



**HAL**  
open science

# Effet des conditions aux limites et analyse multi-échelles en mécanique des fluides, chromatographie et électromagnétisme

Marguerite Gisclon

► **To cite this version:**

Marguerite Gisclon. Effet des conditions aux limites et analyse multi-échelles en mécanique des fluides, chromatographie et électromagnétisme. Mathématiques [math]. Université de Savoie, 2007. tel-00259592

**HAL Id: tel-00259592**

**<https://theses.hal.science/tel-00259592>**

Submitted on 28 Feb 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE SAVOIE

U.F.R Sciences Fondamentales et Appliquées SFA

Laboratoire de Mathématiques

UMR du CNRS 5127

# Habilitation à Diriger des Recherches

PAR

Marguerite GISCLON

Docteur d'Université en Mathématiques Appliquées

Maître de Conférences

**Effet des conditions aux limites et analyse multi-échelles en  
mécanique des fluides, chromatographie et électromagnétisme**

Soutenue le 7 décembre 2007, devant le jury composé de

F. ALOUGES, Professeur à l'Université d'Orsay, président,  
D. BUCUR, Professeur à l'Université de Savoie,  
B. DESJARDINS, Professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Paris, rapporteur,  
F. JAMES, Professeur à l'Université d'Orléans, rapporteur,  
A. JÜNGEL, Professeur à l'Université de Vienne (Autriche), rapporteur,  
D. SERRE, Professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon.

**Résumé :** Ce texte de synthèse a pour but de présenter l'évolution de mes recherches postérieures à ma thèse. Ce travail s'articule autour de plusieurs axes de recherche dans le cadre des équations aux dérivées partielles non linéaires et en particulier des lois de conservation.

Il s'inscrit dans l'étude des problèmes hyperboliques, des problèmes mixtes et des équations cinétiques.

Les domaines d'application sont la mécanique des fluides ou du solide, la propagation de composants chimiques, l'électromagnétisme, l'optique.

Mon activité concerne d'abord la modélisation de phénomènes physiques ou chimiques sous forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires telles que les équations de Bloch, Korteweg, Navier-Stokes, Saint-Venant, puis vient l'étude mathématique de ces équations à travers les problèmes d'existence, d'unicité, de régularité avec éventuellement la mise au point de méthodes numériques de résolution.

Ce document est divisé en une introduction générale et trois chapitres qui concernent respectivement les systèmes hyperboliques avec conditions aux limites et la chromatographie, les problèmes d'analyse asymptotique et enfin les méthodes cinétiques.

Dans chaque partie, un historique et une présentation des différents résultats mathématiques sont faits et quelques problèmes ouverts sont donnés.

**AMS Classification :** 34C27, 35F30, 35Q30, 35L60, 35L65, 35L67, 35Q30, 35Q35, 76A20, 76D08, 78M35, 78M40, 81V80.

**Mots clés :** asymptotique, calcul scientifique, caractéristique, cinétique, conditions aux limites, de transmission, couches limites, décomposition de domaines, écoulements à surface libre, en charge, peu profond, entropie, équations aux dérivées partielles, équations de Bloch, Boltzmann, Korteweg-de Vries, Navier-Stokes, Saint-Venant, taux et Reynolds, estimations de petits diviseurs, fluide, homogénéisation, lois de conservation, matrice de densité, micro fluidique, modélisation mathématique et numérique, niveaux d'énergie, nombres de Coriolis, Froude, Mach, ondes, problème de Cauchy et mixte, rugosité, schéma numérique, cinétique, de Godunov, systèmes hyperboliques, paraboliques.

## Remerciements

Benoît Desjardins, François James, Ansgar Juengel m'ont fait un grand honneur en acceptant le lourd travail de rapporteur. Je les remercie.

C'est un grand plaisir que me font François Alouges et Dorin Bucur en participant à ma soutenance. Je les remercie d'être présents aujourd'hui.

Denis Serre, après avoir guidé mes premiers pas en recherche, continue de suivre l'évolution de mon travail. Je suis très sensible à l'intérêt qu'il continue de me témoigner et le remercie de sa présence à ce jury.

S'il avait fallu désigner un directeur de recherche pour cette habilitation, Didier Bresch aurait évidemment été celui-ci. Je tiens à le remercier pour tout le temps qu'il me consacre.

Les encouragements constants de Thierry Colin et son soutien amical me guident toujours après toutes ces années. Pour tout cela et bien plus encore, je le remercie.

Christian Bourdarias, Stéphane Junca et Laurent Chupin sont des collaborateurs réguliers et particulièrement disponibles. Je les remercie sincèrement pour ces travaux en commun.

Je suis reconnaissante à Brigitte Bidégaray-Fesquet et Eric Dumas pour le soin avec lequel ils ont relu les premières versions de ce texte et pour les remarques qu'ils m'ont faites à cette occasion.

Au sein du LAMA, je veux remercier plus particulièrement Christophe Raffalli pour l'aide informatique qu'il ne rechigne jamais à me donner. Les logiciens de ce laboratoire créent une atmosphère particulièrement agréable.

A mes amis qui sont toujours présents dans toutes les circonstances : Claire et Pierre, Flo et Sylvain, Hélène et Matthieu, Laurence, Dom.

Evidemment je n'oublie pas Laurent...

Je dédie ce mémoire à mon père.



# Table des matières



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Organisation du mémoire

Mon travail s'articule autour de plusieurs axes de recherche notamment dans le domaine des équations aux dérivées partielles non linéaires appliquées à la physique et à la chimie. Il s'inscrit dans le cadre des lois de conservation, des problèmes hyperboliques, des équations cinétiques et en particulier des problèmes mixtes. Mon activité concerne la modélisation de phénomènes physiques ou chimiques sous forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires (mélange de fluides, propagation de composants chimiques, optique, électromagnétisme, écoulements en conduites fermées et ouvertes...) jusqu'à l'étude mathématique de ces équations à travers les problèmes d'existence, d'unicité, de régularité ... et éventuellement la mise au point de méthodes numériques de résolution.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

- les systèmes hyperboliques avec conditions aux limites et la chromatographie,
- les problèmes d'analyse asymptotique,
- la formulation cinétique en particulier dans le cadre d'applications hydrauliques.

De nombreux problèmes régis par des équations aux dérivées partielles font intervenir des conditions aux limites d'où des problèmes de traitement de couches limites, de problèmes bien posés. C'est pourquoi, dans ma thèse (?), j'ai étudié les conditions aux limites pour les systèmes hyperboliques *via* l'approximation parabolique et après ma thèse, la version discrète de l'étude continue faite précédemment : on cherche à comprendre ce que devient la condition aux limites posée pour un schéma numérique lorsque le pas d'espace tend vers zéro (?). Cette partie hyperbolique est traitée rapidement dans le chapitre deux où l'accent sera surtout mis sur les développements complétant les résultats de ma thèse et dus entre autres à E. GRENIER, O. GUÈS, F. ROUSSET, F. SUEUR.

L'essentiel de ce deuxième chapitre consiste à décrire les principaux résultats obtenus depuis plusieurs années avec C. BOURDARIAS et S. JUNCA concernant la chromatographie qui décrit l'adsorption d'un mélange gazeux (?). Ces articles traitent l'analyse mathématique d'équations aux dérivées partielles du génie chimique, exploitent l'aspect hyperbolique du système



obtenu ce qui permet de répondre à plusieurs questions d'analyse. Nous obtenons des résultats mathématiques d'existence et d'unicité dans le cadre  $BV$  et des résultats d'existence de solutions  $L^\infty$ . Des paires d'entropie-flux sont trouvées et les propriétés de convexité sont traitées. Le problème de Riemann est résolu, les invariants de Riemann sont donnés. Un schéma de Godunov est construit ce qui donne des solutions globales  $BV$ , des solutions faibles entropiques et des résultats de régularité  $BV$ . Les formes des ondes de chocs et de raréfaction sont données. Nous illustrons toutes ces propriétés mathématiques par des résultats numériques.

Le troisième chapitre de ce mémoire concerne l'analyse asymptotique et résume plusieurs articles ( ?, ?, ?, ? ) tout en abordant un peu l'historique des problèmes et en donnant des perspectives scientifiques.

Avec T. COLIN (Université de Bordeaux), un travail théorique et numérique ( ? ) a été effectué sur un problème mixte concernant l'équation de Korteweg-de Vries en dimension un d'espace qui faisait suite à un travail de T. COLIN et J.-M. GHIDAGLIA ( ? ). Nous avons étudié un problème de Cauchy et aux limites pour cette équation en dimension un d'espace, obtenu des effets régularisants globaux uniformes par rapport à la longueur de l'intervalle et montré que la solution du problème aux limites converge lorsque la longueur de l'intervalle tend vers l'infini vers la solution du problème posé sur le quart de plan  $t > 0$ ,  $x > 0$ . Nous avons également proposé un schéma aux différences finies très simple pour le problème sur  $[0, 1]$  et montré sa stabilité.

Dans le cadre asymptotique des équations aux dérivées partielles, avec B. BIDÉGARAY-FESQUET (Laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble), F. CASTELLA (IRMAR Rennes) et E. DUMAS (Institut Fourier de Grenoble) nous nous sommes intéressés à l'asymptotique de modèles quantiques sur le modèle de Bloch qui décrit l'évolution de la matrice de densité d'un atome avec un ensemble discret de niveaux d'énergie. Nous avons montré ( ? ) que la partie diagonale de la matrice de densité est asymptotiquement solution d'une équation de Boltzmann linéaire dans laquelle les taux de transition sont des moyennes en temps en un sens donné du potentiel. Ce travail fait suite à celui de ?.

Un autre travail sur l'asymptotique ( ? ), avec D. BRESCH (LAMA Chambéry) et C.-K. LIN (Taiwan) traite les équations de Saint-Venant avec des régularisations physiques et les équations des grands lacs avec viscosité. Nous avons étudié la limite faible nombre de Froude pour une hauteur d'eau asymptotiquement proche d'un profil donné non nécessairement constant afin de justifier les modèles des grands lacs visqueux étudiés en 2001 par D. LEVERMORE et B. SAMMARTINO ( ? ) dans le cas bien préparé.

Le dernier article sur l'asymptotique ( ? ) traite l'effet des rugosités sur le système de Stokes. En effet, avec D. BRESCH, L. CHUPIN, T. COLIN, nous étudions le comportement asymptotique d'un fluide visqueux incompressible dans un domaine mince avec une surface rugueuse. Nous obtenons différentes équations de Reynolds pour la pression.

L'objet du quatrième chapitre de ce mémoire est la formulation cinétique en mécanique des fluides. Le premier article sur ce sujet a permis de traiter avec C. BOURDARIAS (Université de Chambéry) et A. OMRANE (Université des Antilles) le problème de conditions aux limites de

transmission pour le problème cinétique avec des paramètres microscopiques distincts (cas de deux demi-espaces) et le passage à la limite fluide (?).

Toujours dans le cadre des formulations cinétiques, avec C. BOURDARIAS et S. GERBI, nous nous sommes intéressés aux écoulements mixtes à surface libre et en charge dans un canal de forme quelconque. Nous avons travaillé sur les équations de Saint-Venant en vue d'applications hydrauliques par une approche cinétique (?).

Nous nous intéressons aussi à la formulation cinétique pour le système hyperbolique de la chromatographie avec vitesse non constante. Cette étude nous conduit à plusieurs applications : schéma cinétique, régions invariantes,...

Ce mémoire contient plus particulièrement une description des travaux suivants.

## 1.2 Liste des travaux

### 1.2.1 Etude de systèmes hyperboliques

M. Gisclon. Comparaison de deux perturbations singulières pour l'équation de Burgers avec conditions aux limites. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, tome 316, Série I, 1011-1014, 1993.

M. Gisclon. Etude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique via l'approximation parabolique. *J. Math. Pures Appl.*, 75, 485-508, 1996.

M. Gisclon, D. Serre. Conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique fournies par le schéma de Godunov. *Model. Math. Anal. Numer.*, Volume 31, no 3, 359-380, 1997.

C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. Some mathematical results on a system of transport equations with an algebraic constraint describing fixed-bed adsorption of gases. *J. Math. Anal. Appl.*, 313, no 2, 551-571, 2006.

C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. Existence of weak entropic solutions for gas chromatography system with one or two active species and non convex isotherm. *Commun. Math. Sci.*, volume 5, no 1, 67-84, mars 2007.

C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. Hyperbolic models in gas-solid chromatography. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada. Bol. SEMA*, 2008.

C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. Strong Stability with respect to weak limit for a Hyperbolic System arising from Gas Chromatography. En rédaction.

### 1.2.2 Etude asymptotique

T. Colin, M. Gisclon. An initial boundary value problem that approximate the quarter plane problem for the Korteweg-de Vries equation. *Nonlinear Anal.*, no 46, 859-892, 2001.

B. Bidégaray-Fesquet, F. Castella, E. Dumas, M. Gisclon. From Bloch model to the rate equations II : The Case of almost degenerate energy levels. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, volume 14, no 12, 1785-1817, 2004.

D. Bresch, M. Gisclon, C.-K. Lin. An example of low Mach (Froude) number effects for compressible flows with nonconstant density (height) limit. *Math. Model. Num. Anal.*, volume 39, no 3, 477-486, 2005.

D. Bresch, L. Chupin, T. Colin, M. Gisclon. A micro-fluidic model with rough boundaries. Soumis.

D. Bresch, L. Chupin, T. Colin, M. Gisclon. A mixed Reynolds-Stokes system for general roughness effects. En rédaction.

### 1.2.3 Formulation cinétique

C. Bourdarias, M. Gisclon, A. Omrane. Transmission boundary conditions in a model kinetic decomposition domain, *Discrete Cont. Dyn. Syst.. Serie B*, volume 2, no 1, 69-94, 2002.

C. Bourdarias, S. Gerbi, M. Gisclon. A kinetic formulation for a model coupling free surface and pressurid flows in closed pipes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007.

C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. A kinetic scheme for a  $2 \times 2$  hyperbolic system arising in gas chromatography. En rédaction.

# Chapitre 2

## Etude de systèmes hyperboliques

### 2.1 Couches limites

#### 2.1.1 Etude théorique

Ma thèse sous la direction de D. Serre effectuée au sein de l'UMPA de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon est l'étude des conditions aux limites pour les systèmes strictement hyperboliques, *via* l'approximation parabolique, c'est-à-dire l'étude de problèmes mixtes pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation à une dimension d'espace (? , ?).

Une approche possible est la méthode de la viscosité. Elle consiste à étudier les solutions perturbées par une diffusion de paramètre  $\varepsilon > 0$  plus précisément, à étudier le comportement de la condition aux limites du système visqueux suivant lorsque le paramètre  $\varepsilon$  tend vers zéro

$$(P) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_x (B(u^\varepsilon) \partial_x u^\varepsilon), & x > 0, t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = b(x), & x > 0, \\ u^\varepsilon(0, t) = a(t), & t > 0, \end{cases}$$

où  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$  appartient à  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , le flux  $f$ , la donnée au bord  $a$ , la condition initiale  $b$  et la matrice de viscosité  $B$  sont des fonctions données ( $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est régulière,  $b$  appartient à  $L^\infty(0, \infty)$ ,  $B$  est une matrice réelle de dimension  $n$ ).

Une des questions qui m'a intéressée est de déterminer l'influence du choix de la matrice de viscosité  $B$  sur la trace en  $x = 0$  de  $u$  où  $u$  est la limite presque partout de la suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  quand le paramètre  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(H1) *pour tout  $u$ , les valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(u)$ , notées  $\lambda_i(u)$ , sont réelles, simples et non nulles,*

$$(H1) \lambda_1(u) < \dots < \lambda_p(u) < 0 < \lambda_{p+1}(u) < \dots < \lambda_n(u).$$

C'est une hypothèse d'hyperbolicité stricte qui exprime aussi le fait que le bord  $x = 0$  n'est jamais caractéristique.

(H2) *le système hyperbolique*

$$(H) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = b(x), & x > 0, \end{cases}$$

admet une entropie  $E$  de flux  $F$  telle que la matrice hessienne symétrique  $S = D^2 E$  est une matrice définie positive,

(H3) *la matrice de viscosité  $B$  est telle que pour tout  $K$  compact de  $\mathbb{R}^n$ , on a*

$$\exists \alpha_K > 0, \forall u \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, (D^2 E(u)\xi, B(u)\xi) \geq \alpha_K |\xi|^2.$$

C. BARDOS, D. LEROUX et C. NÉDÉLEC (?) avaient obtenu des résultats dans le cas scalaire. F. DUBOIS-LE FLOCH (?) et A. BENABDALLAH-D. SERRE (?) avaient étudié le cas des systèmes et obtenu une réponse partielle sous forme d'inégalités.

L'idée de ma thèse a été d'introduire un développement asymptotique

$$u^\varepsilon(x, t) = u(x, t) + v\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) + w^\varepsilon(x, t)$$

qui fait apparaître la couche limite  $v$  et de la caractériser.

Soit  $C(a)$  l'ensemble des  $\bar{u}$  dans  $\mathbb{R}^n$  pour lesquels il existe une solution  $v \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$  du problème

$$(P_{\bar{u}}) \begin{cases} B(v(y) + \bar{u})v'(y) = f(v(y) + \bar{u}) - f(\bar{u}), & y > 0, \\ v(0) + \bar{u} = a, \\ v(+\infty) = 0. \end{cases}$$

L'ensemble  $C(a)$  est appelé ensemble de conditions aux limites "résiduelles".

Soit  $g_u(v) = B(u + v)^{-1}(f(u + v) - f(u))$ .

**Théorème 2.1.1** *Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), l'ensemble  $C(a)$  est une variété de dimension  $p$  au voisinage de  $a$ , d'espace tangent en  $a$  égal à  $E_a^s = \bigoplus_{i=1}^p E_{\mu_i(a)}$  et admettant une paramétrisation régulière en  $a$  où  $E_a^s$  est l'espace invariant par  $Dg_a(0)$  associé aux valeurs propres strictement négatives de  $Dg_a(0)$ , c'est-à-dire la somme directe des sous espaces caractéristiques stables associés aux valeurs propres strictement négatives de  $Dg_a(0)$  :*

$$E_{\mu_i(a)} = \ker(Dg_a(0) - \mu_i(a)I_n).$$

L'idée était ensuite par une méthode d'énergie de démontrer la validité du développement asymptotique sur un intervalle de temps fini, antérieur à la formation des chocs, c'est-à-dire montrer que  $w^\varepsilon$  est un  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$  dans  $L^2$ .

Les majorations suivantes ont lieu si la matrice de viscosité  $B$  est une matrice inversible, dissipative, pas nécessairement constante :

**Théorème 2.1.2** *Supposons que  $u$ , la solution du problème mixte*

$$(C) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = b(x), & x > 0, \\ u(0, t) \in C(a(t)), & t > 0, \end{cases}$$

est à valeurs dans un compact et que le système (P) possède une solution régulière  $u^\varepsilon$  dans  $L^\infty$  pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T_\varepsilon]$ .

Alors, il existe une constante  $c > 0$  et un temps  $T_1 \in ]0, T]$  qui ne dépend que de  $v$  tels que les majorations ci-dessous aient lieu pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $t \in [0, \min(T_\varepsilon, T_1)]$  :

$$\|u^\varepsilon(x, t) - u(x, t) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq c \sqrt{\varepsilon t}, \quad (2.1)$$

$$\|u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq c(t) \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.2)$$

$$\int_0^t \int_0^{+\infty} \|\partial_x(u^\varepsilon(x, s) - u(x, s) - v\left(\frac{x}{\varepsilon}, s\right))\|^2 dx ds \leq c t. \quad (2.3)$$

Le résultat suivant est finalement obtenu :

**Théorème 2.1.3** *Supposons que  $b$  est proche d'un état constant dans  $L^\infty \cap L^2(\mathbb{R}^+)$  et que les trois hypothèses (H1), (H2) et (H3) ont lieu.*

Alors, il existe un temps  $S > 0$ , indépendant de  $\varepsilon$  et une solution  $u^\varepsilon$  de (P) définie et régulière sur  $(0, S) \times \mathbb{R}^+$ . La suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge dans  $L^\infty(0, S; L^2(\mathbb{R}^+))$  vers l'unique solution régulière  $u$  de (H) qui satisfait la condition aux limites  $u(0, t) \in C(a(t))$ , quand le paramètre  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Beaucoup de travaux ont étudié depuis des extensions de ce problème, à savoir le comportement de la solution quand  $\varepsilon > 0$  tend vers zéro du système parabolique plus général suivant

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \sum_{i=1}^q A_i(t, x, u^\varepsilon) \partial_i u^\varepsilon = \varepsilon \Delta u^\varepsilon, & \text{dans } \Omega, t > 0, \\ u^\varepsilon(t = 0) = u_0^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $u^\varepsilon$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ , les  $A_i$  sont des matrices de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en les variables  $t, x, u^\varepsilon$ ,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $u_0^\varepsilon$  est une famille de fonctions données.

Ainsi, E. GRENIER (ENS Lyon) traite ce sujet plusieurs dimensions et dans le cas caractéristique (?). On trouvera aussi une étude complète du cas linéaire  $A_i$  indépendant de  $u^\varepsilon$  et du cas caractéristique faite par O. GUÈS (Université de Marseille) dans ? et ?.

Les épaisseurs de couche limite qui peuvent se former au voisinage du bord ne sont pas les mêmes dans les cas caractéristique et non caractéristique (elles sont de l'ordre soit de  $\varepsilon$ , soit de  $\sqrt{\varepsilon}$ ). Le développement asymptotique de la solution est basé sur une analyse à trois échelles qui permet de construire des correcteurs à tout ordre et de décrire la couche limite de viscosité. Il reste ensuite la convergence de la solution quand  $\varepsilon$  tend vers zéro vers la solution du problème mixte hyperbolique limite.

Beaucoup de travaux se poursuivent sur ce sujet. E. GRENIER et O. GUÈS (?), K.-T. JOSEPH et P. LE FLOCH (?), G. MÉTIVIER et K. ZUMBRUN (?), F. SUEUR (?) se proposent de relaxer les hypothèses. Par exemple, E. GRENIER et F. ROUSSET (?) ont prolongé ce travail en remplaçant l'hypothèse de petitesse par celle de stabilité spectrale de la condition aux limites.

Dans les exemples réalistes, la matrice  $B(u)$  est rarement inversible, sauf dans le cas scalaire. Ce défaut d'inversibilité complique beaucoup les preuves de convergence, c'est pourquoi l'hypothèse d'inversibilité de  $B(u)$  est très importante. Mais la quasi-totalité des perturbations d'origine physique ne rentrent pas dans ce cadre. En effet, à chaque fois qu'un système contient une loi de conservation telle que celle de la masse

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

l'équation ne sera pas perturbée. Les matrices  $B$  seront singulières avec une ligne de zéros. Comme la forme quadratique

$$\xi \mapsto (D^2 E(u)\xi, B(u)\xi)$$

doit être positive ou nulle sans être définie positive, une hypothèse naturelle est :

*pour tout  $K$  compact de  $\mathbb{R}^n$ ,*

$$\exists \alpha_K > 0, \forall u \in K, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, (D^2 E(u)\xi, B(u)\xi) \geq \alpha_K |B(u)\xi|^2.$$

Il est donc intéressant de remplacer l'hypothèse (H3) par cette dernière et de traiter ainsi le cas de matrices de viscosité conformes à la physique.

Ce cas où le tenseur de viscosité n'est pas inversible a été traité par F. ROUSSET dans ? et ?.

### 2.1.2 Etude numérique

Après ma thèse, en collaboration avec D. SERRE (ENS Lyon), j'ai considéré les conditions aux limites résiduelles fournies par un schéma numérique. Nous avons étudié ce que devient la condition aux limites posée pour un schéma numérique lorsque le pas d'espace tend vers zéro.

Le traitement de la frontière  $\{x = 0\} \times \mathbb{R}$  dans le schéma de Godunov détermine une condition aux limites pour le système (H) lorsque le pas d'espace  $\Delta x = \varepsilon$  tend vers zéro.

À l'aide d'estimations sur les entropies et les flux associés, nous avons démontré, sous certaines hypothèses naturelles, la convergence de la solution du schéma de Godunov adapté au cas d'un domaine  $x > 0$  vers la solution d'un système hyperbolique mixte sur un intervalle de temps fini, antérieur à la formation des chocs (?), c'est-à-dire le théorème de convergence suivant :

**Théorème 2.1.4** *Soient une condition aux limites et une condition initiale  $a$  et  $b$  de classe  $C^\infty$  et bornées qui satisfont  $a(0) = b(0)$ ,  $b$  étant constant hors d'un intervalle borné.*

*Sous l'hypothèse supplémentaire*

(H4) : *pour tout  $A \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\mathcal{V}$  voisinage de  $A$  tel que*

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathcal{V} \cap \mathcal{O}_-(A)) \times (\mathcal{V} \cap \mathcal{O}_-(A)), \delta(\alpha, \beta) \leq 0,$$

où

$$\mathcal{O}_-(A) = \{R(0^+, A, v), v \in \mathbb{R}^n\} = \{\tilde{u} \in \mathbb{R}^n, \tilde{u} \text{ est la valeur en } 0^+ \text{ d'une solution d'un problème de Riemann d'état à gauche } A\},$$

$$\delta(\alpha, \beta) = F(\alpha) - F(\beta) - dE(\beta) \cdot (f(\alpha) - f(\beta)),$$

il existe un temps  $S > 0$  indépendant du pas de temps et du pas d'espace  $\varepsilon = \Delta x$  et une solution  $u^\varepsilon$  du schéma de Godunov modifié définie et régulière sur  $\mathbb{R}_x^+ \times [0, S]$  tels que la suite  $(u^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge dans  $L^\infty(0, S, L^2(\mathbb{R}^+))$  vers l'unique solution régulière  $u$  du système hyperbolique mixte

$$(C) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = b(x), & x > 0, \\ u(0, t) \in \mathcal{O}_-(a(t)), & t > 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{0 < t \leq S} \|u^\varepsilon(x, t) - u(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = 0.$$

Remarquons que dans le cas du schéma de Godunov, la condition aux limites est toujours stable et le développement asymptotique est valide jusqu'à la formation des chocs.

L'algorithme a été testé dans le cas du p-système de la dynamique des gaz avec  $n = 2$  et le flux  $f$  est défini par

$$f : \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u = (u_1, u_2) & \mapsto & (u_2, p(u_1)) \end{array} \right),$$

avec

$$p(x) = \exp(x) + x - 1.$$



Le pas d'espace est introduit au départ  $\Delta x = 0,1$ . L'approximation numérique  $u_j^n$  est stockée dans un tableau de dimension 101, c'est-à-dire  $j$  varie de  $-1$  à  $100$ . A chaque itération  $\Delta t_n$  est calculé pour avoir

$$\max_{-1 \leq j \leq 100} \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_2(u_j^n) = \frac{1}{2}.$$

Les données sont  $a(t) = (1, 2)$ ,  $b(x) = (1, -1 + 3 \exp(-x))$ . Elles sont donc bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , bornées et satisfont  $a(0) = b(0)$ . Nous avons observé que la couche limite est bien concentrée sur une maille. Pour des raisons mathématiques, liées à la difficulté de la démonstration de la convergence, nous avons supposé la compatibilité de la condition initiale et de la condition aux limites. Mais nous pouvons penser que le résultat reste vrai pour des données non régulières. Le cas test est le “demi”-problème de Riemann, où chaque donnée  $a$  et  $b$  est une constante. La solution du problème mixte avec condition aux limites “résiduelle” est auto-similaire. C'est la restriction au demi-espace  $x > 0$  de la solution du problème de Riemann entre  $a$  et  $b$ . L'algorithme a été testé avec les données

$$a(t) = (1, 2), \quad b(x) = (1, 5),$$

pour lesquelles la solution présente une détente qui sépare  $b$  de l'état constant

$$c = (0.09918, 3.5).$$

Naturellement, l'étude des conditions aux limites “résiduelles” doit être menée bien au-delà du seul schéma de Godunov. Nous observons alors, en général, que la couche limite s'étale sur plusieurs mailles au lieu d'une. C. CHAINAIS et E.GRENIER (?) ont traité le cas du schéma de Lax-Friedrichs. Pour un schéma monotone en dimension un et pour une loi scalaire ils ont utilisé l'astuce de J. GOODMAN (?) qui consiste à intégrer l'équation. Ils ont aussi donné des exemples de couches limites instables.

### 2.1.3 Projets de recherche, perspectives scientifiques

Un prolongement pourrait être les conditions aux limites mêlées. En effet, je me suis restreinte, dans le cas des systèmes, à la condition aux limites de Dirichlet mais des conditions aux limites plus générales qui proviennent par exemple de la mécanique du solide sont intéressantes à regarder. Elles correspondent par exemple à la dynamique en une dimension d'une plaque élastique linéaire infinie qui est en contact avec frottement avec un corps rigide.

Voici le contexte d'un problème élasto-dynamique de frottement dépendant de la vitesse de glissement. Le corps solide élastique frottant sur la surface rigide est représenté par le domaine  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ . Le matériau élastique considéré est pris isotrope et homogène. La plaque est considérée infinie et de hauteur constante égale à 1 donc le déplacement sera fonction seulement de la variable verticale  $x$ . L'axe horizontal  $y$  est indiqué par la direction de la vitesse tangentielle uniforme imposée sur la surface supérieure de la plaque. Finalement, le déplacement sera nul dans la direction orthogonale au plan défini par  $x$  et  $y$ . On suppose que le déplacement vertical est une fonction linéaire sur la coordonnée  $x$ .

Le déplacement tangentiel  $u^\varepsilon$  dans la direction horizontale  $y$  ne dépend que du temps  $t$  et de sa position verticale  $x$ . La vitesse tangentielle  $v^\varepsilon$  et la contrainte de cisaillement  $\tau^\varepsilon$  sont données par

$$v^\varepsilon(t, x) = \partial_t u^\varepsilon, \quad \tau^\varepsilon(t, x) = \partial_x u^\varepsilon.$$

Le problème est de regarder le passage à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 pour le système

$$\begin{cases} \partial_t v^\varepsilon = \partial_x \tau^\varepsilon, & t \in [0, T], x \in [0, 1], \\ \partial_t \tau^\varepsilon = \partial_x v^\varepsilon + \varepsilon \partial_{xx} \tau^\varepsilon, \\ v^\varepsilon(1, t) = 0, \\ \tau^\varepsilon(0, t) = \mu(v^\varepsilon(0, t)), \end{cases}$$

où  $\mu$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , lipschitzienne, de classe  $\mathcal{C}^1$ , impaire,  $\mu(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ .

## 2.2 Modèles hyperboliques en chromatographie

Cette section concerne des équations aux dérivées partielles du génie chimique et fait références aux articles ?, ?, ?, ?.

La modélisation d'une phase du cycle d'adsorption d'un mélange gazeux à température constante appelé cycle PSA (Pressure Swing Adsorption) conduit à l'écriture d'un système non linéaire d'équations de type transport. Ces équations présentent des analogies avec des lois de conservation scalaires pour lesquelles on dispose de résultats d'existence et d'unicité par des méthodes de compacité  $L^1$  et  $BV$ . Elles s'en distinguent par le type de liaison entre la vitesse et la solution : dans les lois de conservation scalaires, la vitesse est fonction de la solution alors qu'ici c'est la dérivée spatiale de la vitesse qui en dépend. Cette dépendance est liée à une contrainte sur la pression (constante en espace). Dans sa thèse (?), C. BOURDARIAS a obtenu des résultats d'existence et d'unicité dans un cadre  $BV$  puis un résultat d'existence dans un cadre  $L^\infty$  en utilisant une technique d'approximation par régularisation développée par R.-J. DI PERNA et P.-L. LIONS (?). Mais des oscillations peuvent être propagées (voir ?).

Voici le contexte de nos articles (?, ?, ?, ?). Un cycle PSA est un processus de séparation d'un mélange gazeux de  $d$  espèces ( $d \geq 2$ ) pouvant coexister sous deux phases, l'une gazeuse et mobile avec les concentrations  $c_i(t, x)$  ( $0 \leq c_i \leq 1$ ) et la vitesse commune  $u$ , l'autre solide (adsorbée) et fixe avec les concentrations  $q_i(t, x)$ ,  $1 \leq i \leq d$ . Nous notons

$$C = (c_1, \dots, c_d).$$

Suivant P.-M. RUTHWEN (?), l'évolution de ces quantités est décrite par le système

$$\begin{cases} \partial_t c_i + \partial_x (u c_i) = A_i (q_i - q_i^*)(C), \\ \partial_t q_i + A_i q_i = A_i q_i^*(C), t \geq 0, x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.4)$$

qui prend en compte le transport de matière et les changements de phase.

Il est assorti de conditions initiales et limites convenables. La vitesse  $u(t, x)$  qui est une inconnue du problème doit être trouvée de façon à satisfaire une contrainte de pression totale constante en espace, soit dans ce modèle isotherme

$$\sum_{i=1}^d c_i = \rho(t) \quad (2.5)$$

où  $\rho$  représente la densité totale du mélange.

Le protocole expérimental est tel que cette quantité ne dépend que du temps et c'est de cette contrainte que vient la difficulté du problème.

La fonction  $q_i^*$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^d$  et ne dépend que du modèle considéré (isotherme linéaire, isotherme bilinéaire de Langmuir, BET isotherme, ammoniacque..).

Les seconds membres gouvernent les échanges de matière entre phases et le coefficient  $A_i$  peut s'interpréter comme la vitesse à laquelle l'équilibre  $q_i = q_i^*$  est atteint.

Parmi les problèmes voisins relatifs aux processus d'adsorption des gaz, outre le problème non isotherme, le cas de l'adsorption avec équilibre instantané entre les phases gazeuse et solide présente un intérêt dans la mesure où il généralise les équations de la chromatographie dans lesquelles la vitesse du fluide vecteur est constante (voir ? et ?). Il conduit formellement à écrire un système hyperbolique intégro-différentiel dont l'étude est complètement ouverte. Il correspond à faire tendre  $A_i$  vers l'infini et s'écrit

$$\partial_t(c_i + q_i^*(C)) + \partial_x(u c_i) = 0, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.6)$$

sous la contrainte (??).

Avec C. BOURDARIAS (Université de Savoie) et S. JUNCA (Université de Nice) nous avons d'abord étudié ce problème dans le cas particulier de deux composants dont l'un inerte ( $q_2^* = 0$ ) sert de fluide vecteur (?). Le système (??)-(??) dans le cas  $\rho = 1$  se réduit alors à

$$\begin{cases} \partial_t c + \partial_x(u c) & = & 0, \\ \partial_x u & = & \partial_t h(c), \end{cases} \quad (2.7)$$

avec  $c = c_2$ ,  $c_1 = 1 - c$  et

$$h(c) = -q_1^*(c_1, c_2).$$

Nous rajoutons les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\begin{cases} c(0, x) & = & c_0(x) \in [0, 1], \quad x > 0, \\ c(t, 0) & = & c_b(t) \in [0, 1], \quad t > 0, \\ u(t, 0) & = & u_b(t) > 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Sous certaines hypothèses sur la fonction  $h$  telles que

$$(HYP) \quad h'(c) > 0, \quad H'(c) \geq 0$$

où

$$H(c) = 1 + ch'(c),$$

nous montrons l'existence de solutions régulières globales en utilisant la méthode classique des caractéristiques.

**Théorème 2.2.1** *Si (HYP) et  $u_b \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, ]0, +\infty[)$ ,  $c_b, c_0 \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, [0, 1])$  et satisfont les conditions de compatibilité au coin alors le système (??)-(??) admet une et une seule solution*

$$(c, u) \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[ \times [0, +\infty[, [0, 1]) \times \mathcal{C}^1([0, +\infty[ \times [0, +\infty[, ]0, \infty[).$$

Cette étude suggère une condition d'entropie :

$$(CE) \quad c \text{ croit à travers les chocs.}$$

Nous résolvons ensuite le problème de Riemann, c'est-à-dire (??) avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} c(0, x) &= c_+ \in [0, 1], x > 0, \\ c(t, 0) &= c_- \in [0, 1], t > 0, \\ u(t, 0) &= u_- > 0, t > 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous cherchons une solution autosimilaire, c'est-à-dire  $c(t, x) = C(z)$ ,  $u(t, x) = U(z)$  où

$$z = \frac{x}{t} > 0.$$

Puis, *via* l'utilisation d'un schéma numérique de type Godunov, nous obtenons l'existence de solutions faibles globales entropiques :

**Théorème 2.2.2** *Soient  $X > 0$ ,  $T > 0$ . Supposons (HYP) et  $c_0 \in BV(0, X)$ ,  $c_b \in BV(0, T)$ ,  $u_b \in L^\infty(0, T)$ , satisfait  $0 \leq c_0, c_b \leq 1$  et  $\inf_{0 < t < T} u_b(t) > 0$ . Alors le système (??)-(??) admet une solution faible donnée par le schéma de Godunov. De plus,  $c$  et  $u$  satisfont :*

$$\begin{aligned} c &\in L^\infty((0, T) \times (0, X)) \cap L^\infty((0, T); BV(0, X)), \\ c &\in \text{Lip}(0, T; L^1(0, X)), \\ c &\in BV((0, T) \times (0, X)), \\ u &\in L^\infty((0, T) \times (0, X)) \cap L^\infty((0, T); BV(0, X)), \end{aligned}$$

avec les bornes suivantes :

$$0 \leq \min(\inf c_b, \inf c_0) \leq c \leq \max(\sup c_b, \sup c_0) \leq 1, \tag{2.10}$$

$$\inf_{[0,T] \times [0,X]} u > 0, \quad (2.11)$$

$$\int_0^X c(t, x) dx \leq \int_0^X c_0(x) dx + \|u_b\|_\infty \int_0^t c_b(s) ds,$$

$$\|c\|_{L^\infty((0,T), BV(0,X))} \leq TV(c_b, c_0),$$

$$\|u\|_{L^\infty((0,T) \times (0,X))} \leq \|u_b\|_\infty \exp(\gamma TV(c_b, c_0)),$$

( $\gamma$  est une constante qui dépend seulement de la fonction  $h$ ).

Puis nous obtenons l'unicité des solutions faibles entropiques dans la classe des fonctions  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

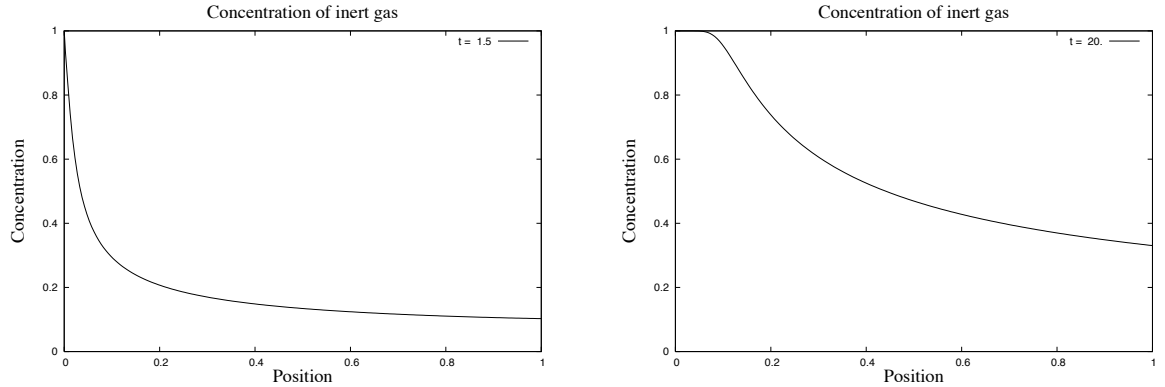
**Théorème 2.2.3** Soient  $T, X > 0$  et  $u_b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $c_b : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ ,  $c_0 : [0, X] \rightarrow [0, 1]$  fonctions  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Supposons (HYP) et

$$\inf_{[0,T]} u_b(t) > 0.$$

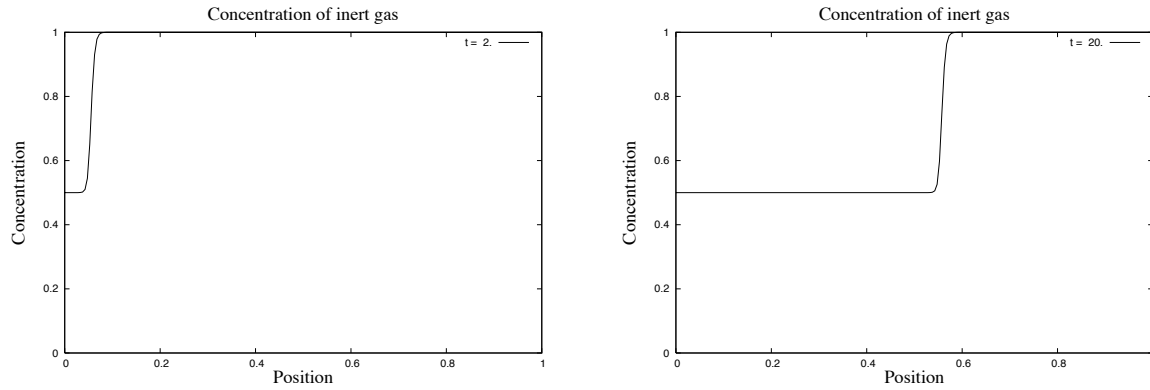
Alors il existe au plus  $(c, u) \in \mathcal{C}_p^1$  solution faible du système (??)-(??) satisfaisant la condition d'entropie (CE) et le principe du maximum (??) et (??).

Les résultats suivants ont été obtenus avec l'isotherme de Langmuir en utilisant le schéma de Godunov modifié. Nous illustrons ainsi l'étude précédente. Les profils dans les cas de l'adsorption ou désorption pour l'isotherme de Langmuir linéaire sont les mêmes que dans ?.

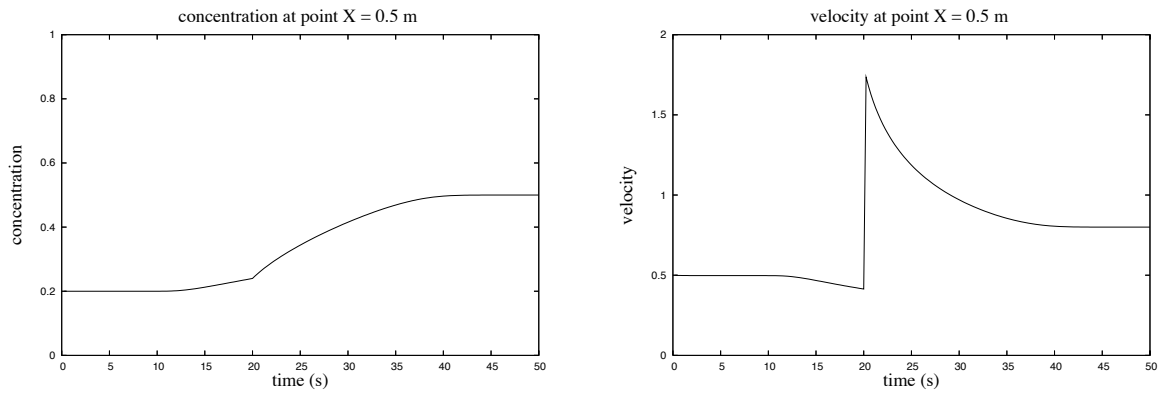
Cette figure représente une étape de désorption. La concentration initiale est  $c_0 = 0.1$ , les conditions aux limites sont  $c_b = 1.0$  et  $u_b = 0.4$ . La discontinuité à  $(t = 0, x = 0)$  donne une onde de raréfaction.



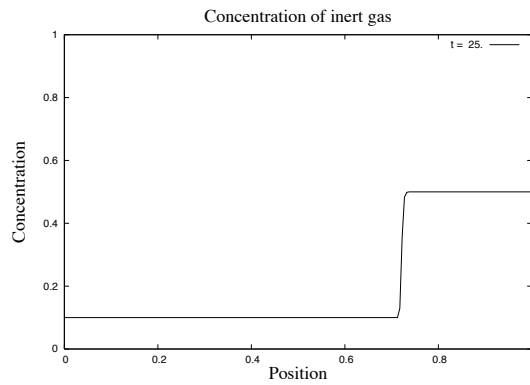
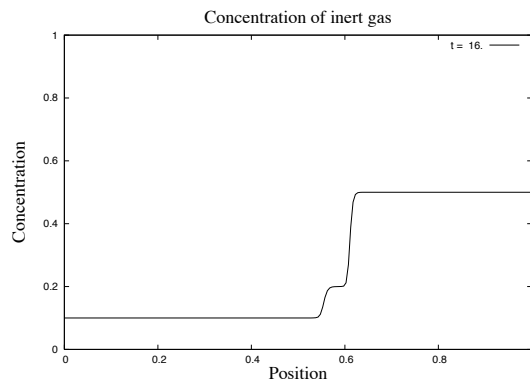
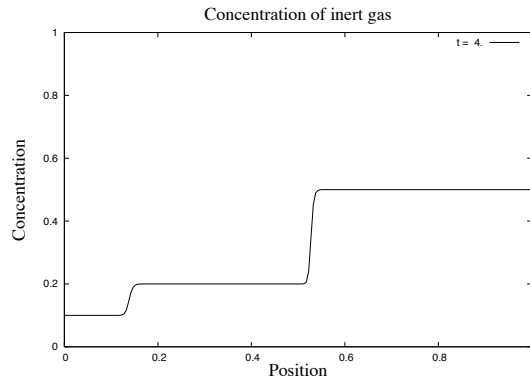
Cette figure est une étape d'adsorption. La concentration initiale est  $c_0 = 1.0$ , les conditions aux limites sont  $c_b = 0.5$  et  $u_b = 2.0$ . La discontinuité à  $(t = 0, x = 0)$  donne une onde de choc qui se propage à droite.



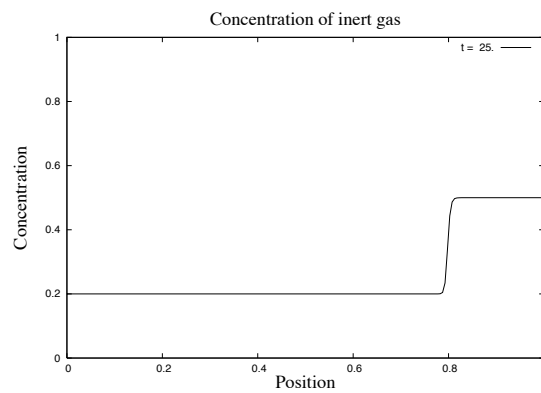
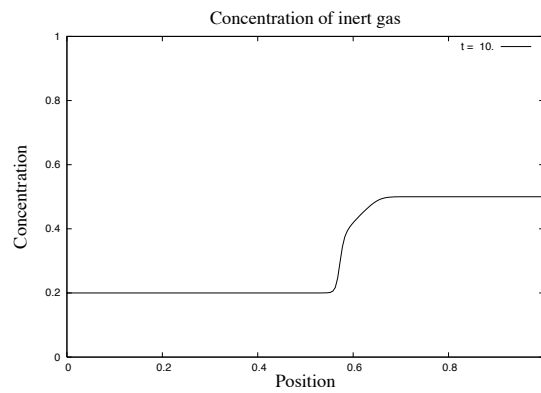
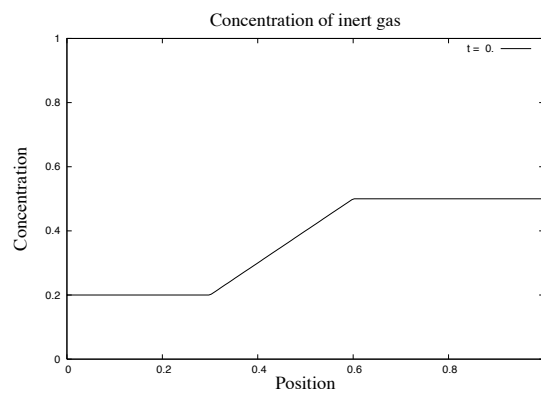
Cette figure est une discontinuité de contact. Nous commençons avec une onde de raréfaction d'une discontinuité à  $(t = 0, x = 0)$  avec  $c_0 = 0.2$  et  $c_b = 0.5$ . La vitesse  $u_b$  est 0.2 pour  $t \leq 20$  et 0.8 pour  $t > 20$ . La concentration  $c$  reste continue pendant que la discontinuité de  $u$  se propage à une vitesse infinie. Nous montrons l'évolution de  $c$  et  $u$  à la position  $x = 0.5$ . Notons que le principe du maximum n'est pas valide pour  $u$ .



Cette figure est un double choc. La concentration initiale est  $c_0 = 0.2$  pour  $x \leq 0.5$  et  $c_0 = 0.5$  pour  $x > 0.5$ , les conditions aux limites sont  $c_b = 0.1$  et  $u_b = 0.5$ . Les deux discontinuités à  $(t = 0, x = 0)$  et  $(t = 0, x = 0.5)$  donnent une onde de choc qui se propage à droite.



Cette figure représente le développement d'un choc. La concentration initiale est continue, il n'y a pas de discontinuité à  $(t = 0, x = 0)$ . Les conditions aux limites sont  $c_b = 0.2$  et  $u_b = 0.5$ .





L'étude générale consiste à regarder l'équation (??) avec la contrainte (??) et  $d = 2$ ,  $\rho = 1$  dans le cas où l'un ou les deux composants sont actifs. Le système s'écrit alors

$$\begin{aligned}\partial_t(c_1 + q_1^*(c_1, c_2)) + \partial_x(u c_1) &= 0, \\ \partial_t(c_2 + q_2^*(c_1, c_2)) + \partial_x(u c_2) &= 0, \\ c_1 + c_2 &= 1.\end{aligned}$$

Nous avons traité ce problème (?) avec des hypothèses physiquement vérifiées. Suivant ?, le problème est analysé comme un système hyperbolique par rapport aux variables  $(x, t)$  avec  $x$  la variable d'évolution : c'est l'idée clé.

Posons  $c = c_1$ ,  $m = u c$  et

$$\begin{aligned}q_i(c) &= q_i^*(c, 1 - c), \quad i = 1, 2, \\ h(c) &= q_1(c) + q_2(c), \\ I(c) &= c + q_1(c),\end{aligned}$$

le problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t I(c) + \partial_x(u c) = 0, \\ \partial_t h(c) + \partial_x u = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

ou de façon équivalente :

$$\partial_x U + \partial_t \Phi(U) = 0 \text{ avec } U = \begin{pmatrix} u \\ m \end{pmatrix} \text{ et } \Phi(U) = \begin{pmatrix} h(m/u) \\ I(m/u) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Nous supposons que  $q_1' \geq 0$  et  $q_2' \leq 0$  (?).

Ce système (??) est hyperbolique, avec comme valeurs propres 0 et

$$\lambda = \frac{H(c)}{u}.$$

Introduisons la fonction  $f = q_1 c_2 - q_2 c_1$  définie par Douglas et *al.* dans ?, qui s'écrit sous la forme  $f(c) = q_1(c) - c h(c)$ , il apparait que  $\lambda$  est vraiment non linéaire dans chaque domaine où  $f'' \neq 0$ .

De plus, le système admet deux invariants de Riemann :  $c$  et  $w = \ln u + g(c)$ , où  $g$  satisfait

$$g'(c) = \frac{-h'(c)}{H(c)}$$

et la famille d'entropies :

$$S(c, u) = \phi(w) + u \psi(c) \quad (2.14)$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont des fonctions réelles.

Soit  $G = e^g$  : si le signe de  $G''$  change alors le système n'admet pas d'entropie convexe mais pour chaque fonction convexe  $\psi$  l'entropie correspondante  $S = u\psi(c)$  est convexe et nous pouvons montrer l'existence d'au moins une solution faible entropique (?) dont la définition mathématique est la suivante : soient  $T > 0$ ,  $X > 0$ ,  $u \in L^\infty((0, T) \times (0, X), \mathbb{R}^+)$ ,  $0 \leq c(t, x) \leq 1$  pour presque  $(t, x) \in (0, T) \times (0, X)$ . Alors  $(c, u)$  est une solution faible entropique si pour toute fonction  $\psi$  convexe

$$\partial_x(u\psi(c)) + \partial_t Q(c) \leq 0,$$

au sens des distributions où  $Q' = H\psi' + h'\psi$ .

De plus, si  $G'' \geq 0$  sur  $[0, 1]$ ,  $(c, u)$  satisfait  $\partial_x(uG(c)) \leq 0$ .

Le résultat principal dans ? reliant la résolution du problème de Riemann et le schéma de Godunov est le suivant :

**Théorème 2.2.4** Soient  $T > 0$ ,  $X > 0$ ,  $c_0 \in BV(0, X)$ ,  $c_b \in BV(0, T)$ , satisfaisant

$$0 \leq c_0, c_b \leq 1, \inf_{0 < t < T} u_b(t) > 0.$$

Alors, le système admet une solution faible entropique.

Nous avons rédigé avec C. BOURDARIAS et S. JUNCA un article (?) au bulletin de la société mathématique espagnole (SEMA) qui présente différents modèles du génie chimique essentiellement ceux reliés à la chromatographie. Nous y expliquons les relations entre ces différentes approches, celle entre la loi de Darcy et la température-pression, rappelons les méthodes et résultats mathématiques connus et donnons quelques problèmes ouverts.

De plus, tous ces travaux sont en accord avec un article de chimie dû à M.-D. LE VAN, C.-A. COSTA, A.-E. RODRIGUES, A. BOSSY, D. TONDEUR (?).

Cette approche nouvelle (?) nous offre déjà des résultats et des perspectives riches qui nous permettent de poursuivre ces travaux dans plusieurs directions : existence de solutions dans le cadre  $L^1$ , relaxation, étude de la propagation d'oscillations (?), modèle cinétique (?), problème non isotherme, diffusion, approche visqueuse par une viscosité artificielle qui nous permettrait d'obtenir l'unicité, stabilité  $L^1$ , preuve de la convergence de (??)-(??) vers (??)-(??) quand  $A_i$  tend vers l'infini,...



# Chapitre 3

## Etude asymptotique

### 3.1 Equation de Korteweg-de Vries

Avec T. COLIN (Université de Bordeaux), nous avons effectué un travail sur un problème mixte concernant l'équation de Korteweg-de Vries sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, L]$  avec comme paramètre la taille du domaine  $L$ . L'équation de Korteweg-de Vries a été introduite en 1895 pour décrire la propagation dans un canal d'ondes aquatiques de faible amplitude et de grande longueur d'onde à la surface du canal (?).

Si  $u(x, t)$  représente la hauteur de la surface libre du fluide par rapport à la position d'équilibre au temps  $t > 0$  et à la position  $x \in \mathbb{R}$ , cette fonction satisfait

$$\partial_t u + \partial_x u + u \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Nous sommes donc en dimension un d'espace contrairement à l'équation KP due à Kadomtsev-Petviashvili qui est en dimension deux d'espace  $\partial_t u + u \partial_x u + \partial_{xxx} u + \partial_{xyy} u = 0$ . Il n'y a pas d'écoulement, pas de vitesse, les variations viennent de la surface mais pas du fond qui est plat contrairement aux équations de Saint-Venant. Le problème de Cauchy a largement été étudié pour des conditions initiales régulières (?, ?). Des résultats de J. BOURGAIN (?) montrent que le problème de Cauchy est bien posé pour une condition initiale dans  $L^2(\mathbb{R})$ . En laboratoire, la vague est créée par un agitateur à une extrémité du canal.

Pour décrire cette situation, J. BONA et R. WINTHER (?) ont considéré en 1983 l'équation de Korteweg-de Vries dans le quart de plan

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x u + u \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

et ont obtenu un théorème d'existence et d'unicité.

**Théorème 3.1.1 (J.L. Bona, R. Winther)** *Supposons que*

$$u_0 \in H^2(\mathbb{R}^+), \quad g \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^+)$$

*satisfont la condition de compatibilité :*

$$u_0(0) = g(0), \quad g'(0) + (\partial_x u_0 + u_0 \partial_x u_0 + \partial_{xxx} u_0)(0) = 0,$$

*alors il existe une unique solution  $u$  dans  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+, H^4(\mathbb{R}^+))$  de (??).*

Nous noterons  $u_\infty$  la solution du problème sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

Nous nous sommes intéressés au cas où l'équation de Korteweg-de Vries est posée dans un canal  $]0, L[ \times ]0, +\infty[$  de largeur  $L$  où  $L$  est un nombre fini positif. On agit que d'un coté ( $x = 0$ ) d'où la condition aux limites  $u(0, t) = g(t)$ ,  $t \in [0, T[$ . A l'autre extrémité ( $x = L$ ), on dispose d'un plan incliné rugueux qui limite la réflexion. On ne fait pas bouger de l'autre coté ( $x = L$ ), ce qui donne les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_x u + u \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T[, \\ u(0, t) = g(t), \quad t \in [0, T[, \\ \partial_x u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T[, \\ \partial_{xx} u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L], \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où  $L > 0$ ,  $T \in ]0, +\infty[$ .

T. COLIN et J.-M. GHIDAGLIA (?) ont étudié ce problème à savoir l'équation de Korteweg-de Vries dans un domaine spatial borné et obtenu un théorème d'existence locale par des méthodes d'énergie.

**Théorème 3.1.2 (T. Colin, J.-M. Ghidaglia)** *Soient  $u_0 \in H^1(0, L)$  et  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$  qui satisfont la condition de compatibilité  $u_0(0) = g(0)$ . Alors, il existe  $T_L > 0$  et une fonction*

$$u^L \in L^\infty(0, T_L; H^1(0, L)) \cap \mathcal{C}([0, T_L]; L^2(0, L))$$

*qui résout (??). De plus, si  $|u_0|_{H^1}$  et  $|g|_{H^1(\mathbb{R}^+)}$  sont suffisamment petits,  $T_L = +\infty$ .*

Ils donnent aussi un théorème d'unicité d'une solution maximale faible. Nos résultats sont similaires mais uniformes par rapport à  $L$ , la longueur de l'intervalle permettant ainsi de retrouver quand  $L$  tend vers l'infini le modèle de vague sur un demi-espace. L'intérêt est également numérique car on sait alors que sur un intervalle suffisamment long, on obtient une bonne approximation du modèle demi espace.

Nous montrons (?) par des techniques de dualité un théorème d'existence locale et d'unicité par un théorème de point fixe avec des espaces à poids :

**Théorème 3.1.3** *Considérons une famille de conditions initiales*

$$u_0^L \in L^2([0, L]) \text{ telles que } \sup_{L \geq 1} \int_0^L |u_0^L|^2(x)(1+x^2)dx < +\infty$$

et telles que  $u_0^L$  tend quand  $L$  tend vers  $+\infty$  vers  $u_0$  dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^+)$  fortement.

Alors, pour tout  $T > 0$ , si  $L$  est suffisamment grand,  $u^L(x, t)$  la solution de (??) avec la condition initiale  $u_0^L$  est définie sur  $[0, T]$  et  $u^L$  tend quand  $L$  tend vers  $+\infty$  vers  $u_\infty$  dans  $L^p(0, T; L_{loc}^2(\mathbb{R}^+))$  fortement pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , où  $u_\infty(x, t)$  est la solution de (??) avec la condition initiale  $u_0$ .

Un schéma très simple aux différences finies pour le problème (??) sur l'intervalle en espace  $[0, 1]$  est aussi présenté (?). Nous notons  $\Delta t$  le pas de temps,  $\Delta x$  le pas d'espace,  $y_i^n$  la valeur approchée de la solution au temps  $n\Delta t$  et au point  $i\Delta x$  et les opérateurs classiques :

$$(D^+y)_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \text{ et } (D^-y)_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}.$$

Voici les résultats numériques sur le schéma

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} + D^+D^+D^-y^{n+1} = 0,$$

associé au problème linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \partial_{xxx} u = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = \partial_x u(1, t) = \partial_{xx} u(1, t) = 0 \text{ pour } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \text{ pour } x \in [0, 1] \end{array} \right. \quad (3.3)$$

en utilisant scilab.

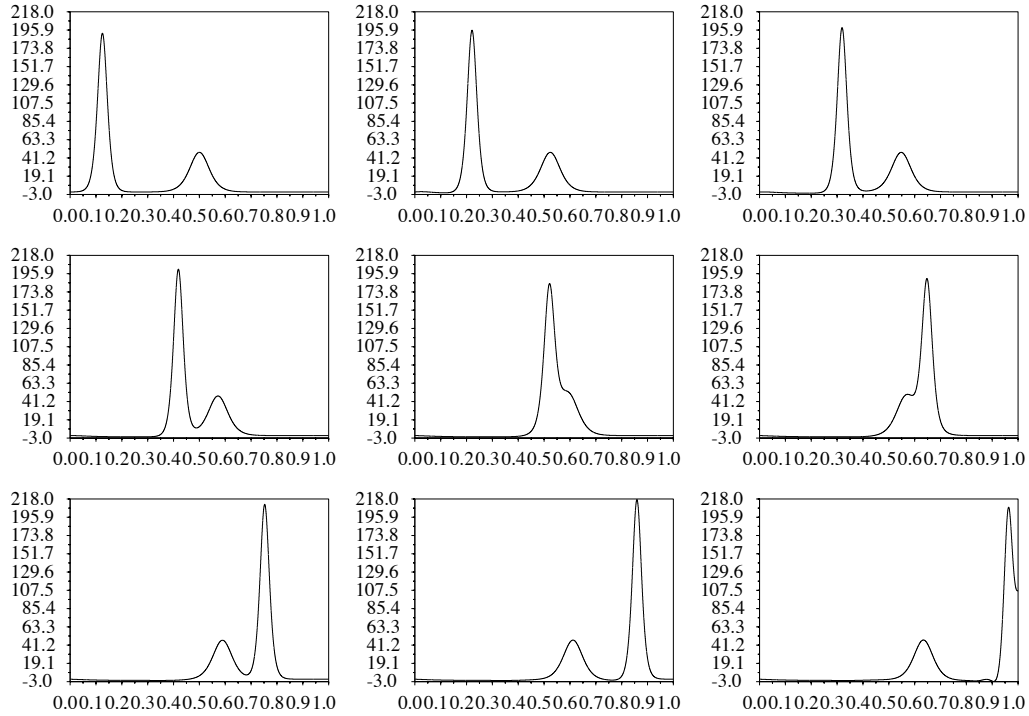
La discétisation utilisée pour le terme non linéaire est explicite et est  $y^n D^+ y^n$ . En faisant un changement de variable, le problème sur  $[0, L]$  avec  $L = 10$  est :

$$\partial_t u + \frac{1}{L} u \partial_x u + \frac{1}{L^3} \partial_{xxx} u = 0.$$

Nous calculons la solution durant 4800 itérations en temps sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  en prenant  $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Delta x = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $T = 0.12$ . La condition initiale est

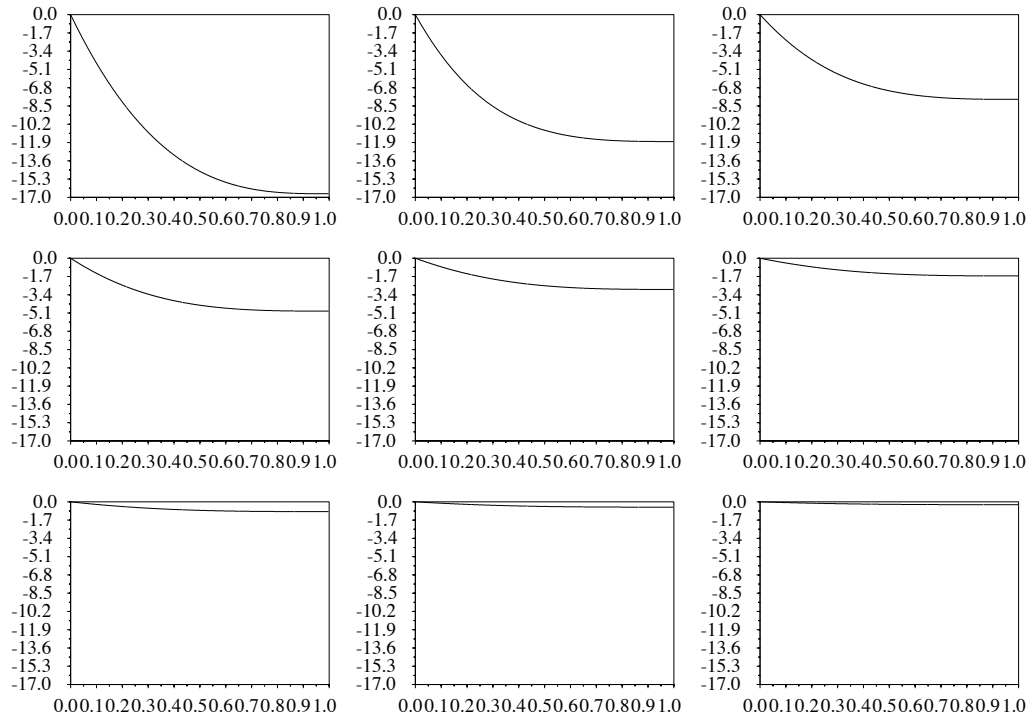
$$u_0(x) = \frac{\alpha}{\cosh^2(\beta L(x - 1/2))} + \frac{4\alpha}{\cosh^2(4\beta L(x - 1/4))}$$

avec  $\alpha = 12\beta^2$  et  $\beta = 2$ . Ceci correspond à la superposition de deux solitons avec des vitesses différentes. La plus grande qui est la plus rapide est au début derrière la plus petite. La figure représente la solution au temps  $t_i = iT/8$  pour  $i = 0, \dots, 8$ .



Pour une autre simulation, nous avons pris  $L = 1$ ,  $\Delta t = 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta x = 10^{-3}$ . Nous calculons la solution pendant 2400 itérations en temps sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  avec  $T = 0.792$ . La condition initiale est  $u_0(x) = -50 * (1/3 + (x - 1)^3/3)$ .

La figure représente la solution au temps  $t_i = iT/8$  pour  $i = 0, \dots, 8$ . Les résultats montrent que la solution tend vers zéro pour des temps grands.





### 3.2 Presque dégénérescence pour l'équation de Bloch

Dans [?], avec B. BIDÉGARAY (Laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble), F. CASTELLA (Université de Rennes) et E. DUMAS (Institut Fourier, Grenoble), nous généralisons un article de B. BIDÉGARAY, F. CASTELLA et P. DEGOND ([?]) qui traite des équations de Bloch régissant l'évolution de la matrice densité d'un système quantique possédant un ensemble discret de niveaux d'énergie.

Notre contribution consiste à étudier dans un régime haute fréquence l'effet sur la matrice densité d'une perturbation des énergies propres du système.

Le système de Bloch décrit l'action d'une onde électromagnétique (caractérisée par le champ électrique  $E$ ) sur un milieu matériel décrit de façon quantique par la matrice densité  $\rho$ . Si l'on ne s'intéresse qu'aux  $N$  niveaux d'énergie les plus bas (cadre typique de la propagation laser),  $\rho(t)$  est une matrice hermitienne  $N \times N$  telle que  $|\rho_{n,m}|^2 \leq \rho_{n,n} \times \rho_{m,m}$ .

Le terme diagonal (dans la base des états propres du système)  $\rho_{j,j}(t)$  donne la population du niveau  $j$  et est tel que

$$\rho_{n,n} \in \mathbb{R}, 0 \leq \rho_{n,n} \leq 1, \sum_{n=1}^N \rho_{n,n} = 1.$$

Le module du terme extradiagonal  $\rho_{j,k}(t) \in \mathbb{C}$  correspond à la probabilité conditionnelle de transition entre les niveaux  $j$  et  $k$ .

Une matrice diagonale,  $\Omega$ , de dimension  $N$ , donne l'hamiltonien libre du système matériel

$$\Omega_{n,n} = \omega_n$$

où la pulsation de transition entre deux niveaux dans le cas non dégénéré est

$$\omega_{n,m} = \omega_n - \omega_m$$

et  $\omega_j$  est la pulsation propre du niveau  $j$ . Un niveau d'énergie du matériau est dit dégénéré lorsque la valeur propre correspondante du hamiltonien libre  $\Omega$  n'est pas simple.

Les matériaux comportant des structures auto-organisées, comme les boîtes quantiques, présentent des niveaux "presque dégénérés" (valeurs propres proches à l'échelle de la longueur d'onde des champs).

L'hamiltonien libre

$$\Omega^\varepsilon = \text{Diag}(\omega_1^\varepsilon, \dots, \omega_N^\varepsilon)$$

est perturbé au sens où les pulsations  $\omega_{n,m}^\varepsilon$  s'écrivent

$$\omega_{n,m}^\varepsilon = \omega_{n,m} + \delta_{n,m} \varepsilon^p,$$

pour un certain  $p > 0$  et une suite de réels  $\delta_n$  quelconques,  $\delta_{n,m} = \delta_n - \delta_m$ . Ceci autorise des pulsations du type

$$\omega_n = \omega_n^0, \quad \omega_{n+1} = \omega_n^0 + \delta_{n+1} \varepsilon^p$$

correspondant à des niveaux “presque dégénérés”.

Nous regardons donc l’action du champ électromagnétique avec ces échelles multiples et étudions l’approximation de l’équation de Bloch (qui est une équation différentielle ordinaire) par des équations de Boltzmann portant sur les populations des états quantiques seules (“équations de taux d’Einstein”) dans un régime asymptotique comportant un champ électrique (donné rapidement oscillant et pour des niveaux quantiques “presque dégénérés”).

Nous considérons l’asymptotique où  $\varepsilon$  tend vers zéro pour le système linéaire d’équations différentielles ordinaires

$$\varepsilon^2 \partial_t \rho = -i[\Omega^\varepsilon - \varepsilon \mathcal{V}(t/\varepsilon^2), \rho] + Q(\rho),$$

où le potentiel  $\mathcal{V}$  est donné et représente le couplage d’ordre  $\varepsilon$  de la matière avec le champ électrique oscillant à la fréquence  $1/\varepsilon^2$  (limite de couplage faible). Enfin, l’opérateur  $Q$  décrit les relaxations des termes de cohérence (extra-diagonaux) de la matrice densité  $\rho$  (voir ?, ?) :

$$Q(\rho)_{n,m} = -\varepsilon^\mu \gamma_{n,m} \rho_{n,m} \text{ si } n \neq m,$$

avec

$$\mu \geq 0, \quad \gamma_{n,m} = \gamma_{m,n} > 0, \text{ si } n \neq m, \quad \gamma_{n,n} = 0.$$

On peut également ajouter un terme diagonal de Pauli :

$$Q(\rho)_{n,n} = \varepsilon^2 \sum_m (W_{m,n} \rho_{m,m} - W_{n,m} \rho_{n,n})$$

qui décrit une redistribution thermique des populations de différents niveaux d’énergie (entre eux), avec des taux de transition liés par la relation de micro-réversibilité :

$$W_{n,m} = \exp\left(\frac{\omega_m - \omega_n}{T}\right) W_{m,n}$$

où  $T$  est une température normalisée. Cette forme spécifique a une grande importance pour décrire les états d’équilibre.

Cette étude a été effectuée dans ? dans le cas non perturbé, c’est-à-dire,  $\delta_n = 0$  pour tout  $n$ . Elle montre que, sur tout intervalle de temps fini, les populations  $\rho_{n,n}$  tendent à satisfaire des équations de Boltzmann linéaires (équations de taux d’Einstein) avec des taux de transition positifs. Cette convergence est due à la présence de relaxations qui poussent l’atome vers l’équilibre et ce phénomène est amplifié et les états d’équilibre modifiés par les éventuelles résonances entre l’onde électromagnétique et le matériau. S’il n’y a pas de résonance, il y a un découplage de l’onde et du matériau qui relaxe simplement.

Dans le cas perturbé, nous montrons que les presque-résonances modifient cette situation lorsque la perturbation  $\delta_n \varepsilon^p$  est assez “visible” par les relaxations ( $\mu \geq p$ ) mais reste faible ( $\mu \leq 2p$ ). Nous obtenons une asymptotique décrite par des équations de Boltzmann avec une expression des taux de transition en fonction des  $\delta_n$  et de  $p$ . Ainsi, on peut mesurer la modification de l’état d’équilibre et des temps caractéristiques de relaxation par rapport au cas non perturbé. Les techniques utilisées relèvent de la moyennisation d’équations différentielles ordinaires.

Le potentiel électrique  $\mathcal{V}$  s'écrit sous la forme  $\mathcal{V}(t) = \phi(t)V$  où la matrice (hermitienne)  $V$  est donnée de même que la fonction  $\phi$  représentant le champ électrique. Ce champ électrique  $\phi$  est supposé être  $r$ -chromatique c'est-à-dire on se donne un vecteur  $\omega \in \mathbb{R}^r$ , le champ électrique  $\phi(t) \in \mathbb{R}$  est donné par ses coefficients de Fourier  $\phi_\alpha$  :

$$\phi(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r} \phi_\alpha \exp(i\alpha \cdot \omega t),$$

où  $\alpha \cdot \omega = \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_r \omega_r$  et tel que  $\sum_\alpha |\phi_\alpha| < \infty$ .

Nous notons  $\rho$  la solution de l'équation de Bloch,  $\rho_d$  le terme diagonal de  $\rho$  c'est-à-dire

$$\rho_d(t) = \rho_{n,n}(t)$$

et  $\rho_{nd}$  terme non diagonal de  $\rho$ . Les équation de Bloch s'écrivent alors :

$$\varepsilon^2 \partial_t \rho_{n,m}(t) = -i(\omega_{n,m} + \varepsilon^p \delta_{n,m}) \rho_{n,m}(t) + Q(\rho)_{n,m} + i\varepsilon \phi(t/\varepsilon^2) \sum_k (V_{n,k} \rho_{k,m} - V_{k,m} \rho_{n,k}).$$

Nous notons  $\rho^d$  la solution de l'équation de taux.

Sous certaines hypothèses de régularité sur  $\phi$  et pour  $0 \leq \mu < 1/2$ , les populations sont asymptotiquement solutions de l'équation de taux

$$\partial_t \rho_n^d(t) = \sum_k (W_{n,k}^{mod} \rho_k^d(t) - W_{k,n}^{mod} \rho_n^d(t)),$$

où

$$W_{n,m}^{mod} = W_{n,m} + 2 |V_{n,m}|^2 \frac{\varepsilon^\mu \gamma_{n,m}}{\varepsilon^{2\mu} \gamma_{n,m}^2 + \varepsilon^{2p} \delta_{n,m}^2} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r; \omega_{n,m} + \alpha \cdot \omega = 0} |\phi_\alpha|^2 = W_{n,m} + \Psi_\varepsilon(n, m).$$

Cette équation de taux est un système différentiel linéaire à coefficients constants dont la matrice s'écrit comme la somme d'un terme non raide (terme lent) et d'un terme raide (terme rapide).

Le résultat de convergence est le suivant (?) :

**Théorème 3.2.1** *Sous des conditions qui sont nécessairement vraies dans un contexte physique, pour tout  $T > 0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\| \rho_{nd} \|_{L^\infty([0,T], l^1)} \leq C \varepsilon^{1-\mu},$$

et

$$\| \rho_d - \rho^d \|_{L^\infty([0,T], l^2)} \leq C(\varepsilon^\mu + \varepsilon^{1-2\mu}).$$

Précisons maintenant les hypothèses. La difficulté principale est qu'on a besoin d'une condition diophantienne (absence de petits diviseurs) c'est-à-dire :

**Hypothèse 1** Il existe un (petit) nombre  $\eta > 0$  et une constante  $C_\eta > 0$  tels que

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}, \quad \forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } \alpha \cdot \omega + \omega_{n,k} \neq 0,$$

$$|\alpha \cdot \omega + \omega_{n,k}| \geq \frac{C_\eta}{(1 + |\alpha|)^{r-1+\eta}(1+n)^{1+\eta}(1+k)^{1+\eta}},$$

et de façon similaire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}, \quad |\alpha \cdot \omega| \geq \frac{C_\eta}{(1 + |\alpha|)^{r-1+\eta}}.$$

et si  $\alpha = 0$  il existe  $C_\eta > 0$  tel que

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \text{ soit } \omega_{n,k} = 0, \text{ ou } |\omega_{n,k}| \geq \frac{C_\eta}{(1+n)^{1+\eta}(1+k)^{1+\eta}}.$$

Comme nous perturbons les estimations, nous avons aussi besoin de régularité sur  $\phi$  :

**Hypothèse 2** Les coefficients de Fourier  $\phi_\alpha$  satisfont

$$\sum_{\alpha} (1 + |\alpha|)^{r-1+\eta} |\phi_\alpha|^2 < \infty,$$

et  $\exists N_\eta > 2\mu/p$  tel que

$$\sum_{\alpha} (1 + |\alpha|)^{(r-1+\eta)N_\eta} |\phi_\alpha|^2 < \infty.$$

**Hypothèse 3** Les coefficients d'interaction satisfont

$$\sup_n \sum_m ((1+n)^{1+\eta}(1+m)^{1+\eta})^{N_\eta} |V(n, m)|^2 < \infty.$$

Pour  $N$  fini, le théorème suivant (?) décrit la dynamique de l'équation de taux :

**Théorème 3.2.2** Supposons  $N < \infty$ . Alors, l'évolution asymptotique de  $\rho_d$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  est la suivante :

(i) Premier cas :  $\mu = 0$ . Alors, pour tout  $0 \leq t \leq T$ , nous avons  $\|\rho_d(t) - \rho^{(1)}(t)\|_{l^2} \leq C\varepsilon$ , où

$$\Psi_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 |V_{k,n}|^2 \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r} \frac{\varepsilon^\mu \gamma_{k,n}}{\varepsilon^{2\mu} \gamma_{k,n}^2 + |\omega_{k,n} + \alpha \cdot \omega + \varepsilon^p \delta_{k,n}|^2} |\phi_\alpha|^2$$

et  $\rho^{(1)}$  est la solution de

$$\partial_t \rho_n^{(1)}(t) = \sum_k [(W + \Psi_0)(n, k) \rho_k^{(1)}(t) - (W + \Psi_0)(k, n) \rho_n^{(1)}(t)], \quad \rho^{(1)}(0) = \rho_d(0).$$

(ii) *Second cas :  $\mu > 0$ . Alors, il existe une décomposition explicite de la forme*

$$\Psi_\varepsilon(n, m) = \sum_{j=0}^I \varepsilon^{-\nu_j} B_j^\varepsilon(n, m) + B_{I+1}^\varepsilon(n, m) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\nu'}),$$

*tel que  $\nu' > 0$ , les exposants  $\nu_j$  sont positifs, décroissants (avec  $\nu_0 = \mu$ ) et chaque  $B_j^\varepsilon$  est une matrice qui dépend de  $\varepsilon$  et telle que  $B_j^\varepsilon$  tend vers  $B_j^0$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro et*

$$\forall \varepsilon \geq 0, \text{Ker} B_j^\varepsilon = \text{Ker} B_j^0.$$

Nous envisageons également de considérer pour ce même régime asymptotique le couplage non linéaire de l'équation de Bloch avec les équations de Maxwell. Les systèmes de Maxwell-Bloch décrivent l'interaction d'une onde électromagnétique (caractérisée par le champ électrique  $E$  et le champ magnétique  $H$ ) et d'un milieu matériel décrit de façon quantique par la matrice densité  $\rho(t, x)$ . Nous avons donc une dépendance en  $x$ .

Nous envisageons aussi une étude numérique avec B. BIDÉGARAY-FESQUET (Laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble) et E. DUMAS (Institut Fourier de Grenoble). Il s'agit d'écrire un code avec les  $\varepsilon$  en Matlab ou/et Fortran pour vérifier le taux de décroissance prouvé pour les cohérences et les populations, éventuellement trouver des taux optimaux et chercher à identifier des paramètres physiques (choix pertinent des  $\delta_n, \mu, p$ ).

### 3.3 Equations de Saint-Venant visqueuses et équation des lacs

Baucoup de problèmes physiques naturels environnementaux sont liés à des écoulements peu profonds de fluides complexes comme l'océanographie, la neige, la boue, les laves torrentielles. Ils peuvent se ramener à l'étude d'équations apparentées à des modèles de la mécanique des fluides visqueux de type compressibles : c'est le cas de certains modèles d'hydraulique fluviale, de modèles gravitaires d'avalanche, de modèles de coulée de boue et de modèles en météorologie par exemple.

Cette partie est donc basée sur la dynamique des écoulements peu profonds de fluides incompressibles newtoniens et donc autour d'étude mathématique des modèles de type Saint-Venant visqueux qui s'apparentent aux équations de Navier-Stokes de type compressibles barotropes avec viscosités non constantes.

Une fois adimensionalisé, plusieurs nombres sans dimension apparaissent comme le nombre de Reynolds, le nombre de Rossby et le nombre de Froude. Les différents ordres possibles de ces paramètres permettent alors différentes asymptotiques. On retrouve par exemple les équations quasigéostrophiques, les équations des lacs.

Les équations de Saint-Venant, publiées en 1871 (CRAS) sont d'une grande importance en hydraulique maritime et fluviale. Elles régissent les écoulements à surface libre en eaux peu profondes (équations d'ondes longues) d'où leur appellation anglaise : shallow water equations.

On suppose que les longueurs d'ondes sont grandes par rapport à la profondeur :  $\delta = \frac{H}{L}$  est très inférieur à 1 où  $H$  est la hauteur caractéristique et  $L$  la longueur caractéristique donc on ne s'intéresse pas aux phénomènes avec de la houle.

Si  $\delta$  tend vers 0, alors les équations de Navier Stokes 3 D donnent les équations de Prandtl, équations géostrophiques.

Le modèle mathématique de Saint-Venant à deux dimensions d'espace (2D) dans le plan horizontal découle de l'intégration verticale de Navier-Stokes incompressible homogène à trois dimensions d'espace (3D) en posant différentes hypothèses fondamentales dont celle de la pression hydrostatique ou ondes longues (?). L'intégration sur la section latérale des équations de Saint-Venant produit le modèle unidimensionnel (1D).

Si à partir des équations de Saint Venant 2 D, on fait tendre le nombre de Rossby  $R_0 = \frac{U}{L|\omega|}$  où  $|\omega|$  est la fréquence de la rotation de la terre et  $U$  la vitesse caractéristique, on obtient les équations quasigéostrophiques.

Mais, bien qu'ils soient depuis longtemps utilisés en hydrologie, la validation de ces modèles qui se fait au moyen d'une dérivation formelle à partir des équations de Navier-Stokes à surface libre pour un fluide newtonien ou à partir des équations d'Euler avec terme de frottement de Coulomb en présence ou non d'une topographie complexe est relativement récente (?, ?). J.-F Gerbeau et B. Perthame traitent le passage 2D-1D et obtiennent  $4\nu\partial_x(h\partial_x u)$ . F. Marche traite le passage 3D-2D et obtient  $2\nu\text{div}(hD(u)) + 2\nu\nabla(h\text{div}u)$  au lieu de la généralisation de ? qui serait  $4\nu(\text{div}hD(u))$  où  $u$  est la vitesse moyenne horizontale d'écoulement et

$$D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u), \quad D_{ij}(u) = \frac{\partial_i u_j + \partial_j u_i}{2}.$$

Les équations de Saint-Venant visqueuses peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \partial_t(hu) + \text{div}(hu \otimes u) + \frac{h\nabla(h-b)}{\text{Fr}^2} = \frac{2}{\text{Re}}\text{div}(hD(u)) + \frac{2}{\text{Re}}\nabla(h\text{div}u) - \mathcal{D} - \mathcal{K}, \\ \partial_t h + \text{div}(hu) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

La deuxième équation est la conservation de la hauteur où  $u$  est la vitesse de l'eau,  $h \in \mathbb{R}^+$  est la hauteur d'eau à la surface libre,  $b \geq 0$  une fonction donnée décrivant le fond indépendante du temps,  $\text{Re}$  le nombre de Reynolds et  $\text{Fr}$  représente le nombre de Froude. Le nombre de Froude est un nombre adimensionnel qui caractérise l'importance relative des forces liées à la vitesse et de la pesanteur. Le terme  $\mathcal{D}$  correspond à des termes de traînée ou de frottement au fond. Ils peuvent être par exemple de la forme  $r_0 u$  (terme de friction au bord avec  $r_0 > 0$ ) dans le cas laminaire et  $r_1 h|u|u$  ( $r_1 > 0$ ) dans le régime turbulent et peuvent provenir de la condition de friction au fond (voir ?). Le terme de capillarité  $\mathcal{K}$  joue un rôle important si l'on étudie par exemple l'étalement des gouttes. Une expression rencontrée par exemple dans ? et ? est de la forme  $\mathcal{K} = -\kappa h \nabla \Delta h$  avec  $\kappa$  le coefficient de tension de surface. Le système (??) est complété par des conditions initiales

$$h(t=0) = h_0, \quad (hu)(t=0) = m_0$$

où  $h_0$  est supposée positive.

Les résultats concernant l'existence de solutions faibles au système de Saint-Venant sont peu nombreux. On peut d'abord citer les résultats d'existence de solutions faibles à données petites au voisinage de solutions stationnaires et pour des viscosités non physiques de type  $h\Delta u$  remplaçant  $2\operatorname{div}(h\nabla u) + 2\nabla(h\operatorname{div}u)$ . Dans ce cas, on peut considérer que la hauteur d'eau ne s'annule pas et diviser par la hauteur dans les équations des moments. On applique alors la méthode de P.-L. LIONS (?) pour les fluides compressibles. Ces résultats mathématiques d'existence globale de solutions faibles pour les fluides compressibles à viscosité constante sont récents, ils datent de 1998 (?).

Pendant, dans ces études, le terme diffusif est de la forme

$$-\mu\Delta(\cdot) - (\lambda + \mu)\nabla\operatorname{div}(\cdot)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes de viscosité.

Pour les équations que nous traitons, nous sommes dans le cadre d'équations compressibles dégénérées c'est-à-dire avec une viscosité non constante dépendant de la densité de la forme

$$-\mu\operatorname{div}(hD(\cdot)) - \lambda\nabla(h\operatorname{div}(\cdot))$$

qui n'entre donc pas dans la théorie de P.-L. Lions.

Le premier résultat d'existence globale de solutions faibles sur un modèle visqueux dégénéré (de la forme  $2\operatorname{div}(hD(u))$  qui est consistante d'un point de vue énergétique) dans le tore  $\Omega = T^2$  avec les termes de traînée cités précédemment a été traitée en 2003 par D. BRESCH-B. DESJARDINS (?) avec construction des solutions approchées dans (?). Ils obtiennent pour un fond constant

**Théorème 3.3.1** *Si  $r_0 > 0$ ,  $r_1 > 0$ ,  $h_0 \in L^2$ ,  $\sqrt{h_0}u_0 \in L^2$ ,  $\nabla\sqrt{h_0} \in L^2$ ,  $-r_0 \ln_-(h_0) \in L^1$  où  $\ln_- g = \ln \min(g, 1)$  alors il existe une solution faible globale de*

$$\begin{cases} \partial_t(hu) + \operatorname{div}(hu \otimes u) + \frac{h\nabla(h-b)}{\operatorname{Fr}^2} = 2\nu\operatorname{div}(hD(u)) - r_0u - r_1h|u|u, \\ \partial_t h + \operatorname{div}(hu) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

avec

$$\nabla\sqrt{h} \in L^\infty L^2, \sqrt{h}u \in L^\infty L^2, \sqrt{h}\nabla u \in L^2 L^2, \nabla h \in L^2 L^2, r_1^{1/3}h^{1/3}u \in L^3 L^3, \sqrt{r_0}u \in L^2 L^2.$$

Pour un exposé de revue sur Saint-Venant visqueux, le lecteur est renvoyé à l'article de D. BRESCH, B. DESJARDINS et G. MÉTIVIER (?). Il est également à noter les travaux récents de A. MELLET et A. VASSEUR (?) qui montrent comment se dispenser des termes de traînée en employant le multiplicateur  $(1 + \ln(1 + |u|^2))u$  pour contrôler les termes résiduels et la nouvelle entropie mathématique découverte par D. BRESCH et B. DESJARDINS. Il serait intéressant de voir l'influence de ce multiplicateur sur les solutions approchées construites dans ?. Un problème difficile serait de montrer l'existence globale de solutions faibles avec le terme diffusif complet sans capillarité avec ou sans frottement.

L'existence globale de solutions fortes a été traité dans ?, ?, ?, ?.

W. Wang et C.-J Xu récemment (2005) travaillent dans des espaces de Sobolev d'indice  $s > 2$  pour obtenir des solutions locales quel que soient les conditions initiales et globales pour des données petites :

**Théorème 3.3.2** *Soit  $s > 2$ ,  $u_0, h_0 - \bar{h}_0 \in H^{s+2}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\|h_0 - \bar{h}_0\|_{H^{s+2}}$  très petit par rapport à  $\bar{h}_0$ . Alors il existe  $T > 0$ , il existe un unique  $(u, h)$  solution de*

$$\begin{cases} \partial_t(hu) + \operatorname{div}(hu \otimes u) + h\nabla h = \nu \operatorname{div}(h\nabla u), \\ \partial_t h + \operatorname{div}(hu) = 0, \end{cases}$$

tel que  $u, h - \bar{h}_0 \in L^\infty(0, T; H^{2+s}(\mathbb{R}^2))$ ,  $\nabla u \in L^2(0, T; H^{2+s}(\mathbb{R}^2))$ .

Si il existe  $c$  tel que  $\|h_0 - \bar{h}_0\|_{H^{2+s}(\mathbb{R}^2)} + \|u_0\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^2)} \leq c$  alors  $T = +\infty$ .

Ils utilisent par exemple la méthode d'énergie de A. MATSUMURA et T. NISHIDA.

Avec D. BRESCH (LAMA Chambéry) et C.K. LIN (Université de Taiwan), nous avons donné un exemple de limite faible, quand le nombre de Mach (Froude) tend vers zéro, d'écoulements compressibles quand la densité initiale (hauteur) est pratiquement égale à une fonction connue dépendant de la variable d'espace  $x$ , c'est-à-dire que le fond  $b$  est prescrit.

Nous avons établi alors, mathématiquement, le lien entre des équations de type Saint-Venant visqueuses et des équations visqueuses utilisées pour simuler l'écoulement dans les grands lacs.

Le modèle visqueux des lacs, analogue à (??), s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u^0 + (u^0 \cdot \nabla) u^0 + \nabla \pi = 2\nu b^{-1} \operatorname{div}(bD(u^0)) - r_0 b^{-1} u^0 - r_1 |u^0| u^0, \\ \operatorname{div}(b u^0) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

avec la condition initiale :

$$u^0|_{t=0} = u_0^0.$$

Ce système a été étudié par D. LEVERMORE et M. SAMMARTINO dans le cas  $b \geq c > 0$  (?).

Dans notre étude, nous justifions l'asymptotique  $u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \dots$ ,  $h^\varepsilon = h^0 + \varepsilon h^1 + \dots$  où  $(h^\varepsilon, u^\varepsilon)$  est une solution globale faible de (??),  $u^0$  solution de (??) et  $\operatorname{Fr} = \varepsilon$  avec des données bien préparées dans un domaine périodique en observant l'influence de la variabilité du fond  $b$ . Nous supposons que le fond  $b$  est strictement positif. Ce résultat concerne les solutions faibles des équations de Saint-Venant visqueuses, il faut donc faire attention à la possible dégénérescence de la hauteur  $h$ .

Dans le livre de P.-L. LIONS (?), seules les viscosités constantes sont présentées.

Nous avons aussi discuté de la limite faible quand le nombre de Mach (Froude) tend vers zéro pour les écoulements compressibles standards quand la densité (hauteur) est pratiquement égale à une fonction connue dépendant de la variable d'espace c'est à dire quand le fond est prescrit.

Nous présentons ainsi la justification du lien entre les équations de type Saint-Venant visqueuses et les équations utilisées pour simuler l'écoulement dans les lacs.

La convergence entre Saint-Venant et les équations des grands lacs dans le cas limite non dégénéré et bien préparé est donnée par le théorème suivant (?) :



**Théorème 3.3.3** Soit  $u_0^0 \in (H^3(\Omega))^2$  et  $(u_0^\varepsilon, h_0^\varepsilon) \rightarrow (u_0, 0)$  dans  $(L^2(\Omega))^3$ ,  $(h_0^\varepsilon - b)/\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $L^2(\Omega)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Nous notons  $(h^\varepsilon, u^\varepsilon)$  une suite de solutions faibles de Saint-Venant (??) et  $u^0$  la solution forte globale pour les équations (??) des grands lacs. Alors,

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\rightarrow u^0 \text{ dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^2), \\ (h^\varepsilon - b)/\varepsilon &\rightarrow 0 \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \nabla(h^\varepsilon/b) &\rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2) \end{aligned}$$

quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

Le choix d'une fonction test astucieuse du type  $\nabla \ln \left( \frac{h}{b} \right)$  permet d'adapter les idées de l'article de D. BRESCH–B. DESJARDINS (?) avec de nouveaux termes comme par exemple  $\int_\Omega hu \cdot (\nabla \nabla \ln b) u$ ,  $\int_\Omega \nabla b \frac{h-b}{\varepsilon} \frac{\nabla(h/b)}{\varepsilon}$  à contrôler de manière uniforme en  $\varepsilon$ . Ces termes résiduels nous ont alors contraints à considérer le cas d'une hauteur d'eau strictement positive.

On rencontre le même type d'analyse asymptotique vers un profil non constant dans la limite faible nombre de Debye sur des modèles en théorie des semi-conducteurs (?).

Les travaux restants à faire sont multiples : considérer le cas de données mal préparées, permettre au fond  $b$  de s'annuler, traiter le cas borné dans la convergence de Shallow-water vers l'équation des lacs.

### 3.4 Modèle de fluide dans un domaine mince avec des rugosités

Avec D. BRESCH (LAMA Chambéry), T. COLIN (Université de Bordeaux) et L. CHUPIN (INSA Lyon), dans ?, nous considérons l'écoulement d'un fluide entre deux surfaces proches et rugueuses et nous regardons l'effet de ces petites irrégularités sur le fluide.

Dans des précédents papiers (?, ?), des modèles, en régimes spéciaux, sont obtenus qui dépendent du quotient entre la taille des rugosités et la hauteur moyenne du domaine notée  $h^\varepsilon$  et supposée petite. Dans ?, ?, ce quotient est supposé d'ordre un, c'est-à-dire,

$$h^\varepsilon = \varepsilon h \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

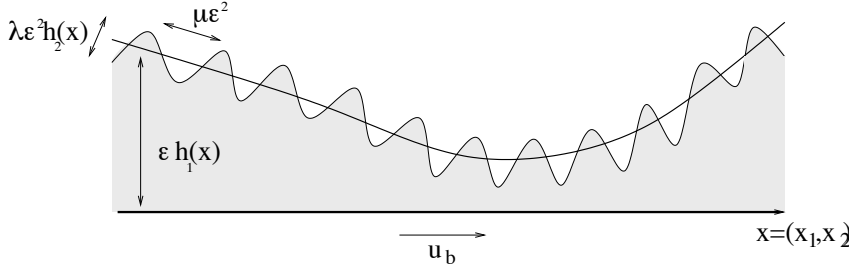
et une analyse asymptotique est faite utilisant un processus d'homogénéisation. Plus récemment, dans ?, N. BENHABOUCHA, M. CHAMBAT et I. CIUPERCA se sont intéressés au cas où

$$h^\varepsilon(x) = \varepsilon h \left( x, \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \right) \quad \text{avec } \alpha \leq 1.$$

Dans ?, nous considérons un cas particulier mais qui ne rentre pas dans les précédents travaux.

Le domaine considéré en trois dimensions occupé par le fluide a la forme suivante :

$$\Omega^\varepsilon = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} ; \quad x \in \omega \quad \text{et} \quad 0 < z < h^\varepsilon(x) \right\}$$

FIG. 3.1 – Domain  $\Omega^\varepsilon$ 

où  $\omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et la hauteur  $h^\varepsilon$  qui dépend de la composante horizontale  $x$  est de la forme suivante :

$$h^\varepsilon(x) = \varepsilon h_1(x) + \lambda \varepsilon^2 h_2\left(\frac{x}{\mu \varepsilon^2}\right),$$

c'est-à-dire la rugosité est définie par une fonction périodique de période d'ordre  $\varepsilon^2$  ( $\varepsilon > 0$ ) car les applications  $h_1$  and  $h_2$  sont supposées régulières et satisfont  $h_1 \geq \delta > 0$  et  $h_2$  périodique avec 1 comme moyenne. Les deux coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels positifs qui permettent de quantifier l'amplitude et la fréquence des rugosités. Des rugosités plus générales seront considérées dans ?.

Nous supposons que le fluide est gouverné par le système stationnaire de Stokes :

$$\begin{cases} -\eta \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega^\varepsilon, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Omega^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.7)$$

Le champ de vecteur  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u^\varepsilon, w^\varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  décrit la vitesse du fluide tandis que la pression est donnée par la fonction scalaire  $p^\varepsilon$ . Le réel positif  $\eta > 0$  correspond à la viscosité du fluide. Nous complétons évidemment le système de Stokes par des conditions aux limites. En général, ces équations sont reliées à l'équation de Reynolds mais dans ?, un nouveau terme modifie l'équation de Reynolds. Pour le voir et obtenir un domaine indépendant de  $\varepsilon$ , un changement d'échelle est introduit. Nous notons  $X = \frac{x}{\mu \varepsilon^2}$ ,  $h(x, X) = \varepsilon h_1(x) + \lambda \varepsilon^2 h_2(X)$ ,  $Z = \frac{z}{h(x, X)}$ . Nous supposons que la vitesse est d'ordre un et que la pression est d'ordre  $1/\varepsilon^2$  c'est-à-dire

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{\varepsilon^2} p_0 + \frac{1}{\varepsilon} p_1 + p_2 + \dots.$$

Le premier résultat sans rugosité est le suivant :

**Théorème 3.4.1** *Si  $\lambda = 0$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0, les termes principaux vérifient*

$$\begin{cases} -\eta \partial_Z^2 u_0 + h_1^2 \nabla_x p_0 = 0, \\ \partial_Z p_0 = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

et l'équation de Reynolds

$$\operatorname{div}_x \left( \frac{h_1^3}{12\eta} \partial_x p_0 \right) = \operatorname{div}_x \left( \frac{h_1}{2} \mathbf{u}_b \right). \quad (3.9)$$

où  $u_0|_{Z=0} = u_b$ .

L'effet de rugosité est donné par le théorème suivant :

**Théorème 3.4.2** *Les termes principaux du développement asymptotique  $u_0$  et  $p_0$  ne dépendent pas de  $X$  et satisfont*

$$\begin{cases} -\eta \partial_Z^2 u_0 + h_1^2 \partial_x p_0 + \eta \frac{\lambda^2}{\mu^2} M Z \partial_Z u_0 = 0, \\ \partial_Z p_0 = 0, \\ \operatorname{div}_x (h_1 u_0) + \partial_Z (w_1 - Z \nabla_x h_1 \cdot u_0) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

ainsi que l'équation de Reynolds modifiée

$$\operatorname{div}_x \left( \frac{h_1^3}{12\eta} \partial_x p_0 \right) = \operatorname{div}_x \left( \frac{h_1}{2} K u_b \right) \quad (3.11)$$

où  $M = \int_X |\nabla_X h_2|^2$  et  $K$  est un coefficient qui dépend de la viscosité  $\eta$  et de la rugosité.

Une étude est en cours avec des types de rugosités plus généraux (?) par exemple  $h^\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 h(x, x/\varepsilon_3)$  où  $\varepsilon_2 = \varepsilon^\alpha$ ,  $\varepsilon_3 = \varepsilon^\beta$ . Ensuite, plusieurs cas peuvent se produire en fonction des valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon_1$  où  $\varepsilon_1$  peut valoir  $\varepsilon^\alpha$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sqrt{\varepsilon}$ ...

### 3.5 Projets de recherche, perspectives scientifiques

Y. BRENIER, R. NATALINI et M. PUEL (?) ont travaillé sur les équations d'Euler incompressibles et leurs versions relaxées en s'inspirant des travaux de S. JIN et Z. XIN (?). Ils ont fait des changements d'échelle. Avec D. BRESCH (LAMA Chambéry) et I. GALLAGHER (Paris), nous voulons utiliser les mêmes idées sur les équations de Saint-Venant en deux dimensions. A.-I. DELIS, T. KATSAOUNIS et C. MAKRIDAKIS (?, ?) l'ont fait en une dimension. Ils ont donné le relaxé de Saint Venant hyperbolique. Nous commençons donc par écrire les équations en deux dimensions avec une diffusion

$$\begin{aligned} \partial_t h^\varepsilon + \operatorname{div}_x v^\varepsilon &= 0, \\ \partial_t q^\varepsilon + \operatorname{div} w^\varepsilon &= -g h^\varepsilon \nabla b^\varepsilon(x), \\ \varepsilon^\alpha \partial_t v^\varepsilon + c_1 \varepsilon^\beta \nabla_x h^\varepsilon &= -\frac{1}{\eta} (v^\varepsilon - q^\varepsilon), \\ \varepsilon^\gamma \partial_t w^\varepsilon + c_2 h^\varepsilon \nabla \left( \frac{q^\varepsilon}{h^\varepsilon} \right) &= -\frac{1}{\eta} \left( w^\varepsilon - \frac{q^\varepsilon \otimes q^\varepsilon}{h^\varepsilon} - g (h^\varepsilon)^2 \frac{Id}{2} \right), \end{aligned}$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont à définir. Nous travaillons sur la version relaxée d'Euler après changement d'échelle comme dans ?. Nous devons justifier cette relaxation.

Nous faisons un changement d'échelle sur  $h^\varepsilon$ ,  $q^\varepsilon$ ,  $v^\varepsilon$ ,  $w^\varepsilon$ ,  $b^\varepsilon$  pour trouver une version diffusive de Saint-Venant. Nous voulons faire tendre  $\varepsilon$  vers zéro pour retrouver

$$\partial_t h + \operatorname{div} q = 0,$$

$$\begin{aligned}\partial_t q + \operatorname{div} w &= -gh\nabla b(x), \\ \partial_t v + c_1\nabla_x h &= -\frac{1}{\eta}(v - q), \\ \partial_t w + c_2 h \nabla q &= -\frac{1}{\eta} \left( w - \frac{q \otimes q}{h} - gh^2 \frac{Id}{2} \right).\end{aligned}$$

Nous voulons travailler sur des solutions globales fortes, faire la justification mathématique comme dans ? pour démontrer la convergence des solutions fortes du problème relaxé rescalé vers Navier Stokes 2D.



# Chapitre 4

## Formulation cinétique

### 4.1 Conditions aux limites de transmission

B. PERTHAME et E. TADMOR (?) ont montré au début des années 1990 qu'il est possible d'interpréter une loi de conservation scalaire multidimensionnelle comme limite fluide d'une famille d'équations cinétiques non linéaires, le paramètre microscopique  $\varepsilon$  étant l'analogie d'un libre parcours moyen.

Avec P.-L.LIONS, ils montrent dans (?) que la solution entropique d'une loi de conservation scalaire multidimensionnelle

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div} A(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

peut être retrouvée comme la limite fluide d'une densité locale

$$u^\varepsilon(x, t) = \int_v f^\varepsilon(x, v, t) dv,$$

où  $f^\varepsilon$  est la densité microscopique solution de

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + a(v) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\chi[u^\varepsilon; v] - f^\varepsilon) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \\ f^\varepsilon(x, v, 0) = f_0^\varepsilon(x, v) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

et où  $\chi$  est la fonction signature :

$$\chi[u; v] = \begin{cases} +1 & \text{pour } 0 < v < u, \\ -1 & \text{pour } u < v < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A. NOURI, A. OMRANE et J.-P. VILA (?) ont étendu ce résultat au cas d'un demi-espace. Ils ont pu ainsi retrouver la condition de Bardos-Leroux-Nédélec (?) sur les conditions de bord admissibles pour une loi de conservation scalaire.

Un travail (?) en collaboration avec C. BOURDARIAS (Université de Chambéry) et A. OMRANE (Université des Antilles-Guyane) traite le problème de conditions aux limites de transmission pour le problème cinétique avec des paramètres microscopiques distincts (cas de deux demi-espaces) et le passage à la limite fluide dans l'un des demi-espaces. Plus précisément, soient  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  un couple de paramètres dans  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  et une fonction

$$f_0 : (x, v) \mapsto f_0(x, v)$$

définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ . Suivant l'article de A. NOURI - A. OMRANE - J.-P. VILA (?), nous notons  $x = (x_1, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$  la variable d'espace et

$$a(v) = (a_1(v), a_*(v)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

le vecteur vitesse avec  $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Nous définissons

$$Q_1 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; x_1 > 0\}$$

et

$$Q_2 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; x_1 < 0\}.$$

De plus,  $\Gamma$  représente la frontière  $\{x_1 = 0\}$  du domaine  $Q_1 \cup Q_2$ , soit :

$$\begin{aligned} \Gamma^- &= \{(x, v); x_1 = 0, a_1(v) > 0\}, \\ \Gamma^+ &= \{(x, v); x_1 = 0, a_1(v) < 0\}. \end{aligned}$$

Nous cherchons  $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon$  définies respectivement sur  $Q_1 \times [0, +\infty[$  et  $Q_2 \times [0, +\infty[$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_1^\varepsilon + a(v) \cdot \nabla_x f_1^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_1} (\chi[u_1^\varepsilon; v] - f_1^\varepsilon) \quad \text{dans } Q_1 \times [0, +\infty[, \\ \partial_t f_2^\varepsilon + a(v) \cdot \nabla_x f_2^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_2} (\chi[u_2^\varepsilon; v] - f_2^\varepsilon) \quad \text{dans } Q_2 \times [0, +\infty[, \\ f_1^\varepsilon(x, v, 0) = f_0^{\varepsilon_1}(x, v) \quad \text{dans } Q_1, \\ f_2^\varepsilon(x, v, 0) = f_0^{\varepsilon_2}(x, v) \quad \text{dans } Q_2 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

et satisfaisant les conditions aux limites de type transmission suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f_1^\varepsilon)|_{\Gamma^-} = (f_2^\varepsilon)|_{\Gamma^-}, \\ (f_2^\varepsilon)|_{\Gamma^+} = (f_1^\varepsilon)|_{\Gamma^+}. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Dans (??) et pour  $i \in \{1, 2\}$ , nous notons

$$u_i^\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}} f_i^\varepsilon(x, v, t) dv$$

la densité locale de particules.

Nous notons par  $f^\varepsilon$  la fonction pour laquelle la restriction à  $Q_1 \times [0, +\infty[$  (respectivement  $Q_2 \times [0, +\infty[$ ) est  $f_1^\varepsilon$  (respectivement  $f_2^\varepsilon$ ). Nous définissons  $f_0^\varepsilon$  de la même façon.

Nous montrons (?) alors quelques propriétés de la solution du problème dans le demi-espace et qu'il est bien posé dans  $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0, +\infty[)$  par un argument de point fixe :

**Théorème 4.1.1** *Supposons que  $f_0^\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^2)$  alors le problème de type transmission (??)-(??) admet pour tout  $T > 0$  une unique solution  $(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon)$  dans  $L^1(Q_1 \times (0, T)) \times L^1(Q_2 \times (0, T))$ .*

Nous montrons aussi des estimations  $L^\infty$  :

**Proposition 1** *Supposons  $(H_0)$  :  $\exists M_0 > 0 \quad \|f_0^\varepsilon\|_\infty \leq M_0$ , alors  $f^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, T))$  avec l'estimation*

$$\|f^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \max(M_0, 1).$$

**Proposition 2** *Soient  $T > 0$  et  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ . Sous l'hypothèse suivante raisonnable sur la condition initiale :*

$$(H_1) \quad \exists U > 0, \quad \chi[-U, v] \leq f_0(x, v) \leq \chi[U, v],$$

*c'est-à-dire  $-1 \leq f_0 \leq 1$  et le support de  $f_0(x, \cdot)$  est inclus dans  $[-U, U]$  alors  $(u^\varepsilon)$  est uniformément borné dans  $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ .*

Nous montrons aussi des estimations  $BV$  avec des conditions asymptotiques sur les paramètres  $\varepsilon_1$ , et  $\varepsilon_2$  :

**Théorème 4.1.2** *Soient  $T > 0$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  satisfaisant*

$$(H_2) \quad : \quad \left| \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right| \leq k\varepsilon_1 \exp\left(-\frac{T}{\varepsilon_1}\right)$$

*avec  $k < 1$ . Supposons que  $f_0^\varepsilon$  est à support compact dans  $v$ ,  $(H_0)$  et*

$$(H_3) \quad f_0^\varepsilon \text{ est borné dans } BV(\mathbb{R}_x; L^1(\mathbb{R}_v))$$

*alors  $f^\varepsilon$  est uniformément borné dans  $BV((0, T) \times \mathbb{R}_x; L^1(\mathbb{R}_v))$ .*

Nous étudions enfin le passage à la limite fluide dans l'un des demi-espace ou dans les deux avec des paramètres de rapport borné.

**Théorème 4.1.3** *Soient  $T > 0$  et  $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ . Supposons  $(H_0)$ ,  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$ , et que la condition initiale  $f_0^\varepsilon$  satisfait  $u^\varepsilon(x, 0) = \int_{\mathbb{R}} f_0^\varepsilon(x, v) dv$  converge vers  $u_0$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ .*

*Alors la densité locale correspond à la solution cinétique*

$$u^\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}} f^\varepsilon(x, v, t) dv$$



converge à une sous suite près vers l'unique solution entropique

$$u \in L^\infty(0, T; BV(\mathbb{R}))$$

de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x A(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

au sens suivant que pour toute  $\psi$  dans  $C_0^1(\mathbb{R} \times [0, T])$  et pour tout réel  $k$ ,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} [|u - k| \partial_t \psi - \text{signe}(u - k)(A(u) - A(k)) \partial_x \psi] dx dt \geq 0.$$

Une application à la décomposition de domaine est envisagée...

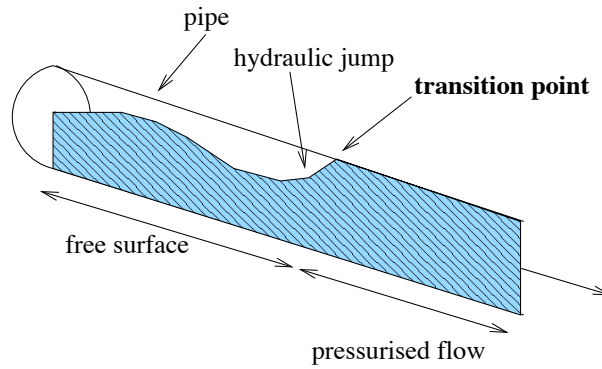
## 4.2 Ecoulements mixtes dans des conduites fermées

### 4.2.1 Introduction

Cette section est issue du prolongement d'un problème posé par le centre d'Ingénierie Hydraulique (CIH) d'EDF à C. BOURDARIAS et S. GERBI pour la connaissance et l'approximation numérique d'écoulements mixtes en conduite (?).

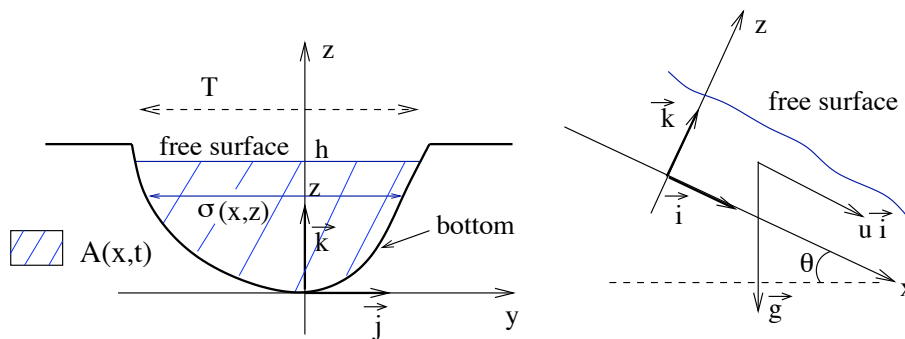
Un travail de recherche avec C. BOURDARIAS et S. GERBI a été effectué sur les formulations cinétique et numérique pour des écoulements mixtes à surface libre (une partie de la section est remplie) et en charge (sous pression lorsque toute la section est remplie) dans un canal de forme quelconque. En effet, une approche cinétique des équations de Saint-Venant modélisant les écoulements 1D à surface libre en canal rectangulaire a été proposé par O. BRISTEAU, B. PERTHAME et C. SIMEONI (?, ?). Ces auteurs proposent alors un schéma cinétique intégrant le terme de pente dans le flux et respectant l'état au repos. Suivant cette même approche, nous avons envisagé le cas d'un canal de forme quelconque puis nous avons construit un modèle cinétique analogue pour les écoulements en charge et nous avons présenté quelques propriétés. L'enjeu est de traiter par cette méthode les écoulements mixtes en conduite forcée, c'est-à-dire tantôt en charge et tantôt en surface libre, en prenant en compte, dans les schémas, les discontinuités du gradient à chaque passage d'un type d'écoulement à l'autre. Le couplage entre un écoulement en charge et un écoulement en surface libre est, comme le montre l'expérience, un problème délicat compte tenu de l'instabilité du phénomène. Celui ci est en outre peu accessible aux mesures directes. Le suivi en temps réel à l'aide d'une simulation numérique est d'un intérêt majeur pour les ingénieurs chargés du dimensionnement en tant qu'outil de validation et de prévision (prévention de dommages dus à de fortes variations de pression par exemple). Ce travail entre dans le cadre de l'étude de problèmes réels de dimensionnement d'ouvrages liés aux barrages. On modélise un écoulement transitoire mixte à l'aide d'un système hyperbolique  $2 \times 2$  à flux de dérivée discontinue en espace, les discontinuités autres que géométriques étant

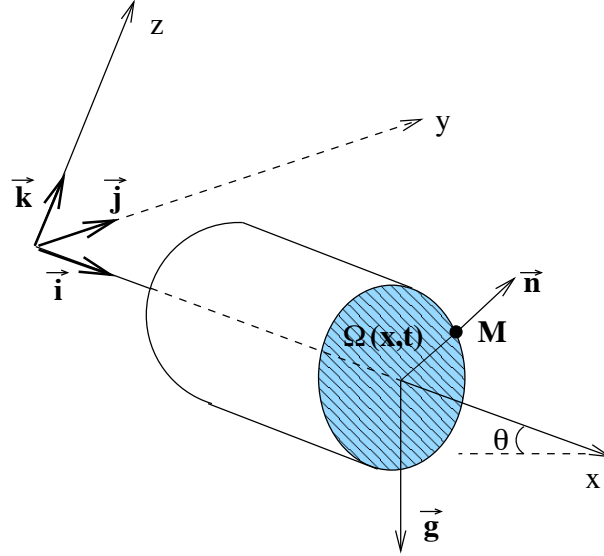
localisées aux points de passage d'un type d'écoulement à un autre. Chaque point de passage en charge est traité comme une frontière libre correspondant à une discontinuité du gradient de pression. Les résultats obtenus par C. BOURDARIAS et S. GERBI (?) sur la simulation de cas tests avec relevés de mesures rendent compte de façon précise à la fois des vitesses d'interface surface libre-charge et des fluctuations de pression au voisinage des interfaces.



#### 4.2.2 Modélisation d'un écoulement unidimensionnel à surface libre

L'eau s'écoule au contact de l'air dans un canal ou une rivière. La surface libre est la surface de séparation de l'eau et de l'air.





La force considérée  $F$  est le poids, donc

$$F = (F_x = g \sin(\theta), F_y = 0, F_z = -g \cos(\theta))$$

où  $\theta(x)$  est l'angle entre l'horizontale et l'axe du canal positivement quand on descend. La masse volumique  $\rho(x, y, z)$  est la masse d'eau par unité de volume. Elle est constante pour un écoulement à surface libre et vaut  $\rho_0 = 1000$  kilogrammes par mètre cube. Elle représente la densité de l'eau à la pression  $p$ . Nous supposons que l'accélération d'une particule dans le plan normal à la ligne de courant est nulle soit  $\frac{dV}{dt} = 0$  et que la pression de l'air est constante, ce qui aboutit à une répartition de pression hydrostatique dans la section du canal mais cela ne signifie pas que la pression est constante sur une section. A la surface libre, la pression est égale à la pression de l'air notée  $P_a$ . Donc,

$$P(x, y, z) = P_a + \rho g(h(x) - z)$$

où  $\rho$  est la densité de l'eau et  $h$  la profondeur. En intégrant les équations d'Euler incompressibles qui traduisent la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement. sur une section  $\Omega(t, x)$  perpendiculaire au fond, de contour  $\partial\Omega(x, t)$  et d'aire  $A(t, x)$ , en utilisant la formule de Reynolds

$$\partial_x \int_{\Omega} u \, dydz = \int_{\Omega} \partial_x u \, dydz + \int_{\partial\Omega} u \, \partial_x M \cdot n$$

où  $M$  est un point de la frontière de  $\Omega$  et  $n$  la normale extérieure à  $\Omega$ , en supposant que le fond et les parois du canal sont imperméables (ces parois sont en outre non dilatables) et en supposant que l'intersection de la surface libre avec la section est horizontale nous obtenons

$$\partial_t A + \partial_x Q = 0,$$

$$\partial_t Q + \partial_x \left( \frac{Q^2}{A} + g \cos(\theta) I_1 \right) = gA \sin(\theta)$$

où  $t$  est la variable de temps,  $x$  l'abscisse le long de l'axe de la conduite, le débit  $Q(t, x)$  représente le volume d'eau traversant une section en une seconde à un instant donné et  $A(t, x)$  l'aire de la section mouillée,

$$\sin(\theta) = -\partial_x Z,$$

$$I_1 = \int_{\Omega} (h(x) - z) dy dz = \int_0^h (h - z) \sigma(x, z) dz,$$

où  $\sigma(x, z) = \partial_z A(x, z)$  et  $g \cos(\theta(x)) I_1$  est le terme de pression obtenu sous l'hypothèse de la pression hydrostatique.

### 4.2.3 Etude théorique de la surface libre

Le système de Saint-Venant pour les écoulements à surface libre dans un canal quelconque ou une conduite fermée s'écrit donc :

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gA \partial_x Z \end{pmatrix}.$$

Ce système est strictement hyperbolique pour  $A(t, x) > 0$ . L'inconnue est  $U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}$  où  $Q(x, t)$  est le débit du liquide. Le flux est

$$F(U) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1(A) \end{pmatrix},$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $I_1(A) = A\bar{y}$ ,  $\bar{y}$  est la distance entre la hauteur d'eau et le centre de gravité,  $gI_1(A)$  le terme de pression et

$$c^2 = g \frac{dI_1(A)}{dA},$$

$$\frac{1}{A} \frac{dI_1(A)}{dA} = \frac{1}{T(A)} = \frac{dh}{dA}.$$

Nous donnons les propriétés de ce système :

**Théorème 4.2.1** *En posant  $u(t, x) = \frac{Q(t, x)}{A(t, x)}$  qui est la vitesse du liquide, l'équation en  $u$  est*

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + gh(A) + gZ \right) = 0,$$

où  $\frac{u^2}{2} + gh(A) + gZ$  est la charge.

L'entropie mathématique pour la surface libre et son flux associé sont donnés par

$$E(U) = \frac{Q^2}{2A} + gAZ + gA(h(A) - \bar{y}) = \frac{Au^2}{2} + gAZ + gAh(A) - gI_1(A),$$

$$\phi(U) = u(E(U) + gI_1(A)).$$

Les états stationnaires sont donnés par  $Q = Au$  constant et  $\frac{u^2}{2} + g(h(A) + Z)$  constant.

Le cas d'un canal rectangulaire de base un c'est-à-dire où

$$A = 2T\bar{y}, \quad h = 2\bar{y}$$

est traité dans ?.

Le premier théorème d'existence de solutions faibles après les chocs est dû à P.-L LIONS, B. PERTHAME et P.-E SOUGANIDIS en 1996 (?).

Pour l'approche cinétique, nous nous inspirons des travaux de ?. Soit une fonction  $\chi$  définie sur  $\mathbb{R}$  à support compact qui a les propriétés suivantes :

$$\chi(w) = \chi(-w) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(w)dw = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} w^2 \chi(w)dw = 1.$$

Nous introduisons aussi l'équation de transport suivante :

$$\partial_t \mathcal{M} + \xi \cdot \partial_x \mathcal{M} - g \partial_x Z \cdot \partial_\xi \mathcal{M} = K(t, x, \xi) \quad (4.3)$$

où le terme de collision  $K$  satisfait  $\int_{\mathbb{R}} K d\xi = 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \xi K d\xi = 0$ .

**Théorème 4.2.2** La maxwellienne pour la surface libre  $\mathcal{M}_{SL}(t, x, \xi)$  est définie par

$$\mathcal{M}_{SL}(t, x, \xi) = \mathcal{M}_{SL}(A, \xi - u) = \frac{A}{\sqrt{g\bar{y}}} \chi\left(\frac{\xi - u(t, x)}{\sqrt{g\bar{y}}}\right)$$

et satisfait

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{SL}(h, \xi - u) d\xi = A(t, x),$$

$$\int_{\mathbb{R}} \xi \mathcal{M}_{SL}(h, \xi - u) d\xi = u(t, x)A(t, x) = Q(t, x)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \mathcal{M}_{SL}(h, \xi - u) d\xi = g\bar{y}A(t, x) + u^2(t, x)A(t, x) = gI_1(A) + \frac{Q^2(t, x)}{A(t, x)}.$$

Nous remarquons que cette formulation est plus faible que la formulation cinétique proposée dans ? qui représente toutes les entropies du système.

**Théorème 4.2.3** Soient  $\chi(w) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4}w^2\right)_+}$ . L'énergie

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\xi^2}{2} f(\xi) + \frac{2}{3} \left( \frac{\pi g \bar{y}}{A} \right)^2 f^3(\xi) + (gZ + gh - 2g\bar{y}) f(\xi) \right) d\xi.$$

vérifie la propriété importante :

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}_{SL}(h, \xi - u)) = E(U).$$

Son minimum sous les contraintes  $f \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi = A$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \xi f(\xi) d\xi = Q$  est atteint par la fonction  $\mathcal{M}_{SL}(A, \xi - u) = \frac{A}{\sqrt{g\bar{y}}} \chi\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{g\bar{y}}}\right)$ .

Contrairement au cas du canal rectangulaire de ?, la fonction  $\chi$  retenue ne permet pas de satisfaire l'équation

$$\xi \cdot \partial_x \mathcal{M}_{SL} - g \partial_x Z \cdot \partial_\xi \mathcal{M}_{SL} = 0$$

des états stationnaires. Donc au niveau microscopique, le second membre est nul uniquement si  $A = 2T\bar{y}$ , c'est-à-dire pour le cas du canal rectangulaire.

#### 4.2.4 Etude théorique de l'écoulement en charge

En posant la masse  $M = \frac{\rho A}{\rho_0}$  et le débit  $D = \frac{\rho Q}{\rho_0}$  où  $\rho_0$  est la pression atmosphérique alors  $u = \frac{D}{M}$  et le modèle conservatif est

$$\partial_t M + \partial_x D = 0, \quad (4.4)$$

$$\partial_t D + \partial_x \left( \frac{D^2}{M} + c^2 M \right) = -gM \partial_x Z, \quad (4.5)$$

$$\partial_t u + \partial_x \left( gZ + \frac{u^2}{2} + c^2 \ln(M) \right) = 0,$$

où  $c$  est la vitesse du son. Il est strictement hyperbolique pour  $A(t, x) > 0$ .

L'entropie mathématique est

$$E = \frac{D^2}{2M} + MP(M) + gMZ = \frac{u^2}{2} M + Mc^2 \ln(M) + gMZ$$

et son flux est

$$\phi = \frac{D^3}{2M^2} + Dc^2 + DP(M) + gDZ$$

où  $P(M) = c^2 \ln(M)$ ,  $P'(M) = \frac{c^2}{M}$ .

Les états stationnaires sont  $D$  constant et  $\frac{u^2}{2} + c^2 \ln(M) + gZ$  constant.

La maxwellienne pour l'écoulement en charge  $\mathcal{M}_{CH}(t, x, \xi)$  définie par

$$\mathcal{M}_{CH}(t, x, \xi) = \mathcal{M}_{CH}(M, \xi - u) = \frac{M}{c} \chi\left(\frac{\xi - u(t, x)}{c}\right)$$

satisfait

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{CH}(M, \xi - u) d\xi &= M(t, x), \\ \int_{\mathbb{R}} \xi \mathcal{M}_{CH}(M, \xi - u) d\xi &= u(t, x)M(t, x) = D(t, x) = Mu, \\ \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \mathcal{M}_{CH}(M, \xi - u) d\xi &= (c^2 + u^2(t, x))M(t, x) = c^2 M + \frac{D^2}{M}. \end{aligned}$$

**Théorème 4.2.4** *Pour une eau au repos, le débit est nul  $u = 0$  et*

$$c^2 \ln(M) + gZ$$

*est une constante, alors la fonction*

$$\mathcal{M}_{CH}(M, \xi) = \frac{M}{c} \chi\left(\frac{\xi}{c}\right)$$

*avec*

$$\chi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)$$

*satisfait l'état stationnaire, c'est-à-dire*

$$\xi \cdot \partial_x \mathcal{M}_{CH} - g \partial_x Z \cdot \partial_\xi \mathcal{M}_{CH} = 0.$$

**Théorème 4.2.5** *Soit l'énergie*

$$\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\xi^2}{2} f(\xi) + c^2 f \ln(f) + gZ f(\xi) + c^2 \ln(c\sqrt{2\pi}) f(\xi) \right) d\xi.$$

*Le minimum de l'énergie  $\mathcal{E}(f)$  sous les contraintes*

$$f \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\xi = M, \quad \int_{\mathbb{R}} \xi f(\xi) d\xi = D$$

*est atteint par la fonction*

$$\mathcal{M}_{CH}(M, \xi - u) = \frac{M}{c} \chi\left(\frac{\xi - u}{c}\right) = \frac{M}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\xi - u)^2}{2c^2}\right)$$

*et nous avons  $\mathcal{E}(\mathcal{M}_{CH}) = E$ .*

Finalement, pour l'écoulement en charge, nous avons une maxwellienne qui respecte l'eau au repos et minimise l'énergie.

### 4.2.5 Etude numérique

Nous résolvons finalement numériquement le problème des écoulements mixtes à la fois en charge sur certaines parties de la conduite et à surface libre sur d'autres. En effet, les deux systèmes sont formellement proches. Les différences proviennent seulement de la loi de pression et les variables conservatives ne sont pas les mêmes.

Comme dans ?, cette proximité nous a conduit à utiliser, pour le couplage entre un écoulement en charge et un écoulement à surface libre un seul jeu de variables  $A$  et  $Q$  au lieu de  $A$ ,  $Q$ ,  $M$  et  $D$ .

Pour le schéma numérique, nous utilisons une seule maxwellienne et traitons les termes sources comme dans ?.

Nous présentons un schéma aux volumes finis pour le système basé sur l'approche cinétique.

Nous considérons une maille uniforme de  $\mathbb{R} : (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Soit  $C_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  avec

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}.$$

Nous notons  $\Delta x$  le pas d'espace,  $x_i = i\Delta x$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Nous considérons une discrétisation en temps en introduisant le pas de temps  $\Delta t$ . Soit  $t_n = n\Delta t$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Nous partons de l'équation où le terme de collision  $K$  est négligé dans le schéma numérique et nous projetons  $f_i^n(\xi)$  sur  $M_i^n(\xi)$ , ce qui donne

$$f_i^{n+1}(\xi) - M_i^n(\xi) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \xi (M_{i+\frac{1}{2}}^-(\xi) - M_{i-\frac{1}{2}}^+(\xi)) = 0$$

avec  $M_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  à définir. Maintenant, notons

$$U_i^n = (A_i^n, (AQ)_i^n), A_i^n = \int_{\mathbb{R}} f_i^n(\xi) d\xi, (AQ)_i^n = \int_{\mathbb{R}} \xi f_i^n(\xi) d\xi$$

et nous obtenons le schéma macroscopique

$$U_i^{n+1} - U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^- - F_{i-\frac{1}{2}}^+) = 0$$

où les flux numériques  $F_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  sont définis ci-dessous. Posons

$$\Delta^- Z_{i+\frac{1}{2}} = Z_{i+1} - Z_i, \Delta^+ Z_{i+\frac{1}{2}} = Z_i - Z_{i+1}$$

alors les flux numériques de part et d'autre de l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  sont

$$F_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \int_{\mathbb{R}} \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} M_{i+\frac{1}{2}}^\pm(\xi) d\xi.$$

**Principe :** quand une particule arrive d'une maille adjacente avec la vitesse  $\xi$ , on prend en compte la vitesse qu'elle devait avoir au départ, calculée en fonction de l'énergie potentielle



perdue ou gagnée selon le signe du saut d'altitude le long de sa trajectoire. Quand une particule de la maille courante est incapable de changer de maille, elle se réfléchit et est prise en compte avec la vitesse opposée.

La première composante de  $(F)_{i+\frac{1}{2}}^-$  est égale à la première composante de  $(F)_{i+\frac{1}{2}}^+$ , c'est-à-dire les dimensions du débit  $Q_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  sont égales ou encore nous avons la conservation pour la hauteur d'eau.

Les propriétés du schéma sont les suivantes : sous la condition CFL

$$\Delta t \max(|u_i^n| + \sqrt{4gy_i^n}) \leq \Delta x$$

le schéma cinétique est tel que  $A_i^n \geq 0$ .

Pour l'écoulement en charge et au repos, nous avons l'égalité

$$M_{i+\frac{1}{2}}^-(\xi) = M_{i-\frac{1}{2}}^+(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

donc le schéma conserve l'état stationnaire de l'eau au repos.

Dans les perspectives, nous projetons d'aborder les problèmes délicats de l'entraînement d'air.

# Bibliographie

- C. Bardos, A.-Y. Leroux, J. C. Nédélec. First order quasilinear equations with boundary conditions. *Comm. Partial Differential Equations*, volume 4, no 9, 1017-1034, 1979.
- G. Bayada, M. Chambat. New models in the theory of the hydrodynamic lubrication of rough surfaces. *Trans. of the AMS J. of Trib.*, 110, 402-407, 1988.
- G. Bayada, M. Chambat. Homogenization of the Stokes system in a thin film flow with rapidly varying thickness. *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.*, 23, no 2, 205-234, 1989.
- A. Benabdallah, D. Serre. Problèmes aux limites pour des systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d'espace. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, tome 305, Série I, 677-680, 1987.
- N. Benhaboucha, M. Chambat, I. Ciuperca. Asymptotic behaviour of pressure and stresses in a thin film flow with a rough boundary. *Quart. of Appl. Math.*, no 2, 369-400, 2006.
- B. Bidégaray, A. Bourgeade, D. Reignier. Introducing physical relaxation terms in Bloch equations. *J. Comput. Phys.*, 1700, 603-613, 2001.
- B. Bidégaray-Fesquet, F. Castella, P. Degond. From Bloch model to the rate equation. *Discrete Cont. Dyn. Syst.*, 11, 1-26, 2004.
- B. Bidégaray-Fesquet, F. Castella, E. Dumas, M. Gisclon. From Bloch model to the rate equations II : The Case of almost degenerate energy levels. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, volume 14, no 12, 1785-1817, 2004.
- B. Bidégaray-Fesquet, E. Dumas, M. Gisclon. Numerical convergence of Bloch model towards rate equations. *En préparation*.
- J.-L. Bona, R. Smith. The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 278, 555-601, 1975.
- J.-L. Bona, R. Winther. The Korteweg-de Vries equation posed in a quarter plane. *SIAM J. Math. Anal.*, volume 14, no 6, 1056-1106, 1983.

- C. Bourdarias. Etude Mathématique et Numérique de diverses équations de transport. *Thèse de doctorat, Université d'Orléans*, 1993.
- C. Bourdarias, S. Gerbi, An implicit finite volume scheme for unsteady flows in deformable pipe-lines, *Hermes Sci. Publ.*, Paris, 449-470, 2002.
- C. Bourdarias, S. Gerbi, M. Gisclon. A kinetic formulation for a model coupling free surface and pressurized flows in closed pipes. *J. Comp. Appl. Math.*, 2007.
- C. Bourdarias, S. Gerbi, M. Gisclon. Numerical approximation for a model coupling unsteady flows in open channels and in pipe-lines. Soumis à *JCP*.
- C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. Some mathematical results on a system of transport equations with an algebraic constraint describing fixed-bed adsorption of gases. *J. Math. Anal. Appl.*, 313, 551-571, 2006.
- C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. Existence of weak entropic solutions for gas chromatography system with one or two active species and non convex isotherm. *Comm. Math. Sci.*, volume 5, no 1, 67-84, 2007.
- C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. Hyperbolic models in gas-solid chromatography. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, Bol. SEMA*, 2008.
- C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. A kinetic scheme for a  $2 \times 2$  hyperbolic system arising in gas chromatography. En rédaction.
- C. Bourdarias, M. Gisclon, S. Junca. Strong Stability with respect to weak limit for a Hyperbolic System arising from Gas Chromatography. En rédaction.
- C. Bourdarias, M. Gisclon, A. Omrane. Transmission boundary conditions in a model kinetic decomposition domain. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*. Series B, volume 2, no 1, 69-94, 2002.
- J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations II : The KdV-equation. *Geom. Funct. Anal.*, no 3, 209-262, 1993.
- Y. Brenier, R. Natalini, M. Puel. On a relaxation approximation of the incompressible Navier-Stokes equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, volume 132, no 4, 2004.
- D. Bresch, L. Chupin, T. Colin, M. Gisclon. A micro-fluidic model with rough boundaries. Soumis.
- D. Bresch, L. Chupin, T. Colin, M. Gisclon. A mixed Reynolds-Stokes system for general roughness effects. En rédaction.
- D. Bresch, B. Desjardins. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Comm. Math. Phys.*, 238 1 – 2, 211-223, 2003.

- D. Bresch, B. Desjardins. On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model and for compressible Navier Stokes models. *J. Math. Pures Appl.*, 9, no 4, 362-368, 2006.
- D. Bresch, B. Desjardins, M. Gisclon, R. Sart. Instability results related to compressible Korteweg system. *Annali dell' Università di Ferrara*, 2008.
- D. Bresch, B. Desjardins, G. Métivier. Recent mathematical results and open problems about Shallow Water equations. *J. Math. Fluides Méca*, 2006.
- D. Bresch, M. Gisclon, C.-K. Lin. An example of low Mach (Froude) number effects for compressible flows with nonconstant density (height) limit. *Math. Model. Num. Anal.*, volume 39, no 3, 477-486, 2005.
- M.-O. Bristeau, B. Perthame. Kinetic schemes for solving Saint-Venant equations on unstructured grids. *Rapport de recherche INRIA Rocquencourt*, 3989, 2000.
- A.-T. Bui. Existence and uniqueness of a classical solution of an initial boundary value problem of the theory of shallow waters. *SIAM J. Math. Anal.*, 12, 229-241, 1981.
- C. Chainais-Hillairet, E. Grenier. Numerical boundary layers of hyperbolic systems in one dimension. *Math. Model. Num. Anal.*, volume 35, no 1, 91-106, 2001.
- T. Colin, J.-M. Ghidaglia. Un problème aux limites pour l'équation de Korteweg-de Vries sur un intervalle borné. *Journées Equations aux Dérivées Partielles, Saint Jean de Monts*. Exposé no 3, 1997.
- T. Colin, M. Gisclon. An initial boundary value problem that approximate the quarter plane problem for the Korteweg-de Vries equation. *Nonlinear Anal.*, no 46, 859-892, 2001.
- A.-I. Delis, T. Katsaounis. Relaxation schemes for the shallow water equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 41, no 7, 695-719, 2003.
- R.-J. Di Perna, P.-L. Lions. Ordinary differential equation, transport theory and Sobolev spaces. *Invent Math*, 98, no 3, 511-547, 1989.
- F. Dubois, P. Le Floch. Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Differential Equations*, 71, no 1, 93-122, 1988.
- A. Dyson. Hydrodynamic lubrication of rough surface - a review work. *Proceedings of the 4th Leeds-Lyon Symposium on surfaces roughness on lubrication*, 61-69, 1977.
- H.-G. Elrod. A review of theories for the fluid dynamic effects of roughness on laminar lubricating films. *Proceedings of the 4th Leeds-Lyon Symposium on surfaces roughness on lubrication*, 11-26, 1977.

- J.-F. Gerbeau, B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar Shallow water ; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.. Series B*, 89-102, 2001.
- M. Gisclon. Comparaison de deux perturbations singulières pour l'équation de Burgers avec conditions aux limites. *C. R. Acad. Sci., Paris*, tome 316, Série I, 1011-1014, 1993.
- M. Gisclon. Etude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique via l'approximation parabolique. *J. Math. Pures Appl.*, 75, 485-508, 1996.
- M. Gisclon. A propos de l'équation de la chaleur. *Journal de Mathématiques des Elèves de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon*, volume 1, no 4, 1996.
- M. Gisclon, D. Serre. Conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique fournies par le schéma de Godunov. *Model. Math. Anal. Numer.*, volume 31, no 3, 359-380, 1997.
- J. Gooddman. Non linear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 95, 325-344, 1986.
- E. Grenier. Couches limites de systèmes paraboliques nonlinéaires caractéristiques. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, série I, tome 323, no 9, 1013-1017, 1996.
- E. Grenier, O. Guès. Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic hyperbolic problems. *J. Differential Equations*, 143, 110-146, 1998.
- E. Grenier, F. Rousset. Stability of one dimensional boundary layers using Green's functions. *Comm. Pure Appl. Math*, 54, 1343-1385, 2001.
- O. Guès. Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristiques. *Comm. Partial Differential Equations*, 15 (5), 595-645, 1990.
- O. Guès. Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 973-1006, 1995.
- F. James. Sur la modélisation mathématique des équilibres diphasiques et des colonnes de chromatographie. *Thèse, Ecole Polytechnique*, 1990.
- S. Jin, Z. Xin. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math*, 48, 235-276, 1995.
- K.-T. Joseph, P. Le Floch. Boundary layers in weak solutions of hyperbolic conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 147, 47-88, 1999.
- T. Katsaounis, C. Makridakis. Relaxation models and finite element schemes for the shallow water equations. *Springer Berlin*, 621-631, 2003.
- P.-E. Kloeden. Global existence of classical solutions in the dissipative shallow water equations. *SIAM J. Math. Anal.* 16, 301-315, 1985.

- D.-J. Korteweg, G. de Vries. On the change of the form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, 39, 422-443, 1895.
- D. Levermore, M. Sammartino. A shallow water model with eddy viscosity for basins with varying bottom topography. *Nonlinearity*, 14(6), 1493-1515, 2001.
- P.-L. Lions. Mathematical topics in fluid dynamics. Volume 2, Compressible models. *Oxford Science Publication*, Oxford, 1998.
- P.-L. Lions, B. Perthame, P.-E. Souganidis. Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49, no 6, 599-633, 1996.
- P.-L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor. A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related questions. *J. Amer. Math. Soc.*, 7, no 1, 169-191, 1994.
- R. Loudon. The quantum theory of light. *Oxford University Press*, 2000.
- F. Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *Eur. J. Mech./ B : Fluid*, 26, no 1, 49-63, 2007.
- A. Mellet, A. Vasseur. On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 32, no 1-3, 431-452, 2006.
- G. Métivier, K. Zumbrun. Large viscous boundary layers for noncharacteristic nonlinear hyperbolic problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 175, no 826, 2005.
- A. Nouri, A. Omrane, J.-P. Vila. Boundary conditions for scalar conservation laws from a kinetic point of view. *J. Statist. Phys.* 94, (5/6), 779-804, 1999.
- J. Pedlosky. Geophysical fluid dynamics. *Berlin Heidelberg-New York, Springer-Verlag*, 1987.
- Y.-J. Peng, Y.-G. Wang. Convergence of compressible Euler-Poisson equations to incompressible type Euler equations. *Asymptot. Anal.*, 41, no 2, 141-160, 2005,
- B. Perthame, C. Simeoni. A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term. *Calcolo*, 38, no 4, 201-231, 2001.
- B. Perthame, E. Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 136, 501-517, 1991.
- H. Rhee, R. Aris, N.-R. Amundson. On the theory of multicomponent chromatography. *Philos. Trans. Roy. Soc.*, A(267), 419-455, 1970.
- P. Rouchon, M. Schonauer, P. Valentin, G. Guiochon. Numerical Simulation of Band Propagation in Nonlinear Chromatography. *Chromatographic Science Series.*, 46, 1988.

- F. Rousset. The residual boundary conditions coming from the real vanishing viscosity method. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 8, no 3, 605-625, 2002.
- F. Rousset. Stability of small amplitude boundary layers for mixed hyperbolic parabolic systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355, no 7, 2991-3008, 2003.
- P.-M. Ruthwen. Principles of adsorption and adsorption processes. *Wiley Interscience*, 1984.
- F. Sueur. Approche visqueuse de solutions discontinues de systèmes hyperboliques semilinéaires. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56, no 1, 183-245, 2006.
- L. Sundbye. Global existence for the Dirichlet problem for the viscous shallow water equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 202, 236-258, 1996.
- R. Temam. Sur un problème non linéaire. *J. Math. Pures Appl.*, 48, 159-172, 1969.
- M.-D. Le Van, C.-A. Costa, A.-E. Rodrigues, A. Bossy, D. Tondeur. Fixed-Bed Adsorption of Gases : Effect of Velocity Variations on Transition Types. *AIChE Journal*, Volume 34, no 6, 1988.
- W. Wang, C.-J. Xu. The Cauchy problem for viscous shallow water equations. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 21, no 1, 1-24, 2005.

## ANNEXE - NOTICE INDIVIDUELLE

### Etat civil

*Nom* : GISCLON

*Prénom* : Marguerite

*Date et lieu de naissance* : 20 juin 1967 à Saint-Etienne (Loire : 42)

*Fonction* : maître de conférences à l'Université de Savoie 26ème section

*Grade* : cinquième échelon de la classe normale

*Nationalité* : Française

Mariée, trois enfants nés en 1998, 2001 et 2005.

Titulaire de la PEDR de 2000 à 2004 et de 2007 à 2011.

Délégation CNRS de 6 mois à partir du 1 – 09 – 2006.

CRCT pour 6 mois à partir de janvier 2008.

*Adresse professionnelle* :

Université de Savoie, UFR SFA,

UMR 5127 du CNRS, Laboratoire de Mathématiques,

73376 Le Bourget-du-Lac Cédex, France.

*Téléphone (bureau)* : 04 – 79 – 75 – 87 – 16

*E-mail* : gisclon@univ-savoie.fr

*Fax* : 04 – 79 – 75 – 81 – 42

### Curriculum Vitae Universitaire

– Doctorat de Mathématiques Appliquées (Université Claude Bernard Lyon I), Unité de Mathématiques Pures et Appliquées (UMPA) de l'École Normale Supérieure de Lyon, sous la direction de Denis SERRE, soutenue le 16 novembre 1994, mention très honorable.

*Titre* : “Etude des conditions aux limites pour les systèmes strictement hyperboliques, *via* l'approximation parabolique.”

*Jury* : J. BARANGER (président), Y. BRENIER (rapporteur), P. DEGOND, H. FREISTÜHLER (rapporteur), T. GALLOUËT, M. SCHATZMAN (rapportrice), D. SERRE (directeur).

– DEA à l'Université Claude Bernard Lyon I, obtenu en 1991 : “Analyse Numérique, Modèles Mathématiques et Calcul Scientifique”.



## Responsabilités administratives

- Responsable de la maîtrise d'ingénierie mathématiques de septembre 1999 à juin 2001.
- Responsable de la troisième année de la licence Mathématiques Appliquées et Sciences Sociales (L3 MASS) de septembre 2002 à janvier 2005.  
La filière MASS est complexe car elle possède quatre spécialités : économie, géographie, psychologie, sociologie et l'enseignement s'effectue sur deux sites : Jacob Bellecombette (Chambéry) et Le Bourget du Lac.
- Directrice des études de la licence MASS à partir de juillet 2007.

## Responsabilités scientifiques

- Ancienne membre des commissions de spécialistes de Chambéry, Clermont-Ferrand, Grenoble et Saint-Etienne.
- Responsable depuis septembre 1996 du séminaire hebdomadaire Equations aux dérivées partielles du Laboratoire de Mathématiques (LAMA) de l'Université de Savoie.
- Membre du comité scientifique avec S. BENZONI (Université de Lyon), B. BIDÉGARAY-FESQUET (Laboratoire Jean Kuntzmann Grenoble), S. DESCOMBES (ENS Lyon), T. GALLAY (Institut Fourier Grenoble) et L. PAOLI (Université de Saint-Etienne) des Journées Equations aux Dérivées Partielles Rhône Alpes (JERA). Ces journées ont vu le jour en 2003 suite à l'envie partagée par différents chercheurs de la région Rhône-Alpes de se réunir chaque année afin de stimuler les échanges scientifiques dans le domaine des équations aux dérivées partielles en profitant de la proximité des centres de recherche de Chambéry, Grenoble, Lyon et Saint-Etienne. Les participants de ces rencontres sont rattachés à l'un des laboratoires suivants : l'Institut Camille Jordan de l'Université Lyon I, l'Institut Fourier de l'Université Grenoble I, le Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Savoie, le Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Saint-Etienne, le Laboratoire Jean Kuntzmann de l'Université de Grenoble I, l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'ENS Lyon.  
Ces Journées Equations aux dérivées partielles Rhône-Alpes (JERA) ont eu lieu en 2003 à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, en 2004 à Grenoble, en 2005 à Chambéry et en 2006 à Saint-Etienne. Elles auront lieu en 2007 à Lyon.

## Organisation de colloques

- Organisatrice avec C. BOURDARIAS et S. GERBI des Journées Savoisiennes d'Analyse Numérique en mai 2000 sur les conditions aux limites dans les problèmes d'évolution. Malgré l'ancienneté de l'intérêt porté aux problèmes d'évolution, la prise en compte des conditions aux limites reste la source de nombreuses difficultés tant sur le plan théorique que numérique, au carrefour de préoccupations des universitaires et des ingénieurs.
- Organisatrice avec C. BOURDARIAS et S. GERBI des Journées Savoisiennes de Mathématiques Appliquées en mai 2002 sur les équations de Saint Venant. Ces équations sont utilisées comme modèle mathématique pour la simulation des écoulements en eaux peu profondes. Le champ des applications, très riche, couvre par exemple l'étude des écoulements en canaux, des écoulements maritimes, des écoulements de neige et de lave torrentielle. De nombreuses équipes de recherche sont actuellement concernées par ces problèmes tant sur le plan théorique que sur celui des applications.
- Organisatrice avec M. COMTE (Université Paris VI), G. CARLIER (Université de Bordeaux), T. LACHAND-ROBERT et I. IONESCU des Journées Savoisiennes de Mathématiques Appliquées en juin 2003 sur le calcul des variations. Les thèmes abordés étaient le transport optimal, l'optimisation sous contraintes, l'optimisation de formes et toutes leurs applications.
- Organisatrice en novembre 2005 des JERA à Chambéry.
- Organisatrice avec I. IONESCU et E. OUDET du colloque franco-roumain de 2006 qui a eu lieu à Chambéry du 28 août au 1<sup>er</sup> septembre.  
Le premier colloque franco-roumain de Mathématiques Appliquées a été organisé en 1992 à Issy en collaboration avec l'INRIA. Sur proposition de H. BRÉZIS, lors de son discours de réception à l'Académie Roumaine en juin 1993, il fut décidé d'organiser une telle rencontre tous les deux ans, sous forme d'un colloque tenu alternativement en France et en Roumanie. Les éditions suivantes ont été organisées en 1994 à l'ENS de Paris, en 1996 à Cluj, en 1998 à Metz, en 2000 à Constanza, en 2002 à Perpignan et en 2004 à Craiova.
- Organisatrice à Chambéry avec T. COLIN, L. MORA (Bordeaux), E. WURTZ (INES, Chambéry) et l'équipe EDP du laboratoire de mathématiques de Chambéry d'une journée (8 – 12 – 2006) "Modélisation et calcul scientifique liés aux problèmes du bâtiment : problèmes, méthodes et enjeux" pour mettre en lumière divers axes de recherche nécessaires à la mise en place d'une plate-forme numérique performante, portable, modulable et conviviale faisant appel à la modélisation, à l'étude mathématique théorique et numérique des systèmes obtenus : phénomènes multi-échelles, décomposition de domaines, identification de paramètres, optimisation en sont quelques exemples.

## Activités d'enseignement

### Préparation concours :

- Cours d'analyse pour la préparation du CAPES de Mathématiques,
- Leçons d'analyse et de modélisation pour la préparation de l'Agrégation de Mathématiques.

### Enseignements transverses :

- Travaux dirigés de mécanique des fluides en M2 Ingénierie Mathématiques,
- Cours et travaux dirigés de statistiques en deuxième année de sociologie à Jacob Bellecombette (UFR LLSH),
- Cours et travaux dirigés de statistiques inférentielles en L3 Mathématiques Appliquées et Sciences Sociales (MASS) et M1 IDESSE, Ingénierie des données en sciences sociales et économie.

Cours et travaux dirigés d'analyse en L1 et L3 Mathématiques, d'algèbre linéaire et optimisation, d'analyse numérique et d'équations différentielles en L3 Mathématiques et MASS, de calcul différentiel et d'optimisation en M1 Mathématiques et M2 Ingénierie Mathématique, d'approximation de lois de conservation en M2 Ingénierie Mathématique, travaux dirigés d'analyse fonctionnelle, d'équations aux dérivées partielles et de distributions en M1 Mathématiques.

## Activités d'encadrement

- Projets en premier cycle, en licence, en maîtrise, en troisième cycle (DESS d'ingénierie mathématiques M2)
- Coencadrement avec P. BARAS (Université de Savoie), d'un stage de fin d'année de magistère en 2000.
- Participation au jury de soutenance d'un mémoire de DEA le 14 septembre 1999 préparé au sein du laboratoire LAMA dont le titre était "Analyse numérique du frottement dépendant de la vitesse de glissement".
- Accueil de K. BODIAN, H. OKOU, N. TIMACK et de J. ZABSONÉ qui viennent du Burkina-Faso, de la Côte d'Ivoire et du Sénégal en stage de 4 mois chacun en 2006 sur des bourses SARIMA.

## Codirection de thèse

Le sujet de la thèse de T. NGOM codirigée avec C. BOURDARIAS commencée en mars 2007 et financée par une bourse nationale (sénégalaise) de Asyia Gum Company est l'étude mathématique et numérique du problème de sédimentation autour de l'embouchure du fleuve Sénégal. Il traite le modèle de Saint-Venant et le transport de polluants.

Défluent du fleuve Sénégal vers le sud par l'intermédiaire du canal de la Taoué, et seule plaine d'inondation de ce fleuve, le lac de Guiers constitue une réserve d'eau douce exceptionnelle en pleine zone sahélienne. Avec une profondeur moyenne de deux mètres, il est considéré comme un "lac plat". Ce lac a fait l'objet de nombreux aménagements hydrauliques qui ont amélioré ses capacités de remplissage et de stockage. Il alimente Dakar en eau potable, permet le développement du maraîchage irrigué, la pratique de l'élevage et de la pêche. Ces usages nécessitent le maintien d'un niveau relativement constant et d'une bonne qualité de l'eau.

Or, le développement de la culture irriguée dans l'ensemble de la vallée du fleuve Sénégal a un impact sur l'évolution de la qualité des eaux du lac : les eaux de drainage en provenance des champs de culture (cane à sucre, riz ...) sont très salées. A cela s'ajoutent la pollution chimique et microbiologique par rejets industriels, eaux usées des populations riveraines, l'eutrophisation, etc. On retrouve une problématique similaire pour le fleuve Mouhoun au Burkina Faso.

Ce sujet d'étude est axé sur les thèmes suivants :

- \* élaboration et étude de modèles couplant le système de Saint Venant bidimensionnel des eaux peu profondes, le transport de polluants (éventuellement leurs interactions chimiques et avec le fond), la salinité...

- \* problèmes de contrôle : identification des polluants,

- \* lien entre le système de Saint Venant et celui de Navier-Stokes avec densité variable,

- \* prise en compte de la jonction rivière-lac : couplage entre modèles bidimensionnels et monodimensionnels,

- \* approches numériques performantes.

## Communications orales

- Au 24<sup>ième</sup> Congrès National d'Analyse Numérique à Vittel, le 26 mai 1992 : “Comparaison de deux perturbations singulières pour l'équation de Burgers avec conditions aux limites”.
- Au 25<sup>ième</sup> Congrès National d'Analyse Numérique à Giens, le 28 mai 1993 : “Etude des conditions aux limites résiduelles”.
- Au 26<sup>ième</sup> Congrès National d'Analyse Numérique aux Karéllis, le 30 mai 1994 : “Estimations d'énergie avec la condition aux limites de Dirichlet”.
- A l'Université de Brown (USA) le 23 juin 1994 “Study of residual boundary conditions”.
- A l'Université de Chicago (USA) le 28 juin 1994 “The vanishing viscosity method for an IBVP of hyperbolic systems”.
- A Oberwolfach, en mai 1996, organisé par C. Dafermos : “Boundary conditions for a strictly hyperbolic system *via* the Godunov scheme”.
- Aux JERA à Grenoble le 4 novembre 2004, “Formulation cinétique pour des écoulements mixtes en charge et en surface libre dans un canal de forme quelconque”.
- A la sixième conférence de l'AIMS à Poitiers en juin 2006 : “A survey of mathematical model for fixed bed adsorption of gases”.
- A l'IST de Lisbonne le 20 novembre 2006 “A kinetic formulation for a model coupling free surface and pressurised flows in pipes”.
- A Besançon (94), Bordeaux (95), Clermont-Ferrand (94, 2006), ENS de Cachan (95), ENS Lyon (92, 93, 94, 96, 99), Laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble (95), Marseille (95), Nice (99, 2006, 2007), Rennes (95).

## Séjours à l'étranger

- Brown University, USA, (du 20 au 24 juin 1994), sur l'invitation de C. Dafermos.
- Chicago, USA, (du 27 juin 1994 au 1 juillet 1994), sur l'invitation de Cheng.
- IST Lisbonne, (18 au 23 novembre 2006), sur l'invitation de Juha Videman.
- Vienne, Autriche (du 6 au 10 mai 2007), sur l'invitation de A. Juengel.