $f(u, x) \in \mathbb{R}^n$ où $f^k(u, x) \in \mathbb{R}^{n_k}$ et $f^0(u, x^1) \in \mathbb{R}^{n_0}$. L'hypothèse suivante est adoptée :

(H1) Pour $0 \leq k \leq q - 1$; la fonction $x^{k+1} \mapsto f^k(u, x^1, \dots, x^k, x^{k+1})$ de $\mathbb{R}^{n_{k+1}}$ dans \mathbb{R}^{n_k} est injective. De plus, on suppose que $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $k \in \{0, \dots, q - 1\}$,

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in U,$

$$0 < \alpha^2 I_{n_{k+1}} \leq \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right)^T \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \leq \beta^2 I_{n_{k+1}}$$

où $I_{n_{k+1}}$ est la matrice identité $(n_{k+1}) \times (n_{k+1})$.

Cette classe de systèmes a été considérée par [HF03] pour la caractérisation d'une classe des systèmes uniformément observables. Les auteurs ont proposé un observateur à grand gain dont la synthèse a été effectuée en deux étapes. Dans la première étape, les auteurs ont introduit un changement de coordonnées qui a ramené le système (3.11) sous la première forme canonique (3.1). La synthèse de l'observateur dans les nouvelles coordonnées est immédiate (c'est l'observateur (3.4)) puis les équations de l'observateur dans les coordonnées originales sont données en considérant la pseudo-inverse de la matrice jacobienne. Ce système a ensuite été reconsidéré par ([FMS05]) où les auteurs ont proposé une version légèrement modifiée de l'observateur présenté dans ([HF03]). En effet, la nouvelle version ne nécessite pas l'inversion de toute la matrice jacobienne mais que des termes diagonaux de cette matrice. Nous proposons dans ce qui suit de donner la transformation qui permet de transformer le système (3.11) sous la première forme canonique ainsi que les équations de l'observateur modifié dans les nouvelles coordonnées et les coordonnées originales.

Considérons le changement de coordonnées suivant :

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n_0q}$$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \longrightarrow z = \Phi(u, x) = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^q \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z^1 = f^0(u, x^1) \\ z^2 = \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x^1) f^1(u, x^1, x^2) \\ z^3 = \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x^1) \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ z^q = \left(\prod_{k=0}^{q-2} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) f^{q-1}(u, x) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

où $z^k \in \mathbb{R}^{n_0}, k = 1, \dots, q.$

D'après l'hypothèse (H1), l'application Φ est injective ; soit Φ^c sa fonction réciproque. Avant d'écrire la dynamique de z , nous introduisons les notations suivantes :

- Soit $\Lambda(u, x)$ la matrice diagonale en blocs suivante :

$$\Lambda(u, x) = \text{diag} \left(\frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x), \frac{\partial f^0}{\partial x^1}(u, x) \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x), \dots, \prod_{k=0}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) \quad (3.13)$$

D'après l'hypothèse (H1), $\Lambda(u, x)$ est inversible à gauche. On désignera dans la suite par $\Lambda^+(u, x)$ son inverse à gauche. On peut facilement vérifier que :

$$\begin{aligned} \Lambda(u, x)f(u, x) &= Az + G(u, x) \text{ ou encore} \\ f(u, x) &= \Lambda^+(u, x)Az + \Lambda^+(u, x)G(u, x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

où A est une matrice carrée $n_0q \times n_0q$ et $G(u, x) \in \mathbb{R}^{n_0q}$ et ils sont donnés par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_0} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & I_{n_0} & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & I_{n_0} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } G(u, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\prod_{k=0}^{q-1} \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \right) f^q(u, x) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant générer l'expression de la dérivée par rapport au temps de z :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x)\dot{x}(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \\ &= \Lambda(u, x)f(u, x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) f(u, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \\ &= Az + G(u, x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) (\Lambda^+(u, x)Az + \Lambda^+(u, x)G(u, x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \end{aligned}$$

d'après (3.14).

Notant que la matrice $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right)$ est triangulaire inférieure avec des zéros sur toute sa diagonale. Puisque $\Lambda^+(u, x)$ est diagonale et que les $((q-1)n_0)$ premières composantes de $G(u, x)$ sont nulles, on a :

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x)G(u, x) = 0 \quad (3.15)$$

Par conséquent, la dynamique de z peut être réécrite comme suit :

$$\dot{z}(t) = Az + G(u, x) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x)Az + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t)$$

Pour alléger les écritures, on adoptera les notations suivantes dans la suite :

$$\begin{aligned}
\Theta(u, z) &\triangleq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, x) - \Lambda(u, x) \right) \Lambda^+(u, x) \\
&= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(z)) - \Lambda(u, \Phi^c(z)) \right) \Lambda^+(u, \Phi^c(z)) \\
\varphi(u, z) &\triangleq \Theta(u, z)Az + G(u, x) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, x)\dot{u}(t) \\
&= \Theta(u, z)Az + G(u, \Phi^c(z)) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, \Phi^c(z))\dot{u}(t)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Compte tenu du fait que $\Theta(u, z)$ est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale principale, on peut vérifier que la fonction $\varphi(u, z)$ possède une structure triangulaire.

En utilisant les notations adoptées, le système (3.11) peut être écrit dans les nouvelles coordonnées en z comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(u, z) \\ y = Cz \end{cases} \tag{3.17}$$

où

$$C = [I_{n_0}, 0_{n_0}, \dots, 0_{n_0}]$$

est une matrice $n_0 \times n_0q$ avec 0_{n_0} la matrice nulle de dimension $n_0 \times n_0$.

Il est clair que le système (3.17) est sous la forme canonique (3.1). De ce fait, l'observateur (3.4) peut être synthétisé pour ce système (sous l'hypothèse technique portant sur le caractère Lipschitz de la fonction φ). Toutefois, comme nous l'avons signalé précédemment, l'équation d'un tel observateur dans les coordonnées originales en x , nécessite l'inversion de toute la matrice jacobienne. Pour contourner cette inversion, un nouvel observateur a été proposé. Les équations de cet observateur s'écrivent dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z} + \varphi(u, \hat{z}) - \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{z} - z) \\
&\quad - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \left(\Lambda^+(u, \Phi^c(\hat{z})) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, \Phi^c(\hat{z})) \right)^+ \right) \theta \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T C (\hat{z} - z)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\text{où } \hat{z} = \begin{bmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \\ \vdots \\ \hat{z}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_0q} \text{ avec } \hat{z}^k \in \mathbb{R}^{n_0}, k = 1, \dots, q.$$

Maintenant, il est clair que l'observateur (3.18) s'écrit dans les coordonnées originales x comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(u, \hat{x}) - \theta \Lambda^+(u, \hat{x}) \Delta_\theta^{-1} S^{-1} C^T (f^0(u, \hat{x}^1) - f^0(u, x^1)) \quad (3.19)$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $\hat{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \dots, q$ et x est le vecteur des trajectoires du système (3.11).

On remarque que l'observateur dans les coordonnées originales ne nécessite pas l'inversion de toute la matrice jacobienne mais que de ses termes diagonaux rassemblés au sein de la matrice Λ .

Observateurs à Entrées Inconnues (OEI)

Dans ce chapitre, nous présentons la synthèse d'observateurs de type grand gain pour la classe de systèmes non linéaires uniformément observables (3.11) à laquelle nous avons ajouté des entrées inconnues. Les observateurs proposés permettent d'estimer conjointement tout l'état du système ainsi que toutes les entrées inconnues sous des conditions suffisantes qui seront données. Leur synthèse ne suppose, ni adopte aucun modèle mathématique pour les entrées inconnues. Nous supposons simplement que la dérivée première par rapport au temps de chacune des entrées inconnues est bornée.

Avant de présenter la classe des systèmes non linéaires qui fera l'objet de notre étude, nous proposons de rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour la synthèse d'un observateur à entrées inconnues pour les systèmes linéaires. Ceci nous permettra de mieux appréhender les conditions suffisantes que nous adopterons pour la synthèse des observateurs proposés.

Notons les conditions nécessaires et suffisantes qui seront rappelées pour les systèmes linéaires portent sur la synthèse d'un observateur permettant l'estimation des états (via un observateur d'ordre plein ou réduit) sans aucune connaissance sur les entrées inconnues. Ces conditions peuvent être relâchées si certaines hypothèses sur ces entrées, telles la bornitude de leurs dérivées par rapport au temps, sont adoptées. Nous reviendrons sur ce point plus loin dans ce chapitre.

4.1 Rappels sur la synthèse d'OEI pour les systèmes linéaires

On considère le système linéaire temps invariant suivant :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gv \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.1)$$

où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, l'entrée connue $u \in \mathbb{R}^\mu$, l'entrée inconnue $v \in \mathbb{R}^m$, la sortie $y \in \mathbb{R}^p$, A , B , G et C sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées et la matrice G est supposée être de rang plein en colonnes, c'est-à-dire

$$\text{Rang}(G) = m \quad (4.2)$$

Sans nuire à la généralité, on suppose que la matrice C a la structure suivante :

$$C = [I_p \ 0 \ \dots \ 0] \quad (4.3)$$

De même, on posera

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

où $G_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ et $G_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times m}$. Remarquons qu'avec cette notation, nous avons

$$G_1 = CG \quad (4.5)$$

Un observateur à entrées inconnues existe pour ce système si et seulement si les deux conditions de rang suivantes sont satisfaites : (cf e.g. [YW88, GS91, DZX94]) :

$$\text{Rang}(CG) = m \quad (4.6)$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - A & G \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + m \quad \forall s \in \mathcal{C}, \mathcal{R}e(s) \geq 0 \quad (4.7)$$

Nous proposons dans ce qui suit de donner quelques développements permettant de montrer comment ces conditions sont obtenues. Ces développements nous serviront surtout à apporter quelques compléments sur la synthèse de l'observateur lorsque le nombre d'entrées inconnues est égale au nombre de sorties.

Les résultats que nous allons présenter sont décrits dans [YW88, DZX94]. Nous allons les reprendre avec plus de détails ici dans le cas où la matrice C a la structure particulière (mais non restrictive) (4.3).

L'objectif consiste à synthétiser un observateur qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{z} = Nz + Ly + Du \\ \hat{x} = z - Ey \end{cases} \quad (4.8)$$

où l'état de l'observateur $z \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimé de l'état du système x , $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times \mu}$ et $E \in \mathbb{R}^{n \times p}$ sont des matrices qu'il faut choisir de sorte que l'erreur d'observation $e = \hat{x} - x$ converge asymptotiquement vers 0.

Pour ce faire, posons

$$P = I_n + EC \quad (4.9)$$

L'erreur d'observation s'écrit alors

$$\begin{aligned} e &= \hat{x} - x \\ &= z - Ey - x \\ &= z - (I_n + EC)x \\ &= z - Px \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{z} - P\dot{x} \\ &= Nz + Ly + Du - PAx - PBu - PGv \\ &= N(e + Px) + LCx - PAx - (PB - D)u - PGv \\ &= Ne + (NP - PA + LC)x - (PB - D)u - PGv \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si les matrices N , L , D et E sont choisies de sorte que les conditions suivantes sont satisfaites

$$N \text{ est matrice de Hurwitz} \quad (4.11)$$

$$PG = (I_n + EC)G = 0 \quad (4.12)$$

$$D = PB = (I_n + EC)B \quad (4.13)$$

$$LC - PA = -NP \quad (4.14)$$

alors l'équation (4.10) devient

$$\dot{e} = Ne \quad (4.15)$$

et l'erreur d'observation converge asymptotiquement vers 0.

Il s'agit maintenant d'étudier sous quelles conditions le choix de matrices N , L et E vérifiant (4.11), (4.12) et (4.14) est possible. Remarquons que la matrice D est déterminée à partir de E par la relation (4.13).

L'équation (4.14) peut se récrire comme suit

$$\begin{aligned} 0 &= NP + LC - PA \\ &= N(I_n + EC) + LC - PA \implies \\ N &= PA - LC - NEC \\ &= PA - (L + NE)C \\ &= PA - KC \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec

$$K = L + NE \quad (4.17)$$

Remplaçons N par son expression (4.16) dans l'équation (4.17), on obtient

$$K = L + (PA - KC)E$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} L &= K - (PA - KC)E \\ &= K(I_p + CE) - PAE \end{aligned} \quad (4.18)$$

La dynamique de l'observateur (4.8) devient alors :

$$\dot{z} = (PA - KC)z + Ly + Du \quad (4.19)$$

où les matrices P (ou de manière équivalente la matrice E), K , L et D sont données par les équations (4.12), (4.17), (4.18) et (4.13). Le problème de synthèse de l'observateur consiste donc à trouver une matrice E satisfaisant (4.12) et un vecteur K de sorte que la matrice $PA - KC$ soit une matrice de Hurwitz. C'est un problème similaire à celui de la synthèse d'observateurs classiques. Les valeurs propres de la matrice $PA - KC$ peuvent être choisies arbitrairement si et seulement si la paire (PA, C) est observable. Sinon, un vecteur K tel que l'erreur d'observation (4.15) converge asymptotiquement vers 0, existe si et seulement si la paire (PA, C) est détectable.

Nous allons maintenant discuter les conditions sous lesquelles la matrice E (ou de manière équivalente la matrice P) existe.

En tenant compte des structures particulières considérées pour les matrices C et G (équations (4.3) et (4.4)), l'équation (4.12) devient

$$EG_1 = -G \quad (4.20)$$

La solution de l'équation (4.20) dépend du rang de la matrice $G_1 = CG$. Remarquons que comme C est de rang plein avec $\text{Rang}C = p$ et $\text{Rang}G = m$, nous avons $\text{Rang}G_1 = \min(p, m)$. Deux cas sont à considérer :

1. $\text{Rang}(G_1) = p < m$.
2. $\text{Rang}(G_1) = m \leq p$.

Cas 1 : $\text{Rang}(G_1) = p < m$

Dans ce cas, il n'y a pas de solution pour la matrice E . En effet, l'égalité (4.20) ne peut pas avoir lieu puisque d'une part, nous avons :

$$\text{Rang}(EG_1) \leq \text{Rang}(G_1) < m$$

et d'autre part, nous avons

$$\text{Rang}(-G) = \text{Rang}(G) = m$$

Comme deux matrices égales ont trivialement le même rang, l'équation en E (4.20) n'admet pas de solution.

Cas 2 : $\text{Rang}(G_1) = m \leq p$

La solution générale de (4.20) est

$$E = -GG_1^+ + Y(I_p - G_1G_1^+) \quad (4.21)$$

où G_1^+ est l'inverse à gauche de G_1 et $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est une matrice arbitraire. La matrice P peut alors s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} P &= I_n + EC \\ &= I_n - GG_1^+C + Y(I_p - G_1G_1^+)C \\ &= I_n + YC - GG_1^+C - YG_1G_1^+C \\ &= I_n + YC - GG_1^+C - YCGG_1^+C \\ &= I_n + YC - (I_n + YC)GG_1^+C \\ &= (I_n + YC)(I_n - GG_1^+C) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Remarquons que rang maximal de la matrice, $n - m$, est obtenu lorsque la matrice $(I_n + YC)$ est non singulière [DZX94].

Nous pouvons maintenant résumer les résultats obtenus par le théorème suivant ([DZX94]) :

Théorème 4.1. *Un observateur de type (4.19) existe pour le système (4.1) si et seulement si :*

- 1) $\text{Rang}(CG) = \text{Rang}(G_1) = m$
- 2) $\text{Rang} \begin{bmatrix} sI_n - PA \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathcal{C}, \text{Re}(s) \geq 0$

Nous donnons maintenant un deuxième théorème qui montre que les résultats du théorème (4.1) correspondent aux conditions généralement adoptées pour la synthèse de l'observateur (4.19) [DZX94] :

Théorème 4.2. *On suppose que $\text{Rang}(CG) = \text{Rang}G_1 = m$ et que $\text{Rang}P = n - m$. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) La paire (PA, C) est détectable (observable) ;
- 2) $\text{Rang} \begin{bmatrix} sP - PA \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathcal{C}, \text{Re}(s) \geq 0 \quad (\forall s \in \mathcal{C}) ;$
- 3) $\text{Rang} \begin{bmatrix} sI_n - PA \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathcal{C}, \text{Re}(s) \geq 0 ;$
- 4) $\text{Rang} \begin{bmatrix} sI_n - A & G \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad \forall s \in \mathcal{C}, \text{Re}(s) \geq 0 \quad (\forall s \in \mathcal{C}) ;$

Nous allons maintenant examiner de plus près le cas $m = p$, c'est-à-dire lorsque le nombre de sorties est égal au nombre d'entrées inconnues. Ce cas a été discuté dans [YW88] et abordé dans [DZX94]. Nous donnerons dans ce cas des conditions très simples pour la synthèse de l'observateur et nous apporterons plus de précisions sur le choix des pôles de l'observateur, lorsque celui-ci existe.

Cas particulier : $\text{Rang}(G_1) = m$ et $p = m$

Nous allons chercher directement les matrices N , L et E satisfaisant les conditions (4.11), (4.12) et (4.14).

Remarquons qu'en multipliant à droite par G chacun des membres de l'égalité (4.14) et compte tenu de l'égalité (4.12), on obtient

$$LCG = PAG$$

ou de manière équivalente, en tenant compte des structures de C et G ,

$$LG_1 = PAG \tag{4.23}$$

qui devient alors la nouvelle équation fixant le choix de L .

Comme $m = p$ et la matrice G_1 est carrée et est inversible. A partir de (4.20) et (4.23), on obtient :

$$\begin{aligned} E &= -GG_1^{-1} \\ L &= PAGG_1^{-1} \end{aligned}$$

Il reste maintenant à étudier le choix de la matrice N . En remarquant que :

$$\begin{aligned} LC - PA &= PAGG_1^{-1}C - PA \\ &= PA(GG_1^{-1}C - I_n) \\ &= -PA(EC + I_n) \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$= -PAP \tag{4.25}$$

l'équation (4.14) devient

$$PAP = NP \tag{4.26}$$

Compte tenu des structures particulières de C et G , la matrice

$$P = I_n - GG_1^{-1}C$$

a la topologie suivante

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ G_2G_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -G_2G_1^{-1} & I_{n-m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En considérant maintenant les partitions suivantes de A et N :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} ; \quad N = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

où $A_{11}, N_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{12}, N_{12} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $A_{21}, N_{21} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ et $A_{22}, N_{22} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} PAP &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(A_{22} - G_2G_1^{-1}A_{12})G_2G_1^{-1} & A_{22} - G_2G_1^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\ NP &= \begin{bmatrix} -N_{12}G_2G_1^{-1} & N_{12} \\ -N_{22}G_2G_1^{-1} & N_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité (4.26) devient impose donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} N_{12} &= 0 \\ N_{22} &= A_{22} - G_2G_1^{-1}A_{12} \end{aligned} \tag{4.27}$$

On remarque que la matrice N_{12} et N_{22} sont imposées par les relations (4.27). Il s'en suit qu'une condition nécessaire pour que la matrice N soit Hurwitz est que la matrice $A_{22} - G_2G_1^{-1}A_{12}$ le soit aussi. La synthèse de l'observateur n'est donc possible que si cette matrice est Hurwitz. Dans ce cas, seuls m pôles de l'observateur peuvent être choisis arbitrairement à travers le choix de la matrice N_{11} (on peut prendre $N_{21} = 0$). Les

autres pôles de l'observateur sont égaux aux valeurs propres de la matrice $A_{22} - G_2 G_1^{-1} A_{12}$.

Dans ce qui suit nous allons considérer une classe de systèmes non linéaires et nous allons proposer certaines conditions suffisantes qui permettent soit simplement d'estimer tous les états du système sans aucune connaissance sur les entrées inconnues, soit d'estimer conjointement tous les états du système et toutes les entrées inconnues sous l'hypothèse additionnelle que la dérivée première par rapport au temps de chacune des entrées inconnues est bornée.

4.2 Classe des systèmes non linéaires considérée

Soit la classe de systèmes non linéaires multi-entrées/multi-sorties suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(u, x) + G(u, s)v \\ y &= \bar{C}x = x^1 \end{cases} \quad (4.28)$$

où l'état du système $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^1 \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système, $X \in \mathbb{R}^{n-p}$ est la partie de x comportant tous les états non mesurés ; l'entrée connue $u(t) \in \mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions absolument continues à dérivées bornées de \mathbb{R}^+ dans U un compact de \mathbb{R}^ν ; $v \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée inconnue avec $m \leq p$; $f(u, x) = \begin{pmatrix} f^1(u, x) \\ f_X(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $f^1(u, x) \in \mathbb{R}^p$, $f_X(u, x) \in \mathbb{R}^{n-p}$ et $G(u, s) = \begin{pmatrix} G^1(u, s) \\ G_X(u, s) \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension $n \times m$ où $G^1(u, s)$ et $G_X(u, s)$ sont respectivement de dimension $p \times m$ et $(n - p) \times m$ matrices ; $s(t)$ est un signal connu borné dont la dérivée première par rapport au temps est aussi bornée ; finalement $\bar{C} = [I_p, 0_{p \times (n-p)}]$.

4.3 Procédure de synthèse d'observateur

Pour la synthèse d'observateur, nous adoptons les hypothèses suivantes :

(H1) La matrice $G^1(u, s(t))$ est de rang plein en colonnes pour tout $u \in U$ et pour tout $t \geq 0$.

(H2) La dérivée par rapport au temps de l'entrée inconnue $v(t)$ est une fonction complètement inconnue, $\varepsilon(t)$, qui est uniformément bornée, c'est-à-dire, $\sup_{t \geq 0} \|\varepsilon(t)\| \leq \beta_\varepsilon$ où $\beta_\varepsilon > 0$ est un réel inconnu strictement positif.

Sans nuire à la généralité, on suppose que la matrice G^1 se décompose comme suit (ce qui est toujours possible en réordonnant les sorties) :

$$G^1(u, s) = \begin{pmatrix} G_1^1(u, s) \\ G_2^1(u, s) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

où $G_1^1(u, s)$ est une sous-matrice de G^1 de dimension $m_0 \times m$ avec $m \leq m_0 \leq p$ et qui est de rang plein. D'après l'hypothèse **(H1)**, nous avons :,

$$\text{Rang}(\bar{C}G(u, s)) = \text{Rang}(G^1(u, s)) = \text{Rang}(G_1^1(u, s)) = m, \quad \forall u \in U, \quad \forall t \geq 0$$

De plus, pour éviter la dégénérescence de la matrice G_1^1 , on suppose qu'il existe deux réels $\alpha_G, \beta_G > 0$ tel que $\forall u \in U, \forall t \geq 0$, on a :

$$0 < \alpha_G^2 I_m \leq (G_1^1(u, s))^T (G_1^1(u, s)) \leq \beta_G^2 I_m$$

Nous allons noter par m_1 la plus petite valeur possible de m_0 qui représente le nombre de lignes de la matrice G_1^1 . Notons que lorsque la matrice G est constante, nous avons toujours $m_0 = m_1 = m$. Ceci n'est plus vrai lorsque cette matrice dépend du temps comme le montre l'exemple suivant : $G(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Le rang de cette matrice (colonne) est égal à 1 pour tout $t \geq 0$, i.e. $m = 1$, et la seule sous-matrice de $G(t)$ qui soit de rang plein est la matrice elle-même, c'est-à-dire $m_0 = 2$.

Remarques 4.1.

(i) Il est clair que la condition de rang de l'hypothèse (H1) est identique à la condition (4.6) adoptée dans le cas des systèmes linéaires. Nous énoncerons plus loin, en temps utile, une autre condition qui sera similaire à la deuxième condition (4.7).

(ii) La bornitude des dérivées par rapport au temps des entrées inconnues, stipulée par l'hypothèse (H2), n'est nécessaire que si l'on souhaite estimer ces entrées inconnues. Si l'objectif consiste simplement en l'estimation des états mesurés sans celle des entrées inconnues, cette hypothèse n'est pas nécessaire et elle peut être supprimée. Cet aspect sera détaillé plus loin.

Soit maintenant

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}; \quad x_1^1 \in \mathbb{R}^{m_1}, x_2^1 \in \mathbb{R}^{p-m_1}; \quad f^1(u, x) = \begin{pmatrix} f_1^1(u, x) \\ f_2^1(u, x) \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

les partitions respectives x^1 et de $f^1(u, x)$ induites par celles de $G^1(u, s)$ sous la forme (4.29). Bien sûr, les variables x_2^1 et f_2^1 n'ont de sens que si $m_1 < p$ puisque pour $m_1 = p$,

$G_1^1(u, s)$, x_1^1 et $f_1^1(u, x)$ se confondent respectivement avec $G^1(u, s)$, x^1 et $f^1(u, x)$.

En notant par $(\cdot)^+$ l'inverse à gauche de (\cdot) , posons

$$\begin{cases} \Upsilon_2^1(u, s) &= G_2^1(u, s)(G_1^1(u, s))^+ \\ \Upsilon_X^2(u, s) &= G_X(u, s)(G_1^1(u, s))^+ \\ \Upsilon^2(u, s) &= \begin{pmatrix} \Upsilon_1^2(u, s) \\ \Upsilon_X^2(u, s) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.31)$$

et considérons le changement de coordonnées suivant,

$$\Psi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ \begin{pmatrix} x_1^1 \\ v \\ x_2^1 \\ X \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \\ \bar{x}_1^2 \\ \bar{X} \end{pmatrix} = T(u, s) \begin{pmatrix} x_1^1 \\ v \\ x_2^1 \\ X \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

où $\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_1+m}$ avec $\bar{x}_1^1 \in \mathbb{R}^m$, $\bar{x}_2^1 \in \mathbb{R}^m$; $\bar{x}_1^2 \in \mathbb{R}^{p-m_1}$, $\bar{X} \in \mathbb{R}^{n-p}$ et $T(u, s)$ est une matrice carrée $(n+m) \times (m+n)$ définie comme suit

$$T(u, s) = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ -\Upsilon_1^2(u, s) & 0 & I_{p-m_1} & 0 \\ -\Upsilon_X^2(u, s) & 0 & 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ -\Upsilon^2(u, s) & 0 & I_{n-m_1} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Il est clair que $T(u, s)$ est inversible pour tout $t \geq 0$ et on a,

$$T^{-1}(u, s) = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ \Upsilon_1^2(u, s) & 0 & I_{p-m_1} & 0 \\ \Upsilon_X^2(u, s) & 0 & 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ \Upsilon^2(u, s) & 0 & I_{n-m_1} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Le changement de coordonné (4.32) transforme le système (4.28) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^1 &= \bar{f}^1(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \bar{X}) + \bar{G}(u, s)\bar{x}^1 + \bar{\varepsilon}(t) \\ y_1 &= \bar{h}_1(\bar{x}^1) \triangleq \bar{x}_1^1 \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1^2 &= \bar{f}_1^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \bar{X}) + \Upsilon_1^2(u, s)\bar{x}_1^1 \\ \dot{\bar{X}} &= \bar{f}_{\bar{X}}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \bar{X}) + \Upsilon_{\bar{X}}^2(u, s)\bar{x}_1^1 \\ y_2 &= \bar{h}_2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1) \triangleq \bar{x}_2^1 + \Upsilon_1^2(u, s)\bar{x}_1^1 \end{cases} \quad (4.36)$$

avec

$$\begin{aligned}
\bar{f}^1(u, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{X}) &\triangleq \begin{pmatrix} f_1^1(u, x) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\bar{G}(u, s) &\triangleq \begin{pmatrix} 0 & f_1^1(u, x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\bar{\varepsilon}(t) &\triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon(t) \end{pmatrix} \\
\bar{f}_1^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{X}) &\triangleq f_2^1(u, x) - \Upsilon_1^2(u, s) f_1^1(u, x) \\
\bar{f}_{\bar{X}}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{X}) &\triangleq f_X(u, x) - \Upsilon_X^2(u, s) f_1^1(u, x) \\
\dot{\Upsilon}_1^2(u, s) &\triangleq - \left(\frac{d}{dt} G_2^1(u, s) (G_1^1(u, s))^+ \right) \\
\dot{\Upsilon}_X^2(u, s) &\triangleq - \left(\frac{d}{dt} G_X(u, s) (G_1^1(u, s))^+ \right)
\end{aligned}$$

Notons que le sous-système (4.36) ne dépend pas de l'entrée inconnue $v = \bar{x}_2^1$ qui est traitée comme une variable d'état du sous-système (4.35). De plus, le seul état du sous-système (4.35) qui intervient dans le deuxième sous-système (4.36) est la sortie $y_1 = \bar{x}_1^1$. Par conséquent, si l'objectif consiste simplement à estimer l'état non mesuré X , le sous-système (4.35) peut être ignoré et la synthèse d'un observateur réalisant cet objectif peut s'effectuer en se basant sur le sous-système (4.36) où la sortie y_1 sera traitée comme un signal connu. Dans ce cas, l'hypothèse **(H2)** n'est plus nécessaire puisque le système (4.36) ne dépend pas de l'entrée inconnue. Néanmoins, lorsque l'objectif consiste à estimer simultanément l'état non mesuré X avec l'entrée inconnue v , cette hypothèse devient nécessaire et c'est ce que nous allons supposer dans la suite.

Maintenant, comme la matrice $G_1^1(u, s)$ est de rang plein, le sous-système (4.35) est observable. Par contre, la structure du sous-système (4.36) est très générale et on ne peut pas conclure, en l'absence d'autres hypothèses, quant à son observabilité.

Dans la suite, nous allons considérer deux cas. Le premier correspond au cas où $m_1 < p$ et le second à celui lorsque $m_1 = p$. Nous savons que pour les systèmes linéaires, la synthèse d'un observateur avec des pôles choisis de manière arbitraire n'est possible que lorsque le nombre de sorties est strictement supérieur au nombre d'entrées inconnues. De ce fait, nous allons considérer dans le cas où $m_1 < p$ une structure particulière de systèmes non linéaires pour laquelle nous proposerons un observateur de type grand gain avec des pôles choisis de manière arbitraire. Dans le deuxième cas, une condition de détectabilité permettant la synthèse d'observateur sera proposée.

4.3.1 Synthèse d'observateur avec $m \leq m_1 < p$

On suppose que la fonction $f(u, x)$ a la structure suivante

$$f(u, x) = \begin{pmatrix} f^1(u, x^1, x^2) \\ f^2(u, x^1, x^2, x^3) \\ \vdots \\ f^{q-1}(u, x) \\ f^q(u, x) \end{pmatrix} \text{ avec } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

où $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = 1, \dots, q$ et $p = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_q$, $\sum_{k=1}^q n_k = n$; cette partition de

f induit la structure suivante pour G , $G(u, s) = \begin{pmatrix} G^1(u, s) \\ G^2(u, s) \\ \dots \\ G^q(u, s) \end{pmatrix}$ où chaque sous-matrice

$G^k(u, s)$ est de dimension $n_k \times m$.

Les fonctions $f^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k+1})$ sont supposées satisfaire les hypothèses suivantes :

(H3) Pour $1 \leq k \leq q - 1$, l'application $x^{k+1} \mapsto f^k(u, x^1, x^2, \dots, x^k, x^{k+1})$ de $\mathbb{R}^{n_{k+1}}$ dans \mathbb{R}^{n_k} est injective. De plus, on suppose que $\exists \alpha_f, \beta_f > 0$ tels que pour tout $k \in \{1, \dots, q - 1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall u \in U$,

$$\alpha_f^2 I_{n_{k+1}} \leq \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}{}^T(u, x) \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x) \leq \beta_f^2 I_{n_{k+1}}$$

(H4) La condition de rang suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \text{Rang} \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) & G^1(u, s) \end{array} \right) &\triangleq \text{Rang} \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) & G_1^1(u, s) \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) & G_2^1(u, s) \end{array} \right) \\ &= n_2 + m, \text{ pour tout } (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U \text{ et } t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

On remarque que la classe de systèmes considérée est similaire à la classe de systèmes uniformément observable (3.11) introduite par ([HF03]). L'hypothèse (H3) est la même que celle considérée par les auteurs et elle permet de conclure quant à l'uniforme observabilité du système en l'absence d'entrées inconnues. Quant à l'hypothèse (H4), elle est à rapprocher de la condition (4.7) considérée dans le cas des systèmes linéaires. Remar-

quons que comme la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) & G_1^1(u, s) \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) & G_2^1(u, s) \end{pmatrix}$ comporte p lignes et $n_2 + m$

colonnes, l'hypothèse (H4) implique que $p \geq n_2 + m$.

Avec la structure spécifique de f , les variables X et $\Upsilon_X^2(u, x)$ s'expriment comme suit :

$$X = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \text{ et } \Upsilon_X^2(u, s) = \begin{pmatrix} \Upsilon_2^2(u, s) \\ \Upsilon_3^2(u, s) \\ \vdots \\ \Upsilon_q^2(u, s) \end{pmatrix} \text{ où } \Upsilon_k^2(u, s) = G^k(u, s)(G_1^1(u, s))^+ \text{ est une } n_k \times n_1 \text{ matrice, } k = 2, \dots, q.$$

$$\text{De même, nous avons } \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_3^2 \\ \vdots \\ \bar{x}_q^2 \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$\bar{x}_k^2 = x^k - \Upsilon_k^2(u, s)\bar{x}_1^1, \quad k = 2, \dots, q \quad (4.39)$$

Ainsi, les sous-systèmes (4.35) et (4.36) prennent maintenant la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^1 &= \bar{f}^1(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) + \bar{G}(u, s)\bar{x}^1 + \bar{\varepsilon}(t) \\ y_1 &= \bar{h}_1(\bar{x}^1) \triangleq \bar{C}_1\bar{x}^1 \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^2 &= \bar{f}^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) + \dot{\Upsilon}^2(u, s)\bar{x}_1^1 \\ y_2 &= \bar{h}_2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \triangleq \bar{C}_2\bar{x}^2 + \Upsilon_1^2(u, s)\bar{C}_1\bar{x}^1 \end{cases} \quad (4.41)$$

où

$$\bar{x}^2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^2 \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^2 \\ \vdots \\ \bar{x}_q^2 \end{pmatrix}; \quad \bar{f}^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) \\ \vdots \\ \bar{f}_k^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_{k+1}^2) \\ \vdots \\ \bar{f}_k^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_1^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) &\triangleq f_2^1(u, x^1, x^2) - \Upsilon_1^2(u, s)f_1^1(u, x^1, x^2) \\ \bar{f}_k^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_{k+1}^2) &\triangleq f^k(u, x^1, \dots, x^{k+1}) - \Upsilon_k^2(u, s)f_1^1(u, x^1, x^2) \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\bar{G}(u, s) \triangleq \begin{pmatrix} 0 & G_1^1(u, s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_1 \triangleq \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0_{m_1 \times m} \\ 0_{m \times m_1} & 0_{m \times m} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$$\bar{C}_2 \triangleq \begin{pmatrix} I_{p-m_1} & 0_{(p-m_1) \times (n-p)} \\ 0_{(n-p) \times (p-m_1)} & 0_{(n-p) \times (n-p)} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

où I_{m_1} et $0_{i \times j}$ désignent respectivement la matrice identité $m_1 \times m_1$ et la matrice nulle $i \times j$.

On propose maintenant de faire la synthèse d'un observateur pour les systèmes (4.40) et (4.41) afin d'estimer \bar{x}^1 et \bar{x}^2 . Les équations de l'observateur seront tout d'abord données dans les coordonnées en \bar{x} , ensuite dans celles des coordonnées originales en x .

Pour la synthèse de l'observateur, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 4.1. *Sous les hypothèses (H1) à (H4), nous avons*

$$\begin{aligned} & \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U; \forall t \geq 0, \\ \text{Rang} \left(\frac{\partial \bar{f}_k^2}{\partial \bar{x}_{k+1}^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_{k+1}^2) \right) &= n_{k+1} \text{ pour } k = 1, \dots, q-1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Preuve de Lemme (4.1).

D'après l'hypothèse (H3), nous avons

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial f_k^k}{\partial x_{k+1}^k}(u, x) \right) = n_{k+1} \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U, \quad k = 1, \dots, q-1 \quad (4.46)$$

En combinant (4.46) avec les expressions (4.39) et (4.42), on obtient pour $k = 2, \dots, q-1$:

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial \bar{f}_k^2}{\partial \bar{x}_{k+1}^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2, \dots, \bar{x}_{k+1}^2) \right) = n_{k+1} \quad (4.47)$$

Maintenant, nous allons montrer (4.47) pour $k = 1$. Pour ce faire, posons

$$\begin{aligned} P(t) &= \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ -\Upsilon_1^2(u, s) & I_{p-m_1} \end{pmatrix} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ -G_2^1(u, s) (G_1^1(u, s))^+ & I_{p-m_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Comme $\text{Rang} P(t) = p$ pour tout $t \geq 0$ et comme $p \geq n_2 + m$ (selon (H4)), on a

$$\begin{aligned} n_2 + m &= \text{Rang} \left(P(t) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial x_2^2}(u, x_1^1, x_1^2, x_2^2) & G_1^1(u, s) \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial x_2^2}(u, x_2^2, x_1^2, x_2^2) & G_2^1(u, s) \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial x_2^2}(u, x_1^1, x_1^2, x_2^2) & G_1^1(u, s) \\ \frac{\partial \bar{f}_1^2}{\partial x_2^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Rang} \left(\frac{\partial \bar{f}_1^2}{\partial x_2^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) \right) + m \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial \bar{f}_1^2}{\partial \bar{x}_2^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) \right) = n_2$$

Ceci termine la démonstration du lemme (4.45).

Nous allons maintenant introduire un changement de coordonnées qui va mettre chacun des systèmes (4.40) et (4.41) sous la forme observable (3.1). On notera que le changement de coordonnées qui sera introduit est similaire à celui considéré par ([HF03]) qui a été rappelé au chapitre précédent.

Avant de présenter le changement de coordonnées, nous introduisons les variables suivantes :

$$\Lambda_1(u, s) = \text{diag}(I_{m_1}, G_1^1(u, s)) \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) &= \text{diag} \left(I_{p-m_1}, \frac{\partial \bar{f}_1^2}{\partial \bar{x}_2^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2), \frac{\partial \bar{f}_1^2}{\partial \bar{x}_2^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \frac{\partial \bar{f}_2^2}{\partial \bar{x}_3^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2), \dots, \right. \\ &\quad \left. \dots, \prod_{k=1}^{q-1} \frac{\partial \bar{f}_k^2}{\partial \bar{x}_{k+1}^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

On notera que d'après les hypothèses **(H1)**, **(H3)** et lemme (4.1), les matrices Λ_1 et Λ_2 sont inversibles à gauche.

Soient maintenant les changements de coordonnées suivants :

- $\Phi_1 : \mathbb{R}^{m_1+m} \mapsto \mathbb{R}^{2m_1}$

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \end{pmatrix} \mapsto z^1 = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} = \Phi_1(u, s, \bar{x}^1) \triangleq \Lambda_1(u, s) \bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 \\ G_1^1(u, s) \end{pmatrix}$$

où $z_k^1 \in \mathbb{R}^{m_1}, k = 1, 2$.

- $\Phi_2 : \mathbb{R}^{n-m_1} \mapsto \mathbb{R}^{q(p-m_1)}$

$$\bar{x}^2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_2^2 \\ \vdots \\ \bar{x}_q^2 \end{pmatrix} \mapsto z^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ \vdots \\ z_q^2 \end{pmatrix} = \Phi_2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2)$$

où $z_k^2 \in \mathbb{R}^{p-m_1}, k = 1, \dots, q-1$, a l'expression suivante :

$$\Sigma \begin{cases} z_1^2 = \bar{x}_1^2 \\ z_2^2 = \bar{f}_1^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \\ z_3^2 = \frac{\partial \bar{f}_1^2}{\partial \bar{x}_2^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \bar{f}_2^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \\ \vdots \\ z_q^2 = \prod_{k=1}^{q-2} \frac{\partial \bar{f}_k^2}{\partial \bar{x}_{k+1}^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \bar{f}_{q-1}^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \end{cases}$$

Comme Λ_1 est de rang plein, Φ_1 est injective. Il en est de même pour Φ_2 compte tenu de l'hypothèse **(H3)**. Dans la suite, on notera $\Phi_1^c(z^1)$ et $\Phi_2^c(z^2)$ les fonctions réciproques respectives de Φ_1 et Φ_2 . Avant de décrire les dynamiques de z^1 et z^2 , nous notons les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \Lambda_1(u, s) \bar{G}(u, s) &= A_1 \Lambda_1(u, s) \\ \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \bar{f}^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) &= A_2 z^2 + b^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\text{où } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_{p-m_1} & 0 & 0 \\ \vdots & & I_{p-m_1} & \\ 0 & & & \ddots & I_{p-m_1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

sont des matrices carrées de dimensions respectives $2m_1 \times 2m_1$ et $q(p-m_1) \times q(p-m_1)$;

$$b^2(u, s, y_1, \bar{x}^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\prod_{k=1}^{q-1} \frac{\partial \bar{f}_k^2}{\partial \bar{x}_{k+1}^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \right) \bar{f}_q^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q(p-m_1)} \quad (4.53)$$

Comme les matrices $\Lambda_1(u, s)$ et $\Lambda_2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2)$ sont inversibles à gauche, les identités (4.51) peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{G}(u, s) &= \Lambda_1^+(u, s) A_1 \Lambda_1(u, s) \\ \bar{f}^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) &= \Lambda_2^+(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2) (A_2 z^2 + b^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2)) \end{aligned} \quad (4.54)$$

En utilisant les identités (4.51) et (4.54), les dynamiques de z^1 et z^2 peuvent s'écrire comme suit :

• Pour z^1 :

$$\begin{aligned} \dot{z}^1(t) &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{x}^1}(u, s, \bar{x}^1) \dot{\bar{x}}^1(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, s, \bar{x}^1) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(u, s, \bar{x}^1) \dot{s}(t) \\ &= \Lambda_1(u, s) (\bar{G}(u, s) \bar{x}^1 + \bar{f}^1(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) + \bar{\varepsilon}(t)) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, s, \bar{x}^1) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(u, s, \bar{x}^1) \dot{s}(t) \\ &= A_1 z^1 + \Lambda_1(u, s) \bar{f}^1(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) + \Lambda_1(u, s) \bar{\varepsilon}(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, s, \bar{x}^1) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(u, s, \bar{x}^1) \dot{s}(t) \end{aligned} \quad (4.55)$$

• Pour z^2 :

$$\begin{aligned}
\dot{z}^2(t) &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{\bar{x}}^2(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{s}(t) \\
&+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{y}_1(t) \\
&= \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) (\bar{f}^2(u, s, y_1, \bar{x}^2) + \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1) \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) - \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \right) (\bar{f}^2(u, s, y_1, \bar{x}^2) + \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1) \\
&+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{s}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{y}_1(t) \\
&= A_2 z^2 + b^2(u, s, y_1, \bar{x}^2) + \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1 \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) - \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \right) (\Lambda_2^+(u, s, y_1, \bar{x}^2) (A_2 z^2 + b^2(u, s, y_1, \bar{x}^2)) \\
&+ \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{s}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{y}_1(t) \\
&= A_2 z^2 + b^2(u, s, y_1, \bar{x}^2) + \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1 \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) - \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \right) (\Lambda_2^+(u, s, y_1, \bar{x}^2) A_2 z^2 + \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1) \\
&+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{s}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{y}_1(t) \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Notons que la dernière égalité dans le système d'équation (4.56) résulte du fait que la matrice $\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) - \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \right) (\Lambda_2^+(u, s, y_1, \bar{x}^2))$ est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale et qu'il n'y a que la dernière composante du vecteur $b^2(u, s, y_1, \bar{x}^2)$ qui est non nulle (cf. équation (4.53)).

Pour alléger les écritures, nous allons adopter les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\psi^1(u, s, z^1, z^2) &\triangleq \Lambda_1(u, s) \bar{f}^1(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \bar{x}_2^2) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, s, \bar{x}^1) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(u, s, \bar{x}^1) \dot{s}(t) \\
\psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2) &\triangleq b^2(u, s, y_1, \bar{x}^2) + \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1 \\
&+ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) - \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \right) (\Lambda_2^+(u, s, y_1, \bar{x}^2) A_2 z^2 + \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1) \\
&+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{s}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \dot{y}_1(t)
\end{aligned}$$

Compte tenu de la structure de Φ_1 , il est clair que la fonction $\psi^1(u, s, z^1, z^2)$ est triangulaire par rapport à z^1 , c'est-à-dire que l'on a : $\psi^1(u, s, z^1, z^2) = \begin{pmatrix} \psi_1^1(u, s, z^1, z^2) \\ \psi_2^1(u, s, z^1, z^2) \end{pmatrix}$ avec $\psi_1^1(u, s, z^1, z^2), \psi_2^1(u, s, z^1, z^2) \in \mathbb{R}^{m_1}$. De même, compte tenu de la structure de Ψ_2 et en notant que la matrice

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) - \Lambda_2(u, s, y_1, \bar{x}^2) \right) \Lambda_2^+(u, s, y_1, \bar{x}^2) A_2$$

est triangulaire inférieure, on peut vérifier que la fonction $\psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2)$ est triangulaire

par rapport à z^2 , c'est-à-dire que l'on a $\psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2) =$

$$\begin{pmatrix} \psi_1^2(u, s, y_1, z_1^1, z_1^2) \\ \psi_2^2(u, s, y_1, z_1^1, z_1^2, z_2^2) \\ \vdots \\ \psi_k^2(u, s, y_1, z_1^1, z_1^2, \dots, z_k^2) \\ \vdots \\ \psi_q^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2) \end{pmatrix}$$

avec $\psi_k^2(u, s, y_1, z_1^1, z_1^2, \dots, z_k^2) \in \mathbb{R}^{p-m_1}$, $k = 1, \dots, q$.

Avec les identités et notations introduites, les systèmes (4.40) et (4.41) s'écrivent respectivement dans les nouvelles coordonnées en z comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z}^1 &= A_1 z^1 + \psi^1(u, s, z^1, z^2) + \Lambda_1(u, s)\bar{\varepsilon}(t) \\ y_1 &= h_1(z^1) = C_1 z^1 = z_1^1 \end{cases} \quad (4.57)$$

et

$$\begin{cases} \dot{z}^2 &= A_2 z^2 + \psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2) \\ y_2 &= h_2(z^1, z^2) = C_2 z^2 + \Upsilon_2^1 C_1 z^1 \end{cases} \quad (4.58)$$

avec $z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$ et

$$C_1 = \begin{bmatrix} I_{m_1} & 0 \end{bmatrix}; \quad C_2 = \begin{bmatrix} I_{p-m_1} & 0_{p-m_1} & \dots & 0_{p-m_1} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

sont deux matrices rectangulaires de dimensions respectives $m_1 \times 2m_1$ et $(p-m_1) \times q(p-m_1)$.

Nous allons maintenant proposer un observateur de type grand gain pour l'estimation simultanée des états des systèmes (4.57) et (4.58).

L'hypothèse (classique) suivante est adoptée pour la synthèse de l'observateur :

(H5) La fonction $\psi_1(u, s, z^1, z^2)$ (resp. $\psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2)$) est lispchitzienne en z^1 et z^2 (resp. en z_1^1 et z^2) localement uniformément en u et s (resp. en u, s et y_1).

Avant de donner l'équation de l'observateur, nous introduisons les variables suivantes :

• Soient $\theta_1, \theta_2 > 0$ deux nombres réels et soient $\Delta_1(\theta_1)$ et $\Delta_2(\theta_2)$ deux matrices diagonales par blocs définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta_1(\theta_1) &= \text{diag} \left(I_{m_1} \quad \frac{1}{\theta_1} I_{m_1} \right) \\ \Delta_2(\theta_2) &= \text{diag} \left(I_{p-m_1} \quad \frac{1}{\theta_2} I_{m_1} \quad \dots \quad \frac{1}{\theta_2^{q-1}} I_{m_1} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

• Pour $i = 1, 2$, soit S_i la solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S_i + A_i^T S_i + S_i A_i - C_i^T C_i = 0 \quad (4.61)$$

où les A_i et C_i sont respectivement données par les équations (4.52) et (4.59), $i = 1, 2$. D'après les rappels du chapitre 3, les matrices S_1 et S_2 sont symétriques définies positives et on a :

$$S_1^{-1}C_1^T = \begin{bmatrix} 2I_{m_1} \\ I_{m_1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S_2^{-1}C_2^T = \begin{bmatrix} C_q^1 I_{p-m_1} \\ C_q^2 I_{p-m_1} \\ \vdots \\ C_q^q I_{p-m_1} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!} \quad (4.62)$$

Soit maintenant le système dynamique suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}^1 &= A_1 \hat{z}^1 + \psi^1(u, s, \hat{z}^1, \hat{z}^2) - \theta_1 \Delta_1^{-1}(\theta_1) S_1^{-1} C_1^T (h_1(\hat{z}^1) - y_1) \\ \dot{\hat{z}}^2 &= A_2 \hat{z}^2 + \psi^2(u, s, y_1, \hat{z}_1^1, \hat{z}^2) - \theta_2 \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (h_2(\hat{z}^1, \hat{z}^2) - y_2) \\ &+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) \left(\bar{f}^2(u, s, \hat{z}_1^1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) - \bar{f}^2(u, s, z_1^1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) + \dot{Y}^2(u, s)(\hat{z}_1^1 - z_1^1) \right) \\ &- \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) \\ &\left(\Lambda_2^+(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) \right)^+ \right) \theta_2 \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (h_2(\hat{z}^1, \hat{z}^2) - y_2) \end{aligned} \quad (4.63)$$

avec $\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_1+q(p-m_1)}$; $\hat{z}^1 = \begin{pmatrix} \hat{z}_1^1 \\ \hat{z}_2^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_1}$, $\hat{z}_i^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $i = 1, 2$; $\hat{z}^2 = \begin{pmatrix} \hat{z}_1^2 \\ \hat{z}_2^2 \\ \vdots \\ \hat{z}_q^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q(p-m_1)}$, avec $\hat{z}_k^2 \in \mathbb{R}^{p-m_1}$, $k = 1, \dots, q$ et enfin $\theta_1, \theta_2 > 0$ sont deux nombres réels.

Nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Supposons que les systèmes (4.55) et (4.56) satisfont les hypothèses (H1)-(H5). Alors,*

$$\exists \theta_{1,0} > 0; \quad \exists \theta_{2,0} > 0; \quad \forall \theta_1 > \theta_{1,0}; \quad \forall \theta_2 > \theta_{2,0}; \quad \exists \lambda > 0; \quad \exists \mu(\theta_1, \theta_2) > 0; \quad \exists M(\theta_1, \theta_2) \geq 0;$$

$$\forall u \in U; \forall \hat{z}^1(0) \in \mathbb{R}^{2m_1}; \forall \hat{z}^2(0) \in \mathbb{R}^{q(p-m_1)}; \text{ on a :}$$

$$\|\hat{z}(t) - z(t)\| \leq \lambda \theta_1 e^{-\mu(\theta_1, \theta_2)t} \|\hat{z}(0) - z(0)\| + M(\theta_1, \theta_2) \beta_\varepsilon$$

où $z(t)$ est la trajectoire inconnue de (4.55) et (4.56) associée à l'entrée u , $\hat{z}(t)$ est une trajectoire quelconque du système (4.63) associée à l'entrée u et aux sorties y_1 et y_2 et β_ε est la borne supérieure de $\|\varepsilon\|$ donnée à l'hypothèse (H5). De plus, on a :

$$\lim_{\theta_1, \theta_2 \rightarrow \infty} \mu(\theta_1, \theta_2) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\theta_1, \theta_2 \rightarrow \infty} M(\theta_1, \theta_2) = 0$$

Remarque 4.1. *Théorème (4.3) stipule que pour des entrées inconnues constantes (i.e. $\varepsilon(t) = 0$), l'erreur asymptotique d'estimation converge vers zéro de manière exponentielle. Dans le cas où $\|\varepsilon(t)\| \neq 0$ mais est bornée par β_ε , cette erreur reste dans une boule dont le rayon est d'autant plus petit que β_ε . de plus, ce rayon peut être rendu aussi petit que désiré par le choix de valeurs suffisamment grandes de θ_1 et θ_2 .*

Preuve du Théorème (4.3) :

Avant de présenter la preuve de ce théorème, nous pouvons remarquer que les équations de l'observateur (4.63) et en particulier la dynamique de \hat{z}^2 sont assez complexes. De plus et d'après les rappels sur les observateurs présentés au chapitre 3, l'expression de cette dynamique aurait pu être beaucoup plus simple en omettant tous les termes qui font intervenir la jacobienne de Ψ_2 . Toutefois, les équations de l'observateur ainsi obtenues seront beaucoup plus complexes dans les coordonnées originales en \bar{x} puisqu'elles feront intervenir l'inverse de la jacobienne. Ainsi, l'objectif recherché derrière l'ajout de tous les termes contenant la jacobienne de Ψ_2 dans la dynamique de l'observateur, consiste à obtenir un observateur dont les équations seront très simples à établir dans les coordonnées originales en \bar{x} . cet aspect sera détaillé dans le preuve du théorème.

Posons $e(t) = \begin{bmatrix} e^1(t) \\ e^2(t) \end{bmatrix}$ avec $e^i(t) = z^i(t) - \hat{z}^i(t)$, $i = 1, 2$ et notons par $e_j^i(t)$ la $j^{\text{ième}}$ composante de e^i . Avant de générer les dynamiques des erreurs d'observation, notons que :

$$\begin{aligned}
h_1(\hat{z}^1) - y_1 &= C_1 \hat{z}^1 - z_1^1 \\
&= C_1(\hat{z}^1 - z^1) \\
&= C_1 e^1 \\
h_2(\hat{z}^1, \hat{z}^2) - y_2 &= C_2 \hat{z}^2 + \Upsilon_1^2(u, s) C_1 \hat{z}^1 - y_2 \\
&= C_2(\hat{z}^2 - z^2) + \Upsilon_1^2(u, s) C_1(\hat{z}^1 - z^1) \\
&= C_2 e^2 + \Upsilon_1^2(u, s) C_1 e^1
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\dot{e}^1 &= (A_1 - \theta_1 \Delta_1^{-1}(\theta_1) S_1^{-1} C_1^T C_1) e^1 + (\psi^1(u, s, \hat{z}^1, \hat{z}^2) - \psi^1(u, s, z^1, z^2)) - \Lambda_1(u, s) \bar{\varepsilon}(t) \\
\dot{e}^2 &= (A_2 - \theta_2 \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T C_2) e^2 + (\psi^2(u, s, y_1, \hat{z}_1^1, \hat{z}^2) - \psi^2(u, s, y_1, \hat{z}_1^1, z^2)) \\
&\quad - \theta_2 \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T \Upsilon_1^2(u, s) C_1 e^1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \left(\frac{\partial \bar{f}^2}{\partial \bar{x}_1^1}(u, s, \xi_1^1, \hat{x}^2) C_1 e^1 + \dot{\Upsilon}^2(u, s) C_1 e^1 \right) \\
&\quad - \theta_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) \left(\Lambda_2^+(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) \right)^+ \right) \\
&\quad \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (C_2 e^2 + \Upsilon_1^2(u, s) C_1 e^1)
\end{aligned} \tag{4.65}$$

où $\xi \in \mathbb{R}^{m_1}$ par application du théorème de la valeur moyenne.

Maintenant, pour $i = 1, 2$, on peut facilement vérifier les identités suivantes :

$$\Delta_i(\theta_i)A_i\Delta_i^{-1}(\theta_i) = \theta_i A_i \quad \text{et} \quad C_i\Delta_i(\theta_i) = C_i \quad (4.66)$$

Posons $\bar{e}^1 = \Delta_1(\theta_1)e^1$ et $\bar{e}^2 = \Delta_2(\theta_2)e^2$. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}^1 &= \theta_1(A_1 - S_1^{-1}C_1^T C_1)\bar{e}^1 + \Delta_1(\theta_1)(\psi^1(u, s, \hat{z}^1, \hat{z}^2) - \psi^1(u, s, z^1, z^2)) - \Delta_1(\theta_1)\Lambda_1(u, s)\bar{\varepsilon}(t) \\ \dot{\bar{e}}^2 &= \theta_2(A_2 - S_2^{-1}C_2^T C_2)\bar{e}^2 + \Delta_2(\theta_2)(\psi^2(u, s, y_1, \hat{z}_1^1, \hat{z}_1^2) - \psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z_1^2)) \\ &\quad - \theta_2 S_2^{-1}C_2^T \Upsilon_1^2 C_1 \bar{e}^1 + \Delta_2(\theta_2) \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \bar{x}^2) \left(\frac{\partial \bar{f}^2}{\partial \bar{x}_1^1}(u, s, \xi_1^1, \hat{x}^2) C_1 \bar{e}^1 + \dot{\Upsilon}^2(u, s) C_1 \bar{e}^1 \right) \\ &\quad - \theta_2 \Delta_2(\theta_2) \Gamma(u, s, y_1, \hat{z}^2) \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (C_2 \bar{e}^2 + \Upsilon_1^2(u, s) C_1 \bar{e}^1) \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\text{où } \Gamma(u, s, y_1, \hat{z}^2) \triangleq \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) \left(\Lambda_2^+(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) \right)^+ \right).$$

On notera que la matrice $\Gamma(u, s, y_1, \hat{z}^2)$ est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale. De plus, compte tenu de la condition de Lipschitz sur Φ_2 (Hypothèse **(H5)**) et de l'hypothèse **(H1)**, cette matrice est bornée.

Considérons maintenant les fonctions quadratiques suivantes : $V_i(\bar{e}^i) = \bar{e}^{i^T} S_i \bar{e}^i$, $i = 1, 2$. et posons $V(\bar{e}) = V_1(\bar{e}^1) + V_2(\bar{e}^2)$. D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2\bar{e}^{1^T} S_1 \dot{\bar{e}}^1 \\ &= -\theta_1 V_1 - \bar{e}^{1^T} C_1^T C_1 \bar{e}^1 + 2\bar{e}^{1^T} S_1 \Delta_1(\theta_1) (\psi_1(u, s, \hat{z}^1, \hat{z}^2) - \psi_1(u, s, z^1, z^2)) \\ &\quad - 2\bar{e}^{1^T} S_1 \Delta_1(\theta_1) \Lambda_1(u, s) \bar{\varepsilon}(t) \\ &\leq -\theta_1 V_1 + 2\|\bar{e}^1\| \|S_1\| (\|\Delta_1(\theta_1)(\psi^1(u, s, \hat{z}^1, \hat{z}^2) - \psi^1(u, s, z^1, z^2))\| \\ &\quad + \|\Delta_1(\theta_1)\Lambda_1(u, s)\bar{\varepsilon}(t)\|) \end{aligned} \quad (4.68)$$

La dernière égalité dans (4.68) résulte de l'équation (4.61).

Maintenant, comme la fonction ψ^1 est lipschitzienne, qu'elle est triangulaire par rapport à z^1 et qu'elle ne dépende pas de z_k^2 pour $k > 2$, on peut montrer que pour $\theta_1, \theta_2 \geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\Delta_1(\theta_1)(\psi^1(u, s, \hat{z}^1, \hat{z}^2) - (\psi^1(u, s, z^1, z^2)))\| &\leq k_1 \|\bar{e}^1\| + k_2 \|e^2\| \\ &\leq k_1 \|\bar{e}^1\| + k_2 \theta_2 \|\bar{e}^2\| \end{aligned} \quad (4.69)$$

où $k_1, k_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de θ_1 et θ_2 . De même, on peut montrer que l'on a :

$$\|\Delta_1(\theta_1)\Lambda_1(u, s)\bar{\varepsilon}(t)\| = \left\| \frac{G_1^1(u, s)\varepsilon(t)}{\theta_1} \right\| \leq \frac{\beta_G \beta_\varepsilon}{\theta_1} \quad (4.70)$$

où β_G et β_ε sont donnés par les hypothèses **(H1)** et **(H2)**.

En combinant (4.68) avec (4.69) et (4.70), on obtient :

$$\dot{V}_1 \leq -(\theta_1 - c_1)V_1 + c_2\theta_2\sqrt{V_1}\sqrt{V_2} + \frac{c_3\beta_\varepsilon}{\theta_1}\sqrt{V_1} \quad (4.71)$$

où $c_1 = \frac{2k_1\|S_1\|}{\lambda_{\min}(S_1)}$, $c_2 = \frac{2k_2\|S_1\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)\lambda_{\min}(S_2)}}$, $c_3 = \frac{2\beta_G\|S_1\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(S_1)}}$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ étant la plus petite valeur propre de (\cdot) .

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= 2\bar{e}^{2T}S_2\ddot{e}^2 \\ &= -\theta_2V_2 - \bar{e}^{2T}C_2^TC_2\bar{e}^2 + 2\bar{e}^{2T}S_2\Delta_2(\theta_2)(\psi^2(u, s, y_1, \hat{z}_1^1, \hat{z}^2) - \psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2)) \\ &\quad - 2\theta_2\bar{e}^{2T}C_2^T\Upsilon_1^2(u, s)C_1\bar{e}^1 \\ &\quad + 2\bar{e}^{2T}S_2\Delta_2(\theta_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial\bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2))\left(\frac{\partial\bar{f}^2}{\partial\bar{x}_1^1}(u, s, \xi_1^1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) + \dot{\Upsilon}^2(u, s)\right)C_1\bar{e}^1 \\ &\quad - 2\bar{e}^{2T}S_2\theta_2\Delta_2(\theta_2)\Gamma(u, s, y_1, z^2)\Delta_2(\theta_2)^{-1}S_2^{-1}C_2^T(C_2\bar{e}^2 + \Upsilon_1^2(u, s)C_1\bar{e}^1) \\ &\leq -\theta_2V_2 + 2\|\bar{e}^2\|\|S_2\|\|\Delta_2(\theta_2)(\psi^2(u, s, y_1, \hat{z}_1^1, \hat{z}^2) - \psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2))\| \\ &\quad + 2\theta_2\|\bar{e}^2\|\|C_2^T\Upsilon_1^2(u, s)C_1\|\|\bar{e}^1\| \\ &\quad + 2\|\bar{e}^2\|\|S_2\|\|\Delta_2(\theta_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial\bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2))\left(\frac{\partial\bar{f}^2}{\partial\bar{x}_1^1}(u, s, \xi_1^1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) + \dot{\Upsilon}^2(u, s)\right)C_1\|\|\bar{e}^1\| \\ &\quad + 2\|\bar{e}^2\|\|S_2\|\|\theta_2\Delta_2(\theta_2)\Gamma(u, s, y_1, z^2)\Delta_2^{-1}(\theta_2)\|(\|S_2^{-1}C_2^TC_2\|\|\bar{e}^2\| + \|S_2^{-1}C_2^T\Upsilon_1^2(u, s)C_1\|\|\bar{e}^1\|) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Comme la fonction φ^2 est lipschitzienne par rapport à z_1^1 et z^2 et qu'elle est triangulaire par rapport à z^2 , on peut montrer que pour $\theta_1, \theta_2 \geq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\Delta_2(\theta_2)(\psi^2(u, s, y_1, \hat{z}_1^1, \hat{z}^2) - \psi^2(u, s, y_1, z_1^1, z^2))\| &\leq k'_1\|e_1^1\| + k'_2\|\bar{e}^2\| \\ &= k'_1\|\bar{e}_1^1\| + k'_2\|\bar{e}^2\| \\ &\leq k'_1\|\bar{e}_1\| + k'_2\|\bar{e}^2\| \end{aligned} \quad (4.73)$$

où k'_1, k'_2 sont des constantes indépendantes de θ_1 et θ_2 .

De même, comme les fonctions $\frac{\partial\Phi_2}{\partial\bar{x}^2}$ et $\frac{\partial\bar{f}^2}{\partial\bar{x}_1^1}$ sont bornées (\bar{f}^2 et Φ_2 étant lipschitziennes) ainsi que \dot{u} et \dot{s} , on peut montrer que pour $\theta_2 \geq 1$, on a :

$$\|\Delta_2(\theta_2)\frac{\partial\Phi_2}{\partial\bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\hat{z}^2))\left(\frac{\partial\bar{f}^2}{\partial\bar{x}_1^1}(u, s, \xi_1^1, \Phi_2^c(\hat{z}^2)) + \dot{\Upsilon}^2(u, s)C_1\right)\| \leq k'_3 \quad (4.74)$$

où k'_3 est une constante ne dépendant pas de θ_1 , ni de θ_2 .

Par ailleurs, comme $\Upsilon_1^2(u, s)$ est bornée, nous avons :

$$\|C_2^T \Upsilon_1^2(u, s) C_1\| \leq k'_4 \quad (4.75)$$

où k'_4 est une constante ne dépendant pas de θ_1 , ni de θ_2 .

Enfin, comme $\Gamma(u, s, y_1, \hat{z}^2)$ est triangulaire avec des zéros sur la diagonale principale et qu'elle est bornée, nous avons,

$$\|\theta_2 \Delta_2(\theta_2) \Gamma(u, s, y_1, \hat{z}^2) \Delta_2^{-1}(\theta_2)\| \leq k'_5 \quad (4.76)$$

où k'_5 est une constante ne dépendant pas de θ_1 et θ_2 .

En combinant (4.72) avec (4.73), (4.74), (4.75) et (4.76), on obtient pour $\theta_2 \geq 1$:

$$\dot{V}_2 \leq -(\theta_2 - c_4)V_2 + c_5 \sqrt{V_1} \sqrt{V_2} \quad (4.77)$$

où c_4 et c_5 sont des constantes positives ne dépendant pas de θ_1 , ni de θ_2 .

Combinons (4.71) et (4.77) et prenons $\theta_2 \geq 1$, on obtient :

$$\dot{V} \leq -(\theta_1 - c_1)V_1 - (\theta_2 - c_4)V_2 + c\theta_2^{q-1} \sqrt{V_1} V_2 + \frac{c_3 \beta_\varepsilon}{\theta_1} \sqrt{V_1} \quad (4.78)$$

où $c = c_2 + c_5$.

Pour $\theta_1 > c_1$, $\theta_2 > c_4$, on définit $V_1^* = (\theta_1 - c_1)V_1$, $V_2^* = (\theta_2 - c_4)V_2$ et $V^* = V_1^* + V_2^*$. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -V_1^* - V_2^* + 2 \frac{c\theta_2}{\sqrt{(\theta_1 - c_1)(\theta_2 - c_4)}} \sqrt{V_1^*} \sqrt{V_2^*} + \frac{c_3}{\theta_1} \beta_\varepsilon \sqrt{V_1} \\ &\leq -(V_1^* + V_2^*) + \frac{c\theta_2}{\sqrt{(\theta_1 - c_1)(\theta_2 - c_4)}} (\sqrt{V_1^*} + \sqrt{V_2^*}) + \frac{c_3}{\theta_1} \beta_\varepsilon \sqrt{V_1} \\ &= -\left(1 - \frac{c\theta_2}{\sqrt{(\theta_1 - c_1)(\theta_2 - c_4)}}\right) \sqrt{V^*} + \frac{c_3}{\theta_1} \beta_\varepsilon \sqrt{V_1} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Maintenant, pour θ_2 fixé, choisissons θ_1 tel que

$$\theta_1 > \max \left(\theta_2, \theta_2 - c_4 + c_1, c_1 + \frac{c^2 \theta_2^{2(q-1)}}{(\theta_2 - c_4)} \right) \quad (4.80)$$

En choisissant θ_1 comme en (4.80), on a :

$$\eta = 1 - \frac{c\theta_2^{q-1}}{\sqrt{(\theta_1 - c_1)(\theta_2 - c_4)}} > 0$$

et

$$(\theta_2 - c_4)V \leq V^* \leq (\theta_1 - c_1)V$$

L'inégalité (4.79) devient :

$$\dot{V} \leq -\eta V^* + \frac{c_3}{\theta_1} \beta_\varepsilon \sqrt{V_1} \leq -\eta(\theta_2 - c_4)V + \frac{c_3}{\theta_1} \beta_\varepsilon \sqrt{V}$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{V(\bar{e}(t))} \right) \leq -\frac{\eta}{2}(\theta_2 - c_4) \sqrt{V(\bar{e}(t))} + \frac{c_3}{2\theta_1} \beta_\varepsilon \quad (4.81)$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\bar{e}(t))} &\leq \exp \left[-\frac{\eta}{2}(\theta_2 - c_4)t \right] \sqrt{V(\bar{e}(0))} + \frac{c_3}{\theta_1 \eta (\theta_2 - c_4)} \left[1 - \exp \left[-\frac{\eta}{2}(\theta_2 - c_4)t \right] \right] \beta_\varepsilon \\ &\leq \exp \left[-\frac{\eta}{2}(\theta_2 - c_4)t \right] \sqrt{V(\bar{e}(0))} + \frac{c_3}{\theta_1 \eta (\theta_2 - c_4)} \beta_\varepsilon \end{aligned} \quad (4.82)$$

Il en découle,

$$\|\bar{e}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \exp \left[-\frac{\eta}{2}(\theta_2 - c_4)t \right] \|\bar{e}(0)\| + \frac{c_3}{\theta_1 \eta \sqrt{\lambda_1} (\theta_2 - c_4)} \beta_\varepsilon \quad (4.83)$$

où $\lambda_1 = \min(\lambda_{\min}(S_1), \lambda_{\min}(S_2))$ et $\lambda_2 = \max(\lambda_{\max}(S_1), \lambda_{\max}(S_2))$.

Maintenant, compte tenu du choix de θ_2 (cf.(4.80)), on a :

$$\|\bar{e}(t)\| \leq \|e(t)\| \leq \theta_1 \|\bar{e}(t)\| \quad (4.84)$$

Il en résulte,

$$\|e(t)\| \leq \theta_1 \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \exp \left[-\frac{\eta}{2}(\theta_2 - c_4)t \right] \|e(0)\| + \frac{c_3}{\eta \sqrt{\lambda_1} (\theta_2 - c_4)} \beta_\varepsilon \quad (4.85)$$

Finalement, les paramètres λ , $\mu(\theta_1, \theta_2)$ et $M(\theta_1, \theta_2)$ du théorème sont donnés par :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}; \quad \mu(\theta_1, \theta_2) = -\frac{\eta}{2}(\theta_2 - c_4); \quad M(\theta_1, \theta_2) = \frac{c_3}{\eta \sqrt{\lambda_1} (\theta_2 - c_4)}$$

Ceci finit la preuve du théorème 4.3.

Nous allons maintenant donner les équations de l'observateur dans les coordonnées en \bar{x} avant de les générer dans les coordonnées originales en x .

Nous commençons par traiter l'équation de \hat{z}^1 puis celle de \hat{z}^2 .

Comme Φ_1 est injective, alors pour chaque $\hat{z}^1 \in \mathbb{R}^{2m_1}$, il existe $\bar{x}^1 \in \mathbb{R}^{m_1+m}$ tel que :

$$\Phi_1(u, s, \hat{x}^1) = z^1$$

En dérivant par rapport au temps chaque terme de cette égalité, on obtient :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, s, \hat{x}^1) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(u, s, \hat{x}^1) \dot{s}(t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \hat{x}^1} \dot{\hat{x}}^1 = \dot{z}^1$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}^1 &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{x}^1}(u, s, \hat{x}^1) \right)^+ \left(\dot{z}^1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(u, s, \hat{x}^1) \dot{u}(t) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}(u, s, \hat{x}^1) \dot{s}(t) \right) \\
&= \bar{f}_1^+(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) + \bar{G}(u, s) \hat{x}_2^1 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{x}^1}(u, s, \hat{x}^1) \right)^+ (-\theta_1 \Delta_1^{-1}(\theta_1) S_1^{-1} C_1^T (C_1 \dot{z}^1 - y)) \\
&= \bar{f}_1^+(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) + \bar{G}(u, s) \hat{x}_2^1 - \theta_1 \Lambda_1^{-1}(u, s) \Delta_1^{-1}(\theta_1) S_1^{-1} C_1^T (\bar{C}_1 \hat{x}^1 - y_1) \quad (4.86)
\end{aligned}$$

Nous procédons de la même façon pour \dot{z}^2 . En effet, comme Φ_2 est injective, alors pour chaque $\dot{z}^2 \in \mathbb{R}^{q_p - m_1}$, il existe $\hat{x}^2 \in \mathbb{R}^{n - m_1}$ tel que :

$$\Phi_2(u, s, y_1, \hat{x}^2) = \dot{z}^2$$

En dérivant par rapport au temps chaque terme de cette égalité, on obtient :

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \dot{u}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \dot{s}(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \dot{y}_1(t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \hat{x}^2} \dot{\hat{x}}^2 = \dot{z}^2$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}^2 &= \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \right)^+ \left(\dot{z}^2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \dot{u}(t) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial s}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \dot{s}(t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \dot{y}_1(t) \right) \\
&= \bar{f}^2(u, s, y_1, \hat{x}^2) + \dot{Y}^2(u, s) \bar{x}_1^1 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \right)^+ \\
&\quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) \left(\bar{f}^2(u, s, \hat{z}_1^1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) - \bar{f}^2(u, s, z_1^1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) + \dot{Y}^2(u, s) (\hat{z}_1^1 - z_1^1) \right) \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \right)^+ (-\theta_2 \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (h(\hat{z}^1, \hat{z}^2) - y_2)) \\
&\quad - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \right)^+ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) \left(\Lambda_2^+(u, s, y_1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) \right)^+ \right) \\
&\quad \theta_2 \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (h(\hat{z}^1, \hat{z}^2) - y_2) \\
&= \bar{f}^2(u, s, y_1, \hat{x}^2) + \dot{Y}^2(u, s) \bar{x}_1^1 + \left(\bar{f}^2(u, s, \hat{z}_1^1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) - \bar{f}^2(u, s, z_1^1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) + \dot{Y}^2(u, s) (\hat{z}_1^1 - z_1^1) \right) \\
&\quad - \theta_2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \hat{x}^2) \right)^+ \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (h(\hat{z}^1, \hat{z}^2) - y_2) \\
&\quad - \theta_2 \left(\Lambda_2^+(u, s, y_1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{x}^2}(u, s, y_1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) \right)^+ \right) \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (h(\hat{z}^1, \hat{z}^2) - y_2) \\
&= \bar{f}^2(u, s, y_1, \hat{x}^2) + \dot{Y}^2(u, s) \bar{x}_1^1 + \left(\bar{f}^2(u, s, \hat{z}_1^1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) - \bar{f}^2(u, s, z_1^1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) + \dot{Y}^2(u, s) (\hat{z}_1^1 - z_1^1) \right) \\
&\quad - \theta_2 \Lambda_2^+(u, s, y_1, \Phi_2^c(\dot{z}^2)) \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (h(\hat{z}^1, \hat{z}^2) - y_2) \quad (4.87)
\end{aligned}$$

Maintenant, à partir des expressions de $\Phi_1(u, s, \bar{x}^1)$ et $\Phi_2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}^2)$, nous avons directement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
y_1 &= z_1^1 \\
\hat{z}_1^1 &= \bar{x}_1^1 \\
\hat{z}_1^2 &= \bar{x}_1^2 \\
h(\hat{z}^1, \hat{z}^2) &= C_2 \hat{z}^2 + \Upsilon_1^2(u, s) C_1 \hat{z}^1 \\
&= \hat{z}_1^2 + \Upsilon_1^2(u, s) \hat{z}_1^1 \\
&= \bar{x}_1^2 + \Upsilon_1^2(u, s) \bar{x}_1^1
\end{aligned} \tag{4.88}$$

D'autre part, nous avons par définition $\Phi_2^c(\hat{z}^2) = \hat{x}^2$. Ainsi, en tenant compte de ces égalités, l'équation (4.87) devient

$$\begin{aligned}
\hat{x}^2 &= \bar{f}^2(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}^2) + \dot{\Upsilon}^2(u, s) \bar{x}_1^1 + \left(\bar{f}^2(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}^2) - \bar{f}^2(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}^2) + \dot{\Upsilon}^2(u, s) (\hat{x}_1^1 - \bar{x}_1^1) \right) \\
&\quad - \theta_2 \Lambda_2^+(u, s, y_1, \hat{x}^2) \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (\hat{x}_1^1 + \Upsilon_1^2(u, s) \hat{x}_1^1 - y_2) \\
&= \bar{f}^2(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}^2) + \dot{\Upsilon}^2(u, s) \hat{x}_1^1 - \theta_2 \Lambda_2^+(u, s, y_1, \hat{x}^2) \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T (\hat{x}_1^1 + \Upsilon_1^2(u, s) \hat{x}_1^1 - y_2)
\end{aligned}$$

Pour résumer, les équations de l'observateur (4.63) s'écrivent dans les coordonnées en \bar{x} sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}^1 &= \bar{f}^1(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) + \bar{G}(u, s) \hat{x}_2^1 - \theta_1 \Lambda_1^{-1}(u, s) \Delta_1^{-1}(\theta_1) S_1^{-1} C_1^T (\bar{C}_1 \hat{x}^1 - y_1) \\ \hat{x}^2 &= \bar{f}^2(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}^2) + \dot{\Upsilon}^2(u, s) \hat{x}_1^1 - \theta_2 \Lambda_2^+(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}^2) \Delta_2^{-1}(\theta_2) S_2^{-1} C_2^T \\ &\quad (\hat{x}_1^1 + \Upsilon_1^2(u, s) \hat{x}_1^1 - y_2) \end{cases} \tag{4.89}$$

$$\text{où } \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}, \hat{x}^1 = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^1 \\ \hat{x}_2^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_1+m}, \hat{x}_1^1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \hat{x}_2^1 \in \mathbb{R}^m, \hat{x}^2 = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^2 \\ \vdots \\ \hat{x}_q^2 \end{pmatrix} \in$$

$$\mathbb{R}^{n-m_1}, \hat{x}_1^2 \in \mathbb{R}^{n-m_1}, \hat{x}_k^2 \in \mathbb{R}^{n_k}, k = 2, \dots, q; \bar{f}^1(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1^1(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{G}(u, s) = \begin{pmatrix} 0 & G^1(u, s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \bar{f}^2(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}^2) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1^2(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}_2^2) \\ \bar{f}_2^2(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}_2^2, \hat{x}_3^2) \\ \vdots \\ \bar{f}_q^2(u, s, \hat{x}_1^1, \hat{x}^2) \end{pmatrix}.$$

4.3.1.1 Equations de l'observateur dans les coordonnées originales

L'objectif consiste à écrire le système (4.89) dans les coordonnées originales x . Pour ce faire, nous allons tout d'abord exprimer les termes de la matrice $\Lambda_2^+(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}^2)$ dans ces

coordonnées. Nous avons :

$$\begin{aligned}\bar{f}_k^2(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots, \bar{x}_{k+1}^2) &= f^k(u, x_1^1, x_2^1, x^2, \dots, x^{k+1}) - \Upsilon_k^2(u, s) f_1^1(u, x_1^1, x_2^1, x^2) \\ &= f^k(u, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2 + \Upsilon_1^2(u, s) \bar{x}_1^1, \bar{x}_2^2 + \Upsilon_2^2(u, s) \bar{x}_1^1, \dots, \bar{x}_{k+1}^2 + \Upsilon_{k+1}^2(u, s) \bar{x}_1^1) \\ &\quad - \Upsilon_k^2(u, s) f_1^1(u, \bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2 + \Upsilon_1^2(u, s) \bar{x}_1^1, \bar{x}_2^2 + \Upsilon_2^2(u, s) \bar{x}_1^1)\end{aligned}\quad (4.90)$$

En utilisant la relation liant les exprimant les coordonnées en \bar{x} en fonction de celles en x (4.39), on déduit

$$\begin{aligned}\bar{f}_k^2(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \dots, \hat{x}_{k+1}^2) &= f^k(u, \bar{x}_1^1, \hat{x}_1^2 + \Upsilon(u, s) \bar{x}_1^1, \hat{x}_2^2 + \Upsilon_2^2(u, s) \bar{x}_1^1, \dots, \hat{x}_{k+1}^2 + \Upsilon_{k+1}^2(u, s) \bar{x}_1^1) \\ &\quad - \Upsilon_k^2(u, s) f_1^1(u, x_1^1, \hat{x}_1^2 + \Upsilon_1^2(u, s) \bar{x}_1^1, \hat{x}_2^2 + \Upsilon(u, s) \bar{x}_1^1) \\ &= f^k(u, x_1^1, \hat{x}_2^2 - \Upsilon_1^2(u, s) e_1^1, \hat{x}^2 - \Upsilon_2^2(u, s) e_1^1, \dots, \hat{x}^{k+1} - \Upsilon_{k+1}^2(u, s) e_1^1) \\ &\quad - \Upsilon_k^2(u, s) f_1^1(u, x_1^1, \hat{x}_2^2 - \Upsilon_1^2(u, s) e_1^1, \hat{x}^2 - \Upsilon_2^2(u, s) e_1^1) \\ &= f^k(u, x_1^1, \tilde{x}_2^2, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^{k+1}) - \Upsilon_k^2(u, s) f_1^1(u, x_1^1, \tilde{x}_2^2, \tilde{x}^2)\end{aligned}\quad (4.91)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2^1 &= \hat{x}_2^1 - \Upsilon_1^2(u, s) e_1^1 \\ \tilde{x}^k &= \hat{x}^k - \Upsilon_k^2(u, s) e_1^1 \quad \text{pour } k = 2, \dots, q \\ e_1^1 &= \hat{x}_1^1 - \bar{x}_1^1\end{aligned}\quad (4.92)$$

De façon similaire, nous pouvons obtenir l'équation suivante :

$$\bar{f}_1^2(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) = f_2^1(u, x_1^1, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}^2) - \Upsilon_1^2(u, s) f_1^1(u, x_1^1, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}^2)\quad (4.93)$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{f}_1^2}{\partial \bar{x}_2^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2) &= \frac{\partial f_2^1}{\partial x^2}(u, x_1^1, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}^2) - \Upsilon_1^2(u, s) \frac{\partial f_1^1}{\partial x^2}(u, x_1^1, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}^2) \\ &\triangleq F^1(u, s, x_1^1, \tilde{x}) \\ \frac{\partial \bar{f}_k^2}{\partial \bar{x}_2^2}(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2, \dots, \hat{x}_{k+1}^2) &= \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}}(u, x_1^1, \tilde{x}_2^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^{k+1}) \\ &\triangleq F^k(u, s, x_1^1, \tilde{x}) \quad \text{pour } k = 2, \dots, q - 1.\end{aligned}\quad (4.94)$$

où les composantes du vecteur $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^q \end{pmatrix}$ sont données par le système (4.92).

Compte tenu des calculs précédents, il en ressort

$$\begin{aligned}\Lambda_2(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{x}^2) &\triangleq \Lambda_2(u, s, x_1^1, \tilde{x}) \\ &= \text{diag} \left(I_{p-m_1}, F^1(u, s, x_1^1, \tilde{x}), F^1(u, s, x_1^1, \tilde{x})F^2(u, s, x_1^1, \tilde{x}), \dots, \prod_{k=1}^{q-1} F^k(u, s, x_1^1, \tilde{x}) \right)\end{aligned}\quad (4.95)$$

Finalement, à partir des expressions de $T^{-1}(u, s)$, $S_1^{-1}C_1^T$, $\Delta_1(\theta_1)$ et $\Lambda_1(u, s)$ données par les équations (4.34), (4.62), (4.60) et (4.49), on peut déduire

$$\Lambda_1^+(u, s)\Delta_1^{-1}(\theta_1)S_1^{-1}C_1^T = \begin{pmatrix} 2I_{m_1} \\ \theta_1(G_1^1(u, s))^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

et

$$\begin{aligned}T^{-1}(u, s) &\begin{pmatrix} \theta_1\Lambda_1^+(u, s)\Delta_1^{-1}(\theta_1)S_1^{-1}C_1^T(\hat{x}_1^1 - x_1^1) \\ \theta_2\Lambda_2^+(u, s, x_1^1, \tilde{x})\Delta_2^{-1}(\theta_2)S_2^{-1}C_2^T(\hat{x}_2^1 - x_2^1) \end{pmatrix} \\ &= \\ &\begin{pmatrix} \theta_1\Lambda_1^+(u, s)\Delta_1^{-1}(\theta_1)S_1^{-1}C_1^T(\hat{x}_1^1 - x_1^1) \\ 2\theta_1\Upsilon^2(u, s)(\hat{x}_1^1 - x_1^1) + \theta_2\Lambda_2^+(u, s, x_1^1, \tilde{x})\Delta_2^{-1}(\theta_2)S_2^{-1}C_2^T(\hat{x}_2^1 - x_2^1) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.97)$$

En utilisant les différentes égalités précédentes, on peut déduire que les équations de l'observateur (4.89) s'écrivent dans les coordonnées originales en x comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1^1 \\ \dot{\hat{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1(u, \hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1, \hat{x}^2) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1^1(u, s) \\ 0 \end{pmatrix} \hat{v} \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_2^1 \\ \dot{\hat{x}}^2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2^1(u, \hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1, \hat{x}^2) \\ f^2(u, \hat{x}_1^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) \\ \vdots \\ f^q(u, \hat{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_2^1(u, s) \\ G^2(u, s) \\ \vdots \\ G^q(u, s) \end{pmatrix} \hat{v} - 2\theta_1\Upsilon^2(u, s)(\hat{x}_1^1 - x_1^1) \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_2^1 \\ \dot{\hat{x}}^2 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2^1(u, \hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1, \hat{x}^2) \\ f^2(u, \hat{x}_1^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) \\ \vdots \\ f^q(u, \hat{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_2^1(u, s) \\ G^2(u, s) \\ \vdots \\ G^q(u, s) \end{pmatrix} \hat{v} - 2\theta_1\Upsilon^2(u, s)(\hat{x}_1^1 - x_1^1) \\ -\theta_1\Lambda_1^+(u, s)\Delta_1^{-1}(\theta_1)S_1^{-1}C_1^T(\hat{x}_1^1 - x_1^1) \\ -\theta_2\Lambda_2^+(u, s, x_1^1, \tilde{x})\Delta_2^{-1}(\theta_2)S_2^{-1}C_2^T(\hat{x}_2^1 - x_2^1) \end{array} \right. \quad (4.98)$$

Afin d'écrire les équations d'observateur (4.98) sous une forme plus condensée, nous introduisons les notations suivantes

$$\begin{aligned}\Lambda(u, s, x_1^1, \tilde{x}) &= \text{diag}(I_{m_1}, \Lambda_2(u, s, x_1^1, \tilde{x})) \\ \Delta(\theta_2) &= \text{diag}(0_{m_1}, \Delta_2^{-1}(\theta_2)); \\ D(u, s) &= \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ \Upsilon^2(u, s) \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 0_{m_1} \\ S_2^{-1}C_2^T \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.99)$$

Avec ces nouvelles notations, l'observateur (4.98) peut s'écrire dans les coordonnées originales en x sous la forme condensée suivante,

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(u, \hat{x}) + G(u, s)\hat{v} - \theta_2\Lambda^+(u, s, x_1^1, \tilde{x})\Delta(\theta_2)K(\hat{x}_2^1 - x_2^1) - 2\theta_1D(u, s)(\hat{x}_1^1 - x_1^1) \\ \dot{\hat{v}} = -\theta_1^2(G_1(u, s))^+(\hat{x}_1^1 - x_1^1) \end{cases} \quad (4.100)$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$, $x^k \in \mathbb{R}^{n_k}$ et $x^1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^1 \\ \hat{x}_2^1 \end{bmatrix}$ avec $x_1^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ et $x_2^1 \in \mathbb{R}^{p-m_1}$; $\hat{v} \in \mathbb{R}^m$.

Ecrit sous cette forme, on remarque que l'observateur (4.100) est relativement simple. En effet, il consiste en une copie du système (4.28) avec un terme correctif dont l'expression est donnée.

4.3.2 Synthèse d'observateur avec $m_1 = p$

Nous allons reprendre la synthèse à partir du modèle (4.35) -(4.36). Comme nous l'avons mentionné précédemment, x_1^1 et $G_1^1(u, s)$ coïncident maintenant respectivement avec x^1 et $G^1(u, s)$ et les variables \bar{x}_1^2 et $\Upsilon_1^2(u, s)$ sont à omettre du système (4.35) - (4.36) qui prend alors la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^1 = \bar{f}^1(u, \bar{x}_1^1, \bar{X}) + \bar{G}^1(u, s)\bar{x}^1 + \bar{\varepsilon}(t) \\ y = \bar{x}^1 \end{cases} \quad (4.101)$$

$$\dot{\bar{X}} = \bar{f}_{\bar{X}}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{X}) + \dot{\Upsilon}_{\bar{X}}^2(u, s)\bar{x}_1^1 \quad (4.102)$$

où $\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_1^1 = x^1$, $\bar{x}_2^1 = v$; $\bar{f}^1(u, \bar{x}_1^1, \bar{X}) \triangleq \begin{pmatrix} f^1(u, x) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{G}^1(u, s) \triangleq \begin{pmatrix} 0 & G^1(u, s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

et \bar{X} et $\bar{f}_{\bar{X}}$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= X - \Upsilon_X^2(u, s)x^1 \\ \bar{f}_{\bar{X}}(u, s, \bar{x}_1^1, \bar{X}) &= f_X(u, x) - \Upsilon_X^2(u, s)f^1(u, x) \end{aligned}$$

où la matrice $\Upsilon_X^2(u, s)$ est donnée par (4.31).

Comme dans le cas où $m_1 < p$, le système (4.101) est observable puisque $G^1(u, s)$ est de rang plein. En revanche, le système (4.102) ne possède pas de sortie. Nous avons donc besoin de la condition de détectabilité suivante pour la synthèse d'un observateur. En effet, en plus des hypothèses (H1) et (H2), nous adoptons l'hypothèse suivante

(H3') Il existe une matrice Symétrique Définie Positive $P(t)$ tel que :

(i) $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0; \forall t \geq 0 :$

$$\alpha_1 I_{n-p} \leq P(t) \leq \alpha_2 I_{n-p} \quad (4.103)$$

(ii) $\exists \alpha_3 > 0; \forall u \in U; \forall x^1 \in \mathbb{R}^p; \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-p} :$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + P(t) \left(\frac{\partial f_X}{\partial X}(u, x^1, \xi) - \Upsilon_X^2(u, s) \frac{\partial f^1}{\partial X}(u, x^1, \xi) \right) + \\ \left(\frac{\partial f_X}{\partial X}(u, x^1, \xi) - \Upsilon_X^2(u, s) \frac{\partial f^1}{\partial X}(u, x^1, \xi) \right)^T P(t) \leq -\alpha_3 I_{n-p} \end{aligned} \quad (4.104)$$

Notons que, la condition (4.104) est intentionnellement donnée dans les coordonnées originales en x , ce qui simplifie sa vérification dans ce système de coordonnées à partir du système (4.28). Elle peut s'écrire dans le système de coordonnées \bar{x} comme suit

(ii) $\exists \alpha_3 > 0; \forall u \in U; \forall \bar{x}_1^1 \in \mathbb{R}^p; \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-p} :$

$$\dot{P}(t) + P(t) \left(\frac{\partial \bar{f}_{\bar{X}}}{\partial \bar{X}}(u, \bar{x}_1^1, \xi) \right) + \left(\frac{\partial \bar{f}_{\bar{X}}}{\partial \bar{X}}(u, \bar{x}_1^1, \xi) \right)^T P(t) \leq -\alpha_3 I_{n-p} \quad (4.105)$$

L'observateur que nous proposons pour les systèmes (4.101)-(4.102) se présente comme suit

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^1 &= \bar{f}^1(u, \bar{x}_1^1, \hat{X}) + \bar{G}^1(u, s) \hat{x}^1 - \theta_1 \Lambda_1^+(u, s) \Delta_1^{-1}(\theta_1) S_1^{-1} C_1^T (\hat{x}_1^1 - \bar{x}_1^1) \\ \dot{\hat{X}} &= \bar{f}_{\bar{X}}(u, s, \bar{x}_1^1, \hat{X}) + \Upsilon_X^2(u, s) \bar{x}_1^1 \end{cases} \quad (4.106)$$

où $\hat{x}^1 = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^1 \\ \hat{x}_2^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+m}$, $\hat{x}_1^1 \in \mathbb{R}^p$, $\hat{x}_2^1 \in \mathbb{R}^m$; $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n-p}$, Δ_1 et S_1 sont respectivement donnés par (4.60) et (4.61) avec $\theta_1 > 0$ un nombre réel et

$$\Lambda_1(u, s) = \text{diag}(I_p, G^1(u, s)) \quad (4.107)$$

Nous énonçons maintenant le théorème suivant

Théorème 4.4. *Supposons que les systèmes (4.101)-(4.102) satisfont les hypothèses (H1), (H2) et (H3'), alors,*

(i) $\exists \sigma > 0; \forall u \in U; \forall \hat{e}^2(0) \in \mathbb{R}^{n-m};$ on a : $\|e^2(t)\| \leq \sigma \exp(-\alpha_3 t) \|e^2(0)\|$

(ii) $\exists \theta_{1,0} > 0; \exists \lambda_1 > 0; \exists \lambda_2 > 0; \forall \theta_1 > \theta_{1,0}; \exists \mu(\theta_1) > 0; \exists M(\theta_1) > 0; \forall u \in U;$
 $\forall e^1(0) \in \mathbb{R}^{p+m}; \forall e^2(0) \in \mathbb{R}^{n-m};$ on a,

$$\|e^1(t)\| \leq \lambda_1 \theta_1 \exp(-\mu(\theta_1)t) \|e^1(0)\| + \lambda_2 \exp(-\alpha_3 t) \|e^2(0)\| + M(\theta_1) \beta_\varepsilon$$

où $e^1(t) = \hat{x}^1(t) - \bar{x}^1(t)$ et $e^2(t) = \hat{X}(t) - \bar{X}(t)$ où $\bar{x}^1(t)$ et \bar{X} sont les trajectoires inconnues des systèmes (4.101), (4.102) associées à l'entrée u et à la sortie y et $\begin{pmatrix} \hat{x}^1(t) \\ \hat{X}(t) \end{pmatrix}$ sont des trajectoires quelconques du système (4.106); β_ε est la borne de $\|\varepsilon(t)\|$ donnée dans l'hypothèse (H2) et α_3 est donné par hypothèse (H3'). De plus, on a $\lim_{\theta_1 \rightarrow \infty} M(\theta_1) = 0$

Remarques 4.2. 1) Comme pour le Théorème 4.3 énoncé pour le cas $m_1 < p$, le Théorème 4.4 stipule que pour des entrées inconnues constantes (i.e. $\varepsilon(t) = 0$), l'erreur asymptotique d'estimation converge vers zéro de manière exponentielle. Dans le cas où $\|\varepsilon(t)\| \neq 0$ mais est bornée par β_ε , cette erreur reste dans une boule dont le rayon est d'autant plus petit que β_ε . De plus, ce rayon peut être rendu aussi petit que désiré par le choix de valeurs suffisamment grandes de θ_1 .

2) Si la matrice $G(u, s)$ est constante, l'implantation d'observateur (4.106) ne nécessite pas le calcul de la dérivée de l'entrée u ni celle de la sortie y . Nous pouvons donc implanter directement cet observateur sans revenir aux coordonnées originales. Les estimés \hat{x} et \hat{v} des variables originales x et v peuvent être obtenues à partir de l'inverse de la matrice T donnée par (4.34) et nous aurons donc

$$\hat{v} = \hat{x}_2^1$$

$$\hat{X} = \hat{X} + \Upsilon_X^2(u, s)\hat{x}_1^1$$

Preuve de Théorème 4.4 :

Cette preuve est très similaire à celle du théorème (4.3). En effet, considérons le changement de coordonnées suivant,

• $\Phi_1 : \mathbb{R}^{p+m} \rightarrow \mathbb{R}^{2p}$

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 \\ \bar{x}_2^1 \end{pmatrix} \mapsto z^1 = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} = \Phi_1(u, s, \bar{x}^1) \triangleq \Lambda_1(u, s)\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1^1 \\ G^1(u, s)\bar{x}_2^1 \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$z_k^1 \in \mathbb{R}^p$, $k = 1, 2$ et $\Lambda_1(u, s)$ est donné par (4.107).

Ce changement de coordonnées transforme les systèmes (4.101) - (4.102) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{z}^1 &= A_1 z^1 + \psi^1(u, s, z^1, \bar{X}) + \Lambda_1(u, s)\bar{\varepsilon}(t) \\ y &= C_1 z^1 = z_1^1 \\ \dot{\bar{X}} &= \bar{f}_{\bar{X}}(u, s, z_1^1, \bar{X}) + \dot{\Upsilon}_{\bar{X}}^2(u, s)z_1^1 \end{cases} \quad (4.108)$$

En procédant comme dans le cas où $m_1 < p$, on peut montrer que l'observateur (4.106) peut s'écrire dans les nouvelles coordonnées en z sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}^1 &= A_1 \hat{z}^1 + \psi^1(u, s, \hat{z}^1, \hat{X}) - \theta_1 \Delta_1^{-1}(\theta_1) S_1^{-1} C_1^T (\hat{z}_1^1 - z_1^1) \\ \dot{\hat{X}} &= \bar{f}_{\bar{X}}(u, s, z_1^1, \hat{X}) + \dot{\Upsilon}_{\bar{X}}^2(u, s)z_1^1 \end{cases} \quad (4.109)$$

où $\hat{z}^1 = \begin{bmatrix} \hat{z}_1^1 \\ \hat{z}_2^1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2p}$; $\hat{z}_i^1 \in \mathbb{R}^p$, $i = 1, 2$; $\hat{x}^2 \in \mathbb{R}^{n-p}$.

Il suffit donc de démontrer le théorème en considérant l'erreur d'observation associée aux variables du système (4.108) et de l'observateur (4.109).

Posons ensuite les notations suivante,

$e^1 = \hat{z}^1 - z^1$, $\bar{e}^1 = \Delta_1(\theta_1)e^1$, $e^2 = \bar{e}^2 = \hat{X} - \bar{X}$; $e = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix}$, $V_1(\bar{e}^1) = \bar{e}^{1T} S_1 \bar{e}^1$, $V_2(\bar{e}^2) = \bar{e}^{2T} P(t) \bar{e}^2$; où $P(t)$ est donnée par l'hypothèse (H3') et soit $V(\bar{e}^1, \bar{e}^2) = V_1(\bar{e}^1) + V_2(\bar{e}^2)$ la fonction de Lyapunov candidate.

Par application du Théorème de la valeur moyenne, nous avons

$$\dot{\bar{e}}^2 = \frac{\partial \bar{f}_{\bar{X}}}{\partial \bar{X}}(u, s, z_1^1, \xi^2) \bar{e}^2 \quad (4.110)$$

Par l'hypothèse (H3'), nous obtenons

$$\dot{V}_2 \leq -\alpha_3 V_2 \quad (4.111)$$

ou de manière équivalente

$$\|e^2(t)\| \leq \sigma \exp\left(-\frac{\alpha_3}{2}t\right) \|e^2(0)\| \quad (4.112)$$

où $\sigma = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

D'autre part, en procédant comme dans la preuve du théorème (4.3), nous pouvons établir l'inégalité suivante

$$\dot{V}_1 \leq -(\theta_1 - c_1)V_1 + c_2 \sqrt{V_1} \sqrt{V_2} + \frac{c_3 \beta_\varepsilon}{\theta_1} \sqrt{V_1} \quad (4.113)$$

où $c_1, c_2, c_3 > 0$ sont des nombres réels qui ne dependent pas de θ_1 .

On en déduit

$$\begin{aligned} \sqrt{V_1} &\leq \exp\left[-\frac{(\theta_1 - c_1)t}{2}\right] \sqrt{V(\bar{e}^1(0))} + \frac{c_2 \sigma}{(\theta_1 - c_1 - \alpha_3)} \\ &\quad \left(\exp\left(-\frac{\alpha_3 t}{2}\right) - \exp\left(-\frac{(\theta_1 - c_1)t}{2}\right)\right) \|e^2(0)\| \\ &\quad + \frac{c_3}{\theta_1(\theta_1 - c_1)} \beta_\varepsilon \left(1 - \exp\left(-\frac{(\theta_1 - c_1)t}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Choisissons maintenant $\theta_1 > 1 + c_1 + \alpha_3$, on obtient

$$\sqrt{V_1} \leq \exp\left[-\frac{(\theta_1 - c_1)t}{2}\right] \sqrt{V_1(\bar{e}^1(0))} + c_2\sigma \exp\left(-\frac{\alpha_3 t}{2}\right) \|e^2(0)\| + \frac{c_3}{\theta_1(\theta_1 - c_1)} \beta_\varepsilon$$

Nous utilisons maintenant le fait que

$$\|\bar{e}^1(t)\| \leq \|e^1(t)\| \leq \theta_1 \|\bar{e}^1(t)\|$$

On obtient

$$\|e^1(t)\| \leq \frac{\lambda_{\max}(S_1)}{\lambda_{\min}(S_1)} \theta_1 \exp\left[-\frac{(\theta_1 - c_1)t}{2}\right] \|e^1(0)\| + \theta_1 \frac{c_2\sigma}{\lambda_{\min}(S_1)} \exp\left(-\frac{\alpha_3 t}{2}\right) \|e^2(0)\| + \frac{c_3}{\lambda_{\min}(S_1)(\theta_1 - c_1)} \beta_\varepsilon$$

Les paramètres σ , $\theta_{1,0}$, λ_1 , λ_2 et $\mu(\theta_1)$ et $M_1(\theta_1)$ du théorème sont donnés par :

$$\sigma = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \quad \theta_{1,0} = 1 + c_1 + \alpha_3, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_{\max}(S_1)}{\lambda_{\min}(S_1)}, \quad \lambda_2 = \frac{c_2\sigma}{\lambda_{\min}(S_1)}$$

$$\mu(\theta_1) = \frac{(\theta_1 - c_1)t}{2}, \quad M_1(\theta_1) = \frac{c_3}{\lambda_{\min}(S_1)(\theta_1 - c_1)}$$

Ceci termine la preuve du Théorème 4.4.

Nous allons maintenant générer les équations de l'observateur (4.106) dans les coordonnées originales en x .

4.3.2.1 Equations de l'observateur dans les coordonnées originales

Lorsque la matrice G n'est pas constante, l'implantation de l'observateur (4.106) nécessite le calcul des dérivées par rapport au temps de l'entrée u et de la sortie y . Pour éviter un tel calcul, nous allons générer les équations de cet observateur dans les coordonnées originales en x .

Posons $D(u, s) = \begin{bmatrix} I_p \\ \Upsilon_X^2(u, s) \end{bmatrix}$. En procédant comme dans le cas $m_1 < p$, on peut montrer que l'observateur (4.106) peut s'écrire dans les coordonnées originales en x sous la forme condensée suivante

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(u, \hat{x}^1, \tilde{X}) + G(u, s)\hat{v} - 2\theta_1 D(u, s)(\hat{x}^1 - x^1) \\ \dot{\hat{v}} &= -\theta_1^2 (G^1(u, s))^+(\hat{x}^1 - x^1) \end{cases} \quad (4.114)$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{X} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}^1 \in \mathbb{R}^p$, $\hat{X} \in \mathbb{R}^{n-p}$, $\tilde{X} = \hat{X} - \Upsilon_X^2(u, s)(\hat{x}^1 - x^1)$ et $\hat{v} \in \mathbb{R}^m$.

4.4 Exemple

Dans ce paragraphe, nous allons d'illustrer l'approche proposée en simulation à travers un exemple satisfaisant les hypothèses (H1) à (H4) et où le nombre d'entrées inconnues est strictement inférieur aux nombres de sorties. Le dernier chapitre est entièrement consacré à l'utilisation des observateurs à entrées inconnues dans les procédés biochimiques où le nombre d'entrées inconnues est souvent égal aux nombre de sorties.

On considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - x_3)x_4 - x_3v(t) - x_1 \\ \dot{x}_2 = x_3x_4 + (a - x_3)v(t) - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4(1 + x_4^2) - x_3^3 - 10\sin(t)v(t) \\ \dot{x}_4 = x_5 - x_4^3 - 2\cos(t)v(t) \\ \dot{x}_5 = 5\sin(2t)v(t) \\ y = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \end{cases} \quad (4.115)$$

où $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T \in \mathbb{R}^5$ avec $x_i \in \mathbb{R}$, $v(t)$ est l'entrée inconnue et a est un nombre réel quelconque non nul. Pour simplifier, aucune entrée connue n'est considérée.

Dans cet exemple, nous avons $p = 3$ et $m = 1$. La matrice G^1 est :

$$G^1 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ a - x_3 \\ -10\sin(t) \end{pmatrix}$$

On remarque que la plus petite sous-matrice de G^1 qui soit de rang égal à 1 pour tout $t \geq 0$ est la matrice suivante :

$$G_1^1 = \begin{pmatrix} -x_3 \\ a - x_3 \end{pmatrix} \quad (4.116)$$

Ce qui induit les partitions suivantes de x , f et G :

$$\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}; x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}; x_1^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; x_2^1 = x_3; x^2 = x_2; x^3 = x_5 \\
f(x) &= \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2) \\ f^2(x) \\ f^3(x) \end{pmatrix}; f^1(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} f_1^1(x^1, x^2) \\ f_2^1(x^1, x^2) \end{pmatrix} \\
f_1^1(x^1, x^2) &= \begin{pmatrix} (a - x_3)x_4 - x_1 \\ x_3x_4 - x_2 \end{pmatrix}; f_2^1(x^1, x^2) = x_4(1 + x_4^2) - x_3^3; f^2(x) = x_5 - x_4^3, f^3(x) = 0 \\
G &= \begin{pmatrix} G_1^1 \\ G_2^1 \\ G^2 \\ G^3 \end{pmatrix}; G_2^1(s(t)) = -10\sin(t); G^2(s(t)) = -2\cos(t); G^3(s(t)) = 5\sin(2t)
\end{aligned}$$

Ainsi $x^1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x^2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ et $x^3 \in \mathbb{R}^{n_3}$ avec $n_1 = 3$ et $n_2 = n_3 = 1$.

L'hypothèse (H1) étant vérifiée et l'entrée inconnue est supposée satisfaire l'hypothèse (H2), il reste à vérifier les hypothèses (H3) et (H4). Nous commençons par vérifier (H3), ensuite (H4).

• Vérification de (H3) : Nous avons :

$$\begin{aligned}
\text{Rang} \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x) &\stackrel{\Delta}{=} \text{Rang} \frac{\partial f^1}{\partial x_4}(u, x) \\
&= \text{Rang} \begin{pmatrix} (a - x_3) \\ x_3 \\ 1 + 3x_4^2 \end{pmatrix} \\
&= 1 \quad \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R} \\
&= n_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Rang} \frac{\partial f^2}{\partial x^3}(u, x) &\stackrel{\Delta}{=} \text{Rang} \frac{\partial f^2}{\partial x_5}(u, x) \\
&= 1 \\
&= n_3
\end{aligned}$$

L'hypothèse (H3) est donc satisfaite.

- Vérification de (H4) : Nous avons :

$$\begin{aligned}
\text{Rang} \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}(u, x^1, x^2) \quad G_1(u, s) \right) &= \text{Rang} \begin{pmatrix} a - x_3 & -x_3 \\ x_3 & a - x_3 \\ 1 + 3x_4^2 & -10\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \text{Rang} \begin{pmatrix} a - x_3 & -x_3 \\ x_3 & a - x_3 \end{pmatrix} \\
&= 2 \\
&= n_2 + m
\end{aligned}$$

L'hypothèse (H4) étant également satisfaite, on peut utiliser un observateur de type (4.100) pour l'estimation des états non mesurés x_4 et x_5 ainsi que l'entrée inconnue v . Les équations de cet observateur sont :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{x}}_1 = (a - \hat{x}_3)\hat{x}_4 - \hat{x}_3\hat{v}(t) - \hat{x}_1 - 2\theta(\hat{x}_1 - x_1) \\
\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3\hat{x}_4 + (a - \hat{x}_3)\hat{v}(t) - \hat{x}_2 - 2\theta(\hat{x}_2 - x_2) \\
\dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_4(1 + \hat{x}_4^2) - \hat{x}_3^3 - 10\sin(t)\hat{v}(t) \\
\quad - 3\theta_2(\hat{x}_3 - x_3) + \frac{20\theta_1\sin(t)}{(a - x_3)^2 + x_3^2}(-x_3(\hat{x}_1 - x_1) + (a - x_3)(\hat{x}_2 - x_2)) \\
\dot{\hat{x}}_4 = \hat{x}_5 - \hat{x}_4^3 - 2\cos(t)\hat{v}(t) - 3\frac{\theta_2^2}{1 + 3\tilde{x}_4^2}(\hat{x}_3 - x_3) \\
\quad + \frac{4\theta_1\cos(t)}{(a - x_3)^2 + x_3^2}(-x_3(\hat{x}_1 - x_1) + (a - x_3)(\hat{x}_2 - x_2)) \\
\dot{\hat{x}}_5 = 5\sin(2t)\hat{v}(t) - \frac{\theta_2^2}{1 + 3\tilde{x}_4^2}(\hat{x}_3 - x_3) \\
\quad - \frac{10\theta_1\sin(2t)}{(a - x_3)^2 + x_3^2}(-x_3(\hat{x}_1 - x_1) + (a - x_3)(\hat{x}_2 - x_2)) \\
\dot{\hat{v}}(t) = -\frac{\theta^2}{(a - x_3)^2 + x_3^2}(-x_3(\hat{x}_1 - x_1) + (a - x_3)(\hat{x}_2 - x_2)) \\
\tilde{x}_4 = \hat{x}_4 - \frac{4\cos(t)}{(a - x_3)^2 + x_3^2}(-x_3(\hat{x}_1 - x_1) + (a - x_3)(\hat{x}_2 - x_2))
\end{array} \right.$$

4.4.1 Résultats de simulation

Les performances de l'observateur ont été testées en simulation dans l'environnement Matlab-Simulink. Pour se rapprocher du cas réel, un bruit additif centré de type gaussien d'écart-type 10^{-2} a été ajouté à chacune des sorties x_1 , x_2 et x_3 (cf. figure 4.1). De plus, l'expression suivante pour l'entrée inconnue $v(t)$ a été considérée lors de la simulation du modèle (4.115) :

$$v(t) = 5\sin(5t) \quad (4.117)$$

Notons que cette expression est inconnue par l'observateur.

La valeur du paramètre a utilisée en simulation est 0.5 et les conditions initiales du modèle et de l'observateur sont les suivantes :

$$x_1(0) = \hat{x}_1(0) = 1; x_2(0) = \hat{x}_2(0) = 1; x_3(0) = \hat{x}_3(0) = 1$$

$$x_4(0) = 2; x_5(0) = 10; \hat{x}_4(0) = 0; \hat{x}_5(0) = 0; \hat{v}(0) = -1$$

Enfin les valeurs des paramètres de synthèse θ_1 et θ_2 sont respectivement 100 et 15.

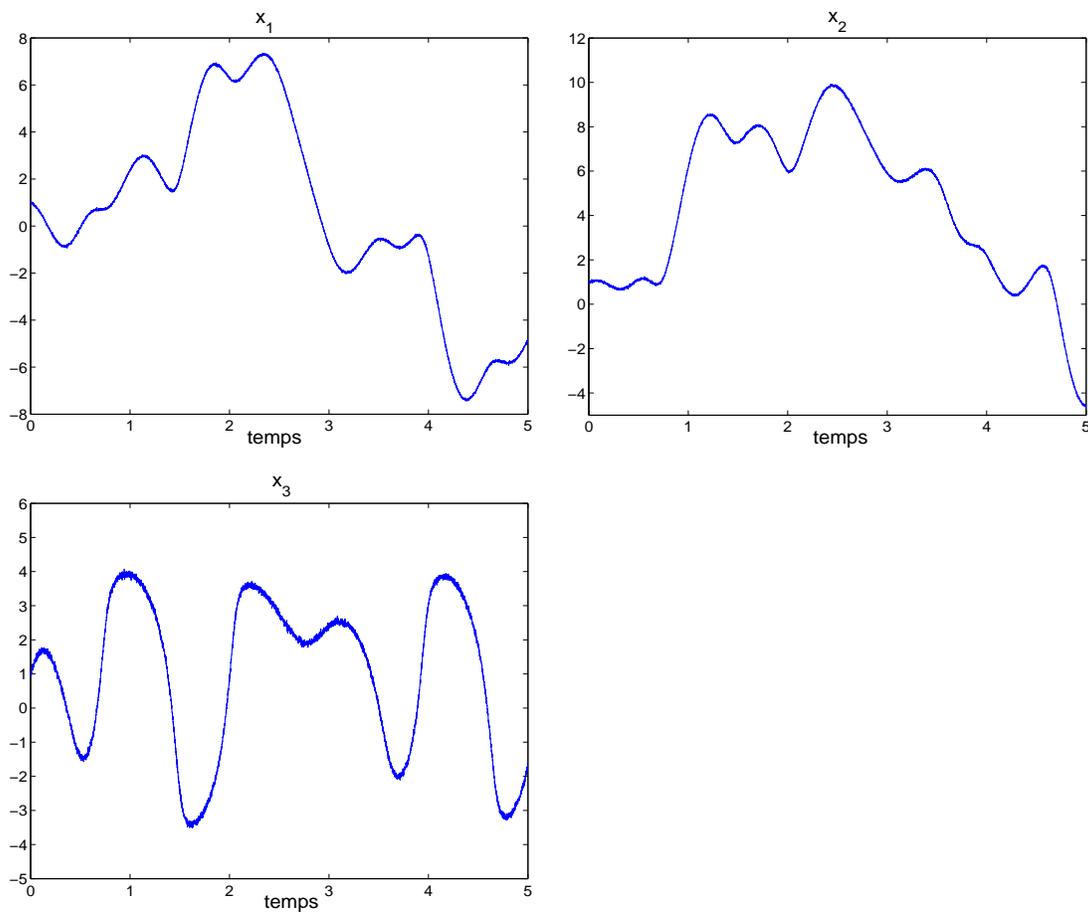
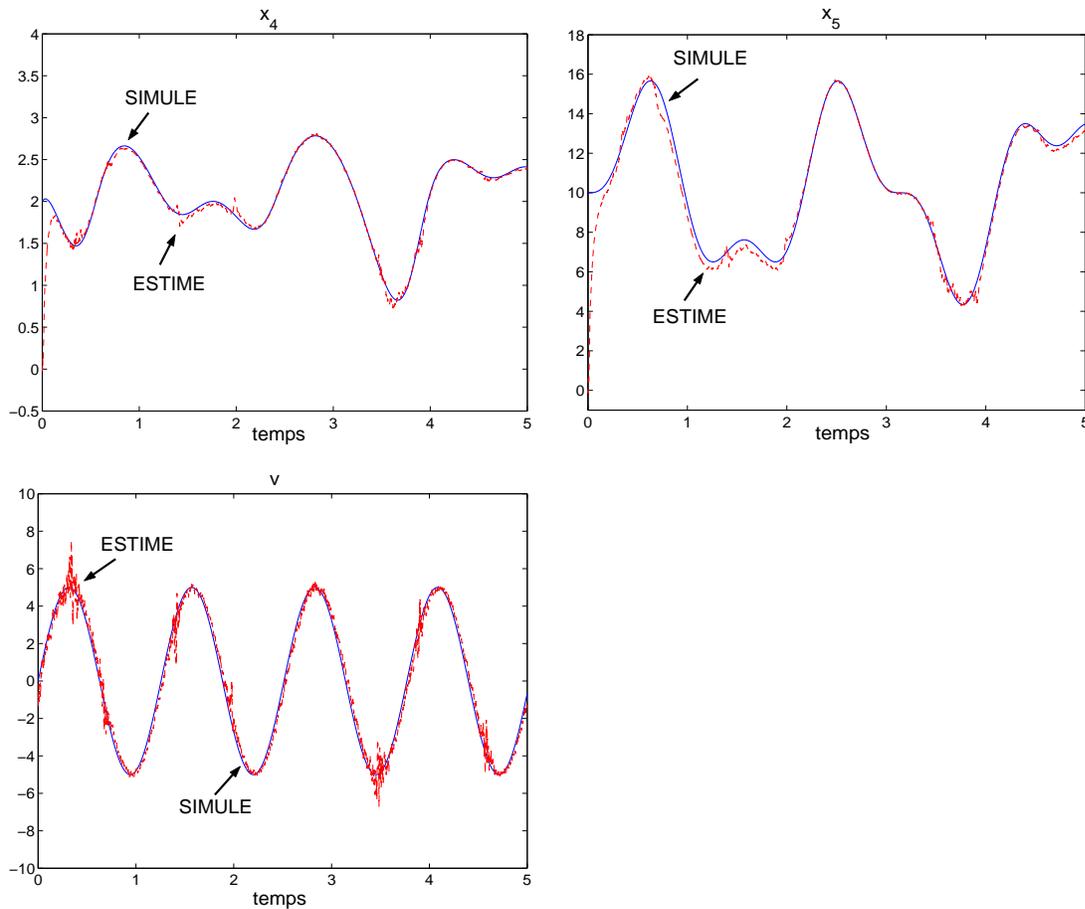


FIG. 4.1 – Mesures bruitées de x_1 , x_2 et x_3

FIG. 4.2 – Estimation de x_4 , x_5 et v

Les résultats d'estimation sont présentés dans la figure 4.2 où les estimations de x_4 , x_5 et v sont comparées avec leurs vraies valeurs (issues de la simulation du modèle). On note la bonne qualité d'estimation aussi bien pour les états que pour l'entrée inconnue. Rappelons que l'expression de cette dernière (équation (4.117)) est inconnue par l'observateur.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un observateur de type grand gain permettant l'estimation conjointe de tout l'état et de toutes les entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires multi-sorties. La synthèse de cet observateur s'est effectuée sous certaines conditions suffisantes qui découlent directement des conditions nécessaires et suffisantes bien établies pour les systèmes linéaires. D'ailleurs, nous sommes revenus sur ces conditions nécessaires et suffisantes pour en donner une reformulation plus précise lorsque le nombre de sorties est égal au nombre d'entrées inconnues.

Notons que les conditions proposées peuvent être relâchées si l'on se permet de calculer les dérivées par rapport au temps des sorties et/ou des entrées connues pour exprimer les variables non mesurées (que ce soit l'état ou l'entrée inconnue) ([BFF07]). On peut aussi les relâcher si la synthèse d'un observateur de l'état sans l'adoption d'aucune hypothèse sur l'entrée inconnue n'est plus fixée comme objectif ([FMR04]). Dans notre travail, ces conditions ont été adoptées pour faire la synthèse d'observateurs en l'absence ou non d'hypothèse(s) sur les entrées inconnues, et en n'utilisant aucune dérivée d'entrée connue ou de sortie pour l'estimation des variables.

Les performances de l'observateur proposé ont été illustrées en simulation à travers un exemple académique lorsque le nombre de sorties est supérieur au nombre d'entrées inconnues. Les performances des observateurs proposés lorsque le nombre de sorties est égal au nombre d'entrées inconnues seront illustrées au chapitre 6 à travers deux exemples traitant d'un bioréacteur et d'un réacteur chimique.

On notera que pour la classe de système considérée, les expressions des sorties du système sont indépendantes des entrées inconnues. Le cas où ces expressions dépendent des entrées inconnues est traité au chapitre suivant.

Observateurs avec entrées inconnues affectant la sortie

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la synthèse d'observateurs à entrées inconnues lorsque celles-ci interviennent dans l'expression de la sortie.

Ce problème a été abordé dans plusieurs travaux où les systèmes non linéaires considérés se composent d'une partie linéaire exploitée pour la synthèse du gain de l'observateur et d'une partie non linéaire satisfaisant certaines hypothèses plus ou moins restrictives [LH99, BDR02, HT04].

Avant de présenter la classe de systèmes non linéaires qui sera considérée ainsi que les observateurs proposés, nous proposons comme au chapitre précédent, de rappeler les conditions nécessaires et suffisantes pour la synthèse de tel observateur pour les systèmes linéaires. Nous rappelons que ces conditions sont données pour que la synthèse puisse se faire sans aucune connaissance sur les entrées inconnues.

5.2 Rappels sur la synthèse pour les systèmes linéaires

On considère le système linéaire temps invariant suivant :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Gv \\ y = Cx + Dv \end{cases} \quad (5.1)$$

où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, l'entrée connue $u \in \mathbb{R}^\mu$, l'entrée inconnue $v \in \mathbb{R}^m$, la sortie $y \in \mathbb{R}^p$, A , G , D et C sont des matrices constantes connues de dimensions appropriées et la matrice D est supposée être de rang plein en colonnes, c'est-à-dire

$$\text{Rang}(D) = m \quad (5.2)$$

On remarque que, comme les entrées connues n'interviennent pas dans la synthèse de l'observateur, seules les entrées inconnues sont considérées par le système (5.1).

Un observateur à entrées inconnues existe pour ce système si et seulement si ce système est à minimum de phase (cf e.g. [BDR02]), i.e.

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - A & -G \\ C & D \end{pmatrix} = n + \text{Rang} \begin{pmatrix} G \\ D \end{pmatrix} = n + m \quad \forall s \in \mathcal{C}, \text{Re}(s) \geq 0 \quad (5.3)$$

Nous proposons dans ce qui suit de donner quelques développements permettant de montrer comment ces conditions sont obtenues. Ces développements nous serviront surtout à apporter quelques compléments sur la synthèse de l'observateur dans les deux cas : le cas où le nombre d'entrées inconnues est égal au nombre de sorties et le cas où il y a plus de sorties que d'entrées inconnues.

Dans ce qui suit la matrice d'observation C est simplement supposée être de rang plein en lignes sans être nécessairement sous la forme particulière (4.3).

Nous commençons par traiter le cas où le nombre de sorties est égal au nombre d'entrées inconnues, i.e. $p = m$. Dans ce cas la matrice D est carrée et est inversible. Nous traiterons ensuite le cas où il y a plus de sorties que d'entrées inconnues.

• Cas 1 : $m = p$:

L'objectif consiste à synthétiser un observateur qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{z} = Nz + Ly \\ \hat{x} = z - Ey \end{cases} \quad (5.4)$$

où l'état de l'observateur $z \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'estimé de l'état du système x , $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont des matrices qu'il faut choisir de sorte que l'erreur d'observation $e = \hat{x} - x$ converge asymptotiquement vers 0.

Pour ce faire, posons

$$P = I_n + EC \quad (5.5)$$

L'erreur d'observation s'écrit alors

$$\begin{aligned} e &= \hat{x} - x \\ &= z - Ey - x \\ &= z - E(Cx + Dv) - x \\ &= z - (I_n + EC)x - EDv \\ &= z - Px - EDv \end{aligned}$$

Comme la synthèse de l'observateur doit se faire sans l'adoption d'hypothèse sur l'entrée inconnue v , en particulier cette entrée peut ne pas être dérivable, une condition nécessaire à l'existence de l'observateur est :

$$ED = 0 \quad (5.6)$$

L'unique solution de l'équation (5.6) est $E = 0$ et la matrice P est alors égale à la matrice identité $n \times n$, I_n .

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{z} - \dot{x} \\ &= Nz + Ly - Ax - Gv \\ &= N(e + x) + L(Cx + Dv) - Ax - Gv \\ &= Ne + (N - A + LC)x + (LD - G)v \end{aligned} \quad (5.7)$$

Si les matrices N et L sont choisies de sorte que les conditions suivantes sont satisfaites

$$N - A + LC = 0 \quad (5.8)$$

$$LD - G = 0 \quad (5.9)$$

alors l'équation (4.10) devient

$$\dot{e} = Ne$$

L'erreur d'observation qui est la solution du système (5.10) converge asymptotiquement vers zéro si et seulement si la matrice N est une matrice Hurwitz. Mais l'expression de la matrice est imposée par les équations (5.8) et (5.9). En effet, à partir de ces équations, la matrice N peut s'exprimer comme suit :

$$N = A - GD^{-1}C \quad (5.10)$$

Nous résumons ce résultat au sein du théorème suivant,

Théorème 5.1. *On suppose que $p = m$. Le système (5.1) admet un observateur si et seulement si la matrice $N = A - GD^{-1}C$ est stable et les pôles de l'observateur sont les valeurs propres de cette matrice.*

Il est bien connu que les pôles de la matrice N donnée par (5.10) sont les zéros du système (5.1). Le théorème 5.1 stipule donc qu'une condition nécessaire et suffisante pour la synthèse d'un observateur pour le système (5.1) est qu'il soit à minimum de phase, c'est-à-dire que tous ses zéros soient stables. Les pôles de l'observateur sont égaux à ces zéros.

Nous énonçons maintenant le théorème suivant :

Théorème 5.2. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *La matrice $N = A - GD^{-1}C$ est stable.*
- 2) $\text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - A & -G \\ C & D \end{pmatrix} = n + m \quad \forall s \in \mathcal{C}, \mathcal{R}e(s) \geq 0.$

Preuve du Théorème 5.2 : posons

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_m \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Nous avons :

- $\text{Rang}(M) = n + m$
- $\begin{pmatrix} sI_n - A & -G \\ C & D \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} sI_n - N & -G \\ 0 & D \end{pmatrix}.$

On en déduit que

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - N & -G \\ 0 & D \end{pmatrix} = n + m \quad \forall s \in \mathcal{C}, \mathcal{R}e(s) \geq 0 \quad (5.12)$$

Mais nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - N & -G \\ 0 & D \end{pmatrix} &= \text{Rang}(sI_n - N) + \text{Rang}D \\ &= \text{Rang}(sI_n - N) + m \quad \forall s \in \mathcal{C}, \mathcal{R}e(s) \geq 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

d'où

$$\text{Rang}(sI_n - N) = n \quad \forall s \in \mathcal{C}, \mathcal{R}e(s) \geq 0 \quad (5.14)$$

c'est-à-dire que la matrice N est stable.

ceci termine la preuve du théorème 5.2.

- Cas 2 : $m < p$:

On suppose que la matrice D s'écrit sous la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

où D_1 est une matrice carrée inversible d'ordre m et D_2 est une matrice $(p - m) \times m$. Notons que ceci est toujours possible modulo un réarrangement des sorties puisque la matrice D est de rang plein, m . Soit maintenant

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

la partition de la matrice C issue de celle de D sous la forme (5.15).

Nous effectuons maintenant le changement de sorties suivant :

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= y_1 \\ &= C_1x + D_1v\end{aligned}\tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}_2 &= y_2 - D_2D_1^{-1}y_1 \\ &= C_2x + D_2v - D_2D_1^{-1}(C_1x + D_1v) \\ &= (C_2 - D_2D_1^{-1}C_1)x\end{aligned}\tag{5.18}$$

Il est clair que l'entrée inconnue, v , peut s'exprimer en fonction de la sortie y et de x comme suit

$$v = D_1^{-1}(\bar{y}_1 - C_1x)\tag{5.19}$$

On remarque que l'objectif cherché derrière le changement de sorties opéré consiste à générer une nouvelle sortie, \bar{y}_2 , dont l'expression ne dépend pas de l'entrée inconnue.

En utilisant l'expression de v et en utilisant les nouvelles sorties \bar{y}_1 et \bar{y}_2 , nous pouvons générer à partir du système (5.1) le système dynamique suivant

$$\bar{\Sigma} \begin{cases} \dot{x} = (A - GD_1^{-1}C_1)x + GD_1^{-1}\bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 = (C_2 - D_2D_1^{-1}C_1)x \end{cases}\tag{5.20}$$

Nous énonçons maintenant le résultat suivant :

Théorème 5.3. *Le système (5.20) est détectable si et seulement si le système (5.1) est à minimum de phase.*

Preuve du théorème 5.3 : Posons

$$\begin{aligned}Q &= \begin{pmatrix} I_n & GD_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -D_2D_1^{-1} & I_{m-p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_n & GD_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_{m-p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -D_2D_1^{-1} & I_{m-p} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nous avons donc $\text{Rang}Q = n + p$. Comme $m < p$, Si l'on suppose que le système (5.1) est à minimum de phase., on obtient

$$\text{Rang} \left(Q \cdot \begin{pmatrix} sI_n - A & -G \\ C & D \end{pmatrix} \right) = n + m \quad \forall s \in \mathcal{C}, \text{Re}(s) \geq 0\tag{5.21}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}
\text{Rang} \left(Q \cdot \begin{pmatrix} sI_n - A & -G \\ C & D \end{pmatrix} \right) &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} I_n & GD_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -D_2D_1^{-1} & I_{m-p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} sI_n - A & -G \\ C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - A + GD_1^{-1}C_1 & 0 \\ C_1 & D_1 \\ C_2 - D_2D_1^{-1}C_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - A + GD_1^{-1}C_1 \\ C_2 - D_2D_1^{-1}C_1 \end{pmatrix} + \text{Rang} D_1 \\
&= \text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - A + GD_1^{-1}C_1 \\ C_2 - D_2D_1^{-1}C_1 \end{pmatrix} + m \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Combinant (5.21) et (5.22), on déduit

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - A + GD_1^{-1}C_1 \\ C_2 - D_2D_1^{-1}C_1 \end{pmatrix} = n \quad \forall s \in \mathcal{C}, \text{Re}(s) \geq 0 \tag{5.23}$$

c'est-à-dire que la paire $(A - GD_1^{-1}C_1, C_2 - D_2D_1^{-1}C_1)$ est détectable.

Ceci termine la preuve du Théorème 5.3.

Il est clair que si l'égalité (5.22) est vérifiée pour tous les complexes $s \in \mathcal{C}$, il en sera de même pour l'égalité (5.22) et la paire $(A - GD_1^{-1}C_1, C_2 - D_2D_1^{-1}C_1)$ est alors observable.

Dans ce qui suit nous allons considérer une classe de systèmes non linéaires et nous allons proposer certaines conditions suffisantes qui permettent la synthèse d'un observateur.

5.3 Classe des systèmes non linéaires considérée

Soit une classe de MIMO systèmes non linéaires considérée,

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(u, s, x, v) \\ y &= h(u, x) + W(u, s)v \end{cases} \tag{5.24}$$

où les états $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $x^1 \in \mathbb{R}^p$, $X \in \mathbb{R}^{n-p}$, l'entrée connue $u(t) \in \mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions absolument continues à dérivées bornées de \mathbb{R}^+ dans U un compact de \mathbb{R}^μ ; la sortie $y \in \mathbb{R}^p$; $v \in \mathbb{R}^m$ avec $m \leq p$ est l'entrée inconnue du système; $f(u, s, x, v) = \begin{pmatrix} f^1(u, s, x, v) \\ f_X(u, s, x, v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ avec $f^1(u, s, x, v) \in \mathbb{R}^p$, $f_X(u, s, x, v) \in \mathbb{R}^{n-p}$; le signal $s(t)$ est

un signal connu dérivable et dont la dérivée est bornée et $W(u, s)$ est une matrice $p \times m$ qui peut s'écrire comme suit

$$W(u, s) = \begin{pmatrix} W_1(u, s) \\ W_2(u, s) \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

où $W_1(u, s), W_2(u, s)$ sont des matrices de dimensions respectives $m_0 \times m$ et $(p - m_0) \times m$ et la matrice $W_1(u, s)$ est de rang plein, c'est-à-dire :

$$\forall u \in U, \quad \forall t \geq 0 : \text{Rang}(W_1(u, s)) = m \quad (5.26)$$

Notre objectif consiste à synthétiser un observateur permettant d'estimer simultanément les états x et les entrées inconnues v . Comme nous le verrons plus loin et de manière similaire au cas linéaire, la synthèse de l'observateur se fera en considérant deux situations selon que $m_1 = p$ ou $m_1 < p$.

5.4 Synthèse de l'observateur

Soit

$$h(u, x) = \begin{pmatrix} h_1(u, x) \\ h_2(u, x) \end{pmatrix}$$

la partition de $h(u, x)$ induite par celle de $W(u, s)$ sous la forme (5.25).

Nous considérons le changement de coordonnées suivant :

$$T : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad \xi = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \mapsto T(\xi) = \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{x} = x \\ \bar{v} = h_1(u, x) + W_1(u, s)v \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Cette transformation T met le système (5.24) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= f(u, s, \bar{x}, W_1^+(y_1 - h_1(u, \bar{x}))) \\ \dot{\bar{v}} &= \dot{y}_1 \\ y_2 &= h_2(u, \bar{x}) - W_2(u, s)W_1^+(u, s)h_1(u, \bar{x}) + W_2(u, s)W_1^+(u, s)y_1 \end{cases} \quad (5.28)$$

Il est clair que la deuxième équation de (5.28) est inutilisable pour la synthèse de l'observateur qui est alors écartée pour obtenir le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= f(u, s, \bar{x}, W_1^+(y_1 - h_1(u, \bar{x}))) \\ y_2 &= h_2(u, \bar{x}) - W_2(u, s)W_1^+(u, s)h_1(u, \bar{x}) + W_2(u, s)W_1^+(u, s)y_1 \end{cases} \quad (5.29)$$

Nous allons maintenant considérer deux situations selon que $m_1 < p$ ou $m_1 = p$.

5.4.1 Synthèse de l'observateur avec $m_1 < p$

Le problème initial de synthèse d'observateur à entrées inconnues est ramené à celui de la synthèse d'un observateur standard pour le système non linéaire (sans entrées inconnues) suivant :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= \bar{f}(u, s, y_1, \bar{x}) \\ \bar{y} &= f^0(y_1, \bar{x}) \end{cases} \quad (5.30)$$

où \bar{x} est l'état du système, (s^T, u^T, y_1^T) sont les entrées connues du système, \bar{y} est la sortie avec $\bar{f}(u, s, y_1, \bar{x}) \triangleq f(u, s, \bar{x}, W_1^+(y_1 - h_1(u, \bar{x})))$ et $f^0(y_1, \bar{x}) = h_2(u, \bar{x}) - W_2(u, s)W_1^+(u, s)h_1(u, \bar{x}) + W_2(u, s)W_1^+(u, s)y_1$.

Il est bien connu que ce problème reste ouvert malgré la multitude de résultats disponibles (cf. par exemple [HYJ01, HF03, BH02]). Notons que dès que l'état \bar{x} est estimé, une estimation de l'entrée inconnue devient disponible à partir de l'équation suivante,

$$\hat{v}(t) = W_1^+(u, s)(y_1 - h_1(u, \hat{x})) \quad (5.31)$$

où \hat{x} est l'estimé de x .

5.4.2 Synthèse d'observateur avec $m_1 = p$

Dans ce cas, la matrice W_1 s'identifie avec la matrice W . Le système devient,

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(u, s, y, \bar{x}) \quad (5.32)$$

où $\bar{f}(u, s, y, \bar{x}) \triangleq f(u, s, \bar{x}, W^+(u, s)(y - h(u, \bar{x})))$. Pour la synthèse de l'observateur, nous adoptons l'hypothèse suivante :

(H1) Il existe une matrice $P(t)$ telle que :

(i) $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0; \forall t \geq 0 :$

$$\alpha_1 I_n \leq P(t) \leq \alpha_2 I_n$$

(ii) $\exists \alpha_3 > 0; \forall x \in \mathbb{R}^n; \forall u \in U; \forall t \geq 0 :$

$$\dot{P}(t) + P(t) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(u, s, y, \bar{x}) + \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}(u, s, y, \bar{x}) \right)^T P(t) \leq -\alpha_3 I_n$$

En procédant comme au chapitre précédent, sous la condition de détectabilité(H1), on peut facilement montrer que le système dynamique suivant

$$\dot{\hat{x}} = \bar{f}(u, s, y, \hat{x})$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est un observateur pour le système (5.32).

Cet observateur peut s'écrire dans les coordonnées originales en x comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = f(u, s, \hat{x}, W^+(y - h(u, \hat{x}))) \quad (5.33)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

Comme dans le cas précédent, les entrées inconnues peuvent être reconstruites à partir de l'équation(5.31).

Remarque 5.1. *La condition (ii) de l'hypothèse (H1) peut être formulée dans les coordonnées originales en x comme suit :*

$$\begin{aligned} & \dot{P}(t) + P(t) \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u, s, x, W^+(u, s)(y - h(u, x))) - \frac{\partial f}{\partial v}(u, s, x, W^+(u, s)(y - h(u, x)))W^+(u, s) \frac{\partial h}{\partial x}(u, x) \right) + \\ & \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u, s, x, W^+(u, s)(y - h(u, x))) - \frac{\partial f}{\partial v}(u, s, x, W^+(u, s)(y - h(u, x)))W^+(u, s) \frac{\partial h}{\partial x}(u, x) \right)^T \\ & P(t) \leq -\alpha_3 I_n \end{aligned}$$

5.5 Exemples

Deux exemples sont donnés dans cette section et chacun d'eux correspond à l'une des deux situations examinées précédemment. Le premier correspond au cas où $m_1 = m = p$ et le second correspond au cas où $m = m_1 < p = 2$.

5.5.1 Exemple pour le cas $m_1 = p$

On considère le système chaotique de Lorentz affecté par une entrée inconnue v et qui s'écrit comme suit [LH99] :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, v) \\ \quad \triangleq Ax + Bv + g(x, v) \\ y = x_1 + v \end{cases} \quad (5.34)$$

où les états $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, l'entrée inconnue $v \in \mathbb{R}$.

Les matrices A, B et la fonction $g(x, v)$ sont définies comme suit

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(x, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(x_1 + v)x_3 \\ (x_1 + v)x_2 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que le système (5.34) est sous la forme (5.24).

La matrice de sortie du système est $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et nous avons $W = 1$.

Puisque l'on a $\text{Rang}(W) = m = m_1 = p = 1$, on doit vérifier la condition **(H1)** pour la synthèse de l'observateur.

Nous avons

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial f}{\partial v}(x, v)W^{-1}C \right) = \begin{pmatrix} -40 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & -y \\ 0 & y & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} = \tilde{A}(y)$$

Il s'ensuit

$$\tilde{A}(y) + \tilde{A}^T(y) = - \begin{pmatrix} 80 & -10 & 0 \\ -10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} \leq -\alpha_3 I_3$$

où $\alpha_3 = 41 - \sqrt{1621} > 0$.

La condition **(H1)** est donc vérifiée et la matrice P est constante dans ce cas et elle est égale à la matrice identité 3×3 .

Le système (5.34) admet donc un observateur de type (5.33) qui s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B\hat{v} + g(\hat{x}, y - \hat{x}_1) \\ \hat{v} &= y - \hat{x}_1 \end{cases} \quad (5.35)$$

où $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\hat{v} \in \mathbb{R}$.

L'entrée inconnue v est exprimée comme suit lors de la simulation,

$$v = 0.5 \sin(60\pi t) \quad (5.36)$$

le modèle (5.34) et l'observateur (5.35) ont été simulés en considérant les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 0.5, x_3(0) = 0.5, \hat{x}_1(0) = 0, \hat{x}_2(0) = -1, \hat{x}_3(0) = -1, \hat{v}(0) = 0.5$$

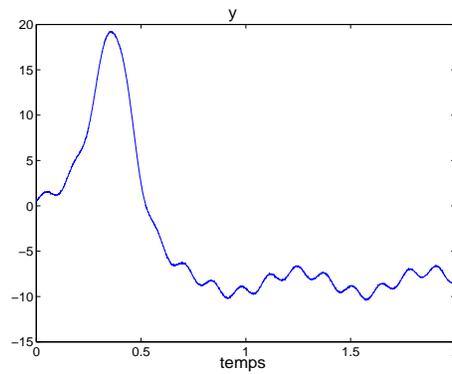
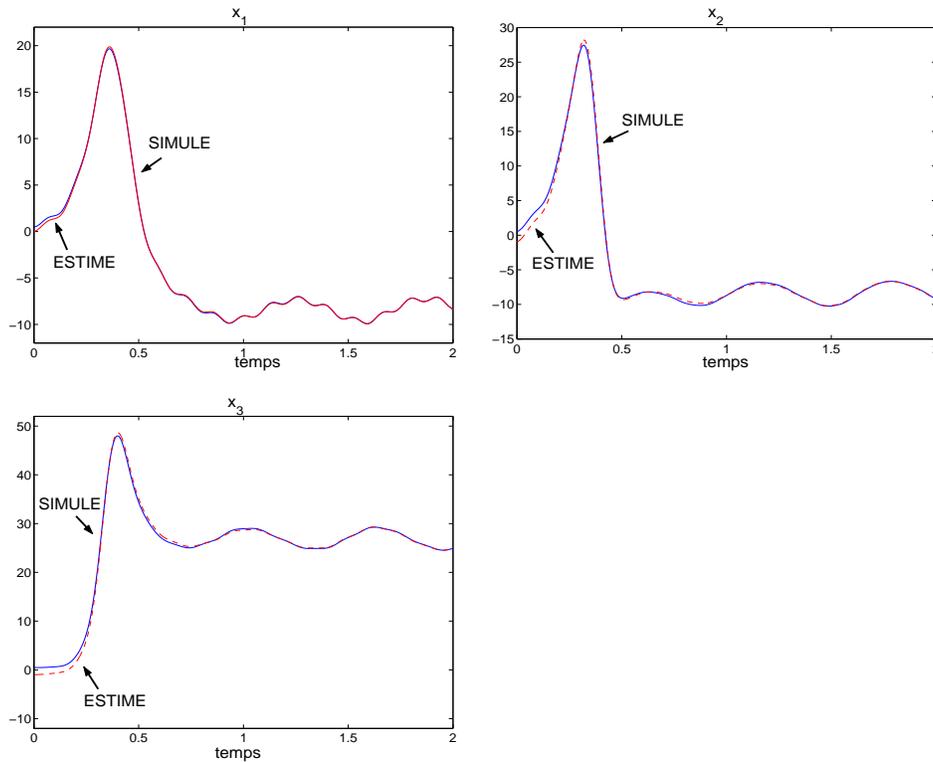
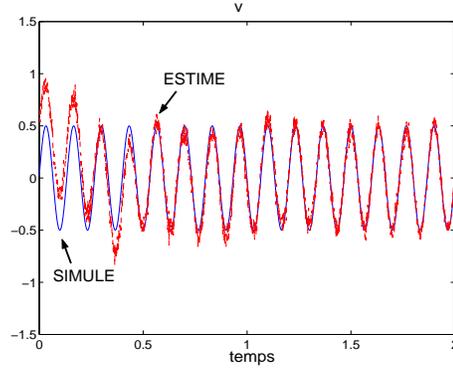


FIG. 5.1 – Mesures bruitées de la sortie

FIG. 5.2 – Estimation de x_1 , x_2 et x_3

FIG. 5.3 – Estimation de l'entrée inconnue v

Avant d'être utilisée par l'observateur, la sortie y a été bruitée par un bruit blanc centré de variance égale à 0.01 (cf. figure 5.1). Les résultats de simulation sont donnés dans les figures 5.2 et 5.3. Dans la première figure 5.2, les estimés des états $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ délivrés par l'observateur (5.35) sont comparés à leurs vraies valeurs issues de la simulation du modèle (5.34). Dans la figure 5.3, l'estimation de l'entrée inconnue \hat{v} est comparée à son évolution donnée par l'expression (5.36). On rappelle que cette expression est inconnue par l'observateur. Les résultats ainsi obtenus montrent clairement que les états non mesurés ainsi que l'entrée inconnue sont "bien" estimés par l'observateur proposé.

5.5.2 Exemple pour le cas $m_1 < p$

On considère le système dynamique suivant,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (2 + \sin(x_1))x_2 - 2x_1 + v \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - v \\ y_1 &= x_1 - v \\ y_2 &= x_1^3 + v \end{cases} \quad (5.37)$$

où l'état du système $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et l'entrée inconnue $v \in \mathbb{R}$.

Le système (5.24) est maintenant sous la forme 5.37 et nous avons $W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$ avec $W_1 = -1, W_2 = 1$. Nous avons donc $\text{Rang}(W) = m = m_1 = 1 < p = 2$.

L'approche proposée consiste à utiliser y_1 pour exprimer v qui est ensuite remplacé dans l'équation du modèle et dans celle de y_2 par cette expression. Ces manipulations donnent lieu au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (2 + \sin(x_1))x_2 - x_1 - y_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + y_1 - x_1 \\ y_2 &= x_1^3 + x_1 - y_1 \end{cases} \quad (5.38)$$

Ce système appartient à la classe de systèmes uniformément observables (3.11) présentée au chapitre 3 et l'on peut donc synthétiser un observateur de type (3.19) qui s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= (2 + \sin(\hat{x}_1))\hat{x}_2 - \hat{x}_1 - y_1 - \frac{2\theta}{1 + 3\hat{x}_1^2}(\hat{x}_1^3 + \hat{x}_1 - y_1 - y_2) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\hat{x}_2^3 + y_1 - \hat{x}_1 - \frac{\theta^2}{(2 + \sin(\hat{x}_1))(1 + 3\hat{x}_1^2)}(\hat{x}_1^3 + \hat{x}_1 - y_1 - y_2) \end{cases} \quad (5.39)$$

L'estimée de l'entrée inconnue \hat{v} se déduit à celle de \hat{x} par

$$\hat{v} = \hat{x}_1 - y_1 \quad (5.40)$$

Pour la simulation, l'expression suivante de v (inconnue par l'observateur) a été choisie :

$$v = 5 \sin(5\pi t) \quad (5.41)$$

le modèle (5.38) et l'observateur (5.39) ont été simulés en considérant les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = 1.5, \quad x_2(0) = 1.5, \quad \hat{x}_1(0) = -3, \quad \hat{x}_2(0) = 0$$

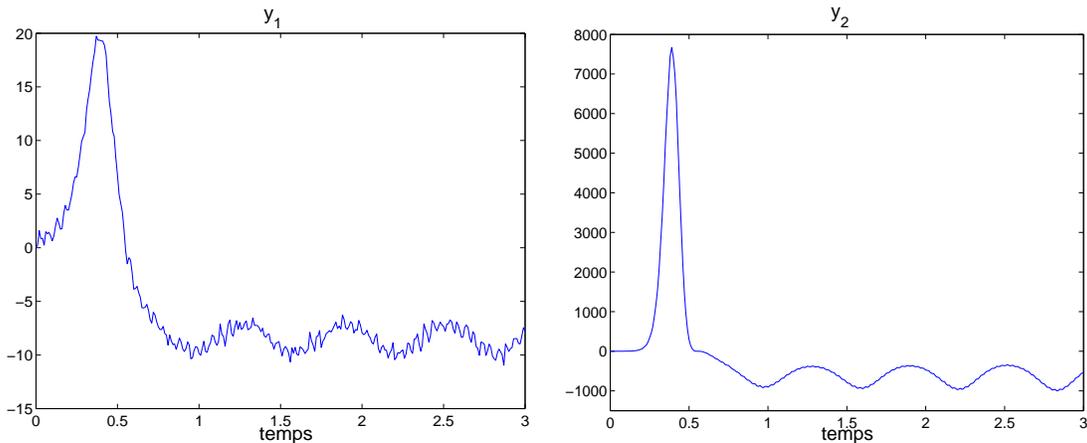
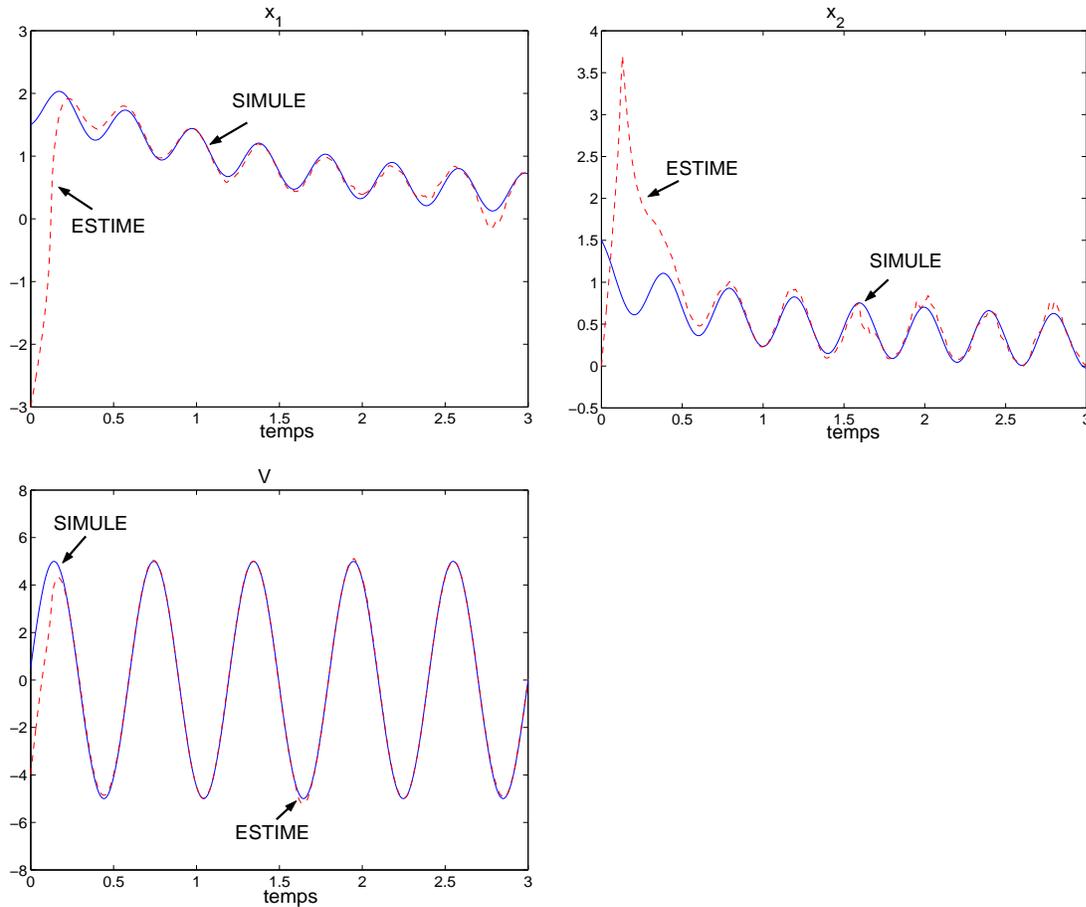


FIG. 5.4 – Mesures bruitées de y_1 et y_2

FIG. 5.5 – Estimation de x_1 , x_2 et v

Avant d'être utilisée par l'observateur, chacune des sorties y_1 et y_2 a été bruitée par un bruit blanc centré de variance égale à 0.3 (cf. figure 5.4). Les estimées des états x_1 , x_2 ainsi que celle de l'entrée inconnue v sont présentées dans les figures . On note encore la bonne qualité des estimations délivrées par l'observateur.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthodologie pour la synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires affectés par des entrées inconnues à la fois au niveau de la dynamique de l'état qu'au niveau de la sortie. Deux situations ont été considérées selon que le nombre d'entrées inconnues est égal ou est strictement inférieur au nombre de sorties. Dans chaque cas, un observateur approprié a été proposé sous des conditions suffisantes qui découlent directement des conditions nécessaires et suffisantes bien établies pour les systèmes linéaires. D'ailleurs, comme au chapitre précédent, nous sommes revenus sur ces conditions nécessaires et suffisantes pour en donner une reformulation plus précise lorsque le nombre de sorties est égal au nombre d'entrées inconnues.

Deux exemples ont été donnés et ils ont permis d'illustrer les bonnes performances des observateurs proposés dans les deux cas traités.

Nouvelle forme canonique observable pour les SNL MIMO

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle forme canonique observable pour les systèmes non linéaires multi-sorties uniformément observables qui inclut les deux formes observables (3.1) et (3.9) présentées au chapitre 3. Nous proposons ensuite la synthèse d'un observateur à partir de cette forme. Pour la synthèse de l'observateur, nous nous sommes inspirés du travail de [BH02]) où les auteurs ont considéré une classe assez générale de systèmes non linéaires satisfaisant certaines propriétés structurelles sous lesquelles ils ont proposé un observateur. La classe considérée est un ensemble de sous systèmes non linéaires couplés, chacun de ses sous systèmes étant triangulaire par rapport à ses propres variables mais le couplage entre deux systèmes n'est pas forcément triangulaire mais satisfait à des contraintes spécifiques garantissant l'uniforme observabilité du système. Nous proposons de rappeler la classe de systèmes ainsi que l'observateur associé proposés par [BH02]), ensuite nous présenterons la forme observable incluant les formes (3.1) et (3.9) et nous détaillerons la synthèse de l'observateur proposé.

6.1 Classe de systèmes uniformément observables avec un couplage non triangulaire

Dans [BH02], les auteurs ont considéré la classe suivante de systèmes MIMO :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\text{où l'état } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ avec } x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{n_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k},$$

$$x_i^k \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n_k, k = 1, \dots, p, \sum_{k=1}^p n_k = n; \text{ la sortie du système } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

$$\text{avec } y_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, p; A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{bmatrix}, A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, C =$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_p \end{bmatrix}, C_k = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \text{ la fonction non linéaire } \varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x) \\ \varphi^2(u, x) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix} \in$$

$$\mathbb{R}^n, \varphi^k(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(u, x) \\ \varphi_2^k(u, x) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k} \text{ avec } \varphi_i^k(u, x) \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, p.$$

Les deux hypothèses suivantes sont adoptées :

(H1) Il existe deux ensembles d'entiers $\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}, \{\delta_1, \dots, \delta_p\}$, avec $\delta_k > 0, k = 1, \dots, p$ tels que :

Pour $k, l = 1, \dots, p; i = 1, \dots, n_k$ et $j = 2, \dots, n_l$, on a :

$$\text{Si } \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \neq 0 \text{ pour un certain } j \geq 2 \text{ alors } \sigma_i^k + \frac{\delta_k}{2} > \sigma_j^l - \frac{\delta_l}{2}$$

où $\sigma_i^k = \sigma_k + (i - 1)\delta_k$.

(H2) La fonction φ est globalement lipschitzienne en x , localement uniformément en u .

On remarque que l'hypothèse (H1) implique en particulier que chaque bloc est triangulaire par rapport à ses propres variables, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^k}(u, x) \equiv 0 \text{ pour } j \geq i + 1 \text{ et } 1 \leq i \leq n_k - 1$$

6.1. CLASSE DE SYSTÈMES UNIFORMÉMENT OBSERVABLES AVEC UN COUPLAGE NON TRIA

Les auteurs proposent ensuite le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \varphi(u, \hat{x}) - S_{\Theta}^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \quad (6.2)$$

avec :

i)

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^k &= y_k \text{ pour } k = 1, \dots, p \text{ (injection de sortie)} \\ \hat{x}_i^k &= \hat{x}_i^k \text{ pour } i \neq 1 \end{aligned}$$

ii) u et y sont respectivement l'entrée et la sortie connues du système (6.1).

iii) $S_{\Theta} = \text{diag}(S_{\theta^{\delta_1}}, S_{\theta^{\delta_2}}, \dots, S_{\theta^{\delta_p}})$ est une matrice diagonale par blocs où chaque matrice $S_{\theta^{\delta_k}}$, $k = 1, \dots, p$, est la solution unique de :

$$\theta^{\delta_k} S_{\theta^{\delta_k}} + A_k^T S_{\theta^{\delta_k}} + S_{\theta^{\delta_k}} A_k = C_k^T C_k$$

Le théorème suivant est donné dans [BH02] :

Théorème 6.1. *Sous les hypothèses (H1) et (H2), nous avons :*

$$\forall M > 0; \exists \theta_0 > 0; \forall \theta \geq \theta_0; \exists \lambda_{\theta} > 0; \exists \mu_{\theta} > 0 \text{ tel que } \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \lambda_{\theta} e^{-\mu_{\theta} t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

pour toute entrée admissible u telle que $\text{Essup}\|u(t)\| \leq M$. De plus, $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \mu_{\theta} = +\infty$. En d'autres termes, en considérant des entrées bornées, le système (6.2) est un observateur exponentiel pour le système (6.1).

Comme le soulignent les auteurs, l'approche qu'ils proposent souffre de deux inconvénients :

1) Le premier réside dans le fait que l'existence des deux ensembles d'entiers stipulé par l'hypothèse (H1) dépend du système de coordonnées.

2) L'autre inconvénient qui n'est pas indépendant du premier réside dans le calcul d'un système de coordonnées dans lequel l'hypothèse (H1) est vérifiée.

Notons que pour la recherche des deux ensembles d'entiers de l'hypothèse (H1), les auteurs proposent une procédure se basant sur la résolution de systèmes linéaires.

Dans [BH02], les auteurs ont discuté de l'existence des deux ensembles d'entiers en adoptant une approche par graphe. En se basant sur cette approche, ils ont donné une interprétation aux entiers cherchés. Ils ont en particulier exhibé à travers quelques exemples

certaines classes de systèmes non linéaires uniformément observables qui ne satisfont pas l'hypothèse (H1).

Dans ce qui suit, nous allons introduire une classe de systèmes uniformément observables qui inclut les systèmes (3.1) et (3.9) pour laquelle nous allons proposer un observateur. Toutefois, pour mieux appréhender cette classe de systèmes et en particulier mieux situer l'apport de ce travail par rapport à la forme (6.1) proposée par [BH02], nous proposons de présenter un exemple de systèmes uniformément observables, tiré de [BH02], pour lesquelles les deux ensembles d'indices n'existent pas et qui se met sous la forme (3.1) à l'aide de la transformation (3.12). En effet, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_2^1 + u_1 x_2^2 = x_2^1 + \varphi_1^1(u, x) \\ \dot{x}_2^1 = x_3^1 = x_3^1 + \varphi_2^1(u, x) \\ \dot{x}_3^1 = u_1 x_4^2 + u_2 = \varphi_3^1(u, x) \\ \dot{x}_1^2 = x_2^2 = x_2^2 + \varphi_1^2(u, x) \\ \dot{x}_2^2 = x_3^2 + u_1 x_3^1 = x_3^2 + \varphi_2^2(u, x) \\ \dot{x}_3^2 = x_4^2 = x_4^2 + \varphi_3^2(u, x) \\ \dot{x}_4^2 = u_3 = \varphi_4^2(u, x) \\ y_1 = x_1^1 \\ y_2 = x_1^2 \end{cases} \quad (6.3)$$

Pour cet exemple, l'hypothèse (H1) n'est pas satisfaite. En effet, supposons, qu'il existe deux ensembles d'entiers $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ et $\{\delta_1, \delta_2\}$ satisfaisant (H1). Nous avons alors :

$$\frac{\partial \varphi_1^1}{\partial x_2^2}(u, x) \neq 0 \implies \sigma_1^1 + \frac{\delta_1}{2} > \sigma_2^2 - \frac{\delta_2}{2} \implies \sigma_1 - \sigma_2 > \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \varphi_3^1}{\partial x_4^2}(u, x) \neq 0 \implies \sigma_3^1 + \frac{\delta_1}{2} > \sigma_4^2 - \frac{\delta_2}{2} \implies \sigma_1 - \sigma_2 > \frac{5}{2}(\delta_2 - \delta_1) \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_2^2}{\partial x_3^1}(u, x) \neq 0 \implies \sigma_2^2 + \frac{\delta_2}{2} > \sigma_3^1 - \frac{\delta_1}{2} \implies \sigma_2 - \sigma_1 > \frac{3}{2}(\delta_1 - \delta_2) \quad (6.6)$$

Il est clair que les conditions (6.4), (6.5) et (6.6) sont incompatibles et l'hypothèse (H1) n'est donc pas satisfaite pour cet exemple.

Par ailleurs, le système (6.3) peut se mettre sous la forme (3.11) en le réécrivant comme

suit

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 = f_1(u, x^2) \\ \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_1 & 1 \end{pmatrix} x^3 = f_2(u, x^3) \\ \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^4 + \begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f_3(u, x^4) \\ \dot{x}^4 = u_3 = f_4(u, x) \\ y = x^1 \end{cases}$$

avec $x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$, $x^3 = \begin{pmatrix} x_3^1 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$, $x^4 = x_4^2$.

Ce système peut se mettre donc à l'aide la transformation (3.12) sous la première forme canonique (3.1) pour la quelle l'observateur de type grand gain (3.4) a été proposé.

6.2 Nouvelle forme canonique observable

Soit la classe de systèmes suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(u, x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (6.7)$$

où l'état $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, avec $x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$, $x_i^k \in \mathbb{R}^{p_k}$, $i = 1, \dots, \lambda_k$,

$k = 1, \dots, q$, $\sum_{k=1}^q n_k = n$; la sortie du système $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ avec $y_k \in \mathbb{R}^{p_k}$,

$k = 1, \dots, q$

et $\sum_{k=1}^q p_k = p$; $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_q \end{bmatrix}$, $A_k = \begin{bmatrix} 0 & I_{p_k} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I_{p_k} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_q \end{bmatrix}$,

$C_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$; $\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(u, x) \\ \varphi^2(u, x) \\ \vdots \\ \varphi^q(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$; $\varphi^k(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^k(u, x) \\ \varphi_2^k(u, x) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^k(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$

\mathbb{R}^{n_k} où chaque fonction $\varphi_i^k(u, x) \in \mathbb{R}^{p_k}$, $k = 1, \dots, q$, possède la structure suivante :

- pour $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$:

$$\varphi_i^k(u, x) = \varphi_i^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}; x_1^k, \dots, x_i^k; x_1^{k+1}, x_1^{k+2}, \dots, x_1^q) \quad (6.8)$$

- pour $i = \lambda_k$:

$$\varphi_{\lambda_k}^k(u, x) = \varphi_{\lambda_k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^q) \quad (6.9)$$

Remarques 6.1.

1. Notons que la classe de systèmes considérée (6.7) peut s'interpréter comme une généralisation de celle présentée par la deuxième forme canonique (3.9) et cette généralisation se fait dans deux sens. Premièrement, la sortie x_1^k de chaque sous-système k du système (6.7) n'est pas un scalaire comme dans (3.9) mais appartient à \mathbb{R}^{p_k} . La deuxième généralisation est liée à la structure de la fonction $\varphi_{\lambda_k}^k(u, x)$ qui dépend ici de tout l'état x . Dans (3.9), cette fonction a la même structure que $\varphi_{\lambda_k}^k(u, x)$ pour $i \neq \lambda_k$, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas des variables appartenant aux blocs inférieurs.

2. Il est clair que le système (6.7) inclut la classe de systèmes représentée par la première forme canonique (3.1) puisque cette dernière se déduit de (6.7) en prenant $q = 1$, c'est-à-dire en considérant toutes les sorties au sein d'un même bloc.

3. On notera aussi qu'au sein d'un bloc k , les sous-composantes x_i^k ont toutes la même dimension p_k et que $n_k = \lambda_k p_k$. Ceci ne devrait pas être interprétée comme étant une limitation. En effet, le problème aurait pu se formuler autrement en prenant $x_i^k \in \mathbb{R}^{p_i^k}$ avec $p_k = p_1^k \geq p_2^k \geq \dots \geq p_{\lambda_k}^k$ et $\sum_{i=1}^{\lambda_k} p_i^k = n_k$. On peut alors montrer qu'un tel système peut se mettre à l'aide de la transformation (3.12) introduite au chapitre 2 sous la forme du système (6.7), c'est-à-dire avec des sous blocs x_i^k ayant tous la même dimension p_k . Pour la clarté de l'exposé, nous avons préféré partir directement du système (6.7).

6.3 Synthèse de l'observateur

Comme dans tous les travaux traitant de la synthèse d'observateurs à grand gain (se référer par exemple à [BH91, GHO92, HF03, FMR04]), nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

- (H1) $\varphi(u, x)$ est une fonction globalement Lipschitzienne en x , localement uniformément en u .

Avant de donner les équations de l'observateur, nous allons introduire quelques notations et résultats préliminaires :

- Soit $\Delta_k(\theta)$ une matrice diagonale définie par :

$$\Delta_k(\theta) = \begin{bmatrix} I_{p_k} & & & & \\ & \frac{1}{\theta^{\delta_k}} I_{p_k} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{\theta^{\delta_k(\lambda_k-1)}} I_{p_k} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

où $\theta > 0$ est un réel et les δ_k sont des réels positifs définis comme suit :

$$\begin{cases} \delta_k = \prod_{i=k+1}^q (\lambda_i - 1) & \text{pour } 1 \leq k \leq q-1; \\ \delta_q = 1 \end{cases} \quad (6.11)$$

- Soit S_k la solution unique de l'équation algébrique de Lyapunov suivante :

$$S_k + A_k^T S_k + S_k A_k = C_k^T C_k \quad (6.12)$$

L'expression de S_k est rappelée au chapitre 3 où il a aussi été rappelé que nous avons en particulier

$$S_k^{-1} C_k^T = \begin{pmatrix} C_{n_k}^1 I_{p_k} \\ C_{n_k}^2 I_{p_k} \\ \vdots \\ C_{n_k}^{m_k} I_{p_k} \end{pmatrix}$$

Soit maintenant le système dynamique décrit par les q blocs suivants :

$$\dot{\hat{x}}^k = A_k \hat{x}^k + \varphi(u, \hat{x}^k) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T (C_k \hat{x}^k - y_k) \quad (6.13)$$

pour $k = 1, \dots, q$ avec

- $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^1 \\ \hat{x}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}^q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}^k = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^k \\ \hat{x}_2^k \\ \vdots \\ \hat{x}_{\lambda_k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$, $\hat{x}_i^k \in \mathbb{R}^{p_k}$, $i = 1, \dots, \lambda_k$, $k = 1, \dots, q$.
- $\hat{x}_1^k = x_1^k$ (injection de sortie) pour $k = 1, \dots, q$.
- $\hat{x}_j^k = \hat{x}_j^k$ si $j \neq 1$.
- $e_1^k = \hat{x}_1^k - x_1^k$.
- u et y sont respectivement l'entrée et la sortie connues du système (6.7).

Nous énonçons le théorème suivant :

Théorème 6.2. *Supposons que système (6.7) satisfait l'hypothèse (H1), alors :*

$$\forall M > 0; \exists \theta_0 > 0; \forall \theta \geq \theta_0; \exists \lambda_\theta > 0; \exists \mu_\theta > 0 \text{ tel que } \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \lambda_\theta e^{-\mu_\theta t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

pour toute entrée admissible u telle que $\text{Essup}\|u(t)\| \leq M$. De plus, $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \mu_\theta = +\infty$. En d'autres termes, en considérant des entrées bornées, le système (6.13) est un observateur exponentiel pour le système (6.7).

Démonstration de Théorème (6.2) :

Soit $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ l'erreur d'estimation et soit $e^k(t)$ la $k^{\text{ième}}$ composante de $e(t)$. Pour alléger les expressions et tant qu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettrons dans la suite la variable temps t . Nous avons :

$$\dot{e}^k = A_k e^k + \varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T C_k e_1^k \quad (6.14)$$

où u est une commande admissible telle que $\|u\|_\infty \leq M$, $M > 0$ est une constante donnée.

Avant de donner la fonction de Lyapunov, nous avons besoin de la matrice diagonale suivante,

$$\Lambda_k(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta^{\sigma_1^k}} I_{p_k} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\theta^{\sigma_{\lambda_k}^k}} I_{p_k} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

où

$$\sigma_i^k = \sigma_1^k + (i - 1)\delta_k; \quad i = 1, \dots, \lambda_k; k = 1, \dots, q; \quad (6.16)$$

et les σ_1^k , $k = 1, \dots, q$ sont des réels qui seront spécifiés ultérieurement.

Les identités suivantes peuvent être vérifiées par un simple calcul :

- $\Lambda_k(\theta) = \theta^{-\sigma_1^k} \Delta_k(\theta)$
- $\Lambda_k(\theta) A_k \Lambda_k^{-1}(\theta) = \theta^{\delta_k} A_k$
- $C_k \Lambda_k^{-1}(\theta) = \theta^{\sigma_1^k} C_k$
- $C_k \Delta_k^{-1}(\theta) = C_k$

Posons $\bar{e}^k = \Lambda_k(\theta) e^k$ pour $k = 1, \dots, q$. A partir de l'équation (6.14) et des identités précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}^k &= \Lambda_k(\theta) A_k \Lambda_k(\theta)^{-1} \bar{e}^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) - \theta^{\delta_k} \Lambda_k(\theta) \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T C_k \theta^{\sigma_1^k} \bar{e}_1^k \\ &= \theta^{\delta_k} A_k \bar{e}^k - \theta^{\delta_k} S_k^{-1} C_k^T C_k \bar{e}_1^k + \Lambda_k(\theta) (\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Soit maintenant la fonction de Lyapunov candidate

$$V(\bar{e}) = \bar{e}^T S \bar{e} = \sum_{k=1}^q V_k(\bar{e}^k)$$

où $V_k(\bar{e}^k) = \bar{e}^{kT} S_{1k} \bar{e}^k$ et S est la matrice diagonale par blocs : $S = \text{diag}(S_{11}, \dots, S_{1q})$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= \dot{\bar{e}}^{kT} S_k \bar{e}^k + \bar{e}^{kT} S_k \dot{\bar{e}}^k \\ &= 2\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k A_k \bar{e}^k - 2\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} C_k^T C_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta)(\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Nous utilisons maintenant l'équation (6.12) pour exprimer $\bar{e}^{kT} S_k A_k \bar{e}^k$. L'équation (6.18) devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= -\theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} S_k \bar{e}^k - \theta^{\delta_k} \bar{e}^{kT} C_k^T C_k \bar{e}^k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta)(\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) \\ &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\bar{e}^{kT} S_k \Lambda_k(\theta)(\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x)) \\ &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\|S_k \bar{e}^k\| \|\Lambda_k(\theta)(\varphi^k(u, \hat{x}) - \varphi^k(u, x))\| \\ &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\sqrt{\lambda_{max}^k V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \frac{1}{\theta^{\sigma_i^k}} \|\varphi_i^k(u, \hat{x}) - \varphi_i^k(u, x)\| \end{aligned}$$

où λ_{max}^k est la plus grande valeur propre de S_k .

Il s'ensuit

$$\dot{V}_k \leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \sqrt{\lambda_{max}^k V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \|\bar{e}_j^l\|$$

où $\rho_k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \right\| ; x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|u\|_\infty \leq M \right\}$ et $\chi_{l,j}^{k,i}$ est un entier qui est tel que

$\chi_{l,j}^{k,i} = 0$ si $\frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \equiv 0$ et $\chi_{l,j}^{k,i} = 1$ sinon.

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \sqrt{\lambda_{max}^k V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \|\bar{e}_j^l\| \\ &\leq -\theta^{\delta_k} V_k + 2\rho_k \sqrt{\lambda_{max}^k V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k} \frac{\sqrt{V_l}}{\sqrt{\lambda_{min}^l}} \end{aligned}$$

où λ_{min}^l est la plus petite valeur propre de S_l .

Ainsi,

$$\dot{V}_k \leq -(\sqrt{\theta^{\delta_k} V_k})^2 + 2\rho_k \mu_S \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \chi_{l,j}^{k,i} \theta^{\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2}} \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l}$$

$$\text{où } \mu_S = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}}.$$

Pour la suite de la démonstration, nous allons procéder comme suit. Nous allons supposer dans un premier temps que les σ_1^k , $k = 1, \dots, q$ peuvent être choisis de sorte que la condition suivante soit satisfaite :

$$\text{si } \chi_{l,j}^{k,i} = 1 \text{ alors } \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} \leq -\varepsilon < 0 \quad (6.19)$$

Ensuite, nous montrerons qu'un tel choix est possible et nous donnerons un ensemble de réels σ_1^k et $\varepsilon > 0$ qui vérifient la condition (6.19).

Supposons donc que les σ_1^k vérifient (6.19) et que $\theta \geq 1$. On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -(\sqrt{\theta^{\delta_k} V_k})^2 + 2\rho_k \mu_S \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{i=1}^{\lambda_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \theta^{-\varepsilon} \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l} \\ &\leq -(\sqrt{\theta^{\delta_k} V_k})^2 + 2\lambda_k \rho_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{\theta^{\delta_k} V_k} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \sqrt{\theta^{\delta_l} V_l} \end{aligned}$$

Maintenant, posons $V_k^* = \theta^{\delta_k} V_k$ pour $k = 1, \dots, q$ et $V^* = \sum_{k=1}^q V_k^*$. Notons que $\theta V \leq V^* \leq \theta^{\delta_1} V$, où δ_1 est donné par (6.11).

Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &\leq -V_k^* + 2\lambda_k \rho_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_k^*} \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^{\lambda_l} \sqrt{V_l^*} \\ &\leq -V_k^* + 2\lambda_k n \rho_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} \sqrt{V_k^*} \sqrt{V^*} \\ &\leq -V_k^* + 2\lambda_k n \rho_k \mu_S \theta^{-\varepsilon} V^* \end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -V^* + 2n^2 \rho \mu_S \theta^{-\varepsilon} V^* \\ &\leq -(1 - 2n^2 \rho \mu_S \theta^{-\varepsilon}) V^* \end{aligned}$$

où $\rho = \max\{\rho_k, 1 \leq k \leq q\}$.

Finalement,

$$\dot{V} \leq -\theta(1 - 2n^2 \rho \mu_S \theta^{-\varepsilon}) V$$

Soit maintenant θ_0 un réel tel que $1 - 2n^2 \rho \mu_S \theta_0^{-\varepsilon} > 0$. Nous avons :

$$\forall \theta \geq \theta_0; \bar{e}(t)^T S \bar{e}(t) \leq \exp(-\mu_\theta t) \bar{e}(0)^T S \bar{e}(0)$$

où $\mu_\theta = \theta(1 - 2n^2\rho\mu_S\theta^{-\varepsilon})$.

Or,

$$\|\bar{e}(t)\|^2 \leq \mu_S^2 \exp(-\mu_\theta t) \|\bar{e}(0)\|^2$$

Par conséquent

$$\|e(t)\| \leq \lambda_\theta \exp\left(-\frac{\mu_\theta t}{2}\right) \|e(0)\|^2$$

où $\lambda_\theta = \theta^{\sigma_{\lambda_q}^q}(\theta)\mu_S$.

Pour terminer la preuve du théorème, il nous reste à exhiber un ensemble de σ_1^k , $k = 1, \dots, q$ et un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant la condition (6.19). Pour ce faire, nous allons revenir sur les couplages définis par (6.8) et (6.9) et faire le lien entre ces couplages et la valeur de $\chi_{l,j}^{k,i}$. Un examen simple de ces couplages montre que lorsque $\chi_{l,j}^{k,i} = 1$, $k, l \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{2, \dots, \lambda_l\}$, nous sommes forcément dans l'une des trois situations suivantes :

- $k > l$ et i prend n'importe quelle valeur dans $\{1, \dots, \lambda_k\}$ (un bloc peut contenir les variables de tous les blocs qui le précèdent).
- $k = l$ et $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$ avec $i \geq j$ (structure triangulaire de chaque bloc).
- $k < l$ et $i = \lambda_k$ (le dernier sous bloc de chaque bloc peut dépendre de toutes les variables).

Maintenant, pour $k = 1, \dots, q$, nous définissons les σ_1^k comme suit :

$$\sigma_1^k = (\lambda_1 - \frac{1}{2})\delta_1 - (\lambda_k - \frac{1}{2})\delta_k + (1 - \frac{1}{2^{k-1}}) \quad (6.20)$$

Avec un tel choix des σ_1^k , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} &= \sigma_1^l - \sigma_1^k + (j - \frac{3}{2})\delta_l - (i - \frac{1}{2})\delta_k \\ &= (\lambda_k - \frac{1}{2})\delta_k - (\lambda_l - \frac{1}{2})\delta_l + (j - \frac{3}{2})\delta_l - (i - \frac{1}{2})\delta_k - (\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}) \\ &= (\lambda_k - i)\delta_k + (j - \lambda_l - 1)\delta_l - (\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Pour vérifier la condition (6.19), il suffit de considérer les trois situations précédentes.

Nous avons :

- $k > l$ et i est quelconque dans $\{1, \dots, \lambda_k\}$:

D'après l'équation (6.21), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} &\leq (\lambda_k - 1)\delta_k - \delta_l - (\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}) \\ &= \delta_{k-1} - \delta_l - (\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Maintenant, à partir de l'expression de δ_k (équation (6.11)) et comme $k - 1 \geq l$, on a

$$\delta_{k-1} - \delta_l \leq 0 \quad (6.23)$$

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}\right) &= \frac{1}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{2^{l-k}} - 1\right) = \frac{1}{2^{k-1}}(2^{k-l} - 1) \\
&\geq \frac{1}{2^{k-1}}(2 - 1) \text{ pour } k \geq l + 1 \\
&= \frac{1}{2^{k-1}}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

En combinant les inégalités (6.22), (6.23) et (6.24), on obtient :

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} \leq -\frac{1}{2^{k-1}} \leq -\frac{1}{2^{q-1}} \tag{6.25}$$

- $k = l$ et $i \in \{1, \dots, \lambda_k\}$ avec $i \geq j$:

L'équation (6.21) devient :

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} = (j - i - 1)\delta_k \leq -\delta_k \leq -\delta_q \leq -\frac{1}{2^{q-1}} \tag{6.26}$$

- $k < l$ et $i = \lambda_k$:

L'équation (6.21) devient :

$$\begin{aligned}
\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta_k}{2} - \frac{\delta_l}{2} &= (j - \lambda_l - 1)\delta_l - \left(\frac{1}{2^{l-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}\right) \\
&\leq -\delta_l + \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{l-1}}\right) \\
&\leq -\delta_l + \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\right) \\
&= -\frac{1}{2^{q-1}}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Maintenant, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2^{q-1}}$. Ceci termine la preuve du théorème.

Nous remarquons que l'observateur (6.13) a la même structure que celle de l'observateur (6.2). Toutefois, les expressions des δ_k sont maintenant données par l'équation (6.11). De même, les expressions des entiers σ_1^k sont données par l'équation (6.11). Cette equation reflète bien le fait que chaque σ_1^k peut être interprété comme un indicateur du couplage du bloc k avec le premier bloc. Ainsi, nous avons $\sigma_1^1 = 0$.

6.4 Exemple

Les performances de l'observateur proposé sont illustrées en simulation dans ce paragraphe à travers l'exemple suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{z}_1 = z_3 - 0.01u_1 \tanh(z_1 z_2 z_5) - z_1 \\
\dot{z}_2 = z_4 - 0.01u_2 \tanh(z_1 z_2 z_5) - z_2 \\
\dot{z}_3 = -z_3^3 - \frac{u_1 z_6}{1 + (z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7)^2} \\
\dot{z}_4 = -z_4 + \frac{u_2 z_7}{2 + \tanh(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7)} \\
\dot{z}_5 = z_6 + 0.01z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 u_1 \\
\dot{z}_6 = z_7 - z_6 + (1 - z_1^2)z_2 z_5 + \frac{u_1}{1 + (z_3 z_4)^2} + \frac{\tanh(u_2)}{1 + z_6^2} \\
\dot{z}_7 = -z_7 + (1 - z_2)^2 z_1 z_5 + \frac{\tanh(u_1)}{1 + (z_6 z_7)^2} + \frac{u_2}{1 + (z_3 z_4)^2} \\
y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_5 \end{pmatrix}
\end{array} \right. \quad (6.28)$$

Il est clair que le système (6.28) est sous la forme (6.7) avec :

$$\begin{aligned}
x^1 &= \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}, \quad x_1^1 = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad x_2^1 = \begin{pmatrix} z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} \\
x^2 &= \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, \quad x_1^2 = z_5, \quad x_2^2 = z_6, \quad x_3^2 = z_7 \\
y &= \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad y^1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = z_5
\end{aligned} \quad (6.29)$$

Nous avons ainsi $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

On notera que le système (6.28) n'appartient pas à la classe de systèmes représentée par la forme (3.1), ni à celle représentée par (3.9).

Un observateur de type (6.13) a été synthétisé pour l'estimation des trajectoires de ce système. Les équations de cet observateur s'écrivent comme suit :

Les équations de cet observateur à grand gain se présentent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \\ \dot{\hat{z}}_3 \\ \dot{\hat{z}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_3 \\ \hat{z}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.01u_1 \tanh(z_1 z_2 z_5) - z_1 \\ -0.01u_2 \tanh(z_1 z_2 z_5) - z_2 \\ -\hat{z}_3^3 - \frac{u_1 \hat{z}_6}{1 + (z_1 z_2 \hat{z}_3 \hat{z}_4 z_5 \hat{z}_6 \hat{z}_7)^2} \\ -\hat{z}_4 + \frac{u_2 \hat{z}_7}{2 + \tanh(z_1 z_2 \hat{z}_3 \hat{z}_4 z_5 \hat{z}_6 \hat{z}_7)} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{z}}_5 \\ \dot{\hat{z}}_6 \\ \dot{\hat{z}}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_6 \\ \hat{z}_7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01z_1 z_2 \hat{z}_3 \hat{z}_4 z_5 u_1 \\ -\hat{z}_6 + (1 - z_1^2) z_2 z_5 + \frac{u_1}{1 + (\hat{z}_3 \hat{z}_4)^2} + \frac{\tanh(u_2)}{1 + \hat{z}_6^2} \\ -\hat{z}_7 + (1 - z_2)^2 z_1 z_5 + \frac{\tanh(u_1)}{1 + (\hat{z}_6 \hat{z}_7)^2} + \frac{u_2}{1 + (\hat{z}_3 \hat{z}_4)^2} \end{pmatrix} \\ \\ - \begin{pmatrix} 2\theta^{\delta_1} & 0 \\ 0 & 2\theta^{\delta_1} \\ \theta^{2\delta_1} & 0 \\ 0 & \theta^{2\delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 - z_1 \\ \hat{z}_2 - z_2 \end{pmatrix} \\ \\ - \begin{pmatrix} 3\theta \\ 3\theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} (\hat{z}_5 - z_5) \end{array} \right.$$

où $\delta_1 = (\lambda_2 - 1) = 2$ conformément à (6.11).

La simulation a été effectuée avec les conditions initiales suivante :

$$z_i(0) = 1, \hat{z}_i(0) = -1, i = 1, \dots, 7$$

La valeur de paramètre θ utilisée au cours de la simulation est égale à $\sqrt{5}$. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures (6.1), (6.2) et (6.3) et ils montrent que les trajectoires estimées convergent rapidement vers leurs vraies valeurs issues de la simulation du modèle.

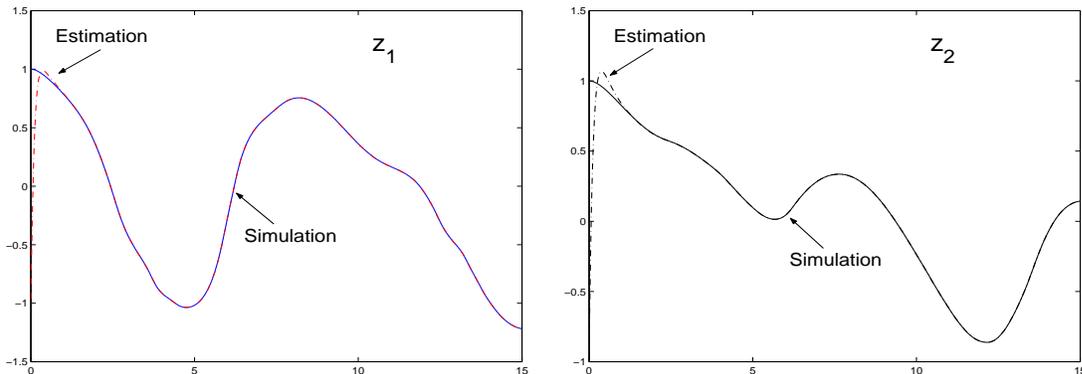
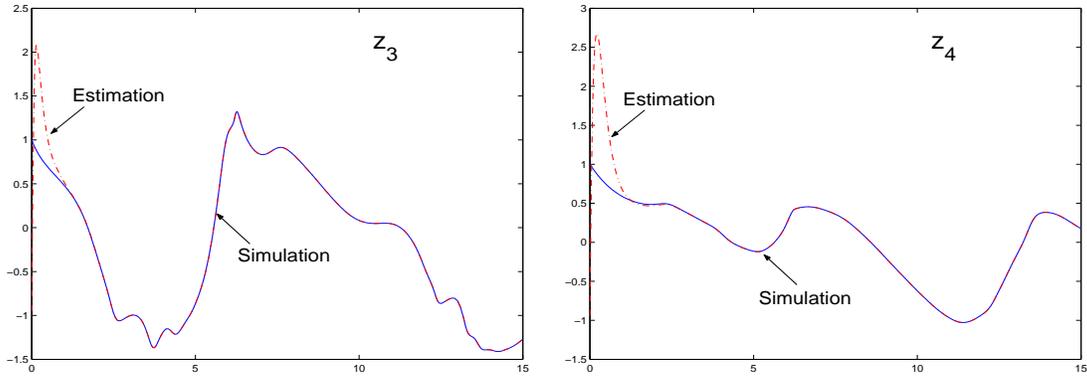
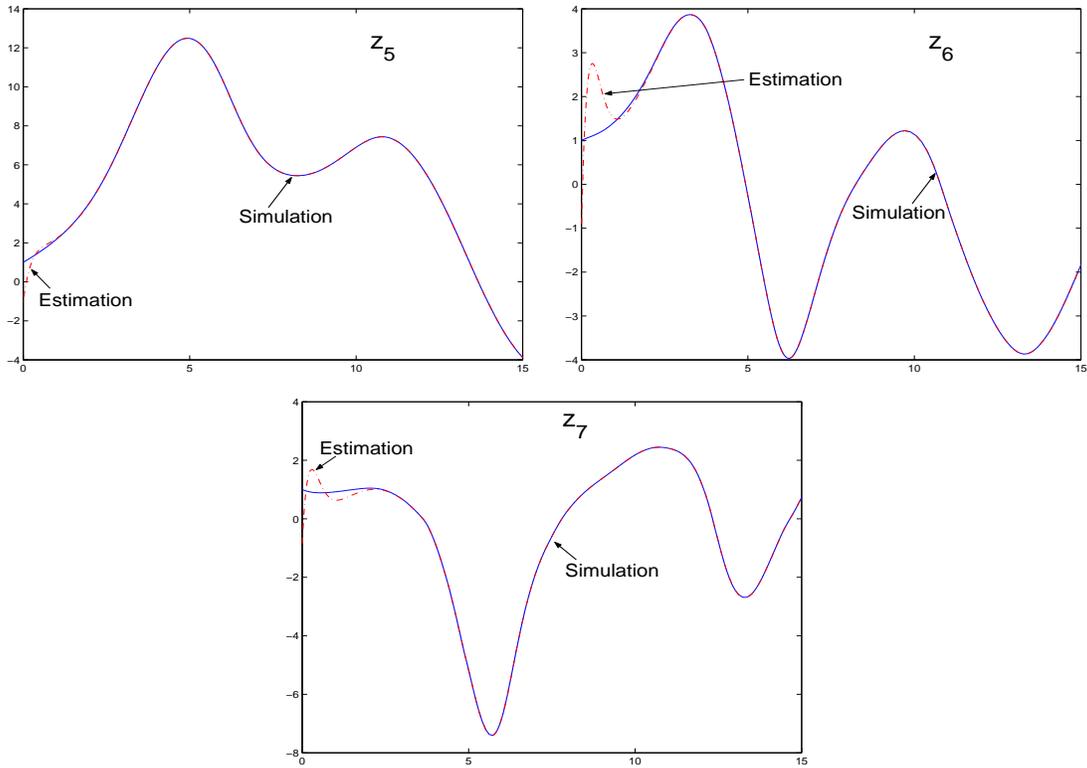


FIG. 6.1 – Comparaison des états estimés et simulés pour z_i , $i = 1, 2$

FIG. 6.2 – Comparaison des états estimés et simulés pour z_i , $i = 3, 4$ FIG. 6.3 – Comparaison des états estimés et simulés pour z_i , $i = 5, \dots, 7$

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exhibé une forme canonique observable pour les systèmes non linéaires uniformément observables qui inclut toutes les formes existantes. Nous travaillons maintenant pour donner une condition suffisante, portant sur les couplages entre les différents blocs, pour qu'un système uniformément observable puisse se mettre sous la forme proposée.

Application aux réacteurs biochimiques

Il est bien connu de nos jours qu'une difficulté essentielle concernant les procédés (bio)chimiques réside dans le manque, dans la plupart des cas, d'une instrumentation robuste et peu coûteuse adaptée à la supervision en ligne. Par exemple, à l'heure actuelle, il y a peu de capteurs capables de fournir en temps réel des mesures directes fiables des variables biologiques ou biochimiques nécessaires à la mise en oeuvre de stratégies de commande automatique performantes. Les variables principales, c'est-à-dire les concentrations en biomasse, substrat ou produit doivent le plus souvent être déterminées par des analyses en laboratoire, dont la durée et le coût limitent forcément la fréquence des mesures.

Pour pallier ces problèmes, plusieurs auteurs ont proposé des techniques permettant d'avoir des estimations en ligne, non seulement des concentrations en composés, mais aussi celles des vitesses de réactions qui constituent elles aussi de très bons indicateurs sur le fonctionnement du procédé. Les avantages qui résident derrière l'estimation des vitesses de réactions sont multiples. En effet, une telle estimation épargne l'utilisateur du choix d'une loi pour la vitesse à modéliser ainsi que des études d'identifiabilité et d'identification des coefficients apparaissant dans la loi ainsi choisie. De plus, l'estimation ainsi obtenue peut être utilisée *a posteriori* pour la recherche de corrélations possibles entre la vitesse de réaction et les différents autres paramètres tels que les concentrations en composés, la température, le pH, etc.

Plusieurs méthodes ont été rapportées dans la littérature pour l'estimation des concentrations en composés ainsi que celle des vitesses (ou chaleurs) de réactions à partir de la mesure de certaines concentrations. On peut citer notamment les travaux décrits dans [BVR89, PB89a, PB89b, SS92, SS32] pour l'estimation des paramètres dans les réacteurs chimiques et ceux de [WS84, STSS89, BD90, FBH98] pour l'estimation des concentrations et des vitesses de réactions dans les bioréacteurs.

Nous proposons dans ce travail une approche systématique pour la synthèse d'observateurs pour l'estimation d'états et de paramètres dans les réacteurs biochimiques. Cette approche est basée sur l'utilisation des observateurs à entrées inconnues présentés au cha-

pitre 4. L'idée derrière l'utilisation de ces observateurs consiste à considérer les vitesses de réactions comme des entrées inconnues que l'on cherchera alors à estimer conjointement avec l'état du système, c'est-à-dire les concentrations en composés, avec la température dans le cas des réacteurs chimiques.

Dans ce qui suit, nous allons introduire un modèle dynamique de bilan unifié pour le bioréacteur et le réacteur chimique. Nous nous appuyerons ensuite sur ce modèle pour montrer comment l'on peut appliquer les résultats du chapitre 4 pour la synthèse d'observateurs à entrées inconnues pour les réacteurs biochimiques.

7.1 Modèle du réacteur biochimique

Le modèle dynamique associé à un bioréacteur est généralement un ensemble d'équations de bilan de matière associées aux composés impliqués dans l'ensemble des réactions ayant lieu au sein du réacteur. Pour le réacteur chimique, le même bilan de matière est considéré et le modèle dynamique du réacteur est obtenu en augmentant ce modèle par une équation de bilan d'énergie. Dans plusieurs applications, en particulier celles ne faisant pas intervenir des composés en phase gazeuse, l'équation de bilan d'énergie se résume à une équation décrivant la dynamique de la température au sein du réacteur. Ainsi, le modèle dynamique d'une grande classe de réacteurs biologiques et chimiques parfaitement agités, tenant compte éventuellement des phénomènes de recyclage et/ou d'accumulation, peut s'écrire comme suit :

$$\dot{T}_R = -\frac{1}{\rho_R c_{pR}} \Delta H^T r(t) - Q + d_{T_R}(T_{Rin} - T_R) \quad (7.1)$$

$$\dot{C} = Yr(C, t) - D_C C + F - G \quad (7.2)$$

où

$C = (C_1, \dots, C_N)^T$: vecteur des concentrations en composés $\in \mathbb{R}^N$ ($g.l^{-1}$)

$F = (F_1, \dots, F_N)^T$: vecteur des débits massiques d'alimentation $\in \mathbb{R}^N$ ($g.l^{-1}.s^{-1}$)

$G = (G_1, \dots, G_N)^T$: vecteur des débits massique de sortie sous forme gazeuse (pour les bioréacteurs) $\in \mathbb{R}^N$ ($g.l^{-1}.s^{-1}$)

Y : matrice des coefficients de rendement (stoechiométriques) $N \times M$

$r = (r_1, \dots, r_M)^T$: vecteur des vitesses de réactions $\in \mathbb{R}^M$ ($g.l^{-1}.s^{-1}$)

D_C : matrice des taux de dilution relative aux composés $\in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (s^{-1})

T_R : température à l'intérieur du réacteur chimique $\in \mathbb{R}$ (K)

d_{T_R} : taux de dilution global relatif aux composés ajoutés $\in \mathbb{R}$ (s^{-1})

$\Delta H^T = (\Delta H_1, \dots, \Delta H_M)$: vecteur des enthalpies de réactions $\in \mathbb{R}^M$ ($kJ.g^{-1}$)

T_{Rin} : température à l'entrée du réacteur $\in \mathbb{R}$ (K)

ρ_R : densité du milieu réactionnel $\in \mathbb{R}$ ($g.l^{-1}$)

c_{pR} : chaleur spécifique du milieu réactionnel $\in \mathbb{R}$ ($k.J.g^{-1}.K^{-1}$)

Q : flux de chaleur normalisé $\in \mathbb{R}$ ($K.s^{-1}$).

Rappelons que pour le réacteur chimique, tous les composés sont supposés être en phase liquide et le vecteur G est donc nul dans ce cas.

Le modèle général (7.1)-(7.2) peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\dot{\xi} = Kr - D\xi + W \quad (7.3)$$

$$\text{où } \xi \triangleq \begin{pmatrix} T_R \\ C \end{pmatrix} \quad K \triangleq \begin{pmatrix} -\frac{\Delta H^T}{\rho_R c_{pR}} \\ Y \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} d_{T_R} T_{Rin} - Q \\ F \end{pmatrix}$$

$$\text{et } D \triangleq \begin{pmatrix} d_{T_R} & 0 & \dots & 0 \\ 0 \\ \vdots & D_C \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour les réacteurs chimiques}$$

$$\text{et } \xi \triangleq C \quad K \triangleq Y \quad W \triangleq F - G \quad D \triangleq D_C \quad \text{pour les bioréacteurs}$$

Notre objectif consiste à synthétiser des observateurs pour l'estimation en ligne des vitesses de réactions ainsi que des concentrations non mesurées et ce à partir de la mesure de quelques concentrations. Pour ce faire, nous supposons que les conditions (réalistes) suivantes sont satisfaites :

(C1) K , D et W sont connus (mesurés ou fixés par l'utilisateur). De plus, la température T_R est mesurée lorsque le réacteur chimique est considéré.

(C2) Si l'on considère la partition suivante de l'état $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ où ξ^1 désigne l'état mesuré et ξ^2 représente l'état non mesuré et si l'on note par $K = \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \end{pmatrix}$ la partition de K issue de cette partition de ξ , alors nous avons $\text{rang}(K^1) = \text{rang}(K) = M$.

Dans la plupart des cas, le nombre de mesures est très limité. Nous allons adopter dans la suite comme nombre de mesures le plus petit nombre satisfaisant la condition (C2), c'est-à-dire M et le nombre de mesures disponibles est donc égal au nombre de réactions. Notons que les conditions (C1) et (C2) sont raisonnables et elles ont toujours été adoptées dans la plupart des travaux traitant de l'observation des réacteurs biochimiques (cf. par exemple [BO86, BD90, FHJL99]).

Comme le nombre de mesures est égal au nombre d'entrées inconnues, nous devons discuter les hypothèses (H1), (H2) et (H3') pour justifier l'application des observateurs proposés

au chapitre 4 aux réacteurs biochimiques.

Avant de discuter ces hypothèses, nous récrivons le modèle (7.3) en considérant la partition de l'état

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

faisant apparaître les états mesurés, ξ^1 , d'une part et ceux non mesurés, ξ^2 de l'autre. Pour ce faire, on distingue la partition suivante de la matrice D issue de celle de ξ sous la forme (7.4) :

$$D(t) = \begin{pmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) \\ D_{21}(t) & D_{22}(t) \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Le modèle (7.3) peut alors s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^1 &= K^1 r - D_{11} \xi^1 - D_{12} \xi^2 + W^1 \\ \dot{\xi}^2 &= K^2 r - D_{21} \xi^1 - D_{22} \xi^2 + W^2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

où $W = \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}$ est la partition de W issue de celle de ξ sous la forme (7.4).

L'hypothèse (H1) requiert que $\text{Rang} K^1 = M$, ce qui est stipulée par la condition (C2) et l'hypothèse (H1) est donc satisfaite.

L'hypothèse (H2) stipule la bornitude de la dérivée par rapport au temps des entrées inconnues. Ici, les entrées inconnues sont les vitesses de réactions et cette hypothèse est aussi satisfaite par des considérations physiques.

Comme l'hypothèse (H1) est satisfaite, nous pouvons considérer le changement de coordonnées (4.32) qui revient dans ce cas à considérer la transformation suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^1 &= \xi^1 \\ \bar{\xi}^2 &= \xi^2 - K^2 K^{1^{-1}} \xi^1 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Ce changement de variables est le même que celui proposé par [BD90] pour le bioréacteur lorsque la matrice $D(t)$ est scalaire puis il a été généralisé dans le cas matriciel par [Che92]. Il a aussi été considéré par [Doc03].

Le système (7.6) s'écrit dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\xi}}^1 &= K^1 r - D_{11} \bar{\xi}^1 - D_{12} \left(\bar{\xi}^2 + K^2 K^{1^{-1}} \bar{\xi}^1 \right) + W^1 \\
\dot{\bar{\xi}}^2 &= -D_{21} \bar{\xi}^1 - D_{22} \bar{\xi}^2 + W^2 - K^2 K^{1^{-1}} \left(-D_{11} \bar{\xi}^1 - D_{12} \bar{\xi}^2 + W^1 \right) \\
&= - \left(D_{22} - K^2 K^{1^{-1}} D_{12} \right) \bar{\xi}^2 - \left(D_{21} \bar{\xi}^1 - K^2 K^{1^{-1}} D_{11} \right) \bar{\xi}^1 + W^2 - K^2 K^{1^{-1}} W^1 \\
&= - \left(D_{22} - K^2 K^{1^{-1}} D_{12} \right) \left(\bar{\xi}^2 + K^2 K^{1^{-1}} \bar{\xi}^1 \right) - \left(D_{21} \bar{\xi}^1 - K^{1^{-1}} D_{11} \right) \bar{\xi}^1 + W^2 - K^2 K^{1^{-1}} W^1 \\
&= - \left(D_{22} - K^2 K^{1^{-1}} D_{12} \right) \bar{\xi}^2 + W^2 - K^2 K^{1^{-1}} W^1 \\
&\quad - \left(D_{21} \bar{\xi}^1 - K^{1^{-1}} D_{11} + D_{22} - K^2 K^{1^{-1}} D_{12} \right) \bar{\xi}^1
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Revenons maintenant à l'hypothèse (H3'). Elle se traduit dans ce cas par la condition suivante :

$$- \text{(C)} \text{ La matrice } F(t) \triangleq -D_{22}(t) + K^2 (K^1)^{-1} D_{12}(t) \text{ est stable pour tout } t \geq 0$$

On notera à partir du système (7.8) que cette condition est nécessaire pour la stabilité de ce système. On pourra se référer à [Che92] où des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les termes de la matrice $F(t)$ sont données pour que la condition (C) soit satisfaite.

Les hypothèses (H1), (H2) et (H3') étant vérifiés, un observateur de type (4.106) peut être synthétisé pour l'estimation de r et ξ^2 à partir de ξ^1 . Comme la matrice K est constante, nous donnons l'équation de l'observateur dans les coordonnées en $\bar{\xi}$. Les variables originales ξ^1 et ξ^2 peuvent ensuite être directement déduites à partir de (7.7).

Les équations de l'observateur sont :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\hat{\xi}}^1 = K^1 r - D_{11} \bar{\xi}^1 - D_{12} \left(\bar{\xi}^2 + K^2 K^{1^{-1}} \bar{\xi}^1 \right) + W^1 - 2\theta(\hat{\xi}^1 - \bar{\xi}^1) \\
\dot{\hat{r}} = -\theta^2 K^{1^{-1}} (\hat{\xi}^1 - \bar{\xi}^1) \\
\dot{\hat{\xi}}^2 = - \left(D_{22} - K^2 K^{1^{-1}} D_{12} \right) \hat{\xi}^2 + W^2 - K^2 K^{1^{-1}} W^1 \\
\quad - \left(D_{21} \bar{\xi}^1 - K^{1^{-1}} D_{11} + D_{22} - K^2 K^{1^{-1}} D_{12} \right) \bar{\xi}^1 \\
\hat{\xi}^1 = \bar{\xi}^1 \\
\hat{\xi}^2 = \bar{\xi}^2 + K^2 K^{1^{-1}} \bar{\xi}^1
\end{array} \right.$$

où $\theta > 0$ est le seul paramètre de réglage de l'observateur.

7.2 Exemples

Dans ce paragraphe, nous allons considérer deux exemples. Le premier est relatif à un bioréacteur et le second est dédié à un réacteur chimique. Dans chaque cas, nous allons

faire la synthèse d'un observateur de type (7.9) pour l'estimation des vitesses de réactions et des concentrations au sein de ces réacteurs.

7.2.1 Exemple 1 : bioréacteur

Nous considérons une culture microbienne simple dans laquelle une biomasse x_2 se développe en consommant un substrat x_1 au sein d'un réacteur infiniment mélangé. Pour simplifier et sans perte de généralité, nous négligeons les phénomènes de maintenance et de mortalité qui accompagnent généralement le processus de croissance (si considérés, de tels phénomènes peuvent être associés à des vitesses de réactions que l'on cherchera à estimer). On suppose que le réacteur fonctionne en mode continu avec un taux de dilution $D(t)$ et une concentration d'alimentation en substrat $s_{in}(t)$. Dans cet exemple, nous remarquons que le taux de dilution est un scalaire.

Un modèle dynamique du procédé ainsi décrit peut s'écrire comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= D(t)(s_{in}(t) - x_1(t)) - kr(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -D(t)x_2(t) + r(t) \end{cases} \quad (7.9)$$

où $x_1(t)$ et $x_2(t)$ désignent respectivement les concentrations du substrat et de la biomasse ; $r(t)$ est la vitesse de réaction ; k est le coefficient du rendement. L'objectif consiste à estimer la concentration du biomass $x_2(t)$ et la vitesse de réaction $r(t)$ à partir de la mesure $x_1(t)$. Pour ce faire, on fait appel à un observateur du type (7.9) qui s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) &= D(t)(s_{in}(t) - \hat{x}_1) - k\hat{r}(t) - 2\theta(\hat{x}_1(t) - x_1(t)) \\ \dot{\hat{r}}(t) &= \frac{\theta^2}{k}(\hat{x}_1(t) - x_1(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= -D(t)(\hat{x}_2 - \frac{s_{in}}{k}) \\ \hat{x}_2(t) &= \hat{x}_2 - \frac{\hat{x}_1}{k} \end{cases} \quad (7.10)$$

où \hat{x}_1 , \hat{x}_2 et \hat{r} désignent respectivement les estimées de x_1 , x_2 et r .

Remarquons ici, que la condition portant sur le taux de dilution D est satisfaite si ce signal est à excitation persistante.

7.2.1.1 Résultats de simulation

Pour simuler le modèle du procédé (7.9) afin de générer des pseudo-mesures du substrat, nous devons expliciter la vitesse de réaction $r(t)$ pour laquelle nous avons choisi l'expression suivante

$$r(t) = \frac{\mu_{max}x_1}{K_s + x_1}x_2 \quad (7.11)$$

où μ_{max} , K_s sont deux constantes.

L'observateur (7.10) a été simulé en utilisant comme mesures de substrat la trajectoire de x_1 issue de la simulation du modèle (7.9). Pour se rapprocher du cas réel, un bruit additif centré de type gaussien de variance égale à 10^{-3} a été ajouté à ces mesures avant d'être utilisées par l'observateur (cf. figure 7.1).

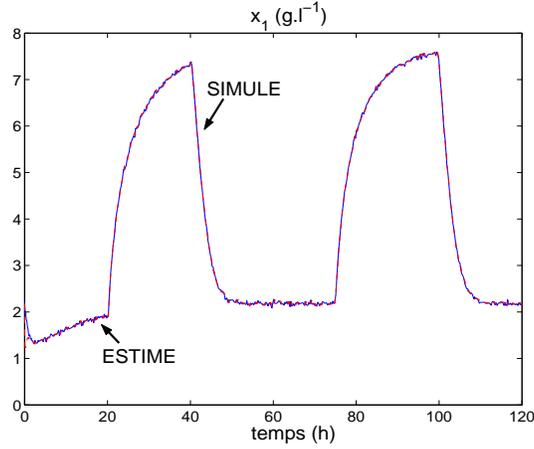


FIG. 7.1 – Mesures bruitées du substrat x_1

Durant la simulation, le taux de dilution $D(t)$ est supposé variant dans le temps et son évolution est représentée dans la figure 7.2. La concentration d'alimentation en substrat a été prise constante. Les valeurs des paramètres utilisées au cours de la simulation sont :

$$\mu_{max} = 0.33h^{-1}; \quad K_s = 5g.l^{-1}; \quad k = 20; \quad s_{in} = 20g.l^{-1}.$$

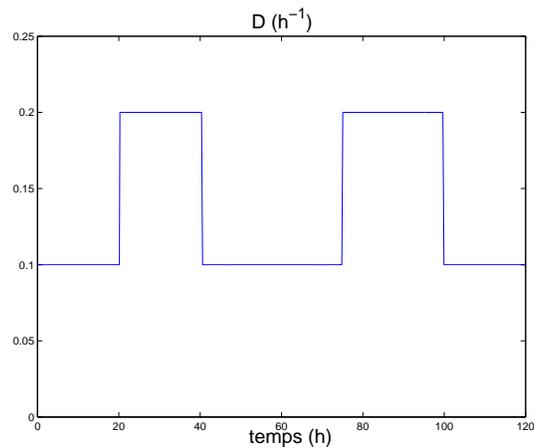


FIG. 7.2 – Evolution du taux de dilution $D(t)$

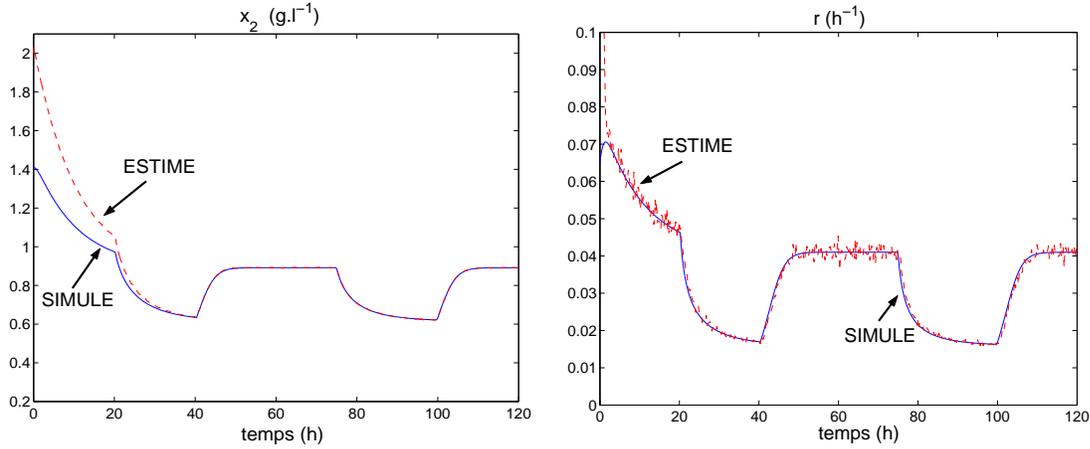


FIG. 7.3 – Estimation de la biomasse x_2 et de la vitesse de réaction r

Les résultats d'estimation sont reportés dans la figure 7.3 où chacune des variables x_2 et r , issue de la simulation du modèle, est comparée avec son estimation délivrée par l'observateur (7.10). La valeur du paramètre de réglage de l'observateur θ a été fixée à 5.

Les résultats obtenus montrent les bonnes performances de l'observateur aussi bien au niveau du suivi des variations de la vitesse de réaction qu'au niveau de son comportement vis-à-vis des bruits de mesure.

7.2.2 Exemple 2 : réacteur chimique

On considère un réacteur chimique continu à double enveloppe où se déroule la réaction suivante :



On suppose que le réactant A est ajouté de manière continue avec un taux de dilution D (scalaire dans ce cas) et une concentration d'alimentation A_{in} . Le modèle mathématique de bilan du procédé s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_R \\ \dot{C}_A \\ \dot{C}_B \\ \dot{C}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta H_1}{\rho_R c_{pR}} & -\frac{\Delta H_2}{\rho_R c_{pR}} \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} T_R \\ C_A \\ C_B \\ C_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} DT_{Rin} - Q \\ DC_{Ain} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

où r_1, r_2 sont les vitesses de réactions ($g.l^{-1}.s^{-1}$), C_A, C_B et C_C ($g.l^{-1}$) représentent respectivement les concentrations des produits A, B, C ; ΔH_1 et ΔH_2 sont les enthalpies de réactions ($kJ.g^{-1}$); T_{Rin} est la température à l'entrée du réacteur (K); ρ_R est la densité du milieu réactionnel ($g.l^{-1}$); c_{pR} est la chaleur spécifique du milieu réactionnel ($kJ.g^{-1}.K^{-1}$); Le terme Q désigne un flux de chaleur normalisée ($K.s^{-1}$) et il peut être exprimé comme suit,

$$Q = \frac{UA(T_R - T_j)}{\rho_R c_{pR} V_R} \quad (7.13)$$

où U ($W.m^{-2}.K^{-1}$) est le coefficient global de transfert de chaleur entre la paroi de la double enveloppe et le réacteur; A (m^2) est la surface globale d'échange thermique de la double enveloppe; T_j (K) est la température du fluide caloporteur et V_R (m^3) est le volume du réacteur.

Il est clair qu'il suffit que l'une des trois concentrations C_A, C_B ou C_C soit mesurée pour que la condition (C2) soit satisfaite. En effet, nous allons supposer que les mesures de C_A et T_R sont disponibles en ligne et notre objectif consistera à estimer en ligne, à partir de ces mesures, les vitesses de réactions r_1 et r_2 ainsi que les concentrations C_B et C_C . Pour ce faire, on fait appel à un observateur du type (7.9) qui s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\hat{T}}_R \\ \dot{\hat{C}}_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\Delta H_1}{\rho_R c_{pR}} & -\frac{\Delta H_2}{\rho_R c_{pR}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} \hat{T}_R \\ \hat{C}_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} DT_{Rin} - Q \\ DC_{Ain} \end{pmatrix} \\ &\quad - 2\theta \begin{pmatrix} (\hat{T}_R - T_R) \\ (\hat{C}_A - C_A) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{r}}_1 \\ \dot{\hat{r}}_2 \end{pmatrix} &= -\theta^2 \begin{pmatrix} -\frac{\Delta H_1}{\rho_R c_{pR}} & -\frac{\Delta H_2}{\rho_R c_{pR}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\hat{T}_R - T_R) \\ (\hat{C}_A - C_A) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{\hat{C}}_B \\ \dot{\hat{C}}_C \end{pmatrix} &= -D \begin{pmatrix} \hat{C}_B \\ \hat{C}_C \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\Delta H_1}{\rho_R c_{pR}} & -\frac{\Delta H_2}{\rho_R c_{pR}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} DT_{Rin} - Q \\ DC_{Ain} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \hat{C}_B \\ \hat{C}_C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{C}_B \\ \hat{C}_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\Delta H_1}{\rho_R c_{pR}} & -\frac{\Delta H_2}{\rho_R c_{pR}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{T}_R \\ \hat{C}_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme pour l'exemple du bioréacteur, la condition portant sur le taux de dilution D est satisfaite si ce signal est à excitation persistante.

7.2.2.1 Résultats de simulation

Pour simuler le modèle du procédé (7.12) afin de générer des pseudo-mesures de T_R et C_A , nous devons expliciter les vitesses de réactions r_1 et r_2 pour lesquelles nous avons choisi les expressions suivantes

$$\begin{cases} r_1 = k_{01}C_A^2 e^{-\frac{E_1}{RT_R}} \\ r_2 = k_{02}C_B e^{-\frac{E_2}{RT_R}} \end{cases} \quad (7.14)$$

où k_{0j} , E_j ($j = 1, 2$) et R sont constantes.

L'observateur (7.14) a été simulé en utilisant comme mesures de T_R et C_A les trajectoires de ces variables issues de la simulation du modèle (7.12). Pour se rapprocher du cas réel, des bruits additifs centrés de type gaussien de variances respectives 10^{-2} et 10^{-5} ont été ajoutés respectivement aux mesures de T_R et C_A avant d'être utilisées par l'observateur (cf. figures 7.5).

Durant la simulation, le coefficient U a été supposé variant dans le temps et son évolution est représentée dans la figure (7.4). Le taux de dilution D est pris constant égal à ($D = 0.02s^{-1}$). Les valeurs des paramètres utilisées dans la simulation sont :

$$\begin{aligned} k_{01} &= 4l.mol^{-1}, \quad k_{02} = 172.2s^{-1}, \quad E_1 = 2.0910^4 J.mol^{-1}, \quad E_2 = 4.1810^4 J.mol^{-1}, \\ \Delta H_1 &= -4.1810^4 J.mol^{-1}, \quad \Delta H_2 = -8.3610^4 J.mol^{-1}, \quad T_j = 350.5K, \quad T_{Rin} = 350K, \\ R &= 8.3143 J.mol^{-1}.K^{-1}, \quad C_{Ain} = 10mol.m^{-3}, \quad A = 170m^2, \quad \rho_R = 1000kg.m^{-3}, \\ c_{pR} &= 1kJ.kg^{-1}.K^{-1}, \quad V_R = 10m^3. \end{aligned}$$

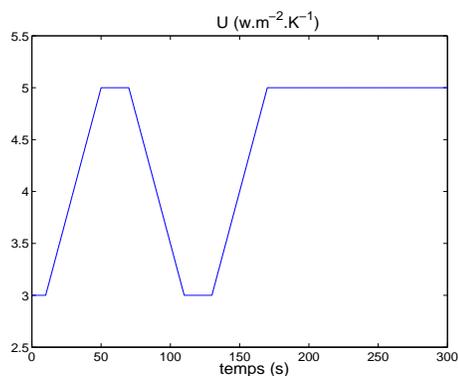
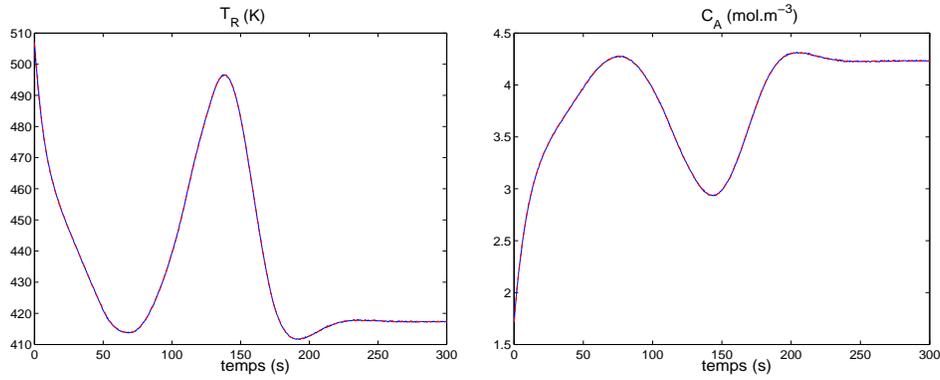
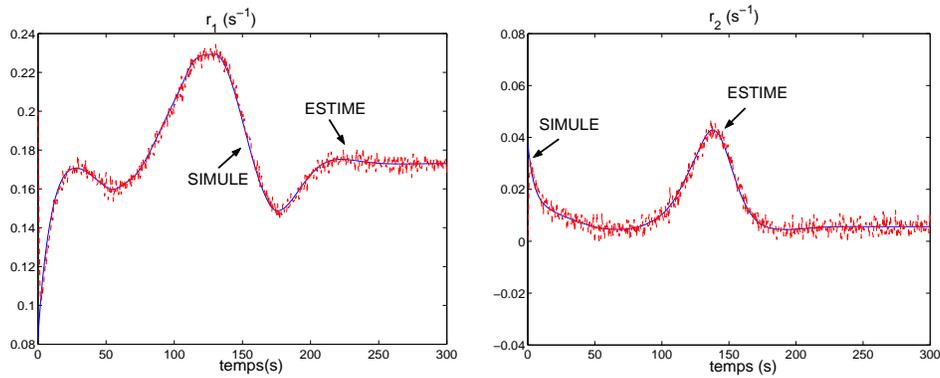
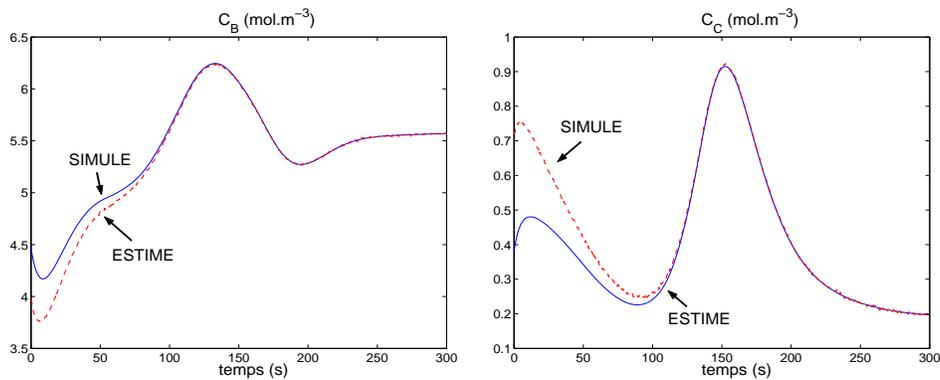


FIG. 7.4 – Evolution du coefficient U

FIG. 7.5 – Mesures bruitées de T_R et C_A FIG. 7.6 – Estimation de r_1 et de r_2

Les résultats d'estimation sont reportés dans les figure (7.6) et (7.7) où chacune des variables C_B , C_C , r_1 et r_2 , issue de la simulation du modèle, est comparée avec son estimation délivrée par l'observateur (7.14). La valeur du paramètre de réglage de l'observateur θ a été fixée à 2.

FIG. 7.7 – Estimation de C_B et de C_C

Comme dans l'exemple du bioréacteur, les résultats obtenus montrent les bonnes performances de l'observateur tant au niveau du suivi des variations des vitesses de réactions qu'au niveau de son comportement vis-à-vis des bruits de mesure. Nous rappelons bien sûr que les expressions des vitesses de réactions (7.14), introduites pour générer les pseudo-mesures de T_R et C_A ne sont pas connues par l'observateur.

7.3 Conclusion

Nous avons reformulé dans ce chapitre le problème d'observation dans les réacteurs biochimiques en termes de synthèse d'observateurs à entrées inconnus. Pour ce faire, les vitesses de réactions ont été comme étant des entrées inconnues que l'on cherche à estimer conjointement avec les états du système qui est composé des concentrations en composés avec la température à l'intérieur du réacteur dans le cas des réacteurs chimiques. Pour la synthèse des observateurs, nous sommes appuyés sur les résultats présentés au chapitre 4. Les performances des observateurs ainsi obtenus ont été illustrés à travers deux exemples traitant respectivement d'un bioréacteur et d'un réacteur chimique.

Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons présenté une synthèse d'observateurs pour une classe de systèmes non linéaires à entrées connues. Pour ce faire, nous avons d'abord rappelé la condition nécessaire et suffisante pour que la synthèse de tels observateurs soit possible dans le cas linéaire. Nous nous sommes focalisés dans le cas linéaire sur la situation où le nombre de sorties est égal au nombre d'entrées inconnues et nous avons donné des conditions plus précises que celles déjà connues pour la synthèse de l'observateur. Pour les systèmes non linéaires, la synthèse de l'observateur s'est effectuée à partir d'une forme canonique observable et des conditions suffisantes pour la synthèse de tels observateurs ont été établies. Ces conditions ont été formulées de sorte que les observateurs proposés permettent :

- d'estimer conjointement tous les états du système et les entrées inconnues lorsqu'on adopte l'hypothèse qui stipule la bornitude de la dynamique de ces entrées.
- d'estimer tous les états non mesurés du système, en l'absence de toute hypothèse portant sur les entrées inconnues .

Notons que les conditions proposées peuvent être relâchées dans certains cas. Dans notre travail, ces conditions ont été adoptées pour faire la synthèse d'observateurs en l'absence ou non d'hypothèse(s) sur les entrées inconnues, et en n'utilisant aucune dérivée d'entrée connue ou de sortie pour l'estimation des variables.

La procédure de synthèse des observateurs à entrées inconnues a été adoptée pour reformuler le problème d'observation dans les réacteurs biochimiques. Cette reformulation a été possible en considérant les vitesses de réaction comme des entrées inconnues que l'on cherche à estimer conjointement avec l'état du procédé, en l'occurrence, les concentrations en composés avec la température dans le cas du réacteur chimique.

Nous avons aussi présenté dans ce travail une forme canonique pour une classe de systèmes uniformément observable. En nous appuyant sur cette forme, nous avons proposé la

synthèse d'un observateur de type grand gain dont le gain ne nécessite la résolution d'aucun système et dont l'expression a été donnée. Le réglage de ce gain se fait à l'aide d'un seul paramètre de synthèse.

Nous travaillons actuellement pour donner une condition suffisante, portant sur les couplages entre les différents blocs, pour qu'un système uniformément observable puisse se mettre sous la nouvelle forme canonique proposée. Plus précisément, nous montrerons que tout système uniformément observable satisfaisant à une condition de structure que l'on donnera peut se mettre à l'aide d'une transformation appropriée, qui sera aussi donnée, sous la forme canonique proposée.

En ce qui concerne la synthèse d'observateurs inconnues, nous comptons exploiter les résultats présentés dans cette thèse pour les étendre à l'ensemble des systèmes uniformément observables et nous nous appuyerons sur la forme observable présentée pour la synthèse d'observateurs appropriés.

Bibliographie

- [BCDT⁺93] G. Bornard, F. Celle, G. Dauphin-Tanguy, G. Gilles, J. Lottin, L. Pronzato, S. Scavarda, D. Thomasset, and E. Walter. *Systèmes non linéaires. 1. modélisation - estimation*, chapter Observabilité et observateurs, pages 177–221. Automatique. Masson, 1993.
- [BD90] G. Bastin and D. Dochain. *On-line estimation and adaptive control for bioreactors*. Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [BDR02] M. Boutayeb, M. Darouach, and H. Rafaralahy. Generalized state-space observers for chaotic synchronization and secure communication. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I*, 49 :345–349, 2002.
- [BFF07] J.P. Barbot, M. Fliess, and T. Floquet. An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs. In *Proc. 46th IEEE Conf. Decision Control*, New Orleans, 2007.
- [BFH98] K. Busawon, M. Farza, and H. Hammouri. Observer design for a special class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 71 :405–418, 1998.
- [BH91] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 122, Brighton, England, 1991.
- [BH02] G. Bornard and H. Hammouri. A graph approach to uniform observability of nonlinear multi output systems. In *Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.
- [Bha78] S. P. Bhattacharyya. Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 23 :483–484, 1978.
- [BO86] J.E. Bailey and D.F. Ollis. *Biochemical Engineering Fundamentals*. McGraw-Hill, New York, 1986.
- [BVR89] B. Bonvin, P. De Vallière, and D.W.T. Rippin. Application of estimation techniques to batch reactors i : modelling thermal effects. *Comp. Chem. Engng.*, 13 :1–9, 1989.

- [Che92] L. Chen. *Modeling, identifiability and control of complex biotechnological systems*. Phd thesis, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1992.
- [CMG93] G. Ciccarella, M. D. Mora, and A. Germani. A luenberger-like observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57 :537–556, 1993.
- [CT98] M. Corless and J. Tu. State and Input Estimation for a Class of Uncertain Systems. *Automatica*, 34(6) :757–764, 1998.
- [DBG92] F. Deza, E. Busvelle, and J.P. Gauthier. Exponentially converging observers for distillation columns and internal stability for the dynamic output feedback. *Chemical Eng. Sci.*, 47 :3935–3641, 1992.
- [DF91a] S. Diop and M. Fliess. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. In *Proc. 36th IEEE Conf. Decision Control*, pages 714–719, Brighton, 1991.
- [DF91b] S. Diop and M. Fliess. On nonlinear observability. In *Proc. 1st Europ. Control Conf.*, pages 152–157, Hermès, 1991.
- [Doc03] D. Dochain. State observers for processes with uncertain kinetics. *International Journal of Control*, 76(15) :1483–1492, 2003.
- [DZX94] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S.J. Xu. Full-Order Observer for Linear Systems with Unknown Inputs. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 39(3) :606–609, 1994.
- [FBH98] M. Farza, K. Busawon, and H. Hammouri. Simple Nonlinear Observers for On-line Estimation of Kinetic Rates in Bioreactors. *Automatica*, 34(3) :301–318, 1998.
- [FHJL99] M. Farza, H. Hammouri, C. Jallut, and J. Liéto. State observation of a nonlinear system : Application to (bio)chemical processes. *AIChE Journal*, 45 :93–106, 1999.
- [FJSR08] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramírez. Nonlinear estimation is easy. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, page to appear, 2008.
- [FMR04] M. Farza, M. M’saad, and L. Rossignol. Observer design for a class of mimo nonlinear systems. *Automatica*, 40 :135–143, 2004.
- [FMS05] M. Farza, M. M’Saad, and M. Sekher. A set of observers for a class of nonlinear systems. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, praha, Czech Republic, 4-8 July 2005.
- [GB81] J.P. Gauthier and G. Bornard. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 26 :922–926, 1981.

- [GHO92] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems - application to bioreactors. *IEEE Trans. on Auto. Control*, 37 :875–880, 1992.
- [GK94] J.P. Gauthier and I.A.K. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control. Optim.*, 32 :975–994, 1994.
- [GS91] Y. Guan and M. Saif. A Novel Approach to the Design of Unknown Inputs Observers. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 36(5) :632–635, 1991.
- [Gua02] M. Guay. Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 47 :1730–1735, 2002.
- [HBS00] M. Hou, K. Busawon, and M. Saif. Observer design for a class of MIMO nonlinear systems. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 45(7) :1350–1355, 2000.
- [HF03] H. Hammouri and M. Farza. Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM J. on Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 :353–370, 2003.
- [HK77] Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 22 :728–740, 1977.
- [HM92] M. Hou and P. C. Müller. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-37 :871–875, 1992.
- [HP99] M. Hou and A. C. Pugh. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems. *Syst. Contr. Lett.*, 37 :1–9, 1999.
- [HT04] Q.P. Ha and H. Trinh. State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 40 :1779–1785, 2004.
- [HYJ01] H.Shim, Y.I.Son, and J.H.Seo. Semi-global observer for multi-output nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 42 :233–244, 2001.
- [Joh75] C. D. Johson. On observers for linear systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, 14 :825–831, 1975.
- [KI83] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Syst. Contr. Lett.*, 3 :47–52, 1983.
- [KR85] A. J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. Contr. Optim.*, 23 :197–216, 1985.
- [KVR80] P. Kudva, N. Viswanadham, and A. Ramakrishna. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-25 :113–115, 1980.
- [LH99] T.L. Liao and N.S. Huang. An observer-based approach for chaotic synchronization with applications to secure communications. *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I : Fundamental Theory and Application*, 46(9) :1144–1150, 1999.

- [MH74] J. S. Meditch and G. H. Hostetter. Observers for systems with unknown and inaccessible inputs. *International Journal of Control*, 19 :473–480, 1974.
- [Nij81] H. Nijmeijer. Observability of a class of nonlinear systems : A geometric approach. *Ricerche di Automatica*, 12 :1–19, 1981.
- [PB89a] P. De Vallière P. and D. Bonvin. Application of estimation techniques to batch reactors ii : experimental studies in state and parameter estimation. *Comp. Chem. Engng.*, 13 :11–20, 1989.
- [PB89b] P. De Vallière P. and D. Bonvin. Application of estimation techniques to batch reactors iii : modelling refinements which improve the quality of state and parameter estimation. *Comp. Chem. Engng.*, 14 :799–808, 1989.
- [Raj98] R. Rajamani. Observers for Lipschitz Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3) :397–401, 1998.
- [RZ94] J. Rudolph and M. Zeitz. A block triangular nonlinear observer normal form. *Syst. Contr. Lett.*, 23 :1–8, 1994.
- [SGS03] I. Souleiman, A. Glumineau, and G. Schreirer. Direct transformation of nonlinear systems into state affine MISO form and nonlinear observers design. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 48 :2191–2196, 2003.
- [Shi00] H. Shim. *A Passivity-based nonlinear observer and a semi-global separation principle*. Phd thesis, School of Electrical Engineering, Seoul National University, 2000.
- [SS32] H. Schuler and C.U. Schmidt. Model-based measurement techniques in chemical reactor applications. *International Chemical Engineering*, 33(4) :559–576, 1992.
- [SS92] H. Schuler and C.U. Schmidt. Calorimetric state estimators for chemical reactor diagnosis and control : review and applications. *Chem. Engng. Sci.*, 47(4) :899–915, 1992.
- [STSS89] H. Shimizu, T. Takamatsu, S. Shioya, and K.I. Suga. An algorithmic approach to constructing the on-line estimation system for the specific growth rate. *Biotechnol. Bioeng.*, 33 :354–364, 1989.
- [WDD75] S. H. Wang, E. J. Davison, and P. Dorato. Observing the state of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-20 :716–717, 1975.
- [Wil77] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13 :243–254, 1977.
- [WS84] N.S. Wang and G.N. Stephanopoulos. Computer applications to fermentation processes. *CRC Crit. Rev. Biotechnol.*, 2 :1–103, 1984.

- [XS01] Y. Xiong and M. Saif. Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-46(12) :2012–2017, 2001.
- [XS03] Y. Xiong and M. Saif. Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, 39 :1389–1398, 2003.
- [XW89] X.H.Xia and W.B.Gao. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM J.Control Optim.*, 27(1) :199–216, 1989.
- [YW88] F. Yang and R. W. Wilde. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Aut. Control*, AC-33 :677–681, 1988.