



HAL
open science

Dynamique non-linéaire des structures complexes, fixes et tournantes. Approches théoriques, numériques et expérimentales.

Jean-Jacques Sinou

► **To cite this version:**

Jean-Jacques Sinou. Dynamique non-linéaire des structures complexes, fixes et tournantes. Approches théoriques, numériques et expérimentales.. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Lyon; Université Claude Bernard - Lyon I, 2007. tel-00260913

HAL Id: tel-00260913

<https://theses.hal.science/tel-00260913>

Submitted on 5 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 2007

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

de L'École Centrale de Lyon et de L'Université Claude-Bernard Lyon 1

PRÉSENTÉE À

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

PAR

Jean-Jacques SINOÛ

**DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE DES STRUCTURES COMPLEXES, FIXES ET
TOURNANTES**

APPROCHES THÉORIQUES, NUMÉRIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Présentée et soutenue publiquement le 21 Novembre 2007, devant le jury d'examen :

D. AUBRY, Professeur, Laboratoire MSSMAT, École Centrale Paris	Rapporteur et président de jury
B. COCHELIN, Professeur, Laboratoire LMA, École Centrale Marseille	Rapporteur
J-N. GENGE, Professeur, Laboratoire LMFA, Université Claude Bernard Lyon 1	Examineur
J-C. GOLINVAL, Professeur, Laboratoire LTAS, Université de Liège	Rapporteur
L. JÉZÉQUEL, Professeur, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon	Examineur
F. THOUVEREZ, Professeur, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon	Examineur

Table des matières

1	Introduction	7
I	Stabilité et dynamique non-linéaire des systèmes frottants <i>Applications à des structures industrielles</i>	11
2	Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables	13
2.1	Stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires frottants	13
2.2	Extension de la méthode de la variété centrale par approximants multi-variables . . .	16
2.2.1	Méthode de la variété centrale	16
2.2.2	Extension par approximants multi-variables	18
2.2.3	Application industrielle	22
2.3	Méthode des modes non-linéaires complexes	25
2.3.1	Methodologie	25
2.3.2	Application industrielle	27
2.4	Méthode de la balance harmonique sous contraintes	29
2.4.1	Methodologie	29
2.4.2	Application industrielle	31
2.5	Conclusion	33
3	Vers une compréhension accrue de la stabilité des systèmes frottants	35
3.1	Systèmes phénoménologiques à deux degrés de liberté	36
3.1.1	Préambule sur la stabilité des systèmes frottants à deux degrés de liberté . . .	36
3.1.2	Effet et paradoxe de l'amortissement sur des systèmes sans effet gyroscopique .	37
3.1.3	Effets combinés des termes gyroscopiques, circulatoires et de l'amortissement .	42
3.1.4	Conclusions sur la prise en compte de l'amortissement	45
3.2	Application industrielle	46
3.2.1	Etude du paradoxe de l'amortissement	46
3.2.2	Définition de l'indicateur d'amortissement robuste	51
3.3	Extension de l'effet de l'amortissement sur les cycles limites	52

3.4	Définition d'un nouveau critère basé sur le temps d'établissement du cycle limite . . .	54
3.5	Conclusion	56

II Dynamique des systèmes tournants

<i>Prise en compte des effets non-linéaires</i>	57
---	-----------

4 Dynamique des rotors comportant un roulement non-linéaire 59

4.1	Méthode de la balance harmonique avec condensation	60
4.1.1	Méthode de la balance harmonique	60
4.1.2	Procédure de continuation	61
4.1.3	Procédure de substitution	61
4.1.4	Analyse de stabilité de la réponse non-linéaire stationnaire	64
4.2	Modélisation du rotor comportant un roulement non-linéaire	65
4.2.1	Description du rotor	66
4.2.2	Modèle de roulement non-linéaire	67
4.2.3	Modèle du rotor complet avec le roulement non-linéaire	69
4.3	Etudes numériques	70
4.3.1	Réponse dynamique non-linéaire et évolution des ordres $n \times$	71
4.3.2	Evolution des orbites du rotor complet	72
4.3.3	Evolution des contacts sur le roulement non-linéaire	74
4.3.4	Stabilité des réponses non-linéaires stationnaires	76
4.4	Conclusion	76

5 Dynamique non-linéaire des rotors fissurés 79

5.1	Modèle de rotor fissuré	80
5.1.1	Modélisation du rotor sain	80
5.1.2	Modélisation d'une fissure transverse	80
5.1.3	Mécanisme d'une fissure tournante	83
5.1.4	Equation dynamique d'un rotor comportant une fissure transverse	83
5.2	Réponse dynamique non-linéaire du rotor fissuré	84
5.2.1	Approximation de la solution sous la forme de série de Fourier tronquée	84
5.2.2	Partition sur l'élément fissuré	85
5.2.3	Stabilité de la réponse non-linéaire du rotor fissuré	87
5.3	Détection des fissures à partir de la réponse non-linéaire	87
5.3.1	Résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ et ordres $n \times$ associés	88
5.3.2	Vitesses critiques, résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ et des amplitudes $1 \times$ et $2 \times$	90
5.3.3	Evolution des orbites aux résonances sous-critiques $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$	92
5.3.4	Paramètres physiques influant sur la détection d'une fissure	95
5.4	Apparition d'instabilité due à la présence d'une fissure	100

5.4.1	Influence de la position de la fissure	100
5.4.2	Influence de la taille de la fissure	102
5.5	Conclusion	102
6	Dynamique expérimentale des systèmes mono et multi-rotors	103
6.1	Système mono-rotor	104
6.1.1	Présentation du banc <i>DDE mono-rotor</i>	104
6.1.2	Diagramme de Campbell et évolution des ordres $1\times$ et $2\times$	104
6.1.3	Modèle numérique simplifié du système mono-rotor : confrontation aux diagrammes de Campbell expérimentaux	106
6.1.4	Réponses à balourd et phénomènes non-linéaires $2\times$	107
6.1.5	Conclusions sur les effets non-linéaires de systèmes mono-rotor	108
6.2	Système bi-rotors	109
6.2.1	Présentation du banc <i>DDE bi-rotors</i>	109
6.2.2	Modèle numérique du système bi-rotor linéaire associé	109
6.2.3	Phénomènes non-linéaires pour les systèmes en co-rotation	111
6.2.4	Phénomènes non-linéaires pour les systèmes en contra-rotation	115
6.3	Conclusion	118
III	Perspectives de recherche	121
7	Etudes et projets à venir	123
7.1	Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables	123
7.1.1	Instabilités multi-modes	123
7.1.2	Définition de critères complémentaires de stabilité	126
7.1.3	Vers une modélisation plus complète de systèmes	127
7.1.4	Vision systémique : aspect FIRST Design	128
7.1.5	Applications au génie civil	129
7.2	Dynamique non-linéaire des systèmes tournants	130
7.2.1	Identification et recalage des systèmes mono-rotor	130
7.2.2	Stabilité et dynamique non-linéaires des systèmes tournants frottants	131
7.2.3	Réponses non-linéaires des systèmes mono-rotor et/ou multi-rotors	132
7.2.4	Extension à une méthode de balance multi-dimensionnelle à ordres épurés et ajustables	133
7.3	Détection et identification de fissures dans les systèmes fixes et tournants	133
7.3.1	Détection de fissures pour les systèmes tournants complexes	134
7.3.2	Identification des fissures et extension à la surveillance vibratoire des ouvrages	134
7.3.3	Approches et validations expérimentales	135
	Bibliographie	137

Liste des figures	145
Liste des tableaux	149

Introduction

Chapitre 1

Introduction

L'étude et la prévision du comportement des systèmes dynamiques nécessitent une modélisation réaliste de l'ensemble des pièces et organes constituant les structures mécaniques. Aussi, dans un objectif d'optimisation des structures industrielles et de conception plus robuste des systèmes mécaniques fixes et tournants, une compréhension fine et juste des sources de non-linéarités propres à chaque système, ainsi que des phénomènes non-linéaires pouvant être engendrés, est indispensable.

La prise en compte de ces non-linéarités implique une complexification de la réponse vibratoire des systèmes. Des outils et méthodes d'analyse non-linéaire doivent alors être développés afin de permettre de prédire de façon rapide et efficace le comportement dynamique non-linéaire des systèmes. Aussi, suivant le type de structures étudiées (fixes ou tournantes), les caractéristiques non-linéaires identifiées (régulières ou non régulières, de type contacts intermittents, frottants, ou de Hertz par exemple) et la problématique envisagée (recherche des niveaux vibratoires auto-entretenues, ou de la signature vibratoire transitoire puis stationnaire), les outils théoriques et numériques permettant de reproduire au mieux les phénomènes physiques réellement observables peuvent varier et un choix judicieux de ces derniers est indispensable.

Le contexte de ce mémoire s'inscrit donc autour de ces problématiques de la prise en compte et du rôle des non-linéarités dans le comportement dynamique des systèmes complexes, fixes et tournants et plus particulièrement sur *la prévision et l'étude des régimes stationnaires périodiques et quasi-périodiques des structures non-linéaires complexes*. Afin d'illustrer toute la complexité découlant de l'étude vibratoire des structures non-linéaires fixes et tournantes et des différents outils et méthodes non-linéaires associés, ce mémoire se décomposera en deux principales parties. A travers des approches théoriques, numériques et expérimentales, ces deux parties illustreront l'apport et la nécessité de la prise en compte des aspects non-linéaires pour la prévision et l'étude du comportement dynamique des *systèmes fixes frottants* et des *systèmes tournants*, respectivement.

Dans une première partie, nous nous intéresserons plus particulièrement à la dynamique non-linéaire des structures sujets à des instabilités de flottement dues au frottement aux interfaces entre pièces.

Le premier chapitre intitulé *Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables* s'intéressera plus particulièrement à la stabilité et au comportement dynamique non-linéaire de tels systèmes. Son

principal objectif sera de mettre en place différentes méthodes non linéaires afin de mieux appréhender la dynamique non-linéaire de tels systèmes et de statuer sur les différentes stratégies et outils d'analyse non linéaire possibles pour répondre efficacement et rapidement à la détermination des niveaux vibratoires non-linéaires. Pour ce faire, trois méthodes d'analyse non-linéaire seront présentées : l'*extension de la variété centrale par les approximants multi-variables*, la *méthode du suivi des modes non-linéaires complexes instables* et la *méthode de la balance harmonique sous contraintes*. Afin d'illustrer les outils théoriques développés, ainsi que les avantages et inconvénients de chacune des méthodes proposées, des problématiques industrielles correspondant aux instabilités et vibrations auto-entretenues présentes dans les freins automobile et aéronautique seront discutées. Ces exemples concrets permettront de valider une utilisation industrielle des outils proposés pour une recherche et une compréhension fines du comportement dynamique non-linéaire des structures complexes.

Le second chapitre intitulé *Vers une compréhension accrue de la stabilité des systèmes frottants* se focalisera plus particulièrement sur la complexité de l'étude de stabilité des systèmes frottants linéaire et non-linéaire et la définition de nouveaux critères permettant un dimensionnement plus robuste des structures industrielles. Une attention toute particulière sera donnée à l'*effet paradoxal de l'amortissement structural* des systèmes dynamiques afin de tendre vers une conception robuste et une compréhension accrue de la dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables. De plus, l'un des objectifs de ce chapitre sera d'illustrer les propos et développements proposés à travers des applications industrielles linéaires et non-linéaires.

Dans une second partie, nous nous intéresserons à la dynamique non-linéaire des systèmes tournants. Nous montrerons plus particulièrement le rôle que peuvent jouer les sources et aspects non-linéaires sur le comportement dynamique des rotors.

Dans un premier temps, nous montrerons que la prise en compte des caractéristiques non-linéaires des différents organes présents dans un système tournant permet de prédire au mieux le comportement dynamique non-linéaire des rotors et ainsi d'aboutir à une compréhension accrue des phénomènes physiques mis en jeu. Pour ce faire, une étude du comportement dynamique d'un rotor comportant un roulement non-linéaire avec jeu et contact de Hertz sera développée. Les outils théoriques de la *balance harmonique avec une condensation sur les éléments non-linéaires* seront exposés afin d'estimer les amplitudes des réponses de systèmes tournants soumis à des balourds et de mieux comprendre les problèmes physiques propres à cet organe non-linéaire tels que le contact et perte de contact au niveau du roulement présent sur le système. L'ensemble de ces développements théoriques et numériques sera exposé dans le chapitre *Dynamique des rotors comportant un roulement non-linéaire*.

Dans un deuxième temps, le chapitre *Dynamique non-linéaire des rotors fissurés* proposera de montrer l'apport de la prise en compte des effets non-linéaires pour la surveillance vibratoire et la détection de fissures dans les systèmes tournants. Nous montrerons que la signature vibratoire non-linéaire d'un rotor peut permettre une analyse et une détection robuste de la présence d'une fissure transverse, cette dernière se caractérisant par une non-linéarité de type "résonance paramétrique non-linéaire". Aussi, nous nous attarderons plus spécifiquement sur toute la complexité du comportement dynamique non-linéaire des rotors fissurés en termes d'apparition de résonances sous-critiques et d'évolution des formes des orbites. L'objectif de ce chapitre sera d'aboutir à des indicateurs spécifiques au compor-

tement non-linéaire des rotors fissurés qui permet de statuer sur la présence et la détection d'une fissure.

Le dernier chapitre de cette partie, intitulé *Dynamique expérimentale des systèmes mono et multi-rotors*, aura pour principal objectif d'illustrer la nécessité de la prise en compte des effets non-linéaires dans les systèmes tournants mono-rotor et multi-rotors. Ainsi, des études expérimentales réalisées sur les bancs d'essais Dynamique D'Ensemble mono-rotor et multi-rotors (*banc DDE mono-rotor* et *banc DDE bi-rotors*) du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon, serviront de bases aux diverses analyses qui seront menées. De plus, elles permettront d'illustrer les limitations et précautions à prendre pour les prévisions du comportement dynamique des systèmes tournants et de montrer la nécessité de s'orienter vers un dimensionnement des systèmes tournants prenant en compte les aspects "non-linéaires".

Enfin, un chapitre intitulé *Perspectives de recherche* qui conclut ce mémoire, permettra de dégager quelques unes des études envisageables découlant directement des problématiques de la *Dynamique non-linéaire des systèmes complexes, fixes et tournants* qui auront été précédemment discutées.

Première partie

**Stabilité et dynamique non-linéaire des
systèmes frottants**

Applications à des structures industrielles

Chapitre 2

Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables

Lorsqu'on s'intéresse à la stabilité des systèmes non-linéaires frottants sujets à des instabilités de type flottement, outre le fait de savoir si la structure mécanique considérée peut comporter des points d'équilibre instable, le vrai challenge réside dans l'estimation des niveaux vibratoires lorsque ces points d'équilibre instable existent. Les méthodes d'intégration temporelle sont alors inexploitable pour de tels problèmes et l'estimation de ces amplitudes et vitesses vibratoires appelées "cycles limites" passe par l'utilisation de méthodes non-linéaires. L'objectif de ce chapitre est de discuter le développement de trois méthodes non-linéaires originales permettant de déterminer ces niveaux vibratoires.

Afin d'illustrer les développements, avantages et inconvénients de chacune des méthodes proposées, deux exemples de structures mécaniques seront étudiées : un frein automobile et un frein aéronautique illustrés en figures 2.1 et 2.2. Ces deux applications industrielles correspondent effectivement à deux exemples typiques des problèmes d'instabilité de couplage de modes due à la présence de frottement. Elles permettront de valider une utilisation industrielle des outils proposés en termes de temps de calcul, taille de systèmes et recherche des solutions sans pré-requis sur la connaissance du comportement non-linéaire du système étudié.

2.1 Stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires frottants

Comme précédemment énoncé, la problématique de ce chapitre consiste à rechercher les cycles limites des points d'équilibre instable. Aussi, avant toute chose, nous effectuons dans ce paragraphe un rappel succinct sur la stabilité des points d'équilibre de systèmes dynamiques non-linéaires frottants. Pour plus de détail sur ce sujet le lecteur pourra se référer aux études [1–4].

Nous considérons donc les systèmes dynamiques non-linéaires frottants pouvant se mettre sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{x}, \mu) \quad (2.1)$$

où \mathbf{x} définit le vecteur déplacement des degrés de liberté du système non-linéaire. \mathbf{M} , \mathbf{C} et \mathbf{K} cor-

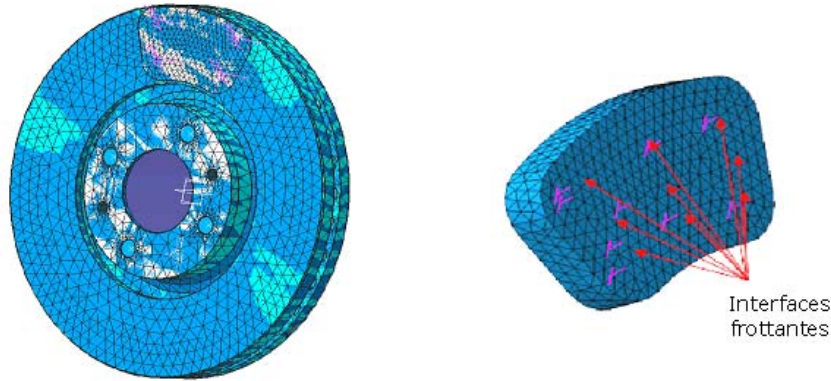


FIG. 2.1 – Frein automobile

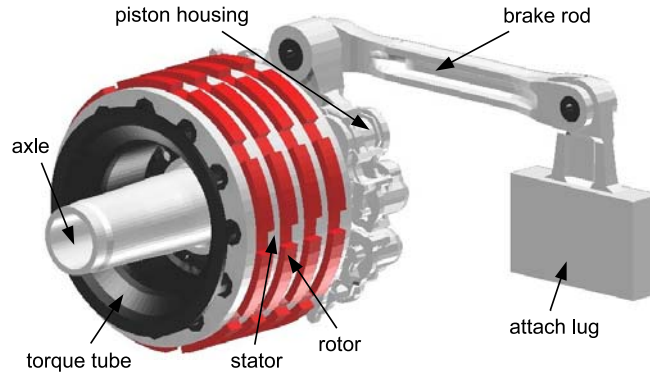


FIG. 2.2 – Frein aéronautique

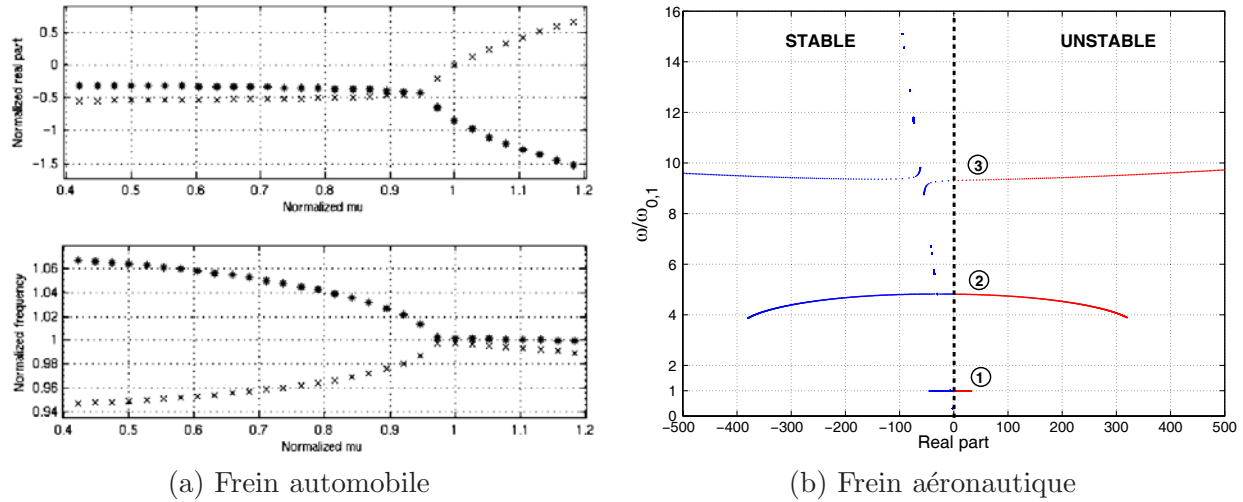
respondent respectivement aux matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système. \mathbf{F}_p représente le vecteur des forces de pression et $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{x}, \mu)$ contient l'ensemble des efforts linéaires et non-linéaires (quadratiques et/ou cubiques) dus au contact frottant.

L'analyse de stabilité associée à un tel système, appelée "problématique statico-dynamique", consiste à rechercher la stabilité des points d'équilibre associés au système non-linéaire. Cette partie se présente en deux étapes. Dans un premier temps, la détermination des points d'équilibre statiques \mathbf{x}_0 est obtenue à partir de l'équation statique non-linéaire

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{x}_0, \mu) \quad (2.2)$$

Dans un deuxième temps, la stabilité du point d'équilibre est réalisée à partir de la détermination des valeurs propres du système linéarisé [2]

$$\mathbf{M}\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{C}\dot{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{K} - \mathbf{F}_L(\mathbf{x}_0, \mu))\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$



(a) Frein automobile

(b) Frein aéronautique

FIG. 2.3 – Stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires frottants (a) Evolution des parties réelles et imaginaires (b) Evolution des valeurs propres dans le plan complexe

avec $\bar{\mathbf{x}}$ définissant une faible perturbation au voisinage du point d'équilibre ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \bar{\mathbf{x}}$) et $\mathbf{F}_L(\mathbf{x}_0, \mu)$ définissant la linéarisation des termes non-linéaires de frottement au point d'équilibre considéré.

Les figures 2.3(a) et (b) illustrent la stabilité des systèmes non-linéaires de freins automobile et aéronautique respectivement selon les deux représentations classiquement utilisées : dans le cas du frein automobile, les évolutions des parties réelles montrent l'apparition de l'instabilité lorsque l'une des parties réelles devient positive. Ceci se caractérise alors par une coalescence de modes soit un rapprochement des deux fréquences des modes stable et instable. Dans le cas présenté en figure 2.3(a), la coalescence est appelée “non parfaite”, les fréquences des deux modes restant distinctes après le déclenchement de l'instabilité. Dans le cas du frein aéronautique, la stabilité est représentée dans le plan complexe des valeurs propres du système linéarisé au voisinage d'un point d'équilibre, une valeur propre positive traduisant alors l'apparition d'instabilité à la fréquence associée dans ce plan (l'évolution du paramètre de contrôle μ est alors “masquée”).

La problématique de la dynamique des systèmes frottants consiste alors à déterminer les niveaux vibratoires en amplitudes et vitesses, appelés “cycles limites”, lorsque le système comporte un point d'équilibre instable. Ces cycles limites sont classiquement donnés au moment du déclenchement de l'instabilité correspondant au point de bifurcation de Hopf, ce dernier étant défini par

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_{center}(\mu))|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mu=\mu_0} = 0 \\ \operatorname{Re}(\lambda_{no-center}(\mu))|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0, \mu=\mu_0} \neq 0 \\ \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

où λ_{center} correspond à la valeur propre du mode devenant instable et $\lambda_{no-center}$ aux valeurs propres des autres modes du système non-linéaire. μ_0 est la valeur du paramètre de contrôle à l'apparition de

l'instabilité. Cependant les cycles limites peuvent aussi être recherchés loin du point de bifurcation de Hopf. Nous verrons dans la suite de ce chapitre que cette recherche des cycles limites proches ou loin d'un point de bifurcation de Hopf est une notion fondamentale pour le choix des méthodes dynamiques non-linéaires utilisables et exploitables.

2.2 Extension de la méthode de la variété centrale par approximants multi-variables

2.2.1 Méthode de la variété centrale

Méthodologie

La méthode de la variété centrale permet de réduire un système dynamique non-linéaire, possédant des points d'équilibre potentiellement instable, au voisinage des points de bifurcation de Hopf. Le comportement dynamique non-linéaire est alors décrit uniquement en fonction des variétés centrées du système, les variétés stables étant approchées en fonction des variétés centrées [3, 5, 6].

Considérons un système dynamique non-linéaire de dimension n sous forme d'équations d'état

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mu) \quad (2.5)$$

où μ constitue le paramètre de contrôle et \mathbf{F} définit une fonction non-linéaire.

En ramenant le point fixe \mathbf{x}_0 du système à l'origine ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$), et en supposant que la fonction \mathbf{F} est C^r avec r suffisamment grand, le système 2.5 s'écrit sous la forme de séries de Taylor (pour $\|\mathbf{y}\|$ petit)

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{F}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{F}_3(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{F}_k(\mathbf{y}) + O(\mathbf{y}^{k+1}) \quad (2.6)$$

où $\mathbf{A} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0; \mu)$ est la $n \times n$ matrice des dérivées premières de \mathbf{F} évaluée au point fixe $(\mathbf{x}_0; \mu)$. \mathbf{F}_k correspondent aux polynômes de degré k suivant les composantes \mathbf{y} .

En utilisant la transformation $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{P}[\mathbf{v}_c \ \mathbf{v}_s]^T$ où \mathbf{v}_c et \mathbf{v}_s correspondent respectivement aux variétés centrées et stables du système dynamique non-linéaire ($\mathbf{v}_c \in \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^{n-m}$), le système non-linéaire est donné au point de bifurcation de Hopf par l'équation

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{J}_c(\mu_0) \mathbf{v}_c + \mathbf{F}_c(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) = \mathbf{J}_c \mathbf{v}_c + \mathbf{G}_2(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) + \cdots + \mathbf{G}_k(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) + \cdots \\ \dot{\mathbf{v}}_s = \mathbf{J}_s(\mu_0) \mathbf{v}_s + \mathbf{F}_s(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) = \mathbf{J}_s \mathbf{v}_s + \mathbf{H}_2(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) + \cdots + \mathbf{H}_k(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_s, \mu_0) + \cdots \end{cases} \quad (2.7)$$

Les valeurs propres λ des matrices \mathbf{J}_c et \mathbf{J}_s vérifient dont $Re(\lambda_{\mathbf{J}_c}(\mu_0)) = 0$ et $Re(\lambda_{\mathbf{J}_s}(\mu_0)) < 0$ (avec μ_0 la valeur du paramètre de contrôle au point de bifurcation de Hopf). Nous avons $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_{m+1} \cdots \mathbf{p}_n]$ avec $\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_m$ et $\mathbf{p}_{m+1} \cdots \mathbf{p}_n$ qui sont respectivement les vecteurs propres associés aux m valeurs propres de \mathbf{A} dont la partie réelle est nulle, et aux $(n-m)$ valeurs propres de \mathbf{A} dont la partie réelle est négative. A noter que nous nous plaçons dans le cas d'un système dynamique non-linéaire ne possédant pas de variétés instables au point de bifurcation de Hopf considéré.

Par extension de la méthode de la variété centrale [7–9], le système non-linéaire 2.7 s'écrit au voisinage du point de bifurcation de Hopf (donné suivant le paramètre de contrôle par $\hat{\mu} = \mu_0(1 + \epsilon)$)

sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}}(\hat{\mu}) \mathbf{v}_{\mathbf{c}} + \mathbf{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) \\ \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_{\mathbf{s}}(\hat{\mu}) \mathbf{v}_{\mathbf{s}} + \mathbf{F}_{\mathbf{s}}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) \\ \dot{\hat{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Au point $(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mu_0)$, le système correspond à une variété centrée de dimension $m + 1$ tangent à l'espace $(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu})$. Pour $\|\mathbf{v}_{\mathbf{c}}\|$ et $\|\hat{\mu}\|$ suffisamment petits, les variétés stables $\mathbf{v}_{\mathbf{s}}$ peuvent s'exprimer en fonction des variétés centrées $\mathbf{v}_{\mathbf{c}}$ de la manière suivante [10]

$$\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}) \quad (2.9)$$

avec la fonction \mathbf{h} qui vérifie au point d'équilibre $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, 0)$

$$\mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad D_{\mathbf{v}_{\mathbf{c}}} h_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad 1 \leq i \leq n - 2, \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \hat{\mu}} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

où h_i définit la i^{eme} composante de \mathbf{h} .

Classiquement, les variétés stables sont approchées par l'intermédiaire de séries polynomiales en $(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu})$ de degré q

$$\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j+\dots+k+l=2}^q \sum_{j=0}^p \dots \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ij\dots kl} v_{c_1}^i v_{c_2}^j \dots v_{c_n}^k \hat{\mu}^l \quad (2.11)$$

où $\mathbf{a}_{ij\dots kl}$ sont des vecteurs comportant des constantes. Ces derniers peuvent être déterminés par résolution des équations algébriques correspondant à la substitution des $(m - n)$ fonctions \mathbf{h} dans la seconde partie du système différentiel 2.8

$$D_{\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}}(\mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu})) (\mathbf{J}_{\mathbf{c}} \mathbf{v}_{\mathbf{c}} + \mathbf{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}), \hat{\mu})) = \mathbf{J}_{\mathbf{s}} \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}) + \mathbf{F}_{\mathbf{s}}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}), \hat{\mu}) \quad (2.12)$$

Une fois les coefficients $\mathbf{a}_{ij\dots kl}$ déterminés, le système dynamique non-linéaire réduit ne comportant plus que les m variétés centrées et le paramètre de contrôle permet d'estimer les niveaux vibratoires non-linéaires du système initial au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Ce système non-linéaire réduit s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}}(\hat{\mu}) \mathbf{v}_{\mathbf{c}} + \mathbf{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}), \hat{\mu}) \\ \dot{\hat{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour un système comportant une instabilité de flutter avec un seul mode instable (coalescence de modes "classique"), le système réduit 2.13 ne comportera alors que trois variables (les deux variables centrées et le paramètre de contrôle).

Estimation des coefficients des ordres 2 à q

Dans le cas général d'un système non-linéaire comportant n variétés stables $\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = [v_{s1} \ \dots \ v_{sn}]^T$, la recherche des coefficients $a_{k,ij\dots kl}$ se base sur des déterminations successives de ces derniers par ordre

croissant du degré du polynôme \mathbf{h} et donc par résolutions successives des équations algébriques 2.12 correspondantes.

En considérant l'approximation des variétés stables \mathbf{v}_s sous la forme d'un polynôme en $(\mathbf{v}_c, \hat{\mu})$ allant jusqu'à l'ordre q

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{h}(\mathbf{v}_c, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j+\dots+k+l=2}^q \sum_{j=0}^p \dots \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ij\dots kl} v_{c_1}^i v_{c_2}^j \dots v_{c_n}^k \hat{\mu}^l \quad (2.14)$$

La détermination des coefficients \mathbf{a}^m de chaque ordre (pour $m = 2, \dots, q$) s'effectue donc par ordre croissant jusqu'au q^{eme} ordre et vérifie les relations [1]

$$\begin{cases} \mathbf{a}^2 = \mathbf{J}_3^{-1} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{a}^3 = \mathbf{J}_3^{-1} (\mathbf{C}_3 + \mathbf{D}_{2,3} \mathbf{a}^2) \\ \mathbf{a}^4 = \mathbf{J}_4^{-1} (\mathbf{C}_4 + \mathbf{D}_{2,4} \mathbf{a}^2 + \mathbf{D}_{3,4} \mathbf{a}^3 + \mathbf{F}_4(\mathbf{a}^2)) \\ \mathbf{a}^5 = \mathbf{J}_5^{-1} (\mathbf{C}_5 + \mathbf{D}_{2,5} \mathbf{a}^2 + \mathbf{D}_{3,5} \mathbf{a}^3 + \mathbf{D}_{4,5} \mathbf{a}^4 + \mathbf{F}_5(\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^q = \mathbf{J}_q^{-1} \left(\mathbf{C}_q + \sum_{i=2}^{q-1} \mathbf{D}_{i,q} \mathbf{a}^i + \mathbf{F}_q(\mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^{q-2}) \right) \end{cases} \quad (2.15)$$

avec les coefficients du m^{eme} ordre donnés par

$$\mathbf{a}^m = [\mathbf{a}_1^m \dots \mathbf{a}_p^m \dots \mathbf{a}_n^m]^T \quad (2.16)$$

$$\mathbf{a}_p^m = [a_{p,m0\dots 00} \dots a_{p,ij\dots kl} \dots a_{p,00\dots 0m}]^T \quad \text{avec} \quad i + j + \dots + k + l = m \quad (2.17)$$

Les matrices \mathbf{J}_m (pour $m = 2, \dots, q$) sont des matrices diagonales ne comportant que des termes provenant des matrices jacobiniennes \mathbf{J}_c et \mathbf{J}_s du système dynamique non-linéaire initial. Les matrices $\mathbf{D}_{i,m}$ et \mathbf{C}_m correspondent aux contributions des coefficients \mathbf{a}^i d'ordre inférieur (avec $2 \leq i < m$) provenant de la contribution des termes de gauche et de droite de l'équation 2.12 respectivement. Les matrices $\mathbf{F}_m(\mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^{m-2})$ définissent les contributions des termes non-linéaires quadratiques et cubiques de droite de l'équation 2.12, ces derniers prenant aussi en compte la contribution des coefficients \mathbf{a}^i d'ordre inférieur (avec $2 \leq i < k - 2$).

Pour plus de détail sur la détermination des coefficients $\mathbf{a}_{ij\dots kl}$ et les expressions analytiques associées, le lecteur pourra se référer aux travaux [1].

2.2.2 Extension par approximants multi-variables

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à l'extension de la méthode des variétés centrées par les approximants multi-variables dans le cas d'un système non-linéaire comportant deux variétés centrées notées v_{c1} et v_{c2} . La généralisation à n variétés centrales suivant le même principe [11–13].

Les approximants à deux variables

Le système dynamique non-linéaire réduit dans la base des variétés centrées peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} v_{ck} = f_k(v_{c1}, v_{c2}) = \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{k,ij} v_{c1}^i v_{c2}^j & (1 \leq k \leq 2) \\ \dot{\mu} = 0 \\ \mu = \mu_0 (1 + \varepsilon) & (\varepsilon \ll 1) \end{cases} \quad (2.18)$$

L'idée de base [3,5,6,13] consiste alors à ré-écrire l'ensemble des non-linéarités polynomiales du système réduit sous la forme d'approximants à deux variables

$$[m_1, m_2/n_1, n_2]_f(x, y) = \frac{A(x, y)}{B(x, y)} = \frac{\sum_{\alpha=0}^{m_1} \sum_{\beta=0}^{m_2} n_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta}{\sum_{\alpha=0}^{n_1} \sum_{\beta=0}^{n_2} d_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta} = \frac{\sum_{(\alpha,\beta) \in S_m} n_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta}{\sum_{(\alpha,\beta) \in S_n} d_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta} \quad (2.19)$$

avec les espaces S_m et S_n définis tels que

$$S_m = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha \leq m_1, 0 \leq \beta \leq m_2\} \quad (2.20)$$

$$S_n = \{(\alpha, \beta) \mid 0 \leq \alpha \leq n_1, 0 \leq \beta \leq n_2\} \quad (2.21)$$

Pour cela, nous considérons une fonction $f(x, y)$ à deux variables de la forme

$$f(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \sum_{(\alpha,\beta) \in S} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (2.22)$$

qui vérifie

$$f(x, y) = \frac{A(x, y)}{B(x, y)} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (2.23)$$

avec les coefficients $g_{\alpha\beta}$ autant que possible nuls et l'espace S défini tel que

$$S = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \text{ entiers positifs}\} \quad (2.24)$$

En prenant par définition $b_{00} = 0$, il reste $(m_1 + 1)(m_2 + 1) + n_1(n_2 + 1)$ coefficients à déterminer. Les coefficients $n_{\alpha\beta}$ et $d_{\alpha\beta}$ vérifient alors des relations algébriques qui vont maintenant être explicitées. Pour cela les notations, couples et le sous-espaces ci-dessous sont introduits

$$m'_i = \min(m_i, n_i) \quad n'_i = \max(m_i, n_i) \quad p_m = \min(m_1, m_2, n_1, n_2) \quad (2.25)$$

$$P = \{(p, p) \mid 0 \leq p \leq p_m\} \quad (2.26)$$

$$R_{1;p} = \{(p, p)\} \cup \{(\alpha, p) \mid p < \alpha \leq m'_1\} \cup \{(p, \beta) \mid p < \beta \leq m'_2\} \quad (2.27)$$

$$R_{2;p} = \{(\alpha, p) \mid m'_1 < \alpha \leq n'_1\} \cup \{(p, \beta) \mid m'_2 < \beta \leq n'_2\} \quad (2.28)$$

$$R_{3;p} = \{(\alpha, p) \mid n'_1 < \alpha \leq m_1 + n_1 - p\} \cup \{(p, \beta) \mid n'_2 < \beta \leq m_2 + n_2 - p\} \quad (2.29)$$

$$R_{4;p} = \{(m_1 + n_1 - p + 1, p), (p, m_2 + n_2 - p + 1)\} \quad (2.30)$$

$$S_1 = S_m \cap S_n \quad S_2 = S_m \cup S_n \setminus S_1 \quad (2.31)$$

$$S_3 = \bigcup_{p \in P} R_{3;p} \quad S_4 = \bigcup_{p \in P} R_{4;p} \quad S_5 = S_2 \setminus \left(\bigcup_{p \in P} R_{2;p} \right) \quad (2.32)$$

Ces sous-espaces sont explicités dans le graphe de régions suivant (α, β) donné en figures 2.4. En reprenant les expressions 2.19-2.23, nous pouvons écrire

$$\left(\sum_{(\alpha, \beta) \in S_n} d_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \right) \cdot \left(\sum_{(\alpha, \beta) \in S} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \right) - \sum_{(\alpha, \beta) \in S_m} n_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \sum_{(\alpha, \beta) \in S} g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (2.33)$$

avec

$$g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta) \in R_{1;p} \cup R_{2;p} \cup R_{3;p} \quad (2.34)$$

$$\sum_{p \neq 0} g_{m_1 + n_1 - p + 1, p} + g_{p, m_2 + n_2 - p + 1} = 0 \quad (2.35)$$

Soit, en écrivant les termes algébriques propres à chaque puissance croissante de l'expression 2.33, et en considérant que l'équation 2.33 doit être vérifiée pour tout couple (α, β) , nous obtenons les équations devant être vérifiées par les coefficients $n_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$ et $c_{\alpha\beta}$:

$$\sum_{\psi \in S_n} d_\psi c_{\rho - \psi} = n_\rho \quad \rho \in S_m \quad (2.36)$$

$$\sum_{\psi \in S_n} d_\psi c_{\rho - \psi} = 0 \quad \psi \in (S_n \setminus S_m) \cup S_3 \quad (2.37)$$

$$\sum_{\psi \in R_{4;p}} \sum_{\rho \in S_n} d_\psi c_{\rho - \psi} = 0 \quad p \in P \quad (2.38)$$

Les coefficients $c_{\alpha\beta}$ étant connus, les relations 2.37 et 2.38 permettent de déterminer les coefficients $d_{\alpha\beta}$, les coefficients $n_{\alpha\beta}$ étant quand à eux obtenus à partir des équations 2.36 .

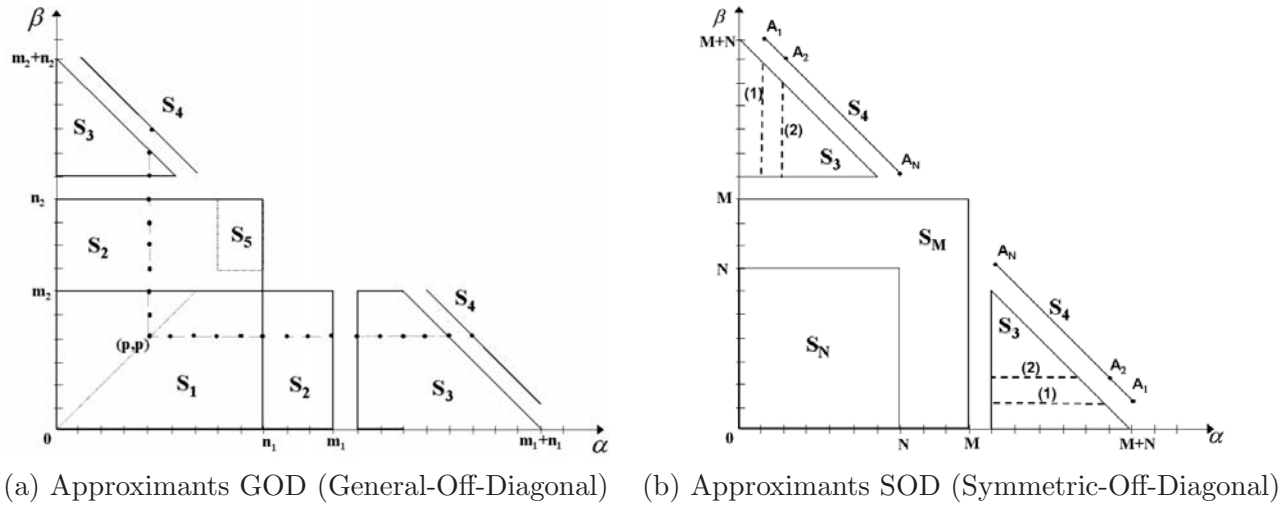


FIG. 2.4 – Définition des régions pour l'estimation des approximants

Estimation des coefficients multi-variables

Dans cette partie, nous allons brièvement décrire une méthode numérique (“prong method” [11, 12, 14]) permettant une détermination de l'ensemble des coefficients des approximants à deux variables qui permettent de ré-écrire le système réduit non-linéaire précédent 2.18 sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{ck} = \sum_{i=0}^{3m} \sum_{\substack{j=0 \\ 1 \leq i+j \leq 3m}}^{3m} c_{k,ij} v_{c1}^i v_{c2}^j = \frac{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M n_{k,ij} v_{c1}^i v_{c2}^j}{\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^M d_{k,ij} v_{c1}^i v_{c2}^j} \quad (1 \leq k \leq 2) \\ \dot{\mu} = 0 \\ \mu = \mu_0 (1 + \varepsilon) \quad (\varepsilon \ll 1) \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Tout d'abord, les coefficients $d_{k,ij}$ peuvent être déterminés en considérant les régions S_3 et S_4 : les $k \times (N + 1)$ coefficients $d_{k,i,0}$ et $d_{k,0,j}$ (avec $0 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq N$) sont obtenus en considérant respectivement les équations des segments ($M + 1 \leq \alpha \leq M + N, \beta = 0$) et ($\alpha = 0, M + 1 \leq \beta \leq M + N$). Nous obtenons sous forme condensée

$$\mathbf{A}_{k,0} \mathbf{d}_{k,0} = \mathbf{u}_k \quad (2.40)$$

avec $\mathbf{d}_{k,0}$ le vecteur des inconnues, $\mathbf{A}_{k,0}$ une matrice comportant uniquement des termes en $c_{k,i,j}$ et le vecteur \mathbf{u}_k comportant uniquement des zéros sauf pour le dernier terme égal à un.

Ensuite, les $k \times (2 \times N - 1)$ coefficients $d_{k,1,1}$, $d_{k,i,1}$ et $d_{k,1,i}$ (avec $2 \leq i \leq N$) sont obtenus en considérant les équations des segments ($M + 1 \leq \alpha \leq M + N - 1, \beta = 1$) et ($\alpha = 1, M + 1 \leq \beta \leq M + N - 1$) (défini par les lignes (1) de la région S_3 en figure 2.4), et les paires symétriques des points $(1, M + N)$ et $(M + N, 1)$ (définis par les points A_1 en figure 2.4). Ces coefficients vérifient alors les

équations

$$\mathbf{B}_{k,11}\mathbf{d}_{k,0} + \mathbf{A}_{k,1}\mathbf{d}_{k,1} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

avec $\mathbf{d}_{k,1}$ le vecteur des inconnues de dimension $(2 \times N - 1)$. $\mathbf{A}_{k,1}$ est constitué uniquement des coefficients $c_{k,i,j}$ et $\mathbf{B}_{k,0}\mathbf{d}_{k,0}$ est un vecteur connu de taille $(2 \times N - 1)$. Par itérations successives, l'ensemble des vecteurs inconnus $\mathbf{d}_{k,i}$ (avec $1 \leq i \leq N$) de dimension $(2N - 2i + 1)$ peuvent être obtenus bloc par bloc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_{k,0} = \mathbf{A}_{k,0}^{-1}\mathbf{u}_N \\ \mathbf{d}_{k,1} = \mathbf{A}_{k,1}^{-1}(-\mathbf{B}_{k,11}\mathbf{d}_{k,0}) \\ \mathbf{d}_{k,2} = \mathbf{A}_{k,2}^{-1}(-\mathbf{B}_{k,21}\mathbf{d}_{k,0} - \mathbf{B}_{k,22}\mathbf{d}_{k,1}) \\ \mathbf{d}_{k,3} = \mathbf{A}_{k,3}^{-1}(-\mathbf{B}_{k,31}\mathbf{d}_{k,0} - \mathbf{B}_{k,32}\mathbf{d}_{k,1} - \mathbf{B}_{k,33}\mathbf{d}_{k,2}) \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k,N} = \mathbf{A}_{k,N}^{-1}\left(-\sum_{i=1}^N \mathbf{B}_{k,Ni}\mathbf{d}_{k,i-1}\right) \end{array} \right. \quad (2.42)$$

les matrices $\mathbf{B}_{k,ij}$ (avec $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq N$) étant connues et les matrices $\mathbf{A}_{k,i}$ comportant uniquement les coefficients $c_{k,i,j}$.

Enfin, les vecteurs $\mathbf{n}_{k,i}$ comportant les coefficients $n_{k,ij}$ définis en équations 2.19 sont déterminés à partir des relations 2.36 par ordres successifs

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_{k,0} = \mathbf{C}_{k,0}\mathbf{d}_{k,0} \\ \mathbf{n}_{k,1} = \mathbf{C}_{k,1}\mathbf{d}_{k,1} + \mathbf{D}_{k,11}\mathbf{d}_{k,0} \\ \mathbf{n}_{k,2} = \mathbf{C}_{k,2}\mathbf{d}_{k,2} + \mathbf{D}_{k,21}\mathbf{d}_{k,0} + \mathbf{D}_{k,22}\mathbf{d}_{k,1} \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{k,M} = \mathbf{C}_{k,M}\mathbf{d}_{k,M} + \sum_{i=1}^M \mathbf{D}_{k,Mi}\mathbf{d}_{k,i-1} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

les matrices $\mathbf{C}_{k,i}$ (avec $0 \leq i \leq M$) et $\mathbf{D}_{k,jl}$ (avec $1 \leq j \leq M$ et $1 \leq l \leq M$) étant connues et les vecteurs $\mathbf{d}_{k,i}$ (avec $0 \leq i \leq N$) ayant été déterminés précédemment.

2.2.3 Application industrielle

Afin de valider l'intérêt de l'extension de la méthode de la variété centrale par les approximations multi-variables, nous l'appliquons au système de freinage aéronautique présenté en figure 2.2. Les figures 2.5 illustrent une utilisation classique, dans un voisinage très proche du point de bifurcation de Hopf $\mu = 1.001\mu_0$ (variété centrale développée au 3^{eme} ordre et approximations [2/2]). Cette méthode permet ainsi d'obtenir une solution dynamique non-linéaire approchée conforme à la solution exacte donnée par intégration temporelle, avec un gain en temps de calcul en temps CPU de l'ordre de 1000.

De plus, l'utilisation des approximations a pour effet non seulement de réduire le nombre de termes non-linéaires et les temps de calcul associés, mais aussi d'augmenter le domaine de convergence de la

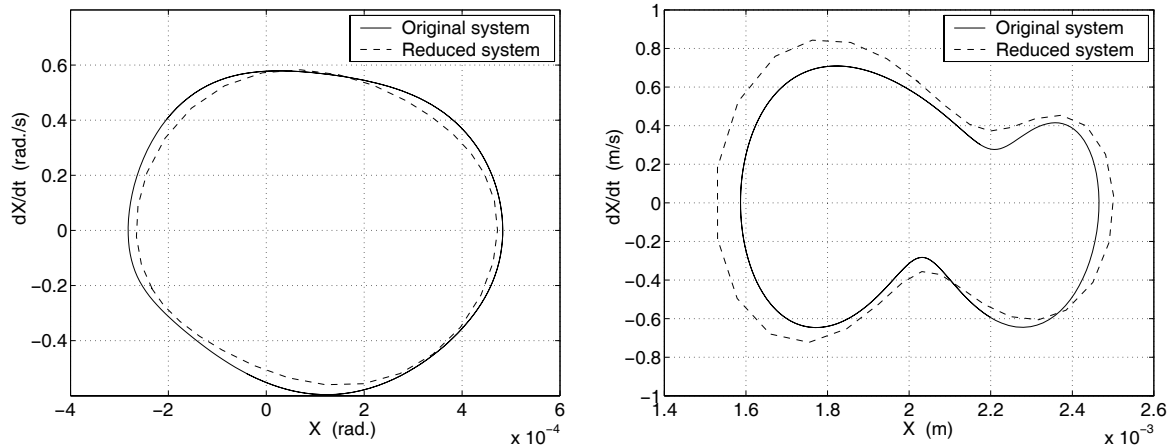


FIG. 2.5 – Cycles limites par variété centrale et approximants multi-variables dans une configuration “proche” du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.001\mu_0$)

validité des développements des variétés stables en fonction des variétés centrées. En effet, la méthode de la variété centrale utilisée seule a pour principal défaut de n’être valable que dans un voisinage très proche du point de bifurcation de Hopf. Du fait de la réécriture des termes non-linéaires dans la base des variétés centrées par des approximants multi-variables, la limite de validité est augmentée comme le montrent les figures 2.6. La méthode de la variété centrale seule donne une réponse dynamique non-linéaire assez éloignée de la solution exacte (figure 2.6(a)), tandis que l’ajout des approximants permet de se rapprocher de la solution exacte (figure 2.6(b)). Cependant, la notion d’ “éloignement” vis à vis du point de bifurcation de Hopf reste très locale et dans la pratique les cycles limites ne peuvent être estimés avec une telle méthode lorsque nous nous éloignons trop fortement de la frontière de stabilité.

Ainsi, la méthode de l’extension de la variété centrale par les approximants multi-variables permet de retrouver les cycles limites dans un voisinage très proche du point de bifurcation de Hopf, mais présente cependant des inconvénients qui la rendent peu utilisable de façon systématique : outre son utilisation très locale, le choix du développement des variétés stables en fonction des variétés centrées et l’ordre des approximants $[M/N]$, ainsi que le fait de travailler avec des non-linéarités fractionnelles ne permettent pas d’être assuré d’obtenir une solution dynamique non-linéaire satisfaisante [1, 15].

En conclusion, la problématique à laquelle il faut maintenant répondre est de savoir si une estimation des réponses dynamiques stationnaires non-linéaires loin des frontières de stabilité est possible. L’utilisation des variétés invariantes pourrait alors être envisagée, cependant même si nous ne sommes plus restreint au voisinage des frontières de stabilité, le choix des ordres reste encore un problème majeur et difficile à résoudre sans une connaissance à priori du comportement dynamique non-linéaire du système [16].

Parmi les familles des méthodes non-linéaires existantes, il apparaît alors naturel de se tourner vers

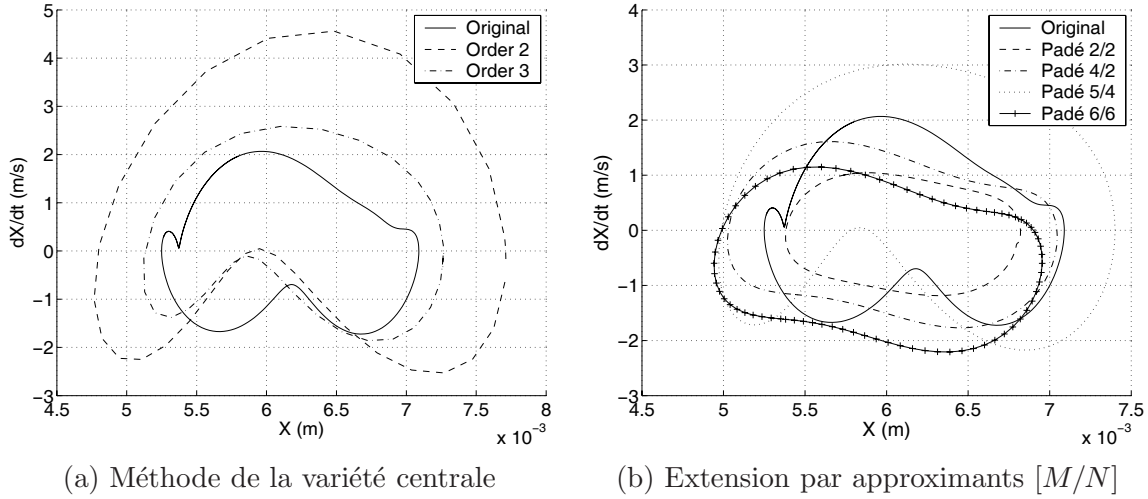


FIG. 2.6 – Cycles limites par variété centrale et approximants multi-variables dans une configuration “loin” du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.01\mu_0$)

des méthodes de “recherche de solutions approchées sous forme prédéfinie” [17]. En effet, ces méthodes ne se basent pas sur une réduction dans l’espace des variétés “maîtres” du système et évitent ainsi toute approximation des variétés “esclaves” en fonction de ces dernières. Cependant, des méthodes de type “balance harmonique” ne sont pas utilisables dans leurs développements classiques, car les équations non-linéaires 2.1 ont des solutions exactes qui correspondent aux points d’équilibre statique vérifiant le système non-linéaire 2.2. Le fait que ces points d’équilibre soient instables n’est en effet pas considéré dans les développements classiques.

Aussi, nous proposons dans les paragraphes qui suivent deux adaptations de la méthode de la balance harmonique :

- la première méthode se basera sur la notion du suivi du mode non-linéaire complexe. Comme nous le verrons dans le paragraphe qui suit, cette méthode non-linéaire consiste à rechercher la solution périodique mono-harmonique stationnaire ne dépendant que du mode instable au point d’équilibre. La notion de comportement dynamique non-linéaire conduit par les variétés maîtres est ainsi conservée. Le suivi du mode instable permettra de trouver le cycle limite et d’exclure les points d’équilibre instable des solutions non-linéaires recherchées ;

- la seconde méthode, présentée dans le paragraphe 2.4, se base sur une adaptation de la méthode de la balance harmonique. Elle correspond à une *méthode de balance harmonique sous contraintes* qui consiste à la recherche des cycles limites stationnaires du système non-linéaire (soit à exclure les points d’équilibre statiques des solutions proposées). Nous verrons que sa principale distinction par rapport à la méthode des modes non-linéaires complexes et qu’elle ne se focalise pas sur une recherche de solutions ne dépendant que du mode instable au point d’équilibre, mais permet de retrouver une solution dynamique non-linéaire complexe pouvant faire intervenir les résonances sous et sur-harmoniques à l’ordre n .

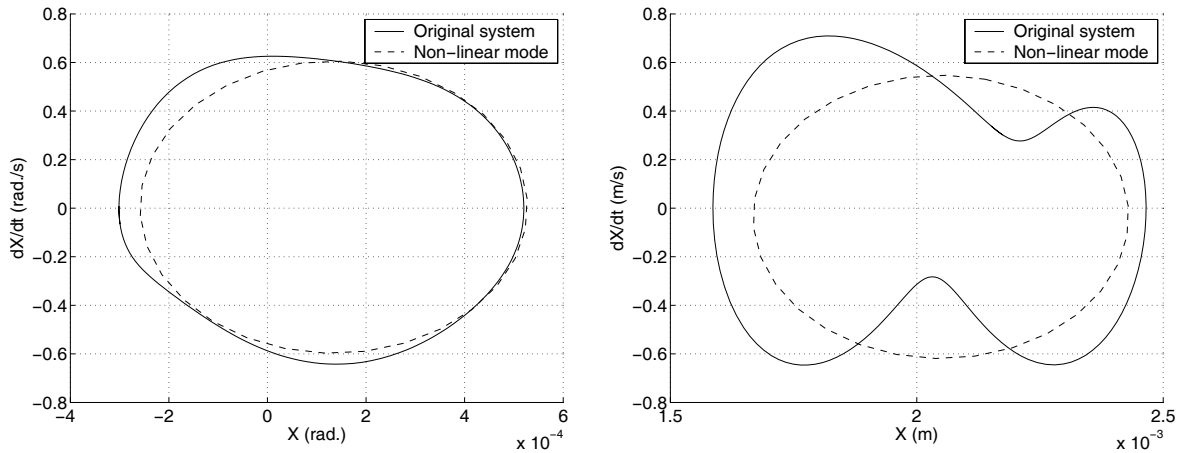


FIG. 2.7 – Cycles limites par la méthode des modes non-linéaires complexes dans la configuration “proche” du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.001\mu_0$)

Ces deux méthodes non-linéaires ainsi que leurs avantages et inconvénients font donc l’objet des deux paragraphes qui suivent.

2.3 Méthode des modes non-linéaires complexes

2.3.1 Méthodologie

Nous considérons donc un système non-linéaire de la forme

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{FNL}(\mathbf{Y}, \mu) \quad (2.44)$$

où \mathbf{A} contient l’ensemble des termes linéaires et $\mathbf{FNL}(\mathbf{Y}, \mu)$ définit le vecteur des termes non-linéaires provenant du frottement entre pièces.

La méthode des modes non-linéaires complexes [4, 18] consiste à approcher les cycles limites du système non-linéaire en considérant uniquement la participation du mode instable lors du déclenchement de l’instabilité du point d’équilibre (mode associé à la valeur propre λ dont la partie réelle est supérieure à 0, $Re(\lambda) > 0$). Les participations des autres modes sont négligées (modes stables associés aux valeurs propres à partie réelle négative, $Re(\lambda) < 0$). La recherche du cycle limite, en terme d’amplitude mais aussi de période, se base alors sur le suivi de l’évolution du mode instable, par l’intermédiaire de l’évolution de sa valeur propre associée : les évolutions des parties réelle et imaginaire servent alors respectivement d’indicateurs d’évolution vers le cycle limite et du changement de la période associée.

En effet, quand le système non-linéaire devient instable (du point de vue de son point d’équilibre), l’équation dynamique 2.44 est gouvernée en première approximation par l’évolution croissante du mode instable donnée par

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \Psi e^{\lambda t} + \bar{\Psi} e^{\bar{\lambda} t} \quad (2.45)$$

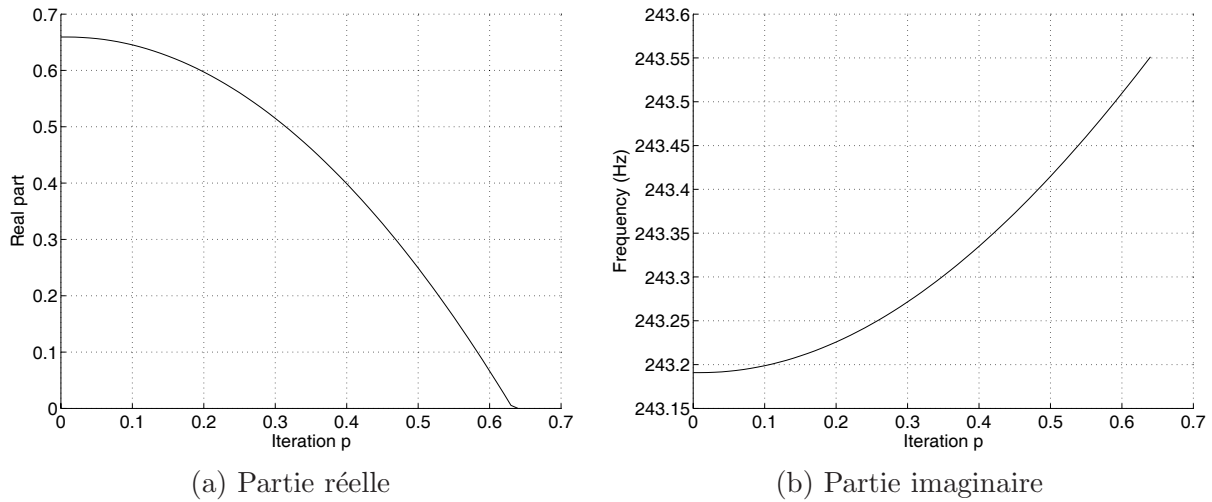


FIG. 2.8 – Evolution des parties réelles et imaginaires du mode non-linéaire complexe instable dans le cas de la configuration “proche” du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.001\mu_0$)

avec λ et $\bar{\lambda}$ les valeurs propres complexes associées au mode non-linéaire (et son conjugué) provenant de l’analyse du système linéarisé 2.3. Ψ et $\bar{\Psi}$ définissent les vecteurs propres associés. L’évolution du mode instable tend alors vers un cycle limite (sous l’hypothèse de son existence) lorsque la partie réelle du mode instable devient nulle ($Re(\lambda) = 0$). L’équation 2.45 définit alors la solution périodique stable approchée $\tilde{\mathbf{Y}}$ qui ne dépend que de la paire des valeurs propres pures imaginaires $\lambda = -\bar{\lambda} = i\omega_1$ avec les vecteurs propres associés $\Psi = \Psi_1$ et $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_1$

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) = p \left(\Psi_1 e^{i\omega_1 t} + \bar{\Psi}_1 e^{-i\omega_1 t} \right) \quad (2.46)$$

avec p l’amplitude de la solution périodique approchée.

La problématique réside donc dans le suivi du mode non-linéaire complexe (en termes de pulsation ω_1 et vecteur propre associé Ψ_1) par suivi de l’amplitude p de la solution périodique, ce dernier paramètre définissant le paramètre de contrôle du système. Pour ce faire, une estimation des évolutions des valeurs propres lors de la “montée” sur le cycle limite est proposée par l’intermédiaire de la divergence de la solution $\tilde{\mathbf{Y}}(t, p)$

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t, p) = p \left(\Psi_1(p) e^{\lambda(p)t} + \bar{\Psi}_1(p) e^{\bar{\lambda}(p)t} \right) \quad (2.47)$$

pour une valeur d’amplitude p donnée. Cette approximation nécessite une initialisation de l’amplitude $p = \Delta p$ (choisie à valeur faible) pour permettre l’existence d’un cycle divergent initial. Afin d’estimer les évolutions de la valeur propre $\lambda(p)$ et du vecteur propre associé $\Psi_1(p)$ le système 2.44 est approché par son système linéaire équivalent, par l’intermédiaire de la méthode de la linéarisation équivalente [19, 20]

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{FNL}(\tilde{\mathbf{y}}) \approx \mathbf{A}\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{A}_{\mathbf{FNL}}\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{\mathbf{equi}}\tilde{\mathbf{y}} \quad (2.48)$$

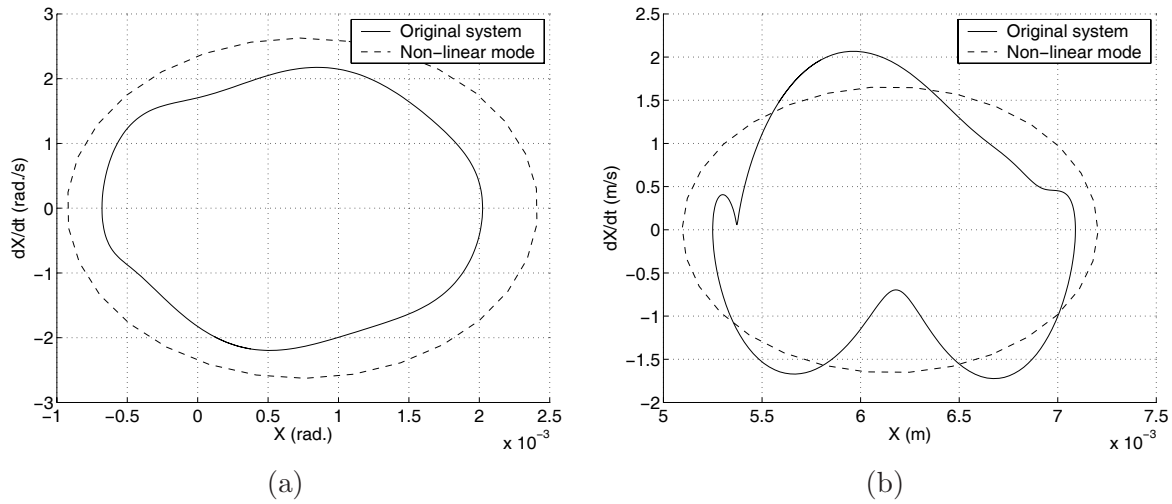


FIG. 2.9 – Cycles limites par la méthode des modes non-linéaires complexes dans la configuration “loin” du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.1\mu_0$)

où \mathbf{A}_{FNL} définit les termes linéaires équivalents des expressions non-linéaires $\mathbf{FNL}(\tilde{\mathbf{y}})$. $\tilde{\mathbf{y}}$ correspond à la solution périodique associée. Son expression est donnée par

$$\tilde{\mathbf{y}}(t, p) = p \left(\Psi_1(p) e^{i\omega(p)t} + \bar{\Psi}_1(p) e^{-i\omega(p)t} \right) \quad (2.49)$$

où $\omega(p)$ correspond à la pulsation de la solution périodique estimée, provenant de la partie imaginaire de la valeur propre $\lambda(p)$. L’estimation du système linéaire équivalent est obtenue par minimisation de la différence entre les termes linéaires équivalents \mathbf{A}_{FNL} et non-linéaires \mathbf{FNL}

$$\epsilon \equiv \mathbf{FNL}(\tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{A}_{\text{FNL}}\tilde{\mathbf{y}} \quad (2.50)$$

sur la période estimée par l’intermédiaire du critère de minimisation $\text{Min} \left(\int_0^{\frac{2\pi}{\omega(p)}} \epsilon^T \epsilon dt \right)$.

Ainsi, les valeurs propres $\lambda(p)$ et vecteurs propres associés $\Psi_1(p)$ provenant de la matrice \mathbf{A}_{equi} indiquent les évolutions des parties réelles et formes du cycle du mode instable. Par incrémentation de la quantité δp du paramètre de contrôle p , l’évolution du mode non-linéaire complexe est réalisée. La solution périodique stable auto-entretenu est alors obtenue lorsque la montée en divergence devient nulle, soit la valeur propre $\lambda(p)$ du mode instable devient imaginaire pure.

2.3.2 Application industrielle

Cette méthode non-linéaire est mise en place afin de retrouver les niveaux vibratoires précédemment obtenus (application industrielle du frein aéronautique). Tout d’abord, les figures 2.7 illustrent les cycles limites obtenus lorsque nous nous situons dans une configuration “proche” du point de bifurcation de Hopf, les figures 2.8(a) et (b) montrant les évolutions des parties réelles et imaginaires du mode

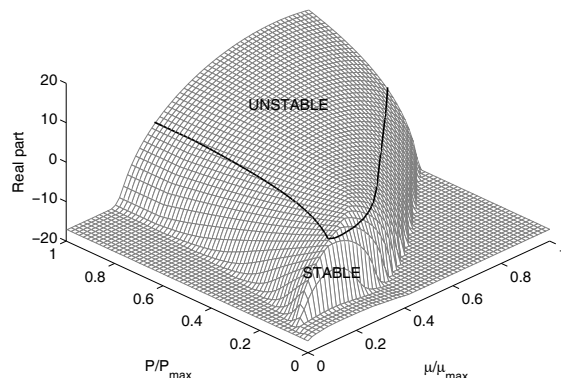
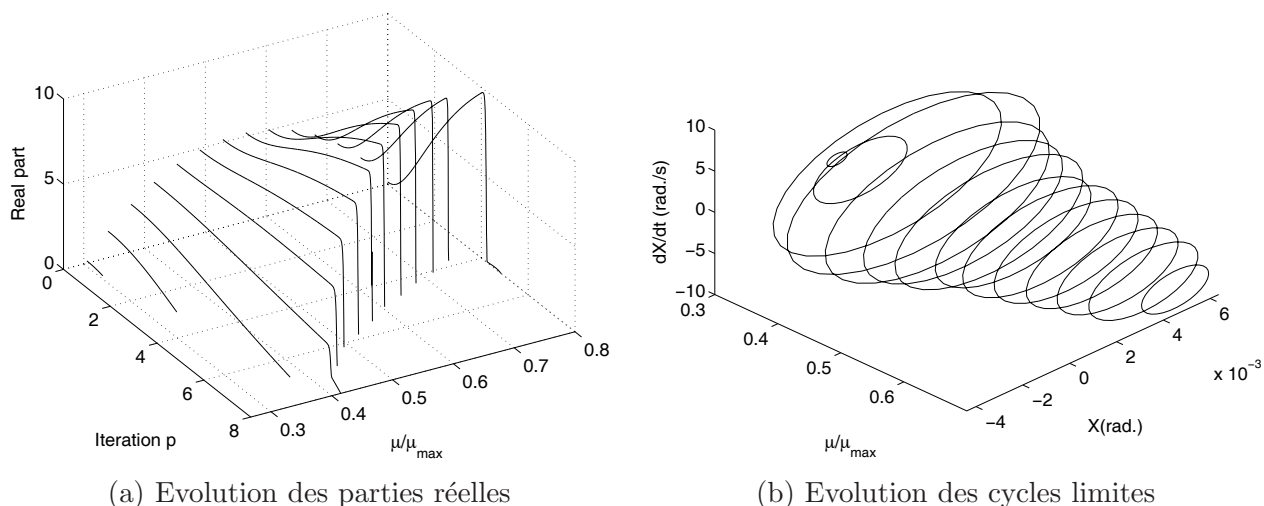


FIG. 2.10 – Stabilité du système



(a) Evolution des parties réelles

(b) Evolution des cycles limites

FIG. 2.11 – Evolution de la partie réelle du mode non-linéaire complexe instable et d'un cycle limite associé en fonction du coefficient de frottement

instable lors de la recherche du cycle stationnaire. Nous observons que les cycles obtenus constituent une approximation satisfaisante des cycles limites exacts. Nous pouvons noter que la méthode de l'extension de la variété centrale par les approximants multi-variables donne des résultats plus proches de la solution exacte (comme indiqué en figures 2.5), puisque la méthode des modes non-linéaires complexes néglige la contribution des modes stables dans l'estimation de la réponse des cycles limites. Plus précisément, la méthode des modes complexes approche les termes non-linéaires par des contributions linéaires équivalentes sans tenir compte des participations des modes stables, à l'inverse de la méthode de la variété centrale (équation 2.13). Un avantage de la méthode des modes complexes par rapport à

la variété centrale est le gain en temps de calcul CPU qui est de l'ordre de 100 (soit un gain total par rapport à l'intégration temporelle de l'ordre de 100000).

Ensuite, la méthode des modes non-linéaires complexes est appliquée loin du point de bifurcation de Hopf pour $\mu = 1.1\mu_0$ (cas pour lequel l'extension de la variété centrale n'est plus utilisable). Les cycles limites obtenus sont donnés en figures 2.9. L'avantage de cette méthode est clairement mise en évidence : les cycles limites restent très proches des cycles limites obtenus par intégration temporelle, ceci pour un coût en terme de temps de calcul très faible (gain en temps CPU de l'ordre de 100000).

Enfin, l'un des enjeux industriels consiste à pouvoir estimer les évolutions des cycles limites lorsque nous "traversons" les zones instables du système non-linéaire. Afin de montrer toute l'efficacité de cette méthode par rapport à cette problématique, nous réalisons une recherche des cycles limites en traversant la zone instable pour $P = 0.5P_{max}$ (figure 2.10), le paramètre de contrôle évolutif étant le coefficient de frottement. Les évolutions de la partie réelle du mode complexe et d'un cycle limite sont données en figures 2.11(a) et (b) respectivement. Cette dernière étude illustre aussi toute la complexité des systèmes dynamiques non-linéaires frottants sujets à des phénomènes de flottement : il n'existe pas de corrélation directe entre la valeur de la partie réelle du mode instable du système linéarisé et l'amplitude du cycle limite résultant. Une analyse non-linéaire est donc indispensable pour estimer le niveau vibratoire lors d'un flottement.

Pour conclure, la méthode des modes non-linéaires complexes répond aux attentes aussi bien en termes d'estimation de cycles limites proche et loin du point de bifurcation de Hopf, que du temps de calcul associé. Cependant, nous pouvons observer que la solution dynamique non-linéaire obtenue reste une approximation mono-harmonique guidée par le mode instable au point d'équilibre. Ainsi, une méthode non-linéaire prenant en compte la contribution des modes stables et les ordres sous et/ou sur-harmoniques serait intéressante. Ceci nous amène à la méthode de la *balance harmonique sous contraintes*.

2.4 Méthode de la balance harmonique sous contraintes

2.4.1 Méthodologie

Nous recherchons donc à approcher les cycles limites du système dynamique non-linéaire 2.1 sous la forme d'une série de Fourier tronquée de la forme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{B}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right) + \mathbf{A}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right) \right) \quad (2.51)$$

où ω définit la fréquence fondamentale (inconnue à priori) du cycle limite du système non-linéaire. ν correspond à un entier permettant de prendre en compte les composantes sur-harmoniques de la réponse non-linéaire. Les termes non-linéaires frottants $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{x}, \mu)$ du système 2.1 sont approchés sous la forme

$$\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{C}_0 + \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{C}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right) + \mathbf{S}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right) \right) \quad (2.52)$$

Cette décomposition des termes non-linéaires $\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{x}, \mu)$ dans la base de Fourier tronquée choisie est réalisée par des passages alternés “fréquence-temps” de la forme [21]

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{B}_0 \ \mathbf{A}_1 \ \mathbf{B}_1 \ \dots \ \mathbf{A}_m \ \mathbf{B}_m]^T & \xrightarrow{\text{FFT}} & \mathbf{x}(t) \\ & & \downarrow \\ \underbrace{[\mathbf{C}_0 \ \mathbf{S}_1 \ \mathbf{C}_1 \ \dots \ \mathbf{S}_m \ \mathbf{C}_m]^T}_{\text{Domaine fréquentiel}} & \xleftarrow{\text{IFFT}} & \underbrace{\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{x}, \mu)}_{\text{Domaine temporel}} \end{array} \quad (2.53)$$

La détermination des cycles limites passent alors par la recherche des coefficients de Fourier \mathbf{B}_0 , \mathbf{A}_k et \mathbf{B}_k qui vérifient au mieux les $(2m + 1) * n$ équations (avec n le nombre de degrés de liberté du système) obtenues par substitution des relations 2.51 et 2.52 dans le système 2.1. Ceci revient alors à minimiser l'ensemble des résidus $\mathbf{R}_{c,0}$, $\mathbf{R}_{s,k}$ et $\mathbf{R}_{c,k}$ (avec $k = 1, \dots, m$) définis par

$$\mathbf{R}_{c,0} = \mathbf{K}\mathbf{B}_0 - \mathbf{C}_0 - \mathbf{F}_p \quad (2.54)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{s,k} \\ \mathbf{R}_{c,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \left(\frac{k}{\nu}\omega\right)^2 \mathbf{M} & -\frac{k}{\nu}\omega \mathbf{C} \\ \frac{k}{\nu}\omega \mathbf{C} & \mathbf{K} - \left(\frac{k}{\nu}\omega\right)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix} \quad \text{pour } k = 1, \dots, m \quad (2.55)$$

Les relations 2.54 définissent les positions d'équilibre statique du système dynamique non-linéaire 2.1 et correspondent à une réécriture de l'équation statique non-linéaire 2.2 dans la base de Fourier tronquée choisie. Les équations 2.55 représentent les solutions stationnaires approchées du système dynamique non-linéaire. Nous rappelons que ω définit la fréquence fondamentale du cycle limite qui est donc par nature une inconnue du problème.

La méthode de la balance harmonique écrite sous cette forme donnerait comme solution finale un point d'équilibre statique, ce dernier correspondant à la solution exacte du système 2.54 et annulant l'ensemble des équations 2.55 (avec l'ensemble des résidus $\mathbf{R}_{c,0}$, $\mathbf{R}_{s,k}$ et $\mathbf{R}_{c,k}$ nuls). Cette solution décrit alors un point d'équilibre qui est instable si on se situe au delà de la frontière de stabilité du système, et stable dans le cas contraire. Ainsi, afin de pouvoir estimer les cycles limites sous la forme 2.51, une contrainte sur la nature de la solution recherchée doit être ajoutée : cette contrainte consiste alors à ne s'intéresser qu'à la recherche des solutions dynamiques non-linéaires stationnaires stables qui définissent donc les cycles limites stables du système.

Afin de suivre la montée en divergence de la solution non-linéaire et de détecter la solution stationnaire périodique, nous utilisons la technique développée dans le paragraphe précédent 2.3 *Méthode des modes non-linéaires complexes* : à partir de la solution périodique $\mathbf{x}(t)$ décrite par la série de Fourier tronquée 2.51, nous recherchons le système linéaire équivalent [19, 20]

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{FNL}(\tilde{\mathbf{y}}) \approx \mathbf{A}\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{A}_{\text{FNL}}\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{\text{equi}}\tilde{\mathbf{y}} \quad (2.56)$$

avec $\tilde{\mathbf{y}} = [\mathbf{x} \ \dot{\mathbf{x}}]^T$. \mathbf{A}_{FNL} correspond aux termes linéaires équivalents des expressions non-linéaires $\mathbf{FNL}(\tilde{\mathbf{y}})$. Ils sont obtenus par minimisation de la différence 2.50 en approximant la solution $\tilde{\mathbf{y}}$ à partir de la série de Fourier tronquée à l'ordre m définie en équation 2.51.

Les valeurs propres $\lambda_{\mathbf{A}_{\text{equi}}}$ servent alors d'indicateur sur l'obtention du cycle limite. Si au moins une valeur propre comporte une partie réelle nulle alors que l'ensemble des parties réelles des autres

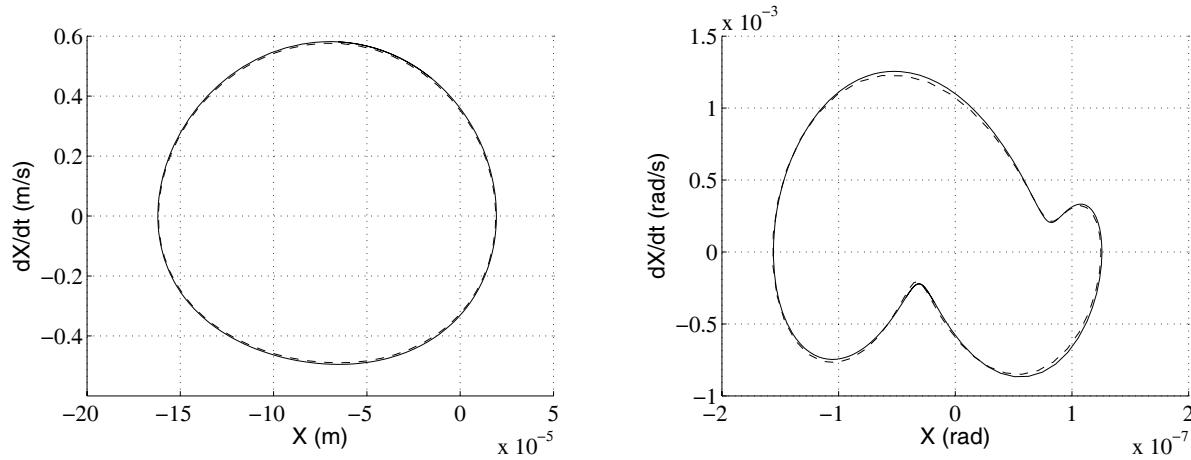


FIG. 2.12 – Cycles limites par la méthode de la balance harmonique sous contraintes pour une configuration “proche” du point de bifurcation de Hopf avec $\mu = 1.001\mu_0$ (– intégration temporelle, – – méthode de la balance harmonique sous contraintes)

valeurs propres sont négatives, la solution 2.51 correspond à un cycle limite stationnaire. Si au moins une partie réelle est positive, la solution non-linéaire 2.51 est en montée de divergence. Si toutes les parties réelles sont négatives, la solution non-linéaire est amortie.

Ainsi, la méthode de la balance harmonique sous contraintes revient à déterminer l'ensemble des coefficients \mathbf{B}_0 , \mathbf{B}_k , et \mathbf{A}_k (avec $k = 1, \dots, m$) ainsi que la fréquence ω décrivant la solution non-linéaire sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{B}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right) + \mathbf{A}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\omega t\right) \right) \quad (2.57)$$

Ces derniers vérifient donc les deux contraintes

$$\mathbf{R}_{c,0}^2 + \sum_{k=1}^m (\mathbf{R}_{s,k}^2 + \mathbf{R}_{c,k}^2) < \epsilon_1 \quad (2.58)$$

$$|Max(Real(\lambda_{\mathbf{A}_{\text{equi}}}))| < \epsilon_2 \quad (2.59)$$

avec ϵ_1 et ϵ_2 proches de zéro. La relation 2.58 correspond à l'équilibre des équations dynamiques non-linéaires 2.54 et 2.55, tandis que la seconde relation 2.59 définit le cycle stationnaire (et donc excluant les points d'équilibre instable).

2.4.2 Application industrielle

L'efficacité de cette méthode de balance harmonique sous contraintes est illustrée sur une application industrielle d'un frein automobile (figure 2.1). Tout d'abord, la figure 2.12 illustre l'efficacité

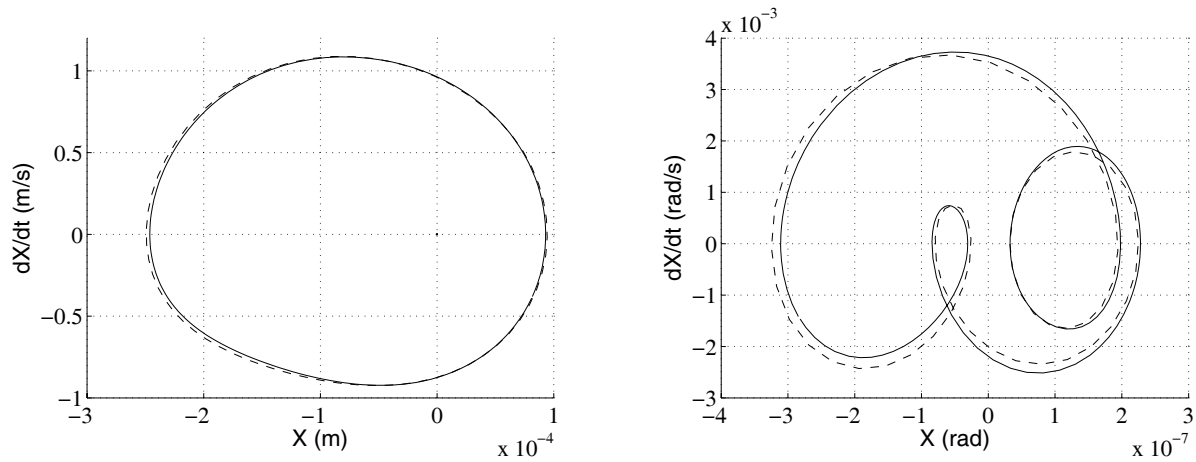


FIG. 2.13 – Cycles limites par la méthode de la balance harmonique sous contraintes pour une configuration “loin” du point de bifurcation de Hopf avec $\mu = 1.2\mu_0$ (– intégration temporelle, –– méthode de la balance harmonique sous contraintes)

de la méthode pour la détermination des cycles limites dans une configuration “proche” du point de bifurcation de Hopf (pour $\mu = 1.001\mu_0$). Nous observons donc que cette méthode permet de décrire parfaitement le cycle limite exact (trois harmoniques sont considérées dans l’approximation de la solution périodique 2.51). Ainsi nous pouvons déterminer la réponse dynamique non-linéaire de façon précise même si cette dernière s’avère complexe. Pour un tel cas (“proche” du point de bifurcation de Hopf), la fréquence ω obtenue au final est très proche de celle donnée par l’intermédiaire de l’analyse aux valeurs propres du système linéarisé.

La figure 2.13 montre les cycles limites obtenus dans une configuration “loin” du point de bifurcation de Hopf (pour $\mu = 1.2\mu_0$). Là aussi, la méthode de la balance harmonique sous contraintes donne d’excellents résultats aussi bien en terme de cycles limites que de l’estimation de la fréquence ω de la solution non-linéaire (par comparaison avec l’intégration temporelle). Il est intéressant de noter sur ce dernier point que l’écart obtenu entre la fréquence donnée par le système linéarisé du mode instable et la fréquence du cycle limite peut être important (de l’ordre de 10 – 20%). De plus, même si ce dernier reste faible (de l’ordre de 1 – 2%), le fait de ne pas considérer la fréquence du cycle limite comme étant une inconnue du problème conduit pratiquement systématiquement à une estimation erronée du cycle limite final. La recherche de la fréquence de la solution périodique 2.51 en plus des coefficients de Fourier est donc inévitable.

Dans l’ensemble des cas, les temps de calcul associés à la méthode de la balance harmonique sous contraintes (à l’ordre $m = 3$ permettant ici d’obtenir la solution exacte) sont nettement inférieurs à ceux résultant d’une intégration temporelle (gain de l’ordre de 10000), mais sont bien entendu supérieurs aux différents cas de la méthode des modes non-linéaires complexes (facteur entre les deux méthodes de l’ordre de 10). Cette perte en terme de temps de calcul est cependant compensée par l’obtention de la solution non-linéaire exacte, ce que la méthode des modes non-linéaires ne permet

pas de réaliser.

Pour conclure, cette méthode de la balance harmonique sous contraintes répond parfaitement aux attentes et objectifs fixés et constitue donc un parfait complément à la méthode des modes non-linéaires complexes en permettant d’obtenir la solution non-linéaire exacte aussi complexe soit-elle, “proche” mais aussi “loin” du point de bifurcation de Hopf.

2.5 Conclusion

Les recherches développées dans le cadre de ce chapitre mettent en avant différents types de méthodes d’analyse non-linéaire permettant d’estimer les niveaux vibratoires et cycles limites pour des systèmes sujets à des instabilités de flottement.

La première approche correspondant à une “*extension de la méthode de la variété centrale par des approximants fractionnaires*” [1, 3, 5, 6, 13], se base sur une réduction du système dynamique non-linéaire sur les variétés centrées. Le principal avantage de cette méthode non-linéaire réside dans une réduction importante du nombre de degrés de liberté du système non-linéaire initial. L’un des inconvénients majeurs porte sur son application restreinte au voisinage du point de bifurcation de Hopf.

La deuxième approche, appelée “*méthode des modes non-linéaires complexes*” [4, 18], se focalise sur les notions de suivi des modes non-linéaires et d’approximation du système dynamique non-linéaire par un système linéaire équivalent. Elle permet de suivre l’évolution du mode instable jusqu’à l’obtention du cycle limite, ce dernier correspondant à la solution stationnaire du système non-linéaire. L’avantage de cette méthode repose sur sa simplicité de mise en oeuvre et d’utilisation, ainsi que sur sa rapidité d’obtention des cycles limites. De plus, elle permet d’obtenir des cycles limites loin des points de bifurcation de Hopf. L’un des inconvénients réside dans une approximation du cycle limite uniquement par l’évolution du mode instable. Les contributions des modes stables lors de la montée vers le cycle limite sont donc négligées.

Enfin, la troisième méthode, appelée “*méthode de la balance harmonique sous contraintes*”, correspond à une approche fréquentielle qui recherche les cycles limites sous la forme d’une série de Fourier tronquée. Par rapport à la méthode de la balance harmonique classique, l’approche non-linéaire proposée permet une estimation de la fréquence fondamentale des cycles limites et utilise une contrainte sur les parties réelles du système linéaire équivalent afin d’estimer les niveaux vibratoires. Nous pouvons remarquer que cette dernière méthode constitue tout naturellement un parfait complément de la méthode des modes non-linéaires complexes en proposant une méthodologie similaire du point de vue de la détection des cycles stationnaires, mais plus complexe à travers une estimation exacte de la forme des cycles non-linéaires. Le premier avantage de cette méthode réside dans la prise en compte des contributions de chacun des modes du système non-linéaire. Le second consiste à laisser la fréquence comme une inconnue du problème, ce qui permet d’estimer la solution non-linéaire finale exacte et d’éviter de nombreux inconvénients propres aux méthodes de balance harmonique classiques.

Pour conclure, nous pouvons dire que ces trois méthodes non-linéaires répondent à différentes situations de recherche des cycles limites pour les systèmes frottants non-linéaires. Des extensions

de ces méthodes à des problématiques plus complexes peuvent donc maintenant être envisagées en s'intéressant par exemple à la recherche des cycles limites dont la dynamique non-linéaire est gouvernée par plusieurs modes instables ou à la notion "de détermination des amplitudes transitoires maximales". Ces aspects seront donc discutés et développés dans le dernier chapitre de ce mémoire *Perspectives de recherche*.

Chapitre 3

Vers une compréhension accrue de la stabilité des systèmes frottants

Dans le chapitre précédent, nous venons de voir que la stabilité des systèmes dynamiques frottants passe tout d’abord par la recherche des points d’équilibre statiques et de la stabilité associée. La détermination des niveaux vibratoires est ensuite réalisée lorsque ces points d’équilibre sont instables. Nous avons démontré que des méthodes non-linéaires permettent d’obtenir rapidement et avec précision ces “cycles limites”. Ainsi, dans une phase de conception, des études portant sur la stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires frottants peuvent être aisément menées aussi bien pour statuer sur la stabilité du système que pour estimer les niveaux vibratoires.

A première vue, la problématique de l’étude de la stabilité des systèmes frottants semble être un sujet résolu depuis de nombreuses années. Cependant, il apparaît que les études et recherches menées sur les instabilités de flottement pour les systèmes non-linéaires frottants ne s’intéressent que de façon très superficielle aux rôles joués par les divers paramètres physiques [1–4, 22, 23]. Classiquement, les études menées se focalisent sur des effets bien connus (effet déstabilisant d’une augmentation du coefficient de frottement, influence de la pression appliquée, rôle des lois d’évolutions du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de rotation du système,...) qui ne permettent pas de reproduire ou d’expliquer l’ensemble des phénomènes observés dans la réalité.

L’objectif de ce chapitre est donc de s’orienter vers une compréhension accrue de la stabilité des systèmes frottants et d’illustrer, à travers le rôle paradoxal que peut jouer l’amortissement structural sur ce type de problème, toute la complexité et le large champ d’investigation restant encore à réaliser sur cette problématique.

Afin d’illustrer nos propos, nous reviendrons sur les fondamentaux de la stabilité des systèmes frottants linéaires à deux degrés de liberté. Ensuite, nous appliquerons les résultats et observations effectuées sur ces systèmes phénoménologiques simples à des structures industrielles linéaires et non-linéaires, à travers des études de stabilité des points d’équilibre, mais aussi de détermination des niveaux vibratoires.

3.1 Systèmes phénoménologiques à deux degrés de liberté

3.1.1 Préambule sur la stabilité des systèmes frottants à deux degrés de liberté

Dans cette partie nous allons nous intéresser au rôle joué par chacun des termes physiques présents dans les systèmes frottants sur la stabilité de points d'équilibre. Afin de mener des développements analytiques mettant en avant l'interaction pouvant exister entre chaque paramètre physique, nous nous focalisons tout d'abord sur les systèmes dynamiques linéaires comportant deux degrés de liberté.

Considérons un système dynamique linéaire auto-entretenu et non-conservatif de dimension 2 de la forme

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\delta\mathbf{C} + \rho\mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \varphi\mathbf{N})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

avec \mathbf{C} , \mathbf{G} , \mathbf{K} et \mathbf{N} correspondant aux matrices d'amortissement structural, gyroscopique, de raideur et des forces circulatoires avec $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$ et $\mathbf{N} = -\mathbf{N}^T$. δ , ρ et φ correspondent aux facteurs de contrôles associés respectivement aux termes d'amortissement, gyroscopique et circulatoire. La matrice de masse a été prise égale à l'identité pour simplifier les expressions qui vont suivre.

L'analyse de stabilité du système 3.1 s'effectue alors par l'intermédiaire de la détermination des valeurs propres λ du polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{I}\lambda^2 + (\delta\mathbf{C} + \rho\mathbf{G})\lambda + \mathbf{K} + \varphi\mathbf{N}) \quad (3.2)$$

Soit en considérant \mathbf{G} et \mathbf{N} comme des matrices symplectiques (et en reportant les poids sur les facteurs ρ et φ), l'équation 3.2 donne

$$P(\lambda) = \lambda^4 + \delta\text{tr}\mathbf{D}\lambda^3 + (\text{tr}\mathbf{K} + \delta^2\det\mathbf{D} + \rho^2)\lambda^2 + (\delta\text{tr}\mathbf{K}\text{tr}\mathbf{D} - \delta\text{tr}\mathbf{D} + 2\rho\varphi)\lambda + \det\mathbf{K} + \varphi^2 \quad (3.3)$$

Système purement circulatoire ou purement gyroscopique

Dans le cas d'un système purement circulatoire ($\delta = \rho = 0$), les quatre valeurs propres λ_{\pm} et $-\lambda_{\pm}$ sont données par

$$\lambda_{\pm}(\varphi) = \sqrt{-\frac{1}{2}\text{tr}\mathbf{K} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{K})^2 - 4(\det\mathbf{K} + \varphi^2)}} \quad (3.4)$$

Si $\text{tr}\mathbf{K} > 0$ et $\det\mathbf{K} \leq 0$, le système est stable pour $\varphi_d^2 < \varphi^2 < \varphi_f^2$, instable de type divergence pour $\varphi^2 \leq \varphi_d^2$ et instable de type flottement pour $\varphi^2 \geq \varphi_f^2$ (en définissant alors les facteurs circulatoires de divergence $\varphi_d = \sqrt{-\det\mathbf{K}}$ et de flottement $\varphi_f = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{tr}\mathbf{K})^2 - 4\det\mathbf{K}}$). Si $\text{tr}\mathbf{K} > 0$ et $\det\mathbf{K} > 0$, le système est stable pour $\varphi^2 < \varphi_f^2$ et instable de type flottement pour $\varphi^2 \geq \varphi_f^2$. Si $\text{tr}\mathbf{K} \leq 0$, le système est instable.

La fréquence d'instabilité de flottement du système (pour $\varphi = \varphi_f$) est alors donnée par $\rho_f = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}\mathbf{K}}$. De plus, les évolutions des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du couplage de modes dans le plan complexe suivent une ellipse vérifiant $\text{Im}\lambda^2 - \text{Re}\lambda^2 = \rho_f^2$.

Dans le cas d'un système purement gyroscopique ($\delta = \varphi = 0$), les quatre valeurs propres λ_{\pm} et $-\lambda_{\pm}$ sont données par

$$\lambda_{\pm}(\rho) = \sqrt{-\frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{K} + \rho^2) \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{K} + \rho^2)^2 - 4\det\mathbf{K}}} \quad (3.5)$$

Si $\text{tr}\mathbf{K} < 0$ et $\det\mathbf{K} > 0$, le système est stable pour $\rho_f^2 < \rho^2$, instable de type divergence pour $\rho^2 < \rho_d^2$, instable de type flottement pour $\rho_d^2 \leq \rho^2 \leq \rho_f^2$ (en définissant alors les facteurs gyroscopiques de divergence $\rho_d = \sqrt{-\text{tr}\mathbf{K} - 2\sqrt{-\det\mathbf{K}}}$ et de flottement $\rho_f = \sqrt{-\text{tr}\mathbf{K} + 2\sqrt{\det\mathbf{K}}}$). Si $\text{tr}\mathbf{K} > 0$ et $\det\mathbf{K} > 0$, le système est stable. Si $\det\mathbf{K} \leq 0$, le système est instable.

La fréquence d'instabilité de flottement du système (pour $\rho = \rho_f$) est alors donnée par $\rho_f = \sqrt[4]{\det\mathbf{K}}$. Les évolutions des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du couplage de modes dans le plan complexe suivent une ellipse vérifiant $\text{Im}\lambda^2 + \text{Re}\lambda^2 = \rho_f^2$.

Dans le cadre d'un système comportant de l'amortissement structural avec des effets gyroscopique et circulatoire, les critères de Routh-Hurwitz ou l'étude des valeurs propres du polynôme caractéristique défini en équation 3.3 permettent de statuer sur la stabilité du système [24, 25]. Nous rappelons que si le système comporte une ou plusieurs valeurs propres à partie réelle positive, le système est alors instable. Si les valeurs propres ont leur partie réelle négative, il est stable.

Nous nous proposons maintenant d'étudier la stabilité de ce type de système en considérant le rôle joué par l'amortissement structural. Nous examinerons d'abord le cas d'un système ne comportant pas d'effet gyroscopique. Dans un second temps, nous étendrons l'étude à la prise en compte des effets combinés circulatoire et gyroscopique, en présence d'amortissement structural.

3.1.2 Effet et paradoxe de l'amortissement sur des systèmes sans effet gyroscopique

L'objet de cette partie est d'illustrer le paradoxe de l'effet déstabilisant de l'amortissement pour les systèmes frottants comportant uniquement des termes circulatoires (soit $\rho = 0$) s'écrivant sous la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi & 0 \\ 0 & 2\alpha\beta\xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où φ représente l'action circulatoire. α et β définissent respectivement le rapport de fréquence et le rapport d'amortissement entre les deux modes du système, ξ correspondant à l'amortissement structural associé au premier mode.

A partir des critères de Routh-Hurwitz et en choisissant le terme circulatoire φ comme paramètre de contrôle, le point de bifurcation de Hopf pour lequel apparaît une instabilité de flottement (qui constitue donc la frontière de stabilité pour le système) est donné par [24]

$$\varphi^2 = \frac{-\alpha\beta \left((\alpha^2 - 1)^2 - 4\alpha\xi^2(1 + \alpha\beta)(\alpha + \beta) \right)}{(1 + \alpha\beta)^2} \quad (3.7)$$

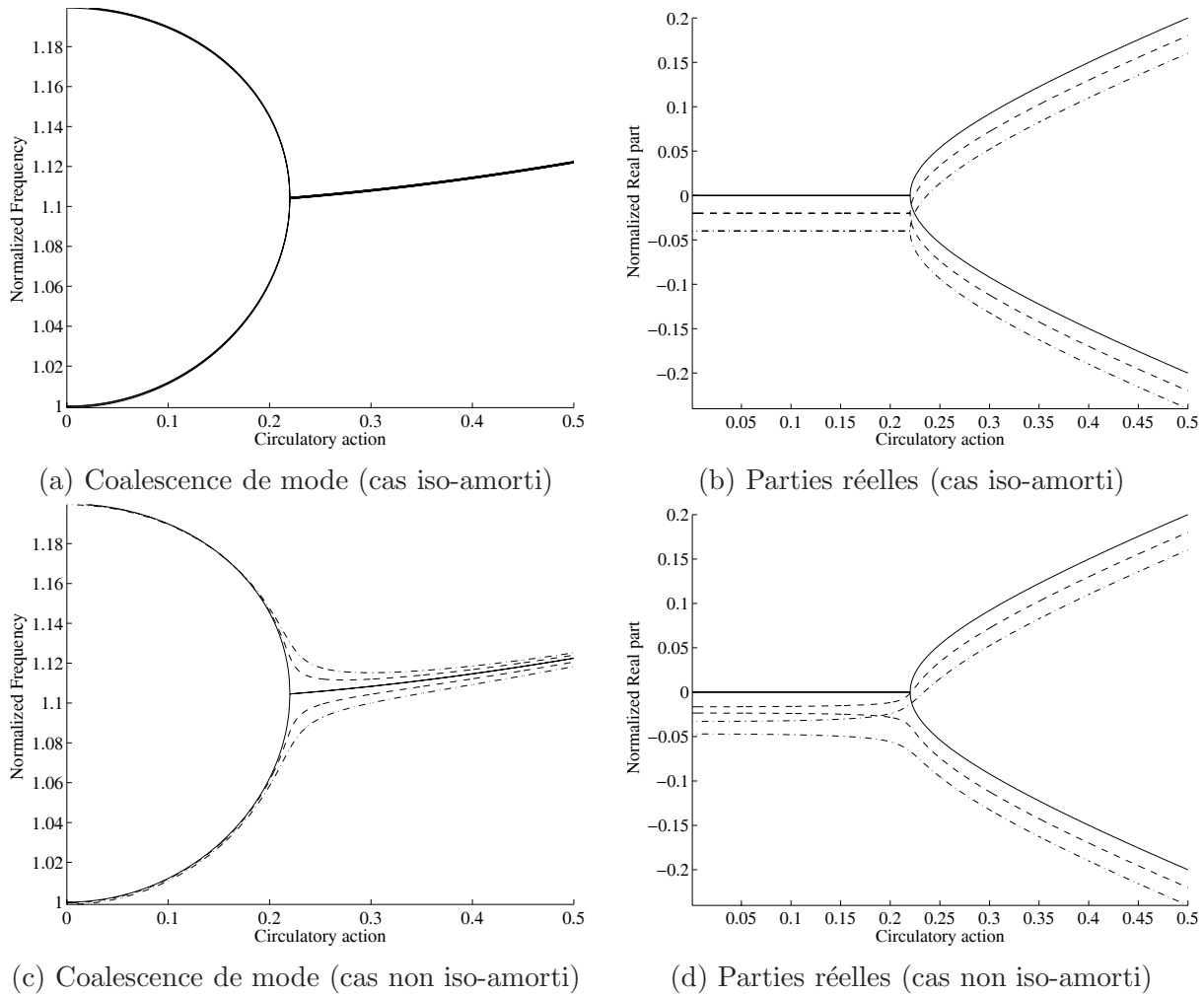


FIG. 3.1 – Evolutions des parties réelles et fréquences dans le cas iso-amorti et non iso-amorti pour $\alpha = 1.2$ (a-b) – non amorti, $-- \xi = 0.02$, $- \cdot - \xi = 0.04$; (c-d) $\alpha\beta = 1.5$ – non amorti, $-- \xi(1 + \alpha\beta) = 0.04$, $- \cdot - \xi(1 + \alpha\beta) = 0.08$

Il apparaît donc clairement que les termes d'amortissement jouent un rôle complexe sur l'estimation du point de bifurcation de Hopf et donc sur les zones de stabilité du système mécanique.

Afin de mieux comprendre le rôle de l'amortissement, les figures 3.1(b) et (d) illustrent les évolutions des parties réelles des valeurs propres associées au système suivant des couples d'amortissement tel que les modes sont iso-amortis ($\alpha\beta = 1$) et non iso-amorti. De plus, les figures 3.1(a) et (c) montrent les évolutions des fréquences associées des deux modes stable et instable dans le cas iso-amorti et non iso-amortie respectivement.

Il apparaît tout d'abord que l'augmentation d'un amortissement iso-réparti sur les deux modes ($\alpha\beta = 1$) décale les courbes des évolutions des parties réelles vers les valeurs négatives, proportionnel-

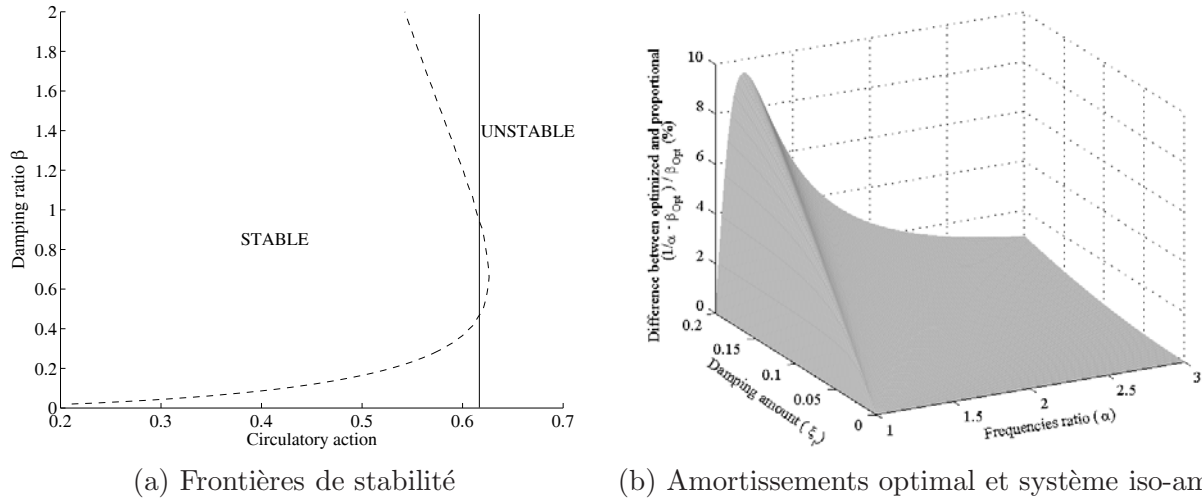


FIG. 3.2 – Evolution des frontières de stabilité et comparaison entre l’optimum de stabilité et le cas iso-amorti (a) – non amortie, -- amortie avec $\alpha = 1.5$ et $\beta = 0.4$

lement à l’amortissement introduit. Cet effet d’ajout d’amortissement, qualifié d’ “abaissant” [24,26], a donc un effet uniquement stabilisant sur le système, le point de bifurcation de Hopf étant alors obtenu pour des valeurs plus élevées de l’action circulatoire. De plus, dans le cas du système iso-amorti, la coalescence des modes stable et instable est dite “parfaite”, leur fréquence associée étant confondue tout au long de l’instabilité de flottement (figure 3.1(a)).

Une analyse de cet effet “abaissant” peut être réalisée à partir d’une comparaison de la solution λ du polynôme caractéristique du système iso-amorti et de la solution Ψ associée du système non-amorti qui vérifient respectivement

$$\lambda^4 + 4\xi\lambda^3 + (1 + \alpha^2 + 4\xi^2)\lambda^2 + 2\xi(1 + \alpha^2)\lambda + \alpha^2 + \varphi^2 = 0 \quad (3.8)$$

$$\Psi^4 + (1 + \alpha^2)\Psi^2 + \alpha^2 + \varphi^2 = 0 \quad (3.9)$$

En recherchant à exprimer le décalage entre ces deux systèmes (en déterminant si la solution λ décalée en partie réelle peut être solution du système non-amorti avec une raideur modifiée tel que $\exists s \in R/\Psi = \lambda + s$) et en comparant les expressions des équations 3.8 et 3.9 ainsi obtenues, nous obtenons après calcul [27]

$$\begin{cases} s = \xi \\ \tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 - 2\xi^2 \\ \tilde{\varphi}^2 = \frac{\alpha^2 + \varphi^2 - \xi^2(2 + \alpha^2 - 2\xi^2)}{\alpha^2 - 2\xi^2} \end{cases} \quad (3.10)$$

Ainsi si λ est solution du système iso-amorti (avec la dynamique associée définie par $\alpha\beta = 1$), alors $\lambda + \xi$ correspond à la solution du système non amorti (avec la dynamique “modifiée” associée définie par $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\varphi}$). Un système dynamique comportant uniquement des termes circulatoires voit donc sa plage de stabilité augmenter par ajout d’iso-amortissement sur les modes de coalescence.

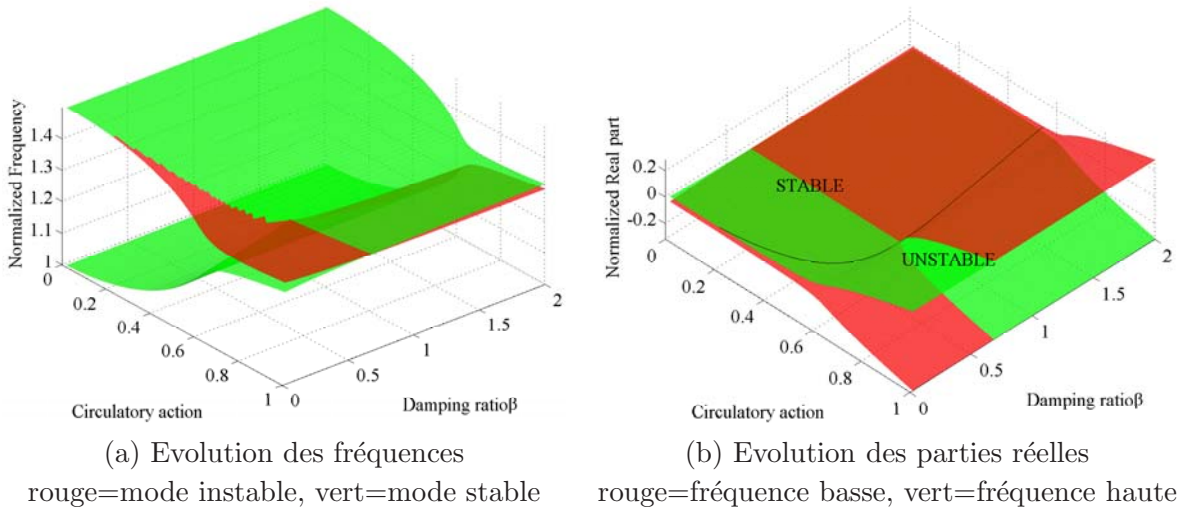


FIG. 3.3 – Evolution des parties réelles et fréquences des modes stable et instable avec le phénomène de saut de fréquence instable (pour $\alpha = 1.5$ et $\beta = 0.4$)

Lorsque les deux modes sont non iso-amortis ($\alpha\beta \neq 1$) outre l’effet “abaissant”, un effet qualifié de “lissant” est observé [24, 26]. Ce lissage apparaît à la fois pour l’évolution des fréquences et des parties réelles (figure 3.1(c) et (d)). La répartition non uniforme d’amortissement se traduit en effet à $\varphi = 0$ par un décalage de $\frac{\xi(1+\alpha\beta)}{2}$ au niveau des parties réelles des deux modes potentiellement stable et instable, et ensuite par une évolution des parties réelles des valeurs propres pour une action circulatoire inférieure au cas critique non-amorti. Il est bon de noter que dans le cas d’un système non iso-amorti, les courbes de coalescence ne sont plus “parfaites”, les fréquences des modes stable et instable étant distinctes lorsque le système est instable (figure 3.1(d)).

Ainsi, l’ajout d’amortissement tel que les modes sont non iso-amortis peut se traduire par un effet “abaissant” prédominant par rapport à l’effet “lissant”, mais aussi peut aboutir au “paradoxe déstabilisant” [28] se traduisant par une déstabilisation du système par ajout d’amortissement. Cet effet déstabilisant de l’amortissement est illustré en figure 3.2(a). Suivant le rapport d’amortissement β entre les modes stable et instable, la frontière de stabilité peut devenir inférieure au cas non-amorti. Si un des modes est très faiblement amorti et que le second l’est fortement, le paradoxe de déstabilisation se produit, traduisant un effet “lissant” prédominant vis à vis de l’effet “abaissant”. Enfin, outre le coalescence non parfaite résultant d’une configuration non iso-amortie, le rapport d’amortissement β dirige totalement le mode qui potentiellement devient instable lors de l’apparition du flottement (figures 3.3(a) et (b)).

Enfin, dans le cas d’un amortissement total suffisamment faible, l’action circulatoire φ passe alors par un optimum vis à vis du rapport d’amortissement β , ce qui traduit bien l’effet du “paradoxe

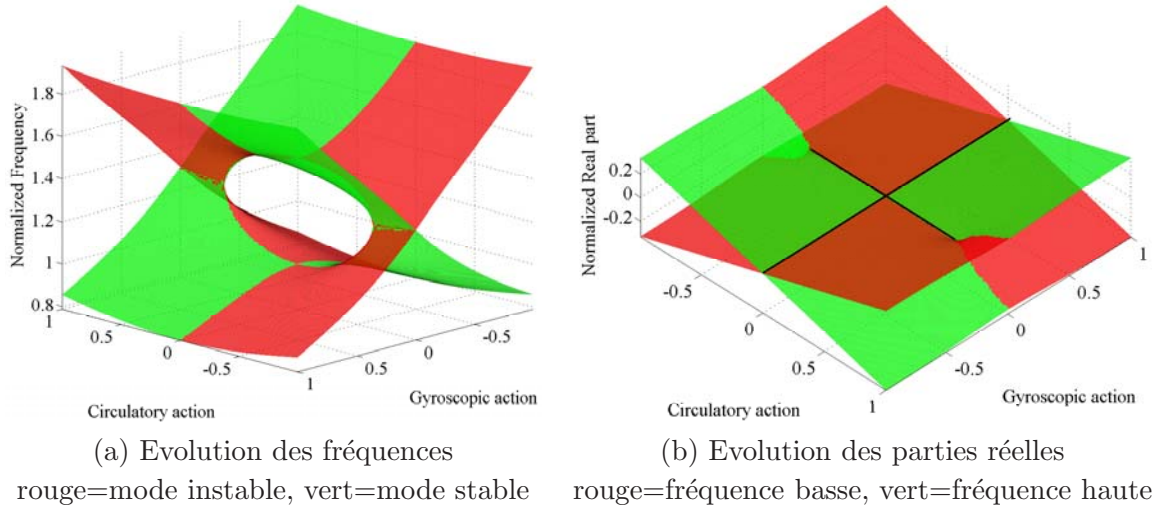


FIG. 3.4 – Effets des termes gyroscopique et circulatoire pour le système non-amorti

déstabilisant”. Cet optimum β_{opt} a pour expression

$$\beta_{opt} = \frac{\sqrt{16(\alpha^4 - \alpha^2 + 1)\xi_t^4 + 4(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 - 1)^2\xi_t^2 + (\alpha^2 - 1)^4} - 4(\alpha^2 - 1)\xi_t^2}{\alpha(4\xi_t^2 + (\alpha^2 - 1)^2)} \quad (3.11)$$

où ξ_t correspond à l’amortissement global du système donné par $\xi_t = \xi(1 + \alpha\beta)$. Cet optimum peut être approché au premier abord par le cas iso-amorti $\alpha\beta = 1$ [24], c’est à dire pour un système possédant uniquement l’effet “abaissant” et donc sans effet “lissant”. Cet optimum correspond de plus au basculement de la fréquence du mode instable. La comparaison entre cet optimum du rapport d’amortissement exact et le cas iso-amorti sur les deux modes de coalescence est illustrée en figure 3.2(b). Il apparaît très clairement qu’un choix d’amortissement équivalent sur les deux modes est un très bon compromis pour aboutir à une conception robuste des systèmes mécaniques vis à vis de la stabilité.

Comme le montrent les figures 3.3, le mode instable correspond à celui qui a la plus haute fréquence ou la plus basse suivant le rapport d’amortissement β du système. A cet effet, il est bon de noter que le mode qui devient instable du fait de l’évolution du paramètre de contrôle (ici choisi comme étant l’action circulatoire) ne correspond donc plus à celui qui est le moins amorti pour une action circulatoire nulle, mais à celui qui aura sa partie réelle augmentant du fait de l’effet “lissant”.

3.1.3 Effets combinés des termes gyroscopiques, circulatoires et de l'amortissement

Dans cette partie nous allons étendre les résultats précédents aux systèmes comportant des termes gyroscopiques. L'équation dynamique précédente est donc étendue sous la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi & \rho \\ -\rho & 2\alpha\beta\xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

où ρ et φ représentent les actions gyroscopique et circulatoire respectivement.

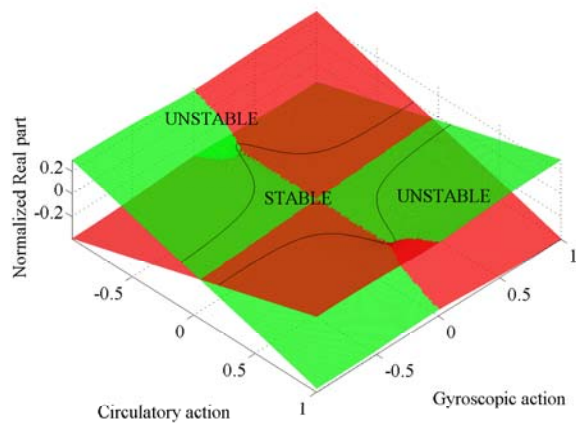
Les figures 3.4(a) et (b) illustrent les évolutions des fréquences et parties réelles des deux modes du système en fonction des actions circulatoire et gyroscopique. Pour une action circulatoire nulle, il apparaît bien que le système purement gyroscopique est stable (comme explicité dans le paragraphe 3.1.1) du fait que $\det\mathbf{K} > 0$ et $\text{tr}\mathbf{K} > 0$. Dans le cas d'une action gyroscopique nulle, nous retrouvons que le système est instable de type flottement pour $\varphi^2 \geq \varphi_f^2$ et stable pour $\varphi^2 < \varphi_f^2$ avec $\varphi_f^2 = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{tr}\mathbf{K})^2 - 4\det\mathbf{K}}$ (comme explicité dans le paragraphe 3.1.1, étant donné que le système vérifie $\text{tr}\mathbf{K} > 0$ et $\det\mathbf{K} > 0$).

Les figures 3.5(a), (c) et (e) illustrent l'ajout d'un amortissement (iso amorti et non iso-amorti) sur les surfaces des parties réelles suivant les actions gyroscopique et circulatoire. Les évolutions des frontières de stabilité sont dessinées en figures 3.5(b), (d) et (f) pour plusieurs configurations d'amortissement structural total du système.

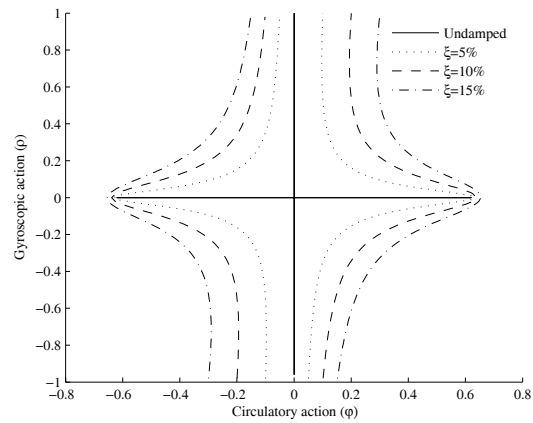
Dans le cas iso-amorti, l'ajout d'amortissement a un effet stabilisant sur le système ce qui se traduit par une augmentation des zones de stabilité dans le plan des actions circulatoire et gyroscopique (figure 3.5(b)). Le schéma du mode potentiellement instable (mode à la partie réelle la plus forte) dans le plan des actions circulatoire et gyroscopique reste inchangé par rapport au cas non-amorti (comparaison des figures 3.4 et 3.5(a)). Nous observons donc uniquement un décalage de la nappe des parties réelles vers les parties négatives, correspondant à un comportement similaire à ce qui a été obtenu dans le paragraphe précédent 3.1.2.

Dans le cas non iso-amorti, nous observons une déformation des nappes et des frontières associées, guidée par le rapport d'amortissement $\alpha\beta$ (figures 3.5(d) et (f)). Pour $\alpha\beta > 1$, la rotation de la frontière correspondant au cas iso-amorti (pour un amortissement total donné) tourne dans le sens trigonométrique dans le plan (φ, ρ) . Pour $\alpha\beta < 1$ la rotation de la frontière se fait dans le sens inverse. De plus, les évolutions, en termes de rotation et de surface, de ces zones de stabilité sont similaires pour un rapport inversement proportionnel d'amortissement $\alpha\beta$. Comme précédemment indiqué dans le paragraphe 3.1.2, un apport d'amortissement fortement non-équivalent entraîne une diminution des zones de stabilité du système. Il apparaît donc que la prise en compte de l'amortissement structural et du rapport d'amortissement entre les deux modes pouvant coalescer est un facteur clé pour statuer sur la stabilité des systèmes dynamiques comportant des actions circulatoire et gyroscopique.

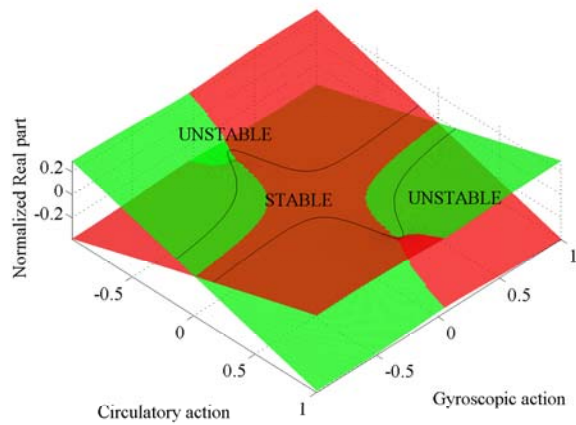
Enfin, l'ajout d'un amortissement non équiréparti "casse" la symétrie d'appartenance de la partie réelle la plus haute vis à vis des modes à fréquence haute ou basse dans le plan des actions circulatoire et gyroscopique (φ, ρ) (figures 3.5(a), (c) et (e)). Si le rapport d'amortissement $\alpha\beta$ est supérieur ou inférieur à 1, le mode potentiellement le plus instable (ayant donc sa partie réelle la plus haute)



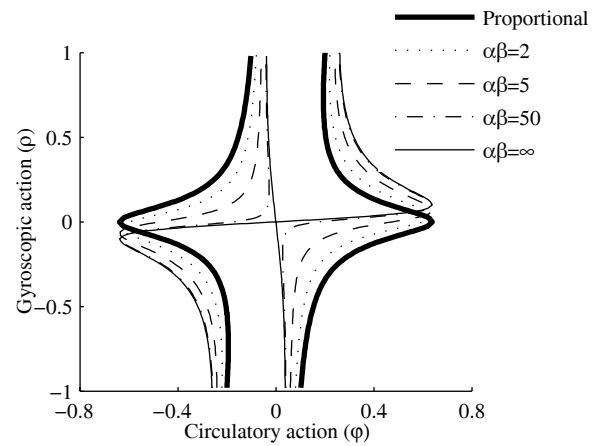
(a) Parties réelles, cas iso-amorti



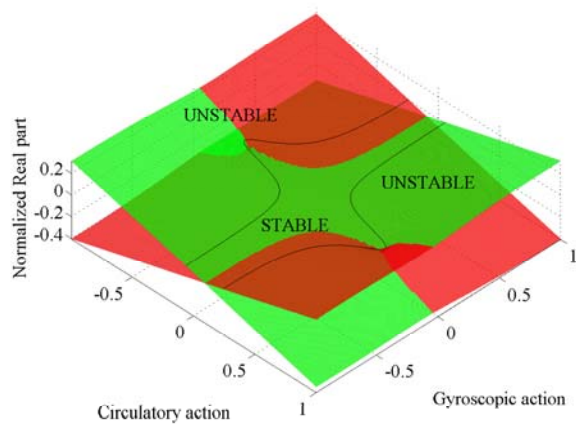
(b) Frontières, cas iso-amorti



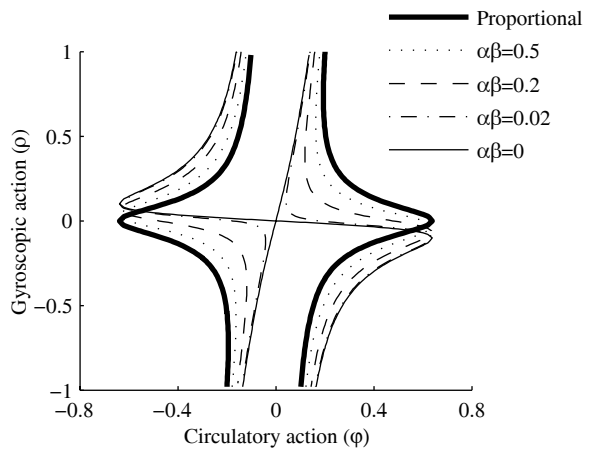
(c) Parties réelles, $\alpha\beta > 1$



(d) Frontières, $\alpha\beta > 1$



(e) Parties réelles, $\alpha\beta < 1$



(f) Frontières, $\alpha\beta < 1$

FIG. 3.5 – Stabilité et frontières associées du système en fonction des termes gyroscopique, circulaire et (a-b) cas iso-amorti, (c-d) cas non iso-amorti $\alpha\beta > 1$, (e-f) cas non iso-amorti $\alpha\beta < 1$ (rouge=féquence basse, vert=féquence haute)

change : ceci est cependant uniquement valable pour des actions circulatoire et gyroscopique faibles (illustrant alors la prédominance de l'effet de l'amortissement équiréparti $\alpha\beta$).

Afin de mieux comprendre ces phénomènes observés vis à vis des actions gyroscopique et circulatoire, la frontière de stabilité (provenant de l'identification des valeurs propres à partie réelle nulle pour le polynôme caractéristique du système complet) vérifie la relation [29]

$$(\varphi\rho + \alpha\xi(\alpha + \beta))^2 - \xi(1 + \alpha\beta)(\varphi\rho + \alpha\xi(\alpha + \beta))(1 + \alpha^2 + \rho^2 + 4\alpha\beta\xi^2) + \xi^2(1 + \alpha\beta)^2(\alpha^2 + \varphi^2) = 0 \quad (3.13)$$

Cette expression nous permet de voir que les deux asymptotes correspondant respectivement à une action gyroscopique qui tend vers l'infini sont données par

$$\varphi_1 = 0 \quad (3.14)$$

$$\varphi_2 = \rho\xi(1 + \alpha\beta) \quad (3.15)$$

Ainsi, nous pouvons en conclure que toute action circulatoire comprise entre les bornes φ_1 et φ_2 (pour une action gyroscopique donnée et amortissements structuraux donnés) entraîne la stabilité du système. Ces bornes illustrent le fait que des actions gyroscopique et circulatoire de même signe auront tendance à stabiliser le système lorsque l'action gyroscopique tend vers l'infini (comme illustré en figures 3.5(d) et (f)).

Dans un second temps, nous proposons d'illustrer le couplage existant entre les actions circulatoire, gyroscopique et l'amortissement structural du système par l'intermédiaire d'une réécriture de l'équation dynamique 3.12 de telle sorte que la matrice de raideur soit diagonale [29]

$$\ddot{\Psi} + \Delta\dot{\Psi} + \Gamma\Psi + K\Psi = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

avec

$$K = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \left(\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2} \right)^2 - \varphi^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2} \right) \rho - (\alpha\beta - 1)\xi\varphi \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\Delta = \left(\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2} \right)^2 - \varphi^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left((\alpha^2 - 1)\xi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} + \varphi\rho \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{\varphi^2\xi(\alpha\beta + 1)}{e_2 - 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (3.18)$$

$$e_1 = \frac{\alpha^2 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2} \right)^2 - \varphi^2}; \quad e_2 = \frac{\alpha^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - 1}{2} \right)^2 - \varphi^2} \quad (3.19)$$

Le terme "gyroscopique global" Γ donné en équation 3.17 fait apparaître une contribution de l'action gyroscopique ρ ainsi que de l'action circulatoire physique φ . Il apparaît de plus que l'action circulatoire φ participe de façon proportionnelle au facteur $(\alpha\beta - 1)$ soit en fonction des rapports de fréquence et d'amortissement structural des deux modes. Dans le cas iso-amorti ($\alpha\beta = 1$), l'amortissement structural ξ ne joue plus de rôle d'un point de vu "action gyroscopique", ce qui corrobore la non rotation des frontières de stabilité et la conservation du schéma des nappes des parties réelles en présence d'amortissement équiréparti.

Par contre, une configuration non iso-amortie induit une contribution modifiée de l'action gyroscopique globale dépendant de l'action circulatoire : ceci explique la rotation des frontières et la déformation des nappes des parties réelles en présence d'amortissement non équiréparti. De plus, le facteur $(\alpha\beta - 1)$ indique bien le changement du sens de rotation des frontières selon que le rapport $\alpha\beta$ est supérieur ou inférieur à 1.

3.1.4 Conclusions sur la prise en compte de l'amortissement

L'objectif des deux parties précédentes n'étant pas de commenter l'ensemble des combinaisons et influences possible de chacun des termes constituant l'équation dynamique générale décrite en équation 3.1, mais uniquement de montrer de façon succincte toute la complexité pouvant résulter de la prise en compte de l'amortissement structural dans l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques, le lecteur pourra se référer aux publications [24, 27, 29] pour des explications supplémentaires et des études plus complètes.

Pour un système purement circulatoire, le rôle joué par l'amortissement sur la stabilité du système répond à certaines règles qui peuvent se résumer comme suit :

- l'ajout d'amortissement équiréparti a pour effet de stabiliser le système (effet "abaissant" sur les parties réelles des valeurs propres du système) et correspond au basculement de la fréquence d'instabilité du système ;
- l'ajout d'amortissement non équiréparti peut déstabiliser le système. Ceci se caractérise par le "paradoxe déstabilisant" et l'effet "lissant" dans le cas des systèmes purement circulatoire. Dans le cadre des systèmes comportant des actions circulatoires φ et gyroscopique ρ , des phénomènes complexes apparaissent tels que la rotation et déformation des frontières dans le plan (ρ, φ) . Ces phénomènes proviennent du fait que la distribution de l'amortissement modifie l'action gyroscopique totale du système ;
- l'ajout d'amortissement fortement dissymétrique sur les modes stable et instable favorise la déstabilisation des systèmes ;
- le système non-amorti ne correspond pas au cas le plus défavorable pour la stabilité des points d'équilibre de ce dernier. Ainsi, effectuer des analyses de stabilité sans prise en compte de l'amortissement ne peut que conduire à des résultats peu représentatifs de la stabilité des systèmes mécaniques réels, que ce soit pour des systèmes purement circulatoires, purement gyroscopiques ou constitués à la fois de termes gyroscopique et circulatoire ;
- la recherche de répartition d'amortissement équivalent sur les modes pouvant coalescer apparaît comme un bon compromis pour permettre de maximiser les zones de stabilité.

L'ensemble de ses concepts vont servir de base pour la suite de cette partie et plus particulièrement pour proposer une conception robuste et des critères de dimensionnement pour les systèmes dynamiques complexes industriels [30, 31].

3.2 Application industrielle

Dans cette partie nous nous intéressons à la stabilité d'un système de freinage complet composé du porte-fusée, du moyeu, du disque, de la chape, de l'étrier et des plaquettes de frein. Ce système est modélisé par éléments finis (plus de 500 000 degrés de liberté), comme illustré en figure 3.6(a). Des contacts frottants sont introduits au niveau des interfaces disque - plaquettes par l'intermédiaire de raideurs de contact. Le système global est décrit par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_{\text{Structure}} + \mu\mathbf{K}_{\text{Friction}})\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{C} et $\mathbf{K}_{\text{Structure}}$ définissent les matrices de masse, d'amortissement et de raideur structurale. $\mathbf{K}_{\text{Friction}}$ correspond à la matrice non-symétrique due au frottement (action circulatoire). μ définit le coefficient de frottement en considérant la loi de Coulomb $\mathbf{T} = \text{sign}(v)\mu\mathbf{N}$ (v étant la vitesse de rotation du disque de frein, et \mathbf{T} et \mathbf{N} définissant les efforts tangents et normaux au niveau des interfaces de frottement).

Le système est projeté sur une base modale tronquée du système sans frottement

$$(\mathbf{I}s^2 + \mathbf{D}s + (\mathbf{\Omega}^2 + \mu\mathbf{\Lambda}_f))\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

avec \mathbf{I} la matrice identité, \mathbf{D} et $\mathbf{\Lambda}_f$ les projections de \mathbf{C} et $\mathbf{K}_{\text{Friction}}$ dans la base modale et $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n)$ (avec ω_i la i^{eme} fréquence du système sans frottement). La partie réelle des valeurs propres s du système détermine alors la stabilité des points d'équilibre, la partie imaginaire donnant la fréquence associée. Un point d'équilibre est stable si la partie réelle de chacune des valeurs propres est négative, et instable si au moins une valeur propre à sa partie réelle positive. La figure 3.6(b) illustre les évolutions des valeurs propres dans le plan complexe pour une évolution du coefficient de frottement μ et un système sans prise en compte de l'amortissement. Il apparaît donc plusieurs coalescences de modes balayant une large plage de fréquences. Les figures 3.7(a) et (b) montrent les déformées des deux modes avant la coalescence (pour $\mu = 0$). Plusieurs pièces du système sont impliquées, engendrant des déformées complexes qui comportent la vibration du porte-fusée, un mode de torsion de la chape, un mode de flexion à trois diamètres du disque et la flexion de l'étrier. Lors de la coalescence "parfaite" (absence d'amortissement), la déformée relative au couplage des deux modes stable et instable reprend les principales caractéristiques des modes précédents, comme indiqué en figure 3.7(c).

3.2.1 Etude du paradoxe de l'amortissement

Afin de mettre en avant le rôle joué par l'amortissement et le paradoxe déstabilisant associé, développés dans les paragraphes précédents, nous introduisons de l'amortissement sous la forme

$$\mathbf{D} = \text{diag}(0 \quad \cdots \quad 0 \quad d_1 \quad d_2 \quad 0 \quad \cdots \quad 0) \quad (3.22)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 mode i mode j

où les modes i et j correspondent à deux modes qui coalescent. Les figures 3.8(a-b) et (c-d) illustrent respectivement les effets de l'introduction d'un amortissement équiréparti ($d = d_1 = d_2$) et d'un

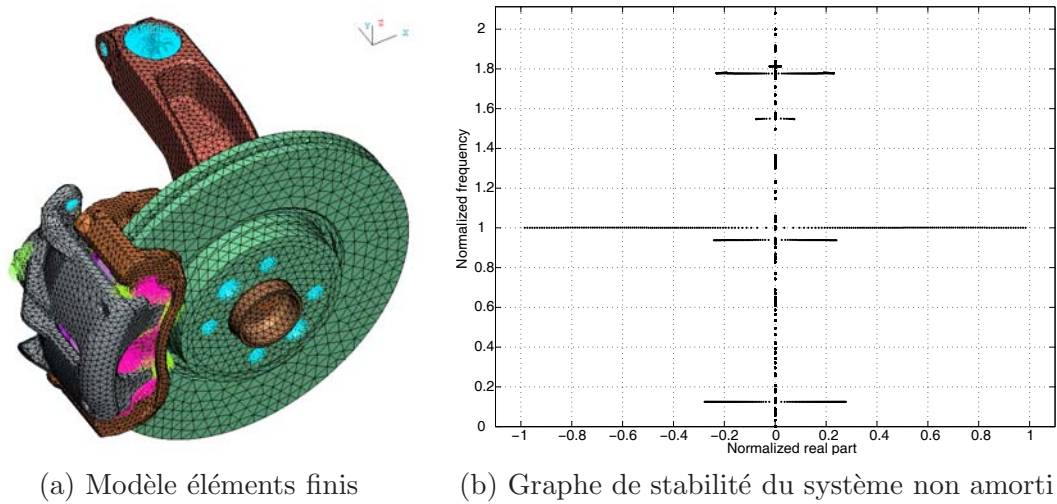


FIG. 3.6 – Modèle éléments finis du frein automobile et stabilité associée du système non amorti

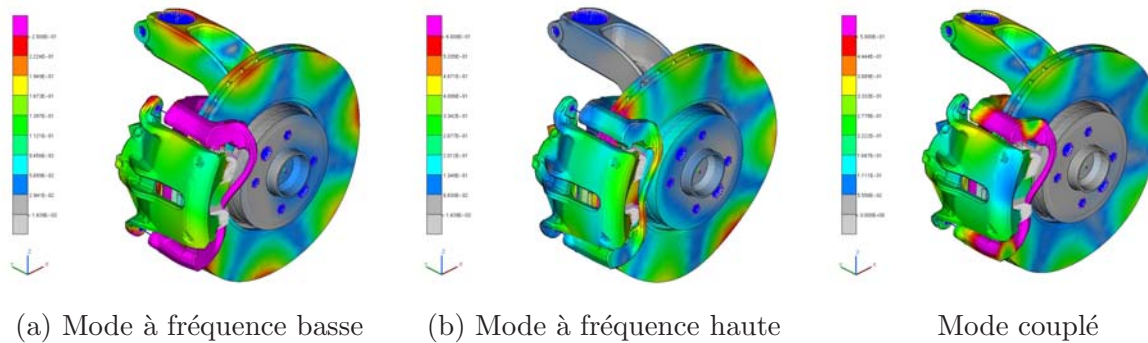


FIG. 3.7 – Déformées des modes de coalescence (a-b) avant couplage ($\mu = 0$) (c) mode couplé ($\mu = 2.5$, déphasage $\phi = 0rad.$)

amortissement non équiréparti ($d_1 \neq d_2$). Les résultats sont identiques à ceux précédemment observés sur le modèle analytique du paragraphe 3.1.2 : l'ajout d'amortissement équiréparti décale les parties réelles des valeurs propres vers les parties négatives d'un facteur $\frac{d}{2}$ (effet "abaissant" [24, 26]), les fréquences des deux modes associées n'étant pas perturbées de façon significative. L'ajout d'amortissement équiréparti sur les deux modes qui coalescent implique bien une stabilisation du système de freinage.

Dans le cas non iso-amorti ($d_1 \neq d_2$), les évolutions des parties réelles traduisent l'effet "lissant" en plus de l'effet "abaissant" du facteur $\frac{d_1+d_2}{2}$ [24, 26]. Cette évolution continue des valeurs propres peut donc engendrer le "paradoxe déstabilisant" de l'amortissement. De plus, les motifs d'évolution des fréquences associées sont fortement modifiés dans le cas non iso-amorti, ce qui se traduit par une coalescence "non parfaite" (figure 3.8(d)).

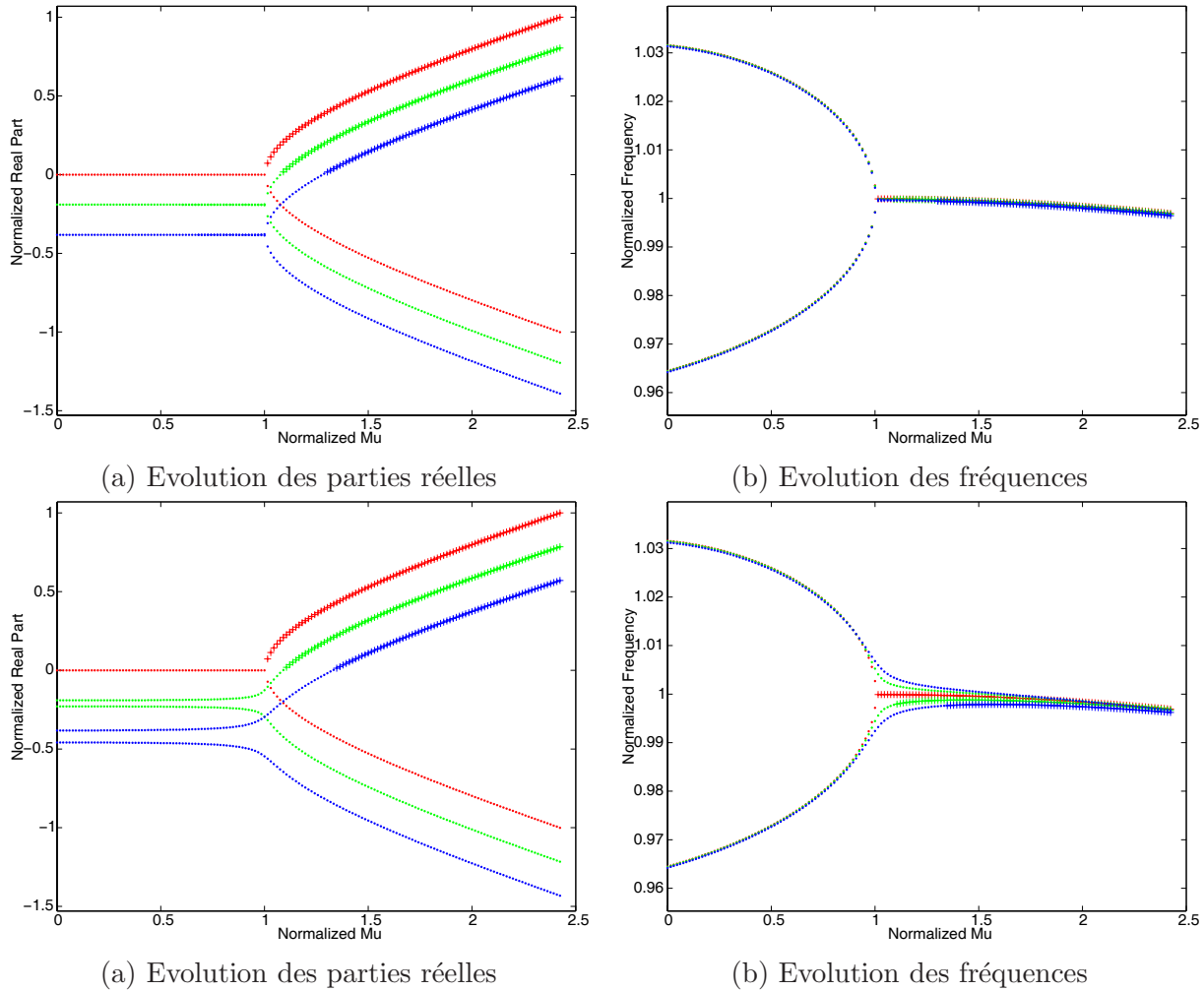


FIG. 3.8 – Effets “lissant” et “abaissant” de l’amortissement (a-b) cas iso-amorti (rouge : non amorti, vert : $d_1 = d_2 = 0.02$, bleu : $d_1 = d_2 = 0.04$), (c-d) cas non iso-amorti (rouge : non amorti, vert : $\frac{d_1+d_2}{2} = 0.02$, bleu : $\frac{d_1+d_2}{2} = 0.04$)

La figure 3.9(a) et (b) illustre respectivement l’effet déstabilisant de l’amortissement et le changement brusque du mode instable selon le rapport d’amortissement $\frac{d_1}{d_2}$. Pour une répartition d’amortissement tel que $d_1 < d_2$, le mode potentiellement instable correspond au mode à fréquence basse, alors que dans la configuration $d_1 > d_2$, le mode instable correspond au mode à fréquence haute. De même, nous retrouvons que l’ajout d’un amortissement fortement non également réparti sur les deux modes de coalescence introduit une diminution de la stabilité du système par rapport au cas non amorti. Ceci montre que des études de stabilité des systèmes industriels sans prise en compte de l’amortissement peuvent amener à des observations et conclusions peu représentatives des phénomènes réellement observables. Aussi, penser que “l’ajout d’amortissement stabilise forcément un système mécanique”

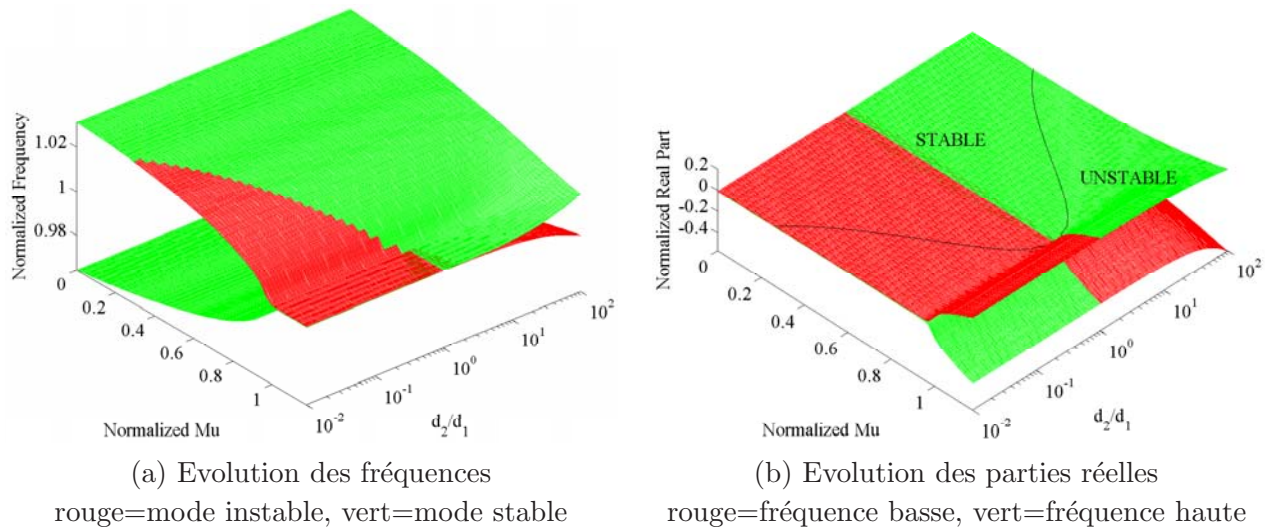
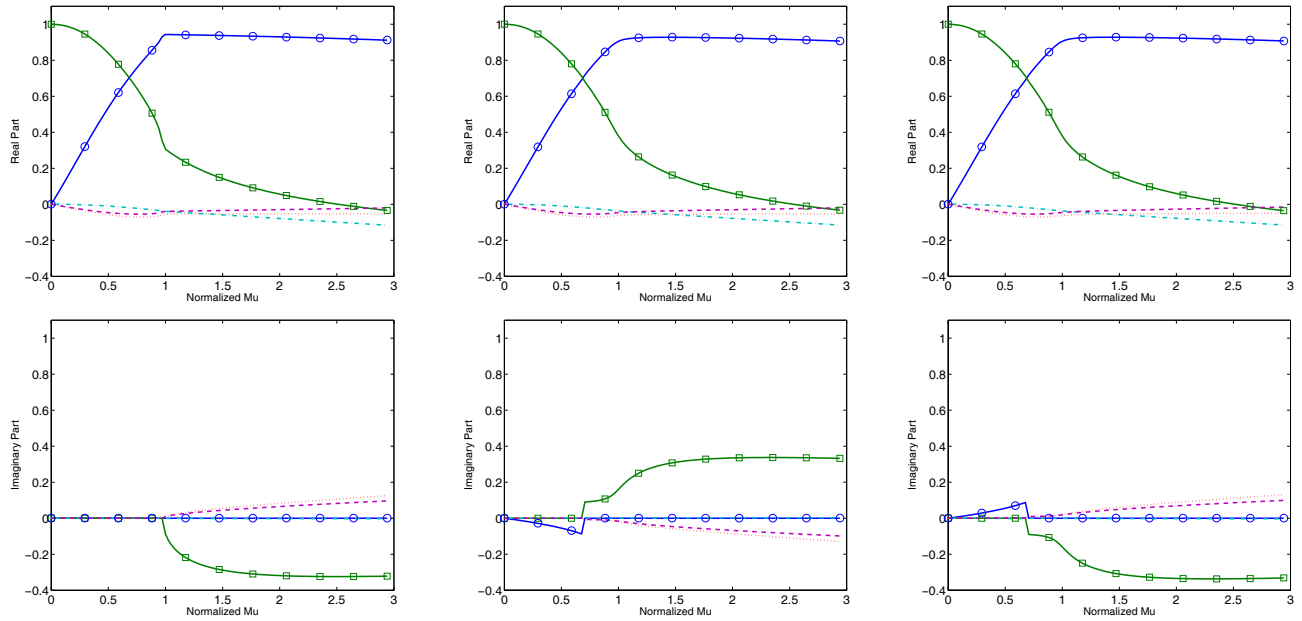


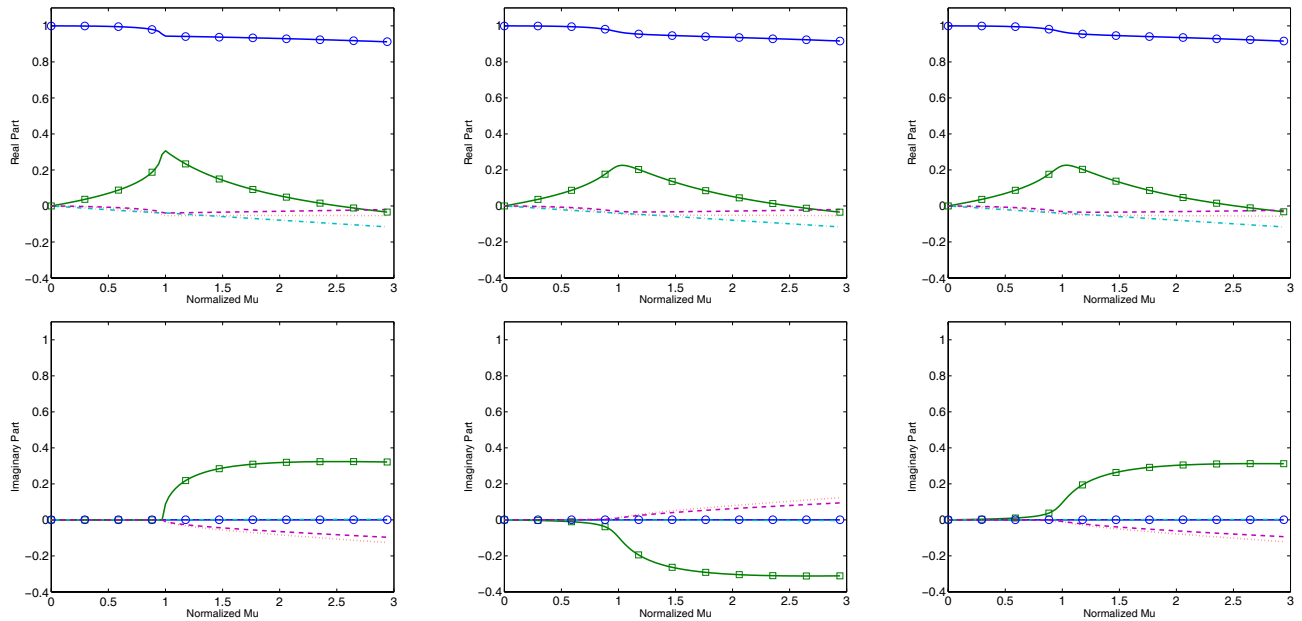
FIG. 3.9 – Rôle de l’amortissement sur la stabilité du système et le changement de mode instable - illustration du paradoxe de l’amortissement

constitue une vision erronée du rôle de l’amortissement sur la stabilité des points d’équilibre. De plus, ajouter un amortissement important (par l’intermédiaire de matériaux amortissants par exemple) sur l’élément physique qui a tendance à manifester un mouvement vibratoire important n’a en fait aucun fondement théorique et peut même aller à l’encontre du résultat escompté si cet ajout d’amortissement “physique” se traduit par une augmentation de dissymétrie d’amortissement sur les modes stable et instable. Dans une phase de conception, il est donc primordial de prendre en compte l’amortissement présent dans les systèmes étudiés.

Enfin, l’amortissement joue aussi un rôle sur les déformées des modes stable et instable [31]. Les figures 3.10 décrivent les évolutions des facteurs de participations modales pour le cas non-amorti et deux amortissements non équirépartis. Les participations modales sont indicées par rapport à la déformée modale du mode considéré. Les évolutions des parties réelles et imaginaires des participations modales associées aux cas non amortis et amortis sont globalement similaires. Cependant l’“effet lissant” introduit l’apparition de modes complexes avant le coefficient de frottement critique non-amorti ($\mu_{norm} = 1$), alors que le cas amorti se définit exclusivement par des modes réels jusqu’au franchissement du point de bifurcation de Hopf ($\mu_{norm} = 1$), comme illustré en figures 3.10(a). Les facteurs des participations modales relatifs à chacune des configurations non amorties sont égaux en partie réelle (figures 3.10(b)) et opposés en partie imaginaire (figures 3.10(c)), une partie imaginaire positive induisant le mode instable, alors qu’une partie imaginaire négative induit un mode stable. Le phénomène de changement du mode stable lors de la coalescence suivant le rapport d’amortissement $\frac{d_1}{d_2}$ apparaît clairement : le mode à fréquence basse correspond au mode instable dans le cas $d_1 < d_2$, alors que le mode à fréquence haute définit le mode instable pour la configuration $d_1 > d_2$.



Participations modales associées (avec l'origine = fréquence haute)



Participations modales associées (avec l'origine = fréquence basse)

(a)

(b)

(c)

FIG. 3.10 – Evolution des participations modales (a) non amorties (b) $d_1 = 0, d_2 = 50$ (c) $d_1 = 50, d_2 = 25$

3.2.2 Définition de l'indicateur d'amortissement robuste

Dans ce paragraphe, nous allons définir deux indicateurs potentiels d'apparition d'instabilité basés sur les notions de caractérisation d'attraction ou de répulsion des modes et des valeurs relatives des parties réelles associées.

Caractérisation du phénomène d'attraction ou de répulsion

Si nous considérons l'équation 3.21 sans amortissement, le couplage (du aux termes circulatoires) provient exclusivement de la matrice $\mathbf{\Lambda}_f$. Ainsi, si le coefficient de frottement μ constitue le paramètre de contrôle, un développement limité vis à vis de ce dernier (valable donc au voisinage de l'origine associée) peut être réalisé pour le i^{eme} mode tel que

$$-\omega_i^2 - \mu \mathbf{\Lambda}_{f,ii} + \mu^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\mathbf{\Lambda}_{f,ij} \cdot \mathbf{\Lambda}_{f,ji}}{\omega_j^2 - \omega_i^2} + o(3) \quad (3.23)$$

Le couplage entre les modes, qui peut amener au phénomène d'instabilité, apparaît donc par l'intermédiaire du terme d'ordre 2, qui dépend naturellement des termes extra-diagonaux de $\varphi_{ij} = \frac{\mathbf{\Lambda}_{f,ij} \cdot \mathbf{\Lambda}_{f,ji}}{\omega_j^2 - \omega_i^2}$ mais aussi du facteur $\frac{1}{\omega_j^2 - \omega_i^2}$. Si nous nous intéressons donc au couplage simple entre deux modes i et j , les contributions associées φ_{ij} et φ_{ji} sont opposées du fait du caractère antisymétrique de la matrice circulatoire et les deux fréquences et modes associés subissent alors un phénomène d'“attraction” ou de “répulsion” (provenant du signe de $\mathbf{\Lambda}_{f,ij} \cdot \mathbf{\Lambda}_{f,ji}$). La vitesse de rapprochement ou d'éloignement associée est alors donnée par

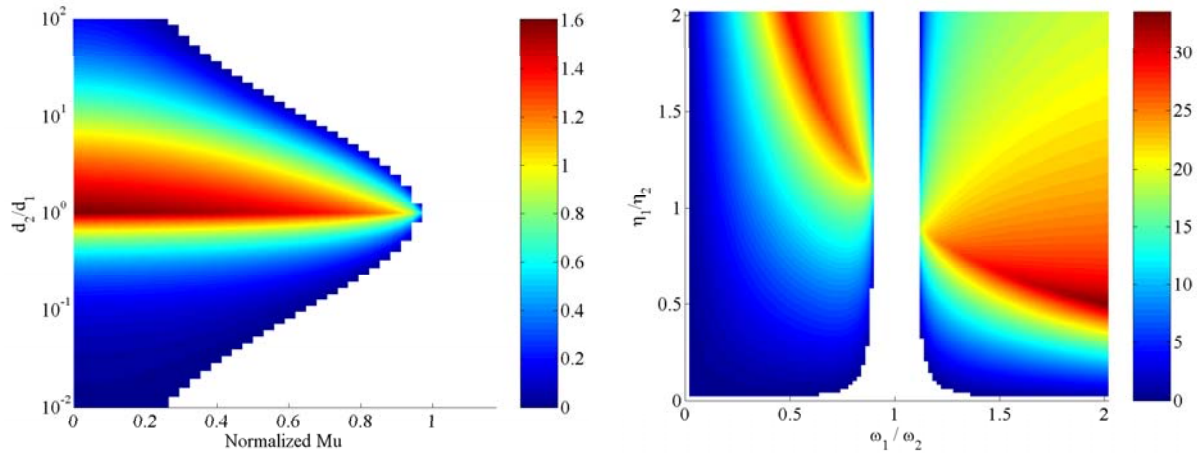
$$\frac{2\mathbf{\Lambda}_{f,ij} \cdot \mathbf{\Lambda}_{f,ji}}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (3.24)$$

Cette relation montre que pour tenter de stabiliser un système (soit retarder le phénomène de coalescence), une augmentation de l'écart en fréquence des deux modes potentiellement coalescents ou une réduction de la quantité $\mathbf{\Lambda}_{f,ij} \cdot \mathbf{\Lambda}_{f,ji}$ est envisageable. Cependant, ce critère d'“attraction” ou de “répulsion” n'est valable qu'au voisinage de $\mu = 0$. De plus, dans un contexte plus général, des contributions croisées entre modes peuvent aboutir à des compensations.

Critère de l'indicateur d'amortissement robuste

A partir du caractère de “répulsion-attraction” et des observations faites sur l'optimisation possible de la stabilité des systèmes vis à vis de l'amortissement, nous proposons la définition d'un critère simplifié de stabilisation d'un système complexe vis à vis de l'amortissement. Cet indicateur se base sur trois faits principaux :

- comme explicité dans le paragraphe précédent, deux modes qui auront tendance à avoir un écart en fréquence important auront tendance à avoir une vitesse d'attraction réduite ;
- d'autre part, deux modes qui auront leur partie réelle très proche auront un effet “abaissant” prédominant sur l'effet “lissant” ;

FIG. 3.11 – Illustration de l'indicateur *RD-Factor*

• enfin, plus un mode aura sa partie réelle éloignée de l'axe des parties réelles nulles, plus il sera stabilisant (hypothèse d'évolution de ce dernier non changée du fait de la diminution en partie réelle du mode). Ceci implique de se retrouver dans une configuration d'effet purement "abaissant", soit une diminution en partie réelle des modes stable et instable.

A partir de ces observations, nous proposons l'indicateur d'amortissement robuste (*RD-Factor* [27])

$$\begin{aligned} RD - Factor &= -Max(Re(\lambda)) \log\left(\frac{\Delta F}{\Delta R + 1} + 1\right) & si \ Re(\lambda) \leq 0 \\ RD - Factor &= 0 & si \ Re(\lambda) > 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec

$$\Delta F = |Im(\lambda_{instable}) - Im(\lambda_{stable})| \quad (3.26)$$

$$\Delta R = |Re(\lambda_{instable}) - Re(\lambda_{stable})| \quad (3.27)$$

avec $Re(\lambda)$ et $Im(\lambda)$ définissant respectivement les parties réelles et imaginaires de la valeur propre λ .

Ainsi, plus la valeur de l'indicateur est forte, plus le point de bifurcation de Hopf sera retardé et donc la stabilité du système n'en sera que meilleure. Une illustration de ce critère est donnée en figure 3.11.

3.3 Extension de l'effet de l'amortissement sur les cycles limites

Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents ont permis de mettre en avant l'effet primordial de l'amortissement sur les zones de stabilité des systèmes frottants. La question qui suit naturellement ces études consiste à examiner quel est le rôle de l'amortissement sur les cycles limites [32]. Nous allons donc maintenant nous focaliser sur cet aspect en reprenant le modèle de frein aéronautique qui a été utilisé dans le chapitre précédent et illustré en figure 2.2.

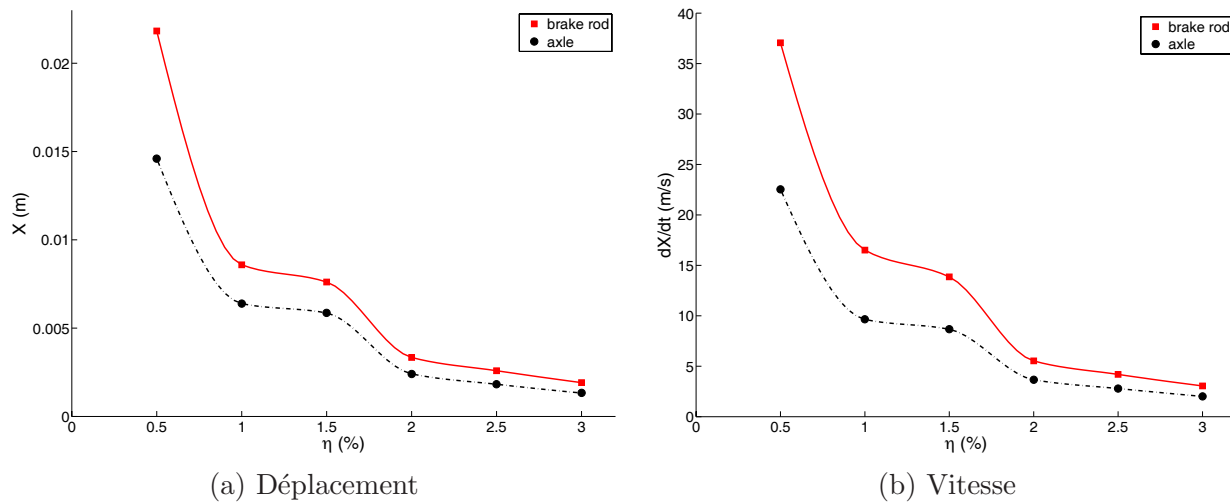


FIG. 3.12 – Evolutions du déplacement et de la vitesse dans le cas iso-amorti

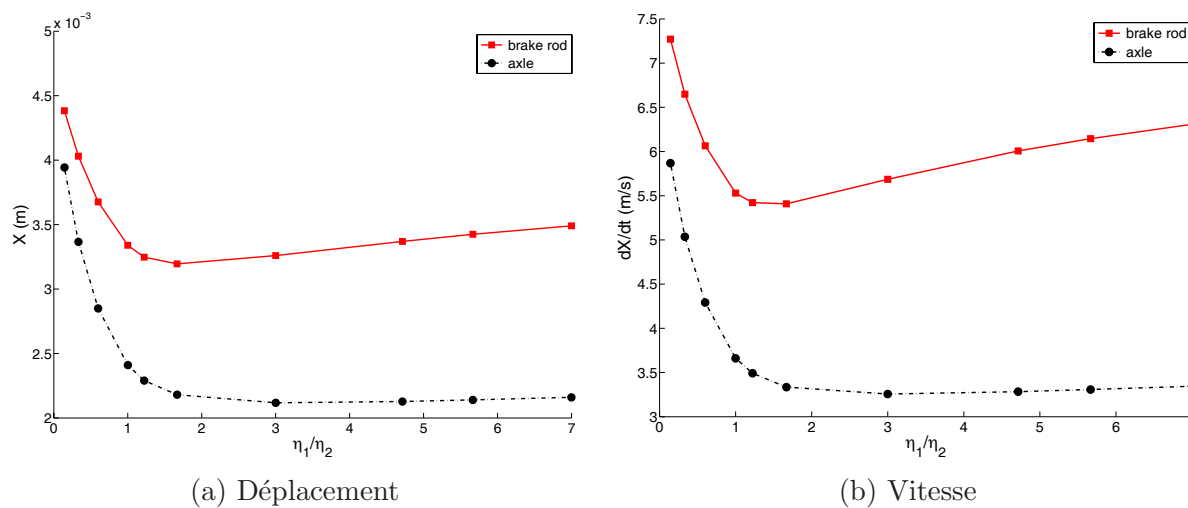


FIG. 3.13 – Evolutions du déplacement et de la vitesse dans le cas non iso-amorti

Les figures 3.12 et 3.13 montrent l'évolution des niveaux d'amplitudes et de vitesses des cycles limites (en deux points de la structure) en fonction de l'ajout d'amortissement équiréparti ou non équiréparti respectivement. Les résultats obtenus corroborent les conclusions qui ont été énoncées dans le cadre des évolutions des zones de stabilité. En effet, l'ajout d'un amortissement équivalent sur les deux modes stable et instable peut avoir tendance à diminuer les niveaux maximums des cycles limites aussi bien en termes d'amplitude que de vitesse (figure 3.12). Par contre, un ajout d'amortissement non équiréparti peut entraîner une augmentation des amplitudes et vitesses maximales des cycles limites (figures 3.13).

L'effet déstabilisant de l'amortissement est de nouveau observé : un ajout d'amortissement peut entraîner une augmentation des cycles limites si ce dernier a tendance à s'écarter du cas de l'amortissement équiréparti entre les modes stable et instable. Nous retrouvons de plus que le cas d'amortissement entraînant les minimums en amplitude et vitesse des cycles limites correspond au cas proche du système iso-amorti, ce qui corrobore la notion du "rapport d'amortissement robuste" pour les systèmes frottants. Toutefois, il faut rappeler que les niveaux d'amplitudes sont aussi fortement dépendant d'autres paramètres (coefficient de frottement, pression, position statique...) et donc que les niveaux des amplitudes non-linéaires sont évalués en termes de contributions globales des divers paramètres : le cas iso-amorti ne correspondra pas forcément au cas le plus favorable si ce paramètre n'est pas prédominant vis-à-vis d'un autre facteur physique.

Ces derniers résultats illustrent une notion peu connue du rôle exact de l'amortissement sur la stabilité des systèmes. En effet, penser que le rôle de l'amortissement sur le comportement des systèmes est similaire entre les thématiques de la *Dynamique des Structures* et de la *Stabilité des Systèmes* est totalement erronée et repose uniquement sur des "principes admis" ou "observations expérimentales très partielles".

Les premiers développements réalisés dans les paragraphes précédents nous montrent que "*ajouter de l'amortissement n'entraîne pas forcément une diminution des niveaux vibratoires des systèmes dynamiques non-linéaires frottants et peut même avoir un effet inverse en augmentant les niveaux vibratoires des cycles limites*".

Aussi, nous rappelons que la définition de cycles limites se base sur la notion des points d'équilibre instable pour un système dynamique non-linéaire. Ceci suppose que l'estimation des points d'équilibre statique et la notion de stabilité associée (par l'intermédiaire des termes linéarisés) amènent une contribution complémentaire sur les termes circulatoires et participent donc à la stabilité du système sans pour autant modifier les contributions de l'amortissement. Ainsi, il apparaît clairement que les interactions des divers paramètres physiques vis-à-vis des notions de stabilité peuvent être très complexes.

3.4 Définition d'un nouveau critère basé sur le temps d'établissement du cycle limite

Pour finir, nous nous proposons d'ouvrir la thématique de la stabilité des systèmes non-linéaires frottants vers la définition d'un nouveau critère de dimensionnement. A l'heure actuelle, les structures industrielles répondent aux deux problématiques qui ont été discutées dans les deux chapitres précédents :

- savoir si le système comporte des points d'équilibre stable ou instable qui caractérisent donc la notion de *structure stable* ou *structure instable*,
- estimer les niveaux vibratoires lorsque ces points d'équilibre instable existent, ce qui caractérise donc la notion de *cycles limites*.

Nous avons démontré que ces deux aspects sont bien avancés et permettront à termes un dimensionnement "robuste" des structures industrielles, si des efforts sont entrepris vers une compréhension

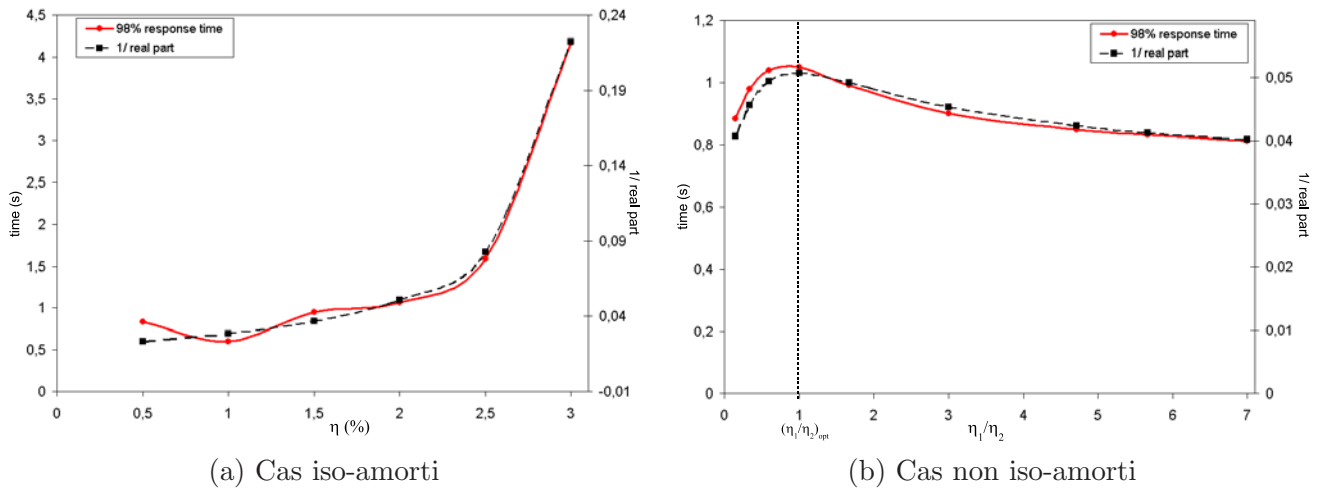


FIG. 3.14 – Temps d’atteinte du cycle limite en fonction de l’amortissement

fine des paramètres physiques jouant un rôle sur la stabilité de systèmes.

Cependant, une notion importante basée sur *le temps de montée sur le cycle limite* n’est jamais prise en compte du point de vue industriel. En effet, outre le fait de savoir si les niveaux vibratoires sont importants, le temps nécessaire pour aboutir à ces cycles limites peut constituer un critère de dimensionnement aussi important, voir primordial : un système dynamique qui a tendance à monter lentement vers son cycle limite peut être considéré comme étant “plus stable” qu’un système dynamique qui atteint son cycle limite très rapidement. Ceci est d’autant plus vrai que classiquement, les systèmes industriels peuvent subir des modifications rapides de certains de leurs paramètres physiques (tel que le coefficient de frottement, surfaces en contact,...), ce qui peut entraîner des re-stabilisations des systèmes au cours du temps.

Des premiers résultats sur le rôle de l’amortissement ont donc été obtenus pour ce nouveau critère de dimensionnement vis-à-vis de la stabilité de systèmes dynamiques non-linéaires frottants. Les figures 3.14 illustrent le temps d’atteinte du cycle limite dans les deux cas iso-amorti et non iso-amorti. Nous choisissons arbitrairement ici que le cycle limite est considéré comme étant obtenu lorsque l’amplitude atteint 0.98 du niveau maximal. Les résultats sont fort intéressants car ils montrent non seulement un rôle primordial de l’amortissement sur le temps d’atteinte du cycle limite, mais permettent de plus de conforter le critère robuste du rapport d’amortissement défini au paragraphe 3.2.2.

Tout d’abord, nous pouvons remarquer que le rôle intuitif donné à l’amortissement est ici clairement retrouvé : une augmentation de l’amortissement équiréparti entraîne une augmentation du temps d’établissement du cycle limite.

Les résultats illustrent une fois de plus que le temps pour atteindre un cycle limite peut diminuer si l’ajout d’amortissement a tendance à se traduire par un amortissement global s’éloignant du cas iso-amorti sur les deux modes stable et instable.

De plus, il apparaît que le cas qui permet d’augmenter le temps d’établissement du cycle limite

correspond au cas proche d'un amortissement équiréparti. Il existe alors une corrélation "troublante" entre les évolutions de la partie réelle du mode instable et du temps d'établissement du cycle limite en fonction de l'amortissement. Ceci peut se traduire par le fait que la valeur de la partie réelle du mode instable correspond à la vitesse de montée en divergence du cycle et peut contribuer naturellement au temps d'établissement du cycle limite.

L'ensemble de ces résultats permettent de nous conforter pour une utilisation de l'indicateur d'amortissement robuste *RD-Factor* défini en équation 3.25 lors de l'étude de stabilité des structures complexes.

3.5 Conclusion

Les résultats de recherche présentés dans le cadre de ce chapitre ont permis d'illustrer l'importance d'effectuer une analyse fine de la stabilité des systèmes avant de s'orienter vers le calcul de la réponse non-linéaire et des cycles limites associés. Négliger la prise en compte de l'amortissement structural ou considérer que l'amortissement associé aux modes instable et stable peut être supposé égal, sont deux approximations classiquement effectuées qui peuvent mener à des résultats "optimistes" vis à vis de la stabilité des systèmes frottants.

De plus, si l'ajout d'amortissement équiréparti a pour unique effet de stabiliser un système (effet classiquement appelé phénomène "abaissant"), un ajout d'amortissement non équiréparti peut engendrer le paradoxe déstabilisant de l'amortissement (du fait de l'effet "lissant" associé aux évolutions des parties réelles des valeurs propres).

A partir de ces observations, un nouveau indicateur de stabilité a été proposé : ce dernier appelé *RD-Factor* (Robust Damping Factor) suggère un compromis de répartition d'amortissement équiréparti sur les modes pouvant coalescer afin d'augmenter les zones de stabilité.

Dans un second temps, une extension du rôle de l'amortissement vis-à-vis de la taille des cycles limites (niveaux maximums en termes d'amplitudes et de vitesses) a montré la généralisation possible de cette notion de *RD-Factor* : un amortissement équiréparti sur les modes stable et instable a aussi tendance à diminuer les niveaux vibratoires lorsque le système non-linéaire est instable.

Enfin, un critère de dimensionnement supplémentaire des systèmes mécaniques est proposé en plus de la recherche des zones de stabilité et des amplitudes des cycles limites. Ce dernier se base sur le *temps d'atteinte du cycle limite*, variable qui augmente elle aussi pour un amortissement iso-réparti.

Ainsi, une compréhension accrue du rôle de l'amortissement vis à vis de la stabilité des systèmes frottants peut permettre de proposer des solutions technologiques plus efficaces pour la réduction des vibrations auto-entretenuées provenant de couplage de modes. Cependant, l'ensemble des résultats proposés dans ce chapitre demandent encore des travaux de recherche considérables. En effet, l'interaction des phénomènes mis en évidence avec des aspects non-linéaires (problème de contact, évolution des point d'équilibres,...) sont nombreux et complexifient forcément l'analyse effectuée dans ce chapitre. Diverses voies d'investigations possibles, permettant de s'orienter vers une compréhension accrue des phénomènes d'instabilité et une conception robuste des systèmes mécaniques associés, seront explorées en conclusion de ce mémoire, dans les *Perspectives de recherche*.

Deuxième partie

Dynamique des systèmes tournants

Prise en compte des effets non-linéaires

Chapitre 4

Dynamique des rotors comportant un roulement non-linéaire

La dynamique des systèmes tournants comporte par nature de nombreux éléments qui amènent à des comportements non-linéaires complexes. Par exemple la présence de roulements (par l'intermédiaire du jeu radial ou du contact de Hertz), de dissymétries (présence de méplats, pièces dissymétriques par nature), de contacts frottants entre pièces fixes et tournantes sont autant d'éléments qui combinés à une rotation du système peuvent engendrer des phénomènes non-linéaires complexes.

L'étude, la prévision et la compréhension du comportement dynamique non-linéaire des rotors passent alors par la mise en place de méthode d'analyse non-linéaire tel que la méthode de la balance harmonique, qui permet d'évaluer la solution périodique stationnaire de tels systèmes, et de statuer sur la stabilité de la solution périodique obtenue.

L'objectif de ce chapitre consiste non seulement à illustrer la nécessité de la prise en compte des aspects non-linéaires dans les rotors, mais aussi à introduire des méthodologies non-linéaires appliquées aux systèmes tournants. L'exemple considéré sera un rotor comportant un roulement non-linéaire avec jeu radial et contact de Hertz [33–36]. Comme nous le verrons par la suite, ce système tournant non-linéaire est choisi car il comporte des non-linéarités de natures diverses et complexes, ce qui permettra de montrer l'efficacité de la méthode non-linéaire mise en place et des démarches théoriques associées.

Ce chapitre débutera par une présentation générale de la méthode de la balance harmonique, qui constitue l'une des méthodes non-linéaires les plus efficaces pour ce type de problème. Nous montrerons comment cette méthode peut être complétée par des condensations sur les degrés de liberté non-linéaires permettant des gains en termes de temps de calcul et de stockage mémoire. Nous verrons enfin la notion de stabilité pouvant découler de cette méthode, ce qui là aussi se traduira par un gain vis à vis des méthodes classiques.

Dans un second temps, l'ensemble de ces outils théoriques sera donc appliqué à un rotor comportant un roulement non-linéaire. Une analyse poussée de ce système sera menée afin de démontrer l'efficacité de l'outil mis en place et illustrera l'ensemble des phénomènes complexes résultants de la prise en compte de non-linéarités dans les systèmes tournants.

4.1 Méthode de la balance harmonique avec condensation

4.1.1 Méthode de la balance harmonique

L'équation dynamique d'un système tournant peut classiquement se mettre sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_L(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t) + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t) = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t) \quad (4.1)$$

où \mathbf{F}_L and \mathbf{F}_{NL} correspondent aux termes linéaires et non-linéaires du système. Afin d'évaluer la solution périodique stationnaire d'un tel système, la réponse non-linéaire peut être approchée par une série de Fourier tronquée de la forme

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{B}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\Omega t\right) + \mathbf{A}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\Omega t\right) \right) \quad (4.2)$$

où Ω définit la fréquence fondamentale de la réponse dynamique du système non-linéaire. ν est un entier permettant de prendre en compte la contribution de sous harmoniques dans la réponse dynamique non-linéaire. Les coefficients \mathbf{B}_0 , \mathbf{A}_k et \mathbf{B}_k correspondent alors aux différents coefficients de Fourier recherchés. Généralement l'ordre m est choisi de tel sorte que la réponse non-linéaire approchée soit considérée suffisamment proche de la réponse dynamique non-linéaire exacte. En supposant que le vecteur des termes non-linéaires puisse être lui aussi décrit par l'intermédiaire d'une série de Fourier tronquée au même ordre m , nous avons

$$\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{C}_k \cos\left(\frac{k}{\nu}\Omega t\right) + \mathbf{S}_k \sin\left(\frac{k}{\nu}\Omega t\right) \right) \quad (4.3)$$

Par substitution des équations 4.2 et 4.3 dans l'équation 4.1, un système de $(2m + 1) * n$ équations (avec n le nombre de degrés de liberté du système) est obtenu. Les n premières équations définissent les contributions associées aux coefficients de Fourier constants \mathbf{B}_0

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0 \quad (4.4)$$

Les $2m * n$ équations restant définissent les contributions des ordres supérieurs pour la réponse dynamique non-linéaire approchée. Les k^{eme} coefficients de Fourier \mathbf{A}_k and \mathbf{B}_k vérifient les équations

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \mathbf{M} & -\frac{k}{\nu}\Omega \mathbf{D} \\ \frac{k}{\nu}\Omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k \\ \mathbf{C}_k \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Classiquement, la décomposition des termes non-linéaires $\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t)$ dans la base de Fourier tronquée choisie et la détermination des coefficients de Fourier \mathbf{C}_0 , \mathbf{S}_k and \mathbf{C}_k (avec $1 \leq k \leq m$) sont obtenus par une stratégie de passages alternés dans les domaines fréquentiel et temporel [21]

$$[\mathbf{B}_0 \ \mathbf{A}_1 \ \mathbf{B}_1 \ \dots \ \mathbf{A}_m \ \mathbf{B}_m]^T \Rightarrow \mathbf{X}(t) \Rightarrow \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t) \Rightarrow [\mathbf{C}_0 \ \mathbf{S}_1 \ \mathbf{C}_1 \ \dots \ \mathbf{S}_m \ \mathbf{C}_m]^T \quad (4.6)$$

Effectivement, les termes non-linéaires ont généralement une expression définie dans le domaine temporel. Il est donc aisé d'obtenir les coefficients de Fourier associés à partir des coefficients de Fourier de la réponse non-linéaire du système : à partir des contributions \mathbf{B}_0 , \mathbf{A}_k et \mathbf{B}_k (avec $1 \leq k \leq m$), la réponse dynamique non-linéaire approchée dans le domaine temporel $\mathbf{X}(t)$ peut être calculée (équation 4.2), et ensuite les termes non-linéaires $\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \Omega, t)$ estimés. Les contributions \mathbf{C}_0 , \mathbf{S}_k et \mathbf{C}_k sont alors obtenues par passage du domaine temporel au domaine fréquentiel.

Pour conclure, la résolution des $(2m + 1) * n$ équations non-linéaires 4.4 et 4.5 permet d'obtenir la réponse dynamique du système non-linéaire, solution approchée à l'ordre m choisi.

4.1.2 Procédure de continuation

Lorsque l'on s'intéresse à l'étude dynamique des systèmes tournants, il est courant de rechercher la réponse dynamique non-linéaire pour une plage de vitesse de rotation donnée. Afin de réduire le temps de calcul et d'obtenir de façon efficace les réponses vibratoires d'un tel système non linéaire, diverses techniques de continuation peuvent être utilisées [37]. Ces techniques consistent à estimer la solution $[\mathbf{B}_0 \ \mathbf{A}_1 \ \mathbf{B}_1 \ \dots \ \mathbf{A}_m \ \mathbf{B}_m]^T$ du système non linéaire pour un nouveau jeu de paramètres (pour lequel la vitesse de rotation a évolué par exemple) comme étape préliminaire de l'application de la méthode de balance harmonique. Cette estimation peut être réalisée en se basant sur les solutions obtenues pour les calculs précédents (trois dernières solutions approchées du problème par exemple) et en considérant une recherche de la solution souhaitée par extrapolation (polynôme de Lagrange d'ordre 4).

Considérant les solutions connues sous la forme (\mathbf{U}_i, Ω_i) où \mathbf{U}_i et Ω_i définissent le vecteur solution des coefficients de Fourier et la vitesse de rotation du rotor pour le i^{eme} calcul, la longueur d'arc entre deux points (\mathbf{U}_i, Ω_i) et $(\mathbf{U}_{i+1}, \Omega_{i+1})$ est donnée par :

$$\Delta S_{i+1} = \sqrt{\left((\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)^T (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) + (\Omega_{i+1} - \Omega_i)^2 \right)} \quad i = 0, \dots, 2 \quad (4.7)$$

L'estimation du point de départ de recherche de la solution du système non linéaire (situé à la distance ΔS par rapport au calcul précédent) est donc définie par extrapolation de Lagrange

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_4 \\ \Omega_4 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \prod_{j=0, i \neq j}^3 \left(\frac{S_3 - S_j}{S_i - S_j} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \Omega_i \end{bmatrix} \quad i = 0, \dots, 3 \quad (4.8)$$

avec $\Delta S_0 = 0$, $S_1 = \Delta S_1$, $S_2 = S_1 + \Delta S_2$, $S_3 = S_2 + \Delta S_3$ et $S_4 = S_3 + \Delta S$.

4.1.3 Procédure de substitution

Si un système dynamique non-linéaire comportant n degrés de liberté avec q degrés de liberté dits non-linéaires (directement liés aux efforts non-linéaires) et $p = n - q$ degrés de liberté dits linéaires (non directement liés aux efforts non-linéaires), ce dernier peut être réparti et condensé selon les degrés de liberté linéaires et non-linéaires [38, 39].

En effet, à partir de la transformation linéaire $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{P} [\mathbf{Y}^p \mathbf{Y}^q]^T$ (avec \mathbf{Y}^p et \mathbf{Y}^q les vecteurs des p et q degrés linéaires et non-linéaires), les équations non-linéaires 4.1 peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{pp} & \tilde{\mathbf{M}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{qp} & \tilde{\mathbf{M}}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}^p \\ \dot{\mathbf{Y}}^q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{pp} & \tilde{\mathbf{D}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{qp} & \tilde{\mathbf{D}}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}^p \\ \dot{\mathbf{Y}}^q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{pp} & \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{qp} & \tilde{\mathbf{K}}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^p \\ \mathbf{Y}^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{NL}^p \\ \tilde{\mathbf{f}}_{NL}^q \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Il est alors possible de ne rechercher uniquement que les coefficients de Fourier associés aux éléments non-linéaires, comme cela va maintenant être expliqué.

Détermination des termes constants \mathbf{B}_0^q associés aux éléments non-linéaires

Par substitution des équations 4.2 et 4.3 dans l'équation 4.9, et en ne considérant que les équations correspondant aux coefficients constants, nous avons

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{pp} & \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{qp} & \tilde{\mathbf{K}}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^p \\ \mathbf{B}_0^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^p \\ \mathbf{C}_0^q \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

où \mathbf{B}_0^p et \mathbf{B}_0^q sont les vecteurs des coefficients de Fourier constants associés aux p degrés de liberté linéaires q degrés de liberté non-linéaires du système. Par élimination des termes \mathbf{B}_0^p , les coefficients \mathbf{B}_0^q peuvent être déterminés par la relation

$$\mathbf{B}_0^q = \left(\tilde{\mathbf{K}}_{qq} - \tilde{\mathbf{K}}_{qp} \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \right)^{-1} \left(\mathbf{C}_0^q - \tilde{\mathbf{K}}_{qp} \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1} \mathbf{C}_0^p \right) \quad (4.11)$$

Détermination des termes \mathbf{A}_k^q associés aux éléments non-linéaires

En considérant les termes non-linéaires en “cosinus” des équations 4.5, les coefficients de Fourier \mathbf{A}_k^q vérifient

$$\frac{k}{\nu} \Omega \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{A}_k + \left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu} \Omega \right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right) \mathbf{B}_k = \mathbf{C}_k \quad (4.12)$$

et les termes non-linéaires en “sinus” donne la relation

$$\left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu} \Omega \right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right) \mathbf{A}_k - \frac{k}{\nu} \Omega \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{B}_k = \mathbf{S}_k \quad (4.13)$$

Ainsi, la détermination des coefficients de Fourier \mathbf{A}_k peut être obtenue par élimination des coefficients de Fourier \mathbf{B}_k à partir des équations 4.12 et 4.13. En prémultipliant les équations 4.12 par $\left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu} \Omega \right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1}$ et par substitution dans les équations 4.13, nous obtenons

$$\left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu} \Omega \right)^2 \tilde{\mathbf{M}} + \frac{k}{\nu} \Omega \tilde{\mathbf{D}} \left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu} \Omega \right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \frac{k}{\nu} \Omega \tilde{\mathbf{D}} \right) \mathbf{A}_k = \mathbf{S}_k + \frac{k}{\nu} \Omega \tilde{\mathbf{D}} \left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu} \Omega \right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \mathbf{C}_k \quad (4.14)$$

En introduisant les quantités

$$\mathbf{T}_k = \tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \tilde{\mathbf{M}} + \frac{k}{\nu}\Omega\tilde{\mathbf{D}} \left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \frac{k}{\nu}\Omega\tilde{\mathbf{D}} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{S}_k + \frac{k}{\nu}\Omega\tilde{\mathbf{D}} \left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \mathbf{C}_k \quad (4.16)$$

Les équations 4.14 peuvent être partitionnées sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{k,pp} & \mathbf{T}_{k,pq} \\ \mathbf{T}_{k,qp} & \mathbf{T}_{k,qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^p \\ \mathbf{A}_k^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_k^p \\ \mathbf{W}_k^q \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Ainsi, les coefficients de Fourier \mathbf{A}_k^q peuvent être déterminés par élimination des coefficients de Fourier \mathbf{A}_k^p à partir des équations précédentes. Après calculs, nous avons

$$\mathbf{A}_k^q = \left(\mathbf{T}_{k,qq} - \mathbf{T}_{k,qp} \mathbf{T}_{k,pp}^{-1} \mathbf{T}_{k,pq} \right)^{-1} \left(\mathbf{W}_k^q - \mathbf{T}_{k,qp} \mathbf{T}_{k,pp}^{-1} \mathbf{W}_k^p \right) \quad (4.18)$$

Détermination des termes \mathbf{B}_k^q associés aux éléments non-linéaires

Par analogie, les expressions des coefficients de Fourier \mathbf{B}_k^q peuvent être obtenues. En effet, par élimination des coefficients de Fourier \mathbf{A}_k à partir des équations 4.12 et 4.13 (et prémultiplication des équations 4.13 par $\left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \tilde{\mathbf{M}}\right)^{-1}$) puis substitution dans les équations 4.13, nous obtenons

$$\left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \tilde{\mathbf{M}} + \frac{k}{\nu}\Omega\tilde{\mathbf{D}} \left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \frac{k}{\nu}\Omega\tilde{\mathbf{D}} \right) \mathbf{B}_k = \mathbf{C}_k - \frac{k}{\nu}\Omega\tilde{\mathbf{D}} \left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \mathbf{S}_k \quad (4.19)$$

En utilisant la relation 4.15 et en introduisant la quantité

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{C}_k - \frac{k}{\nu}\Omega\tilde{\mathbf{D}} \left(\tilde{\mathbf{K}} - \left(\frac{k}{\nu}\Omega\right)^2 \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \mathbf{S}_k \quad (4.20)$$

l'équation 4.19 se met sous forme partitionnée

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{k,pp} & \mathbf{T}_{k,pq} \\ \mathbf{T}_{k,qp} & \mathbf{T}_{k,qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k^p \\ \mathbf{B}_k^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k^p \\ \mathbf{U}_k^q \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Finalement, les coefficients de Fourier \mathbf{B}_k^q sont obtenus par élimination des coefficients de Fourier \mathbf{B}_k^p

$$\mathbf{B}_k^q = \left(\mathbf{T}_{k,qq} - \mathbf{T}_{k,qp} \mathbf{T}_{k,pp}^{-1} \mathbf{T}_{k,pq} \right)^{-1} \left(\mathbf{U}_k^q - \mathbf{T}_{k,qp} \mathbf{T}_{k,pp}^{-1} \mathbf{U}_k^p \right) \quad (4.22)$$

Détermination des coefficients de Fourier \mathbf{B}_0^p , \mathbf{A}_k^p et \mathbf{B}_k^p associés aux éléments linéaires

Pour finir, les $(2m + 1) * p$ coefficients de Fourier \mathbf{B}_0^p , \mathbf{A}_k^p et \mathbf{B}_k^p associés aux éléments linéaires peuvent être estimés à partir des équations 4.10, 4.17 et 4.21

$$\mathbf{B}_0^p = \tilde{\mathbf{K}}_{pp}^{-1} \left(\mathbf{C}_0^p - \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \mathbf{B}_0^q \right) \quad (4.23)$$

$$\mathbf{A}_k^p = \mathbf{T}_{k,pp}^{-1} \left(\mathbf{W}_k^p - \mathbf{T}_{k,pq} \mathbf{A}_k^q \right) \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B}_k^p = \mathbf{T}_{k,pp}^{-1} \left(\mathbf{U}_k^p - \mathbf{T}_{k,pq} \mathbf{B}_k^q \right) \quad (4.25)$$

Si le nombre d'éléments linéaires est plus faible que le nombre d'éléments non-linéaires, la même procédure de condensation sur les éléments linéaires peut être réalisée, les coefficients de Fourier associés aux éléments non-linéaires étant alors obtenus par relation directe à partir des coefficients de Fourier associés aux éléments linéaires. Les relations suivantes sont alors obtenues

$$\mathbf{B}_0^p = \left(\tilde{\mathbf{K}}_{pp} - \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \tilde{\mathbf{K}}_{qq}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{qp} \right)^{-1} \left(\mathbf{C}_0^p - \tilde{\mathbf{K}}_{pq} \tilde{\mathbf{K}}_{qq}^{-1} \mathbf{C}_0^q \right) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{A}_k^p = \left(\mathbf{T}_{k,pp} - \mathbf{T}_{k,pq} \mathbf{T}_{k,qq}^{-1} \mathbf{T}_{k,qp} \right)^{-1} \left(\mathbf{W}_k^p - \mathbf{T}_{k,pq} \mathbf{T}_{k,qq}^{-1} \mathbf{W}_k^q \right) \quad (4.27)$$

$$\mathbf{B}_k^p = \left(\mathbf{T}_{k,pp} - \mathbf{T}_{k,pq} \mathbf{T}_{k,qq}^{-1} \mathbf{T}_{k,qp} \right)^{-1} \left(\mathbf{U}_k^p - \mathbf{T}_{k,pq} \mathbf{T}_{k,qq}^{-1} \mathbf{U}_k^q \right) \quad (4.28)$$

Les $(2m + 1) * q$ coefficients de Fourier \mathbf{B}_0^q , \mathbf{A}_k^q and \mathbf{B}_k^q associés aux éléments non-linéaires étant alors obtenus à partir des équations 4.10, 4.17 et 4.21.

4.1.4 Analyse de stabilité de la réponse non-linéaire stationnaire

Une fois la réponse dynamique du rotor non-linéaire obtenue, l'analyse qui suit correspond à la stabilité des solutions périodiques obtenues. Cette dernière est généralement réalisée par l'étude de l'évolution du système non-linéaire au voisinage de sa solution périodique. Cette analyse peut s'effectuer soit par l'intermédiaire de la théorie de Floquet (méthode qui nécessite la construction de la matrice monodrome et un retour dans le domaine temporel coûteux en termes de ressources mémoire et temps de calcul [37]), soit en effectuant directement une estimation de l'évolution de la réponse périodique dans le domaine fréquentiel [39]. Cette seconde approche présente l'avantage de s'appuyer directement sur la réponse dynamique non-linéaire définie par la méthode de la balance harmonique. Elle présente cependant des inconvénients qui proviennent principalement d'une notion de stabilité approchée suivant le nombre d'harmoniques. Nous développerons et illustrerons ces aspects par la suite.

L'étude de stabilité de la solution périodique \mathbf{X}^* s'effectue donc en considérant une perturbation \mathbf{Y} telle que

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* + \mathbf{Y} e^{\lambda t} \quad (4.29)$$

Par substitution de cette solution périodique perturbée dans l'équation 4.1, nous obtenons

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}^* + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}}^* + \mathbf{K}\mathbf{X}^* + e^{\lambda t} \left(\lambda^2 \mathbf{M}\mathbf{Y} + \lambda \left(2\mathbf{M}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}\mathbf{Y} \right) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{K}\mathbf{Y} \right) = \mathbf{f}_{NL} \left(\mathbf{X}^* + e^{\lambda t} \mathbf{Y} \right) \quad (4.30)$$

La méthode de la balance harmonique permet alors d'aboutir après calculs à [36]

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{Z}^* + (\mathbf{\Lambda} + \lambda \mathbf{\Xi}_1 + \lambda^2 \mathbf{\Xi}_2) \bar{\mathbf{Z}} e^{\lambda t} = \mathbf{b}_{NL} \left(\mathbf{Z}^* + e^{\lambda t} \bar{\mathbf{Z}} \right) \quad (4.31)$$

où \mathbf{Z}^* et $\bar{\mathbf{Z}}$ correspondent aux vecteurs contenant les coefficients de Fourier de \mathbf{X}^* et \mathbf{Y} respectivement. \mathbf{b}_{NL} définit le vecteur des coefficients de Fourier associés aux quantités non-linéaires \mathbf{f}_{NL} . Les diverses matrices $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Xi}_1$ et $\mathbf{\Xi}_2$ sont données par

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag} (\mathbf{K}, \mathbf{\Lambda}_1, \dots, \mathbf{\Lambda}_k, \dots, \mathbf{\Lambda}_m) \quad (4.32)$$

$$\mathbf{\Xi}_1 = \text{diag} (\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{\Delta}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{\Delta}}_k, \dots, \tilde{\mathbf{\Delta}}_m) \quad (4.33)$$

$$\mathbf{\Xi}_2 = \text{diag} (\mathbf{M}, \mathbf{M}, \dots, \mathbf{M}, \dots, \mathbf{M}) \quad (4.34)$$

avec

$$\mathbf{\Lambda}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - k^2 \Omega^2 \mathbf{M} & -k \Omega \mathbf{D} \\ k \Omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - k^2 \Omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\tilde{\mathbf{\Delta}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -2k \Omega \mathbf{M} \\ 2k \Omega \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Enfin, en considérant la linéarisation de $\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{X})$ suivant $e^{\lambda t} \bar{\mathbf{Z}}$

$$\mathbf{b}_{NL} \left(\mathbf{Z}^* + e^{\lambda t} \bar{\mathbf{Z}} \right) \approx \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z}^*) + \mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}(\mathbf{Z}^*) \cdot e^{\lambda t} \bar{\mathbf{Z}} \quad (4.37)$$

où $\mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}$ définit la matrice jacobienne de \mathbf{b}_{NL} , les équations 4.31-4.37 nous amènent à l'équation aux valeurs propres

$$(\lambda \mathbf{\Xi}_1 + \lambda^2 \mathbf{\Xi}_2 + \mathbf{\Lambda} - \mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}(\mathbf{Z}^*)) \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

La solution périodique approchée est alors stable si toutes les valeurs propres ont leur partie réelle négative (ce qui correspond à une diminution de la perturbation \mathbf{Y} nous ramenant à la solution périodique \mathbf{X}^* au cours du temps). Dans le cas contraire le système est instable.

4.2 Modélisation du rotor comportant un roulement non-linéaire

Dans cette section, nous appliquons le processus de la méthode de la balance harmonique condensée sur un rotor comportant un roulement non-linéaire. Etant donné le rapport du nombre de degré de liberté des éléments linéaires et non-linéaires, le processus de condensation de la balance harmonique est appliqué à l'élément non-linéaire correspondant au roulement avec contact de Hertz et jeu radial.

Dans un premier temps, une description du rotor et du roulement non-linéaire est donnée. Ensuite une illustration du comportement dynamique non-linéaire est montrée par les réponses dynamiques, l'étude des contacts et pertes de contact au niveau du roulement et une étude de stabilité de l'ensemble rotor-roulement.

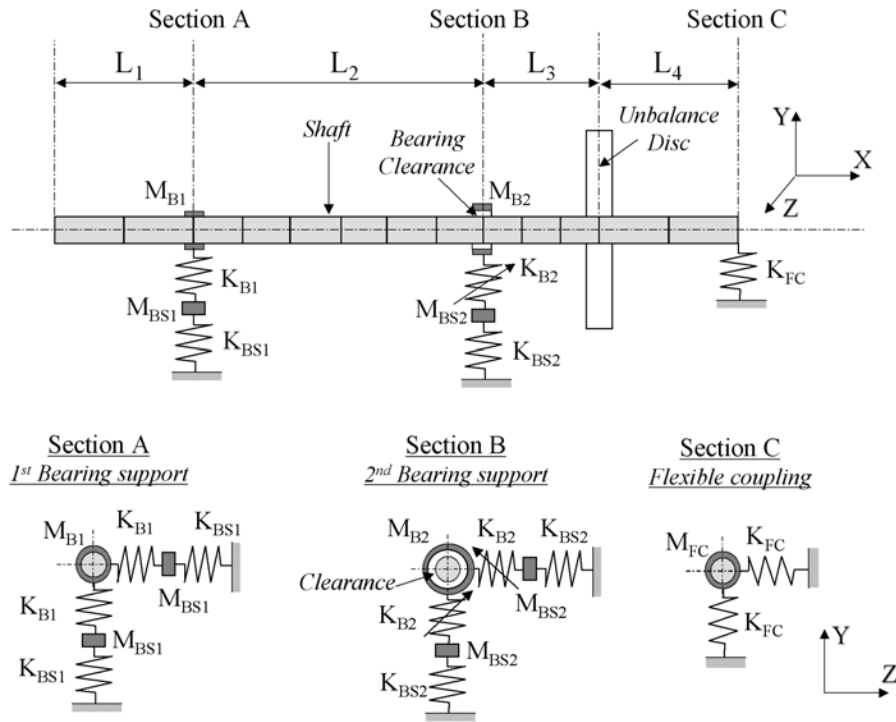


FIG. 4.1 – Description du rotor avec l'élément non-linéaire de roulement

4.2.1 Description du rotor

Le système rotor avec un roulement non-linéaire est illustré en figures 4.1 et 4.2. Dans cette partie, la modélisation des différents éléments est brièvement présentée avec une focalisation particulière sur le modèle de roulement non-linéaire avec contact de Hertz et jeu radial.

Chaque élément de l'arbre du rotor est modélisé par l'intermédiaire de poutres de type Timoshenko et vérifie l'équation dynamique [40] :

$$\left(\mathbf{M}_T^b + \mathbf{M}_R^b \right) \ddot{\mathbf{X}}^b + \left(\mathbf{C}^b + \Omega \mathbf{G}^b \right) \dot{\mathbf{X}}^b + \mathbf{K}^b \mathbf{X}^b = \mathbf{F}^b \quad (4.39)$$

où \mathbf{M}_T^b , \mathbf{M}_R^b , \mathbf{C}^b , \mathbf{G}^b et \mathbf{K}^b définissent les matrices de masse (translation et rotation), d'amortissement externe, gyroscopique et de raideur de chaque élément. Ω correspond à la vitesse de rotation du rotor. La matrice d'amortissement est de type Rayleigh $\mathbf{C}^b = \alpha (\mathbf{M}_T^b + \mathbf{M}_R^b) + \beta \mathbf{K}^b$ (avec α et β constants), l'amortissement interne étant négligé. \mathbf{F}^b représente le vecteur des efforts provenant du balourd et de la gravité sur l'arbre.

Le disque du rotor est représenté par un disque rigide répondant aux équations du mouvement

$$\left(\mathbf{M}_T^d + \mathbf{M}_R^d \right) \ddot{\mathbf{X}}^d + \Omega \mathbf{G}^d \dot{\mathbf{X}}^d = \mathbf{F}^d \quad (4.40)$$

où \mathbf{M}_T^d , \mathbf{M}_R^d et \mathbf{G}^d correspondent aux matrices de masse (translation et rotation) et gyroscopique. \mathbf{F}^d définit le vecteur des efforts provenant du balourd et de la gravité.

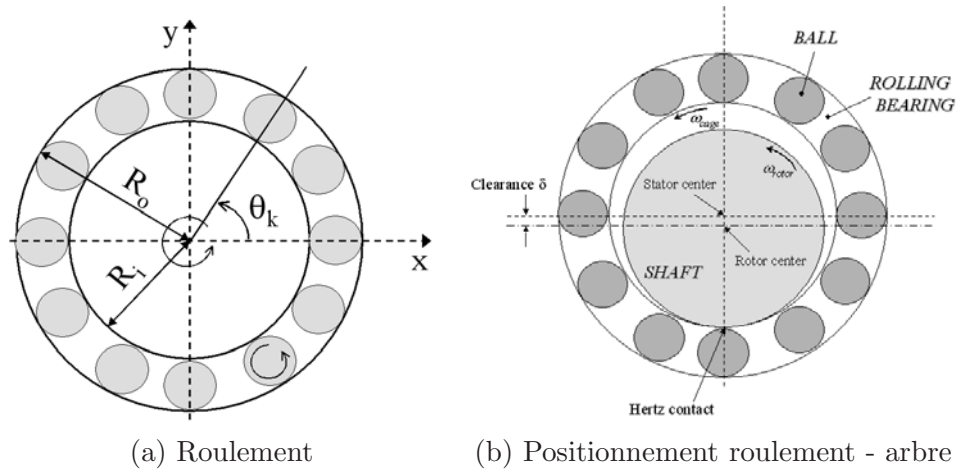


FIG. 4.2 – Modèle de roulement

Notation	Description	Valeur
D	diamètre des éléments tournants	$11.906mm$
D_i	diamètre de la bague intérieure	$38.98mm$
N_b	nombre d'éléments tournants	14
δ	jeu radial	$20\mu m$
M_{B2}	masse des éléments tournants	$1.5kg$
K_H	raideur de contact effective globale	$4.6 \times 10^7 N/m^{3/2}$

TAB. 4.1 – Propriétés géométriques et physiques du modèle de roulement

4.2.2 Modèle de roulement non-linéaire

Le modèle de roulement, présenté en figure 4.2(a), correspond à une modélisation à deux degrés de liberté permettant de prendre en compte la cinématique des N_b éléments tournants, ainsi que le contact de Hertz et le jeu radial au niveau de chacun de ces éléments.

En considérant la piste extérieure de roulement fixée sur le support flexible du rotor, et la piste intérieure du roulement associée à l'arbre du rotor, la position angulaire θ_k du k^{eme} élément tournant au cours de la rotation du rotor est donnée par [41, 42]

$$\theta_k = \frac{2\pi}{N_b} (k - 1) + \omega_{cage} t \quad , \quad k = 1, \dots, N_b \quad (4.41)$$

avec

$$\omega_{cage} = \Omega \left(\frac{R_i}{R_i + R_o} \right) \quad (4.42)$$

où R_i et R_o correspondent aux rayons respectifs de la gorge des bagues intérieure et extérieure, Ω définissant la vitesse de rotation du rotor. ω_{cage} définit la précession de la cage du roulement, les éléments roulants étant maintenus séparés d'une distance angulaire constante $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N_b}$.

Notation	Description	Valeur
D_{shaft}	diamètre de l'arbre	$0.04m$
L_{shaft}	longueur de l'arbre	$1.7m$
ρ	densité	$7800kg/m^3$
E	module d'Young	$2.1 \times 10^{11}N/m^2$
$D_{disc/outer}$	diamètre extérieur du disque	$0.4m$
$D_{disc/inner}$	diamètre intérieur du disque	$0.04m$
h_{disc}	épaisseur du disque	$0.02m$
d_u	excentricité du balourd	$0.2m$
m_u	masse de balourd	$0.002kg$
δ	jeu radial	$20\mu m$
M_{B1}	masse du 1 ^{er} roulement	$1.5kg$
K_{B1}	raideur du 1 ^{er} roulement	$7 \times 10^8 N/m$
M_{B2}	masse du 2 nd roulement	$1.5kg$
K_{B2}	raideur du 2 nd roulement	$7 \times 10^8 N/m$
K_H	raideur de contact effective globale	$4.6 \times 10^7 N/m^{3/2}$
M_{BS1}	masse du 1 ^{er} support palier	$6kg$
K_{BS1}	raideur du 1 ^{er} support palier	$3.8 \times 10^6 N/m$
M_{BS2}	masse du 2 nd support palier	$6kg$
K_{BS2}	raideur du 2 nd support palier	$3.8 \times 10^6 N/m$
M_{FC}	masse du joint d'accouplement	$0.73kg$
K_{FC}	raideur du joint d'accouplement	$5.75 \times 10^4 N/m$

TAB. 4.2 – Description des paramètres du rotor

Ainsi, la cinématique des éléments tournants (voir équation 4.41) et la prise en compte de la gravité vont introduire une excitation paramétrique dans la dynamique du rotor du fait des deux variations de raideur au niveau du roulement suivant les directions verticale et horizontale. Cette fréquence d'excitation est donnée par

$$\omega_{VC} = \omega_{cage} N_b = \Omega N_b \left(\frac{R_i}{R_i + R_o} \right) \quad (4.43)$$

Ce phénomène d'excitation paramétrique engendre donc des forces de contact du roulement au niveau de chacun des éléments tournants. Ces forces de contact dépendent du déplacement relatif Δ_k entre la partie tournante (nommée "rotor" qui correspond à la bague intérieure dans notre cas) et la partie fixe (nommée "stator" qui correspond à la bague extérieure) par rapport aux positions angulaires du k^{eme} élément roulant tel que

$$\Delta_k = (x_o - x_i) \cos(\theta_k) + (y_i - y_o) \sin(\theta_k) \quad , \quad k = 1, \dots, N_b \quad (4.44)$$

où x_i , x_o , y_i et y_o définissent les déplacements horizontaux et verticaux (dans le repère fixe) associés respectivement à la bague intérieure et extérieure du roulement. Ainsi, la force de contact F_k résultante

sur le k^{eme} élément tournant est

$$F_k = \begin{cases} K_H (\Delta_k - \delta)^n & , \quad \Delta_k \geq \delta \\ 0 & , \quad \Delta_k < \delta \end{cases} \quad (4.45)$$

avec δ le jeu radial du roulement. K_H correspond à la raideur effective globale entre les bagues extérieure-intérieure et l'élément tournant défini par

$$K_H = \frac{1}{\frac{1}{K_i^n} + \frac{1}{K_o^n}} \quad (4.46)$$

où K_i et K_o représentent respectivement la raideur entre la bague intérieure et l'élément tournant et entre la bague extérieure et l'élément tournant. L'indice n est une constante valant $\frac{3}{2}$ pour les roulements à billes et $\frac{10}{9}$ pour les roulements à rouleaux. Ainsi, des forces de contact F_k apparaissent si le jeu est consommé ($\delta_k \geq \delta$) pour le k^{eme} élément tournant (à la position θ_k). Dans le cas contraire ($\delta_k < \delta$), le k^{eme} élément tournant n'est pas chargé et aucune force de contact n'est générée. Ce processus appliqué sur chacun des éléments tournants amène donc des forces de contact non-linéaires globales F_X et F_Y dans les deux directions verticale et horizontale (dans le repère fixe)

$$F_X = - \sum_{k=1}^{N_b} F_k \cos(\theta_k) \quad (4.47)$$

$$F_Y = - \sum_{k=1}^{N_b} F_k \sin(\theta_k) \quad (4.48)$$

Ainsi, le roulement génère une excitation paramétrique liée à une introduction de raideur variable dans le repère fixe provenant des variations des forces de contact sur chacun des éléments tournants.

4.2.3 Modèle du rotor complet avec le roulement non-linéaire

Par ajout des raideurs et amortissements aux niveaux des deux supports et du joint d'accouplement et assemblage de l'ensemble des composants arbre-disque-roulement, l'équation dynamique du rotor avec roulement non-linéaire est décrite par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{C} + \Omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{NL} \quad (4.49)$$

où $\ddot{\mathbf{X}}$, $\dot{\mathbf{X}}$ et \mathbf{X} sont les vecteurs d'accélération, de vitesse et de déplacement du système. Ω est la vitesse de rotation du rotor. \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{G} et \mathbf{K} définissent les matrices de masse, d'amortissement, gyroscopique et de raideur. \mathbf{F}_L contient l'ensemble des forces de balourd et de gravité du système complet, tandis que \mathbf{F}_{NL} correspond aux forces de contact non-linéaires dues au roulement. Les paramètres physiques du rotor complet et du roulement sont donnés dans les tableaux 3.1 et 3.2.

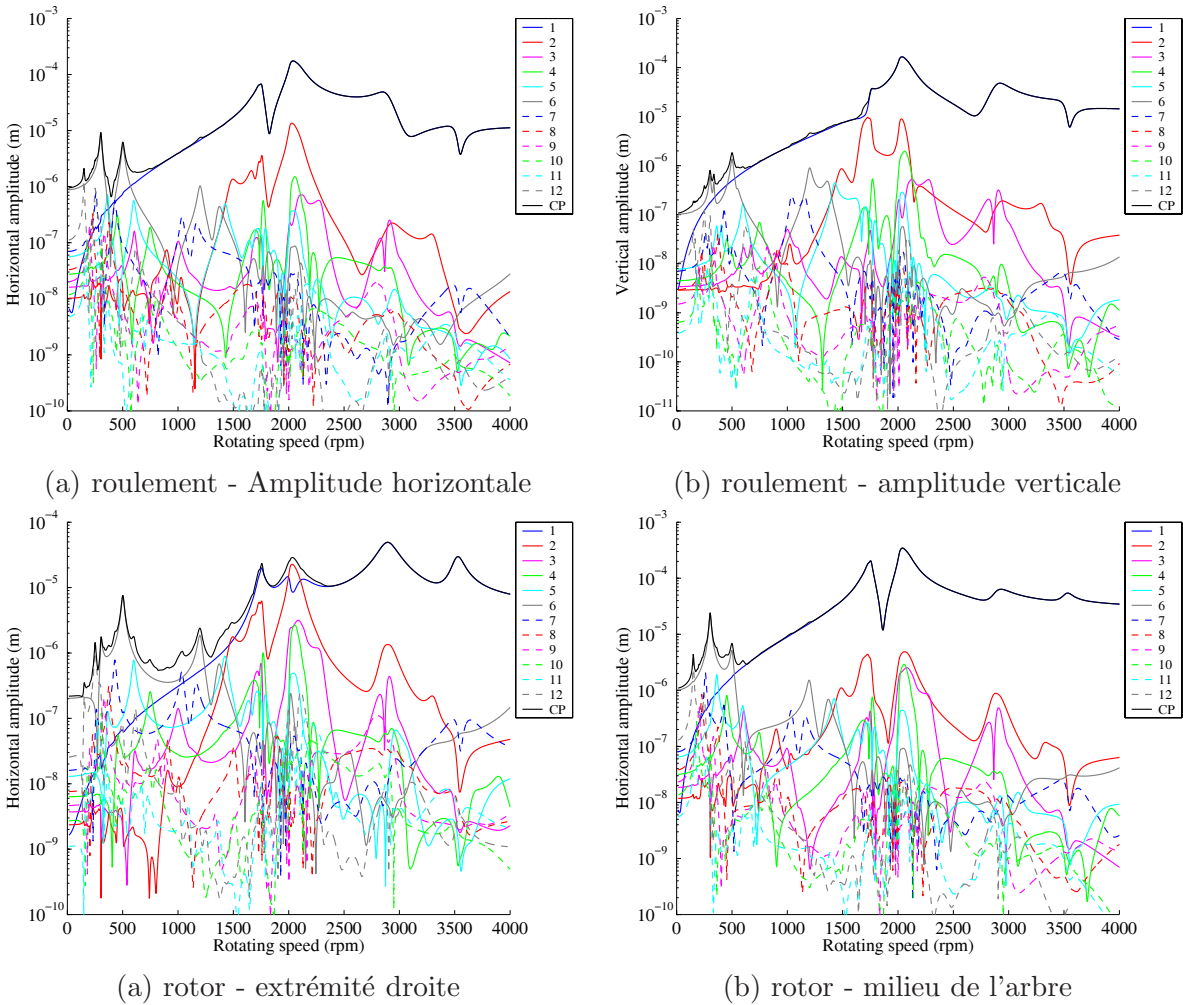


FIG. 4.3 – Réponse dynamique non-linéaire du rotor (CP=Composite Power) et évolution des ordres n au niveau (a-b) du roulement non-linéaire (c-d) extrapolation sur les éléments linéaires

4.3 Etudes numériques

Dans cette partie, nous allons successivement nous intéresser aux réponses à balourds (en termes de réponse non-linéaire totale et évolution des ordres $n \times$), aux orbites complexes du rotor, au problème de contact au niveau du roulement non-linéaire et enfin à la stabilité des solutions périodiques du rotor.

L'objectif est d'illustrer l'application de la balance harmonique condensée sur un système non-linéaire complexe comportant des non-linéarités de type contact de Hertz combinées avec des pertes de contact de type jeu de roulement.

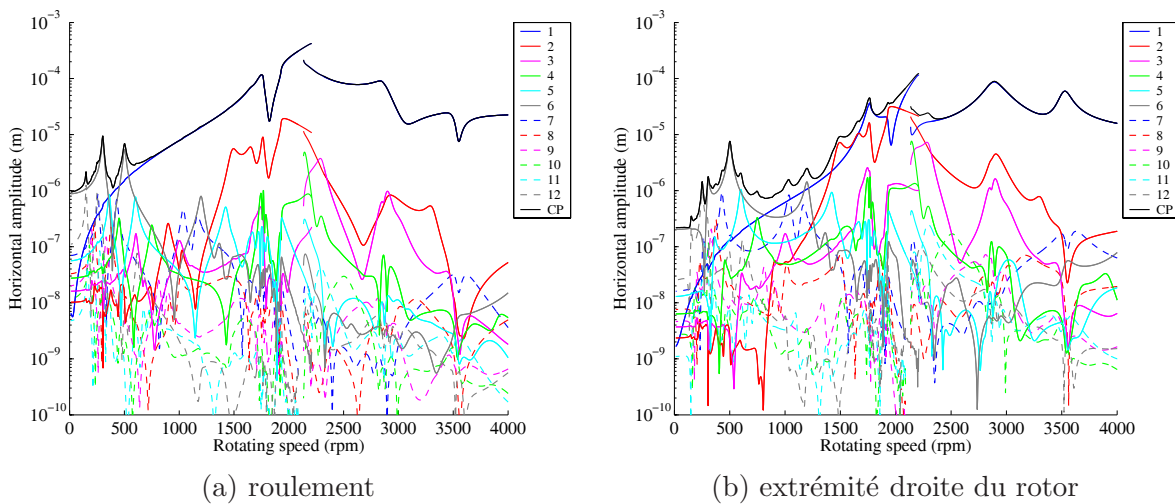


FIG. 4.4 – Réponse dynamique non-linéaire (CP=Composite Power) et évolution des ordres n pour $m_u = 4g$ - Phénomène de saut (a) roulement non-linéaire (b) extrapolation sur les éléments linéaires

4.3.1 Réponse dynamique non-linéaire et évolution des ordres $n \times$

Les figures 4.3(a-b) illustrent les réponses non-linéaires ainsi que les ordres $n \times$ associés (pour $n = 1, \dots, 6$) sur les éléments non-linéaires (soit les amplitudes horizontales et verticales du rotor au niveau du roulement). Les réponses non-linéaires obtenues en considérant les ordres $n \times$ des éléments linéaires sont données en figures 4.3(c-d).

La contribution de chacun des ordres sur la réponse totale apparaît clairement indiquant la nécessité de la prise en compte d'une solution non-linéaire complexe pour bien représenter le comportement dynamique du système, aussi bien au niveau du roulement non-linéaire que des éléments linéaires du rotor. Dans certaines configurations (augmentation du balourd par exemple), des phénomènes de sauts (pour des vitesses de rotation autour de $2000rpm$) illustrent le comportement non-linéaire complexe du système. Ces aspects sont illustrés en figures 4.4. Nous reviendrons sur ce dernier point lors de l'étude des contacts et forces de contact sur le roulement non-linéaire.

Nous retrouvons des résultats classiques de la dynamique non-linéaire des systèmes tournants en ce qui concerne l'importance des différents ordres entiers. Ces derniers contribuent successivement au comportement global du système lors de la montée en vitesse : ce comportement caractérise essentiellement la dynamique non-linéaire du roulement avec jeu lors de l'évolution de l'arbre dans la partie basse du roulement : ceci sera examiné plus en détails lorsque nous nous intéresserons aux évolutions du contact dans le roulement.

Enfin, nous pouvons observer que pour des amplitudes plus élevées, seuls les ordres $1 \times$ et $2 \times$ participent fortement à la réponse dynamique du rotor non-linéaire. Cela caractérise la dynamique du rotor avec l'arbre orbitant, sans perte de contact dans le roulement (comme cela sera illustré ultérieurement).

4.3.2 Evolution des orbites du rotor complet

Différents orbites sont tout d'abord présentés en figures 4.5 pour différentes vitesses de rotation. La complexité de la réponse non-linéaire se traduit par des contributions non négligeables des ordres $n \times$: par exemple, l'ordre $6 \times$ qui induit la réponse non-linéaire globale à faibles vitesses (aux alentours de $500rpm$, comme indiqué en figures 4.4) se traduit par un mouvement orbital en forme de "rosace" au niveau du disque (figure 4.5(d)). Des contributions combinées (ordres $4 \times$, $5 \times$, $6 \times$ et $7 \times$) peuvent aussi apparaître avec la formation d'orbites de formes variées (figure 4.5(f,g,h,i)). Il apparaît donc clairement que la réponse dynamique non-linéaire pour l'ensemble du système peut s'avérer très complexe sur l'ensemble de la plage de fonctionnement du système.

Ensuite, des orbites pour l'ensemble du rotor et les deux supports paliers du stator sont données en figures 4.6 pour des vitesses de rotation caractéristique du rotor. Les premières et deuxièmes vitesses critiques rétrogrades et directes se situent aux alentours de $1740rpm$, $2050rpm$, $2930rpm$ et $3530rpm$.

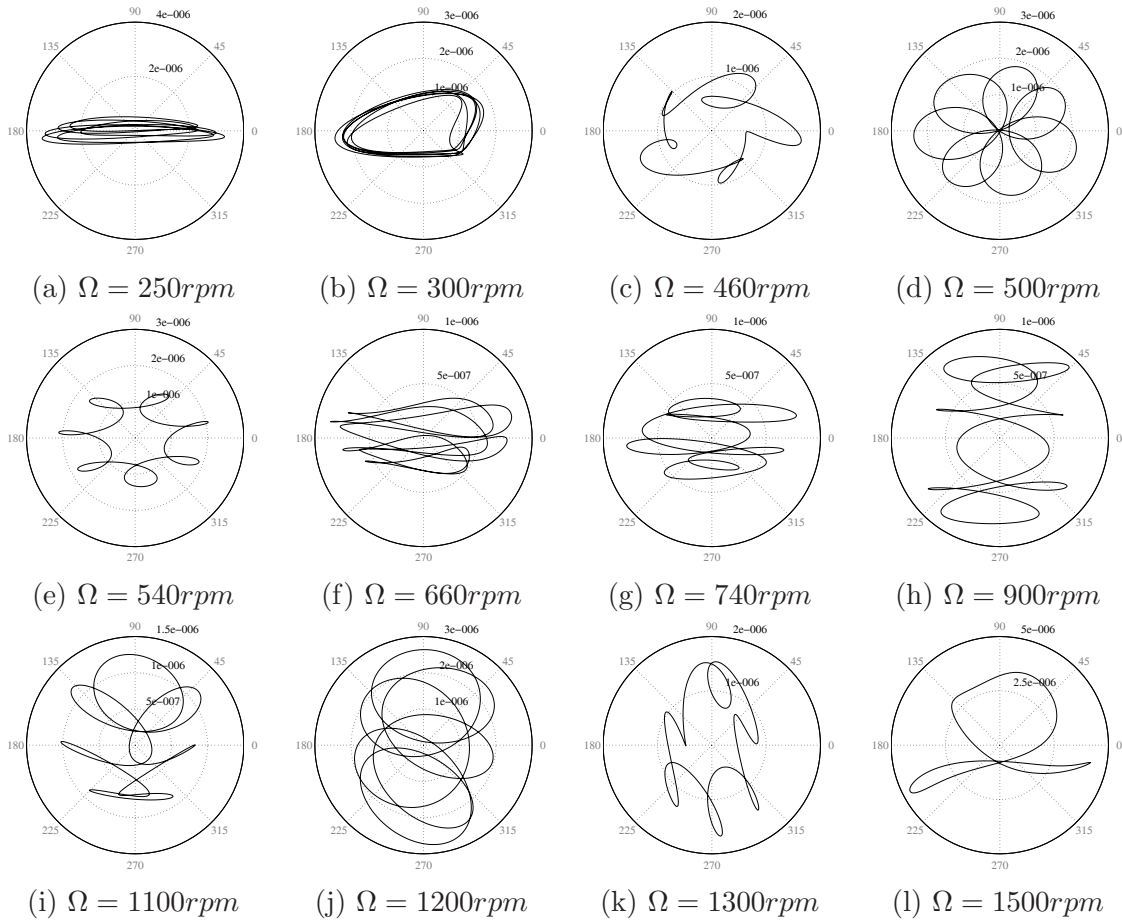


FIG. 4.5 – Evolution des orbites (a,c,d,e) au niveau du disque (f,g,i,k) extrémité gauche (b,h,i,j) au milieu du rotor

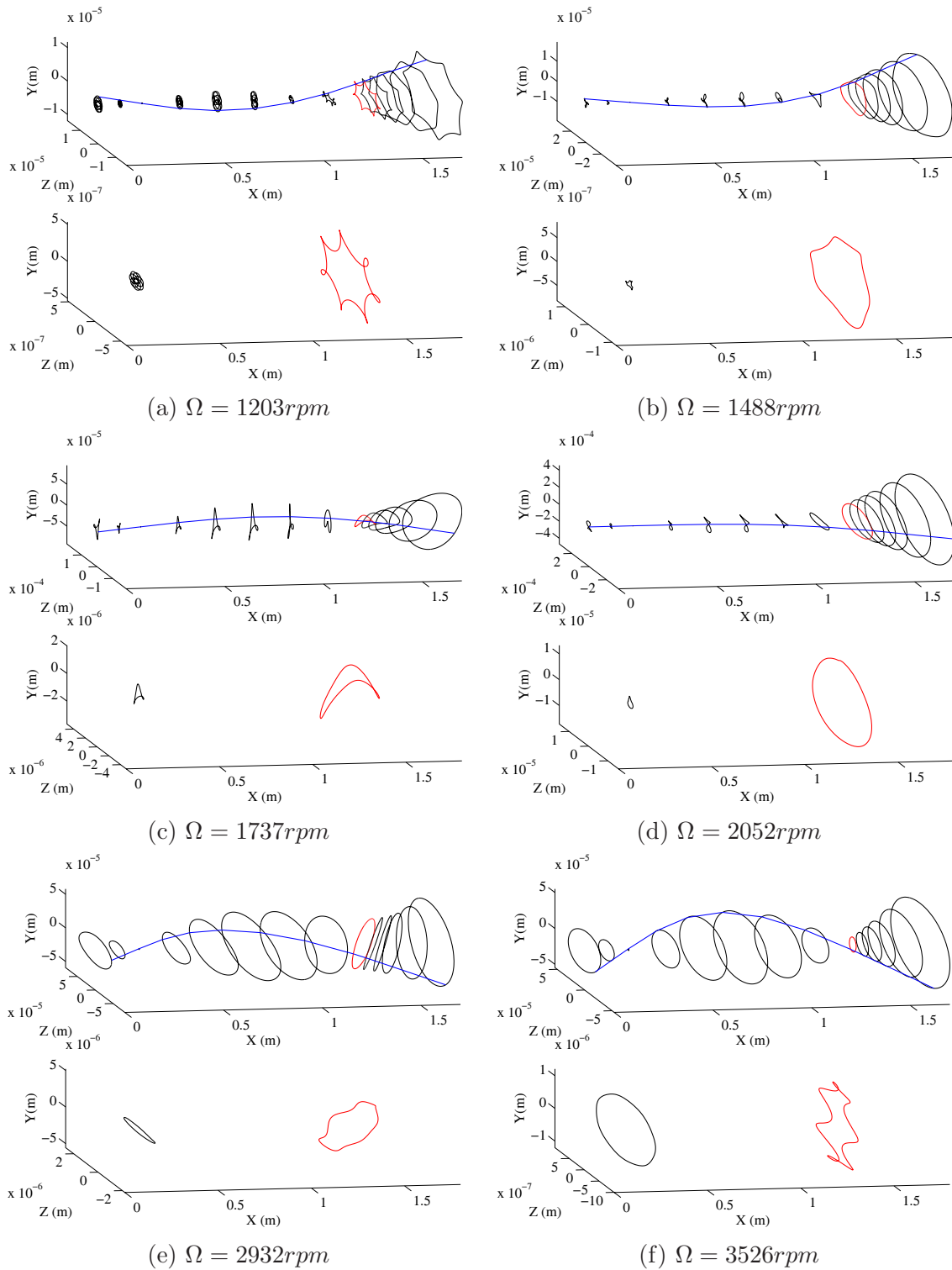


FIG. 4.6 – Evolution des orbites du rotor et de supports stator pour différentes vitesses de rotation (rouge=éléments non-linéaires, noir=éléments linéaires)

Les orbites de l'élément non-linéaire (sur lequel repose le calcul de la balance harmonique) sont données en rouge, alors que les orbites obtenues par re-combinaisons sur les éléments linéaires sont marquées en noir. La déformée de l'arbre du rotor est enfin dessinée en bleu.

Aussi, au passage des vitesses critiques rétrogrades et/ou directes, les orbites du rotor retrouvent des formes circulaires et/ou elliptiques classiques avec une prédominance de l'ordre $1\times$ sur la réponse globale. Des contributions combinées des ordres $1\times$ et $2\times$ sont cependant observables aux alentours de $1730rpm$. Ce phénomène de la présence des ordres $1\times$ et $2\times$ correspond alors à une vitesse de rotation proche non seulement de la première vitesse critique rétrograde mais aussi de la moitié de la deuxième vitesse critique directe. Ceci se traduit naturellement par la formation de boucles externes et/ou internes, comme indiqué en figures 4.6(c).

4.3.3 Evolution des contacts sur le roulement non-linéaire

Nous allons maintenant nous intéresser aux contributions combinées du balourd et de la gravité, leur influence sur la réponse dynamique non-linéaire, et enfin l'évolution du contact et des forces non-linéaires associées au niveau du roulement.

Pour cela, l'évolution du contact sur chaque bille du roulement est estimée et discrétisée sur une période de révolution de la cage de roulement $\omega_{cage} = \Omega \frac{R_i}{R_i + R_o}$ (avec R_i et R_o les rayons externe et interne de la cage du roulement et Ω la vitesse de rotation du rotor).

Les figures 4.7 indiquent les évolutions du contact et des forces non-linéaires sur chacune des billes du roulement pour des vitesses de rotation comprises entre $1800rpm$ et $2300rpm$. Les lignes blanches montrent les prises et pertes de contact au niveau de chaque élément.

Dans certaines situations, la gravité est prédominante sur le balourd : par exemple, pour $\Omega = 520rpm$, le rotor et stator sont toujours en contact : le rotor reste en effet toujours en mouvement au fond du roulement du fait de la prédominance de la gravité (figure 4.2(b)). L'évolution du contact sur chacune des billes est donc continue selon une période proche de la période de révolution de la cage (figures 4.7(a) et (f)). Cependant, les forces de contact sur chaque bille évoluent fortement indiquant une contribution du balourd non négligeable (mais ne permettant pas un mouvement hors du fond de roulement).

Pour d'autres configurations, le balourd devient prédominant vis à vis de la gravité : le rotor décrit alors un mouvement elliptique tournant le long du roulement. Le contact est alors toujours continue mais de période correspondant cette fois à la vitesse de rotation du rotor. Enfin, dans d'autres cas, les contributions de la gravité et du balourd peuvent s'avérer proches. Cela donne alors lieu à des pertes et prises de contacts répétées non continues sur les billes du roulement (figures 4.7(d) et (e)).

Enfin, nous pouvons noter que des formes complexes d'orbites peuvent provenir bien que l'évolution de la prise et perte de contacts soit continue au niveau de chaque bille, comme indiqué en figure 4.8). Dans ce cas, les effets non-linéaires proviennent essentiellement du passage de résonances $n\times$ alors que le rotor orbite au fond du roulement.

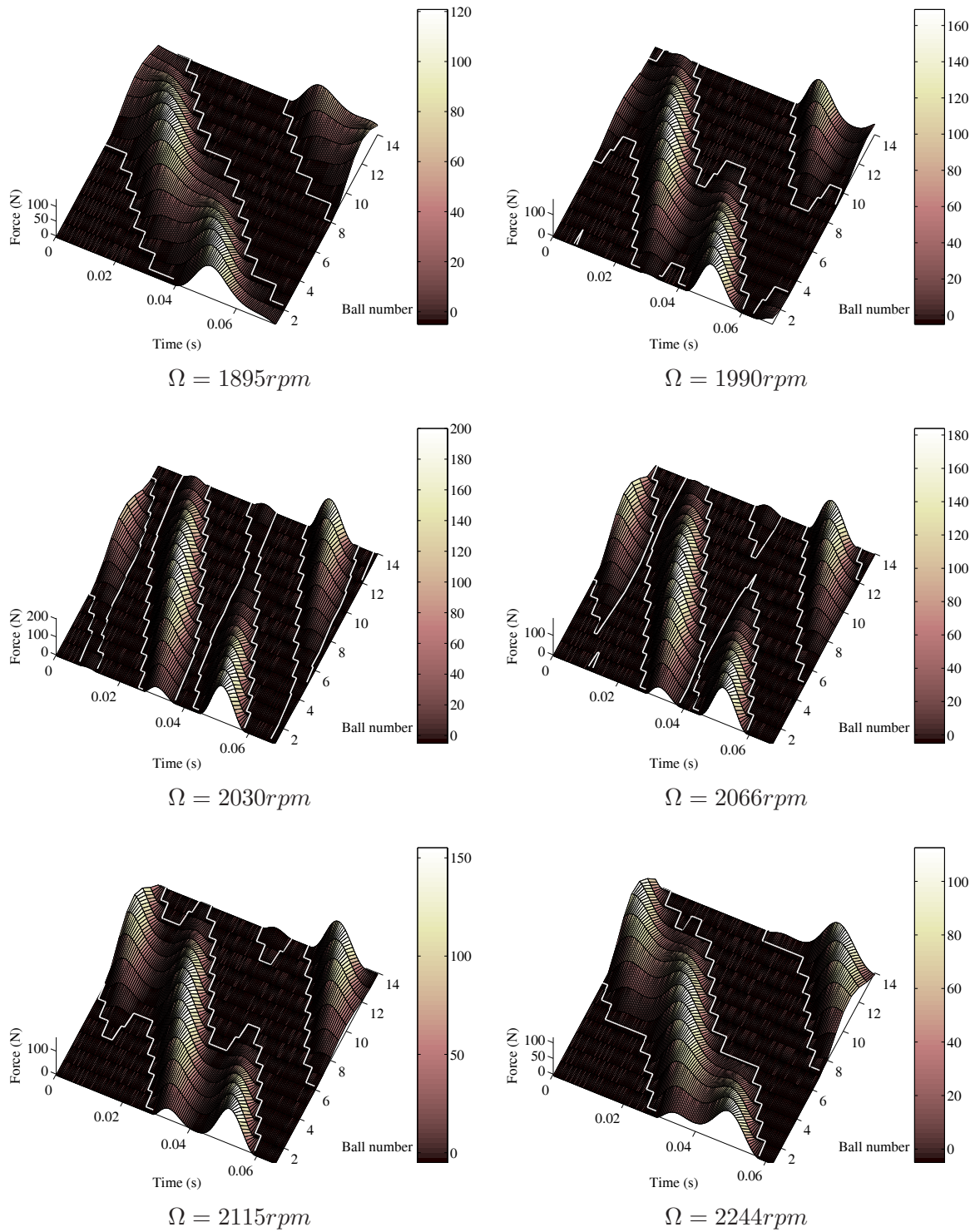


FIG. 4.7 – Evolution du contact au niveau du roulement non-linéaire

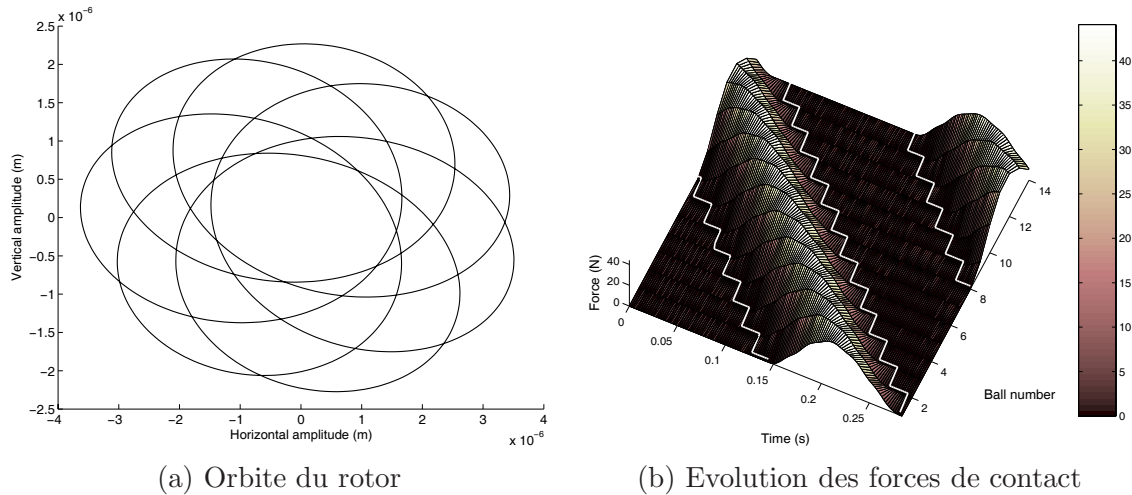


FIG. 4.8 – Evolution des orbites et contact au niveau du roulement non-linéaire $\Omega = 520rpm$

4.3.4 Stabilité des réponses non-linéaires stationnaires

Enfin, nous pouvons nous demander si les diverses solutions périodiques non-linéaires stationnaires obtenues pour l'ensemble de la plage de vitesse de rotation du rotor correspondent à des réponses dynamiques stables. La notion de stabilité de la solution périodique obtenue par l'intermédiaire de la balance harmonique se base sur le suivi du maximum des parties réelles des valeurs propres de l'équation 4.38.

La figure 4.9 indique les zones de stabilité vis à vis des évolutions des amplitudes du rotor au niveau du roulement ainsi que l'influence de l'ordre de troncature effectué sur la solution périodique non-linéaire vis à vis de la stabilité de cette dernière. La région d'instabilité de la solution est globalement estimée et située dans la même zone de fonctionnement du rotor.

Il n'existe pas de concordance entre le nombre d'harmoniques nécessaire pour obtenir une bonne approximation de la solution périodique et une estimation correcte de la stabilité de la solution associée. Effectivement, pour des vitesses de rotation où la réponse comporte une contribution importante des ordres élevés (aux faibles vitesses de rotation par exemple), une approximation de la stabilité par l'intermédiaire d'un solution ne comportant que deux harmoniques est suffisante. Inversement, pour des zones où la solution périodique se décrit principalement par les ordres $1\times$ et $2\times$, une troncature aux ordres $4\times$ et $6\times$ est nécessaire pour obtenir avec justesse la stabilité de la solution périodique non-linéaire.

4.4 Conclusion

Les recherches présentées dans ce chapitre ont permis d'illustrer l'utilisation de la méthode de la balance harmonique avec une technique de condensation sur les éléments non-linéaires, et une analyse de stabilité des solutions périodiques obtenues, qui présente l'avantage de rester dans le domaine

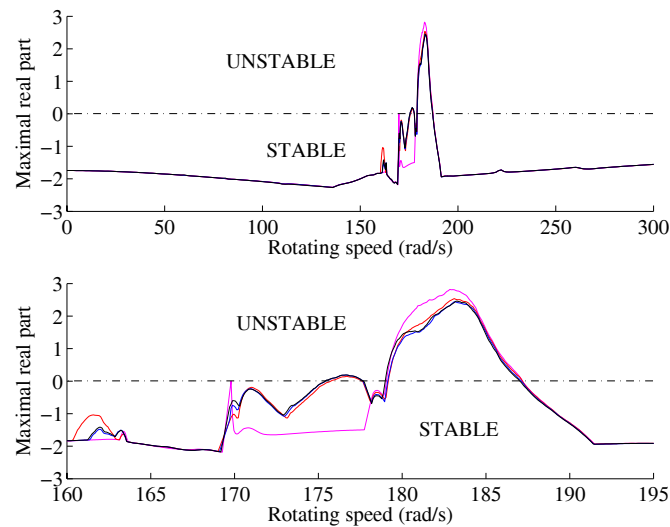


FIG. 4.9 – Estimation de la stabilité des solutions périodiques et influence de la discrétisation de la solution périodique (noir=6 harmoniques, bleu=4 harmoniques, rouge=3 harmoniques, magenta=2 harmoniques)

fréquentiel.

L'étude du comportement dynamique non-linéaire d'un rotor complexe comportant un roulement non-linéaire (contact de Hertz et jeu radial) prenant en compte la cinématique des éléments roulant, a pu être menée avec succès par l'intermédiaire de la méthode non-linéaire mise en place. Des comportements typiquement non-linéaires (apparition d'orbites à boucles multiples, rotor orbitant en fond de roulement, prises et pertes de contact aux niveaux des billes du roulement...) ont pu être illustrés et expliqués avec justesse par l'intermédiaire de l'analyse des évolutions des ordres $n \times$ de la solution périodique non-linéaire.

La prise en compte des éléments non-linéaires pour mieux comprendre la dynamique des systèmes tournants apparaît donc primordiale. Comme nous allons le voir dans le prochain chapitre 5 *Dynamique non-linéaire des rotors fissurés*, l'apparition d'ordre $n \times$ et/ou d'orbites multi-boucles peuvent provenir de caractéristiques non-linéaires multiples ce qui rend la prévision, la compréhension et l'identification du comportement non-linéaire des systèmes tournants très délicates. Ce dernier point sera développé dans les *Perspectives de recherche*.

Chapitre 5

Dynamique non-linéaire des rotors fissurés

De nombreuses études ont été menées pour permettre une détection et identification des fissures dans les systèmes tournants. Ces dernières peuvent tout d’abord se baser sur une détection réalisée pour le système à l’arrêt (non tournant) par suivi des évolutions des fréquences propres du système. Généralement cette détection est alors accompagnée par une identification de la fissure [43–49]. Une seconde approche consiste à s’intéresser à l’influence de la fissure sur le comportement du système tournant [50–60].

Dans ce chapitre nous proposons de montrer l’apport de la prise en compte des effets non-linéaires induits par la présence d’une fissure transverse pour permettre une surveillance vibratoire et la détection de fissures dans les systèmes tournants.

Nous nous attarderons plus particulièrement sur toute la complexité du comportement dynamique non-linéaire des rotors fissurés : une analyse de l’ensemble des phénomènes physiques observés (amplitudes, orbites, apparition de nouveaux pics d’amplitudes, instabilités...) sera menée afin de dégager les indicateurs permettant de statuer sur la présence d’une fissure.

Dans un premier temps, nous présenterons succinctement le modèle de rotor fissuré qui illustrera ce chapitre. Ensuite, la méthode d’analyse non-linéaire (méthode de la balance harmonique) sera rapidement développée, cette dernière ayant déjà fait l’objet d’un développement dans le chapitre 4 *Dynamique des rotors comportant un roulement non-linéaire*. Une non-linéarité de type “résonance paramétrique non-linéaire” (représentant le mécanisme de la fissure lorsque le rotor tourne) sera prise en compte et nous montrerons la possibilité d’une condensation de l’ensemble du système sur l’élément fissuré uniquement. Enfin, la dernière partie traitera de l’ensemble des phénomènes non-linéaires engendrés par la présence d’une fissure transverse dans les systèmes tournants pour établir un diagnostic robuste et une surveillance vibratoire des systèmes tournants se basant sur le comportement non-linéaire.

5.1 Modèle de rotor fissuré

Le modèle de rotor fissuré étudié et présenté en figure 5.1, est composé d'un arbre (rayon R et longueur L) et comporte un disque (rayon R_D , épaisseur h_D) au milieu. Il est supporté à chacune de ses extrémités par des paliers. Les paramètres physiques sont donnés dans le tableau 5.1.

5.1.1 Modélisation du rotor sain

L'arbre est discrétisé en 10 poutres de Timoshenko décrites comme suit :

$$(\mathbf{M}_T^e + \mathbf{M}_R^e) \ddot{\mathbf{X}}^e + (\eta \mathbf{K}_B^e - \omega \mathbf{G}^e) \dot{\mathbf{X}}^e + (\mathbf{K}_B^e + \eta \omega \mathbf{K}_C^e) \mathbf{X}^e = \mathbf{F}^e \quad (5.1)$$

où ω correspond à la vitesse de rotation. \mathbf{M}_T^e et \mathbf{M}_R^e définissent les matrices de masse en translation et rotation. \mathbf{K}_C^e , \mathbf{K}_B^e et \mathbf{G}^e sont les matrices circulatoire, de raideur et gyroscopique. η définit l'amortissement modal associé au premier mode (à l'arrêt pour $\omega = 0$). \mathbf{F}^e désigne les efforts dus à la gravité et aux balourds.

Les équations dynamiques du disque sont données par

$$(\mathbf{M}_T^d + \mathbf{M}_R^d) \ddot{\mathbf{X}}^d - \omega \mathbf{G}^d \dot{\mathbf{X}}^d = \mathbf{F}^d \quad (5.2)$$

où \mathbf{M}_T^d , \mathbf{M}_R^d et \mathbf{G}^d sont les matrices de masse en translation et rotation, et gyroscopique. \mathbf{F}^d désigne les efforts dus à la gravité et aux balourds.

Par addition des raideurs et amortissements associés aux deux paliers présents à chacune des extrémités de l'arbre, le système dynamique du rotor non-fissuré peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}(\omega) \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{g}(\omega, t) \quad (5.3)$$

$\mathbf{g}(\omega, t)$ définit l'ensemble des efforts provenant de la gravité et des balourds le long de l'arbre et du disque. La matrice \mathbf{M} correspond à la matrice de masse globale du système. La matrice \mathbf{D} définit l'amortissement interne de l'arbre et des paliers ainsi que les effets gyroscopiques du système. La matrice de raideur \mathbf{K} comporte les matrices de raideur et circulatoire.

5.1.2 Modélisation d'une fissure transverse

Pour représenter localement la section fissurée, le modèle de fissure transverse développé par Mayes et Davies [61, 62] est utilisé par introduction d'une flexibilité additionnelle sur le rotor sain. Ceci se traduit par une réduction du second moment d'inertie de ΔI au niveau de l'élément fini fissuré. Le changement de la m^{eme} fréquence propre du système du fait de la présence d'une fissure est décrit par [61]

$$\Delta \omega_m^2 = -4 \frac{EI^2}{\pi R^3} (1 - \nu^2) F(\mu) \left(\frac{d^2 u_m}{dx^2} \right)_{x=s_c} \quad (5.4)$$

où u_m représente la m^{eme} déformée propre du rotor et s_c la localisation de la fissure. I , R , E et ν correspondent au second moment d'inertie, le rayon de l'arbre du rotor, le module d'Young et le

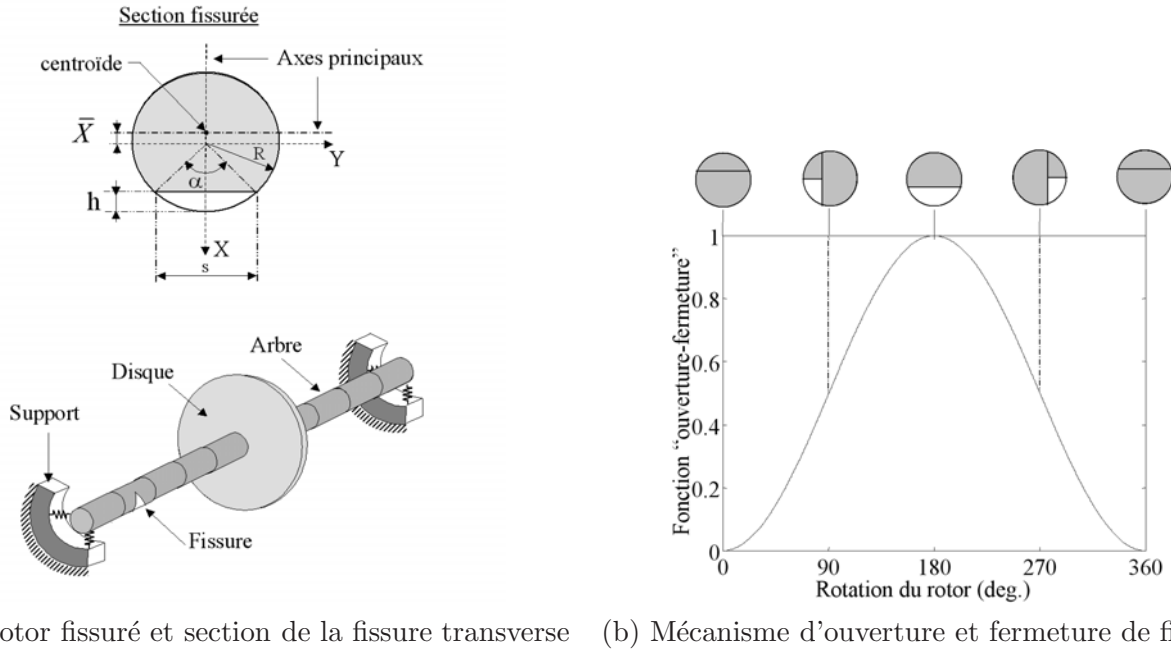


FIG. 5.1 – Modèle du rotor fissuré et du mécanisme de fissure tournante

coefficient de Poisson. $F(\mu)$ est une fonction non-linéaire dépendant uniquement de la profondeur adimensionnelle de la fissure $\mu = \frac{h}{R}$ (avec h la profondeur de fissure, comme illustré en figure 5.1) qui a été obtenue à partir de tests expérimentaux [61, 62].

Les expressions des moments fléchissants M_0 et M des rotors sain et fissuré sont définies par

$$M_0(s) = EI_0(s) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=s} \quad (5.5)$$

$$M(s) = M_0(s) - \Delta M(s) = E(I_0(s) - \Delta I(s)) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=s} \quad (5.6)$$

où y et s définissent respectivement le déplacement en flexion du rotor et sa position axiale. I_0 est le second moment d'inertie du système non fissuré. De plus, les moments fléchissants M_0 et M sont donnés par

$$M_0(s) = \omega_0^2 \int_0^s (s-z) m(z) y(z) dz \quad (5.7)$$

$$\Delta M(s) = \Delta \omega_0^2 \int_0^s (s-z) m(z) y(z) dz \quad (5.8)$$

où $m(z)$ correspond à la masse linéique à la localisation z du rotor.

En considérant les équations 5.5-5.8, la relation suivante est obtenue [61]

$$\Delta \omega^2 = E \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=s} \left(\frac{\Delta I}{1 - \frac{\Delta I}{I_0}} \right) \left(1 - \frac{\Delta \omega^2}{\omega_0^2} \right) \quad (5.9)$$

Par comparaison des expressions 5.4 et 5.9 (et en ne considérant uniquement que les variations du premier ordre de $\Delta\omega^2$), la variation ΔI d'un élément fissuré pour une section circulaire est

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{\frac{R}{l} (1 - \nu^2) F(\mu)}{1 + \frac{R}{l} (1 - \nu^2) F(\mu)}, \quad (5.10)$$

avec R et l le rayon de l'arbre du rotor et la longueur de la section fissurée, respectivement. Ainsi, la réduction en raideur de l'élément fissuré \mathbf{K}_{crack}^e est

$$\mathbf{K}_{crack}^e = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 12I_X & 0 & 0 & 6lI_X & -12I_X & 0 & 0 & 6lI_X \\ & 12I_Y & -6lI_Y & 0 & 0 & -12I_Y & -6lI_Y & 0 \\ & & 4l^2I_Y & 0 & 0 & 6lI_Y & 2l^2I_Y & 0 \\ & & & 4l^2I_X & -6lI_X & 0 & 0 & 2l^2I_X \\ & & & & 12I_X & 0 & 0 & -6lI_X \\ & & & & & 12I_Y & 6lI_Y & 0 \\ & & Sym. & & & & 4l^2I_Y & 0 \\ & & & & & & & 4l^2I_X \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

La contribution en raideur \mathbf{K}_{crack} sur le rotor sain est finalement donnée par

$$\mathbf{K}_{crack} = \text{diag} \left(\mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{élément fissuré}}}{\mathbf{K}_{crack}^e}} \quad \mathbf{0} \ \cdots \ \mathbf{0} \right) \quad (5.12)$$

Les moments d'inerties I_X et I_Y ont pour expressions

$$I_X = \tilde{I}_X \quad (5.13)$$

$$I_Y = \tilde{I}_Y - A\bar{X}^2 \quad (5.14)$$

où A et \bar{X}^2 représentent l'aire de la section non-fissurée du rotor et la distance suivant l'axe X entre les centroïdes des arbres sains et fissurés (figure 5.1)

$$\bar{X} = \frac{2}{3A} R^3 \gamma^3 \quad (5.15)$$

$$A = R^2 \left((1 - \mu) \gamma + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5.16)$$

Comme indiqué en figure 5.1, α définit l'angle de fissure tel que $\alpha = 2\cos^{-1}(1 - \mu)$. Après calculs [56], les expressions des moments d'inertie \tilde{I}_X et \tilde{I}_Y suivant les axes X et Y sont

$$\tilde{I}_X = \int \int_A Y^2 dA = \frac{R^4}{4} \left((1 - \mu) (1 - 4\mu + 2\mu^2) \gamma + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5.17)$$

$$\tilde{I}_Y = \int \int_A X^2 dA = \frac{\pi R^4}{4} + R^4 \left(\frac{2}{3} (1 - \mu) \gamma^3 + \frac{1}{4} (1 - \mu) (1 - 4\mu + 2\mu^2) \gamma + \sin^{-1}(\gamma) \right) \quad (5.18)$$

avec $\gamma = \sqrt{2\mu - \mu^2}$.

Notation	Description	Valeur
R	rayon du rotor	$0.005m$
L	longueur de l'arbre du rotor	$0.5m$
R_D	rayon externe du disque	$0.025m$
h_D	épaisseur du disque	$0.015m$
E	module d'Young	$2.1 \cdot 10^{11} N.m^{-2}$
G	module de cisaillement	$7.7 \cdot 10^{10} N.m^{-2}$
ρ	masse volumique	$7800 kg.m^{-3}$
ν	coefficient de Poisson	0.3
η	coefficient d'amortissement	$1 \cdot 10^{-6}$
m	masse de balourd	$1g$
e	excentricité du balourd	$0.01m$
K_s	raideur des supports paliers	$2 \cdot 10^6 N.m^{-1}$
ω_1, ω_2	première fréquence du rotor non fissuré à l'arrêt	$317 rad.s^{-1}$
ω_3, ω_4	deuxième fréquence du rotor non fissuré à l'arrêt	$1898 rad.s^{-1}$
ω_5, ω_6	troisième fréquence du rotor non fissuré à l'arrêt	$3332 rad.s^{-1}$

TAB. 5.1 – Paramètres physiques du rotor

5.1.3 Mécanisme d'une fissure tournante

L'une des caractéristiques fondamentales du comportement d'une fissure transverse pour les systèmes tournants est son ouverture et fermeture successives lors de la rotation du rotor. Cet effet, appelé "respiration de la fissure", correspond à une approximation du comportement physique exact du mécanisme d'ouverture et fermeture de la fissure, qui est alors conditionné par la dominance de la gravité : cela suppose en effet que la déflexion statique est toujours prédominante en amplitude par rapport à la réponse dynamique globale du système fissuré.

Le mécanisme d'ouverture et fermeture de la fissure peut être approché par l'ajout d'une fonction périodique $f(\omega, t)$ devant la matrice de raideur \mathbf{K}_{crack} de l'élément fissuré tel que

$$\mathbf{K}_c = f(\omega, t) \mathbf{K}_{crack} = \frac{1 - \cos\omega t}{2} \mathbf{K}_{crack} \quad (5.19)$$

où ω correspond à la vitesse de rotation du rotor. Si $f(\omega, t) = 0$, la fissure est fermée et l'équation dynamique du rotor est similaire à celle d'un rotor sain. Dans le cas où $f(\omega, t) = 1$, la fissure est totalement ouverte.

5.1.4 Equation dynamique d'un rotor comportant une fissure transverse

L'équation dynamique d'un rotor fissuré peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}(\omega) \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_c(\omega, t)) \mathbf{X} = \mathbf{Q} + \mathbf{W}(\omega, t) \quad (5.20)$$

avec \mathbf{M} et \mathbf{K} les matrices de masse et de raideur globales du rotor sain. \mathbf{Q} et \mathbf{W} correspondent respectivement à l'ensemble des forces dues à la gravité et aux balourds sur l'arbre et le disque. La matrice de raideur globale du système est alors composée d'une matrice constante \mathbf{K} et d'une matrice à coefficient périodique $\mathbf{K}_c = f(\omega, t) \mathbf{K}_{crack}$. Les paramètres physiques du rotor sont donnés dans le tableau 4.1.

5.2 Réponse dynamique non-linéaire du rotor fissuré

5.2.1 Approximation de la solution sous la forme de série de Fourier tronquée

Du fait de l'approximation du mécanisme d'ouverture et fermeture de la fissure sous la forme de termes trigonométriques, la réponse dynamique non-linéaire du rotor fissuré peut s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier tronquée à l'ordre m tel que

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^m (\mathbf{B}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{A}_k \sin(k\omega t)) \quad (5.21)$$

où ω définit la vitesse de rotation du rotor. \mathbf{B}_0 , \mathbf{A}_k et \mathbf{B}_k (avec $k = 1, \dots, m$) correspondent donc aux coefficients de Fourier inconnus décrivant la réponse non-linéaire du système avec une fissure transverse.

Aussi, l'équation dynamique non-linéaire 5.20 du rotor fissuré peut s'écrire

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}(\omega)\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{Q} + \mathbf{W}(\omega, t) + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \omega, t) \quad (5.22)$$

avec

$$\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \omega, t) = \frac{1}{2} (1 - \cos\omega t) \mathbf{K}_c \mathbf{X} \quad (5.23)$$

En considérant le mécanisme de fissure défini en équations 5.23, l'expression des termes non-linéaires \mathbf{f}_{NL} peut aisément se mettre sous la forme d'une série de Fourier tronquée

$$\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \omega, t) = \mathbf{C}_0^f + \sum_{k=1}^m (\mathbf{C}_k^f \cos(k\omega t) + \mathbf{S}_k^f \sin(k\omega t)) \quad (5.24)$$

Les coefficients de Fourier \mathbf{C}_0 , \mathbf{S}_k et \mathbf{C}_k (avec $k = 1, \dots, m$) sont obtenus par un passage alterné entre les domaines fréquentiel et temporel [21] tel que

$$\left[\mathbf{B}_0 \ \mathbf{A}_1 \ \mathbf{B}_1 \ \cdots \ \mathbf{A}_m \ \mathbf{B}_m \right]^T \Rightarrow \mathbf{X}(t) \Rightarrow \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}, \omega, t) \Rightarrow \left[\mathbf{C}_0^f \ \mathbf{S}_1^f \ \mathbf{C}_1^f \ \cdots \ \mathbf{S}_m^f \ \mathbf{C}_m^f \right]^T \quad (5.25)$$

Il est bon de noter que les expressions analytiques des coefficients de Fourier \mathbf{C}_0^f , \mathbf{C}_k^f et \mathbf{S}_k^f (avec $k = 1, \dots, m$) peuvent être obtenues de façon exacte en fonction des termes \mathbf{B}_0 , \mathbf{A}_k et \mathbf{B}_k .

Chaque terme du vecteur des forces de balourds \mathbf{W} est donné suivant les axes horizontaux et verticaux (directions Y et X sur la figure 5.1) par les expressions $m_e d_e \cos(\omega t + \phi)$ et $m_e d_e \sin(\omega t + \phi)$, respectivement (m_e et d_e définissent la masse et l'excentricité du balourd sur le disque et réparties

tout le long de l'arbre, ϕ correspond à l'angle initial de déphasage de chacun des balourds avec l'axe des Z et donc l'axe principal de la fissure transverse).

Ainsi, les forces de gravité \mathbf{Q} et les forces de balourds \mathbf{W} sont définies de façon exacte par les séries de Fourier

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, \omega, t) = \mathbf{C}_0^Q \quad (5.26)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{X}, \omega, t) = \mathbf{C}_1^W \cos(\omega t) + \mathbf{S}_1^W \sin(\omega t) \quad (5.27)$$

Par substitution des expressions 5.21, 5.24, 5.26 et 5.27 dans l'équation dynamique 5.22, les $(2m + 1) * n$ équations (où n définit le nombre de degrés de liberté du système) permettent la détermination des coefficients de Fourier de la solution dynamique du rotor fissuré.

Les termes constants \mathbf{B}_0 sont donnés par l'intermédiaire des n relations suivantes

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0^Q + \mathbf{C}_0^f \quad (5.28)$$

Les coefficients de Fourier du premier ordre \mathbf{A}_1 et \mathbf{B}_1 vérifient les $2 * n$ équations

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & -\omega \mathbf{D} \\ \omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^W + \mathbf{S}_1^f \\ \mathbf{C}_1^W + \mathbf{C}_1^f \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Finalement, les $(2m - 1) * n$ équations restantes permettent la détermination des coefficients de Fourier d'ordre k (pour $2 \leq k \leq m$)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & -k\omega \mathbf{D} \\ k\omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^f \\ \mathbf{C}_k^f \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

5.2.2 Partition sur l'élément fissuré

Les vecteurs des coefficients de Fourier \mathbf{A}_k et \mathbf{B}_k (pour $1 \leq k \leq n$) peuvent être partitionnés suivant les composantes de Fourier \mathbf{A}_k^c et \mathbf{B}_k^c correspondant aux degrés de liberté de l'élément fissuré, et les composantes de Fourier \mathbf{A}_k^u et \mathbf{B}_k^u associées aux degrés de liberté restants.

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k^c \\ \mathbf{U}_k^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^c \\ \mathbf{B}_k^c \\ \mathbf{A}_k^u \\ \mathbf{B}_k^u \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

L'indice k représente la “ k^{eme} composante de Fourier”, et les indices u et c sont respectivement associés au rotor sain (“uncracked”) et fissuré (“cracked”). Dans le cas d'un rotor comportant uniquement une seule fissure, les vecteurs \mathbf{A}_k^c et \mathbf{B}_k^c sont de dimension 8×1 , et les vecteurs \mathbf{A}_k^u et \mathbf{B}_k^u de dimension $(4 * (n - 1)) \times 1$.

Les équations d'équilibre des coefficients de Fourier d'ordre k vérifient alors

$$\mathbf{\Theta}_k \mathbf{U}_k = \mathbf{F}_k \quad (5.32)$$

avec

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \Theta_k^{cc} & \Theta_k^{cu} \\ \Theta_k^{uc} & \Theta_k^{uu} \end{bmatrix} = \Psi^T \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} & -k\omega \mathbf{D} \\ k\omega \mathbf{D} & \mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix} \Psi \quad (5.33)$$

les matrices Θ_k^{cc} , Θ_k^{cu} , Θ_k^{uc} and Θ_k^{uu} étant respectivement de dimension 16×16 , $16 \times ((n-1) * 8)$, $((n-1) * 8) \times 16$, et $((n-1) * 8) \times ((n-1) * 8)$.

Les expressions des coefficients de Fourier du premier ordre \mathbf{F}_1 et des ordres supérieurs \mathbf{F}_k (pour $2 \leq k \leq m$) sont alors données par

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^c \\ \mathbf{F}_1^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{W,c} + \mathbf{S}_1^{f,c} \\ \mathbf{C}_1^{W,c} + \mathbf{C}_1^{f,c} \\ \mathbf{S}_1^{W,u} \\ \mathbf{C}_1^{W,u} \end{bmatrix} = \Psi^T \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^W + \mathbf{S}_1^f \\ \mathbf{C}_1^W + \mathbf{C}_1^f \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^c \\ \mathbf{F}_k^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^{f,c} \\ \mathbf{C}_k^{f,c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \Psi^T \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k^f \\ \mathbf{C}_k^f \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Ainsi, les équations d'équilibre définissant les coefficients de Fourier du premier ordre et des ordres k (avec $2 \leq k \leq m$) sont

$$\begin{bmatrix} \Theta_1^{cc} & \Theta_1^{cu} \\ \Theta_1^{uc} & \Theta_1^{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^c \\ \mathbf{U}_1^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^c \\ \mathbf{F}_1^u \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_k^{cc} & \Theta_k^{cu} \\ \Theta_k^{uc} & \Theta_k^{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k^c \\ \mathbf{U}_k^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Les vecteurs \mathbf{F}_k (pour $2 \leq k \leq m$) correspondent donc à une excitation du fait de la présence de la fissure transverse. Seuls les degrés de liberté associés à l'élément fissuré subissent cette force (les vecteurs \mathbf{F}_k^u sont des vecteurs nuls, comme indiqué en équation 5.35). De plus, l'effet de balourd additionnel dû à la présence de la fissure apparaît clairement dans l'expression du vecteur des forces \mathbf{F}_1 (sur les degrés de liberté de l'élément fissuré uniquement). Cela traduit donc bien l'effet d'ajout ou diminution de balourd apporté par la fissure suivant le déphasage ϕ entre les balourds et l'axe principal de la fissure.

Les différentes expressions des ordres $k \times$ (pour $k = 1, \dots, m$) associées aux éléments fissurés et sains sont alors données par

$$\mathbf{U}_k^c = (\Theta_k^{cc} - \Theta_k^{cu} \Theta_k^{uu-1} \Theta_k^{uc})^{-1} \mathbf{F}_k^c \quad (5.38)$$

$$\mathbf{U}_k^u = -\Theta_k^{uu-1} \Theta_k^{uc} (\Theta_k^{cc} - \Theta_k^{cu} \Theta_k^{uu-1} \Theta_k^{uc})^{-1} \mathbf{F}_k^c \quad (5.39)$$

$$\mathbf{U}_1^c = (\Theta_1^{cc} - \Theta_1^{cu} \Theta_1^{uu-1} \Theta_1^{uc})^{-1} (\mathbf{F}_1^c - \Theta_1^{cu} \Theta_1^{uu-1} \mathbf{F}_1^u) \quad (5.40)$$

$$\mathbf{U}_1^u = \Theta_1^{uu-1} \mathbf{F}_1^u - \Theta_1^{uu-1} \left((\Theta_1^{cc} - \Theta_1^{cu} \Theta_1^{uu-1} \Theta_1^{uc})^{-1} (\mathbf{F}_1^c - \Theta_1^{cu} \Theta_1^{uu-1} \mathbf{F}_1^u) \right) \quad (5.41)$$

5.2.3 Stabilité de la réponse non-linéaire du rotor fissuré

Du fait de la présence d'une non-linéarité paramétrique, la réponse dynamique non-linéaire du rotor fissuré peut s'avérer être instable. Comme explicité précédemment dans le cas d'un rotor comportant un roulement non-linéaire (chapitre 4), une analyse de stabilité peut être menée en appliquant une perturbation \mathbf{Y} autour de la réponse dynamique non-linéaire \mathbf{X}^* :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* + \mathbf{Y}e^{\lambda t} \quad (5.42)$$

Après substitution dans l'équation dynamique du rotor fissuré 5.22 et en appliquant la procédure de la balance harmonique, nous avons

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{Z}^* + (\mathbf{\Lambda} + \lambda\mathbf{\Gamma}_1 + \lambda^2\mathbf{\Gamma}_2)\bar{\mathbf{Z}}e^{\lambda t} = \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z}^* + e^{\lambda t}\bar{\mathbf{Z}}) \quad (5.43)$$

avec

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & & & \\ & \mathbf{\Lambda}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{\Lambda}_m \end{bmatrix}; \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{\Delta}}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{\Delta}}_m \end{bmatrix}; \mathbf{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & & & \\ & \mathbf{M} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

et

$$\mathbf{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - i^2\Omega^2\mathbf{M} & -i\Omega\mathbf{D} \\ i\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - i^2\Omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{\Delta}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & -2i\Omega\mathbf{M} \\ 2i\Omega\mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

\mathbf{Z}^* et $\bar{\mathbf{Z}}$ représentent les vecteurs des coefficients de Fourier associés aux termes \mathbf{X}^* et \mathbf{Y} . \mathbf{b}_{NL} comporte les coefficients de Fourier résultant de la non-linéarité due à la présence de la fissure \mathbf{f}_{NL} , des forces de balourds \mathbf{W} et des forces de gravité \mathbf{Q} .

La détermination de la stabilité de la réponse dynamique non-linéaire s'effectue à partir de la détermination des valeurs propres du système

$$(\lambda\mathbf{\Gamma}_1 + \lambda^2\mathbf{\Gamma}_2 + \mathbf{\Lambda} - \mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}(\mathbf{Z}^*))\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{0} \quad (5.46)$$

où $\mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}$ correspond à la matrice Jacobienne de \mathbf{b}_{NL} et donc définit tel que

$$\mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z}^* + e^{\lambda t}\bar{\mathbf{Z}}) \approx \mathbf{b}_{NL}(\mathbf{Z}^*) + \mathbf{J}_{\mathbf{b}_{NL}}(\mathbf{Z}^*) \cdot e^{\lambda t}\bar{\mathbf{Z}} \quad (5.47)$$

Si l'ensemble des valeurs propres du système 5.46 ont leur partie réelle négative, la réponse dynamique non-linéaire est stable, tandis que si au moins une valeur propre a sa partie réelle positive, le comportement dynamique du rotor fissuré est instable.

5.3 Détection des fissures à partir de la réponse non-linéaire

Nous allons donc à présent nous focaliser sur la surveillance vibratoire des systèmes tournants et de la détection des fissures par l'intermédiaire d'une analyse fine de la dynamique non-linéaire du système [56, 57, 59, 60]. L'objectif de cette partie est de montrer les différences caractéristiques permettant de statuer sur la présence d'une fissure dans le rotor, mais aussi les limitations et précautions à prendre pour éviter un diagnostic erroné.

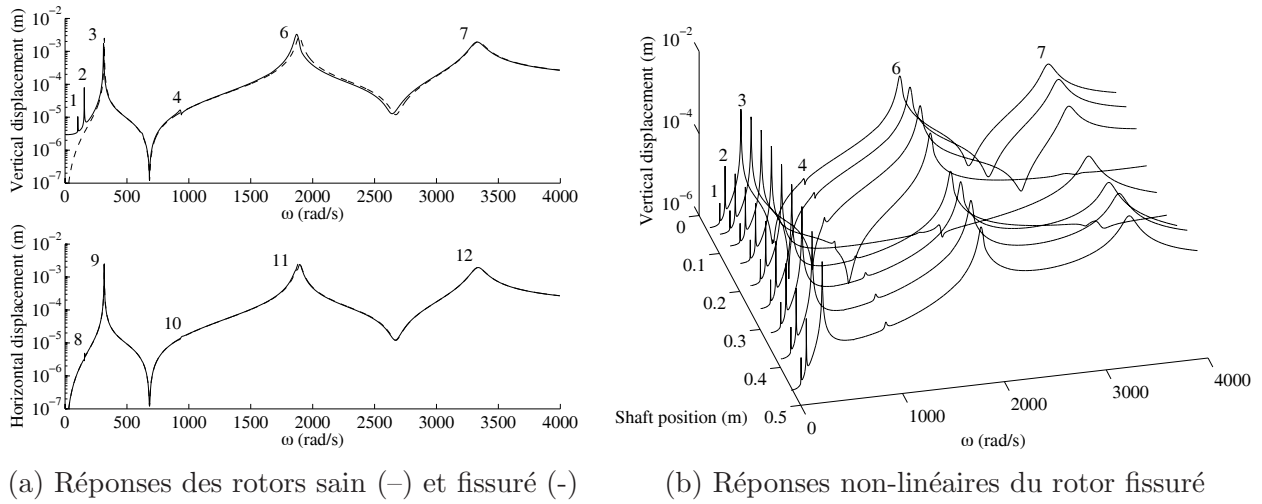


FIG. 5.2 – Réponses dynamiques du rotor sain puis fissuré avec un balourd situé à $0.1m$ et une fissure à $L_{crack} = 0.175m$ et $\mu = 1$

5.3.1 Résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ et ordres $n \times$ associés

Comme explicité précédemment, l'interaction entre une fissure tournante, la gravité et la présence de balourds entraîne l'apparition de super-harmoniques d'ordre n qui se traduit par des pics de résonances au passage des vitesses de rotation valant $\frac{1}{n}$ des vitesses critiques de la réponse dynamique non-linéaire du rotor fissuré. Ce phénomène est illustré en figure 5.2(a) où les amplitudes verticale et horizontale de la réponse du rotor fissuré et du rotor sain associé sont données. Nous observons en effet l'apparition nette de deux pics tout le long du rotor au niveau du déplacement vertical qui correspondent aux passages des pics des résonances sous-critiques $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ (points 1 et 2 respectivement sur la figure 5.2(a) et (b)) du premier mode du rotor (point 3). De même, trois nouveaux pics (points 4, 10 et 8) sont visibles, correspondant respectivement aux pics de résonances sous-critiques $\frac{1}{2}$ des second modes de flexion suivant les directions horizontale et verticale (points 6 et 11) et au premier mode de flexion dans le plan horizontal (point 8).

Les figures 5.3(a) et (b) illustrent les évolutions des ordres 2 et 3 suivant la vitesse de rotation du rotor fissuré pour différentes tailles de fissures. Nous remarquons l'apparition de pics de contribution des ordres super-harmoniques $n \times$ aux passages des résonances sous-critiques $\frac{1}{m}$ (avec $1 \leq m \leq n$). Ces pics de résonances sous-critiques $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont visibles aussi bien pour les premiers que les seconds modes de flexion suivant les directions horizontale et verticale. De plus ces derniers augmentent avec la taille de la fissure. Nous retrouvons aussi l'un des résultats classiques de la dynamique des systèmes fissurés qui correspond à un abaissement des vitesses critiques avec l'augmentation de la taille de la fissure [57]. Ce résultat est aussi valable pour les résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$. Cependant, ces abaissements en fréquence sont généralement trop faibles pour être utilisés comme seul critère lors de la détection d'une fissure.

Ensuite, les figures 5.3(a) et (b) montrent les évolutions des ordres super-harmoniques $2 \times$ et $3 \times$

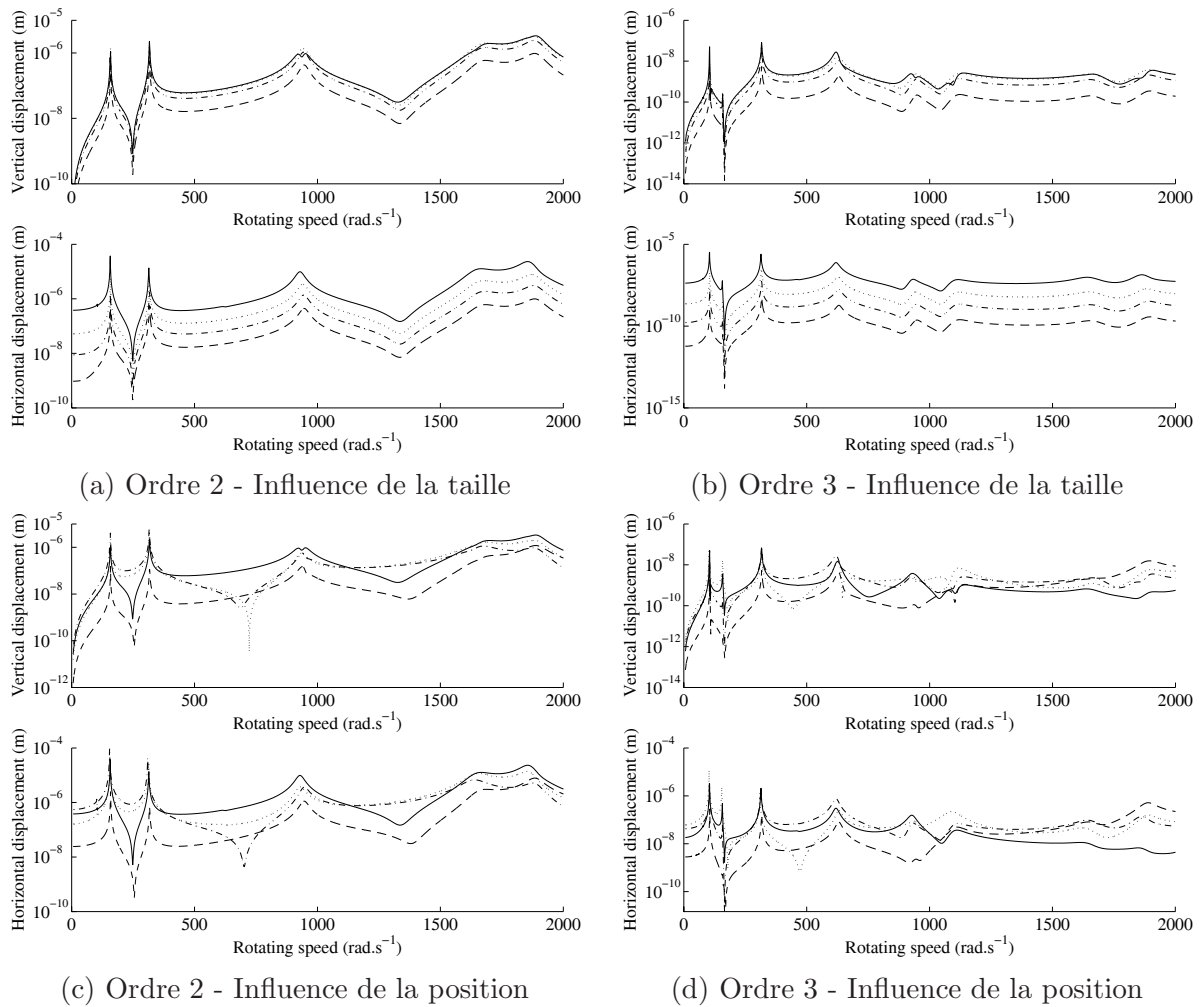


FIG. 5.3 – Effets de la position et profondeur de la fissure sur les ordres $2\times$ et $3\times$ (paramètre associé à la taille de fissure – $\mu = 1$, – – $\mu = 0.75$, – . – $\mu = 0.5$, ... $\mu = 0.25$ avec une fissure positionnée à $L_{crack} = 0.175m$, paramètre associé à la position de fissure – $L_{crack} = 0.075m$, – – $L_{crack} = 0.125m$, – . – $L_{crack} = 0.175m$, ... $L_{crack} = 0.225m$ avec une profondeur de fissure $\mu = 1$)

suivant la position de la fissure. Nous retrouvons là aussi le fait que lorsque la fissure est située proche d'un noeud (pour un mode donné), les ordres super-harmoniques $n\times$ associés ne sont que très peu affectés par la présence de la fissure. Ainsi, l'effet d'une fissure sur l'abaissement et l'amplitude des pics des résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ est maximum lorsque la fissure se situe sur l'un des ventres du mode considéré.

En conclusion, l'apparition de nouveaux pics aux passages des résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ d'un rotor fissuré peut être utilisée comme un premier indicateur de la présence d'une fissure. Sur la réponse dynamique non-linéaire globale, ces pics sont prédominants selon la direction verticale (du fait du

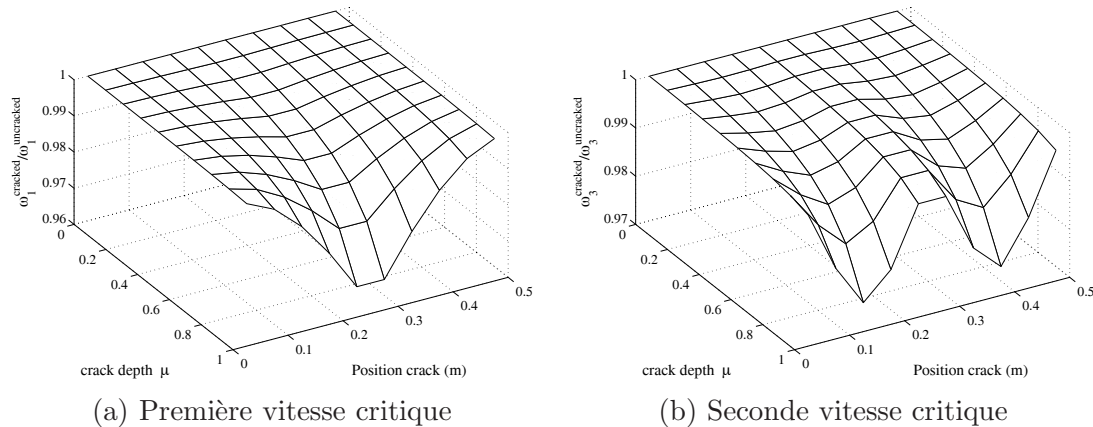


FIG. 5.4 – Evolution des vitesses critiques du rotor en fonction de la taille et position de la fissure

mécanisme de fermeture et ouverture de la fissure sous l'effet combiné de la rotation et de la gravité) et généralement seulement visibles pour le premier mode en flexion du rotor.

Par contre, l'effet d'une fissure sur le suivi des ordres super-harmoniques $n\times$ aux passages des résonances sous-critiques $\frac{1}{m}$ (avec $1 \leq m \leq n$) peut se voir très nettement suivant les deux directions et pour plusieurs modes. Le suivi des ordres super-harmoniques $n\times$ apparaît donc comme le critère le plus fiable pour prévenir d'une détection rapide de l'apparition d'une fissure (même de faible taille). Cependant, il convient de rester prudent vis à vis de ces premières observations, l'intensité de chacun des ordres super-harmoniques $n\times$ (avec $n \geq 2$) dépendant des efforts non-linéaires de la fissure (équations 5.25). Or, ces termes correspondent à une non-linéarité paramétrique (équations 5.23) directement liée aux balourds du rotor, à la gravité et donc implicitement au déphasage de ces derniers vis à vis du front de fissure tournant. Ce point sera discuté ultérieurement.

5.3.2 Vitesses critiques, résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ et des amplitudes $1\times$ et $2\times$

La réponse dynamique non-linéaire du rotor fissuré évolue donc fortement suivant les caractéristiques de la fissure transverse en termes de profondeur et position de cette dernière [60]. Ainsi, les évolutions des vitesses critiques, des résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ et des amplitudes $n\times$ associées peuvent servir de premiers indicateurs de surveillance en fonctionnement pour la détection et la propagation d'une fissure sur des systèmes tournants.

Les figures 5.4(a) et (b) illustrent l'abaissement des vitesses critiques associées aux deux premiers modes de flexion suivant la direction verticale en fonction de la position et de la taille de la fissure (pour un balourd donné en terme d'intensité et de déphasage par rapport au front de fissure). Une augmentation de la taille de la fissure entraîne une diminution des vitesses critiques. Plus une fissure est proche d'un noeud de vibration plus la vitesse critique du mode associé se rapproche de la vitesse critique du rotor sain (figure 5.4(b) lorsque la fissure se situe au milieu du rotor qui correspond au noeud de vibration du second mode en flexion du rotor sain). Les évolutions des résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ suivent le même principe (figures 5.3).

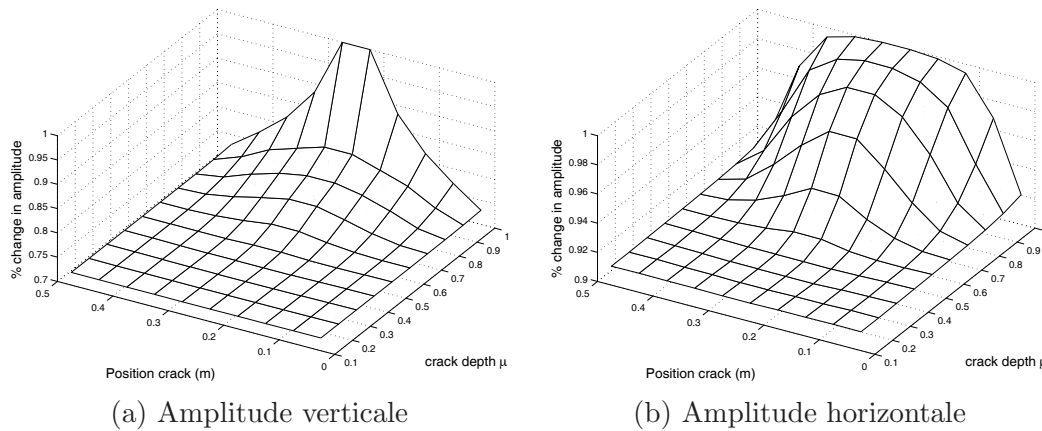


FIG. 5.5 – Evolution des amplitudes du rotor à la résonance de la première vitesse critique en fonction de la taille et position de la fissure

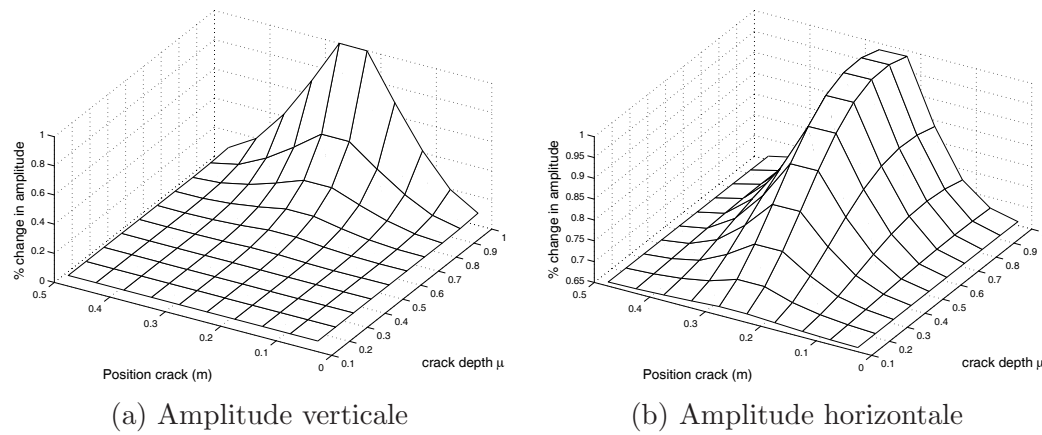


FIG. 5.6 – Evolution des amplitudes du rotor à la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la première vitesse critique en fonction de la taille et position de la fissure

Nous pouvons noter que ces abaissments combinés des résonances fondamentales d'un système comportant une fissure transverse sont classiquement utilisés pour détecter et identifier la position et profondeur d'une fissure sur des systèmes à l'arrêt (méthodes des "Frequencies Contour Lines" [45,46,48]). Cependant, ces techniques ne peuvent donner qu'une estimation approchée des caractéristiques des fissures sur des réponses à balourd du fait des divers paramètres qui jouent un rôle sur les variations des vitesses critiques tels que les effets gyroscopiques ou non-linéarités par exemple.

Les évolutions des amplitudes verticale et horizontale au passage de la première vitesse critique et des résonances sous-critiques $\frac{1}{2}$ sont illustrées en figures 5.5 et 5.6. Du fait de l'augmentation de la taille de la fissure, les pics de résonances augmentent de façon importante. Les amplitudes dans le plan vertical croissent très rapidement lorsque la fissure est importante, tandis que dans le plan horizontal,

un tassement est observé.

A noter que les différences d'évolution des amplitudes selon les deux directions verticale et horizontale permettent de s'affranchir d'une évolution d'amplitude due à une modification de balourd par exemple. La présence d'une fissure introduit des contributions non similaires suivant les deux directions horizontale et verticale dues à l'évolution du centroïde de l'élément fissuré (voir équations 5.15). Le mécanisme associé au comportement dynamique de la fissure (décrit en équation 5.23) est directement lié à la réponse dynamique non-linéaire globale (qui dépend du balourd et de la gravité) qui entraîne une dissymétrie des effets non-linéaires suivant les deux directions (voir équations 5.11, 5.17 et 5.18), et donc des amplitudes aux passages des vitesses critiques et résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ très différentes.

D'autre part, il convient de noter que l'un des avantages du critère des évolutions des amplitudes repose sur le fait que ce dernier est applicable lors d'une montée ou descente en rotation (fonctionnement de type moteur d'avion, qui permet donc d'évaluer les amplitudes aux résonances principales et sous-critiques), mais aussi lors d'un fonctionnement à vitesse constante (fonctionnement de type turbines) : une augmentation de la taille d'une fissure entraîne le même effet sur les niveaux vibratoires à une vitesse de rotation donnée (figures 5.3(a) et (b)).

En conclusion, les abaissements des vitesses critiques et résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ ainsi que l'augmentation des amplitudes de vibration aux passages des résonances fondamentales et sous-critiques $\frac{1}{n}$ peuvent servir de premiers indicateurs pour la détection d'une fissure transverse sur un système tournant et de son évolution au cours du temps (augmentation de la profondeur de fissure). Une estimation fine des caractéristiques associées (localisation et taille de la fissure) est cependant plus délicat à réaliser.

5.3.3 Evolution des orbites aux résonances sous-critiques $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$

Les super-harmoniques d'ordre n présentent donc des pics d'amplitudes au passage des résonances sous-critiques $\frac{1}{m}$ (avec $n \geq m$). Afin de mieux comprendre l'effet d'une fissure sur la réponse dynamique non-linéaire d'un rotor, l'évolution des orbites au passage des résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ est étudiée.

Dans un premier temps, l'évolution des orbites pour l'ensemble du rotor fissuré est estimée au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ associée à la première vitesse critique, comme illustré en figures 5.7. Le phénomène de boucles "externes-internes" est observé [57]. L'orbite du rotor évolue tout d'abord d'une ellipse classique (caractéristique du rotor sain étudié) vers deux boucles externes qui grossissent (figures 5.7(a) et(b)). Ensuite ces deux boucles externes évoluent pour finalement aboutir à une boucle interne tout le long du rotor (figure 5.7(c)). Enfin la boucle interne diminue et disparaît, ce qui ramène l'orbite à une ellipse classique. Ceci correspond à une contribution atténuée des super-harmoniques d'ordre n après le passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$.

Nous pouvons noter que ce phénomène de boucles "externe-interne" est visible tout le long du rotor avec une amplitude associée décrivant le premier mode de vibration en flexion du rotor. Une surveillance vibratoire en un point du rotor (même situé près des extrémités) peut être suffisant pour observer ce phénomène et donc statuer sur la présence d'une fissure dans le système.

La taille de la fissure joue un rôle prédominant sur les amplitudes des super-harmoniques d'ordre

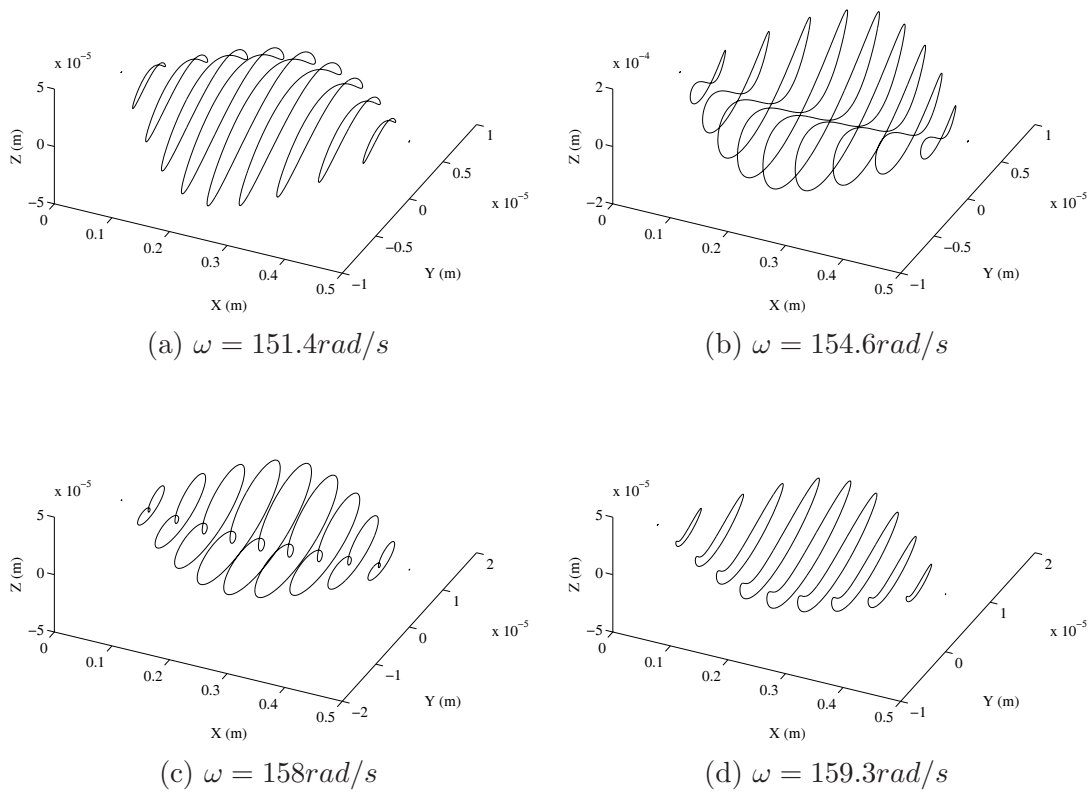


FIG. 5.7 – Evolution des orbites du rotor au passage de résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la première vitesse critique (pour une fissure de profondeur $\mu = 1$ et située à $L_{crack} = 0.225m$)

n . Aussi, les figures 5.8 illustrent les évolutions des boucles externes et internes pour différentes profondeurs de fissure. Il apparaît clairement que le phénomène d'apparition puis évolution des deux boucles "externes-internes" n'est visible que pour des tailles de fissures importantes (correspondant à des profondeurs adimensionnelles de $\mu = 0.75$, soit une fissure transverse présente sur $\frac{3}{4}$ du rayon du rotor).

Enfin, la position de la fissure influence aussi grandement la forme et l'évolution des orbites au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la première vitesse critique [56,57], la fissure ayant un effet prédominant lorsqu'elle est située proche du ventre du mode associé.

Les figures 5.9 montrent les orbites tout le long du rotor fissuré au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{3}$ de la première vitesse critique (correspondant au point 1 en figure 5.2, premier mode de flexion du rotor) et au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la seconde vitesse critique (correspondant aux points 4 et 10 en figure 5.2, second mode de flexion du rotor). Une orbite formant trois boucles externes est observée au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{3}$. L'évolution des orbites au passage de ce pic de résonance correspond alors uniquement à une distorsion d'une ellipse classique

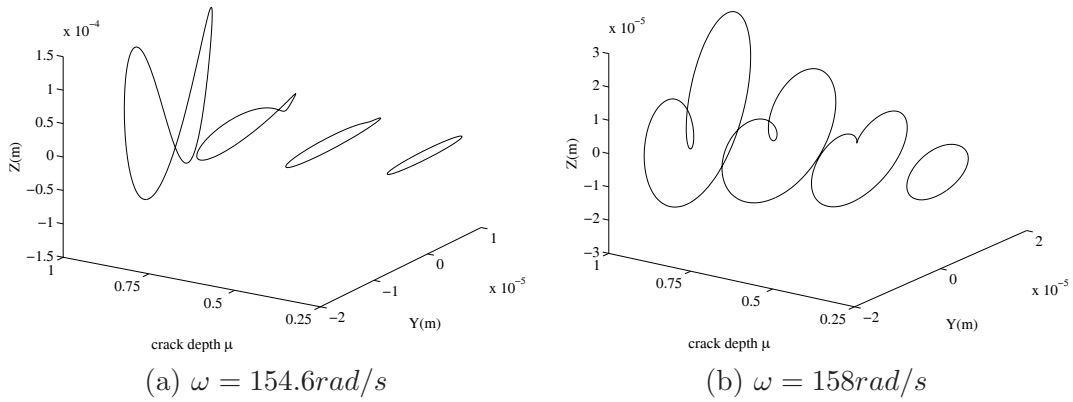


FIG. 5.8 – Influence de la taille de la fissure sur les boucles des orbites du rotor (paramètres de fissure $\mu = 1$ et $L_{crack} = 0.225m$)

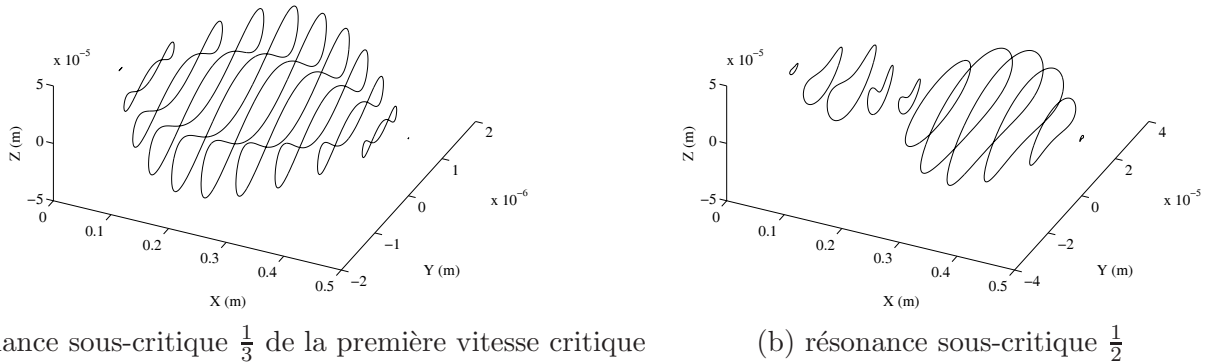


FIG. 5.9 – Orbites au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{3}$ de la première vitesse critique et de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la seconde vitesse critique (paramètres de fissure $L_{crack} = 0.175m$ et $\mu = 1$)

aux trois boucles externes (pour plus de détails voir [57]).

Concernant la forme de l'orbite au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la seconde vitesse critique, une distorsion est observée, mais le phénomène de boucles “externe-interne” (observé pour la première vitesse critique) n'est pas présent. La fissure est positionnée proche du milieu du rotor ce qui permet d'avoir un effet optimal de la fissure sur les résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ associées à la première vitesse critique : aussi l'influence de la fissure sur la seconde vitesse critique ne sera pas importante, la fissure étant proche d'un noeud du rotor. Des résultats similaires à ceux précédemment décrit seraient observés si la fissure était positionnée au ventre du second mode en flexion du rotor [59]. Il est intéressant de noter que la position de la fissure influence la forme globale des orbites le long du rotor

d'où la perte de symétrie très visible des orbites de chaque côté du centre du rotor, comme indiqué en figure 5.9(b).

Pour conclure, les évolutions des orbites pour l'ensemble du rotor au passage des résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ permettent de détecter la présence d'une fissure. Plus spécifiquement, le phénomène de boucles "externe-interne" peut s'avérer comme l'un des critères fiables pour prévenir de la présence et propagation d'une fissure sur un rotor. La position et profondeur de fissure influencent grandement la forme, l'amplitude et l'évolution des orbites au passage des résonances sous-critiques [57].

5.3.4 Paramètres physiques influant sur la détection d'une fissure

Dans les systèmes tournants, la surveillance vibratoire et la détection de la présence et propagation des fissures se font classiquement sur un rotor pour lequel certains paramètres physiques ne sont pas connus a priori (par exemple l'amortissement, les données propres aux balourds telles que l'intensité, la position et l'angle de déphasage par rapport au front de fissure).

Dans cette section, l'influence de ces paramètres sur les amplitudes vibratoires et les orbites au passage des résonances sous-critiques va être étudiée afin de montrer la complexité liée à la détection pratique d'une fissure et à l'identification associée [59,60]. Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux effets de l'intensité du balourd et de l'amortissement au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la première vitesse critique. Dans un deuxième temps, nous examinerons le rôle joué par le déphasage entre le balourd et le front de fissure, et l'effet lié au rapport d'intensité entre la fissure et le balourd.

Les résultats et observations liées aux autres résonances sous-critiques et aux évolutions de chacun des ordres super-harmoniques $n \times$ (avec $n \geq 2$) ne seront pas présentés, les conclusions étant similaires à celles développées par la suite. Pour plus de détail, le lecteur pourra se reporter aux recherches [56,57,59,60].

Effet du balourd et de l'amortissement

Les figures 5.10(a) et (b) montrent respectivement les évolutions des amplitudes verticales maximales au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la première vitesse critique. Une augmentation de l'intensité du balourd entraîne donc une évolution croissante linéaire de l'amplitude verticale. Par contre, la diminution d'amortissement amène une augmentation non linéaire de la réponse totale verticale du rotor. Nous observons en effet une croissance rapide lorsque l'amortissement diminue.

Les évolutions des orbites (pour une vitesse de rotation donnée) sont illustrées en figures 5.10(c) et (d). La différence entre l'effet du balourd et de l'amortissement sont là aussi visibles : une augmentation du balourd entraîne une augmentation d'amplitude de l'orbite sans modification de sa forme globale, tandis que la modification d'amortissement engendre une évolution de la forme globale de l'orbite. Ainsi, pour un amortissement croissant, la boucle interne indiquant la présence d'une fissure peut disparaître.

En considérant les contributions des termes de balourds et d'amortissement dans les équations 5.29 et 5.30, il apparaît que le balourd a une influence explicite sur l'ordre 1 et uniquement implicite sur les ordres super-harmoniques $n \times$ par l'intermédiaire de la non-linéarité paramétrique liée au mécanisme

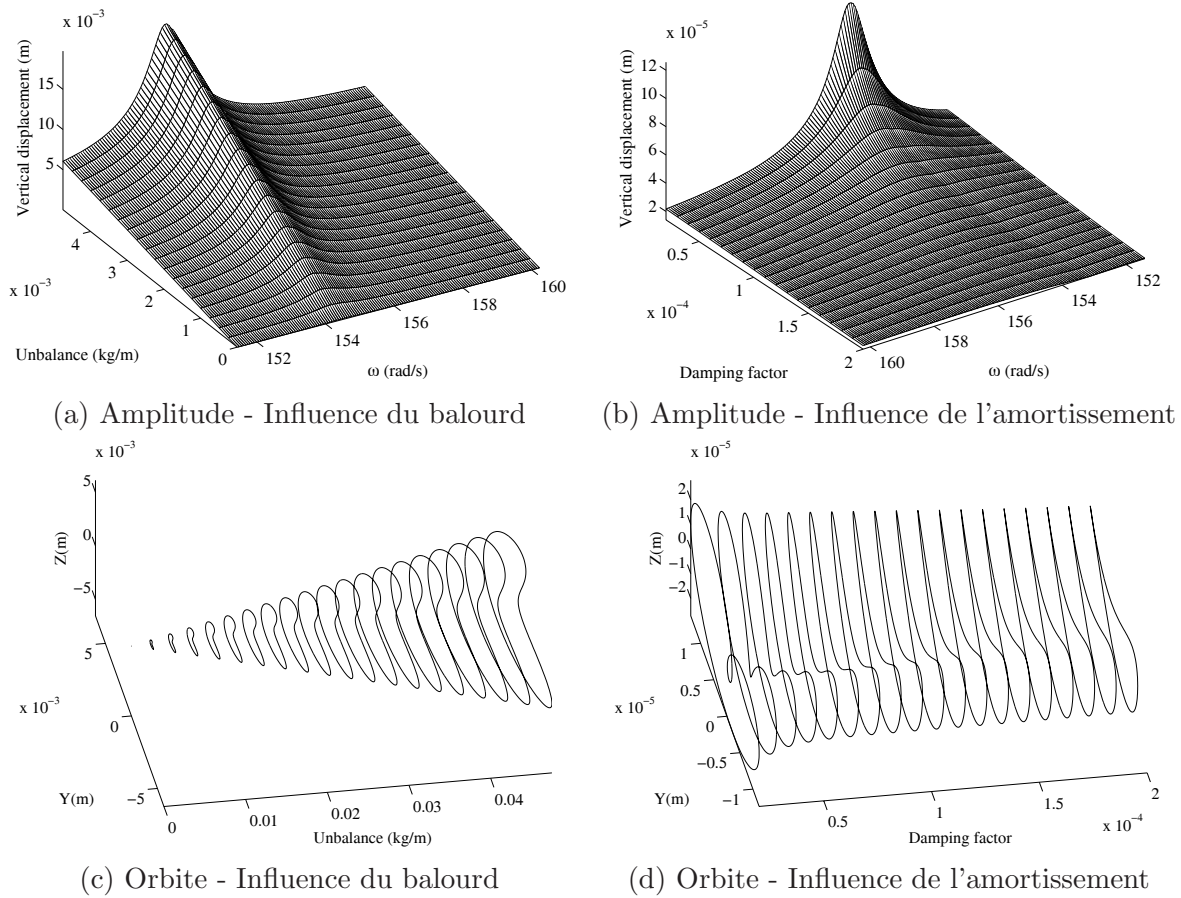


FIG. 5.10 – Influence du balourd et de l'amortissement structural sur les orbites et amplitudes au passage de la résonance sous-critique $2\times$ pour $\mu = 1$

dynamique de fermeture et d'ouverture de la fissure (équation 5.23). L'amortissement joue quant à lui un rôle direct pour chacun des ordres super-harmoniques $n\times$ (équations 5.30), ce qui entraîne une diminution propre de l'intensité de chacun des ordres super-harmoniques du fait de l'augmentation d'amortissement.

Effets du déphasage entre le balourd et le front de fissure et des intensités associées

Les figures 5.11(a), (c) et (e) montrent respectivement les évolutions des amplitudes horizontales maximales de la réponse du rotor fissuré au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la première vitesse critique en fonction du déphasage entre le front de fissure et le balourd pour trois intensités de balourds (faible, moyen et fort balourds). Les figures 5.11(b), (d) et (f) illustrent quant à elles les évolutions des orbites pour une vitesse de rotation choisie (correspondant à l'apparition de la boucle interne). Nous retrouvons qu'une augmentation du balourd entraîne une croissance de l'amplitude

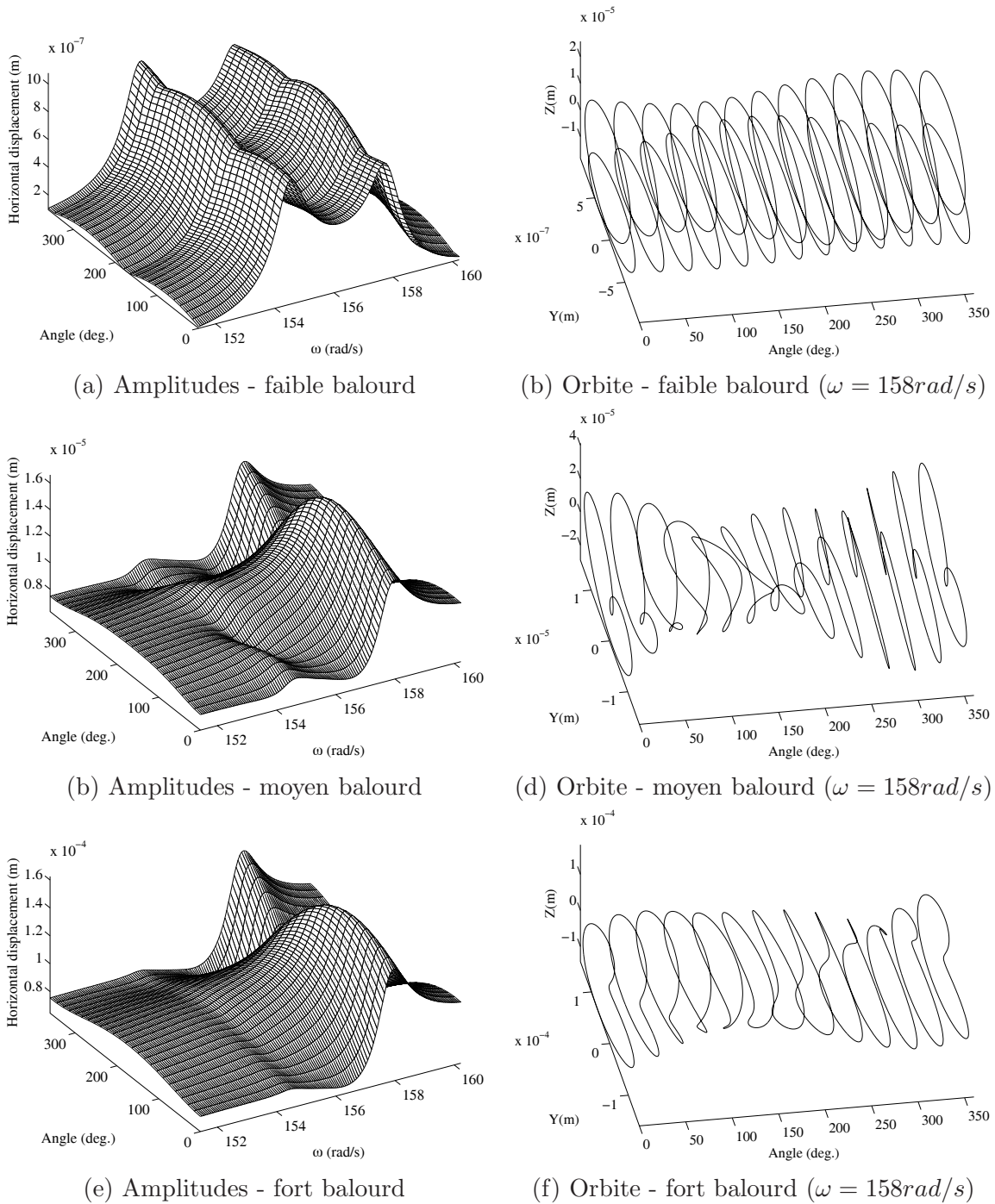


FIG. 5.11 – Influence du déphasage entre le balourd et le front de fissure au passage de la résonance sous-critique $2\times$ pour différents types de balourd

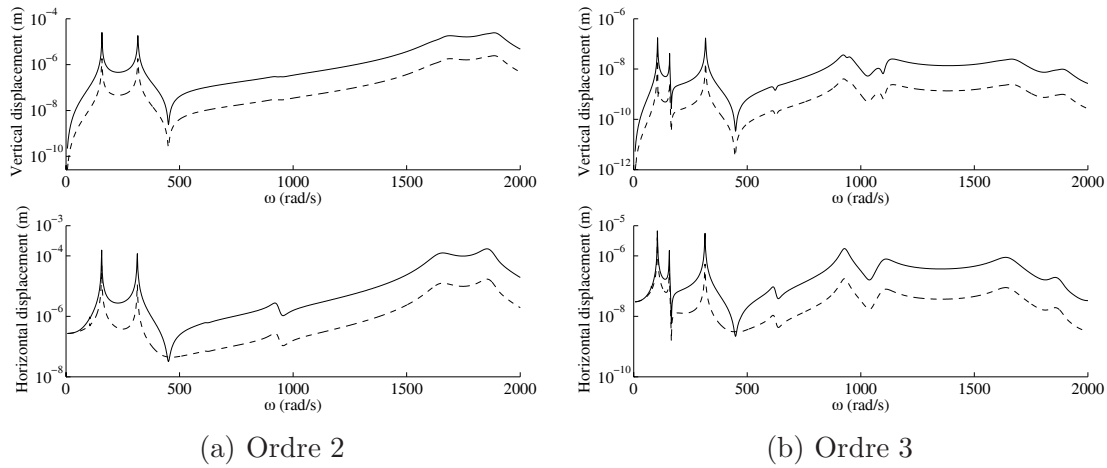


FIG. 5.12 – Evolution des ordres $2\times$ et $3\times$ (— fort balourd, -- moyen balourd)

maximale du rotor fissuré.

Dans le cas d'un faible balourd (figure 5.11(a) et (b)), correspondant typiquement à un rotor équilibré et donc soumis uniquement à un balourd résiduel), le comportement dynamique du rotor est principalement commandé par la dynamique de la fissure qui joue ainsi le rôle de balourd sur l'ordre fondamental (équations 5.29). De plus, son rôle de force non-linéaire sur les ordres super-harmoniques $n\times$ (équations 5.30) est observé. Le déphasage entre le balourd et le front de fissure n'a quasiment aucun effet sur le comportement dynamique du rotor.

Aussi, il est intéressant de noter qu'un balourd résiduel suffit pour observer les contributions non-linéaires dues à la fissure et la présence des ordres super-harmoniques : les contributions sont en effet liées au mécanisme de la fissure tournante correspondant à une non-linéarité paramétrique et donc directement liées à l'intensité de la réponse dynamique non-linéaire du rotor fissuré. La réponse dynamique non-linéaire du rotor étant principalement due à la présence de la fissure, deux pics de résonances d'intensité comparable sont observés au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ (figure 5.11(a)). Le mécanisme d'ouverture et de fermeture de la fissure sous l'effet de la gravité entraîne une souplesse évolutive mais proportionnellement différente suivant les deux plans vertical et horizontal, et donc la possibilité d'apparition des deux résonances sous-critiques $\frac{1}{2}$ associées.

Dans le cas d'un balourd moyen (c.a.d. pour lequel les effets liés aux forces non-linéaires provenant de la fissure et ceux liés au balourd sont de même intensité), le comportement dynamique non-linéaire du rotor est plus complexe : le déphasage entre le front de fissure et le balourd est un paramètre important qui modifie non seulement les amplitudes de la réponse non-linéaire totale du rotor fissuré (figure 5.11(c)), mais aussi la forme et l'évolution des orbites au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ (figure 5.11(d)).

Dans ce cas, les évolutions des ordres $2\times$ et $3\times$ en fonction de la vitesse de rotation du rotor (figures 5.12), la variation des amplitudes en fonction du déphasage entre le front de fissure et un balourd, et l'évolution des orbites à travers le phénomène de distorsion des orbites en "boucles externes-internes"

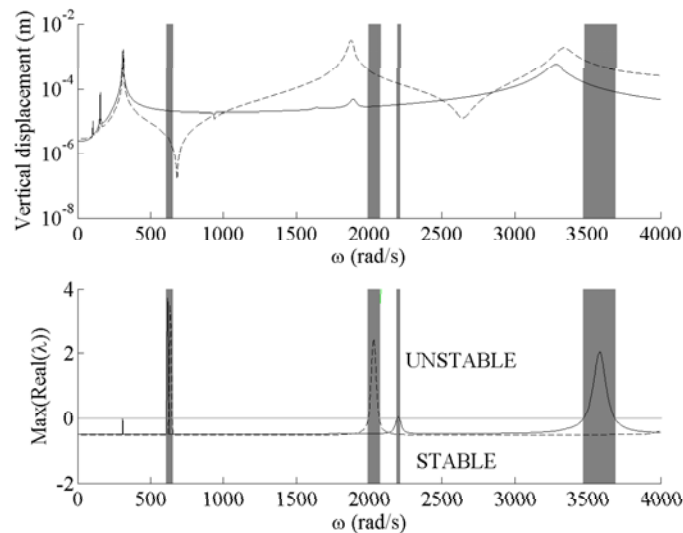


FIG. 5.13 – Zones d'instabilité (au noeud situé à $0.1m$ de l'extrémité gauche du rotor) et évolution de la partie réelle maximale des valeurs propres associées (— balourd à $0.25m$, $L_{crack} = 0.175m$ et $\mu = 1$; -- balourd à $0.1m$, $L_{crack} = 0.175m$ et $\mu = 1$)

sont trois critères qui permettent de statuer sur la présence d'une fissure dans le rotor.

Dans le cas d'un fort balourd (figure 5.11(e) et(f)), le balourd classique du rotor dirige la dynamique du rotor fissuré. Cependant, la contribution de la fissure tournante est toujours présente. La non-linéarité paramétrique a un effet sur la réponse non-linéaire totale et plus particulièrement sur les ordres super-harmoniques $n \times$ qui sont directement proportionnels à l'intensité des amplitudes du rotor. En effet, les figures 5.12 indiquent l'évolution des ordres $2 \times$ et $3 \times$ en fonction de la vitesse de rotation du rotor et font clairement apparaître des pics aux passages des résonances sous-harmoniques.

En conclusion, l'utilisation combinée du suivi d'ordres super-harmoniques et de la formation de boucles "externes-internes" permet de prévenir de la présence d'une fissure quelque soit l'intensité du balourd et le déphasage existant entre le balourd et le front de fissure. Dans le cas d'un balourd prédominant par rapport aux effets non-linéaires dus à la présence d'une fissure tournante, la détection d'une fissure peut être effectuée à partir de l'évolution des ordres super-harmoniques. Dans ce cas, le déphasage entre le balourd et le front de fissure se traduit par une évolution des maximums d'amplitudes au passage des résonances sous-critiques selon les deux directions verticale et horizontale.

Si le rotor est soumis à un balourd résiduel, l'apparition marquée d'une boucle interne au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ peut servir de critère fiable pour la détection d'une fissure dans les rotors. Le déphasage entre le balourd résiduel et le front de fissure n'a alors qu'un effet très faible sur le phénomène d'évolution des boucles "externe-interne" au passage de la résonance sous-critique.

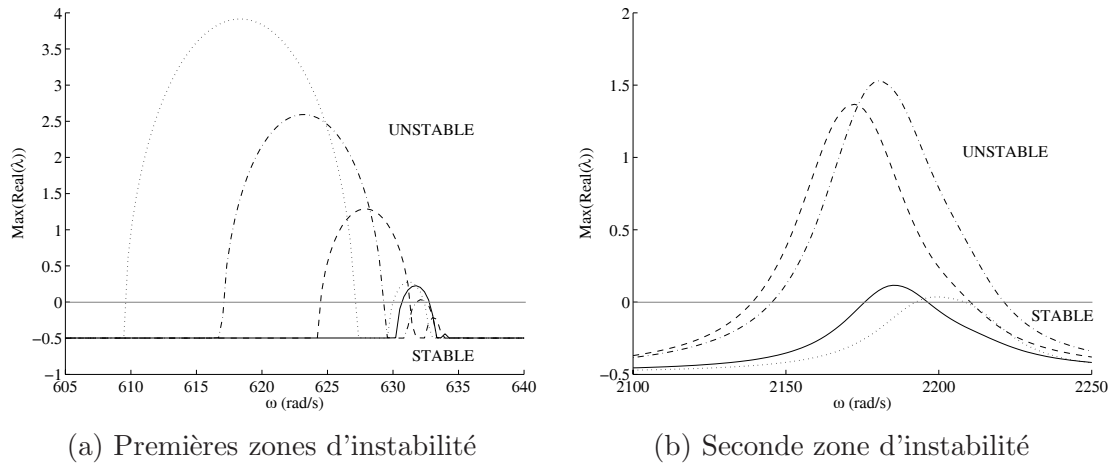


FIG. 5.14 – Influence de la position de la fissure sur la stabilité pour $\mu = 1$ ($- L_{crack} = 0.075m$, $-- L_{crack} = 0.125m$, $-. - L_{crack} = 0.175m$, $\dots L_{crack} = 0.225m$)

5.4 Apparition d'instabilité due à la présence d'une fissure

Sachant donc qu'une fissure influence fortement le comportement dynamique d'un rotor, une surveillance des rotors vis à vis de la présence d'une fissure est possible.

Aussi, du fait de l'apparition d'une résonance paramétrique non-linéaire propre à la fissure, la réponse dynamique périodique non-linéaire d'un rotor fissuré peut présenter un comportement instable alors que le rotor sain aura un comportement uniquement stable. L'influence d'une fissure sur la stabilité de la réponse du rotor fissuré va donc être examinée, ce critère pouvant aussi servir à détecter la présence d'une fissure dans un système tournant [59].

La réponse dynamique non-linéaire ainsi que l'évolution de la partie réelle maximale des valeurs propres de l'équation 5.46 sont données en figure 5.13 pour deux configurations de balourd en considérant une fissure identique dans les deux cas. Les zones grisées correspondent aux différentes plages de fonctionnement pour lesquelles la réponse dynamique non-linéaire du rotor est instable. Un rotor fissuré peut avoir une réponse dynamique instable pour plusieurs plages de vitesses de rotation. De plus, ces plages d'instabilité évoluent suivant le balourd présent dans le rotor : en effet, dans le cas présent les deux balourds choisis sont respectivement au voisinage d'un noeud du premier et second modes en flexion du rotor à l'arrêt. Ils modifient donc la réponse dynamique non-linéaire du rotor fissuré et donc la stabilité associée.

Afin de statuer sur la possibilité de détecter la présence d'une fissure à partir de l'apparition d'instabilité, les influences de la position et de la taille de la fissure vont être examinées.

5.4.1 Influence de la position de la fissure

Les figures 5.14 montrent l'évolution des deux premières plages de fonctionnement où la réponse dynamique non-linéaire du rotor est instable (la taille adimensionnelle μ de la fissure étant choisie

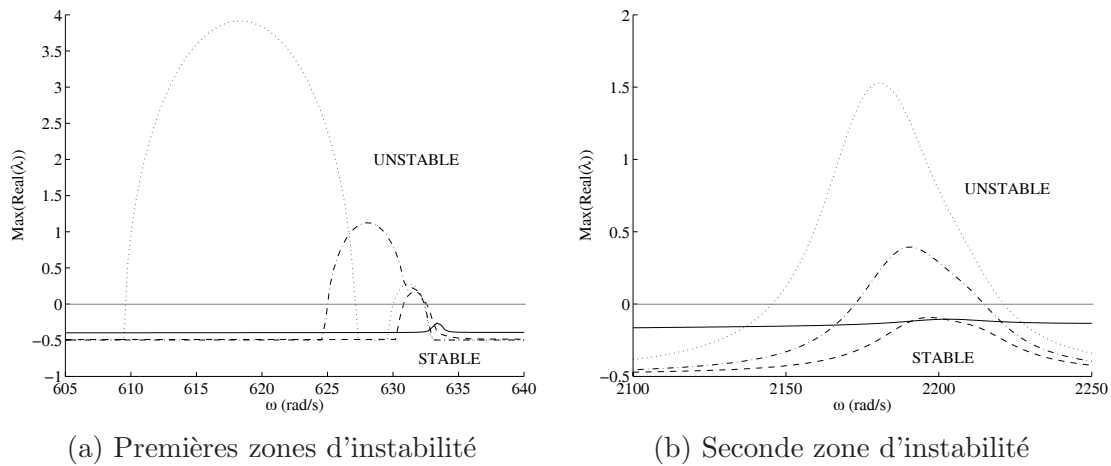


FIG. 5.15 – Influence de la taille de la fissure sur la stabilité pour $L_{crack} = 0.225m$ ($- \mu = 0.25$, $-- \mu = 0.5$, $-. \mu = 0.75$, $\dots \mu = 1$)

égale à 1, ce qui correspond à une fissure transverse présente sur la moitié du diamètre du rotor).

En considérant la première zone d'instabilité (figure 5.14(a)), cette dernière augmente avec une fissure qui se trouve au milieu du rotor, correspondant au ventre du premier mode de flexion du système. De plus, lorsque la fissure se rapproche d'un noeud du premier mode, la zone d'instabilité diminue. Dans le cas d'une fissure située au milieu du rotor, il apparaît deux zones d'instabilité distinctes très proches (pour $L_{crack} = 0.175m$ et $L_{crack} = 0.225m$). Enfin, l'apparition d'instabilité (soit la première vitesse de rotation pour laquelle le rotor devient instable) diminue lorsque la fissure se rapproche du centre du rotor : la souplesse amenée par la fissure fait chuter la première vitesse critique et donc descendre la zone d'instabilité associée. En conclusion, plus la fissure se rapproche du ventre du premier mode de flexion du rotor fissuré, plus la plage de vitesse de la première zone d'instabilité augmente avec son centre qui se décale vers des vitesses plus faibles.

Concernant la deuxième zone d'instabilité (figure 5.14(b), correspondant au rotor fissuré soumis à un balourd situé à $0.1m$ de l'extrémité gauche du rotor), la zone d'instabilité augmente lorsque la fissure se situe à un tiers de l'extrémité droite du rotor (ventre du deuxième mode en flexion du rotor à l'arrêt). Dans ce cas aussi, nous observons une diminution de la vitesse à laquelle le rotor devient instable par la souplesse ajoutée par la fissure qui diminue la seconde résonance (associée au second mode de flexion).

En conclusion, les première et seconde zones d'instabilité (qui peuvent être associées aux première et seconde résonances de flexion du rotor fissuré) diminuent lorsque la fissure se rapproche d'un noeud de vibration, tandis que la vitesse de rotation pour laquelle le rotor devient instable a alors tendance à augmenter.

5.4.2 Influence de la taille de la fissure

Les figures 5.15(a) et (b) illustrent les évolutions des première et seconde zones d'instabilité en fonction de la profondeur de fissure. Plus la fissure est importante, plus la zone d'instabilité est grande. Une baisse de la vitesse de rotation pour laquelle le rotor devient instable correspond à une augmentation de la taille de la fissure, tandis que le centre de la zone d'instabilité a aussi tendance à chuter avec l'augmentation de la taille de fissure. Ce décalage vers des vitesses de rotation plus faibles avec une augmentation de fissure résulte de la souplesse amenée par la fissure qui diminue alors les résonances en flexion du rotor. La première zone d'instabilité apparaît pour des fissures de tailles moyennes et grandes ($\mu \geq 0.5$), tandis que la deuxième zone d'instabilité est uniquement visible pour des fissures de grandes tailles ($\mu \geq 0.75$). Ces dernières observations sont propres au système tournant étudié et donnent uniquement des tendances générales.

Nous pouvons noter que deux zones d'instabilités très proches sont observées pour des vitesses de rotation comprises entre 605rad/s et 640rad/s et pour une taille de fissure adimensionnée μ égale à 1 (soit la moitié du diamètre du rotor).

5.5 Conclusion

Les recherches et résultats présentés dans ce chapitre montrent l'apport essentiel de la prise en compte du comportement dynamique non-linéaire des rotors pour diagnostiquer la présence d'une fissure transverse dans les systèmes tournants et permettre une surveillance vibratoire accrue des rotors. Le suivi des ordres, des évolutions des orbites au passages des résonances sous-critiques, des évolutions des fréquences et des niveaux d'amplitudes sont autant d'indicateurs qui peuvent servir à détecter l'apparition de fissures.

Cependant ces résultats montrent aussi tout la difficulté et la complexité de l'interprétation des phénomènes physiques observés du fait de l'influence de nombreux paramètres physiques (profondeur ou taille de fissure, le déphasage entre le front de fissure et les balourds du rotor ou l'intensité propre du balourd).

Nous discuterons donc dans les *Perspectives de recherche* de ce mémoire des travaux à envisager pour tendre non seulement vers une détection plus sûre des fissures dans les rotors mais aussi proposer des identifications de la position et profondeur des fissures transverses dans les systèmes tournants.

Chapitre 6

Dynamique expérimentale des systèmes mono et multi-rotors

La prévision du comportement dynamique des systèmes tournants nécessite une modélisation réaliste du comportement modal de l'ensemble des pièces et organes constituant les rotors, mais aussi des phénomènes non-linéaires pouvant être engendrés.

A l'heure actuelle, des recalages de chacune des pièces des rotors et des assemblages successifs permettent d'aboutir à une modélisation et prévision suffisantes du comportement dynamique des systèmes tournants (en terme d'estimation des passages des vitesses critiques et des déformées associées). Dans un objectif d'optimisation des structures industrielles et de conception plus robuste des systèmes mono-rotor et multi-rotors, on peut se poser la question de savoir si des modèles linéaires sont suffisants et s'il n'est pas nécessaire de prendre en compte des phénomènes non-linéaires plus complexes. Cependant, ces sources de non-linéarités du comportement dynamique des rotors ne peuvent être connues raisonnablement que par l'expérience. Ces caractéristiques "non-linéaires" peuvent provenir de phénomènes multiples (roulement, dissymétries tournantes, désalignement, contact et perte de contact entre pièces assemblées,...) et donc difficiles à connaître et identifier pour des systèmes tournants complexes.

L'objectif de ce chapitre est donc de montrer les limitations et précautions à prendre pour les prévisions du comportement dynamique des systèmes tournants qui se basent sur des modélisations linéaires et d'illustrer toute la complexité du comportement dynamique provenant de phénomènes "non-linéaires".

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la dynamique associée à un banc d'essai mono-rotor, appelé banc Dynamique D'Ensemble mono-rotor (*banc DDE mono-rotor*), dont la conception et l'exploitation ont été effectuées au sein même du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon. Initialement, ce banc d'essai a été réalisé pour représenter le comportement dynamique d'un compresseur basse pression d'un moteur d'avion. Les études associées se sont intéressées à la problématique du passage des vitesses critiques des modes d'arbre [63–66].

Pour notre part, grâce aux essais expérimentaux réalisés sur ce banc, nous allons étudier la présence

et l'importance de la prise en compte des phénomènes non-linéaires lors de l'étude de la dynamique d'ensemble des systèmes mono-rotor.

Dans une deuxième partie, nous montrerons toute la complexité “non-linéaire” pouvant être associée au comportement dynamique des systèmes multi-rotors (études expérimentales du banc d'essai bi-rotors, appelé banc Dynamique D'Ensemble bi-rotors *banc DDE bi-rotors*). Ce banc d'essai, dont la conception et l'exploitation ont été là aussi effectuées au sein même du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon, correspond à une évolution du banc *banc DDE mono-rotor*). Ce banc a alors permis de valider des choix technologiques (mise en contra-rotation des rotors haute et basse pressions, abaissement du modes d'arbre basse pression dans la plage de fonctionnement,...) visant à optimiser le dimensionnement des arbres basse et haute pressions des moteurs d'avion [67, 68].

Pour notre part, nous allons illustrer toute la complexité découlant de la dynamique multi-rotors et de la nécessité de s'orienter vers un dimensionnement et prévision du comportement dynamique des systèmes tournants prenant en compte les aspects “non-linéaires”.

6.1 Système mono-rotor

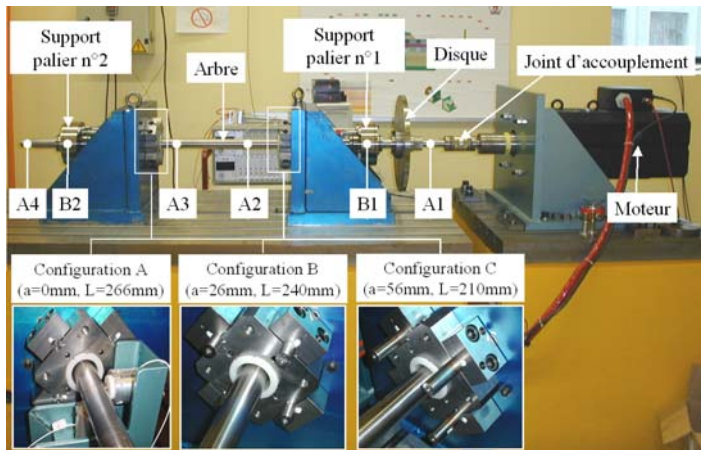
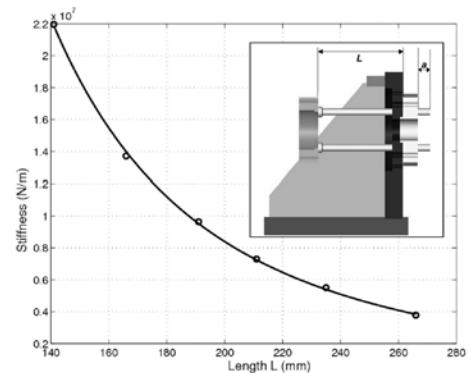
6.1.1 Présentation du banc *DDE mono-rotor*

Le banc DDE mono-rotor, illustré en figure 6.1(a), est composé d'un disque et d'un arbre horizontal couplé avec un moteur électrique, par l'intermédiaire d'un joint d'accouplement souple. L'ensemble tournant est relié à deux supports paliers par l'intermédiaire de roulements à billes et à rouleaux (pour les supports paliers 2 et 1 respectivement). Ces supports paliers ont la particularité d'être à raideur variable suivant la longueur L des barres reliant la cage des roulements (représentant l'interface entre les parties fixes et tournantes) et le bâti proprement dit (figures 6.1(a) et (b)). Ce changement de raideur a été initialement voulu pour permettre de tester des passages de modes d'arbre avec des répartitions énergétiques évolutives entre les ensembles tournants et fixes.

Les mesures des amplitudes vibratoires des parties tournantes sont réalisées par l'intermédiaire de huit capteurs sans contact. Ces derniers sont au nombre de deux par plan, l'un disposé verticalement et l'autre horizontalement afin de pouvoir obtenir les orbites des deux arbres pour un plan donné (plans de mesures $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ sur la figure 6.1). Des mesures des accélérations sur les supports paliers sont également réalisées (deux capteurs sur les plans de mesures $B1$ et $B2$).

6.1.2 Diagramme de Campbell et évolution des ordres $1\times$ et $2\times$

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux deux phénomènes de base de la dynamique des systèmes tournants : le diagramme de Campbell représente les évolutions des fréquences naturelles du rotor en fonction de la vitesse de rotation, et les réponses à balourd d'ordre n (pour $n = 1, 2$) indiquent les amplitudes vibratoires associées à chaque ordre en fonction de la vitesse de rotation (sous l'effet de la force d'excitation due aux balourds du rotor). Les diagrammes de Campbell expérimentaux sont obtenus par une analyse modale à excitation asynchrone (mise sur les parties fixes du système) pour diverses vitesses de rotation fixées [64, 66].

(a) Vue d'ensemble du *mono-rotor DDE*

(b) Evolution de la raideur des supports paliers

FIG. 6.1 – Banc Dynamique D'ensemble : *mono-rotor DDE*

Les figures 6.2(a) illustrent les évolutions des ordres 1 et 2 obtenues lors d'une réponse à balourd (configuration A). Le diagramme de Campbell expérimental est associé afin de statuer sur les significations physiques de l'apparition des pics d'amplitudes $1\times$ et $2\times$. Par comparaison de ces deux graphes, il apparaît clairement que les deux pics d'ordre 1 (identifiés aux alentours de $2330rpm$ et $2620rpm$) correspondent aux vitesses critiques rétrograde et directe associées au mode d'arbre du rotor. Le premier pic d'ordre 2 (identifié aux alentours de $1300rpm$) est apparenté à l'amplitude $2\times$ associée au premier mode directe de l'arbre du rotor. Les pics d'ordre 2 suivant représentent les amplitudes $2\times$ associées aux modes supérieurs du rotor.

Les figures 6.2(b) illustrent les orbites au passage des vitesses critiques directe et rétrograde du premier mode d'arbre, ainsi qu'au passage du premier pic d'amplitude $2\times$ (dans le cas de la configuration B). Des formes caractéristiques de la dynamique des rotors sont observées avec des ellipses plus ou moins prononcées au passage des vitesses critiques directe et rétrograde. Enfin, les orbites au pic d'amplitude $2\times$ se caractérisent par l'apparition d'une boucle interne, plus ou moins prononcée suivant les plans de mesure. Cette présence de "double boucles" constitue l'un des phénomènes classique du passage des résonances sous-critiques $\frac{1}{2}$.

Afin de statuer sur l'importance des effets non-linéaires dans la prévision du comportement dynamique des systèmes mono-rotor, nous allons conclure cette étude par une analyse des réponses à balourds (et évolutions des amplitudes associées aux ordres $1\times$ et $2\times$) pour les trois configurations A, B et C. De plus, une analyse numérique simplifiée du comportement dynamique du système est associée afin d'avoir une compréhension globale des phénomènes observés.

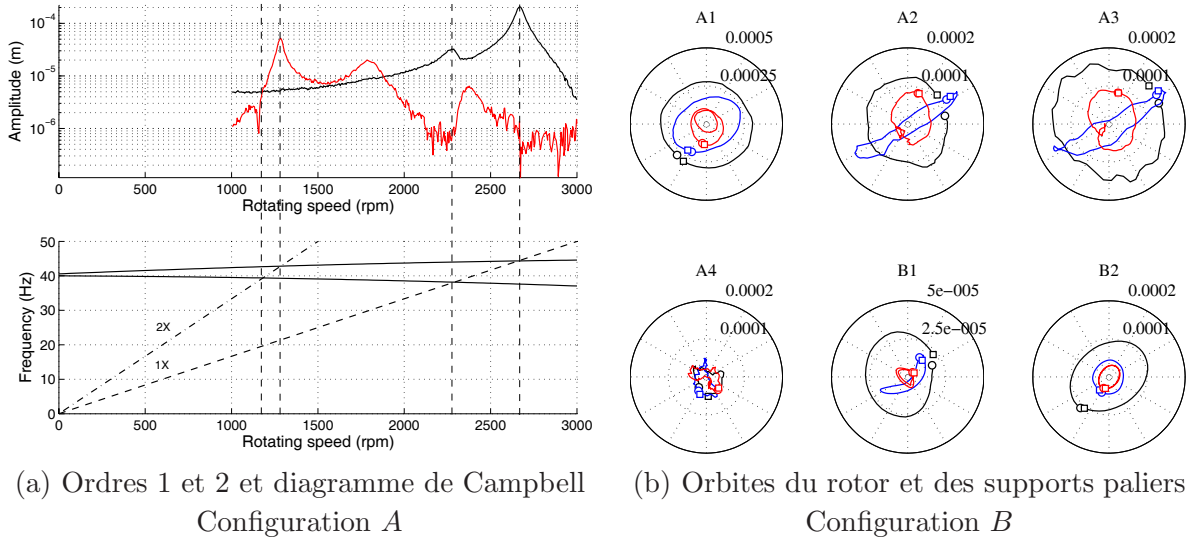


FIG. 6.2 – Evolution des ordres (rouge = ordre 2 ; noir = ordre 1) et des orbites (noir = direct 1× ; bleu = rétrograde 1× ; rouge = direct 2×)

6.1.3 Modèle numérique simplifié du système mono-rotor : confrontation aux diagrammes de Campbell expérimentaux

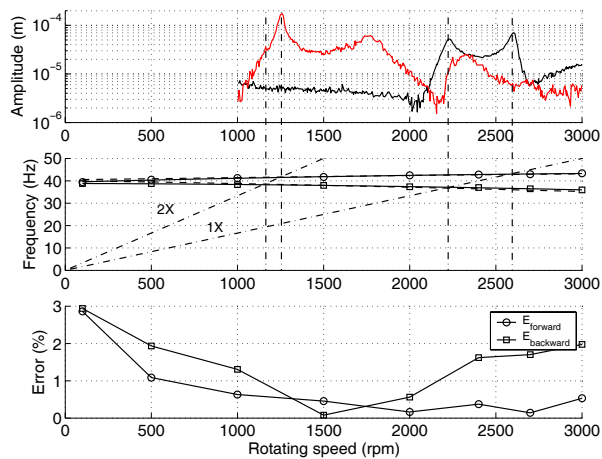
Pour ce faire, un modèle linéaire associé au système mono-rotor est développé. Son unique but est de valider les diagrammes de Campbell expérimentaux suivant les différentes configurations *A*, *B* et *C* (évolutions des raideurs variables). Les équations du système dynamique sont

$$\mathbf{M}_{BP}\ddot{\mathbf{X}}_{BP} + \mathbf{D}_{BP}(\omega_{BP})\dot{\mathbf{X}}_{BP} + \mathbf{K}_{BP}\mathbf{X}_{BP} = \mathbf{F}_{BP} \quad (6.1)$$

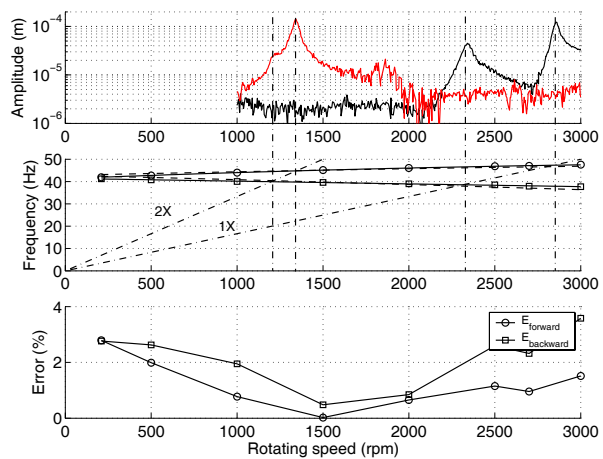
où \mathbf{M}_{BP} , \mathbf{D}_{BP} et \mathbf{K}_{BP} représentent les matrices de masse, d'amortissement et gyroscopique, et de raideur global associées au rotor *BP*. \mathbf{F}_{BP} définit le vecteur des forces de gravité et des balourds. ω_{BP} correspond à la vitesse de rotation du système.

Comme le montrent les figures 6.3(a), (b) et (c), les diagrammes de Campbell numériques sont en parfait accord avec les diagrammes de Campbell construits expérimentalement. Les erreurs relatives $E_{forward}$ et $E_{backward}$ sur les évolutions des premières vitesses critiques directes et rétrogrades restent faibles, quelque soit la configuration et la vitesse de rotation du système. Ainsi, un modèle numérique linéaire approché permet de retrouver les placements des vitesses critiques et des pics d'amplitude 2× observés expérimentalement (dans le cadre de cette étude).

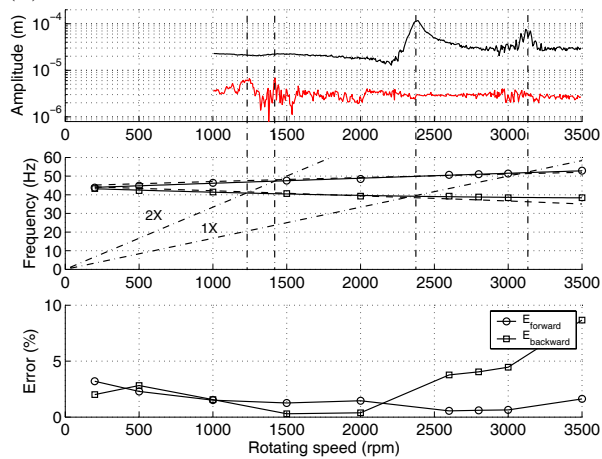
Cependant, la prévision du comportement dynamique des systèmes tournants mono-rotor passe aussi par l'estimation des évolutions des réponses aux balourds. Les réponses aux balourds peuvent faire intervenir des phénomènes non-linéaires. Nous allons donc maintenant montrer la complexité associée à l'estimation des réponses aux balourds et les limitations des modèles simplifiés associés.



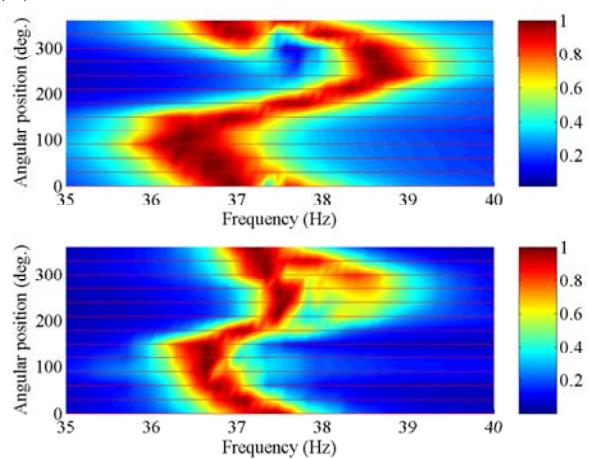
(a) Diagramme de Campbell - Configuration A



(b) Diagramme de Campbell - Configuration B



(c) Diagramme de Campbell - Configuration C



(d) Fréquences propres à l'arrêt - Configuration A (haut=horizontal, bas=vertical)

FIG. 6.3 – Diagramme de Campbell pour les trois configurations et mise en évidence de la dissymétrie tournante (noir = ordre $1\times$, rouge = ordre $2\times$, traits pleins = essais expérimentaux, traits en pointillés = calculs numériques)

6.1.4 Réponses à balourd et phénomènes non-linéaires $2\times$

Des réponses à balourd “classiques” des ordres $1\times$ et $2\times$ sont illustrées en figures 6.3(a), (b) et (c). La présence de pics d’amplitude $2\times$ apparaît clairement pour les configurations A et B. Nous pouvons même observer que pour ces deux cas, le maximum d’amplitude correspond au passage du pic d’ordre $2\times$ de la première vitesse critique directe (aux alentours de $1200rpm$ et $1400rpm$ pour les configurations A et B respectivement) et non pas au passage de la vitesse critique directe associée. Cette observation constitue un point important pour la prévision et le dimensionnement des systèmes mono-rotor. Un dimensionnement classique passe par une estimation des niveaux vibratoires par l’intermédiaire de

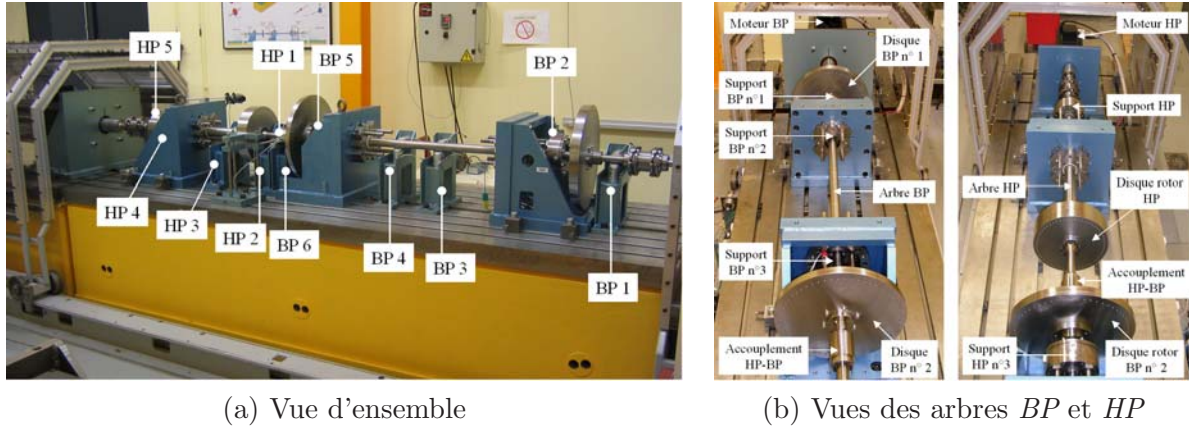
modèles linéaires. Ces derniers ne peuvent alors reproduire les phénomènes de pics d'amplitude $2\times$.

Le pic associé au mode rétrograde peut aussi présenter des amplitudes supérieures au mode direct associé (figure 6.3(c)). Ceci illustre une fois encore la nécessité de la prise en compte des dissymétries apparentes (qui peuvent alors donner lieu à l'apparition de pic d'ordre $n\times$). Pour conclure, la figure 6.3(d) montre des analyses modales des deux premières fréquences propres à l'arrêt suivant les deux directions verticale et horizontale (en fonction d'une rotation angulaire du rotor). Cette dissymétrie tournante, est clairement observable et illustre l'une des origines potentielles des pics d'ordre $2\times$. Nous ne cherchons pas à identifier explicitement les phénomènes physiques responsables de cette dissymétrie, ces derniers pouvant être d'origine diverse (roulement, dissymétrie des parties fixes, dissymétrie des pièces tournantes).

D'après les observations réalisées pour les trois configurations A , B et C , nous pouvons raisonnablement avancer que l'apparition de ces pics d'ordre $2\times$ est probablement due à la combinaison de la gravité avec des dissymétries fixes et tournantes. En effet, la disparition des pics d'ordre $2\times$ pour la configuration C (figure 6.3(c)) (pour laquelle les paliers sont de longueur réduite comme indiqué en figure 6.1) laisse penser à une dissymétrie au niveau des supports paliers (d'origine structurale ou provenant des liaisons parties fixes-tournantes). De plus, les évolutions non proportionnelles des fréquences propres à l'arrêt dans les deux plans vertical et horizontal suivant la rotation du rotor (figures 6.3(d)), illustrent non seulement la présence de dissymétries tournantes, mais de plus avec un caractère préférentiel dans une direction du fait de la gravité : ce phénomène physique peut alors se caractériser par l'apparition de raideur paramétrique additionnelle sur le système (comportement similaire à ce qui a été présenté dans le chapitre précédent sur le comportement non-linéaire des systèmes fissurés).

6.1.5 Conclusions sur les effets non-linéaires de systèmes mono-rotor

Pour conclure, les observations expérimentales réalisées sur le banc Dynamique D'Ensemble mono-rotor (*banc DDE mono-rotor*) mettent en avant la nécessité de la prise en compte des effets non-linéaires lors de la prévision du comportement dynamique des systèmes tournants. Nous pouvons cependant très aisément comprendre la problématique découlant de ces conclusions. Une prévision du comportement dynamique non-linéaire des systèmes tournants nécessite une identification fine et une modélisation réaliste non seulement des éléments pouvant induire l'apparition de pics d'ordre élevé, mais aussi de leurs interactions avec les balourds du rotor. Les phénomènes non-linéaires amènent une participation du premier ordre, qui vient donc se combiner aux effets de balourds. Une identification et modélisation de l'ensemble de ces paramètres est donc nécessaire afin de se diriger vers une modélisation optimale de systèmes tournants avec prise en compte des effets non-linéaires. Certaines recherches s'orientent depuis quelques années dans ce sens à travers des estimations de balourds combinées à des sources de dissymétries ou de désalignement par exemple [69–71]. Elles supposent toutefois un nombre fini de phénomènes physiques pris en compte et préalablement connus par l'expérience.

FIG. 6.4 – Banc Dynamique D'ensemble : *bi-rotor DDE*

6.2 Système bi-rotors

6.2.1 Présentation du banc *DDE bi-rotors*

Le banc bi-rotors se compose principalement de deux sous-ensembles (rotor Basse Pression et rotor Haute Pression) reliés entre eux par l'intermédiaire d'une pièce inter-arbre (figures 6.4). Le sous-ensemble rotor *BP* comporte un arbre *BP*, deux disques (disque FAN et disque Turbine) et repose sur trois supports paliers, similaire à ceux du banc *DDE mono-rotor*. Le sous-ensemble rotor *HP* comporte un arbre *HP*, un disque et repose sur un support palier.

Les mesures de déplacement s'effectuent par l'intermédiaire de huit capteurs de proximité pour chaque rotor (rotor *BP* : plans de mesures *BP1*, *BP3*, *BP4* et *BP6*; rotor *HP* : plans de mesures *HP1*, *HP2*, *HP3* et *HP4*). Des mesures des accélérations sur trois supports paliers sont également réalisées (deux capteurs sur les plans de mesures *BP2*, *BP5* et *HP5*).

6.2.2 Modèle numérique du système bi-rotor linéaire associé

Afin de mieux comprendre la signification physique des diverses pics d'amplitudes pour les différents ordres $n \times$ (n pouvant être non entier), un modèle numérique linéaire du système bi-rotors est mise en place. Ce dernier permettra en effet, à travers le diagramme de Campbell des rotors *HP* et *BP*, d'identifier les passages des vitesses critiques et des ordres $n \times$.

Les équation des arbres *HP* et *BP* peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbf{M}_{BP} \ddot{\mathbf{X}}_{BP} + \mathbf{D}_{BP}(\omega_{BP}) \dot{\mathbf{X}}_{BP} + \mathbf{K}_{BP} \mathbf{X}_{BP} = \mathbf{F}_{BP} + \mathbf{R}_{BP} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{M}_{HP} \ddot{\mathbf{X}}_{HP} + \mathbf{D}_{HP}(\omega_{HP}) \dot{\mathbf{X}}_{HP} + \mathbf{K}_{HP} \mathbf{X}_{HP} = \mathbf{F}_{HP} + \mathbf{R}_{HP} \quad (6.3)$$

où \mathbf{M}_{BP} , \mathbf{D}_{BP} et \mathbf{K}_{BP} représentent les matrices de masse, d'amortissement et gyroscopique, et de raideur associées au rotor *BP*. \mathbf{F}_{BP} définit le vecteur des forces de gravité et des balourds du rotor

BP . \mathbf{R}_{BP} caractérise la réaction à l'accouplement des deux arbres HP et BP (les matrices associées au rotor HP sont définies par analogie $HP = BP$).

L'équation globale du système bi-rotors se met sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}(\omega_{BP}, \omega_{HP})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (6.4)$$

avec

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_{BP} \quad \mathbf{X}_{HP}]^T = \left[\left[\mathbf{X}_{BP}^{rotor} \quad \mathbf{X}_{BP}^{accouplement} \right]^T \left[\mathbf{X}_{HP}^{accouplement} \quad \mathbf{X}_{HP}^{rotor} \right]^T \right]^T \quad (6.5)$$

où $\mathbf{X}_{BP}^{accouplement}$ et $\mathbf{X}_{HP}^{accouplement}$ définissent les composantes des rotors BP et HP au niveau de l'accouplement et \mathbf{X}_{BP}^{rotor} et \mathbf{X}_{HP}^{rotor} les degrés de liberté restants. Les matrices de masse, d'amortissement global et des forces de gravité et de balourds sont alors de la forme

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BP}^{11} & \mathbf{M}_{BP}^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{BP}^{21} & \mathbf{M}_{BP}^{22} + \mathbf{M}_{accouplement}^{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{HP}^{11} + \mathbf{M}_{accouplement}^{22} & \mathbf{M}_{HP}^{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{HP}^{21} & \mathbf{M}_{HP}^{22} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{D}(\omega_{BP}, \omega_{HP}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{BP}^{11}(\omega_{BP}) & \mathbf{D}_{BP}^{12}(\omega_{BP}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{BP}^{21}(\omega_{BP}) & \mathbf{D}_{BP}^{22}(\omega_{BP}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{HP}^{11}(\omega_{HP}) & \mathbf{D}_{HP}^{12}(\omega_{HP}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{HP}^{21}(\omega_{HP}) & \mathbf{D}_{HP}^{22}(\omega_{HP}) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BP}^{11} & \mathbf{K}_{BP}^{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{BP}^{21} & \mathbf{K}_{BP}^{22} + \mathbf{K}_{accouplement}^{11} & \mathbf{K}_{accouplement}^{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{accouplement}^{21} & \mathbf{K}_{HP}^{11} + \mathbf{K}_{accouplement}^{22} & \mathbf{K}_{HP}^{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{HP}^{21} & \mathbf{K}_{HP}^{22} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{BP}^1 \\ \mathbf{F}_{BP}^2 \\ \mathbf{F}_{HP}^1 \\ \mathbf{F}_{HP}^2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

En considérant le rapport de vitesses entre les deux rotors (dans notre étude, nous prendrons $\alpha = 2.9$)

$$\frac{\omega_{HP}}{\omega_{BP}} = \alpha \quad (6.10)$$

les équations du système bi-rotors sont

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}(\omega_{HP}, \alpha)\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (6.11)$$

Les vitesses critiques des rotors BP et HP correspondent aux égalités successives des vitesses de rotation ω_{BP} et ω_{HP} avec les évolutions des fréquences propres en fonction de ($\omega_{BP}, \omega_{HP} = \alpha\omega_{BP}$). Les

Co-rotation		Contra-rotation		Mode associé
ω_{BP} (rpm)	ω_{HP} (rpm)	ω_{BP} (rpm)	ω_{HP} (rpm)	
1535	4375	-1520	4330	mode 1 rétrograde
1850	5415	-1780	5077	mode 2 rétrograde
1900	5270	-1840	5245	mode 1 direct

TAB. 6.1 – Vitesses critiques associées au rotor BP

Co-rotation		Contra-rotation		Mode associé
ω_{BP} (rpm)	ω_{HP} (rpm)	ω_{BP} (rpm)	ω_{HP} (rpm)	
590	1680	-580	1650	mode 1 direct
635	1810	-620	1765	mode 1 rétrograde
755	2150	-750	2135	mode 2 direct
875	2495	-840	2395	mode 2 rétrograde
1215	3465	-1265	3605	mode 3 rétrograde
1360	3875	-1290	3675	mode 3 direct
1865	5315	-1850	5270	mode 4 direct
		-1950	5575	mode 4 rétrograde

TAB. 6.2 – Vitesses critiques associées au rotor HP

tableaux 6.1 et 6.2 indiquent les vitesses critiques associées aux rotors BP et HP dans le cas des configurations en co-rotation et contra-rotation (dans la plage de fonctionnement $\omega_{HP} = [500 \text{ } 5500] \text{ rpm}$). Les évolutions des fréquences du système bi-rotors sont données en figures 6.5(d) et 6.9(d).

Ces données nous serviront de base afin de mieux comprendre l'origine des divers phénomènes non-linéaires observés par la suite. Nous allons tout d'abord nous intéresser à la présence de phénomènes non-linéaires pour les systèmes en co-rotation. Dans un second temps, nous examinerons la complexité résultante des systèmes mis en contra-rotation et nous discuterons des effets non-linéaires associés.

6.2.3 Phénomènes non-linéaires pour les systèmes en co-rotation

Les figures 6.5(a), (b) et (c) illustrent les évolutions des amplitudes vibratoires, ainsi que des ordres $1\times$ et $2\times$ associés (selon les deux tachimétries des rotors BP et HP). Il apparaît tout d'abord que le comportement dynamique global du système s'avère complexe du fait des excitations engendrées par les balourds des rotors BP et HP combinés. Ceci implique alors des amplitudes vibratoires sur l'ensemble du système bi-rotors lorsque l'une des vitesses critiques directes ou rétrogrades est passée en précession BP ou HP .

Le suivi des ordres $1\times$ associés au rotor BP (tachimétrie BP = courbes hautes) et au rotor HP (tachimétrie HP = courbes bases) permet de distinguer sans ambiguïté le passage des diverses vitesses critiques directes et rétrogrades (courbes noirs). Les résultats sont en parfait accord avec les vitesses critiques estimées par le modèle numérique (valeurs données dans le tableau 6.1 et sur la figure 6.5(d) par l'intersection des évolutions des fréquences du système bi-rotors avec les deux droites d'ordre $1\times$

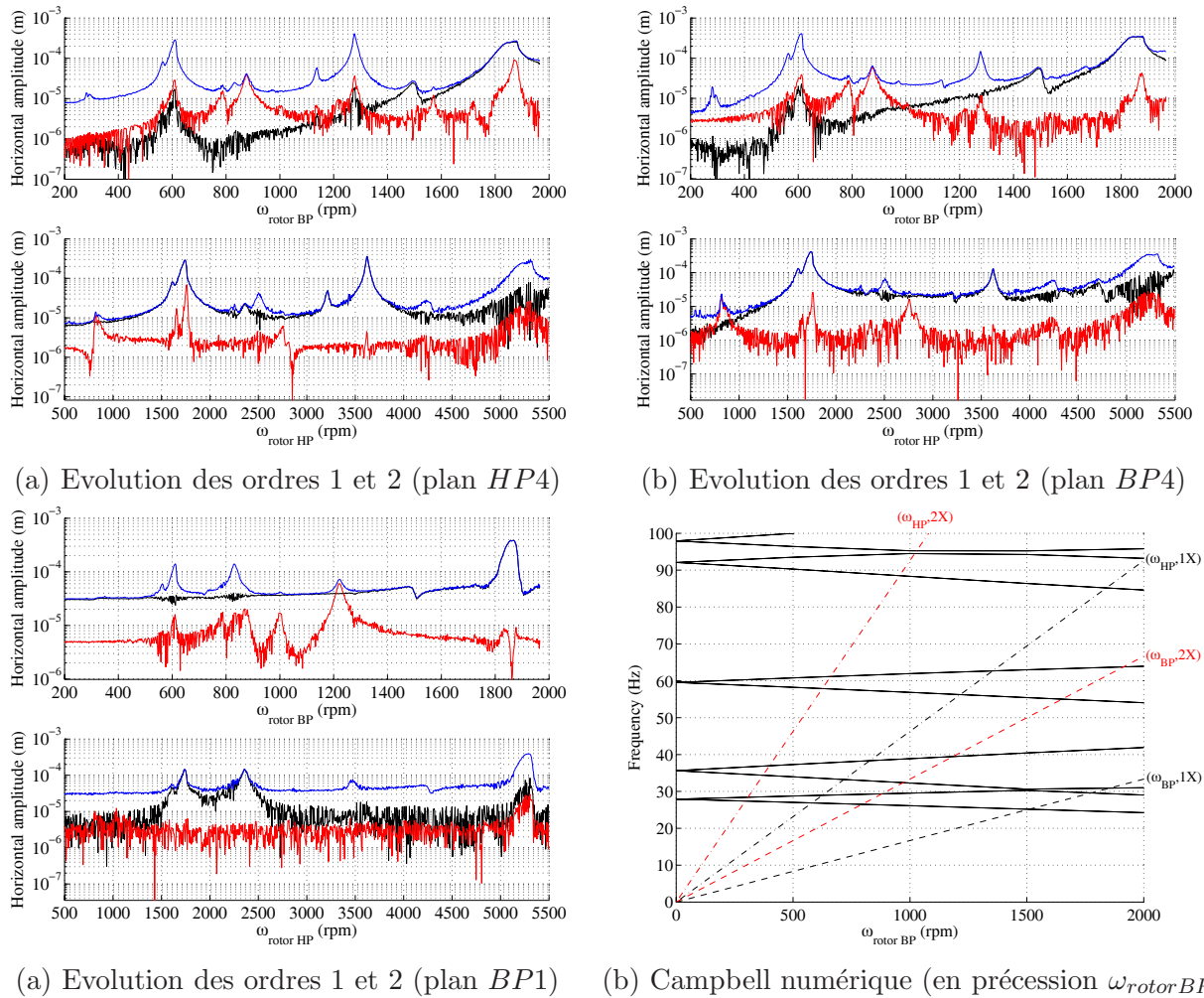


FIG. 6.5 – Evolutions des ordres $1\times$ et $2\times$, comparaison au diagramme de Campbell numérique en co-rotation (noir = ordre $1\times$, rouge = ordre $2\times$, bleu = réponse globale)

noires notées $(\omega_{HP, 1X})$ et $(\omega_{BP, 1X})$).

Cependant, des pics d'amplitudes du système bi-rotors ne correspondent pas à des maximums d'ordre $1\times$ des rotors BP ou HP . Afin de comprendre la signification physique de ces pics qui ne peuvent être reproduits par des réponses à balourd de systèmes bi-rotors linéaires en co-rotation, les évolutions de l'ordre $2\times$ associé aux rotors BP et HP sont ajoutées (courbes rouges). Ainsi, il apparaît que des phénomènes non-linéaires d'ordre $2\times$ sont présents sur l'ensemble de la plage de fonctionnement et pour chacune des vitesses critiques directes et rétrogrades. Ceci implique des origines non-linéaires d'ordre $2\times$ importantes pour l'ensemble du système : ces dernières peuvent provenir des roulements, des dissymétries fixes et tournantes et corroborent les conclusions expérimentales déjà énoncées pour le rotor DDE *mono-rotor*. Ces pics de résonances $2\times$ sont là aussi en parfait accord

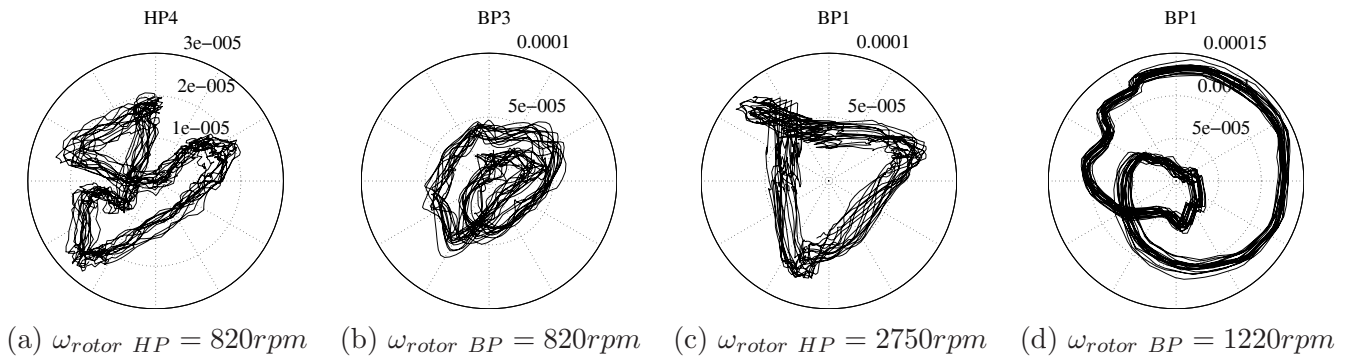
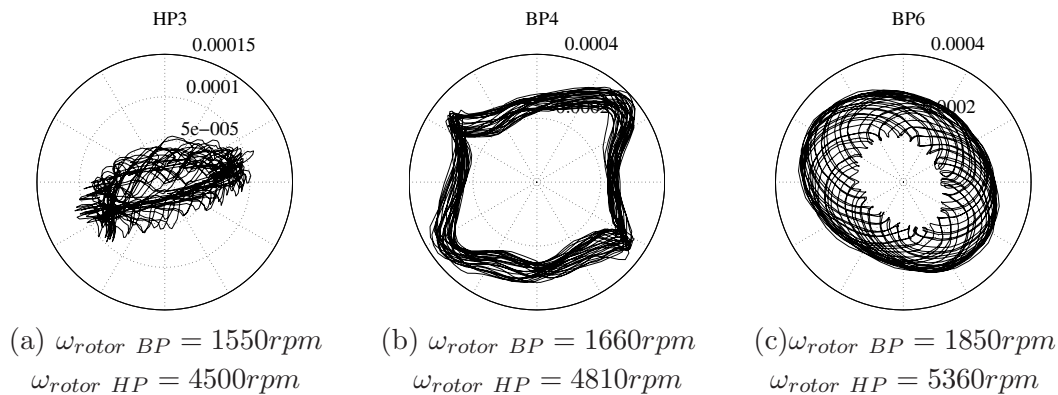
FIG. 6.6 – Orbites typiques au passage des résonances $2\times$ (Configuration co-rotation)

FIG. 6.7 – Orbites à modulation combinée (Configuration co-rotation)

avec l'estimation donnée par le diagramme de Campbell numérique (intersection des évolutions des fréquences du système avec les deux droites d'ordre $2\times$ rouges notées $(\omega_{HP}, 2X)$ et $(\omega_{BP}, 2X)$). Des orbites caractéristiques sont données en figures 6.6 lors des passages des différentes résonances $2\times$. Des formes d'orbites bien connues communément appelées les “doubles boucles externes ou internes” sont retrouvées.

D'autre part, des pics d'ordre $2\times$ peuvent aussi apparaître lors des passages de vitesses critiques directes et rétrogrades alors qu'aucune coïncidence entre les évolutions des fréquences et les droites $(\omega_{HP}, 2X)$ et $(\omega_{BP}, 2X)$ n'est prédite. Ce phénomène correspond uniquement à une contribution de l'ordre $2\times$ au passage des résonances $1\times$ du fait de la présence de non-linéarités (phénomènes classiques pour les systèmes tournants comme cela a déjà été montré dans le chapitre précédent sur la détection des fissures).

L'ensemble de ces évolutions des ordres laisse penser que le balourd global présent dans ce système bi-rotors reste important (amplitudes des vitesses critiques directes toujours prédominantes par comparaison aux amplitudes des vitesses rétrogrades associées, et maximums des pics d'ordre $2\times$ toujours inférieurs aux pics d'ordre $1\times$ associés).

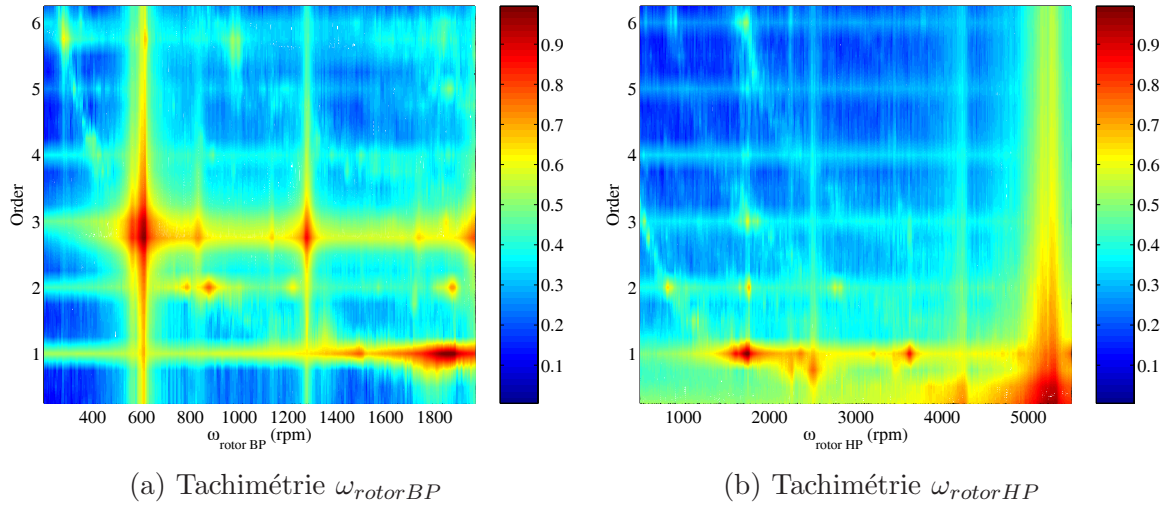


FIG. 6.8 – Campbells expérimentaux des ordres en précessions $\omega_{rotorBP}$ et $\omega_{rotorHP}$ (Configuration co-rotation)

Des orbites plus complexes sont aussi observées dans la plage de fonctionnement étudiée (figure 6.7). Les évolutions des formes orbitales et des réponses quasi-périodiques associées correspondent alors à des contributions combinées des balourds associés aux deux rotors *HP* et *BP* selon les ordres $1\times$ et/ou $2\times$. Ce phénomène se traduit alors par une modulation pour des vitesses de fonctionnement élevées provenant du facteur de rotation $\alpha = \frac{\omega_{BP}}{\omega_{HP}}$ entre les deux arbres.

L'ensemble de ces résultats illustrent donc bien la présence d'effets non-linéaires d'ordre $2\times$. Pour les résonances sous-critiques supérieures (ordres $n\times$) ou sur-critiques (ordre $\frac{1}{n}\times$), une analyse plus poussée est nécessaire du fait des couplages possibles entre le positionnement des diverses vitesses critiques, des ordres $n\times$ et/ou $\frac{1}{n}\times$ associés à chacun des deux rotors *BP* et *HP* et du rapport de vitesse de rotation existant entre les deux rotors ($\omega_{HP} = \alpha\omega_{BP}$).

Pour palier à ce problème et aboutir à une compréhension juste des phénomènes physiques observés, des diagrammes de Campbell expérimentaux des ordres entiers et non entiers associés à chacun des rotors *BP* et *HP* sont mis en place, comme indiqué en figures 6.8(a) et (b).

Tout d'abord la figure 6.8(a) indique les évolutions des ordres en amplitudes normés suivant la tachimétrie du rotor *BP*. Une amplitude élevée indique donc une prédominance de l'ordre associé (entier ou fractionnaire). Les ordres entiers $1\times$, $2\times$ mais aussi $4\times$, $5\times$ (de façon moins prononcée) sont visibles. Ils correspondent tous aux passages des résonances critiques et sous-critiques 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ associées à chacune des vitesses critiques directes et rétrogrades.

Pour l'ordre entier $3\times$, celui-ci est “masqué” par l'ordre non entier $2.9\times$ qui correspond à la composante $1\times$ du rotor *HP*. Par analogie, cette ligne d'évolution d'ordre $2.9\times$ correspond à l'ordre $1\times$ en tachimétrie rotor *HP*, illustré en figure 6.8(b). Si nous nous plaçons alors en tachimétrie *HP*, les ordres $1\times$, $2\times$ et $3\times$ sont bien présents et prédominants aux passages des résonances critiques et

sous-critiques $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. De même les ordres $4\times$, $5\times$ et $6\times$ sont légèrement visibles. Enfin, nous pouvons remarquer que l'ordre $1\times$ de la tachimétrie *BP* (figure 6.8(a)) s'illustre en tachimétrie *HP* par l'ordre $0.35 \approx \frac{1}{2.9}$ prédominant (aux alentours de $4000 - 5500rpm$). De même, l'ordre $5.8\times$ en tachimétrie *BP* correspond à l'ordre $2\times$ en tachimétrie *HP* et l'ordre $0.69 \approx \frac{2}{2.9}$ en tachimétrie *HP* à l'ordre $2\times$ en tachimétrie *BP*.

Pour conclure, le comportement dynamique des systèmes tournants bi-rotors présente de nombreux phénomènes non-linéaires qui se traduisent principalement par l'apparition des ordres $n\times$ aux diverses résonances sous-critiques. Les effets non-linéaires observés apparaissent naturellement plus complexes que dans le cadre des systèmes mono-rotor, mais explicables par une analyse combinée des ordres associés à chacun des deux rotors *BP* et *HP*. Ainsi une compréhension fine des phénomènes non-linéaires et des ordres jouant un rôle à chaque vitesse de rotation de l'ensemble est envisageable. Une connaissance du positionnement des diverses vitesses critiques, des ordres $n\times$ et $\frac{1}{n}\times$ associés à chacun des deux rotors *BP* et *HP*, ainsi que le rapport de vitesse de rotation existant entre les deux rotors ($\omega_{HP} = \alpha\omega_{BP}$) permettent d'effectuer ce type d'analyse.

La question qui se pose maintenant est de savoir si l'ensemble des observations réalisées sont toujours exploitables dans le cadre des systèmes bi-rotors évoluant en contra-rotation. En effet, pour cette dernière configuration, les excitations à précession inverse entre rotors peut engendrer des phénomènes plus complexes que nous allons donc tenter d'analyser dans le paragraphe qui suit.

6.2.4 Phénomènes non-linéaires pour les systèmes en contra-rotation

Les évolutions des ordres $1\times$, $2\times$ ainsi que le niveau vibratoire total pour le système bi-rotors en configuration de contra-rotation ($\alpha = -2.9$) sont donnés en figures 6.9(a), (b) et (c). Les passages des pics d'amplitudes $1\times$ et $2\times$ (selon les tachimétries des rotors *BP* et *HP*) sont conformes aux prévisions du diagramme de Campbell (par identification des intersections des évolutions des fréquences du système bi-rotors avec les deux droites d'ordre $1\times$ noires notées $(\omega_{HP}, 1X)$ et $(\omega_{BP}, 1X)$ et les deux droites d'ordre $2\times$ rouges notées $(\omega_{HP}, 2X)$ et $(\omega_{BP}, 2X)$).

Du fait de la mise en contra-rotation du système, la notion de modes directs et rétrogrades ne peut être associée qu'au sens de précession de chaque rotor, ce qui se traduit par des pics d'ordre $1\times$ correspondant au mode direct (dans le sens de précession de l'excitation du rotor choisi) supérieur aux pics d'ordre $1\times$ du mode rétrograde associé.

Comme dans la configuration en co-rotation, les phénomènes non-linéaires d'ordre $2\times$ sont donc là aussi présents sur l'ensemble de la plage de fonctionnement et pour chacune des vitesses critiques directes et rétrogrades (selon le sens de précession propre des rotors). Ces observations sont confirmées par les tracés des diagrammes de Campbell expérimentaux des ordres donnés en figures 6.10(a) et (b) selon la tachimétrie des rotors *BP* et *HP* respectivement. Non seulement les ordres $1\times$ et $2\times$ sont visibles, mais comme dans le cas de la co-rotation, les ordres $4\times$, $5\times$ sont partiellement présents, ces derniers correspondant bien aux passages des résonances 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$ associées à chacune des vitesses critiques. Nous rappelons que l'ordre $3\times$ du rotor *BP* est "masqué" par l'ordre non entier $2.9\times$ qui correspond à la composante $1\times$ du rotor *HP*, les ordres $n\times$ de la tachimétrie *BP* (figure 6.8(a)) s'illustrant en tachimétrie *HP* par des ordres $\frac{1}{n}\times$ (figure 6.8(b)).

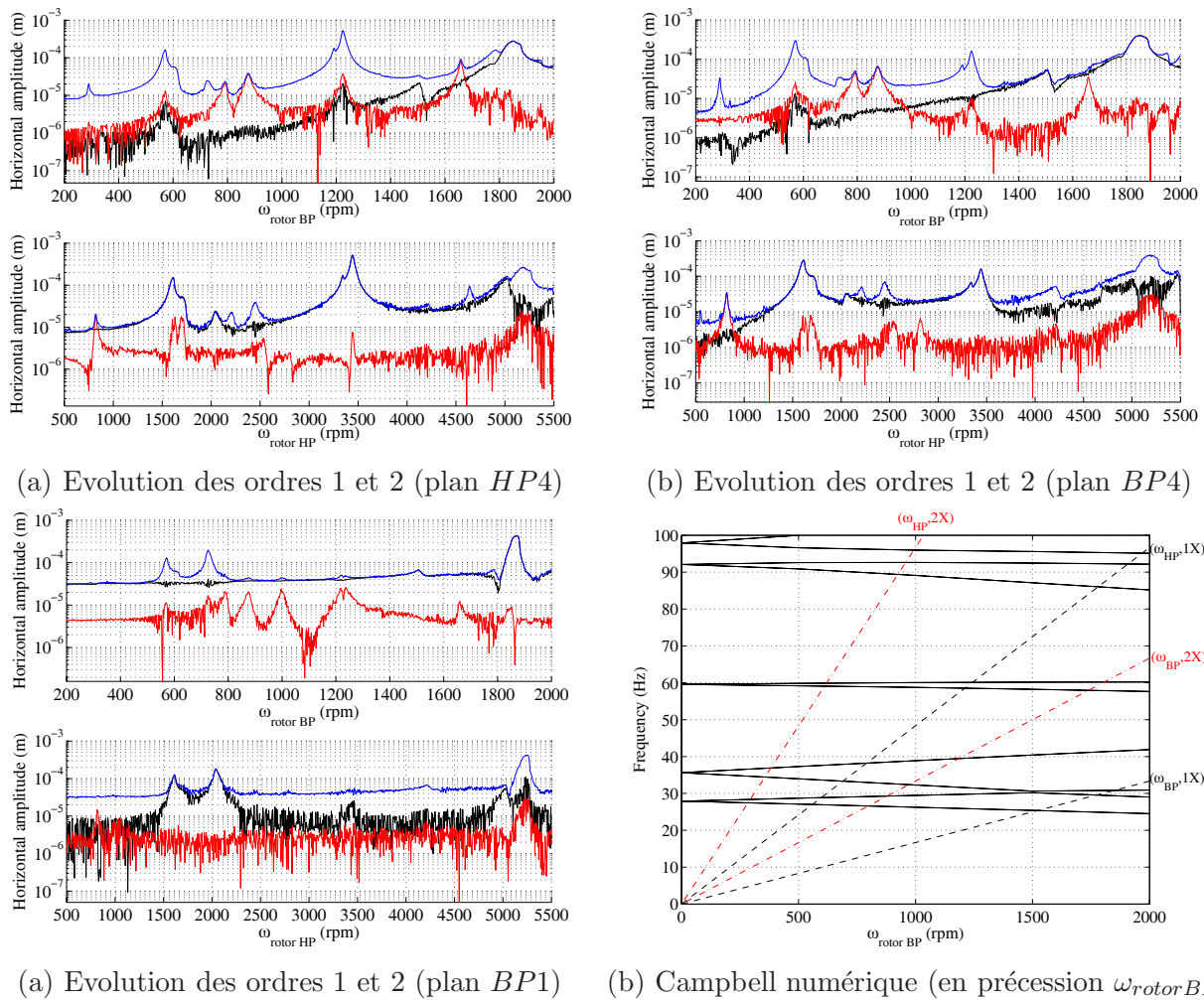


FIG. 6.9 – Evolutions des ordres $1\times$ et $2\times$, comparaison au diagramme de Campbell numérique en contra-rotation (noir = ordre $1\times$, rouge = ordre $2\times$, bleu = réponse globale)

Enfin, les figures 6.11 et 6.12 illustrent des orbites typiques observables pour l'ensemble du système bi-rotors. Du fait de la précession inverse entre les deux rotors, les phénomènes de modulation sont beaucoup plus présents que dans la configuration co-rotation. Cependant les formes des orbites restent "classiques" dans le sens où nous retrouvons une signature vibratoire composée des ordres entiers $n\times$ de chacun des rotors *BP* et *HP* (réponses non-linéaires des rotors soumis à des excitations synchrones et asynchrones). Il est intéressant de noter que dans ce cas de précession inverse, la combinaison des ordres $1\times$ du rotor *HP* (respectivement du rotor *BP*) et $2\times$ du rotor *BP* (respectivement du rotor *HP*) sont clairement identifiables : par exemple l'orbite de la figure 6.11(a) est composée d'une double boucle caractéristique des phénomènes $2\times$ (correspondant aux pics de résonance sous-critiques $\frac{1}{2}$ du rotor *BP*) associée à une modulation d'ordre $1\times$ du rotor *HP*. Enfin, selon les positions nodales

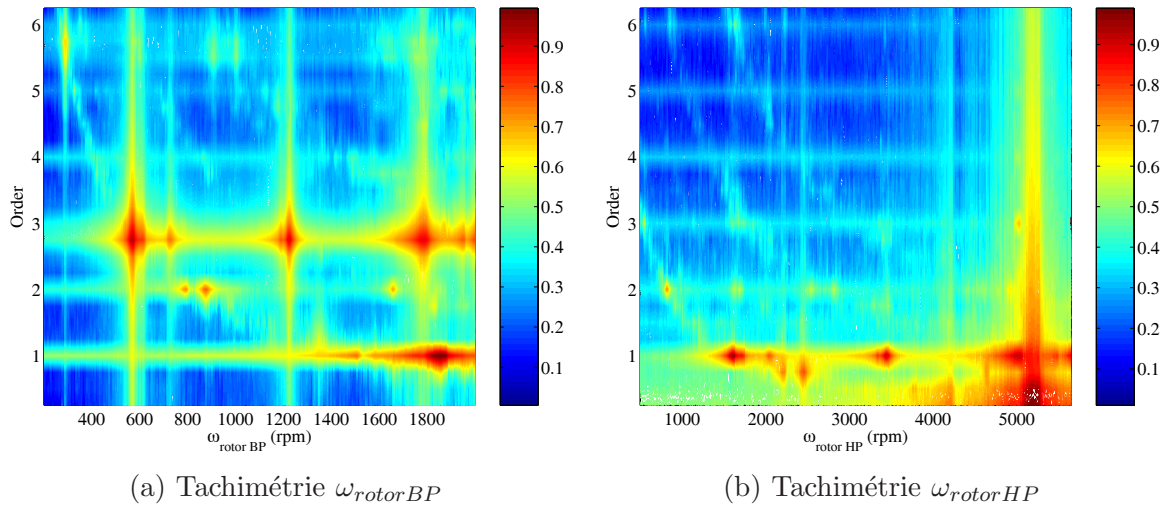


FIG. 6.10 – Campbells expérimentaux des ordres en précessions $\omega_{rotorBP}$ et $\omega_{rotorHP}$ (Configuration contra-rotation)

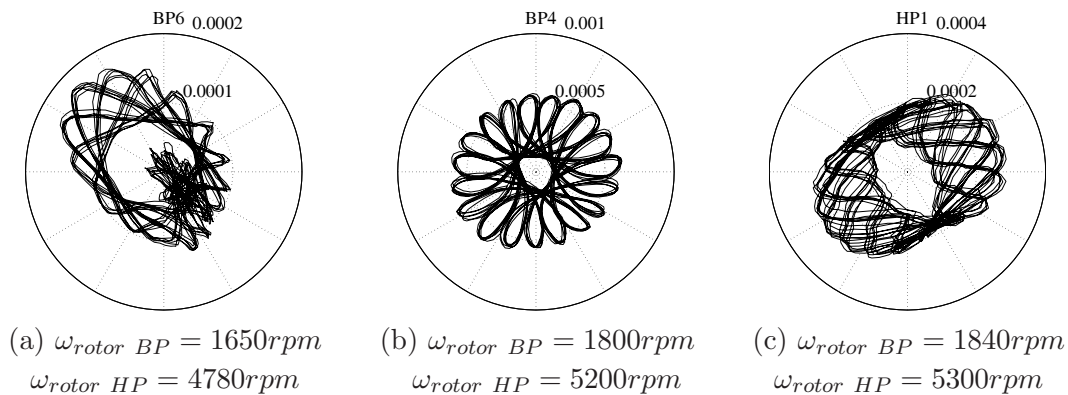


FIG. 6.11 – Orbits typiques aux passages de pics d'ordre $1\times$ et/ou $2\times$ selon les précessions HP et/ou BP (Configuration contra-rotation)

associées aux deux rotors, les orbites font ressortir les prédominances des contributions des ordres $1\times$ associés aux balourds HP et BP : dans le cas d'une contribution $1\times$ du rotor BP , une orbite avec modulation restreinte est observée (figure 6.12 pour le plan de mesure $HP1$). Pour une contribution $1\times$ du rotor HP prédominante, un orbite en forme de rosace apparaît (figure 6.12, plan de mesure $HP2$). Enfin, une contribution $1\times$ "équivalente" pour les deux rotors se caractérise par une forme de rosace comportant une enveloppe interne (figure 6.12) pour le plan de mesure $HP4$.

Ainsi, l'ensemble de ces résultats expérimentaux en configuration de contra-rotation montre que les phénomènes présents sont conformes aux phénomènes physiques déjà observés dans le cadre de la configuration en co-rotation, avec une prédominance des effets non-linéaires. Ces derniers se traduisent

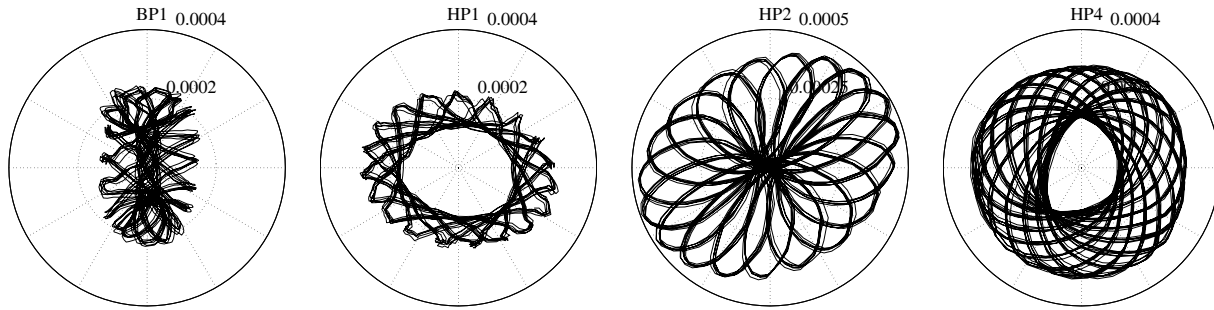


FIG. 6.12 – Orbites complexes à modulation pour $\omega_{rotor\ BP} = 1760rpm$ et $\omega_{rotor\ HP} = 5100rpm$ (Configuration contra-rotation)

par l'apparition des ordres supérieurs $n \times$ selon la tachimétrie associée (et donc explicitement par les ordres $\frac{1}{n} \times$ associés) et des orbites complexes. La différence essentielle (outre la notion de maximum d'amplitude selon les vitesses critiques directes et rétrogrades associées au sens de précession d'un rotor) provient d'une modulation des orbites plus prononcée.

6.3 Conclusion

La dynamique des systèmes tournants mono-rotor et bi-rotors se caractérise par un comportement non-linéaire prononcé. Si une prévision du comportement dynamique des rotors en termes d'estimation des vitesses critiques et des ordres $n \times$ et $\frac{1}{n} \times$ peut être approchée par l'intermédiaire des diagrammes de Campbell de modèles simples, une recherche des réponses à balourd ne peut se contenter d'une modélisation simple et trop éloignée de la réalité. En effet, une estimation de la réponse dynamique des rotors ne peut être approchée par l'intermédiaire de modèles linéaires qui omettent totalement les passages des résonances sur et sous-critiques n et $\frac{1}{n}$. Or les amplitudes vibratoires de ces différents pics de résonance peuvent s'avérer plus importantes que les amplitudes associées aux vitesses critiques directes du système (dans le sens de précession associé si nous considérons des systèmes multi-rotors). Ces observations nous permettent donc de répondre à la principale question posée en introduction de ce chapitre : considérer des modèles linéaires pour un dimensionnement optimal des systèmes tournants peut s'avérer insuffisant et inadapté. Une prise en compte des aspects non-linéaires est nécessaire et essentielle pour aller vers une prévision accrue du comportement dynamique global des systèmes mono et multi-rotors.

Ces phénomènes non-linéaires se traduisent principalement par l'apparition de pics de résonances d'ordre $2 \times$ qui sont bien connus en dynamique des rotors. Ils reflètent la présence et les effets combinés de divers paramètres tels que les dissymétries (fixes ou tournantes), les roulements et la gravité et balourds. Ces phénomènes peuvent aussi s'expliquer par la présence de fissures, contact frottant, désalignement, contact et perte de contact entre organes tournants.

Aussi, la dynamique des systèmes multi-rotors peut s'avérer plus complexe à travers des phénomènes de modulations du fait des excitations synchrones et asynchrones combinées provenant des balourds

de chacun des rotors. Une analyse fine du suivi des ordres associés à chacun des rotors permet une compréhension et interprétation des effets non-linéaires mis en jeu qui se traduisent alors principalement par l'apparition de contributions $n \times$ et $\frac{1}{n} \times$ pour chacun des rotors.

Aussi, dans l'état actuel des développements et recherches entreprises au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon, une compréhension des phénomènes non-linéaires mis en jeu dans les systèmes tournants peut être menée, mais cette dernière ne permet pas, pour le moment, d'identifier l'origine exacte de ces effets non-linéaires, du fait de la complexité des bancs d'essai et des nombreux éléments non-linéaires présents dans ces derniers. Ces derniers aspects seront tout naturellement discutés de façon plus concrète dans les *Perspectives de recherche* qui conclurons ce mémoire.

Troisième partie

Perspectives de recherche

Chapitre 7

Etudes et projets à venir

Les cinq chapitres précédents ont permis de voir différents domaines scientifiques et industriels pour lesquels l'étude du comportement dynamique passe par une prise en compte de divers phénomènes non-linéaires. La mise en place de différents outils a montré quelques unes des techniques et méthodes non-linéaires permettant de répondre à des problèmes concrets rencontrés plus particulièrement en *Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables* et *Dynamique non-linéaire des systèmes tournants*.

Ce chapitre, qui conclut ce mémoire, a pour principal objectif de proposer quelques unes des perspectives de recherche envisageables sur ces deux thématiques de la dynamique non-linéaire des systèmes fixes et tournants. Les points qui seront abordés dans ce chapitre ne sont pas exhaustifs et ont été choisis afin d'illustrer au mieux les divers domaines et ouvertures scientifiques envisageables.

7.1 Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables

Dans cette section, nous allons aborder différentes perspectives de recherche touchant plus particulièrement les aspects de stabilité et dynamique non-linéaire des systèmes frottants.

7.1.1 Instabilités multi-modes

L'une des premières voies de recherche qui suit naturellement la recherche des cycles limites exposée dans le chapitre 2 *Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables* consiste à généraliser ces approches à des instabilités multi-modes. Ces dernières peuvent se décomposer en deux grandes classes : les phénomènes de coalescence unique multi-modes (une coalescence de m modes pour un seul point de bifurcation de Hopf) ou une instabilité issue de plusieurs coalescences distinctes de modes (n coalescences de m modes pour différents points de bifurcation de Hopf).

Les paragraphes qui suivent montrent les perspectives de recherche possibles sur ce point à partir des trois méthodologies précédemment développées dans le chapitre 2 *Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables*.

Extension aux variétés centrales multiples et approximants multi-variables

Dans le cadre de coalescence unique multi-modes, le formalisme d'une extension aux variétés centrales (développé dans le paragraphe 2.2), accompagné d'approximants multi-variables est immédiat. En effet, cela revient alors à ré-écrire le système 2.13 dans la base des $n + 1$ variétés centrées, les variétés stables étant approchées classiquement par des polynômes de variétés centrées :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}} = \mathbf{J}_{\mathbf{c}}(\hat{\mu}) \mathbf{v}_{\mathbf{c}} + \mathbf{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \mathbf{h}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \hat{\mu}) = \sum_{p=i+j+\dots+k+l=2}^m \sum_{j=0}^p \dots \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^p \mathbf{a}_{ij\dots kl} v_{c_1}^i v_{c_2}^j \dots v_{c_n}^k \hat{\mu}^l \\ \dot{\hat{\mu}} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Ensuite, chacune des composantes $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{v}_{\mathbf{c}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}}, \hat{\mu})$ (pour un paramètre de contrôle $\hat{\mu}$ choisi) peut être approchée sous la forme d'approximants à n -variables [11,12] (décrivant les variétés centrales $(v_{c_1}, \dots, v_{c_n})$)

$$f_{[M/N]}(v_{c_1}, v_{c_2}, \dots, v_{c_n}) = \frac{\sum_{\alpha_1=0}^M \dots \sum_{\alpha_n=0}^M a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} v_{c_1}^{\alpha_1} \dots v_{c_n}^{\alpha_n}}{\sum_{\beta_1=0}^N \dots \sum_{\beta_n=0}^N b_{\beta_1, \dots, \beta_n} v_{c_1}^{\beta_1} \dots v_{c_n}^{\beta_n}} \quad (7.2)$$

Cependant, nous retrouverons les inconvénients de l'utilisation des variétés centrales (valable uniquement dans un voisinage très proche du point de bifurcation de Hopf). De plus, cette approche ne peut répondre au problème de plusieurs coalescences distinctes de modes, l'espace d'état étant dans ce cas formé des variétés instables (correspondant aux premières coalescences de modes par rapport au paramètre de contrôle), centrées (correspondant à la dernière coalescence de modes) et stables.

Suivi des multi-modes complexes non-linéaires

Afin d'estimer les cycles limites associés non seulement aux phénomènes de coalescence unique multi-modes mais aussi ceux provenant d'une instabilité due à plusieurs coalescences distinctes de modes, une extension de la méthode des modes non-linéaires complexes (développée dans le paragraphe 2.3) est envisageable.

Un suivi des multi-modes non-linéaires complexes pourrait être mis en place par une estimation de la solution divergente sous la forme

$$\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \sum_{k=1}^m p_k \left(\Psi_k(p_1, \dots, p_m) e^{\lambda_k(p_1, \dots, p_m)t} + \bar{\Psi}_k(p_1, \dots, p_m) e^{\bar{\lambda}_k(p_1, \dots, p_m)t} \right) \quad (7.3)$$

où p_k correspond alors à l'amplitude de la solution périodique associée au k^{eme} mode instable défini par sa valeur propre λ_k et vecteur propre Ψ_k . La solution stable approchée serait composée des paires successives des valeurs propres pures imaginaires $\lambda_k = -\bar{\lambda}_k = i\omega_k$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \sum_{k=1}^n p_k \left(\Psi_k(p_1, \dots, p_n) e^{i\omega_k(p_1, \dots, p_n)t} + \bar{\Psi}_k(p_1, \dots, p_n) e^{-i\omega_k(p_1, \dots, p_n)t} \right) \quad (7.4)$$

et serait obtenue par un suivi des modes instables et l'annulation successive des parties réelles des valeurs propres λ_k (incrémentations des facteurs d'amplitude p_k) provenant du système linéaire équivalent (paragraphe 2.3)

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{FNL}(\tilde{\mathbf{y}}) \approx \mathbf{A}\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{A}_{\mathbf{FNL}}\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{\mathbf{equi}}\tilde{\mathbf{y}} \quad (7.5)$$

où $\mathbf{A}_{\mathbf{FNL}}$ définit les termes linéaires équivalents des expressions non-linéaires $\mathbf{FNL}(\tilde{\mathbf{y}})$.

La question qui reste ouverte sur cette formulation est la technique de suivi des multi-modes, sachant que l'incrémentations des amplitudes p_k peut être réalisée de multiples façons et que les pulsations $\omega_k(p_1, \dots, p_n)$ et vecteurs propres $\Psi_k(p_1, \dots, p_n)$ de chaque mode subissent l'évolution de l'ensemble des facteurs d'amplitudes p_k .

Nous pouvons aussi observer que la formulation de l'équation 7.4 néglige les diverses composantes croisées entre modes, ce qui constitue une approximation de la solution non-linéaire comme étant la superposition des contributions de chaque mode instable. Cependant, cette méthodologie devrait permettre de faire ressortir les contributions essentielles (et plus particulièrement le mode instable qui gouverne principalement la solution périodique).

Méthode de balance harmonique multi-dimensionnelle sous contraintes

Enfin, des extensions de la méthode de la balance harmonique sous contraintes présentée dans le paragraphe 2.4 peuvent permettre de traiter les instabilités multi-modes.

L'approche la plus simple peut consister à conserver la méthodologie de balance harmonique sous contraintes déjà mise en place, en considérant que le comportement non-linéaire est principalement dirigé par le mode "le plus instable". Cette première formulation donnera alors une expression sous la forme d'une série de Fourier classique comme présentée en équation 2.51, les conditions en contraintes restant alors les mêmes (valeurs propres du système inférieures ou égales à zéro).

Une deuxième formulation pourrait être d'approcher le cycle limite non-linéaire par une superposition des contributions découplées de chacun des modes instables. La forme approchée du système non-linéaire serait

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{B}_{k,0} + \sum_{j=1}^n (\mathbf{B}_{k,j} \cos(j\omega_k t) + \mathbf{A}_{k,j} \sin(j\omega_k t)) \right) \quad (7.6)$$

où n définit le nombre d'harmoniques pour la solution finale et m le nombre de modes instables considérés. Le principal avantage de cette approximation réside dans la simplicité de l'extension de la méthode de la balance harmonique sous contraintes déjà présentée dans le paragraphe 2.4.

Elle correspond alors à une approximation de la formulation globale de la balance harmonique multi-dimensionnelle [72–75]

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k_1=-n}^p \sum_{k_2=-n}^n \cdots \sum_{k_p=-n}^n \left(\mathbf{A}_{k_1, k_2, \dots, k_p} \cos \left(\sum_{j=1}^m k_j \omega_j t \right) + \mathbf{B}_{k_1, k_2, \dots, k_p} \sin \left(\sum_{j=1}^m k_j \omega_j t \right) \right) \quad (7.7)$$

qui constitue la troisième formulation envisageable. Dans chacun des cas, les fréquences $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ sont des inconnues du problème et les solutions non triviales (c'est à dire autre que les points d'équilibre) sont obtenues à partir de la contrainte sur les parties réelles associées aux cycles limites.

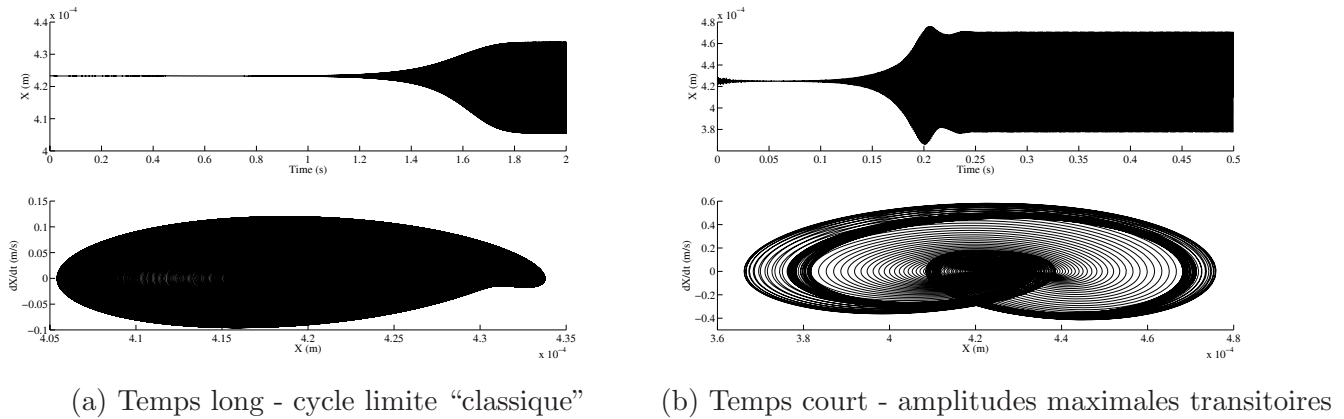


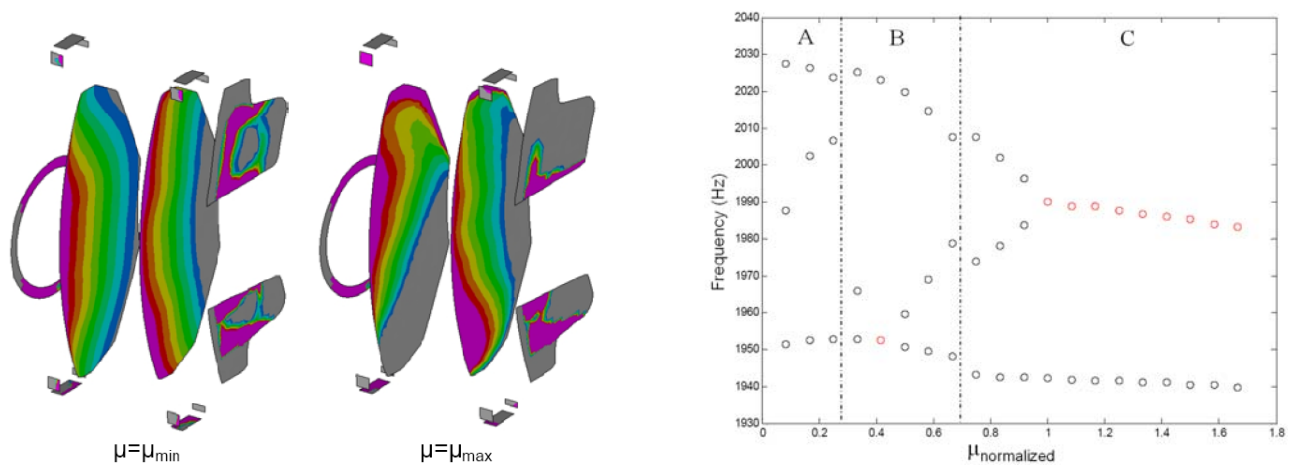
FIG. 7.1 – Illustrations de la nécessité de la prise en compte des critères du *temps d'atteinte des cycles limites* et des *amplitudes vibratoires maximales transitoires*

7.1.2 Définition de critères complémentaires de stabilité

Si nous considérons maintenant la problématique de la stabilité des systèmes frottants du point de vue des indicateurs permettant d'aboutir au système "le plus stable", de nombreuses perspectives scientifiques sont envisageables. En effet, l'un des points clés pour les années à venir va consister à définir de nouveaux critères complémentaires des deux principales étapes classiquement étudiées (définition des zones stables/instables et ensuite des niveaux vibratoires).

Tout d'abord, l'indicateur *RD-factor* et le critère de *temps d'atteinte des cycles limites* doivent être explorés plus en profondeur pour statuer sur leurs réels potentiels à une aide à la conception robuste des systèmes mécaniques. Comme le montre les figures 7.1, suivant les paramètres physiques du système, l'établissement du cycle limite peut varier de façon importante. Ainsi, la prise en compte du temps d'établissement du cycle limite semble correspondre à un critère pertinent d'un point de vue industriel. En effet, du fait des nombreuses modifications (évolution de la surface de frottement et du coefficient de frottement, phénomènes de stick-slip, modification des termes non-linéaires,...) que peut subir un système dynamique frottant lors d'une montée en divergence, il n'est pas rare d'observer expérimentalement des instabilités qui "disparaissent" au cours du temps [2].

Dans un second temps, la notion d' "*amplitudes vibratoires maximales transitoires*" avant l'obtention des cycles limites peut constituer un critère de dimensionnement complémentaire. En effet, estimer les cycles limites par l'intermédiaire de diverses méthodes non-linéaires correspondra à plus ou moins long terme à une étape "classique". Cependant, cet indicateur des niveaux vibratoires stationnaires ne constitue pas toujours les niveaux transitoires maximums avant l'atteinte du cycle limite, comme le montrent les figures 7.1(b). Ainsi, une des perspectives de recherche serait de rechercher à établir ces niveaux vibratoires maximums transitoires qui serviraient alors d'indicateur complémentaire aux cycles limites stationnaires "classiques". Cette perspective semble tout à fait envisageable en considérant la *méthode de la balance harmonique sous contraintes* et le *suivi des modes non-linéaires complexes*



(a) Evolution de la pression en fonction du frottement (b) Détection des zones d'évolution de coalescence

FIG. 7.2 – Influence de la prise en compte des jeux entre pièces

développés dans les paragraphes 2.4 et 2.3) , les maximums d'amplitude correspondant en fait à des états de divergence et amortissement alternés des cycles transitoires.

7.1.3 Vers une modélisation plus complète de systèmes

D'autre part, les études présentées dans ce mémoire se sont focalisées sur des systèmes dynamiques comportant des non-linéarités polynomiales. Des études en cours qui incluent des prises et pertes de contacts sur le système de frein étudié dans le paragraphe 3.2, indiquent que la stabilité associée à un tel système peut s'avérer beaucoup plus complexe. Comme le montrent les figures 7.2, les zones de contacts au niveau des plaquettes évoluent fortement en fonction du coefficient de frottement. Des modifications d'autres paramètres physiques tels que la pression par exemple donneraient aussi des évolutions importantes de ces zones. Ces phénomènes induisent alors des évolutions des fréquences et des coalescences complexes qui correspondent à des évolutions continues par morceaux suivant les changements brusques des zones de contacts au niveau des plaquettes. Des résultats récents [22, 76] illustrent toute la complexité et l'importance de s'orienter vers des modèles complets par éléments finis qui comportent l'ensemble des pièces constituant le système mécanique étudié. Nous pouvons penser que lors de la montée en divergence vers un cycle limite des phénomènes similaires peuvent se produire, introduisant donc une complexité accrue des réponses dynamiques non-linéaires. Cependant, ce dernier point ne remettra pas en cause les méthodes non-linéaires *modes non-linéaires complexes* et de la *balance harmonique sous contraintes* qui sont aussi adaptées pour la prise en compte de non-linéarités de type contacts et pertes de contacts.

Aussi, les problèmes d'instabilité traités sur les cas des freins automobile et aéronautique se basent, à l'heure actuelle, exclusivement sur une apparition d'instabilité du type *couplage de modes* en considérant un coefficient de frottement constant. Hors, nous pouvons penser que des instabilités dues

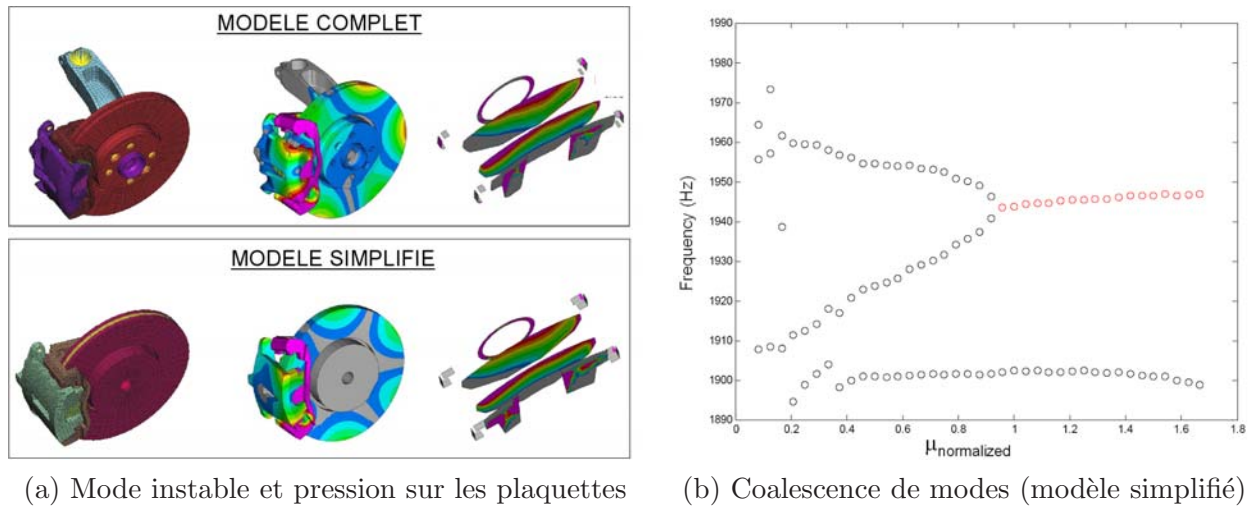


FIG. 7.3 – Comparaison des modèles complet et simplifié pour la coalescence de modes

à des évolutions du coefficient de frottement et des phénomènes de type *stick-slip* sont aussi présents dans de tels systèmes. Ainsi, il serait intéressant de développer des modèles d'évolution apparente du coefficient de frottement plus réalistes (considérant par exemple l'évolution de la surface de contact, la présence d'un troisième corps, l'usure des pièces en contact frottant,...). A cet effet des collaborations portant à la fois sur des aspects expérimentaux et numériques avec les équipes de Tribologie, physico-chimie et dynamique des interfaces du LTDS pourraient être mises en place pour permettre d'aboutir à une modélisation et compréhension plus fine du rôle du coefficient de frottement dans les études de stabilité et dynamique non-linéaire de systèmes frottants.

7.1.4 Vision systémique : aspect FIRST Design

Actuellement, les problèmes de stabilité touchant les structures industrielles ne sont considérés qu'en phases d'intégration à la fin du cycle en V . Cette "culture industrielle" vis à vis des notions de stabilité limite très fortement les solutions technologiques pouvant être concrètement mises en place si des problèmes d'instabilité sont détectés. En effet, outre le fait que les coûts engendrés par de telles modifications peuvent s'avérer trop onéreux, une modification du système doit non seulement être adaptable au produit final (problème de type géométrique et encombrement par exemple), mais aussi ne pas nécessiter une remise en question de l'ensemble des tests réalisés sur les pièces et organes préalablement.

Des visions systémiques permettant de considérer le problème de stabilité plus en amont dans la phase de conception au début du cycle en V constitue un enjeu majeur pour les industriels mais aussi pour la communauté scientifique. En effet, les laboratoires de recherche ont non seulement pour mission de proposer des outils adaptés à des applications industrielles (comme cela a été illustré dans les chapitres 2 et 3) mais aussi de proposer des approches systémiques et fonctionnelles permettant d'intervenir plus en amont dans la phase de conception de systèmes. A cet effet, des recherches menées

au laboratoire (dans le cadre de l'Equipe de Recherche Technologique FIRST Design) s'intéressent à la mise en place de modèles simplifiés qui permettent de considérer les problèmes de stabilité dès la phase de conception. Comme le montrent les figures 7.3, ces approches qui se basent sur des géométries et modèles simplifiés des pièces permettent de reproduire globalement les phénomènes d'instabilité obtenus par l'intermédiaire de modèles complets.

Aussi les enjeux scientifiques et les perspectives à long terme sur ces modèles systémiques passent naturellement par la prise en compte des effets de dispersion de divers paramètres physiques, vis à vis des zones de stabilité mais aussi des amplitudes vibratoires de cycles limites. Si de telles études semblaient difficilement réalisables sur des systèmes complets, elles paraissent envisageables pour des systèmes simplifiés sur lesquels des modifications beaucoup plus importantes sont envisageables.

L'un des enjeux scientifiques pour les prochaines années sera alors de mettre en place des outils non-linéaires avec prise en compte des incertitudes permettant d'étudier la sensibilité des zones stables et instables, des niveaux vibratoires et du temps d'atteinte des cycles limites pour aboutir à une analyse robuste de la stabilité des systèmes non-linéaires frottants. La notion d'occurrence d'apparition de l'instabilité pour les calculs de stabilité des systèmes, ainsi que la détermination des enveloppes englobant l'ensemble des cycles limites constitueraient des résultats directement utilisables d'un point de vue industriel. Des modifications et choix technologiques seraient alors possible du fait de la considération du problème de stabilité dès la phase de conception de système, en phase amont du cycle en V .

Des techniques déjà développées par des membres de l'équipe Dynamique des Systèmes et des Structures du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de type chaos polynomial ou technique par analyse d'intervalle [77, 78] pourraient servir de base à de telles études. Nous rappelons que l'étude de stabilité des systèmes frottants passe par la description d'un système non-linéaire si on veut obtenir un cycle limite. Ceci implique donc de mettre en place des techniques stochastiques non-linéaires, si nous voulons répondre de façon efficace à ce type de problème.

7.1.5 Applications au génie civil

Enfin, une des perspectives intéressantes à long terme sur cette thématique des instabilités et dynamique des systèmes frottants, serait d'adapter l'ensemble des méthodologies au domaine du génie civil. En effet, des recherches réalisées au sein de l'Equipe Dynamique des Systèmes et des Structures du laboratoire ont permis de développer des modélisations de source sismique liée à des instabilités de glissement avec frottement entre deux plaques tectoniques élastiques en contact (modèle 3S : interaction des phénomènes de stick-slip et sprag-slip [79]).

Des recherches permettant de déterminer les cycles limites des particules dans le sol par l'intermédiaire de la propagation de l'onde générée au niveau du foyer jusqu'à la surface libre de la terre pourraient être envisagées. Ces approches nécessiteraient alors la prise en compte du comportement non-linéaire des sols et de suivre l'ensemble des ondes et des phénomènes de réflexion et dispersion dans chacune des couches homogènes ou hétérogènes du sol. Le lien avec les perspectives abordées dans le paragraphe 7.1.1 est donc immédiat.

Ces recherches permettraient ainsi de s'assurer de la tenue des structures soumises à des excitations

sismiques. En effet, la propagation et l'évolution des ondes provenant de l'instabilité au foyer serviront donc de données d'entrée pour caractériser les excitations non-linéaires vues par la structure en surface. Des études permettant alors de s'assurer de la tenue des bâtiments et ouvrages (à comportement linéaire ou non-linéaire) après des secousses sismiques à travers des analyse non-linéaires des réponses vibratoires pourront être menées.

7.2 Dynamique non-linéaire des systèmes tournants

Concernant la thématique *Dynamique non-linéaire des systèmes tournants*, de nombreuses perspectives existent. Dans la section qui suit, nous allons plus particulièrement nous focaliser sur quatre grands axes de recherche.

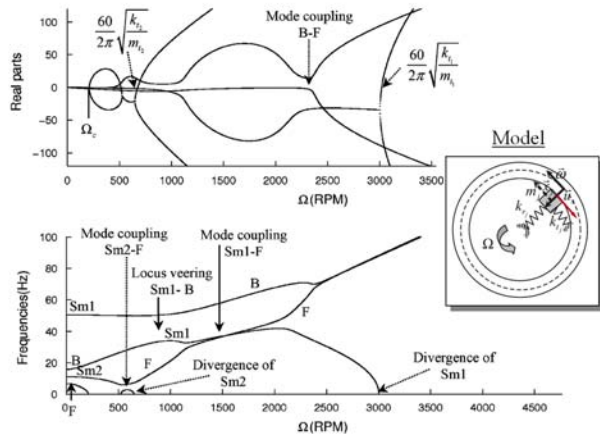
7.2.1 Identification et recalage des systèmes mono-rotor

Il a été montré dans le chapitre 6 *Dynamique expérimentale des systèmes mono et multi-rotors*, que le comportement dynamique des systèmes tournants est très complexe du fait de la présence de phénomènes multiples (roulement, dissymétries tournantes ou fixes, désalignement,...) et reste donc difficile à connaître. Une prévision réaliste du comportement dynamique des rotors nécessite donc une modélisation fine prenant en compte l'ensemble de ces phénomènes non-linéaires qui ne peuvent être connus raisonnablement que par l'expérience.

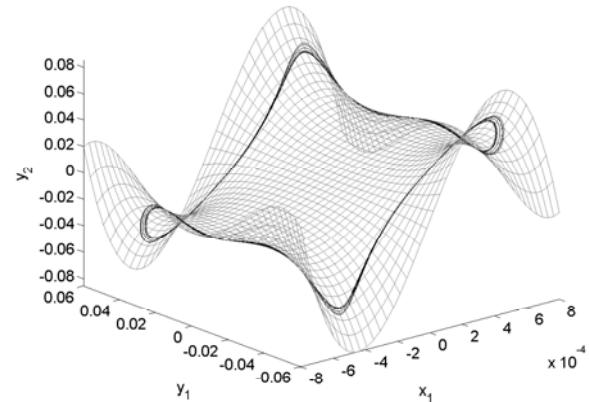
Si de nombreuses approches non-linéaires ont été développées au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, la problématique de l'identification de paramètres physiques tels que les balourds, les dissymétries fixes et tournantes n'a pas fait l'objet à l'heure actuelle de recherches scientifiques poussées. Or, il apparaît que de telles études permettraient de mieux comprendre les phénomènes non-linéaires observés expérimentalement sur les bancs d'essai mono-rotor et bi-rotors. Effectivement, si des comparaisons et recalages de modèles sont facilement réalisables à partir des diagrammes de Campbell (et des vitesses critiques et/ou résonances sur ou sous-critiques), les réponses à balourds expérimentales (pour les différents ordres n ou la réponse non-linéaire globale) ne peuvent être corrélées avec des modèles numériques sans une identification complète du système comportant aussi bien une estimation de l'ensemble des balourds (en termes d'intensité et de phase) que des aspects "non-linéaires" constituant les rotors.

Ainsi une extension des techniques d'identification de balourds, désalignement et participations dynamiques des parties fixes tels que les supports paliers dans notre cas [80–85] pourraient servir de base pour effectuer des identifications et recalages des évolutions d'amplitude des ordres n de la réponse non-linéaire du rotor. Bien entendu, de telles études nécessitent aussi d'effectuer des modélisations en amont des divers phénomènes contribuant au comportement non-linéaire du système.

De nombreux essais expérimentaux prenant en compte les variations de raideurs des supports paliers pour différents balourds ont déjà été réalisés et constituent donc une base de données tout à fait appropriée pour de telles études.



(a) Stabilité d'un système de deux masses tournantes dans le repère tournant



(b) Projection de la réponse temporelle sur la variété invariante (gris=variété invariante, noir=réponse exacte)

FIG. 7.4 – Stabilité d'un système tournant avec frottement et analyse non linéaire par la méthode des invariants d'un rotor non-linéaire (a) Sm_i = mode du i^{eme} masse-ressort, B =mode rétrograde de l'anneau, F =mode direct de l'anneau

7.2.2 Stabilité et dynamique non-linéaires des systèmes tournants frottants

Dans le cadre d'études menées sur la stabilité des systèmes tournants frottants [86–89] (modélisation d'un rotor flexible avec des roues aubagées et des possibilités de contacts avec un carter souple), des phénomènes de coalescences de modes et d'instabilité de type de flottement peuvent être observés, comme le montre la figure 7.4(a). Les études qui ont été actuellement réalisées au sein de l'Equipe Dynamique des Structures et des Systèmes permettent ainsi de définir les zones de stabilité en fonction des zones de fonctionnement.

L'étape qui suit de telles études consiste donc à être capable de déterminer la dynamique non-linéaire associée aux diverses instabilités obtenues (de type flottement). Les méthodes qui ont donc été développées dans le cadre de l'étude des systèmes frottants décrit dans le chapitre 2 *Dynamique non-linéaire des systèmes frottants instables* pourraient ainsi être mises en oeuvre et adaptées pour de telles problématiques, le paramètre de contrôle étant dans ce cas la vitesse de rotation du système. Des perspectives de recherche visant plus particulièrement à adapter la *méthode des modes non-linéaires complexes* ou *méthode de balance harmonique sous contraintes* permettraient d'effectuer une analyse complète de la stabilité non-linéaire des roues aubagées soumises à des contacts et pertes de contact sur le carter.

De plus, les perspectives de recherche concernant les instabilités multi-modes qui ont déjà été expliquées dans les paragraphes 7.1.1 constituent aussi des enjeux scientifiques et industriels intéressants pour la dynamique des systèmes tournants.

7.2.3 Réponses non-linéaires des systèmes mono-rotor et/ou multi-rotors

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4 *Dynamique des rotors comportant un roulement non-linéaire*, le comportement dynamique et la stabilité des systèmes mono-rotor non-linéaires peuvent s'effectuer de façon aisée par l'intermédiaire de la méthode de la balance harmonique.

Tout d'abord, d'autres méthodes d'analyse non-linéaire se basant par exemple sur la notion des modes normaux non-linéaires [90–92] peuvent être considérées pour rechercher la solution dynamique non-linéaire d'un rotor. Ainsi, des méthodes de réduction de la taille des systèmes tournants non linéaires par de la méthode des invariants ont été testées dans le cas d'un rotor comportant une non-linéarité cubique [16]. Une stratégie permettant de prendre en compte les évolutions des propriétés modales du rotor non-linéaire en fonction de la vitesse de rotation a été validée (figure 7.4(b)). Une telle approche pourrait maintenant être développée, validée sur des systèmes tournants plus complexes, et naturellement étendue par des techniques d'approximants multi-variables permettant d'approcher la solution exacte avec des ordres des variétés esclaves en fonction des invariants plus faibles. De même, des approches par balance harmonique pourraient compléter ces méthodes afin d'aboutir à une recherche des invariants sous la forme d'une série de Fourier tronquée.

Une deuxième perspective de recherche concerne la mise en place d'approches non-linéaires permettant de déterminer des réponses quasi-périodiques pour les systèmes tournants. Les systèmes multi-rotors qui sont excités par des composantes fréquentielles non commensurables $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ en sont un exemple type. De manière générale, la méthode de balance harmonique peut être étendue à la notion de balance harmonique multi-dimensionnelle [72–75]. Ainsi, la réponse non-linéaire des systèmes multi-rotors peuvent s'approcher sous la forme d'une série de Fourier multiple

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k_1=-m}^m \sum_{k_2=-m}^m \cdots \sum_{k_n=-m}^m \left(\mathbf{A}_{k_1, k_2, \dots, k_n} \cos \left(\sum_{j=1}^n \frac{k_j}{\nu} \omega_j t \right) + \mathbf{B}_{k_1, k_2, \dots, k_n} \sin \left(\sum_{j=1}^n \frac{k_j}{\nu} \omega_j t \right) \right) \quad (7.8)$$

en s'assurant de la non redondance des combinaisons possibles. ν est un entier permettant ici de prendre en compte la contribution de sous harmoniques dans la réponse dynamique non-linéaire.

Les problèmes engendrés par une telle approche réside classiquement dans le nombre de coefficients de Fourier ($\mathbf{A}_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ et $\mathbf{B}_{k_1, k_2, \dots, k_n}$) à déterminer, ceci pour des raisons aussi bien de temps de calcul que d'espace mémoire.

Des recherches en cours au sein de l'Equipe Dynamique des Structures et des Systèmes [93] proposent dans un premier temps un formalisme permettant d'éviter les redondances multiples et ainsi de limiter le nombre de termes harmoniques à estimer. La réponse non-linéaire peut être approchée sous la forme

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_n^m} \left(\mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cos \left(\frac{\mathbf{k}}{\nu} \cdot \boldsymbol{\Omega} t \right) + \mathbf{B}_{\mathbf{k}} \sin \left(\frac{\mathbf{k}}{\nu} \cdot \boldsymbol{\Omega} t \right) \right) \quad (7.9)$$

avec $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_m]^T$ pour un domaine temporel m -dimensionnel et une solution tronquée à n harmoniques (soit un nombre total de composantes harmoniques à déterminer de $\frac{(2n+1)^m + 1}{2}$).

A partir de ces approches de balance harmonique multi-dimensionnelles, des validations et recalgés des systèmes multi-rotors pourraient alors être menés en utilisant la base de données des essais

expérimentaux présentés dans le chapitre 6 *Dynamique expérimentale des systèmes mono et multi-rotors*. Dans ce cas d'étude, les approches seraient restreintes au domaine fréquentiel bi-dimensionnel ce qui permettrait de valider les différents développements mis en place.

7.2.4 Extension à une méthode de balance multi-dimensionnelle à ordres épurés et ajustables

Aussi une des perspectives à envisager consisterait à définir des critères sur les coefficients de Fourier $\mathbf{A}_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ et $\mathbf{B}_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ à conserver ou des techniques d'évaluation des solutions non-linéaires par ordres successifs (défini par itération sur n). Ces techniques et perspectives sont discutées dans le cadre de la balance harmonique multi-dimensionnelle, mais correspondent aussi à des enjeux importants dans le cadre de la balance harmonique classique mono-dimensionnelle.

En effet, dans le cadre des systèmes tournants, considérer le nombre d'harmoniques de la solution en fonction de la vitesse de rotation comme évoluant ou comme une inconnue du problème serait une des perspectives importantes. Le choix des harmoniques sélectionnées pouvant se baser par exemple sur des techniques d'interpolation par extrapolateurs de Lagrange en fonction de la vitesse de rotation du système, permettrait alors d'effectuer uniquement un "réajustement" du nombre d'harmoniques n par itération de vitesse de rotation.

Aussi des techniques de pré-estimation des solutions non-linéaires et présence des composantes sous et sur-harmoniques pourraient être envisagées en se basant sur la réponse linéaire du système. En effet, la plupart des phénomènes non-linéaires en dynamique des systèmes tournants est due à l'apparition des différents ordres $n \times$ donnant lieu à des pics d'amplitude au voisinage des résonances sous-critiques $\frac{1}{n}$ de chacune des vitesses critiques. Ainsi, un premier calcul d'ordre $1 \times$ et une estimation via le diagramme de Campbell peuvent permettre une estimation au préalable des zones envisageables pour l'apparition des différents ordres $n \times$ et donc de retrouver par un second calcul les réponses non-linéaires, épurées des ordres dont la contribution est négligeable. Ces méthodologies correspondraient alors à des techniques de balance harmonique à ordres variants en fonction de la vitesse de rotation.

7.3 Détection et identification de fissures dans les systèmes fixes et tournants

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5 *Dynamique non-linéaire des rotors fissurés*, la collaboration scientifique avec le Professeur A.W. Lees (University of Swansea, United Kingdom) initiée dans le cadre d'un stage post-doctoral a permis de développer divers outils de détection de fissures dans les systèmes tournants [48, 56, 57, 59, 60].

Ces recherches pourraient maintenant déboucher sur une nouvelle thématique au sein du LTDS portant sur la *Détection et identification de fissures dans les systèmes fixes et tournants*.

7.3.1 Détection de fissures pour les systèmes tournants complexes

L'une des premières perspectives qui peut être menée, consiste à s'intéresser à une détection de fissure sur des rotors complexes comportant par exemple des dissymétries tournantes, des roulements et des désalignements. En effet, les études réalisées dans le cadre du chapitre 5 *Dynamique non-linéaire des rotors fissurés*, s'intéressent à l'effet d'une fissure sur un rotor qui ne comporte pas d'autre phénomène physique et élément pouvant interagir sur les ordres $n\times$. Or, comme cela a été illustré dans le chapitre 6 *Dynamique expérimentale des systèmes mono et multi-rotors*, un système tournant réel comporte par nature une dynamique non-linéaire où les résonances d'ordre $n\times$ sont forcément présentes.

Ainsi, si nous nous intéressons à la mise en oeuvre pratique des différents indicateurs de fissures proposés sur des systèmes tournants réels, des comparaisons des contributions provenant de différents phénomènes non-linéaires doivent être envisagées. Il est clair qu'une apparition de fissure va engendrer des diminutions de fréquences et une évolution des différents pics d'ordre $1\times$, $2\times$ ou $3\times$, mais ces dernières peuvent être en partie masquées par d'autres phénomènes non-linéaires.

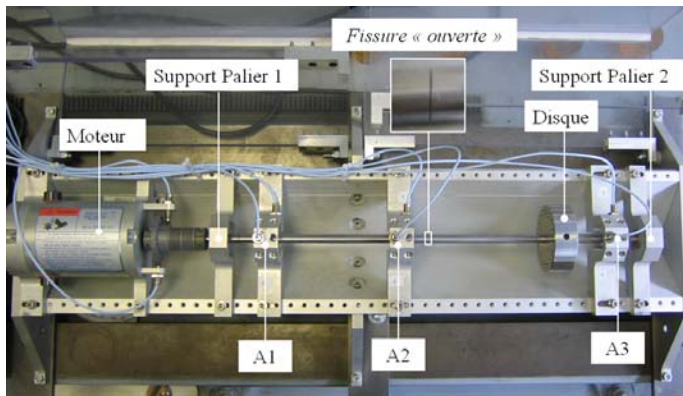
Un autre point qui mérite une attention particulière réside dans le choix du mécanisme de "respiration de fissure". Les modèles couramment utilisés en dynamique des rotors utilisent des approximations du comportement d'ouverture et fermeture de la fissure par l'intermédiaire d'un développement de série en cosinus. De plus, ils supposent que la déflexion du rotor fissuré est plus importante que la dynamique du rotor ce qui permet d'avoir un mécanisme d'ouverture et fermeture de fissure totalement décrit par rapport à l'orientation du front de fissure vis à vis de la gravité.

Des études déjà réalisées sur cet aspect tendent à montrer que le choix du mécanisme de fissure peut légèrement modifier les évolutions des amplitudes et orbites aux passages de résonances sous-critiques [52,94], même si l'ensemble des observations préalablement réalisées dans le chapitre 5 sont identiques. Ainsi, considérer un mécanisme d'ouverture et fermeture de fissure sans aucune hypothèse préalable (c'est à dire qui dépend uniquement de la position du front de fissure vis à vis de la vibration non-linéaire totale du rotor) permettrait de statuer sur une modélisation juste nécessaire des mécanismes de respiration de fissure.

7.3.2 Identification des fissures et extension à la surveillance vibratoire des ouvrages

L'une des problématiques à laquelle il faut maintenant répondre consiste à être capable d'identifier les paramètres des fissures (la position, la taille et l'orientation) dans les systèmes fixes et tournants. Plusieurs approches et perspectives se basant sur des analyses purement vibratoires et/ou non-linéaires sont envisageables. Les évolutions du comportement modal et sur les techniques de recalage des modèles numériques à travers la localisation des sous-structures "erronées" suivi de la correction des paramètres structuraux [95–99] constituent un premier angle envisageable.

Une seconde approche peut consister dans une analyse fine du comportement dynamique non-linéaire comme technique non destructive de diagnostic. Ainsi, une perspective envisageable consisterait à transposer l'ensemble des résultats et approches développés dans le cadre de l'étude des rotors



(a) Banc d'essai CNRS

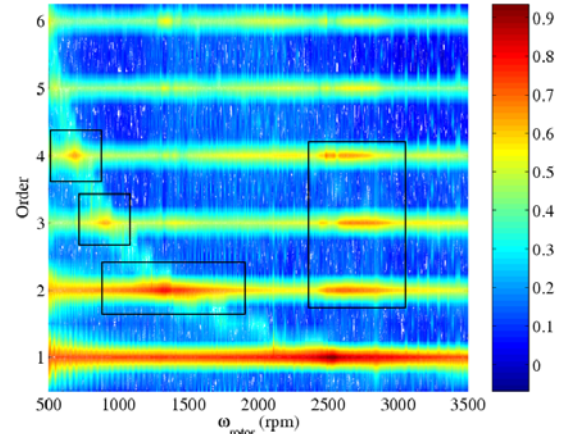
(a) Evolutions normées des ordres $n \times$

FIG. 7.5 – Détections expérimentales de la présence d'une fissure ouverte par suivi des ordres $n \times$ aux résonances sous-critiques et au passage de la première vitesse critique ($2500 - 3000rpm$)

fissurés, à la surveillance vibratoire et détection de l'apparition de fissures sur des ouvrages (ponts, bâtiments, poutre béton,...). Effectivement, les techniques actuelles de diagnostic des ouvrages sont pour la plupart des méthodes locales (détection acoustique, ultrasons,...) ou des analyses portant sur les modifications du comportement modal de la structure considérée (fréquences et déformées propres).

Bien entendu, les mécanismes d'ouverture et fermeture de fissure dans le cadre d'ouvrages de génie civil sont différents de ceux développés dans le cadre des rotors fissurés. Cependant les approches et méthodes développées dans le chapitre 5 *Dynamique non-linéaire des rotors fissurés* sont toujours valables vu l'approximation du mécanisme de respiration de fissure sous la forme d'une série de Fourier dans les deux cas [100].

Ainsi, une surveillance basée sur les indicateurs combinés des modifications des Fonctions de Réponse en Fréquence (prise en compte des pics de résonances et anti-résonances), de l'évolution du comportement dynamique non-linéaire et des ordres $n \times$ pourrait alors servir de base à la constitution d'outils pertinents de diagnostic de l'état des ouvrages pour des surveillances aussi bien périodiques que continues des structures.

7.3.3 Approches et validations expérimentales

Enfin, en parallèle ces développements théoriques et numériques, des approches expérimentales permettant de statuer concrètement sur la pertinence et les limitations des outils développés devraient être mise en place, aussi bien pour l'identification de fissures dans les structures fixes que tournantes.

A cet effet, un projet bénéficiant d'un financement du CNRS au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes a permis à l'Equipe Dynamique des Structures et des Systèmes d'acquérir un banc d'essai mono-rotor (figure 7.5(a)) sur lequel des études d'influence de fissures sur la dynamique des rotors sont envisageables. Le principal avantage d'un tel banc d'essai correspond à son

caractère “principalement linéaire” lorsque ce dernier comporte un rotor sans fissure. Ainsi, l’effet de l’ajout d’une fissure permet de clairement identifier les principaux phénomènes relatifs à l’effet d’une fissure transverse. Des premiers résultats encourageants sur ce sujet vont dans le sens des observations numériques qui ont été développées dans le chapitre 5 *Dynamique non-linéaire des rotors fissurés*. Nous pouvons en effet observer que la présence d’une fissure sur un rotor entraîne une augmentation des amplitudes des différents ordres $n\times$ aux passages des résonances sous critiques associées (pour $n=2,3$ ou 4 dans notre cas). De plus, les contributions des ordres $n\times$ (pour $n > 2$) apparaissent au passage de la première vitesse critique (figure 7.5(b)). Ces recherches mériteraient donc maintenant d’être poursuivies pour statuer sur l’ensemble des critères et indicateurs qui ont été proposés dans le chapitre 5.

Bibliographie

- [1] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2004. “Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation”. *Archives of Computational Methods in Engineering : State of the Art Reviews*, **11(3)**, pp. 257–344.
- [2] Sinou, J.-J., Dereure, O., Mazet, G.-B., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2006. “Friction induced vibration for an aircraft brake system. part i : experimental approach and stability analysis”. *International Journal of Mechanical Sciences*, **48(2006)**, pp. 536–554.
- [3] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2003. “Analysis of friction and instability by the center manifold theory for a non-linear sprag-slip model”. *Journal of Sound and Vibration*, **265(3)**, pp. 527–559.
- [4] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2004. “Application of a nonlinear modal instability approach to brake systems”. *Journal of Vibration and Acoustics*, **126(1)**, pp. 101–107.
- [5] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2004. “Stability and non-linear analysis of a complex rotor/stator contact”. *Revue Européenne des Eléments Finis*, **278(4-5)**, pp. 1095–1129.
- [6] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2003. “Center manifold and multivariable approximants applied to non-linear stability analysis”. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **38(9)**, pp. 1421–1442.
- [7] Marsden, J., and McCracken, M., 1976. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. New-York : Springer-verlag.
- [8] Nayfeh, A., and Mook, D., 1995. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons.
- [9] Holmes, P., and Guckenheimer, J., 1986. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag.
- [10] Carr, J., 1981. *Application of Center Manifold*. Spriner-Verlag, New-York.
- [11] Baker, G., and Graves-Morris, P., 1996. *Padé Approximants*. Cambridge university Press.
- [12] Jones, R. H., 1976. “General rational approximants in n-variables”. *J. Approx. Theory*, **7(6)**, pp. 201–233.
- [13] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2003. “Extension of the center manifold approach, using the rational fractional approximants applied to non-linear stability analysis”. *Journal of Nonlinear Dynamics*, **33**, pp. 267–282.

- [14] Jones, R. H., and Makinson, G., 1974. "The generation of chisholm rational approximants to power series in two variables". *J. Inst. Math. Appl. Approx. Theory*, **13**, pp. 299–310.
- [15] Sinou, J.-J., Thouverez, F., Jézéquel, L., Dereure, O., and Mazet, G.-B., 2006. "Friction induced vibration for an aircraft brake system. part ii : non-linear dynamics". *International Journal of Mechanical Sciences*, **48(2006)**, pp. 555–567.
- [16] Villa, C., Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2005. "The invariant manifold approach applied to non-linear dynamics of a rotor-bearing system". *Journal of European Mechanics - A/Solids*, **24**, pp. 676–689.
- [17] Nayfeh, A., and Balachandran, B., 1995. *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational and experimental methods*. John Wiley and Sons.
- [18] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2006. "Stability analysis and non-linear behaviour of structural systems using the complex non-linear modal analysis". *Computers and Structures*, **84**, p. 1891–1905.
- [19] Caughey, T., 1963. "Equivalent linearization techniques". *The Journal of the Acoustical Society of America*, **35**, pp. 1706–1711.
- [20] Iwan, W., 1973. "A generalization of the concept of equivalent Linearization". *International Journal of Non-linear mechanics*, **8**, pp. 279–287.
- [21] Cameron, T. M., and Griffin, J. H., 1989. "An alternating frequency time domain method for calculating the steady state response of nonlinear dynamic systems". *ASME Journal of Applied Mechanics*, **56**, pp. 149–154.
- [22] Fritz, G., Sinou, J.-J., Duffal, J.-M., and Jézéquel, L., 2007. "Parameter analysis of brake squeal using finite element method". *European Journal of Numerical Mechanics*, **16(1)**, pp. 11–32.
- [23] Lignon, S., Sinou, J.-J., and Jézéquel, L., 2006. "Stability analysis and mu-synthesis control of brake systems". *Journal of Sound and Vibration*, **298**, pp. 1073–1087.
- [24] Sinou, J.-J., and Jézéquel, L., 2007. "Mode coupling instability in friction induced vibrations and its dependency on system parameters including damping". *Journal of European Mechanics - A/Solids*, **26(1)**, pp. 106–122.
- [25] Sinou, J.-J., and Jézéquel, L., 2007. "On the stabilizing and destabilizing effects of damping in non-conservative pin-disc system". *Acta Mechanica*, **In press**, pp. 1–10.
- [26] Hoffmann, N., and Gaul, L., 2003. "Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations". *ZAMM · Z. Angew. Math. Mech.*, **83(8)**, pp. 524–534.
- [27] Sinou, J.-J., Fritz, G., and Jézéquel, L., 2007. "The role of damping and definition of the robust damping factor (rd-factor) for a self-exciting mechanism with constant friction". *Journal of Vibration and Acoustics*, **129(3)**, pp. 297–306.
- [28] Kirillov, O. N., 2004. "Destabilization paradox". *Doklady Physics*, **49(4)**, pp. 239–245.
- [29] Hervé, B., Sinou, J.-J., Mahé, H., and Jézéquel, L., 2008. "Analysis of squeal noise in clutches and mode coupling instabilities including damping and gyroscopic effects". *Journal of European Mechanics - A/Solids*, **27(2)**, pp. 141–160.

- [30] Chevillot, F., Sinou, J.-J., Mazet, G.-B., Hardouin, N., and Jézéquel, L., 2007. “The destabilization paradox applied to friction-induced vibrations in an aircraft braking system”. *Archive of Applied Mechanics*, **In press**, pp. 1–15.
- [31] Fritz, G., Sinou, J.-J., Duffal, J.-M., and Jézéquel, L., 2007. “Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal”. *Journal of Sound and Vibration*, **307(3-5)**, pp. 591–609.
- [32] Sinou, J.-J., and Jézéquel, L., 2007. “The influence of damping on the limit cycles for a self-exciting mechanism”. *Journal of Sound and Vibration*, **304(3-5)**, pp. 875–893.
- [33] Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2004. “Non-linear dynamic of rotor-stator system with non-linear bearing”. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Mécanique*, **332(9)**, pp. 955–962.
- [34] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jézéquel, L., 2004. “Dynamique non-linéaire d’un ensemble rotor/stator comportant des mécanismes non-linéaires avec jeu”. *Revue Européenne des Eléments Finis*, **13**, pp. 737–750.
- [35] Villa, C., Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2007. “Investigation of a rotor-bearing system with bearing clearances and hertz contact by using an harmonic balance method”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **29(1)**, pp. 14–20.
- [36] Villa, C., Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2008. “Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system”. *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulations*, **13(4)**, pp. 804–821.
- [37] Cardona, A., Lerusse, A., and Géradin, M., 1998. “Fast fourier nonlinear vibration analysis”. *Computational Mechanics*, **22**, pp. 128–142.
- [38] Hanh, E. J., and Chen, P. Y., 1994. “Harmonic balance analysis of general squeeze film damped multidegree-of-freedom rotor bearing systems”. *Journal of Tribology*, **116**, pp. 499–507.
- [39] Groll, G., and Ewins, D., 2001. “The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems”. *Journal of Sound and Vibration*, **241(2)**, pp. 223–233.
- [40] Lalanne, M., and Ferraris, G., 1990. *Rotordynamics Prediction in Engineering*, 2 ed. John Wiley and Sons.
- [41] Harsha, S. P., Sandeep, K., and Prakash, R., 2004. “Non-linear dynamic behaviors of rolling element bearings due to surface waviness”. *Journal of Sound and Vibration*, **272**, pp. 557–580.
- [42] Tiwari, M., Gupta, K., and Prakash, O., 2000. “Effect of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor”. *Journal of Sound and Vibration*, **238(5)**, pp. 723–756.
- [43] Dilena, M., and Morassi, A., 2004. “The use of antiresonances for crack detection in beams”. *Journal of Sound and Vibration*, **276**, pp. 195–214.
- [44] Morassi, A., 2001. “Identification of a crack on a rod based on changes in a pair of natural frequencies”. *Journal of Sound and Vibration*, **242(4)**, pp. 577–596.
- [45] Swamidass, A., Yang, X., and Seshadri, R., 2004. “Identification of cracking in beam structures using Timoshenko and Euler formulations”. *Journal of Engineering Mechanics*, **130(11)**, pp. 1297–1308.

- [46] Owolabi, G., Swamidass, A., and Seshadri, R., 2003. “Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions”. *Journal of Sound and Vibration*, **265**, pp. 1–22.
- [47] Salawu, O., 1998. “Detection of structural damage through changes in frequencies : a review”. *Engineering Structures*, **19(9)**, p. 718–723.
- [48] Sinou, J.-J., 2007. “A robust identification of single crack location and size only based on pulsations of the cracked system”. *Structural Engineering and Mechanics*, **25(6)**, pp. 691–716.
- [49] Sinou, J.-J., 2007. “Damage assessment based on the frequencies’ ratio surfaces intersection method for the identification of the crack depth, location and orientation”. *Structural Durability and Health Monitoring*, **3(3)**, pp. 133–164.
- [50] Zhu, C., Robb, D., and Ewins, D., 2003. “The dynamics of a cracked rotor with an active magnetic bearing”. *Journal of Sound and Vibration*, **265**, p. 469–487.
- [51] Sekhar, A., and Prabhu, B., 1998. “Condition monitoring of cracked rotors through transient response”. *Mechanism and Machine Theory*, **33 (8)**, p. 1167–1175.
- [52] Friswell, M., and Penny, J., 2002. “Crack modelling for structural health monitoring”. *International Journal of Structural Health Monitoring*, **1 (2)**, p. 139–148.
- [53] Wauer, J., 1990. “Modelling and formulation of equations for cracked rotating shafts”. *Int. J. Solids Structures*, **26 (8)**, p. 901–914.
- [54] Darpe, A., Chawla, A., and Gupta, K., 2002. “Analysis of the response of a cracked jeffcott rotor to axial excitation”. *Journal of Sound and Vibration*, **249(3)**, p. 429–445.
- [55] Bachschmid, N., Pennacchi, P., Tanzi, E., and Vania, A., 2000. “Identification of transverse crack position and depth in rotor systems”. *Meccanica*, **35(6)**, pp. 563–582.
- [56] Sinou, J.-J., and Lees, A. W., 2005. “Influence of cracks in rotating shafts”. *Journal of Sound and Vibration*, **285(4-5)**, pp. 1015–1037.
- [57] Sinou, J.-J., and Lees, A. W., 2007. “A non-linear study of a cracked rotor”. *European Journal of Mechanics A/Solids*, **26(1)**, pp. 152–170.
- [58] Gómez-Mancilla, J., Sinou, J.-J., Nosov, V. R., Thouverez, F., and Zambrano, A., 2004. “The influence of crack-imbalance orientation and orbital evolution for an extended cracked jeffcott rotor”. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Mécanique*, **332(12)**, pp. 955–962.
- [59] Sinou, J.-J., 2007. “Effects of a crack on the stability of a non-linear rotor”. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, **42(7)**, pp. 959–972.
- [60] Sinou, J.-J., 2007. “Detection of cracks in rotor based on the 2x and 3x super-harmonic components and the crack-unbalance interactions”. *Communications in Non-linear Science and Numerical Simulation*, **In press**, pp. 1–24.
- [61] Davies, W. G. R., and Mayes, I. W., 1984. “The vibrational behaviour of a multi-shaft, multi-bearing system in the presence of a propagating transverse crack”. *Transactions of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **106**, pp. 146–153.

- [62] Mayes, I. W., and Davies, W. G. R., 1984. “Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor”. *Transactions of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, **106**, pp. 139–145.
- [63] Sinou, J.-J., 2004. “Etudes expérimentales et numériques des passages de modes d’arbre”. *Rapport contractuel ECL-SNECMA 2004-JJS-0331*, pp. 1–123.
- [64] Sinou, J.-J., Villa, C., and Thouverez, F., 2005. “Experimental and numerical investigations of a flexible rotor on flexible bearing supports”. *International Journal of Rotating Machinery*, **3**, pp. 179–189.
- [65] Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2006. “Experimental study of a flexible rotor and its dependency on the rolling-bearing temperature”. *International Journal of Rotating Machinery*, pp. ID 38595, 1–8.
- [66] Sinou, J.-J., Villa, C., Thouverez, F., and Massenzio, M., 2006. “Experimental analysis of the dynamical response of a flexible rotor including the effects of external damping”. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, **1(4)**, pp. 483–490.
- [67] Sinou, J.-J., 2005. “Réception du banc bi-rotor”. *Rapport contractuel ECL-SNECMA 2005-JJS-0401*, pp. 1–67.
- [68] Guskov, M., Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Naraikine, O., 2007. “Experimental and numerical investigations of a coaxial dual shaft test rig”. *International Journal of Rotating Machinery*, pp. ID 75762, 1–12.
- [69] Lees, A. W., Sinha, J. K., and Friswell, M. I., 2004. “The identification of the unbalance of a flexible rotating machine from a single run-down”. *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **126(2)**, p. 416–421.
- [70] Sinha, J. K., Lees, A. W., and Friswell, M. I., 2004. “Estimating unbalance and misalignment of a flexible rotating machine from a single run-down”. *Journal of Sound and Vibration*, **272(3-5)**, p. 967–989.
- [71] Bachschmid, N., Pennacchi, P., and Vania, A., 2002. “Identification of multiple faults in rotor systems”. *Journal of Sound and Vibration*, **254(2)**, p. 327–366.
- [72] Kim, Y. B., and Choi, S. K., 1997. “A multiple harmonic balance method for the resonant vibration of a non-linear jeffcott rotor”. *Journal of Sound and Vibration*, **208(5)**, pp. 745–761.
- [73] Ren, Y., 1995. “The receptance-based perturbative multi-harmonic balance method for the calculation of the aperiodic steady state response of non-linear systems”. *Journal of Sound and Vibration*, **181(2)**, pp. 331–339.
- [74] Ren, Y., 1994. “A new receptance-based perturbative multi-harmonic balance method for the calculation of the steady state response of non-linear systems”. *Journal of Sound and Vibration*, **172(5)**, pp. 593–604.
- [75] Legrand, M., Roques, S., Pierre, C., Peseux, B., and Cartraud, P., 2006. “N-dimensional harmonic balance method extended to non-explicit nonlinearities”. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, **15(1-3)**, pp. 269–280.

- [76] Fritz, G., 2007. *Phénomènes de crissement dans les freins automobiles*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [77] Dessombz, O., 2000. *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [78] Dessombz, O., Thouverez, F., Lainé, J. P., and Jézéquel, L., 2001. “Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite elements methods”. *Journal of Sound and Vibration*, **239(5)**, pp. 949–968.
- [79] Lignon, S., 2006. *Approche robuste du risque sismique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [80] Bachschmid, N., Pennacchi, P., and Vania, A., 2002. “Identification of multiple faults in rotor systems”. *Journal of Sound and Vibration*, **254(2)**, p. 327–366.
- [81] Pennacchi, P., and Vania, A., 2005. “Diagnosis and model based identification of a coupling misalignment”. *Shock and Vibration Digest*, **12(4)**, pp. 293–308.
- [82] Edwards, S., Lees, A. W., and Friswell, M. I., 2000. “Experimental identification of excitation and support parameters of a flexible rotor-bearings-foundation system from a single rundown”. *Journal of Sound and Vibration*, **232(5)**, p. 963–992.
- [83] Sinha, J. K., Lees, A. W., and Friswell, M. I., 2004. “Estimating unbalance and misalignment of a flexible rotating machine from a single run-down”. *Journal of Sound and Vibration*, **272(3-5)**, p. 967–989.
- [84] Sinha, J. K., Friswell, M. I., and Lees, A. W., 2002. “The identification of the unbalance and the foundation model of a flexible rotating machine from a single run-down”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **16(2-3)**, p. 255–271.
- [85] Tiwari, R., Lees, A., and Friswell, M. I., 2004. “Identification of dynamic bearing parameters : a review”. *The Shock and Vibration Digest*, **36(2)**, p. 99–124.
- [86] Lesaffre, N., Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2007. “Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure”. *Journal of Sound and Vibration*, **299**, pp. 1005–1032.
- [87] Lesaffre, N., Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2005. “Stability analysis of a flexible bladed-rotor”. *Key Engineering Materials*, **292-294**, pp. 409–416.
- [88] Lesaffre, N., Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2006. “Model and stability analysis of a flexible bladed rotor”. *International Journal of Rotating Machinery*, **ID 63756**, pp. 1–6.
- [89] Lesaffre, N., Sinou, J.-J., and Thouverez, F., 2007. “Stability and contact analysis of a flexible bladed-rotor”. *Journal of European Mechanics - A/Solids*, **26(3)**, pp. 541–557.
- [90] Rosenberg, R., 1966. “On non-linear vibrations of systems with many degree of freedom”. *Advances in Applied Mechanics*, **9**, pp. 155–242.
- [91] Shaw, S. W., and Pierre, C., 1994. “Normal modes for non-linear continuous systems”. *Journal of Sound and Vibration*, **169(3)**, pp. 319–347.
- [92] Shaw, S. W., and Pierre, C., 1993. “Normal modes for non-linear vibratory systems”. *Journal of Sound and Vibration*, **164(3)**, pp. 85–124.

-
- [93] Guskov, M., 2007. *Dynamique non-linéaire des systèmes multi-rotors*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [94] Penny, J., and Friswell, M., 2003. “Simplified modelling of rotor cracks”. *Key Engineering Materials*, **245**, p. 223–232.
- [95] Ladevèze, P., 1993. *Erreur en relation de comportement en dynamique : théorie et application au recalage de modèles de structures*. Rapport interne LMT - 150.
- [96] Ewins, D., 2000. *Modal Testing—Theory, Practice and Application*. 2nd ed. Research Studies Press, UK.
- [97] Montalvao, D., Maia, N., and Ribeiro, A., 2006. “A review of vibration-based structural health monitoring with special emphasis on composite materials”. *The Shock and Vibration Digest*, **38(4)**, pp. 1–30.
- [98] Doebling, S., Farrar, C., and Prime, M., 1998. “A summary review of vibration based damage identification methods”. *Shock and Vibration Digest*, **30(2)**, p. 91–105.
- [99] Sohn, H., Farrar, C., Hemez, F., Shunk, D., Stinemates, D., and Nadler, B., 2003. *A Review of Structural Health Monitoring Literature : 1996-2001*. Technical Report LA-13976-MS, Los Alamos National Laboratory Report.
- [100] Pugno, N., Surace, C., and Ruotolo, R., 2000. “Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing cracks”. *Journal of Sound and Vibration*, **235 (5)**, p. 749–762.

Table des figures

2.1	Frein automobile	14
2.2	Frein aéronautique	14
2.3	Stabilité des systèmes dynamiques non-linéaires frottants (a) Evolution des parties réelles et imaginaires (b) Evolution des valeurs propres dans le plan complexe	15
2.4	Définition des régions pour l'estimation des approximants	21
2.5	Cycles limites par variété centrale et approximants multi-variables dans une configuration "proche" du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.001\mu_0$)	23
2.6	Cycles limites par variété centrale et approximants multi-variables dans une configuration "loin" du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.01\mu_0$)	24
2.7	Cycles limites par la méthode des modes non-linéaires complexes dans la configuration "proche" du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.001\mu_0$)	25
2.8	Evolution des parties réelles et imaginaires du mode non-linéaire complexe instable dans le cas de la configuration "proche" du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.001\mu_0$)	26
2.9	Cycles limites par la méthode des modes non-linéaires complexes dans la configuration "loin" du point de bifurcation de Hopf ($\mu = 1.1\mu_0$)	27
2.10	Stabilité du système	28
2.11	Evolution de la partie réelle du mode non-linéaire complexe instable et d'un cycle limite associé en fonction du coefficient de frottement	28
2.12	Cycles limites par la méthode de la balance harmonique sous contraintes pour une configuration "proche" du point de bifurcation de Hopf avec $\mu = 1.001\mu_0$ (– intégration temporelle, –– méthode de la balance harmonique sous contraintes)	31
2.13	Cycles limites par la méthode de la balance harmonique sous contraintes pour une configuration "loin" du point de bifurcation de Hopf avec $\mu = 1.2\mu_0$ (– intégration temporelle, –– méthode de la balance harmonique sous contraintes)	32
3.1	Evolutions des parties réelles et fréquences dans le cas iso-amorti et non iso-amorti pour $\alpha = 1.2$ (a-b) – non amorti, – – $\xi = 0.02$, –. – $\xi = 0.04$; (c-d) $\alpha\beta = 1.5$ – non amorti, – – $\xi(1 + \alpha\beta) = 0.04$, –. – $\xi(1 + \alpha\beta) = 0.08$	38
3.2	Evolution des frontières de stabilité et comparaison entre l'optimum de stabilité et le cas iso-amorti (a) – non amortie, –– amortie avec $\alpha = 1.5$ et $\beta = 0.4$	39

3.3	Evolution des parties réelles et fréquences des modes stable et instable avec le phénomène de saut de fréquence instable (pour $\alpha = 1.5$ et $\beta = 0.4$)	40
3.4	Effets des termes gyroscopique et circulatoire pour le système non-amorti	41
3.5	Stabilité et frontières associées du système en fonction des termes gyroscopique, circulatoire et (a-b) cas iso-amorti, (c-d) cas non iso-amorti $\alpha\beta > 1$, (e-f) cas non iso-amorti $\alpha\beta < 1$ (rouge=fréquence basse, vert=fréquence haute)	43
3.6	Modèle éléments finis du frein automobile et stabilité associée du système non amorti	47
3.7	Déformées des modes de coalescence (a-b) avant couplage ($\mu = 0$) (c) mode couplé ($\mu = 2.5$, déphasage $\phi = 0rad.$)	47
3.8	Effets "lissant" et "abaissant" de l'amortissement (a-b) cas iso-amorti (rouge : non amorti, vert : $d_1 = d_2 = 0.02$, bleu : $d_1 = d_2 = 0.04$), (c-d) cas non iso-amorti (rouge : non amorti, vert : $\frac{d_1+d_2}{2} = 0.02$, bleu : $\frac{d_1+d_2}{2} = 0.04$)	48
3.9	Rôle de l'amortissement sur la stabilité du système et le changement de mode instable - illustration du paradoxe de l'amortissement	49
3.10	Evolution des participations modales (a) non amorties (b) $d_1 = 0, d_2 = 50$ (c) $d_1 = 50, d_2 = 25$	50
3.11	Illustration de l'indicateur <i>RD-Factor</i>	52
3.12	Evolutions du déplacement et de la vitesse dans le cas iso-amorti	53
3.13	Evolutions du déplacement et de la vitesse dans le cas non iso-amorti	53
3.14	Temps d'atteinte du cycle limite en fonction de l'amortissement	55
4.1	Description du rotor avec l'élément non-linéaire de roulement	66
4.2	Modèle de roulement	67
4.3	Réponse dynamique non-linéaire du rotor (CP=Composite Power) et évolution des ordres n au niveau (a-b) du roulement non-linéaire (c-d) extrapolation sur les éléments linéaires	70
4.4	Réponse dynamique non-linéaire (CP=Composite Power) et évolution des ordres n pour $m_u = 4g$ - Phénomène de saut (a) roulement non-linéaire (b) extrapolation sur les éléments linéaires	71
4.5	Evolution des orbites (a,c,d,e) au niveau du disque (f,g,i,k) extrémité gauche (b,h,i,j) au milieu du rotor	72
4.6	Evolution des orbites du rotor et de supports stator pour différentes vitesses de rotation (rouge=éléments non-linéaires, noir=éléments linéaires)	73
4.7	Evolution du contact au niveau du roulement non-linéaire	75
4.8	Evolution des orbites et contact au niveau du roulement non-linéaire $\Omega = 520rpm$	76
4.9	Estimation de la stabilité des solutions périodiques et influence de la discrétisation de la solution périodique (noir=6 harmoniques, bleu=4 harmoniques, rouge=3 harmoniques, magenta=2 harmoniques)	77
5.1	Modèle du rotor fissuré et du mécanisme de fissure tournante	81

5.2	Réponses dynamiques du rotor sain puis fissuré avec un balourd situé à $0.1m$ et une fissure à $L_{crack} = 0.175m$ et $\mu = 1$	88
5.3	Effets de la position et profondeur de la fissure sur les ordres $2\times$ et $3\times$ (paramètre associé à la taille de fissure – $\mu = 1$, – – $\mu = 0.75$, – . – $\mu = 0.5$, ... $\mu = 0.25$ avec une fissure positionnée à $L_{crack} = 0.175m$, paramètre associé à la position de fissure – $L_{crack} = 0.075m$, – – $L_{crack} = 0.125m$, – . – $L_{crack} = 0.175m$, ... $L_{crack} = 0.225m$ avec une profondeur de fissure $\mu = 1$)	89
5.4	Evolution des vitesses critiques du rotor en fonction de la taille et position de la fissure	90
5.5	Evolution des amplitudes du rotor à la résonance de la première vitesse critique en fonction de la taille et position de la fissure	91
5.6	Evolution des amplitudes du rotor à la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la première vitesse critique en fonction de la taille et position de la fissure	91
5.7	Evolution des orbites du rotor au passage de résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la première vitesse critique (pour une fissure de profondeur $\mu = 1$ et située à $L_{crack} = 0.225m$) . .	93
5.8	Influence de la taille de la fissure sur les boucles des orbites du rotor (paramètres de fissure $\mu = 1$ et $L_{crack} = 0.225m$)	94
5.9	Orbites au passage de la résonance sous-critique $\frac{1}{3}$ de la première vitesse critique et de la résonance sous-critique $\frac{1}{2}$ de la seconde vitesse critique (paramètres de fissure $L_{crack} = 0.175m$ et $\mu = 1$)	94
5.10	Influence du balourd et de l'amortissement structural sur les orbites et amplitudes au passage de la résonance sous-critique $2\times$ pour $\mu = 1$	96
5.11	Influence du déphasage entre le balourd et le front de fissure au passage de la résonance sous-critique $2\times$ pour différents types de balourd	97
5.12	Evolution des ordres $2\times$ et $3\times$ (– fort balourd, – – moyen balourd)	98
5.13	Zones d'instabilité (au noeud situé à $0.1m$ de l'extrémité gauche du rotor) et évolution de la partie réelle maximale des valeurs propres associées (– balourd à $0.25m$, $L_{crack} = 0.175m$ et $\mu = 1$; – – balourd à $0.1m$, $L_{crack} = 0.175m$ et $\mu = 1$)	99
5.14	Influence de la position de la fissure sur la stabilité pour $\mu = 1$ (– $L_{crack} = 0.075m$, – – $L_{crack} = 0.125m$, – . – $L_{crack} = 0.175m$, ... $L_{crack} = 0.225m$)	100
5.15	Influence de la taille de la fissure sur la stabilité pour $L_{crack} = 0.225m$ (– $\mu = 0.25$, – – $\mu = 0.5$, – . – $\mu = 0.75$, ... $\mu = 1$)	101
6.1	Banc Dynamique D'ensemble : <i>mono-rotor DDE</i>	105
6.2	Evolution des ordres (rouge = ordre 2; noir = ordre 1) et des orbites (noir = direct $1\times$; bleu = rétrograde $1\times$; rouge = direct $2\times$)	106
6.3	Diagramme de Campbell pour les trois configurations et mise en évidence de la dissymétrie tournante (noir = ordre $1\times$, rouge = ordre $2\times$, traits pleins = essais expérimentaux, traits en pointillés = calculs numériques	107
6.4	Banc Dynamique D'ensemble : <i>bi-rotor DDE</i>	109
6.5	Evolutions des ordres $1\times$ et $2\times$, comparaison au diagramme de Campbell numérique en co-rotation (noir = ordre $1\times$, rouge = ordre $2\times$, bleu = réponse globale)	112

6.6	Orbites typiques au passage des résonances $2\times$ (Configuration co-rotation)	113
6.7	Orbites à modulation combinée (Configuration co-rotation)	113
6.8	Campbells expérimentaux des ordres en précessions $\omega_{rotorBP}$ et $\omega_{rotorHP}$ (Configuration co-rotation)	114
6.9	Evolutions des ordres $1\times$ et $2\times$, comparaison au diagramme de Campbell numérique en contra-rotation (noir = ordre $1\times$, rouge = ordre $2\times$, bleu = réponse globale)	116
6.10	Campbells expérimentaux des ordres en précessions $\omega_{rotorBP}$ et $\omega_{rotorHP}$ (Configuration contra-rotation)	117
6.11	Orbites typiques aux passages de pics d'ordre $1\times$ et/ou $2\times$ selon les précessions HP et/ou BP (Configuration contra-rotation)	117
6.12	Orbites complexes à modulation pour $\omega_{rotorBP} = 1760rpm$ et $\omega_{rotorHP} = 5100rpm$ (Configuration contra-rotation)	118
7.1	Illustrations de la nécessité de la prise en compte des critères du <i>temps d'atteinte des cycles limites</i> et des <i>amplitudes vibratoires maximales transitoires</i>	126
7.2	Influence de la prise en compte des jeux entre pièces	127
7.3	Comparaison des modèles complet et simplifié pour la coalescence de modes	128
7.4	Stabilité d'un système tournant avec frottement et analyse non linéaire par la méthode des invariants d'un rotor non-linéaire (a) Smi = mode du i^{eme} masse-ressort, B =mode rétrograde de l'anneau, F =mode direct de l'anneau	131
7.5	Détections expérimentales de la présence d'une fissure ouverte par suivi des ordres $n\times$ aux résonances sous-critiques et au passage de la première vitesse critique ($2500 - 3000rpm$)	135

Liste des tableaux

4.1	Propriétés géométriques et physiques du modèle de roulement	67
4.2	Description des paramètres du rotor	68
5.1	Paramètres physiques du rotor	83
6.1	Vitesses critiques associées au rotor <i>BP</i>	111
6.2	Vitesses critiques associées au rotor <i>HP</i>	111