



**HAL**  
open science

# Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage

Jean-Jacques Sinou

► **To cite this version:**

Jean-Jacques Sinou. Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Lyon, 2002. Français. NNT: . tel-00260842

**HAL Id: tel-00260842**

**<https://theses.hal.science/tel-00260842v1>**

Submitted on 5 Mar 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

PRÉSENTÉE POUR OBTENIR LE TITRE DE

**DOCTEUR**

DE

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPÉCIALITÉ: MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE DE MÉCANIQUE DE LYON (UCBL/INSA/ECL)

PAR

**Jean-Jacques SINOU**

**SYNTHÈSE NON-LINÉAIRE DES SYSTÈMES VIBRANTS.**

**APPLICATION AUX SYSTÈMES DE FREINAGE.**

Présentée et soutenue publiquement le 8 Novembre 2002, devant le jury d'examen :

D. AUBRY, Professeur, Laboratoire MSS-MAT, École Centrale Paris	Rapporteur
S. BELLIZZI, Chargé de Recherche (HDR), Laboratoire LMA, Marseille	Rapporteur
A. COMBESURE, Professeur, Laboratoire LMC, INSA-Lyon	Président
L. JÉZÉQUEL, Professeur, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
G.B. MAZET, Chef de Service, Messier-Bugatti, Groupe Snecma	Examineur
F. THOUVEREZ, Professeur, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon	Examineur



*À mes parents*



” D’ailleurs, le chemin n’est pas si ardu que certains se l’imaginent. C’est à ses débuts qu’on trouve des cailloux, des éboulis qui lui donnent l’air impraticable. La plupart des chemins de montagne, quand on les regarde de loin, semblent escarpés, tourmentés. C’est la distance qui provoque cette illusion d’optique; qu’on se rapproche et tous les éléments que l’erreur de perspective nous présentait en entassement chaotique se distinguent peu à peu les uns des autres et l’on s’aperçoit que ce qui, de loin, semblait un éperon impossible à gravir n’est qu’une pente tout à fait accessible”.

Sénèque, *La Constance du sage*.



# Remerciements

Je tiens à adresser mes premiers remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur Louis Jézéquel pour m'avoir proposé ce travail de recherche, m'avoir accueilli dans son équipe, au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, et pour la bienveillante attention avec laquelle il a constamment dirigé mes recherches. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma plus profonde gratitude pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée et mes sentiments de respectueux attachement.

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur Alain Combescure pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être le président de ce jury.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Denis Aubry et Monsieur Sergio Bellizzi, Chargé de Recherche au CNRS, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur le Professeur Fabrice Thouverez pour avoir su me faire partager ses connaissances et sa grande rigueur scientifique, pour l'intérêt constant qu'il a porté à mes travaux de recherche et pour la bienveillante sollicitude avec laquelle il m'a toujours conseillé et guidé.

Je remercie également Monsieur Guy-Bernard Mazet, Chef du Service Etude, Recherche et Développement de la société Messier-Bugatti (Groupe Snecma), qui m'a accueilli dans son équipe durant une année et a suivi avec une grande attention mes travaux durant trois ans. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à Olivier Dereure et Jacques Delmas, ingénieurs du service Etude, Recherche et Développement de la société Messier-Bugatti, pour leur aide et leur contribution à ces travaux. Je remercie enfin l'ensemble des membres de l'équipe du Service Etude, Recherche et Développement, pour leur accueil et les conditions de travail qu'ils ont su faire régner.

J'adresse un grand merci à Olivier Dessombz, Maître de Conférences au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, et plus particulièrement collègue de bureau, pour sa grande disponibilité à répondre à mes problèmes informatiques.

Je ne saurais oublier l'ensemble des membres du laboratoire et de mes amis thésards pour leur accueil et pour l'atmosphère qu'ils ont su créer. Qu'ils trouvent ici l'expression d'une sincère amitié et d'un souvenir constant.

Enfin, je remercie mes amis de longue date, les personnes qui me sont chères, mes parents pour leur soutien constant, et tous les membres de ma famille.



# Résumé

Cette étude porte sur l'analyse des instabilités des systèmes non linéaires. Nous considérons plus particulièrement les vibrations dues à la friction et nous présentons des modèles analytiques pour l'analyse des modes de vibration de "judder" (mode de vibration présent dans les systèmes de freinage automobile) et pour l'analyse des modes de vibration du "whirl" (mode de vibration des systèmes d'atterrissage d'avion).

Le but de cette recherche est de développer une procédure d'analyse non-linéaire des systèmes vibrants. Nous nous intéressons plus particulièrement aux systèmes non linéaires présentant des non-linéarités polynomiales.

Une attention tout particulière est apportée à la détermination des mécanismes engendrant les instabilités dues au frottement (stick,-slip, sprag-slip, couplage de modes...) et à la réalisation de modèles phénoménologiques permettant de reproduire les principaux modes de vibration des systèmes associés. La démarche d'analyse non linéaire s'appuie sur deux points particuliers. Le problème « statico-dynamique » où l'analyse dynamique correspond à une linéarisation autour d'une position statique obtenue par la résolution d'un problème non linéaire. Les conditions de stabilité du système sont alors étudiées à partir de la résolution du problème aux valeurs propres. Le second point concerne le problème « dynamique non linéaire » : nous cherchons à mettre en place des méthodes non-linéaires (méthode de la variété centrale, les approximants multivariés, la méthode de la balance harmonique AFT (alternate frequency/time domain), etc...) pour prédire les niveaux vibratoires, ou cycles limites. Les cycles limites provenant des méthodes non-linéaires sont alors comparés avec ceux obtenus par une intégration temporelle classique afin de valider cette procédure globale qui consiste à utiliser successivement, dans un certain ordre, des méthodes non-linéaires qui réduisent et simplifient le système de départ.

## Mots clés :

Dynamique des Structures et des Vibrations, Stabilité, Analyse Non-Linéaire, Cycles limites, frottement, sprag-slip.

Méthodes non-linéaires, méthode de la variété centrale, forme normale, approximants de Padé, méthode de la balance harmonique AFT (DFT), Analyse des modes complexes non-linéaires.



# Abstract

The study deals with the study of instability phenomena in non-linear model. To put it more precisely, we consider brake vibrations. The judder mode vibration in automobile braking and the whirl vibrations in an aircraft landing gear braking system are concerned. The purpose of this research is to develop a procedure of nonlinear methods in order to study instability phenomena in complex nonlinear systems. The non-linearities are expressed as a polynomial with quadratic and cubic terms. First of all, a parameter model including mechanisms for friction induced system instability is established and the equations of motion of nonlinear systems are written. One of the most important phases in study of brake systems is the determination of the mechanism of the unstable friction induced vibration (stick-slip, variable dynamic friction coefficient, sprag-slip and coupling mechanism). The non-linear analysis can be divided into two parts. First of all, the non-linear equations of motion are linearized at the steady-state operating point and a set of linearized perturbation equations obtained. Stability was investigated by determining eigenvalues of the linearized perturbation equations about each steady-state operating point.

Next, we use the nonlinear methods (center manifold approach, multivariable approximants, the alternate frequency/time domain (AFT) method, etc...) in order to predict limit cycle amplitudes. Results from these nonlinear methods will be compared with results obtained by integrating the full original system in order to validate this global procedure consisting to employ successively, in a certain order, non-linear methods to reduce, to simplify the original system.

## Keywords :

Structural dynamics, vibration measurement and theory of mechanical vibrations.

Stability, non-linear analysis, limit cycles, friction, sprag-slip.

Center manifold approach, normal form theory, multivariable approximants, harmonic balance method (Alternate/Frequency Time domain, DFT), Complex Non-Linear Modal Analysis (CNLMA).



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Dynamique et frottement sec</b>	<b>5</b>
1.1 Vibrations induites par le frottement . . . . .	5
1.2 Mécanismes de frottement et stabilité . . . . .	7
1.2.1 Etude générale de stabilité du système masse-ressort . . . . .	7
1.2.2 Le stick-slip . . . . .	8
1.2.3 Le sprag-slip . . . . .	15
1.2.4 Le couplage de mode . . . . .	17
1.2.5 Combinaison stick-slip/sprag-slip . . . . .	19
1.3 Conclusion - Application au cas d'un frein aéronautique . . . . .	21
<b>2 Notion de stabilité</b>	<b>23</b>
2.1 Stabilité des systèmes linéaires . . . . .	23
2.2 Stabilité des systèmes non linéaires . . . . .	25
2.2.1 Stabilité des points singuliers, stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	25
2.2.2 Fonction de Lyapunov . . . . .	27
2.2.3 Stabilité des points d'équilibre hyperbolique et extension . . . . .	28
2.2.4 Stabilité des orbites périodiques . . . . .	29
2.2.5 Application de Poincaré . . . . .	31
2.2.6 Bifurcation de Hopf . . . . .	32

---

2.3	Méthodes et critères d'analyse de stabilité . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Méthodes d'analyse non-linéaire</b>	<b>37</b>
3.1	Méthodes de recherche de solutions simplifiées . . . . .	37
3.2	Généralités sur les méthodes de réduction et simplification . . . . .	38
3.3	Réduction par la méthode de la variété centrale . . . . .	39
3.4	Formes normales de systèmes dynamiques . . . . .	42
3.4.1	Définition . . . . .	42
3.4.2	Méthodologie . . . . .	42
3.5	Approximations fractionnelles . . . . .	46
3.5.1	Approximants de Padé . . . . .	46
3.5.2	Théorie de la convergence . . . . .	48
3.5.3	Approximants à deux variables . . . . .	49
3.5.4	Généralisation des approximants . . . . .	54
3.6	Méthode de la linéarisation équivalente . . . . .	57
3.6.1	Cas des non-linéarités symétriques . . . . .	57
3.6.2	Cas des non-linéarités non symétriques . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Modèle fondamental non linéaire bidimensionnel de frottement</b>	<b>61</b>
4.1	Modèle analytique . . . . .	62
4.2	Analyse de stabilité . . . . .	65
4.2.1	Détection d'instabilité - Point de bifurcation de Hopf . . . . .	66
4.2.2	Généralisation de l'analyse de stabilité du système . . . . .	69
4.3	Analyse non-linéaire - Niveaux vibratoires . . . . .	75
4.3.1	Cycles limites par intégration temporelle classique . . . . .	75
4.3.2	Préambule à l'analyse non-linéaire . . . . .	80
4.3.3	Extension de la méthode de la variété centrale aux systèmes paramétrés . . . . .	82

---

4.3.4	Détermination des coefficients de la variété centrale . . . . .	83
4.3.5	Obtention des cycles limites . . . . .	89
4.3.6	Transformation du système pour les approximants fractionnels . . . . .	93
4.3.7	Approximation fractionnelle à deux variables . . . . .	95
4.3.8	Recherche de solutions sous forme harmonique . . . . .	104
4.3.9	Apport des approximants multivariables . . . . .	114
4.3.10	Les approximants de Padé par rapport à la Forme Normale . . . . .	122
4.3.11	Apport des méthodes non-linéaires en temps de calcul . . . . .	123
4.3.12	Extension à des études paramétriques . . . . .	123
4.4	Analyse Non-Linéaire des Modes Complexes . . . . .	127
4.4.1	Problème considéré . . . . .	127
4.4.2	Mode non-linéaire complexe . . . . .	128
4.4.3	Utilisation de la méthode de la linéarisation équivalente . . . . .	128
4.4.4	Approche Non-Linéaire des Modes Complexes . . . . .	129
4.4.5	Application au système non-linéaire frottant . . . . .	132
4.4.6	Recherche d'un cycle limite "loin" du point de bifurcation . . . . .	134
4.4.7	Exemple d'étude paramétrique . . . . .	135
4.4.8	Conclusion . . . . .	136
4.5	Conclusion de l'étude . . . . .	137
<b>5</b>	<b>Application industrielle</b>	<b>139</b>
5.1	Un frein aéronautique carbone/carbone . . . . .	140
5.2	Modes de vibrations . . . . .	142
5.3	Retour d'expérience . . . . .	143
5.3.1	Analyse des modes . . . . .	143
5.3.2	Influences de paramètres sur les vibrations . . . . .	153
5.4	Etude de la vibration du Whirl . . . . .	154

5.4.1	Préliminaire . . . . .	154
5.4.2	Mise en équation du problème . . . . .	155
5.5	Écriture des systèmes linéaire et non-linéaire . . . . .	169
5.5.1	Préambule . . . . .	169
5.5.2	Système dynamique considéré . . . . .	169
5.5.3	Point de fonctionnement - Système linéarisé . . . . .	171
5.5.4	Système non linéaire au point d'équilibre . . . . .	172
5.6	Analyse de stabilité et études paramétriques . . . . .	175
5.6.1	Détermination du point d'équilibre . . . . .	175
5.6.2	Étude de stabilité . . . . .	177
5.6.3	Influence des facteurs physiques majeurs sur la stabilité du système . . . . .	179
5.6.4	Études biparamétriques . . . . .	182
5.6.5	Conclusions sur les études de stabilité du frein . . . . .	186
5.7	Détermination des cycles limites . . . . .	187
5.7.1	Préambule: cycles limites par intégration temporelle . . . . .	187
5.7.2	Mise sous forme d'équation d'état . . . . .	189
5.7.3	Application de la méthode de la variété centrale et des approximants de Padé . . . . .	190
5.7.4	Cycles limites . . . . .	191
5.7.5	Exemple d'une étude paramétrique . . . . .	196
5.8	Plate-forme logiciel . . . . .	199
5.9	Conclusion de l'étude de stabilité du whirl . . . . .	200
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>201</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>205</b>
	Références . . . . .	205
	Publications personnelles . . . . .	215

---

Communications personnelles internationales avec comité de lecture . . . . .	216
Communications personnelles nationales avec comité de lecture . . . . .	216
Autres communications personnelles . . . . .	217
Rapports d'activités . . . . .	217
<b>Table des figures</b>	<b>219</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>225</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>229</b>
<b>Annexe A</b>	<b>231</b>
<b>Annexe B</b>	<b>232</b>
<b>Annexe C</b>	<b>239</b>
<b>Annexe D</b>	<b>245</b>



# Introduction

Le domaine de l'analyse non-linéaire, si il possède une base théorique solide, est encore un domaine en pleine évolution. Effectivement, durant ces dernières années, la compréhension du comportement dynamique des systèmes avec la prise en compte des phénomènes non-linéaires a permis de mieux appréhender et de prévoir de façon efficace le comportement des structures complexes.

De nombreux logiciels ont été développés afin de résoudre les systèmes différentiels incluant des non-linéarités. Ils permettent donc d'obtenir des réponses temporelles et fréquentielles caractérisant le comportement dynamique des structures. Cependant, un des problèmes rencontrés par la prise en compte des phénomènes non-linéaires est l'augmentation des temps de calculs et la gestion des termes non-linéaires. A cet effet, de nombreux chercheurs se sont penchés sur les aspects non-linéaires en cherchant à mettre en place des méthodes et outils non-linéaires permettant de simplifier le problème non-linéaire de départ sans perdre pour autant l'aspect non-linéaire du système, et plus particulièrement le comportement dynamique non-linéaire des structures.

Un des domaines concerné par ce type d'études correspond aux problèmes d'analyse d'instabilité dus implicitement aux comportements non-linéaires des structures. Les systèmes frottants en sont un des exemples les plus courants, avec des applications très variées, que ce soit dans les transports terrestre, ferroviaire et aéronautique. Ainsi, dans les systèmes de freinage, le frottement se trouve être à l'origine de nombreux problèmes d'instabilité. Cependant, même si les phénomènes sont clairement définis, les modélisations, et plus particulièrement l'origine des instabilités dues au frottement permettant de reproduire les phénomènes vibratoires, restent un problème très ouvert. De même, si la détermination et la prédiction d'apparition d'instabilité sont des sujets qui sont généralement bien connus et couramment utilisés, la détermination et la prédiction des niveaux vibratoires, liées à l'apparition d'une instabilité due au frottement, sont très souvent ignorées. L'une des causes avancées repose sur les problèmes liés aux non-linéarités qui nécessitent un temps de calcul prohibitif et la mise en place d'une méthodologie rigoureuse du problème, incluant l'utilisation de méthodes non-linéaires.

Le sujet de cette thèse s'inscrit donc dans cet optique: mettre en place des méthodes d'analyse non-linéaire pour permettre de mieux appréhender l'analyse de stabilité de structures frottantes complexes, et de s'intéresser à la détermination des niveaux vibratoires engendrés par les systèmes frottants. Ainsi, l'objectif principal de cette thèse consiste à définir des outils d'analyse non-linéaire qui permettent de simplifier les systèmes non-linéaires étudiés pour effectuer des études de stabilité, mais aussi de déterminer les niveaux vibratoires de manière efficace et juste.

Un autre point concernera plus particulièrement l'origine des instabilités. De nombreuses recherches abordent souvent le problème du frottement sous un aspect tribologique, qui se base plus particulièrement sur la définition de lois de frottement plus ou moins complexes (avec les phénomènes de stick-slip par exemple). Nous tâcherons d'apporter une contribution complémentaire et différente à ces recherches en regardant l'origine des instabilités d'un point de vue plus global, avec un regard plutôt porté sur l'aspect dynamique des vibrations et se basant sur l'hypothèse des couplages de modes (et de la bifurcation de Hopf associée) comme origine possible des instabilités. Nous montrerons alors que, pour certaines instabilités, la prise en compte d'une loi de frottement très simple (coefficient de frottement constant avec la loi de Coulomb) peut s'avérer suffisante pour comprendre les phénomènes vibratoires frottants.

Aussi, notre étude sera scindée en cinq chapitres:

Dans un premier temps, nous introduirons les notions de base et nous effectuerons un état de l'art des problèmes d'analyse non-linéaire sur les systèmes frottants. Nous verrons alors les divers phénomènes engendrés lors des vibrations par le frottement et les diverses causes s'y rattachant. Nous examinerons plus particulièrement les vibrations des systèmes frottants sous l'aspect de la stabilité et des modélisations concernant le frottement associé.

Afin d'étudier la stabilité concernant les systèmes non-linéaires frottants, nous aborderons dans un second chapitre les diverses définitions et outils de stabilité ainsi que les méthodes non-linéaires. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux systèmes non-linéaires continus comportant des non-linéarités polynomiales. Les outils d'analyse de stabilité développés dans le premier chapitre concerneront plus particulièrement les méthodes d'analyse des valeurs propres des systèmes linéarisés autour de leurs positions d'équilibre statique (avec la matrice jacobienne associée) et des critères de stabilité liés aux conditions de Routh-Hurwitz.

Les méthodes non-linéaires développées dans le troisième chapitre concerneront plus particulièrement la méthode de la variété centrale, des approximants de Padé (et de la généralisation associée), de la forme normale et de la méthode de la linéarisation équivalente. Ces méthodes non-linéaires serviront de base à notre recherche pour établir des procédures de simplifications non-linéaires de systèmes complexes.

Le quatrième chapitre sera consacré à la mise en place d'outils d'analyse non-linéaire sur un modèle non-linéaire bidimensionnel de frottement intégrant le phénomène de sprag-slip. Nous appliquerons ce modèle pour la vibration de trépidation observée sur les poids-lourds. Nous verrons tout d'abord la démarche d'étude de la stabilité d'un système non-linéaire à partir des valeurs propres du système linéarisé autour du point de fonctionnement. Nous montrerons alors l'importance de ces études de stabilité à travers les paramètres physiques responsables des phénomènes d'instabilité.

Dans un second temps, nous mettrons en place les méthodes non-linéaires de la variété centrale, des approximants de Padé et de la balance harmonique "Alternate Frequency/Time domain (DFT)", afin d'estimer les niveaux vibratoires, ou les "cycles limites", du système non-linéaire. Ces méthodes

non-linéaires ont pour but de réduire le nombre de degrés de liberté du système de départ et de simplifier les termes non-linéaires. Ainsi, ces méthodes non-linéaires vont nous permettre d'obtenir un système non-linéaire simplifié ayant le même comportement dynamique que le système de départ. Afin de valider cette démarche, une comparaison avec les cycles limites obtenus par une intégration temporelle du système complet de départ sera réalisé. Nous montrerons aussi la possibilité de réaliser des études d'influence par rapport aux paramètres physiques, sur les zones de stabilité et sur les niveaux vibratoires engendrés.

Enfin, un nouvel outil d'analyse non-linéaire sera proposé. L'objectif principal de cette méthode, appelée Complex Non-Linear Modal Analysis (CNLMA), est d'obtenir une réponse approchée des cycles limites pour un système non-linéaire. Cette approche se base plus particulièrement sur une approche modale (en s'intéressant au mode instable). La méthode de la linéarisation équivalente est utilisée afin d'approximer les termes non-linéaires et la recherche des cycles limites s'effectue par l'intermédiaire du suivi de la partie réelle des valeurs propres du système linéaire équivalent de l'orbite non-linéaire associé. Cette méthode sera alors testée sur le modèle non-linéaire bidimensionnel défini précédemment.

Pour clore ce mémoire, nous développerons, dans un cinquième chapitre, l'analyse de stabilité et les méthodes non-linéaires de la variété centrale et des approximants de Padé sur une application industrielle. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux systèmes de freinage aéronautique et aux vibrations engendrées sur le train d'atterrissage d'un avion lors d'un freinage. A partir d'essais expérimentaux, nous établirons un modèle phénoménologique nous permettant de reproduire la vibration de whirl (littéralement parlé "effet de tournoisement"). Une étude de stabilité et une analyse non-linéaire seront alors menées afin de déterminer les zones de stabilité et d'estimer les niveaux vibratoires. Ces divers outils seront mis en place afin d'aboutir à un outil de conception d'aide à la maîtrise des vibrations et des phénomènes physiques influant sur la stabilité des systèmes de freinage aéronautique.

Nous terminerons enfin sur une synthèse des différents apports de cette thèse, et les perspectives qui peuvent s'en dégager.



# Chapitre 1

## Dynamique et frottement sec

Dans ce chapitre, nous présenterons le domaine des vibrations induites par le frottement sec et les divers mécanismes théoriques tentant de reproduire les phénomènes observés. Ainsi, nous tenterons tout d'abord de classer les différents modes vibratoires, répertoriés dans la littérature sous le nom de "vibrations induites par le frottement", en nous intéressant plus particulièrement aux vibrations touchant le domaine des transports (automobile, ferroviaire et aéronautique). Ensuite, nous définirons les principaux mécanismes en explicitant leur spécificité et leur domaine d'application. Nous nous attarderons alors plus particulièrement à la notion de stabilité pour chacune de ces modélisations.

### 1.1 Vibrations induites par le frottement

Sous l'appellation de "vibrations induites par le frottement sec", nous retrouvons un grand nombre de phénomènes et de domaines d'application. Nous avons, par exemple, les vibrations des systèmes de freinage automobiles à disque (Boudot [18], Moiroit [115]) ou à tambour (Hulten [69], Kusano [95], Lang [98], Millner [112] et Day [36]), les vibrations des systèmes de contact roue/rail (Remington [140], Rudd [146] et Petit [133]), les vibrations des systèmes de freinage aéronautique (Liu [102], Gordon [61], Feld [51] et Travis [169]), la dynamique des balais d'essuie-glace (Grenouillat [62], Vola et Raous [170]) et les systèmes à bande frottante (Nakai [120]). Chacun des domaines industriels cités précédemment regroupe plusieurs types d'instabilités de frottement et il n'est pas rare de retrouver le même phénomène dans divers domaines. Leurs manifestations, conditions d'apparition et conséquences sont diverses ce qui laisse place à des terminologies nombreuses qui peuvent être spécifiques au domaine industriel concerné.

La classification la plus utilisée pour distinguer ces divers phénomènes vibratoires repose sur leur spectre fréquentiel propre (Kobayashi [93]). Le spectre couvert par l'ensemble des vibrations de freinage est très large pouvant aller de 0 à 2000Hz. Généralement, la notion de "vibrations de freinage" est attribuée pour les vibrations dont la fréquence reste inférieure à 500Hz. Pour les vibrations supérieures à 500Hz, on parle plutôt de "bruits de freinage".

De nombreuses études se sont développées du fait des conséquences de ces vibrations qui peuvent être de plusieurs natures. Pour certaines, comme le crissement, les vibrations se traduisent par de

simples nuisances sonores: les études menées pour réduire ces vibrations sont donc réalisées dans un but de confort sonore et acoustique. D'autres jouent un rôle plus néfaste car elles peuvent tout simplement réduire l'efficacité du freinage et endommager la structure elle-même.

Les instabilités vibratoires peuvent se définir en deux grandes familles: les vibrations forcées et les vibrations auto-entretenues.

Les bruits de freinage sont le plus souvent le résultat de vibrations auto-entretenues. Le crissement (squeal noise) en est l'exemple le plus connu. Il est sans aucun doute le bruit de freinage qui a été et continue d'être le sujet de nombreuses études aussi bien universitaires qu'industrielles. Le crissement se définit comme une vibration auto-entretenu qui se caractérise par un sifflement. La bande spectrale associée est très large variant de 0 à 10kHz. Dans le domaine de l'automobile et du ferroviaire, cette vibration n'affecte ni l'efficacité du freinage, ni la sécurité, mais se caractérise par une nuisance sonore. Dans la même catégorie, nous trouvons le hullement (squelch noise) qui se produit entre 200 et 500Hz. D'autre part, nous retrouvons des vibrations forcées comme les trépidations (judder) qui correspondent à une résonance de la structure due à une évolution de la force de frottement non-uniformément répartie sur la zone de friction des disques de frein. Ces vibrations sont dues à deux effets. Le premier met en jeu un phénomène d'instabilité thermique qui entraîne localement des zones d'échauffement. Cette vibration s'appelle le "hot judder" ou trépidation à chaud. Le deuxième effet prend en compte les variations du coefficient de frottement, dues à un état de surface non homogène du disque ou d'une épaisseur non uniforme sur toute la surface des interfaces des disques de frein. On parle alors de "cold judder" ou trépidation à froid. D'autres vibrations telles que le bourdonnement ou ronflement (hum, moan noise) existent aussi. Ces vibrations peuvent nuire à l'efficacité du freinage.

Bien entendu, cette description rapide des divers vibrations de freinage n'est pas exhaustive et le lecteur pourra se référer à des études plus générales sur le sujet (Kobayashi [93], Ibrahim [70]-[71], Oden et Martins [129] et Crolla et Lang [34]).

## 1.2 Mécanismes de frottement et stabilité

Ces dernières années ont vu de nombreux travaux de recherche se développer autour des vibrations par frottement sec et de la compréhension des phénomènes physiques étant à l'origine de ces instabilités. Cependant, il n'existe pas une théorie unique pour expliquer et caractériser ces vibrations. Vu la diversité des applications industrielles, l'une des phases primordiales lors des études des systèmes de freinage est la détermination du mécanisme qui peut produire les instabilités de vibrations induites par le frottement sec. Il n'existe pas un seul mécanisme et un modèle mathématique unique pour expliquer les instabilités de frottement. Comme le décrivent Ibrahim [70]-[71], Oden et Martins [129] et Crolla et Lang [34], nous pouvons considérer quatre principaux mécanismes d'instabilités vibratoires induites par le frottement: le stick-slip, la variation du coefficient de frottement, le sprag-slip et le couplage de mode. Les deux premières approches considèrent que l'origine de l'instabilité provient d'un changement de la valeur du coefficient de frottement en fonction de la vitesse relative de glissement. Les deux autres approches se basent sur un couplage modal, qui peut être dû à des considérations géométriques. Dans ce dernier cas, l'instabilité peut apparaître avec un coefficient de frottement constant.

Avant de décrire plus précisément ces quatre mécanismes de contact frottant entre deux structures pour mieux comprendre les phénomènes physiques et les hypothèses faites pour chacun d'entre-eux, nous allons nous attarder quelques instants sur l'étude générale d'un système masse-ressort. Cette étude nous sera en effet utile pour l'explication des phénomènes de stick-slip et sprag-slip, et les conditions de stabilité associées.

### 1.2.1 Etude générale de stabilité du système masse-ressort

Nous considérons un système masse-ressort, comme illustré en figure 1.1, pouvant être soumis à diverses sollicitations.

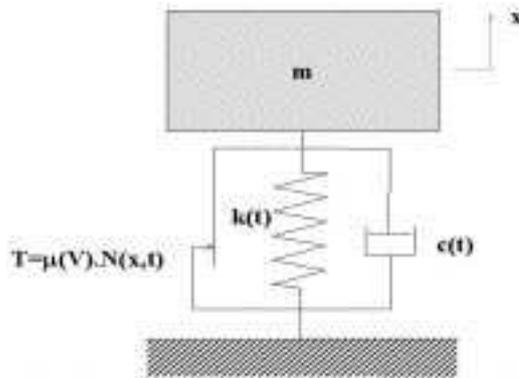


FIG. 1.1: *Système masse-ressort*

L'équation dynamique du système s'écrit sous la forme :

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = G(x, \dot{x}, t) \quad (1.1)$$

avec  $G$  fonction quelconque, continue et différentiable par rapport à chacune des variables.

L'étude de la stabilité s'effectue alors autour d'un état donné  $(x_0, \dot{x}_0)$ , tel que la position d'équilibre statique du système par exemple. Pour effectuer l'étude de stabilité d'un tel système, nous réalisons une linéarisation du problème par rapport à chacune des variables au point d'état donné. Ainsi, l'application  $G$  est approximée au voisinage de ce point de la manière suivante :

$$G(x, \dot{x}, t) = G_0 + \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t).(x - x_0) + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, t).(\dot{x} - \dot{x}_0) \quad (1.2)$$

Soit en se ramenant au point d'état et en appliquant (1.2) dans l'équation (1.1), l'équation homogène devient :

$$m.\ddot{x} + \left[ c - \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, t) \right] .\dot{x} + \left[ k - \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t) \right] .x = 0 \quad (1.3)$$

Nous retombons sur le cas classique d'une équation différentielle, linéaire, homogène du second ordre à coefficients constants.

Aussi, en admettant que  $m > 0$  (ce qui est toujours valable dans le cas dynamique d'un système masse-ressort simple) et que l'équation (1.3) est évaluée au voisinage du point d'état, et en reprenant les résultats sur la stabilité des systèmes (Nayfeh [125]), nous obtenons:

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = G(x, \dot{x}, t) \quad \text{stable} \quad \iff \quad \begin{cases} c > \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, t) \\ k > \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t) \end{cases} \quad (1.4)$$

Nous allons par la suite utiliser ces résultats de stabilité lors de la définition des mécanismes et des conditions de stabilité associées.

### 1.2.2 Le stick-slip

Les premiers travaux sur la modélisation des vibrations dues au frottement sec ont privilégié l'aspect tribologique et la recherche de lois de comportement plus ou moins sophistiquées comme origine de l'instabilité. Plus particulièrement, le phénomène de stick-slip a été mis en avant dès 1955 avec les travaux de Sinclair et Manville [158].

Depuis, le phénomène de stick-slip (littéralement "collé-glissé") a été très largement expliqué (Ibrahim [71], Oden et Martins [129] et Gao [56]) et a fait l'objet de nombreuses études (Antonioni [3], Chambrette [28], Rabinowicz [138] et Barnejee [7]). Aussi, il a longtemps été considéré comme le mécanisme expliquant le mieux les phénomènes d'instabilités dues au frottement.

D'un point de vue physique, le stick-slip se traduit par des oscillations auto-entretenues dues à la discontinuité du coefficient de frottement entre les phases "collées" et "glissées".

Le modèle le plus couramment retenu pour l'étude du stick-slip est un modèle à un degré de liberté, comportant un pion de masse  $m$ , soumis à une force normale  $N$ , maintenu par un ressort de raideur  $k$  et un amortisseur  $c$ . La masse  $m$  est posée sur une surface en mouvement à une vitesse constante  $V$ , comme illustré en figure 1.2(a). Le déplacement  $x(t)$  de la masse  $m$  au cours du temps et les phases de collées-glissées associées sont illustrées en figure 1.2(b). Un autre modèle équivalent consiste à considérer la surface comme fixe alors que l'ensemble du système dynamique est en mouvement à

une vitesse  $V$ , comme illustré en figure 1.3(a). Le déplacement  $x(t)$  de la masse  $m$  au cours du temps et les phases de collées-glissées associées sont illustrées en figure 1.3(b).

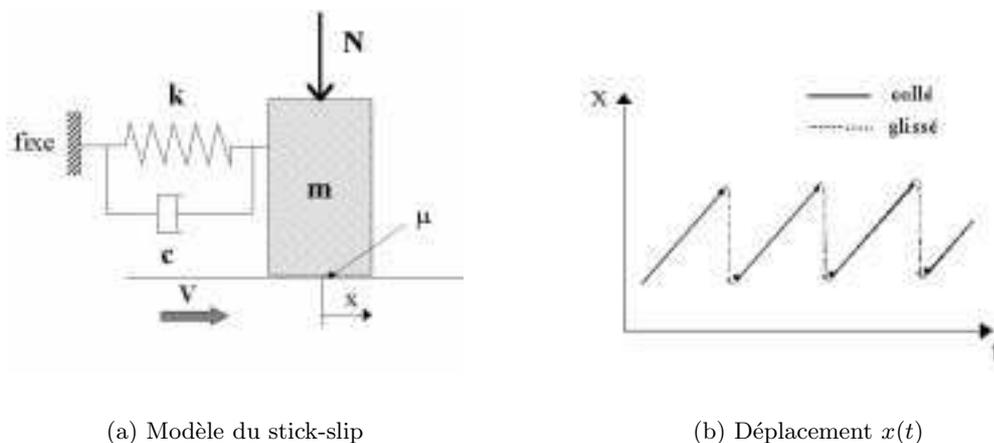


FIG. 1.2: *Modèle du stick-slip et schématisation des phases collées-glissées*

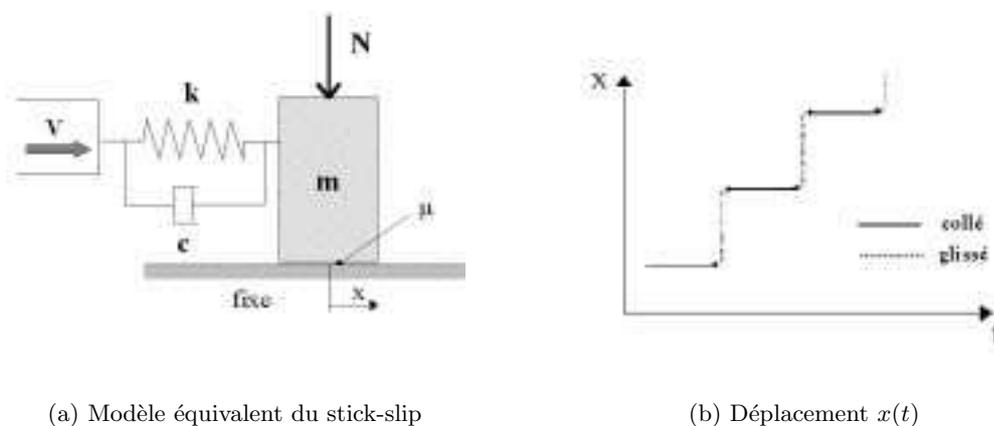


FIG. 1.3: *Modèle équivalent du stick-slip et schématisation des phases collées-glissées*

Pour l'étude du phénomène de stick-slip, l'un des points essentiels est la modélisation du contact et plus précisément du coefficient de frottement. Ces modélisations sont alors plus ou moins complexes et représentent de façon plus ou moins détaillée ce qui se passe à l'interface de frottement. Une loi simple considère un coefficient de frottement statique  $\mu_s$  et un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  constants avec la vitesse de glissement, et tel que  $\mu_d < \mu_s$ . Une loi plus complexe pourra considérer par exemple des évolutions du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

De nombreuses études du stick-slip ont portées sur les divers facteurs permettant de diminuer les amplitudes générées par ce phénomène (Oden et Martins [129]). Une augmentation de l'amortissement (Rabinowicz [138], Oden et Martins [129]), une augmentation de la raideur du ressort (Rabinowicz [138] et Gao [56]), une diminution de la masse du pion glissant (Oden et Martins [129]) et un amortissement des vibrations normales au contact (Tolstoy [168]) sont autant de facteurs qui peuvent permettre une diminution des amplitudes de stick-slip.

Nous allons maintenant présenter de façon plus détaillée les principaux résultats du phénomène de stick-slip pour un système à un degré de liberté prenant en compte deux phénoménologies distinctes :

- le coefficient de frottement est plus élevé en phase "collée" qu'en phase "glissée". Afin que les deux états soient observés (et notamment le phénomène "glissé"), la vitesse de glissement à l'équilibre doit être faible.

- le coefficient de frottement dépend continuellement de la vitesse de glissement. Cela revient à observer le phénomène de manière "macroscopique" pour pouvoir négliger la discontinuité.

Dans les deux cas, nous considérons une loi de frottement de type Coulomb. Nous allons maintenant étudier de manière plus détaillée la stabilité et les trajectoires découlant des différentes modélisations possibles.

### 1.2.2.1 Cas 1 : coefficient de frottement discontinu

L'une des premières modélisations envisagées pour caractériser les vibrations dues au frottement considère comme origine physique un coefficient de frottement statique  $\mu_s$  supérieur au coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$ . Le système le plus simple pour expliquer ce phénomène consiste à considérer une masse posée sur un tapis roulant, comme indiqué à la figure 1.4. Pour ce modèle, l'expression  $\mu_s N$  correspond au seuil de déclenchement du glissement et  $\mu_d N$  définit le module de la force de frottement lorsque la vitesse relative est différente de zéro. Durant la phase glissée, il n'y a pas de changement de la force de frottement qui tente de faire en sorte que la masse recolle au tapis roulant. Physiquement, le phénomène de stick-slip s'explique par le fait que la force de glissement augmente jusqu'à ce qu'elle atteigne la force de frottement statique maximale. Alors, la masse commence à glisser sur le tapis. Celle-ci continue de glisser jusqu'à ce que la force qui cause le glissement redevienne inférieure à la valeur de la force de frottement statique. Ainsi, le phénomène de stick-slip peut se reproduire de façon répétitive.

Si le coefficient de frottement statique  $\mu_s$  est égal au coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$ , le phénomène de "collé" ne peut se produire. La masse est en glissement continu et il n'y a pas apparition de vibration du système.

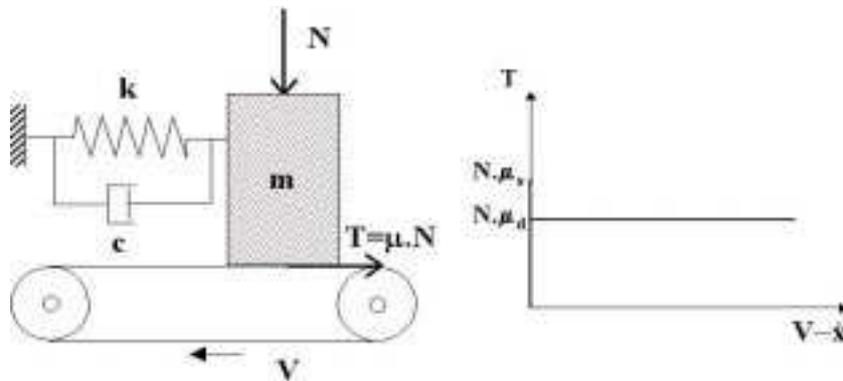


FIG. 1.4: *Système masse-ressort avec frottement discontinu*

Nous allons maintenant examiner les conditions de stabilité associées à un tel système. L'équation dynamique relative à ce système masse-ressort s'écrit sous la forme :

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = T(\dot{x} - V) \quad (1.5)$$

avec

$$\begin{aligned} |T(0)| &\leq \mu_s.N && \text{adhérence} \\ T[(\dot{x} - V) \geq 0] &= \mu_d.N < \mu_s.N && \text{glissement positif} \\ T[(\dot{x} - V) \leq 0] &= -\mu_d.N > -\mu_s.N && \text{glissement négatif} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ce qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} |T| \leq \mu_s.N \\ (V - \dot{x}).T - |V - \dot{x}|.\mu_d.N = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

D'après cette formulation, nous pouvons statuer sur les différentes trajectoires issues des conditions initiales (en négligeant l'amortissement), comme illustré en figure 1.5:

- il existe un point stationnaire  $A_L(x_e, 0)$  pour lequel le système est en équilibre stable. Aussi, tout système contenu dans la région du cercle de centre  $A_L$  et de rayon inférieur à  $V$ , est un système oscillant sur le cercle de centre  $A_L$  et passant par ses conditions initiales propres  $(x_0, \dot{x}_0)$ .

- si le système est tel que les conditions initiales vérifient  $\dot{x} = V$  et  $-x_a < x < x_a$  (points adhérents), celui-ci atteint le point  $A_D(x_a, V)$  et décrit un cycle  $\Gamma_L$ , pour le "quitter" au point  $A_R$ . Ce phénomène est le phénomène de "stick-slip" à proprement parlé avec une phase de glissement à partir du point  $A_D$  suivi d'un recollage au point  $A_R$  jusqu'à  $A_D$ , et ceci de manière cyclique.

- si le système est tel que les conditions initiales sont extérieures à ce cycle alors, ce système se cale obligatoirement sur la courbe d'adhérence ( $\dot{x} = V$  et  $-x_a < x < x_a$ ) au bout d'un certain temps. Le phénomène observé est alors le même que précédemment : c'est le phénomène de stick-slip. Le cycle  $\Gamma_L$  ainsi défini est appelé cycle attracteur limite du système.

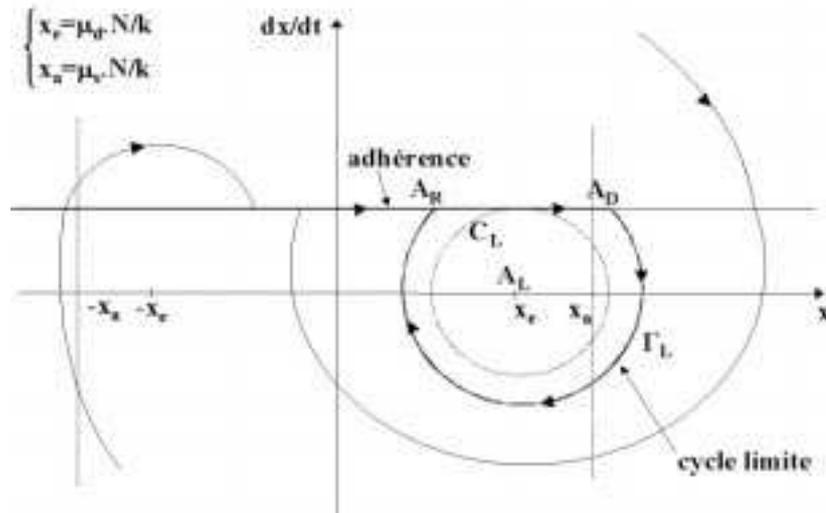


FIG. 1.5: Visualisation des trajectoires (coefficient de frottement discontinu)

### 1.2.2.2 Cas 2 : coefficient de frottement continu, fonction de la vitesse de glissement

Dans le cas précédent, l'origine physique des vibrations provenait du coefficient de frottement statique supérieur au coefficient de frottement dynamique. Une deuxième modélisation possible, consiste à considérer cette fois un coefficient de frottement dynamique décroissant avec la vitesse relative de glissement. Dès 1938, les travaux de Mills [113] mettent en avant le fait que les phénomènes de vibration de squeal sont dûs à la diminution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement. Du fait de la pente négative de l'évolution du coefficient de frottement, l'état d'équilibre du système devient instable et génère des vibrations induites par le frottement. Pour étudier ce phénomène, nous pouvons considérer un système masse-ressort classique sur tapis roulant comme illustré en figure 1.6.

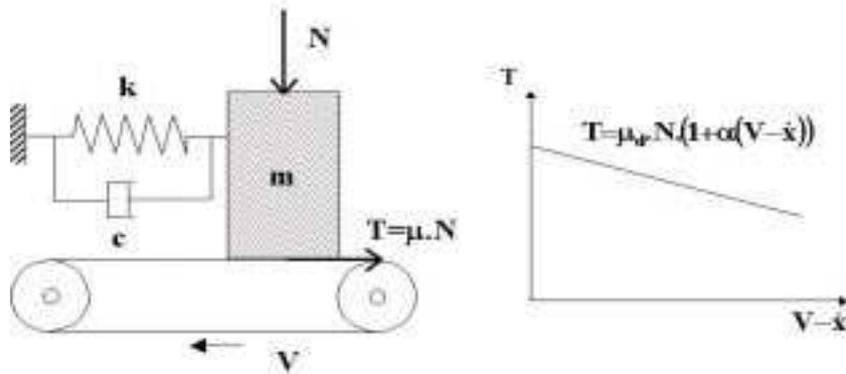


FIG. 1.6: *Système masse-ressort avec frottement variant en fonction de la vitesse de glissement*

Afin de regarder les conditions de stabilité associées à un tel système, nous considérons le cas où le coefficient de frottement est défini comme un fonction linéaire par rapport à la vitesse de glissement. L'équation dynamique s'écrit alors sous la forme :

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = T(\dot{x} - V) = \mu(\dot{x} - V) \cdot N \quad (1.8)$$

avec

$$\begin{aligned} |T(0)| &\leq \mu_d \cdot N && \text{adhérence} \\ T[(\dot{x} - V) \geq 0] &= \mu_d \cdot N \cdot (1 - \alpha(V - \dot{x})) && \text{glissement positif} \\ T[(\dot{x} - V) \leq 0] &= -\mu_d \cdot N \cdot (1 + \alpha(V - \dot{x})) && \text{glissement négatif} \end{aligned} \quad (1.9)$$

D'après le résultat obtenu en (1.4), réduit au cas où la fonction  $G$  ne dépend que du terme  $\dot{x}$ , la condition de stabilité du système devient :

$$c + N \cdot \frac{d\mu}{d\dot{x}}(\dot{x}_0) \cdot sg(\dot{x}_0)^2 > 0 \quad (1.10)$$

Soit

$$\frac{d\mu}{d\dot{x}}(\dot{x}_0) > \frac{c}{N} \quad (1.11)$$

De ce dernier résultat, le système est toujours stable si  $\frac{d\mu}{d\dot{x}}(\dot{x}_0)$  est positif. Or, d'un point de vue

physique, il s'avère que l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse est plutôt caractérisée par une fonction décroissante. Donc, nous avons  $\frac{d\mu}{dx}(x_0) < 0$  et le système est par nature instable, même si ce dernier peut être stabilisé en ajoutant de l'amortissement par exemple. Comme le décrit Chambrette [28], la littérature considère deux grandes familles de lois d'évolution décroissante du coefficient de frottement en fonction de la vitesse: la première loi propose tout simplement une évolution linéaire du coefficient de frottement en fonction de la vitesse, tandis que dans le deuxième cas, une loi explicite exponentielle est envisagée. Nous allons maintenant expliciter ces deux grandes familles.

#### Loi linéaire:

En considérant des variations linéaires de  $\mu$ , nous pouvons alors décrire cette évolution sous la forme :

$$\mu(\dot{x}) = \mu_0 + \mu_1 \cdot \frac{\dot{x}}{V_1} \quad (1.12)$$

avec  $\mu_0$  le coefficient de frottement au point d'état et  $\frac{\mu_1}{V_1}$  définissant la pente d'évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

Ainsi, nous avons

$$\frac{d\mu}{dx}(x_0) = \frac{\mu_1}{V_1} \quad (1.13)$$

Soit le système est stable si et seulement si

$$\frac{\mu_1}{V_1} > -\frac{c}{N} \quad \forall(x_0, \dot{x}_0) \quad (1.14)$$

#### Loi explicite exponentielle:

La littérature décrit également des lois plus complexes pour définir l'évolution décroissante du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement. Nous obtenons alors des lois de la forme suivante :

$$\mu(\dot{x}) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d) \cdot e^{-\frac{\dot{x}}{V_1}} \quad (1.15)$$

en considérant toujours le coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  inférieur au coefficient de frottement statique  $\mu_s$  et avec  $V_1 > 0$ .

Dans ce cas, le système est potentiellement instable quelle que soit la vitesse de glissement (du fait que  $\mu$  est strictement décroissant). Nous avons alors :

$$\frac{d\mu}{dx}(x_0) = -\frac{\mu_s - \mu_d}{V_1} \cdot e^{-\frac{\dot{x}}{V_1}} \quad (1.16)$$

Soit le système est stable si et seulement si

$$\frac{\mu_s - \mu_d}{V_1} < \frac{c}{N} \quad \forall(x_0, \dot{x}_0) \quad (1.17)$$

Ainsi, à ce stade de l'avancement, nous remarquons l'importance de l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement et la complexité qui en découle. Nous rappelons que tous ces développements sont valables pour des vitesses relatives faibles.

Nous pouvons donc à présent examiner l'allure des trajectoires liées à un coefficient de frottement évoluant en fonction de la vitesse de glissement. Nous considérons une évolution linéaire du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

Nous rappelons l'équation dynamique régissant le système :

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = T(\dot{x} - V) \quad (1.18)$$

avec

$$\begin{aligned} |T(0)| &\leq \mu_d.N && \text{adhérence} \\ T[(\dot{x} - V) \geq 0] &= \mu_d.N.(1 - \alpha(V - \dot{x})) && \text{glissement positif} \\ T[(\dot{x} - V) \leq 0] &= -\mu_d.N.(1 + \alpha(V - \dot{x})) && \text{glissement négatif} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Nous pouvons alors statuer sur les différentes trajectoires issues des conditions initiales du système (en négligeant l'amortissement  $c$  et en supposant  $\alpha V \ll 1$ ), comme illustré à la figure 1.7 :

- un système ayant ses conditions initiales telles que  $\dot{x} \leq V$  décrit des spirales divergentes centrées au point  $x_e^+ = \mu_d \cdot \frac{N}{k} (1 - \alpha V)$ . On est en régime de glissement positif. Ces spirales rencontrent, au bout d'un certain temps, un point adhérent défini par  $\dot{x} = V$  et  $-x_a < x < x_a$ .

- un système ayant ses conditions initiales telles que  $\dot{x} \geq V$  décrit des spirales divergentes centrées au point  $x_e^- = -\mu_d \cdot \frac{N}{k} (1 + \alpha V)$ . On est en régime de glissement négatif. Ces spirales rencontrent, au bout d'un certain temps, un point adhérent défini par  $\dot{x} = V$  et  $-x_a < x < x_a$ .

- les points adhérents sont définis, comme dans le cas précédent du coefficient de frottement discontinu, par  $\dot{x} = V$  et  $-x_a < x < x_a$  (avec  $x_a = \mu \cdot \frac{N}{k}$ ).

- il existe un point stationnaire unique  $x_e$ , instable par frottement. Le système, pour toutes conditions initiales aussi proches soient elles de  $x_e$ , s'éloigne de l'équilibre en oscillant autour de  $x_e$ .

- il existe un cycle limite attracteur  $\Gamma_L$  pour toute condition initiale : c'est un cycle comportant une phase de glissement et d'adhérence, définissant le phénomène de stick-slip.

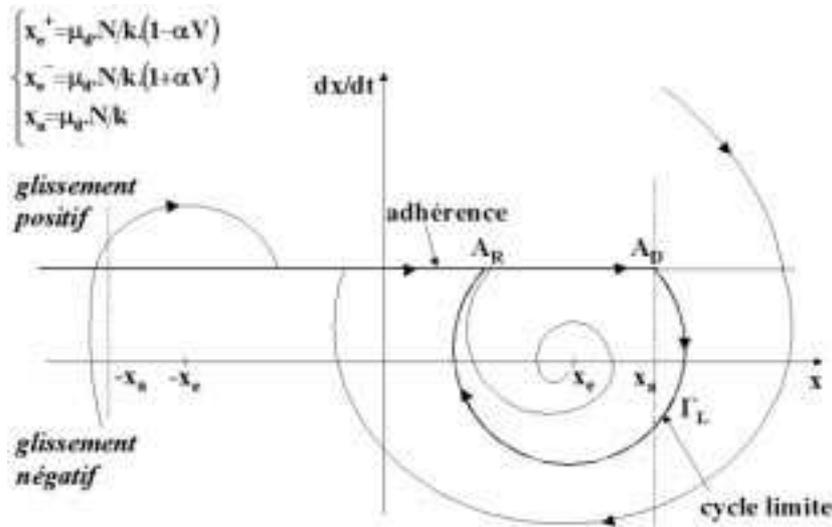


FIG. 1.7: Visualisation des trajectoires (coefficient de frottement fonction de la vitesse de glissement)

### 1.2.2.3 Conclusion sur le phénomène stick-slip

Nous venons de voir que le mécanisme de stick-slip permet de décrire certaines instabilités liées aux vibrations induites par frottement sec. Les diverses modélisations envisagées se basent sur des considérations tribologiques considérant la discontinuité et l'évolution du coefficient de frottement comme le facteur déterminant pour reproduire ces instabilités dues au frottement sec.

Bien que le mécanisme de stick-slip soit reconnu et très largement utilisé pour les problèmes à basses fréquences, il est rapidement apparu qu'il n'était pas suffisant pour expliquer un certain nombre d'instabilités liées au frottement. En effet, les propriétés tribologiques du coefficient de frottement ne sont pas les seules causes des vibrations apparaissant dans les systèmes frottants. Ceci a été observé sur de nombreuses études expérimentales (Liu [102], Boudot [18], Jarvis [83]) où des instabilités dues au frottement apparaissaient alors que le coefficient de frottement était sensiblement constant. De plus, comme le précise Chambrette [28], le stick-slip suppose, en plus de la variation du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement, l'existence de périodes au cours desquelles il n'y a aucun mouvement relatif des pièces en contact. Cette dernière hypothèse ne peut être considérée comme valable pour les phénomènes de crissement par exemple, où les vitesses atteintes ne permettent pas d'envisager des phases de recollement et donc le phénomène "collé". C'est ainsi qu'en 1961, Spurr [161] proposa le modèle de sprag-slip comme explication et interprétation possible des phénomènes de crissement dans les freins.

### 1.2.3 Le sprag-slip

Comme décrit précédemment, il a fallu attendre 1961 et les travaux de Spurr [161] pour voir apparaître le phénomène de sprag-slip comme explication des bruits de crissement de frein. Cette théorie considère les paramètres géométriques du système comme étant la source de l'instabilité. Elle se base sur des variations de la force normale d'interaction et de la force tangentielle du fait de la configuration géométrique du système et des déformations élastiques de ce dernier. Ces variations des forces de contact engendrent alors une modification de la vitesse de glissement. Cette théorie du sprag-slip peut s'expliquer aisément à partir de la figure 1.8.

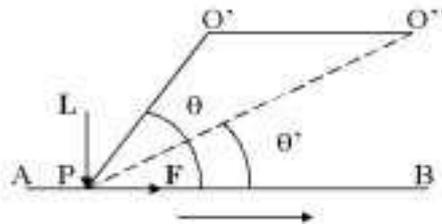


FIG. 1.8: Schéma du principe de sprag-slip

Considérons la barre rigide  $O'P$  pouvant pivoter autour de  $O'$  et chargée au point  $P$  par une force  $L$  contre la surface mobile  $AB$ . L'angle  $\theta$ , caractérisant l'angle de sprag-slip, se définit comme l'angle entre la barre  $PO'$  et la surface mobile  $AB$ . En considérant les moments au point  $O'$ , nous obtenons

l'expression de la force de frottement tangentielle  $F$  :

$$F = \frac{\mu L}{1 - \mu \tan \theta} \quad (1.20)$$

En supposant la liaison pivot en  $O'$  parfaitement rigide, la force de frottement tangentielle augmente lorsque le coefficient de frottement se rapproche de  $\cotan\theta$ . Cette force atteint donc des valeurs très élevées et bloque parfois le mouvement: nous avons alors un effet d'arc-boutement de la barre. Par contre, si le pivot en  $O'$  est flexible, un phénomène de stick-slip est observé.

Si maintenant nous ajoutons au support  $O'$  une autre structure rigide  $O'O''$  comme défini dans la figure 1.8. L'ensemble  $PO'O''$  est maintenant considéré rigide avec une liaison pivot en  $O''$ . Le point de contact  $P$  se déplace élastiquement dans la direction de la force de frottement, de telle sorte que l'angle  $\theta$  augmente du fait de la géométrie du système. Cette phase correspond à la période de sprag (ou d'arc-boutement). Il en résulte une augmentation du moment au point  $O'$ . Ce moment devient alors si important que l'ensemble de la structure  $PO'O''$  peut être considérée comme rigide et le point  $O''$  constitue le nouveau pivot avec l'angle  $\theta'$  le nouvel angle d'incidence. La force de frottement  $F$  chute alors brutalement, libérant l'énergie stockée en  $O'$ . Ceci correspond à la période de slip. Ainsi, la phase "sprag" correspond à un arc-boutement de la barre, alors que le glissement "slip" peut se traduire par un relâchement de cette dernière.

De même que pour les modèles de stick-slip, il est possible d'étudier de manière théorique les conditions de stabilité de tels systèmes, en considérant un système à un degré de liberté avec un couplage qui relie la force normale  $N$  au contact au déplacement tangent (Boudot [18]). Nous avons alors une relation de la forme  $N = K.x$ . Ainsi, nous pouvons effectuer une étude similaire au cas du sprag-slip en considérant le système suivant :

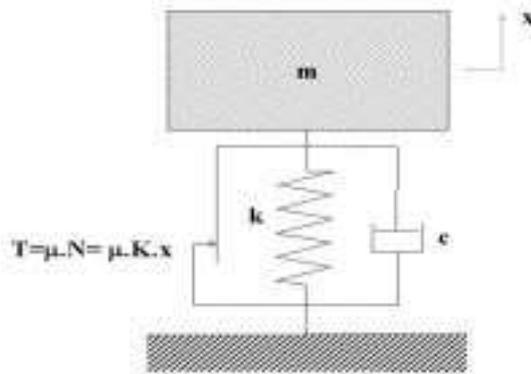


FIG. 1.9: Modélisation masse-ressort reproduisant l'effet de sprag-slip

L'équation dynamique d'un tel système s'écrit alors sous la forme :

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = T \quad (1.21)$$

En considérant la vitesse de glissement faible (pour avoir  $V > \dot{x}$ ), la loi de Coulomb pour le frottement :

$$T = \mu.N = \mu.K.x \quad (1.22)$$

et, en combinant (1.21) et (1.22), nous obtenons l'équation dynamique :

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + (k - \mu.K).x = 0 \quad (1.23)$$

D'après les résultats obtenus en (1.4) sur la stabilité d'un tel système, nous obtenons la condition de stabilité :

$$K < \frac{k}{\mu} \quad (1.24)$$

### 1.2.4 Le couplage de mode

Dès la publication des travaux de Spurr et de la théorie du sprag-slip, de nombreux chercheurs se sont intéressés à cette nouvelle interprétation des phénomènes de bruit de frein. Des travaux plus sophistiqués ont alors été développés pour généraliser cette théorie. C'est ainsi, que la notion de couplage de mode est apparue. En effet, d'un point de vue physique, la notion d'instabilité due au sprag-slip peut s'interpréter comme la coalescence de modes d'une structure. Il est alors nécessaire d'avoir un système comportant au moins deux degrés de liberté (et donc deux modes de vibration du système) pour avoir l'apparition d'instabilité.

Ainsi, Jarvis et Mills [83] furent les premiers à développer, dès 1963, une étude expérimentale et théorique sur un système poutre-disque tournant (voir figure 1.10) pour valider la théorie de Spurr. Les résultats expérimentaux montrent des vibrations du disque tournant lorsque la poutre frottant sur le disque est inclinée par rapport à sa position initiale d'un angle  $\theta$ . Leur étude expérimentale montra de façon évidente que la variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement était insuffisante pour expliquer les phénomènes d'instabilité. Ils montrèrent alors que le fait d'incliner la poutre frottante sur le disque tournant par rapport à sa position verticale, comme le décrit Spurr, faisait apparaître des instabilités de frottement. Un modèle analytique a été alors développé en se basant sur la théorie de Spurr.

Les résultats théoriques obtenus furent en parfait accord avec les résultats expérimentaux et les hypothèses faites par Spurr. Cette première application du modèle de sprag-slip a ensuite ouvert la voie à de nombreuses études portant sur l'analyse d'un pion sur un disque flexible en rotation (Earles [44]-[45]-[46]) ou de deux pions sur un disque flexible en rotation (Earles [42]). Aussi, des études paramétriques sur la stabilisation des systèmes pion-disque ont été réalisées (Earles [43] et D'Souza [39]). De même, les premières modélisations de crissement de frein intégrant le sprag-slip virent le jour (Millner [111] et North [127]).

Nous allons maintenant développer un exemple formel simple d'une poutre frottant sur un disque en rotation et encastrée à son autre extrémité (Chambrette [28]) afin de mieux comprendre les phénomènes de sprag-slip, le couplage de modes et leurs rôles sur la stabilité d'un système.

Le système mécanique considéré ici se compose d'un disque en rotation sur lequel vient frotter une poutre flexible inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport au plan du disque comme illustré en figure 1.10. Le contact est considéré comme ponctuel et le coefficient de frottement est constant. Nous supposons que les perturbations de la force normale sont assez faibles pour que le contact poutre-disque soit permanent et nous considérons uniquement le déplacement normal en flexion du disque et les déplacements en flexion et en traction-compression de la poutre pour obtenir le comportement perturbé du système poutre-disque en rotation. Ainsi, le modèle mécanique simplifié associé considère un système de trois masses reliées entre elles par des raideurs qui reproduisent le premier mode de traction-compression de la poutre  $(m_1, k_1)$ , le premier mode de flexion de la poutre  $(m_2, k_2)$  et le premier mode du disque en flexion  $(m_3, k_3)$  comme décrit à la figure 1.10.

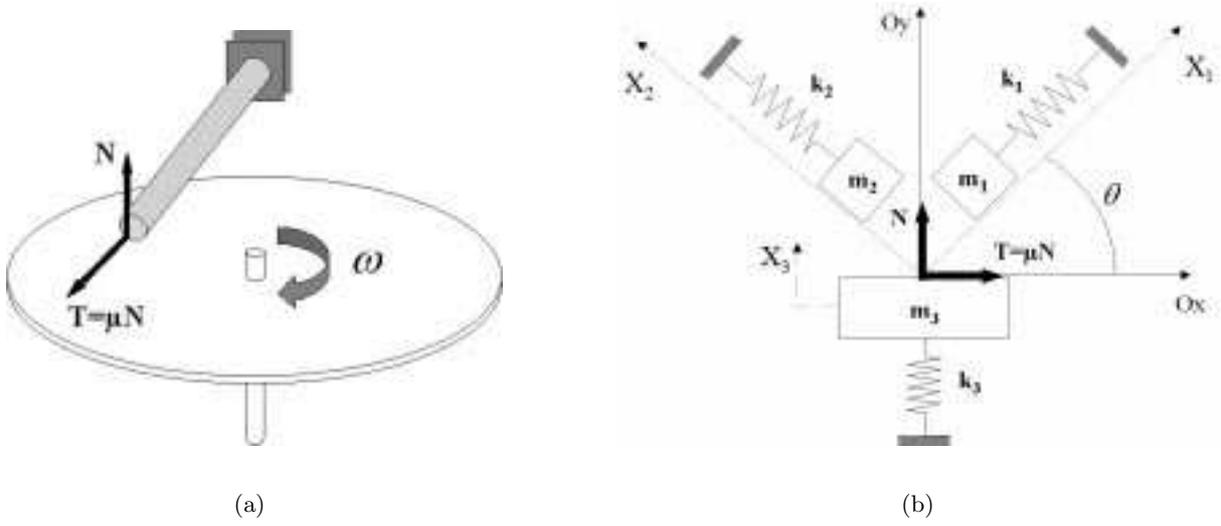


FIG. 1.10: (a) *Système pion-disque* (b) *Modèle analytique associé*

Les équation dynamiques associées à ce système, autour du point d'équilibre, s'écrivent alors sous la forme :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 + k_1 X_1 = \sin \theta . N + \mu \cos \theta . N \\ m_2 \ddot{X}_2 + k_2 X_2 = \cos \theta . N - \mu \sin \theta . N \\ m_3 \ddot{X}_3 + k_3 X_3 = -N \end{cases} \quad (1.25)$$

L'hypothèse de contact permanent entre le disque tournant et la poutre donne la relation  $X_3 = X_1 . \sin \theta + X_2 . \cos \theta$ . Ainsi, nous pouvons écrire l'expression de l'effort normal  $N$  en fonction des degrés de liberté  $X_1$  et  $X_2$  par substitution dans la dernière équation dynamique du système (1.25). Nous aboutissons alors à un système dynamique en  $X = [X_1 \quad X_2]^T$ ,

$$M . \ddot{X} + K . X = 0 \quad (1.26)$$

avec les matrices de masse et de raideur associées:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 + m_3 . \sin \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) & m_3 . \cos \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) \\ m_3 . \sin \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) & m_2 + m_3 . \cos \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 . \sin \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) & k_3 . \cos \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) \\ k_3 . \sin \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) & k_2 + k_3 . \cos \theta (\cos \theta - \mu \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

L'analyse de stabilité du système s'effectue alors par l'étude de la détermination des valeurs propres  $\Omega$  du système dynamique (1.26) qui vérifient la relation:

$$\det (-\Omega^2 . [M] + [K]) = 0 \quad (1.29)$$

Les valeurs propres  $\Omega$  sont alors solutions du polynôme caractéristique :

$$P(\Omega) = a.\Omega^4 + b.\Omega^2 + c = 0 \quad (1.30)$$

avec les expressions analytiques des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  données comme suit:

$$\begin{aligned} a &= m_1 m_2 + m_3 [m_2 \cdot \sin^2 \theta + m_1 \cdot \cos^2 \theta + \mu \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta (m_2 - m_1)] \\ b &= m_1 k_2 + m_2 k_1 + k_3 [m_2 \cdot \sin^2 \theta + m_1 \cdot \cos^2 \theta + \mu \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta (m_2 - m_1)] \\ &\quad + m_3 [k_2 \cdot \sin^2 \theta + k_1 \cdot \cos^2 \theta + \mu \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta (k_2 - k_1)] \\ c &= k_1 k_2 + k_3 [k_1 \cdot \sin^2 \theta + k_2 \cdot \cos^2 \theta + \mu \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta (k_2 - k_1)] \end{aligned} \quad (1.31)$$

Nous notons  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant de l'équation  $P(\Omega) = 0$ . Nous remarquons que le coefficient  $a$  est toujours positif pour un problème physique, étant donné que nous avons les paramètres  $m_1$  et  $m_2$  supérieurs à 0 et le coefficient de frottement  $\mu$  inférieur à 1. Nous pouvons alors avoir deux types d'instabilité pour ce système. :

- il y a instabilité de type frottement si et seulement si les  $\Omega$  sont strictement complexes, donc si et seulement si le discriminant  $\Delta$  est strictement négatif (soit  $c > \frac{b^2}{4a} > 0$ ).

- il y a instabilité de type divergence si les racines  $\Omega^2$  sont réelles ( $\Delta > 0$ ), c'est-à-dire si et seulement si  $b$  est strictement négatif. En effet, si  $\Delta > 0$ , les racines  $\Omega^2$  sont alors du même signe que la valeur  $-b$  (étant donné que  $a$  est positif). Ainsi si  $b < 0$  et  $\Delta > 0$  (ce qui est automatiquement vérifié si  $c < 0$ ), nous avons une racine  $\Omega$  qui est réelle à valeur positive et donc il y a instabilité de divergence.

Nous remarquons que si nous n'avons pas d'angle de sprag-slip ( $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$ ), les conditions sur les deux types d'instabilités ne peuvent pas être vérifiées. Ainsi, nous n'avons pas de couplage de modes et le système dynamique reste stable.

Finalement, le couplage de modes, provenant de la coalescence de deux modes d'une structure, peut constituer l'une des raisons d'apparition d'instabilité. Ce couplage de modes peut alors être dû à l'apparition d'un angle de sprag-slip, comme illustré dans l'exemple précédent. Cet angle de sprag-slip permet, par l'intermédiaire du coefficient de frottement et de la loi de Coulomb associée, de coupler les effets se produisant dans deux directions différentes. La matrice de raideur du système associé peut alors devenir dissymétrique. Aussi, un coefficient de frottement constant et la loi de Coulomb suffisent pour qu'il y ait potentiellement instabilité du système.

### 1.2.5 Combinaison stick-slip/sprag-slip

Les études théoriques précédentes montrent qu'il est aisé d'obtenir des résultats rapides sur la stabilité de systèmes soumis soit à du sprag-slip, soit à du stick-slip. Aussi, nous pouvons examiner ce qui se passe si nous considérons une combinaison des phénomènes de stick-slip et de sprag-slip. Nous considérons les hypothèses suivantes :

- loi de Coulomb linéarisée de la forme  $\mu = \mu_0 + \mu_1 \cdot \frac{\dot{x}_1}{V_1}$

- la vitesse de glissement reste faible
- la vitesse d'entraînement est positive et ne change pas de signe

Le système masse-ressort considéré peut alors se schématiser comme indiqué à la figure 1.11.

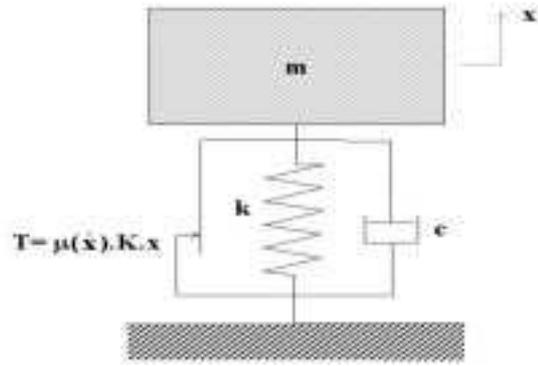


FIG. 1.11: *Système masse-ressort combinant les phénomènes de sprag-slip et stick-slip*

L'équation dynamique d'un tel système s'écrit sous la forme :

$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = \left( \mu_0 + \mu_1 \cdot \frac{\dot{x}_1}{V_1} \right) .K.x \quad (1.32)$$

Par analogie avec le système (1.1), nous avons

$$G(x, \dot{x}, t) = \left( \mu_0 + \mu_1 \cdot \frac{\dot{x}_1}{V_1} \right) .K.x \quad (1.33)$$

Ainsi, en se ramenant au point d'état  $x_0$  comme défini en (1.2), et à partir des expressions calculées suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial \dot{x}}(x_0, \dot{x}_0, t) = \frac{\mu_1}{V_1} .K.x_0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t) = \left( \mu_0 + \frac{\mu_1}{V_1} .\dot{x}_0 \right) .K \end{cases} \quad (1.34)$$

Nous obtenons l'équation dynamique équivalente au point d'état  $x_0$  :

$$m.\ddot{x} + \left[ c - \frac{\mu_1}{V_1} .K.x_0 \right] .\dot{x} + \left[ k - \left( \mu_0 + \frac{\mu_1}{V_1} .\dot{x}_0 \right) .K \right] .x = 0 \quad (1.35)$$

Ainsi, les conditions de stabilité sont, comme explicitées en (1.4) :

$$\begin{cases} c \geq \frac{\mu_1}{V_1} .K.x_0 \\ k \geq \left( \mu_0 + \frac{\mu_1}{V_1} .\dot{x}_0 \right) .K \end{cases} \quad (1.36)$$

Cet exemple nous montre la simplicité pour statuer sur les conditions de stabilité d'un système, même si ce dernier prend en compte plusieurs types de phénomènes. Un système plus complexe ne poserait pas plus de difficultés pour examiner ces conditions de stabilité.

### 1.3 Conclusion - Application au cas d'un frein aéronautique

D'un point de vue théorique, nous venons de voir que les méthodes d'analyse linéaire de stabilité sont faciles à mettre en oeuvre et à appliquer, que ce soit pour des phénomènes simples ou plus complexes, prenant en compte des combinaisons de plusieurs phénomènes de frottement élémentaires. De plus, nous avons présenté les phénomènes importants pouvant générer des instabilités dans le cas du frottement sec. Comme l'ont déjà fait remarqué Chambrette [28] et Boudot [18], même si les formulations restent proches et dérivent du même cas général du système masse-ressort, il est important de noter les différences qu'il existe entre les divers phénomènes, que ce soit au niveau de leurs conditions d'apparition, de leurs effets ou de leurs influences sur la stabilité.

A ce niveau de l'étude, nous pouvons donner une première opinion sur le bien-fondé de la modélisation d'une structure de frein prenant en compte l'un ou l'autre des phénomènes explicités:

- Le phénomène de **stick-slip** considère une variation du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement. Or certains auteurs estiment que la relation  $\mu(V)$  n'est pas réaliste : en effet, la dépendance par rapport à la température  $T$  semble plus appropriée (en considérant ensuite une éventuelle relation entre  $T$  et  $V$ ). En admettant ceci, la relation  $\mu(V)$  n'est pas utilisable dans le domaine de fréquences rencontrées en mécanique, à savoir 100-1000 Hz, du fait des temps de réponse de systèmes thermiques.

- Le phénomène de **sprag-slip** se base uniquement sur la possibilité d'arc-boutement. Ainsi, il peut être simplement dû à un contact frottant où la force de frottement est une fonction croissante de l'appui (par exemple du fait de la géométrie des pièces, ce qui est courant dans le cas de pièces avec jeu). Cette possibilité se vérifie dans la pratique et ne nécessite pas la mise en place de loi de frottement complexe. La loi de Coulomb suffit alors pour prendre en compte ce phénomène.

Notons que le sprag-slip est un phénomène qui est encore souvent négligé par les tribologues qui préfèrent s'appuyer sur une loi de frottement pour expliquer la notion d'instabilité. Ceci s'explique par le fait que des lois de frottement de type stick-slip font beaucoup plus appel à des notions propres aux matériaux utilisés alors que la notion de sprag-slip se rapproche plus d'un point de vue d'ensemble et de notion de mécanique générale.

Ainsi, le phénomène de sprag-slip est trop souvent oublié alors qu'il est potentiellement très courant dans les systèmes complexes du fait des jeux entre les pièces et de la nature des contacts. Aussi, il faut garder à l'esprit qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une loi de frottement complexe pour avoir des instabilités. Un système comportant un coefficient de frottement constant peut être sujet à des instabilités.



## Chapitre 2

# Notion de stabilité

Dans un premier temps, nous allons rappeler brièvement les définitions portant sur la stabilité. Ensuite, nous présenterons les principales méthodes et résultats permettant de statuer sur la stabilité d'un système non-linéaire.

### 2.1 Stabilité des systèmes linéaires

Afin d'introduire la stabilité des systèmes non linéaires, nous allons tout d'abord effectuer quelques rappels sur la stabilité des systèmes linéaires.

Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$

$$\dot{x} = f(x) = Ax \tag{2.1}$$

avec  $A$  matrice à coefficients constants représentant le cas particulier où  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . La solution du système différentiel est alors donnée par  $x(t, x_0) = x_0 e^{tA}$  avec  $e^{tA}$  qui définit l'exponentielle de matrice.

A partir de la détermination des valeurs propres de  $A$ , on peut connaître le comportement asymptotique des solutions et obtenir les propriétés suivantes:

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Alors toute solution  $\phi$  de  $\dot{x} = Ax$  vérifie  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t)\| = 0$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négative.*

**Théorème 2.1.2.** *Soit  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Alors toute solution  $\phi$  de  $\dot{x} = Ax$  vérifie  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t)\| = +\infty$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement positive.*

Nous allons maintenant définir la notion de flot d'une équation différentielle, qui va nous être utile par la suite:

**Définition 2.1.1.** *Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , définie de telle sorte que l'on ait :*

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

On note  $\phi(t, y)$  la solution de l'équation différentielle telle que  $\phi(0, y) = y$ . Elle est définie sur l'intervalle de temps maximal  $J(y) \subset \mathbb{R}$ .

On note  $W = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \Omega, t \in J(y)\}$ . Soit  $\phi$ , l'application définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \quad W &\rightarrow \Omega \\ (t, y) &\mapsto \phi(t, y) \end{aligned}$$

L'application  $\phi$  est dit flot de l'équation différentielle. On note  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ .

L'application  $\phi$  vérifie la propriété  $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$ .

On dit que le flot est complet si  $W = \mathbb{R} \times \Omega$ .

Si toutes les valeurs propres d'une matrice non singulière  $A$  de dimension  $n \times n$  sont à partie réelle non nulle, on dit que le flot  $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est hyperbolique. Le point d'équilibre unique  $x = 0$  est dit aussi point d'équilibre hyperbolique.

Ce point d'équilibre hyperbolique peut être soit un puits, si toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative, soit une source si toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement positive, soit un point selle ou col, si les valeurs propres ont des signes différents.

Considérons maintenant le comportement de solutions pour les systèmes linéaires sur  $\mathbb{R}^2$ . Si  $x = 0$  est un puits ou une source, les solutions peuvent se rapprocher ou s'éloigner de  $x = 0$  de deux façons, soit sous forme de noeud, soit sous forme de foyer.

Alors, en considérant  $a = \det(A)$ ,  $b = \text{trace}(A)$ , et le système linéaire  $\dot{x} = A.x$ , le point d'équilibre  $x = 0$  est:

- un point selle ou col si  $a < 0$
- un noeud stable si  $a > 0$ ,  $b^2 - 4a \geq 0$  et  $b < 0$
- un noeud instable si  $a > 0$ ,  $b^2 - 4a \geq 0$  et  $b > 0$
- un foyer stable si  $a > 0$ ,  $b^2 - 4a < 0$  et  $b < 0$
- un foyer instable si  $a > 0$ ,  $b^2 - 4a < 0$  et  $b > 0$
- un centre si  $a > 0$  et  $b = 0$ .

Dans le cas général, c'est-à-dire en considérant les valeurs propres de  $A$  pouvant être positives, négatives ou nulles, nous pouvons diviser les sous-espaces propres de l'opérateur linéaire  $A$  en trois sous-espaces invariants du flot  $\phi_t = e^{tA}$ , comme illustré en figure 2.1:

- le sous-espace stable  $E^s = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$
- le sous-espace instable  $E^u = \{p_{s+1}, \dots, p_{s+u}\}$
- le sous-espace centré  $E^c = \{p_{s+u+1}, \dots, p_{s+u+c}\}$

où :

$p_1, \dots, p_s$  représente les vecteurs propres associés aux valeurs propres à partie réelle négative.

$p_{s+1}, \dots, p_{s+u}$  les vecteurs propres associés aux valeurs propres à partie réelle positive.

$p_{s+u+1}, \dots, p_{s+u+c}$  les vecteurs propres associés aux valeurs propres à partie réelle nulle.

Si nous sommes en présence d'un flot hyperbolique, nous avons alors la propriété suivante:

**Théorème 2.1.3.** *Soit un flot hyperbolique. Alors  $\mathbb{R}^n$  peut être décomposé en deux sous-espaces invariants par  $A$  tel que  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$  et tel que le flot induit sur  $E^s$  est une contraction et le flot induit sur  $E^u$  est une dilatation. Une telle décomposition est alors unique.*

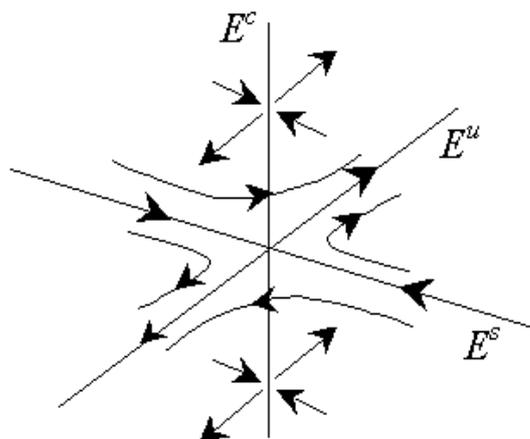


FIG. 2.1: Schématisation des espaces centré, stable et instable

## 2.2 Stabilité des systèmes non linéaires

L'étape qui vient ensuite naturellement est la généralisation de la notion de stabilité pour les systèmes non linéaires. Pour cela, il est alors nécessaire d'introduire la notion de point d'équilibre et de la stabilité au sens de Lyapunov.

### 2.2.1 Stabilité des points singuliers, stabilité au sens de Lyapunov

Nous allons maintenant définir la notion de point d'équilibre et la stabilité associée à de tels points. Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , définie de telle sorte que l'on ait :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.4)$$

**Définition 2.2.1.** Un point  $\bar{x}$  est un point d'équilibre si  $f(\bar{x}) = 0$ . Pour le flot associé on a  $\phi_t(\bar{x}) = \bar{x}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  $\bar{x}$  est aussi appelé point stationnaire ou point fixe, ou encore zéro ou point singulier de  $f$ .

La notion de stabilité s'appuie alors sur l'analyse du système linéarisé au point d'équilibre du système non linéaire.

Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , une application non-linéaire et  $\bar{x}$  un point stationnaire. Nous pouvons alors définir  $Df(\bar{x})$ , la matrice jacobienne de  $f$  en  $\bar{x}$ .

Le système (2.2) peut être linéarisé au voisinage du point d'équilibre  $\bar{x}$ . Alors, pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $|\varepsilon| \ll 1$  :

$$f(\bar{x} + \varepsilon) = \dot{\varepsilon} + \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) + Df(\bar{x}).\varepsilon + O(\varepsilon) \quad (2.5)$$

Nous obtenons donc le système linéaire :

$$\dot{\varepsilon} = Df(\bar{x}).\varepsilon \quad (2.6)$$

Nous avons alors les définitions suivantes :

**Définition 2.2.2.** *On dit que le point d'équilibre  $\bar{x}$  est un point attractif si toutes les valeurs propres de  $Df(\bar{x})$  ont une partie réelle strictement négative.*

**Définition 2.2.3.** *Un point d'équilibre  $\bar{x}$  est stable si, pour tout voisinage  $V$  de  $\bar{x}$  dans  $\Omega$ , il existe un voisinage  $V_1$  de  $\bar{x}$  dans  $V$  tel que, pour tout  $x \in V_1$ ,  $\phi_t(x)$  est défini pour tout  $t > 0$  et  $\phi_t(x) \in V$ .*

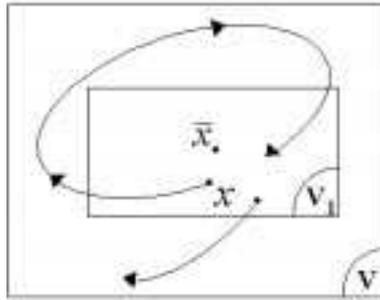


FIG. 2.2: Schématisation du point stable

**Définition 2.2.4.** *Si  $\bar{x}$  est stable et si il existe un voisinage  $V_1$  de tel sorte que, pour tout  $x \in V_1$ ,  $\phi_t(x) \rightarrow \bar{x}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  alors  $\bar{x}$  est dit asymptotiquement stable.*

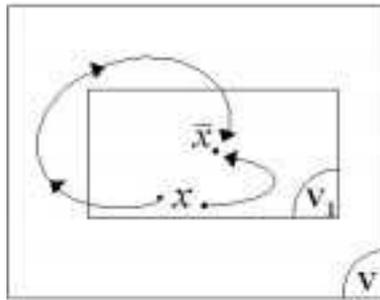


FIG. 2.3: Schématisation du point asymptotiquement stable

La différence entre ces deux notions provient du fait qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point d'équilibre stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors que ces dernières s'amortissent au cours du temps dans le cas d'un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Les conditions de stabilité d'un point singulier, qui portent le nom de première méthode de Lyapunov, peuvent s'énoncer comme suit:

**Théorème 2.2.1. (stabilité d'un point singulier, cas continu)**

*Soit  $\bar{x}$  un point singulier non dégénéré du champs de vecteurs  $f$ .*

*Si tous les exposants caractéristiques de  $\bar{x}$  sont à partie réelle strictement négative, alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

*Si l'un au moins des exposants caractéristiques de  $\bar{x}$  est à partie réelle strictement positive, alors  $\bar{x}$  n'est pas stable au sens de Lyapunov.*

**Définition 2.2.5.** *Un point d'équilibre qui n'est pas stable est dit instable.*

**Théorème 2.2.2.** *Soit  $\bar{x}$  un point d'équilibre tel que  $Df(\bar{x})$  a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors  $\bar{x}$  est instable.*

**Définition 2.2.6.** *Un point d'équilibre  $\bar{x}$  est dit hyperbolique si  $Df(\bar{x})$  n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle.*

*Si toutes les valeurs propres de  $Df(\bar{x})$  ont une partie réelle strictement négative,  $\bar{x}$  est un point attractif.*

*Si toutes les valeurs propres de  $Df(\bar{x})$  ont une partie réelle strictement positive,  $\bar{x}$  est un point répulsif. S'il existe des valeurs propres strictement négatives et d'autres strictement positives,  $\bar{x}$  est un point-selle. Un point-selle est instable.*

**Théorème 2.2.3.** *Un point d'équilibre hyperbolique est soit instable soit asymptotiquement stable.*

## 2.2.2 Fonction de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov sont introduites pour étudier la stabilité d'un point singulier. En effet, la stabilité d'un point d'équilibre hyperbolique est facile à déterminer. Si toutes les valeurs propres du système linéarisé autour d'un point d'équilibre sont à partie réelle strictement négative, le point d'équilibre est stable. Dans les autres cas, le point d'équilibre est instable.

Le problème de stabilité des points d'équilibre non hyperboliques est plus compliqué. Aussi, nous allons introduire les fonctions de Lyapunov et les théorèmes fondamentaux qui suivent, issus de la seconde méthode de Lyapunov.

Nous considérons toujours la fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , définie de telle sorte que l'on ait :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.7)$$

Considérons une fonction  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction différentiable définie sur un voisinage  $U \subset \Omega$  de  $\bar{x}$ . De plus, on note la dérivée de  $V$  de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \dot{V} : \quad U &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot f_j(x) \end{aligned}$$

Alors nous avons les théorèmes de stabilité associés suivants:

### Théorème 2.2.4. (Hirsch et Smale, 1974)

*Soit  $\bar{x}$  un point singulier de  $f$ . Supposons qu'il existe une application  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un voisinage  $U \subset \Omega$  de  $\bar{x}$ , différentiable sur  $U - \bar{x}$  et tel que:*

*(i)  $V$  atteint son minimum dans  $U$ :  $V(\bar{x}) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq \bar{x}$*

*(ii)  $V$  est non croissante le long des trajectoires de (2.7):  $\dot{V} \leq 0$  dans  $U - \bar{x}$*

*Alors  $\bar{x}$  est stable. De plus, si*

*(iii)  $V$  est strictement décroissante le long des trajectoires de (2.7):  $\dot{V} < 0$  dans  $U - \bar{x}$*

*Alors  $\bar{x}$  est asymptotiquement stable.*

**Théorème 2.2.5.** *Une condition suffisante d'équilibre instable en  $x = 0$  est qu'il existe une fonction scalaire  $V(x)$  satisfaisant dans un domaine  $U$  contenant  $\bar{x}$  les conditions suivantes:*

- (a) *en au moins un point du domaine  $U$ ,  $V(x) < 0$*
- (b)  *$\dot{V}(x)$  définie positive dans  $U$ .*

Nous pouvons alors définir la notion de fonction de Lyapunov, de fonction de Lyapunov stricte et de fonction de Lyapunov forte.

**Définition 2.2.7.** *Une fonction  $V$  vérifiant les conditions (i) et (ii) est appelée fonction de Lyapunov pour  $\bar{x}$ .*

*Si de plus la condition (iii) est vérifiée, on dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov stricte.*

**Définition 2.2.8.** *Si une fonction  $V$  vérifiant les conditions (i) et  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\dot{V} \leq -\alpha V$  dans  $U - \bar{x}$ , on dit que  $V$  est une fonction de Lyapunov forte.*

**Proposition 2.2.1.** *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- *Le point singulier  $\bar{x}$  a tous ses exposants caractéristiques à partie réelle strictement négative.*
- *Il existe une fonction de Lyapunov forte dans un voisinage de  $\bar{x}$ .*

### 2.2.3 Stabilité des points d'équilibre hyperbolique et extension

A partir de l'équation linéarisée (2.6), le théorème de Hartman-Grobman permet de réaliser l'étude de la solution de l'équation non linéaire au voisinage d'un point fixe. Cette étude s'effectue à partir de la détermination de la stabilité de la solution du système linéarisé :

**Théorème 2.2.6. (de Hartman-Grobman)**

*Si  $\bar{x}$  est un point d'équilibre hyperbolique de  $f$  alors il existe un homéomorphisme  $h$  défini dans un voisinage  $U$  de  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que, localement,  $h \circ \phi_t$  (avec  $\phi_t$  le flot non linéaire) suit les mêmes trajectoires que celles du flot linéaire  $e^{t \cdot Df(\bar{x})}$ . L'homéomorphisme préserve le sens des orbites et peut aussi être choisi pour préserver la paramétrisation en temps des trajectoires.*

De la même manière que pour les systèmes linéaires, nous définissons alors les variétés locales stables et instables en  $\bar{x}$  de la manière suivante :

$$E_{loc}^s(\bar{x}) = \{x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ quand } t \rightarrow \infty, \text{ et } \phi_t(x) \in U \quad \forall t \geq 0\}$$

$$E_{loc}^u(\bar{x}) = \{x \in U \mid \phi_t(x) \rightarrow \bar{x} \text{ quand } t \rightarrow -\infty, \text{ et } \phi_t(x) \in U \quad \forall t \leq 0\}$$

**Théorème 2.2.7. (de la variété stable pour un point fixe)**

*Si  $\bar{x}$  est un point d'équilibre hyperbolique de  $f$ , alors  $f$  est topologiquement équivalent à son linéarisé tangent et l'homéomorphisme correspondant préserve le sens du parcours.*

*En outre, il existe des variétés stables et instables locales de  $f$  en  $\bar{x}$  avec  $\dim E_{loc}^s(\bar{x}) = \dim E^s$  et  $\dim E_{loc}^u(\bar{x}) = \dim E^u$ , tangentes en  $\bar{x}$  à  $E^s$  et  $E^u$  respectivement et ayant la même régularité que  $f$ .*

La décomposition précédente n'est cependant pas suffisante dans le cas où  $Df$  a des valeurs propres purement imaginaires ou nulles. L'extension à ces cas se fait grâce à l'introduction des variétés centrales.

Si  $\bar{x}$  est un point fixe de  $f$  non hyperbolique, nous devons compléter la décomposition précédente de  $Df$  en sous-espaces propres introduisant  $E^c$ , le sous-espace propre associé aux valeurs propres à partie réelle nulle. Nous avons alors  $E^s \oplus E^c \oplus E^u = \mathbb{R}^n$ . Il s'en suit alors le théorème de la variété centrale, qui s'applique donc au cas où  $\bar{x}$  n'est pas un point d'équilibre hyperbolique de  $f$  :

**Théorème 2.2.8. (de la variété centrale)**

*Si le champs  $f$  est de classe  $C^r$  et admet  $\bar{x}$  pour point fixe, il admet des variétés stable, instable et centre locales notées  $E_{loc}^s(\bar{x})$ ,  $E_{loc}^u(\bar{x})$  et  $E_{loc}^c(\bar{x})$ , de classe  $C^r$ ,  $C^r$  et  $C^{r-1}$  respectivement, tangentes en  $\bar{x}$  à  $E^s$ ,  $E^u$  et  $E^c$ .*

*$E_{loc}^s(\bar{x})$  et  $E_{loc}^u(\bar{x})$  sont définies de manière unique alors que  $E_{loc}^c(\bar{x})$  n'est pas nécessairement unique. En outre, contrairement au fait que le comportement des trajectoires restant dans  $E_{loc}^s(\bar{x})$  et  $E_{loc}^u(\bar{x})$  est donné par le linéarisé tangent de  $f$ , le comportement des trajectoires restant localement dans la variété centrale  $E_{loc}^c(\bar{x})$  est déterminé par les termes non linéaires de  $f$ .*

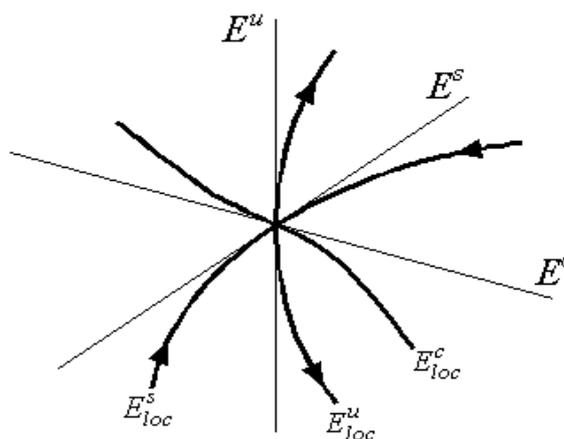


FIG. 2.4: Schématisation des espaces locaux centrés, stable et instable

## 2.2.4 Stabilité des orbites périodiques

### 2.2.4.1 Notion de cycles limites

Lors de l'étude des problèmes non-linéaires, nous nous intéressons plus particulièrement aux systèmes dépendant d'un paramètre  $\mu$ , paramètre réel avec la fonction  $f$  non-linéaire définissant le système dérivable par rapport à  $\mu$ .

Nous considérons donc la fonction  $f$ , dérivable par rapport à  $\mu$ , définie de la façon suivante :

$$f : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, \mu) \mapsto f(x, \mu)$$

Lorsque nous faisons évoluer le paramètre  $\mu$ , nous pouvons observer des phénomènes de bifurcations, correspondant à un changement du comportement des solutions stationnaires, qui passent alors d'un

état stable à un état instable. Lorsque ces changements ont lieu au voisinage d'un point stationnaire ou d'une orbite stationnaire, nous parlons alors de bifurcations locales. Nous parlons alors de cycles limites pour qualifier ces orbites périodiques. Les cycles limites représentent donc des états stationnaires d'oscillations.

Ainsi, un cycle limite est une trajectoire fermée dans le plan de phase telle qu'aucune trajectoire commençant suffisamment proche, soit aussi fermée. Si une trajectoire commence suffisamment près d'un cycle limite noté  $C$ , elle peut avoir plusieurs comportements. Soit cette dernière s'enroule elle-même sur le cycle limite  $C$ , comme illustré en figure 2.5(a), elle est alors appelée stable. Soit elle se déroule à partir du cycle limite  $C$ , comme illustré en figure 2.5(b), elle est alors appelée instable. Un dernier cas consiste à considérer les trajectoires qui approchent  $C$  d'un côté et s'éloignent de l'autre, comme illustré en figure 2.5(c). De telles trajectoires sont dites semi-stables. En pratique, elles sont instables.

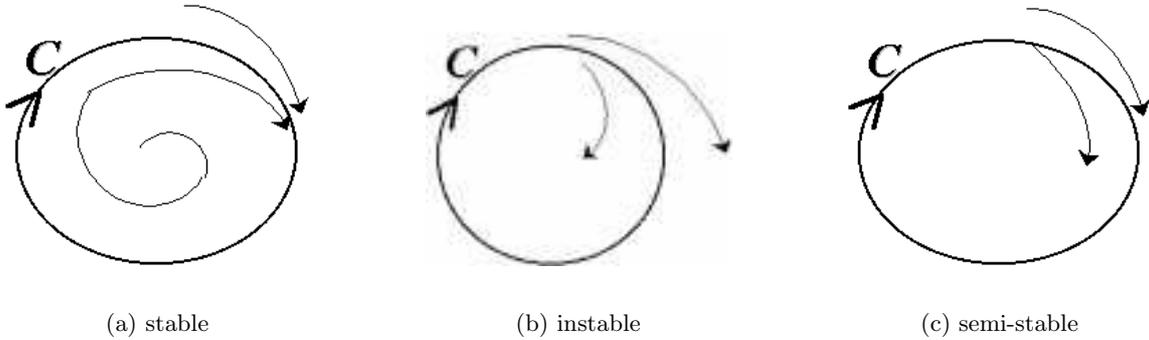


FIG. 2.5: *Trajectoires stable, instable et semi-stable*

### 2.2.4.2 Stabilité des orbites périodiques

Nous pouvons maintenant étendre la notion de stabilité aux orbites périodiques ou cycles limites. Nous avons alors les définitions suivantes

**Définition 2.2.9.** Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tel que  $\dot{x} = f(x)$ . Une cycle ou orbite périodique de  $\dot{x} = f(x)$  est définie comme étant une trajectoire fermée autre que les points d'équilibre.

**Définition 2.2.10.** Une orbite fermée  $\Gamma$  est dite stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \text{dist}(x, \Gamma) < \eta \implies \text{dist}(\phi_t(x), \Gamma) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

**Définition 2.2.11.** Une orbite fermée  $\Gamma$  est dite asymptotiquement stable si  $\Gamma$  est stable et si

$$\exists a > 0 \quad \text{tel que} \quad \text{dist}(x, \Gamma) < a \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi_t(x), \Gamma) = 0$$

**Définition 2.2.12.** Une orbite fermée  $\Gamma$  est dite asymptotiquement stable avec phase asymptotique si  $\Gamma$  est stable et si  $\forall x$  tel que  $\text{dist}(x, \Gamma) < a$  et  $\forall y \in \Gamma, \exists \nu \in \mathbb{R}$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi_t(x) - \phi_{t+\nu}(y)\| = 0$$

Nous pouvons alors étudier la stabilité des orbites périodiques. Pour cela, nous allons associer à cette orbite un difféomorphisme, appelé application de Poincaré. La nature de la stabilité du cycle limite se déduira immédiatement de celle de cette application en un point fixe, qui sera en fait n'importe quel point de l'orbite périodique.

### 2.2.5 Application de Poincaré

Considérons une orbite fermée  $\Gamma$  associée à une solution périodique de période minimale  $T$  d'un système dynamique non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.11)$$

où  $f$  est une fonction de classe  $C^1$ .  $\Gamma$  peut s'écrire:

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n; \quad x = \phi_t(x_0), \quad 0 \leq t \leq T\} \quad (2.12)$$

Nous considérons de plus le point  $p \in \Gamma$ . Notons  $H$  l'hyperplan tel que  $f(p) \notin H$ , soit  $f(p) \cdot \vec{n} \neq 0$  avec  $\vec{n}$  vecteur normal à  $H$  et  $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$  une base de l'hyperplan  $H$ .

L'ensemble  $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n, x = p + a_1 \cdot f_1 + \dots + a_{n-1} \cdot f_{n-1}, 0 \leq |a_i| \leq \varepsilon\}$  est appelé section transversale à  $\Gamma$  au point  $p$ . Le point  $p$  est l'unique point d'intersection entre l'hyperplan  $H$  et  $\Gamma$ .

Alors pour  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in S_\delta$ , il existe un unique temps minimal  $\tau(x) > 0$  tel que  $\phi_{\tau(x)} \in S_\varepsilon$ .  $\tau$  est de classe  $C^1$  et  $\tau(p) = T$ .

Soit  $\Pi$ , l'application définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Pi : \quad S_\delta &\rightarrow S_\varepsilon \\ x &\mapsto \phi_{\tau(x)}(x) \end{aligned}$$

L'application  $\Pi$  est dite application de Poincaré ou de premier retour.

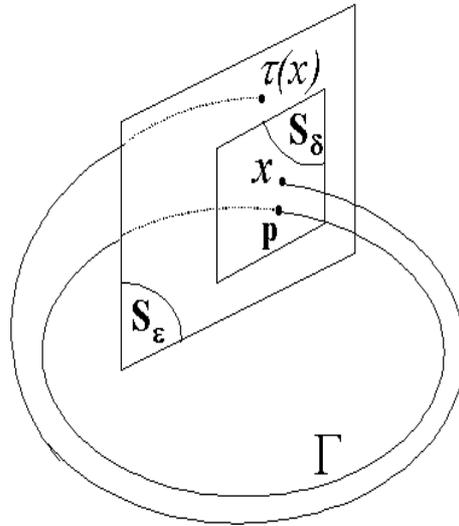
Notons que généralement,  $\tau$  dépend de  $x$ . Le point  $p$  est un point fixe pour  $\Pi$  et la stabilité du point  $p$  pour  $\Pi$  reflète la stabilité de  $\Gamma$  pour le flot  $\phi_t$ .

**Propriété 2.2.1.** *Si  $x \in S_\delta$  est tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi^n(x) = p$  alors:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\phi_t(x), \Gamma) = 0$$

**Définition 2.2.13.** *On dit que  $p$  est un point attractif pour  $\Pi$  si  $\Pi(p) = p$  et toutes les valeurs propres de  $D\Pi(p)$  sont en valeur absolue strictement inférieure à 1.*

**Propriété 2.2.2.** *Si  $p$  est un point attractif pour  $\Pi$ , alors  $\Gamma$  est asymptotiquement stable.*

FIG. 2.6: *Section de Poincaré*

Nous allons maintenant donner quelques éléments pour étudier "la robustesse" des systèmes dynamiques non linéaires dépendant de paramètres, en nous intéressant plus particulièrement à la notion de bifurcation de Hopf.

## 2.2.6 Bifurcation de Hopf

Dans cette section, nous allons introduire la notion de bifurcation de Hopf. Pour cela, nous reprenons la fonction  $f$ , dérivable par rapport à  $\mu$ , définie précédemment:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \mu) &\mapsto f(x, \mu) \end{aligned}$$

Lorsque nous faisons évoluer le paramètre  $\mu$ , nous pouvons observer des phénomènes de bifurcations, correspondant à un changement du comportement des solutions stationnaires, qui passent alors d'un état stable à un état instable.

Nous rappelons que les cycles limites sont alors définis comme étant les orbites périodiques, représentés par des trajectoires fermées dans le plan de phase  $(x, \dot{x})$ .

Le mathématicien Hopf a démontré que pour des systèmes différentiels de la forme  $\dot{x} = f(x, \mu)$ , avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , il existe un orbite fermé (soit un cycle limite) pour  $\mu > \mu_0$  si le point stationnaire en  $\mu = \mu_0$  passe de manière soudaine d'un caractère stable à un caractère instable, comme illustré en figure 2.7. La valeur  $\mu_0$  correspond alors à la valeur du paramètre  $\mu$  du point d'équilibre de  $f$ .

Nous pouvons énoncer le théorème comme suit:

### **Théorème 2.2.9. (de Hopf, 1942)**

Considérons le système différentiel  $\dot{x} = f(x, \mu)$ , avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  Nous sommes en présence d'une bifurcation de Hopf au point  $(x_0, \mu_0)$ , si les trois conditions suivantes sont réunies :

- $f(x_0, \mu_0) = 0$
- La matrice  $D_x f$  admet une paire de valeurs propres à partie imaginaire pure  $\lambda = \pm i\omega_0$ , tandis

que toutes les autres valeurs propres ont une partie réelle non nulle

- $\frac{d}{d\mu}(\Re(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0$

Il s'en suit les propriétés suivantes :

- la deuxième condition implique qu'il existe une unique variété de dimension 3 passant par  $(x_0, \mu_0)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  et un système régulier de coordonnées, préservant les hyperplans  $\mu$  constant, dont le développement en série de Taylor à l'ordre 3, défini sur la variété centrale est de la forme  $\dot{r} = (d\lambda + ar^2)r$ ,  $\dot{\theta} = \omega + c\lambda + br^2$  exprimé en coordonnées polaires. De plus, si  $a \neq 0$  il existe une surface de solutions périodiques dans la variété centrale, tangente quadratiquement avec les espaces propres de  $\mu(\lambda)$  et  $\mu(\bar{\lambda})$ . Enfin, si  $a < 0$  alors les cycles limites sont stables, dans le cas contraire répulsifs.

- la dernière condition implique une condition sur la transversalité de l'axe des imaginaires pour la partie réelle de la valeur propre  $\lambda$ . La vitesse de cette dernière devant être non nulle (voir figure 2.7).

Contrairement au cas du théorème de Lyapunov, la bifurcation de Hopf ne concerne pas uniquement un équilibre mais une courbe d'équilibre. Comme décrit précédemment, le point de bifurcation se caractérise par une valeur propre qui traverse l'axe des parties imaginaires, alors que toutes les autres valeurs propres ont une partie imaginaire strictement négative (voir figure 2.7). En ce point, appelé point de bifurcation de Hopf, il y a perte de stabilité asymptotique de l'équilibre et existence d'une solution périodique. Selon que cette solution périodique est sous-critique (c'est-à-dire qu'il existe des valeurs de  $\mu$  pour lesquels l'équilibre est stable), ou sub-critique (c'est-à-dire qu'il existe des valeurs de  $\mu$  pour lesquels l'équilibre est instable), elle est stable ou instable (voir figures 2.8). pour pouvoir alors statuer sur l'état de la solution périodique, il faut pousser le développement des équations à un ordre supérieur à un (Ioss [76] et [77], Girardot [59]).

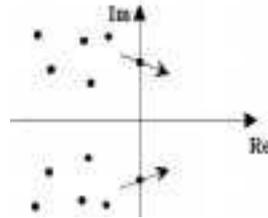
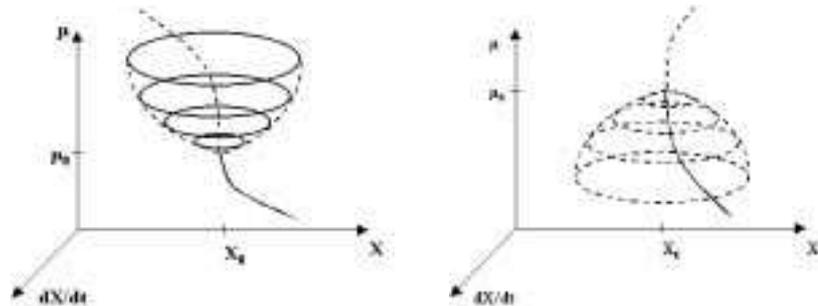


FIG. 2.7: Condition de transversalité non nulle



(a) Bifurcations de Hopf supercritique

(b) Bifurcations de Hopf subcritique

FIG. 2.8: Bifurcations de Hopf supercritique et subcritique (trait plein=stable, pointillés=instable)

## 2.3 Méthodes et critères d'analyse de stabilité

L'étude de la stabilité d'un système près d'un point d'équilibre est un problème très courant en dynamique. Dans cette partie, nous allons décrire succinctement les critères de Routh-Hurwitz (Meirovitch [107]- [106]) qui permettent de statuer sur la stabilité sans avoir à calculer les valeurs propres du système linéarisé. De plus, ces critères de Routh-Hurwitz peuvent permettre d'avoir des expressions analytiques régissant la stabilité du système.

Bien entendu, une autre méthode consiste à déterminer les valeurs propres du système linéarisé au point d'équilibre, comme cela a déjà été décrit dans le paragraphe 2.2.

L'utilisation des critères de Routh-Hurwitz est fréquente pour les systèmes comportant peu de degrés de liberté et ayant des expressions non-linéaires simples (D'Souza [39] et Yu [175]).

Ce critère ne donne pas accès à la fréquence d'instabilité, mais permet souvent d'avoir des expressions analytiques pour statuer sur la stabilité du système. La stabilité du système est alors étudiée en examinant les coefficients du polynôme caractéristique du système considéré.

Soit le système linéarisé  $\dot{y} = A.y$ . Le polynôme caractéristique provient de l'expression

$$\det(\lambda.I - A) = 0 \quad (2.15)$$

où  $I$  représente la matrice identité.

Il peut alors se mettre sous la forme

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.16)$$

Nous définissons alors la matrice  $H$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Il est alors possible de définir les  $n$  coefficients  $H_1, H_2, \dots, H_n$  définis comme suit

$$H_1 = \det(H_1) = a_1 \quad (2.18)$$

$$H_2 = \det(H_2) = \det \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 \quad (2.19)$$

$$H_3 = \det(H_3) = \det \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 + a_5) - a_3^2 - a_4 a_1^2 \quad (2.20)$$

et

$$H_n = \det(H_n) \quad (2.21)$$

Les critères de Routh-Hurwitz montrent que si tous les coefficients  $H_1, H_2, \dots, H_n$  sont positifs alors le système est stable. Nous remarquons tout de suite les avantages et inconvénients de cette méthode. Tout d'abord, le principal avantage est de pouvoir donner des expressions analytiques simples qui servent de critères pour la stabilité. Ces expressions sont données à partir des inégalités résultant des équations (2.18), (2.19), (2.20) et (2.21) et des expressions des facteurs physiques en fonction des paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Cependant, le principal inconvénient réside dans le fait que ces critères deviennent très rapidement complexes pour des systèmes comportant de nombreux degrés de liberté (d'où un grand nombre d'inégalités à vérifier) ou des non-linéarités complexes, qui génèrent généralement des coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dont l'expression n'est pas simple et donc très difficilement exploitable d'un point de vu analytique.



---

## Chapitre 3

# Méthodes d'analyse non-linéaire

Quand nous parlons de méthodes d'analyse non linéaire, nous nous intéressons plus particulièrement aux méthodes de réductions et simplifications du système différentiel qui permettent soit de diminuer le nombre de degrés de liberté, soit de simplifier ou d'approximer les non linéarités. En effet, lorsque nous cherchons à déterminer les cycles limites d'un système différentiel, la méthode la plus directe est d'effectuer une intégration temporelle du système considéré. Il s'avère que le temps de calcul pour de tels systèmes peut être très long. Pour cette raison, il est nécessaire de mettre en place diverses méthodes, qui vont nous permettre d'obtenir de manière rapide la solution du système.

De nombreuses méthodes non-linéaires permettent ainsi de traiter les problèmes dynamiques comportant des non-linéarités diverses. L'objectif de cette partie est de décrire quelques unes des méthodes non-linéaires existantes qui seront ensuite utilisées ou discutées.

Dans un premier temps, nous évoquerons brièvement les méthodes les plus classiquement employées qui sont les méthodes de balance harmonique ou de collocation trigonométrique.

Dans un second temps, nous décrirons des méthodes non-linéaires de simplification et de réduction de systèmes telles que la méthode de la variété centrale et la forme normale qui lui est souvent associée. Ensuite, nous parlerons de méthodes d'extrapolations qui permettent d'approximer les systèmes non-linéaires décrits sous forme de séries.

Pour finir, nous parlerons d'une méthode simplifiée, la méthode de la linéarisation équivalente qui permet de trouver un système linéaire équivalent au système non-linéaire et ainsi effectuer rapidement des études simplifiées.

### 3.1 Méthodes de recherche de solutions simplifiées

Parmi les méthodes de recherche de solutions sous une forme prédéfinie, la méthode de collocation trigonométrique (TCM) et les méthodes de balance harmonique font partie des méthodes les plus utilisées et connues.

L'objectif de ces méthodes est de trouver des solutions périodiques à un système différentiel non-linéaire continu par morceaux de la forme:

$$A.\ddot{x}(t) + B.\dot{x}(t) + C.x(t) + F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = 0 \quad (3.1)$$

Nous cherchons alors à développer la solution recherchée en séries de Fourier, en ne gardant que les  $M$  premières harmoniques. L'approximation provient alors du fait que la solution considérée néglige toutes les harmoniques d'ordre supérieur à  $M$ . La solution du système (3.1) prend alors la forme suivante:

$$x(t) = a_0 + \sum_{m=1}^M (a_m \cdot \cos(m.t) + b_m \cdot \sin(m.t)) \quad (3.2)$$

avec  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$  les coefficients de Fourier correspondant. Dans le cadre de la balance harmonique, il existe diverses méthodes telles que la méthode de la balance harmonique (HB method: harmonic Balance method; Nayfeh et Mook [125]), la méthode de la balance harmonique incrémentale (IHB method: Incremental Harmonic Balance method; Cheung, Cheng et Lau [30], Leung et Chui [101], Lau et Zhang [100] et Pierre, Ferri et Dowell [134]), et la méthode avec alternance entre le domaine fréquentiel et temporel (AFT method: Alternate Frequency/Time domain method; Cameron et Griffin [25] et Narayanan et Sekar [121]).

Une autre méthode qui est couramment utilisée pour approximer la recherche de solutions sous forme d'harmoniques est donc la méthode de la collocation trigonométrique (TCM, Nataraj [122] et Jean[84]).

D'autres méthodes telles que les méthodes de perturbations, comme les méthodes d'extension directe, de Lindstedt-Poincaré, des échelles multiples et de la moyenne harmonique sont aussi utilisées (Nayfeh et Balachandran [126], Atadan [4], Nayfeh et Asfar [124] et Nayfeh[123]). Ces méthodes consistent alors à rechercher les solutions du système sous des formes de puissance croissante suivant un paramètre  $\varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  petit. Suivant la méthode utilisée, la solution du système peut être développée de manière plus ou moins complexe. Par exemple dans le cas de la méthode des échelles multiples, la solution peut être recherchée sous la forme:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon x_1(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad \text{avec } T_n = \varepsilon^n t \quad (3.3)$$

avec  $x_1, x_2, \dots, x_m$  les coefficients à déterminer.

## 3.2 Généralités sur les méthodes de réduction et simplification

Parallèlement, il existe des méthodes qui se basent plus sur la notion de réduction et de simplification des systèmes non-linéaires. Par exemple, la théorie de la forme normale permet de réduire le nombre des termes non linéaires du système non-linéaire de départ en ne gardant que les termes non linéaires prépondérants. Ceci s'effectue par l'intermédiaire de transformations et changements de variables non linéaires. Ces problèmes ont déjà fait l'objet de nombreux travaux de recherche (Nayfeh et Mook [125], Guckhenheimer et Holmes [64], Brujno [23] et [24], Jézéquel et Lamarque [85], Ioss [48]-[86], Hsu [65]-[66], Yu [175]-[10]-[137]). Aussi, l'une des méthodes de réduction de systèmes non-linéaires les plus courantes est la méthode de la variété centrale. Le théorème de la variété centrale (Marsden et McCracken [104]) permet d'effectuer des analyses locales de bifurcation dans le voisinage d'un point fixe pour les systèmes non-linéaires. Cette méthode peut être comparée à une méthode de simplification qui réduit le nombre d'équations du système original en obtenant un système simplifié sans perte du comportement dynamique non linéaire (Nayfeh et Balachandran [126], Guckhenheimer et Holmes [64], Knobloch [91], Froment et Aubry [55]). Cette méthode est plus particulièrement utilisée pour les systèmes non linéaires polynomiaux et présente l'inconvénient de ne pas pouvoir être appliquée à un système avec jeu.

Nous allons maintenant présenter un peu plus dans le détail les méthodes de la variété centrale et de la forme normale qui permettent donc de réduire et de simplifier les systèmes non linéaires.

### 3.3 Réduction par la méthode de la variété centrale

La méthode de la réduction de la variété centrale constitue l'une des méthodes les plus fiables et rapides en temps de calcul pour traiter des systèmes non linéaires continus (Nayfeh et Balachandran [126], Guckenheimer et Holmes [64]). Nous nous intéressons plus particulièrement à une analyse locale de bifurcation au voisinage d'un point fixe du système considéré. Cette méthode de réduction permet alors, au voisinage du point de bifurcation de Hopf, de simplifier le système dynamique non-linéaire de départ en ne gardant que l'expression dynamique des variétés centrées. L'expression des variétés stables et instables dépend alors des variétés centrées. Du fait de la réduction effectuée sur le système dynamique de départ, il est alors plus aisé d'effectuer des recherches de cycles limites. Généralement cette méthode est utilisée pour des systèmes à faible nombre de degrés de liberté mais elle peut être adaptée à des systèmes plus complexes. Dans cette partie, nous allons présenter la méthode de base de la réduction de la variété centrale.

Considérons un système de dimension  $n$ . Pour déterminer la variété centrale associée à un point fixe  $x = x_0$ , vérifiant au point  $M = M_0$ , l'équation :

$$\dot{x} = f(x; M) \quad (3.4)$$

nous devons tout d'abord utiliser la transformation :

$$x(t) = x_0 + y(t) \quad (3.5)$$

Ainsi, nous ramenons le point fixe en question ( $x_0$ ) à l'origine ( $y = 0$ ) et nous obtenons le système équivalent à (3.4) :

$$\dot{y} = f(x_0 + y; M_0) \quad (3.6)$$

Ensuite, en considérant que la fonction  $f$  est  $C^r$  avec  $r$  suffisamment grand, nous développons le système (3.6) en séries de Taylor pour  $y$  petit :

$$f(x_0 + y) = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{y^p}{p!} \cdot f^{(p)}(x_0) + \frac{y^r}{r!} \cdot f^{(r)}(x_0 + \alpha y) \quad \alpha \in ]0; 1[ \quad (3.7)$$

Nous obtenons alors le système :

$$\dot{y} = A \cdot y + F_2(y) + F_3(y) + O(y^4) \quad (3.8)$$

où  $A = D_x f(x_0; M_0)$  est la  $n \times n$  matrice des dérivées premières de  $f$  évaluée au point  $(x_0; M_0)$ , communément appelée matrice jacobienne de  $f$ , et les composants scalaires des vecteurs  $n \times 1$  de  $F_N(y)$  sont des polynômes de degré  $N$  suivant les composants  $y_1, y_2, \dots, y_N$  du vecteur  $y$ . Soit, le système peut aussi s'écrire de la manière suivante (avec  $\otimes$  définissant le produit de Kronecker (Stewart [163])):

$$\dot{y} = A \cdot y + \eta_{ij}^{(2)} \cdot y \otimes y + \eta_{ij}^{(3)} \cdot y \otimes y \otimes y + O(y^4) \quad (3.9)$$

ou encore :

$$\dot{y} = A.y + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_{ij}^{(2)} . y_i . y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_{ijk}^{(3)} . y_i . y_j . y_k + O(y^4) \quad (3.10)$$

où  $\eta_{ij}^{(2)}$  et  $\eta_{ijk}^{(3)}$  sont respectivement les coefficients des termes carrés et cubiques des combinaisons des composantes  $y_1, y_2, \dots, y_N$  du vecteur  $y$ .

Par commodité d'écriture, nous utiliserons par la suite la notation (3.8).

La deuxième étape consiste à définir la base de la variété centrale. Pour cela, nous arrangeons les vecteurs propres  $p_i$  de  $A$  de la façon à obtenir la base de la variété centrale suivante :

$$P = [p_1 \quad \dots \quad p_m \quad , \quad p_{m+1} \quad \dots \quad p_n] \quad (3.11)$$

Avec :

- $p_1 \dots p_m$  les vecteurs propres associés aux  $m$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  dont la partie réelle est nulle.
- $p_{m+1}, \dots, p_n$  les vecteurs propres associés aux  $(n - m)$  valeurs propres  $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$  dont la partie réelle est non nulle.

La troisième étape consiste à introduire la transformation  $y = P.v$ , afin d'écrire le système (3.6) dans la base de la variété centrale  $P = [p_1, \dots, p_m, p_{m+1}, \dots, p_n]$  :

$$\dot{v} = J.v + P^{-1}.F_2(P.v) + P^{-1}.F_3(P.v) + \dots \quad (3.12)$$

où  $J = P^{-1}.A.P$ . Nous notons que  $J$  peut s'écrire sous la forme :

$$J = \begin{bmatrix} J_c & 0 \\ 0 & J_s \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

où  $J_c$  est une matrice  $m \times m$  dont les valeurs propres sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  et  $J_s$  est une matrice  $(n - m) \times (n - m)$  dont les valeurs propres sont  $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ .

La quatrième étape correspond à l'écriture du système (3.8) suivant  $v_c$ , le vecteur de dimension  $m$ , comportant les variétés centrées associées au sous-espace centré  $E^c$ , et  $v_s$ , le vecteur de dimension  $(n - m)$ , comportant les variétés stables et instables associées aux sous-espaces stable  $E^s$  et instable  $E^u$ .

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{v}_c = J_c.v_c + G_2(v_c, v_s) + G_3(v_c, v_s) + \dots \\ \dot{v}_s = J_s.v_s + H_2(v_c, v_s) + H_3(v_c, v_s) + \dots \end{cases} \quad (3.14)$$

$v_c$  et  $v_s$  ne sont couplés que par l'intermédiaire des termes non linéaires. De plus, nous avons  $H_N(0, 0) = 0$ ,  $G_N(0, 0) = 0$  et les matrices jacobiennes associées  $DH_N(0, 0) = 0$ ,  $DG_N(0, 0) = 0$  (avec  $N = 2, 3, \dots$ ). Comme  $H_N$  et  $G_N$  sont des polynômes infiniment différentiables, il existe alors une variété centrale locale de la forme (Carr [26]) :

$$v_s = h(v_c) \quad (3.15)$$

où  $h$  est une fonction de  $v_c$ . Comme  $h$  vérifie (3.14) pour  $v_c$  petit uniquement, nous sommes en présence d'une variété localement invariante. De plus, cette variété est une variété locale centrée car elle vérifie les conditions :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ D_{v_c} h(0) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

où  $h$  désigne les composants de  $h$ .

La cinquième étape consiste alors à déterminer la fonction  $h$  de dimension  $(n - m)$ , en substituant  $v_s$  par l'intermédiaire de (3.15) dans le système (3.14). On obtient alors le système à résoudre :

$$D_{v_c} h(v_c) \cdot \{J_c \cdot v_c + G_2[v_c, h(v_c)] + G_3[v_c, h(v_c)] + \dots\} = J_s \cdot h(v_c) + H_2[v_c, h(v_c)] + H_3[v_c, h(v_c)] + \dots \quad (3.17)$$

Il est alors parfois difficile d'avoir la forme exacte de la fonction  $h$ , mais sa solution peut être approximée sous forme polynomiale par exemple, sans termes constants et linéaires pour satisfaire la condition (3.16). En écrivant alors les différents termes du système (3.17) et en regroupant les termes associés à une même puissance polynomiale des termes de  $v_c$ , nous obtenons un système d'équations algébriques qui permet la détermination complète des coefficients du polynôme  $h$ . Nous verrons par la suite, à travers un exemple simple, diverses démarches pour obtenir l'expression complète de  $h$  et plus particulièrement la détermination des coefficients  $a_{ij}$  associés. Finalement, en substituant cette expression du polynôme  $h$  dans le système (3.14), nous obtenons le système de dimension  $n$  de la variété centrale :

$$\dot{v}_c = J_c \cdot v_c + G_2[v_c, h(v_c)] + G_3[v_c, h(v_c)] + \dots \quad (3.18)$$

Le système (3.18) décrit donc le système dynamique sur la variété centrale.

Il est alors possible de déterminer les cycles limites associés au système dynamique de départ par l'intermédiaire du nouveau système dans la base de la variété centrée.

De plus, il existe alors des théorèmes sur la stabilité associée aux systèmes (3.18) et (3.14):

**Théorème 3.3.1. (Henry et Carr, 1981)**

*Si l'origine  $x = 0$  du système (3.18) est localement asymptotiquement stable (respectivement instable) alors l'origine du système (3.14) est aussi localement asymptotiquement stable (respectivement instable).*

Des extensions sur la construction des variétés centrées dans le cas de scénarios non locaux font aussi l'objet de travaux de recherche (Knoblock [92]).

## 3.4 Formes normales de systèmes dynamiques

### 3.4.1 Définition

L'origine de la théorie de la forme normale se trouve dans les travaux de Poincaré [135] et ses recherches portant sur les méthodes nouvelles de la mécanique céleste [136]. La formulation générale des systèmes traités peut se mettre sous la forme:

$$\dot{X} = AX + F(X) \quad (3.19)$$

où  $A$  est une matrice réelle et  $F$  définit la fonction non-linéaire du système. L'idée de la forme normale est alors d'utiliser un changement de variables de la forme:

$$X = \Psi(Y) \quad (3.20)$$

qui permettent de simplifier au maximum le système (3.19) et d'aboutir si possible au système différentiel le plus simple possible:

$$\dot{Y} = BY \quad (3.21)$$

avec  $B$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $A$ .

Dans le cas où la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, la réduction de  $A$  sous forme de Jordan est alors utilisée. Nous voyons donc qu'il n'existe pas une unique forme normale mais plusieurs. La forme normale qui provient du choix d'une forme de Jordan pour la partie linéaire du système est communément appelée forme normale de Jordan. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à cette forme normale par la suite.

### 3.4.2 Méthodologie

Dans cette section, nous cherchons juste à définir brièvement la démarche appliquée lors de l'utilisation de la forme normale. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à Lamarque [96] ou Guckhenheimer et Holmes [64].

Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , définie de telle sorte que l'on ait :

$$\dot{X} = f(X) \quad (3.22)$$

où  $f$  est un vecteur de dimension  $n$  de  $X$ .

En considérant que la fonction  $f$  est  $C^N$  avec  $N$  suffisamment grand, nous développons le système (3.22) en séries de Taylor:

$$\dot{X} = A.X + F^2(X) + F^3(X) + \dots + F^N(X) + O(|X|^{N+1}) \quad (3.23)$$

où, pour  $X \in \mathbb{R}^n$ , les  $F^k$  représentent les vecteurs des polynômes de degré  $N$  de  $f$  suivant les composants du vecteur  $X$ . Nous avons donc  $F^k(X) \in H_n^k$  où  $H_n^k$  définit l'espace des polynômes de degré  $k$  à  $n$  variables.  $O(|X|^{N+1})$  représente les termes d'ordre  $\geq N + 1$ .

En effectuant un changement de variable approprié, il est alors possible de transformer les non linéarités allant du degré 2 à  $k \leq N$  (avec  $k$  arbitraire). Le système ainsi constitué la forme normale d'ordre  $k$  du système (3.23).

Il est aisé de trouver une transformation linéaire qui permette d'écrire la matrice  $A$  sous sa forme de Jordan. Soit  $J$  cette matrice, nous obtenons alors le système sous sa forme normale à l'ordre  $k < N$  suivant les composantes de la variable  $X_k$ :

$$\dot{X}_k = J.X_k + Q^2(X_k) + \dots + Q^k(X_k) + F^{k+1}(X_k) + \dots + F^N(X_k) + O(X_k^{N+1}) \quad (3.24)$$

Dans l'expression (3.24), les termes  $J.X_k + Q^2(X_k) + \dots + Q^k(X_k)$  représentent la forme normale à l'ordre  $k$  du système (3.23).  $F^{k+1}(X_k) + \dots + F^N(X_k)$  sont les termes non linéaires d'ordre  $\geq k$ .

Le but de la construction des formes normales est de déterminer un changement de variables (appartenant à un groupe de transformation donné) tel que le système soit sous une forme la plus simple possible (en général possédant moins de monômes).

Nous allons maintenant expliciter la méthodologie pour déterminer les coefficients de la transformation normale. Nous supposons que nous avons le système suivant, avec la matrice  $A$  déjà sous une forme de Jordan (ceci pour simplifier les écritures) :

$$\dot{X} = A.X + F^2(X) + F^3(X) + \dots + F^N(X) + O(|X|^{N+1}) \quad (3.25)$$

où, pour  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $F^k(X) \in H_n^k$ .  $O(|X|^{N+1})$  représente les termes d'ordre  $\geq N + 1$ .

Nous effectuons alors la transformation suivante :

$$X = Y + P^k(Y) \quad (3.26)$$

avec  $P^k(Y) \in H_n^k$  et  $Y \in \mathbb{R}^n$  et  $P^k$  ne contient ni de termes constants, ni de termes linéaires.

En substituant (3.26) dans (3.25), nous avons le terme à gauche  $\dot{X}$  qui s'écrit sous la forme :

$$\dot{X} = \frac{d}{dt} [Y + P^k(Y)] = [I + D_Y P^k(Y)] \cdot \dot{Y} \quad (3.27)$$

où  $D_Y P^k$  désigne la matrice jacobienne de  $P^k$  par rapport à  $Y$ . Nous avons  $[I + D_Y P^k(Y)]$  inversible pour  $Y$  suffisamment petit. Nous avons la forme approchée inverse :

$$[I + D_Y P^k(Y)]^{-1} = I - D_Y P^k(Y) + [D_Y P^k(Y)]^2 + \dots \quad (3.28)$$

De même nous obtenons l'expression du terme à droite de (3.25) :

$$f(X) = \frac{d}{dt} [Y + P^k(Y)] = A \cdot [Y + P^k(Y)] + \dots + F^k [Y + P^k(Y)] + O(|Y|^{k+1}) \quad (3.29)$$

Soit, le système dynamique s'écrit sous la forme :

$$\dot{Y} = [I + D_Y P^k(Y)]^{-1} \cdot f(Y + P^k(Y)) \quad (3.30)$$

Nous écrivons alors le système obtenu sous la forme condensée :

$$\dot{Y} = A.Y + G(Y) \quad (3.31)$$

### 3.4.2.1 Théorème fondamental de la théorie classique de la forme normale

Considérons l'opérateur linéaire  $\Psi_A^k P^k(Y)$  défini de  $H_n^k$  dans  $H_n^k$  tel que :

$$\Psi_A^k P^k(Y) = D_Y P^k(Y) \cdot A \cdot Y - A \cdot P^k(Y) \quad (3.32)$$

A partir de l'expression de  $\dot{Y}$  et de  $f(X)$  données par (3.30) et (3.27), et en tenant compte de l'expression de la forme inverse donnée en (3.28), nous avons :

$$\dot{Y} = A \cdot Y + F^2(Y) + F^3(Y) + \dots + F^{k-1}(Y) + F^k(Y) - \Psi_A^k P^k(Y) + O(|Y|^{r+1}) \quad (3.33)$$

Ainsi, les termes d'ordre inférieur à  $k$  ne sont pas changés, alors que ceux d'ordre supérieur ou égal à  $k$  sont modifiés. Nous obtenons :

$$S^k(Y) = F^k(Y) - \Psi_A^k P^k(Y) \quad (3.34)$$

avec  $S^k \in G^k$ , le sous-espace supplémentaire de  $\Psi_A^k P^k$  dans  $H_n^k$ , tel que :

$$H_n^k = R(\Psi_A^k P^k) \oplus G^k \quad (3.35)$$

Ainsi, les  $F^k(Y)$  s'écrivent sous la forme :

$$F^k(Y) = r^k(Y) + S^k(Y) \quad (3.36)$$

où  $r^k(Y) \in R(\Psi_A^k P^k)$ , et  $S^k(Y) \in G^k$ . Il est alors possible de choisir  $P^k(Y)$  tel que  $\Psi_A^k P^k(Y) = r^k(Y)$ .

L'équation (3.29) devient :

$$\dot{Y} = A \cdot Y + F^2(Y) + F^3(Y) + \dots + F^{k-1}(Y) + S^k(Y) + O(|Y|^{k+1}) \quad (3.37)$$

**Théorème 3.4.1. (Takens, 1980)** *Soit le système  $\dot{X} = f(X)$ , de classe  $C^N$  tel que  $f(0) = 0$  et  $Df(0) = A$ . En choisissant un sous-espace complément  $G^k$  pour  $\Psi_A^k P^k$  dans  $H_n^k$ , tel que  $H_n^k = R(\Psi_A^k P^k) \oplus G^k$ , il existe une suite de transformations tangentes à l'identité  $X = Y + P^k(Y)$  où  $P^k(Y) \in H_n^k$  telles que le système précédent soit transformé en une forme normale d'ordre  $N$  :*

$$\dot{Y} = A \cdot Y + S^2(Y) + S^3(Y) + \dots + S^N(Y) + R_N$$

avec  $S^k(Y) \in G^k$  pour  $2 \leq k \leq N$  et  $R_N = O(|Y|^{N+1})$ .

Le théorème fondamental dans la théorie de la forme normale de systèmes dynamiques est le théorème de F. Takens qui est une amélioration du théorème de Poincaré-Dulac qui s'énonce de la manière suivante:

**Théorème 3.4.2. (Poincaré-Dulac, 1980)** *Considérons le système différentiel :*

$$\dot{x}_i = \varphi_i(X) \quad \text{avec } i = 1, \dots, n$$

où  $\varphi_i$  est une fonction composée des  $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ .

Il existe une transformation  $x_i = \xi_i(Y)$  avec  $\xi_i(0) = 0$ , tel que le système précédent se met sous la forme:

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i$$

Pour que ceci soit vérifié, les conditions suivantes doivent être vérifiées:

- toutes les valeurs propres intrinsèques  $\lambda_i$  de la partie linéaire du système doivent être distinctes et être contenues dans un même demi-plan de frontière contenant l'origine du plan complexe.

- la condition de non-résonance : soit l'ensemble des nombres  $(p_1, \dots, p_n) = P$ , pour  $\sum_{k=1}^n p_k > 1$  et  $p_k \geq 0$  pour  $k = 1, \dots, n$ , on a :

$$\langle P, \lambda \rangle - \lambda_i = \sum_{k=1}^n p_k \lambda_k - \lambda_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Comme explicité précédemment, ce résultat peut s'étendre à tous les systèmes dynamiques, moyennant des transformations préliminaires. Cependant, la condition de non-résonance n'est pas vérifiée et il subsistera dans le système transformé des termes non-linéaires, les termes résonants.

Malgré la subsistance de termes non linéaires, la transformation normale est intéressante car elle réduit en fait la partie non linéaire à une forme minimale, en ne conservant qu'un nombre réduit de termes irréductibles. La procédure couramment utilisée a été développée dans le paragraphe précédent et propose donc une approximation formée de changements de variables successifs de degré croissant. La transformation d'ordre 1 consiste à la réduction de Jordan de la partie linéaire du système. Les ordres suivants révèlent les termes résonants correspondants.

Nous comprenons ici, le rôle fondamental des termes résonants : en effet, la nature des solutions ne peut être affectée par un changement de variable polynomial. Seuls les termes résonants sont susceptibles de modifier leur comportement asymptotique. Il est donc nécessaire de pousser la transformation jusqu'à obtention d'au moins un terme résonant pour que l'étude de stabilité s'en trouve enrichie. Nous notons que les termes résonants sont toujours de degré impair (Holmes [64]). Un exemple permettant d'illustrer cela est donné en Annexe C.

### 3.5 Approximations fractionnelles

L'un des problèmes courants de l'analyse numérique est la vitesse de convergence d'un système. Pour répondre à ce problème, des méthodes d'extrapolations diverses ont été mises en place. Ces méthodes permettent de construire une nouvelle séquence qui converge vers la même limite que la séquence d'origine, mais cela de manière plus rapide.

Ces méthodes d'extrapolation sont définies comme suit :

**Définition 3.5.1.** *Considérons une série  $(S_n)$  qui converge vers une limite  $S$ . Une méthode d'extrapolation consiste à transformer la série précédente par une nouvelle série  $(T_n)$ .*

*Cette transformation  $T : (S_n) \rightarrow (T_n)$  accélère la convergence de la séquence  $(S_n)$  si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0 \quad (3.38)$$

*Alors,  $(T_n)$  converge plus rapidement vers la limite  $S$  que  $(S_n)$*

Parmi les méthodes d'extrapolation les plus connues, nous retrouvons l'extrapolation de Richardson (Brezinski [21]) ou la transformation non-linéaire  $\Delta^2$  de Aitken ( $T_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$  avec  $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$  et  $\Delta^2 S_n = \Delta(\Delta S_n) = S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n$ ) et les  $\varepsilon$ -algorithme et  $\eta$ -algorithme. Pour plus de détail, le lecteur pourra se reporter à Brezinski [21] et Baker et Graves-Morris [5].

Une autre possibilité pour simplifier un système non linéaire est d'utiliser la théorie des approximations de Padé et des approximants à plusieurs variables (Baker et Graves-Morris [5], Brezinski [20]-[22] et Hugues Jones [67]). Les approximants de Padé et les approximants à variables multiples sont des fractions rationnelles obtenues à partir de fonctions définies par une série de puissances croissantes. L'approximation obtenue par cette méthode a la propriété de converger alors que la série de la fonction de départ peut diverger si nous considérons le même nombre de termes dans les deux cas. Cette méthode peut avoir beaucoup de domaines d'applications (Spanos et Roy [145], Cochelin, Damil et Potier-Ferry [32], Damil et Potier-Ferry [35], Wazwaz [173], Coyette [33], Vakakis [49], Wang [172], etc...) .

Dans cette partie, nous allons présenter une méthode de simplification d'expressions non-linéaires (écrites sous forme de séries de Mac-Laurin) en fractions rationnelles. Nous verrons tout d'abord l'application aux cas de systèmes à une variable (les approximants de Padé) et la généralisation à plusieurs variables.

#### 3.5.1 Approximants de Padé

Les approximants de Padé correspondent à des approximations rationnelles de séries de puissances croissantes (Brezinski [22]).

Supposons une fonction  $f$  définie comme une série de puissances croissantes à une variable telle que:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot z^i \quad (3.39)$$

Considérons maintenant une fonction  $g$  rationnelle défini comme suit:

$$g(z) = \frac{a_0 + a_1.z + \cdots + a_L.z^L}{b_0 + b_1.z + \cdots + b_M.z^M} \quad (3.40)$$

Le numérateur de la fonction  $g$  est une série de puissances croissantes de degré  $L$  et le dénominateur est une série de puissances croissantes de degré  $M$ . Nous cherchons alors à définir les coefficients du numérateur et du dénominateur de la fonction  $g$  qui permettent d'avoir la relation suivante:

$$f(z) - g(z) = O(z^{L+M+1}) \quad (3.41)$$

Une fraction rationnelle vérifiant les relations (3.40) et (3.41) est appelée un approximant de Padé de la fonction  $f$  à l'ordre  $M + L + 1$ . L'approximant de Padé est alors noté  $[L/M]_f(z)$ .

Nous remarquons que le dénominateur de l'approximant de Padé comporte  $M + 1$  coefficients et que le numérateur en comporte  $L + 1$ . Étant donné que tous ces coefficients peuvent être déterminés à un facteur multiplicatif commun, nous prenons, par définition,  $b_0 = 1$ . Ainsi, il ne reste plus que  $M$  coefficients indépendants pour le dénominateur et  $L + 1$  coefficients indépendants pour le numérateur. Soit, au total, nous avons  $M + L + 1$  coefficients indéterminés. Ainsi, le nombre d'inconnues nous permet bien de trouver un approximant de Padé  $[L/M]_f(z)$  qui vérifie une série de puissances croissantes donnée pour les ordres  $1, z, z^2, \dots, z^{L+M}$  et nous avons donc la relation:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i.z^i = \frac{a_0 + a_1.z + \cdots + a_L.z^L}{b_0 + b_1.z + \cdots + b_M.z^M} + O(z^{L+M+1}) \quad (3.42)$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer les  $M$  coefficients  $b_1, b_2, \dots, b_M$  et les  $L + 1$  coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_L$ .

Nous allons maintenant expliciter la procédure la plus classiquement utilisée pour obtenir ces coefficients. A partir de l'expression (3.42), nous pouvons établir l'équation suivante:

$$(b_0 + b_1.z + \cdots + b_M.z^L)(c_0 + c_1.z + \cdots) = a_0 + a_1.z + \cdots + a_L.z^L + O(z^{L+M+1}) \quad (3.43)$$

En écrivant l'équation (3.43) par ordre de puissances croissantes, les termes des ordres  $z^{L+1}, z^{L+2}, \dots, z^{L+M}$  doivent être nuls pour satisfaire la propriété des approximants de Padé définie en (3.41). Ainsi, on obtient les équations algébriques vérifiées par les inconnues  $b_1, b_2, \dots, b_M$  suivantes:

$$\begin{cases} b_0.c_{L+1} + \cdots + b_{M-1}.c_{L-M+2} + b_M.c_{L-M+1} = 0 \\ b_0.c_{L+2} + \cdots + b_{M-1}.c_{L-M+3} + b_M.c_{L-M+2} = 0 \\ \dots \\ b_0.c_{L+M} + \cdots + b_{M-1}.c_{L+1} + b_M.c_L = 0 \\ \text{avec } c_i = 0 \text{ pour } i < 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Comme par définition  $b_0 = 1$ , le système précédent devient un système linéaire à  $M$  équations avec  $M$  inconnues  $b_1, b_2, \dots, b_M$  correspondant aux coefficients de l'approximant de Padé  $[L/M]_f(z)$ . Par résolution de ce système les coefficients  $b_1, b_2, \dots, b_M$  sont donc déterminés.

En écrivant maintenant l'équation (3.43) par ordre de puissances croissantes pour les termes d'ordre

$z^1, z^2, \dots, z^L$ , qui doivent être nuls pour satisfaire la propriété des approximants de Padé définie en (3.41), on obtient les équations algébriques vérifiées par les inconnues  $a_0, a_1, \dots, a_L$  suivantes:

$$\begin{cases} a_0 = c_0.b_0 \\ a_1 = c_1.b_0 + c_0.b_1 \\ a_2 = c_2.b_0 + c_1.b_1 + c_0.b_2 \\ \dots \\ a_L = c_L.b_0 + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} b_i.c_{L-i} \end{cases} \quad (3.45)$$

Ainsi, les équations (3.44) et (3.45) déterminent le numérateur et le dénominateur de l'approximant de Padé  $[L/M]_f(z)$  qui satisfait  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i.z^i$  jusqu'à l'ordre  $z^{L+M}$ .

Ce dernier résultat nous montre qu'il est donc possible de définir les différentes classes  $[L/M]$  des approximants de Padé qui sont regroupées dans une table appelée la table de Padé:

$$\begin{array}{cccc} [0/0] & [0/1] & [0/2] & \dots \\ [1/0] & [1/1] & [1/2] & \dots \\ [2/0] & [2/1] & [2/2] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

D'après ce qui précède, nous voyons donc que  $[L/M]_f(z)$  existe et est unique si et seulement si le système donnant les coefficients du dénominateur  $b_1, b_2, \dots, b_M$  est non singulier, soit, en reprenant l'expression du système (3.44), si et seulement si le déterminant de Hankel  $H^{[L/M]}$  est différent de zéro. Ce déterminant de Hankel est défini de la manière suivante:

$$H^{[L/M]} = \begin{vmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \dots & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & \dots & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{L-2} & c_{L-1} & c_L & \dots & c_{L+M-2} \\ c_{L-1} & c_L & c_{L+1} & \dots & c_{L+M-1} \end{vmatrix} \quad (3.47)$$

### 3.5.2 Théorie de la convergence

La notion de convergence associée aux approximants de Padé est un problème difficile à traiter. Nous allons expliciter le problème de convergence associé aux approximants de Padé à travers un exemple.

Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{10+x}{1-x^2} \quad (3.48)$$

Cette fonction converge pour  $|x| < 1$ .

Si nous considérons maintenant les approximants de Padé  $[L/1]_{f(x)}$  associés, nous avons

$$[L/1]_{f(x)} = \sum_{i=0}^{L-1} c_i x^i + \frac{c_L x^L}{1 - \frac{c_{L+1}}{c_L x}} \quad (3.49)$$

avec  $c_{2i} = 10$  et  $c_{2i+1} = 1$ . Dans le cas où  $L$  est impair, nous remarquons que l'expression précédente comporte une racine pour  $x = 0.1$ . Ainsi la série  $[L/1]_{f(x)}$  ne converge pas vers  $f$  pour  $|x| < 1$  alors que  $f$  converge.

Ainsi, les pôles peuvent empêcher la convergence des approximants de Padé.

Aussi, les zéros d'une fonction peuvent empêcher la convergence des approximants de Padé. En effet, prenons comme exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{10 + x} \quad (3.50)$$

Cette fonction correspond à la fonction réciproque de l'exemple précédent. Elle converge pour  $|x| < 10$ . Aussi, nous remarquons que

$$[1/K]_f(0.1) = 0 \quad (3.51)$$

alors que pour  $x = 0.1$ , nous avons  $f(0.1) \neq 0$ . Ainsi, la série définie par les approximants de Padé ne peut pas converger vers  $f$  pour  $|x| < 10$ , alors que la fonction  $f$  converge.

C'est deux exemples illustrent les problèmes portant sur la convergence des approximants de Padé.

Aussi, les théorèmes portant sur la notion de convergence des approximants de Padé sont peu nombreux. Le principal théorème est du à Montessus de Ballore (1902):

### **Théorème 3.5.1. (de Montessus, 1902)**

Soit une fonction  $f(x)$  méromorphe dans le disque  $|x| \leq R$ , avec  $n$  pôles  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  tels que

$$0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3| < \dots < |\alpha_n| < R$$

Soit chaque pôles  $\alpha_k$  de multiplicité  $\beta_k$  et la somme des multiplicités vérifiant

$$\sum_{k=1}^n \beta_k = M$$

Alors  $f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} [L/M]$  converge uniformément dans l'ensemble  $D = R - \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

### **3.5.3 Approximants à deux variables**

Nous allons maintenant nous intéresser aux approximants à deux variables (Hugues Jones et Makinson [68]) qui nous serviront pour notre étude.

Nous supposons que la série en puissances croissante  $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} c_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$  représente une fonction  $f(x, y)$

tel que

$$f(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} c_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} = \sum_{(\alpha, \beta) \in S} c_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} \quad (3.54)$$

où

$$S = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^+\} \quad (3.55)$$

Nous définissons les polynômes

$$A(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta) \in S_m} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (3.56)$$

et

$$B(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta) \in S_n} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (3.57)$$

tels que

$$f(x, y) = \frac{A(x, y)}{B(x, y)} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} d_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (3.58)$$

avec les coefficients  $d_{\alpha\beta}$  autant que possibles égaux à zéro et les espaces  $S_m$  et  $S_n$  définis de la manière suivant:

$$S_m = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha \leq m_1, 0 \leq \beta \leq m_2\} \quad (3.59)$$

$$S_n = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha \leq n_1, 0 \leq \beta \leq n_2\} \quad (3.60)$$

Alors,  $\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$  défini l'approximant à deux variables de  $f$  et s'écrit sous la forme:

$$[m/n]_f(x, y) = \frac{\sum_{(\alpha, \beta) \in S_m} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta}{\sum_{(\alpha, \beta) \in S_n} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta} = [m_1, m_2/n_1, n_2]_f(x, y) = \frac{\sum_{\alpha=0}^{m_1} \sum_{\beta=0}^{m_2} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta}{\sum_{\alpha=0}^{n_1} \sum_{\beta=0}^{n_2} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta} \quad (3.61)$$

Nous prenons par définition  $b_{00} = 0$ . Nous avons alors  $(m_1 + 1)(m_2 + 1) + n_1(n_2 + 1)$  coefficients à déterminer pour obtenir l'expression de l'approximant à deux variables défini en (3.61).

Afin de mieux comprendre la détermination des coefficients et les termes  $x^\alpha y^\beta$  concernés pour chacun des coefficients de l'approximant, un diagramme des régions  $(\alpha, \beta)$  est introduit, avec des sous-espaces que nous allons définir maintenant. Ce diagramme permet de visualiser les couples  $(\alpha, \beta)$  définissant les entiers des puissances de la série (3.54) pour la détermination des coefficients de l'approximant à deux variables.

Nous définissons les entiers

$$m'_i = \min(m_i, n_i) \quad (3.62)$$

$$n'_i = \max(m_i, n_i) \quad (3.63)$$

$$p_m = \min(m_1, m_2, n_1, n_2) \quad (3.64)$$

Nous définissons les couples

$$P = \{(p, p) \mid 0 \leq p \leq p_m\} \quad (3.65)$$

$$R_{1;p} = \{(p, p)\} \cup \{(\alpha, p) \mid p < \alpha \leq \min(m_1, n_1)\} \cup \{(p, \beta) \mid p < \beta \leq \min(m_2, n_2)\} \quad (3.66)$$

$$R_{2;p} = \{(\alpha, p) \mid \min(m_1, n_1) < \alpha \leq \max(m_1, n_1)\} \cup \{(p, \beta) \mid \min(m_2, n_2) < \beta \leq \max(m_2, n_2)\} \quad (3.67)$$

$$R_{3;p} = \{(\alpha, p) \mid \max(m_1, n_1) < \alpha \leq m_1 + n_1 - p\} \cup \{(p, \beta) \mid \max(m_2, n_2) < \beta \leq m_2 + n_2 - p\} \quad (3.68)$$

$$R_{4;p} = \{(m_1 + n_1 - p + 1, p), (p, m_2 + n_2 - p + 1)\} \quad (3.69)$$

Nous définissons les sous-espaces

$$S_1 = S_m \cap S_n \quad (3.70)$$

$$S_2 = S_m \cup S_n \setminus S_1 \quad (3.71)$$

$$S_3 = \bigcup_{p \in P} R_{3;p} \quad (3.72)$$

$$S_4 = \bigcup_{p \in P} R_{4;p} \quad (3.73)$$

$$S_5 = S_2 \setminus \left( \bigcup_{p \in P} R_{2;p} \right) \quad (3.74)$$

En reprenant les expressions définies en (3.61)-(3.58) et (3.54), nous pouvons écrire

$$\left( \sum_{(\alpha, \beta) \in S_n} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \right) \cdot \left( \sum_{(\alpha, \beta) \in S} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \right) - \sum_{(\alpha, \beta) \in S_m} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \sum_{(\alpha, \beta) \in S} d_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (3.75)$$

avec

$$d_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta) \in R_{1;p} \cup R_{2;p} \cup R_{3;p} \quad (3.76)$$

et

$$\sum_{p \neq 0} d_{m_1+n_1-p+1, p} + d_{p, m_2+n_2-p+1} = 0 \quad (3.77)$$

Soit, en écrivant les termes algébriques propres à chaque puissance croissante de l'expression (3.75), et en considérant que l'équation (3.75) doit être vérifiée pour tout couple  $(\alpha, \beta)$ , nous obtenons les équations devant être vérifiées par  $a_{\alpha\beta}$ ,  $b_{\alpha\beta}$  et  $c_{\alpha\beta}$ :

$$\sum_{\psi \in S_n} b_\psi c_{\rho-\psi} = a_\rho \quad \rho \in S_m \quad (3.78)$$

$$\sum_{\psi \in S_n} b_\psi c_{\rho-\psi} = 0 \quad \psi \in (S_n \setminus S_m) \cup S_3 \quad (3.79)$$

$$\sum_{\psi \in R_{4;p}} \sum_{\rho \in S_n} b_\psi c_{\rho-\psi} = 0 \quad p \in P \quad (3.80)$$

Les coefficients  $c_{\alpha\beta}$  étant connus et définis en (3.54), les relations (3.79) et (3.80) permettent de déterminer les coefficients  $b_{\alpha\beta}$ . Ensuite, les équations (3.78) permettent de calculer les coefficients  $a_{\alpha\beta}$  avec les valeurs des coefficients  $b_{\alpha\beta}$  précédemment obtenues.

Pour plus de clarté dans la définition des régions  $(\alpha, \beta)$  des termes  $x^\alpha y^\beta$  de l'équation (3.54) permettant d'obtenir la détermination des  $(m_1 + 1)(m_2 + 1) + n_1(n_2 + 1)$  coefficients de l'approximant à deux variables, nous pouvons illustrer les régions concernées par l'intermédiaire d'un graphique. Nous pouvons alors distinguer trois grands types de construction d'approximants à deux variables, qui illustrent en fait des modèles d'approximants de plus en plus généraux. Nous avons:

- les Chisholm approximants (CA) pour lesquels  $m_1 = m_2 = n_1 = n_2$  (voir figure 3.1)
- les "simple-off-diagonal approximants" ou "symmetric-of-diagonal approximants" (SOD) pour lesquels les puissances maximales du numérateur sont égales ( $m_1 = m_2$ ) et les puissances maximales du dénominateur sont égales ( $n_1 = n_2$ ) (voir figure 3.2)
- les approximants sous leur forme la plus générale, avec  $m_1, m_2, n_1$  et  $n_2$  pouvant être distincts (voir figure 3.3).

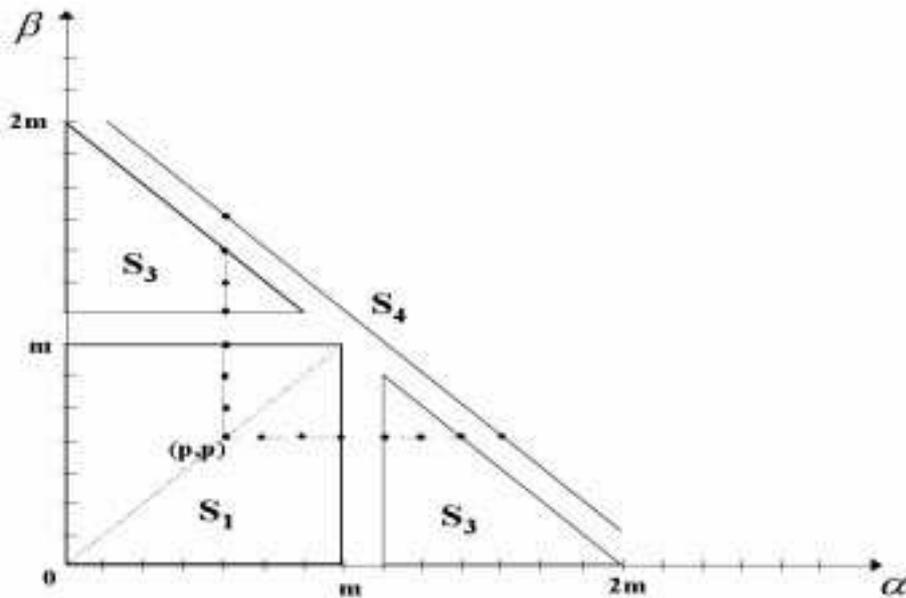


FIG. 3.1: Régions considérées pour les approximants CA à deux variables

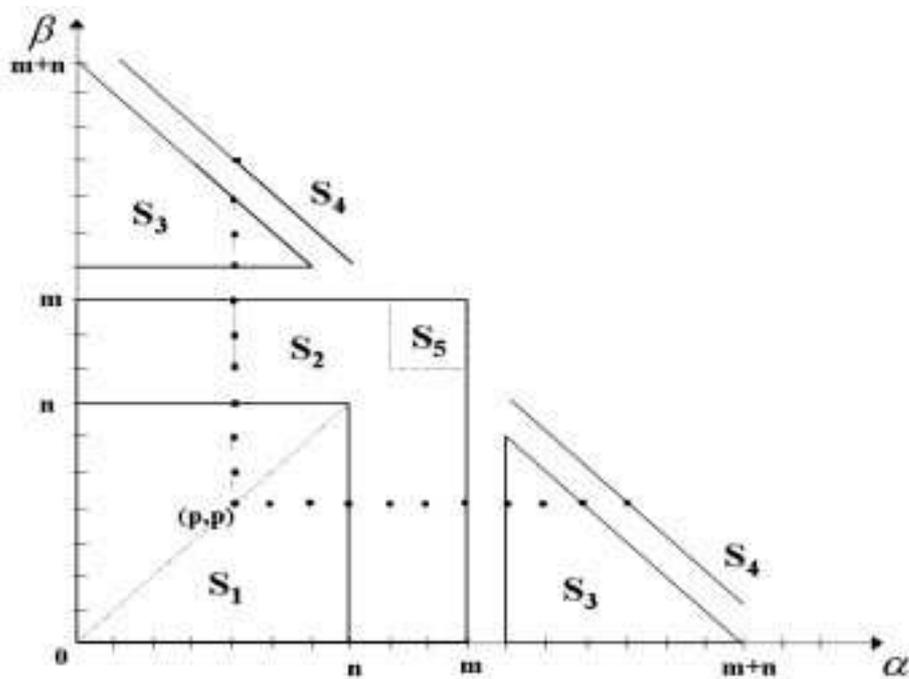


FIG. 3.2: Régions considérées pour les approximations SOD à deux variables

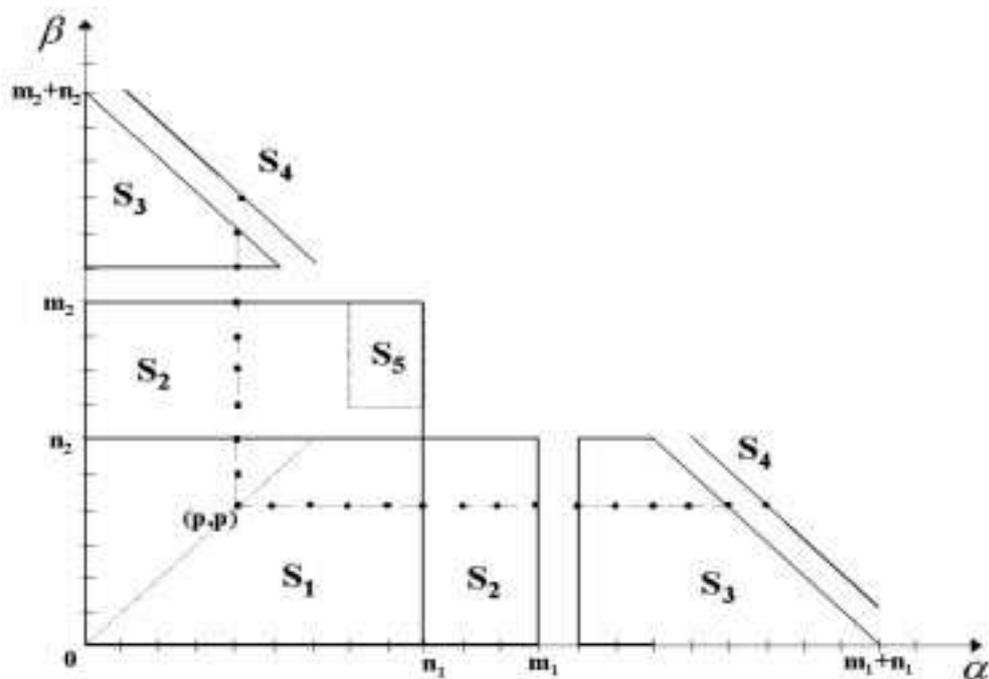


FIG. 3.3: Régions considérées pour les approximations GOD à deux variables

Nous remarquons donc que la définition des régions des couples  $(x^\alpha y^\beta)$  pour lesquels les  $(m_1 + 1)(m_2 + 1) + n_1(n_2 + 1)$  coefficients  $a_{\alpha\beta}$  et  $b_{\alpha\beta}$  sont déterminés, est clairement identifié. Nous remarquons que les GOD approximants correspond à la forme la plus générale des approximants. Les SOD approximants correspondent à un cas particulier ( $m_1 = m_2$  et  $n_1 = n_2$ ) des GOD approximants et les CA approximants sont eux un cas particulier des SOD et GOD approximants ( $m_1 = n_1 = m_2 = n_2$ ).

Aussi, nous retrouvons bien les approximants de Padé (approximants à une seule variable) défini par  $[m_1/n_1]$  et  $[m_2/n_2]$  pour les séries

$$g(x) = f(x, 0) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{\alpha 0} x^\alpha \quad (3.81)$$

$$g(y) = f(0, y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{0\beta} y^\beta \quad (3.82)$$

soit

$$[m_1/n_1]_g(x) = [m_1, m_2/n_1, n_2]_f(x, 0) \quad (3.83)$$

$$[m_2/n_2]_g(y) = [m_1, m_2/n_1, n_2]_f(0, y) \quad (3.84)$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux SOD approximants à deux variables dans la suite de notre étude. Nous développerons alors une des méthodes de détermination des coefficients des SOD approximants s'appuyant sur l'analyse effectuée précédemment.

### 3.5.4 Généralisation des approximants

D'après ce qui précède, il n'apparaît pas de difficulté majeure pour généraliser au cas des approximants rationnels à  $N$  variables. Notre propos dans ce paragraphe est de donner quelques notions rapides sur la généralisation des approximants rationnels. Pour plus de détail, le lecteur pourra se référer à Baker [5] et à l'étude de Hughes Jones [67] sur les approximants rationnels à trois variables. Considérons la fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  à  $N$  variables définie comme une série en puissances croissantes de la manière suivante

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_N=0}^{\infty} c_{\alpha_1 \dots \alpha_N} x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} \quad (3.85)$$

avec

$$x = (x_1, \dots, x_N) \quad (3.86)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad (3.87)$$

$$x^\alpha \equiv x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N} \quad (3.88)$$

$$I_N = \{1, \dots, N\} \quad (3.89)$$

$$S = \{\alpha \mid \alpha_i \in \mathbb{N}^+, \quad i \in I_N\} \quad (3.90)$$

La série définie en (3.85) à  $N$  variables peut alors s'écrire sous forme condensée

$$f(x) = \sum_{\alpha \in S} c_\alpha x^\alpha \quad (3.91)$$

Les approximants rationnels à  $N$  variables sont de la forme

$$f_{m/n}(x) = \frac{\sum_{\mu \in S_m} a_\mu x^\mu}{\sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma x^\sigma} \quad (3.92)$$

avec

$$S_m = \{\alpha \mid 0 \leq \alpha_i \leq m_i, \quad i \in I_N\} \quad (3.93)$$

et

$$S_n = \{\alpha \mid 0 \leq \alpha_i \leq n_i, \quad i \in I_N\} \quad (3.94)$$

Pour obtenir les approximants rationnels à  $N$  variables, il faut donc déterminer  $\prod_{i \in I_N} (m_i + 1) + \prod_{i \in I_N} (n_i + 1) - 1$  coefficients en supposant de plus  $b_{0, \dots, 0} = 1$ .

En reprenant la forme de l'approximant (3.92) et de la série (3.85), et en multipliant par le dénominateur de l'approximant, nous obtenons l'expression

$$\sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma x^\sigma \sum_{\alpha \in S} c_\alpha x^\alpha - \sum_{\mu \in S_m} a_\mu x^\mu = \sum_{\beta \in S} d_\beta x^\beta \quad (3.95)$$

avec

$$d_\beta = 0 \quad \beta \in S_m \cup S_n \quad (3.96)$$

$$d_\beta = 0 \quad \beta \in S_3 \quad (3.97)$$

$$\sum_{\beta \in R_{4;p}} d_\beta = 0 \quad p \in P \quad (3.98)$$

avec

$$R_{4;p} = \bigcup_{i \in I_p} \{\alpha \mid \alpha = \min(m_i, n_i) + \max(m_i, n_i) - p + 1; \alpha_j = p_j, j \neq i\} \quad (3.99)$$

$$P = \{p \mid p \in S_m \cap S_n; I_p = \{j \mid p_j = \max_i \in I_N p_i\} \text{ contient au moins 2 éléments}\} \quad (3.100)$$

Les vecteurs coefficients  $b_\sigma$  et  $a_\mu$  vérifient alors la relation, par écriture des termes de puissances croissantes devant être nuls

$$\sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma c_{\mu-\sigma} = a_\mu \quad \mu \in S_m \quad (3.101)$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} b_\sigma c_{\mu-\sigma} = 0 \quad \mu \in (S_n \setminus S_m) \cup S_3 \quad (3.102)$$

$$\sum_{\mu \in R_{4;p}} \sum_{\mu \in S_n} b_\sigma c_{\mu-\sigma} = 0 \quad p \in P \quad (3.103)$$

avec

$$S_3 = \bigcup_{p \in P} \{ \cup_{i \in I_p} \{ \alpha \mid \max(m_i, n_i) < \alpha_i \leq \max(m_i, n_i) + \min(m_i, n_i) - p; \alpha_j = p_j, j \neq i \} \} \quad (3.104)$$

La détermination de la valeur des vecteurs  $b_\sigma$  s'effectue donc à partir des équations définies en (3.102) et (3.103) avec les vecteurs  $c_{\mu-\sigma}$  correspond aux coefficients des vecteurs-termes  $x$ . Il est alors possible de trouver la valeur des vecteurs  $a_\mu$  par résolution des équations (3.101) avec les vecteurs  $b_\sigma$  déterminés juste avant.

La procédure de détermination des coefficients des approximants rationnels à  $N$  variables suit donc la même démarche que pour les approximants à deux variables. De même que pour les approximants à deux variables, il est possible de définir les régions indiquant les vecteurs coefficients  $\alpha$  de (3.85) retenus pour trouver les vecteurs coefficients  $a_\mu$  et  $b_\sigma$  des approximants.

### 3.6 Méthode de la linéarisation équivalente

Le concept de la linéarisation équivalente a été introduit par Bogoliubov [16] et Krylov [87] pour un système comportant un degré de liberté. Il a ensuite été généralisé au cas d'un système non-linéaire à degré de liberté comportant une excitation aléatoire par Caughey [27]. Plus tard, cette idée a été élargie au cas de systèmes comportant plusieurs degrés de liberté et à des systèmes non-linéaires autonomes (Iwan [78]-[79]-[80], Spanos et Iwan [159]). Nous examinerons plus particulièrement le cas des non-linéarités symétriques et non-symétriques.

Cette méthode de linéarisation équivalente est couramment utilisée lors de la recherche des modes et fréquences non-linéaires d'un système (Iwan et Yang [82], Iwan et Krousgrill[81], Spanos et Iwan [160], Setio et Jézéquel [153], Bhattacharyya et Dutt [9] et Miller et Fatemi [110]).

Le principe de la méthode de la linéarisation équivalente est de remplacer le système dynamique non-linéaire par un système linéaire de telle sorte que la moyenne de la différence entre les deux systèmes soit minimum.

#### 3.6.1 Cas des non-linéarités symétriques

Considérons le système dynamique non-linéaire:

$$M.\ddot{x} + C.\dot{x} + K.x + F^{NL}(x, \dot{x}) = R(e^{i\omega t}) G \quad (3.105)$$

où  $F^{NL}(x, \dot{x})$  représente les forces non-linéaires du système.  $M$ ,  $C$  et  $K$  sont des matrices constantes et  $G$  un vecteur réel constant.  $R$  définit la partie réelle du nombre complexe.

Nous considérons que la fonction non-linéaire  $F^{NL}(x, \dot{x})$  est symétrique par rapport à l'origine. Cette fonction vérifie

$$F^{NL}(x, \dot{x}) = -F^{NL}(-x, -\dot{x}) \quad (3.106)$$

De plus, la solution  $x(t)$  de l'équation (3.105) peut se mettre sous la forme

$$x(t) = R(Xe^{i\omega t}) \quad (3.107)$$

où  $X$  est un vecteur constant complexe.

En substituant l'expression (3.107) dans l'expression (3.105) sur la période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , nous obtenons

$$(-\omega^2 M + K) \int_0^T R(Xe^{i\omega t}) dt + \omega C \int_0^T R(iXe^{i\omega t}) dt + \int_0^T F^{NL}(x, \dot{x}) dt = 0 \quad (3.108)$$

Comme

$$\int_0^T R(Xe^{i\omega t}) dt = \int_0^T R(iXe^{i\omega t}) dt = 0 \quad (3.109)$$

nous obtenons, à partir de l'équation (3.108)

$$\int_0^T F^{NL}(x, \dot{x}) dt = 0 \quad (3.110)$$

A partir de l'hypothèse de la symétrie non-linéaire de  $F^{NL}(x, \dot{x})$ , il peut être montré que l'équation

(3.110) est satisfaite pour tout vecteur complexe  $X$  (Spanos [159]).

Le système linéaire équivalent du système (3.105) peut se mettre sous la forme (Iwan et Spanos [159] et Iwan [80])

$$M.\ddot{x} + C.\dot{x} + K.x + C^{eq}.\dot{x} + K^{eq}.x = 0 \quad (3.111)$$

où  $C^{eq}$  et  $K^{eq}$  représentent la matrice d'amortissement et la matrice de raideur équivalente. Ces matrices d'amortissement et de raideur sont obtenues en minimisant la moyenne de la différence  $\varepsilon$  entre le système linéarisé équivalent (3.111) et le système non-linéaire (3.105) pour toutes les valeurs de  $x(t)$ .

La différence  $\varepsilon$  est défini comme suit:

$$\varepsilon = F^{NL}(x, \dot{x}) - C^{eq}.\dot{x} - K^{eq}.x \quad (3.112)$$

Les valeurs  $C^{eq}$  et  $K^{eq}$  sont obtenues en minimisant le critère quadratique suivant:

$$\tau(C^{eq}, K^{eq}) = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^t \varepsilon dt = \text{minimum} \quad \forall x(t) \quad (3.113)$$

avec  $T = 2\pi/\omega$  et  $\varepsilon^t$  définissant la transposé de  $\varepsilon$ .

Les conditions nécessaires pour obtenir le minimum de  $\tau$  sont données par:

$$\frac{\partial \tau}{\partial c_{ij}^{eq}} = 0 \quad (3.114)$$

et

$$\frac{\partial \tau}{\partial k_{ij}^{eq}} = 0 \quad (3.115)$$

pour  $i, j = 1, \dots, n$ , avec  $c_{ij}^{eq}$  et  $k_{ij}^{eq}$  les termes des matrices équivalentes  $C^{eq}$  et  $K^{eq}$ .

Si nous supposons de plus que la fonction  $F^{NL}$  vérifie les conditions suivantes (qui s'assimilent à un cas particulier des systèmes masses-ressorts):

$$F_i^{NL}(x, \dot{x}) = \sum_{j=1, i \neq j}^n f_{ij}(y_{ij}, \dot{y}_{ij}) \quad (3.116)$$

$$f_{ij}(y_{ij}, \dot{y}_{ij}) = -f_{ij}(-y_{ij}, -\dot{y}_{ij}) \quad (3.117)$$

$$F_i^{NL}(0, 0) = f_{ij}(0, 0) = 0 \quad (3.118)$$

avec

$$y_{ij} = x_i - x_j \quad (3.119)$$

L'équation (3.116) représente alors le système par interconnection des éléments non-linéaires  $f_{ij}$  dont le comportement ne dépend que des coordonnées relatives entre ces points.

Ainsi, pour un système comportant une non-linéarité définie par l'équation (3.116), le système équivalent est construit en remplaçant chaque composante  $f_{ij}$  par une combinaison linéaire de telle sorte que

$$f_{ij}(y_{ij}, \dot{y}_{ij}) \rightarrow \eta_{ij} \cdot \dot{y}_{ij} + \phi_{ij} \cdot y_{ij} \quad (3.120)$$

où

$$\int_0^T f_{ij} \cos \omega t dt = \eta_{ij} \int_0^T \dot{y}_{ij} \cos \omega t dt + \phi_{ij} \int_0^T y_{ij} \cos \omega t dt \quad (3.121)$$

et

$$\int_0^T f_{ij} \sin \omega t dt = \eta_{ij} \int_0^T \dot{y}_{ij} \sin \omega t dt + \phi_{ij} \int_0^T y_{ij} \sin \omega t dt \quad (3.122)$$

En multipliant alors l'équation (3.121) par la partie réelle de  $(X_i - X_j)$  et l'équation (3.122) par la partie imaginaire de  $(X_i - X_j)$ ,  $X$  étant le vecteur complexe défini en (3.107), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T f_{ij} (R(X_i - X_j) \cos \omega t - I(X_i - X_j) \sin \omega t) dt &= \eta_{ij} \int_0^T \dot{y}_{ij} (R(X_i - X_j) \cos \omega t \\ &- I(X_i - X_j) \sin \omega t) dt + \phi_{ij} \int_0^T y_{ij} (R(X_i - X_j) \cos \omega t - (X_i - X_j) \sin \omega t) dt \end{aligned} \quad (3.123)$$

avec  $R(X_i)$  et  $I(X_i)$  définissant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du scalaire complexe  $X_i$ .

Comme

$$(\cos \omega t) R(X_i - X_j) - (\sin \omega t) Im(X_i - X_j) = y_{ij} \quad (3.124)$$

L'équation (3.123) peut se mettre sous la forme

$$\int_0^T f_{ij} y_{ij} dt = \eta_{ij} \int_0^T \dot{y}_{ij} y_{ij} dt + \phi_{ij} \int_0^T y_{ij}^2 dt \quad (3.125)$$

De plus, on a

$$\int_0^T \dot{y}_{ij} y_{ij} dt = 0 \quad (3.126)$$

L'équation (3.125) permet d'obtenir les coefficients  $\eta_{ij}$

$$\eta_{ij} = \frac{\int_0^T \dot{y}_{ij} \cdot f_{ij}(y_{ij}, \dot{y}_{ij}) dt}{\int_0^T y_{ij}^2 dt} \quad (3.127)$$

Par analogie, les coefficients  $\phi_{ij}$  ont la forme

$$\phi_{ij} = \frac{\int_0^T y_{ij} \cdot f_{ij}(y_{ij}, \dot{y}_{ij}) dt}{\int_0^T y_{ij}^2 dt} \quad (3.128)$$

Ainsi, en substituant les expressions obtenues pour  $C^{eq}$  et  $K^{eq}$  dans l'équation linéarisée équivalente (3.111), nous obtenons l'expression globale du système linéarisé équivalent.

### 3.6.2 Cas des non-linéarités non symétriques

Dans le cas d'une fonction non-linéaire  $F^{NL}$  non-symétrique, il peut être alors considéré que la réponse du système (3.105) est de la forme

$$x(t) = x_0 + z(t) = x_0 + R(Ze^{i\omega t}) \quad (3.129)$$

où  $x_0(t)$  est un vecteur constant réel et  $Z$  est un vecteur constant complexe. A partir de l'expression (3.129) et (3.105), nous obtenons

$$K.x_0 + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T F^{NL}(x, \dot{x}) = 0 \quad (3.130)$$

par l'intermédiaire de la transformation (3.129), l'équation (3.105) se met sous la forme

$$M.\ddot{z} + C.\dot{z} + K.x_0 + F^{NL}(x_0 + z, \dot{z}) = R(e^{i\omega t})G \quad (3.131)$$

Soit

$$M.\ddot{z} + C.\dot{z} + f^{NL}(z, \dot{z}) = R(e^{i\omega t})G \quad (3.132)$$

avec

$$f^{NL}(z, \dot{z}) = K.x_0 + F^{NL}(x_0 + z, \dot{z}) \quad (3.133)$$

Il est alors possible d'appliquer la méthode de la linéarisation équivalente sur le système (3.132) (Iwan et Spanos [159] et Iwan [80]).

Pour un système masses-ressorts comportant des non-linéarités non-symétriques vérifiant (3.116), nous définissons la quantité

$$\psi_{ij} = z_i - z_j \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.134)$$

De même que précédemment, le système équivalent est construit en remplaçant chaque composante  $f_{ij}$  par une combinaison linéaire de telle sorte que

$$f_{ij}(\phi_{ij}, \dot{\phi}_{ij}) \rightarrow \eta_{ij} \cdot \dot{\psi}_{ij} + \phi_{ij} \cdot \psi_{ij} \quad (3.135)$$

où

$$\int_0^T f_{ij} \cos \omega t dt = \eta_{ij} \int_0^T \dot{\psi}_{ij} \cos \omega t dt + \phi_{ij} \int_0^T \psi_{ij} \cos \omega t dt \quad (3.136)$$

et

$$\int_0^T f_{ij} \sin \omega t dt = \eta_{ij} \int_0^T \dot{\psi}_{ij} \sin \omega t dt + \phi_{ij} \int_0^T \psi_{ij} \sin \omega t dt \quad (3.137)$$

Par analogie avec ce qui précède, les coefficients  $\eta_{ij}$  se mettent sous la forme

$$\eta_{ij} = \frac{\int_0^T \dot{\psi}_{ij} \cdot f_{ij}(x_{0,i} - x_{0,j} + \psi_{ij}, \dot{\psi}_{ij}) dt}{\int_0^T \dot{\psi}_{ij}^2 dt} \quad (3.138)$$

Et les coefficients  $\phi_{ij}$  ont la forme

$$\eta_{ij} = \frac{\int_0^T \psi_{ij} \cdot f_{ij}(x_{0,i} - x_{0,j} + \psi_{ij}, \dot{\psi}_{ij}) dt}{\int_0^T \psi_{ij}^2 dt} \quad (3.139)$$

## Chapitre 4

# Modèle fondamental non linéaire bidimensionnel de frottement

Dans ce chapitre, nous développerons les principales méthodes non-linéaires qui ont été présentées précédemment, sur un exemple simple avec peu de degrés de liberté, afin de mieux comprendre les avantages et inconvénients de ces différentes méthodes de réduction et de simplification d'un système dynamique non-linéaire. Le modèle que nous allons considérer est le modèle fondamental bidimensionnel non-linéaire caractérisant les bruits de freinage.

Notre démarche va consister à déterminer les zones d'instabilité et définir les cycles limites associés. Pour cela, nous présenterons tout d'abord le modèle analytique qui va être étudié, qui correspond à la modélisation du frein pour reproduire les vibrations de trépidation plus particulièrement. Ensuite, nous effectuerons une analyse de stabilité avec une étude des paramètres physiques influant sur la stabilité du système. Nous mettrons en place des méthodes non-linéaires (méthode de la variété centrale, des approximants fractionnels à deux variables et la méthode de balance harmonique AFT) pour déterminer les cycles limites du système dynamique non-linéaire et examiner l'influence des divers paramètres sur l'évolution des cycles limites. Nous verrons plus particulièrement la mise en place des approximants à deux variables après l'utilisation de la méthode de la réduction de la variété centrale et nous expliquerons les avantages de l'utilisation de ces approximants.

Enfin, dans une dernière partie, nous allons présenter une nouvelle approche non-linéaire. Cette approche consiste à s'intéresser aux modes non-linéaires du système et à chercher un système linéaire équivalent au système non-linéaire de départ. Les cycles limites sont alors déterminés par examen des valeurs propres du système linéaire équivalent. Nous montrerons que cette approche, beaucoup plus simple à mettre en place que des méthodes non-linéaires poussées telles que la méthode de la variété centrale ou des approximants de Padé, peut être un bon compromis pour trouver des cycles limites simplifiés.

Nous confronterons les résultats obtenus avec chacune des méthodes non-linéaires, aux résultats obtenus avec le système complet de départ.

## 4.1 Modèle analytique

Nous allons nous intéresser au cadre général des bruits de frein et à la modélisation associée. Boudot [19] propose un modèle simplifié linéaire pouvant s'adapter à l'ensemble des freins faisant intervenir le frottement sec. Ce modèle permet de mener des études de sensibilité sur les divers paramètres influant sur la stabilité des systèmes de freinage dans un contexte linéaire. L'application numérique proposée se base alors sur le phénomène de trépidation des poids-lourds équipés de freins à tambour ou de freins à disque: la vibration de trépidation est une vibration qui se manifeste à basse fréquence, entre 30 et 100Hz. D'un point de vue expérimental (Boudot [19]), les vibrations sont observées sur l'organe de commande et sur le train avant du véhicule. Ce modèle ne permet pas cependant de statuer sur les niveaux vibratoires et l'influence des divers facteurs physique sur ces derniers.

Dans l'étude qui va suivre, nous élargirons ce modèle en considérant un modèle non linéaire (figure 4.1), la provenance des non linéarités pouvant être dues aux matériaux, aux aspects géométriques, etc... Les mécanismes mis en jeu lors des bruits de freinage font intervenir les phénomènes de frottement sec entre les pièces en mouvement relatif. En considérant la figure 4.1, ce mouvement relatif peut être modélisé par l'intermédiaire d'un tapis roulant qui impose une vitesse de glissement que nous supposons constante du fait que la variation de vitesse d'un véhicule est très faible lors de l'apparition et mise en place d'une instabilité. Ce tapis roulant caractérise par exemple la zone de frottement du disque de frein.

L'un des points fondamentaux lors de la modélisation des bruits de freinage est le choix du comportement dynamique devant être pris en compte. En effet, suivant le bruit de freinage considéré, l'étendue de la modélisation ne sera pas la même. Pour les bruits de freinage à basses fréquences, le comportement de la structure, et donc de l'environnement du frein, est très important. Au niveau du frein, seul la phénoménologie du frottement est alors considérée. Si nous nous intéressons à des phénomènes à plus hautes fréquences, la modélisation se focalisera alors à la zone située autour du contact de frottement. Comme exemples simples, nous pouvons citer le crissement qui est un bruit de freinage à haute fréquence (1 – 10kHz) où la modélisation ne considère que l'étrier de frein et la plaquette (Moirot [115]). Par opposition, nous avons donc la vibration de trépidation (vibration à basse fréquence) qui va prendre en compte l'ensemble du train et des organes de commande.

Ainsi, la vibration de trépidation correspond donc à une vibration auto-entretenu complexe qui résulte du couplage entre le mode de torsion de l'axe avant et le mode normal du système de contrôle. Le comportement dynamique du système de freinage est donc représenté par deux modes de la structure,  $(k_1, m_1)$  et  $(k_2, m_2)$ , comme défini en figure 4.1. Dans notre cas,  $k_2$  et  $m_2$  définissent le mode de torsion de l'axe avant qui est excité par les forces tangentielles du disque de frein. Les forces normales proviennent du système de contrôle dont le comportement dynamique est décrit par le mode  $(k_1, m_1)$ . Ainsi, ces deux modes ne peuvent se coupler quand présence de forces de frottement, ce qui induit donc une vibration de frottement sec.

Le modèle analytique découlant des observations précédentes est présenté en figure 4.1. Nous effectuons donc les hypothèses suivantes:

- le coefficient de frottement  $\mu$  est supposé constant tout au long du freinage.
- durant la rotation des parties tournantes du frein, nous n'avons pas de changement de direction de forces de friction au niveau des interfaces de contact.
- les parties tournantes tournent à une vitesse de rotation  $V$ .

- les parties tournantes et la surface de la garniture frottante restent toujours en contact durant le freinage.

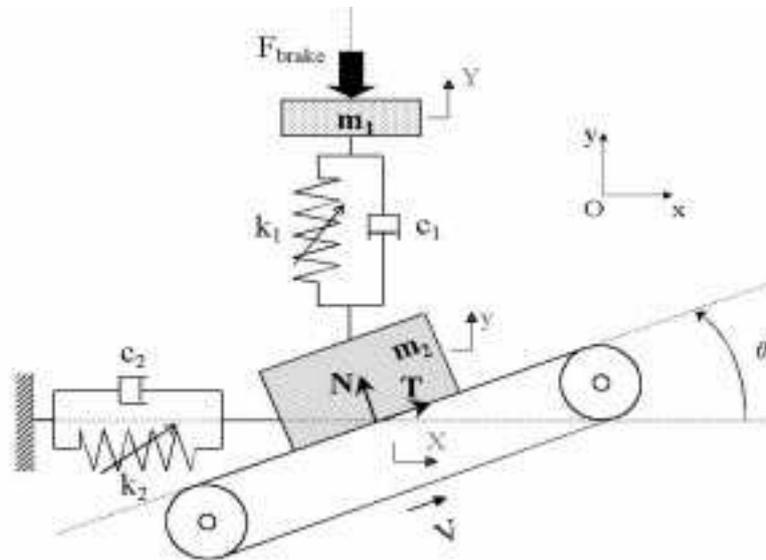


FIG. 4.1: *Modèle analytique de système de freinage*

Afin de simuler le freinage et de considérer la possibilité d'arc-boutement de la structure, dû à l'application de force statique par exemple, nous considérons la possibilité d'avoir un angle  $\theta$  entre les parties roulantes et l'axe horizontal comme indiqué en figure 4.1.

Le système dynamique est donc modélisé par un système à trois degrés de liberté: le déplacement transversal  $X(t)$  et normal  $y(t)$  de la masse  $m_2$  suivant les directions  $x$  et  $y$  et le déplacement transversal  $Y(t)$  suivant la direction  $y$  de la masse  $m_1$ .

Nous considérons de plus la possibilité d'avoir une participation non-linéaire. Cette contribution provient de la non-linéarité du système de commande et de la raideur non-linéaire du train avant. Nous exprimons cette non-linéarité sous la forme d'un polynôme quadratique et cubique. Nous avons alors ces non-linéarités qui peuvent s'exprimer de la manière suivante:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{11} + k_{12} \cdot (Y - y) + k_{13} \cdot (Y - y)^2 \\ k_2 &= k_{21} + k_{22} \cdot X + k_{23} \cdot X^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ces non-linéarités nous permettront de regarder l'influence des effets non-linéaires sur le comportement de la structure et de voir l'importance de ces dernières lors de la prédiction des zones de stabilité et des niveaux vibratoires associés.

Dans cette étude, en supposant que la force tangentielle est générée par le coefficient de frottement  $\mu$ , suivant la loi de Coulomb:

$$T = \mu \cdot N \quad (4.2)$$

nous obtenons finalement l'expression analytique du comportement dynamique du système sous la

forme

$$\begin{cases} m_1 \ddot{Y} + c_1 (\dot{Y} - \dot{y}) + k_{11} (Y - y) + k_{12} (Y - y)^2 + k_{13} (Y - y)^3 = -F_{brake} \\ m_2 \ddot{X} + c_2 \dot{X} + k_{21} X + k_{22} X^2 + k_{23} X^3 = -N \sin \theta + T \cos \theta \\ m_2 \ddot{y} + c_1 (\dot{y} - \dot{Y}) + k_{11} (y - Y) + k_{12} (y - Y)^2 + k_{13} (y - Y)^3 = N \cos \theta + T \sin \theta \end{cases} \quad (4.3)$$

En utilisant les transformations  $y = X \tan \theta$  et  $\mathbf{x} = \{X \ Y\}^T$ , et la loi de Coulomb  $T = \mu.N$ , nous pouvons ramener le système dynamique (4.3) à un système dynamique non-linéaire à deux degrés de liberté, qui peut s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}.\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}.\mathbf{x} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

où  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{x}$  définissent les vecteurs d'accélération, de la vitesse et du déplacement des deux degrés de liberté du système.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  définissent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système.  $\mathbf{F}$  correspond au vecteur force dû à la commande de freinage et  $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{x})$  contient les termes non-linéaires provenant des caractéristiques non-linéaires des termes de raideur définis en (4.1).

Nous avons donc

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_2 (\tan^2 \theta + 1) & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 (\tan^2 \theta - \mu \tan \theta) + c_2 (1 + \mu \tan \theta) & c_1 (-\tan \theta + \mu) \\ -c_1 \tan \theta & c_1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{21} (1 + \mu \tan \theta) + k_{11} (\tan^2 \theta - \mu \tan \theta) & k_{11} (-\tan \theta + \mu) \\ -k_{11} \tan \theta & k_{11} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{F}_{NL} = \begin{cases} (-\tan \theta + \mu) \left( k_{12} (X \tan \theta - Y)^2 + k_{13} (X \tan \theta - Y)^3 \right) \\ + k_{22} (1 + \mu \tan \theta) X^2 + k_{23} (1 + \mu \tan \theta) X^3 \\ -k_{12} (Y - X \tan \theta)^2 - k_{13} (Y - X \tan \theta)^3 \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{F} = \begin{cases} 0 \\ -F_{brake} \end{cases} \quad (4.9)$$

Les valeurs numériques des paramètres sont disponibles en Annexe A.

La forme générale des équations dynamiques non-linéaires du système peuvent donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}.\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}.\mathbf{x} = \mathbf{F} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{f}_{(2)}^{ij} .x_i .x_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{f}_{(3)}^{ijk} .x_i .x_j .x_k \quad (4.10)$$

où  $\mathbf{f}_{(2)}^{ij}$  et  $\mathbf{f}_{(3)}^{ijk}$  définissent les coefficients des termes non-linéaires quadratiques et cubiques.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont des matrices  $2 \times 2$  et  $\mathbf{F}$  un vecteur de dimension 2.

Ce système non-linéaire (4.10) va nous servir d'équation dynamique non-linéaire de départ pour effectuer l'analyse non-linéaire de stabilité. Celle-ci se décompose en deux grandes parties.

La première étape correspond au problème statico-dynamique: nous recherchons le point d'équilibre du système dynamique non-linéaire. Les conditions de stabilité du système sont alors étudiées à partir de la détermination des valeurs propres sur le système linéarisé autour de la position d'équilibre en effectuant de faibles perturbations.

Dans un second temps, nous recherchons à déterminer les cycles limites du système au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Les cycles limites peuvent être déterminés de manière classique par intégration temporelle sur le système dynamique de départ. Cette procédure nécessite cependant un temps de calcul prohibitif. Ainsi, il est utile de mettre en place des méthodes non-linéaires qui permettent de simplifier et réduire le système non-linéaire de départ et donc de gagner en temps de calcul. Cette démarche permet alors d'effectuer des études de conception et de recherche des paramètres physiques influant sur la stabilité et le niveau vibratoire des structures étudiées.

## 4.2 Analyse de stabilité

Le premier point consiste donc à déterminer le point d'équilibre statique du système défini en (4.4). Ce point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  vérifie l'équation statique non-linéaire du système dynamique non-linéaire défini comme suit:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{x}_0) \quad (4.11)$$

Une fois le point d'équilibre déterminé, la stabilité du système est étudiée sur le système linéarisé pour de faibles perturbations  $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{X} \quad \bar{Y}\}^T$  au niveau du point d'équilibre  $\mathbf{x}_0 = \{X_0 \quad Y_0\}^T$  tel que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \bar{\mathbf{x}} \quad (4.12)$$

En substituant l'équation (4.12) dans l'expression non-linéaire et en négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 2, nous obtenons l'expression linéarisée suivante:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{K} \cdot (\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_0) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}_{\text{L}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.13)$$

avec

$$\mathbf{F}_{\text{L}}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_{\text{NL}}^X}{\partial X} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial F_{\text{NL}}^X}{\partial Y} \right|_{\mathbf{x}_0} \\ \left. \frac{\partial F_{\text{NL}}^Y}{\partial X} \right|_{\mathbf{x}_0} & \left. \frac{\partial F_{\text{NL}}^Y}{\partial Y} \right|_{\mathbf{x}_0} \end{bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{x}} \quad (4.14)$$

Les termes compris dans l'expression du vecteur  $\mathbf{F}_{\text{L}}(\bar{\mathbf{x}})$  sont déterminés au point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  pour de faibles perturbations  $\bar{\mathbf{x}}$  et se décomposent de la manière suivante

$$\mathbf{F}_{\text{L}}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{Bmatrix} F_L^X(\bar{\mathbf{x}}) \\ F_L^Y(\bar{\mathbf{x}}) \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Les expressions analytiques des termes  $F_L^X(\bar{\mathbf{x}})$  et  $F_L^Y(\bar{\mathbf{x}})$  étant obtenues par linéarisation de l'équation

dynamique non-linéaire au point de fonctionnement pour de faibles perturbations, nous avons leurs expressions

$$F_L^X(\bar{\mathbf{x}}) = (-\tan \theta + \mu) [2k_{12} (\tan^2 \theta \cdot X_0 \cdot \bar{X} + Y_0 \cdot \bar{Y} - \tan \theta \cdot Y_0 \cdot \bar{Y}) + 3k_{13} (\tan^3 \theta \cdot X_0^2 \cdot \bar{X} + 2 \tan^2 \theta \cdot X_0 \cdot Y_0 \cdot \bar{Y} + \tan \theta \cdot Y_0^2 \cdot \bar{X} + 2 \tan \theta \cdot X_0 \cdot Y_0 \cdot \bar{Y} - Y_0^2 \cdot \bar{Y})] + (1 + \mu \tan \theta) [2k_{22} \cdot X_0 \cdot \bar{X} + 3k_{23} \cdot X_0^2 \cdot \bar{X}] \quad (4.16)$$

$$F_L^Y(\bar{\mathbf{x}}) = -2k_{12} (Y_0 \cdot \bar{Y} + \tan \theta \cdot Y_0 \cdot \bar{X} + \tan^2 \theta \cdot X_0 \cdot \bar{X} - \tan \theta \cdot X_0 \cdot \bar{Y} - \tan \theta \cdot Y_0 \cdot \bar{X}) + 3k_{13} (2 \tan \theta \cdot X_0 \cdot Y_0 \cdot \bar{X} + \tan^2 \theta \cdot Y_0 \cdot \bar{X} - \tan^2 \theta \cdot X_0^2 \cdot \bar{Y} - 2 \tan^2 \theta \cdot X_0 \cdot Y_0 \cdot \bar{X} + \tan^3 \theta \cdot X_0^2 \cdot \bar{X}) \quad (4.17)$$

Nous aboutissons au système linéarisé final en substituant l'expression (4.11) dans l'équation (4.13). Ce système s'écrit alors sous la forme:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_L(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.18)$$

Nous pouvons noter au passage que cette dernière équation dynamique non-linéaire ne contient plus de termes constants. Ces derniers ont été éliminés par l'intermédiaire de la recherche du point d'équilibre statique du système comme défini en (4.11).

Par la suite, nous allons mener l'étude de stabilité par la détermination des valeurs propres du système linéarisé (4.18).

Bien entendu, il est aussi possible d'effectuer l'analyse de stabilité à partir de la matrice Jacobienne du système ou à partir du polynôme caractéristique du système linéarisé (4.18) et en appliquant les critères de Routh-Hurwitz (Meirovitch [106]). Le polynôme caractéristique du système (4.18) s'écrit alors sous la forme  $\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$ . Les critères de Routh-Hurwitz qui nous assure la stabilité du système sont alors  $a_1 > 0$ ,  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ,  $a_1 (a_2 a_3 + a_1 a_4) - a_3^2 > 0$  et  $a_1 a_2 a_3 a_4 > 0$ . Du fait de la complexité de l'expression analytique des coefficients  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$ , il est très difficile dans notre cas d'avoir une expression analytique simple servant de critère de stabilité.

Aussi, nous allons donc opter pour la suite de l'étude pour une résolution purement numérique du problème de stabilité par la recherche des valeurs propres et vecteurs propres du système linéarisé.

### 4.2.1 Détection d'instabilité - Point de bifurcation de Hopf

Nous pouvons donc maintenant réaliser l'étude de stabilité de notre système dynamique non-linéaire de départ (4.3) à partir de la recherche des valeurs propres du système (4.18), linéarisé au point de fonctionnement. Considérons  $\lambda$  une valeur propre du système (4.18). Elle peut s'écrire sous la forme

$$\lambda = a + i.b \quad (4.19)$$

avec  $a$  la partie réelle et  $b$  la partie imaginaire de la valeur propre. Si  $a$  est négatif ou égal à zéro, le système est stable et nous n'avons pas de vibration d'instabilité. Si  $a$  est positif, nous avons apparition d'instabilité. De plus,  $b$  nous permet d'avoir une information sur la fréquence d'instabilité à un coefficient  $2\pi$  près.

En utilisant les paramètres de base, défini en Annexe A, la stabilité du système pour différentes valeurs du coefficient de frottement est obtenue. Nous nous intéressons alors plus spécifiquement à la

détermination du point de bifurcation de Hopf qui vérifie

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda(\mu))|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mu=\mu_0} = 0 \\ \frac{d}{d\mu} [\operatorname{Re}(\lambda(\mu))] |_{\mu=\mu_0} \neq 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

De plus, nous pouvons en déduire l'évolution des fréquences d'instabilité et des parties réelles associées en fonction du coefficient de frottement, comme illustré en figure 4.2 et en figure 4.3.

Comme indiqué en figure 4.3, la valeur du coefficient de frottement au point de bifurcation de Hopf est égal à  $\mu_0 = 0.204$ . Pour une valeur du coefficient de frottement  $\mu$  inférieur à  $\mu_0$ , toutes les parties réelles des valeurs propres du système linéarisé (4.18) sont inférieures à zéro: le système est donc stable. Sur la figure 4.2, nous observons alors les deux fréquences des modes du système qui sont distinctes. Maintenant, en augmentant le coefficient de frottement  $\mu$ , ces deux fréquences se rapprochent et coalescent pour  $\mu = \mu_0$ . En examinant ce qui se passe au niveau des parties réelles associées, nous remarquons que lors de l'évolution du coefficient de frottement  $\mu$  vers  $\mu_0$ , l'une des parties réelles augmente et sa valeur se rapproche de zéro. Pour  $\mu = \mu_0$ , nous avons bien entendu cette partie réelle qui devient nulle. Nous sommes alors au point de bifurcation de Hopf.

Le point de bifurcation de Hopf est aussi localisé sur la figure (4.4) montrant l'évolution des fréquences et des parties imaginaires dans le plan complexe.

Pour un coefficient de frottement  $\mu$  supérieur à  $\mu_0$ , la partie réelle précédemment suivie devient positive. Le système est donc instable. Nous remarquons alors que les deux fréquences d'instabilité qui se sont couplées pour  $\mu = \mu_0$  suivent la même évolution. En regardant plus précisément l'évolution des fréquences de la figure 4.2, nous nous apercevons que ces dernières ne sont pas identiques. Cela provient de la prise en compte de l'amortissement dans notre système de départ, qui se traduit aussi par des parties réelles négatives pour des valeurs du coefficient de frottement inférieur à  $\mu_0$ . Si, nous n'avions pas pris en compte l'amortissement, nous aurions eu tout simplement les parties réelles nulles lorsque le système est stable et les deux fréquences qui deviennent identiques avec une partie réelle positive lorsque le système est instable.

Cet exemple très simple, nous montre le rôle que peut jouer l'amortissement au niveau de la stabilité d'un système. En effet, d'un point de vue de la stabilité, l'amortissement "entraîne" les parties réelles des valeurs propres dans le sous-espace des réels à valeur négative. L'évolution des parties réelles des valeurs propres en fonction du coefficient de frottement vers une valeur nulle sera alors obtenue pour un coefficient de frottement  $\mu_0$  supérieur à celui que nous aurions obtenu sans amortissement. Nous constatons le caractère stabilisant que peut avoir l'amortissement. Enfin, cette analyse de stabilité indique qu'il est possible d'avoir apparition d'instabilité avec un coefficient de frottement constant. La fréquence d'instabilité  $\omega_0$  trouvée numériquement est de l'ordre de  $50\text{Hz}$ , ce qui est en accord avec les observations expérimentales effectuées sur la vibration de trépidation des camions poids-lourds qui est située entre  $40 - 70\text{Hz}$  (Boudot [18]).

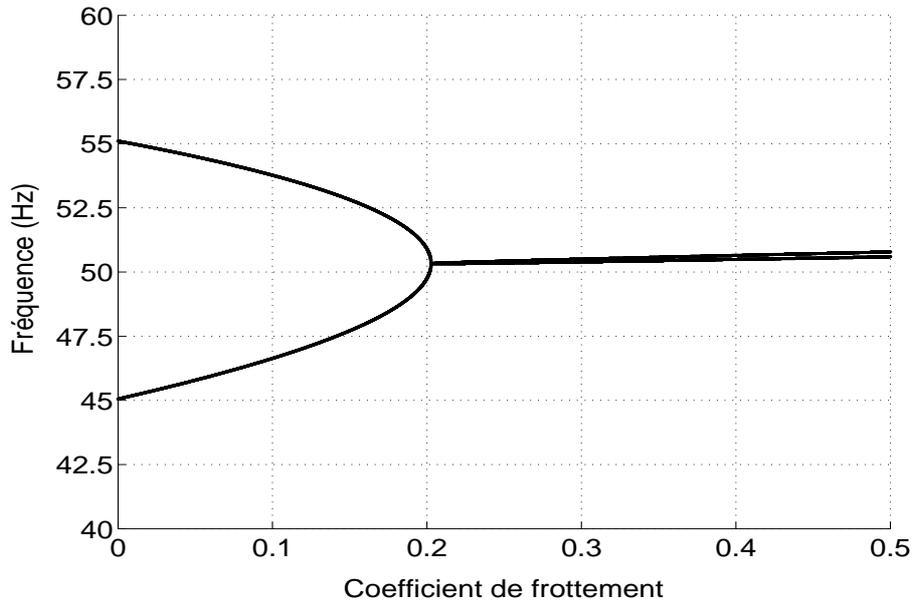


FIG. 4.2: *Évolution des fréquences du système en fonction du coefficient de frottement*

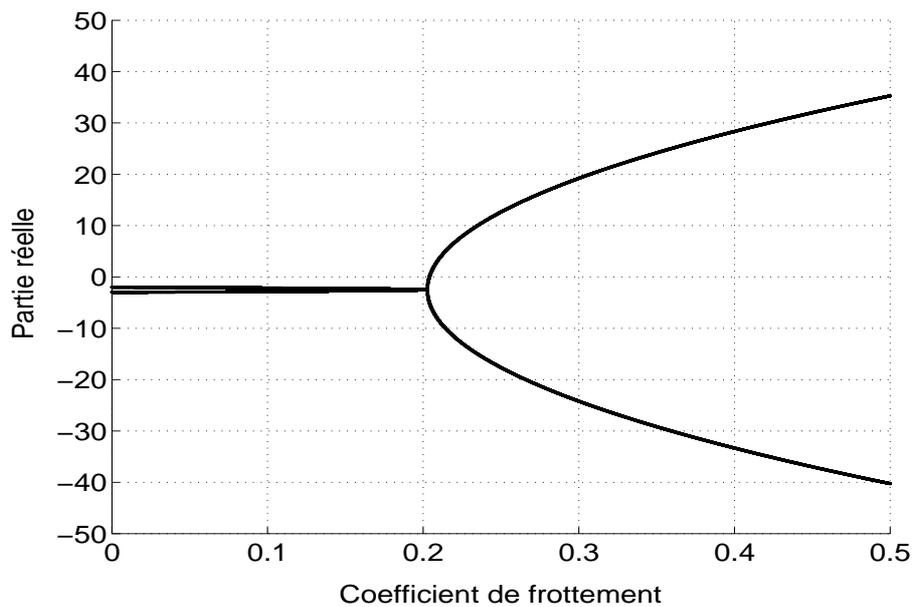


FIG. 4.3: *Évolution des parties réelles en fonction du coefficient de frottement*

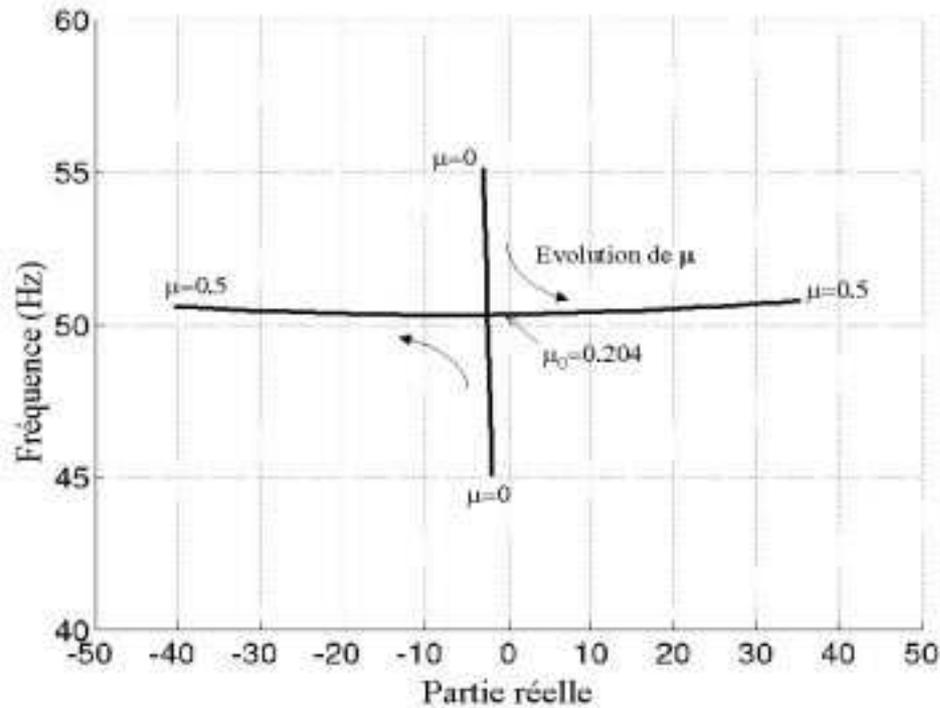


FIG. 4.4: Évolution des parties réelles et des fréquences dans le plan complexe

#### 4.2.2 Généralisation de l'analyse de stabilité du système

Comme nous venons de le voir, nous sommes capable de déterminer l'apparition d'instabilité pour le système (4.3). Maintenant, il serait intéressant de savoir comment évolue notre système, d'un point de vue de la stabilité, en fonction de divers paramètres physiques. L'objectif de telles études est alors de définir des zones stables et instables suivant divers paramètres. Il est possible de répondre à cette question par des études de stabilité prenant en compte l'évolution de plusieurs facteurs physiques. Dans cette partie, nous nous limiterons à l'analyse de stabilité suivant deux paramètres, les résultats d'analyse de stabilité prenant en compte l'évolution de plus de deux paramètres étant tout à fait réalisables et ne posant aucun problème d'un point de vue théorique et pratique, mais plus difficile à illustrer de manière simple au niveau des zones stables et instables.

Pour effectuer ces études biparamétriques, nous prenons comme paramètres de base les données indiquées en Annexe A et nous allons regarder l'influence de paramètres tels que le coefficient de frottement, la force d'application de l'effort  $F_{brake}$ , l'angle de sprag-slip, les raideurs linéaires et les contributions non-linéaires des raideurs. Les évolutions des zones stables et instables par rapport à divers jeux biparamétriques sont illustrées en figures 4.5(a), 4.6(a), 4.7(a), 4.8(a), 4.9(a), 4.10(a), 4.11(a), 4.12(a), 4.13(a), 4.14(a) et 4.15(a). La détection des fréquences d'instabilité associées et leurs plages en fréquence sont illustrées en figures 4.5(b), 4.6(a), 4.7(b), 4.8(b), 4.9(b), 4.10(b), 4.11(b), 4.12(b), 4.13(b), 4.14(b) et 4.15(b). Ces dernières figures sont obtenues en représentant la fréquence (obtenue à partir de l'expression de la partie imaginaire des valeurs propres) en fonction de la partie réelle des valeurs propres correspondantes. L'axe horizontal correspond alors à une estimation du taux d'amortissement du système. Toute la région se situant à droite de l'axe vertical passant par l'origine

correspond à la région où les modes sont couplés et le système est donc instable. La région se situant à gauche de ce même axe correspond à l'ensemble où les modes sont découplés et le système stable. De plus, ces études biparamétriques font apparaître un ensemble de points de bifurcation de Hopf qui forment des "frontières" entre l'état stable et l'état instable du système. Ces courbes sont visibles sur l'ensemble des figures 4.5(a), 4.6(a), 4.7(a), 4.8(a), 4.9(a), 4.10(a), 4.11(a), 4.12(a), 4.13(a), 4.14(a) et 4.15(a). Par analogie avec la définition d'un point de bifurcation de Hopf, l'ensemble de ces points se trouve situé sur l'axe vertical passant par l'origine des figures 4.5(b), 4.6(b), 4.7(b), 4.8(b), 4.9(b), 4.10(b), 4.11(b), 4.12(b), 4.13(b), 4.14(b) et 4.15(b).

A partir de résultats biparamétriques obtenus, nous pouvons remarquer que la notion de stabilité d'un système est un phénomène complexe. En effet, le fait d'augmenter ou de diminuer certains paramètres peut aussi bien stabiliser ou déstabiliser le système. Nous allons maintenant discuter plus précisément l'influence des paramètres physiques sur le système non-linéaire.

La première observation concerne la grande influence du coefficient de frottement sur la stabilité du système comme illustré en figures 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 et 4.14. Il apparaît clairement qu'une augmentation du coefficient de frottement peut rendre le système instable ou augmenter la plage d'instabilité du système si ce dernier est déjà instable. Aussi, la diminution du coefficient de frottement apparaît comme l'un des facteurs primordial pour stabiliser un système. Ce résultat est en parfait accord avec l'ensemble des études et développements de recherche visant à réduire le coefficient de frottement des systèmes frottants pour les stabiliser.

D'autre part, les études biparamétriques prenant en compte l'évolution de l'angle de sprag-slip  $\theta$  et les évolutions de raideurs linéaires  $k_{11}$  et  $k_{21}$  sont très intéressantes (figure 4.10 et figure 4.11). En effet, elles illustrent parfaitement la complexité des problèmes d'analyse de stabilité en mettant en avant que ce n'est pas un phénomène à évolution linéaire, c'est-à-dire qu'un même système peut très bien changer plusieurs fois d'état du point de vue de la stabilité suivant l'évolution d'un seul paramètre. Nous pouvons alors avoir des zones fermées instables ou stables. Par exemple, si nous examinons le cas illustré par la figure 4.11, le système est stable tant que  $k_{21} \leq 0.75N/m$ . Ensuite, le système rentre dans la zone d'instabilité lorsque  $k_{21} = 0.75N/m$  pour  $\theta = 0.15rad$ . Les deux modes se couplent alors pour  $k_{21} \geq 0.75N/m$  et  $\theta = 0.15rad$ . Cependant, si nous augmentons encore fortement la raideur  $k_{21}$ , le système retransverse la zone d'instabilité pour  $k_{21} = 1.25N/m$  avec  $\theta = 0.15rad$ . Alors, les deux modes restent découplés pour  $k_{21} \geq 1.25N/m$  et le système est stable. Pour récapituler ce qui vient d'être énoncé, le système a donc suivi un état stable, instable puis de nouveau stable en faisant évoluer la raideur  $k_{12}$  pour  $\theta = 0.15rad$ . De plus, les zones de stabilité ont une allure globale similaire pour les études biparamétriques illustrées par les figures 4.10 et 4.11, ces dernières ne sont pas exactement les mêmes et que la plage des fréquences d'instabilité, qui correspond à l'ensemble des points situés à droite de l'axe vertical passant par l'origine pour les figures 4.10(b) et 4.11(b), varie peu, allant de  $48Hz$  à  $55Hz$ .

La figure 4.12 illustre l'évolution de la stabilité en fonction des deux raideurs linéaires  $k_{11}$  et  $k_{21}$ . Nous remarquons que la diminution de ces raideurs diminue la zone d'instabilité et que des valeurs très différentes entre ces deux raideurs  $k_{11}$  et  $k_{21}$  donnent lieu à un système stable. Ceci peut se comprendre du fait que dans ce dernier cas, les fréquences de chacun des modes sont sans doute trop éloignées pour qu'il puisse y avoir couplage entre eux. La plage de fréquence d'instabilité est très large, allant de  $10Hz$  à  $70Hz$ .

Un autre résultat intéressant est donné par la figure 4.5. En effet, la raideur non-linéaire  $k_{12}$  et la force de commande  $F_{brake}$  ont une influence sur la stabilité du système. Enfin, nous pouvons aussi

remarquer que les masses du système peuvent bien entendu influencer sur la stabilité du système comme le montre les figures 4.7 et 4.15.

Par conséquent, d'après les résultats obtenus, l'analyse de stabilité est un problème complexe: des zones instables ou stables peuvent être obtenues en faisant varier les paramètres physiques de la structure et il existe donc une infinité de combinaisons de paramètres qui peuvent être examinées.

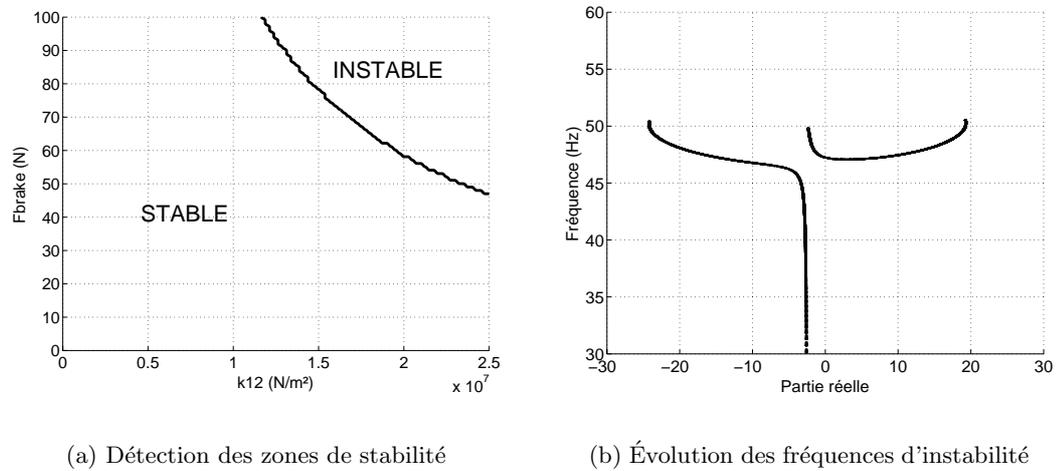


FIG. 4.5: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la pression de commande  $F_{brake}$  et du coefficient de la raideur non-linéaire  $k_{12}$

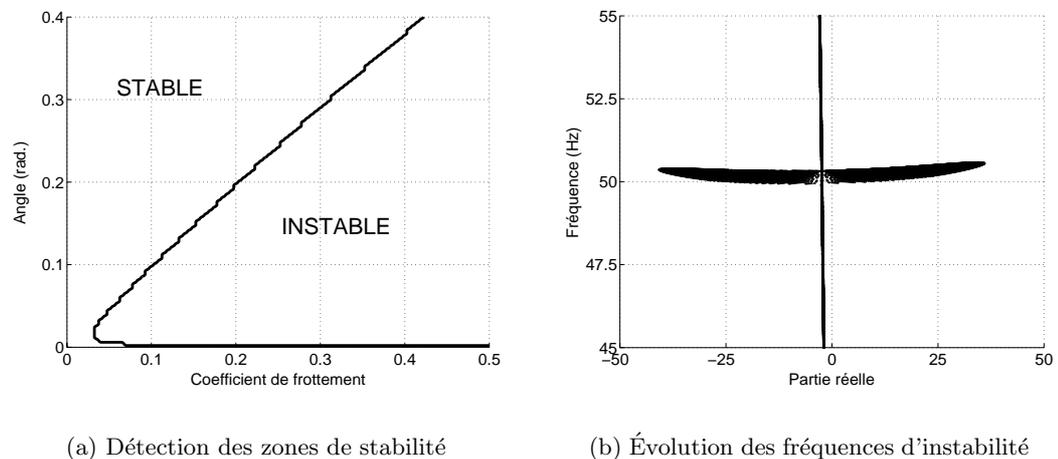
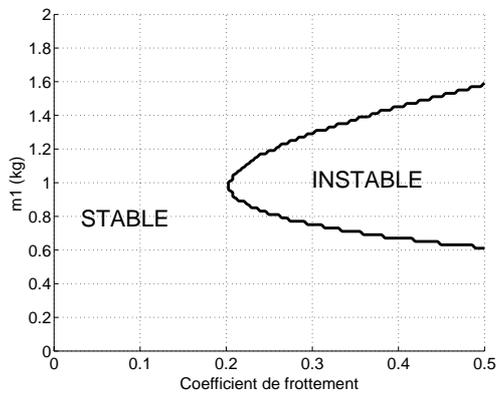
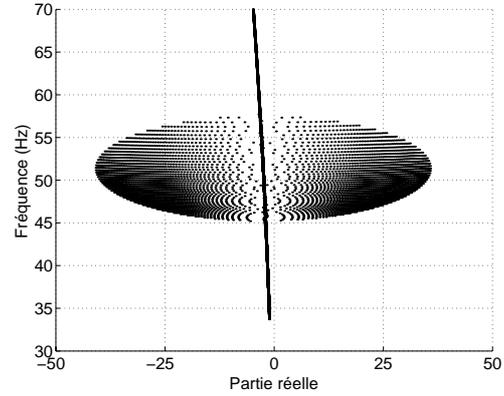


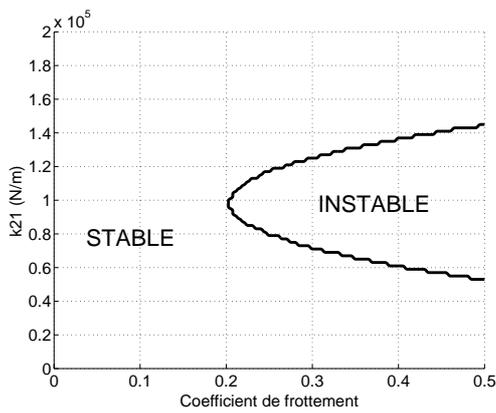
FIG. 4.6: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de l'angle de sprag-slip et du coefficient de frottement



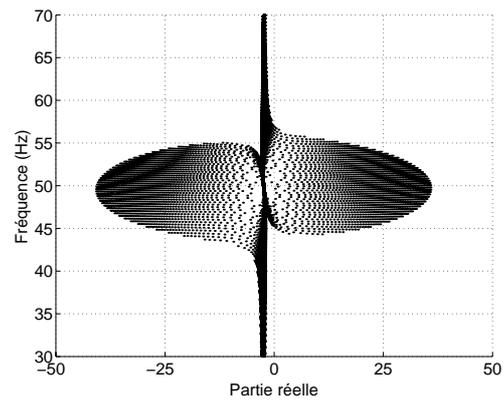
(a) Détection des zones de stabilité



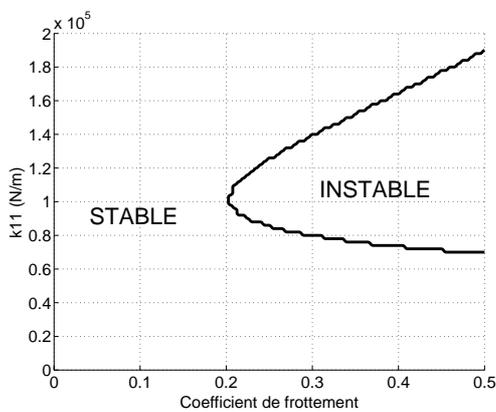
(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 4.7: Étude de stabilité biparamétrique en fonction du coefficient de frottement et de la masse  $m_1$ 

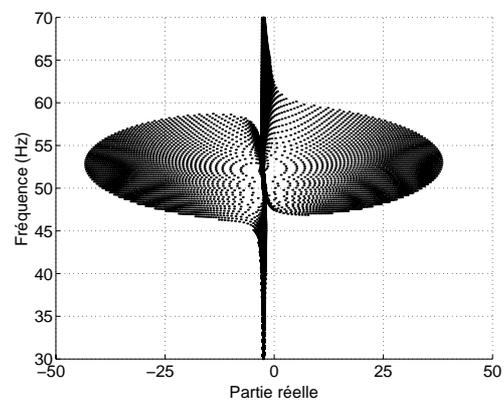
(a) Détection des zones de stabilité



(b) Évolution des fréquences d'instabilité

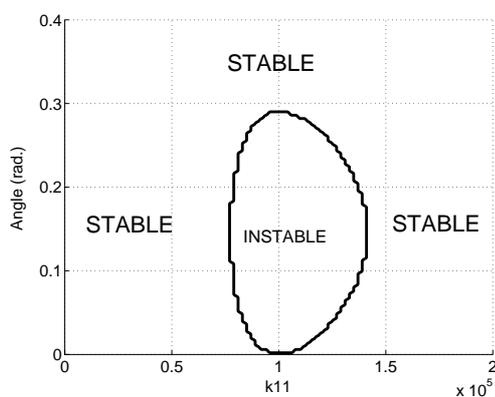
FIG. 4.8: Étude de stabilité biparamétrique en fonction du coefficient de frottement et de la raideur linéaire  $k_{21}$ 

(a) Détection des zones de stabilité

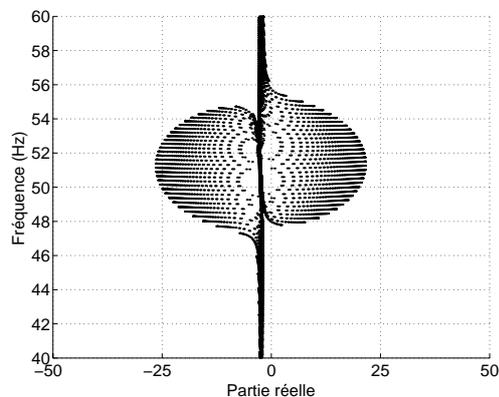


(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 4.9: Étude de stabilité biparamétrique en fonction du coefficient de frottement et de la raideur linéaire  $k_{11}$

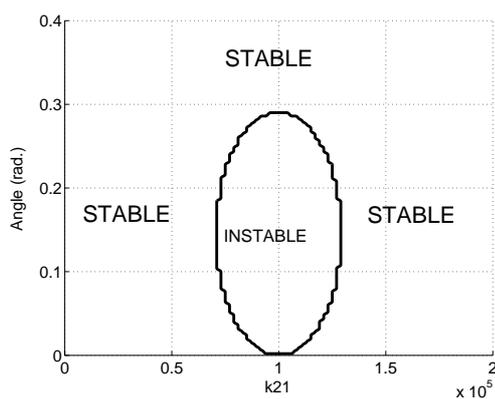


(a) Détection des zones de stabilité

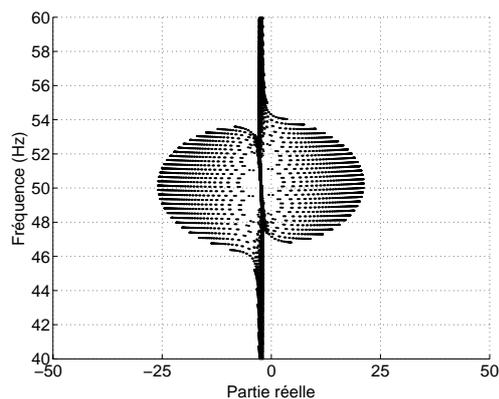


(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 4.10: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire  $k_{11}$  et de l'angle de sprag-slip

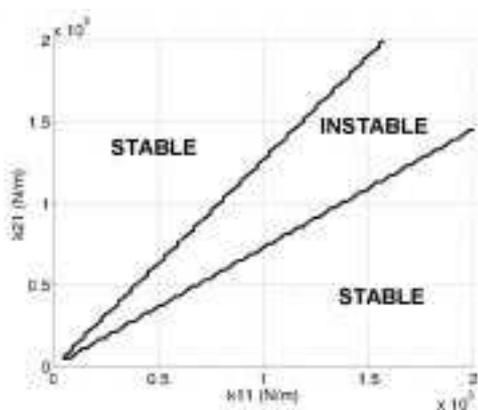


(a) Détection des zones de stabilité

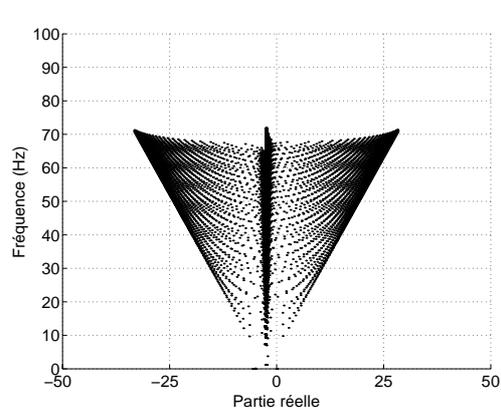


(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 4.11: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire  $k_{21}$  et de l'angle de sprag-slip

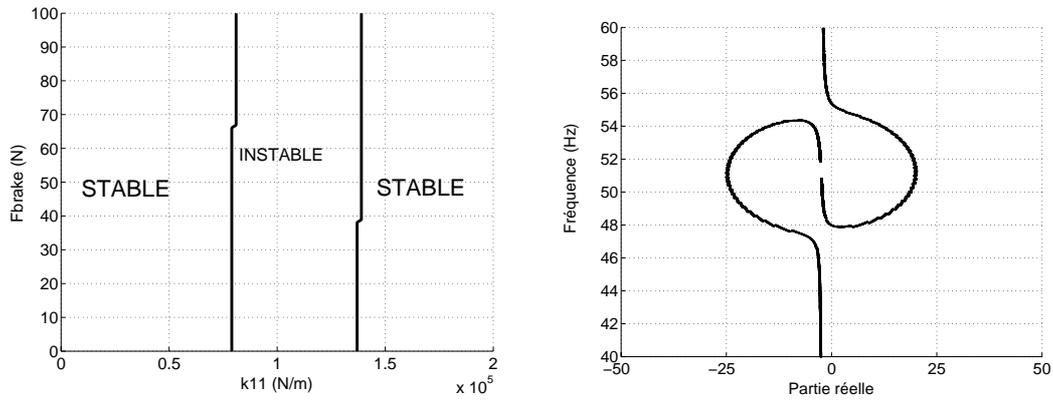


(a) Détection des zones de stabilité



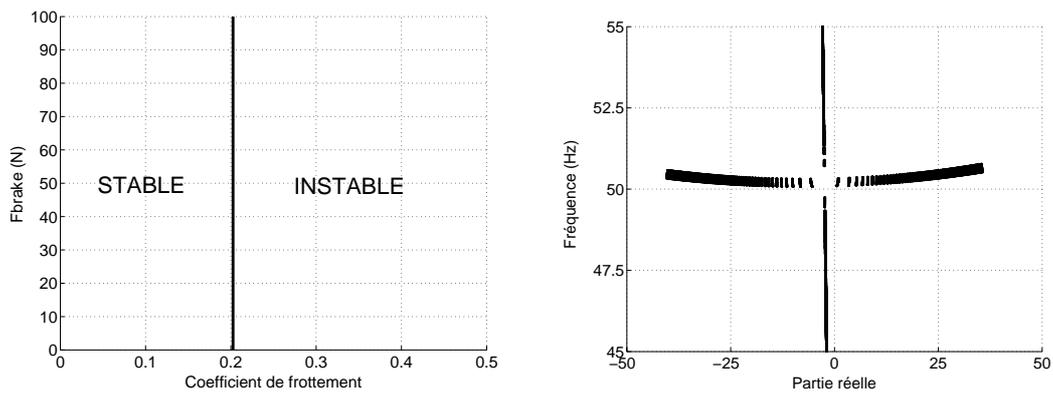
(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 4.12: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire  $k_{11}$  et de la raideur linéaire  $k_{21}$



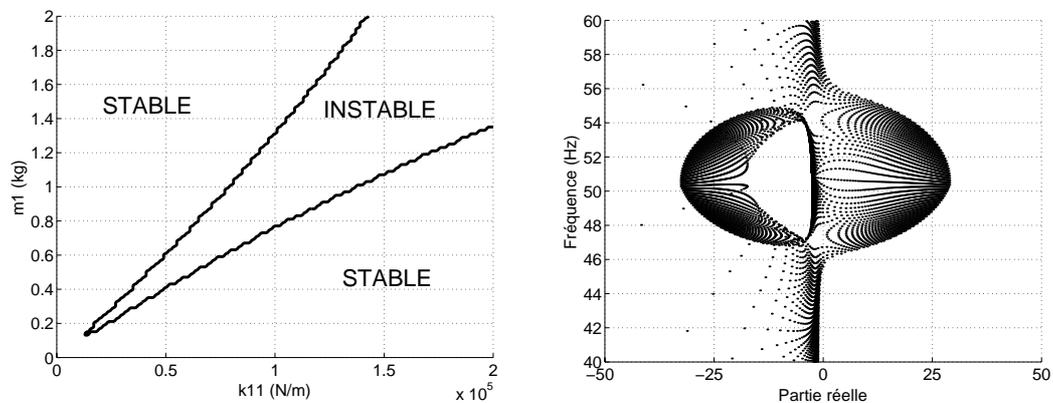
(a) Détection des zones de stabilité

(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 4.13: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire  $k_{11}$  et de la pression de commande  $F_{brake}$ 

(a) Détection des zones de stabilité

(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 4.14: Étude de stabilité biparamétrique en fonction du coefficient de frottement et de la pression de commande  $F_{brake}$ 

(a) Détection des zones de stabilité

(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 4.15: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire  $k_{11}$  et de la masse  $m_1$

### 4.3 Analyse non-linéaire - Niveaux vibratoires

Comme nous venons de le voir précédemment, l'analyse de stabilité est effectuée par la résolution aux valeurs propres du système linéarisé (4.18) pour de faibles perturbations. Aussi, une fois les zones d'instabilité déterminées, il est intéressant de rechercher à obtenir les niveaux vibratoires du système, nommés cycles limites, lorsque le système devient instable.

Ces cycles limites peuvent être obtenus par une intégration temporelle du système complet, mais cette procédure est très longue en temps de calcul. Aussi, il est alors judicieux de mettre en place des méthodes d'analyse non-linéaire qui vont nous permettre de simplifier le système tout en gardant le même comportement dynamique et plus particulièrement en gardant la contribution des termes non-linéaires.

Pour notre part, nous utiliserons tout d'abord la méthode de réduction de la variété centrale qui va nous permettre de réduire le nombre de degrés de liberté de notre système en se focalisant uniquement sur la dynamique propre de certains degrés de liberté qui sont appelés les variétés centrées tout en gardant la contribution des autres degrés de liberté de la structure.

Ensuite, nous verrons les approximants de Padé à plusieurs variables qui vont nous permettre de simplifier les non-linéarités en mettant l'équation de notre système sous forme de fraction rationnelle. Enfin nous utiliserons une des méthodes de la balance harmonique pour avoir une solution sous forme de coefficients de Fourier. Ces méthodes, avantages et spécificités seront développés lors de leurs utilisations.

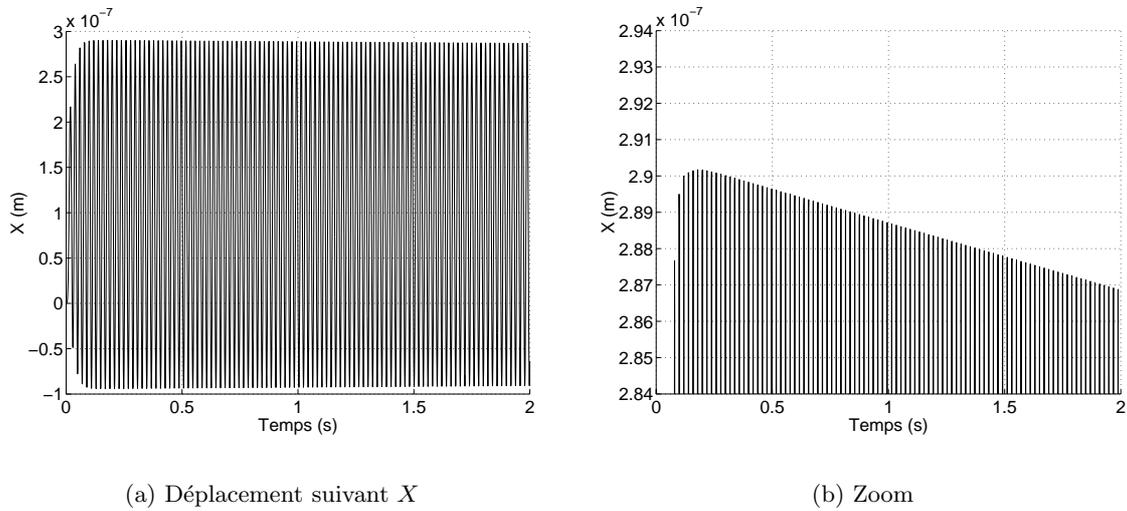
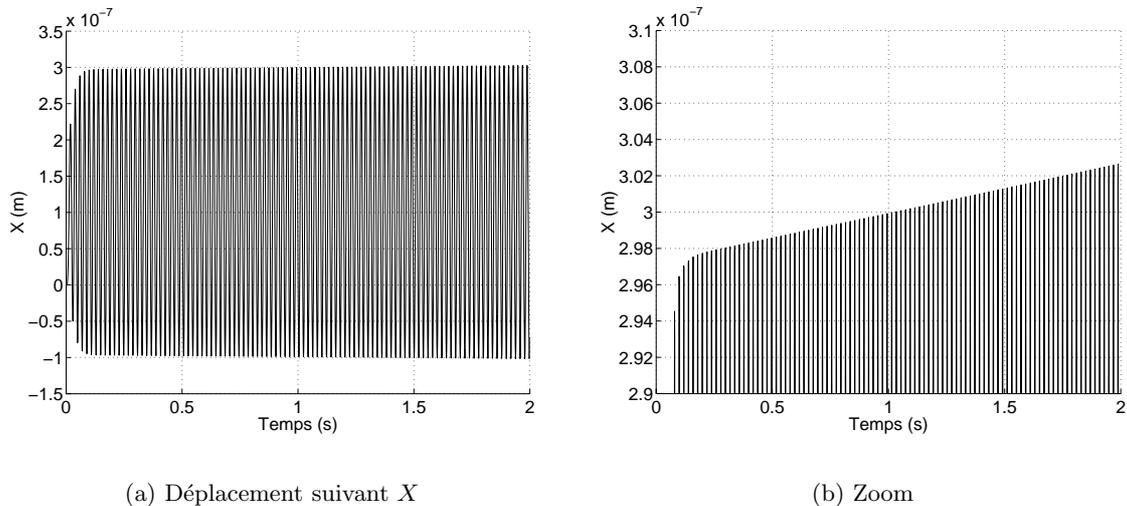
#### 4.3.1 Cycles limites par intégration temporelle classique

Même si effectuer une intégration temporelle du système complet est très long, cette méthode nous permet cependant d'obtenir les cycles limites pour un jeu de paramètre donné.

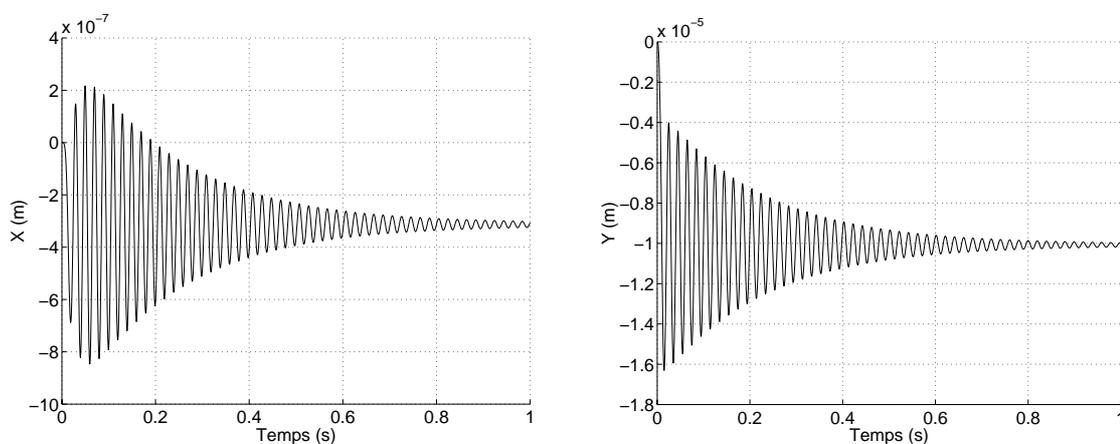
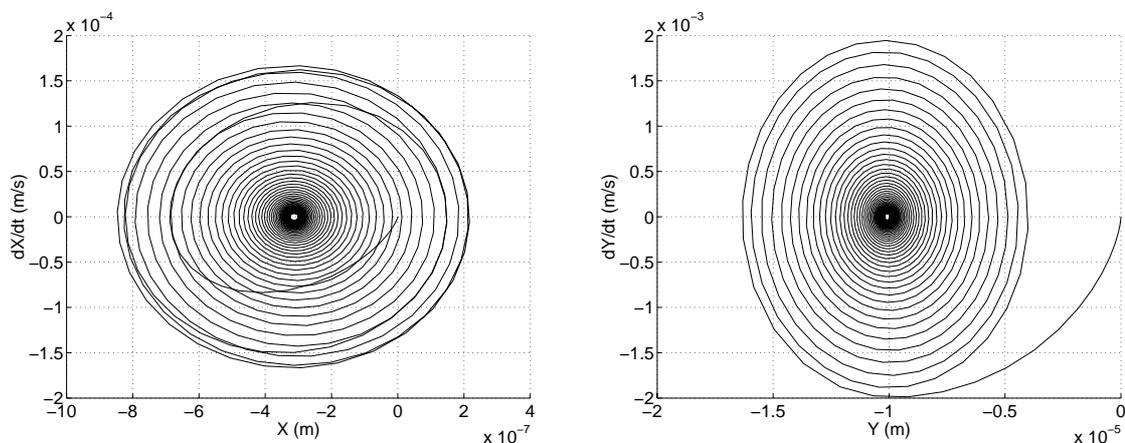
##### 4.3.1.1 Oscillations autour du point de bifurcation de Hopf

Le fait de chercher à obtenir le comportement oscillatoire juste avant, ou juste après le point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$ , nous permet de valider la justesse de la détection de ce point. En effet, pour  $\mu = \mu_0 - \varepsilon \cdot \mu_0$  ( $\varepsilon > 0$ ), nous devons avoir le système qui s'amortit autour de la position d'équilibre, avec  $\varepsilon$  aussi petit que désiré. Par contre, pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  ( $\varepsilon > 0$ ), nous devons avoir le système qui oscille autour de la position d'équilibre, avec  $\varepsilon$  aussi petit que désiré. D'après les figures (4.16) et (4.17), nous pouvons valider la détection du point de bifurcation de Hopf effectuée précédemment.

D'après les résultats obtenus en figures (4.16) et (4.17), le point de bifurcation de Hopf calculé sur le système linéarisé équivalent (4.18) est bien estimé car, aussi petit que soit  $\varepsilon$  (dans notre cas  $\varepsilon = 10^{-5}$ ), nous avons bien amortissement des oscillations pour  $\mu = (1 - \varepsilon)\mu_0$  et amplification des oscillations pour  $\mu = (1 + \varepsilon)\mu_0$ .

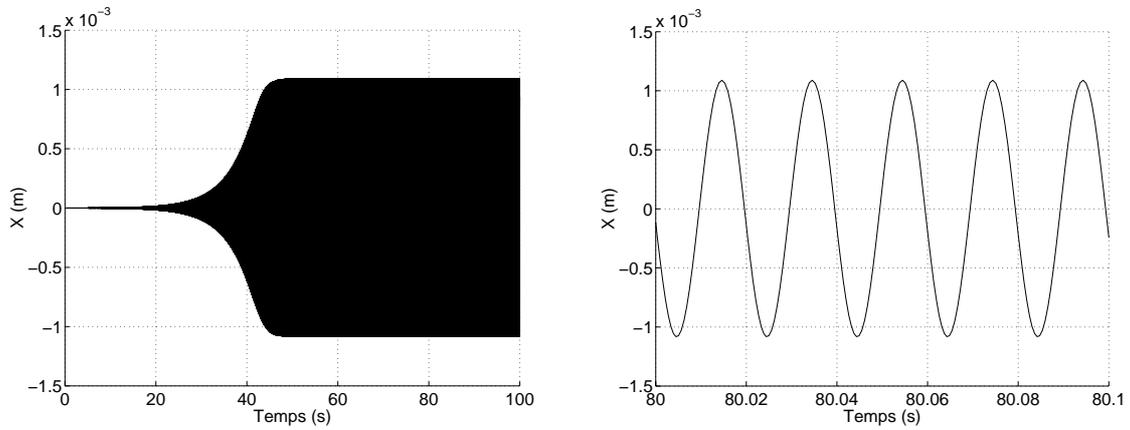
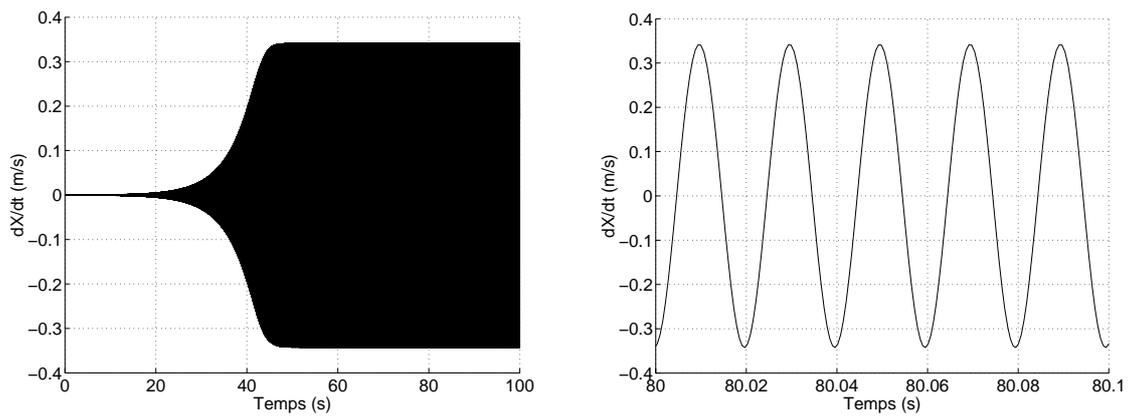
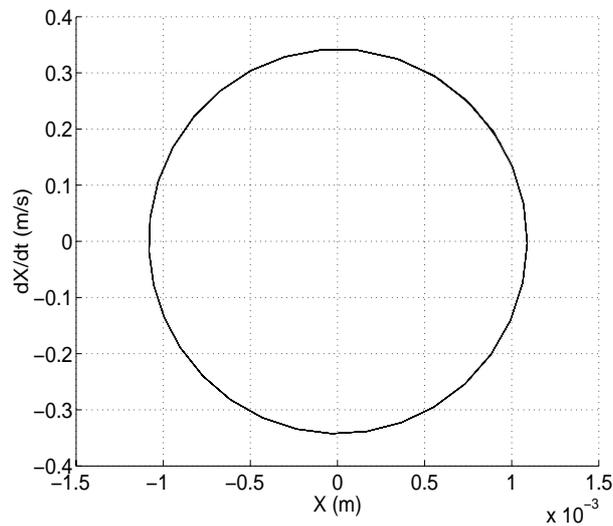
FIG. 4.16: *Oscillations pour  $\mu = \mu_0 - \varepsilon \cdot \mu_0$  avec ( $\varepsilon = 10^{-5}$ )*FIG. 4.17: *Oscillations pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec ( $\varepsilon = 10^{-5}$ )*

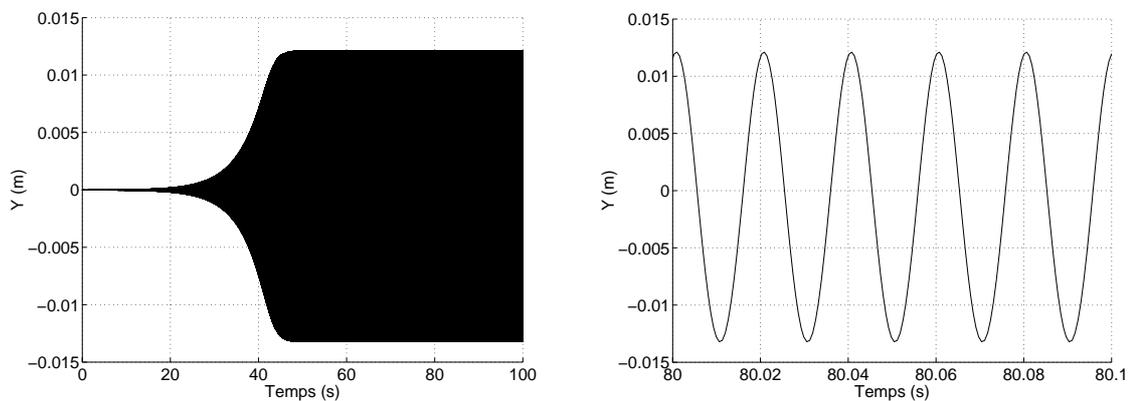
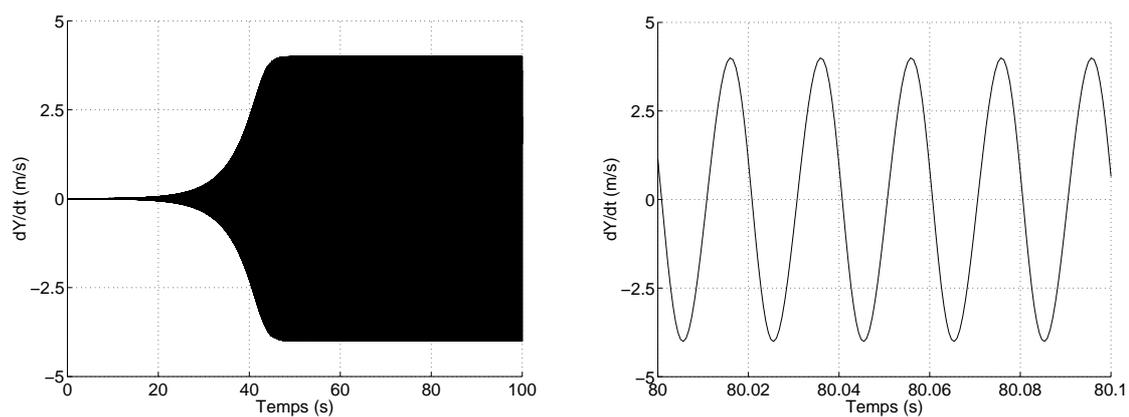
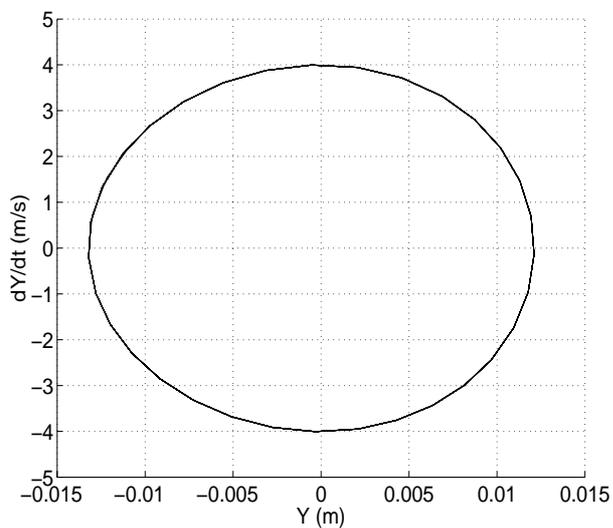
De plus, lorsque nous nous plaçons juste avant le point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$ , le système s'amortit autour de la position d'équilibre, avec  $\varepsilon$  aussi petit que désiré. Dans l'exemple précédent, nous voyons que le système a tendance à s'amortir autour cette position d'équilibre. Cependant, vu que nous nous situons très près du point de bifurcation de Hopf, le système est très faiblement amorti: les parties réelles des valeurs propres du système linéarisé équivalent sont alors pratiquement nulles. Si maintenant nous nous plaçons plus en aval du point de bifurcation de Hopf, le système se stabilise plus rapidement autour du point d'équilibre, comme illustré en figures (4.18) et (4.19). Cela s'explique simplement par le fait que les parties réelles des valeurs propres du système linéarisé équivalent sont négatives. Alors, le point d'équilibre obtenu par intégration temporelle correspond au point d'équilibre trouvé par la résolution de l'équation statique (4.11).

(a) Déplacement suivant  $X$ (b) Déplacement suivant  $Y$ FIG. 4.18: *Oscillations amorties pour  $\mu = \mu_0 - \varepsilon \cdot \mu_0$  avec ( $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-1}$ )*(a) Évolution  $(X, \dot{X})$ (b) Évolution  $(Y, \dot{Y})$ FIG. 4.19: *Obtention du point d'équilibre à partir l'évolution des cycles amortis pour  $\mu = \mu_0 - \varepsilon \cdot \mu_0$  avec ( $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-1}$ )*

#### 4.3.1.2 Cycles limites

Maintenant, en se plaçant juste après le point de bifurcation de Hopf ( $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon > 0$ ), nous avons donc apparition d'oscillations auto-entretenues autour de la position d'équilibre  $(X_0, Y_0)$ . Nous avons donc les évolutions temporelles des déplacements suivant  $X$  et  $Y$  comme indiqué en figures (4.20) et (4.23). De même, nous avons les vitesses de chacun des degrés de liberté  $X$  et  $Y$ , comme indiqué en figures (4.21) et (4.24). Nous obtenons alors les cycles limites  $(X, \dot{X})$  et  $(Y, \dot{Y})$  associés, comme indiqué en figures (4.22) et (4.25).

(a) Déplacement  $X(t)$ (b) Zoom sur les oscillations de  $X$ FIG. 4.20: Oscillations du déplacement suivant  $X$  pour  $(\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.001$ )(a) Vitesse  $\dot{X}(t)$ (b) Zoom sur les oscillations de  $\dot{X}$ FIG. 4.21: Oscillations de la vitesse suivant  $X$  pour  $(\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.001$ )FIG. 4.22: Cycle limite  $(X, \dot{X})$  pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  (avec  $\varepsilon = 0.001$ )

(a) Déplacement  $Y(t)$ (b) Zoom sur les oscillations de  $Y$ FIG. 4.23: Oscillations du déplacement suivant  $Y$  pour  $(\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.001$ )(a) Vitesse  $\dot{Y}(t)$ (b) Zoom sur les oscillations de  $\dot{Y}$ FIG. 4.24: Oscillations de la vitesse suivant  $Y$  pour  $(\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.001$ )FIG. 4.25: Cycle limite  $(Y, \dot{Y})$  pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  (avec  $\varepsilon = 0.001$ )

### 4.3.2 Préambule à l'analyse non-linéaire

Afin de mettre en place la méthode de la variété centrale qui sera la première méthode utilisée, nous devons ré-écrire l'ensemble du système non-linéaire au point d'équilibre. En effet, le système dynamique non-linéaire (4.4) a été linéarisé autour du point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  pour déterminer les zones de stabilité du système. Nous avons alors négligé tous les termes non-linéaires. L'obtention des niveaux vibratoires nous oblige à les prendre maintenant en compte. L'expression complète du système non-linéaire, par analogie avec l'équation dynamique linéarisé (4.13) et en rajoutant tous les termes non-linéaires, peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{M}.\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}.\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}.\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.21)$$

où  $\ddot{\bar{\mathbf{x}}}$ ,  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  et  $\bar{\mathbf{x}}$  définissent les vecteurs d'accélération, de la vitesse et du déplacement des deux degrés de liberté du système.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  définissent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système.  $\mathbf{P}_{\text{NL}}$  contient tous les termes non-linéaires, écrits au point d'équilibre pour de faibles perturbations. Son expression peut s'écrire de la manière suivante:

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{Bmatrix} P_{NL}^X(\bar{\mathbf{x}}) \\ P_{NL}^Y(\bar{\mathbf{x}}) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Par analogie avec l'expression donnée précédemment en (4.15) pour les termes linéarisés, nous décomposons l'expression  $\mathbf{P}_{\text{NL}} = \{P_{NL}^X \quad P_{NL}^Y\}^T$  suivant ses termes linéaires et non-linéaires comme suit:

$$P_{NL}^X(\bar{\mathbf{x}}) = F_L^X(\bar{\mathbf{x}}) + F_{NL}^X(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.23)$$

$$P_{NL}^Y(\bar{\mathbf{x}}) = F_L^Y(\bar{\mathbf{x}}) + F_{NL}^Y(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.24)$$

où  $F_L^X(\bar{\mathbf{x}})$  et  $F_L^Y(\bar{\mathbf{x}})$  sont les termes linéaires de  $P_{NL}^X(\bar{\mathbf{x}})$  et  $P_{NL}^Y(\bar{\mathbf{x}})$  au point d'équilibre. Les expressions analytiques complètes de ces deux termes sont données par les équations (4.16) et (4.17).  $F_{NL}^X(\bar{\mathbf{x}})$  et  $F_{NL}^Y(\bar{\mathbf{x}})$  correspondent aux termes non-linéaires quadratiques et cubiques de  $P_{NL}^X(\bar{\mathbf{x}})$  et  $P_{NL}^Y(\bar{\mathbf{x}})$  au point d'équilibre.

Leurs expressions sont les suivantes:

$$\begin{aligned} F_{NL}^X &= k_{12}(-\tan\theta + \mu) \left[ \tan^2\theta.\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 - 2\tan\theta.\bar{Y}.\bar{X} \right] \\ &+ k_{13}(-\tan\theta + \mu) \left[ \tan^3\theta.(\bar{X}^3 + 3\bar{X}^2.X_0) - 3\tan^2\theta(\bar{Y}.\bar{X}^2 + 2\bar{Y}.\bar{X}.X_0 \right. \\ &\left. + \bar{X}^2.X_0) + 3\tan\theta(\bar{X}.\bar{Y}^2 + \bar{Y}.\bar{X}.Y_0 + \bar{Y}^2.XY_0) - \bar{Y}^3 - 3\bar{Y}^2.Y_0 \right] \\ &+ k_{22}.(1 + \mu\tan\theta)\bar{X}^2 + k_{23}(1 + \mu\tan\theta) \left[ \bar{X}^3 + 3\bar{X}^2.X_0 \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} F_{NL}^Y &= k_{12} \left[ \bar{Y}^2 - 2\tan\theta.\bar{X}.\bar{Y} + \tan^2\theta\bar{X}^2 \right] + k_{13} \left( \bar{Y}^3 + 3\bar{Y}^2.Y_0 \right) \\ &- 3\tan\theta \left( \bar{Y}^2\bar{X} + 2\bar{X}.\bar{Y}.Y_0 + \bar{Y}^2.X_0 \right) \\ &+ 3\tan^2\theta \left( \bar{X}^2.\bar{Y} + 2\bar{Y}.\bar{Y}.X_0 + \bar{X}^2.Y_0 \right) - \tan^3 \left( \bar{X}^3 + 3\bar{X}^2.Y_0 \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Les équations non-linéaires complètes peuvent donc être écrites au point d'équilibre  $\mathbf{x}_0 = \{X_0 \ Y_0\}^T$  pour de faibles perturbations  $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{X} \ \bar{Y}\}^T$  sous la forme condensée

$$\mathbf{M}.\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}.\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}.\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{f}_{(1)}^i . \bar{x}_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{f}_{(2)}^{ij} . \bar{x}_i . \bar{x}_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{f}_{(3)}^{ijk} . \bar{x}_i . \bar{x}_j . \bar{x}_k \quad (4.27)$$

où les coefficients  $\mathbf{f}_{(1)}^i$ ,  $\mathbf{f}_{(2)}^{ij}$  et  $\mathbf{f}_{(3)}^{ijk}$  définissent l'ensemble des termes linéaires, quadratiques et cubiques dûs aux raideurs non-linéaires du système.

En réorganisant les termes linéaires à droite de l'équation (4.27) avec les termes à gauche compris dans la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ , nous obtenons le système non-linéaire

$$\mathbf{M}.\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}.\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}}.\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{f}_{(2)}^{ij} . \bar{x}_i . \bar{x}_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{f}_{(3)}^{ijk} . \bar{x}_i . \bar{x}_j . \bar{x}_k \quad (4.28)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{K}}.\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{K}.\bar{\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^2 \mathbf{f}_{(1)}^i . \bar{x}_i \quad (4.29)$$

Afin d'utiliser la méthode de la variété centrale, il faut passer le système sous forme d'équations d'état pour se ramener ainsi à un système différentiel du premier ordre. Nous définissons donc la variable d'état  $\mathbf{y}$  comme suit:

$$\mathbf{y} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{x}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

Nous avons la relation

$$\dot{\mathbf{y}} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{x}}} \end{array} \right\} \quad (4.31)$$

Ainsi, le système dynamique non-linéaire (4.28) s'écrit, en considérant la variable d'état défini en (4.30) et en considérant la relation(4.31), sous la forme

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}.\mathbf{y} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \boldsymbol{\eta}_{(2)}^{ij} . y_i . y_j + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \boldsymbol{\eta}_{(3)}^{ijk} . y_i . y_j . y_k \quad (4.32)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_{(2)} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (4.34)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_{(3)} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

$\boldsymbol{\eta}_{(2)}^{ij}$  et  $\boldsymbol{\eta}_{(3)}^{ijk}$  sont les vecteurs des termes non-linéaires quadratiques et cubiques du système (4.32) pour les variables d'état  $\mathbf{y}$ .

Ce système non-linéaire servira de point de départ pour l'application de la méthode de la variété centrale, qui sera la première méthode non-linéaire qui sera appliquée sur le système. Pour alléger

l'écriture mathématique du système non-linéaire (4.32), la notation avec le produit de Kronecker  $\otimes$  (Stewart [163]) sera utilisée. Le système différentiel (4.32) s'écrit alors de la manière suivante:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}_{(2)} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} + \boldsymbol{\eta}_{(3)} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \quad (4.36)$$

où  $\mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$  définit les termes quadratiques et  $\mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{y}$  les termes cubiques. La matrice  $\mathbf{A}$  est une matrice  $4 \times 4$ .

### 4.3.3 Extension de la méthode de la variété centrale aux systèmes paramétrés

Dans cette partie nous décrirons l'application de la méthode de la variété centrale à notre système non-linéaire.

Pour cela, une extension de la méthode de la variété centrale aux systèmes non-linéaires paramétrés sera utilisée.

La méthode de la variété centrale permet de réduire un système non-linéaire au point de bifurcation de Hopf. Dans notre cas, nous nous intéressons plus particulièrement à la réduction de systèmes non-linéaires paramétrés par une variable  $\mu = \mu_0 + \hat{\mu}$ , au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Nous rappelons que, au point de bifurcation de Hopf, le système peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{c}} + \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}) + \mathbf{G}_3(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{s}} + \mathbf{H}_2(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}) + \mathbf{H}_3(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}) \end{cases} \quad (4.37)$$

avec  $\mathbf{v}_{\mathbf{c}} = \{v_{c1} \ v_{c2}\}^T$  et  $\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \{v_{s1} \ v_{s2}\}^T$ .  $\mathbf{J}_{\mathbf{c}}$  et  $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$  correspondent aux matrices diagonales comportant les valeurs propres  $\lambda$  du système linéarisé tel que  $Re[\lambda_{\mathbf{J}_{\mathbf{c}}}(\mu_0)] = 0$  et  $Re[\lambda_{\mathbf{J}_{\mathbf{s}}}(\mu_0)] \neq 0$ .  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{G}_3$ ,  $\mathbf{H}_2$  et  $\mathbf{H}_3$  correspondent aux matrices contenant les termes quadratiques et cubiques pour les variables  $\mathbf{v}_{\mathbf{c}}$  et  $\mathbf{v}_{\mathbf{s}}$ . Comme décrit dans la théorie,  $\mathbf{G}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{G}_3(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{H}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{H}_3(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  et les matrices jacobiennes  $D\mathbf{G}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ ,  $D\mathbf{G}_3(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ ,  $D\mathbf{H}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  et  $D\mathbf{H}_3(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  sont égales à zéro.

Une extension du théorème de la variété centrale pour les système (4.37) consiste alors à considérer le système augmenté

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}}(\hat{\mu}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{c}} + \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) + \mathbf{G}_3(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{\mathbf{s}}(\hat{\mu}) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{s}} + \mathbf{H}_2(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) + \mathbf{H}_3(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) \\ \dot{\hat{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

où  $\hat{\mu}$  défini le paramètre modifié par rapport au point de bifurcation de Hopf, dont dépend le système pour la recherche des cycles limites.

Au point  $(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)$ , le système correspond à une variété centrée de dimension 3 tangente à l'espace  $(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu})$ . Alors, pour  $\|\mathbf{v}_{\mathbf{c}}\|$  et  $\|\hat{\mu}\|$  petits, nous pouvons exprimer les variétés stables en fonction des variétés centrées (Carr [26]), de la manière suivante:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}) \quad (4.39)$$

où la fonction  $\mathbf{h}$  vérifie, au point d'équilibre  $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)$ ,

$$\mathbf{h} = \mathbf{0} \quad D\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mu}} = 0 \quad (4.40)$$

Cette extension permet de prendre en compte la participation du paramètre  $\hat{\mu}$  pour la détermination de la variété centrale. En considérant les conditions (4.40) et l'extension des variétés stables au point de bifurcation de Hopf, nous obtenons

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j+l=2}^m \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \quad (4.41)$$

avec  $\mathbf{a}_{ijl}$  le vecteur des coefficients de la variété centrale.

Nous notons que les termes  $v_{c1}\hat{\mu}$ ,  $v_{c2}\hat{\mu}$ ,  $v_{s1}\hat{\mu}$  et  $v_{s2}\hat{\mu}$  sont maintenant considérés comme des termes non-linéaires quadratiques. Nous avons

$$\mathbf{a}_{ijl} = \{a_{1,ijl}, \dots, a_{k,ijl}, \dots, a_{n-k,ijl}\}^T \quad (4.42)$$

avec  $a_{k,ijl}$  les coefficients pour la k-ième composante de la variété stable ( $k = 1, 2$ ) définissant la relation  $\mathbf{v}_s$  en fonction de  $(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$ .

Si nous écrivons le vecteur  $\mathbf{v}_s$ , nous avons

$$\mathbf{v}_s = \begin{Bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1(\mathbf{v}_c) \\ h_2(\mathbf{v}_c) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{p=i+j+l=2}^m \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p a_{1,ijl} v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \\ \sum_{p=i+j+l=2}^m \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p a_{2,ijl} v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

avec  $a_{k,ijl}$  les coefficients constants de l'expression des variétés stables en fonction de  $(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$ . Ces coefficients sont déterminés par résolutions des équations algébriques définies comme suit:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}_c, \hat{\mu}}(\mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})) \cdot (\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{v}_c + \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}) + \mathbf{G}_3(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu})) \\ = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) + \mathbf{H}_2(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}) + \mathbf{H}_3(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les vecteurs  $\mathbf{a}_{ijl}$  sont alors déterminés en annulant chacune des combinaisons croissantes en  $v_{c1}$ ,  $v_{c2}$  et  $\hat{\mu}$ .

La dynamique du système augmenté restreint aux variables centrées est définie par le nouveau système différentiel:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{J}_c(\hat{\mu}) \cdot \mathbf{v}_c + \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}) + \mathbf{G}_3(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}) \\ \dot{\hat{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

Nous allons maintenant nous attacher à décrire plus précisément la procédure d'obtention des coefficients  $a_{k,ijl}$  du polynôme  $\mathbf{h}$ , définis à partir de l'équation (4.41).

#### 4.3.4 Détermination des coefficients de la variété centrale

Afin d'obtenir l'approximation des variétés stables suivant une série de puissances croissantes des variétés centrées, nous devons déterminer les coefficients  $a_{k,ijl}$  de l'expression (4.41). Ces coefficients  $a_{k,ijl}$  peuvent être obtenus par l'intermédiaire du système (4.44). En effet, l'expression (4.44) devant être vérifiée pour toute valeur de  $\mathbf{v}_c$  et  $\hat{\mu}$ , il faut que chacune des combinaisons en puissances croissantes s'annule d'où la détermination des termes  $a_{k,ijl}$ .

Nous nous proposons dans cette partie de donner une procédure d'obtention des coefficients  $a_{k,ijl}$  (en

généralisant au cas où l'on a  $k$  variétés stables, soit  $k$  inconnues).

Cette procédure de détermination des coefficients  $a_{k,ijl}$  consiste à simplifier l'expression analytique (4.44) en ne gardant que les termes concernés par l'ordre  $m$  du polynôme  $\mathbf{h}$  souhaité et ainsi d'avoir l'obtention des coefficients  $a_{k,ijl}$  de manière plus rapide.

Aussi nous donnerons une expression analytique des coefficients  $a_{k,ijl}$  (pour  $k$  quelconque) pour les ordres 2 et 3. Ces expressions analytiques nous permettront tout d'abord d'avoir une fois pour toutes les expressions des variétés stables en fonction des variétés centrées (dans le cas d'une non-linéarité du système de départ polynomiale avec une variété centrée ne comportant que deux éléments) et ainsi de ne pas redéterminer les coefficients  $a_{k,ijl}$  pour chaque étude.

La procédure que nous allons utiliser suit la démarche suivante, en trois étapes :

- expression des variétés stables en fonction des variétés centrées sous la forme d'un polynôme d'ordre  $m$  ( $m \geq 2$ ).
- écriture de l'équation (4.44) simplifiée.
- annulation des termes de l'équation (4.44) simplifiée avec la détermination des coefficients  $a_{k,ijl}$ .

Ainsi, par la suite, nous considérons un système comportant trois variétés centrées notées respectivement  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  et  $\hat{\mu}$ ,  $n$  variétés stables ( $n \geq 2$ ) et notons  $v_{ks}$  la  $k$ -ième variété stable.

L'espace des variétés stables est donc formé par les  $n$  variétés stables ainsi définies. Nous avons :

$$\mathbf{v}_s = \begin{pmatrix} v_{s1} \\ \dots \\ v_{sk} \\ \dots \\ v_{sn} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

L'expression de la  $k$ -ième variété stable en fonction des variétés centrées s'écrit sous la forme :

$$v_{sk} = h_k(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j+l=2}^m \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p a_{k,ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \quad (4.47)$$

le vecteur  $\mathbf{v}_s$  se note sous la forme:

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j=2}^m \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \quad (4.48)$$

Pour alléger les équations, nous écrivons le vecteur total sous la forme

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \hat{\mu}] = \{\mathbf{v}_c^T \quad \mathbf{v}_s^T \quad \hat{\mu}\}^T \quad (4.49)$$

Nous ré-écrivons l'équation différentiel de notre système défini en (4.37) de la manière suivante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{v}_c + \left[ G_{(2)}^{ij} \right] \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \left[ G_{(3)}^{ik} \right] \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}}_s = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{v}_s + \left[ H_{(2)}^{ij} \right] \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \left[ H_{(3)}^{ik} \right] \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \end{cases} \quad (4.50)$$

avec  $G_{(2)}^{ij}$ ,  $G_{(3)}^{ik}$ ,  $H_{(2)}^{ij}$  et  $H_{(3)}^{ik}$  les coefficients des termes non-linéaires quadratiques et cubiques (avec  $1 \leq i \leq 2$ ,  $1 \leq j \leq 25$  et  $1 \leq k \leq 125$ ) provenant des matrices  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{G}_3$ ,  $\mathbf{H}_2$  et  $\mathbf{H}_3$ .

#### 4.3.4.1 Solution du second ordre

L'expression la plus simple des variétés stables en fonction des variétés centrées en considérant un polynôme  $\mathbf{h}$  consiste à prendre un polynôme d'ordre 2, étant donné que  $\mathbf{h}$  ne contient pas de termes constants et linéaires. Ainsi, l'expression des variétés stables en fonction des variétés centrées au second ordre est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j+l=2}^2 \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \\ &= \mathbf{a}_{200} \cdot v_{c1}^2 + \mathbf{a}_{110} \cdot v_{c1} \cdot v_{c2} + \mathbf{a}_{020} \cdot v_{c2}^2 + \mathbf{a}_{101} \cdot v_{c1} \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{011} \cdot v_{c2} \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{002} \cdot \hat{\mu}^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

avec  $\mathbf{a}_{200}$ ,  $\mathbf{a}_{110}$ ,  $\mathbf{a}_{020}$ ,  $\mathbf{a}_{101}$ ,  $\mathbf{a}_{011}$  et  $\mathbf{a}_{002}$  les vecteurs inconnus pour les variétés stables. Nous rappelons que  $\mathbf{a}_{ijl}$  sont des vecteurs de dimension  $n$  comportant chaque coefficient  $a_{k,ijl}$  ( $i + j + l = 2$ ,  $i \in \mathbb{N}^+$ ,  $j \in \mathbb{N}^+$  et  $l \in \mathbb{N}^+$ ) relatif à la  $k$ -ième variété stable.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{200} &= \begin{Bmatrix} a_{1,200} \\ a_{2,200} \end{Bmatrix} & \mathbf{a}_{110} &= \begin{Bmatrix} a_{1,110} \\ a_{2,110} \end{Bmatrix} & \mathbf{a}_{020} &= \begin{Bmatrix} a_{1,020} \\ a_{2,020} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{a}_{101} &= \begin{Bmatrix} a_{1,101} \\ a_{2,101} \end{Bmatrix} & \mathbf{a}_{011} &= \begin{Bmatrix} a_{1,011} \\ a_{2,011} \end{Bmatrix} & \mathbf{a}_{002} &= \begin{Bmatrix} a_{1,002} \\ a_{2,002} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.53)$$

L'équation (4.44) simplifiée pour le second ordre ne considère que les termes d'ordre 2. Nous obtenons alors l'expression simplifiée de cette équation :

$$D_{\mathbf{v}_c, \hat{\mu}} \left( \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) \right) \cdot \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{v}_c - \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \mathbf{0} \quad (4.54)$$

Cette dernière expression correspond donc à l'équation exacte que doivent vérifier les coefficients  $\mathbf{a}_{k,ijl}$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ) pour tout  $\mathbf{v}_c = \{v_{c1} \ v_{c2} \ \hat{\mu}\}^T$ .

Il est alors possible d'obtenir une expression analytique pour les coefficients de la  $k$ -ième variété stable en résolvant l'expression (4.54). Nous obtenons alors

$$a_{k,200} = \frac{H_{(2)}^{k1}}{2J_{c1} - J_{sk}} \quad (4.55)$$

$$a_{k,110} = \frac{H_{(2)}^{k2} + H_{(2)}^{k6}}{J_{c1} + J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.56)$$

$$a_{k,020} = \frac{H_{(2)}^{k7}}{2J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.57)$$

$$a_{k,101} = \frac{H_{(2)}^{k5} + H_{(2)}^{k21}}{J_{c1} - J_{sk}} \quad (4.58)$$

$$a_{k,011} = \frac{H_{(2)}^{k10} + H_{(2)}^{k22}}{J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.59)$$

$$a_{k,002} = \frac{-H_{(2)}^{k25}}{J_{sk}} \quad (4.60)$$

avec  $J_{c1}$  et  $J_{c2}$  les deux termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{J}_c$ .  $J_{sk}$  est le  $k$ -ième terme de la matrice diagonale  $\mathbf{J}_s$  (dans notre cas présent  $1 \leq k \leq 2$ ).  $H_{(2)}^{ki}$  définit le terme de la  $k$ -ième ligne et  $i$ -ième colonne de la matrice  $\mathbf{H}_2$ , qui comporte les termes quadratiques du système non-linéaire.

Nous pouvons donc déjà faire la remarque que l'approximation à l'ordre 2 ne prend en compte que quelques contributions quadratiques  $H_{(2)}^{ij}$  pour définir la relation entre les variétés stables et les variétés centrées. Tous les termes quadratiques  $G_{(2)}^{ij}$  et cubiques  $G_{(3)}^{ik}$  du membre de gauche de l'équation (4.44) et les termes cubiques  $H_{(3)}^{ik}$  du membre de droite sont négligés pour définir l'approximation du polynôme  $\mathbf{h}$ . Ceci explique pourquoi une telle approximation peut s'avérer insuffisante. Si cela est le cas, nous devons alors développer l'approximation à un ordre supérieur.

La généralisation des expressions analytiques des coefficients  $a_{k,ijl}$  au second ordre, pour un système non-linéaire comportant  $n$  variétés stables, est disponible en Annexe B.

#### 4.3.4.2 Solution du troisième ordre

L'approximation à l'ordre 2 peut être insuffisante pour décrire correctement et de manière assez précise l'expression du polynôme  $\mathbf{h}$ . Il est alors nécessaire d'augmenter l'expression de ce polynôme en ajoutant les termes cubiques en  $\mathbf{v}_c = \{v_{c1} \ v_{c2} \ \hat{\mu}\}^T$  à l'expression définie précédemment pour le polynôme  $\mathbf{h}$  en (4.51).

L'expression des variétés stables en fonction des variétés centrées au troisième ordre s'écrit donc sous la forme :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j+l=2}^3 \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \quad (4.61)$$

soit, sous forme développée

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s = \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) &+ \mathbf{a}_{300} \cdot v_{c1}^3 + \mathbf{a}_{210} \cdot v_{c1}^2 \cdot v_{c2} + \mathbf{a}_{120} \cdot v_{c1} \cdot v_{c2}^2 + \mathbf{a}_{030} \cdot v_{c2}^3 \\ &+ \mathbf{a}_{201} \cdot v_{c1}^2 \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{111} \cdot v_{c1} \cdot v_{c2} \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{021} \cdot v_{c2}^2 \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{102} \cdot v_{c1} \cdot \hat{\mu}^2 + \mathbf{a}_{012} \cdot v_{c2} \cdot \hat{\mu}^2 + \mathbf{a}_{003} \cdot \hat{\mu}^3 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Connaissant déjà l'expression de  $\mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$ , nous avons juste à considérer l'expression simplifiée de l'équation (4.44) en ne gardant que les termes d'ordre 3. Nous obtenons alors l'expression simplifiée de cette équation:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}_c, \hat{\mu}} \left( \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) \right) \cdot \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{v}_c + D_{\mathbf{v}_c, \hat{\mu}} \left( \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) \right) \cdot \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) - \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) \\ - \mathbf{H}_2 \left( [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}, \hat{\mu}] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}, \hat{\mu}] \right) - \mathbf{H}_3(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Ce système correspond donc à l'expression exacte des termes cubiques en  $\mathbf{v}_c = \{v_{c1} \ v_{c2} \ \hat{\mu}\}^T$  de l'équation (4.44).

Cette dernière expression est plus complexe que celle obtenue pour l'approximation au second ordre, définie en (4.54). En effet, dans l'expression de l'équation (4.44), nous voyons apparaître la contribution des termes quadratiques  $G_{(2)}^{ij}$  et  $H_{(2)}^{ij}$  et des termes cubiques  $H_{(3)}^{ik}$ .

A partir de la résolution de ce système, il est donc possible d'avoir les expressions algébriques des coefficients  $a_{k,ijl}$  (avec  $i + j + l = 3$  et  $1 \leq k \leq n$ ).

Nous obtenons les expressions suivantes:

$$a_{k,300} = \frac{-2a_{k,200}G_{(2)}^{11} + a_{1,200} \left( H_{(2)}^{k3} + H_{(2)}^{k11} \right) + a_{2,200} \left( H_{(2)}^{k4} + H_{(2)}^{k16} \right) - a_{k,110}G_{(2)}^{21} + H_{(3)}^{k1}}{3J_{c1} - J_{sk}} \quad (4.64)$$

$$a_{k,210} = \frac{-2a_{k,200} \left( G_{(2)}^{12} + G_{(2)}^{16} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{11} + G_{(2)}^{22} + G_{(2)}^{26} \right) - 2a_{k,020}G_{(2)}^{21} + a_{1,110} \left( H_{(2)}^{k3} + H_{(2)}^{k11} \right) + a_{2,110} \left( H_{(2)}^{k4} + H_{(2)}^{k16} \right) + a_{1,200} \left( H_{(2)}^{k8} + H_{(2)}^{k12} \right) + a_{2,200} \left( H_{(2)}^{k9} + H_{(2)}^{k117} \right) + H_{(3)}^{k2} + H_{(3)}^{k6} + H_{(3)}^{k26}}{2J_{c1} + J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.65)$$

$$a_{k,120} = \frac{-2a_{k,020} \left( G_{(2)}^{22} + G_{(2)}^{26} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{27} + G_{(2)}^{12} + G_{(2)}^{16} \right) - 2a_{k,200}G_{(2)}^{17} + a_{1,020} \left( H_{(2)}^{k3} + H_{(2)}^{k11} \right) + a_{2,020} \left( H_{(2)}^{k4} + H_{(2)}^{k16} \right) + a_{1,110} \left( H_{(2)}^{k8} + H_{(2)}^{k12} \right) + a_{2,110} \left( H_{(2)}^{k9} + H_{(2)}^{k117} \right) + H_{(3)}^{k7} + H_{(3)}^{k27} + H_{(3)}^{k31}}{2J_{c1} + J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.66)$$

$$a_{k,030} = \frac{-2a_{k,020}G_{(2)}^{27} + a_{1,020} \left( H_{(2)}^{k8} + H_{(2)}^{k12} \right) + a_{2,020} \left( H_{(2)}^{k9} + H_{(2)}^{k17} \right) - a_{k,110}G_{(2)}^{17} + H_{(3)}^{k32}}{3J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.67)$$

$$a_{k,201} = \frac{-a_{k,101}G_{(2)}^{11} - a_{k,011}G_{(2)}^{21} - 2a_{k,200} \left( G_{(2)}^{15} + G_{(2)}^{121} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{25} + G_{(2)}^{221} \right) + a_{1,101} \left( H_{(2)}^{k3} + H_{(2)}^{k11} \right) + a_{2,101} \left( H_{(2)}^{k4} + H_{(2)}^{k16} \right) + a_{1,200} \left( H_{(2)}^{k15} + H_{(2)}^{k23} \right) + a_{2,200} \left( H_{(2)}^{k20} + H_{(2)}^{k24} \right) + H_{(3)}^{k5} + H_{(3)}^{k21} + H_{(3)}^{k101}}{2J_{c1} - J_{sk}} \quad (4.68)$$

$$a_{k,021} = \frac{-a_{k,101}G_{(2)}^{17} - a_{k,011}G_{(2)}^{27} - 2a_{k,020} \left( G_{(2)}^{110} + G_{(2)}^{122} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{210} + G_{(2)}^{222} \right) + a_{1,020} \left( H_{(2)}^{k15} + H_{(2)}^{k23} \right) + a_{2,020} \left( H_{(2)}^{k20} + H_{(2)}^{k24} \right) + a_{1,011} \left( H_{(2)}^{k8} + H_{(2)}^{k12} \right) + a_{2,011} \left( H_{(2)}^{k9} + H_{(2)}^{k17} \right) + H_{(3)}^{k35} + H_{(3)}^{k47} + H_{(3)}^{k107}}{2J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.69)$$

$$a_{k,102} = \frac{-2a_{k,200}G_{(2)}^{125} - a_{k,110}G_{(2)}^{225} - a_{k,101} \left( G_{(2)}^{15} + G_{(2)}^{121} \right) - a_{k,011} \left( G_{(2)}^{25} + G_{(2)}^{221} \right) + a_{1,101} \left( H_{(2)}^{k15} + H_{(2)}^{k23} \right) + a_{2,101} \left( H_{(2)}^{k20} + H_{(2)}^{k24} \right) + a_{1,002} \left( H_{(2)}^{k3} + H_{(2)}^{k11} \right) + a_{2,002} \left( H_{(2)}^{k4} + H_{(2)}^{k16} \right) + H_{(3)}^{k25} + H_{(3)}^{k105} + H_{(3)}^{k121}}{J_{c1} - J_{sk}} \quad (4.70)$$

$$a_{k,012} = \frac{-a_{k,110}G_{(2)}^{125} - 2a_{k,020}G_{(2)}^{225} - a_{k,101} \left( G_{(2)}^{110} + G_{(2)}^{122} \right) - a_{k,011} \left( G_{(2)}^{210} + G_{(2)}^{222} \right) + a_{2,101} \left( H_{(2)}^{k20} + H_{(2)}^{k24} \right) + a_{1,011} \left( H_{(2)}^{k15} + H_{(2)}^{k23} \right) + a_{1,002} \left( H_{(2)}^{k8} + H_{(2)}^{k12} \right) + a_{2,002} \left( H_{(2)}^{k9} + H_{(2)}^{k17} \right) + H_{(3)}^{k50} + H_{(3)}^{k110} + H_{(3)}^{k122}}{J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.71)$$

$$a_{k,111} = \frac{-a_{k,101} \left( G_{(2)}^{12} + G_{(2)}^{16} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{15} + G_{(2)}^{121} + G_{(2)}^{110} + G_{(2)}^{122} \right) - 2a_{k,200} \left( G_{(2)}^{110} + G_{(2)}^{122} \right) - 2a_{k,020} \left( G_{(2)}^{25} + G_{(2)}^{221} \right) - a_{k,011} \left( G_{(2)}^{22} + G_{(2)}^{26} \right) + a_{1,110} \left( H_{(2)}^{k15} + H_{(2)}^{k23} \right) + a_{2,110} \left( H_{(2)}^{k20} + H_{(2)}^{k24} \right) + a_{1,101} \left( H_{(2)}^{k8} + H_{(2)}^{k12} \right) + a_{2,101} \left( H_{(2)}^{k9} + H_{(2)}^{k17} \right) + a_{1,011} \left( H_{(2)}^{k3} + H_{(2)}^{k11} \right) + a_{2,011} \left( H_{(2)}^{k4} + H_{(2)}^{k16} \right) + H_{(3)}^{k10} + H_{(3)}^{k22} + H_{(3)}^{k30} + H_{(3)}^{k46} + H_{(3)}^{k102} + H_{(3)}^{k106}}{J_{c1} + J_{c2} - J_{sk}} \quad (4.72)$$

$$a_{k,003} = \frac{a_{k,102}G_{(2)}^{125} + a_{k,012}G_{(2)}^{225} - a_{1,002} \left( H_{(2)}^{k15} + H_{(2)}^{k23} \right) - a_{2,002} \left( H_{(2)}^{k20} + H_{(2)}^{k24} \right) - H_{(3)}^{k125}}{J_{sk}} \quad (4.73)$$

avec  $J_{c1}$  et  $J_{c2}$  les deux termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{J}_c$ .  $J_{sk}$  est le  $k$ -ième terme de la matrice diagonale  $\mathbf{J}_s$  (dans notre cas présent  $1 \leq k \leq 2$ ).  $H_{(2)}^{ki}$  et  $H_{(3)}^{ki}$  définissent les termes de la  $k$ -ième ligne et  $i^e$  colonne des matrices  $\mathbf{H}_2$  et  $\mathbf{H}_3$  qui comportent les termes quadratiques et cubiques du système non-linéaire.  $G_{(2)}^{ki}$  définit les termes de la  $k$ -ième ligne et  $i$ -ième colonne des matrices  $\mathbf{G}_2$  qui comporte les termes quadratiques du système non-linéaire.

La détermination des coefficients du troisième ordre pour l'expression des variétés stables en fonction des variétés centrées prend en compte des termes quadratiques de  $\mathbf{G}_2$  et des termes cubiques de  $\mathbf{H}_3$ , ce qui n'était pas le cas dans la détermination des coefficients du second ordre. De même, nous remarquons que nous prenons en compte plus de termes quadratiques de  $\mathbf{H}_2$  que pour la détermination des coefficients du second ordre. Ainsi, cela laisse penser que l'approximation au troisième ordre va permettre une meilleure approximation de la fonction  $\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$  par la prise en compte d'une plus grande partie des non-linéarités du système de départ.

La généralisation des expressions analytiques des coefficients  $a_{k,ijl}$  au troisième ordre, pour un système non-linéaire comportant  $n$  variétés stables, est disponible en Annexe B.

De même les expressions  $\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$  au quatrième et cinquième ordre ainsi que les expressions simplifiées de l'équation (4.44) correspondantes sont données en Annexe B. Bien entendu, le but étant de trouver, pour un problème donné l'approximation  $\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$  la plus simple possible pour reproduire la dynamique du système de départ.

#### 4.3.4.3 Solution à un ordre supérieur

Il est possible de suivre la même démarche pour une approximation de  $\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$  pour un ordre supérieur  $m$  avec

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c) = \sum_{p=i+j+l=2}^m \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \quad (4.74)$$

Comme décrit précédemment, nous recherchons alors les coefficients inconnus  $a_{k,ijl}$  (avec  $i + j + l = m$  et  $k = 1, 2$ ) en ne tenant compte que des termes de puissances égales à  $m$  en  $\mathbf{v}_c = \{v_{c1} \ v_{c2} \ \hat{\mu}\}^T$  de l'équation (4.44).

Les coefficients du polynôme  $\mathbf{h}$  peuvent être déterminés par puissance croissante, sans avoir à recalculer les termes des puissances inférieures. Aussi, pour le calcul des coefficients d'ordre  $m$ , les expressions des coefficients d'ordre  $m - 1$  sont nécessaires. Plus nous augmentons l'ordre  $m$  dans l'approximation du polynôme  $\mathbf{h}$ , plus nous prenons en compte les contributions de termes non-linéaires et donc plus nous aurons une approximation fine de l'expression des variétés stables  $v_s$ .

Nous aboutissons finalement au système différentiel en  $\dot{\mathbf{v}}_c = \{v_{c1} \ v_{c2}\}^T$ , établi au voisinage du point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{J}_c(\hat{\mu}) \cdot \mathbf{v}_c + \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}) + \mathbf{G}_3(\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}) \\ \dot{\hat{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (4.75)$$

avec l'expression des variétés stables  $\mathbf{v}_s$  sous la forme d'un polynôme en  $\mathbf{v}_c = \{v_{c1} \ v_{c2} \ \hat{\mu}\}^T$  à l'ordre  $m$  permettant de reproduire le comportement dynamique non-linéaire du système.

### 4.3.5 Obtention des cycles limites

Nous avons maintenant un système non-linéaire à trois variables. Afin de valider l'application de la méthode de la variété centrale, nous pouvons comparer les cycles limites obtenus pour le système non-linéaire complet (4.4) et pour le système réduit (4.75) dans la base de la variété centrale augmentée, établi au voisinage du point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$ .

Les cycles limites sont donc calculés près du point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$  pour

$$\mu = \mu_0 + \bar{\mu} \quad (4.76)$$

avec  $\mu_0$  la valeur du coefficient de frottement pour lequel il y a apparition d'instabilité et en considérant une faible variation  $\bar{\mu}$  de ce coefficient de frottement tel que

$$\begin{cases} \bar{\mu} = \varepsilon \mu_0 \\ \varepsilon \ll 1 \end{cases} \quad (4.77)$$

De cette façon, nous nous plaçons sur une instabilité avec une valeur propre à partie réelle positive et la recherche du cycle limite s'effectue en considérant l'équation (4.75) avec le paramètre "unfolding"  $\dot{\hat{\mu}} = 0$ .

Dans le cadre de notre étude, nous recherchons des cycles limites très proches du point de bifurcation de Hopf. Aussi, les expressions  $\mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \bar{\mu})$  peuvent être approximées par  $\mathbf{h}(\mathbf{v}_c)$ . Ceci revient à exprimer localement les variétés stables exclusivement par l'intermédiaire des variétés centrées  $\mathbf{v}_c$ . Nous avons alors  $\mu = O(\mathbf{v}_c)$ . Le but de cette approximation est de réduire le nombre de coefficients  $a_{k,ijl}$  à prendre en compte et ainsi à alléger les calculs.

Le système différentiel s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{J}_c(\mu) \cdot \mathbf{v}_c + \mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu] + \mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu] \\ \dot{\mu} = 0 \end{cases} \quad (4.78)$$

D'autre part, les termes non-linéaires sont approximés en gardant les valeurs obtenues au point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$ . Cette dernière approximation implique alors que seuls les termes non-linéaires en  $\mu \cdot \mathbf{v}_c$  sont pris en compte. Ainsi, nous avons les approximations des termes  $\mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu]$  et  $\mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu]$ :

$$\mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu] \approx \mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu_0] \quad (4.79)$$

$$\mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu] \approx \mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu_0] \quad (4.80)$$

Le système différentiel simplifié en  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$  est alors obtenu:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{J}_c(\mu) \cdot \mathbf{v}_c + \mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu_0] + \mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu_0] \\ \dot{\mu} = 0 \\ \mu = \mu_0(1 + \varepsilon) \quad (\varepsilon \ll 1) \\ \mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c) = \sum_{p=i+j=2}^m \sum_{j=0}^p \mathbf{a}_{ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \quad (m \geq 2) \end{cases} \quad (4.81)$$

Par intégration temporelle du système (4.81), nous obtenons les cycles limites suivant les variables  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  dans la base de la variété centrale. Par transformations inverses pour passer de la base de la variété centrale à l'espace physique réel de départ à quatre variables (système (4.32)), les cycles limites suivant les variables de départ  $X$  et  $Y$ , définies en figure 4.1, sont déterminés au voisinage du point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$  pour  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$  avec  $\bar{\mu} = \varepsilon \mu_0$  ( $\varepsilon \ll 1$ ).

Pour notre étude, une approximation de la fonction  $\mathbf{h}$  à l'ordre 5 est considérée. En effet, une approximation de  $\mathbf{h}$  au second ordre conduit à une divergence du calcul des cycles limites par la méthode de la variété centrale. Une approximation de  $\mathbf{h}$  au troisième ou au quatrième ordre donne une bonne estimation des cycles limites, mais la différence entre les cycles limites obtenus par une intégration temporelle classique et par la méthode de la variété centrale est encore visible comme illustré en figures 4.26(a) et 4.27(a). Une approximation de  $\mathbf{h}$  au cinquième ordre donne une estimation du cycle limite très proche du cycle limite obtenu par l'intégration temporelle comme illustré en figures 4.26(b) et 4.27(b).

Comme décrit précédemment, nous avons, d'après l'étude de stabilité du système, la valeur du coefficient de frottement au point de bifurcation de Hopf vérifiant les relations (4.20). Le point de bifurcation de Hopf est détecté pour  $\mu_0 = 0.204$ .

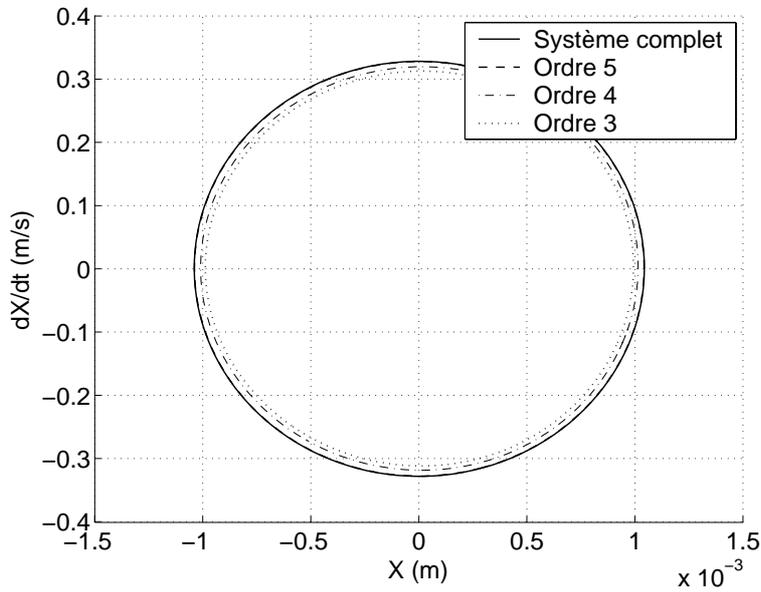
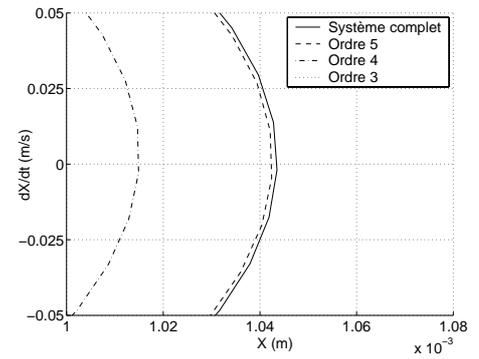
Nous obtenons alors les cycles limites par intégration temporelle classique du système (4.81) et nous comparons avec les cycles limites obtenus par intégration temporelle du système complet (4.4).

Par conséquent, la méthode de réduction de la variété centrale est validée sur ce système. Elle permet de réduire le nombre de degrés de liberté du système de départ sans perte de la contribution des non-linéarités. Le comportement dynamique non-linéaire du système réduit aux variétés centrées est similaire au système dynamique non-linéaire de départ.

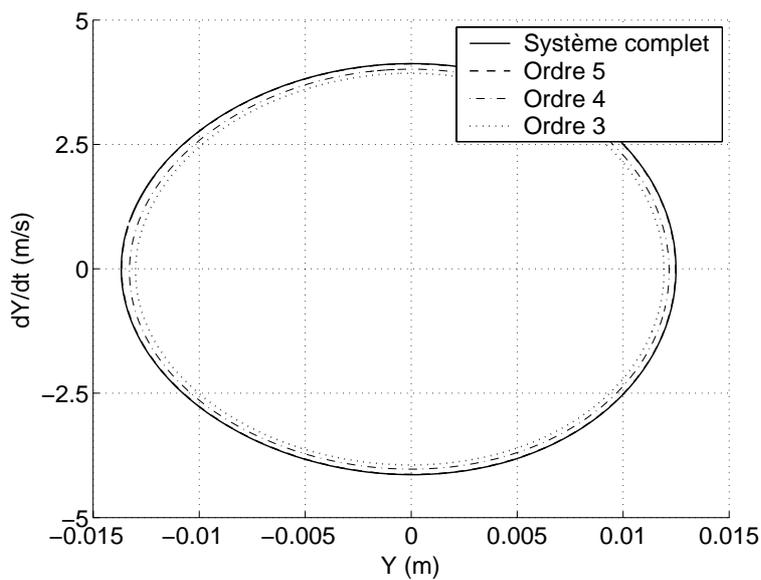
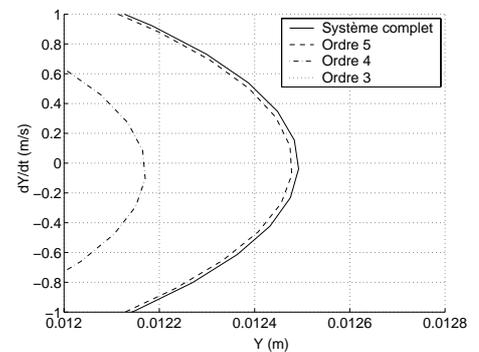
Le principal avantage de la méthode de la variété centrale est de réduire le système à seulement deux degrés de liberté dans le cas d'un point de bifurcation de Hopf avec couplage de deux modes. Cette réduction est forte intéressante car elle permet alors de mettre en place d'autres méthodes non-linéaires à la suite de cette réduction.

---

La méthode de simplification des approximants fractionnels sur le système (4.81) va maintenant être explicitée. L'utilisation des approximants de Padé va permettre de simplifier l'expression non-linéaire de l'équation (4.81) et donc de réduire le temps de calcul pour l'obtention des cycles limites. De plus, les approximants de Padé permettent d'obtenir des cycles limites corrects alors que pour le même nombre de termes non-linéaires, le système (4.81) peut diverger. Ces différentes propriétés seront discutées par la suite.

(a) Cycle limite  $(X, \dot{X})$ 

(b) Zoom sur les cycles limites

FIG. 4.26: Cycle limite  $(X, \dot{X})$  pour  $\bar{\mu} = \mu_0/1000$ (a) Cycle limite  $(Y, \dot{Y})$ 

(b) Zoom sur les cycles limites

FIG. 4.27: Cycle limite  $(Y, \dot{Y})$  pour  $\bar{\mu} = \mu_0/1000$

### 4.3.6 Transformation du système pour les approximants fractionnels

Nous désirons maintenant utiliser d'autres méthodes non-linéaires afin de simplifier les termes non-linéaires du système différentiel (4.81). L'objectif est de réduire le temps de calcul et de ne garder qu'un faible nombre de termes non-linéaires. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à l'utilisation des approximants de Padé.

Pour cela, nous devons ré-écrire ce système suivant les variables  $v_{c2}$  et  $v_{c1}$  exclusivement. En effet, les expressions  $\mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu_0]$  et  $\mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu_0]$  sont des séries en  $v_{c2}$  et  $v_{c1}$  de degrés inférieurs ou égaux à  $2m$  et  $3m$  respectivement. De plus ces expressions ne contiennent pas de termes constants et linéaires ( $m \geq 2$ ). De manière plus détaillée, nous avons les expressions de  $\mathbf{G}_2$  et  $\mathbf{G}_3$  suivantes:

$$\mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c)] = \begin{bmatrix} g_{2.11} & \cdots & g_{2.116} \\ g_{2.12} & \cdots & g_{2.216} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ h_1(v_{c1}, v_{c2}) \\ h_2(v_{c1}, v_{c2}) \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ h_1(v_{c1}, v_{c2}) \\ h_2(v_{c1}, v_{c2}) \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c)] = \begin{bmatrix} g_{3.11} & \cdots & g_{3.164} \\ g_{3.12} & \cdots & g_{3.264} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ h_1(v_{c1}, v_{c2}) \\ h_2(v_{c1}, v_{c2}) \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ h_1(v_{c1}, v_{c2}) \\ h_2(v_{c1}, v_{c2}) \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ h_1(v_{c1}, v_{c2}) \\ h_2(v_{c1}, v_{c2}) \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

Soit

$$\mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c)] = \begin{Bmatrix} \sum_{p=i+j=2}^{2m} \sum_{j=0}^p \varphi_{1,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{p=i+j=2}^{2m} \sum_{j=0}^p \varphi_{2,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{Bmatrix} = \mathbf{g}_2(\mathbf{v}_c) \quad (4.84)$$

$$\mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c)] = \begin{Bmatrix} \sum_{p=i+j=2}^{3m} \sum_{j=0}^p \gamma_{1,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{p=i+j=2}^{3m} \sum_{j=0}^p \gamma_{2,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{Bmatrix} = \mathbf{g}_3(\mathbf{v}_c) \quad (4.85)$$

avec  $\varphi_{1,ij}$  et  $\varphi_{2,ij}$  correspondant aux termes des matrices pour les contributions non-linéaires de degrés inférieurs à  $2m + 1$  déduits des termes non-linéaires quadratiques de l'expression (4.78).  $\gamma_{1,ij}$  et  $\gamma_{2,ij}$  correspondent aux termes des matrices pour les contributions non-linéaires de degrés inférieurs à  $3m + 1$  déduits des termes non-linéaires cubiques de l'expression (4.78).

En substituant les équations (4.84) et (4.85) dans l'équation (4.75), nous obtenons

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{v}_{c2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_c \begin{Bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum_{p=i+j=2}^{2m} \sum_{j=0}^p \varphi_{1,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{p=i+j=2}^{2m} \sum_{j=0}^p \varphi_{2,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum_{p=i+j=2}^{3m} \sum_{j=0}^p \gamma_{1,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{p=i+j=2}^{3m} \sum_{j=0}^p \gamma_{2,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{Bmatrix} \quad (4.86)$$

avec  $\mathbf{Jc}$  la matrice  $2 \times 2$  contenant les termes linéaires en  $v_{c2}$  et  $v_{c1}$ .  $\gamma_{1,ij}$ ,  $\gamma_{2,ij}$ ,  $\varphi_{1,ij}$  et  $\varphi_{2,ij}$  contiennent les termes en  $v_{c2}^i \cdot v_{c1}^j$  (avec  $i + j \geq 2$ ) provenant de  $\mathbf{G}_2[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu_0]$  et  $\mathbf{G}_3[\mathbf{v}_c, \mathbf{h}(\mathbf{v}_c), \mu_0]$  pour les variables  $v_{c2}$  et  $v_{c1}$ , respectivement.

Finalement, nous pouvons écrire le système sous la forme:

$$\begin{cases} v_{c1} = \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{1,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ v_{c2} = \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{2,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{cases} \quad (4.87)$$

où  $c_{1,ij}$  et  $c_{2,ij}$  sont les coefficients associés aux termes  $v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j$  ( $i + j \geq 1$ ) pour les variables  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  respectivement.

En substituant l'équation (4.87) dans l'équation (4.86), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{Jc} \begin{Bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum_{p=i+j=2}^{3m} \sum_{j=0}^p \gamma_{1,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{p=i+j=2}^{3m} \sum_{j=0}^p \gamma_{2,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sum_{p=i+j=2}^{2m} \sum_{j=0}^p \varphi_{1,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{p=i+j=2}^{2m} \sum_{j=0}^p \varphi_{2,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{1,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{2,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{Bmatrix} \quad (4.88) \end{aligned}$$

En regroupant les coefficients des différents termes polynomiaux pour chaque puissance de  $v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j$  ( $i + j \geq 1$ ), nous obtenons un système algébrique pour la détermination des coefficients  $c_{1,ij}$  et  $c_{2,ij}$  par rapport aux coefficients  $\gamma_{1,ij}$ ,  $\varphi_{1,ij}$  et  $\gamma_{2,ij}$  et  $\varphi_{2,ij}$ , respectivement.

Les déterminations des coefficients  $c_{1,ij}$  et  $c_{2,ij}$  ( $i + j \geq 1$ ) sont totalement indépendantes les uns des autres. De plus l'expression des coefficients  $c_{1,10}$ ,  $c_{1,01}$ ,  $c_{2,10}$  et  $c_{2,01}$  est défini exclusivement à partir de l'expression de  $\mathbf{Jc}(\mu)$ . Ces expressions sont définies en  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$ , étant donné que nous nous situons au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $M_0, \mu_0$ ) et que nous gardons uniquement la contribution de la variation du coefficient de frottement  $\bar{\mu}$  sur les termes linéaires. Ainsi, nous avons

$$c_{1,10}(\mu) = J_{c(1,1)}(\mu) = J_{c(1,1)}(\mu_0) + J_{c(1,1)}(\bar{\mu}) \quad (4.89)$$

$$c_{1,01}(\mu) = J_{c(1,2)}(\mu) = J_{c(1,2)}(\mu_0) + J_{c(1,2)}(\bar{\mu}) \quad (4.90)$$

$$c_{2,10}(\mu) = J_{c(2,1)}(\mu) = J_{c(2,1)}(\mu_0) + J_{c(2,1)}(\bar{\mu}) \quad (4.91)$$

$$c_{2,01}(\mu) = J_{c(2,2)}(\mu) = J_{c(2,2)}(\mu_0) + J_{c(2,2)}(\bar{\mu}) \quad (4.92)$$

Par contre, les autres coefficients  $c_{1,ij}$  et  $c_{2,ij}$  ( $i + j \geq 2$ ) sont eux définis au point de bifurcation de Hopf  $(m_0, \mu_0)$  car nous avons négligé la participation de la variation  $\bar{\mu}$  du coefficient de frottement pour les termes non-linéaires, comme indiqué en (4.79) et (4.80). Tous ces coefficients  $c_{1,ij}$  et  $c_{2,ij}$  ( $i + j \geq 1$ ) sont des nombres complexes.

Le système différentiel (4.87) peut donc se mettre sous la forme, en différenciant les termes calculés au point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$  et ceux calculés au voisinage de ce point pour  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{c1} \\ \dot{v}_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,10}(\mu) v_{c1} + c_{1,01}(\mu) v_{c2} \\ c_{2,10}(\mu) v_{c1} + c_{2,01}(\mu) v_{c2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 2 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{1,ij}(\mu_0) \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 2 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{2,ij}(\mu_0) \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

Nous pouvons donc maintenant ré-écrire le système différentiel de la variété centrale (4.81) sous forme d'une série de puissances croissantes en  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  uniquement en éliminant la relation implicite des variétés stables en fonction des variétés centrées sous forme du polynôme  $\mathbf{h}$ . Nous aboutissons au système

$$\begin{cases} \dot{v}_{ck} = c_{k,10}(\mu) v_{c1} + c_{k,01}(\mu) v_{c2} + \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 2 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{k,ij}(\mu_0) \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j & (1 \leq k \leq 2) \\ \dot{\mu} = 0 \\ \mu = \mu_0(1 + \varepsilon) & (\varepsilon \ll 1) \end{cases} \quad (4.94)$$

où l'entier positif  $m$  correspond à l'ordre d'approximation du polynôme  $\mathbf{h}$  pour l'expression des variétés stables en fonction des variétés centrées.

Ce système différentiel va maintenant être approximé en appliquant les approximants fractionnels.

### 4.3.7 Approximation fractionnelle à deux variables

Dans cette partie, nous expliquerons la démarche consistant à approximer l'expression différentielle de l'équation (4.94) sous la forme d'une fraction comportant au numérateur et au dénominateur des séries de puissances croissantes.

Nous laissons le soin au lecteur de se rapporter à la description et aux définitions relatives à de tels approximants fractionnelles, effectuées au paragraphe 3.5.3. Dans cette partie, les notions et constructions des approximants fractionnels seront définies brièvement, dans le cadre de notre étude et de son application au système différentiel (4.94).

### 4.3.7.1 Choix des approximants

Il existe plusieurs types d'approximants possibles (CA approximants, SOD approximants et GOD approximants) pour simplifier une série de puissances croissantes. Ces différentes classes d'approximants ont été explicités dans le paragraphe 3.5.3. Il est donc nécessaire avant toute chose de choisir quel type d'approximants utiliser. Pour cela, nous reviendrons sur notre système différentiel à simplifier.

Dans notre cas précis, nous désirons approximer le système différentiel (4.94), qui peut se mettre sous forme condensée:

$$\begin{cases} \dot{v}_{ck} = f_k(v_{c1}, v_{c2}, \mu) = \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{k,ij} v_{c1}^i v_{c2}^j & (1 \leq k \leq 2) \\ \dot{\mu} = 0 \\ \mu = \mu_0 (1 + \varepsilon) & (\varepsilon \ll 1) \end{cases} \quad (4.95)$$

avec  $f_k(v_{c1}, v_{c2}, \mu)$  des séries de puissances croissantes à l'ordre  $m$  en  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$ .

Le système comporte des séries à deux variables  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$ . Les approximants fractionnels à deux variables, comme explicité dans le paragraphe 3.5.3, sont appliqués. La forme générale des approximants de la série  $f_k(v_{c1}, v_{c2}, \mu)$  à deux variables  $(v_{c1}, v_{c2})$  s'exprime sous la forme

$$[m_1, m_2/n_1, n_2]_{f_k}(v_{c1}, v_{c2}) = \frac{\sum_{\alpha=0}^{m_1} \sum_{\beta=0}^{m_2} n_{k,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{\sum_{\alpha=0}^{n_1} \sum_{\beta=0}^{n_2} d_{k,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta} \quad (1 \leq k \leq 2) \quad (4.96)$$

Nous notons  $N_k^{[m_1, m_2/n_1, n_2]}(v_{c1}, v_{c2})$  et  $D_k^{[m_1, m_2/n_1, n_2]}(v_{c1}, v_{c2})$  les numérateurs et dénominateurs des approximants  $[m_1, m_2/n_1, n_2]_{f_k}(v_{c1}, v_{c2})$ .

Tout d'abord, les fonctions  $f_k(v_{c1}, v_{c2})$  sont déjà des séries en puissances croissantes tronquées à l'ordre  $3m$  comme indiqué en (4.94), avec l'entier  $m$  connu, définissant l'ordre d'approximation du polynôme  $\mathbf{h}$  des variétés stables en fonction des variétés centrées.

Or, la détermination des coefficients  $n_{k,\alpha\beta}$  et  $d_{k,\alpha\beta}$  des approximants suit un schéma de construction très précis, comme décrit dans le paragraphe 3.5.3. En effet, les régions définissant les valeurs des coefficients  $i$  et  $j$ , associées aux termes  $v_{c1}^i v_{c2}^j$  de la série  $f_k(v_{c1}, v_{c2})$  définie en (4.94), vérifient dans le cas général le schéma décrit en figure 3.3. Les régions  $S_1, S_2, S_3, S_4$  et  $S_5$  correspondent alors aux couples de valeurs  $(i, j)$  nécessaires pour obtenir les coefficients des approximants.

Comme la série de départ est une série en puissances croissantes  $v_{c1}^i v_{c2}^j$  tronquée à l'ordre  $3m$  ( $i + j \leq 3m$ ), elle définit elle-même une région, que nous notons  $S_{\text{série}}$ , comme indiquée en figure 4.28. Une utilisation judicieuse des approximants nécessite alors que la région  $S_{\text{série}}$  de la série  $f_k$  englobe les régions  $S_1, S_2, S_3, S_4$  et  $S_5$  des approximants. Dans le cas contraire, il est toujours possible de calculer les approximants, étant donné que pour les puissances  $v_{c1}^i v_{c2}^j$  tel que  $i + j \geq 3m$ , les termes de la série  $f_k$  sont nuls, mais dans ce dernier cas, les approximants vont correspondre à une réécriture de la série plutôt qu'à une simplification de cette dernière. Nous devons donc avoir de préférence la relation suivante vérifiée

$$\max(m_1 + n_1 + 1, m_2 + n_2 + 1, m_1 + m_2, n_1 + n_2, m_1 + n_2, m_2 + n_1) \leq 3m \quad (4.97)$$

De plus, les deux variables  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  correspondent aux deux variétés centrées du système différentiel (4.75). Nous pouvons penser que le rôle de ces deux variétés centrées est sensiblement le même du point de vue de leur contribution sur les non-linéarités définies par  $v_{c1}^i v_{c2}^j$ . Ainsi, lors de la recherche de l'expression des approximatifs de la série  $f_k(v_{c1}, v_{c2})$ , nous n'avons pas à privilégier un ordre de puissance plus grand pour l'une ou l'autre des variables centrées. Nous prenons donc

$$m_1 = m_2 = M \quad (4.98)$$

$$n_1 = n_2 = N \quad (4.99)$$

Finalement, les approximatifs qui sont retenus pour cette étude correspondent au SOD approximatifs:

$$[M/N]_{f_k}(v_{c1}, v_{c2}) = \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{k,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{\sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{k,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta} \quad (1 \leq k \leq 2) \quad (4.100)$$

La construction des coefficients et les régions  $S_1, S_2, S_3, S_4$  et  $S_5$  associées sont illustrées en figure 4.29.

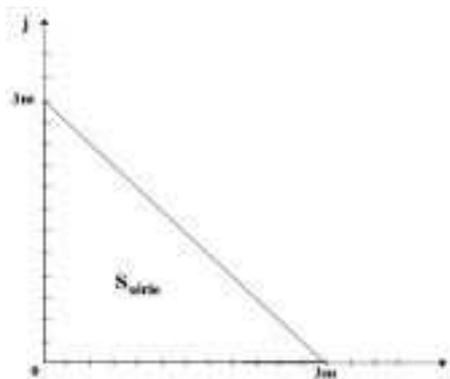


FIG. 4.28: Région définie par la série  $f_k$

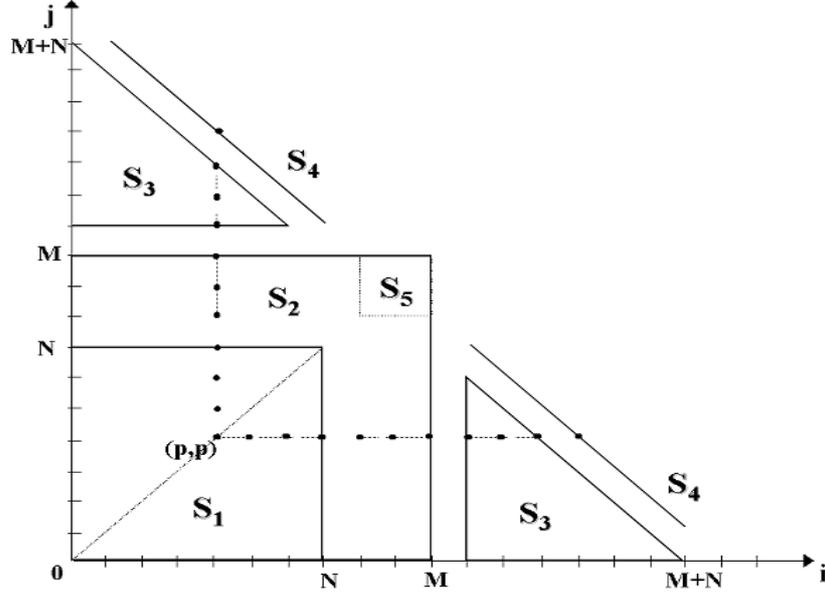


FIG. 4.29: Schéma de construction des SOD approximatifs

#### 4.3.7.2 Détermination des coefficients des approximatifs

Nous cherchons donc à construire les SOD approximatifs correspondant à la série (4.93). Pour cela, nous nous basons sur le schéma donné en figure 4.29 en utilisant la méthode de la fourche (littéralement "sprong method") qui a été développée par Hugues Jones et Makinson [68].

Nous souhaitons construire les SOD approximatifs  $[M/N]_{f_k}(v_{c1}, v_{c2})$  de la série  $f_k(v_{c1}, v_{c2})$ , tel que:

$$\sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 2 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{k,ij} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j = \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{k,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{\sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{k,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} e_{k,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta \quad (1 \leq k \leq 2) \quad (4.101)$$

avec les coefficients  $e_{k,\alpha\beta}$  autant que possible nuls.

Par analogie avec le paragraphe 3.5.3, la détermination des coefficients  $d_{k,\alpha\beta}$  et  $n_{k,\alpha\beta}$  s'effectue à partir de la résolution des cinq blocs d'équations suivantes:

$$d_{k,00} = 1 \quad (4.102)$$

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} d_{k,ij} c_{k,\alpha-i;\beta-j} = n_{k,\alpha\beta} \quad 0 \leq \alpha \leq M, \quad 0 \leq \beta \leq M \quad (4.103)$$

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^N d_{k,ij} c_{k,\alpha-i;\beta-j} = 0 \quad 0 \leq \alpha < M, \quad M < \beta \leq M + N - \alpha \quad (4.104)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{\beta} d_{k,ij} c_{k,\alpha-i;\beta-j} = 0 \quad M \leq \alpha < M + N - \beta, \quad 0 \leq \beta < M \quad (4.105)$$

$$\sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j=0}^N d_{k,ij} c_{k,\nu-i;M+N+1-\nu-j} + d_{k,ji} c_{k,M+N+1-\nu-i;\nu-j} = 0 \quad 1 \leq \nu \leq N \quad (4.106)$$

Nous pouvons maintenant discuter sur l'obtention des coefficients des approximants. Intéressons nous tout d'abord à la détermination des coefficients  $d_{k,ij}$  du dénominateur. Nous devons déterminer au total  $k \times ((N+1)^2 - 1)$  coefficients ( $1 \leq k \leq 2$ ), étant donné que  $d_{k,00} = 1$  par définition. Les équations (4.104) et (4.105), nous donne  $k \times N(N+1)/2$  coefficients chacune. Les termes  $c_{k,\alpha\beta}$  utilisés appartiennent alors aux deux régions  $S_3$  de la figure 4.30. Il ne nous reste alors plus que  $k \times N$  coefficients à déterminer. Ces derniers sont obtenus à partir des équations (4.106).

Ces dernières équations correspondent à la sommation des paires  $(v_{c1}, v_{c2})$  de puissances symétriques  $\alpha + \beta = M + N + 1$  (une paire de puissance symétrique s'écrivant sous la forme  $v_{c1}^{\alpha} v_{c2}^{\beta}$  et  $v_{c1}^{\beta} v_{c2}^{\alpha}$ ) qui doivent être nulles par définition des approximants. Les termes  $c_{k,\alpha\beta}$  utilisés appartiennent alors aux deux régions  $S_4$  de la figure 4.30 avec les deux termes devant former les  $N$  paires notées  $A_1, A_2, \dots, A_N$ .

Les  $k \times ((N+1)^2 - 1)$  coefficients  $d_{k,\alpha\beta}$  des dénominateurs des approximants sont ainsi obtenus. Les  $k \times N(N+1)$  coefficients  $d_{k,\alpha\beta}$  des équations (4.104) et (4.105) (régions  $S_3$ ) peuvent être déterminés de manière séquentielle sous forme de vecteurs

$$d_k^{(0)} = (d_{k,10}, d_{k,20}, \dots, d_{k,N0}; d_{k,01}, d_{k,02}, \dots, d_{k,0N}) \quad (4.107)$$

$$d_k^{(1)} = (d_{k,21}, d_{k,31}, \dots, d_{k,N1}; d_{k,12}, d_{k,13}, \dots, d_{k,1N}; d_{k,11}) \quad (4.108)$$

$$d_k^{(2)}, \quad \dots \quad , d_k^{(i)}, \quad \dots \quad , etc... \quad (4.109)$$

La détermination des vecteurs  $d_k^{(i)}$  nécessite alors la connaissance des vecteurs  $d_k^{(j)}$  avec  $j = 0, 1, 2, \dots, j-1$ . Les couples  $(\alpha, \beta)$  des coefficients  $c_{k,\alpha\beta}$  utilisés pour chaque vecteur  $d_k^{(i)}$  sont illustrés sur la figure 4.30. Les lignes en pointillées (1) et (2) des deux régions  $S_3$  définissent les termes utilisés respectivement pour  $d^{(1)}$  et  $d^{(2)}$  par exemple. Nous voyons que le calcul des coefficients  $d_k^{(i)}$  revient alors à la résolution d'un système linéaire qui peut se résoudre sous forme de blocs triangulaires. Pour plus de détail sur cette méthode, appelés la "prong method", le lecteur pourra se référer aux travaux de Hugues Jones [68].

Maintenant, il suffit de déterminer les coefficients  $n_{k,ij}$  du numérateur des approximants. Nous avons  $k \times ((M+1)^2)$  coefficients à calculer. Ces derniers vérifient les équations (4.103). Les coefficients  $d_{k,ij}$  obtenus précédemment sont utilisés lors de ces calculs. Les couples  $(\alpha, \beta)$  des coefficients  $c_{k,\alpha\beta}$  définissent la région  $S_M$  représenté sur la figure 4.30.

Nous voyons alors la complémentarité existant entre la détermination des coefficients  $d_{k,ij}$  et  $n_{k,ij}$ . Les coefficients  $d_{k,ij}$  sont obtenus en considérant les termes symétriques des puissances symétriques en  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  définissant les régions  $S_3$  et  $S_4$ , alors que les coefficients  $n_{k,ij}$  sont obtenus en considérant les termes des puissances en  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  définissant la région  $S_M$ .

Nous remarquons enfin que cette méthode de construction des coefficients des approximants présente l'avantage de pouvoir déterminer les coefficients par blocs réduits, ce qui permet de gagner en espace mémoire (pour les problèmes d'inversion de matrices par exemple) par rapport à une résolution globale de l'ensemble des équations définis en (4.102), (4.103), (4.104), (4.105) et (4.106).

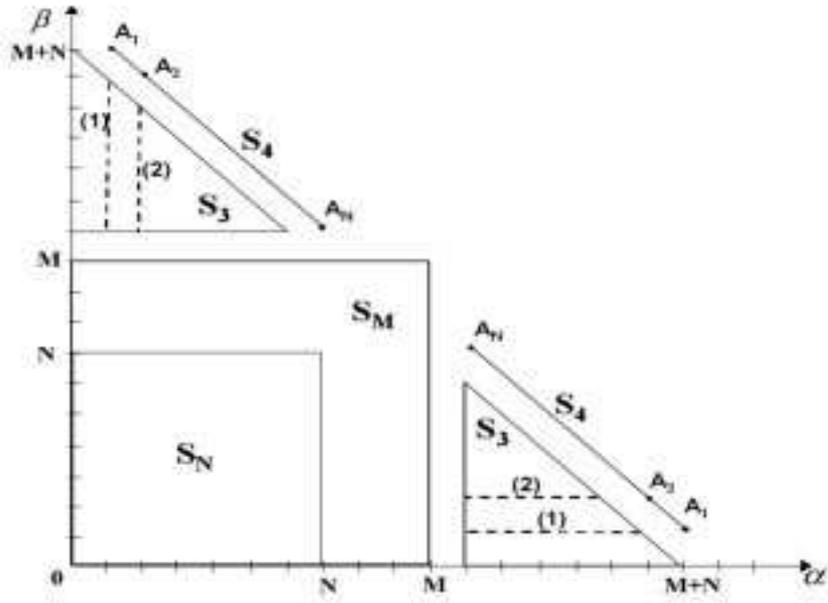


FIG. 4.30: Schéma de construction des approximations

### 4.3.7.3 Application des SOD approximants sur le système non-linéaire

Les deux paragraphes précédents ont permis tout d'abord de choisir le type d'approximants qui nous semble le plus adapté à notre étude et ensuite de mettre en place la détermination des coefficients associés. Ainsi, cette méthodologie est applicable sur le système non-linéaire (4.94).

L'écriture sous forme d'approximants à deux variables permet de redéfinir le système (4.93), au voisinage  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$  du point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$ , sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(v_{c1}, v_{c2}) \\ f_2(v_{c1}, v_{c2}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{1,ij}(\mu) \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \\ \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{2,ij}(\mu) \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{1,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{N \cdot N} \\ \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M d_{1,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{N \cdot N} \\ \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{2,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{N \cdot N} \\ \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M d_{2,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{N \cdot N} \end{array} \right\} \quad (4.110)$$

Ainsi, le système nouveau différentiel est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_{c1} \\ \dot{v}_{c2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} p_1(v_{c1}, v_{c2}) \\ p_2(v_{c1}, v_{c2}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{1,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{N \cdot N} \\ \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M d_{1,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{N \cdot N} \\ \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{2,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{N \cdot N} \\ \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M d_{2,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{N \cdot N} \end{array} \right\} \quad (4.111)$$

où  $p_1(v_{c1}, v_{c2})$  et  $p_2(v_{c1}, v_{c2})$  sont des fonctions fractionnelles à deux variables dont le dénominateur est de degré  $N$  et le numérateur de degré  $M$ . La détermination des coefficients associés  $d_{1,\alpha\beta}$ ,  $d_{2,\alpha\beta}$  (pour  $i, j = 0, 1, \dots, N$ ) et  $n_{1,\alpha\beta}$ ,  $n_{2,\alpha\beta}$  (pour  $i, j = 0, 1, \dots, M$ ) est réalisée en appliquant la méthode de Hugues Jones [68] explicitée précédemment. Nous remarquons au passage que les déterminations des coefficients  $d_{1,\alpha\beta}$  et  $n_{1,\alpha\beta}$  d'une part, et  $d_{2,\alpha\beta}$  et  $n_{2,\alpha\beta}$  d'autre part, sont totalement indépendantes. Nous rappelons que l'avantage des approximants réside dans le fait qu'ils permettent d'avoir des approximations de  $f_1(v_{c1}, v_{c2})$  et  $f_2(v_{c1}, v_{c2})$  qui convergent alors que les séries de Taylor de  $f_1(v_{c1}, v_{c2})$  et  $f_2(v_{c1}, v_{c2})$  divergent pour le même ordre.

Lors de notre calcul de l'approximation des variétés stables en fonction des variétés centrées sous la forme d'un polynôme  $\mathbf{h}$ , nous sommes allé jusqu'au cinquième ordre ( $m = 5$ ). Or le système non-linéaire de départ (4.32) comporte des non-linéarités quadratiques et cubiques. En examinant l'équation (4.110), cela signifie que les séries  $f_1(v_{c1}, v_{c2})$  et  $f_2(v_{c1}, v_{c2})$  sont des séries de puissances croissantes allant jusqu'au quinzième ordre telles que pour la puissance  $v_{c1}^i v_{c2}^j$ , nous vérifions  $1 \leq$

$i + j \leq 15$ . Nous remarquons de plus que les séries  $f_1$  et  $f_2$  ne comportent pas de termes constants. Pour approximer ces séries, nous utilisons les SOD approximants  $[5/4]_{f_1(v_{c1}, v_{c2})}$  et  $[5/4]_{f_2(v_{c1}, v_{c2})}$

$$[5/4]_{f_1}(v_{c1}, v_{c2}) = \frac{\sum_{\alpha=0}^5 \sum_{\beta=0}^5 n_{1,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{\sum_{\alpha=0}^4 \sum_{\beta=0}^4 d_{1,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta} \quad (4.112)$$

$$[5/4]_{f_2}(v_{c1}, v_{c2}) = \frac{\sum_{\alpha=0}^5 \sum_{\beta=0}^5 n_{2,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{\sum_{\alpha=0}^4 \sum_{\beta=0}^4 d_{2,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta} \quad (4.113)$$

Les numérateurs forment donc des séries où chaque variable va jusqu'à l'ordre 5 et les dénominateurs forment des séries où chaque variable va jusqu'à l'ordre 4.

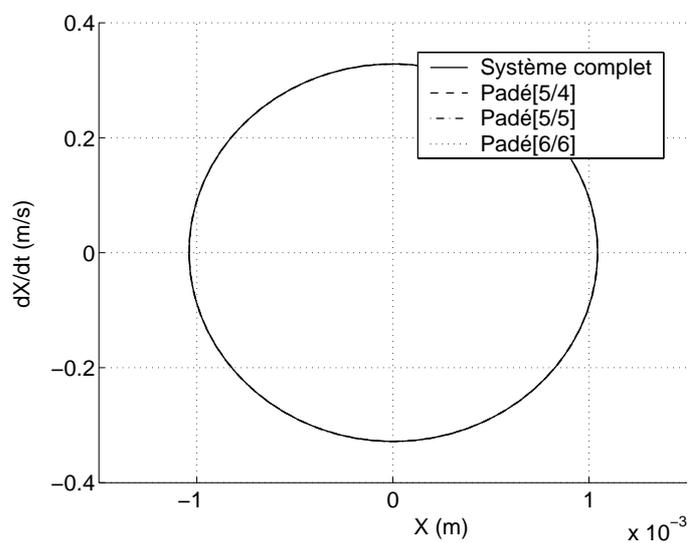
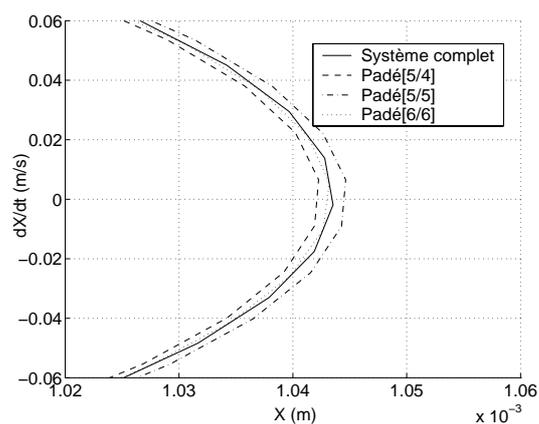
Par intégration temporelle du système (4.111), nous obtenons donc les cycles limites suivant les variables  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$  dans la base de la variété centrale. Par transformations inverses pour passer de la base de la variété centrale à deux variables (système (4.81)) à l'espace physique réel de départ à quatre variables (système (4.32)), les cycles limites suivant les variables de départ  $X$  et  $Y$  définies en figure 4.1 sont déterminés au voisinage du point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$  pour  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$  avec  $\bar{\mu} = \varepsilon \mu_0$  ( $\varepsilon \ll 1$ ).

Les SOD approximants  $[M/N]_{f_k(v_{c1}, v_{c2})}$  avec  $M \leq 4$  et  $N \leq 4$  sont insuffisants: dans certains cas, les approximants divergent et ne permettent donc pas d'obtenir les cycles limites du système. Cela signifie que l'approximation n'est pas assez précise du fait que les termes non-linéaires pris en compte par cette approximation ne sont pas suffisants: les termes non-linéaires non retenues apportent une contribution que nous ne pouvons pas négliger. Dans d'autres cas, les approximants convergent bien, mais les cycles limites obtenus ne sont pas en accord avec les cycles limites déterminés par la méthode de la variété centrale (ou par une intégration temporelle sur le système de départ (4.32)). Les raisons de cette inadéquation est la même que pour l'autre cas: les non-linéarités non retenues ne peuvent pas être négligées.

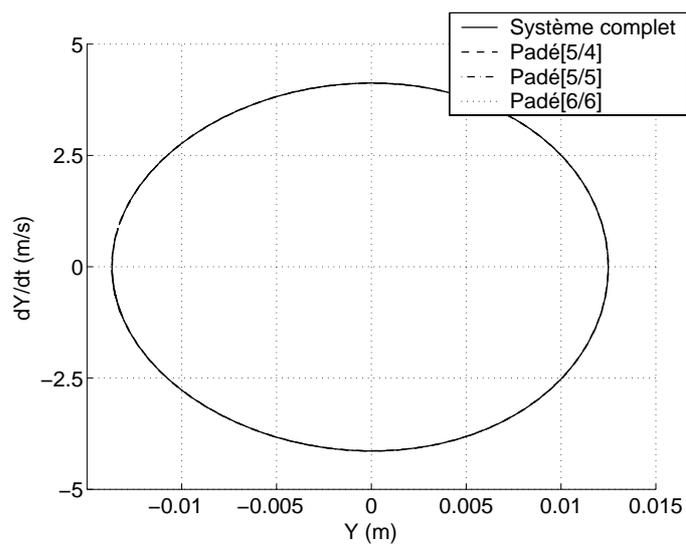
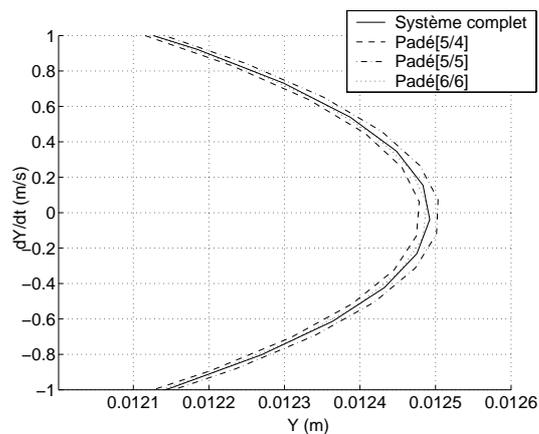
Aussi, les SOD approximants  $[M/N]_{f_k(v_{c1}, v_{c2})}$  avec  $M \geq 5$  et  $N \geq 4$  donnent des cycles limites similaires à ceux du système original. En figures 4.31 et 4.32, nous avons calculé les cycles limites  $(X, \dot{X})$  et  $(Y, \dot{Y})$  en utilisant des SOD approximants  $[5/4]_{f_k}$ ,  $[5/5]_{f_k}$ ,  $[6/6]_{f_k}$ . Ces cycles limites sont comparés aux cycles limites du système original.

Plus nous montons dans l'ordre des approximants ( $M$  et  $N$  de plus en plus grands), plus nous nous rapprochons des cycles limites du système original. Ce résultat est en parfait accord avec la théorie. En effet, plus nous cherchons à approximer les séries  $f_k$  par des approximants d'ordres élevés, plus nous prenons en compte la contribution d'un grand nombre de termes non-linéaires, donc plus nous nous rapprochons du comportement dynamique non-linéaire du système original.

D'autre part, l'utilisation des SOD approximants permet un gain en temps de calcul des cycles limites par rapport à la méthode de la variété centrale (pour les mêmes conditions initiales au départ de l'intégration temporelle). Nous reviendrons plus tard sur le gain en temps de calcul suivant les méthodes non-linéaires utilisées.

(a) Cycle limite  $(X, \dot{X})$ 

(b) Zoom sur les cycles limites

FIG. 4.31: Cycle limite  $(X, \dot{X})$  pour  $\bar{\mu} = \mu_0/1000$  en utilisant la méthode des multi-approximants(a) Cycle limite  $(Y, \dot{Y})$ 

(b) Zoom sur les cycles limites

FIG. 4.32: Cycle limite  $(Y, \dot{Y})$  pour  $\bar{\mu} = \mu_0/1000$  en utilisant la méthode des multi-approximants

### 4.3.8 Recherche de solutions sous forme harmonique

Une des approches classiquement utilisées pour analyser des systèmes non-linéaires est la méthode de la balance harmonique (HBM) qui permet de discrétiser des fonctions inconnues en temps par leur composants de Fourier qui sont supposés constants vis-à-vis du temps.

Pour notre part, une méthode de balance harmonique qui utilise un passage alternatif entre les domaines fréquentiel et temporel (AFT method: alternate frequency/time domain method) va être mise en place. Cette méthode va donc permettre de calculer les cycles limites pour le système différentiel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{v}_{c1} \\ \dot{v}_{c2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} p_1(v_{c1}, v_{c2}) \\ p_2(v_{c1}, v_{c2}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{1,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{\sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{1,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta} \\ \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{2,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{\sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{2,\alpha\beta}(\mu) v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta} \end{array} \right\} \quad (4.114)$$

avec  $M \leq 5$  et  $N \leq 4$  pour notre cas d'étude.

#### 4.3.8.1 Alternate frequency/time domain (AFT) method

La démarche de la méthode AFT va tout d'abord être décrite. Considérons un système différentiel non-linéaire autonome similaire au système (4.114). Ce système peut s'écrire sous la forme:

$$\dot{z}_i + f_i(z_1, \dots, z_i, \dots, z_p) = r_i(z_1, \dots, z_p, \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_p) = 0 \quad 1 \leq i \leq p \quad (4.115)$$

avec  $f_i$  une expression non-linéaire sous forme d'approximants à plusieurs variables. Les  $f_i$  correspondent aux fonctions  $p_1(v_{c1}, v_{c2})$  et  $p_2(v_{c1}, v_{c2})$  (avec  $z_1 = v_{c1}$  et  $z_2 = v_{c2}$ ) pour le système (4.114). Nous remarquons que ce système est un système autonome.

Tout d'abord, dans notre cas d'étude, la fréquence des oscillations est connue car nous recherchons les cycles limites au voisinage du point de bifurcation de Hopf pour  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$  avec  $\bar{\mu} = \varepsilon\mu_0$  ( $\varepsilon \ll 1$ ). Ainsi, la fréquence d'oscillation exacte peut être obtenue par détermination du point d'équilibre et de la résolution des valeurs propres sur le système linéarisé pour  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$  comme défini en (4.11) et (4.18). Nous avons alors la fréquence d'oscillation égale à  $50.2Hz$  soit  $\omega = 316rad/s$ .

La démarche d'obtention des coefficients de Fourier, solutions de l'équation différentielle (4.115), consiste alors à considérer un point de départ  $z_i^0$  ( $1 \leq i \leq p$ ) pour l'équation différentielle (4.115). La solution suivante est alors obtenue en incrémentant la solution précédente tel que

$$z_i^1 = z_i^0 + \Delta z_i^0 \quad 1 \leq i \leq p \quad (4.116)$$

Pour l'incrémentation  $k$ , nous avons le solution suivante qui s'exprime sous la forme

$$z_i^{k+1} = z_i^k + \Delta z_i^k \quad 1 \leq i \leq p \quad (4.117)$$

En considérant la troncature de l'expansion en séries de Fourier pour le vecteur  $z_i^k$  avec  $H$  le nombre d'harmoniques considéré dans la série de Fourier, nous avons:

$$z_i^k = Z_{i,0}^k + \sum_{j=1}^H \left[ Z_{i,2j-1}^k \cdot \cos(j\omega t) + Z_{i,2j}^k \cdot \sin(j\omega t) \right] \quad 1 \leq i \leq p \quad (4.118)$$

où  $Z_{i,0}^k$ ,  $Z_{i,2j-1}^k$  et  $Z_{i,2j}^k$  sont des coefficients de Fourier.

Comme  $z_i^k$  est périodique, l'incrément  $\delta z_i^k$  est lui aussi périodique et peut s'exprimer sous forme de séries de Fourier comme suit:

$$\Delta z_i^k = \Delta Z_{i,0}^k + \sum_{j=1}^H \left[ \Delta Z_{i,2j-1}^k \cdot \cos(j\omega t) + \Delta Z_{i,2j}^k \cdot \sin(j\omega t) \right] \quad 1 \leq i \leq p \quad (4.119)$$

où  $\Delta Z_{i,0}^k$ ,  $\Delta Z_{i,2j-1}^k$  et  $\Delta Z_{i,2j}^k$  sont des coefficients de Fourier. Le nombre d'harmoniques  $H$  est choisi de manière à ne retenir que les premiers harmoniques nécessaires pour une bonne représentation du problème.

En introduisant la base

$$\mathbf{U} = \{1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots, \cos(j\omega t), \sin(j\omega t), \dots, \cos(H\omega t), \sin(H\omega t)\}^T \quad (4.120)$$

nous pouvons ré-écrire les équations (4.118) et (4.119) sous la forme:

$$z_i^k = \left\{ Z_{i,0}^k, Z_{i,1}^k, Z_{i,2}^k, \dots, Z_{i,2j-1}^k, Z_{i,2j}^k, \dots, Z_{i,2H-1}^k, Z_{i,2H}^k \right\} \cdot \mathbf{U} \quad 1 \leq i \leq p \quad (4.121)$$

$$\Delta z_i^k = \left\{ \Delta Z_{i,0}^k, \Delta Z_{i,1}^k, \Delta Z_{i,2}^k, \dots, \Delta Z_{i,2j-1}^k, \Delta Z_{i,2j}^k, \dots, \Delta Z_{i,2H-1}^k, \Delta Z_{i,2H}^k \right\} \cdot \mathbf{U} \quad 1 \leq i \leq p \quad (4.122)$$

Le  $k$ -ième vecteur incrémental des coefficients de Fourier peut être ranger sous la forme

$$\left\{ \mathbf{Z}^k \right\} = \left[ \left\{ Z_{1,0}^k, \dots, Z_{p,0}^k \right\}^T, \dots, \left\{ Z_{1,2j-1}^k, \dots, Z_{p,2j-1}^k \right\}^T, \dots, \left\{ Z_{1,2H}^k, \dots, Z_{p,2H}^k \right\}^T \right]^T \quad (4.123)$$

En considérant  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_i + \Delta \mathbf{z}$  et  $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}_i + \Delta \dot{\mathbf{z}}$ , l'équation 4.115 peut se mettre sous la forme (en considérant l'expansion sous la forme d'une série de Taylor au premier ordre):

$$\mathbf{r}_i + \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{z}} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right]_i \cdot [\mathbf{z} \quad \dot{\mathbf{z}}]^T = 0 \quad (4.124)$$

Par substitution des équations (4.121) et (4.122) dans l'équation (??), et en orthogonalisant les équations avec  $\mathbf{U}$ , nous obtenons  $p \times (2H + 1)$  équations algébriques linéaires de la forme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}^k + \mathbf{F}^{\text{NL}} + (\mathbf{A} + \mathbf{J}) \cdot \Delta \mathbf{Z}^k = \mathbf{0} \quad (4.125)$$



de la forme

$$f_i(v_{c1}, v_{c2}) = \frac{\sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta}{\sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta} \quad (4.130)$$

Les dérivées partielles sont alors données par

$$\frac{\partial f_i}{\partial v_{c1}} = \frac{\alpha \left( \sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{i,\alpha\beta} v_{c1}^{\alpha-1} v_{c2}^\beta \times \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta - \sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta \times \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{i,\alpha\beta} v_{c1}^{\alpha-1} v_{c2}^\beta \right)}{\left( \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta \right)^2} \quad (4.131)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial v_{c2}} = \frac{\beta \left( \sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^{\beta-1} \times \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta - \sum_{\alpha=0}^M \sum_{\beta=0}^M n_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta \times \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^{\beta-1} \right)}{\left( \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^N d_{i,\alpha\beta} v_{c1}^\alpha v_{c2}^\beta \right)^2} \quad (4.132)$$

Pour revenir à la recherche des solutions sous forme de coefficients de Fourier, l'équation (4.125) contient  $p \times (2H + 1)$  inconnues qui peuvent donc être déterminées par les  $p \times (2H + 1)$  relations linéaires algébriques de cette équation (4.125).

Dans la pratique, il est difficile de déterminer le vecteur  $\mathbf{F}^{\text{NL}}$ , représentant le vecteur des coefficients de Fourier des fonctions  $f_k$  non-linéaires, directement à partir des coefficients de Fourier  $\mathbf{Z}^k$ . Aussi, Cameron et Griffin [25] ont proposé de calculer  $\mathbf{F}^{\text{NL}}$  en suivant la démarche suivante

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{DFT^{-1}} z(t) \implies f(t) \xrightarrow{DFT} \mathbf{F}^{\text{NL}} \quad (4.133)$$

Cette procédure consiste donc à définir le vecteur  $\mathbf{z}$ , vecteur définissant l'évolution temporel des variables  $z_i$  au cours de la période, à partir du vecteur  $\mathbf{Z}$ , vecteur des coefficients de Fourier. Nous passons donc du domaine fréquentiel au domaine temporel ( $DFT^{-1}$ ) par l'intermédiaire de  $\mathbf{\Gamma}$  défini en (4.128). Ensuite, il est plus aisé de trouver l'expression des fonctions non-linéaires dans le domaine temporel, étant donné que nous avons leurs expressions exactes données par (4.130). Pour finir, nous obtenons l'expression  $\mathbf{F}^{\text{NL}}$ , définissant le vecteur des coefficients de Fourier des fonctions non-linéaires  $f$ , à partir de l'expression des fonctions non-linéaires dans le domaine temporel. Nous passons donc du domaine temporel au domaine fréquentiel ( $DFT$ ) par l'intermédiaire de  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$  défini en (4.130). Ainsi, nous avons obtenu le vecteur  $\mathbf{F}^{\text{NL}}$  des coefficients de Fourier des fonction non-linéaires en ne connaissant que le vecteur des coefficients de Fourier  $\mathbf{Z}$  et l'expression des fonctions non-linéaires temporelles  $f(t)$ . Il faut bien noter que nous n'avons aucune expression littérale des fonctions non-linéaires en fréquentiel, fonction des coefficients de Fourier. Cette procédure conduit donc à passer successivement

du domaine fréquentiel, au domaine temporel, puis de revenir dans le domaine fréquentiel une fois les calculs non-linéaires effectués en temporel, d'où le nom de Alternate Frequency/Time (AFT) domain method.

Finalement, l'expression (4.125) nous permet d'avoir la nouvelle estimation du vecteur des coefficients de Fourier  $\mathbf{Z}^{k+1}$ . D'après les expressions (4.125), (4.117), (4.118) et (4.119), nous obtenons:

$$\Delta \mathbf{Z}^k = -(\mathbf{A} + \mathbf{J})^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{\text{NL}} + (\mathbf{A} + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{Z}^k) \quad (4.134)$$

$$\mathbf{Z}^{k+1} = \mathbf{Z}^k + \Delta \mathbf{Z}^k \quad (4.135)$$

L'erreur  $\mathbf{R}$  effectuée sur l'estimation du vecteur des coefficients de Fourier nous est donnée par

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}^k + \mathbf{F}^{\text{NL}} \quad (4.136)$$

Les critères de convergence choisis sont alors donnés par

$$\delta_1 = \sqrt{R_0^2 + \sum_{j=1}^H (R_{2j-1}^2 + R_{2j}^2)} \quad (4.137)$$

$$\delta_2 = \sqrt{\Delta \mathbf{Z}_0^2 + \sum_{j=1}^H (\Delta \mathbf{Z}_{2j-1}^2 + \Delta \mathbf{Z}_{2j}^2)} \quad (4.138)$$

Le procédé de la méthode AFT utilisant la transformation de Fourier discrète DFT est illustrée par le schéma de la figure 4.33.

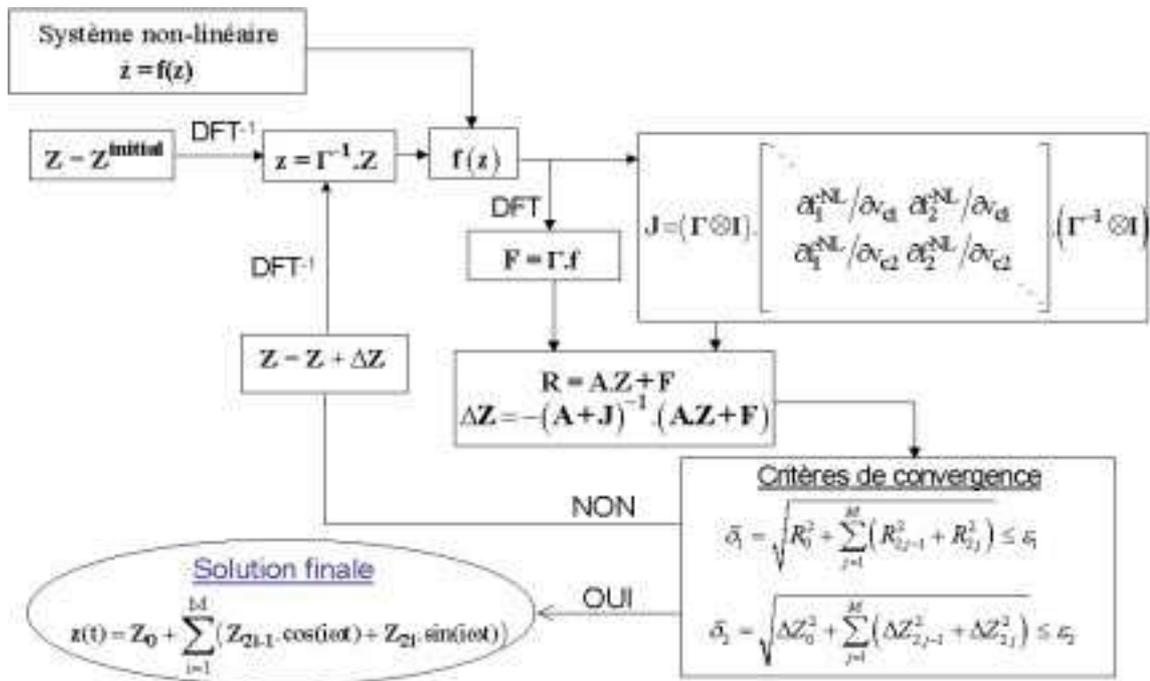


FIG. 4.33: Schéma de la procédure Alternating/Frequency Time (AFT) method avec la Discrete Fourier Transform (DFT)

### 4.3.8.2 Application de la méthode AFT

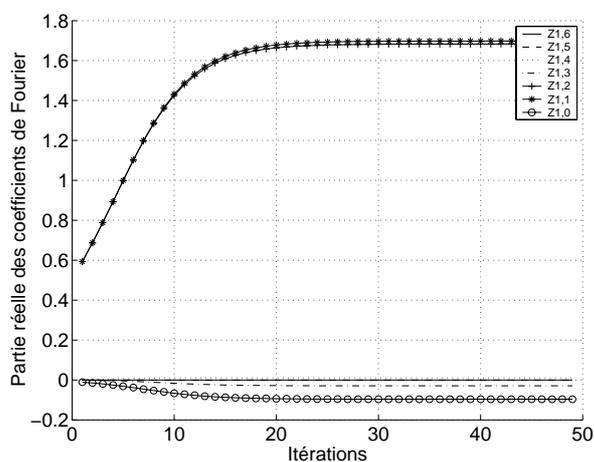
Nous appliquons maintenant la méthode AFT sur le système non-linéaire (4.110) pour différentes valeurs  $H$  des harmoniques de l'expression (4.115). Pour cela, nous utilisons le schéma décrit en figure 4.33 et les expressions (4.132), (4.133) et (4.135) avec le critère de convergence (4.136).

Nous remarquons alors que la solution donnée par le premier harmonique ( $H = 1$ ) décrit le cycle limite de manière approchée mais pas exacte. Par contre, le second harmonique ( $H = 2$ ) ou les ordres supérieurs ( $H \geq 3$ ) donnent des cycles limites similaires aux cycles limites obtenus par les approximants (et donc par le système original). Les différentes valeurs des coefficients de Fourier associés à chaque ordre d'harmoniques  $H$  sont données dans le tableau 4.1. Les figures 4.34, 4.35, 4.36 et 4.37 montrent l'évolution des coefficients de Fourier lors de la recherche de ces derniers par la méthode AFT.

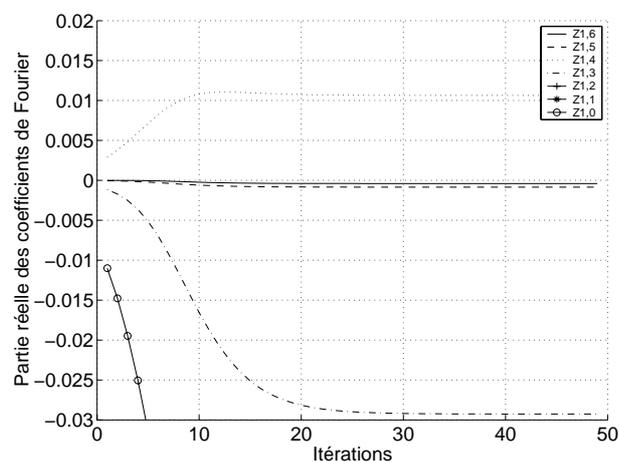
A partir des coefficients de Fourier déterminés et par transformations inverses pour passer de la base de la variété centrale à deux variables (système (4.81)) à l'espace physique réel de départ à quatre variables (système (4.32)), les cycles limites suivant les variables de départ  $X$  et  $Y$ , définies en figure 4.1, sont déterminés au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $M_0, \mu_0$ ) pour  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$  avec  $\bar{\mu} = \varepsilon\mu_0$  ( $\varepsilon \ll 1$ ). Ces cycles limites sont illustrés en figures 4.38 et 4.39.

Coefficients de Fourier	cas ( $H = 1$ )	cas ( $H = 2$ )	cas ( $H = 3$ )
$Z_{1,0}$	-0.685-0.0102i	-0.686-0.0102i	-0.685-0.0102i
$Z_{2,0}$	-0.685+0.0102i	-0.686+0.0102i	-0.685+0.0102i
$Z_{1,1}$	1.7453+1.0786i	1.7453+1.0812i	1.7458+1.0808i
$Z_{2,1}$	1.7453-1.0786i	1.7453-1.0812i	1.7458-1.0808i
$Z_{1,2}$	-1.0775+1.7377i	-1.0805+1.739i	-1.0801+1.7385i
$Z_{2,2}$	-1.0775-1.7377i	-1.0805-1.739i	-1.0801-1.7385i
$Z_{1,3}$	0	0.0171+0.0215i	0.0166+0.0212i
$Z_{2,3}$	0	0.0171-0.0215i	0.0166-0.0212i
$Z_{1,4}$	0	-0.0147+0.0388i	-0.0144+0.0382i
$Z_{2,4}$	0	-0.0147-0.0388i	-0.0144-0.0382i
$Z_{1,5}$	0	0	0.0002+0.0007i
$Z_{2,5}$	0	0	0.0002-0.0007i
$Z_{1,6}$	0	0	-0.0002+0.0008i
$Z_{2,6}$	0	0	-0.0002+0.0008i

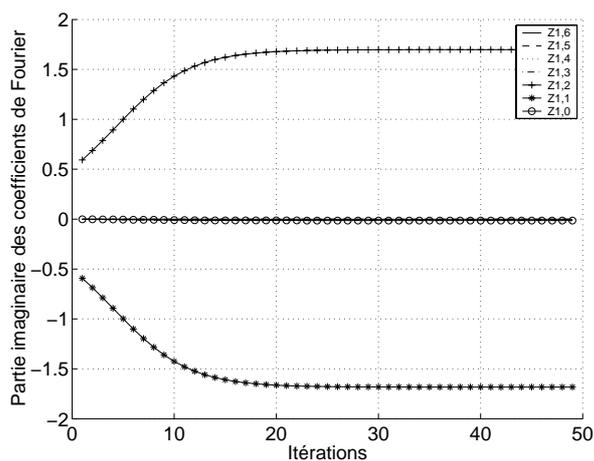
TAB. 4.1: Coefficients de Fourier suivant l'ordre de l'harmonique  $H$



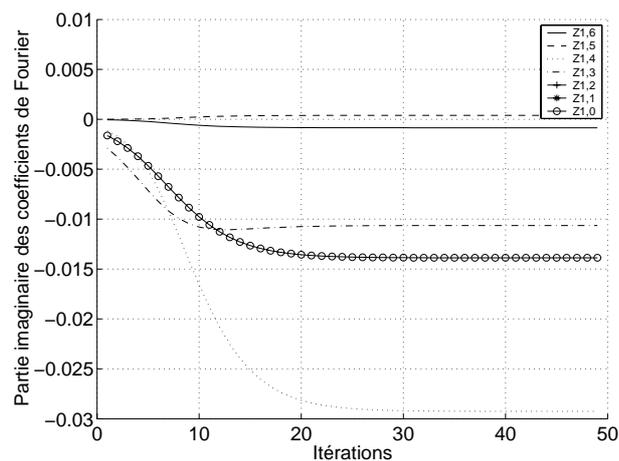
(a) Évolution de la partie réelle



(b) Zoom

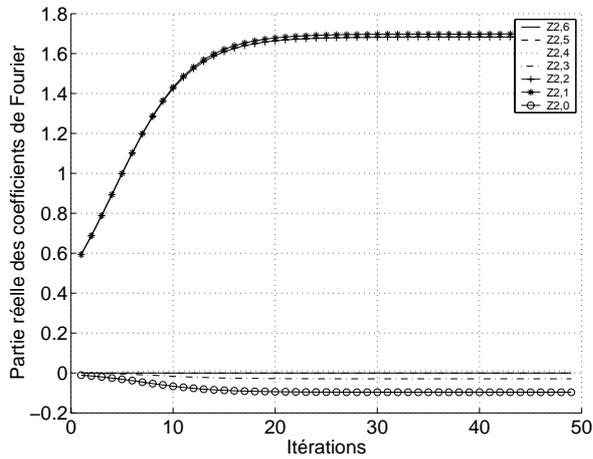
FIG. 4.34: Évolution de la partie réelle des coefficients de Fourier pour la variable  $v_{c1}$ 

(a) Évolution de la partie imaginaire

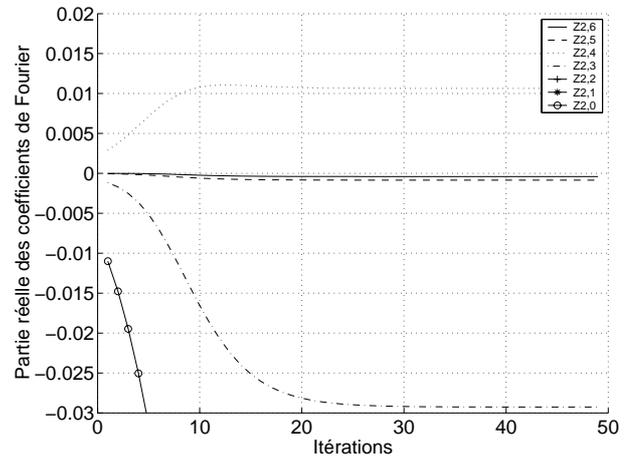


(b) Zoom

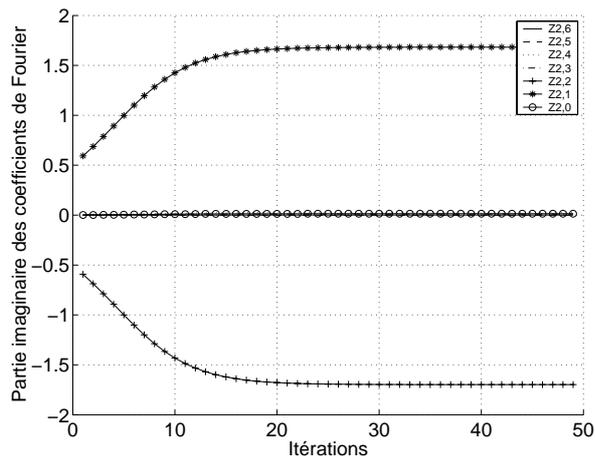
FIG. 4.35: Évolution de la partie imaginaire des coefficients de Fourier pour la variable  $v_{c1}$



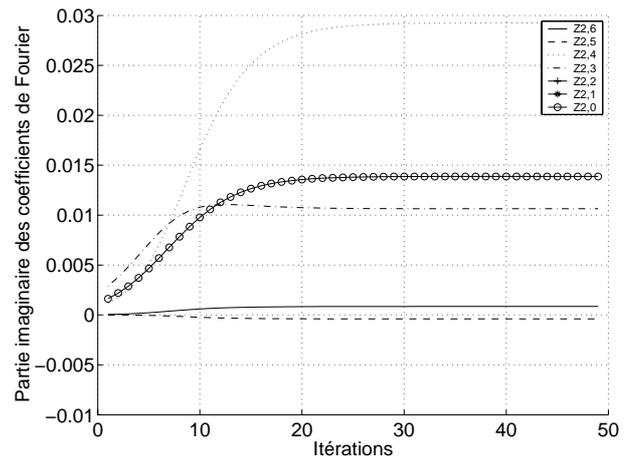
(a) Évolution de la partie réelle



(b) Zoom

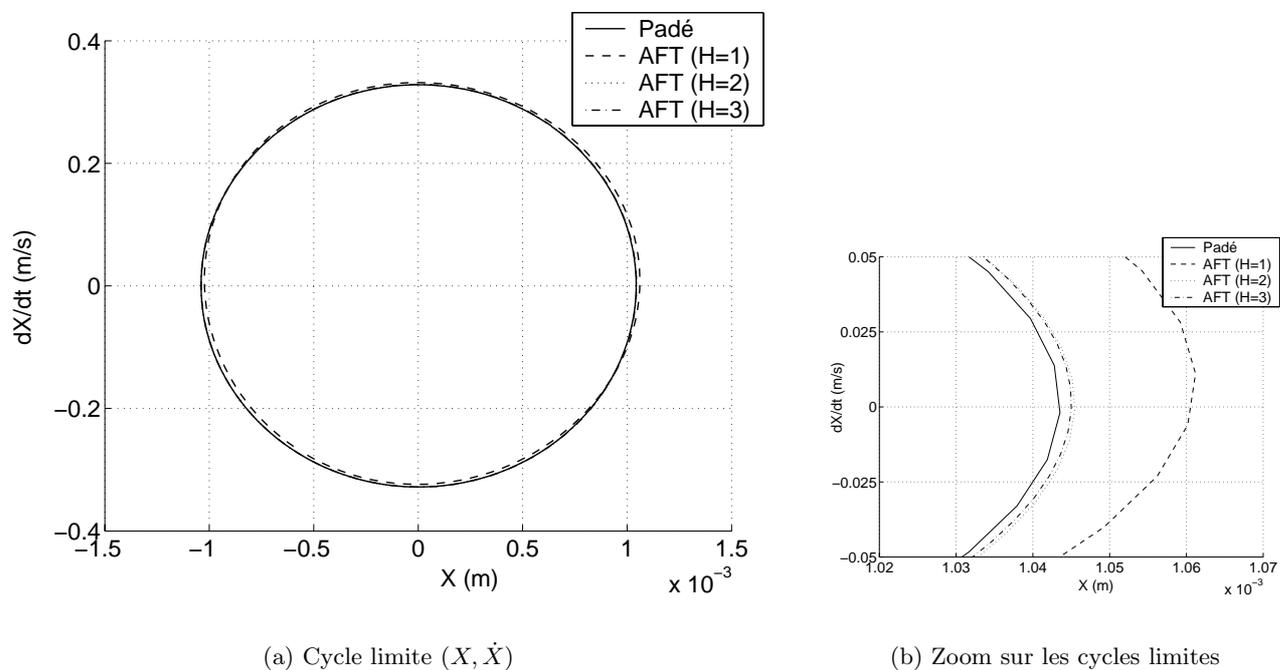
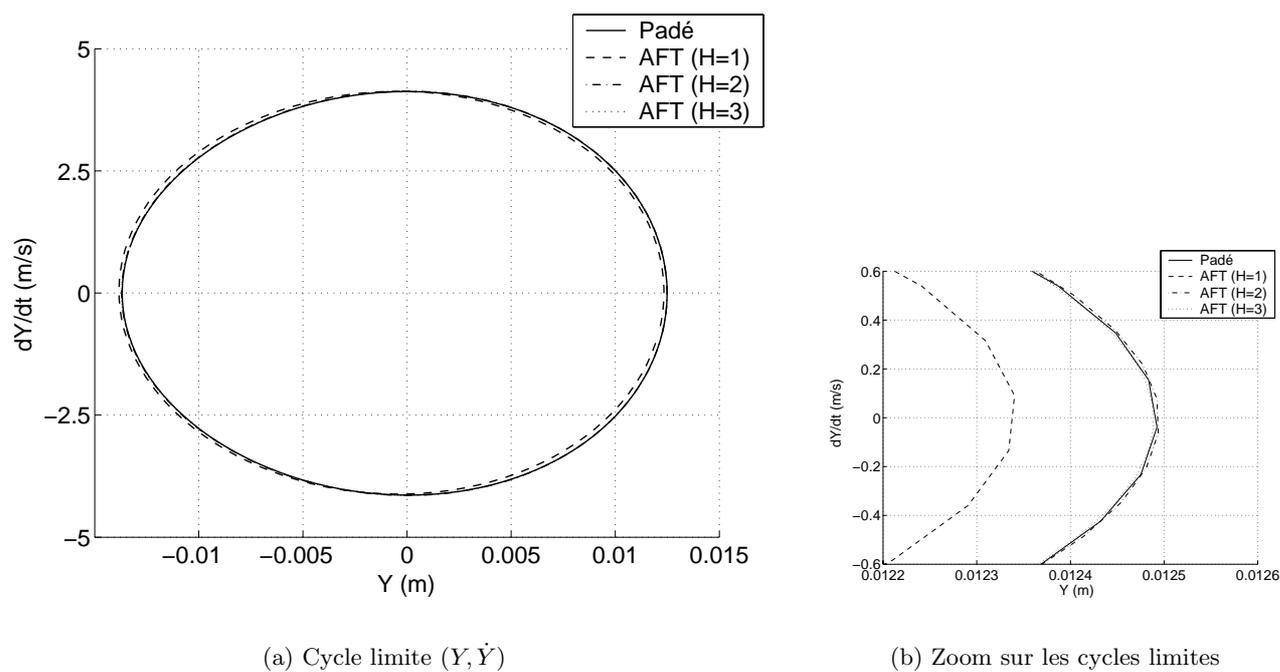
FIG. 4.36: *Évolution de la partie réelle des coefficients de Fourier pour la variable  $v_{c2}$* 

(a) Évolution de la partie imaginaire



(b) Zoom

FIG. 4.37: *Évolution de la partie imaginaire des coefficients de Fourier pour la variable  $v_{c2}$*

FIG. 4.38: Cycle limite  $(X, \dot{X})$  pour  $\bar{\mu} = \mu_0/1000$  par la méthode AFTFIG. 4.39: Cycle limite  $(Y, \dot{Y})$  pour  $\bar{\mu} = \mu_0/1000$  par la méthode AFT

### 4.3.9 Apport des approximants multivariables

La méthode de la variété centrale et des approximants multivariables de Padé permettent donc de simplifier le système de départ tout en gardant le même comportement dynamique.

Maintenant nous allons discuter des divers améliorations apportées par l'utilisation des approximants de Padé à la méthode de la variété centrale. Nous nous focaliserons plus particulièrement sur deux avantages des approximants de Padé :

- la rapidité d'obtention du cycle limite.
- la possibilité d'avoir une condition initiale loin du cycle limite recherché, c'est à dire que nous augmentons le domaine de convergence.
- l'obtention d'un cycle limite approximatif alors que la méthode de la variété centrale diverge pour le même cas.

Enfin, nous dirons quelques mots sur le choix de l'utilisation des approximants de Padé à la suite de la méthode de la variété centrale, alors que généralement, la forme normale est utilisée pour simplifier les termes non-linéaires.

#### 4.3.9.1 Rapidité d'obtention des cycles limites

Le premier résultat important concernant l'utilisation des approximants de Padé, est la rapidité d'obtention des cycles limites. En effet, dans l'exemple que nous avons traité, les approximants de Padé conduisent à une accélération de la convergence vers le cycle limite.

Ce gain en terme de temps de calcul sera évoqué par la suite dans le paragraphe 4.3.11.

#### 4.3.9.2 Souplesse sur les conditions initiales

L'un des problèmes rencontrés lorsque l'on recherche des cycles limites à partir de la méthode de la variété centrale est le choix de la condition initiale pour résoudre le système différentiel associé au problème. En effet, si nous nous plaçons loin du cycle limite à déterminer, le calcul par la méthode de la variété centrale peut alors diverger. Cela provient du fait que le système différentiel comporte des non-linéarités polynomiales d'ordre élevé et que la méthode de la variété centrale définit l'expression des variétés stables  $\mathbf{v}_s$  en fonction des variétés centrées  $\mathbf{v}_c$  localement, pour  $\|\mathbf{v}_c\|$  faible.

Dans l'exemple traité, l'utilisation des approximants de Padé permet une augmentation du domaine de validité de l'approximation vis-à-vis des conditions initiales.

Nous illustrons cette avantage des approximants en effectuant une intégration temporelle par l'utilisation de la méthode de la variété centrale et des approximants avec une condition initiale se situant loin du cycle limite. Comme le montrent les figures 4.40 et 4.41, le calcul par la méthode de la variété centrale diverge alors que les approximants de Padé accrochent le cycle limite. Le calcul complet, par intégration temporelle classique, pour les mêmes conditions initiales, donnent alors les mêmes cycles limites que ceux obtenus par les approximants de Padé.

De plus, si nous considérons la recherche de solutions sous forme de coefficients de Fourier, la même observation peut être faite. En prenant diverses conditions initiales sur les coefficients de Fourier, le calcul converge toujours vers la même solution, comme illustré en figures 4.42 et 4.43. Nous avons

choisi arbitrairement les conditions initiales sur les coefficients de Fourier suivante:

$$Z_{1,i}^0 = Z_{2,i}^0 = 20 \text{ (pour } i = 0, 1, \dots, 4), \text{ soit } \|Z_1^0\| = \|Z_2^0\| \approx 19 \times \|Z^{solution}\|.$$

$$Z_{1,i}^0 = Z_{2,i}^0 = -30i \text{ (pour } i = 0, 1, \dots, 4), \text{ soit } \|Z_1^0\| = \|Z_2^0\| \approx 28 \times \|Z^{solution}\|.$$

$$Z_{1,i}^0 = Z_{2,i}^0 = 10 + 10i \text{ (pour } i = 0, 1, \dots, 4), \text{ soit } \|Z_1^0\| = \|Z_2^0\| \approx 14 \times \|Z^{solution}\|.$$

$$Z_{1,i}^0 = Z_{2,i}^0 = 2 + 2i \text{ (pour } i = 0, 1, \dots, 4), \text{ soit } \|Z_1^0\| = \|Z_2^0\| \approx 2.7 \times \|Z^{solution}\|.$$

$$Z_{1,i}^0 = Z_{2,i}^0 = 1 \text{ (pour } i = 0, 1, \dots, 4), \text{ soit } \|Z_1^0\| = \|Z_2^0\| \approx 1 \times \|Z^{solution}\|.$$

Cependant, des conditions initiales trop éloignées du rayon de convergence initial du système donneront bien entendu une divergence du système.

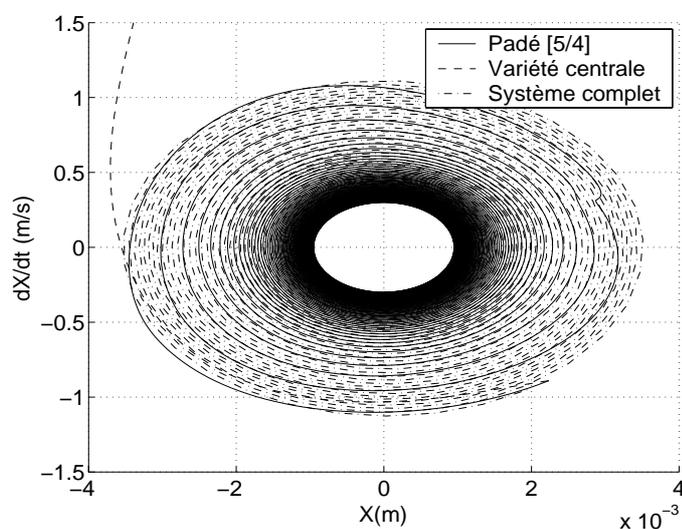


FIG. 4.40: Apport des approximants de Padé sur la condition initiale: cycle limite  $(X, \dot{X})$

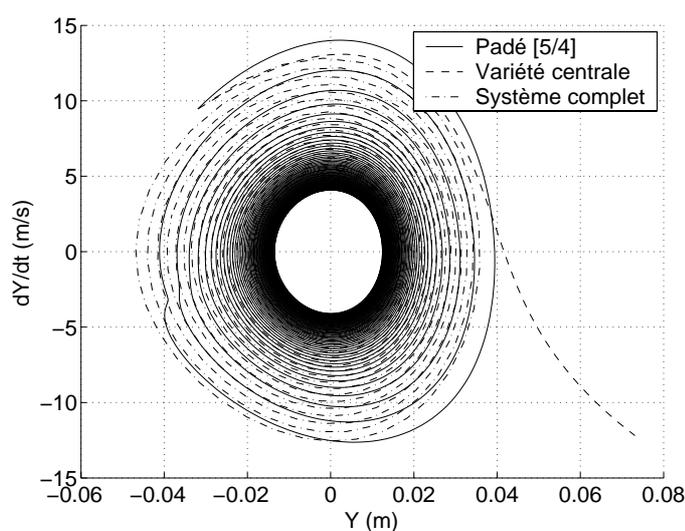
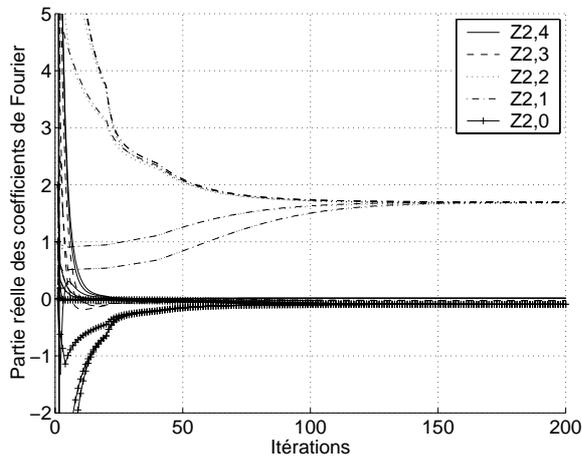
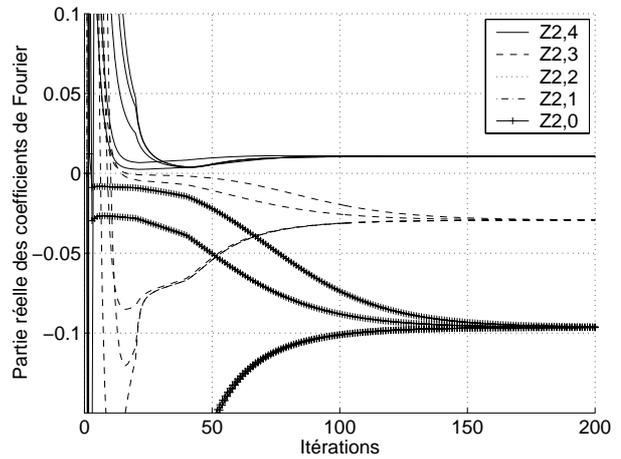


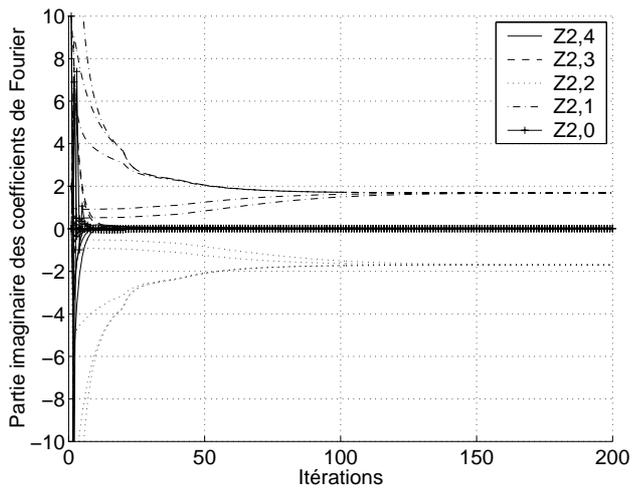
FIG. 4.41: Apport des approximants de Padé sur la condition initiale: cycle limite  $(Y, \dot{Y})$



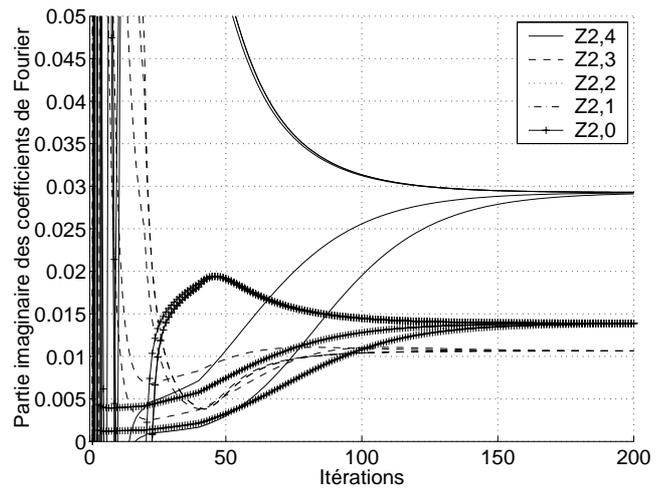
(a) Évolution de la partie réelle



(b) Zoom

FIG. 4.42: Évolution de la partie réelle des coefficients de Fourier pour la variable  $v_{c2}$ 

(a) Évolution de la partie imaginaire



(b) Zoom

FIG. 4.43: Évolution de la partie imaginaire des coefficients de Fourier pour la variable  $v_{c2}$

### 4.3.9.3 Convergence vers des cycles limites acceptables

Un autre point important lors de l'utilisation de la méthode de la variété centrale réside dans l'estimation de manière assez fine de la relation caractérisant les variétés stables  $\mathbf{v}_s$  en fonction des variétés centrées  $\mathbf{v}_c$ .

Comme l'étude précédente le montre, si nous ne développons pas assez loin l'ordre  $m$  du polynôme  $\mathbf{h}$ , nous obtenons alors des cycles limites inexacts voir une divergence du système calculé par la méthode de la variété centrale.

Nous allons montrer dans ce qui suit, que les approximants de Padé peuvent permettre d'avoir une estimation des cycles limites lorsque nous avons une divergence par la méthode de la variété centrale (pour un ordre  $m$  donné du polynôme  $\mathbf{h}$ ).

Dans cette partie, nous ne considérons pas les divergences dues à une mauvaise condition initiale, comme dans le paragraphe précédent, mais une divergence qui est directement liée à une estimation insuffisante de l'expression liant les variétés stables et les variétés centrées.

Le but de ce paragraphe est donc de montrer que les approximants de Padé permettent d'éviter la recherche des coefficients du polynôme  $\mathbf{h}$  à des ordres élevés. Bien entendu, il est toujours possible de trouver une expression du polynôme permettant d'exprimer les variétés stables  $\mathbf{v}_s$  en fonction des variétés centrées  $\mathbf{v}_c$  de manière assez fine, mais les calculs associés deviennent de plus en plus lourd à gérer, étant donné qu'il faut rechercher un polynôme  $\mathbf{h}$  d'ordre très élevé. Pour notre part, nous n'avons développé la recherche des coefficients  $a_{k,ij}$  de la variété centrale que jusqu'à l'ordre 5. L'étude qui va suivre va donc porter sur les problèmes pour lesquelles une approximation  $\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c)$  à l'ordre 5 est insuffisante pour obtenir les cycles limites.

Pour illustrer l'apport des approximants de Padé sur l'obtention de ces cycles limites, nous reprenons le système étudié précédemment en changeant seulement un paramètre (l'amortissement  $C_2 = 300N/m/sec$ ).

Le point de bifurcation de Hopf associé est alors obtenu pour  $\mu_0 = 0.28$ . En effectuant une intégration temporelle sur le système complet et en nous plaçant en amont du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01 \times \mu_0$ ), nous obtenons donc les évolutions temporelles des variables  $X$  et  $Y$  du système et les cycles limites associés, comme défini en figures 4.44, 4.45 et 4.46.

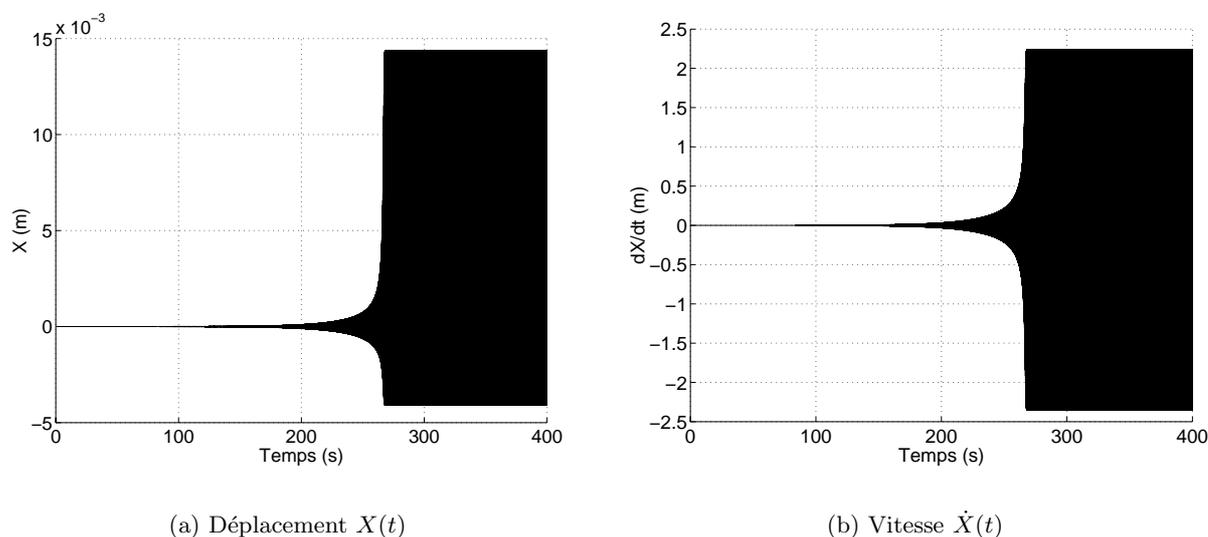


FIG. 4.44: Oscillations du déplacement et de la vitesse suivant  $X$  pour  $(\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.01)$

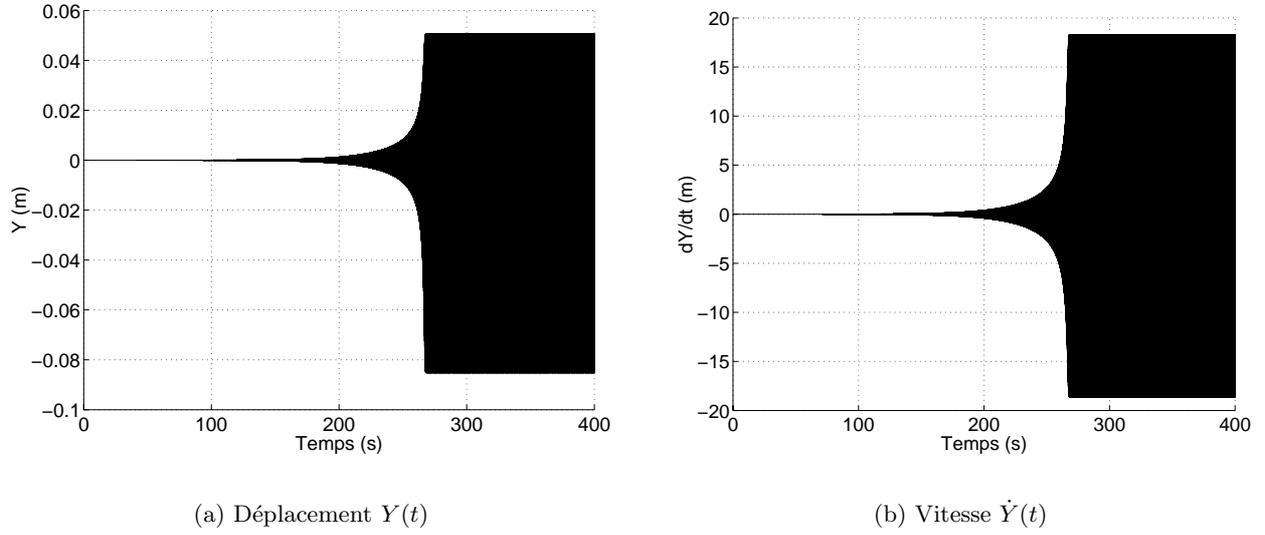


FIG. 4.45: Oscillations du déplacement et de la vitesse suivant  $Y$  pour  $(\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.01)$

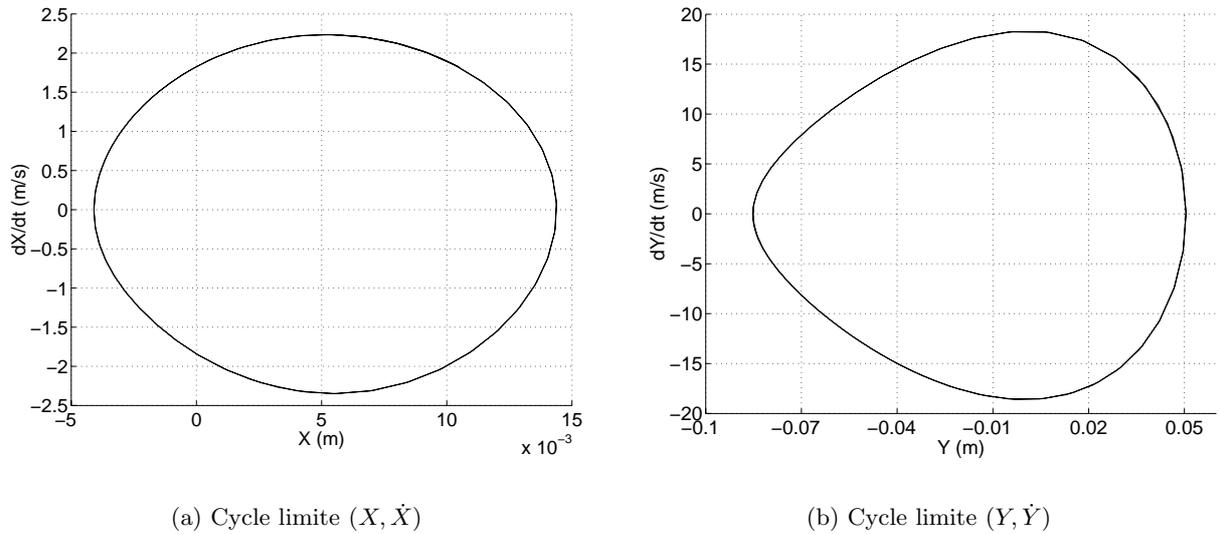


FIG. 4.46: Cycles limites  $(X, \dot{X})$  et  $(Y, \dot{Y})$  pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  ( avec  $\varepsilon = 0.01)$

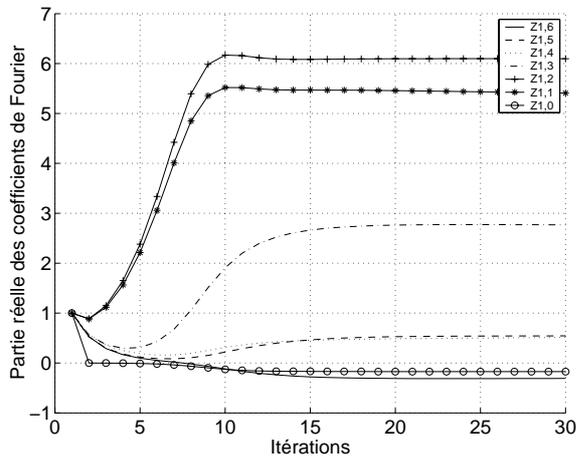
Pour cette nouvelle famille de paramètres, la méthode de la variété centrale est utilisée en développant l'expression des variétés stables  $\mathbf{v}_s$  en fonction des variétés centrées  $\mathbf{v}_c$  par l'intermédiaire du polynôme  $\mathbf{h}$  jusqu'au cinquième ordre. La recherche des cycles limites, par intégration temporelle classique ou par la méthode de la balance harmonique AFT à partir du système réduit autour de la variété centrée et au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.01$ ), diverge. Ceci provient du fait que l'approximation des variétés stables  $\mathbf{v}_s$  en fonction des variétés centrées  $\mathbf{v}_c$  n'est pas assez fine.

Nous allons cependant rechercher les approximants de Padé à l'ordre  $[8/7]$  de ce dernier système réduit de la variété centrale. Les approximants  $[8/7]$  correspondent à l'approximant de Padé maximal que nous puissions obtenir dans notre cas, puisque le système réduit dans la base de la variété centrale

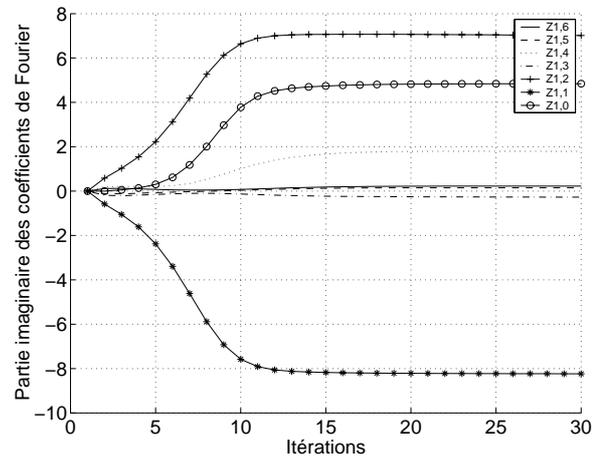
comporte des non-linéarités polynomiales d'ordre inférieur ou égal à 15. Nous déterminons ensuite les cycles limites de ce dernier système réduit et simplifié par la méthode de la balance harmonique AFT. Pour un développement au troisième harmonique  $H = 3$  ou à un ordre supérieur, nous obtenons des cycle limites à peu près conformes à ceux obtenus par une intégration temporelle du système complet de départ. Les évolutions des coefficients de Fourier des variétés centrées en prenant trois harmoniques sont données en figures 4.47 et 4.48.

En comparant avec les cycles limites obtenus sur le système de départ, nous remarquons que nous ne sommes pas trop éloignés de ces derniers, comme l'illustrent les figures 4.49 et 4.50. Ainsi, les approximants de Padé ont permis d'obtenir des cycles limites approchés alors que le calcul de ces mêmes approximants a été effectué sur le système de la variété centrale qui lui diverge lors de la recherche des cycles limites associé. Nous voyons ici l'une des propriétés fortes des approximants de Padé qui permettent d'obtenir une convergence de la solution alors que la série des puissances croissantes associée diverge.

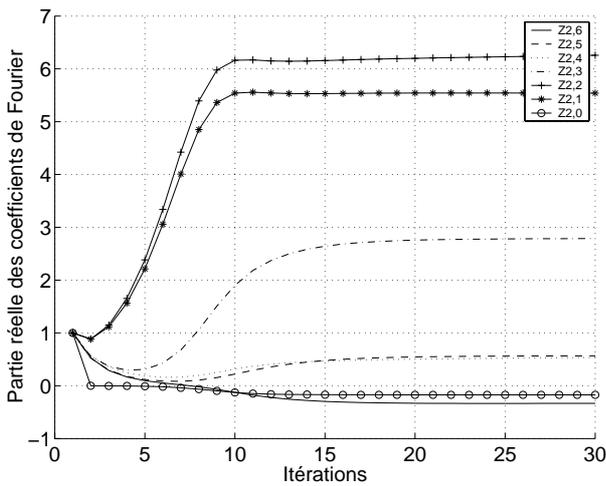
Cependant, nous remarquons que les cycles limites obtenus ne sont pas exactement conformes à ceux du système complet. Ceci montre la limitation de cette application des approximants de Padé. En effet, si nous ne développons pas l'approximation des variétés stables en fonction des variétés centrées de manière assez poussée, les approximants de Padé ne pourront pas converger de manière correcte vers les cycles limites exacts.



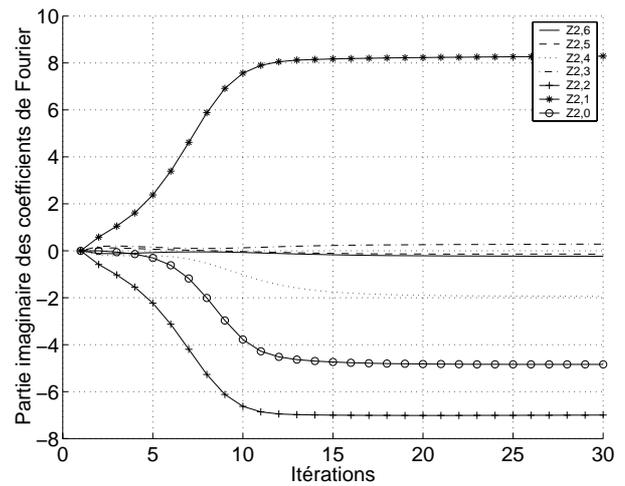
(a) Évolution de la partie réelle



(b) Évolution de la partie imaginaire

FIG. 4.47: Évolution des coefficients de Fourier pour la variable  $v_{c1}$ 

(a) Évolution de la partie réelle



(b) Évolution de la partie imaginaire

FIG. 4.48: Évolution des coefficients de Fourier pour la variable  $v_{c2}$

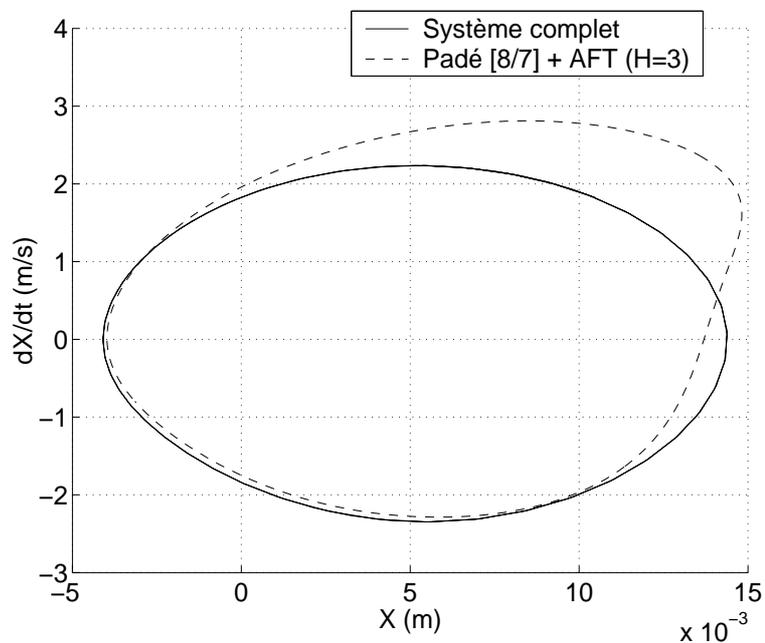


FIG. 4.49: Comparaison des cycles limites  $(X, \dot{X})$  obtenus pour le système complet et par la méthode de la variété centrale + les approximations de Padé + la méthode AFT (pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.01$ )

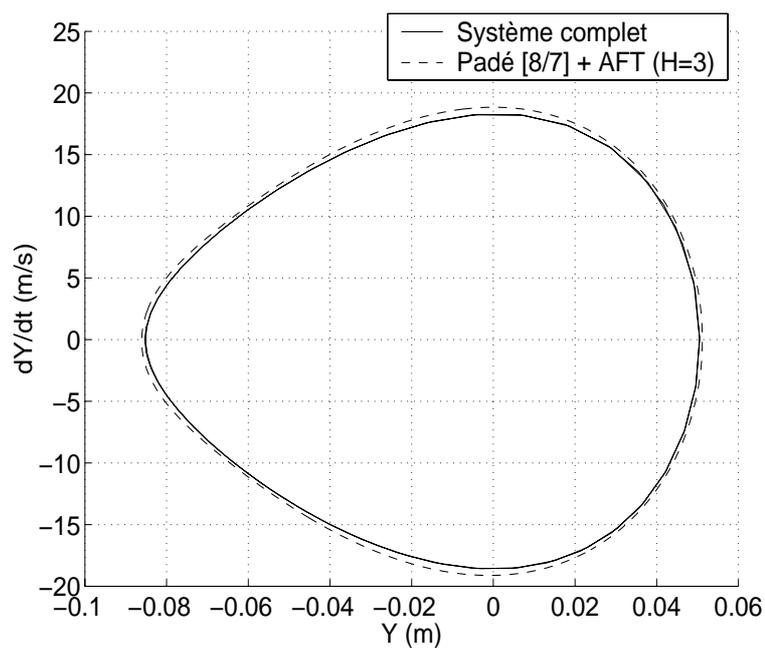


FIG. 4.50: Comparaison des cycles limites  $(Y, \dot{Y})$  obtenus pour le système complet et par la méthode de la variété centrale + les approximations de Padé + la méthode AFT (pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.01$ )

#### 4.3.10 Les approximants de Padé par rapport à la Forme Normale

Comme nous l'avons dit précédemment, la méthode de simplification non-linéaire classiquement utilisée à la suite de la méthode de la variété centrale est la méthode de la forme normale, explicitée au paragraphe 3.4.

La forme normale permet alors d'obtenir une expression non-linéaire qui ne comportera plus que des termes de degré impair, correspondant aux termes résonants du système. Pour plus de détail sur l'obtention de ces termes pour un système non-linéaire comportant des termes non-linéaires quadratiques et cubiques, le lecteur pourra se reporter en Annexe C, où un développement du calcul de la forme normale aux premiers ordres a été explicité.

L'utilisation des approximants de Padé correspond à une stratégie différente. Ils permettent de simplifier les termes non-linéaires et conduisent en général, à une accélération de la convergence vers le cycle limite.

Aussi, la forme normale présente l'avantage de diminuer le nombre de termes non-linéaires du système. Ainsi, elle permet d'avoir un gain en temps de calcul pour la recherche des cycles limites. Cependant, la nouvelle série formée par l'intermédiaire des transformations non-linéaires ne permettra pas, à priori, une convergence de la nouvelle série alors que la méthode de la variété centrale diverge, ce qui est un des avantages important des approximants de Padé. En effet, si nous considérons une série de puissance croissante et que nous supposons de plus que cette série nécessite la prise en compte des  $m$  premiers termes non-linéaires pour converger, alors une des propriétés des approximants de Padé est que la prise en compte des  $n$  premiers termes non-linéaires ( $n < m$ ) de la série considérée peut suffire pour faire converger la série. Si maintenant, nous appliquons la forme normale, nous pouvons déjà dire que la prise en compte de la série à l'ordre  $m$  va permettre la convergence de la nouvelle série obtenue par des transformations non-linéaires. Cette nouvelle série va comporter un nombre de termes non-linéaires réduit. Cependant, si nous ne prenons que les  $n$  premiers termes qui amènent une divergence de la série initiale et qui permettent de faire converger la série des approximants de Padé, la série obtenue par l'application de la forme normale aura le même comportement que la série initiale ne comportant que les  $n$  premiers termes et nous aurons donc divergence. Ceci découle du calcul des coefficients de la forme normale, défini en Annexe C. Nous voyons ainsi l'un des avantages majeurs de l'utilisation des approximants de Padé par rapport à la forme normale dans notre cas précis.

### 4.3.11 Apport des méthodes non-linéaires en temps de calcul

Les différentes méthodes non-linéaires mises en place permettent d'obtenir les cycles limites au voisinage du point de bifurcation de Hopf. De plus, nous avons évoqué les avantages liées à l'utilisation des approximants de Padé en termes de convergence. Cependant, l'un des points essentiels d'utilisation de ces méthodes non-linéaires demeurent la simplification du système de départ qu'elles engendrent et donc le gain en temps de calcul associé.

Le tableau 4.2 regroupe les différents temps de calcul pour le jeu de paramètre précédent, suivant chacune des méthodes non-linéaires, afin d'avoir une idée de l'apport des différentes méthodes. Il en ressort un gain important en temps de calcul. Bien entendu, plus le nombre de degré de liberté est important, plus le gain de temps en utilisant la méthode de la variété centrale sera appréciable.

Méthode	Temps de calcul (sec)
Système complet - Intégration temporelle	2000
Méthode de la variété centrale (ordre 3) - Intégration temporelle	200
Méthode de la variété centrale (ordre 4) - Intégration temporelle	500
Méthode de la variété centrale (ordre 5) - Intégration temporelle	1200
Approximants de Padé [5/4] - Intégration temporelle	50
Balance harmonique AFT	30

TAB. 4.2: *Évaluation des temps de calcul lors de la recherche de cycles limites*

### 4.3.12 Extension à des études paramétriques

Les études de stabilité permettent de regarder l'évolution des zones de stabilité en fonction d'un ou de plusieurs paramètres. Nous pouvons faire de même pour regarder l'évolution des cycles limites en fonction de divers paramètres. Nous allons illustrer cela sur notre système en examinant l'évolution des cycles limites en fonction de l'angle de sprag-slip  $\theta$ , de la force de freinage  $F_{brake}$ , de la masse  $m_1$  et du terme de raideur non-linéaire  $k_{12}$ .

Les cycles limites sont obtenus par l'intermédiaire de la variété centrale (nous allons jusqu'au cinquième ordre), des approximants à deux variables (nous allons jusqu'à l'ordre  $[8/7]_f$ ) et de la recherche sous forme des coefficients de Fourier par la méthode AFT (nous allons jusqu'au quatrième harmonique). Les cycles limites obtenus sont alors en accord avec les cycles limites du système complet, comme explicité précédemment. Pour les différents jeux de paramètres, les valeurs  $\mu_0$  relatives au point de bifurcation de Hopf sont données dans les tableaux 4.3, 4.4, 4.5 et 4.6. Les cycles limites obtenus sont illustrés en figures 4.51, 4.52, 4.53 et 4.54.

Tout d'abord, les cycles limites évoluent de manière variée suivant le jeu de paramètre, ce qui montre bien l'aspect complexe du problème. Par exemple, nous voyons bien que dans les figures 4.51, 4.52 et 4.53, les cycles limites  $(X, \dot{X})$  et  $(Y, \dot{Y})$  n'évoluent pas forcément de la même manière: par exemple lorsque nous avons un accroissement d'un des cycles limites, l'autre peut soit s'accroître, soit diminuer, soit stagner.

D'autre part, la position d'équilibre évolue suivant le jeu de paramètre utilisé, ceci est plus particulièrement illustré en figure 4.52. Ce changement de la position d'équilibre peut entraîner à elle seule une variation du niveau vibratoire.

Angle $\theta$ (rad)	$\mu_0$
0.1	0.103
0.3	0.3102
0.4	0.424
0.5	0.547

TAB. 4.3: Valeur du coefficient de frottement  $\mu_0$  au point de bifurcation de Hopf en fonction de l'évolution de l'angle  $\theta$

Force de freinage $F_{brake}$ (N)	$\mu_0$
10	0.204
50	0.204
100	0.205
200	0.206

TAB. 4.4: Valeur du coefficient de frottement  $\mu_0$  au point de bifurcation de Hopf en fonction de l'évolution de la force de freinage  $F_{brake}$

Masse $m_1$ (kg)	$\mu_0$
1.1	0.216
1.2	0.246
1.3	0.293
1.4	0.351

TAB. 4.5: Valeur du coefficient de frottement  $\mu_0$  au point de bifurcation de Hopf en fonction de l'évolution de la masse  $m_1$

raideur non linéaire $k_{12}$ ( $N/m^2$ )	$\mu_0$
$1 \cdot 10^7$	0.204
$1.5 \cdot 10^7$	0.204
$2.5 \cdot 10^7$	0.204
$1 \cdot 10^8$	0.205

TAB. 4.6: Valeur du coefficient de frottement  $\mu_0$  au point de bifurcation de Hopf en fonction de l'évolution de la raideur non linéaire  $k_{12}$

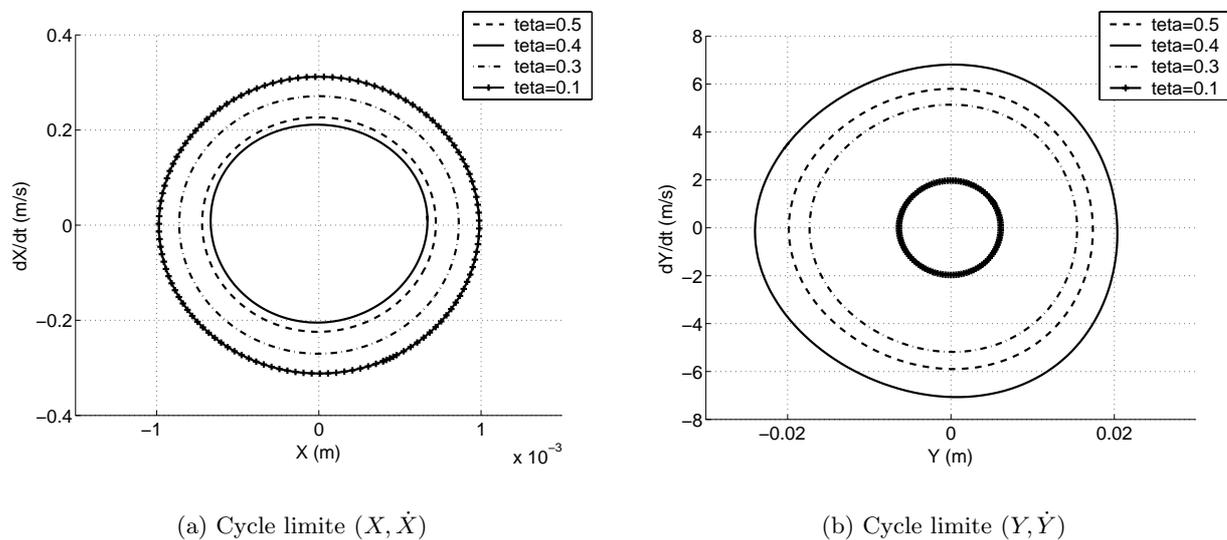


FIG. 4.51: Évolution des cycles limites en fonction de l'angle de sprag-slip  $\theta$

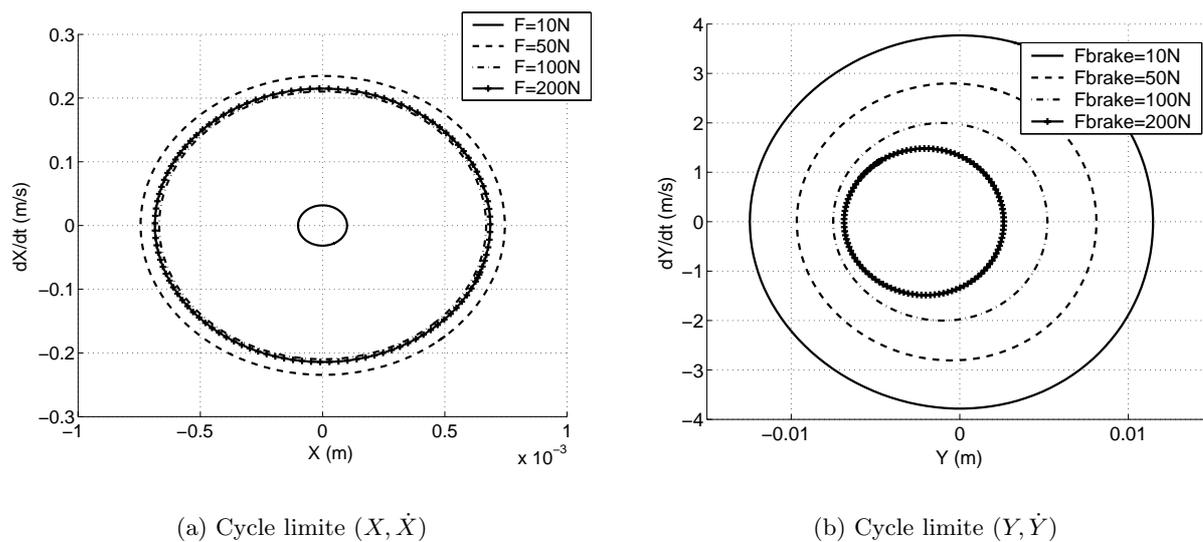
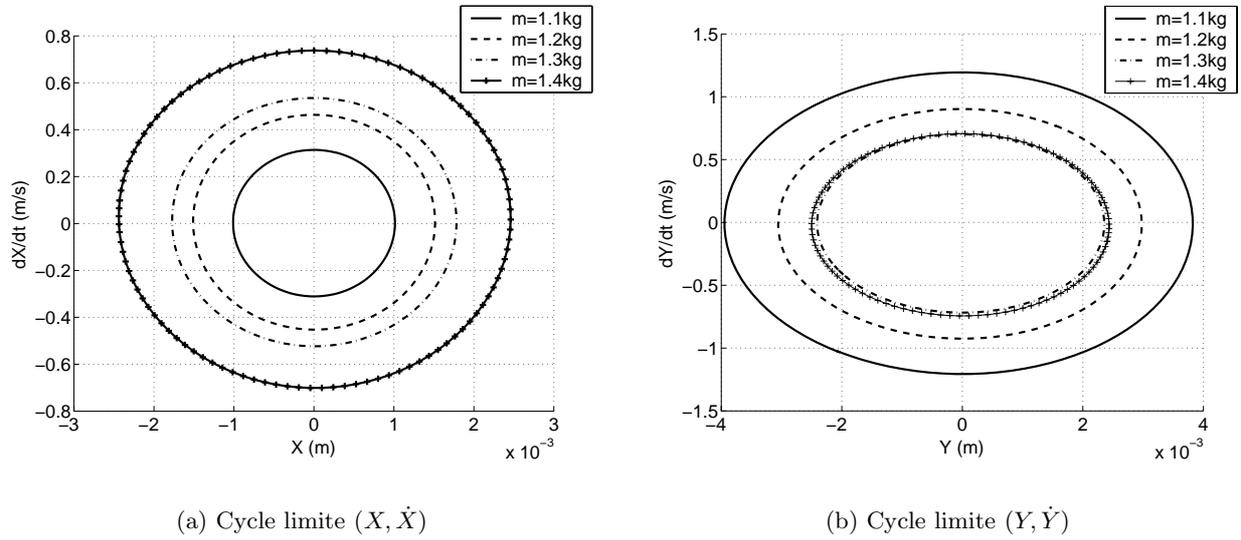
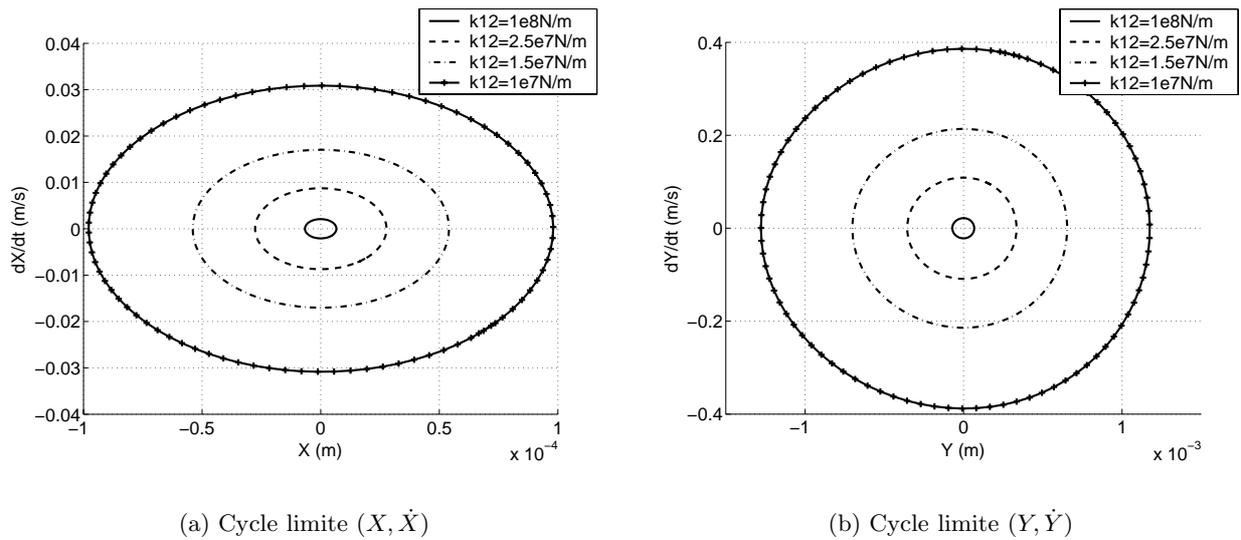


FIG. 4.52: Évolution des cycles limites en fonction de la force de commande  $F_{brake}$

FIG. 4.53: Évolution des cycles limites en fonction de la masse  $m_1$ FIG. 4.54: Évolution des cycles limites en fonction de la raideur non linéaire  $k_{12}$

## 4.4 Analyse Non-Linéaire des Modes Complexes

L'application de méthodes non-linéaires plus ou moins complexes est envisageable afin d'étudier les niveaux vibratoires associés à un système non-linéaire. Ces méthodes permettent d'obtenir de manière rapide les amplitudes vibratoires à travers des simplifications du système de départ ou la recherche de solution sous des formes prédéfinies. Cependant, ces méthodes présentent l'inconvénient d'être assez complexes et leur implémentation nécessite un temps de codage assez long.

Ainsi, une question qui vient naturellement à l'esprit est de savoir si nous ne pouvons pas utiliser les notions propres aux systèmes linéaires (et la notion de mode associé) pour des problèmes non-linéaires. De telles approches ont déjà été mises en place lors des travaux de Setio et Jézéquel [153] qui s'intéressent plus particulièrement aux modes non-linéaires et à la superposition modale non-linéaire.

Dans cette partie, nous allons proposer une nouvelle approche permettant d'obtenir les amplitudes d'un système non-linéaire autonome à partir des modes non-linéaires et fréquences associées. Cette méthode a pour but de donner une solution simplifiée périodique stationnaire du problème non-linéaire par l'intermédiaire de l'examen des valeurs propres et vecteurs propres du système linéarisé équivalent obtenu par l'intermédiaire de la méthode de la linéarisation équivalente. Nous rappellerons tout d'abord quelques notions sur les modes non-linéaires et expliciter la démarche de cette nouvelle approche utilisant les valeurs propres et vecteurs propres du système linéarisé équivalent.

### 4.4.1 Problème considéré

Nous repartons de l'équation dynamique non-linéaire du système (4.10).

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}.\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}.\mathbf{x} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathbf{f}_{(2)}^{ij} .x_i .x_j + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mathbf{f}_{(3)}^{ijk} .x_i .x_j .x_k \quad (4.139)$$

où  $\mathbf{f}_{(2)}^{ij}$  et  $\mathbf{f}_{(3)}^{ijk}$  définissent les coefficients des termes non-linéaires quadratiques et cubiques.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  représentent les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système.  $\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$  correspond au vecteur des termes non-linéaires et  $\mathbf{F}$  définit la force appliquée.

Le point d'équilibre associé  $\mathbf{x}_0$  vérifie l'équation statique non-linéaire:

$$\mathbf{K}.\mathbf{x}_0 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{x}_0) \quad (4.140)$$

Le système dynamique non-linéaire est redéfini autour du point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  ( $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \bar{\mathbf{x}}$ ). Après passage sous forme d'équation d'état ( $\mathbf{z} = \{\bar{\mathbf{x}} \quad \dot{\bar{\mathbf{x}}}\}^T$ ), ce système se met sous la forme

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}.\mathbf{z} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \boldsymbol{\eta}_{(2)}^{ij} .z_i .z_j + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \boldsymbol{\eta}_{(3)}^{ijk} .z_i .z_j .z_k \quad (4.141)$$

avec les termes  $\mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_{(2)}$  et  $\boldsymbol{\eta}_{(3)}$  définis en (4.33), (4.34) et (4.35). Nous ne revenons par sur les différentes étapes qui ont déjà été évoqués précédemment et qui permettent d'aboutir au système non-linéaire (4.141). Ce système non-linéaire va nous servir de point de départ pour l'application de la méthode proposée.

Finalement, ce système peut-être écrit sous la forme de Jordan

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}.\mathbf{y} + \mathbf{FNL}(\mathbf{y}) \quad (4.142)$$

où  $\mathbf{J}$  correspond à la partie linéaire du système et définit une matrice diagonale comportant les valeurs propres  $\lambda$  du système linéarisé:  $\mathbf{FNL}$  regroupe l'ensemble des termes non-linéaires. Nous appelons  $\mathbf{P}$  la base constituée des valeurs propres de  $\mathbf{J}$ .

#### 4.4.2 Mode non-linéaire complexe

Avant toute chose, nous rappellerons la notion de mode non-linéaire et préciserons quelques hypothèses que nous allons prendre en compte par la suite.

Nous considérons un système non-linéaire qui possède un point de bifurcation de Hopf  $(M_0, \mu_0)$  et supposons que le système linéarisé associé au point  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$  est instable. Alors, un ou plusieurs modes linéaires de ce système sont instables. Nous pouvons considérer que toutes les participations modales des modes sont alors négligeables devant le mode le plus instable (du fait des croissances comparées des exponentielles) et que la réponse linéaire du système peut simplement s'écrire en ne faisant intervenir que ce mode instable. Nous avons alors

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (4.143)$$

avec  $\lambda$  et  $\mathbf{Y}_0$  la valeur propre complexe et le vecteur propre normé complexe du mode instable. Nous avons donc  $Re(\lambda) > 0$ .

Cette relation peut être prolongée pour les systèmes non-linéaires sous la forme

$$\mathbf{y}(t) = p \cdot \mathbf{Y}_0(p) \cdot e^{\lambda(p) \cdot t} \quad (4.144)$$

où  $p$  est un entier positif. Ainsi, pour chacune des valeurs de  $p$ , il est associé un mode complexe  $\mathbf{Y}_0(p)$  et une valeur propre complexe  $\lambda(p)$  qui définissent le mode non-linéaire complexe. Cette relation est vérifiée en  $p = 0$  avec l'équation (4.143). La partie réelle de la valeur propre  $\lambda(p)$  caractérise alors la stabilité du système et la partie imaginaire correspond à la fréquence d'instabilité associée.

#### 4.4.3 Utilisation de la méthode de la linéarisation équivalente

La méthode de la linéarisation équivalente va être utilisée afin d'approximer les termes non-linéaires par une contribution linéaire équivalente pour une solution test donnée. Le système considéré est donc le suivant

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{FNL}(\mathbf{y}) \quad (4.145)$$

Nous cherchons donc à approximer ce système par le système linéaire équivalent

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{J}' \mathbf{y} \quad (4.146)$$

où  $\mathbf{J}'$  représente la matrice linéaire équivalente des termes non-linéaires définis par la fonction  $\mathbf{FNL}$ . Cette matrice équivalente peut être obtenue en minimisant la moyenne de la différence  $\varepsilon$  entre le système linéarisé équivalent (4.146) et le système non-linéaire (4.145) pour toutes les valeurs de  $\mathbf{y}(t)$ . La différence  $\varepsilon$  est défini comme suit:

$$\varepsilon = \mathbf{FNL}(\mathbf{y}) - \mathbf{J}' \mathbf{y} \quad (4.147)$$

La minimisation de  $\varepsilon$  est obtenue par l'intermédiaire du critère de minimisation

$$\tau(A') = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^t \varepsilon dt \quad (4.148)$$

avec  $T = 2\pi/\omega$  et  $\varepsilon^t$  définissant la transposée de  $\varepsilon$ .

Les conditions nécessaires pour obtenir la minimisation spécifiée dans l'équation précédente sont:

$$\frac{\partial \tau}{\partial a'_{ij}} = 0 \quad (4.149)$$

La construction de la matrice équivalente  $\mathbf{A}'$  est réalisée en considérant les équations (4.148) et (4.149). Pour plus de détail le lecteur pourra se reporter au paragraphe 3.6. La matrice linéaire équivalente est alors définie par

$$a'_{ij} = \frac{\int_0^T y_{ij} \cdot FNL_{ij}(y_{ij}) dt}{\int_0^T y_{ij}^2 dt} \quad (4.150)$$

Bien entendu, la matrice linéaire équivalente  $\mathbf{J}'$  peut aussi être obtenue à partir de l'expression **FNL** par la méthode des moindres carrés appliquée sur la période  $T$  du système en considérant  $n$  points d'interpolation ou par toute autre méthode minimisant l'erreur entre le système linéaire équivalent et les termes non-linéaires (méthode de la balance harmonique par exemple).

Ainsi, le système linéarisé équivalent du système de départ non-linéaire (4.142) est de la forme

$$\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{J} + \mathbf{J}') \mathbf{y} \quad (4.151)$$

La démarche nous permettant d'obtenir les amplitudes du système non-linéaire, à partir des valeurs propres et vecteurs propres provenant du système linéaire équivalent, va maintenant être explicitée.

#### 4.4.4 Approche Non-Linéaire des Modes Complexes

Comme nous l'avons déjà vu dans le paragraphe 4.4.2, la réponse du système non-linéaire peut être approximée, en considérant les participations modales des modes stables négligeables par rapport à la participation modale du mode instable, sous la forme

$$\mathbf{y}(t) = p \cdot \mathbf{Y}_0(p) \cdot e^{\lambda(p) \cdot t} \quad (4.152)$$

où  $p$  est un entier positif. Bien entendu, la partie réelle de la valeur propre  $\lambda(p)$  caractérise la stabilité du système et la partie imaginaire correspond à la fréquence d'instabilité associée.

Ainsi, l'idée consiste à examiner la relation (4.152). L'entier positif  $p$  définit l'amplitude de la solution du système non-linéaire. Nous remarquons que si la valeur propre  $\lambda(p)$  a une partie réelle positive, nous avons une expression  $\mathbf{y}(t)$  croissante au cours du temps. Du fait que nous sommes dans l'hypothèse d'un mode instable,  $Re(\lambda(p))$  ne peut être négative.

Étant donné que le système non-linéaire possède un cycle limite, il existe une valeur  $p_0$  de  $p$  qui annule la partie réelle de la valeur propre  $\lambda(p)$  ceci afin d'avoir une réponse périodique stationnaire du système

$$\mathbf{y}(t) = p_0 \cdot \mathbf{Y}_0(p_0) \cdot e^{\omega_0 \cdot t} \quad (4.153)$$

avec  $\omega_0 = \text{Im}(\lambda(p_0))$  définissant la fréquence et  $\mathbf{Y}_0(p_0)$  la déformée associée avec  $\text{Re}(\lambda(p_0)) = 0$ . L'entier positif  $p_0$  définit alors l'amplitude de la solution périodique stationnaire du système non-linéaire.

Connaissant la valeur de la valeur propre  $\lambda(0)$  et la déformée associée  $\mathbf{Y}_0(0)$ , correspondant au système linéarisé de départ, l'objectif est donc maintenant de pouvoir suivre l'évolution de la valeur propre  $\lambda(p)$  et de la déformée associée  $\mathbf{Y}_0(p)$  pour aboutir à la solution périodique stationnaire du système. En incrémentant l'entier  $p = p + \delta p$ , nous nous plaçons au voisinage du point  $p$ . En prenant  $\delta p$  suffisamment petit et connaissant le vecteur propre complexe  $\mathbf{Y}_0(p)$  et la valeur propre  $\lambda(p)$ , nous pouvons calculer le vecteur propre complexe  $\mathbf{Y}_0(p + \delta p)$  et la valeur propre  $\lambda(p + \delta p)$  du mode instable en  $p$ . En effet, en calculant le système linéaire équivalent  $(\mathbf{J} + \mathbf{J}') \cdot \mathbf{y}$  pour  $p = p + \delta p$ , par l'intermédiaire de la méthode de la linéarisation équivalente, et en se servant des données relatives à la valeur propre  $\lambda(p)$  et du vecteur propre complexe  $\mathbf{Y}_0(p)$ , nous pouvons trouver la nouvelle valeur de la valeur propre  $\lambda(p + \delta p)$  et du vecteur propre complexe associé  $\mathbf{Y}_0(p + \delta p)$  en  $p = p + \delta p$ . Ainsi, en partant de la valeur  $p = 0$ , en incrémentant par  $p = p + \delta p$  (avec  $\delta p$  suffisamment petit) et en réactualisant les données  $\mathbf{Y}_0(p)$ ,  $\lambda(p)$  et  $\mathbf{J}'$  à chaque étape, nous pouvons suivre l'évolution des quantités  $\lambda(p)$  et  $Y(p)$ .

L'évolution de la partie réelle de  $\lambda(p)$ , qui est positive au départ, caractérise la stabilité du système. Nous effectuons cette procédure jusqu'à obtenir la valeur  $p_0$  qui annule la partie réelle de  $\lambda(p)$ . Alors, les solutions stationnaires périodiques du système non-linéaire sont données par  $\mathbf{y}(t) = p_0 \cdot \mathbf{Y}_0(p_0) \cdot e^{\lambda(p_0) \cdot t}$ .

L'ensemble de cette méthodologie appliquée à un système non-linéaire est explicitée par le schéma 4.55.

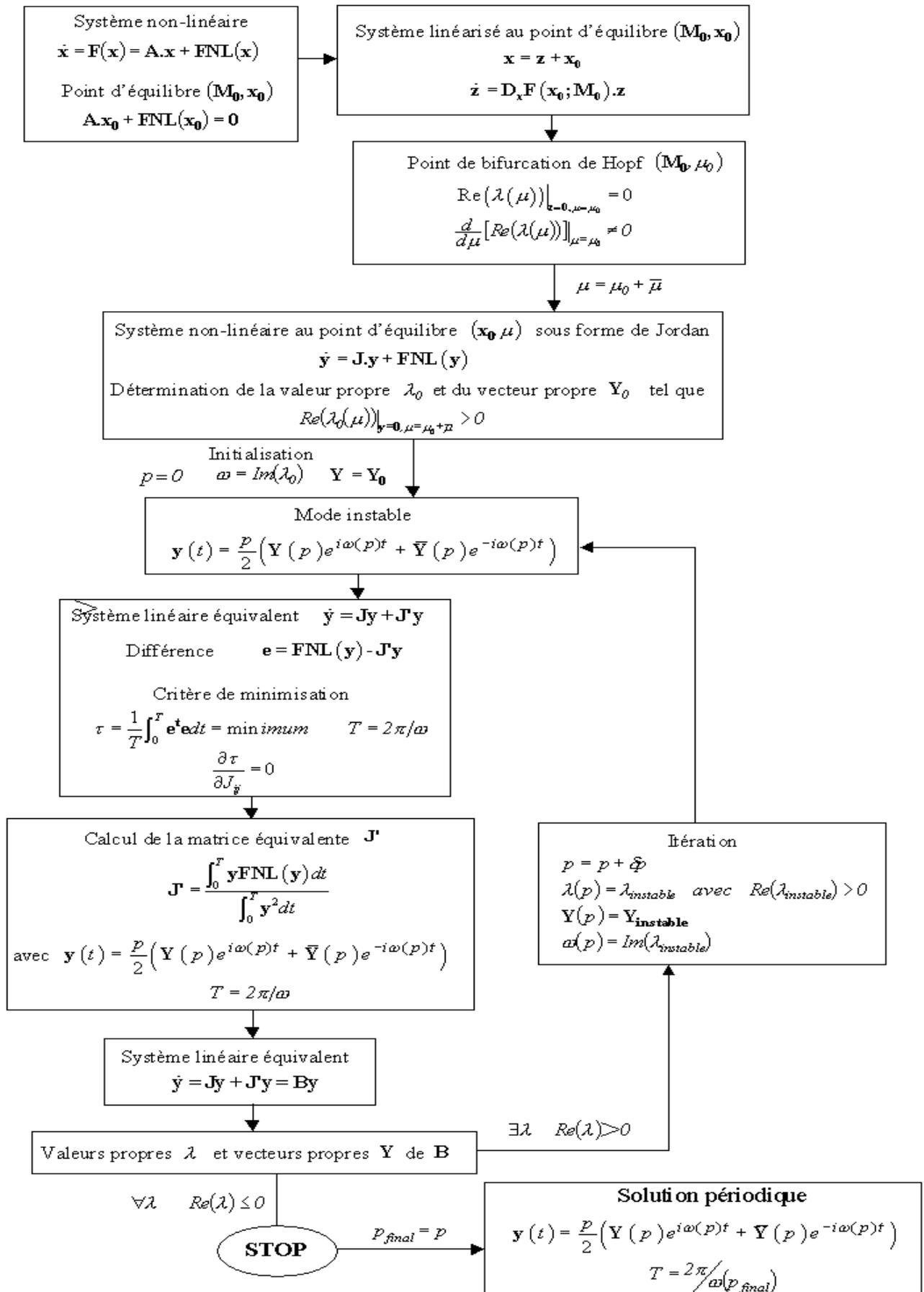


FIG. 4.55: Schéma de la méthode de l'approche linéarisée aux valeurs propres

#### 4.4.5 Application au système non-linéaire frottant

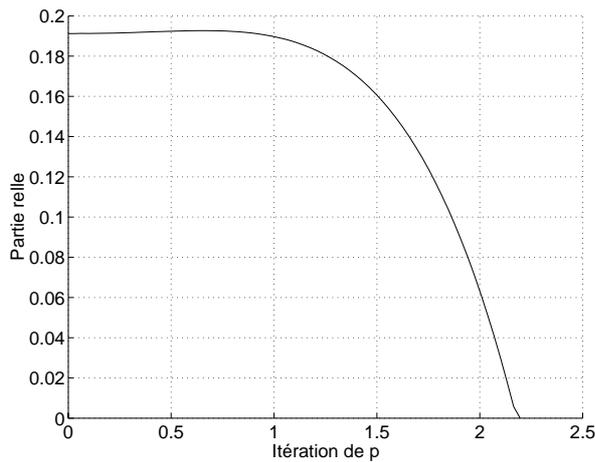
Cette procédure est appliquée au système frottant considéré précédemment. Pour cela, nous allons rechercher les modes non-linéaires et fréquences non-linéaires, ainsi que les amplitudes vibratoires et les cycles limites du système non-linéaire au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Nous validerons la méthode par une comparaison des cycles limites obtenus par intégration temporelle et par l'approche linéarisée aux valeurs propres.

##### 4.4.5.1 Détermination des cycles limites

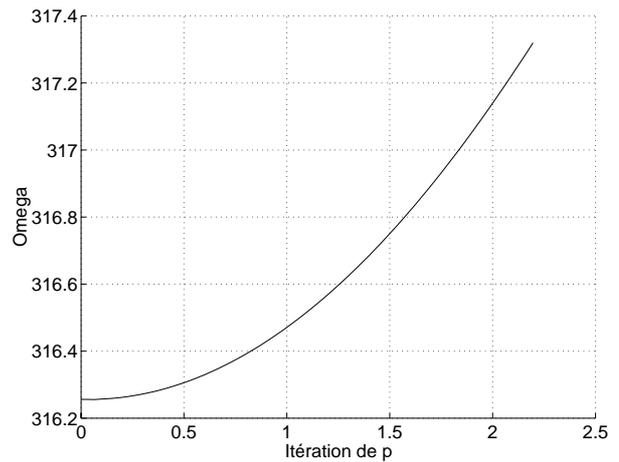
Nous considérons le système (4.141) au voisinage du point de bifurcation de Hopf  $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$ . Dans notre cas, le système écrit sous forme d'équation d'état possède deux modes conjugués instables de participations modales équivalentes. Ainsi, la composante périodique des modes non-linéaires complexes du système peut s'écrire, par analogie avec ce qui précède, sous la forme

$$\mathbf{y}(t) = \frac{p}{2} \cdot \left( \mathbf{Y}_0(p) \cdot e^{i\omega(p) \cdot t} + \overline{\mathbf{Y}_0(p)} \cdot e^{-i\omega(p) \cdot t} \right) \quad (4.154)$$

L'évolution de la partie réelle de  $\lambda(p)$ , qui permet de statuer sur la stabilité du système et l'évolution de la fréquence associée  $\omega(p)$  sont données en figures 4.56. Les solutions périodiques stationnaires obtenues sont illustrées par l'intermédiaire des cycles limites des figures 4.57 et 4.58.



(a) Évolution de la partie réelle de  $\lambda(p)$



(b) Évolution de  $\omega(p)$  (rad/s)

FIG. 4.56: Évolution des fonctions définissant le mode non-linéaire

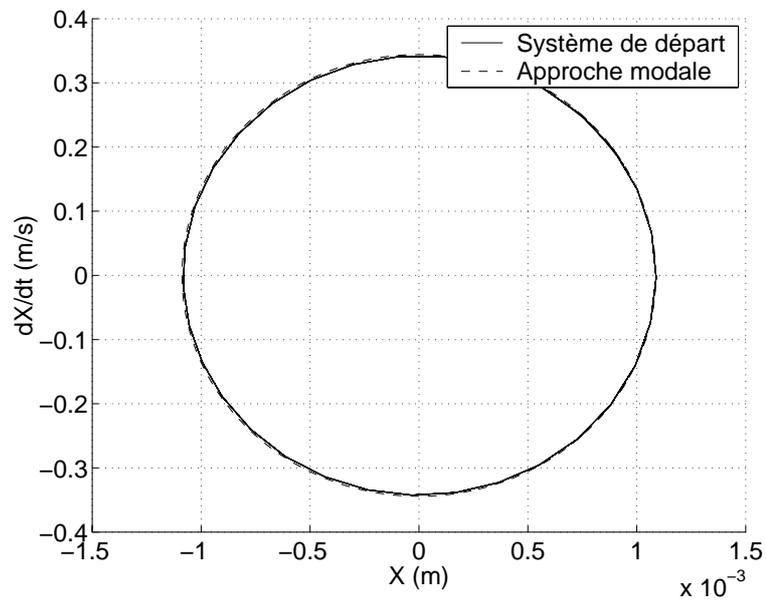


FIG. 4.57: Cycle limite  $(X, \dot{X})$  par l'approche linéarisée aux valeurs propres pour  $\mu = 1.001\mu_0$

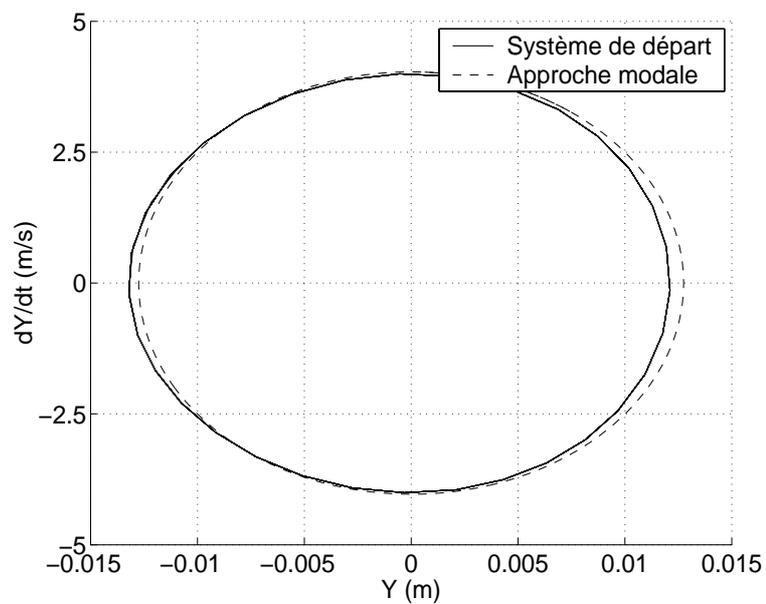
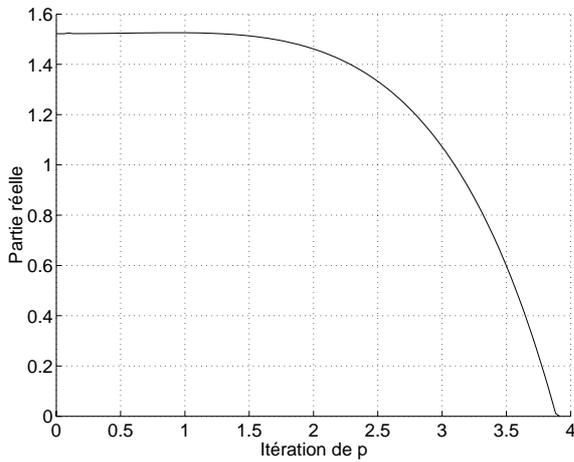
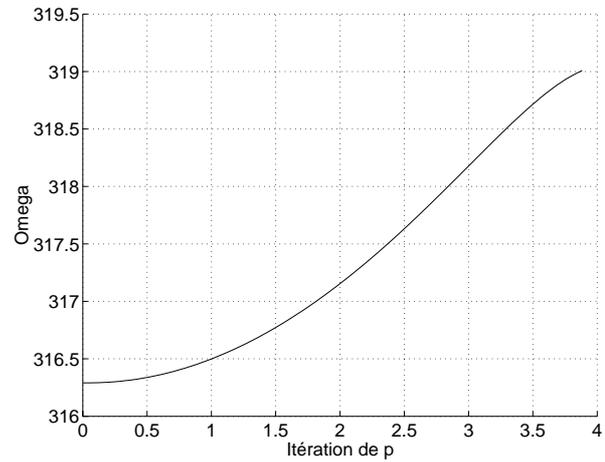
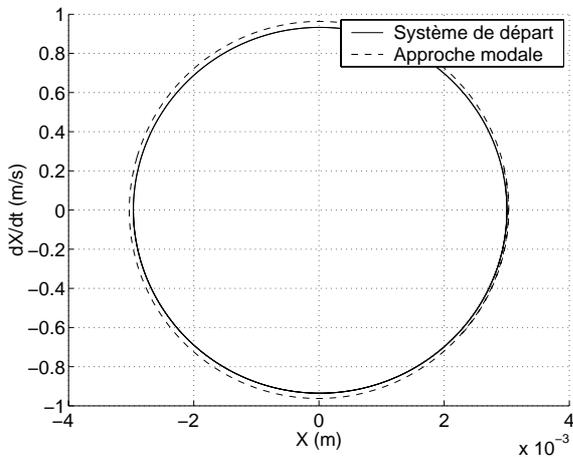
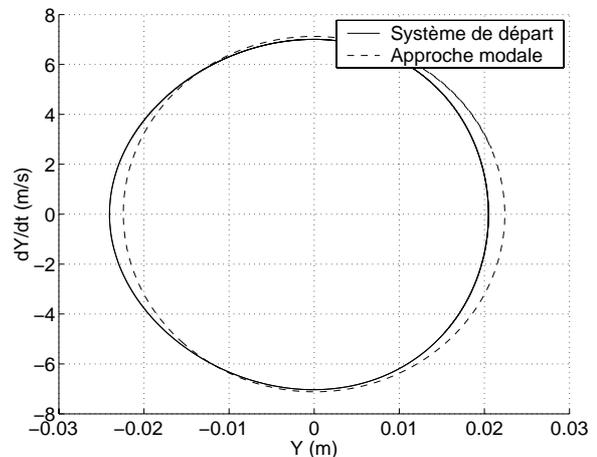


FIG. 4.58: Cycle limite  $(Y, \dot{Y})$  par l'approche linéarisée aux valeurs propres pour  $\mu = 1.001\mu_0$

#### 4.4.6 Recherche d'un cycle limite "loin" du point de bifurcation

La méthode de la variété centrale nous oblige à rester au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Ainsi, si nous recherchons des cycles limites "loin" de ce dernier, nous devons utiliser une autre méthode : parmi les méthodes les plus classiques, nous retrouvons bien entendu, toutes les méthodes de balance harmonique ou de collocation. La méthode que nous proposons peut aussi permettre la recherche de cycle limite "loin" du point de bifurcation de Hopf, comme l'illustrent les figures 4.59 et 4.60, en recherchant des solutions simplifiées au premier harmonique et en simplifiant le système non-linéaire par l'intermédiaire de la prise en compte de la participation modale unique du mode instable. L'un des avantages le plus évident est la rapidité de mise en place d'une telle méthode et sa facilité d'utilisation. Cependant, nous rappelons qu'elle ne permet d'approcher que les solutions périodiques des systèmes non-linéaires.

(a) Évolution de la partie réelle de  $\lambda(p)$ (b) Évolution de la fréquence  $\omega(p)$  (rad/s)FIG. 4.59: Évolution des fonctions définissant le mode non-linéaire pour  $\mu = 1.01\mu_0$ (a) Cycle limite  $(X, \dot{X})$ (b) Cycle limite  $(Y, \dot{Y})$ FIG. 4.60: Cycles limites par la méthode des modes non-linéaires complexes pour  $\mu = 1.01\mu_0$

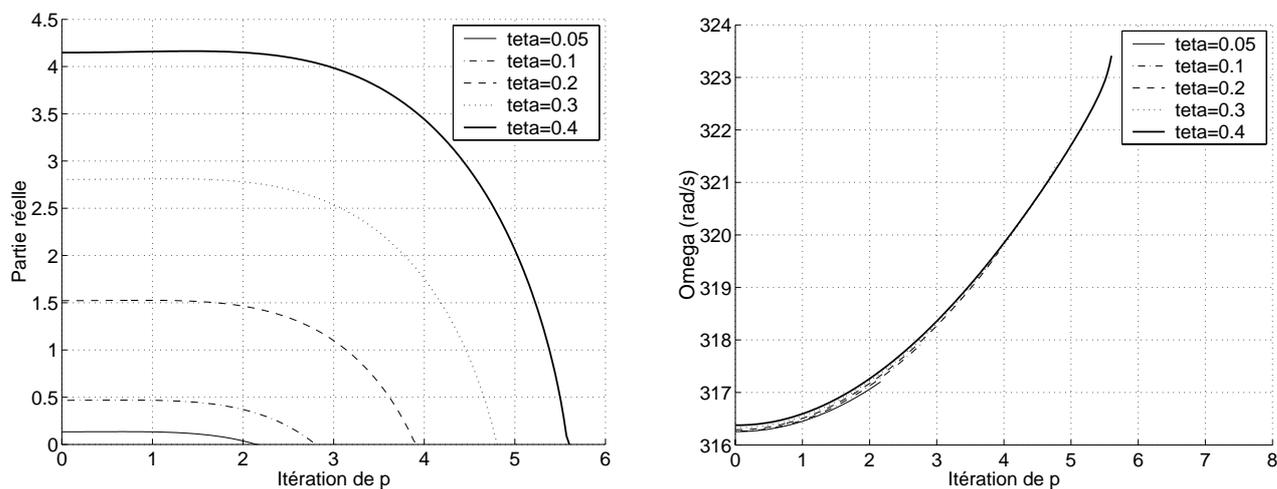
### 4.4.7 Exemple d'étude paramétrique

Afin d'illustrer l'utilisation de cette méthode sur l'influence de facteurs physiques, nous allons présenter l'évolution des amplitudes vibratoires des degrés de liberté du système non-linéaire par rapport à l'évolution de l'angle de sprag-slip. Nous nous plaçons sur l'instabilité (au point  $\mu = 1.01\mu_0$ ). Les valeurs des coefficients de frottement considérés sont données dans le tableau 4.7.

Les évolutions de la partie réelle et de la partie imaginaire de la valeur propre instable, pour différentes valeurs de l'angle de sprag-slip  $\theta$  sont illustrées en figures (4.61). Les évolutions des cycles limites sont représentées (4.62).

Angle $\theta$ (rad)	$\mu = 1.01\mu_0$
0.05	0.056
0.1	0.104
0.2	0.206
0.3	0.313
0.4	0.428

TAB. 4.7: Valeur du coefficient de frottement  $\mu = 1.01\mu_0$  en fonction de l'évolution de l'angle  $\theta$



(a) Évolution de la partie réelle

(b) Évolution de la partie imaginaire

FIG. 4.61: Évolution de la valeur propre en fonction de l'angle de sprag-slip

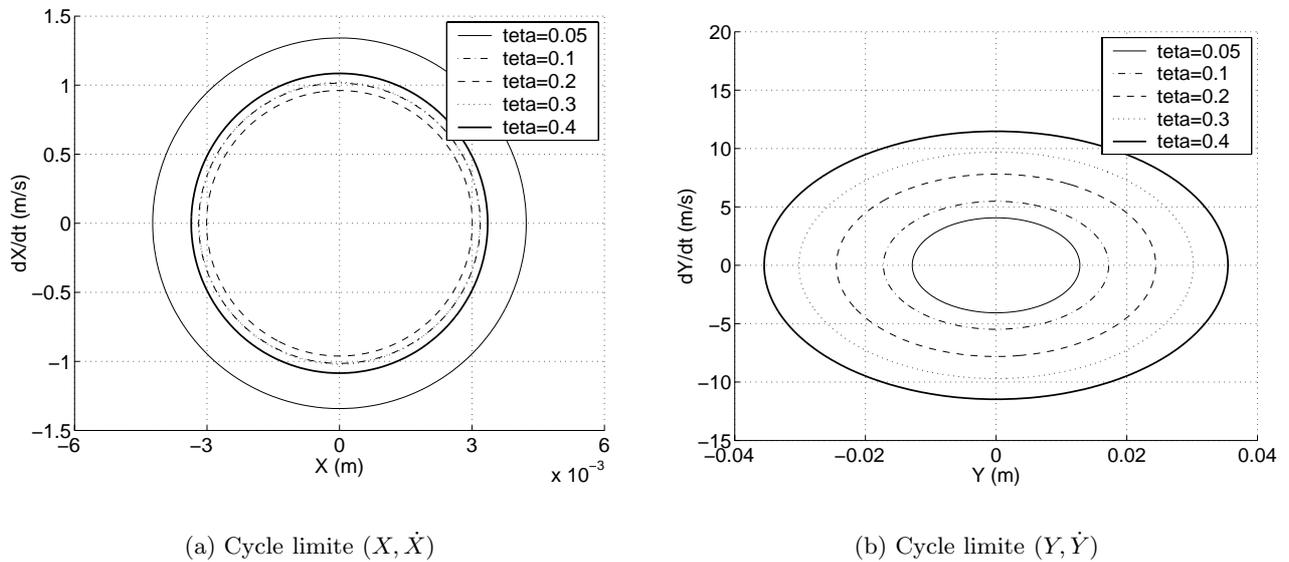


FIG. 4.62: *Évolution des cycles limites en fonction de l'angle de sprag-slip*

#### 4.4.8 Conclusion

Dans cette partie, une nouvelle méthode (CNLMA: Complex Non-Linear Modal Analysis) a été développée. Cette méthode s'intéresse plus particulièrement aux modes non-linéaires complexes. Elle permet d'approcher les solutions périodiques stationnaires des systèmes non-linéaires à partir de l'examen de l'évolution des valeurs propres du système linéaire équivalent. Les cycles limites obtenus par l'intermédiaire de cette méthode sont similaires à ceux obtenus par une intégration temporelle classique. L'un des principaux avantages réside dans sa facilité d'utilisation et sa rapidité pour trouver les solutions du système non-linéaire. Les études paramétriques sur l'évolution des amplitudes vibratoires, en fonction de facteurs physiques variés, sont alors aisées à effectuer.

## 4.5 Conclusion de l'étude

Dans ce chapitre, nous avons modélisé un système de frein pour caractériser la vibration de judder faisant intervenir l'ensemble du train avant. Dans cette modélisation, nous avons considéré le comportement dynamique non-linéaire du système de commande et du train avant. Ces non-linéarités ont été exprimées par l'intermédiaire de polynômes quadratiques et cubiques. Le frottement a été modélisé par la loi de Coulomb. L'instabilité provient alors du couplage de mode engendré par l'intermédiaire de l'angle de sprag slip.

La stabilité du système dépend du coefficient de frottement et peut apparaître en considérant un coefficient de frottement constant. Des études biparamétriques ont montré la complexité d'un tel problème où les zones de stabilité sont sensibles à un nombre varié de paramètres parmi lesquelles les différentes masses, raideurs, force de freinage et aspects géométriques sont impliqués.

D'autres part, une procédure utilisant la méthode de la variété centrale, les approximants de Padé et la balance harmonique AFT a été implémenté afin d'obtenir les niveaux vibratoires lors de l'apparition d'une instabilité. Pour cela, nous avons recherché le point de bifurcation de Hopf, qui correspond au déclenchement de l'instabilité. Ensuite, le système non linéaire est réduit par la méthode de la variété centrale qui consiste à exprimer les variétés stables  $\mathbf{v}_s$  en fonction des variétés centrées  $\mathbf{v}_c$  par l'intermédiaire d'une fonction  $\mathbf{h}$  que nous avons exprimé sous la forme d'un polynôme allant jusqu'au cinquième ordre.

La deuxième méthode non-linéaire mise en place a été la simplification du système non-linéaire écrit en fonction des variétés centrées  $\mathbf{v}_c$  sous forme de fraction rationnelles à deux variables. Cette approche correspond à l'extension des approximants de Padé au cas de deux variables. Cette méthode à la propriété de simplifier la série de puissance croissante découlant de la variété centrale est de plus de pouvoir converger alors que la série correspondante diverge.

La dernière méthode mise en place est la méthode de la balance harmonique AFT (avec la DFT) pour obtenir une expression finale des cycles limites des variétés centrées sous forme de coefficients de Fourier.

D'un point de vue pratique, ces méthodes non-linéaires permettent de prédire les cycles limites d'un système comportant des non-linéarités polynomiales près du point de bifurcation de Hopf. L'utilisation de ces méthodes permet un gain en temps de calcul très important et donne ainsi la possibilité d'effectuer des études de conception en étudiant l'influence de divers paramètres sur les niveaux vibratoires d'un système.

Nous avons montré dans cette étude une application originale de l'utilisation de la variété centrale couplée avec l'utilisation des approximants de Padé. En effet, généralement, la méthode non-linéaire qui suit la méthode de la variété centrale est la forme normale. La mise en place des approximants à deux variables présente l'avantage de converger alors que la méthode de la variété centrale diverge pour le même nombre de termes non-linéaires pris en compte (ce qui signifie que la forme normale diverge aussi). Ainsi, les approximants de Padé à la suite de la méthode de la variété centrale se montrent très efficace pour simplifier le système non-linéaire. De plus, ils peuvent même permettre, dans certains cas, de retrouver un cycle limite approché alors que la méthode de la variété centrale sur lequel s'appuie le calcul des coefficients de Padé diverge.

D'autre part, les approximants donnent la possibilité d'avoir une plage de conditions initiales plus larges qui permettent toutes de converger vers les cycles limites du système réel (alors que les mêmes

conditions initiales feraient diverger le calcul pour le système de la variété centrée). Pour toutes ces raisons, les approximants de Padé peuvent être un moyen très efficace pour la recherche des cycles limites.

Ainsi, pour un problème non-linéaire qui comporte une bifurcation de Hopf simple, la méthode de la variété centrale permet d'utiliser ensuite les approximants de Padé à deux variables. La combinaison de ces deux méthodes constitue une approche non-linéaire efficace et permet une détermination rapide de cycles limites conformes à ceux obtenus sur le système complet.

Aussi, une nouvelle approche (CNLMA: Complex Non-Linear Modal Analysis) a été mise en place. Cette méthode s'intéresse plus particulièrement aux modes non-linéaires complexes et au fait que le comportement d'un système linéarisé instable peut s'approximer par la participation modale du mode instable. Cette méthode permet d'approcher les solutions périodiques stationnaires des systèmes non-linéaires à partir de l'examen de l'évolution des valeurs propres du système linéarisé équivalent. L'un des principaux avantages réside dans sa facilité d'utilisation et sa rapidité pour trouver les solutions du système non-linéaire. L'un des inconvénients majeur réside tout simplement au fait que la solution est périodique, ce qui donnera une solution approchée qui peut être grossière suivant le problème non-linéaire rencontré. Par comparaison à la procédure complète "variété centrale+Padé approximant+balance harmonique", cette approche permet la recherche de cycles limites "loin" du point de bifurcation de Hopf. Bien entendu, la méthode de la balance harmonique, utilisée seule, permettrait aussi d'obtenir les cycles limites loin du point de bifurcation de Hopf, mais dans notre cas, du fait de l'utilisation initiale de la méthode de la variété centrale, l'ensemble de la procédure "variété centrale+Padé approximant+balance harmonique" ne permet qu'une estimation des cycles limites proche du point de bifurcation de Hopf.

## Chapitre 5

# Application industrielle

Dans ce chapitre, nous étudierons la stabilité d'une structure industrielle complexe, qui est un système de freinage aéronautique.

En effet, l'un des problèmes majeurs auxquels se retrouvent confrontés les équipementiers et avionneurs provient des vibrations des freins et plus particulièrement des instabilités engendrées lors d'un freinage. Si, d'un point de vue expérimental, les problèmes vibratoires et les divers phénomènes semblent assez bien connus (Ozbek [102] et Enright [50]), les approches théoriques tentant de reproduire ces phénomènes et plus précisément de détecter les instabilités éventuelles avec les niveaux vibratoires associés sont plus rares. Ceci peut s'expliquer du fait que la recherche des niveaux vibratoires est souvent réalisée à partir de modèles complexes (modèles phénoménologiques ou modèles éléments finis) et nécessite donc un temps de calcul prohibitif. Par une telle approche, il est bien sûr difficile de prendre en compte le phénomène d'instabilité lors de la conception d'un frein aéronautique. C'est pour cette raison que les études de stabilité non-linéaires deviennent maintenant indispensables lors de l'étude d'un frein aéronautique. Ces études, à travers l'utilisation d'outils non-linéaires permettent de prendre en compte la notion de stabilité et de répondre de façon efficace et rapide à de nouvelles géométries et caractéristiques d'un frein.

D'autre part, comme nous allons le voir par la suite, les vibrations d'un frein aéronautique sont clairement identifiées d'un point de vue expérimental. Néanmoins les phénoménologies associées, et par conséquent les modèles analytiques, ne sont pas toujours clairement établis. C'est tout particulièrement le cas de la vibration de whirl qui est l'une des vibrations les plus couramment rencontrées parmi les instabilités d'un frein. Notre objectif va donc consister à construire un modèle phénoménologique qui nous permette de reproduire la vibration de whirl et de détecter les zones de stabilité et niveaux vibratoires associés. Notre démarche va se baser sur de nombreux essais et observations expérimentales.

Dans ce chapitre, la structure d'un frein aéronautique va être présentée, avec les divers modes de vibration associés. Une attention toute particulière sera ensuite consacrée aux études et données expérimentales qui ont été réalisées: ces dernières nous permettront en effet de modéliser la structure du frein de manière simplifiée et de statuer sur la validité de nos calculs et résultats théoriques, par rapport aux résultats expérimentaux.

Dans un second temps, nous étudierons la stabilité proprement dite du frein pour le mode de whirl. Pour cela, nous mettrons en place des outils non-linéaires pour avoir une démarche visant à effectuer des

études de conception et de prédire quels sont les facteurs physiques ayant une influence sur l'instabilité d'un système de freinage. Dans cette dernière partie, nous présenterons plus particulièrement une plate-forme conçue spécialement à cet effet.

## 5.1 Un frein aéronautique carbone/carbone

Les freins sont logés à l'intérieur des roues du train principal. Comme l'illustrent les figures 5.1 et 5.2, la structure proprement dite d'un frein peut-être décomposée en deux grands ensembles: une structure mécanique et un puits de chaleur (nom donné à l'empilement successif des rotors et des stators).

La structure mécanique se compose, d'une part de la couronne hydraulique, et d'autre part du tube de torsion. La couronne hydraulique est constituée, dans certains cas, de deux circuits distributeurs de pression hydraulique (le circuit normal et le circuit de secours). La couronne hydraulique permet d'appliquer l'effort de presse et donc d'amorcer et de moduler le freinage. Par ailleurs, elle est reliée au train d'atterrissage par l'intermédiaire d'une barre qui sert de barre de reprise de couple (quand cette dernière est présente). Le tube de torsion bloque en rotation les stators par l'intermédiaire de tenons et reprend l'effort de presse grâce à sa face arrière agissant comme une plaque de retenue. De plus, cette face arrière comporte le dernier stator qui se trouve "fixé" à ce niveau.

Le puits de chaleur est composé d'un ensemble de  $2N + 1$  disques avec  $N + 1$  disques stationnaires (stators), bloqués en rotation par les tenons du tube de torsion et  $N$  disques tournants (rotors), entraînés en rotation par la roue, par l'intermédiaire de barrettes. Le puits de chaleur génère un couple de freinage par frottement entre les stators et les rotors. L'énergie cinétique est alors transformée en chaleur et absorbée par le frein. Du fait des énergies mises en jeu, les propriétés mécaniques, thermiques et tribologiques doivent satisfaire à des exigences élevées. Ceci oblige l'utilisation de disques en matériau composite carbone-carbone.

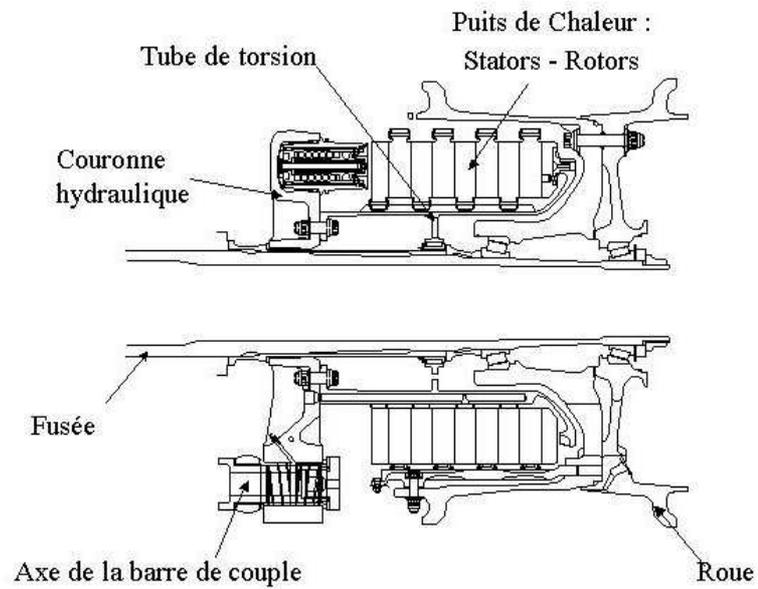


FIG. 5.1: Schéma d'un frein aéronautique

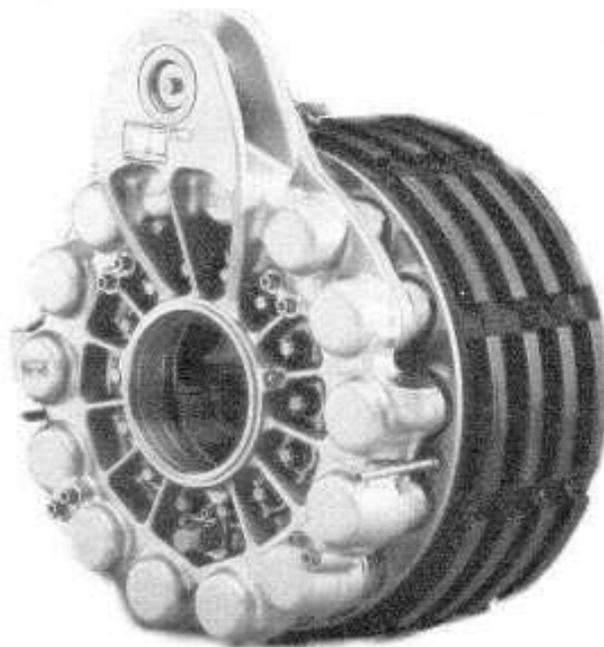


FIG. 5.2: Visualisation d'un frein: couronne + puits de chaleur

## 5.2 Modes de vibrations

Lors d'un freinage, les stators et les rotors sont comprimés par l'intermédiaire des pistons du circuit hydraulique. Le frottement généré à l'interface des zones de contact stator/rotor, peuvent alors donner naissance à des vibrations et des instabilités. De nombreuses études expérimentales réalisées sur les freins aéronautiques ont montré qu'il existe divers modes de vibration, balayant un large spectre en fréquence, liés à des phénomènes d'instabilité. Les modes majeurs de vibration peuvent être classés en quatre catégories:

- Le gear walk : c'est un mouvement de basse fréquence (5-20 Hz) qui se caractérise par un mouvement d'avant en arrière de l'ensemble du train d'atterrissage. Ce mode est provoqué par les forces de frottement à l'interface pneu-piste. Il peut également être induit par le système d'antipatinage.

- Le chatter : le chatter correspond aux mouvements de torsion de la roue et des parties rotatives du frein et du pneu autour de son axe. La fréquence du chatter se situe entre 50 et 100 Hz. Il peut se coupler avec des modes de squeal.

- Le whirl : c'est un mouvement oscillant entre les parties stationnaires du frein. L'extrémité de la fusée décrit un mouvement de rotation elliptique. La couronne a un mouvement complexe : une oscillation de rotation de cette dernière suivant son axe s'ajoute à un mouvement de tournoiement (mouvement d'une pièce de monnaie tournoyant sur une table avant de s'immobiliser).

Le whirl se caractérise par la propagation d'une onde tournoyante au niveau du circuit hydraulique de la couronne. Il se produit généralement à haute vitesse, pour des fréquences de l'ordre de 200 à 400 Hz.

- Le squeal : il se caractérise par des oscillations des parties stationnaires du frein autour de l'axe de la fusée et l'apparition de modes de barre au niveau de la barre de reprise de couple. La gamme de fréquence pour le premier mode de squeal se situe entre 100 et 400 Hz.

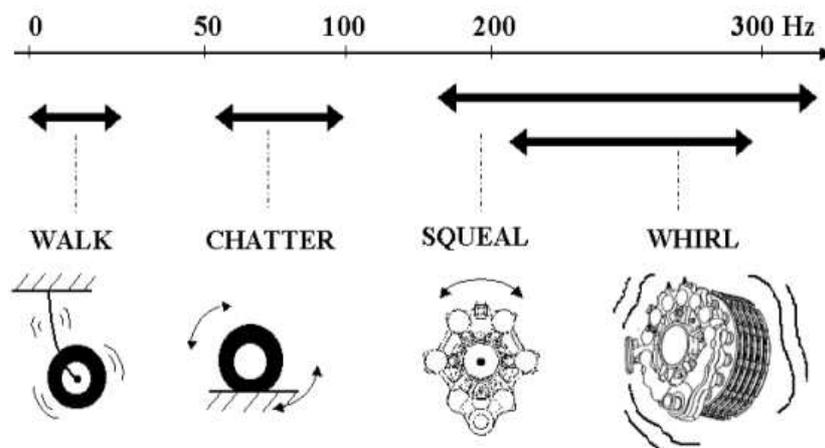


FIG. 5.3: Les principaux modes de vibration pour un frein aéronautique

Les deux phénomènes de squeal et de whirl, phénomènes apparus en essais chez Messier-Bugatti, vont maintenant être décrit plus précisément.

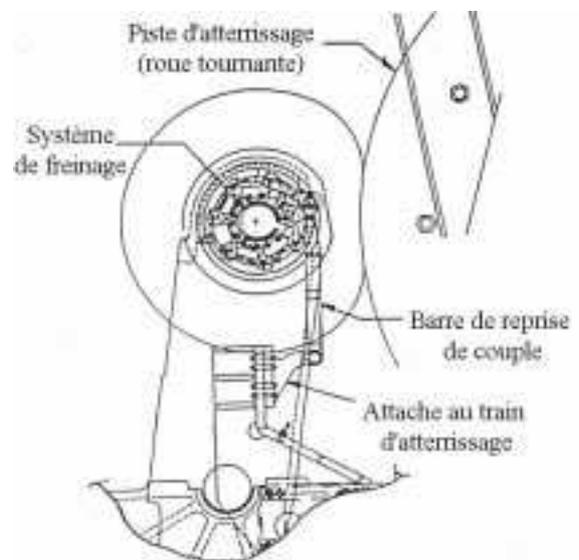
## 5.3 Retour d'expérience

De nombreux essais de freinage ont été réalisés sur l'un des bancs d'essai Messier-Bugatti présenté en figure 5.4. Ce banc permet de reproduire le roulage d'un train d'atterrissage sur une piste d'atterrissage par l'intermédiaire du contact entre la roue d'un frein et un grand volant tournant à une certaine vitesse définissant la piste d'atterrissage. Il constitue une source de résultats très importants, que ce soit pour comprendre les phénoménologies propres à chaque mode vibratoire ou pour examiner l'influence de divers paramètres. Nous nous proposons, dans cette partie de présenter rapidement :

- les déformées liées à chacun des modes observés en essais
- les facteurs influant sur les niveaux de vibration



(a) Banc d'essai pour l'analyse des vibrations



(b) Schématisation du banc

FIG. 5.4: Banc d'essai pour l'analyse des vibrations

### 5.3.1 Analyse des modes

Les nombreux moyens mis en place au niveau de la réalisation d'essais de freinage avec un frein instrumenté en accéléromètres permettent d'obtenir des déformées très complètes, propres à chaque mode vibratoire. En effet, les bancs d'essais Messier-Bugatti permettent d'avoir accès aux divers paramètres mesurés suivants:

- la pression à la purge du frein et dans chacun des six logements de pistons
- le couple par l'intermédiaire de l'effort dans la barre de reprise de couple
- la charge par l'intermédiaire de la presse appliquée sur la roue
- la vitesse de roue
- les accélérations en divers points du frein et de la fusée.

Les emplacements des points de mesures accélérométriques sont représentés en figures 5.5 et 5.6 par des ronds noirs. Ils se décomposent de la manière suivante:

- la couronne hydraulique comporte 6 accéléromètres triaxiaux répartis de manière homogène sur la circonférence de la couronne, permettant des mesures axiales, radiales et tangentielles.
- la fusée comporte 2 accéléromètres biaxiaux (au niveau de la bague de la couronne et de l'encastrement dans le poste de freinage) et un accéléromètre triaxial (à l'extrémité libre)
- la barre de couple comporte 4 accéléromètres biaxiaux en quatre emplacements équidistants le long de la barre de reprise de couple
- la chape comporte 1 accéléromètre biaxial à son extrémité.

Enfin, une mesure de la pression régnant à l'intérieur de chacune des six chambres des logements de pistons permet aussi d'avoir une information sur l'évolution de la pression au cours d'une vibration.

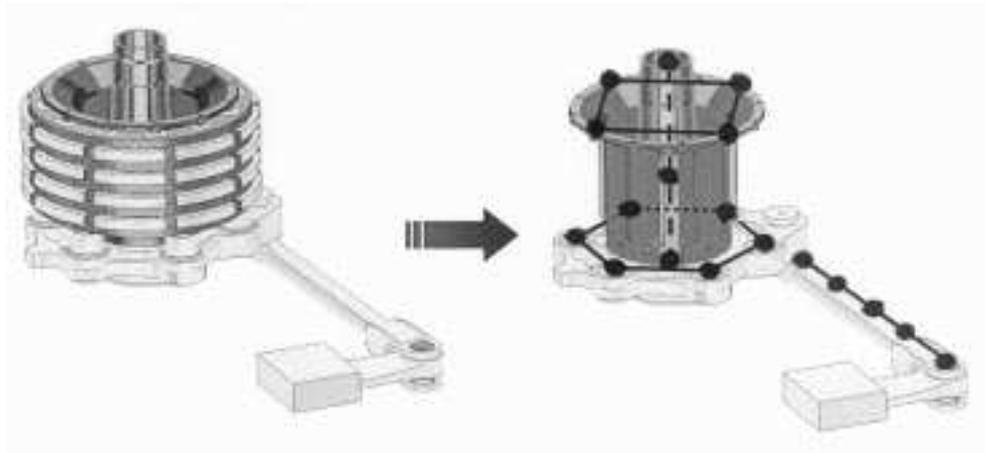


FIG. 5.5: *Instrumentation du frein aéronautique*

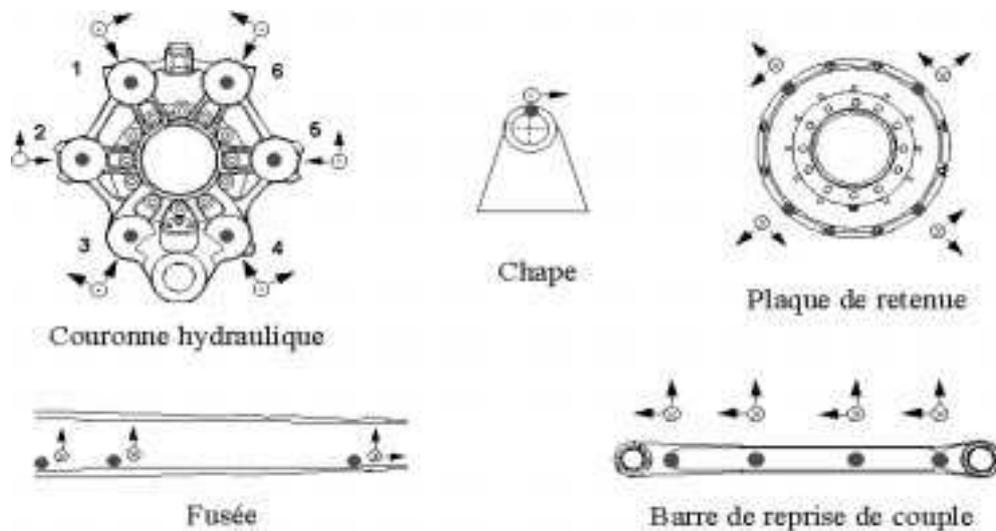


FIG. 5.6: *Positionnement des accéléromètres sur les différentes parties du frein*

Les différentes déformées propres à chacun des modes vibratoires sont les suivantes (en configuration frein neuf) :

- le premier mode de squeal (180 Hz)
- le deuxième mode de squeal (360 Hz)
- le troisième mode de squeal (720Hz)
- le mode de whirl (260 Hz)

### 5.3.1.1 Le premier mode de squeal (180 Hz)

Le premier mode de squeal se caractérise par un mouvement de rotation de la couronne hydraulique auquel s'associe un mouvement de flexion du premier ordre de la barre de reprise de couple suivant ses deux plans orthogonaux. Ainsi, la barre de couple décrit un mouvement elliptique de "corde à sauter" du premier ordre, comme illustré en figure 5.7.

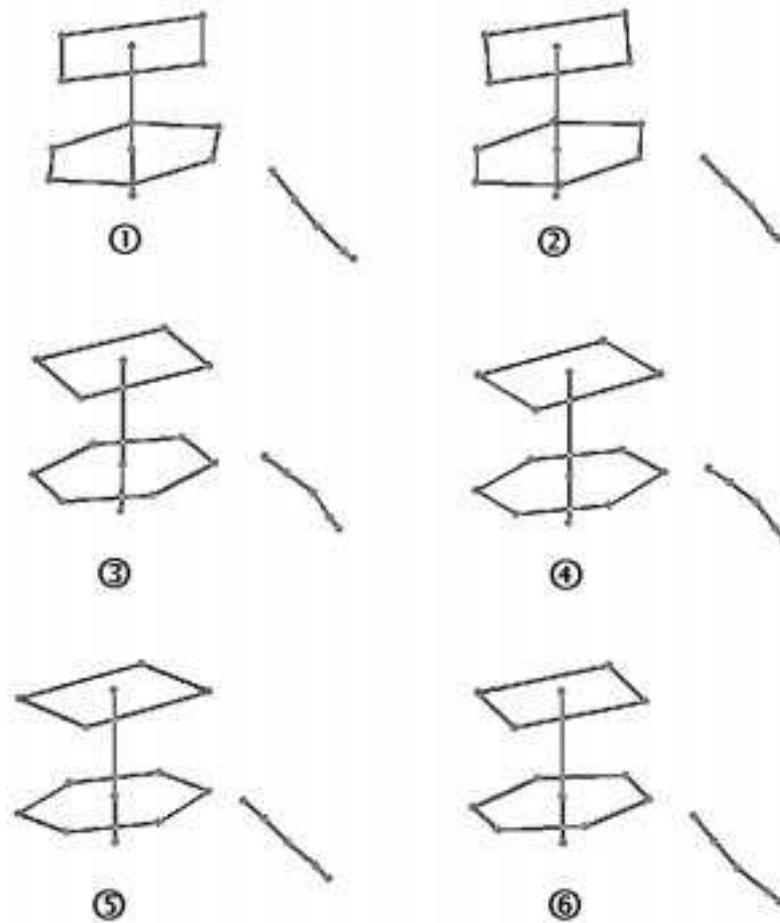


FIG. 5.7: Mode de squeal à 180 Hz

### 5.3.1.2 Le deuxième mode de squeal (360 Hz)

Le deuxième mode de squeal se caractérise par un mouvement de rotation de la couronne hydraulique auquel s'associe un mouvement de flexion du deuxième ordre de la barre de reprise de couple suivant ses deux plans orthogonaux (mouvement elliptique de "corde à sauter" du deuxième ordre, comme illustré en figure 5.8). La fusée reste immobile.

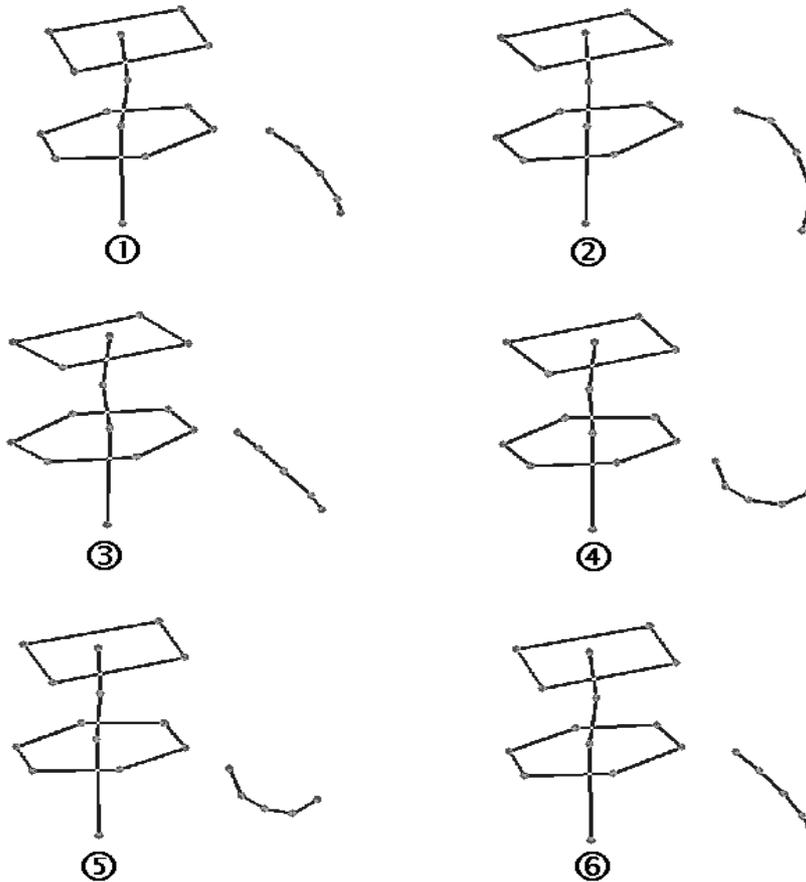


FIG. 5.8: *Mode de squeal à 360 Hz*

### 5.3.1.3 Le troisième mode de squeal (720 Hz)

Le troisième mode de squeal se caractérise par un mouvement de rotation de la couronne hydraulique auquel s'associe un mouvement de flexion du troisième ordre de la barre de reprise de couple suivant ses deux plans orthogonaux (mouvement elliptique de "corde à sauter" du troisième ordre, comme illustré en figure 5.9). La fusée reste immobile.

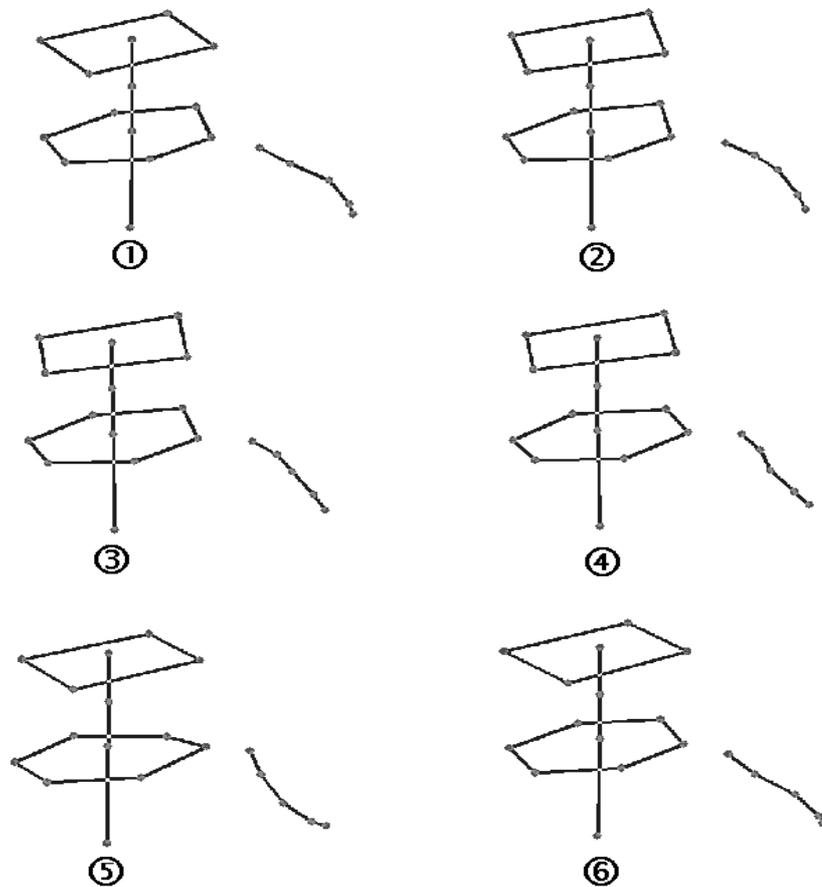


FIG. 5.9: *Mode de squeal à 720 Hz*

### 5.3.1.4 Le whirl (260 Hz)

Comme décrit précédemment, le whirl correspond à un mouvement oscillant des parties stationnaires et tournantes du frein (mouvement d'une pièce de monnaie tournoyant sur une table avant de s'immobiliser). Il résulte du couplage des deux modes de flexion de la fusée. La fusée décrit un mouvement elliptique alors que la barre de reprise de couple suit les mouvements du toc de la couronne. Nous voyons bien ici que la barre de reprise de couple ne décrit pas de mouvement de flexion, contrairement aux différents modes de squeal. Dans le cas du whirl, le mouvement est caractérisé par l'ensemble de la couronne hydraulique et des parties stationnaires et tournantes du frein, comme illustré en figure 5.10.

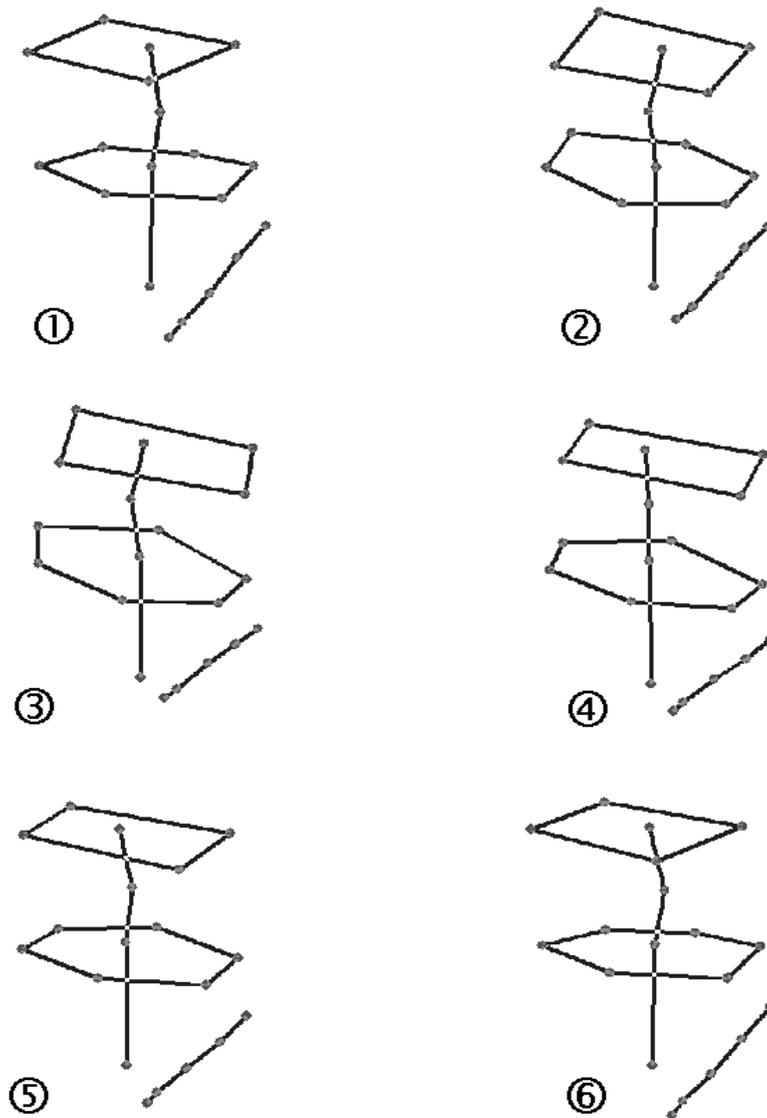


FIG. 5.10: *Mode de whirl à 260 Hz*

De plus, l'une des caractéristiques essentielles du whirl est un phénomène d'onde tournoyante au niveau du circuit hydraulique de la couronne. La superposition des signaux de pression de chaque cavité permet de percevoir le déphasage relatif à ce tournoiement comme illustré en figure 5.11.

Aussi, cette résonance à  $260\text{Hz}$  est mise en évidence au cours des essais, comme illustré en figure 5.12. Effectivement, dans le domaine des basses fréquences, cette résonance est prédominante par rapport aux limites tracées définissant les seuils acceptables.

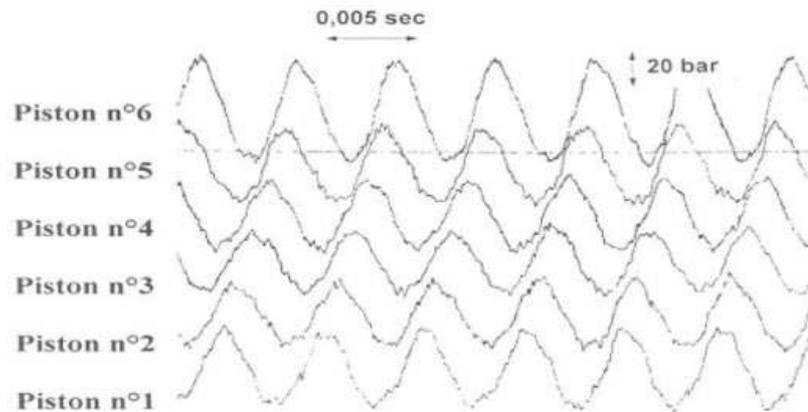


FIG. 5.11: *Phénomène de l'onde tournoyante liée au whirl*

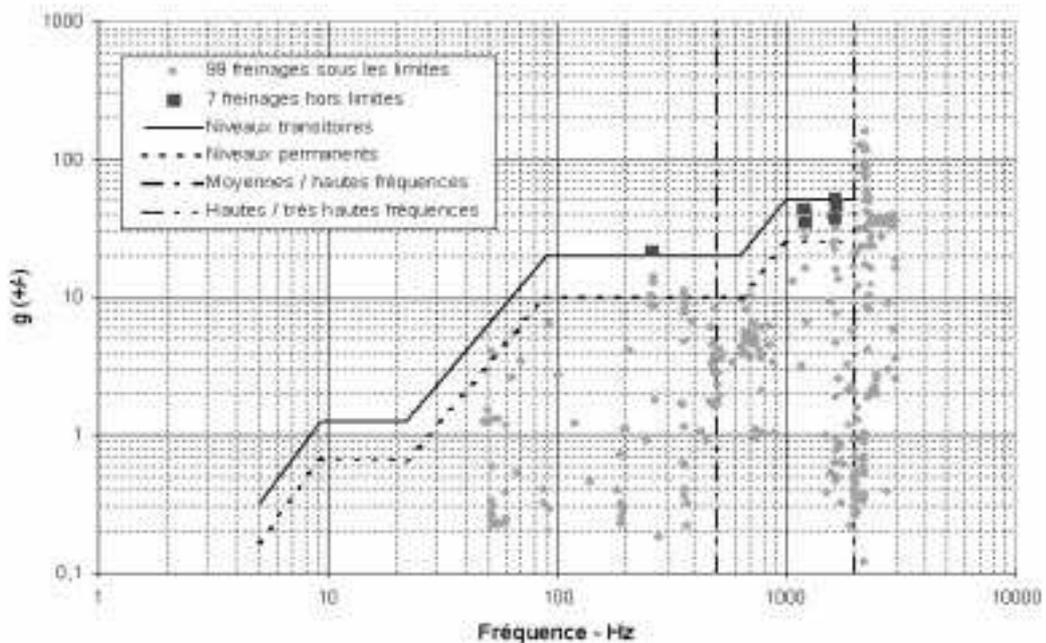


FIG. 5.12: *Pics relevés sur la couronne*

Enfin, les signaux temporels et les transformées de Fourier (Waterfall) des paramètres dynamiques obtenus pour le freinage permettent de mettre en évidence le phénomène de whirl.

Ainsi, les signaux relatifs au couple, à la charge et à la pression montrent très nettement l'apparition du whirl pour des fréquences de l'ordre de 250-260 Hz, comme l'illustrent les figures 5.13, 5.14 et 5.16.

Pour le signal relatif au déplacement du poste de freinage, la vibration du whirl est beaucoup moins nette, mais cependant observable si nous regardons plus précisément la zone concernée, comme illustré en figure 5.15.

De plus, nous pouvons noter pour le signal relatif à la charge, la présence d'une vibration aux alentours de 520-530 Hz, comme illustré en figure 5.14. Les données n'ayant pas encore été exploitées précisément, nous ne pouvons pas statuer de manière définitive sur ce phénomène mais nous pouvons penser que cette vibration correspond à une harmonique du whirl. En effet :

- la fréquence observée correspond pratiquement au double de celle du whirl
- l'amplitude correspondante est deux fois moins importante que pour le whirl
- la déformée (mouvement de tournoiement) est similaire.

Lorsque nous observons les signaux temporels du couple et de la pression, nous remarquons que le couple est maximal au début du freinage et de manière similaire que la pression oscille fortement dans les premiers instants. Ensuite, nous avons un amortissement rapide du phénomène de vibration du whirl : en moins d'une seconde, l'amplitude du couple et de la pression sont fortement atténuées (figures 5.13 et 5.16).

D'autre part, nous remarquons que la vibration du whirl n'est pas "observable" sur toutes les évolutions de paramètres. Plus précisément, les signaux temporels du déplacement du poste de freinage et de la vitesse de roue ne permettent pas de détecter le phénomène du whirl, les vibrations du whirl engendrées sur ces paramètres étant trop faibles, comme illustré en figure 5.17.

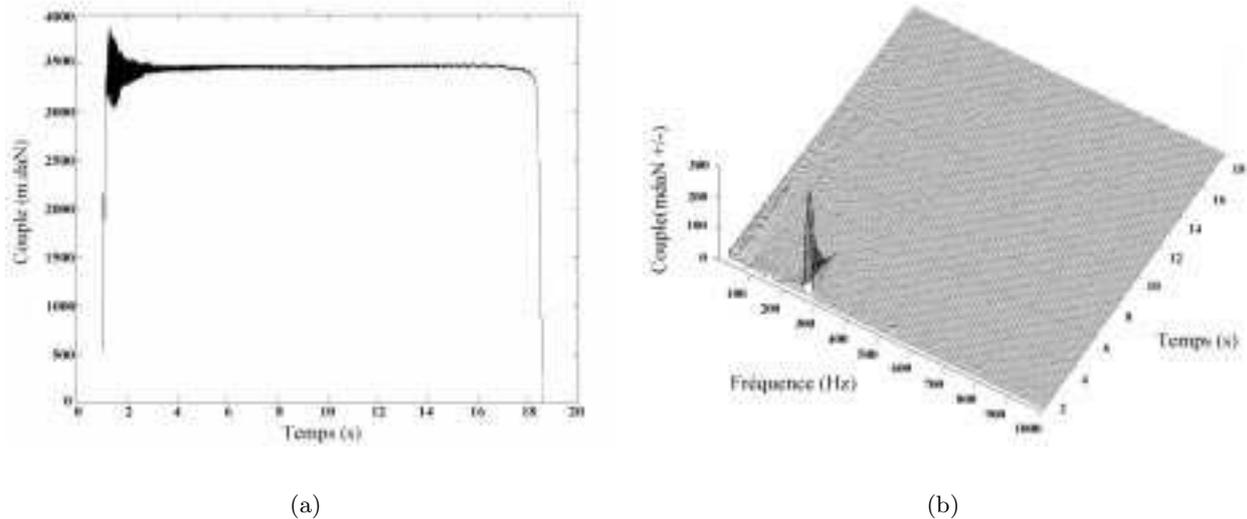
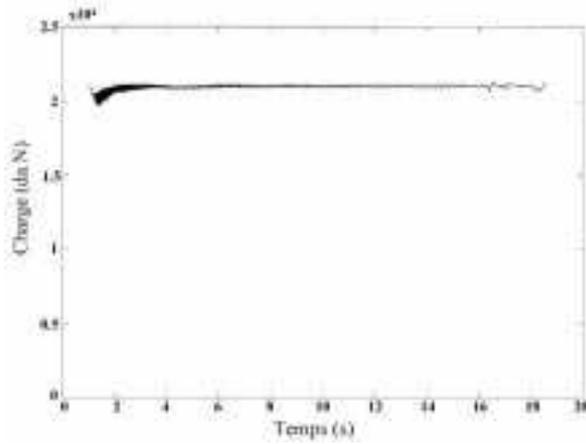
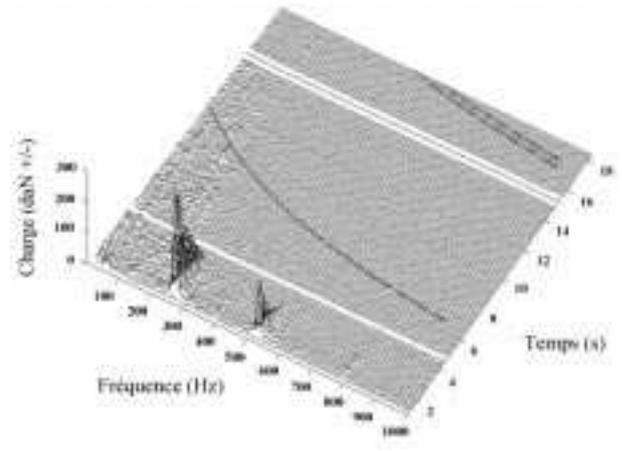


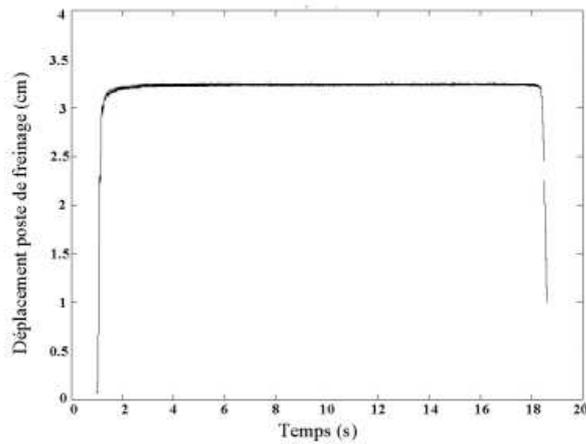
FIG. 5.13: (a) Signal temporel du couple (m.daN) (b) Transformée de Fourier du couple



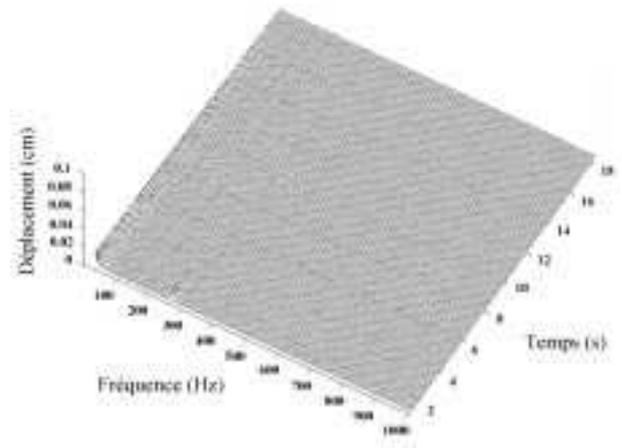
(a)



(b)

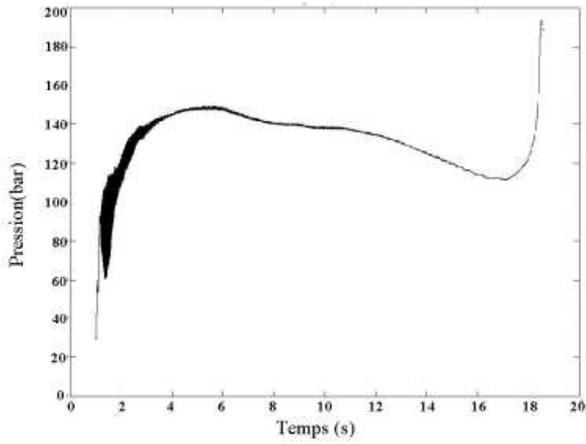
FIG. 5.14: *Signal temporel de la charge (da.N) (b) Transformée de Fourier de la charge*

(a)

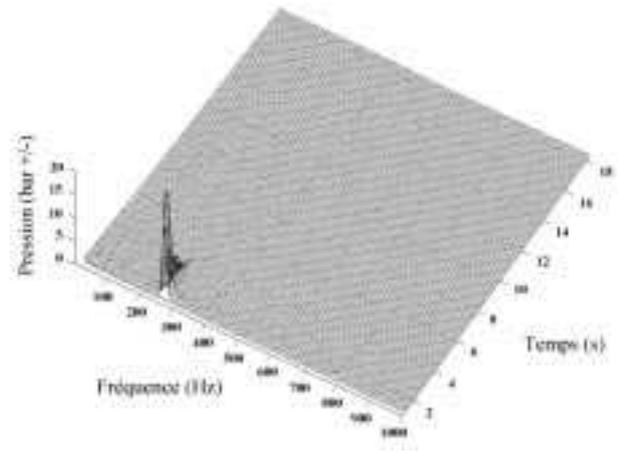


(b)

FIG. 5.15: *(a) Signal temporel du déplacement du poste de freinage (cm) (b) Transformée de Fourier du déplacement du poste de freinage*

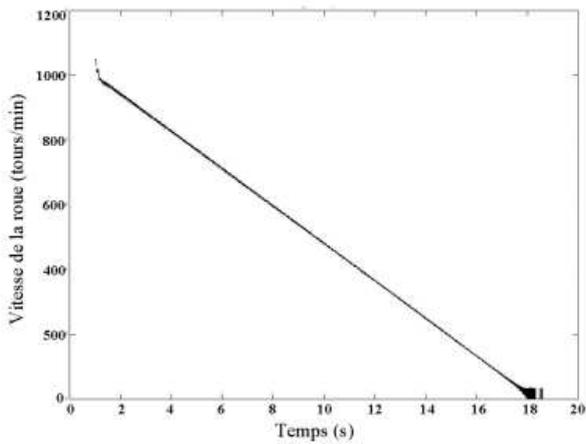


(a)

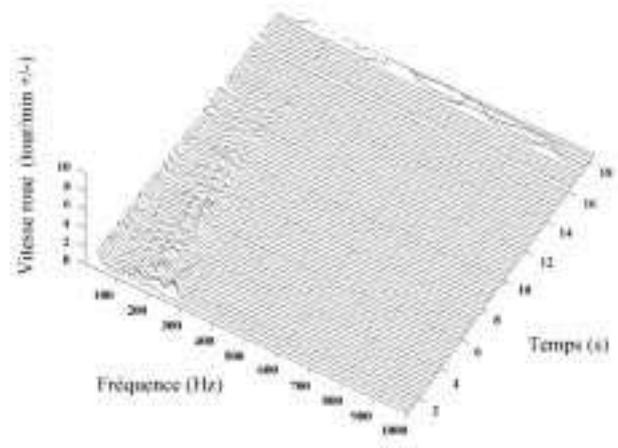


(b)

FIG. 5.16: (a) Signal temporel de la pression (bar) (b) Transformée de Fourier de la pression (bar)



(a)



(b)

FIG. 5.17: Signal temporel de la vitesse de roue (tours/min) (b) Transformée de Fourier de la vitesse de roue

### 5.3.2 Influences de paramètres sur les vibrations

Lors des essais effectués sur les freins, l'influence de divers paramètres a été mise en évidence :

- le matériau : les vibrations se révèlent plus ou moins importantes suivant le matériau considéré. Cela peut provenir des caractéristiques tribologiques du matériau ou de la raideur associée aux disques.

- la configuration du puits de chaleur : l'organisation de l'épaisseur des disques a une influence sur les vibrations. Ainsi, il est constaté que l'emploi d'épaisseurs différentes pour les disques d'un même puits de chaleur est néfaste au niveau de la stabilité du frein.

- Les restricteurs : la mise en place de restricteurs dans les canaux du circuit hydraulique atténue les vibrations. En effet, cela a pour effet de "casser" l'onde tournoyante entretenant la vibration.

- Le nombre de pistons : un nombre croissant de pistons atténue les vibrations. Cela est attribué à une meilleure application de l'effort de presse et donc une répartition plus homogène de la force au niveau de chaque disque.

- La charge : la roue sous charge a tendance à faire basculer les rotors par rapport aux stators, et donc génère des répartitions hétérogènes aux interfaces, ce qui entraîne l'apparition de vibrations.

- la température : les disques de freins subissant de fortes températures, chacun d'entre eux se déforme. Alors ils se mettent sous la forme "tonneaux" (dénomination provenant de la forme prise par les disques). Ceci induit alors une diminution de la surface de frottement entre chaque disque, ce qui peut produire l'apparition ou l'atténuation des vibrations.

- essais en série : lors d'une campagne d'essais, il a été observé une atténuation des vibrations tout au long des essais en série.

## 5.4 Etude de la vibration du Whirl

### 5.4.1 Préliminaire

Le whirl est l'un des phénomènes vibratoires les plus courants et constitue un problème majeur pour les freins carbone/carbone. Lors d'un freinage, les stators et rotors sont comprimés : des forces de frottement sont alors générées au niveau des interfaces entre les stators et les rotors engendrant ce phénomène.

Le whirl se produit généralement à haute vitesse et énergie, pour des fréquences de l'ordre de 200 à 400 Hz.

Le modèle phénoménologique que nous allons développer, fait l'hypothèse que l'origine des instabilités provient de la répartition hétérogène de la pression aux interfaces des stators et des rotors, ceci engendrant alors des oscillations de pression dans les pistons, au niveau de la couronne hydraulique. La compression des rotors et des stators due au freinage produit une pression normale à l'interface plan entre les différents disques du puits de chaleur. Le frottement généré à l'interface stator-rotor se traduit par une force tangentielle distribuée, dont l'amplitude dépend du coefficient de frottement et de la pression normale appliquée.

Lorsqu'il n'y a pas de charge de roue, la distribution de la force normale et de la force tangentielle issue du frottement se fait de façon uniforme le long de la circonférence entre les rotors et les stators. Si nous introduisons une flexion de la fusée, les différents disques sont sujets à une rotation hors plan, appelée mouvement accordéon, comme illustré en figure 5.18.

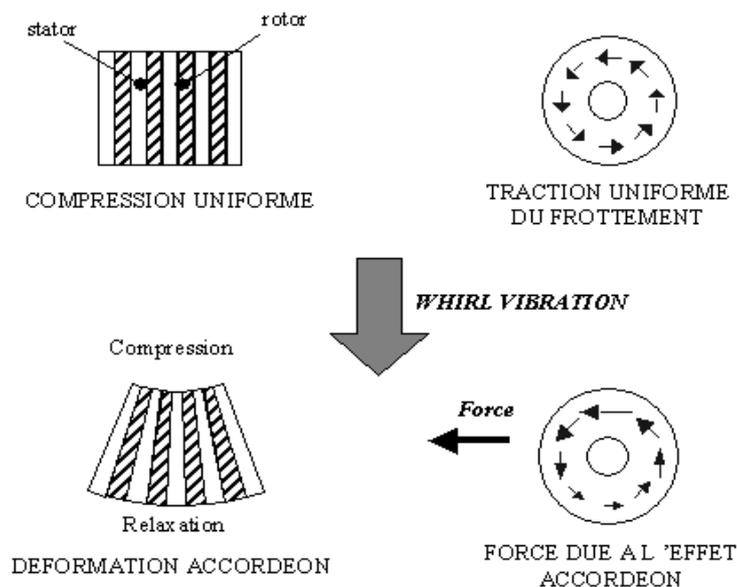


FIG. 5.18: *Phénoménologie du whirl*

Il en résulte alors une force normale non-uniforme sur l'ensemble des disques : cette dernière augmente sur une moitié de disque et inversement, diminue sur l'autre moitié. Ainsi, nous obtenons une variation de la force de frottement proportionnelle à la pression normale. En intégrant les forces tan-

gentielles sur toute l'interface, nous obtenons donc une force de frottement globale, appelée  $F$ . Alors, cette force de frottement  $F$  est proportionnelle à la rotation hors plan relative des disques entre eux (et donc indirectement de la flexion relative de la fusée, reliée aux rotors, et du tube de torsion, relié aux stators). Sa direction et son sens sont déterminés par la rotation relative des disques voisins entre eux (due au phénomène accordéon) et par le sens de rotation de la roue (nous avons donc la force de frottement qui est opposée au sens de rotation de la roue). Ainsi, la flexion du système suivant un plan se traduit par une force de frottement dirigée perpendiculairement à ce plan : par exemple, une flexion du frein dans le plan  $(Y,Z)$  entraîne l'apparition d'un phénomène accordéon produisant une force de frottement et une force globale  $F$  dirigées suivant la direction  $X$ .

Quand des flexions interviennent simultanément dans les deux plans principaux de flexion du frein avec un déphasage de 90 degrés de temps entre chaque plan, nous obtenons alors le phénomène de whirl où le vecteur force de frottement tourne autour de l'axe pour chaque cycle de vibration.

Dans cette partie, nous allons établir le système dynamique non-linéaire qui va nous permettre de modéliser la vibration du whirl pour un frein aéronautique.

## 5.4.2 Mise en équation du problème

### 5.4.2.1 Modélisation

Afin d'étudier les vibrations de whirl sur un système de freinage, il faut tout d'abord réaliser un modèle phénoménologique du frein qui permette de reproduire les principaux phénomènes observés lors des vibrations de whirl.

Du fait des observations expérimentales et des déformées observables lors des expériences dynamiques, la modélisation retenue prend en compte le système stator-rotor, la fusée, le tube de torsion, la couronne hydraulique et la barre de reprise de couple.

Les degrés de liberté, illustrés en figure 5.19, sont les suivants :

- le déplacement axial et les deux flexions de rotation du stator ( $x_s, \theta_s$  et  $\psi_s$ )
- la torsion de la couronne hydraulique ( $\phi_s$ )
- le déplacement axial et les deux flexions de rotation du rotor ( $x_r, \theta_r$  et  $\psi_r$ )
- les deux flexions et rotations de la fusée ( $y_f, z_f, \theta_f$  et  $\psi_f$ )
- les deux flexions et rotations du tube de torsion ( $y_t, z_t, \theta_t$  et  $\psi_t$ )

Nous considérons que le contact entre la couronne hydraulique et le premier stator est parfait, c'est-à-dire que le déplacement axial et les deux flexions de rotation de la couronne hydraulique sont les mêmes que ceux du stator.

L'ensemble du puits de chaleur est modélisé par un rotor et stator unique, constituant la composition équivalente de l'ensemble des stators et rotors.

La fusée et le tube de torsion sont modélisés par des poutres équivalentes, tandis que la barre de reprise de couple est simplement prise en compte par l'intermédiaire de sa raideur axiale qui crée une force de rappel pour la couronne hydraulique.

Enfin, nous supposons qu'il existe des raideurs de contact entre :

- le tube de torsion et la fusée
- le tube de torsion et les stators
- la fusée et les rotors

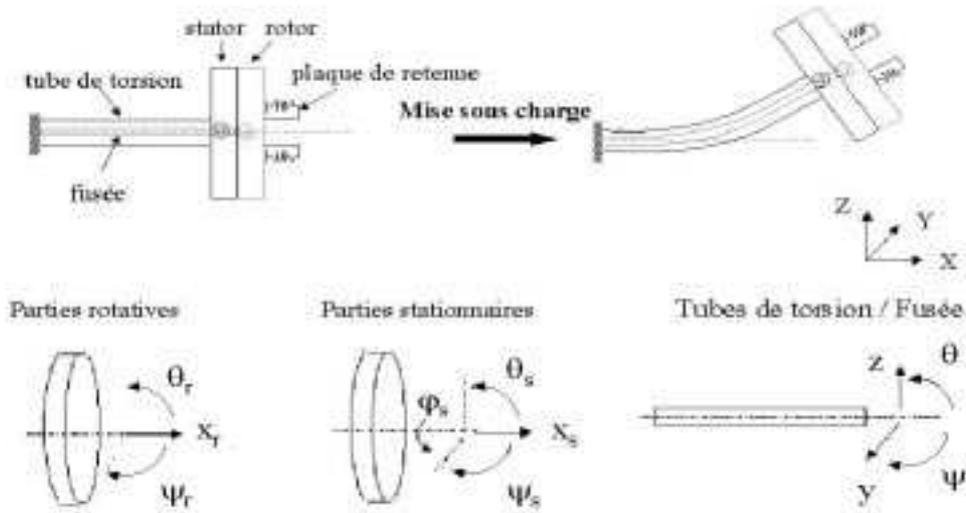


FIG. 5.19: Modélisation de la structure du frein pour le modèle de whirl

### 5.4.2.2 Équations structurales

Les équations du système pour chacun des sous-ensembles (stator, couronne hydraulique, rotor, fusée et tube de torsion) de la structure vont maintenant être décrites.

Les équations relatives au stator s'écrivent sous la forme :

$$m_s \cdot \ddot{x}_s + C_{xs} \cdot \dot{x}_s = F_{barre/X} + F_{hyd/X} - F_X \quad (5.1)$$

$$I_{\theta_s} \cdot \ddot{\theta}_s + C_{\theta_s} \cdot \dot{\theta}_s + C_{twk} \cdot (\dot{\theta}_s - \dot{\theta}_t) + K_{\theta_s} \cdot \theta_s + K_{twk} \cdot (\theta_s - \theta_t) = F_{barre/X} \cdot R_e + F_{barre/Z} \cdot d_e + M_Y + M_{hyd/Y} \quad (5.2)$$

$$I_{\psi_s} \cdot \ddot{\psi}_s + C_{\psi_s} \cdot \dot{\psi}_s + C_{twk} \cdot (\dot{\psi}_s - \dot{\psi}_t) + K_{\psi_s} \cdot \psi_s + K_{twk} \cdot (\psi_s - \psi_t) = F_{barre/Y} \cdot d_e + M_Z + M_{hyd/Z} \quad (5.3)$$

$$I_{\phi_s} \cdot \ddot{\phi}_s + C_{\phi_s} \cdot \dot{\phi}_s = -F_{barre/Z} \cdot \sin \alpha \cdot R_e - F_{barre/Y} \cdot R_e \cdot \cos \alpha + M_X \quad (5.4)$$

Les équations relatives au rotor s'écrivent sous la forme :

$$m_r \cdot \ddot{x}_r + C_{rr} \cdot \dot{x}_r + K_{rr} \cdot x_r = F_X \quad (5.5)$$

$$I_{\theta r} \cdot \ddot{\theta}_r + C_{\theta r} \cdot \dot{\theta}_r + C_{f_{wk}} \cdot (\dot{\theta}_r - \dot{\theta}_f) + K_{f_{wk}} \cdot (\theta_r - \theta_f) = -M_Y \quad (5.6)$$

$$I_{\psi r} \cdot \ddot{\psi}_r + C_{\psi r} \cdot \dot{\psi}_r + C_{f_{wk}} \cdot (\dot{\psi}_r - \dot{\psi}_f) + K_{f_{wk}} \cdot (\psi_r - \psi_f) = -M_Z \quad (5.7)$$

Les équations relatives à la fusée s'écrivent sous la forme :

$$m_f \cdot \ddot{y}_f + C_{f11} \cdot \dot{y}_f + C_{y_{tf}} \cdot (\dot{y}_f - \dot{y}_t) + K_{f11} \cdot y_f + K_{f12} \cdot \theta_f + K_{y_{tf}} \cdot (y_f - y_t) = 0 \quad (5.8)$$

$$I_f \cdot \ddot{\theta}_f + C_{f22} \cdot \dot{\theta}_f + C_{f_{wk}} \cdot (\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_r) + C_{\theta_{tf}} \cdot (\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_t) + K_{f21} \cdot y_f + K_{f22} \cdot \theta_f + K_{f_{wk}} \cdot (\theta_f - \theta_r) + K_{\theta_{tf}} \cdot (\theta_f - \theta_t) = 0 \quad (5.9)$$

$$m_f \cdot \ddot{z}_f + C_{f11} \cdot \dot{z}_f + C_{z_{tf}} \cdot (\dot{z}_f - \dot{z}_t) + K_{f11} \cdot z_f + K_{f12} \cdot \psi_f + K_{z_{tf}} \cdot (z_f - z_t) = 0 \quad (5.10)$$

$$I_f \cdot \ddot{\psi}_f + C_{f22} \cdot \dot{\psi}_f + C_{f_{wk}} \cdot (\dot{\psi}_f - \dot{\psi}_r) + C_{\psi_{tf}} \cdot (\dot{\psi}_f - \dot{\psi}_t) + K_{f21} \cdot z_f + K_{f22} \cdot \psi_f + K_{f_{wk}} \cdot (\psi_f - \psi_r) + K_{\psi_{tf}} \cdot (\psi_f - \psi_t) = 0 \quad (5.11)$$

Les équations relatives au tube s'écrivent sous la forme :

$$m_t \cdot \ddot{y}_t + C_{t11} \cdot \dot{y}_t + C_{y_{tf}} \cdot (\dot{y}_t - \dot{y}_f) + K_{t11} \cdot y_t + K_{t12} \cdot \theta_t + K_{y_{tf}} \cdot (y_t - y_f) = 0 \quad (5.12)$$

$$I_t \cdot \ddot{\theta}_t + C_{f22} \cdot \dot{\theta}_t + C_{f_{wk}} \cdot (\dot{\theta}_t - \dot{\theta}_s) + C_{\theta_{tf}} \cdot (\dot{\theta}_t - \dot{\theta}_f) + K_{t21} \cdot y_t + K_{t22} \cdot \theta_t + K_{t_{wk}} \cdot (\theta_t - \theta_s) + K_{\theta_{tf}} \cdot (\theta_t - \theta_f) = 0 \quad (5.13)$$

$$m_t \cdot \ddot{z}_t + C_{t11} \cdot \dot{z}_t + C_{z_{tf}} \cdot (\dot{z}_t - \dot{z}_f) + K_{t11} \cdot z_t + K_{t12} \cdot \psi_t + K_{z_{tf}} \cdot (z_t - z_f) = 0 \quad (5.14)$$

$$I_t \cdot \ddot{\psi}_t + C_{t22} \cdot \dot{\psi}_t + C_{t_{wk}} \cdot (\dot{\psi}_t - \dot{\psi}_s) + C_{\psi_{tf}} \cdot (\dot{\psi}_t - \dot{\psi}_f) + K_{t21} \cdot z_t + K_{t22} \cdot \psi_t + K_{t_{wk}} \cdot (\psi_t - \psi_s) + K_{\psi_{tf}} \cdot (\psi_t - \psi_f) = 0 \quad (5.15)$$

$F_{hyd/X}$ ,  $M_{hyd/Y}$  et  $M_{hyd/Z}$  correspondent à la force et aux moments suivant les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  provenant du circuit hydraulique du système. Ces expressions seront calculées au paragraphe 5.4.2.5.  $F_{barre/Y}$  et  $F_{barre/Z}$  correspondent aux forces suivant les axes  $Y$  et  $Z$  du fait de la prise en compte de la barre de reprise de couple sur le système de freinage. Ces expressions seront définies au paragraphe 5.4.2.3.  $F_X$ ,  $M_X$ ,  $M_Y$  et  $M_Z$  correspondent à la force et aux moments suivant les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du fait du frottement entre les stators et les rotors. Ces expressions seront explicitées au paragraphe 5.4.2.6.

### 5.4.2.3 Force résultante de la barre de couple

Le mouvement de torsion de la couronne hydraulique ( $\phi_s$ ) et de flexion du stator ( $\theta_s$  et  $\psi_s$ ) engendrent une force axiale au niveau de la barre de reprise de couple, qui est reliée à l'ensemble du train d'atterrissage par l'intermédiaire d'une chape représentée en figure 5.20. La barre de reprise de couple empêche ainsi la rotation de la couronne hydraulique et des éléments associés lors d'un freinage. Du fait de la rotation initiale d'un angle  $\alpha$  de la couronne hydraulique, comme illustré en figure 5.26, la force axiale de la barre de reprise de couple se décompose suivant les deux axes  $Y$  et  $X$ . De plus, les jeux de fonctionnement au niveau de la liaison entre la couronne hydraulique et la barre de reprise de couple, permettent à la barre de reprise de couple d'avoir un angle  $\beta$  dans le plan

(OXY), comme illustré en figure 5.20. Cet angle peut alors donner lieu au phénomène de sprag-slip, caractéristique des phénomènes d'instabilité.

Après calculs et simplifications des expressions, nous obtenons l'expression de la force résultante de la barre de reprise de couple :

$$\begin{cases} F_{barre/X} = K_{barre} \cdot R_e \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \phi_s + K_{barre} \cdot \sin \beta \cdot x_s + K_{barre} \cdot R_e \cdot \sin \beta (\cos \alpha \cdot \theta_s + \sin \alpha \cdot \psi_s) \\ F_{barre/Y} = K_{barre} \cdot R_e \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \phi_s - K_{barre} \cdot d_e \cdot \cos \beta \cdot \theta_s \\ F_{barre/Z} = K_{barre} \cdot R_e \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \phi_s - K_{barre} \cdot d_e \cdot \cos \beta \cdot \psi_s \end{cases} \quad (5.16)$$

avec  $K_{barre}$  correspondant à la raideur axiale de la barre de reprise de couple,  $d_e$  la distance entre la barre de reprise de couple et le plan de la couronne hydraulique, comme illustré en figure 5.27, et  $R_e$  correspondant à la distance entre l'axe de rotation de la couronne et la liaison avec la barre de reprise de couple.

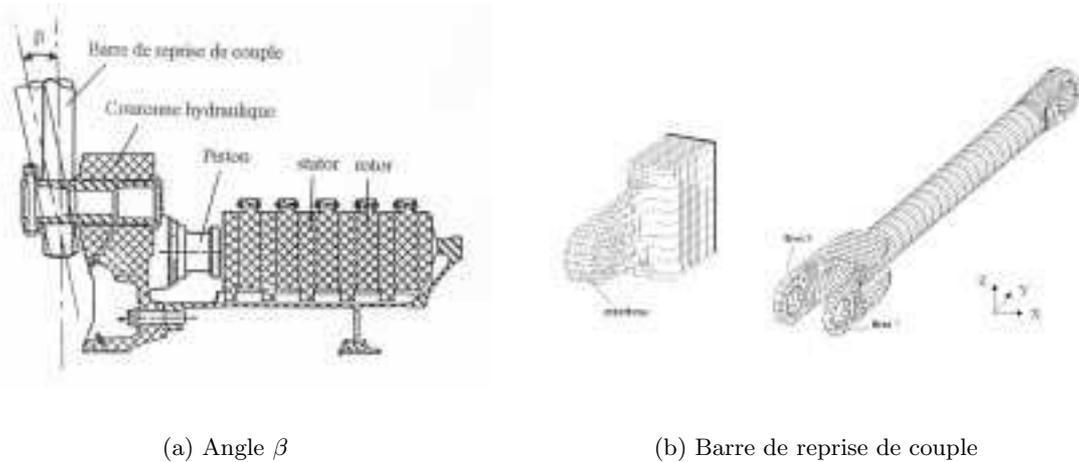


FIG. 5.20: Schématisation de l'angle  $\beta$  entre la barre de reprise de couple et la couronne hydraulique

#### 5.4.2.4 Évaluation de l'angle de sprag-slip $\beta$

Comme décrit précédemment, l'angle de sprag-slip  $\beta$  est prise en compte dans la modélisation du frein. Nous allons maintenant calculer l'ordre de grandeur de ce dernier à partir des jeux de fonctionnement existants. Les jeux de fonctionnement pris en compte sont illustrés en figure 5.21. Ils sont de deux natures:

- jeu axial  $J_a$  entre la barre de reprise de couple et la bague.
- jeu radial  $J_r$  entre la barre de reprise de couple et le toc.

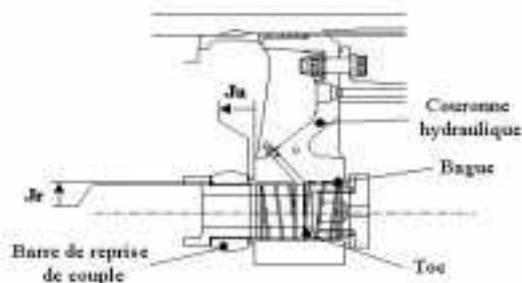


FIG. 5.21: Visualisation du jeu axial et du jeu radial

Ces jeux axial  $J_a$  et radial  $J_r$  sont évalués à partir des chaînes de côtes des figure 5.22 et 5.23. Nous trouvons alors

$$-0.015\text{mm} \leq J_a \leq 0.595\text{mm} \quad (5.17)$$

$$0.026\text{mm} \leq J_r \leq 0.073\text{mm} \quad (5.18)$$

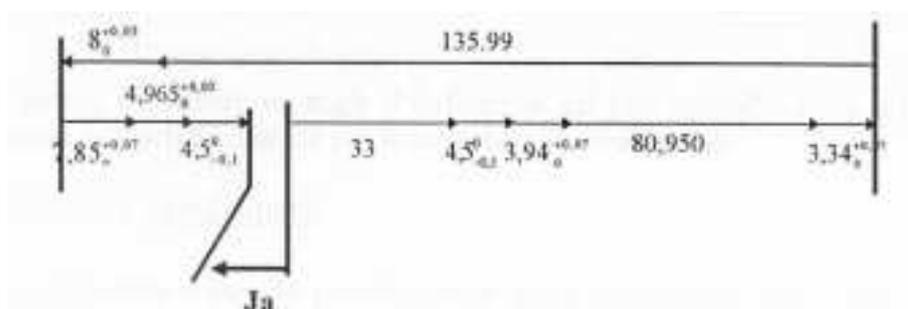


FIG. 5.22: Jeu axial entre la barre de reprise de couple et la bague

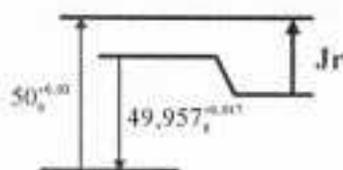


FIG. 5.23: Jeu radial entre la barre de reprise de couple et le toc

Nous pouvons alors évaluer l'inclinaison possible entre la barre de reprise de couple et la couronne hydraulique en considérant les deux angles de façon indépendante.

#### Prise en compte du jeu radial

D'après le schéma de la figure 5.24, nous avons

$$d_3 = d_1 - \frac{d_1 - J_r}{\cos \beta} \quad (5.19)$$

Soit, en considérant  $\beta$  petit, du fait que ce dernier correspond au jeu de fonctionnement radial, nous avons

$$d_3 \approx J_r \quad (5.20)$$

Alors, il vient

$$\tan \beta = \frac{d_3}{d_2} = \frac{J_r}{d_2} \quad (5.21)$$

Nous trouvons

$$7.8 \cdot 10^{-4} \text{rad.} \leq \beta \leq 13 \cdot 10^{-4} \text{rad.} \quad (5.22)$$

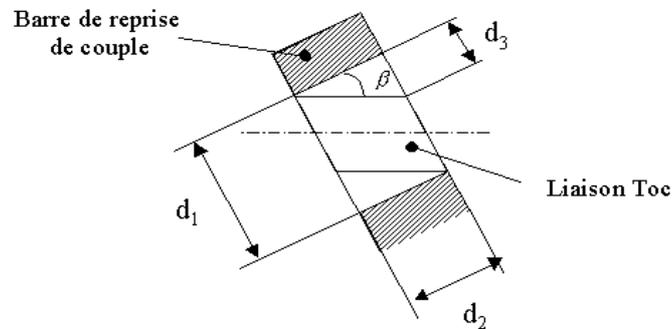


FIG. 5.24: Évaluation de l'angle de sprag-slip à partir du jeu radial

#### Prise en compte du jeu axial

D'après le schéma de la figure 5.25, nous avons

$$d_2 = \frac{J_a}{2} \quad (5.23)$$

Soit

$$\tan \beta = \frac{J_a}{2d_1} \quad (5.24)$$

Nous trouvons

$$-2 \cdot 10^{-6} \text{rad.} \leq \beta \leq 46 \cdot 10^{-6} \text{rad.} \quad (5.25)$$

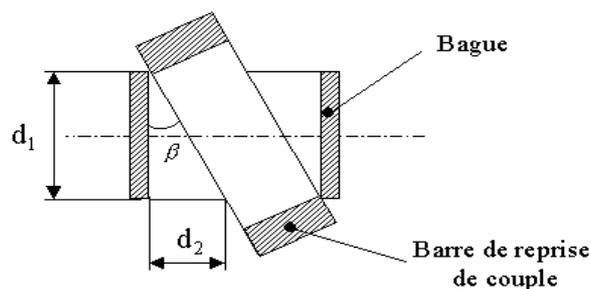


FIG. 5.25: Évaluation de l'angle de sprag-slip à partir du jeu axial

Les valeurs de l'angle  $\beta$  caractérisant l'angle de sprag-slip sont très faibles. Au premier abord, nous pouvons donc nous interroger sur la nécessité de prendre en compte un tel angle, vu que les valeurs d'angle maximal sont proches de zéro. Aussi, nous pouvons nous poser des questions sur le bien fondé de la théorie du sprag-slip pour le modèle de whirl. Cependant, nous allons montrer par la suite que cet angle, aussi petit soit-il, est primordial dans le phénomène d'instabilité du frein.

#### 5.4.2.5 Force hydraulique

Le contact entre les stators et les rotors s'effectue grâce à un effort hydraulique appliqué sur le stator en contact avec les pistons de la couronne hydraulique.

La couronne hydraulique a un angle  $\alpha$  de rotation initial lors du freinage par rapport à sa position statique sans effort, comme illustré en figure 5.26. Ce décalage est dû au déplacement latéral de l'ensemble du train d'atterrissage lors du contact avec la piste et du début du freinage (effort de traînée). Ceci génère des moments non axisymétriques suivant les axes Y et Z.

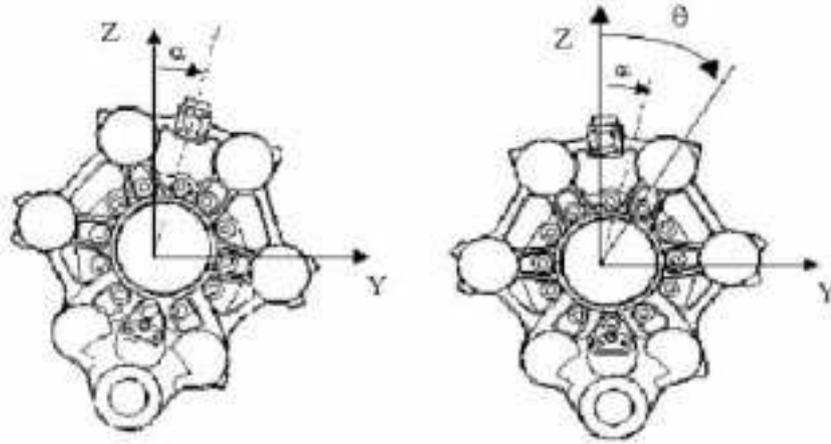


FIG. 5.26: Position de la couronne hydraulique sans effort et en configuration dynamique moyenne

Ainsi, nous déduisons les forces hydrauliques :

$$\begin{cases} F_{hyd/X} = \sum_{i=1}^6 P_i \cdot S_i \\ F_{hyd/Y} = 0 \\ F_{hyd/Z} = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

De même, nous en déduisons les moments résultants :

$$\begin{cases} M_{hyd/X} = 0 \\ M_{hyd/Y} = - \sum_{i=1}^6 P_i \cdot S_i \cdot \cos(\theta_i + \alpha) \cdot R_{piston} \\ M_{hyd/Z} = - \sum_{i=1}^6 P_i \cdot S_i \cdot \sin(\theta_i + \alpha) \cdot R_{piston} \end{cases} \quad (5.27)$$

avec  $R_{piston}$  définissant la distance du centre d'un piston au centre de la couronne hydraulique.

### 5.4.2.6 Force de frottement

Le freinage est généré par frottement entre les parties rotatives (rotors), reliées à la roue, et les parties stationnaires (stators), reliées au tube de torsion. L'un des points essentiels dans la modélisation d'un système de freinage repose sur la prise en compte du frottement et des phénomènes associés. Le premier point important porte sur le choix de la modélisation du coefficient de frottement. En effet, de nombreuses études utilisent un coefficient de frottement variant avec la vitesse relative entre les parties tournantes et les parties stationnaires du frein (Black [11]-[13], Larsson [99], Gekker [57] et Yuan [177]). Cependant, comme le soulignent certaines études (Ozbek [102]-[132]), les essais dynamiques sur frein aéronautique n'indiquent pas de forte dépendance du coefficient de frottement en fonction de la vitesse relative de contact. De plus, les résultats sur les évolutions des fréquences d'instabilités prédites par de tels modèles ne sont pas conformes à la réalité. En effet, de tels modèles ne mettent pas en avant le fait que des variations de paramètres tels que la pression hydraulique ou un changement de matériau des stators et rotors (et donc du coefficient de frottement) provoquent des changements de stabilité du système et des évolutions des fréquences associées.

Par ailleurs, il est très difficile d'établir une loi de frottement vis à vis de la vitesse relative de contact du fait du manque de telles données expérimentales sur un frein réel et du fait de la complexité des évolutions des surfaces de contact, de l'usure du frein, de l'influence de la température, etc...

Enfin, de nombreux essais semblent indiquer que l'origine de l'instabilité se rapprocherait plutôt du phénomène de sprag-slip: en effet, comme indiqué au paragraphe 5.4.2.3, le jeu de fonctionnement entre la barre de reprise de couple et la couronne hydraulique peut induire ce phénomène. De plus, du fait du contact entre le pneu et la piste lors d'un atterrissage, il y a apparition d'un angle  $\alpha$ , comme décrit dans le paragraphe 5.4.2.4 et en figure 5.26. Cet angle crée alors un basculement de l'ensemble de la couronne hydraulique, ce qui contribue au phénomène de sprag-slip. Enfin, le phénomène de sprag-slip est accentué par le fait que la barre de reprise de couple et la couronne hydraulique ne se situent pas dans le même plan: cette distance, notée  $d_e$ , est illustrée en figure 5.27. Des essais montrent alors que lorsque la barre de reprise de couple et la couronne hydraulique sont dans le même plan, c'est-à-dire  $d_e = 0$ , alors les phénomènes d'instabilités sont moins fréquents. Cette configuration correspond à une géométrie spécifique à certains freins aéronautiques. Ainsi, d'après ces dernières remarques, nous choisissons de prendre un coefficient de frottement constant et de se baser sur une hypothèse d'instabilité de sprag-slip.

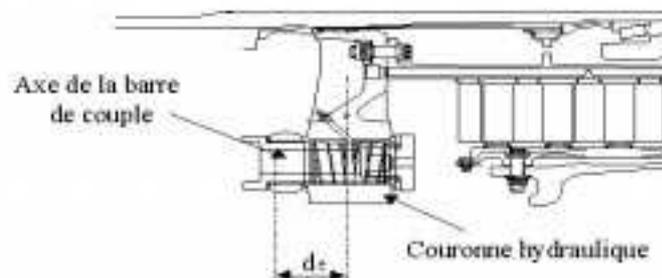


FIG. 5.27: Distance  $d_e$  entre l'axe de la barre de reprise de couple et le plan de la couronne hydraulique

Le coefficient de frottement  $\mu_{brk}$  est supposé constant. Le frein multi-disque est représenté par un

simple rotor et stator avec le coefficient de frottement effectif donné par  $\mu_{eff} = 2.N.\mu_{brk}$ , du fait qu'il y a  $N$  surfaces en contact et que nous supposons que les surfaces de friction sont toujours en contact. Les forces de frottement sont dues au contact entre les stators et les rotors. Pour calculer les forces de contact entre le stator et le rotor, nous supposons que la pression de contact est proportionnelle au déplacement normal entre les disques.

Le point M du disque étant défini par ses coordonnées polaires, nous avons:

$$\begin{cases} x_{rotor} = x_r - r. \sin \theta. \sin \theta_r - r. \cos \theta. \sin \psi_r \\ x_{stator} = x_r - r. \sin \theta. \sin \theta_s - r. \cos \theta. \sin \psi_s \end{cases} \quad (5.28)$$

Comme nous nous plaçons en petits déplacements, nous avons en première approximation:

$$\begin{cases} x_{rotor} = x_r - r. \sin \theta. \theta_r - r. \cos \theta. \psi_r \\ x_{stator} = x_r - r. \sin \theta. \theta_s - r. \cos \theta. \psi_s \end{cases} \quad (5.29)$$

Nous obtenons donc le déplacement effectif du rotor par rapport au stator :

$$x(r, \theta) = x_{stator} - x_{rotor} = (x_s - x_r) - r. \sin \theta. (\theta_s - \theta_r) - r. \cos \theta. (\psi_r - \psi_s) \quad (5.30)$$

Ainsi, nous pouvons exprimer les efforts se développant au niveau de l'interface des disques. Soit le point M soumis à la pression  $P(M, t)$ . En intégrant sur une partie de surface  $dS$ , nous obtenons la force normale résultante  $dF_n(t)$ . A partir de la loi de Coulomb, nous pouvons en déduire l'effort tangentiel associé  $dF_t(t)$ .

Nous avons donc les expressions :

$$\begin{cases} dF_n(M, t) = P(M, t).dS \\ dF_t(M, t) = \mu(M).dF_n(M, t) = \mu(M).P(M, t).dS \end{cases} \quad (5.31)$$

Pour obtenir l'expression globale des forces et des moments résultants, nous supposons que la pression est uniformément répartie sur les surfaces de contact ( $P(m, t) = P(t) = K_{disque}.x(t)$ ). Nous effectuons la même hypothèse pour l'expression de la force de frottement ( $\mu(M, t) = \mu(t)$ ).

De plus, nous supposons que la surface interface rotor-stator demeure identique au cours du freinage et correspond donc à l'intégrale entre le rayon interne  $R_i$  et le rayon externe  $R_e$  du disque.

Enfin, l'expression de la force de contact normale non linéaire entre les stators et les rotors peut s'exprimer comme un polynôme du troisième degré sans termes croisés. Ceci est dû à des observations expérimentales et sera explicité au paragraphe 5.4.2.7. Nous avons donc:

$$P(M, t) = \sum_{i=1}^3 K_i.x^i \quad (5.32)$$

L'expression de la force normale résultante est donnée par :

$$F_X = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} P(M).r.dr d\theta \quad (5.33)$$

Soit

$$F_X = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} r [K_0 + K_1.x(r, \theta) + K_2.x^2(r, \theta) + K_3.x^3(r, \theta)] dr d\theta \quad (5.34)$$

Après développement, nous obtenons:

$$F_X = K_1.A_2.(x_s - x_r) + K_2. \left[ A_2.(x_s - x_r)^2 + \frac{A_4}{4} .(\theta_s - \theta_r)^2 + \frac{A_4}{4} .(\psi_s - \psi_r)^2 \right] \\ + K_3. \left[ A_2.(x_s - x_r)^3 + \frac{3.A_4}{4} .(\theta_s - \theta_r)^2 .(x_s - x_r) + \frac{3.A_4}{4} .(\psi_s - \psi_r)^2 .(x_s - x_r) \right] \quad (5.35)$$

Les expressions des forces tangentielles sont données par:

$$F_Y = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} f_t(r, \theta) . \sin \theta . r . dr d\theta \quad (5.36)$$

$$F_Z = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} f_t(r, \theta) . \cos \theta . r . dr d\theta \quad (5.37)$$

Après développement, nous obtenons:

$$F_Y = 2.N.\mu_{brk} . \left[ -K_1 . \frac{A_3}{3} .(\theta_s - \theta_r) - K_2 . \frac{2.A_3}{3} .(\theta_s - \theta_r) .(x_s - x_r) \right. \\ \left. - K_3 . \left( A_3 .(\theta_s - \theta_r) .(x_s - x_r)^2 + \frac{3.A_5}{20} .(\theta_s - \theta_r) .(\psi_s - \psi_r)^2 \right) \right] \quad (5.38)$$

$$F_Z = 2.N.\mu_{brk} . \left[ -K_1 . \frac{A_3}{3} .(\psi_s - \psi_r) - K_2 . \frac{2.A_3}{3} .(\psi_s - \psi_r) .(x_s - x_r) \right. \\ \left. - K_3 . \left( A_3 .(\psi_s - \psi_r) .(x_s - x_r)^2 + \frac{3.A_5}{20} .(\psi_s - \psi_r) .(\theta_s - \theta_r)^2 \right) \right] \quad (5.39)$$

Les expressions des moments résultants sont données par:

$$M_X = \int_S 2.N.\mu_{brk} . P(M) . r(M) . dS = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} 2.N.\mu_{brk} . P(M) . r^2 . dr d\theta \quad (5.40)$$

$$M_Y = - \int_S F(M) . r(M) . dS = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} P(r, \theta) . r^2 . \sin \theta . dr d\theta \quad (5.41)$$

$$M_Z = - \int_S F(M) . r(M) . dS = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} P(r, \theta) . r^2 . \cos \theta . dr d\theta \quad (5.42)$$

Après développement, nous obtenons:

$$M_X = 2.N.\mu_{brk} . \left[ K_1 . \frac{2.A_3}{3} .(x_s - x_r) + K_2 . \left( \frac{2.A_3}{3} .(x_s - x_r)^2 + \frac{A_5}{5} .(\theta_s - \theta_r)^2 + \frac{A_5}{5} .(\psi_s - \psi_r)^2 \right) \right. \\ \left. + K_3 . \left( \frac{2.A_3}{3} .(x_s - x_r)^3 + \frac{3.A_5}{5} .(x_s - x_r) .(\theta_s - \theta_r)^2 + \frac{3.A_5}{5} .(x_s - x_r) .(\psi_s - \psi_r)^2 \right) \right] \quad (5.43)$$

$$M_Y = -K_1 \cdot \frac{A_4}{4} \cdot (\theta_s - \theta_r) - K_2 \cdot \frac{A_4}{2} \cdot (\theta_s - \theta_r) \cdot (x_s - x_r) - K_3 \cdot \left[ \frac{3 \cdot A_4}{4} \cdot (\theta_s - \theta_r) \cdot (x_s - x_r)^2 + \frac{A_6}{8} \cdot (\theta_s - \theta_r)^3 + \frac{A_6}{8} \cdot (\theta_s - \theta_r) \cdot (\psi_s - \psi_r)^2 \right] \quad (5.44)$$

$$M_Z = -K_1 \cdot \frac{A_4}{4} \cdot (\psi_s - \psi_r) - K_2 \cdot \frac{A_4}{2} \cdot (\psi_s - \psi_r) \cdot (x_s - x_r) - K_3 \cdot \left[ \frac{3 \cdot A_4}{4} \cdot (\psi_s - \psi_r) \cdot (x_s - x_r)^2 + \frac{A_6}{8} \cdot (\psi_s - \psi_r)^3 + \frac{A_6}{8} \cdot (\psi_s - \psi_r) \cdot (\theta_s - \theta_r)^2 \right] \quad (5.45)$$

avec  $A_k = \pi \cdot (R_e^k - R_i^k)$  pour  $k = 1, 2, 3, 4 \dots 6$

#### 5.4.2.7 Caractérisation du puits de chaleur

Comme décrit précédemment, l'un des aspects primordiaux lors de la caractérisation d'un frein est la prise en compte du puits de chaleur et de son comportement non linéaire dû au matériau carbone. Ce comportement non-linéaire est observable expérimentalement à partir d'essais statiques, comme défini en figure 5.28.



FIG. 5.28: *Expérience de compression*

Nous observons alors que la raideur axiale du puits de chaleur est fortement non-linéaire, comme décrit en figure 5.29. A partir des observations expérimentales, nous décidons de caractériser cette non linéarité sous la forme d'un polynôme du troisième degré sans termes croisés. La prise en compte de cette non-linéarité a aussi été observée par Ozbek ([132] et [102]). Les résultats expérimentaux que nous obtenons sont similaires aux observations faites dans les travaux de Ozbek qui mettent en évidence le rôle essentiel de la non-linéarité de raideur (comportant à la fois des termes quadratiques et cubiques) de l'ensemble des stators et des rotors.

Nous obtenons une relation non linéaire reliant la compressibilité du puits de chaleur et la pression normale appliquée sur le premier stator comme indiqué en figure 5.29. Nous avons donc

$$P(M, t) = \sum_{i=1}^3 K_i \cdot x^i \quad (5.46)$$

Avec  $P(M, t)$  la pression de contact et  $x$  la compressibilité du puits de chaleur.

Comme la pression de contact utilisée pour l'interpénétration des disques entre eux est supposée s'effectuer sur l'ensemble de la surface de contact des disques, alors que la surface d'application de la pression d'entrée (pression hydraulique) s'effectue par l'intermédiaire de la surface des six pistons, nous avons la relation :

$$P(M, t) = \frac{6 \cdot (D_{piston.exterieur}^2 - D_{piston.interieur}^2)}{(D_{disque.exterieur}^2 - D_{disque.interieur}^2)} \cdot P_{hydraulique}(M, t) \quad (5.47)$$

Il faut noter que nous supposons qu'il y a contact sur la totalité de l'interface rotor/stator et que nous ne considérons aucune variation de cette surface de contact en fonction de la température.

La détermination de cette expression polynomiale est réalisée à partir d'un essai de compression d'un puits de chaleur Boeing 767. Nous obtenons

$$K_1 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^3 \quad (5.48)$$

$$K_2 = 7,6 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^4 \quad (5.49)$$

$$K_3 = 2,4 \cdot 10^{17} \text{ N/m}^5 \quad (5.50)$$

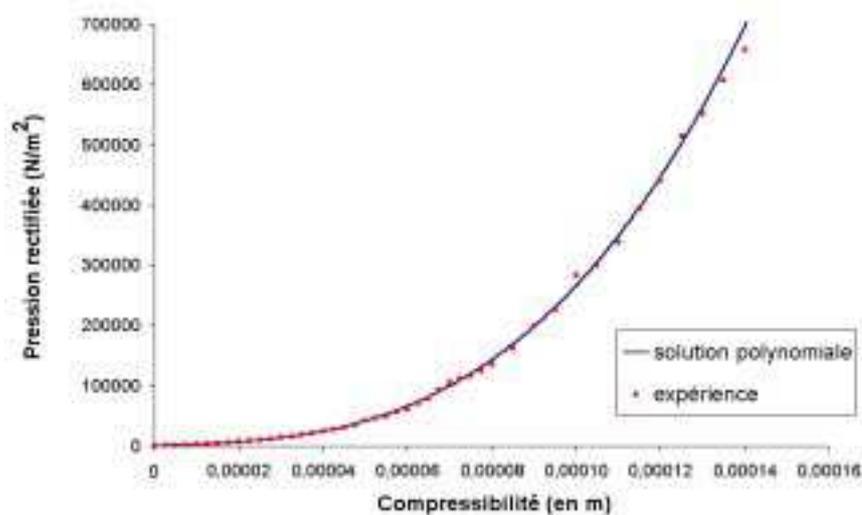


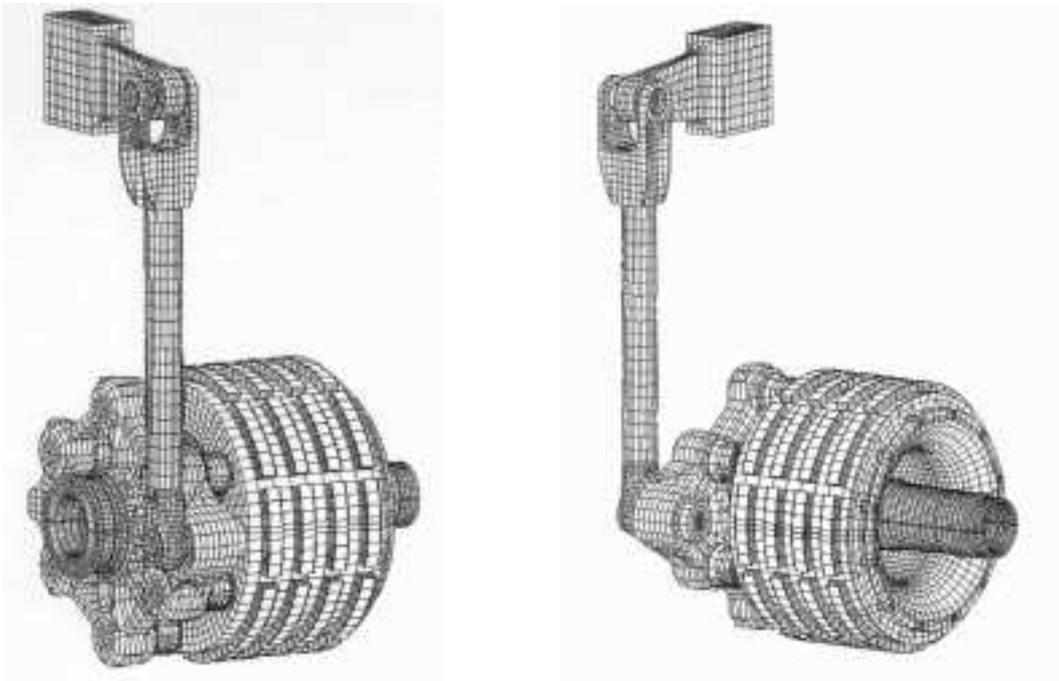
FIG. 5.29: Détermination des coefficients de la raideur axiale du puits de chaleur

#### 5.4.2.8 Modèle éléments finis

L'une des approches les plus classiquement mises en place pour effectuer une étude vibratoire d'un frein aéronautique est l'utilisation de modèles éléments finis complets reproduisant fidèlement la géométrie du frein. Ces approches ont été adoptées pour de nombreux travaux (Feld [51], Glaznieks [60], Hamzek [63], Travis [169], Chang [29], Martin [105] et Nack [119]). Elles présentent l'avantage de

se baser sur une structure complète par rapport à l'approche phénoménologique que nous avons mis en place, mais elles comportent l'inconvénient d'être très longues en temps de calculs pour l'obtention de réponses temporelles et de devoir redéfinir et re-dessiner à chaque fois la géométrie du frein lorsque diverses modifications sont effectuées.

Dans l'étude présentée ici, un modèle éléments finis a été utilisé (voir figure 5.30) pour calculer certains paramètres, très difficilement accessibles expérimentalement (raideur de la plaque de retenue, raideur équivalente pour la barre de reprise de couple, raideur de la couronne, inertie de diverses pièces, etc...). De plus, ce modèle éléments finis a aussi permis de valider le modèle analytique (comparaison des modes des divers composants de la structure du frein, étude de l'influence de certains paramètres et compréhension des divers phénomènes, etc...).



(a) vue de devant

(b) vue de derrière

FIG. 5.30: *Modèle éléments finis du frein*

## 5.5 Écriture des systèmes linéaire et non-linéaire

Dans cette partie, nous allons mettre en place le système dynamique non-linéaire afin d'effectuer l'analyse de stabilité (à partir du système linéarisé) et l'analyse des niveaux vibratoires (à partir du problème non-linéaire complet).

### 5.5.1 Préambule

Nous rappelons brièvement la démarche d'une analyse de stabilité non-linéaire qui se décompose en deux parties, comme suit :

- les fréquences et les taux d'amortissement positifs sont déterminés à partir du système non linéaire autour d'un point de fonctionnement. La connaissance des fréquences et taux d'amortissement positifs passe par la détermination des valeurs propres du système linéarisé. La fréquence correspond à la partie imaginaire de la valeur propre associée (avec le facteur  $2\pi$ ). Le taux d'amortissement correspond à la partie réelle de la valeur propre associée : quand ce dernier est positif, le système est instable.

- le point de bifurcation de Hopf passe par les mêmes étapes que précédemment. Simplement, nous cherchons ici à déterminer le point où se déclenche l'instabilité (c'est à dire où le taux d'amortissement traverse l'axe imaginaire de la partie négative vers la partie positive).

- l'obtention des cycles limites nécessite une analyse non linéaire complète, en considérant tous les termes non linéaires, sans effectuer la moindre approximation. La détermination du système linéarisé (avec la matrice jacobienne associée) et du point de bifurcation de Hopf servent de point de départ pour l'analyse non linéaire dans le cas de l'utilisation de la méthode de la variété centrale

### 5.5.2 Système dynamique considéré

Le système dynamique non-linéaire considéré dans notre cas, peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}.\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}.\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{\text{barre}}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{\text{frottement}}(\mathbf{x}) \quad (5.51)$$

Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  correspondent aux matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. Ceux sont des matrices  $15 \times 15$ . Elles sont obtenues à partir des équations définies dans le paragraphe 5.4.2.2.

$\mathbf{F}_{\text{frottement}}$  représente le vecteur des forces de frottement du système. Nous avons

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}(1) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}(5) = -F_X \quad (5.52)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}(2) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}(6) = M_Y \quad (5.53)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}(3) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}(7) = M_Z \quad (5.54)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}(4) = M_X \quad (5.55)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}(i) = 0 \quad i = 8, \dots, 15 \quad (5.56)$$

$\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}$  représente le vecteur des forces hydrauliques du système. Nous avons

$$\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(1) = -F_{\text{hyd}/X} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(2) = -F_{\text{hyd}/Y} \quad (5.58)$$

$$\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(3) = -F_{\text{hyd}/Z} \quad (5.59)$$

$$\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(i) = 0 \quad i = 4, \dots, 15 \quad (5.60)$$

$\mathbf{F}_{\text{barre}}$  représente le vecteur des forces dues à la barre de reprise de couple. Nous avons

$$\mathbf{F}_{\text{barre}}(1) = F_{\text{barre}/X} \quad (5.61)$$

$$\mathbf{F}_{\text{barre}}(2) = F_{\text{barre}/Z} \cdot d_e \quad (5.62)$$

$$\mathbf{F}_{\text{barre}}(3) = F_{\text{barre}/Y} \cdot d_e \quad (5.63)$$

$$\mathbf{F}_{\text{barre}}(4) = -F_{\text{barre}/Y} \cdot R_e \cdot \cos \alpha - F_{\text{barre}/Z} \cdot R_e \cdot \sin \alpha \quad (5.64)$$

$$\mathbf{F}_{\text{barre}}(i) = 0 \quad i = 5, \dots, 15 \quad (5.65)$$

De plus, le vecteur  $\mathbf{F}_{\text{barre}}$  a chacune de ses composantes qui s'exprime en fonction d'une combinaison linéaire des degrés de liberté du système. Nous avons donc la relation

$$\mathbf{F}_{\text{barre}}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_{\text{barre}} \cdot \mathbf{x} \quad (5.66)$$

Soit, le système dynamique non-linéaire (5.51) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{\text{frottement}}(\mathbf{x}) \quad (5.67)$$

avec les expressions  $\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}$  définies précédemment et

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}} \quad (5.68)$$

### 5.5.3 Point de fonctionnement - Système linéarisé

L'analyse de la stabilité s'effectue autour d'un point de fonctionnement  $\mathbf{x}_0$ . Le point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}_{\text{frottement}}(\mathbf{x}_0) \quad (5.69)$$

La stabilité proprement dite du système s'obtient donc en appliquant une faible perturbation  $\bar{\mathbf{x}}$  autour de la position d'équilibre  $\mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \bar{\mathbf{x}} \quad (5.70)$$

Les différentes composantes du vecteur de frottement peuvent se mettre sous la forme:

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{\text{frottement}}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.71)$$

En combinant les équations (5.69) et (5.67), et en ne gardant que les termes linéarisés du vecteur  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(\bar{\mathbf{x}})$ , le système dynamique linéarisé se met sous la forme:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_t \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.72)$$

avec

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(\bar{\mathbf{x}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{frottement}}(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{x}_i} \right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \bar{x}_i \quad (5.73)$$

Soit, nous avons

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(1) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(5) = -F_X^L \quad (5.74)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(2) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(6) = M_Y^L \quad (5.75)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(3) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(7) = M_Z^L \quad (5.76)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(4) = M_X^L \quad (5.77)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(i) = 0 \quad i = 8, \dots, 15 \quad (5.78)$$

avec les expressions  $F_X^L$ ,  $M_Y^L$  et  $M_Z^L$ , définissant les expressions linéarisées de  $F_X$ ,  $M_Y$  et  $M_Z$ , qui peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} F_X^L(\bar{\mathbf{x}}) = & \left[ K_1 \cdot A_2 + 2 \cdot K_2 \cdot A_2 \cdot B_x + 3 \cdot K_3 \cdot A_2 \cdot B_x^2 + \frac{3}{4} \cdot K_3 \cdot A_4 \cdot B_\theta^2 + \frac{3}{4} \cdot K_3 \cdot A_4 \cdot B_\psi^2 \right] (\bar{x}_s - \bar{x}_r) \\ & + \left[ \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot A_4 \cdot B_\psi + \frac{3}{2} \cdot K_3 \cdot A_4 \cdot B_\psi \cdot B_\theta \right] (\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r) + \left[ \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot A_4 \cdot B_\theta + \frac{3}{2} \cdot K_3 \cdot A_4 \cdot B_\psi \cdot B_\theta \right] (\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r) \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$M_X^L(\bar{\mathbf{x}}) = 2.N.\mu_{brk} \left( \left[ \frac{2}{3}.K_1.A_3 + \frac{4}{3}.K_2.A_3.B_x + 2.K_3.A_3.B_x^2 + \frac{3}{5}.K_3.A_5.B_\theta^2 + \frac{3}{5}.K_3.A_5.B_\psi^2 \right].(\bar{x}_s - \bar{x}_r) \right. \\ \left. + \left[ \frac{2}{5}.K_2.A_5.B_\theta + \frac{6}{5}.K_3.A_5.B_x.B_\theta \right].(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r) + \left[ \frac{2}{5}.K_2.A_5.B_\psi + \frac{6}{5}.K_3.A_5.B_x.B_\psi \right].(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r) \right) \quad (5.80)$$

$$M_Y^L(\bar{\mathbf{x}}) = \left[ -\frac{1}{2}.K_2.A_4.B_\theta + \frac{3}{2}.K_3.A_4.B_x.B_\theta \right].(\bar{x}_s - \bar{x}_r) + \left[ -\frac{1}{4}.K_3.A_6.B_\theta.B_\psi \right].(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r) \\ + \left[ -\frac{1}{4}.K_1.A_4 - \frac{1}{2}.K_2.A_4.B_x - \frac{3}{4}.K_3.A_4.B_x^2 - \frac{1}{7}.K_3.A_6.B_\psi^2 - \frac{3}{8}.K_3.A_6.B_\theta^2 \right](\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r) \quad (5.81)$$

$$M_Z^L(\bar{\mathbf{x}}) = \left[ -\frac{1}{2}.K_2.A_4.B_\psi + \frac{3}{2}.K_3.A_4.B_x.B_\psi \right].(\bar{x}_s - \bar{x}_r) + \left[ -\frac{1}{4}.K_3.A_6.B_\theta.B_\psi \right].(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r) \\ + \left[ -\frac{1}{4}.K_1.A_4 - \frac{1}{2}.K_2.A_4.B_x - \frac{3}{4}.K_3.A_4.B_x^2 - \frac{1}{7}.K_3.A_6.B_\theta^2 - \frac{3}{8}.K_3.A_6.B_\psi^2 \right](\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r) \quad (5.82)$$

avec :

$$B_x = x_{s0} - x_{r0}$$

$$B_\psi = \psi_{s0} - \psi_{r0}$$

$$B_\theta = \theta_{s0} - \theta_{r0}$$

La stabilité du système s'étudie en cherchant les valeurs propres du système

$$\mathbf{M}.\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}.\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_L.\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (5.83)$$

en posant

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{K}_{\text{frottement}}^L.\bar{\mathbf{x}} \quad (5.84)$$

et

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{K}_t - \mathbf{K}_{\text{frottement}}^L.\bar{\mathbf{x}} \quad (5.85)$$

#### 5.5.4 Système non linéaire au point d'équilibre

Afin d'obtenir les cycles limites du système, nous utilisons le système non-linéaire complet. Les termes non-linéaires proviennent exclusivement des expressions des termes de frottement données au paragraphe 5.4.2.6.

Le système non-linéaire s'obtient en écrivant les expressions des termes non-linéaires au point de fonctionnement  $\mathbf{x}_0$  obtenu en équation (5.69). L'expression complète des forces de frottement  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}(\bar{\mathbf{x}})$  peut se décomposer en termes linéaires  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(\bar{\mathbf{x}})$  et en termes non linéaires carrés et cubiques  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{NL}(\bar{\mathbf{x}})$ . Nous avons donc:

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}_{\text{frottement}}^L(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{F}_{\text{frottement}}^{NL}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.86)$$

avec le vecteur  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{NL}$  comportant exclusivement les termes non-linéaires sous la forme

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{NL}(1) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{NL}(5) = -F_X^{NL} \quad (5.87)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}(2) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}(6) = M_Y^{\text{NL}} \quad (5.88)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}(3) = -\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}(7) = M_Z^{\text{NL}} \quad (5.89)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}(4) = M_X^{\text{NL}} \quad (5.90)$$

$$\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}(i) = 0 \quad i = 8, \dots, 15 \quad (5.91)$$

Le système non-linéaire complet s'écrit alors sous la forme:

$$\mathbf{M}.\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}.\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_L.\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.92)$$

avec

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}} - \mathbf{K}_{\text{frottement}}^L \quad (5.93)$$

Les expressions  $F_X^{\text{NL}}$ ,  $M_Y^{\text{NL}}$  et  $M_Z^{\text{NL}}$ , définissant les expressions non-linéaires de  $F_X$ ,  $M_Y$  et  $M_Z$ , peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} F_X^{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}) &= [K_2.A_2 + 3.K_3.A_2.B_x].(\bar{x}_s - \bar{x}_r)^2 + \left[ \frac{1}{4}.K_2.A_4 + \frac{3}{4}.K_3.A_4.B_x \right].(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r)^2 \\ &+ \left[ \frac{1}{4}.K_2.A_4 + \frac{3}{4}.K_3.A_4.B_x \right].(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r)^2 + \frac{3}{2}.K_3.A_4.B_\theta.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r).(\bar{x}_s - \bar{x}_r) + \frac{3}{2}.K_3.A_4.B_\psi.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r).(\bar{x}_s - \bar{x}_r) \\ &+ K_3.A_2.(\bar{x}_s - \bar{x}_r)^3 + \frac{3}{4}.K_3.A_4.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r)^2.(\bar{x}_s - \bar{x}_r) + \frac{3}{4}.K_3.A_4.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r)^2.(\bar{x}_s - \bar{x}_r) \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} M_X^{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}) &= 2.N.\mu_{brk} \left( \left[ \frac{2}{3}.K_2.A_3 + 2.K_3.A_3.B_x \right].(\bar{x}_s - \bar{x}_r)^2 + \left[ \frac{1}{5}.K_2.A_5 + \frac{3}{5}.K_3.A_5.B_x \right].(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r)^2 \right. \\ &+ \left[ \frac{1}{5}.K_2.A_5 + \frac{3}{5}.K_3.A_5.B_x \right].(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r)^2 + \frac{6}{5}.K_3.A_5.B_\theta.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r).(\bar{x}_s - \bar{x}_r) \\ &+ \frac{6}{5}.K_3.A_5.B_\psi.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r).(\bar{x}_s - \bar{x}_r) + \frac{2}{3}.K_3.A_3.(\bar{x}_s - \bar{x}_r)^3 \\ &\left. + \frac{3}{5}.K_3.A_5.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r)^2.(\bar{x}_s - \bar{x}_r) + \frac{3}{5}.K_3.A_5.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r)^2.(\bar{x}_s - \bar{x}_r) \right) \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} M_Y^{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}) &= -\frac{3}{4}.K_3.A_4.B_\theta.(\bar{x}_s - \bar{x}_r)^2 - \frac{3}{8}.K_3.A_6.B_\theta.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r)^2 - \frac{1}{8}.K_3.A_6.B_\theta.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r)^2 \\ &- \left[ \frac{1}{2}.K_2.A_4 + \frac{3}{2}.K_3.A_4.B_x \right].(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r).(\bar{x}_s - \bar{x}_r) - \frac{3}{8}.K_3.A_6.B_\psi.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r).(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r) \\ &+ \frac{1}{8}.K_3.A_6.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r)^3 + \frac{3}{4}.K_3.A_4.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r).(\bar{x}_s - \bar{x}_r)^2 + \frac{1}{8}.K_3.A_6.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r).(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r)^2 \end{aligned} \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} M_Z^{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}) &= -\frac{3}{4}.K_3.A_4.B_\psi.(\bar{x}_s - \bar{x}_r)^2 - \frac{3}{8}.K_3.A_6.B_\psi.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r)^2 - \frac{1}{8}.K_3.A_6.B_\psi.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r)^2 \\ &- \left[ \frac{1}{2}.K_2.A_4 + \frac{3}{2}.K_3.A_4.B_x \right].(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r).(\bar{x}_s - \bar{x}_r) - \frac{3}{8}.K_3.A_6.B_\psi.(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r).(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r) \\ &+ \frac{1}{8}.K_3.A_6.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r)^3 + \frac{3}{4}.K_3.A_4.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r).(\bar{x}_s - \bar{x}_r)^2 + \frac{1}{8}.K_3.A_6.(\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r).(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_r)^2 \end{aligned} \quad (5.97)$$

avec :

$$B_x = x_{s0} - x_{r0}$$

$$B_\psi = \psi_{s0} - \psi_{r0}$$

$$B_\theta = \theta_{s0} - \theta_{r0}$$

## 5.6 Analyse de stabilité et études paramétriques

Dans cette partie, nous nous attacherons à présenter les résultats de détermination du point d'équilibre du système non-linéaire, de stabilité et la détection du point de bifurcation associé par rapport au coefficient de frottement qui est le paramètre majeur pour un tel système.

Ensuite, nous montrerons une application des diverses études paramétriques possibles. Nous orienterons tout d'abord notre étude paramétrique sur des paramètres physiques dont nous connaissons l'importance, du fait d'observations expérimentales. Ces études paramétriques vont nous permettre de "valider" notre modèle en regardant si ce dernier reproduit bien les effets de divers facteurs physiques sur la stabilité du système.

Enfin, nous verrons une application des études biparamétriques possibles. Ces études biparamétriques porteront sur les variations de la pression hydraulique, de l'angle  $\beta$  de sprag-slip et sur le coefficient de frottement.

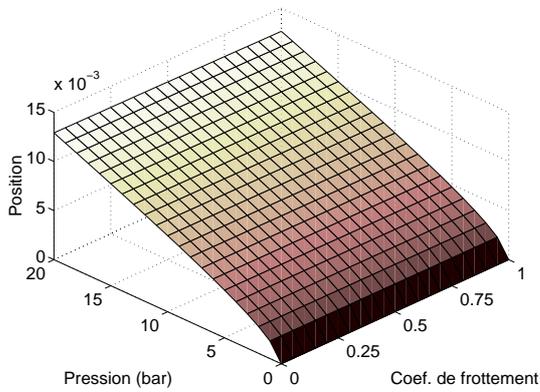
### 5.6.1 Détermination du point d'équilibre

La première étape consiste donc à déterminer la position d'équilibre statique du système non-linéaire, afin d'effectuer ensuite l'étude de stabilité autour de cette position d'équilibre. Le but de cette partie est juste de montrer l'importance de la prise en compte de la position d'équilibre lors de l'étude de la stabilité d'un système et l'évolution effective de cette dernière en fonction de certains paramètres, qui seront ensuite repris lors des études de stabilité. Nous allons plus particulièrement regarder l'évolution de la position d'équilibre vis-à-vis de la pression hydraulique qui constitue le paramètre physique prépondérant de mis en position de fonctionnement du système. Le point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  est défini de la manière suivante :

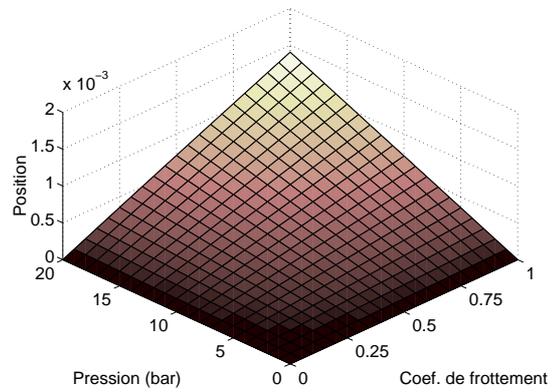
$$(\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}}) \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}_{\text{frottement}}(\mathbf{x}_0) \quad (5.98)$$

avec  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}_{\text{barre}}$  les matrices de raideur du système et de la barre de reprise de couple définies précédemment.

Les évolutions de la position d'équilibre pour le déplacement axial ( $x_r$ ) du stator (en inches) et pour la rotation  $\phi_s$  (en radians) en fonction des évolutions de la pression hydraulique et du coefficient de frottement, de la pression hydraulique et de l'angle de sprag-slip, du coefficient de frottement et de l'angle de sprag-slip sont représentées respectivement en figures 5.31, 5.32 et 5.33. Comme l'illustrent les figures 5.31 et 5.32, les positions d'équilibre du système ont une forte dépendance vis-à-vis de la pression hydraulique, par rapport aux autres variables que sont le coefficient de frottement ou l'angle de sprag-slip. De plus, nous remarquons que plus la pression hydraulique est forte, plus le stator est poussé par cette force hydraulique et donc sa position d'équilibre statique augmente en valeur par rapport à l'origine. Les résultats obtenus sont en parfait accord avec l'expérience. Aussi, les figures 5.33 illustrent le fait que la position d'équilibre peut cependant varier en fonction d'autres paramètres que la pression et que l'évolution de cette position d'équilibre statique peut s'avérer complexe. Ainsi, la détermination rigoureuse de la position d'équilibre statique est indispensable pour pouvoir ensuite statuer sur la stabilité du système et appliquer des méthodes d'analyse non-linéaire. Nous discuterons également par la suite (paragraphes 5.7.1, 5.7.4 et 5.7.5) de l'évolution et de la validation de cette position d'équilibre statique.

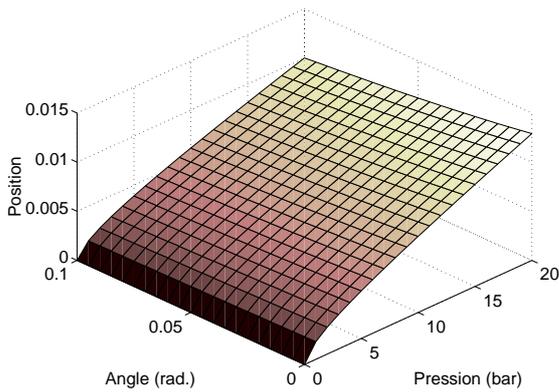


(a) Position d'équilibre du stator  $x_s$

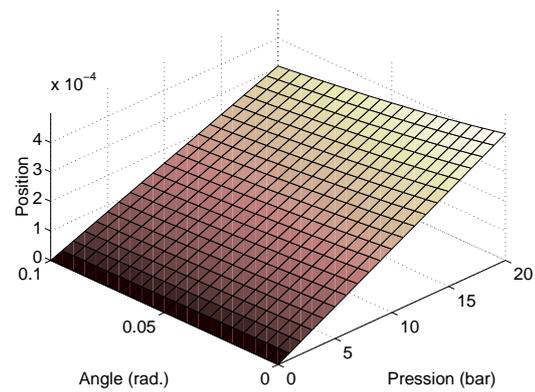


(b) Position d'équilibre de la couronne  $\phi_r$

FIG. 5.31: Évolution de la position d'équilibre en fonction de la pression hydraulique et du coefficient de frottement

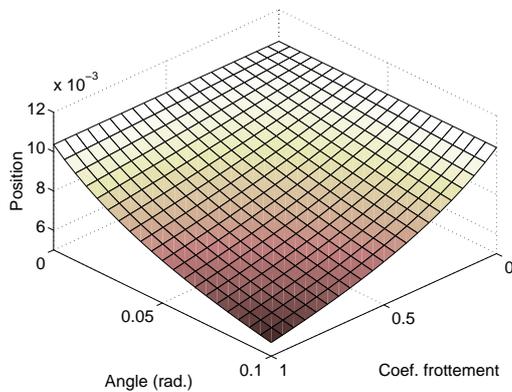


(a) Position d'équilibre du stator  $x_s$

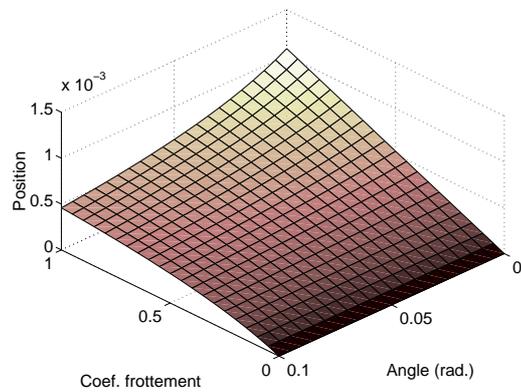


(b) Position d'équilibre de la couronne  $\phi_r$

FIG. 5.32: Évolution de la position d'équilibre en fonction de la pression hydraulique et de l'angle de sprag-slip



(a) Position d'équilibre du stator  $x_s$



(b) Position d'équilibre de la couronne  $\phi_r$

FIG. 5.33: Évolution de la position d'équilibre en fonction de l'angle de sprag-slip et du coefficient de frottement

### 5.6.2 Étude de stabilité

L'étude de stabilité s'effectue donc pour de faibles perturbations  $\bar{\mathbf{x}}$  autour du point de fonctionnement  $\mathbf{x}_0$  qui vérifie la relation

$$(\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}}) \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}_{\text{frottement}}(\mathbf{x}_0) \quad (5.99)$$

avec les matrices de raideur  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}_{\text{barre}}$  définies précédemment.  $\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}$  représente la force hydraulique et  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}$  correspond aux forces de frottement non-linéaires.

La stabilité du système s'étudie alors en cherchant les valeurs propres du système linéarisé autour du point de fonctionnement  $\mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}} - \mathbf{K}_{\text{frottement}}^{\text{L}}) \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (5.100)$$

avec  $\mathbf{K}_{\text{barre}}$  et  $\mathbf{K}_{\text{frottement}}^{\text{L}}$  les matrices de raideurs équivalentes des efforts provenant de la barre de reprise de couple et de la contribution linéaire des forces de frottement.

Sous forme d'équations d'état, cela revient à rechercher les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  définie comme suit

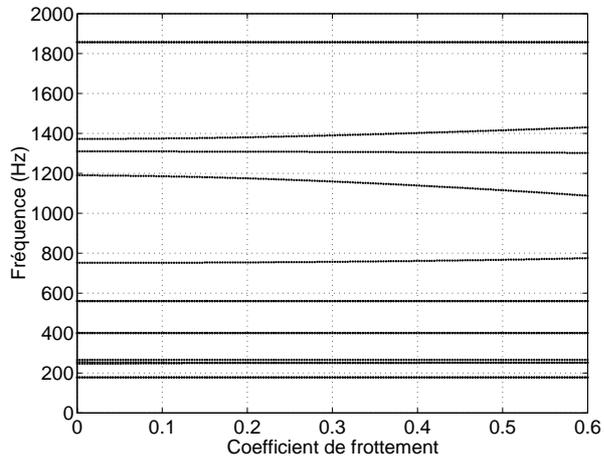
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}} - \mathbf{K}_{\text{frottement}}^{\text{L}}) & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

Nous effectuons donc une étude de stabilité en prenant le coefficient de frottement comme paramètre de bifurcation. Le point de bifurcation de Hopf est alors détecté pour  $\mu_0 = 0.25$ .

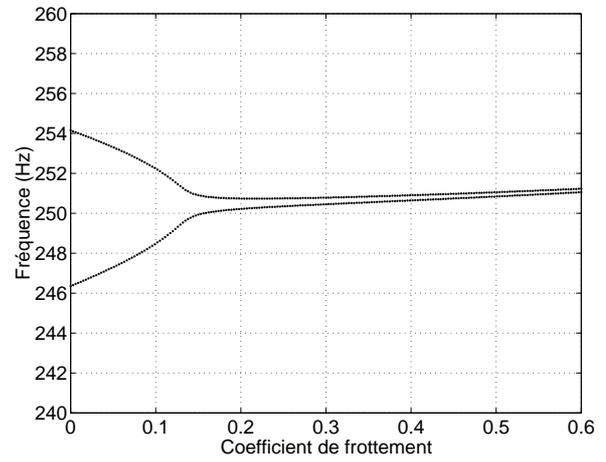
Ainsi, pour un coefficient de frottement inférieur à  $\mu_0$ , le frein est stable. Pour une valeur du coefficient de frottement supérieure à  $\mu_0$ , le frein est instable.

Lors d'un freinage, le coefficient de frottement peut être supérieur à 0.25, donc nous nous retrouvons dans une configuration de frein instable. Alors, il y a apparition d'un couplage de modes aux alentours de 250Hz, comme l'illustrent les figures 5.34 et 5.35. Ces résultats sont en parfait accord avec les expériences où le phénomène de whirl apparaît aux alentours de 250 Hz.

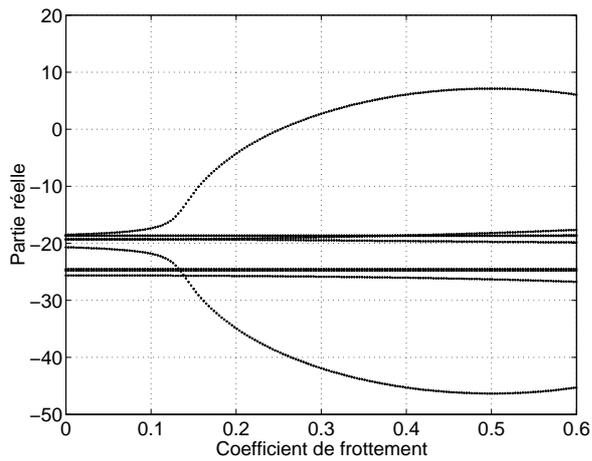
De plus, en examinant la déformée de la couronne hydraulique et du premier stator (représentée par les degrés de liberté  $x_s$ ,  $\theta_s$ ,  $\psi_s$  et  $\phi_s$ ), nous retrouvons le mouvement oscillant autour de la fusée, mouvement pouvant être assimilé à une pièce de monnaie tournoyant sur une table, comme illustré en figure 5.36.



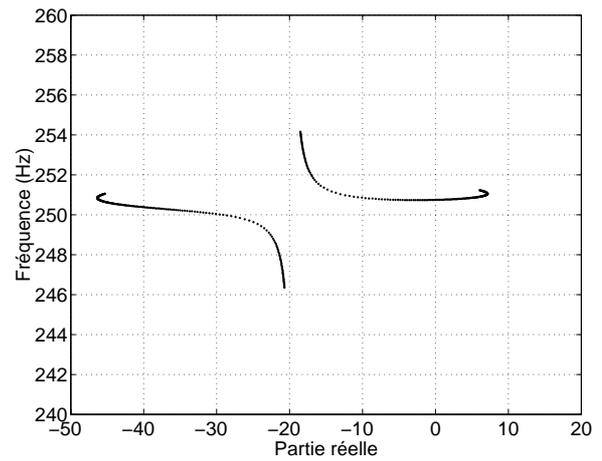
(a) Évolution des fréquences



(b) Zoom sur le couplage des fréquences

FIG. 5.34: *Évolution des fréquences d'instabilité et couplage de modes*

(a) Évolution des parties réelles



(b) Évolution fréquence/partie réelle

FIG. 5.35: *Évolution des parties réelles et couplage de modes*

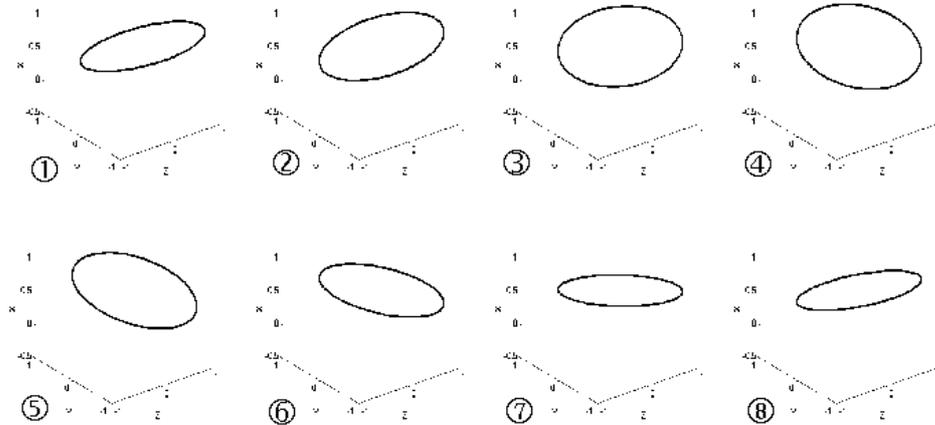


FIG. 5.36: *Mouvement de la couronne hydraulique et du premier stator*

### 5.6.3 Influence des facteurs physiques majeurs sur la stabilité du système

Nous allons maintenant regarder plus particulièrement la stabilité du système vis-à-vis de certains paramètres pour illustrer les possibilités d'études paramétriques:

- les rayons externes des disques tournants et stationnaires.
- la longueur  $d_e$  caractérisant la distance entre les deux plans de la barre de reprise de couple et de la couronne hydraulique, définie en figure 5.27.
- l'angle  $\beta$  entre la barre de reprise de couple et la couronne hydraulique (caractérisant l'angle de sprag-slip), définie en figure 5.20.

Ensuite, l'influence d'autres paramètres physiques constituant la structure du frein sera discutée.

#### 5.6.3.1 Exemples d'études paramétriques

Dans cette partie, les influences des rayons externes des disques tournants et stationnaires, de la longueur  $d_e$  et de l'angle  $\beta$  sont étudiées.

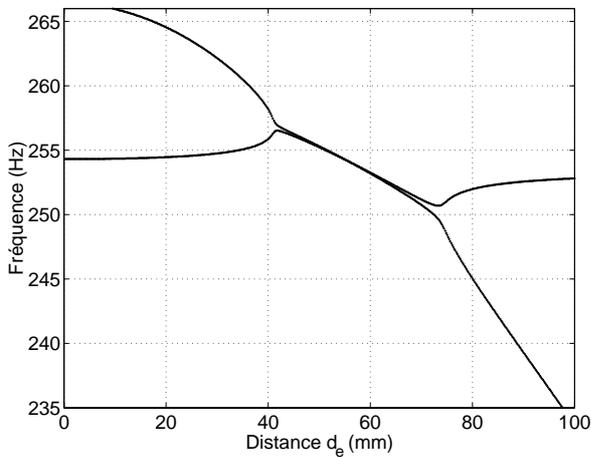
Ces dernières études de stabilité vont nous permettre de statuer sur la validité de notre modèle en examinant si les résultats obtenus par variation de certains paramètres sont conformes à ce que nous observons de manière expérimentale.

En effet, lorsque nous regardons les résultats obtenus pour la dépendance vis-à-vis de la distance  $d_e$ , comme illustré en figure 5.37, nous remarquons que pour une valeur de  $d_e = 0$ , le système est stable. Comme ceci l'a déjà été dit précédemment, il a été observé expérimentalement, que les freins dont la distance  $d_e$  était nulle ou presque, avaient un comportement stable. Ce résultat est donc en parfait accord avec les résultats expérimentaux.

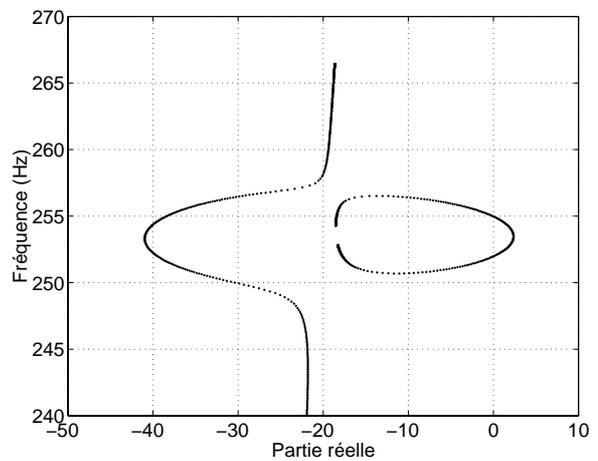
De même, les évolutions de la stabilité vis-à-vis du rayon extérieur des disques, comme illustré en figures 5.38, montrent que le système devient instable lorsque nous augmentons le rayon extérieur des disques. Ceci semble logique, étant donné qu'une augmentation du rayon des disques entraîne une

augmentation de la surface de frottement à l'interface des stators et des rotors.

Aussi, l'importance de l'angle de sprag-slip, déjà mis en avant précédemment, est montrée en figure 5.39, où le système devient instable pour des valeurs de l'angle de sprag-slip très faibles, qui sont comprises dans les jeux de fonctionnement du système. De plus, comme cela a été énoncé au paragraphe 5.4.2.4, les jeux de fonctionnement et les angles de sprag-slip déduits étaient tellement faibles que ces derniers pouvaient peut-être être négligés dans le modèle de whirl. Les résultats que nous venons d'obtenir nous indiquent l'inverse et montrent bien que même si l'angle de sprag-slip est très petit (de l'ordre de 0.5 degré au maximum), il ne peut pas être négligé; sinon le système reste stable, alors que sa prise en compte déstabilise le système.

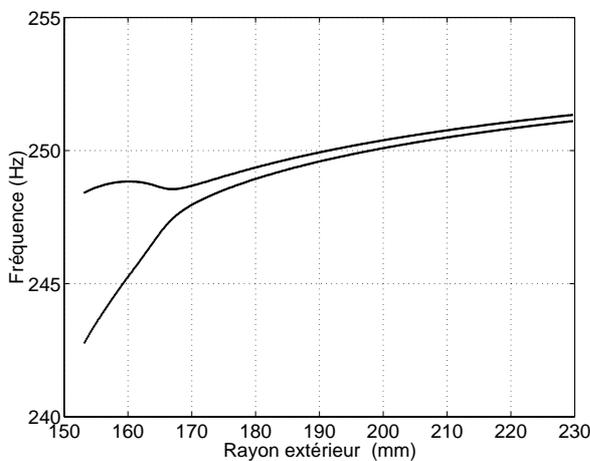


(a) Évolution des fréquences

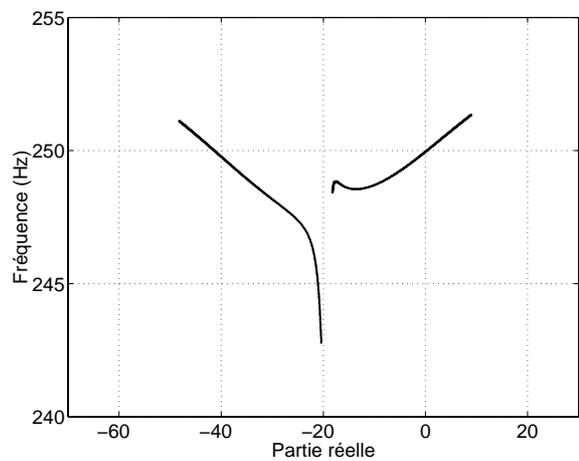


(b) Évolution parties réelles-fréquences

FIG. 5.37: Évolution des fréquences d'instabilité en fonction de la distance  $d_e$



(a) Évolution des fréquences



(b) Évolution parties réelles-fréquences

FIG. 5.38: Évolution des fréquences d'instabilité en fonction du rayon extérieur des disques

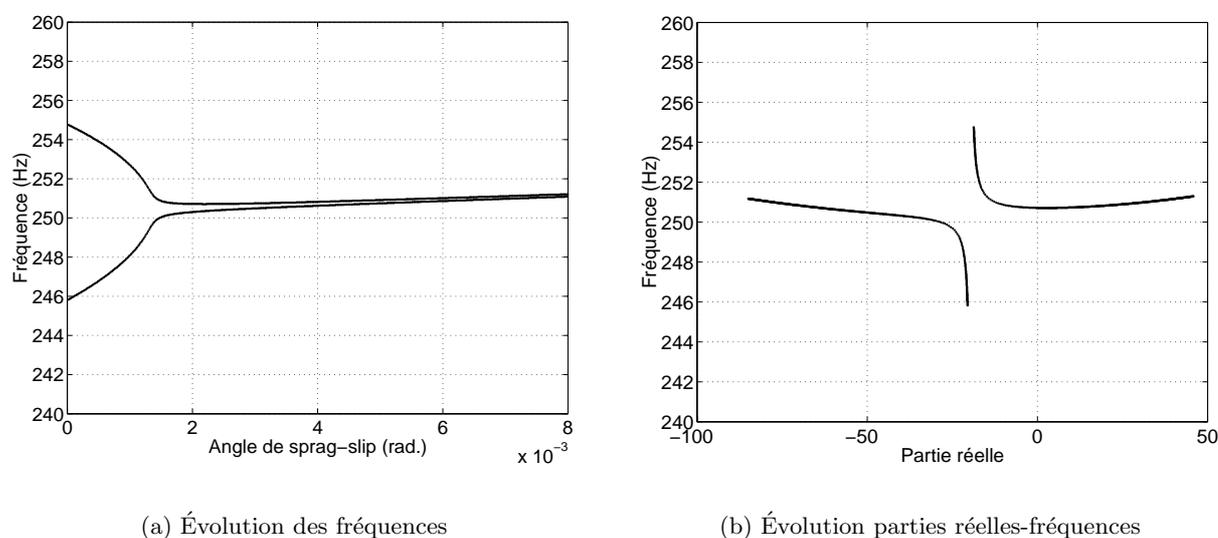


FIG. 5.39: *Évolution des fréquences d'instabilité en fonction de l'angle  $\beta$  de sprag-slip*

### 5.6.3.2 Influence des autres facteurs physiques majeurs

Bien entendu, de nombreux facteurs physiques influent sur la stabilité du frein. Le but de cette partie est de répertorier les principaux facteurs physiques jouant un rôle prépondérant sur la stabilité du frein.

Le problème de ces études paramétriques est que nous ne faisons varier qu'un paramètre et qu'il existe un grand nombre de combinaisons possibles vis-à-vis des couples de paramètres. Les observations qui suivent permettent juste d'avoir une idée sur l'influence des paramètres sachant que pour chaque configuration de frein, il est nécessaire de faire une étude de stabilité spécifique.

Les études paramétriques ont permis de mettre en avant les comportements suivants:

- le coefficient de frottement joue un rôle important. Au delà d'une certaine valeur  $\mu_0$ , le frein est instable.

- la pression hydraulique joue un rôle complexe vis-à-vis de la stabilité du système. En effet, une pression hydraulique faible ou très importante (de l'ordre de 100 bars) peut stabiliser le frein. Ainsi, le rôle de la pression hydraulique est important lors de l'étude de la stabilité du système.

- une augmentation ou une diminution de la raideur du puits de chaleur peut stabiliser le frein. Ainsi, le choix du matériau constituant les stators et les rotors est un des critères importants lors de la conception d'un frein.

- la raideur axiale de la barre de reprise de couple peut stabiliser le frein (en assouplissant ou en raidissant cette raideur). Ce résultat est en accord avec la remarque précédente sur le rôle de la raideur axiale du puits de chaleur. En effet, l'angle de sprag-slip, qui est à l'origine de l'instabilité du frein, permet le couplage du mode axiale du puits de chaleur et du mode de traction-compression de la barre de reprise de couple. Ainsi, si ces deux modes sont très éloignés l'un de l'autre, il n'y a pas de possibilité de couplage de ces deux modes.

- l'angle de sprag-slip joue un rôle essentiel sur la stabilité du système. En effet, si l'angle de sprag-slip est nul, il n'y a pas d'instabilité du frein, et cela quelles que soient les valeurs des autres paramètres. Ce qui montre de façon claire que l'angle de sprag-slip est le phénomène à l'origine des

instabilités du whirl. D'un point de vue pratique et pour la conception d'un frein, il est cependant impossible de garder cet angle de sprag-slip nul. En effet, les valeurs d'angle faisant apparaître une instabilité sont très faibles (de l'ordre de  $0.1^\circ$ ), ce qui rentre dans les tolérances des jeux de fonctionnement entre la barre de reprise de couple et la couronne hydraulique comme explicité dans le paragraphe 5.4.2.3.

- les raideurs de liaison tube-fusée  $K_{ztf}$  et  $K_{ytf}$ , les raideurs de liaisons entre les rotors et la fusée  $K_{fwk}$  et les raideurs de liaisons entre les stators et le tube de torsion  $K_{twk}$  n'ont pas d'influence sur la stabilité du frein.

- la géométrie des rotors et des stators (rayon extérieur et rayon intérieur) joue un rôle important. Ce qui s'explique aisément puisque ces deux paramètres permettent de calculer la surface de contact entre les stators et les rotors et rentrent donc directement en jeu lors du calcul des efforts de frottement.

#### 5.6.4 Études biparamétriques

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il est possible, à partir d'une analyse de stabilité de trouver les zones stables et instables suivant l'évolution des différents paramètres. Dans ce qui suit, nous allons illustrer cette possibilité d'effectuer des études biparamétriques d'aide à la conception à travers l'étude de la stabilité vis à vis du coefficient de frottement, de la pression hydraulique appliquée et de l'angle de sprag-slip. Bien entendu, de nombreuses autres études biparamétriques sont possibles en suivant la même démarche.

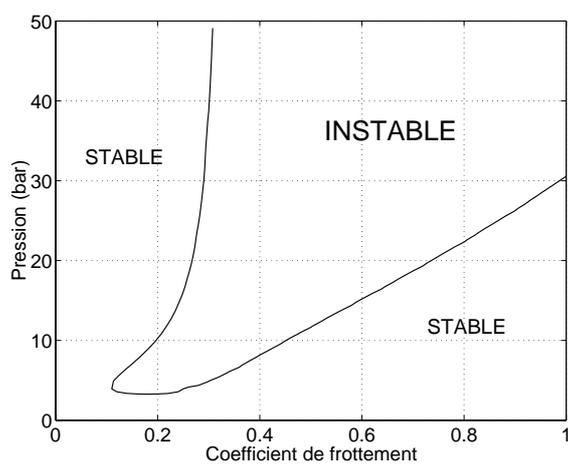
##### 5.6.4.1 Études vis-à-vis de la pression hydraulique, du coefficient de frottement et de l'angle de sprag-slip

Les études biparamétriques vis à vis des évolutions couplées de la pression hydraulique, du coefficient de frottement et de l'angle de sprag-slip, montrent que chacun de ces paramètres joue un rôle important. Tout d'abord les études mettant en jeu l'évolution de l'angle de sprag-slip montrent que ce dernier est à l'origine de l'instabilité du whirl. En effet, quand ce dernier est nul, il n'y a pas apparition d'instabilité, comme illustré en figures 5.42 et 5.44. Cela corrobore toutes les observations expérimentales et les commentaires déjà faits à ce sujet au paragraphe 5.4.2.6. Aussi, nous remarquons que les valeurs de l'angle de sprag-slip qui peuvent entraîner une instabilité sont faibles: en effet, il suffit que l'angle de sprag-slip soit supérieur à  $0.1$  degré pour avoir une instabilité. Une telle valeur de cet angle se situe dans les jeux de fonctionnement entre la barre de couple et la couronne hydraulique, d'où l'importance de la prise en compte de cet angle, même pour de faibles jeux de fonctionnement. Dans tous les cas, nous remarquons que les fréquences d'instabilité associées se situent toujours entre  $210Hz$  et  $260Hz$ .

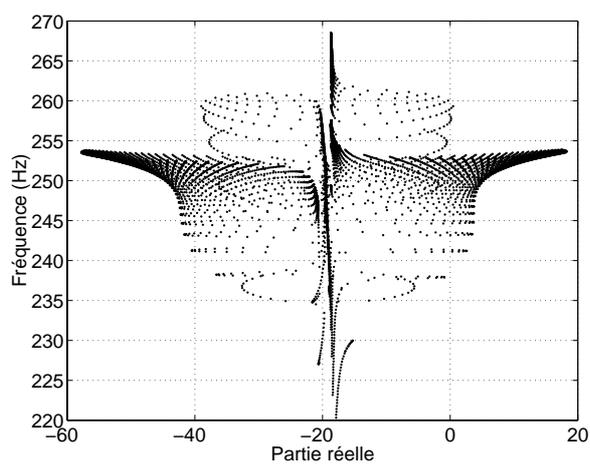
De plus, les évolutions biparamétriques en fonction de la pression hydraulique et du coefficient de frottement semblent plus complexes, comme le montrent les figures 5.40. En effet, pour certaines valeurs de la pression hydraulique (jusqu'à 30 bars), nous observons que le système peut être stable, puis instable, et de nouveau se stabiliser avec une augmentation du coefficient de frottement. Les fréquences d'instabilité se situent entre  $240Hz$  et  $260Hz$ .

Les résultats montrant les diverses zones d'instabilité et les fréquences associées sont illustrés en

figures 5.40, 5.42 et 5.44. De plus, les figures 5.41, 5.43 et 5.45 montrent l'évolution de la partie réelle du mode instable en fonction des deux paramètres considérés.



(a) Détection des zones de stabilité



(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 5.40: *Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la pression et du coefficient de frottement*

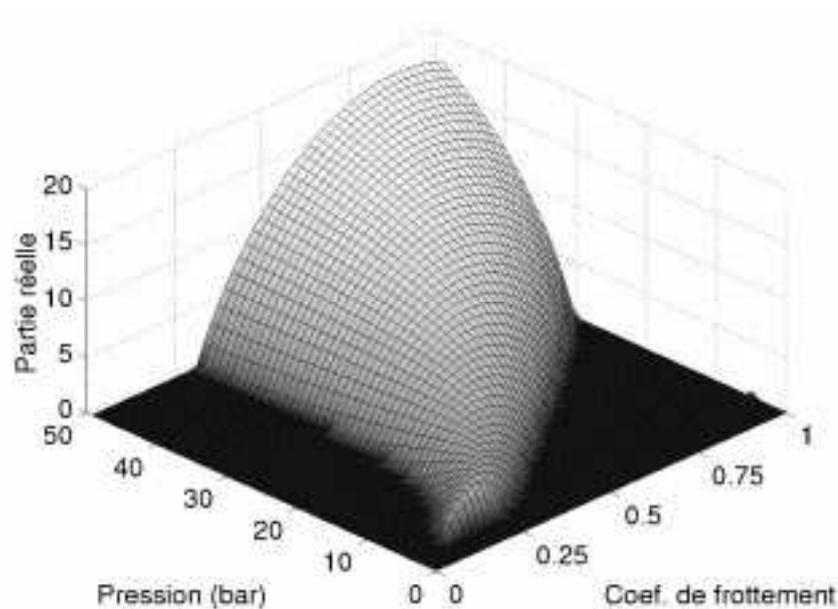
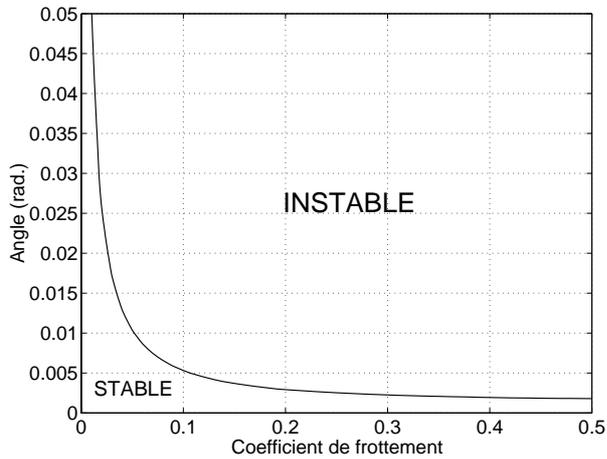
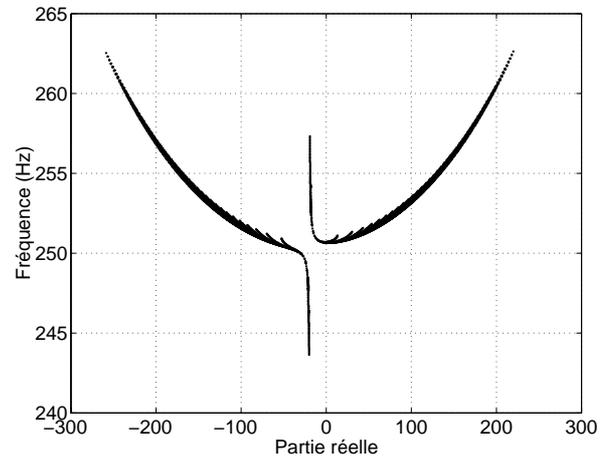


FIG. 5.41: *Évolution de la partie réelle du mode instable en fonction de la pression et du coefficient de frottement*



(a) Détection des zones de stabilité



(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 5.42: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de l'angle de sprag-slip et du coefficient de frottement

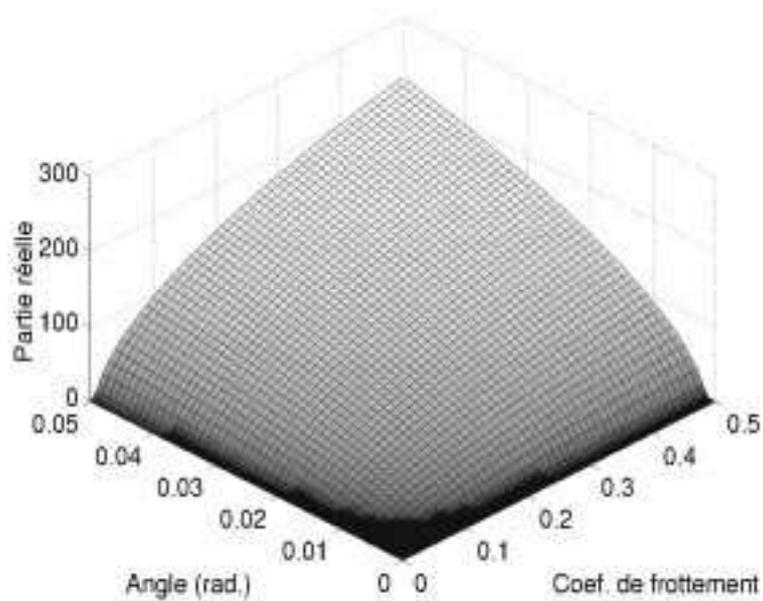
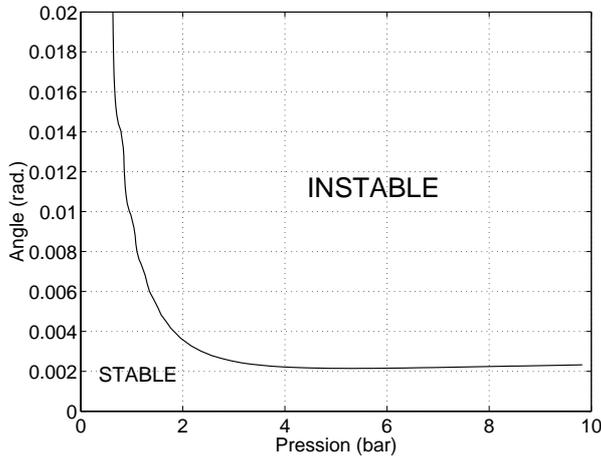
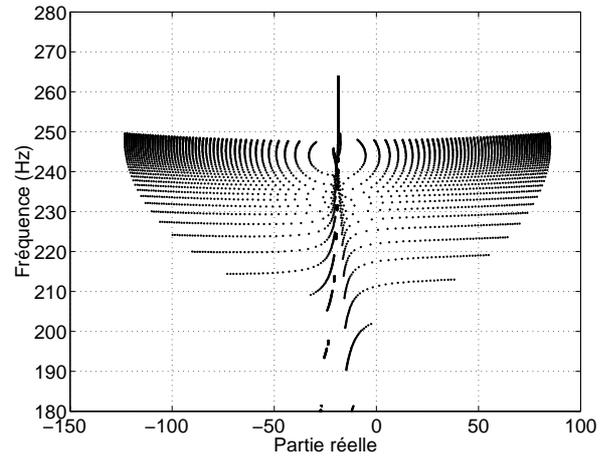


FIG. 5.43: Évolution de la partie réelle du mode instable en fonction de l'angle de sprag-slip et du coefficient de frottement



(a) Détection des zones de stabilité



(b) Évolution des fréquences d'instabilité

FIG. 5.44: Étude de stabilité biparamétrique en fonction de l'angle de sprag-slip et de la pression

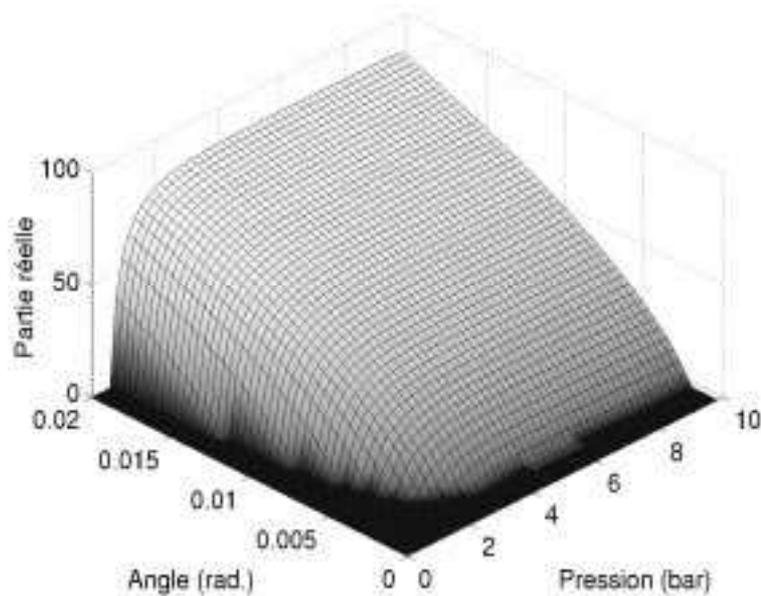


FIG. 5.45: Évolution de la partie réelle du mode instable en fonction de l'angle de sprag-slip et de la pression

### 5.6.5 Conclusions sur les études de stabilité du frein

Le modèle mis en place permet de reproduire des changements de stabilité vis-à-vis de différents facteurs. Les résultats obtenus semblent en accord avec les observations expérimentales.

Ces diverses études montrent que la stabilité d'un frein aéronautique est très complexe, vu le grand nombre de paramètres pouvant jouer un rôle sur la stabilité de ce dernier. Parmi, les facteurs physiques ayant une influence essentiel, nous retrouvons le coefficient de frottement, la pression hydraulique et l'angle de sprag-slip. L'hypothèse de la prise en compte des jeux de fonctionnement, et donc de l'angle de sprag-slip  $\beta$ , comme l'un des facteurs pouvant donner lieu à l'instabilité du whirl, a été validée.

De même, certaines idées avancées pour stabiliser un frein (provenant d'observations expérimentales) ont pu être vérifiées. Parmi ces dernières, nous retrouvons le fait qu'une distance  $d_e$  faible entre la barre de reprise de couple et de la couronne hydraulique permet de stabiliser le système. De même, ces études paramétriques permettent de statuer sur les paramètres physiques jouant un rôle important sur la stabilité du système, tel que le comportement du puits de chaleur par exemple.

Un des points essentiels dans la modélisation du whirl repose sur l'angle de sprag-slip et le phénomène d'instabilité associé. Comme cela a été précédemment énoncé (paragraphe 5.4.2.4), cet angle prend des valeurs très faibles, mais suffisantes pour entraîner le système en instabilité.

## 5.7 Détermination des cycles limites

Une fois les zones et fréquences d'instabilité établies, il est tout naturel de s'intéresser aux niveaux vibratoires engendrés lors de la mise en instabilité du système.

Afin d'obtenir les niveaux vibratoires pour le modèle de whirl, nous utiliserons la méthode de la variété centrale et des approximants de Padé.

### 5.7.1 Préambule: cycles limites par intégration temporelle

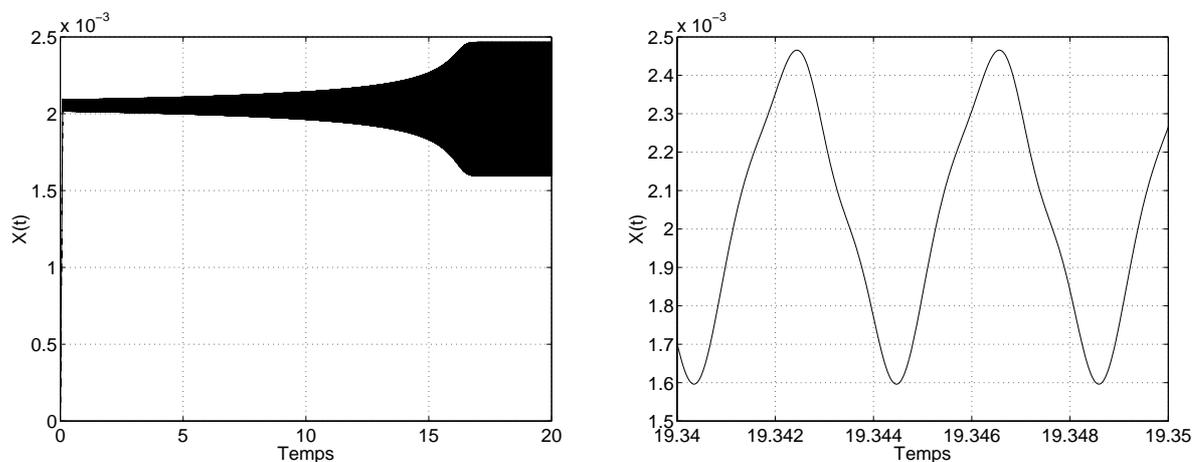
Bien entendu, il est toujours possible de chercher les cycles limites par l'intermédiaire d'une intégration temporelle classique à partir du système

$$\mathbf{M}.\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}.\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}.\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{hydraulique}}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{\text{barre}}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_{\text{frottement}}(\mathbf{x}) \quad (5.102)$$

Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  correspondent aux matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. Ce sont des matrices  $15 \times 15$ . Elles sont obtenues à partir des équations définies dans le paragraphe 5.4.2.2.  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}$  représente le vecteur des forces de frottement du système.  $\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}$  représente le vecteur des forces hydrauliques du système.  $\mathbf{F}_{\text{barre}}$  représente le vecteur des forces provenant de la barre de reprise de couple. Les expressions de  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}$ ,  $\mathbf{F}_{\text{hydraulique}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{barre}}$  ont été données précédemment.

Pour obtenir les cycles limites, nous nous plaçons donc au voisinage du point de bifurcation de Hopf (avec la partie réelle d'une valeur propre positive). Comme le montrent les figures 5.46, 5.47 et 5.48 (pour le degré de liberté  $x_s$  du stator), le système accroche un cycle limite au bout d'un certain temps. Nous remarquons, d'après la figure 5.48, que le système oscille alors autour d'une position statique, qui correspond au point d'équilibre du système.

Les cycles limites du système non-linéaire obtenus par intégration temporelle seront illustrés par la suite, lors de la comparaison effectuée avec les résultats provenant de la méthode de la variété centrale et des approximants de Padé.



(a) Déplacement  $X(t)$

(b) Zoom sur les oscillations de  $X$

FIG. 5.46: Oscillations du déplacement suivant  $x_s$  (en inch) du stator pour  $(\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.01)$

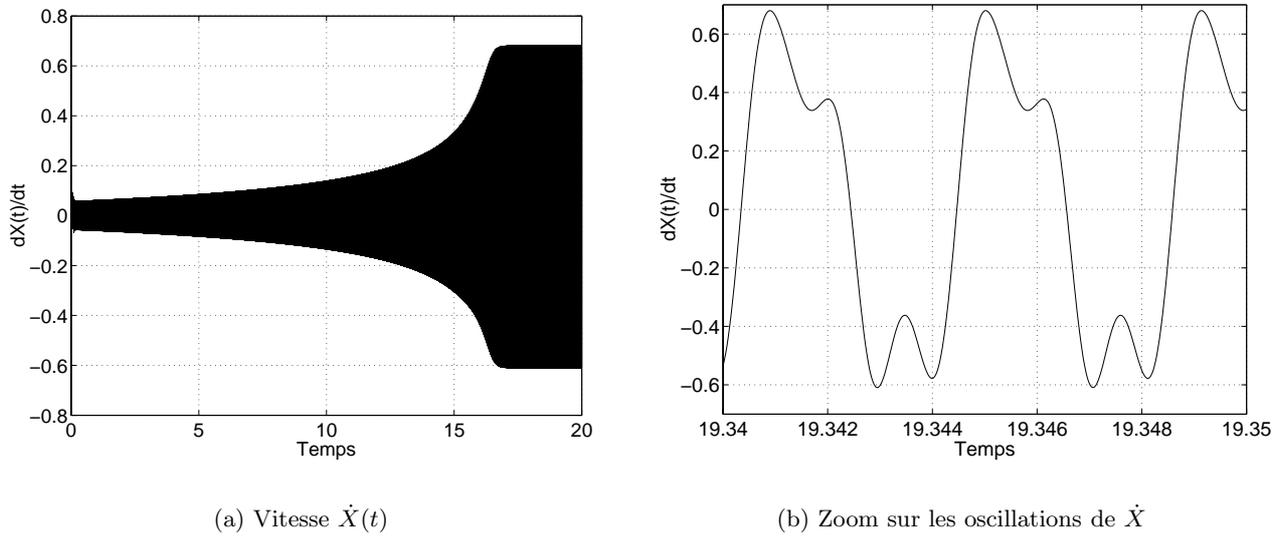


FIG. 5.47: Oscillations de la vitesse suivant  $x_s$  (en *inche/s*) du stator pour  $(\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  avec  $\varepsilon = 0.01$ )

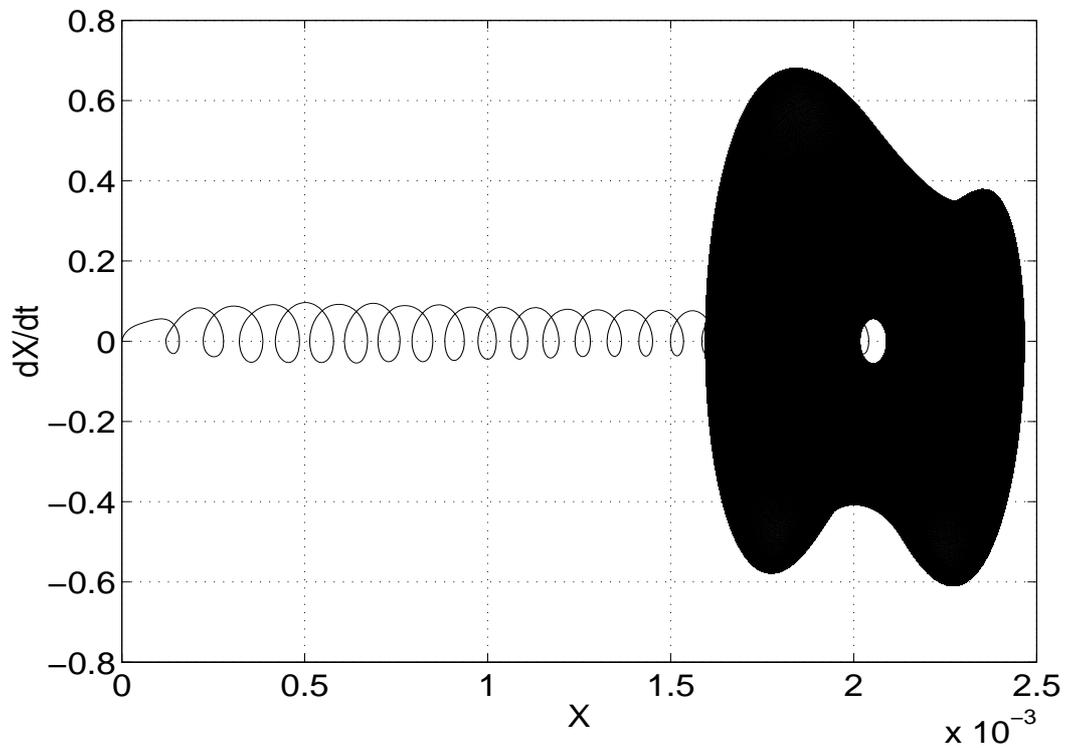


FIG. 5.48: Cycle limite  $(x_s, \dot{x}_s)$  pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  (avec  $\varepsilon = 0.01$ )

### 5.7.2 Mise sous forme d'équation d'état

Le système non-linéaire complet s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{M}.\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}.\dot{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}} - \mathbf{K}_{\text{frottement}}^{\text{L}}) \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (5.103)$$

avec  $\mathbf{F}_{\text{frottement}}^{\text{NL}}$  le vecteur des termes non-linéaires associés aux forces de frottement.

Comme explicité en équations (5.94), (5.95), (5.96) et (5.97), ces termes comportent des non-linéarités quadratiques et cubiques. Le système peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{M}.\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}.\dot{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}} - \mathbf{K}_{\text{frottement}}^{\text{L}}) \cdot \bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{15} \sum_{j=1}^{15} \mathbf{f}_{(2)}^{ij} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j + \sum_{i=1}^{15} \sum_{j=1}^{15} \sum_{k=1}^{15} \mathbf{f}_{(3)}^{ijk} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j \cdot \bar{x}_k \quad (5.104)$$

où les coefficients  $\mathbf{f}_{(2)}^{ij}$  et  $\mathbf{f}_{(3)}^{ijk}$  définissent l'ensemble des termes quadratiques et cubiques.

Il est alors possible de se ramener à un système différentiel du premier ordre en effectuant la transformation

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}} \end{Bmatrix} \quad (5.105)$$

Ainsi, le système dynamique non-linéaire (5.104) s'écrit sous la forme

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^{30} \boldsymbol{\eta}_{(2)}^{ij} \cdot y_i \cdot y_j + \sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^{30} \sum_{k=1}^{30} \boldsymbol{\eta}_{(3)}^{ijk} \cdot y_i \cdot y_j \cdot y_k \quad (5.106)$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $30 \times 30$ . Les vecteurs  $\boldsymbol{\eta}_{(2)}^{ij}$  et  $\boldsymbol{\eta}_{(3)}^{ijk}$  sont des vecteurs de taille  $1 \times 30$  et comprennent tous les termes non-linéaires quadratiques et cubiques.

L'expression de la matrice  $\mathbf{A}$  est donnée par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}} - \mathbf{K}_{\text{frottement}}^{\text{L}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{\text{barre}} - \mathbf{K}_{\text{frottement}}^{\text{L}}) & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

Les expressions des vecteurs  $\boldsymbol{\eta}_{(2)}$  et  $\boldsymbol{\eta}_{(3)}$  sont données par

$$\boldsymbol{\eta}_{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{(2)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.109)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{(3)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.110)$$

### 5.7.3 Application de la méthode de la variété centrale et des approximants de Padé

Comme dans le cas du modèle bidimensionnel frottant, la méthode de la variété centrale permet de réduire un système non-linéaire au point de bifurcation de Hopf.

Dans ce paragraphe, le développement de la méthode de la variété centrale et le calcul des coefficients associés ne seront pas abordés. Le lecteur pourra se reporter aux développements effectués dans le chapitre précédent et en Annexe B pour plus de détails.

Les cycles limites sont alors obtenus par résolution du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}}(\mu) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{c}} + \mathbf{G}_2[\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}), \mu] + \mathbf{G}_3[\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}), \mu] \\ \dot{\mu} = 0 \\ \mu = \mu_0(1 + \varepsilon) \quad (\varepsilon \ll 1) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}) = \sum_{p=i+j=2}^m \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \bar{\mu}^l \quad (m \geq 2) \end{array} \right. \quad (5.111)$$

avec  $\mu_0$  la valeur du coefficient de frottement pour lequel il y a apparition d'instabilité et en considérant une faible variation  $\bar{\mu}$  de ce coefficient de frottement tel que  $\bar{\mu} = \varepsilon\mu_0$  et  $\varepsilon \ll 1$ .  $\mathbf{v}_{\mathbf{c}}$  représente l'ensemble des variétés centrées (dans notre cas de dimension deux) et  $\mathbf{v}_{\mathbf{s}}$  représente l'ensemble des variétés stables. Dans notre cas,  $\mathbf{v}_{\mathbf{s}}$  est un vecteur de dimension  $28 \times 1$ . L'espace instable est vide, étant donné que nous considérons le cas où le système rentre en instabilité.  $\mathbf{J}_{\mathbf{c}}$  correspond à la matrice diagonale comportant les valeurs propres  $\lambda$  du système linéarisé tel que  $Re[\lambda_{\mathbf{J}_{\mathbf{c}}}(\mu_0)] = 0$ .  $\mathbf{G}_2$ ,  $\mathbf{G}_3$  correspondent aux matrices contenant les termes quadratiques et cubiques pour les variables  $\mathbf{v}_{\mathbf{c}}$  et  $\mathbf{v}_{\mathbf{s}}$ .  $\mathbf{G}_2$  est une matrice de dimension  $2 \times 900$ ,  $\mathbf{G}_3$  une matrice de dimension  $2 \times 2700$ . Les expressions analytiques des coefficients  $\mathbf{a}_{\mathbf{k},ijl}$  sont données en Annexe B.

Dans notre cas précis, nous réduisons donc notre système non-linéaire de **30 ddls** pour le système de départ (sous forme d'équations d'état) à **2 ddls** sous la forme de la variété centrale, avec 28 ddls correspondant aux variétés stables s'exprimant en fonction des variétés centrées.

Enfin, le système réduit (5.111) est mis sous forme d'approximants de Padé. Pour plus de détail sur le choix des approximants et la détermination des coefficients associés, le lecteur pourra se référer aux paragraphes 4.3.6, 4.3.7.1 et 4.3.7.2 précédents.

### 5.7.4 Cycles limites

Dans notre cas, le développement de la variété centrale au troisième ordre (le second ordre ne suffisant pas), avec les approximants de Padé à un ordre supérieur ou égal à  $[3/2]_f$  (les ordres  $[M/N]_f$  avec  $M < 3$  et  $N < 2$  ne suffisant pas) permet d'obtenir une bonne approximation des cycles limites, comme l'illustrent les figures 5.49, 5.50, 5.51, 5.52, 5.53, 5.54, 5.55 et 5.56. Nous observons que les amplitudes sont alors tout à fait comparables. Quel que soit le degré de liberté concerné, le niveau d'amplitude obtenu est du même ordre de grandeur que pour un calcul complet sur le système de départ.

D'autre part, un point intéressant à souligner concerne le point d'équilibre du système non-linéaire. En effet, si pour le calcul complet, ce point d'équilibre correspond tout simplement à la position autour de laquelle le système oscille, lors de la mise en place de la méthode de la variété centrale, nous avons préalablement calculé ce dernier par la résolution du système statique non-linéaire défini en équation (5.69), position d'équilibre statique qui intervient dans le calcul des termes linéaires linéaires et non-linéaires au point de fonctionnement, comme le montrent les équations (5.79), (5.80), (5.81), (5.82), (5.94), (5.95), (5.96) et (5.97). Les figures 5.49, 5.50, 5.51, 5.52, 5.53, 5.54, 5.55 et 5.56 permettent de voir que le point d'équilibre établi par résolution des équations statiques non-linéaires est en parfait accord avec le point d'équilibre obtenu lors d'un calcul temporel du système complet et cela quel que soit le degré de liberté considéré.

Étant donné que nous nous intéressons ici à une application industrielle dont l'objectif est de statuer sur la stabilité d'un frein aéronautique vis à vis de la détermination des facteurs influant sur la stabilité et de l'estimation des niveaux vibratoires associés, les résultats obtenus sont suffisants pour mener des études de conception poussées permettant d'avoir des ordres de grandeurs sur les niveaux vibratoires engendrés.

Si maintenant, nous nous intéressons au temps de calcul nécessaire pour obtenir les cycles limites et le nombre de termes non-linéaires pris en compte, nous nous rendons bien compte de l'avantage de l'utilisation de la méthode de la variété centrale et des approximants de Padé. En effet, le système complet de départ comporte plus de 100000 termes non-linéaires. Si nous utilisons la variété centrale (ordre 3) et les approximants de Padé (approximants  $[3/2]$ ), nous ne gardons plus que 28 termes non-linéaires.

L'ensemble des données relatives au temps de calcul et au nombre de termes non-linéaires pris en compte sont regroupées dans le tableau 5.1.

Méthode	Temps de calcul	Nombre de termes non-linéaires
Système complet	$\approx 5$ heures	$\approx 108000$
Variété centrale (ordre 3) + Padé $[3/2]$	$\approx 5$ minutes	28

TAB. 5.1: *Évaluation des temps de calcul et du nombre des termes non-linéaires pris en compte lors de la recherche de cycles limites*

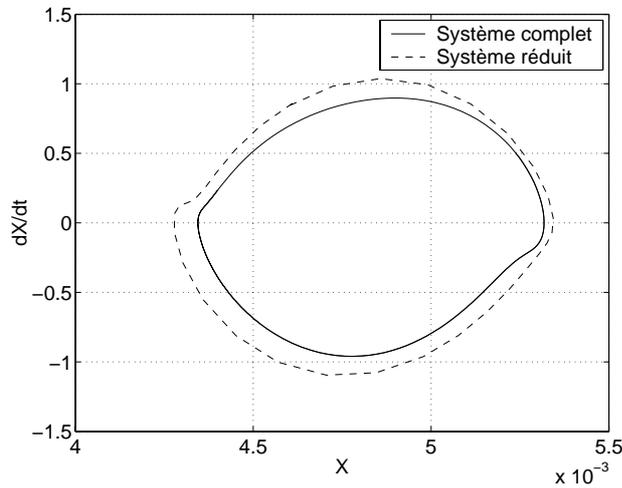
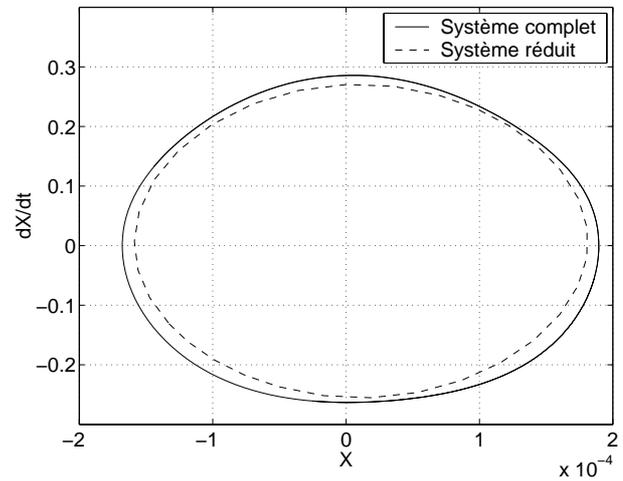
(a) Cycles limites  $(x_s, \dot{x}_s)$  (unités: in, in/s)(b) Cycles limites  $(\theta_s, \dot{\theta}_s)$  (unités: rad, rad/s)

FIG. 5.49: Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ )

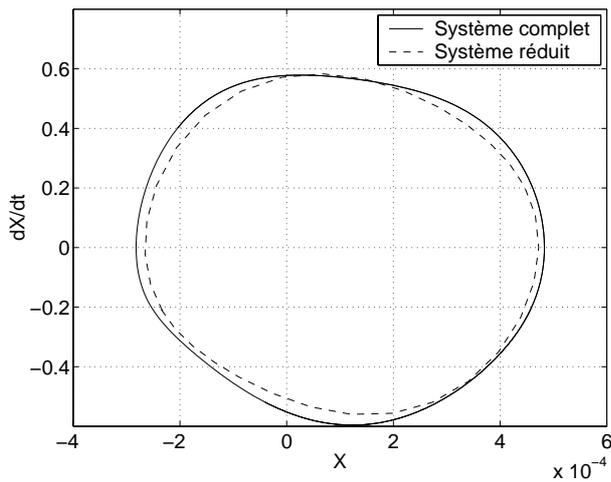
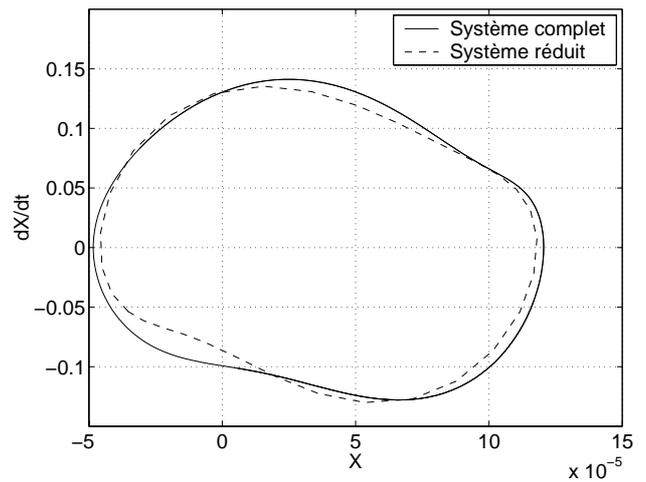
(a) Cycles limites  $(\psi_s, \dot{\psi}_s)$  (unités: rad, rad/s)(b) Cycles limites  $(\phi_s, \dot{\phi}_s)$  (unités: rad, rad/s)

FIG. 5.50: Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ )

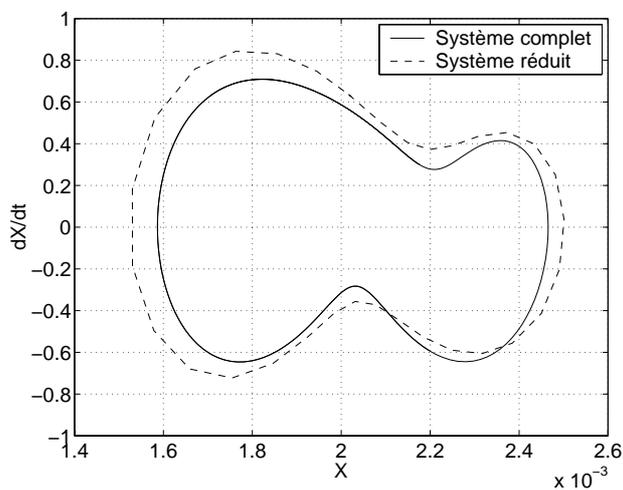
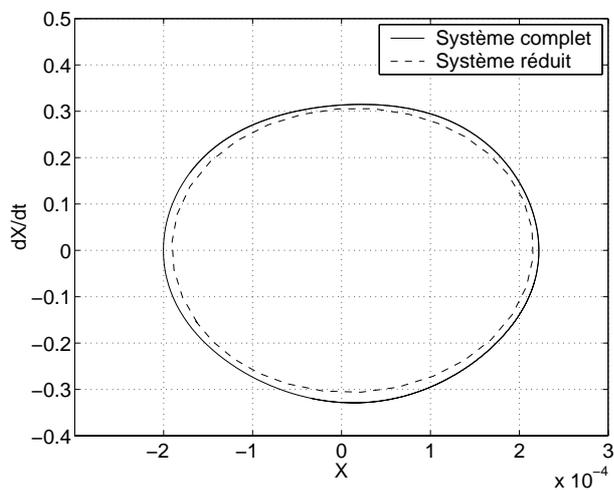
(a) Cycles limites  $(x_r, \dot{x}_r)$  (unités: in, in/s)(b) Cycles limites  $(\theta_r, \dot{\theta}_r)$  (unités: rad, rad/s)

FIG. 5.51: Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ )

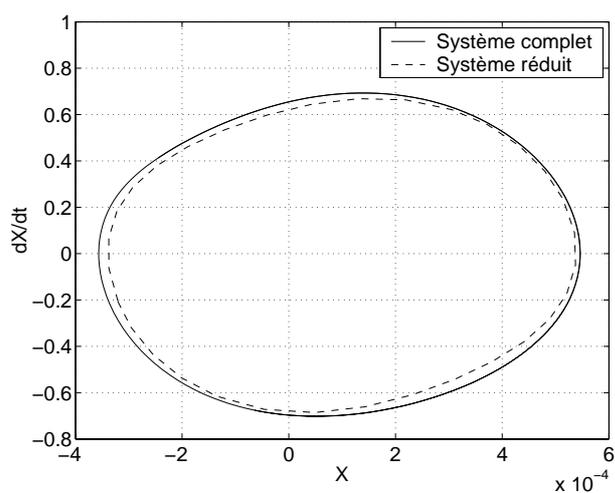
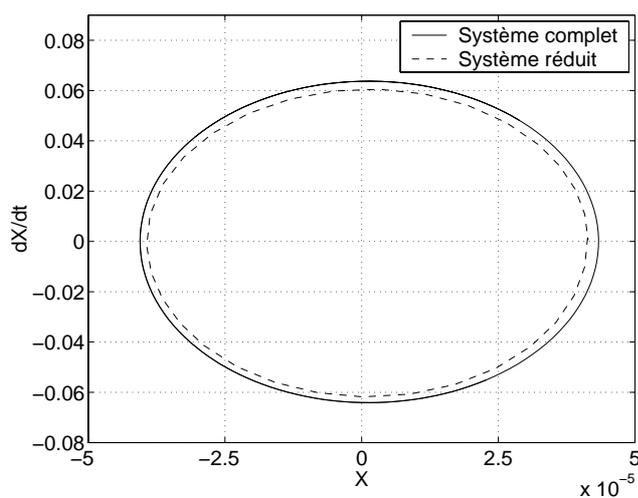
(a) Cycles limites  $(\psi_s, \dot{\psi}_s)$  (unités: rad, rad/s)(b) Cycles limites  $(y_f, \dot{y}_f)$  (unités: in, in/s)

FIG. 5.52: Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ )

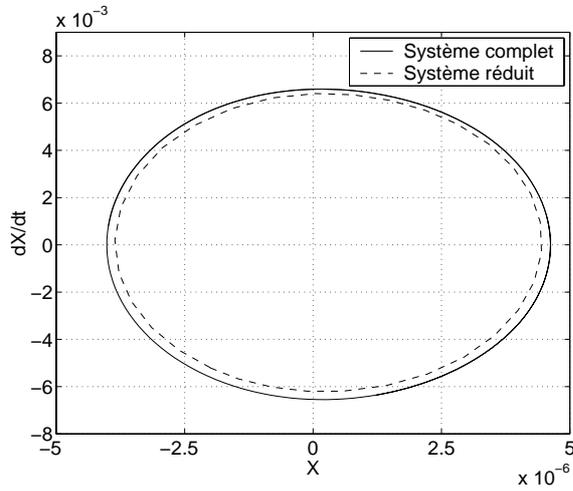
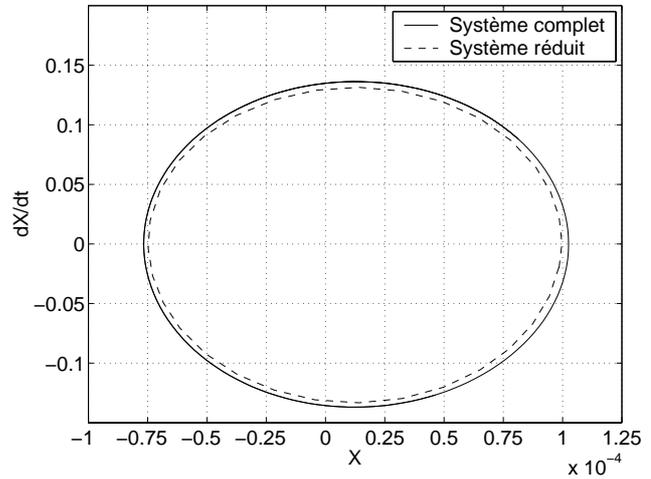
(a) Cycles limites  $(\theta_f, r, \dot{\theta}_f)$  (unités: rad, rad/s)(b) Cycles limites  $(z_f, \dot{z}_f)$  (unités: in, in/s)

FIG. 5.53: Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ )

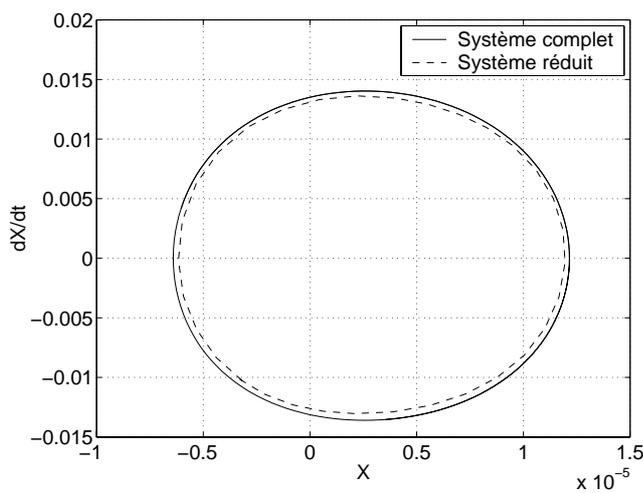
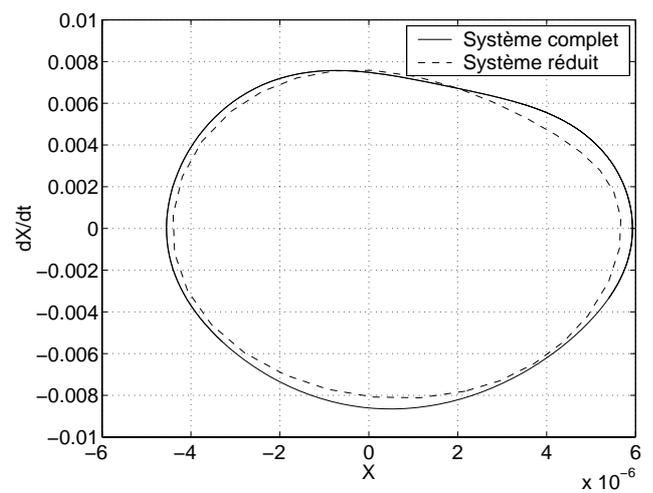
(a) Cycles limites  $(\psi_f, \dot{\psi}_f)$  (unités: rad, rad/s)(b) Cycles limites  $(y_t, \dot{y}_t)$  (unités: in, in/s)

FIG. 5.54: Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ )

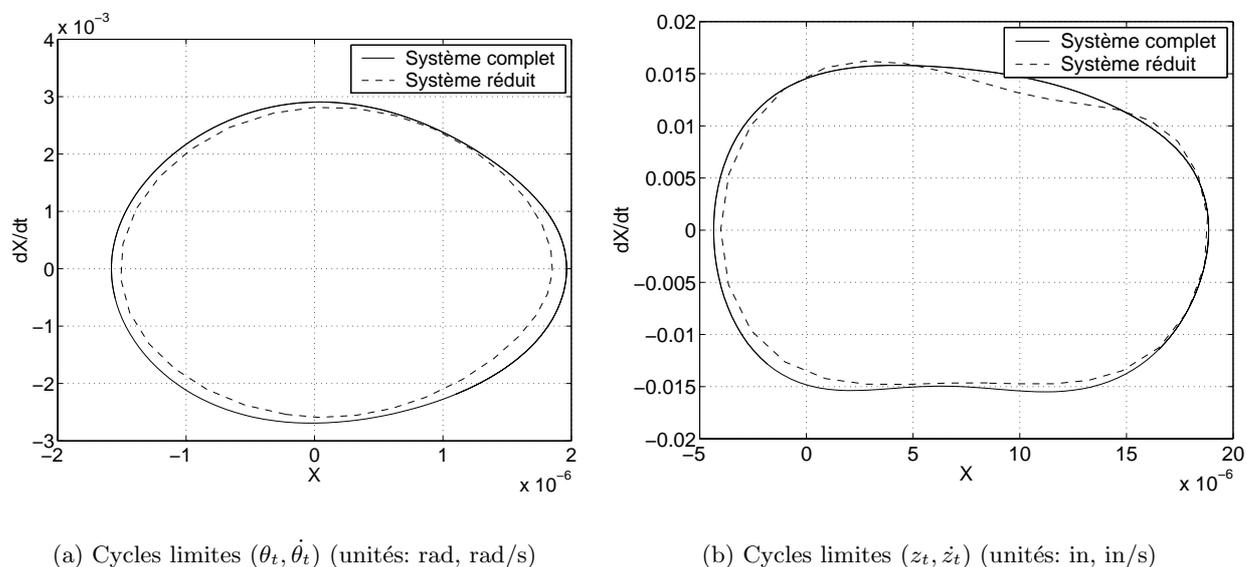


FIG. 5.55: Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ )

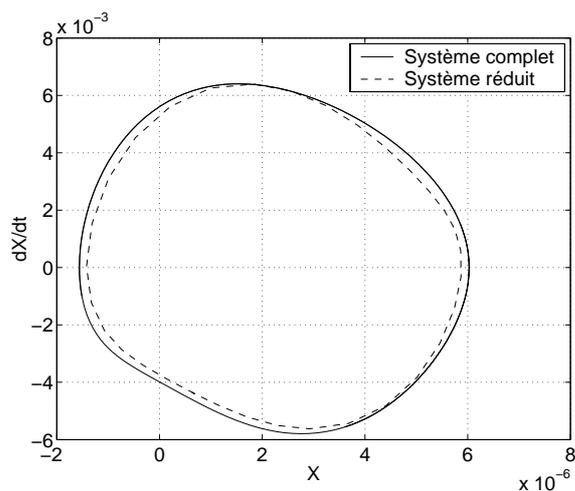


FIG. 5.56: Cycles limites  $(\psi_t, \dot{\psi}_t)$  (unités: rad, rad/s). Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ )

### 5.7.5 Exemple d'une étude paramétrique

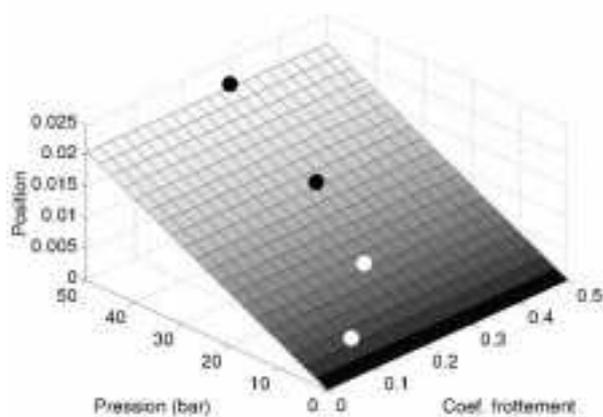
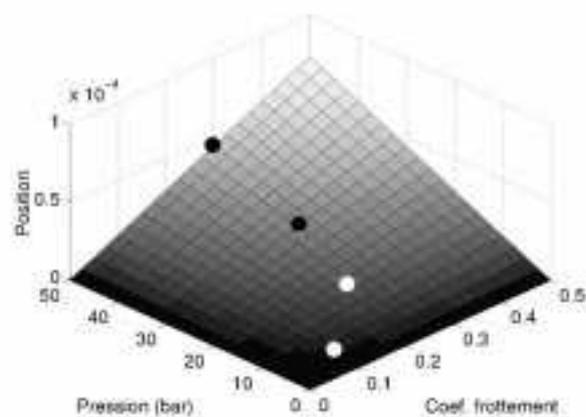
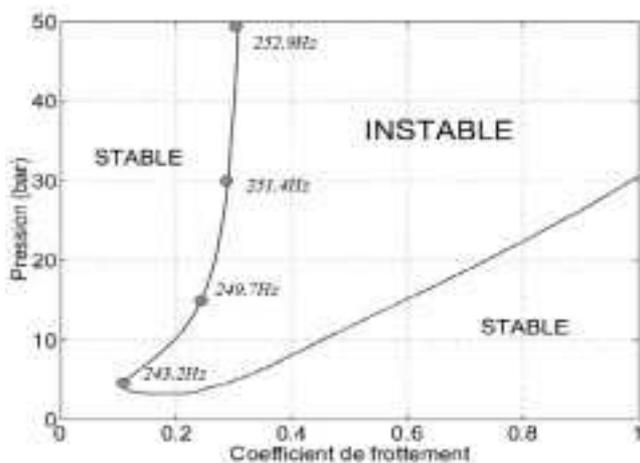
Il est aussi possible d'effectuer des études paramétriques. Dans ce qui va suivre, nous allons juste illustrer cela par une étude paramétrique en fonction de la pression hydraulique imposée. Le point de bifurcation de Hopf pour chaque pression est défini dans le tableau 5.2. Nous notons au passage que, dans le cas de deux points de bifurcation de Hopf, nous choisissons celui qui a le coefficient de frottement le plus bas, par hypothèse. Les points de bifurcations de Hopf sont illustrés en figures 5.58, par rapport au positionnement des zones stables et instables et aux fréquences d'instabilité associées. Les points de bifurcation de Hopf sont aussi représentés en figures 5.57, par rapport à la position d'équilibre statique des degrés de liberté choisis pour illustrer cette étude paramétrique.

En appliquant la méthode de la variété centrale (jusqu'au troisième ordre) et les approximations de Padé (jusqu'à l'ordre  $[3/2]$ ), les cycles limites suivant les différentes pressions hydrauliques considérées, au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ ) sont obtenus. Nous illustrons les évolutions de ces cycles limites pour les degrés de liberté  $x_r$  (correspondant au déplacement axial du rotor) et  $y_f$  (correspondant au déplacement de la fusée suivant l'axe  $Y$ ), comme l'illustrent les figures 5.59 et 5.60. Comme le montre la figure 5.59, la position d'équilibre statique du système non-linéaire est primordiale pour la détermination des cycles limites. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 5.6.1, cette position d'équilibre peut, pour des variations de la pression hydraulique, varier fortement pour certains degrés de liberté (figure 5.59), ou varier très peu pour d'autres degrés de liberté (figure 5.60). Cela montre toute l'importance d'une bonne évaluation de la position d'équilibre statique pour un système non-linéaire.

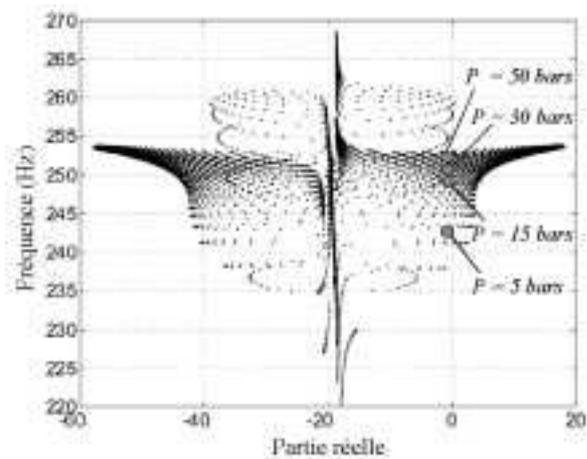
Aussi, les cycles limites observés et l'évolution de ces derniers en fonction de la pression hydraulique sont en parfait accord avec les observations expérimentales effectuées dans les travaux de Ozbek ([132]).

Pression (bar)	Coefficient de frottement	Fréquence (Hz)
5 bars	0.1004	243.2 Hz
15 bars	0.2266	249.7 Hz
30 bars	0.2773	251.4 Hz
50 bars	0.2973	252.9 Hz

TAB. 5.2: Détection du point de bifurcation de Hopf pour diverses pressions hydrauliques

(a) Position d'équilibre statique  $x_r$  (unité: in)(b) Position d'équilibre statique  $y_f$  (unité: in)FIG. 5.57: Visualisation des positions d'équilibre statique pour les degrés de liberté  $x_r$  et  $y_f$ 

(a) Points de bifurcation selon les zones de stabilité



(b) Points de bifurcation dans le plan complexe

FIG. 5.58: Visualisation des points de bifurcation de Hopf choisis pour les différentes pressions considérées

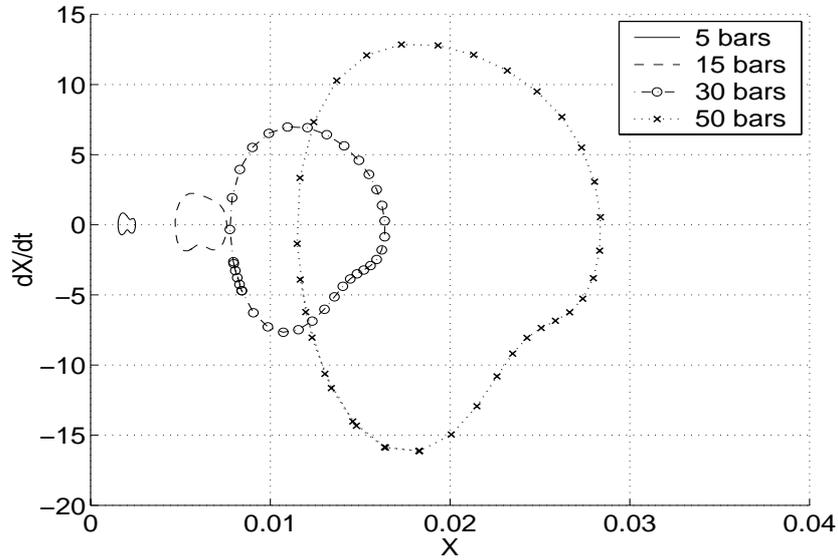


FIG. 5.59: Évolution des cycles limites  $(x_r, \dot{x}_r)$  suivant la pression hydraulique, pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  (avec  $\varepsilon = 0.01$ ) (unités : in, in/s)

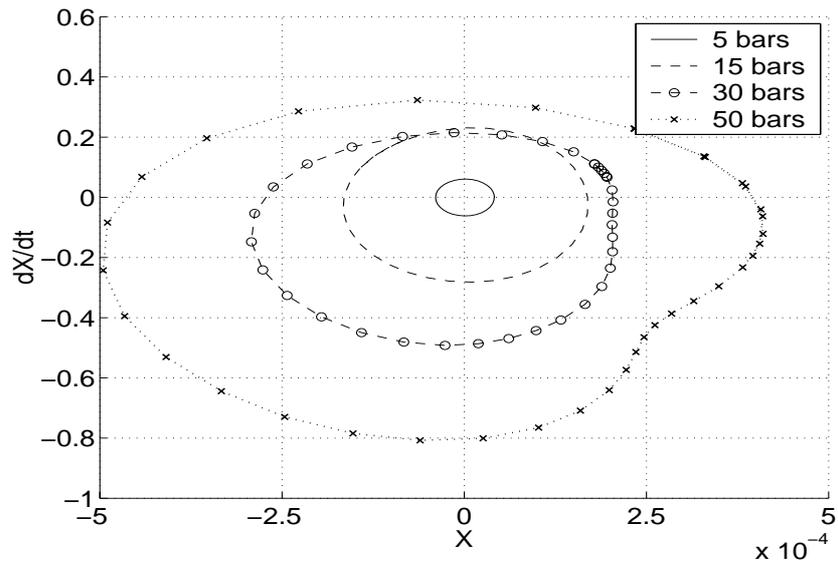


FIG. 5.60: Évolution des cycles limites  $(y_f, \dot{y}_f)$  suivant la pression hydraulique, pour  $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$  (avec  $\varepsilon = 0.01$ ) (unités : in, in/s)

## 5.8 Plate-forme logiciel

Afin de rendre utilisable l'ensemble des outils mis en place pour l'étude de la stabilité du système de freinage, nous avons réalisé une plateforme-logiciel représentée en figure 5.61. Cette dernière sert à faciliter l'étude de stabilité d'un frein dans une phase de conception.

Cet plate-forme permet :

- de rechercher le point de bifurcation de Hopf  $M_0(\mu_0, x_0)$  du système
- d'effectuer une étude de stabilité à partir du système linéarisé au point de bifurcation de Hopf, par rapport au coefficient de frottement. Les divers graphiques associés (évolutions des paramètres frottement/fréquence, frottement/parties réelles, parties réelles/fréquences) sont accessibles.
- d'effectuer diverses études biparamétriques permettant de statuer sur l'évolution des zones d'instabilité en fonction de l'évolution de deux paramètres. De plus, la plage des fréquences obtenues est disponible.
- de rechercher les niveaux vibratoires suivant un jeu de paramètres défini par l'utilisateur. Nous avons choisi d'implanter la méthode de la réduction de la variété centrale pour réduire le système non-linéaire de départ. Les divers cycles limites relatifs aux divers degrés de liberté du système sont disponibles.

Une interface graphique permet de visualiser les courbes associées à chacun des résultats. Cette plate-forme a été réalisée pour permettre de prendre en compte les évolutions d'un frein en permettant un accès total à la base de données.

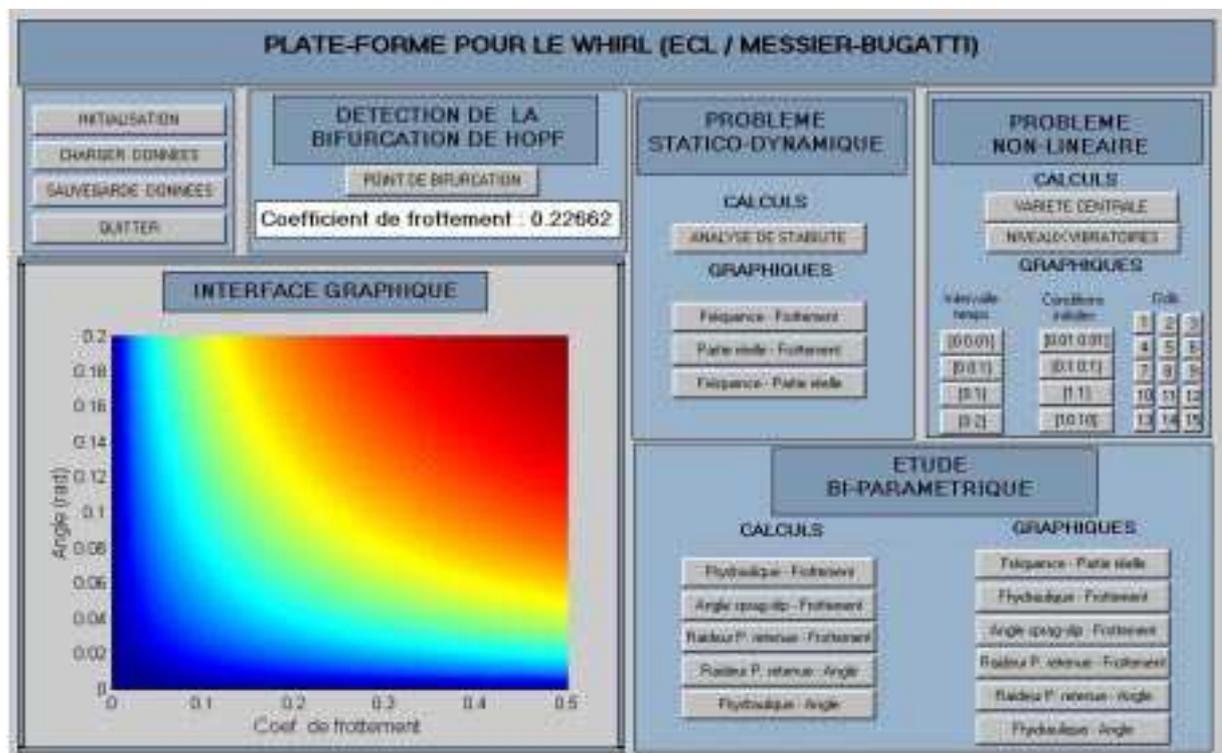


FIG. 5.61: Plateforme-logiciel d'aide à la conception pour le whirl

## 5.9 Conclusion de l'étude de stabilité du whirl

Dans ce chapitre, nous avons modélisé un système de frein aéronautique pour caractériser la vibration de whirl observée lors d'essais vibratoires effectués sur banc. Un modèle phénoménologique comportant quinze degrés de liberté a été réalisé à partir des observations expérimentales et nous avons plus particulièrement pris en compte le comportement non-linéaire de l'ensemble des disques rotors et stators en carbone. Ces non-linéarités de raideurs ont été exprimées par l'intermédiaire de polynômes quadratiques et cubiques à partir d'essais de compression statique sur banc d'essais. Le frottement a été modélisé par la loi de Coulomb. L'instabilité provient alors du couplage de modes engendré par l'intermédiaire de l'angle de sprag-slip.

Nous avons montré que la stabilité du système dépend du coefficient de frottement et que cette dernière peut apparaître en considérant un coefficient de frottement constant. De plus, des études biparamétriques ont montré la complexité d'un tel problème où les zones de stabilité sont sensibles à un nombre varié de paramètres (pression hydraulique appliquée, angle de sprag-slip, masse, raideur, etc...).

Les méthodes non-linéaires de la réduction de la variété centrale et des approximants de Padé ont été utilisées pour la détermination des cycles limites du système non-linéaire défini précédemment, près du point de bifurcation de Hopf.

La méthode de la variété centrale nous permet de passer du système initial comportant trente degrés de liberté sous forme d'équation d'état à un système non-linéaire ne comportant plus que deux variables. Pour cela, les expressions des variétés stables en fonction des variétés centrées au deuxième et troisième ordre ont été définies de manière analytique.

Ensuite, la méthode des approximants de Padé nous a permis d'approximer le système non-linéaire à deux variables obtenu précédemment, par simplification et approximation des termes non-linéaires.

Au final, la recherche des cycles limites a été réalisée sur le système réduit ne comportant plus que deux variables et un nombre limité de termes non-linéaires. Une comparaison avec les cycles limites obtenus sur le système complet nous a permis de valider les résultats obtenus par l'intermédiaire des méthodes non-linéaires mises en place.

Enfin, nous avons montré la possibilité d'effectuer des études paramétriques permettant de déterminer l'évolution des cycles limites suivant l'évolution de paramètres physiques. A cet effet, une plateforme logiciel a été mise en place comme outil d'aide à la conception afin de permettre de déterminer les zones de stabilité suivant les différents facteurs physiques, de définir les points de bifurcation de Hopf associés et d'estimer les cycles limites du système non-linéaire.

# Conclusions et perspectives

L'objectif initial de ce travail de thèse était d'appréhender le problème des structures frottantes et de stabilité associé dans le domaine non-linéaire.

Pour y parvenir, nous nous sommes tout d'abord intéressé au problème de modélisation et de définition de l'origine des instabilités. Nous avons montré que l'aspect dynamique et plus particulièrement le phénomène de sprag-slip décrit par Spurr [161], avec le couplage de modes associé, pouvait être directement à l'origine des phénomènes d'instabilités observés dans les systèmes frottants. Ce phénomène peut alors être dû à la géométrie des pièces d'une structure ou encore à des jeux de fonctionnement propres aux systèmes considérés.

Le coeur des travaux de cette thèse repose sur l'approche non-linéaire des problèmes de stabilité des systèmes. Comme nous l'avons vu, les non-linéarités comportementales des structures sont clairement identifiées (par exemple pour un frein aéronautique, nous sommes en présence d'une non-linéarité de raideur de l'ensemble des disques carbone/carbone). L'objectif de l'étude de stabilité des structures frottantes était double.

Dans un premier temps, nous avons déterminé les zones de stabilité du système non-linéaire autour de sa position d'équilibre statique. Cette approche, bien connue, a été effectuée par l'étude aux valeurs propres du système linéarisé autour du point de fonctionnement.

Dans un second temps, le problème non-linéaire complet avec la recherche des niveaux vibratoires engendrés lors d'une instabilité a été examiné. Nous avons alors proposé la mise en place de méthodes non-linéaires permettant de réduire et simplifier le système de départ tout en conservant le caractère non-linéaire du système. Pour cela, nous avons mis en place la méthode de la variété centrale et proposé l'expression analytique complète des coefficients de la variété centrale jusqu'au troisième ordre, pour un système non-linéaire polynomial comportant un nombre fini de degré de liberté dans le cas d'une bifurcation de Hopf. L'originalité des travaux réside ensuite dans l'utilisation des approximants de Padé à deux variables à la suite de la méthode de la variété centrale. Effectivement, une démarche classique aurait consisté à utiliser la méthode de la forme normale. Dans les cas étudiés, nous avons remarqué que les approximants de Padé, du fait de leur propriété de convergence, permettaient d'accéder de manière rapide et efficace aux cycles limites souhaités. Un des avantages observés consiste dans le fait que l'équation différentielle définie avec les approximants de Padé peut converger vers le cycle limite souhaité alors que la série de puissance croissante associée diverge pour le même nombre de termes non-linéaires. Aussi, la procédure consistant à utiliser la méthode de la variété centrale suivi des approximants de Padé a été validée sur un exemple bidimensionnel frottant et sur une application

industrielle plus complexe comportant quinze degrés de liberté avec des non-linéarités quadratiques et cubiques.

D'autre part, en parallèle de ces méthodes non-linéaires déjà existantes, nous proposons une nouvelle approche non-linéaire pour l'étude des problèmes d'instabilité. Cette méthode consiste à suivre l'évolution de la valeur propre du mode instable de la structure et à considérer les modes non-linéaires associés. Les fonctions non-linéaires sont alors classiquement approximées par une fonction linéaire équivalente obtenue par la méthode de la linéarisation équivalente. La solution obtenue correspond alors à la réponse stationnaire périodique du système non-linéaire. Nous avons testé cette méthode sur le système frottant non-linéaire bidimensionnel. Les résultats obtenus sont prometteurs. Le principal avantage de cette méthode réside dans sa facilité d'utilisation et son implémentation rapide. Cette approche peut s'avérer suffisante pour comprendre les phénomènes vibratoires non-linéaires et permet de rechercher des cycles limites plus éloignés du point de bifurcation de Hopf que par l'intermédiaire de la méthode de la variété centrale.

Pour clore ce mémoire de thèse, l'un des objectifs plus concret était l'application directe de méthodes d'analyse non-linéaire sur un frein aéronautique. Cette tâche s'articulait plus précisément autour de la modélisation d'un frein aéronautique à l'aide d'observations expérimentales. Ensuite, l'ensemble des outils mis en place pour l'étude de la stabilité et des niveaux vibratoires ont été utilisés pour traiter le problème non-linéaire. Les résultats obtenus se sont avérés en accord avec les observations expérimentales et ont débouché sur la réalisation d'une plate-forme servant d'aide à la conception pour déterminer les facteurs physiques qui jouent un rôle sur la stabilité et sur les niveaux vibratoires d'un frein aéronautique.

Les résultats de cette étude peuvent donc ouvrir sur de nouvelles perspectives pour les problèmes non-linéaires frottants.

Le premier point concerne les lois de frottement envisageables et la complexité associée. En effet, les lois de frottement utilisées dans le cadre de cette thèse sont très simples. Cependant, des approches plus complexes, prenant en compte l'influence de divers paramètres sur l'évolution de la loi de frottement (vitesse de glissement, température, surface de contact, etc...) permettraient de mieux appréhender certains problèmes de vibrations induites par le frottement où l'on observe expérimentalement que l'évolution du coefficient de frottement n'est pas négligeable.

En ce qui concerne la modélisation du frein aéronautique, le modèle proposé ne prend pas en compte la dynamique non-linéaire provenant du circuit hydraulique. Une modélisation du circuit hydraulique permettrait d'examiner l'influence des restricteurs du circuit sur la stabilité du système. De plus, pour faciliter les différentes études de conception et examiner l'évolution des cycles limites en fonction de divers paramètres, des méthodes de continuation pourraient être mises en place pour permettre une estimation rapide des cycles limites en procédant par proximité sur des variations monotones des paramètres d'étude.

D'un point de vue méthodologique, l'application de la méthode de la variété centrale et des approximations de Padé, ainsi que la méthode des Modes Complexes Non-Linéaires pourraient être appliquées sur des systèmes comportant des non-linéarités différentes de celles étudiées dans cette thèse. Aussi, l'utilisation de ces méthodes pourrait être élargie à d'autres applications que les systèmes frottants.





## Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ M. and STEGUN I.A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New-York, 1972.
- [2] ABU-ARISH A.M. and NAYFEH A.H. The Response of One-Degree-of-Freedom Systems with Cubic and Quadratic Non-Linearities to a Harmonic Excitation. *Journal of Sound and Vibration*, **103(2)**: p253–272, 1985.
- [3] ANTONIOU S.S., CAMERON A., and GENTLE C.R. The Friction-Speed Relation from Stick-Slip Data. *Wear*, **36**: p235–254, 1976.
- [4] ATADAN A.S. On The Bifurcations of Non-Resonant Solutions in Autonomous Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **118(2)**: p241–251, 1987.
- [5] BAKER G.A. and GRAVES-MORRIS P. *Padé Approximants*. Cambridge university Press, 1996.
- [6] BARAS F., MALEK MANSOUR M., and VAN DEN BROECK C. Asymptotic Properties of Coupled Nonlinear Langevin Equations in the Limit of Weak Noise : Transition to a Limit Cycle. *Journal of Statistical Physics*, **28**: p577–587, 1982.
- [7] BARNEJEE A.K. Influence of Kinetic Friction on the Critical Velocity of Stick-Slip Motion. *Wear*, **12**: p107–116, 1968.
- [8] BENDAT J.S. and PIERSOL A.G. Spectral Analysis of Non-Linear Systems Involving Square-Low Operations. *Journal of Sound and Vibration*, **81**, 1982.
- [9] BHATACHARYYA K. and DUTT J.K. Unbalance Response and Stability Analysis of Horizontal Rotor Systems Mounted on Nonlinear Rolling Element Bearings with Viscoelastic Supports. *Journal of Vibration and Acoustics*, **119**: 539–544, 1997.
- [10] BI Q. and YU P. Computation of Normal Forms of Differential Equations Associated with Non-Semisimple Zero Eigenvalues. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, **12**: p279–319, 1998.
- [11] BLACK R.J. Realistic Evaluation of Airplane Brake Vibration by Laboratory Test and Analysis. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1197–1207, 1995.
- [12] BLACK R.J. Self Excited Multi-Mode Vibrations of Aircraft Brakes with Nonlinear Negative Damping. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1241–1245, 1995.
- [13] BLACK R.J. Self Excited Multi-Mode Vibrations of Aircraft Brakes with Nonlinear Negative Damping. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1241–1245, 1995.
- [14] BLAIR K.B., KROUSGRILL C.M., and FARRIS T.N. Harmonic Balance and Continuation Techniques in the Dynamic Analysis of Duffing's Equation. *Journal of Sound and Vibration*, **103(2)**: p253–272, 1985.

- [15] TAN M. BLASCHKE P. and WANG A. On the Analysis of Brake Squeal Propensity Using Finite Element Method. *SAE 18th Annual Brake Colloquium and Engineering Display*, pages 81–86, 2000.
- [16] BOGOLIUBOV N. and MITROPOLSKI A. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Gordon and Breach, 1961.
- [17] BOIVIN N., SHAW S.W., and PIERRE C. Non-Linear Modal Analysis of Structural Systems Featuring Internal Resonances. *Journal of Sound and Vibration*, **182(2)**, 1995.
- [18] BOUDOT J.P. *Modélisation des Bruits de Freinage des Véhicules Industriels*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 1995. Thèse de Doctorat.
- [19] BOUDOT J.P., CARNEIRO A., and JEZEQUEL L. Analyse des Phénomènes Intervenant dans la Stabilité des Systèmes de Freinage. Influence des Non-Linéarités. *2ème Journées Européennes de Freinage*, pages 213–224, 1995.
- [20] BREZINSKI C. *Padé Type Approximation and General Orthogonal Polynomials*, volume **50**. Birkhauser-Verlag, 1980.
- [21] BREZINSKI C. Extrapolation Algorithms and Padé Approximations: a Historical Survey. *Applied numerical mathematics*, **20**: p299–318, 1983.
- [22] BREZINSKI C. An Introduction to Padé Approximations. in *Curves and Surfaces in Geometric design*, pages 59–65, 1994.
- [23] BRUJNO A.D. Transactions of the Moscow Mathematical Society. *Analytical forms of differential equations*, **25**: p132–198, 1971.
- [24] BRUJNO A.D. Transactions of the Moscow Mathematical Society. *Analytical forms of differential equations*, **25**: p199–299, 1972.
- [25] CAMERON T.M. and GRIFFIN J.H. An Alternating Frequency Time Domain Method for Calculating the Steady State Response of Nonlinear Dynamic. *Journal of Applied Mechanics*, **56**: p149–154, 1989.
- [26] CARR J. *Application of Center Manifold*. Spriner-Verlag, New-York, 1981.
- [27] CAUGHEY T.K. Equivalent Linearization Techniques. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **35**: p1706–1711, 1963.
- [28] CHAMBRETTE P. *Stabilité des Systèmes Dynamiques avec Frottement sec : Application au Crissement des Freins à Disque*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 1991. Thèse de Doctorat.
- [29] CHANG C.F. The Dynamic Finite Element Modeling of Aircraft Landing System. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1217–1226, 1995.
- [30] CHEUNG Y.K., CHEN S.H., and LAU S.L. Application of the Incremental Harmonic Balance Method to Cubic Non-Linearity Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **140(2)**: p273–286, 1990.

- [31] CLERC R.L. and HARTMANN C. Méthodes Constructives Pour l'Etude des Bifurcations de Quelques Systèmes Dynamiques. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, pages 289–327, 1984.
- [32] COCHELIN B., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants for Non-Linear Elastic Structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**: p1187–1213, 1994.
- [33] COYETTE J.P., LECOMTE C., MIGEOT J.L., BLANCHE J., ROCHETTE M., and MIRKOVIC G. Calculation of Vibro-Acoustic Frequency Response Functions Using a Single Frequency Boundary Element Solution and a Padé Expansion. *Journal of the European Acoustics Association*, **85(3)**: p7–12, 1999.
- [34] CROLLA D.A. and LANG A.M. Brake Noise and Vibration - State of Art. *Tribologie-Vehicle Tribology*, **18**: p165–174, 1991.
- [35] DAMIL N., POTIER-FERRY M., NAJAH A., CHARI R., and LAHMAM H. An Iterative Method Based Upon Padé Approximants. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **15**: p701–708, 1999.
- [36] DAY A.J. and NEWCOMB T.P. Combined Thermal and Mechanical Analysis of Drum brakes. *Proc. Instn. Mech. Engrs*, **198**: p287–294, 1984.
- [37] DIMITRIJEVIC G. *Détermination des Bifurcations de Hopf et des Cycles Limites d'une Structure non Linéaire à un Ecoulement Transsonique d'un Fluide Parfait*. Université Pierre et Marie Curie : Student Press, 2000. Thèse de Doctorat.
- [38] DOWELL R.M. Component Mode Analysis of Nonlinear and Nonconservative Systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **47**, 1980.
- [39] D'SOUZA A.F. and DWEIB A.H. Self-Excited Vibrations Induced by Dry Friction. Part ii: Stability and Limit-Cycle Analysis. *Journal of Sound and Vibration*, pages 177–190, 1990.
- [40] DUPONT P.E.. and KASTURI P.S. Experimental Investigation of Friction Dynamics Associated with Normal Load. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1109–1114, 1995.
- [41] DUPONT P.E.. and KASTURI P.S. Friction Induced Vibrations in Aircraft Disk Brake. *ASME Design Engineering Technical Conferences, DETC97/VIB-4017*, **3**: p1–9, 1995.
- [42] EARLES S.W.E. and BADI M.N. Oscillatory Instabilities Generated in a Double-Pin and Disc Undamped System: a Mechanism of Disc-Brake Squeal. *Proc. I. Mech. E. Conf. on Vibration and Noise in Motor Vehicles*, pages 43–50, 1984.
- [43] EARLES S.W.E. and CHAMBERS P.W. Disque Brake Squeal Noise Generation: Predicting its Dependency on System Parameters Including Damping. *Int. J. of Vehicle design*, **8**: p538–552, 1987.
- [44] EARLES S.W.E. and LEE C.K. Instabilities Arising from the Frictional Interaction of a Pin-Disc System Resulting in Noise Generation. *Trans. ASME J. Engng Ind.*, **1**: p81–86, 1976.
- [45] EARLES S.W.E. and SOAR G.B. Squeal Noise in Disc Brakes. *Proc. I. Mech. E. Conf. on Vibration and Noise in Motor Vehicles*, paper C100/71, 1971.

- [46] EARLES S.W.E. and SOAR G.B. A Vibrational Analysis of a Pin-Disc System with Particular Reference to Squeal Noise in Disc Brakes. *Stress Analysis Group Annual Conference*, pages 237–251, 1974.
- [47] EARLES S.W.E. and WILLIAMS E.J. A Linearized Analysis for Frictionally Damped Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **24(4)**: p445–458, 1972.
- [48] ELPHICK C., TIRAPEGUI E., BRACHET M.E., COULLET P., and IOOSS G. *A Simple Global Characterisation for Normal Forms of Singular Vector Fields*. Université de Nice, 1986.
- [49] EMACI E., VAKAKIS A.F., ANDRIANOV I.V., and MIKHLIN Y. Study of Two-Dimensional Axisymmetric Breathers Using Padé Approximants. *Nonlinear Dynamics*, **13**: p327–338, 1997.
- [50] ENRIGHT J.J. Laboratory Simulation of Landing Gear Pitch-Plane Dynamics. *Society of Automotive Engineers, Paper 851937, Aerospace Technology Conference and Exposition, Long Beach, California*, 1985.
- [51] FELD D.J. and FEHR D.J. Complex Eigenvalue Analysis Applied to an Aircraft Brake Vibration Problem. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1135–1142, 1995.
- [52] FIELDHOUSE A.J. and NEWCOMB T.P. An Investigation into Disc Brake Noise Using Holography Interferometry. *3rd International EAEC Conference on Vehicle Dynamics and Powertrain Engineering*, **198**: p568–578, 1991.
- [53] FLINT J. The Effect of Distributed Parameters Examined in a Model for Simulation of Disc Brake Squeal. *SAE 18th Annual Brake Colloquium and Engineering Display*, pages p87–93, 2000.
- [54] FOSSARD A.J. and NORMAND-CYROT D. *Systèmes Non Linéaires : Stabilité - Stabilisation*. Masson, 1993. In french.
- [55] FROMENT O., AUBRY D., and CASTEL L. Analysis of the Stability of Non Linear Railways Dynamics. *Computational Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain*, 1998.
- [56] GAO C., KUHLMANN-WILSDORF D., and MAKEL D.D. The Dynamic Analysis of Stick-Slip Motion. *Wear*, **173**: p1–12, 1994.
- [57] GEKKER F.R. and KHAIRALIEV S.I. On Self-Excited Friction Vibrations in Brakes. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1229–1231, 1995.
- [58] GIBERT C. *Analyse Modale Expérimentale Non-Linéaire*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 2001. Thèse de Doctorat.
- [59] GIRARDOT D. *Stabilité et Bifurcations Dynamiques des Systèmes Discrets Autonomes Régulier et avec Chocs*. Ecole Polytechnique : Student Press, 1997. Thèse de Doctorat.
- [60] GLAZNIEKS D. Transient Dynamic Analysis of Friction Induced Vibration. *ASME Design Engineering Technical Conferences, DETC2001/VIB-21730*, **1**: p1–8, 2001.
- [61] GORDON J.T. and MERCHANT H.C. An Asymptotic Method for Predicting Amplitudes of Nonlinear Wheel Shimmy. *Journal of Aircraft*, **15**: p155–159, 1978.

- [62] GRENOUILLAT R. *Etude des Défauts d'Essuyage: Application à l'Analyse Prédictive*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 2001. Thèse de Doctorat.
- [63] HAMZEH O.N., TWORZYDLO W.W., CHANG H.J., and FRYSKA S.T. Analysis of Friction-Induced Instabilities in a Simplified Aircraft Brake. *Society of Automotive Engineers*, 1999.
- [64] HOLMES P. and GUCKENHEIMER J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1986.
- [65] HSU L. Analysis of Critical and Post-Critical Behaviour of Non-Linear Dynamical Systems by the Normal Form Methode. Part I : Normalisation Formulae. *Journal of Sound and Vibration*, **89**: p169–181, 1983.
- [66] HSU L. Analysis of Critical and Post-Critical Behaviour of Non-Linear Dynamical Systems by the Normal Form Methode. Part II : Divergence and Flutter. *Journal of Sound and Vibration*, **89**: p183–194, 1983.
- [67] HUGUES JONES R. General Rational Approximants in N-variables. *J. Approx. Theory*, **7**: p201–233, 1976.
- [68] HUGUES JONES R. and MAKINSON G.J. The Generation of Chisholm Rational Approximants to Power Series in Two Variables. *J. Inst. Math. Appl. Approx. Theory*, **13**: p299–310, 1974.
- [69] HULTEN J. Brake Squeal - A Self-Exciting Mechanism with Constant Friction. *Society of Automotive Engineers, paper 932965*, 1993.
- [70] IBRAHIM R.A. Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos. Part 1 : Mechanics of Contact and Friction. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **7**: p209–226, 1994.
- [71] IBRAHIM R.A. Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos. Part 2 : Dynamics and Modeling. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **7**: p209–2269, 1994.
- [72] IDEL'CIK I.E. *Mémento des Pertes de Charges*. Eyrolles, 1986. In french.
- [73] LEUNG P.S. ILM A. and DATTA P.K. Experimental Investigations of Disk Brake Friction. *SAE 18th Annual Brake Colloquium and Engineering Display*, pages p173–180, 2000.
- [74] IMBERT J.F. *Analyse des Structures par Elements Finis*. Cepadues, 1991. In french.
- [75] IOSS G. Local Techniques in Bifurcation Theory and Nonlinear Dynamics. *Chaotic motions in nonlinear Dynamical Systems, Springer*, pages 137–193, 1988.
- [76] IOSS G. and ADELMEYER M. *Topics in Bifurcation Theory and Applications*. Advanced series in nonlinear dynamics vol3 - World Scientific Singapore-New-Jersey-London-Hong Kong, 1992.
- [77] IOSS G. and VANDERBAUWHEDE A. *Center Manifold Theory in Infinite Dimensions*. Dynamics reported 1 new series-Springer Verlag, 1992.
- [78] IWAN W.D. Application of an Equivalent Nonlinear System Approach to Dissipative Dynamical Systems. *Journal of Applied Mechanics*, pages p412–416, 1969.
- [79] IWAN W.D. On Defining Equivalent Systems for Certain Ordinary Non-Linear Differential Equations. *International Journal of Non-linear mechanics*, **4**: p325–334, 1969.

- [80] IWAN W.D. A Generalization of the Concept of Equivalent Linearization. *International Journal of Non-linear mechanics*, **8**: p279–287, 1973.
- [81] IWAN W.D. and KROUSGRILL C.M. Equivalent Linearization for Continuous Dynamical Systems. *Journal of Applied Mechanics*, **50**: p415–420, 1983.
- [82] IWAN W.D. and YANG I.M. Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multidegree-of-freedom Systems. *Journal of Applied Mechanics*, **50**: p545–550, 1972.
- [83] JARVIS R.P. and MILLS B. Vibrations Induced by Dry Friction. *Proc. Instn. Mech. Engrs*, paper 32: p847–866, 1993.
- [84] JEAN A.N. and NELSON H.D. Periodic Response Investigation of Large Order Nonlinear Rotordynamic Systems Using Collocation. *Journal of Sound and Vibration*, **143(3)**: p299–308, 1990.
- [85] JEZEQUEL L. and LAMARQUE C.H. Analysis of Non-Linear Dynamical Systems by the Normal Form Theory. *Journal of Sound and Vibration*, **149**: p429–459, 1991.
- [86] JOSEPH D.D. and IOOSS G. *Elementary Bifurcation and Stability Theory*. Berlin: Springer-verlag, 1980.
- [87] KANTAROVICH L.V. and KRYLOV V.L. *Approximate Methods of Higher Analysis*. P.Noordhoff Ltd., groningen, 1958.
- [88] KERN G. and MAITZ A. Normal Form Transformation and an Application to a Flutter-Type of Vibration. *International Journal Non-linear Mechanics*, **33**, 1998.
- [89] KIM Y.B. Multiple Harmonic Balance Method for Aperiodic Vibration of a Piecewise-Linear System. *Journal of Vibration and Acoustics*, **120**: p181–187, 1998.
- [90] KIM Y.B. and NOAH S.T. Stability and Bifurcation Analysis of Oscillators With Piecewise-Linear Characteristics: a General Approach. *Journal of Applied Mechanics*, **58**: p545–553, 1991.
- [91] KNOBLOCH E. and WIESENFELD K.A. Bifurcations in Fluctuating Systems : The Center-Manifold Approach. *Journal of Statistical Physics*, **33**, 1983.
- [92] KNOBLOCK H.W. Construction of Center Manifolds. *ZAMM Z angew. Math. Mech.*, **70**: p215–233, 1990.
- [93] KOBAYASHI M. Sound and Vibration in Brakes. *Japanese Journal of Tribology*, **35**: p561–567, 1990.
- [94] SALIGRAMA V.C. and RIEHLE M.A. KUNG S.W. Modal Participation Analysis for Identifying Brake Squeal Mechanism. *SAE 18th Annual Brake Colloquium and Engineering Display*, pages p75–79, 2000.
- [95] KUSANO M., ISHIDOU H., MATSUMURZ S., and WASHIZU S. Experimental Study on the Reduction of Drum Brake Noise. *Society of Automotive Engineers*, paper 851465, 1985.
- [96] LAMARQUE C.H. *Modélisation et Identification des Systèmes Mécaniques Non Linéaires*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 1992. Thèse de Doctorat.

- [97] LAMNABHI-LAGARRIGUE F. *Analyse des Systèmes Non Linéaires*. Hermes, 1994.
- [98] LANG A.M. and NEWCOMB T.P. An Experimental Investigation into Drum Brake Squeal. *I. Mech.E/EAEC Conf., paper C382/051*, 1989.
- [99] LARSSON H. and FARHANG K. Investigation of Stick-Slip Phenomenon Using a Two-Disk Friction System Vibration Model. *ASME Design Engineering Technical Conferences, DETC97/VIB-4162*: p1–10, 1997.
- [100] LAU S.L. and ZHANG W.S. Non-Linear Vibration of Piecewise-Linear Systems by Incremental Harmonic Balance Method. *Journal of Applied Mechanics*, **59**: p153–160, 1992.
- [101] LEUNG A.Y.T. and CHUI S.K. Non-Linear Vibration of Coupled Duffing Oscillators by an Improved Incremental Harmonic Balance Method. *Journal of Sound and Vibration*, **181(4)**: p619–633, 1995.
- [102] LIU Y.S., OZBEK M.A., and GORDON J.T. A Nonlinear Model for Aircraft Brake Squeal Analysis. Part i : Model Description and Solution Methodology. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p406–416, 1996.
- [103] LI D. LOH W.Y., BASCH R.H. and SANDERS P. Dynamic Modeling of Brake Friction Coefficients. *SAE 18th Annual Brake Colloquium and Engineering Display*, pages p7–16, 2000.
- [104] MARSDEN J.E. and MCCracken M. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. New-York: Springer-verlag, 1976.
- [105] MARTIN R.E. and OBRIEN D.M. Experimental Correlation of Dynamic Finite Element Models. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1285–1292, 1995.
- [106] MEIROVITCH L. *Elements of Vibration Analysis*. Mac Graw Hill International Editions, 1986.
- [107] MEIROVITCH L. *Dynamics and Control of Structures*. John Wiley & Sons, 1990.
- [108] MICKENS R.E. *An Introduction to Nonlinear Oscillations*. Cambridge University Press, Springer-Verlag, 1971.
- [109] MICKENS R.E. Periodic Solutions of the Relativistic Harmonic Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, **212**: pp905–908, 1998.
- [110] MILLER R.K. and FATEMI B. An Efficient Technique for the Approximate Analysis of Vibration Impact. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **105**: 332–336, 1983.
- [111] MILLNER N. An Analysis of Disc Brake Squeal. *SAE*, paper 780332, 1978.
- [112] MILLNER N. and PARSONS B. Effect of Contact Geometry and Elastic Deformations on the Torque Characteristics of a Drum Brake. *Proc. Instn. Mech. Engrs*, **187**: p317–331, 1973.
- [113] MILLS H.R. Brake Squeal. *Institution of Automobile Engineers, Research Report 9000b and Research Report 9162B*, 1938.
- [114] MITTAL A.K. Lower Bound on Forcing Amplitude for Stability of Forced Oscillations in a Third Order Non-Linear System. *Journal of Sound and Vibration*, **67(1)**: p69–74, 1979.

- [115] MOIROT F. *Etude de la Stabilité d'un Equilibre en Présence de Frottement de Coulomb. Application à l'Etude des Freins à Disque*. Ecole Polytechnique : Student Press, 1998. Thèse de Doctorat.
- [116] NEHME A. MOIROT F. and NGUYEN Q.S. Numerical Simulation to Detect Low-Frequency Squeal Propensity. *SAE 18th Annual Brake Colloquium and Engineering Display*, pages 95–98, 2000.
- [117] MOSER D. and ENRIGHT J. Brake System Dynamics. *BFGoodrich Technical Conference*, 1995.
- [118] MURRAY D. Normal Form Investigations of Dissipative Systems. *Mechanics Research Communications*, **21-3**: p231–240, 1994.
- [119] NACK W.C. Brake Squeal Analysis by Finite Elements and Comparisons to Dyno Results. *ASME Design Engineering Technical Conferences, DETC99/VIB-8116*, pages p1–8, 1999.
- [120] NAKAI M. and YOKOI M. Band Brake Squeal. *Journal of Vibration and Acoustics*, paper 118: p190–197, 1996.
- [121] NARAYANAN S. and SEKAR P. A Frequency Domain Based Numeric-Analytical Method for Non-Linear Dynamical Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **211(3)**: p409–424, 1998.
- [122] NATARAJ C. and NELSON H.D. Periodic Solutions in Rotor Dynamic Systems With Nonlinear Supports: A General Approach. *Journal of Vibration and Acoustics*, **111**: p187–193, 1989.
- [123] NAYFEH A.H. and ASFAR K.R. Parametric Excitation of Two Internally Resonant Oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, **119(1)**: p95–109, 1986.
- [124] NAYFEH A.H. and ASFAR K.R. Response of a Bar Constrained by a Non-Linear Spring to a Harmonic Excitation. *Journal of Sound and Vibration*, **105(1)**: p1–15, 1986.
- [125] NAYFEH A.H. and BALACHANDRAN B. *Applied Nonlinear Dynamics : Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, 1995.
- [126] NAYFEH A.H. and MOOK D.T. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 1995.
- [127] NORTH M.R. A Mechanism of Disk Brake Squeal. *14th FISITA Congress*, paper 1/9, 1972.
- [128] OCCHIUTO S.F., JAQUISH D.A., and DULEBA G.S. Vibration Testing at High Loads and Frequencies. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1275–1283, 1995.
- [129] ODEN J.T. and MARTINS J.A.C. Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena. *Computer Methods in Applied mechanics and Engineering*, **52**: p527–634, 1985.
- [130] OSTACHOWICZ W. The Harmonic Balance Method for Determining the Vibration Parameters in Damped Dynamic Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **131(3)**: p465–473, 1989.
- [131] OZBEK M.A. A Perturbation Analysis of Nonlinear Squeal Vibrations in Aircraft Braking Systems. In *ASME Design Engineering Technical Conferences*, volume **3**, 1997.

- [132] OZBEK M.A., Y LIU S., GORDON J.T., NEWMAN D.S., and ATILGAN A.R. Chaotic Vibration in Aircraft Braking Systems. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1233–1240, 1995.
- [133] PETIT J.M. Matériel Roulant Ferroviaire. *4ème Journées Européennes de Freinage*, 2002.
- [134] PIERRE C., FERRI A.A., and DOWELL E.H. Multi-Harmonic Analysis of Dry friction Damped Systems Using an Incremental Harmonic Balance Method. *Journal of Applied Mechanics*, **56**: p958–964, 1985.
- [135] POINCARÉ H. *Oeuvres 1*. Thèse, Paris1928, 1979.
- [136] POINCARÉ H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Librairie A.Blanchard, Paris, 1987.
- [137] QINSHENG B. and YU P. Double Hopf Bifurcation and Chaos of a Nonlinear Vibration System. *Nonlinear Dynamics*, **19**: p313–332, 1999.
- [138] RABINOWICZ. *Friction and Wear of Materials*. Wiley & Sons, 19965.
- [139] RAGHOTHAMA A. and NARAYANAN S. Non-Linear Dynamics of a Two-Dimensional Airfoil by Incremental Harmonic Balance Method. *Journal of Sound and Vibration*, **226(3)**: p493–517, 1999.
- [140] REMINGTON P.J. Wheel Rail/Noise. Part i: Characterization of the Wheel/Rail Dynamic System. *Journal of Sound and Vibration*, **46(3)**: p359–379, 1976.
- [141] REN Y. and BEARDS C.F. A new Receptance-Based Perturbative Multi-Harmonic Balance Method for the Calculation of the Steady State Response of Non-Linear Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **172**: pp593–604, 1994.
- [142] ROCARD Y. *Dynamique Générale des Vibrations*. Masson, 1971. In french.
- [143] ROSENBERG R.M. The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **18**, 1962.
- [144] ROSENBERG R.M. On Non-Linear Vibrations of Systems with Many Degree of Freedom. *Advances in Applied Mechanics*, **9**, 1966.
- [145] ROY R.V. and SPANOS P.D. Padé Type Approach to Nonlinear Random Vibration Analysis. *Engineering probabilistic Mechanics*, pages p119–128, 1991.
- [146] RUDD M.J. Wheel Rail/Noise. Part ii: Wheel Squeal. *Journal of Sound and Vibration*, **46(3)**: p381–394, 1976.
- [147] RUDOWSKI J. Limit Cycles in Self-Excited Multi-Degree-of-Freedom Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **81(1)**: p33–49, 1982.
- [148] SANDERS J.A. and VERHULST F. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1985.
- [149] SCHAEFFER D.G. and GOLUBITSKY M. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1985.

- [150] SEMLER C., GENTLEMAN C., and PAIDOUSSIS P. Numerical Solutions of Second Order Implicit Non-Linear Ordinary Differential Equations. *Journal of Sound and Vibration*, **195**: p553–574, 1996.
- [151] SETIO S. *Comportement des Structures Mécaniques Non-Linéaires Soumises à des Excitations Stationnaires*. Ecole Centrale de Lyon : Student Press, 1991. Thèse de Doctorat.
- [152] SETIO S., SETIO H.D., and JEZEQUEL L. A Method of Non-Linear Modal Identification From Frequency Response Tests. *8th International Modal Analysis Congress, Orlando, Florida*, pages p334–340, 1990.
- [153] SETIO S., SETIO H.D., and JEZEQUEL L. A Method of Non-Linear Modal Identification From Frequency Response Tests. *Journal of Sound and Vibration*, **158(3)**: p497–515, 1992.
- [154] SHAW S.W. and PIERRE C. Non-Linear Normal Modes and Invariant Manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, **150(1)**, 1991.
- [155] SHAW S.W. and PIERRE C. Normal Modes for Non-Linear Vibratory Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **164(1)**, 1993.
- [156] SHAW S.W. and PIERRE C. Normal Modes of Vibration for Non-Linear Continuous Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **150(1)**, 1994.
- [157] SIMPSON T.A. and IBRAHIM R.A. Nonlinear Friction-Induced Vibration in Water-Lubricated Bearings. In *ASME Design Engineering Technical Conferences*, volume **3**, 1995.
- [158] SINCLAIR D. and MANVILLE N.J. Frictional Vibrations. *Journal of Applied Mechanics*, pages 207–213, 1955.
- [159] SPANOS P-T.D. and IWAN W.D. On The Existence and Uniqueness of Solutions Generated by Equivalent Linearization. *International Journal of Non-linear mechanics*, **13**: p71–78, 1978.
- [160] SPANOS P-T.D. and IWAN W.D. Harmonic Analysis of Dynamic Systems With Nonsymmetric Nonlinearities. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **101**: p31–36, 1979.
- [161] SPURR R.T. A Theory of Brake Squeal. *Proc. Auto. Div. Instn. Mech. Engrs*, **1**: p33–40, 1961.
- [162] STAHL H. Spurious Poles in Padé Approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **99**: p511–527, 1998.
- [163] STEWART G.W. and SUN J.G. Computer Science and Scientific Computing. *Matrix Perturbation Theory*, Academic press, 1990.
- [164] SZEMPLINSKA-STUPNICKA W. The modified Single Mode Method in the Investigation of the Resonant Vibration of Non-Linear Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **104(2)**: p475–489, 1979.
- [165] SZEMPLINSKA-STUPNICKA W. Non-Linear Normal Modes and the Generalized Ritz Method in the Problems in Vibrations of Non-Linear Elastic Continuous Systems. *International journal of Non-linear Mechanics*, **18**: p149–165, 1983.

- [166] SZEMPLINSKA-STUPNICKA W. The Behaviour of Nonlinear Vibrating Systems: Advanced Concepts and Application to Single-Degree-of-Freedom Systems. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, page 330, 1990.
- [167] SZEMPLINSKA-STUPNICKA W. The Behaviour of Nonlinear Vibrating Systems: Fundamental Concepts and Methods. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, page 253, 1990.
- [168] TOLSTOI D.M. Significance of the Normal Degree of Freedom and Natural Normal Vibrations in Contact Friction. *Wear*, **10**: p199–213, 1967.
- [169] TRAVIS M.H. Nonlinear Transient Analysis of Aircraft Landing Gear Brake Whirl and Squeal. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1209–1216, 1995.
- [170] VOLA D., RAOUS M., and MARTINS A.C. Friction and Instability of Steady Slipping:Squeal of Rubber/Glass Contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, paper 118: p1699–1720, 1999.
- [171] VON DOENHOFF R.C. and STREIFEL R.J. Carbon Brake Friction Model Parameter Identification Using Genetic Algorithms. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1247–1255, 1995.
- [172] WANG Z. and HU H. Robust Stability Test for Dynamic Systems with Short Delays by Using Padé Approximation. *Nonlinear Dynamics*, **18**: p275–287, 1999.
- [173] WAZWA A.M. Analytical Approximations and Padé Approximants for Volterra’s Population Model. *Applied Mathematics and Computation*, **100**: p13–25, 1999.
- [174] XIE G. and LOU J.Y.K. Alternating Frequency/Coefficient (AFC) Technique in the Trigonometric Collocation Method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **31(4)**: p531–545, 1996.
- [175] YU P. Computation of Normal Forms via a Perturbation Technique. *Journal of Sound and Vibration*, **211**: p19–38, 1998.
- [176] YU P. and YUAN Y. The Simplest Normal Forms Associated with a Triple Zero Eigenvalue of Indices one and two. *Nonlinear Analysis*, **47**: p1105–1116, 2001.
- [177] YUAN. A Study of the Effects of Negative Friction-Speed Slope on Brake Squeal. *ASME Design Engineering Technical Conferences*, **3**: p1153–1162, 1995.
- [178] ZHANG W. and HUSEYIN K. Computation of the Coefficients Associated with the Normal Form of a Resonant Five-Dimensional System. *Mathematical and Computer Modelling*, **30**: p213–228, 1999.

## Publications personnelles

- [179] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. Analysis of Friction and Instability by the Center Manifold Theory for an Non-Linear Sprag-Slip Model. *Journal of Sound and Vibration*, soumise Janvier 2002, acceptée en Juin 2002, référence YJSVI5565 (37 pages), 2002.

- [180] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. Center Manifold Approach and Multivariable Approximants Applied to Non-Linear Stability Analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **soumise en Janvier 2002, acceptée en Mai 2002, référence NLM916 (22 pages)**, 2002.
- [181] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. A New Approach in Non-Linear Stability Analysis: The complex non-linear modal analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*, **soumise en Juillet 2002**, 2002.
- [182] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. Stability and Non-Linear Analysis of a Complex Rotort/Stator Contact System. *Journal of Sound and Vibration*, **soumise en Octobre 2002**, 2002.

## Communications personnelles internationales avec comité de lecture

- [183] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. Application of Multivariable Approximants to Stability of Dynamical Systems with Polynomial Non-Linearities. *EUROMECH Conferences on Nonlinear Oscillations, Moscow, Russia, 9-23 Août 2002*, **1**, 2002.
- [184] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. Stability Analysis and Center Manifold Reduction of a Nonlinear Sprag-Slip Model. *IMAC-XX Conference on Structural Dynamics, Nonlinear Structures, Los Angeles, California, 4-7 Février 2002*, **paper 53**: p1-8, 2002.
- [185] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., JÉZÉQUEL L., and MAZET G.B. Friction, Instability and Parametric Studies of a Nonlinear Model for an Aircraft Brake Whirl Analysis. *ASME Design Engineering technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 18th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Pittsburgh, Pennsylvania, 9-12 Septembre 2001*, DETC2001.VIB-21726: p1-8, 2001.
- [186] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., JÉZÉQUEL L., and MAZET G.B. Stability Analysis and Prediction of Limit Cycles Amplitude by Modelisation of an Aircraft Brake System. *4th European Conference on braking 2002, Lille, France, 13-14 Mars 2002*, **1**: p300-308, 2002.
- [187] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. (invité). Stability of Nonlinear Dynamical Systems Based on the Normal Form Theory. *EUROMECH Conferences on Nonlinear Oscillations, Moscow, Russia, 19-23 Août 2002*, 2002.

## Communications personnelles nationales avec comité de lecture

- [188] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., and JÉZÉQUEL L. Dynamique Non-Linéaire de Systèmes Frottants. *XIIIème Colloque Vibrations Chocs et Bruit, Ecully, France, 12-14 Juin 2002*, **1**: 16 pages, 2002.
- [189] SINOÛ J.-J., THOUVEREZ F., JÉZÉQUEL L., and MAZET G.B. Analyse Non-Linéaire de Structures Complexes. *Proceedings du 5ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, 15-18 Mai 2001*, **1**: p499-506, 2001.

- [190] SINOUE J.-J., THOUVEREZ F., JÉZÉQUEL L., and MAZET G.B. Modélisation et Analyses des Instabilités de Structures Non-Linéaires Complexes. *XVème Congrès Français de Mécanique, Nancy, France, 3-7 Septembre 2001*, **article 92**: p1–7, 2001.

## Autres communications personnelles

- [191] SINOUE J.-J. Synthèse Non-Linéaire de Structures Vibrantes. *Rencontres Régionales de la Recherche, Lyon, France, 26 Septembre 2001*, 2001.
- [192] SINOUE J.-J., JÉZÉQUEL L.(invité), and MAZET G.B. Analyse des Phénomènes Physiques Influent sur la Stabilité des Systèmes de Freinage. *Club CRIN "Tribologie", instabilité de frottement : crissement et broutement, Marseille, France, 29 Mars 2000*, pages 1–3, 2000.

## Rapports d'activités

- [193] SINOUE J.-J. Vibrations des Freins Carbone-Carbone. Modélisation Phénoménologique et Analytique du Whirl. *Tranche 1: DR28588*, 2000.
- [194] SINOUE J.-J. Vibrations des Freins Carbone-Carbone. Modélisation Phénoménologique et Analytique du Whirl. *Tranche 2: DR28768*, 2000.
- [195] SINOUE J.-J. Vibrations des Freins Carbone-Carbone. Modélisation Phénoménologique et Analytique du Whirl. *Tranche 3: DR28809*, 2001.
- [196] SINOUE J.-J. Vibrations des Freins Carbone-Carbone. Modélisation Phénoménologique et Analytique du Whirl. *Tranche 4: DR29034*, 2002.



# Table des figures

1.1	<i>Système masse-ressort</i> . . . . .	7
1.2	Modèle du stick-slip et schématisation des phases collées-glissées . . . . .	9
1.3	Modèle équivalent du stick-slip et schématisation des phases collées-glissées . . . . .	9
1.4	<i>Système masse-ressort avec frottement discontinu</i> . . . . .	10
1.5	<i>Visualisation des trajectoires (coefficient de frottement discontinu)</i> . . . . .	11
1.6	<i>Système masse-ressort avec frottement variant en fonction de la vitesse de glissement</i>	12
1.7	<i>Visualisation des trajectoires (coefficient de frottement fonction de la vitesse de glissement)</i> . . . . .	14
1.8	<i>Schéma du principe de sprag-slip</i> . . . . .	15
1.9	<i>Modélisation masse-ressort reproduisant l'effet de sprag-slip</i> . . . . .	16
1.10	(a) Système pion-disque (b) Modèle analytique associé . . . . .	18
1.11	<i>Système masse-ressort combinant les phénomènes de sprag-slip et stick-slip</i> . . . . .	20
2.1	<i>Schématization des espaces centré, stable et instable</i> . . . . .	25
2.2	<i>Schématization du point stable</i> . . . . .	26
2.3	<i>Schématization du point asymptotiquement stable</i> . . . . .	26
2.4	<i>Schématization des espaces locaux centré, stable et instable</i> . . . . .	29
2.5	Trajectoires stable, instable et semi-stable . . . . .	30
2.6	<i>Section de Poincaré</i> . . . . .	32
2.7	<i>Condition de traversabilité non nulle</i> . . . . .	33
2.8	Bifurcations de Hopf supercritique et subcritique (trait plein=stable, pointillés=instable)	33

3.1	<i>Régions considérées pour les approximants CA à deux variables</i> . . . . .	52
3.2	<i>Régions considérées pour les approximants SOD à deux variables</i> . . . . .	53
3.3	<i>Régions considérées pour les approximants GOD à deux variables</i> . . . . .	53
4.1	<i>Modèle analytique de système de freinage</i> . . . . .	63
4.2	<i>Évolution des fréquences du système en fonction du coefficient de frottement</i> . . . . .	68
4.3	<i>Évolution des parties réelles en fonction du coefficient de frottement</i> . . . . .	68
4.4	<i>Évolution des parties réelles et des fréquences dans le plan complexe</i> . . . . .	69
4.5	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la pression de commande <math>F_{brake}</math> et du coefficient de la raideur non-linéaire <math>k_{12}</math></i> . . . . .	71
4.6	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction de l'angle de sprag-slip et du coefficient de frottement</i> . . . . .	71
4.7	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction du coefficient de frottement et de la masse <math>m_1</math></i> . . . . .	72
4.8	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction du coefficient de frottement et de la raideur linéaire <math>k_{21}</math></i> . . . . .	72
4.9	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction du coefficient de frottement et de la raideur linéaire <math>k_{11}</math></i> . . . . .	72
4.10	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire <math>k_{11}</math> et de l'angle de sprag-slip</i> . . . . .	73
4.11	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire <math>k_{21}</math> et de l'angle de sprag-slip</i> . . . . .	73
4.12	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire <math>k_{11}</math> et de la raideur linéaire <math>k_{21}</math></i> . . . . .	73
4.13	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire <math>k_{11}</math> et de la pression de commande <math>F_{brake}</math></i> . . . . .	74
4.14	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction du coefficient de frottement et de la pression de commande <math>F_{brake}</math></i> . . . . .	74
4.15	<i>Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la raideur linéaire <math>k_{11}</math> et de la masse <math>m_1</math></i>	74
4.16	<i>Oscillations pour <math>\mu = \mu_0 - \varepsilon \cdot \mu_0</math> avec (<math>\varepsilon = 10^{-5}</math>)</i> . . . . .	76
4.17	<i>Oscillations pour <math>\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0</math> avec (<math>\varepsilon = 10^{-5}</math>)</i> . . . . .	76

4.18	Oscillations amorties pour $\mu = \mu_0 - \varepsilon \cdot \mu_0$ avec ( $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-1}$ ) . . . . .	77
4.19	Obtention du point d'équilibre à partir l'évolution des cycles amortis pour $\mu = \mu_0 - \varepsilon \cdot \mu_0$ avec ( $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-1}$ ) . . . . .	77
4.20	Oscillations du déplacement suivant $X$ pour ( $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$ avec $\varepsilon = 0.001$ ) . . . . .	78
4.21	Oscillations de la vitesse suivant $X$ pour ( $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$ avec $\varepsilon = 0.001$ ) . . . . .	78
4.22	<i>Cycle limite</i> ( $X, \dot{X}$ ) pour $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$ ( avec $\varepsilon = 0.001$ ) . . . . .	78
4.23	Oscillations du déplacement suivant $Y$ pour ( $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$ avec $\varepsilon = 0.001$ ) . . . . .	79
4.24	Oscillations de la vitesse suivant $Y$ pour ( $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$ avec $\varepsilon = 0.001$ ) . . . . .	79
4.25	<i>Cycle limite</i> ( $Y, \dot{Y}$ ) pour $\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0$ ( avec $\varepsilon = 0.001$ ) . . . . .	79
4.26	<i>Cycle limite</i> ( $X, \dot{X}$ ) pour $\bar{\mu} = \mu_0/1000$ . . . . .	92
4.27	<i>Cycle limite</i> ( $Y, \dot{Y}$ ) pour $\bar{\mu} = \mu_0/1000$ . . . . .	92
4.28	<i>Région définie par la série</i> $f_k$ . . . . .	97
4.29	<i>Schéma de construction des SOD approximants</i> . . . . .	98
4.30	<i>Schéma de construction des approximants</i> . . . . .	100
4.31	<i>Cycle limite</i> ( $X, \dot{X}$ ) pour $\bar{\mu} = \mu_0/1000$ en utilisant la méthode des multi-approximants	103
4.32	<i>Cycle limite</i> ( $Y, \dot{Y}$ ) pour $\bar{\mu} = \mu_0/1000$ en utilisant la méthode des multi-approximants	103
4.33	<i>Schéma de la procédure Alternate/Frequency Time (AFT) method avec la Discrete Fourier Transform (DFT)</i> . . . . .	109
4.34	Évolution de la partie réelle des coefficients de Fourier pour la variable $v_{c1}$ . . . . .	111
4.35	Évolution de la partie imaginaire des coefficients de Fourier pour la variable $v_{c1}$ . . . . .	111
4.36	Évolution de la partie réelle des coefficients de Fourier pour la variable $v_{c2}$ . . . . .	112
4.37	Évolution de la partie imaginaire des coefficients de Fourier pour la variable $v_{c2}$ . . . . .	112
4.38	<i>Cycle limite</i> ( $X, \dot{X}$ ) pour $\bar{\mu} = \mu_0/1000$ par la méthode AFT . . . . .	113
4.39	<i>Cycle limite</i> ( $Y, \dot{Y}$ ) pour $\bar{\mu} = \mu_0/1000$ par la méthode AFT . . . . .	113
4.40	<i>Apport des approximants de Padé sur la condition initiale: cycle limite</i> ( $X, \dot{X}$ ) . . . . .	115
4.41	<i>Apport des approximants de Padé sur la condition initiale: cycle limite</i> ( $Y, \dot{Y}$ ) . . . . .	115
4.42	Évolution de la partie réelle des coefficients de Fourier pour la variable $v_{c2}$ . . . . .	116

4.43	Évolution de la partie imaginaire des coefficients de Fourier pour la variable $v_{c2}$ . . .	116
4.44	Oscillations du déplacement et de la vitesse suivant $X$ pour $(\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0$ avec $\varepsilon = 0.01)$	117
4.45	Oscillations du déplacement et de la vitesse suivant $Y$ pour $(\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0$ avec $\varepsilon = 0.01)$	118
4.46	Cycles limites $(X, \dot{X})$ et $(Y, \dot{Y})$ pour $\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0$ ( avec $\varepsilon = 0.01)$ . . . . .	118
4.47	Évolution des coefficients de Fourier pour la variable $v_{c1}$ . . . . .	120
4.48	Évolution des coefficients de Fourier pour la variable $v_{c2}$ . . . . .	120
4.49	<i>Comparaison des cycles limites <math>(X, \dot{X})</math> obtenus pour le système complet et par la méthode de la variété centrale + les approximants de Padé + la méthode AFT (pour <math>\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0</math> avec <math>\varepsilon = 0.01)</math></i> . . . . .	121
4.50	<i>Comparaison des cycles limites <math>(Y, \dot{Y})</math> obtenus pour le système complet et par la méthode de la variété centrale + les approximants de Padé + la méthode AFT (pour <math>\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0</math> avec <math>\varepsilon = 0.01)</math></i> . . . . .	121
4.51	Évolution des cycles limites en fonction de l'angle de sprag-slip $\theta$ . . . . .	125
4.52	Évolution des cycles limites en fonction de la force de commande $F_{brake}$ . . . . .	125
4.53	Évolution des cycles limites en fonction de la masse $m_1$ . . . . .	126
4.54	Évolution des cycles limites en fonction de la raideur non linéaire $k_{12}$ . . . . .	126
4.55	<i>Schéma de la méthode de l'approche linéarisée aux valeurs propres</i> . . . . .	131
4.56	Évolution des fonctions définissant le mode non-linéaire . . . . .	132
4.57	<i>Cycle limite <math>(X, \dot{X})</math> par l'approche linéarisée aux valeurs propres pour <math>\mu = 1.001\mu_0</math></i> . .	133
4.58	<i>Cycle limite <math>(Y, \dot{Y})</math> par l'approche linéarisée aux valeurs propres pour <math>\mu = 1.001\mu_0</math></i> . .	133
4.59	Évolution des fonctions définissant le mode non-linéaire pour $\mu = 1.01\mu_0$ . . . . .	134
4.60	Cycles limites par la méthode des modes non-linéaires complexes pour $\mu = 1.01\mu_0$ . .	134
4.61	Évolution de la valeur propre en fonction de l'angle de sprag-slip . . . . .	135
4.62	Évolution des cycles limites en fonction de l'angle de sprag-slip . . . . .	136
5.1	<i>Schéma d'un frein aéronautique</i> . . . . .	141
5.2	<i>Visualisation d'un frein: couronne + puits de chaleur</i> . . . . .	141
5.3	<i>Les principaux modes de vibration pour un frein aéronautique</i> . . . . .	142

---

5.4	Banc d'essai pour l'analyse des vibrations . . . . .	143
5.5	<i>Instrumentation du frein aéronautique</i> . . . . .	144
5.6	<i>Positionnement des accéléromètres sur les différentes parties du frein</i> . . . . .	144
5.7	<i>Mode de squeal à 180 Hz</i> . . . . .	145
5.8	<i>Mode de squeal à 360 Hz</i> . . . . .	146
5.9	<i>Mode de squeal à 720 Hz</i> . . . . .	147
5.10	<i>Mode de whirl à 260 Hz</i> . . . . .	148
5.11	<i>Phénomène de l'onde tournoyante liée au whirl</i> . . . . .	149
5.12	<i>Pics relevés sur la couronne</i> . . . . .	149
5.13	(a) Signal temporel du couple (m.daN) (b) Transformée de Fourier du couple . . . . .	150
5.14	Signal temporel de la charge (da.N) (b) Transformée de Fourier de la charge . . . . .	151
5.15	(a) Signal temporel du déplacement du poste de freinage (cm) (b) Transformée de Fourier du déplacement du poste de freinage . . . . .	151
5.16	(a) Signal temporel de la pression (bar) (b) Transformée de Fourier de la pression (bar)	152
5.17	Signal temporel de la vitesse de roue (tours/min) (b) Transformée de Fourier de la vitesse de roue . . . . .	152
5.18	<i>Phénoménologie du whirl</i> . . . . .	154
5.19	<i>Modélisation de la structure du frein pour le modèle de whirl</i> . . . . .	156
5.20	Schématisme de l'angle $\beta$ entre la barre de reprise de couple et la couronne hydraulique	158
5.21	<i>Visualisation du jeu axial et du jeu radial</i> . . . . .	159
5.22	<i>Jeu axial entre la barre de reprise de couple et la bague</i> . . . . .	159
5.23	<i>Jeu radial entre la barre de reprise de couple et le toc</i> . . . . .	159
5.24	<i>Évaluation de l'angle de sprag-slip à partir du jeu radial</i> . . . . .	160
5.25	<i>Évaluation de l'angle de sprag-slip à partir du jeu axial</i> . . . . .	160
5.26	<i>Position de la couronne hydraulique sans effort et en configuration dynamique moyenne</i>	161
5.27	<i>Distance <math>d_e</math> entre l'axe de la barre de reprise de couple et le plan de la couronne hydraulique</i>	163
5.28	<i>Expérience de compression</i> . . . . .	166

5.29	<i>Détermination des coefficients de la raideur axiale du puits de chaleur</i> . . . . .	167
5.30	Modèle éléments finis du frein . . . . .	168
5.31	Évolution de la position d'équilibre en fonction de la pression hydraulique et du coefficient de frottement . . . . .	176
5.32	Évolution de la position d'équilibre en fonction de la pression hydraulique et de l'angle de sprag-slip . . . . .	176
5.33	Évolution de la position d'équilibre en fonction de l'angle de sprag-slip et du coefficient de frottement . . . . .	176
5.34	Évolution des fréquences d'instabilité et couplage de modes . . . . .	178
5.35	Évolution des parties réelles et couplage de modes . . . . .	178
5.36	<i>Mouvement de la couronne hydraulique et du premier stator</i> . . . . .	179
5.37	Évolution des fréquences d'instabilité en fonction de la distance $d_e$ . . . . .	180
5.38	Évolution des fréquences d'instabilité en fonction du rayon extérieur des disques . . . . .	180
5.39	Évolution des fréquences d'instabilité en fonction de l'angle $\beta$ de sprag-slip . . . . .	181
5.40	Étude de stabilité biparamétrique en fonction de la pression et du coefficient de frottement	183
5.41	<i>Évolution de la partie réelle du mode instable en fonction de la pression et du coefficient de frottement</i> . . . . .	183
5.42	Étude de stabilité biparamétrique en fonction de l'angle de sprag-slip et du coefficient de frottement . . . . .	184
5.43	<i>Évolution de la partie réelle du mode instable en fonction de l'angle de sprag-slip et du coefficient de frottement</i> . . . . .	184
5.44	Étude de stabilité biparamétrique en fonction de l'angle de sprag-slip et de la pression	185
5.45	<i>Évolution de la partie réelle du mode instable en fonction de l'angle de sprag-slip et de la pression</i> . . . . .	185
5.46	Oscillations du déplacement suivant $x_s$ (en inch) du stator pour ( $\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0$ avec $\varepsilon = 0.01$ ) . . . . .	187
5.47	Oscillations de la vitesse suivant $x_s$ (en inch/s) du stator pour ( $\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0$ avec $\varepsilon = 0.01$ ) . . . . .	188
5.48	<i>Cycle limite (<math>x_s, \dot{x}_s</math>) pour <math>\mu = \mu_0 + \varepsilon.\mu_0</math> ( avec <math>\varepsilon = 0.01</math>)</i> . . . . .	188

5.49	Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ ) . . . . .	192
5.50	Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ ) . . . . .	192
5.51	Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ ) . . . . .	193
5.52	Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ ) . . . . .	193
5.53	Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ ) . . . . .	194
5.54	Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ ) . . . . .	194
5.55	Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf ( $\mu = 1.01\mu_0$ ) . . . . .	195
5.56	<i>Cycles limites (<math>\psi_t, \dot{\psi}_t</math>) (unités: rad, rad/s). Comparaison des cycles limites obtenus à partir d'une intégration temporelle (30 ddls) et à partir de la variété centrale (2ddls) au voisinage du point de bifurcation de Hopf (<math>\mu = 1.01\mu_0</math>) . . . . .</i>	195
5.57	Visualisation des positions d'équilibre statique pour les degrés de liberté $x_r$ et $y_f$ . . .	197
5.58	Visualisation des points de bifurcation de Hopf choisis pour les différentes pressions considérées . . . . .	197
5.59	<i>Évolution des cycles limites (<math>x_r, \dot{x}_r</math>) suivant la pression hydraulique, pour <math>\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0</math> (avec <math>\varepsilon = 0.01</math>) (unités: in, in/s) . . . . .</i>	198
5.60	<i>Évolution des cycles limites (<math>y_f, \dot{y}_f</math>) suivant la pression hydraulique, pour <math>\mu = \mu_0 + \varepsilon \cdot \mu_0</math> (avec <math>\varepsilon = 0.01</math>) (unités: in, in/s) . . . . .</i>	198
5.61	<i>Plateforme-logiciel d'aide à la conception pour le whirl . . . . .</i>	199



# Liste des tableaux

4.1	Coefficients de Fourier suivant l'ordre de l'harmonique $H$ . . . . .	110
4.2	Évaluation des temps de calcul lors de la recherche de cycles limites . . . . .	123
4.3	Valeur du coefficient de frottement $\mu_0$ au point de bifurcation de Hopf en fonction de l'évolution de l'angle $\theta$ . . . . .	124
4.4	Valeur du coefficient de frottement $\mu_0$ au point de bifurcation de Hopf en fonction de l'évolution de la force de freinage $F_{brake}$ . . . . .	124
4.5	Valeur du coefficient de frottement $\mu_0$ au point de bifurcation de Hopf en fonction de l'évolution de la masse $m_1$ . . . . .	124
4.6	Valeur du coefficient de frottement $\mu_0$ au point de bifurcation de Hopf en fonction de l'évolution de la raideur non linéaire $k_{12}$ . . . . .	124
4.7	Valeur du coefficient de frottement $\mu = 1.01\mu_0$ en fonction de l'évolution de l'angle $\theta$ .	135
5.1	Évaluation des temps de calcul et du nombre des termes non-linéaires pris en compte lors de la recherche de cycles limites . . . . .	191
5.2	Détection du point de bifurcation de Hopf pour diverses pressions hydrauliques . . . .	196



# Nomenclature

$x$	scalaire
$\mathbf{x}$	vecteur
$\dot{\mathbf{x}}$	vecteur vitesse
$\ddot{\mathbf{x}}$	vecteur accélération
$\mathbf{x}_0$	vecteur de la position d'équilibre statique
$\bar{\mathbf{x}}$	vecteur de faible perturbation
$\mu$	coefficient de frottement
$\mu_0$	coefficient de frottement au point de bifurcation de Hopf
$\hat{\mu}$	perturbation du coefficient de frottement au point de bifurcation de Hopf
$\mathbf{M}$	matrice de masse
$\mathbf{C}$	matrice d'amortissement
$\mathbf{K}$	matrice de raideur
$\mathbf{F}$	vecteur force
$\mathbf{P}_{\text{NL}}$	vecteur des termes linéaires et non-linéaires
$\mathbf{F}_{\text{L}}$	vecteur des termes linéaires
$\mathbf{F}_{\text{NL}}$	vecteur des termes non-linéaires
$F^X$	coordonnée suivant $X$ du vecteur $\mathbf{F}$
$F^Y$	coordonnée suivant $Y$ du vecteur $\mathbf{F}$
$N$	force normale au contact frottant
$T$	force tangentielle au contact frottant
$\mathbf{y}$	vecteur sous forme d'équation d'état
$\mathbf{v}_{\text{c}}$	vecteur des variétés centrées
$\mathbf{v}_{\text{s}}$	vecteur des variétés stables
$\mathbf{h}$	polynôme de la variété centrale
$\mathbf{h}^{(1)}$	polynôme de la variété centrale au deuxième ordre
$\mathbf{h}^{(2)}$	polynôme de la variété centrale au troisième ordre
$\mathbf{h}^{(3)}$	polynôme de la variété centrale au quatrième ordre
$\mathbf{h}^{(4)}$	polynôme de la variété centrale au cinquième ordre
$\mathbf{f}_{(1)}^i$	coefficients des termes linéaires

$\mathbf{f}_{(2)}^{ij}$	coefficients des termes quadratiques
$\mathbf{f}_{(3)}^{ijk}$	coefficients des termes cubiques
$\eta_{(2)}^{ij}$	coefficients des termes quadratiques sous forme d'équation d'état
$\eta_{(3)}^{ijk}$	coefficients des termes cubiques sous forme d'équation d'état
$\mathbf{a}_{ijl}$	vecteur des coefficients de la variété centrale
$a_{k,ijl}$	coefficient de la variété centrale pour la $k^{ieme}$ variété stable
$\mathbf{J}_s$	matrice jacobienne des variétés centrées
$\mathbf{J}_c$	matrice jacobienne des variétés stables
$\mathbf{G}_2$	vecteur-fonction des termes quadratiques pour les variétés centrées
$\mathbf{G}_3$	vecteur-fonction des termes cubiques pour les variétés centrées
$\mathbf{H}_2$	vecteur-fonction des termes quadratiques pour les variétés stables
$\mathbf{H}_3$	vecteur-fonction des termes cubiques pour les variétés stables
$c_{k,ij}$	coefficients des termes linéaires et non-linéaires pour les séries de puissances croissantes
$f_k(\mathbf{v}_c, \mu)$	vecteur-fonction des séries de puissances croissantes
$N_k^{[m/n]}(\mathbf{v}_c)$	numérateur des approximants de Padé
$D_k^{[m/n]}(\mathbf{v}_c)$	dénominateur des approximants de Padé
$d_{k,\alpha\beta}$	termes de la série des puissances croissantes du dénominateur des approximants de Padé
$n_{k,\alpha\beta}$	termes de la série des puissances croissantes du numérateur des approximants de Padé
$Z_{i,j}^k$	$j^{ieme}$ coefficient de Fourier de la $i^{ieme}$ variable au $k^{ieme}$ incrément
$\mathbf{Z}$	vecteur des coefficients de Fourier
$\mathbf{F}^{NL}$	vecteur des termes non-linéaires sous forme de coefficients de Fourier
$\mathbf{R}$	erreur sur l'estimation du vecteur des coefficients de Fourier
$\lambda_0$	valeur propre du mode instable
$\omega_0$	fréquence du mode instable
$\mathbf{Y}_0$	vecteur propre du mode instable
$\mathbf{A}'$	matrice linéaire équivalente
$p$	entier caractérisant l'amplitude du mode instable
$\delta p$	incrément de l'amplitude du mode instable
$p_0$	entier caractérisant l'amplitude du cycle limite du mode instable
$q$	amplitude modale

# Annexe A: Paramètres du modèle frottant bidimensionnel

$F_{brake} = 1N$	force de freinage
$m_1 = 1kg$	masse équivalente pour le premier mode
$m_2 = 1kg$	masse équivalente pour le second mode
$c_1 = 5N/m/sec$	amortissement équivalente pour le premier mode
$c_2 = 5N/m/sec$	amortissement équivalente pour le second mode
$k_{11} = 1.10^5 N/m$	coefficient de raideur linéaire pour $k_1$
$k_{12} = 1.10^6 N/m$	coefficient de raideur quadratique pour $k_1$
$k_{13} = 1.10^6 N/m$	coefficient de raideur cubique pour $k_1$
$k_{21} = 1.10^5 N/m$	coefficient de raideur linéaire pour $k_2$
$k_{22} = 1.10^5 N/m$	coefficient de raideur quadratique pour $k_2$
$k_{23} = 1.10^5 N/m$	coefficient de raideur cubique pour $k_2$
$\theta = 0.2rad.$	angle de sprag-slip
$\mu = 0.3$	coefficient de frottement



## Annexe B: Détermination des coefficients de la variété centrale

Dans cette annexe, nous allons établir les expressions analytiques des coefficients du polynôme  $\mathbf{h}$  permettant de définir les variétés stables en fonction des variétés centrées pour le second et troisième ordres. Pour le quatrième et cinquième ordres, nous donnerons l'expression des équations algébriques vérifiées par les coefficients du polynôme  $\mathbf{h}$ .

Nous nous plaçons dans le cas d'une bifurcation de Hopf simple (2 variétés centrées  $v_{c1}$  et  $v_{c2}$ , auxquelles vient s'ajouter la variable  $\hat{\mu}$  pour former l'espace centré). D'autre part, le système dynamique non-linéaire considéré comporte  $n$  degrés de liberté avec des non-linéarités quadratiques et cubiques.

L'équation différentielle de notre système non-linéaire est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{c}} + \left[ G_{(2)}^{ij} \right] \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \left[ G_{(3)}^{ik} \right] \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{s}} + \left[ H_{(2)}^{ij} \right] \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \left[ H_{(3)}^{ik} \right] \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ \dot{\hat{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (5.112)$$

avec  $\mathbf{v} = \{ \mathbf{v}_{\mathbf{c}}^T \quad \mathbf{v}_{\mathbf{s}}^T \quad \hat{\mu} \}^T$ .  $\mathbf{v}_{\mathbf{c}}$  définit les variétés centrées (au nombre de deux).  $\mathbf{v}_{\mathbf{s}}$  définit les variétés stables (au nombre de  $n_2$ ). Le vecteur  $\mathbf{v}$  est donc de dimension  $n+3$ .  $G_{(2)}^{ij}$ ,  $G_{(3)}^{ik}$ ,  $H_{(2)}^{ij}$  et  $H_{(3)}^{ik}$  définissent les coefficients des termes non-linéaires quadratiques et cubiques (avec  $1 \leq i \leq 2$ ,  $1 \leq j \leq (n+1)^2$  et  $1 \leq k \leq (n+1)^3$ )

### Solution du second ordre

L'expression des variétés stables en fonction des variétés centrées au second ordre est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}) &= \sum_{p=i+j+l=2}^2 \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \\ &= \mathbf{a}_{200} \cdot v_{c1}^2 + \mathbf{a}_{110} \cdot v_{c1} \cdot v_{c2} + \mathbf{a}_{020} \cdot v_{c2}^2 + \mathbf{a}_{101} \cdot v_{c1} \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{011} \cdot v_{c2} \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{002} \cdot \hat{\mu}^2 \end{aligned} \quad (5.113)$$

avec  $\mathbf{a}_{200}$ ,  $\mathbf{a}_{110}$ ,  $\mathbf{a}_{020}$ ,  $\mathbf{a}_{101}$ ,  $\mathbf{a}_{011}$  et  $\mathbf{a}_{002}$  les vecteurs inconnus pour les variétés stables. Nous rappelons que  $\mathbf{a}_{ijl}$ , sont des vecteurs de dimension  $n-2$  comportant chaque coefficient  $a_{k,ijl}$  ( $i+j+l=2$ ,  $i \in \mathbb{N}^+$ ,  $j \in \mathbb{N}^+$  et  $l \in \mathbb{N}^+$ ) relatif à la  $k$ -ième variété stable.

Par la suite, nous notons  $J_{c1}$  et  $J_{c2}$  les deux termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{J}_c$ ,  $J_{sk}$  le  $k$ -ième terme de la matrice diagonale  $\mathbf{J}_s$ , de dimension  $(n-2) \times (n-2)$  et  $A^{i,j}$  le terme de la  $i$ -ième ligne et  $j$ -ième colonne de la matrice  $\mathbf{A}$ .

A partir de l'expression simplifiée de l'équation (4.44) en ne gardant que les termes du second ordre, les coefficients des variétés stables vérifient alors la relation

$$D_{\mathbf{v}_c, \hat{\mu}} \left( \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) \right) \cdot \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{v}_c - \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \mathbf{0} \quad (5.114)$$

Cette dernière expression correspond donc à l'équation exacte que doivent vérifier les coefficients  $\mathbf{a}_{k,ijl}$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ) pour tout  $\mathbf{v}_c = \{v_{c1} \ v_{c2} \ \hat{\mu}\}^T$ .

Les expressions analytiques des coefficients de la  $k$ -ième variété stable au second ordre sont:

$$a_{k,200} = \frac{H_{(2)}^{k,1}}{2J_{c1} - J_{sk}} \quad (5.115)$$

$$a_{k,110} = \frac{H_{(2)}^{k,2} + H_{(2)}^{k,n+2}}{J_{c1} + J_{c2} - J_{sk}} \quad (5.116)$$

$$a_{k,020} = \frac{H_{(2)}^{k,n+3}}{2J_{c2} - J_{sk}} \quad (5.117)$$

$$a_{k,101} = \frac{H_{(2)}^{k,n+1} + H_{(2)}^{k,n(n+1)+1}}{J_{c1} - J_{sk}} \quad (5.118)$$

$$a_{k,011} = \frac{H_{(2)}^{k,2(n+1)} + H_{(2)}^{k,n(n+1)+2}}{J_{c2} - J_{sk}} \quad (5.119)$$

$$a_{k,002} = \frac{-H_{(2)}^{k,(n+1)^2}}{J_{sk}} \quad (5.120)$$

## Solution du troisième ordre

L'expression des variétés stables en fonction des variétés centrées au troisième ordre s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j+l=2}^3 \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \quad (5.121)$$

soit, sous forme développée

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s = \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) &+ \mathbf{a}_{300} \cdot v_{c1}^3 + \mathbf{a}_{210} \cdot v_{c1}^2 \cdot v_{c2} + \mathbf{a}_{120} \cdot v_{c1} \cdot v_{c2}^2 + \mathbf{a}_{030} \cdot v_{c2}^3 \\ &+ \mathbf{a}_{201} \cdot v_{c1}^2 \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{111} \cdot v_{c1} \cdot v_{c2} \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{021} \cdot v_{c2}^2 \cdot \hat{\mu} + \mathbf{a}_{102} \cdot v_{c1} \cdot \hat{\mu}^2 + \mathbf{a}_{012} \cdot v_{c2} \cdot \hat{\mu}^2 + \mathbf{a}_{003} \cdot \hat{\mu}^3 \end{aligned} \quad (5.122)$$

avec  $\mathbf{a}_{300}$ ,  $\mathbf{a}_{210}$ ,  $\mathbf{a}_{120}$ ,  $\mathbf{a}_{030}$ ,  $\mathbf{a}_{201}$ ,  $\mathbf{a}_{111}$ ,  $\mathbf{a}_{021}$ ,  $\mathbf{a}_{102}$ ,  $\mathbf{a}_{012}$  et  $\mathbf{a}_{003}$  les vecteurs coefficients inconnus.

Connaissant déjà l'expression de  $\mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$ , nous avons juste à considérer l'expression simplifiée de l'équation (4.44) en ne gardant que les termes d'ordre 3. Nous obtenons alors l'expression simplifiée de cette équation:

$$D_{\mathbf{v}_c, \hat{\mu}} \left( \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) \right) \cdot \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{v}_c + D_{\mathbf{v}_c, \hat{\mu}} \left( \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) \right) \cdot \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) - \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) - \mathbf{H}_2 \left( [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}, \hat{\mu}] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}), \hat{\mu}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}, \hat{\mu}] \right) - \mathbf{H}_3(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \mathbf{0} \quad (5.123)$$

Les expressions analytiques des coefficients de la  $k$ -ième variété stable au troisième ordre sont:

$$a_{k,300} = \frac{-2a_{k,200}G_{(2)}^{1,1} - a_{k,110}G_{(2)}^{2,1} + H_{(3)}^{k1} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,200} \left( H_{(2)}^{k,2+i} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1} \right)}{3J_{c1} - J_{sk}} \quad (5.124)$$

$$a_{k,210} = \frac{-2a_{k,200} \left( G_{(2)}^{1,2} + G_{(2)}^{1,n+2} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{1,1} + G_{(2)}^{2,2} + G_{(2)}^{2,n+2} \right) - 2a_{k,020}G_{(2)}^{21} + H_{(3)}^{k,2} + H_{(3)}^{k,n+2} + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+1} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,110} \left( H_{(2)}^{k,i+2} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,200} \left( H_{(2)}^{k,n+i+3} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2} \right)}{2J_{c1} + J_{c2} - J_{sk}} \quad (5.125)$$

$$a_{k,120} = \frac{-2a_{k,020} \left( G_{(2)}^{2,2} + G_{(2)}^{2,n+2} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{2,n+3} + G_{(2)}^{1,2} + G_{(2)}^{1,n+2} \right) - 2a_{k,200}G_{(2)}^{1,n+3} + H_{(3)}^{k,n+3} + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+2} + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+n+2} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,020} \left( H_{(2)}^{k,i+2} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,110} \left( H_{(2)}^{k,n+i+3} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2} \right)}{J_{c1} + 2J_{c2} - J_{sk}} \quad (5.126)$$

$$a_{k,030} = \frac{-2a_{k,020}G_{(2)}^{2,n+3} - a_{k,110}G_{(2)}^{1,n+3} + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+n+3} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,020} \left( H_{(2)}^{k,n+i+3} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2} \right)}{3J_{c2} - J_{sk}} \quad (5.127)$$

$$a_{k,201} = \frac{-a_{k,101}G_{(2)}^{1,1} - a_{k,011}G_{(2)}^{2,1} - 2a_{k,200} \left( G_{(2)}^{1,n+1} + G_{(2)}^{1,n(n+1)+1} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{2,n+1} + G_{(2)}^{2,n(n+1)+1} \right) + H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+1} + H_{(3)}^{k,n(n+1)+1} + H_{(3)}^{k,n+1} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,101} \left( H_{(2)}^{k,i+2} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,200} \left( H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)} + H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2} \right)}{2J_{c1} - J_{sk}} \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned}
& -a_{k,101}G_{(2)}^{1,n+3} - a_{k,011}G_{(2)}^{2,n+3} - 2a_{k,020} \left( G_{(2)}^{2,2(n+1)} + G_{(2)}^{2,(n+1)n+2} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{1,2(n+1)} + G_{(2)}^{1,(n+1)n+2} \right) \\
& \quad + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+2(n+1)} + H_{(3)}^{k,2(n+1)^2-n+1} + H_{(3)}^{k,(n+1)^3-2(2n+1)} \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,020} \left( H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)} + H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,011} \left( H_{(2)}^{k,2n-1+i} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2} \right) \\
a_{k,021} = & \frac{\hspace{10em}}{2J_{c2} - J_{sk}} \tag{5.129}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2a_{k,200}G_{(2)}^{1,(n+1)^2} - a_{k,110}G_{(2)}^{2,(n+1)^2} - a_{k,101} \left( G_{(2)}^{1,n+1} + G_{(2)}^{1,(n+1)n+1} \right) \\
& -a_{k,011} \left( G_{(2)}^{2,n+1} + G_{(2)}^{2,(n+1)n+1} \right) + H_{(3)}^{k,(n+1)^2} + H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+n+1} + H_{(3)}^{k,(n+1)^3-n} \\
& + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,101} \left( H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)} + H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,002} \left( H_{(2)}^{k,i+2} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1} \right) \\
a_{k,102} = & \frac{\hspace{10em}}{J_{c1} - J_{sk}} \tag{5.130}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{k,110}G_{(2)}^{1,(n+1)^2} - 2a_{k,020}G_{(2)}^{2,(n+1)^2} - a_{k,101} \left( G_{(2)}^{1,2(n+1)} + G_{(2)}^{1,n(n+1)+2} \right) \\
& -a_{k,011} \left( G_{(2)}^{2,2(n+1)} + G_{(2)}^{2,n(n+1)+2} \right) + H_{(3)}^{k,2(n+1)^2} + H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+2(n+1)} + H_{(3)}^{k,(n+1)^3-n+1} \\
& + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,011} \left( H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)} + H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,002} \left( H_{(2)}^{k,2n-1+i} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2} \right) \\
a_{k,012} = & \frac{\hspace{10em}}{J_{c2} - J_{sk}} \tag{5.131}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{k,101} \left( G_{(2)}^{12} + G_{(2)}^{1,n+2} \right) - a_{k,110} \left( G_{(2)}^{1,n+1} + G_{(2)}^{1,n(n+1)+1} + G_{(2)}^{1,2(n+1)} + G_{(2)}^{1,n(n+1)+2} \right) \\
& -2a_{k,200} \left( G_{(2)}^{1,2(n+1)} + G_{(2)}^{1,n(n+1)+2} \right) - 2a_{k,020} \left( G_{(2)}^{2,n+1} + G_{(2)}^{2,n(n+1)+1} \right) - a_{k,011} \left( G_{(2)}^{22} + G_{(2)}^{2,n+2} \right) \\
& \quad + H_{(3)}^{k,2(n+1)} + H_{(3)}^{k,n(n+1)+2} + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+n+1} + H_{(3)}^{k,2(n+1)^2-n} + H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+n-2} \\
& \quad + H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+n+2} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,110} \left( H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)} + H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2} \right) \\
& \quad + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,011} \left( H_{(2)}^{k,i+2} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,101} \left( H_{(2)}^{k,2n-1+i} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2} \right) \\
a_{k,111} = & \frac{\hspace{10em}}{J_{c1} + J_{c2} - J_{sk}} \tag{5.132}
\end{aligned}$$

$$a_{k,003} = \frac{a_{k,102}G_{(2)}^{1,(n+1)^2} + a_{k,012}G_{(2)}^{2,(n+1)^2} - H_{(3)}^{k,(n+1)^3} - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,002} \left( H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)} + H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2} \right)}{J_{sk}} \quad (5.133)$$

### Solution du quatrième ordre

L'expression des variétés stables en fonction des variétés centrées au quatrième ordre est de la forme :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}^{(3)}(\mathbf{v}_c) = \sum_{p=i+j+l=2}^4 \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \quad (5.134)$$

avec les expressions au deuxième ordre et au troisième ordre connues. Connaissant déjà l'expression des coefficients quadratiques et cubiques, nous pouvons juste considérer l'expression simplifiée de l'équation (4.44) en ne gardant que les termes d'ordre 4. Pour simplifier les écritures de l'équation qui suit, nous écrivons par abus  $\mathbf{v}_c$  à la place de  $(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$ . Nous obtenons alors l'expression simplifiée de l'équation (4.44) sous la forme:

$$\begin{aligned} & D_{\mathbf{v}_c}(\mathbf{h}^{(3)}(\mathbf{v}_c)) \cdot \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{v}_c + D_{\mathbf{v}_c}(\mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)) \cdot \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_c) \\ & + D_{\mathbf{v}_c}(\mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)) \cdot \{ \mathbf{G}_2([\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}]) + \mathbf{G}_3(\mathbf{v}_c) \} - \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h}^{(3)}(\mathbf{v}_c) \\ & - \mathbf{H}_2(\mathbf{v}_c) - \mathbf{H}_2([\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)]) - \mathbf{H}_3(\mathbf{v}_c) \\ & - \mathbf{H}_3([\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] + [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}]) \\ & = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.135)$$

Cette équation exacte des termes d'ordre 4 de l'équation (4.44) est valable pour tout  $\mathbf{v}_c = \{v_{c1} \ v_{c2} \ \hat{\mu}\}^T$ . Ainsi, la détermination des coefficients  $\mathbf{a}_{ijl}$  (avec  $i + j + l = 4$ ) s'effectue par annulation de chacun des termes de puissance de l'expression (5.135). De même que précédemment, plus de termes non-linéaires sont pris en compte que lors de l'approximation au troisième ordre.

### Solution du cinquième ordre

L'expression des variétés stables en fonction des variétés centrées au cinquième ordre est de la forme :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}^{(4)}(\mathbf{v}_c) = \sum_{p=i+j+l=2}^5 \sum_{j=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ijl} \cdot v_{c1}^i \cdot v_{c2}^j \cdot \hat{\mu}^l \quad (5.136)$$

avec les expressions jusqu'au quatrième ordre déjà connues. La détermination des coefficients  $\mathbf{a}_{ijl}$  (avec  $i + j + l = 5$ ) s'effectue à partir de la résolution de l'équation (4.44) en ne gardant que les termes d'ordre 5. En écrivant par abus  $\mathbf{v}_c$  à la place de  $(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$ , nous obtenons alors l'expression simplifiée de

cette équation sous la forme:

$$\begin{aligned}
& D_{\mathbf{v}_c} (\mathbf{h}^{(4)}(\mathbf{v}_c)) \cdot \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{v}_c + D_{\mathbf{v}_c} (\mathbf{h}^{(3)}(\mathbf{v}_c)) \cdot \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_c) \\
& + D_{\mathbf{v}_c} (\mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)) \cdot \{ \mathbf{G}_2 ([\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}]) + \mathbf{G}_3(\mathbf{v}_c) \} \\
& + D_{\mathbf{v}_c} (\mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)) \cdot \{ \mathbf{G}_2 ([\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] - [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \\
& + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)]) + \mathbf{G}_3(\mathbf{v}_c) ([\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \\
& + [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}]) \} - \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{h}^{(4)}(\mathbf{v}_c) - \mathbf{H}_2(\mathbf{v}_c) \\
& - \mathbf{H}_2 ([\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(3)}(\mathbf{v}_c)] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(3)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] \\
& + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] - [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)]) - \mathbf{H}_3 ([\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \\
& + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \\
& + [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] + [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] + [\mathbf{0}, \mathbf{h}^{(1)}(\mathbf{v}_c)] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}] \otimes [\mathbf{v}_c, \mathbf{0}]) \\
& = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{5.137}$$

Cette dernière équation correspond à l'expression exacte de l'équation (4.44) à l'ordre 5 et nous permet donc de déterminer les coefficients associés au cinquième ordre.

## Annexe C: Forme Normale

Le but de cette annexe est de donner un aperçu rapide de l'application de la méthode de la Forme Normale à un système non-linéaire polynomial qui comporte deux variables (système non-linéaire similaire à celui obtenu après application de la variété centrale pour un point de bifurcation de Hopf simple).

Nous considérons donc un système sous la forme:

$$\dot{X} = A.X + F^2(X) + F^3(X) + \dots + F^N(X) + O(|X|^{N+1}) \quad (5.138)$$

où, pour  $X \in \mathbb{R}^n$ , les  $F^k$  représentent des vecteurs des polynômes de degré  $N$  suivant les composants du vecteur  $X$ .

Nous avons  $F^k(X) \in H_n^k$  où  $H_n^k$  définit l'espace des polynômes de degré  $k$  à  $n$  variables.  $O(|X|^{N+1})$  représente les termes d'ordre  $\geq N + 1$ .

Dans notre cas, nous considérons donc une variété centrée composée uniquement de deux variables :  $\dim(X) = 2$ .

De plus, nous étudierons une non linéarité polynomiale composée de termes quadratiques et cubiques. Ainsi, le degré maximal des vecteurs des polynômes du système, après application de la méthode de la variété centrale et écrit en fonction des variétés centrées uniquement, est d'ordre 6.

Le problème peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{X} = A.X + F^2(X) + F^3(X) + F^4(X) + F^5(X) + F^6(X) \quad (5.139)$$

avec

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5.140)$$

et

$$F^k(X) = \begin{Bmatrix} F^{k(1)}(X) \\ F^{k(2)}(X) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=0}^k \alpha_{ij} x_1^i x_2^j \\ \sum_{j=0}^k \beta_{ij} x_1^i x_2^j \end{Bmatrix} \quad (5.141)$$

avec  $k = 2, \dots, 6$  et  $i = k - j$

Nous allons maintenant développer, de manière condensée, les étapes pour se ramener au problème simplifié non linéaire obtenu par la transformation normale. Cette procédure reprend la théorie développée précédemment et consiste donc à effectuer des simplifications des termes non linéaires par des transformations par ordre de puissance croissante.

• Simplification des termes du  $2^{nd}$  ordre :

Nous introduisons donc la transformation suivante :

$$X = X + P^2(X) \quad (5.142)$$

avec  $P^2$ , la transformation du second ordre à déterminer. Cette transformation s'écrit donc sous la forme :

$$P^2 = \begin{Bmatrix} P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=0}^2 \eta_{ij} x_1^i x_2^j \\ \sum_{j=0}^2 \kappa_{ij} x_1^i x_2^j \end{Bmatrix} \quad (5.143)$$

avec  $i = 2 - j$ .

En substituant cette transformation dans l'équation (5.138), nous obtenons :

$$\dot{X} = \sum_{N=0}^6 (-1)^N [DP^2(X)]^N \cdot \left\{ AX + AP^2X + \sum_{n=2}^6 \sum_{m=0}^n \frac{D^m F^n(X)}{m!} [P^2(X)]^m \right\} \quad (5.144)$$

Soit

$$\dot{X} = A.X + F_1^2(X) + F_1^3(X) + F_1^4(X) + F_1^5(X) + F_1^6(X) \quad (5.145)$$

avec

$$F^k(X) = \begin{Bmatrix} F_1^{k(1)}(X) \\ F_1^{k(2)}(X) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=0}^k \alpha_{ij}^1 x_1^i x_2^j \\ \sum_{j=0}^k \beta_{ij}^1 x_1^i x_2^j \end{Bmatrix} \quad (5.146)$$

avec  $k = 2, \dots, 6$  et  $i = k - j$ .

Les définitions des formes de  $D^m F(X)$  sont les suivantes:

- pour  $m = 1$

$$DF(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (5.147)$$

- pour  $m = 2$

$$D^2F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \quad (5.148)$$

- pour  $m > 2$

$$D^m F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^m F_1}{\partial x_1^m} & \frac{\partial^m F_1}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2} & \frac{\partial^m F_1}{\partial x_1^{m-2} \partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^m F_1}{\partial x_2^m} \\ \frac{\partial^m F_2}{\partial x_1^m} & \frac{\partial^m F_2}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2} & \frac{\partial^m F_2}{\partial x_1^{m-2} \partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^m F_2}{\partial x_2^m} \end{bmatrix} \quad (5.149)$$

D'après les résultats sur la forme normale d'un système au point de bifurcation de Hopf, nous avons :

$$F_1^2 = F^2 + A.P^2 + DP^2.A.X = 0 \quad (5.150)$$

Cette dernière relation nous permet d'obtenir l'expression des coefficients  $\eta_{ij}$  et  $\kappa_{ij}$  des termes de la transformation normale définie en (5.144).

Nous obtenons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{20} = \frac{1}{3\omega_0} (-\alpha_{11} - \beta_{20} - 2\beta_{02}) \\ \eta_{11} = \frac{1}{3\omega_0} (2\alpha_{20} - 2\alpha_{02} + \beta_{11}) \\ \eta_{02} = \frac{1}{3\omega_0} (\alpha_{11} - 2\beta_{20} - \beta_{02}) \\ \kappa_{20} = \frac{1}{3\omega_0} (\alpha_{20} + 2\alpha_{02} - \beta_{11}) \\ \kappa_{11} = \frac{1}{3\omega_0} (-\alpha_{11} + 2\beta_{20} - 2\beta_{02}) \\ \kappa_{02} = \frac{1}{3\omega_0} (2\alpha_{20} + \alpha_{02} + \beta_{11}) \end{array} \right. \quad (5.151)$$

Les termes  $F_1^k$  (et les coefficients associés  $\alpha_{ij}^1$  et  $\beta_{ij}^1$ ) définis en (5.146), sont alors calculables et ont la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1^3 = F^3 + DF^2.P^2 - DP^2.F_1^2 \\ F_1^4 = F^4 + \frac{1}{2}D^2F^2.(P^2)^2 + DF^3.P^2 - DP^2.F_1^3 \\ F_1^5 = F^5 + \frac{1}{2}D^2F^3.(P^2)^2 + DF^4.P^2 - DP^2.F_1^4 \\ F_1^6 = F^6 + \frac{1}{6}D^3F^3.(P^2)^3 + \frac{1}{2}D^2F^4.(P^2)^2 + DF^5.P^2 - DP^2.F_1^5 \end{array} \right. \quad (5.152)$$

L'expression finale du système après transformation normale au second ordre s'écrit sous la forme

$$\dot{X} = A.X + F_1^3(X) + F_1^4(X) + F_1^5(X) + F_1^6(X) \quad (5.153)$$

• Simplification des termes du 3<sup>ieme</sup> ordre :

Nous introduisons donc la transformation suivante :

$$X = X + P^3(X) \quad (5.154)$$

avec  $P^3$ , la transformation du troisième ordre à déterminer. Cette transformation s'écrit sous la forme :

$$P^3 = \left\{ \begin{array}{c} P_1^3 \\ P_2^3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=0}^3 \eta_{ij} x_1^i x_2^j \\ \sum_{j=0}^3 \kappa_{ij} x_1^i x_2^j \end{array} \right\} \quad (5.155)$$

avec  $i = 3 - j$ .

En substituant cette transformation dans l'équation (5.147), nous avons :

$$\dot{X} = \sum_{N=0}^6 (-1)^N [DP^3(X)]^N \cdot \left\{ AX + AP^3X + \sum_{n=3}^6 \sum_{m=0}^n \frac{D^m F_1^n(X)}{m!} [P^3(X)]^m \right\} \quad (5.156)$$

Soit

$$\dot{X} = A.X + F_2^3(X) + F_2^4(X) + F_2^5(X) + F_2^6(X) \quad (5.157)$$

avec

$$F_2^k(X) = \left\{ \begin{array}{c} F_2^{k(1)}(X) \\ F_2^{k(2)}(X) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{j=0}^k \alpha_{ij}^2 x_1^i x_2^j \\ \sum_{j=0}^k \beta_{ij}^2 x_1^i x_2^j \end{array} \right\} \quad (5.158)$$

avec  $k = 3, \dots, 6$  et  $i = k - j$ .

En appliquant la forme normale au point de bifurcation de Hopf, nous avons :

$$F_2^3 = F_1^3 + A.P^3 - DP^3.A.X = W^3(X) \quad (5.159)$$

Les expressions des coefficients  $a_1$  et  $b_1$  sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{8\omega_0} (\beta_{21}\omega_0 + 3\alpha_{30}\omega_0 + 3\beta_{03}\omega_0 + \alpha_{12}\omega_0 - \beta_{02}\beta_{11} + 2\alpha_{02}\beta_{02} \\ \quad + \alpha_{11}\alpha_{02} + \alpha_{11}\alpha_{20} + \beta_{20}\beta_{11} - 2\beta_{20}\alpha_{20}) \\ b_1 = \frac{1}{24\omega_0} (3\beta_{12}\omega_0 - 9\alpha_{03}\omega_0 - 3\alpha_{21}\omega_0 + 9\beta_{30}\omega_0 - 4\beta_{02}^2 + 5\beta_{02}\alpha_{11} - 10\beta_{02}\beta_{20} - \alpha_{11}^2 \\ \quad + \alpha_{11}\beta_{20} - 10\beta_{20}^2 - 10\alpha_{02}^2 + \alpha_{02}\beta_{11} - 10\alpha_{02}\alpha_{20} - \beta_{11}^2 + 5\beta_{11}\alpha_{20} - 4\alpha_{20}^2) \end{array} \right. \quad (5.160)$$

Les coefficients  $\eta_{ij}$  et  $\kappa_{ij}$  sont alors déduit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{30} \quad \text{défini constant arbitraire} \\ \eta_{03} \quad \text{défini constant arbitraire} \\ \eta_{21} = \frac{1}{8\omega_0} (8\omega_0\eta_{30} + \beta_{21}^1 - \beta_{03}^1 + 3\alpha_{30}^1 - 3\alpha_{12}^1) \\ \eta_{12} = \frac{1}{8\omega_0} (8\omega_0\eta_{30} - \beta_{30}^1 + \beta_{12}^1 + 3\alpha_{21}^1 - 3\alpha_{03}^1) \\ \kappa_{30} = \frac{1}{4\omega_0} (-4\omega_0\eta_{30} - \beta_{21}^1 - \beta_{03}^1 + \alpha_{30}^1 + \alpha_{12}^1) \\ \kappa_{21} = \frac{1}{8\omega_0} (8\omega_0\eta_{30} + 5\beta_{30}^1 - \beta_{12}^1 + \alpha_{21}^1 + 3\alpha_{03}^1) \\ \kappa_{12} = \frac{1}{8\omega_0} (-8\omega_0\eta_{30} + \beta_{21}^1 - 5\beta_{03}^1 + 3\alpha_{30}^1 + \alpha_{12}^1) \\ \kappa_{03} = \frac{1}{4\omega_0} (4\omega_0\eta_{30} + \beta_{30}^1 - 5\beta_{12}^1 + \alpha_{21}^1 + \alpha_{03}^1) \end{array} \right. \quad (5.161)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2^4 = F_1^4 \\ F_2^5 = F_1^5 + DF_1^3 \cdot P^3 - DP^3 \cdot F_2^3 \\ F_2^6 = F_1^6 + DF_1^4 \cdot P^3 - DP^3 \cdot F_2^4 \end{array} \right. \quad (5.162)$$

- Simplification des termes du 4<sup>ieme</sup> ordre:

Nous introduisons donc la transformation suivante :

$$X = X + P^4(X) \quad (5.163)$$

avec  $P^4$ , la transformation du 4<sup>nd</sup> ordre à déterminer. Cette transformation s'écrit sous la forme :

$$P^4 = \left\{ \begin{array}{l} P_1^4 \\ P_2^4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^4 \eta_{ij} x_1^i x_2^j \\ \sum_{j=0}^4 \kappa_{ij} x_1^i x_2^j \end{array} \right\} \quad (5.164)$$

avec  $i = 4 - j$  En substituant cette transformation dans l'équation (5.156), nous avons :

$$\dot{X} = \sum_{N=0}^6 (-1)^N [DP^4(X)]^N \cdot \left\{ AX + AP^4X + \sum_{n=3}^6 \sum_{m=0}^n \frac{D^m F_1^n(X)}{m!} [P^4(X)]^m \right\} \quad (5.165)$$

Soit

$$\dot{X} = A.X + F_2^3(X) + F_3^4(X) + F_3^5(X) + F_3^6(X) \quad (5.166)$$

avec

$$F_3^k(X) = \left\{ \begin{array}{l} F_3^{k(1)}(X) \\ F_3^{k(2)}(X) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^k \alpha_{ij}^3 x_1^i x_2^j \\ \sum_{j=0}^k \beta_{ij}^3 x_1^i x_2^j \end{array} \right\} \quad (5.167)$$

avec  $k = 4, \dots, 6$  et  $i = k - j$ .

En appliquant la forme normale au point de bifurcation de Hopf, nous avons :

$$F_3^4 = F_2^4 + A.P^4 - DP^4.A.X = 0 \quad (5.168)$$

Cette dernière relation permet d'obtenir l'expression des coefficients  $\eta_{ij}$  et  $\kappa_{ij}$  des termes de la transformation normale définie en (5.163). Nous obtenons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{40} = \frac{1}{15\omega_0} (-3\beta_{31}^2 - 2\beta_{13}^2 + 3\alpha_{40}^2 + 8\alpha_{04}^2) \\ \eta_{31} = \frac{1}{15\omega_0} (12\beta_{40}^2 - 2\beta_{22}^2 - 8\beta_{04}^2 - 3\alpha_{31}^2 - 2\alpha_{13}^2) \\ \eta_{22} = \frac{1}{5\omega_0} (\beta_{31}^2 - \beta_{13}^2 + 4\alpha_{40}^2 + \alpha_{22}^2 + 4\alpha_{04}^2) \\ \eta_{13} = \frac{1}{15\omega_0} (8\beta_{40}^2 + 2\beta_{22}^2 - 12\beta_{04}^2 - 2\alpha_{31}^2 - 3\alpha_{13}^2) \\ \eta_{04} = \frac{1}{15\omega_0} (2\beta_{31}^2 + 3\beta_{13}^2 + 8\alpha_{40}^2 + 2\alpha_{22}^2 + 3\alpha_{04}^2) \\ \kappa_{40} = \frac{1}{15\omega_0} (-3\beta_{40}^2 - 2\beta_{22}^2 - 8\beta_{04}^2 - 3\alpha_{31}^2 - 2\alpha_{13}^2) \\ \kappa_{31} = \frac{1}{15\omega_0} (3\beta_{40}^2 + 2\beta_{13}^2 + 12\alpha_{40}^2 - 2\alpha_{22}^2 - 8\alpha_{04}^2) \\ \kappa_{22} = \frac{1}{5\omega_0} (-4\beta_{40}^2 - \beta_{22}^2 - 4\beta_{04}^2 + \alpha_{31}^2 - \alpha_{13}^2) \\ \kappa_{13} = \frac{1}{15\omega_0} (2\beta_{31}^2 + 3\beta_{13}^2 + 8\alpha_{40}^2 + 2\alpha_{22}^2 - 12\alpha_{04}^2) \\ \kappa_{04} = \frac{1}{15\omega_0} (-8\beta_{40}^2 - 2\beta_{22}^2 - 3\beta_{04}^2 + 2\alpha_{31}^2 + 3\alpha_{13}^2) \end{array} \right. \quad (5.169)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_3^5 = F_2^5 \\ F_3^6 = F_2^6 + DF_2^3.P^4 - DP^4.F_2^3 \end{array} \right. \quad (5.170)$$

L'équation dynamique non-linéaire devient alors

$$\dot{X} = A.X + F_2^3(X) + F_4^5(X) + F_4^6(X) \quad (5.171)$$

Ainsi, en continuant les transformations non-linéaires aux ordres supérieurs, nous obtenons au final le système non-linéaire qui ne comportera plus que les termes de puissances impaires.

# Annexe D: Termes caractéristiques du Whirl

$\mu$	coefficient de frottement
$R_e$	distance de la barre de reprise de couple à l'axe de la couronne hydraulique
$d_e$	distance de la barre de reprise de couple au toc de la couronne hydraulique
$K_{barre}$	raideur de la barre de reprise de couple
$K_{rr}$	raideur de la plaque de retenue avec le dernier stator encastré
$K_{ytf}$	raideur radiale de la liaison tube/fusée dans la direction Y
$K_{ztf}$	raideur radiale de la liaison tube/fusée dans la direction Z
$K_{fwk}$	raideur de la liaison entre la fusée et les rotors
$K_{twk}$	raideur de la liaison entre le tube de torsion et les stators
$K_{fij}$	terme (i,j) de la matrice de raideur caractérisant la fusée
$K_{tij}$	terme (i,j) de la matrice de raideur caractérisant le tube de torsion
$K_{\theta s}$	raideur de flexion de l'ensemble couronne hydraulique/stator selon $\theta$
$K_{\psi s}$	raideur de flexion de l'ensemble couronne hydraulique/stator selon $\psi$
$K_{\theta tf}$	raideur de flexion de la liaison tube/fusée selon $\theta$
$K_{\psi tf}$	raideur de flexion de la liaison tube/fusée selon $\psi$
$C_{xs}$	terme d'amortissement axial de l'ensemble des disques stators
$C_{rr}$	terme d'amortissement de la plaque de retenue avec le dernier stator encastré
$C_{ytf}$	terme d'amortissement radiale de la liaison tube/fusée dans la direction Y
$C_{ztf}$	terme d'amortissement radiale de la liaison tube/fusée dans la direction Z
$C_{fwk}$	terme d'amortissement de la liaison entre la fusée et les rotors
$C_{twk}$	terme d'amortissement de la liaison entre le tube de torsion et les stators
$C_{fij}$	terme d'amortissement (i,j) caractérisant la fusée
$C_{tij}$	terme d'amortissement (i,j) caractérisant le tube de torsion
$C_{\theta s}$	terme d'amortissement de flexion de l'ensemble couronne hydraulique/stator selon $\theta$
$C_{\psi s}$	terme d'amortissement de flexion de l'ensemble couronne hydraulique/stator selon $\psi$
$C_{\phi s}$	terme d'amortissement de flexion de l'ensemble couronne hydraulique/stator selon $\phi$

---

$C_{\theta tf}$	terme d'amortissement de la liaison tube/fusée suivant la rotation autour de Y
$C_{\phi tf}$	terme d'amortissement radiale de la liaison tube/fusée suivant la rotation autour de Z
$F_{hyd/X}$	force hydraulique suivant X
$M_{hyd/Y}$	moment hydraulique suivant Y
$M_{hyd/Z}$	moment hydraulique suivant Z
$F_X$	force de frottement suivant X
$M_Y$	moment de frottement suivant Y
$M_Z$	moment de frottement suivant Z
$F_{barre/Y}$	force de la barre de reprise de couple suivant Y
$F_{barre/Z}$	force de la barre de reprise de couple suivant Z
$\alpha$	angle dû à la force de freinage
$\beta$	angle dû au jeu entre la barre de couple et la couronne hydraulique (sprag-slip)
$m_s$	masse des stators
$m_r$	masse des rotors
$I_{\theta s}$	inertie des stators suivant $\theta$
$I_{\psi s}$	inertie des stators suivant $\psi$
$I_{\phi s}$	inertie des stators suivant $\phi$
$I_{\theta r}$	inertie des rotors suivant $\theta$
$I_{\psi r}$	inertie des rotors suivant $\psi$
$m_f$	masse de la fusée
$m_t$	masse du tube de torsion
$I_f$	inertie de la fusée
$I_t$	inertie du tube de torsion