



**HAL**  
open science

# Transport de chaleur électronique dans un tokamak par simulation numérique directe d'une turbulence de petite échelle

Benoit Labit

► **To cite this version:**

Benoit Labit. Transport de chaleur électronique dans un tokamak par simulation numérique directe d'une turbulence de petite échelle. Modélisation et simulation. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2002. Français. NNT: . tel-00261562

**HAL Id: tel-00261562**

**<https://theses.hal.science/tel-00261562>**

Submitted on 7 Mar 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Transport de chaleur électronique dans un tokamak par simulation numérique directe d'une turbulence de petite échelle

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 24 octobre 2002

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Provence**

(mention Sciences)

par

LABIT Benoît

### Composition du jury:

*Président :* Yves Elskens, *Professeur*

*Université de Provence*

*Rapporteurs :* Laurent Villard, *Maître en Enseignement*

*École Polytechnique Fédérale de Lausanne*

Giovanni Manfredi, *Chargé de Recherches CNRS*

*Université Henri Poincaré Nancy I*

*Examineurs :* Jean Jacquinot, *Chef du Département de Recherches sur la Fusion Contrôlée*  
*CEA Cadarache*

Dominique Escande, *Directeur de thèse*

*CNRS-Université de Provence*

Maurizio Ottaviani, *Responsable de thèse*

*CEA Cadarache*

Mis en page avec la classe thloria.

*A mes parents,*

*On n'est sûr de ne jamais faire que ce  
que l'on est incapable de comprendre.  
Comprendre, c'est se sentir capable  
de faire.*

*André Gide - Les nourritures ter-  
restres, p.24, Folio n° 117*



## Remerciements

Je remercie Jean Jacquinot, chef du Département de Recherches sur la Fusion Contrôlée, de m'avoir accueilli au sein de ce laboratoire du Commissariat à l'Energie Atomique de Cadarache. J'y ajoute toute ma gratitude pour sa participation au jury de thèse.

Durant mes années de thèse, j'ai pu bénéficier de très bonnes conditions de travail. Que Bernard Saoutic, chef du Service Chauffage et Confinement du Plasma, Clément Laviron, chef-adjoint et Mmes Audisio et Deprez, secrétaires de ce service, en soient remerciés.

J'ai rencontré Maurizio Ottaviani lors de mon stage de DEA. Il m'a ensuite proposé un sujet de thèse peut-être trop ambitieux mais tout de même fort attrayant. Maurizio étant un «théoricien», il me fut parfois difficile de comprendre tous ses concepts et digressions orales ! Au-delà de cette boutade, je lui suis infiniment reconnaissant de sa disponibilité quotidienne pour toutes sortes de questions, de m'avoir obligé à respecter les échéances importantes et d'avoir facilité mon intégration au sein du DRFC mais aussi auprès de la communauté fusion.

Dominique Escande de l'Université de Provence a accepté d'être mon directeur de thèse. Qu'il en soit remercié. Je voudrais également remercier Giovanni Manfredi de l'Université de Nancy et Laurent Villard de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que Yves Elskens pour sa participation au jury de soutenance. Leur lecture rigoureuse de ce manuscrit me fût d'une grande utilité pour son amélioration. Je leur en suis reconnaissant.

Je remercie la Région Provence-Alpes-Côte-d'Azur pour sa participation au financement de cette thèse ainsi que la société CS en tant que partenaire scientifique de notre projet.

Les qualités scientifiques de Xavier Garbet sont établies depuis longtemps. Il a su au cours de ma première année de thèse m'apprendre les bases de la fusion thermonucléaire, de la turbulence,... et il a suivi attentivement mes progrès. Mais au-delà de cet encadrement, je voudrais rendre hommage aux qualités humaines de Xavier. Nos longues discussions «du bus du soir» ont entraîné des confrontations d'idées politiques, d'avis culturels mais aussi permis d'exorciser mes périodes de doutes. Je le remercie chaleureusement pour son soutien.

Débuter la journée autour d'un café est une institution pour les groupes de théorie du DRFC. Et être autorisé à préparer ce rendez-vous est, me semble-t-il, un signe d'intégration réussie. J'ai donc été très heureux, durant presque trois ans, de convier à ce moment de détente la plupart de mes collègues théoriciens : Guido H., Marina B., Patrick M., Virginie G., Maxime Z., Emmanuelle T., Gloria F., et de discuter de sujets allant de la fusion au bricolage en passant par la politique. Je voudrais particulièrement remercier deux personnes de ces groupes de théorie : Yanick Sarazin pour, entre autres, ses conseils lors de la préparation de la soutenance et Philippe Ghendrih pour son soutien, certes inattendu mais tellement encourageant, en fin de thèse.

Le Département s'est toujours attaché à assurer la formation de jeunes docteurs. La présence au sein d'un même laboratoire de collègues thésards est une source d'émulation fructueuse. Je remercie particulièrement Renaud Dejarnac mais aussi Gabriel R., Manu F., Guillaume A., Clarisse B., Rémi D., Arnaud C., Caroline C., Elise D., Yann C., Vincent W. et Guillaume T.

Il ne me fut pas aisé d'expliquer à mes parents pourquoi je voulais faire de la physique et pourquoi je devais partir "si loin" à Marseille continuer mes études. Néanmoins, ils m'ont toujours assuré de leur confiance et de leur soutien. Je leur en suis extrêmement reconnaissant. Cette thèse leur est dédiée.

Je voudrais également associer à ces remerciements mes frères Martial et Lionel, ma belle-sœur Lætitia, ma nièce Cyrielle, mais aussi Marie-Hélène et David, Claudie et Pierre, Annie et Jacques, ainsi que tous les membres de ma famille qui ont toujours montré un intérêt sincère pour mon travail.

J'ai toujours eu un très grand plaisir à retrouver la Ville rose, où j'ai effectué la plupart de mes études. Je remercie mes amis, Mika, Julie, Nordine, Jérôme, Fabien, Fabulous et Mitch pour tous nos souvenirs communs. Je remercie tous mes potes de la Secoland Story de Marseille, ceux du café PMU à Réquista, ceux du Valence Olympique Football. Ce fût un réel plaisir de partager un verre avec eux, jusqu'à plus d'heure.

Enfin, je remercie du fond du cœur ma petite amie, Corinne J., rencontrée par hasard, autour d'un verre de sangria, en début de thèse. Elle m'a supporté et encouragé sans retenue. Elle est restée constamment à mon écoute durant mes périodes de doute. Elle sait combien cette thèse est aussi un peu la sienne.

# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Quelques généralités sur la fusion</b>	<b>5</b>
1.1 La fusion : une nouvelle source d'énergie . . . . .	5
1.1.1 Les réactions de fusion . . . . .	5
1.1.2 Les conditions nécessaires . . . . .	7
1.1.3 Les moyens . . . . .	9
1.1.4 La filière tokamak . . . . .	9
1.2 Analyse du confinement de l'énergie . . . . .	11
1.3 Cadre de la thèse . . . . .	13
<b>2 Modèle de turbulence fluide pour l'instabilité ETG</b>	<b>19</b>
2.1 Instabilité d'échange . . . . .	19
2.2 L'équation de Vlasov - Approche cinétique . . . . .	22
2.3 Les équations de transport dans un plasma - Approche fluide . . . . .	23
2.4 La réponse ionique et électroneutralité . . . . .	24
2.5 Le modèle ETG non linéaire . . . . .	25
<b>3 Présentation du code ETAE3D</b>	<b>27</b>
3.1 Géométrie du code . . . . .	27
3.2 Avancement temporel . . . . .	31
3.3 Inversion du Laplacien . . . . .	32
3.4 Traitement de l'hyper-diffusion . . . . .	35
3.5 Crochets de Poisson . . . . .	38
3.6 Courbure . . . . .	38



3.7	Transport Parallèle . . . . .	40
3.8	Validation du code : conservation de l'énergie et des invariants non linéaires . .	42
3.8.1	Equation du transport de la chaleur . . . . .	42
3.8.2	Invariants non linéaires . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Etude linéaire de l'instabilité d'échange ETG</b>	<b>47</b>
4.1	Cas le plus simple : Approximation locale . . . . .	49
4.2	Etude linéaire avec le code . . . . .	51
4.3	Etude paramétrique linéaire . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Dépendance paramétrique du transport de chaleur</b>	<b>57</b>
5.1	Étude du transport de la chaleur en fonction de $\beta$ . . . . .	61
5.1.1	Simulation électrostatique . . . . .	71
5.1.2	Simulations à fort flux injecté . . . . .	74
5.2	Rôle du paramètre $\rho_*$ dans le transport de la chaleur . . . . .	78
5.3	Autres dépendances paramétriques . . . . .	81
5.3.1	Effet du cisaillement magnétique . . . . .	82
5.3.2	Effet de l'inverse du rapport d'aspect . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Confrontation avec l'expérience</b>	<b>89</b>
6.1	Résultats expérimentaux . . . . .	89
6.2	Simulation . . . . .	91
6.3	Interprétation . . . . .	94
	<b>Conclusion</b>	<b>97</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>101</b>
	<b>Annexes</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Eléments de construction du modèle ETG</b>	<b>105</b>
<b>B</b>	<b>De l'origine du terme de courbure dans la loi d'Ohm généralisée</b>	<b>111</b>
<b>C</b>	<b>Approximation de ballonnement dans l'étude linéaire</b>	<b>115</b>
<b>D</b>	<b>Conférences - Séminaires - Publications</b>	<b>117</b>

# Table des figures

1.1	Energie de liaison par nucléon des noyaux en fonction de la masse atomique. . . . .	6
1.2	Section efficace des principales réactions de fusion envisagées. . . . .	7
1.3	Structure magnétique éclatée d'un tokamak. . . . .	10
2.1	Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Bénard. . . . .	20
2.2	Schéma de l'instabilité d'échange dans la configuration tokamak. . . . .	21
3.1	Géométrie torique modifiée pour le code ETAE3D. . . . .	28
3.2	Domaine des modes utilisés dans le code. . . . .	29
3.3	Schéma des conditions aux bords radiales pour les profils d'équilibre (trait plein), profils de fluctuations (tirets), profil de conductivité collisionnelle (tiret-point). . . . .	30
3.4	Test de la procédure de dissipation pour la partie radiale (haut) et pour la partie poloïdale (bas). . . . .	34
3.5	Schéma d'un spectre d'énergie à la Kolmogorov avec un forçage. . . . .	35
3.6	Test de la sous-routine d'hyperdiffusion pour la partie radiale (haut) et la partie poloïdale (bas). . . . .	37
3.7	Test de la procédure de transport parallèle. . . . .	41
3.8	Bilan de l'équation du transport de la chaleur pour $\rho_* = 0.02$ , $d_* = 0.2$ , $F_{inj}^i = 0.3$ . . . . .	43
4.1	Taux de croissance linéaire normalisé $\gamma_{lin}$ en fonction du gradient de température $A_T$ , pour différentes valeurs de gradient de densité : $A_n = 0$ (ligne), $A_n = 1$ (tiret), $A_n = 2$ (pointillé), $A_n = 3$ (point-tiret). . . . .	51

4.2	Taux de croissance linéaire $\gamma_{lin}$ en fonction de la longueur de gradient de température normalisée $A_T$ . . . . .	52
4.3	Taux de croissance linéaire $\gamma_{lin}$ en fonction du nombre d'onde poloïdal $k_\theta$ pour 4 valeurs de $A_T$ et pour $n=-15$ . . . . .	53
4.4	Structure radiale du champ $\phi$ pour le mode toroïdal $n = -15$ . . . . .	54
4.5	Iso-potentielle d'un mode global $n = -15$ dans le plan poloïdal $(x, \theta)$ pour l'angle $\varphi = 0$ . Les parties négatives ne sont pas représentées. . . . .	55
4.6	Iso-fluctuations du champ $\phi$ . Tous les modes sont présents. $A_T = 2.5$ et $t=0.4$ . . . . .	55
4.7	Taux de croissance linéaire $\gamma_{lin}$ en fonction de $\beta, \tau, \hat{s}$ et $\epsilon$ . . . . .	56
5.1	Temps de confinement (gauche) : $\tau_{E1}$ (tirets) et $\tau_{E2}$ (ligne) et énergie turbulente (droite) pour une simulation typique. . . . .	59
5.2	Spectres du flux électrostatique (gauche) et du flux «magnétique» (droite) pour $\beta = 1\%$ (trait plein) et $\beta = 0.1\%$ (tirets). $\rho_\star = 0.01$ dans les deux cas. En pointillé, le cas à haute résolution. . . . .	61
5.3	Profils du flux électrostatique (gauche) et du flux «magnétique» (droite) pour $\beta = 1\%$ (trait plein) et $\beta = 0.1\%$ (tirets). $\rho_\star = 0.01$ dans les deux cas. . . . .	63
5.4	Fonction de densité de probabilité pour les deux composantes du flux turbulent et distribution gaussienne associée : composante électrostatique à gauche et composante magnétique à droite. . . . .	64
5.5	Sections poloïdales des fluctuations de pression (a-b), des fluctuations de potentiel électrique (c-d) et des fluctuations de potentiel vecteur (e-f) pour $\beta = 1\%$ (a-c-e) et $\beta = 0.1\%$ (b-d-f). . . . .	65
5.6	Profils de pression et gradient associé pour $\beta = 1\%$ (ligne) et $\beta = 0.1\%$ (tiret). $\rho_\star = 0.01$ et $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ dans les deux cas. . . . .	65
5.7	Fonction d'autocorrélation en 2 dimensions pour les champs $P, \phi, \psi$ et $F$ pour $\beta = 1\%$ (courbes du haut) et $\beta = 0.1\%$ (courbes du bas). . . . .	66
5.8	Spectres poloïdaux de la pression (gauche), du potentiel électrique (centre) et du potentiel vecteur (droite) pour $\beta = 1\%$ (ligne) et $\beta = 0.1\%$ (tiret). $\rho_\star = 0.01$ dans les deux cas. . . . .	67

5.9	Profils de la conductivité turbulente $\chi_T$ pour deux valeurs de $\beta$ : $\beta = 1\%$ (ligne) et $\beta = 0.1\%$ (tirets). $\rho_\star = 0.01$ et $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ dans les deux cas. . . . .	68
5.10	Fonction d'autocorrélation en 2 dimensions pour les champs $P$ , $\phi$ , $\psi$ et $F$ pour $\beta = \{0.1\%; 1\%; 4\%; 16\%\}$ . . . . .	69
5.11	Profils de la conductivité turbulente $\chi_T$ pour quatre valeurs de $\beta$ : $\beta = 0.1\%$ (ligne), $\beta = 1\%$ (tirets), $\beta = 4\%$ (pointillés) et $\beta = 16\%$ (tirets-points). $\rho_\star = 0.02$ et $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$ dans tous les cas. . . . .	69
5.12	Conductivité turbulente normalisée à $\rho_\star$ en unités $\frac{cT_i}{eB}$ pour $\rho_\star = 0.01$ ( $\circ$ ) et $\rho_\star = 0.02$ ( $\bullet$ ). . . . .	70
5.13	Section poloïdale des fluctuations de pression (gauche), de potentiel électrique (centre) et de vitesse parallèle (droite) pour la simulation électrostatique. . . . .	72
5.14	Fonction de corrélation bidimensionnelle pour les champs $P$ , $\phi$ et $V$ dans le cas électrostatique. . . . .	72
5.15	Profil de conductivité turbulente pour le cas électrostatique (ligne). En rappel, le cas $\beta = 1\%$ (tiret). . . . .	73
5.16	Profils de pression (gauche) et du potentiel électrostatique (droite) pour le cas électrostatique (ligne) et pour le cas magnétique $\beta = 1\%$ (tirets). . . . .	74
5.17	Profils de pression d'équilibre et de gradient associé avec $\Gamma_{inj} = 0.3$ : $\beta = 1\%$ (ligne) et $\beta = 0.1\%$ (tiret). En référence, le cas $\Gamma_{inj} = 0.075$ , $\beta = 1\%$ (pointillés). $\rho_\star = 0.02$ pour les trois cas. . . . .	75
5.18	Iso-fluctuations de pression (a-b-c) et de potentiel vecteur (d-e-f) pour $\Gamma_{inj} = 0.3$ , $\beta = 1\%$ (a-d), $\beta = 0.1\%$ (b-e) et $\Gamma_{inj} = 0.075$ , $\beta = 1\%$ (c-f). $\rho_\star = 0.02$ dans les trois cas. . . . .	76
5.19	Rapport entre longueurs de corrélations $\tau_\lambda$ en fonction du flux injecté normalisé pour $P$ (+), $\phi$ ( $\circ$ ), $\psi$ ( $\triangleleft$ ) et $F$ ( $\triangleright$ ). $\rho_\star = 0.02$ dans tous les cas. . . . .	77
5.20	Profil de conductivité turbulente avec $\Gamma_{inj} = 0.3$ : $\beta = 1\%$ (ligne) et $\beta = 0.1\%$ (tiret). En référence, le cas $\Gamma_{inj} = 0.075$ , $\beta = 1\%$ . . . . .	78
5.21	Iso-fluctuations de pression (a-b) et de potentiel vecteur (c-d) pour $\rho_\star = 0.01$ $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ (a-c) et $\rho_\star = 0.02$ $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$ (b-d). $\beta = 1\%$ dans les deux cas. . . . .	79

5.22	Profils de conductivité turbulente pour $\rho_\star = 0.02$ , $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$ (ligne) et $\rho_\star = 0.01$ , $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ (tirets). En pointillés, le cas de contrôle : $\rho_\star = 0.02$ , $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ . $\beta = 1\%$ dans les trois cas. . . . .	81
5.23	Iso-fluctuations de pression et de potentiel vecteur pour $\hat{s} = 1$ (a-c) et $\hat{s} = 0.1$ (b-d). $\rho_\star = 0.01$ dans les deux cas. . . . .	83
5.24	Profils de conductivité turbulente $\chi_T$ pour $\hat{s} = 1$ (ligne) et $\hat{s} = 0.5$ (tirets). $\rho_\star = 0.01$ et $\Gamma_{inj} = 0.0375$ dans les deux cas. . . . .	84
5.25	Fluctuations de pression et de potentiel vecteur dans une section poloïdale pour 2 valeurs de $\epsilon = r_s/R$ . $\rho_\star = 0.02$ dans les deux cas. . . . .	85
5.26	Fonctions d'auto-corrélation 2D pour les champs $P$ , $\phi$ , $\psi$ et $F$ pour deux valeurs de $\epsilon$ : $\epsilon = 0.5$ (haut) et $\epsilon = 0.1$ (bas). $\rho_\star = 0.02$ et $\Gamma_{inj} = 0.3$ dans les deux cas. . . . .	85
5.27	Profil de conductivité turbulente pour $\epsilon = 0.5$ (ligne) et $\epsilon = 0.1$ (tirets). $\rho_\star = 0.02$ et $\Gamma_{inj} = 0.3$ dans les deux cas. . . . .	86
5.28	Profils de pression, de gradient de pression et de fluctuations de pression pour $\epsilon = 0.5$ (ligne) et $\epsilon = 0.1$ (tiret). $\rho_\star = 0.02$ et $\Gamma_{inj} = 0.3$ dans les deux cas. . . . .	88
6.1	Principaux profils du choc #19542 durant le créneau de chauffage par l'onde rapide, $5.2s < t_{choc} < 6.3s$ . . . . .	90
6.2	Profil radial du rayon de Larmor normalisé, de la longueur de peau normalisée (a) et de la conductivité électronique normalisée (b) durant le créneau de chauffage par l'onde rapide. . . . .	91
6.3	Fonction d'auto-corrélation pour le champ $\phi$ en fonction des trois valeurs de flux injecté : $\Gamma_{inj} = 0.3$ (a), $\Gamma_{inj} = 1$ (b) et $\Gamma_{inj} = 2$ (c). . . . .	93
6.4	Evolution temporelle de la conductivité turbulente normalisée en fonction de la longueur de gradient de température pour trois valeurs de flux injecté $\Gamma_{inj} = \{0.3(\circ); 1(\star); 2(\triangleright)\}$ . . . . .	94

# Introduction

La production d'énergie électrique à partir des réactions de fusion thermonucléaire est un enjeu primordial pour l'avenir de l'humanité. En effet, les besoins énergétiques ne vont cesser d'augmenter au cours des décennies à venir alors que les ressources en combustibles fossiles (pétrole, charbon, gaz naturel,...) tendent à l'épuisement. De plus, les productions d'énergie associées devront diminuer à cause des émissions de gaz carbonique qu'elles génèrent. L'énergie nucléaire classique ne produit pas de gaz à effet de serre mais la production de déchets radioactifs à durée de vie longue pose un grave problème à son extension durable, à ajouter au risque d'un accident. La fusion thermonucléaire, quant à elle, ne produit pas de gaz à effet de serre et génère des déchets radioactifs moins coûteux à gérer. De plus, elle est par nature sûre puisque les réactions de fusion ne peuvent s'emballer et conduire ainsi à une catastrophe majeure.



Les années 1950 sont le moment où on a pensé à domestiquer cette énergie. Le principe de la fusion était quant à lui connu depuis quelques décennies dans les étoiles : faire collisionner des atomes légers entre eux pour en produire de plus lourds tout en libérant de l'énergie. Pour cela, il faut créer et maintenir un plasma<sup>1</sup> d'ions à une température de l'ordre de 10 keV, soit environ 100 millions de degrés, pendant plusieurs secondes. Pour cela, la configuration la plus stable et la plus prometteuse pour la fusion par confinement magnétique est le tokamak. Le transport de l'énergie est alors caractérisé par le temps de confinement défini comme le rapport du contenu énergétique à la puissance perdue. Ce transport est principalement de nature diffusive/ convective : une faible partie provenant des collisions (transport néoclassique) tandis que la majeure partie (transport anormal) est associée à la turbulence du plasma. En effet, le plasma est rendu

---

<sup>1</sup>Un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé ; il constitue le quatrième état de la matière et est présent dans plus de 90% de l'Univers.

instable par les gradients de densité et de température transverses au champ magnétique d'équilibre. Ces instabilités appelées ondes de dérive croissent puis saturent non linéairement. L'état turbulent qui en résulte est associé à des fluctuations de densité, de température et de champ électromagnétique. Ces fluctuations entraînent des flux de particules, de moment angulaire et de chaleur.

La quantification du confinement en fonction des paramètres d'ingénierie du plasma (grand rayon, puissance injectée, courant plasma,...) permet l'obtention de lois d'échelle du confinement. Ces lois d'échelle sont très utiles pour la prédiction du transport de l'énergie dans les machines futures mais elles demeurent trop imprécises ( $\pm 20\%$  d'incertitude). De plus, par des méthodes de régression, on peut exprimer ces lois d'échelle en fonction essentiellement de trois paramètres physiques adimensionnels : le rayon de giration normalisé  $\rho_*$ , la pression du plasma normalisée  $\beta$  et la collisionnalité du plasma normalisée  $\nu_*$ . Afin de réduire l'incertitude sur ces lois d'échelle, des modèles basés sur différentes instabilités ont été développés. Pour rendre compte correctement du transport de la chaleur, ces modèles doivent être forcément non linéaires puisque destinés à décrire la turbulence du plasma de fusion. On utilise alors essentiellement deux approches pour traiter numériquement ces modèles : l'approche cinétique, plus précise mais beaucoup moins flexible et limitée actuellement par les moyens numériques et l'approche fluide, choisie ici, permettant des simulations non linéaires sur des temps plus longs. Historiquement, l'instabilité la plus étudiée a été celle générée par le gradient de température ionique (ITG en anglais) puisque la plupart des tokamaks à travers le monde chauffent préférentiellement cette espèce. Cependant, elle ne rend pas compte des pertes de chaleur par le canal électronique même lorsqu'elle est associée à l'instabilité liée aux électrons piégés. Il est pourtant crucial de bien comprendre la nature des pertes électroniques puisque, dans un réacteur, les électrons du plasma D-T à l'ignition seront préférentiellement chauffés par les particules alpha<sup>2</sup>. C'est pourquoi l'instabilité liée au gradient de température électronique (ETG) a trouvé un regain d'intérêt auprès des théoriciens pour expliquer et tenter de prédire les pertes de chaleur électroniques. L'instabilité ITG électrostatique prédit des pertes de chaleur compatibles avec

---

<sup>2</sup>Les particules  $\alpha$  sont ralenties par les électrons du plasma qui gagnent alors de l'énergie. Si les pertes de chaleur par le canal électronique sont minimales, alors la plupart des électrons peuvent chauffer efficacement les ions par collisions et ainsi assurer la recirculation de l'énergie et donc les réactions de fusion. Il est donc crucial de bien caractériser ces pertes de chaleur électroniques afin de les minimiser.

les données expérimentales. Si on considère alors l'instabilité ETG simplement comme symétrique de l'instabilité ITG, les ions étant remplacés par les électrons, cela devrait donner une conductivité divisée d'un facteur de l'ordre de la racine carré du rapport des masses par rapport à la conductivité ionique. Or ce n'est absolument pas le cas puisque on observe expérimentalement que les conductivités thermique électronique et ionique sont du même ordre de grandeur. Enfin, l'intérêt pour l'étude de la turbulence ETG, qui est de petite échelle spatiale, réside dans son caractère naturellement électromagnétique. Or, parmi les paramètres adimensionnels fondamentaux présents dans les lois d'échelle figure le rapport entre les pressions cinétique et magnétique  $\beta$ . C'est pourquoi, la prise en compte des fluctuations du champ magnétique transverses au champ magnétique d'équilibre d'éclaircir les dépendances du temps de confinement en fonction du paramètre  $\beta$  pour lesquelles de nombreuses incertitudes perdurent.



La thèse présentée ici a pour but essentiel de développer un modèle non-linéaire de turbulence basé sur le gradient de température électronique dans l'approximation fluide et de déterminer les dépendances paramétriques du transport turbulent de la chaleur pour ce modèle. Pour cela, nous avons développé un code de calcul, simulant directement l'ensemble des équations développées.

Dans le chapitre 1, outre les principes de la fusion et les approches développées, sont également présentés les problèmes liés au confinement de l'énergie ainsi que les objectifs détaillés de cette thèse.

Les considérations physiques et les étapes menant au modèle choisi sont résumées dans le chapitre 2.

A partir de ce modèle, l'objectif sera de caractériser le transport associé à cette instabilité en fonction des paramètres du modèle. Pour ce faire, un code global tridimensionnel fluide et électromagnétique a été développé afin de simuler les équations non linéaires du modèle ETG. Le développement de ce code ayant constitué une étape longue et ardue au cours de cette thèse, nous jugeons opportun de consacrer le chapitre 3 aux principales caractéristiques numériques de ce code.

Le chapitre 4, quant à lui, récapitule les résultats issus de l'analyse linéaire du modèle à la fois par un travail analytique, mais aussi grâce au code numérique. Même si ce n'est pas la



vocation de cette thèse, la connaissance du gradient de température critique et du taux de croissance reste un passage obligé avant l'étude non linéaire.

Les résultats non linéaires de l'étude du transport de chaleur en fonction de paramètres tels que la pression normalisée  $\beta$  et le rayon de giration électronique normalisé  $\rho_*$  sont présentés au chapitre 5 de cette thèse. Tout d'abord, nous constaterons que le niveau de conductivité thermique observé est trop faible pour rendre compte des pertes expérimentales. Ensuite, nous verrons que le transport de chaleur dépend faiblement de  $\beta$  même lorsque ce paramètre atteint des valeurs très élevées. Par contre, l'impact du rayon de Larmor électronique normalisé  $\rho_*$  sur le transport de la chaleur sera clairement mis en évidence. Nous caractériserons également l'état de turbulence du plasma par l'observation des cellules de convection dans un plan poloïdal, mais aussi par les fonctions d'autocorrélation dans ce plan. Nous analyserons aussi le transport en fonction du flux de chaleur injecté dans le système.

Le chapitre 6 présente brièvement une tentative de confrontation de ces résultats théoriques avec l'expérience. D'une simulation pour laquelle la plupart des paramètres sont ceux d'un choc bien référencé de Tore Supra, nous tenterons de proposer une formule générique pour le transport de chaleur.

La conclusion de cette thèse répondra aux questions posées dans cette introduction, relatives à la pertinence d'un modèle fluide de turbulence électronique pour rendre compte du transport de la chaleur par les électrons dans un plasma de fusion.

# Chapitre 1

## Quelques généralités sur la fusion

### 1.1 La fusion : une nouvelle source d'énergie

La fusion est une des sources d'énergie envisageables dans le futur. Etant d'origine nucléaire, elle ne participerait pas à l'effet de serre. Les déchets radioactifs produits par ces réactions auraient un temps de vie plus court que ceux issus des centrales nucléaires à fission actuelles. La matière première, Hydrogène et Lithium, est disponible dans l'eau de mer sur des échelles de temps de l'ordre du million d'années. La fusion apparaît donc comme une voie prometteuse au côté des énergies renouvelables et des nouvelles centrales à fission. Une présentation plus complète de la problématique de la fusion pourra être trouvée dans la référence [CEA87] ainsi que sur le site Internet <http://www-fusion-magnetique.cea.fr>.

#### 1.1.1 Les réactions de fusion

Des noyaux d'atomes légers, chargés positivement, se repoussent par la force de Coulomb. La fusion consiste à rapprocher le plus possible ces noyaux afin de franchir la barrière de répulsion. De même que la fission de noyaux lourds, la fusion de noyaux légers libère de l'énergie (cf Figure 1.1).

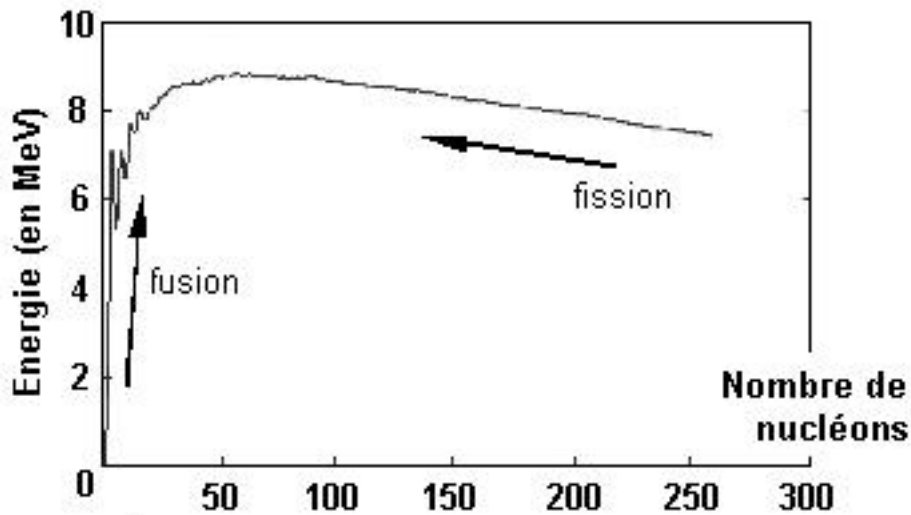


FIG. 1.1 : Energie de liaison par nucléon des noyaux en fonction de la masse atomique.

Les réactions possibles avec les éléments les plus légers sont les suivantes :



où le Deuterium ( $D \equiv {}^2_1\text{H}$ ) et le Tritium ( $T \equiv {}^3_1\text{H}$ ) sont des isotopes de l'Hydrogène, respectivement de masses atomiques 2 et 3.

Parmi ces trois réactions envisageables, la première a été retenue car elle a la section efficace, ou plus simplement la probabilité, la plus élevée à la température de travail envisagée pour le futur réacteur (cf Figure 1.2).

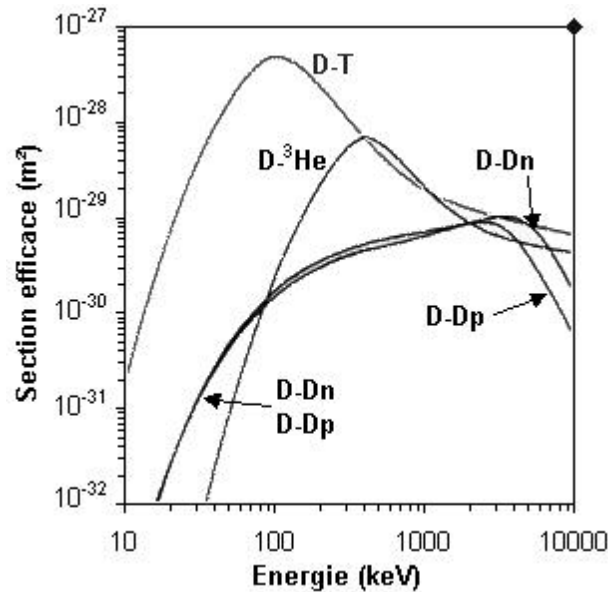


FIG. 1.2 : Section efficace des principales réactions de fusion envisagées.

Malheureusement, elle présente l'inconvénient d'avoir besoin de Tritium et elle produit des neutrons rapides, susceptibles d'activer de nombreux matériaux. Le Tritium est un élément radioactif de durée de vie courte, 11 ans, à comparer aux dizaines de milliers d'années de durée de vie des déchets issus de la fission nucléaire. Le Deuterium est disponible en grande quantité dans l'eau de mer ( $33 \text{ g/m}^3$ ) ainsi que le Lithium nécessaire à la production de Tritium via la réaction :



Du fait de la délicate manipulation du Tritium et de son coût, on utilise préférentiellement en laboratoire comme gaz de travail le Deutérium voire l'Hydrogène pour les études de confinement.

### 1.1.2 Les conditions nécessaires

Pour faire fusionner deux noyaux chargés positivement, il faut arriver à les porter à une énergie suffisamment élevée pour leur permettre de passer la barrière de potentiel coulombien par effet tunnel dans une proportion suffisante. Supposons un plasma dont la fonction de distribution des vitesses est maxwellienne. Pour que le nombre de noyaux susceptibles de fusionner

par effet tunnel soit suffisamment important, leur énergie doit être de l'ordre de 10 keV (plasma D-T), soit environ 100 millions de degrés Celsius (la température à la surface du soleil est de 15 millions de degrés Celsius). La condition de passage de la barrière de potentiel est caractérisée par la valeur du taux de réaction  $\langle\sigma v\rangle$ , où  $\sigma$  est la section efficace et où  $v$  est la vitesse relative des deux noyaux. La puissance par unité de volume libérée par les réactions de fusion  $P_{fus}$  est proportionnelle au taux de réaction, au nombre de noyaux de Deuterium  $n_D$  et de Tritium  $n_T$  et à l'énergie libérée par chaque réaction  $E_{fus}$ , telle que :

$$P_{fus} = n_D n_T \langle\sigma v\rangle E_{fus} \quad (1.1)$$

On définit le temps de confinement de l'énergie dans un plasma,  $\tau_E$ , comme le rapport de l'énergie thermique par unité de volume du plasma sur la puissance perdue par le plasma :

$$\tau_E = \frac{W_{th}}{P_{perte}} \quad (1.2)$$

En régime stationnaire,  $P_{perte}$  est la somme de la puissance cédée par les particules alpha (noyaux d'Helium d'énergie  $E_{He}$ ) issues des réactions de fusion,  $P_\alpha = P_{fus} \frac{E_{He}}{E_{He} + E_n}$ , et la puissance apportée de l'extérieur pour chauffer le plasma qui se couple effectivement à ce dernier,  $P_{ext}$  :

$$P_{perte} = P_\alpha + P_{ext} \quad (1.3)$$

en supposant une efficacité de chauffage de 100% par les particules alpha.

On définit le facteur d'amplification du plasma  $Q$ , comme :

$$Q = \frac{\int_{\text{volume}} P_{fus}}{P_{ext}} \quad (1.4)$$

La réaction est auto-entretenu lorsque  $Q = \infty$ , c'est ce que l'on appelle l'ignition. Le «break-even» est quant à lui défini par  $Q = 1$ , lorsque la puissance de fusion équivaut à la puissance externe fournie au plasma. En 1997, les chercheurs du JET (Join European Torus, UE) ont obtenu un facteur d'amplification  $Q = 0.69$  pour un plasma D-T, formidable preuve des progrès accomplis depuis trois décennies de recherche [Kei99].

Le critère de Lawson [Law57], [Wes97] stipule que, pour un facteur  $Q$  fixé, les choix de la température, de la densité et du temps de confinement sont intrinsèquement liés. Pour une énergie des particules alpha égale à 3.5 MeV, une approximation de ce critère est le triple produit :

$$n\langle T\rangle\tau_E > 3.10^{21} \text{m}^{-3} \text{keVs} \quad (1.5)$$

où  $\langle T \rangle$  est la température moyenne du plasma. Cette approximation n'est valable que lorsque  $\langle \sigma v \rangle$  est proportionnel à  $\langle T \rangle^2$ . Le triple produit est une façon simple et parlante de présenter les conditions de température, de densité et de temps de confinement nécessaires. Par exemple, cette condition est remplie pour  $n = 10^{20} \text{m}^{-3}$ ,  $T = 10 \text{keV}$  et  $\tau_E = 3 \text{s}$ .

### 1.1.3 Les moyens

Pour obtenir  $nT\tau_E > 3.10^{21} \text{m}^{-3} \text{keVs}$ , deux voies principales ont été poursuivies :

- travailler avec des temps de confinement courts ( $\sim 10^{-11} \text{s}$ ) et des densités supérieures à  $10^{31} \text{m}^{-3}$ . C'est ce que l'on appelle la voie de la fusion inertielle. Une introduction à la physique de cette filière est la référence [Dau80].
- travailler avec des densités réduites, de l'ordre de  $10^{20} \text{m}^{-3}$ , donc des temps de confinement longs ( $\sim 1 \text{s}$ ). C'est la voie de la fusion magnétique. Pour un tokamak, la stabilité du plasma est limitée par des critères magnétiques liés au paramètre  $\beta = \frac{8\pi n_i(T_e + T_i)}{B^2}$ . La densité du plasma est limitée par des critères de stabilité, tels que  $n \leq \frac{I_P}{\pi a^2}$  avec la densité  $n$  en  $10^{20} \text{m}^{-3}$ ;  $I_P$  (en  $MA$ ) et  $a$  (en  $m$ ) sont respectivement le courant et le petit rayon du plasma. On parle de limite de Greenwald.

Dans ce qui suit, nous allons considérer uniquement l'option du confinement magnétique et plus particulièrement de la filière tokamak qui est celle étudiée avec le tokamak Tore Supra au DRFC du centre CEA de Cadarache.

### 1.1.4 La filière tokamak

Le tokamak est une configuration magnétique aux lignes de champ fermées, donc nécessairement de forme torique [CEA87]. La forme la plus simple est un solénoïde torique dont les lignes de force sont des cercles de même axe. Cette structure est insuffisante pour confiner des particules du fait d'une dérive verticale de celles-ci [Peg02], [Wes97]. En ajoutant une composante poloidale  $B_\theta$  au champ magnétique toroïdal  $B_\varphi$ , on perfectionne la configuration et les lignes de force sont enroulées en spirale sur des surfaces toroïdales appelées surfaces magnétiques. Une particule chargée  $s$  qui se déplace dans ce champ est alors parfait-

tement confinée<sup>3</sup>. Elle s'enroule autour des lignes de champ en décrivant une spirale de rayon  $\rho_s \equiv \frac{v_{th,s}}{\omega_{c,s}} = \frac{(T_s/m_s)^{1/2}}{eB/m_s}$  où  $v_{th,s}$  et  $\omega_{c,s}$  sont la vitesse thermique et la pulsation cyclotronique de la particule  $s$ , respectivement. Ce rayon de giration est appelé également rayon de Larmor. Le champ poloïdal  $B_\theta$  est principalement créé par le courant circulant toroïdalement dans le plasma : le plasma crée sa propre «cage». Le champ toroïdal  $B_\varphi$  est quant à lui, créé par un courant circulant dans des bobines extérieures, qui peuvent être supraconductrices comme dans Tore Supra. Le courant plasma est généré par un champ électrique toroïdal induit par un changement de flux à travers le tore, lui-même généré par un courant circulant dans une bobine primaire. La figure 1.3 représente un schéma de la structure d'un tokamak.

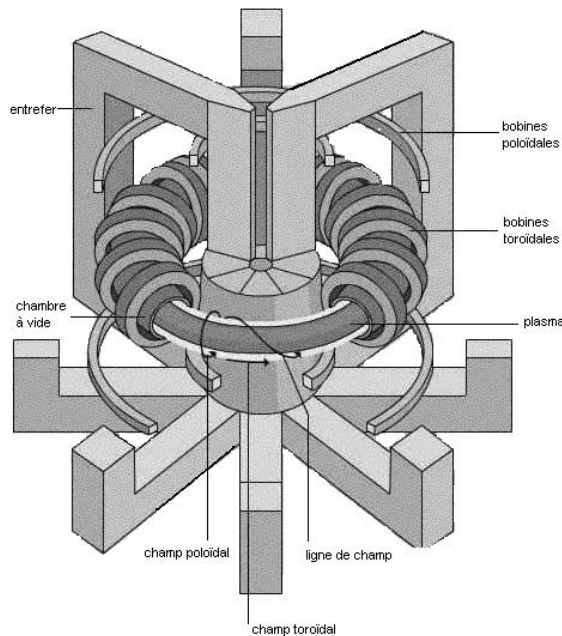


FIG. 1.3 : Structure magnétique éclatée d'un tokamak.

Le facteur de sécurité  $q$  caractérise le taux d'enroulement des lignes de champ tel que :

$$q = \frac{rB_\varphi}{RB_\theta} \quad (1.6)$$

Pour des raisons de stabilité magnétohydrodynamique (MHD) contraignante, la condition  $q > 1$  (limite de Shafranov) est nécessaire.

<sup>3</sup>Ceci est rigoureusement sur l'échelle de temps pour laquelle les trois invariants, en particulier  $\mu = mv_\perp^2/B$ , sont conservés.

Il convient ensuite de chauffer le plasma dans cette configuration. La première source de chauffage est le chauffage ohmique induit par la circulation d'un courant dans un plasma résistif. Ce chauffage est limité par le fait que la résistivité diminue quand la température augmente comme  $T^{-3/2}$ . Au delà de quelques keV, l'effet Joule n'est plus efficace. On a alors recours à des chauffages additionnels, comme par exemple l'injection de neutres à grande vitesse qui s'ionisent et transmettent leur énergie cinétique au plasma via des collisions coulombiennes. Un autre principe consiste à accélérer les particules en injectant des ondes électromagnétiques aux fréquences de résonance du plasma (ondes cyclotroniques ioniques et électroniques, ondes hybrides, ondes magnétosoniques, ondes d'Alfvén,...). On atteint ainsi des températures supérieures à 10 keV. A puissance donnée, cette température augmente avec la qualité du confinement.

## 1.2 Analyse du confinement de l'énergie

Dans le but d'extrapoler les résultats actuels vers de futurs tokamaks plus performants, nous avons besoin de connaître les grandes dépendances du transport en fonction des principales caractéristiques des décharges. Deux approches empiriques sont possibles, une analyse globale ou une analyse locale.

L'analyse globale consiste à appréhender de façon empirique les paramètres dont dépend  $\tau_E$ . L'interprétation des données de plusieurs tokamaks actuels permet d'établir des lois empiriques pour le temps de confinement de l'énergie en fonction de paramètres caractéristiques comme le courant plasma  $I_P$ , les petit et grand rayons  $a$  et  $R$ , la densité  $n$ , le champ magnétique toroïdal  $B$ , l'élongation  $\kappa$ , l'inverse du rapport d'aspect  $\epsilon$ , la masse moyenne des ions  $M$  et la puissance aditionnelle  $P$ . Ces lois ainsi obtenues sont appelées lois d'échelle. Les lois ITER sont actuellement acceptées. Pour les deux principaux régimes de fonctionnement : modes L (Low confinement modes) et modes H (High confinement modes) on obtient les lois d'échelle suivantes [ITER99] :

$$\tau_E^L = 0.023 I_P^{0.96} B^{0.03} P^{-0.73} n^{0.40} M^{0.20} R^{1.83} \epsilon^{0.06} \kappa^{0.64} \quad (1.7)$$

$$\tau_E^{ElmyH} = 0.0562 I_P^{0.93} B^{0.15} P^{-0.69} n^{0.41} M^{0.19} R^{1.97} \epsilon^{0.58} \kappa^{0.78} \quad (1.8)$$



Avec  $\tau_E$  en s,  $I_P$  en MA,  $R$  en m,  $n$  en  $10^{19}\text{m}^{-3}$ ,  $B$  en T,  $P$  en MW et  $\kappa$ ,  $M$  et  $\epsilon$  sans unité. Le régime ELMyH est un mode de fonctionnement à confinement amélioré en présence d'ELMs (Edge Localized Modes), activité MHD au bord du plasma [Sut00]. C'est le mode de fonctionnement considéré pour le futur tokamak ITER. Dans ces deux régimes de fonctionnement, on remarque une dégradation du confinement avec la puissance additionnelle. Dans les tokamaks actuels, les chauffages additionnels génèrent une part de particules suprathermiques. On n'en tient pas compte dans les lois d'échelle 1.7 et 1.8. Dans la future génération de tokamaks la collisionnalité<sup>4</sup> sera suffisamment élevée pour thermaliser toutes ces particules. Cette approche empirique a ses limites. Les paramètres doivent être choisis parmi les quantités mesurables sur un grand nombre de tokamaks. On peut réduire l'erreur de prédiction en utilisant des paramètres sans dimension et en utilisant un principe de similitude. Afin d'affiner les lois d'échelle, il serait entre autres nécessaire de tenir compte du comportement du cœur du plasma séparément de celui du bord, ainsi que de définir un temps de confinement différent pour les électrons et pour les ions, bien que ces deux espèces soient couplées. C'est pourquoi, bien que les lois d'échelle soient primordiales en ce qui concerne l'extrapolation du temps de confinement pour les tokamaks à venir, on a parallèlement recours à une analyse locale qui tient compte de la forme des profils. L'analyse locale se base sur la recherche expérimentale des expressions des coefficients de transport à travers la résolution des équations adéquates. L'efficacité du transport parallèle à  $\vec{B}$  est telle que, à l'équilibre, chaque surface magnétique est une iso-densité, iso-température, iso-vitesse toroïdale. Le transport transverse des particules, de l'énergie et du moment angulaire s'écrit génériquement comme suit :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + S$$

où  $g$  est la grandeur considérée indiquée par sa surface magnétique,  $\vec{F}$  le flux transverse associé et  $S$  la fonction source. Ici le flux n'est pas uniquement diffusif, il peut aussi être convectif :  $\vec{F} = -D\vec{\nabla}g + \vec{V}g$  avec  $D$  le coefficient de diffusion et  $\vec{V}$  la vitesse de convection. Par conséquent si l'on connaît les profils des grandeurs mesurées en fonction du temps et du petit rayon et si la fonction source (c'est-à-dire le dépôt de puissance par les différents moyens de chauffage)

---

<sup>4</sup>La collisionnalité normalisée est définie de la façon suivante :  $\nu_* = \frac{\nu_{\text{eff}}}{\omega_b}$  avec  $\nu_{\text{eff}} = \nu_{ei}/\epsilon$ , la collisionnalité effective et  $\omega_b \simeq \epsilon^{1/2} \frac{v_{th}}{qR}$  la fréquence de rebond des particules piégées. La fréquence de collision électrons-ions vaut :  $\nu_{ei} \simeq 0.23\mu^{3/2}T^{-3/2}$ .

est bien connue, on peut en déduire certains coefficients de transport. Ces coefficients sont généralement plus grands que les coefficients de transport prédits par la théorie collisionnelle dans la géométrie du tokamak, appelée théorie néoclassique [Lie85]. Pour affiner la mesure de ces coefficients, on peut utiliser des méthodes perturbatives. Par exemple, on peut étudier le transport d'impuretés dans le plasma ou les modulations du transport dues à la modulation d'une puissance de chauffage, et ce grâce aux mesures de perturbations de température, de densité, etc.

### 1.3 Cadre de la thèse

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le transport de la chaleur dans un plasma de fusion ne peut pas être prédit par la théorie néoclassique. On parle alors de transport anormal. De plus, un plasma de fusion est hors équilibre thermodynamique en raison de l'existence de forts gradients. A l'heure actuelle, il est communément admis que le transport anormal est dû à la présence d'instabilités de petite échelle spatio-temporelle. Elles entraînent des fluctuations des champs autour de leurs valeurs d'équilibre :

- Les fluctuations électrostatiques génèrent une vitesse fluctuante :

$$\tilde{\mathbf{V}}_E = \frac{\tilde{\mathbf{E}} \times \mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}^2}$$

Cette vitesse fluctuante génère un flux de particules ainsi qu'un flux de chaleur. Les pertes de chaleur, de particules,... se font dans la direction radiale. Ainsi, on peut définir

$$\Gamma_{ES} = \langle \tilde{n} \tilde{V}_{E,r} \rangle \quad q_{ES} = \frac{3}{2} \langle \tilde{p} \tilde{V}_{E,r} \rangle$$

où  $\tilde{n}$  et  $\tilde{p}$  sont les fluctuations de densité et de pression, respectivement.  $\langle \cdot \rangle$  désigne une moyenne sur les surfaces magnétiques.

- Les fluctuations magnétiques dans la direction transverse au champ d'équilibre sont associées aux fluctuations de vitesse :

$$\tilde{\mathbf{V}}_B = \frac{\tilde{\mathbf{B}} V_{\parallel}}{B_{eq}}$$

A nouveau ces vitesses génèrent des flux radiaux :

$$\Gamma_M = \left\langle \frac{\tilde{j}_{\parallel}}{e} \frac{\tilde{B}_r}{B_{eq}} \right\rangle \quad q_M = \left\langle \tilde{q}_{\parallel} \frac{\tilde{B}_r}{B_{eq}} \right\rangle$$

où  $\tilde{j}_{\parallel}$  et  $\tilde{q}_{\parallel}$  sont les fluctuations de courant et de flux de chaleur parallèles, respectivement.

Concernant les fluctuations magnétiques, on peut remarquer que le flux de chaleur parallèle fluctuant  $\tilde{q}_{\parallel}$  est proportionnel à la vitesse parallèle fluctuante par  $\tilde{q}_{\parallel} \sim T_e \tilde{v}_{\parallel}$ . Or, cette vitesse est reliée au courant parallèle fluctuant  $\tilde{j}_{\parallel}$  par  $\tilde{j}_{\parallel} = ne\tilde{v}_{\parallel}$ . On voit donc que des particules seront d'autant plus sensibles aux fluctuations magnétiques qu'elles seront rapides. Pour les fluctuations électrostatiques, le flux de chaleur  $q_{ES}$  peut être décomposé en la somme d'un flux convectif  $q_n = \frac{3}{2}T_{eq}\langle\tilde{n}\tilde{V}_{E,r}\rangle$  et d'un flux conductif  $q_T = \frac{3}{2}n_{eq}\langle\tilde{T}\tilde{V}_{E,r}\rangle$ . Ces flux sont nuls si les phases entre modes de Fourier sont appropriées. En particulier, si la densité suit une loi de Boltzmann  $\frac{\tilde{n}}{n_{eq}} = -\frac{e\tilde{\phi}}{T_{eq}}$  alors le flux de particules est nul : les flux turbulents d'une population à l'équilibre thermodynamique sont nuls.

Enfin, les coefficients de transport fluides peuvent être déterminés à partir d'une matrice de transport simplifiée pour l'espèce  $s$  [Ito99] :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_s \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_n & D_T \\ \chi_n & \chi_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_r \tilde{n}_s \\ \nabla_r \tilde{T}_s \end{pmatrix}$$

ou encore plus simplement à partir d'une loi de Fourier,  $q_T = -n_{eq}\chi_T\nabla_r T$ . On comprend donc bien que si on peut estimer ou mesurer les flux et les gradients associés à une turbulence, on pourra alors estimer la conductivité turbulente associée ainsi que le temps de confinement. C'est pour cela qu'un pan important de la théorie du transport de la chaleur dans un tokamak a consisté depuis des années à estimer les flux et gradients liés à une instabilité donnée. Par exemple, l'approche quasi-linéaire couplée à la théorie de la longueur de mélange développée originellement en turbulence fluide a longtemps guidé les chercheurs dans les estimations de  $\chi_T$  [Lie85], [Kad65]. Néanmoins, cette technique s'avère trop limitée pour permettre des prédictions meilleures qu'à 30% près. C'est pour cela que l'on a recours aux estimations non linéaires par le biais de l'outil numérique.

Les pertes de chaleur dans les principaux tokamaks se font par le canal ionique puisque ce sont les ions qui y sont chauffés. L'instabilité liée au gradient de température ionique (ITG en anglais) pour les particules circulantes a donc été largement étudiée d'un point de vue fluide et d'un point de vue cinétique [Hor81], [Ott99], [Gar01a]. Les études ainsi menées à partir de simulations numériques ont permis de conclure que l'instabilité ITG est un bon candidat pour

déterminer les pertes ioniques. En conséquence, l'obtention de régimes pour lesquels cette instabilité est contrôlée a permis des améliorations notables de confinement.

Si on suppose que les pertes de chaleur par le canal électronique sont dues à la même instabilité, on s'attendrait à constater des pertes de chaleur électroniques de l'ordre de la racine carrée du rapport des masses fois les pertes ioniques. Or ce n'est pas le cas expérimentalement, les pertes électroniques étant du même ordre de grandeur que les pertes ioniques :  $\chi_e \sim \chi_i \sim 1m^2s^{-1}$ . C'est par exemple ce qui a été mesuré sur le tokamak Tore Supra pour lequel les pertes de chaleur se font essentiellement par le canal électronique du fait des chauffages utilisés. De plus, en présence de chauffage des électrons avec l'onde rapide, il a été mis en évidence pour le tokamak Tore Supra que la conductivité électronique est bien représentée par la loi suivante [Hoa01] :

$$\chi_e \propto T_e^{1/2}/n_e \quad (1.9)$$

L'autre instabilité pouvant conduire à des pertes de chaleur électroniques substantielles est celle liée aux électrons piégés, les modes TEM (Trapped Electron Modes). Ces modes se situent dans une région spectrale proche des modes ITG, c'est pourquoi les modes TEM sont toujours étudiés en couplage avec les modes ioniques [Bou00]. Les résultats des simulations pour cette instabilité ont donné des niveaux de conductivité électronique acceptables vis-à-vis des mesures expérimentales. Malheureusement, il semble que les dépendances de  $\chi_e$  en fonction de  $T_e$  et  $n_e$  ne soient pas correctes. Pour un modèle non collisionnel, une loi du type  $\chi_e \propto T_e^{3/2}$  où la dépendance en densité n'apparaît pas est généralement acceptée. De plus, l'analyse d'un plasma collisionnel donne une dépendance de la forme  $\chi_e \propto T_e^{7/2}/n_e$  où manifestement la dépendance en température électronique est beaucoup trop forte.

En 1978, Ohkawa [Ohk78] trouva de façon heuristique une expression de  $\chi_e$  satisfaisante pour les valeurs mesurées dans le tokamak Alcator<sup>5</sup>. Il proposa comme formule de conductivité :

$$\chi_e \sim \left( \frac{c}{\omega_{pe}} \right)^2 \frac{v_{th,e}}{qR} \propto \frac{T_e^{1/2}}{n_e} \quad (1.10)$$

où  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_e e^2}/m_e$  est la fréquence plasma et  $v_{th,e} \equiv \sqrt{T_e/m_e}$  est la vitesse thermique des électrons. On remarque que la même dépendance en fonction de la température et de la

<sup>5</sup>Le confinement, dans ce petit tokamak, montrait une dépendance en densité électronique inexplicée. Par sa formule, Ohkawa donne une explication plausible à cette dépendance.

densité électronique est proposée que dans la formule 1.9. Egalement, la présence de la pulsation plasma dans la formule d'Ohkawa suggère de prendre en compte l'inertie des électrons à travers leur dynamique parallèle. La dynamique des électrons est contenue dans la loi d'Ohm généralisée :  $m_e n_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\vec{\nabla} p_e - \vec{\nabla} \cdot \Pi - e n_e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}$ . A cause de la présence de la faible masse électronique dans cette équation, les fréquences pouvant rendre compte de cette dynamique doivent être très rapides, comme le sont les fréquences des modes ETG. Enfin, on peut facilement faire apparaître<sup>6</sup> dans cette expression le rayon de Larmor électronique  $\rho_e = v_{th,e}/\omega_{c,e}$  et la pression du plasma normalisée  $\beta = \frac{8\pi n_e (T_e + T_i)}{B^2}$ , soit  $\chi_e \propto \rho_* / \beta$ . Ces deux derniers éléments plaident en faveur d'une reconsidération de l'instabilité liée au gradient de température électronique pour les électrons circulants mais en tenant compte aussi des fluctuations du champ magnétique. En effet, pour des particules rapides, nous venons de voir (p.13) que ces fluctuations peuvent générer un flux de chaleur non négligeable. De plus, elles sont caractérisées par la longueur de peau du plasma  $d_e = \frac{c}{\omega_{pe}}$  qui dans les plasmas de tokamak est d'un ordre de grandeur intermédiaire entre le rayon de Larmor ionique et le rayon de Larmor électronique, longueur caractéristique des modes ETG.

L'étude des modes ETG a été fortement relancée ces dernières années grâce aux travaux de F. Jenko [Jen00], [Jen01a], [Jen01b], [Dor00]. Grâce à des simulations girocinétiques électromagnétiques mais locales (technique «flux tube» : tous les gradients sont gelés), ils trouvent que le transport de chaleur observé est du même ordre de grandeur qu'expérimentalement. Selon eux, ceci est en partie dû au fait que la réponse de l'espèce adiabatique, les ions, ne limite pas la saturation des modes linéaires par génération d'«écoulements zonaux» (cf chapitre 5) et donc permet un fort transport. Ce fort transport est caractérisé par la présence de structures très allongées dans la direction radiale, appelées en anglais *streamers* [Dra88]. Ils ont également constaté qu'une transition vers un régime de faible transport est possible lorsque, à  $\alpha \equiv -q^2 R \partial_x \beta$  constant, on diminue le cisaillement magnétique  $\hat{s}$ . Enfin, pour des paramètres de plasma de bord, la dépendance en  $1/\beta$  de la conductivité thermique électronique est retrouvée. Ces simulations mettent en évidence la nécessité d'un couplage toroïdal en plus d'une réponse adiabatique pour les ions. En effet, d'autres simulations girocinétiques (technique «particles-in-cell») des modes ETG sans courbure du champ magnétique (configuration slab) donnent des niveaux de conductivité très faibles par rapport à l'expérience [Ido00], [Jiq02].

---

<sup>6</sup>En effet, on a  $\left(\frac{c}{\omega_{pe}}\right)^2 = \frac{c^2 m_e}{4\pi n_e e^2} = \frac{c^2 m_e T_e B^2}{4\pi n_e T_e e^2 B^2} = \frac{2\rho_e^2}{\beta}$  donc  $\chi_e \sim \frac{2\rho_e^2}{\beta} \frac{v_{th,e}}{qR} = 2 \frac{\rho_e}{\beta} \frac{\omega_{c,e}}{qR}$ .

La thèse présentée ici reconsidère l'instabilité ETG comme source potentielle de pertes de chaleur dans un tokamak. Pour cela, nous allons simuler numériquement un modèle non linéaire de cette instabilité. Ce modèle est développé dans l'approximation fluide ; il est tridimensionnel (donc adapté pour un tokamak) et électromagnétique, originalité de ce travail. De plus, le code opère à flux injecté constant : les gradients sont libres d'évoluer et de s'adapter selon ce flux et l'état de turbulence du système. Ce choix se rapproche des conditions rencontrées dans un tokamak où un chauffage par ondes au centre du plasma génère un flux de chaleur entrant dans la région des gradients ( $0.3 \leq r/a \leq 0.7$ ). Les simulations numériques directes du modèle ETG permettent de caractériser le transport généré par les flux turbulents non linéaires en fonction des paramètres adimensionnels du modèle. En particulier, l'attention sera portée sur le rôle du paramètre  $\beta$  afin d'éclaircir la pertinence de la formule  $\chi_e \propto 1/\beta$ . D'autres dépendances en fonction de  $\rho_*$  le rayon de Larmor électronique normalisé,  $\hat{s}$  le cisaillement magnétique et  $\epsilon$  l'inverse du rapport d'aspect seront également recherchées.

Après ce chapitre d'introduction à la problématique de la fusion magnétique ainsi qu'à l'originalité de cette thèse, le chapitre 2 sera consacré d'abord au mécanisme de déclenchement de l'instabilité ETG puis à la présentation du modèle fluide étudié. Un lecteur peu féru de considérations numériques, pourra rapidement passer sur le chapitre 3 dans lequel sont présentés les aspects numériques de la thèse avec l'élaboration d'un code de simulation. Il s'avère toujours utile lorsque l'on étudie un problème non linéaire de connaître quelques propriétés linéaires de l'instabilité. Elles sont présentées dans le chapitre 4. Enfin, les principaux résultats de notre étude du transport turbulent sont présentés dans le chapitre 5, parmi lesquels ceux liés à une des spécificités de cette thèse, l'étude d'un modèle électromagnétique. La difficulté de la confrontation de ces simulations avec les résultats expérimentaux, en particulier ceux de Tore Supra, est apparue très vite. Cependant, le court chapitre 6 retrace une tentative de confrontation directe mais délicate. On tentera malgré tout de trouver une expression générique pour le transport de la chaleur par le canal électronique.



# Chapitre 2

## Modèle de turbulence fluide pour l'instabilité ETG

Le but de ce chapitre est de présenter les considérations importantes de physique qui nous ont permis de développer un modèle fluide capable de rendre compte de l'instabilité liée au gradient de température électronique. Mais tout d'abord, il est instructif de dire quelques mots sur la classe des instabilités d'échange à laquelle appartient l'instabilité ETG.

### 2.1 Instabilité d'échange

Les instabilités d'échange ont été d'abord observées et étudiées en dynamique des fluides. Une des plus connues est l'instabilité de Rayleigh-Bénard [Ber88] dont le schéma de principe est présenté sur la figure 2.1. Lorsque l'on chauffe un liquide, contenu dans un récipient, par en dessous, il se forme un gradient de température. Ce gradient de température  $\nabla T$  est alors dans le même sens que le champ de gravitation  $\vec{g}$ . Au-delà d'un gradient de température critique, il se forme des rouleaux de convection menant à un état de turbulence. Cette instabilité opère un échange entre régions de température différentes, d'où le nom d'échange.



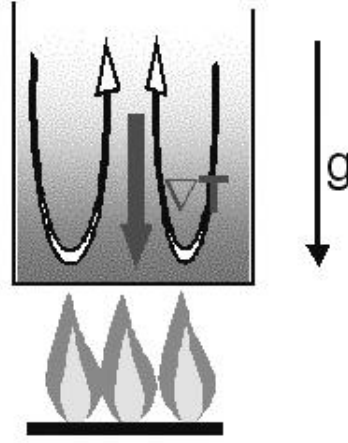


FIG. 2.1 : Schéma de principe de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Dans un plasma résistif, l'instabilité d'échange est une instabilité du type onde de dérive ( $k_\theta \rho_i \sim 1$ ). Dans un plasma non collisionnel, une onde de dérive décrite, par exemple, par l'équation d'Hasegawa-Mima [Has77] ne génère pas de transport turbulent car la réponse des électrons est adiabatique et reste marginalement stable. Par contre, pour un plasma suffisamment collisionnel, le terme de résistivité interdit à la réponse électronique d'être adiabatique. La réponse des électrons peut alors se calculer à partir de la loi de conservation de la charge :  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Un modèle paradigme d'onde de dérive collisionnelle est l'équation de Hasegawa-Wakatani [Has83], largement étudiée dans la littérature. Un exemple simple d'instabilité d'échange tiré de la MHD est le modèle ballooning résistif [Bey98] :

$$\begin{cases} d_t \rho_s^2 \nabla_\perp^2 \tilde{\phi} = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla \tilde{p} - D_\parallel \nabla_\parallel^2 \tilde{\phi} \\ d_t \tilde{p} = -\mathbf{V}_{p,e}^* \cdot \nabla \tilde{\phi} + \chi_\parallel \nabla_\parallel^2 \tilde{p} + \chi_\perp \nabla_\perp^2 \tilde{p} \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{V}_g \equiv \frac{2T_{e,eq}}{eB_{eq}} \left( \frac{\mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}} \times \frac{\nabla B_{eq}}{B_{eq}} \right)$  est la vitesse de courbure et  $\mathbf{V}_{p,e}^* \equiv \frac{T_{e,eq}}{eB_{eq}} \left( \frac{\mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}} \times \frac{\nabla p_{eq}}{p_{eq}} \right)$  est la vitesse diamagnétique électronique de pression. Pour cette instabilité, la courbure, ou plus exactement la décroissance en  $1/R$  du champ magnétique d'équilibre, joue le rôle de moteur comme la gravité dans le cas Rayleigh-Bénard.

En négligeant tous les termes de dissipation parallèle et perpendiculaire, on tire de la deuxième

équation :  $i\omega\tilde{p} = \mathbf{V}_{p,e}^* \cdot \nabla\tilde{\phi}$ . En remplaçant cette expression de  $\tilde{p}$  dans la première équation, on obtient une expression du taux de croissance de l'instabilité ( $\gamma_{lin} = \Im(\omega)$ ) :

$$\gamma_{lin}^2 = \frac{k_\theta^2}{k_\perp^2} \frac{\mathbf{V}_g \cdot \mathbf{V}_{p,e}^*}{\rho_s^2} = 2c_s^2 \left( \frac{\mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}} \times \frac{\nabla B_{eq}}{B_{eq}} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}} \times \frac{\nabla p_{eq}}{p_{eq}} \right) \quad (2.2)$$

Nous voyons donc que le mode est instable si le produit  $\mathbf{V}_g \cdot \mathbf{V}_{p,e}^*$  est positif. On parle d'instabilité de type réactif. On retrouve le critère habituel de l'instabilité d'échange : les régions où  $\nabla p_{eq} \cdot \nabla B_{eq} > 0$  sont instables. Le schéma représenté sur la figure 2.2 illustre ce critère. Cette condition reflète également la règle qui a longtemps conduit les recherches de configurations magnétiques de confinement : une configuration est stable par rapport à l'instabilité d'interchange si le maximum de pression est dans une région de minimum de champ magnétique.

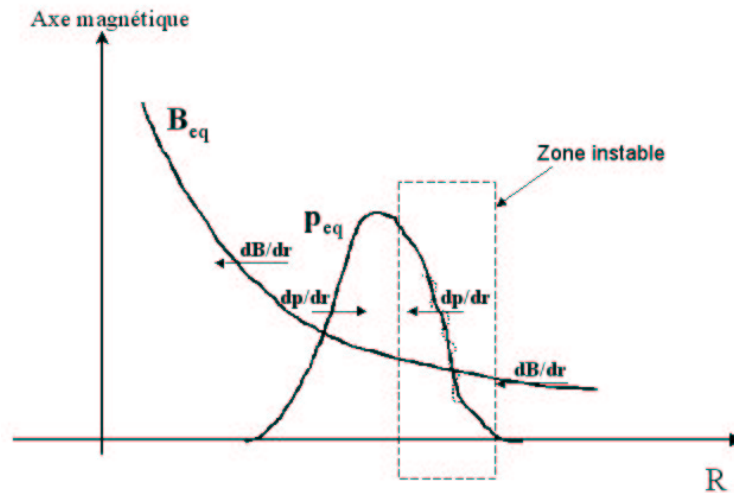


FIG. 2.2 : Schéma de l'instabilité d'échange dans la configuration tokamak.

A travers ces quelques notions, on voit que l'instabilité d'échange est un mécanisme générique et universel de génération d'instabilités dans les plasmas magnétisés et plus particulièrement dans les plasmas de tokamak. Une introduction didactique à cette problématique est la référence [Gar01b] ainsi que [Hor99].

## 2.2 L'équation de Vlasov - Approche cinétique

La structure particulière du champ magnétique d'équilibre (symétrie par rotation autour de l'axe magnétique) d'un tokamak fait qu'il existe, en première approximation, trois invariants pour ce système. En effet, la décomposition de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique d'équilibre en un mouvement rapide (le mouvement cyclotronique) et un mouvement lent (dit de centre-guide) permet la construction d'un invariant du mouvement, l'invariant adiabatique  $\mu \equiv \frac{mv_{\perp}^2}{2B_{eq}(\mathbf{x}_G)}$  où  $\mathbf{x}_G$  désigne le vecteur position du centre-guide. Grâce à l'existence de deux autres invariants, l'énergie et le moment cinétique autour de l'axe de symétrie du tokamak, le mouvement d'une particule est intégrable. La mécanique Hamiltonienne est alors particulièrement adaptée ainsi qu'une description par un système de variables angulaires et d'action  $(\alpha, J)$ .

De plus, on décrit une population de particules par une fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  et l'équation qui régit le mouvement de ces particules en l'absence de collisions, est l'équation de Vlasov

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} - [H, f] = 0 \quad (2.3)$$

où le crochet  $[H, f]$  se développe ainsi :  $[H, f] = \partial_{\alpha} H \partial_J f - \partial_J H \partial_{\alpha} f$  avec  $H$ , le Hamiltonien du système. Il se décompose en  $H = H_0 + \tilde{h}$  où  $H_0$ , le Hamiltonien d'équilibre a les bonnes propriétés d'intégrabilité mais pas  $\tilde{h}$  représentant les fluctuations. C'est donc en principe, une fonction du temps et des six variables de l'espace des phases. Mais il est inutile de connaître le détail de la fonction de distribution aux fréquences supérieures à la fréquence cyclotronique. La partie utile est donc une fonction des quatre variables lentes décrivant le mouvement du centre-guide, de l'invariant adiabatique  $\mu$ , et du temps. L'équation de Vlasov devient alors une équation girocinétique.

L'étude de cette équation n'est pas l'objet de cette thèse. Il faut cependant savoir qu'en régime linéaire, elle permet de retrouver un bon accord avec l'expérience, concernant les propriétés des instabilités d'un plasma de fusion (seuil, taux de croissance,...)[Bou00], [Fal02], [Dor00]. En régime non linéaire, le traitement numérique de l'équation girocinétique est très contraignant (convergence, mémoire, ...), ce qui impose une faible flexibilité aux codes de calculs surtout pour des simulations longues et globales. Les résultats obtenus par différentes équipes de recherche [Lin99], [Wal02], [Hat02] sont cependant encourageants .

L'autre approche pour traiter des instabilités d'un plasma est plus simple et historiquement la plus ancienne. Il s'agit de l'approche fluide présentée dans le paragraphe suivant. Afin d'étudier le transport de la chaleur dans la turbulence ETG de façon pertinente pour les tokamaks, il faut au minimum un modèle contenant 3 équations : une équation de continuité, une équation du mouvement et une équation de la chaleur –i.e. les trois premiers moments de l'équation de cinétique de dérive– auxquelles on rajoute des hypothèses de fermeture.

## 2.3 Les équations de transport dans un plasma - Approche fluide

L'approche fluide est une simplification de la théorie cinétique. Elle consiste à construire la hiérarchie des différents moments de l'équation de Vlasov 2.3 conduisant à une moyenne de la fonction de distribution pour une espèce donnée sur l'espace des vitesses. On clos cette hiérarchie par une hypothèse de fermeture. Ainsi on diminue le nombre de degrés de liberté : on passe de  $3 + 3 + 1$  dimensions (vitesse + position + temps) à  $3 + 1$  dimensions : les dimensions spatiales plus le temps : la seule température rend alors compte des caractéristiques de la fonction de distribution des vitesses<sup>7</sup>. On sous-entend donc par cette description que chaque espèce est à l'équilibre thermodynamique puisque décrite par une fonction de distribution Maxwellienne.

Cette approche ne peut donc rendre compte d'effets purement cinétiques comme les interactions ondes-particules dont l'effet Landau. Comme nous le verrons plus loin, il faut cependant tenter de rendre compte de ces effets.

On définit la densité, la vitesse fluide et la pression de l'espèce «s» à partir des moments d'ordre zéro, d'ordre un et d'ordre deux, respectivement de la fonction de distribution :

$$n_s \equiv \int f_s d_3v \quad (2.4)$$

$$\vec{u}_s \equiv \frac{1}{n_s} \int \vec{v}_s f_s d_3v \quad (2.5)$$

$$\bar{P}_s \equiv \frac{1}{m_s} \int (\vec{v} - \vec{u}_s) \otimes (\vec{v} - \vec{u}_s) f_s d_3v \quad (2.6)$$

Au début des années 1960, S.I. Braginskii fit une revue des équations régissant le transport dans les plasmas. Il établit dans l'approximation fluide six équations, 3 pour les ions et 3 pour les

<sup>7</sup>On peut cependant avoir une approche fluide où plusieurs températures sont définies.

électrons. Dans cette thèse, on s'intéresse essentiellement à la dynamique des électrons. En effet, la présence dans la formule d'Ohkawa de la fréquence plasma, Eq.(1.10) suggère que l'inertie des électrons est à prendre en compte. Or cette inertie des électrons apparaît essentiellement dans la loi d'Ohm généralisée (Eq. 2.8) mais la présence de la faible masse électronique dans cette équation appelle des fréquences caractéristiques très élevées. Les modes ETG, les seuls à se développer à ces très hautes fréquences, apparaissent donc comme des candidats possibles.

Les équations fondamentales pour cette espèce s'écrivent ainsi :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \mathbf{V}_e) = 0 \quad (2.7)$$

Equation du mouvement :

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\vec{\nabla} p_e - \vec{\nabla} \cdot \mathbf{\Pi} - en_e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \right) + \mathbf{R} \quad (2.8)$$

Equation de la chaleur :

$$\frac{3}{2} n_e \frac{dT_e}{dt} + p_e \vec{\nabla} \cdot \mathbf{V}_e = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{q}_e - \mathbf{\Pi} : \vec{\nabla} \mathbf{V}_e + \mathbf{Q}_e \quad (2.9)$$

Où  $n_e$  est la densité électronique,  $\vec{V}_e$  est la vitesse d'ensemble des électrons,  $m_e$  la masse des électrons, et  $p_e$  la pression électronique définie par  $p_e \equiv n_e T_e$ . La partie anisotrope de la pression est contenue dans le tenseur  $\mathbf{\Pi}$ . Les expressions du flux de chaleur  $\mathbf{q}$ , des moments de l'équation de Fokker-Planck  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{Q}$  sont données dans la référence [Bra65]. L'opérateur  $\frac{d}{dt}$  est la dérivée en temps Lagrangienne :  $\frac{d}{dt} = \partial_t \cdot + \mathbf{V}_e \cdot \vec{\nabla}$ .

## 2.4 La réponse ionique et électroneutralité

Comme mentionné précédemment, l'instabilité ETG devient dominante dans le domaine où  $k_{\perp} \rho_e \ll 1 \ll k_{\perp} \rho_i$ . Dans cette hypothèse, on peut considérer que les ions constituent «un fond adiabatique» : ils suivent les fluctuations du potentiel électrique comme dans un plasma non magnétisé. La réponse du plasma est alors :

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_i} = -\frac{e\tilde{\phi}}{T_i} \quad (2.10)$$

La loi de Poisson se réduit à la condition d'électroneutralité si l'écrantage Debye est supposé total<sup>8</sup>. Alors, les fluctuations de densités électronique et ionique sont reliées par

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_0} = \frac{\tilde{n}_i}{n_0} \quad (2.11)$$

où  $n_0 = n_{e,eq} = Z n_{i,eq}$ .

## 2.5 Le modèle ETG non linéaire

Nous avons construit le modèle ETG en suivant les mêmes étapes que Horton *et al* dans la référence [Hor88]. C'est pour cela que les deux modèles proposés sont proches mais pas identiques. En particulier, notre modèle contient un terme de courbure dans la loi d'Ohm généralisée, inédit par rapport au modèle proposé par [Hor88] (*cf* Annexe B). En faisant un développement autour des basses fréquences  $\omega \ll \omega_{ce}$ , et une approximation au premier ordre en  $\rho_*$  pour les termes non linéaires, nous obtenons le système (2.12), (2.13), (2.14) de trois équations non linéaires couplées. Nous supposons que la température ionique est constante, c'est pour cela qu'elle apparaît dans toutes les normalisations. En particulier, nous définissons  $\rho_*$  de la sorte :  $\rho_* = \frac{\rho_{s,e}}{r_s}$  avec  $\rho_{s,e} \equiv \frac{(T_i/m_e)^{1/2}}{\omega_{c,e}}$ . Toutes les longueurs sont normalisées à  $r_s$ , position radiale dans le plasma<sup>9</sup>. Le temps est normalisé à  $\frac{r_s^2}{\chi_B}$  avec  $\chi_B = \frac{cT_i}{eB}$  en unité *cgs*.

Le modèle non linéaire pour l'instabilité ETG est le suivant :

$$\partial_t \phi - A_n \partial_\theta \phi + 2\epsilon \omega_d (\phi - P) - \rho_*^2 [\phi, \nabla_\perp^2 \phi] - \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_\parallel (d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi) + [\psi, d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi] = -D_\phi \nabla_\perp^4 \phi \quad (2.12)$$

$$\partial_t F - 2\epsilon \omega_d (d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi) + [\phi, F] + \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_\parallel (\phi - P) + [\psi, P] = D_F \nabla_\perp^2 F \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t P + 2\Gamma(1 - \tau)\epsilon \omega_d \phi + 4\Gamma\epsilon \omega_d P + [\phi, P] + \Gamma\tau \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_\parallel (d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi) - \Gamma\tau [\psi, d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi] \\ = D_P \nabla_\perp^2 P - \frac{\epsilon}{\rho_*} X_L |\nabla_\parallel| P \end{aligned} \quad (2.14)$$

<sup>8</sup>Estimons le rapport entre la longueur de Debye et le rayon de Larmor électronique :  $\frac{\lambda_{De}^2}{\rho_e^2} = \frac{T}{4\pi n_e e^2} \frac{m_e}{T} \omega_{c,e}^2 = \frac{\omega_{c,e}^2}{\omega_{p,e}^2}$ . Au centre d'un tokamak, ce rapport est de l'ordre de l'unité. Mais comme dans la suite on travaille dans l'hypothèse où  $k_\perp^2 \rho_e^2 \ll 1$ , et donc  $k_\perp^2 \lambda_{D,e}^2 \ll 1$ , on peut supposer l'écrantage Debye total.

<sup>9</sup>Ce choix de normalisation n'est pas usuel. Par convention, on normalise plutôt au petit rayon du plasma  $a$ . Notre choix sera justifié au chapitre 3.

Ce modèle évolue donc trois champs scalaires : le potentiel électrique  $\phi$ , la pression électronique totale  $P$  et le moment canonique parallèle  $F$ . Ce champ est la quantité définie par  $F \equiv \psi - d_\star^2 \nabla_\perp^2 \psi$  et la loi d'Ampère relie la composante parallèle du potentiel vecteur et la vitesse électronique parallèle :  $V = d_\star^2 \nabla_\perp^2 \psi$  où  $d_\star = d_e/r_s$  avec  $d_e \equiv \frac{c}{\omega_{pe}}$ .

Les champs sont normalisés ainsi :  $P = \frac{P_e}{n_e T_i}$ ,  $\phi = \frac{e\tilde{\phi}}{T_i}$ ,  $V = \frac{\tilde{V}_\parallel}{v_{th,e}/\sqrt{\tau}}$ ,  $\psi = \frac{\tilde{\psi}}{ev_{th,e}/(\sqrt{\tau}T_i)}$ .

Le dernier terme de l'équation 2.14 traduit l'interaction et donc l'amortissement des ondes dans le plasma, appelé effet Landau. Cette interaction purement cinétique est assez délicate à rendre compte en régime fluide. L'approximation  $|\nabla_\parallel|P = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} |k_\parallel| \int P e^{ikx} d_3x d_3k'$  est la plus utilisée, mais n'est sûrement pas optimale. Le coefficient  $X_L$ , de l'ordre de l'unité, traduit la "force" de cette interaction.

Les opérateurs de dynamique parallèle  $\nabla_\parallel$  et de courbure  $\omega_d$  s'explicitent ainsi :

$$\nabla_\parallel = \partial_\varphi + \frac{1}{q(x)} \partial_\theta \quad \omega_d = \sin \theta \partial_x + \cos \theta \partial_\theta$$

où  $q(x)$  est le facteur de sécurité et  $x = (r - r_s)/r_{box}$ , la position radiale avec  $r_{box}$ , l'extension radiale du domaine de simulation. Les crochets de Poisson rendent compte des non linéarités du système. Lorsque le champ advectant (le champ de gauche dans le crochet) est le potentiel électrique  $\phi$ , il s'agit de la turbulence électrostatique tandis que le champ advectant  $\psi$  renvoie à la turbulence magnétique. Ces crochets sont définis de la sorte :

$$[\phi, f] \equiv \frac{\mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}} \cdot \nabla \phi \times \nabla f = \partial_x \phi \partial_\theta f - \partial_\theta \phi \partial_x f \quad [\psi, f] \equiv \frac{\mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}} \cdot \nabla \psi \times \nabla f = \partial_x \psi \partial_\theta f - \partial_\theta \psi \partial_x f$$

Les autres paramètres présents dans ce modèle sont les longueurs normalisées des gradients de densité  $A_n = \frac{r_s}{L_n}$  et de température  $A_T = \frac{r_s}{L_T}$  avec  $L_{n,T} \equiv -\frac{\nabla n_{eq}, T_{eq}}{n_{eq}, T_{eq}}$ , l'inverse du rapport d'aspect  $\epsilon \equiv r_s/R$ , le rapport des températures  $\tau = T_e/T_i$  et la constante  $\Gamma$  qui vaut 5/3 dans la théorie fluide<sup>10</sup>. Enfin, les coefficients  $D_\phi$ ,  $D_F$  et  $D_P$  rendent compte de l'intensité des collisions, source de dissipation et d'absorption des plus petites échelles spatiales. La valeur numérique de ces coefficients est établie *ad hoc* suivant la résolution et le rayon de Larmor normalisé choisis.

Une description plus détaillée du calcul menant à ce modèle est donnée dans l'annexe A.

<sup>10</sup>Cette constante a pour origine la théorie des gaz parfaits. Il s'agit du rapport des chaleurs spécifiques  $c_P/c_V$ .

# Chapitre 3

## Présentation du code ETAE3D

Ce chapitre présente la plupart des aspects numériques rencontrés dans le développement du code de calcul destiné à l'étude non-linéaire du modèle décrit au chapitre précédent. C'est pourquoi un lecteur non spécialiste du sujet pourra aisément oublier cette partie et se rendre directement aux chapitres suivants où sont présentés les résultats des simulations. On pourra également se référer au guide d'utilisation de ce code [Lab02]. Ce code de calcul est écrit en langage Fortran. Il fait évoluer temporellement les équations (2.12), (2.13), (2.14) à partir de conditions initiales. Etant donné la nature bi-périodique d'une géométrie de tokamak, il est judicieux de représenter les champs par leurs composantes de Fourier :

$$f(x, \theta, \varphi, t) = \sum_{m,n} f_{m,n}(x, t) e^{i(m\theta + n\varphi)}$$

et

$$f_{m,n}(x, t) = f_{m,n}(x) e^{i(\omega + i\gamma)t}$$

où  $f$  représente un champ, tel  $\phi$ ,  $P$  ou  $F$ .  $m$  et  $n$  sont les nombres d'onde poloïdal et toroïdal, respectivement. La coordonnée radiale est discrétisée et les dérivées radiales sont calculées par différences finies.

### 3.1 Géométrie du code

Nous venons de voir que la décomposition sur une base de Fourier est particulièrement bien adaptée à la configuration d'un tokamak. Cependant, étant donné les limitations en moyens



numériques dont on dispose, mais aussi du fait de l'émergence de longueurs caractéristiques très différentes dans le système, il est impératif et judicieux de changer légèrement la géométrie du domaine simulé. En effet, dans notre système ETG fluide, il apparaît plusieurs longueurs typiques qui s'ordonnent de la façon suivante :

$$\rho_e \leq d_e \ll r_{box} \ll L_T \sim r_s < R$$

où  $\rho_e = \frac{v_{th,e}}{\omega_{ce}}$  est le rayon de giration électronique,  $d_e = \frac{c}{\omega_{pe}}$  la longueur de peau du plasma,  $L_T$  la longueur caractéristique du gradient de température,  $r_s$  la position radiale dans le plasma et  $R$  le grand rayon du tore. Il est donc tout à fait illusoire de vouloir conserver la géométrie torique d'un tokamak qui supposerait de simuler une boîte radiale de plusieurs milliers de rayons de Larmor normalisés. L'idée de ne simuler qu'une fine tranche de plasma contenant «suffisamment» de rayons de Larmor pour décrire correctement la turbulence a été adoptée. Comme représenté schématiquement sur la figure 3.1, le tore est ouvert suivant l'angle  $\theta = \pi$  et déplié de sorte qu'il devienne un «tube» de longueur finie ( $L_\theta = 2\pi r_s$ ) mais aussi d'épaisseur donnée ( $r_{box}$ ).

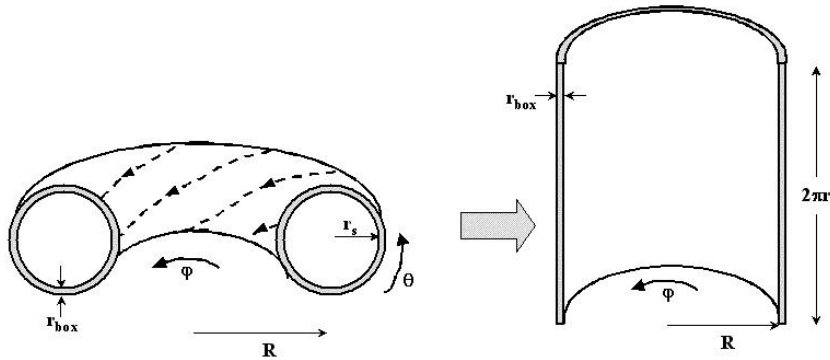


FIG. 3.1 : Géométrie torique modifiée pour le code ETAE3D.

Les surfaces magnétiques d'équilibre sont circulaires et concentriques. Il n'y a donc pas de décalage de Shafranov. Ceci peut être une contrainte néfaste pour le modèle lorsque  $\beta$  tend vers des valeurs fortes. Suivant les paramètres physiques de chaque simulation, on adapte la résolution du domaine simulé par le code, c'est-à-dire le nombre de points nécessaires pour discrétiser correctement les trois directions  $r, \theta, \varphi$ . Le paramètre essentiel pour déterminer la résolution est

le rayon de Larmor électronique normalisé  $\rho_*$  car on suppose a priori que la longueur de corrélation typique de la turbulence étudiée varie comme le rayon de Larmor. On détermine ensuite le nombre de points poloïdaux par la relation  $k_{\theta,max}\rho_* \sim 1.5$  puisque l'on suppose que la turbulence doit se développer autour de  $k_{\theta}\rho_* \simeq 1$ . Le nombre de points toroïdaux est déterminé par la relation  $k_{\varphi,max} \sim \frac{k_{\theta,max}}{q_{min}}$  où  $q_{min}$  est le minimum du profil de sécurité choisi explicitement. On fixe donc trois nombres  $nr$ ,  $npol$ ,  $ntor$  pour discrétiser respectivement les directions radiale, poloïdale et toroïdale. La figure 3.2 représente de façon schématique le domaine des modes poloïdaux et toroïdaux indispensables pour une représentation correcte dans l'espace de Fourier. Ces modes de Fourier  $(m, n)$  ont trois propriétés nécessaires : le mode  $(0, 0)$  doit être un mode réel pur, il représente le profil d'équilibre des champs ; les modes  $(0, n)$  et  $(0, -n)$  doivent être complexes conjugués l'un de l'autre ; et enfin cette propriété de conjugaison doit aussi s'appliquer aux modes  $(m, n)$  et  $(-m, -n)$ . La dernière propriété fait que le domaine nécessaire est considérablement réduit : la zone hachurée de la figure 3.2 n'est pas nécessaire puisque les modes la composant peuvent être construits à partir des modes de l'aire non hachurée. Finalement, la taille spatiale des champs  $\phi$ ,  $P$ ,  $F \dots$  est la suivante :  $f(nr, ntor, npol/2 + 1)$

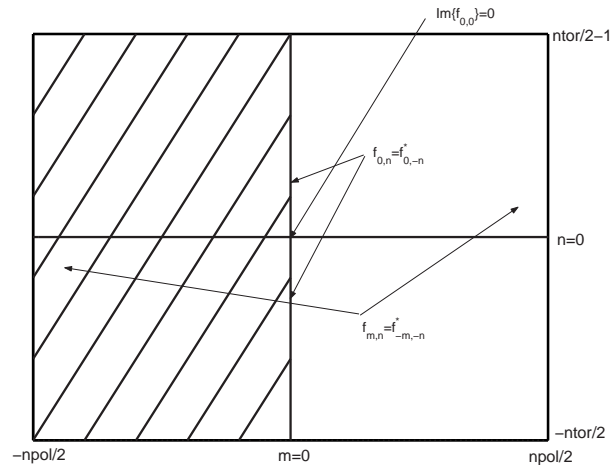


FIG. 3.2 : Domaine des modes utilisés dans le code.

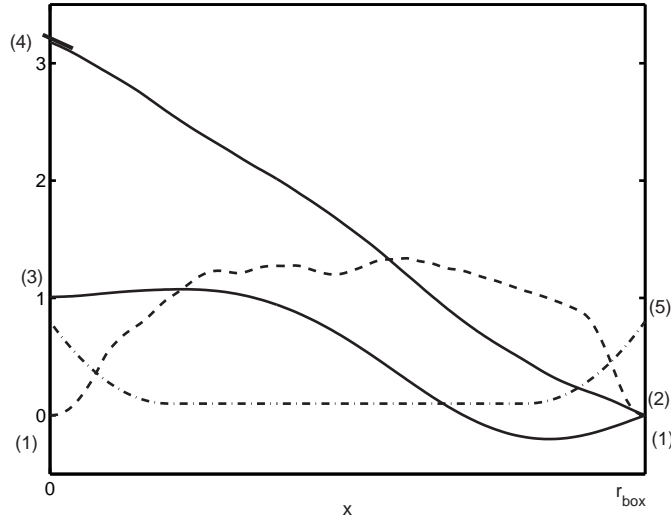
## Conditions au bord radiales

Nous avons fait le choix pour ce code d'opérer à flux fixé plutôt qu'à gradient fixé. Cela suppose des conditions particulières pour les champs aux deux extrémités radiales : bords intérieur et extérieur ; pour les directions poloïdale et toroïdale, les conditions sont périodiques.

L'énergie est injectée dans le système au niveau du bord intérieur :

$$\Gamma_{inj} = -\chi_{coll}(x=0)\nabla_x P|_{x=0}$$

Ce flux entrant est constant au cours du temps donc les deux paramètres  $\chi_{coll}(x=0)$  et  $\nabla_x P|_{x=0}$  sont fixés en début de simulation.



**FIG. 3.3 :** Schéma des conditions aux bords radiales pour les profils d'équilibre (trait plein), profils de fluctuations (tirets), profil de conductivité collisionnelle (tiret-point).

Sur la figure 3.3, les conditions au bord choisies sont schématisées :

(1) Tous les champs fluctuants sont mis à zéro aux deux bords :

$$f_{m \neq 0, n \neq 0}(x=0) = f_{m \neq 0, n \neq 0}(x=r_{box}) = 0$$

(2) Les champs d'équilibre sont mis à zéro au bord extérieur :  $f_{m=0, n=0}(x=r_{box}) = 0$

(3) Les gradients de  $\phi_{0,0}$  et  $F_{0,0}$  sont nuls en  $x=0$  :  $\nabla_x \phi|_{x=0} = \nabla_x F|_{x=0} = 0$

(4) Le gradient de  $P_{0,0}$  est fixé et non nul en  $x=0$  :  $\nabla_x P|_{x=0} = A_P$ . C'est par ce biais là que l'on fixe le flux injecté :  $\Gamma_{inj} = \chi_{coll} A_P$ .

(5) Ce profil représente la conductivité collisionnelle  $\chi_{coll}$  : pour la partie d'équilibre, on veut que le flux collisionnel soit bien plus grand à l'entrée de la boîte qu'au milieu de celle-ci (où c'est le flux turbulent qui domine) afin d'éviter des gradients excessivement grands. Augmenter  $\Gamma_{coll}$  à gradient fixé revient à augmenter  $\chi_{coll}$ . Au bord extérieur, l'augmentation de la conductivité évite la formation d'une couche thermique. Pour les fluctuations,

l'augmentation aux bords de  $\chi_{coll}$  permet d'amortir les forts gradients issus du couplage toroïdal dû à la courbure : on ne peut imposer  $\langle \tilde{V}_x \tilde{T} \rangle$  aux bords.

## 3.2 Avancement temporel

D'une manière tout à fait générale, l'équation d'évolution des champs peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \left( \hat{C} + \hat{P} + \hat{D} \right) \mathbf{f}$$

où  $\mathbf{f}$  représente les trois champs dynamiques. Les opérateurs  $\hat{C}$ ,  $\hat{P}$  et  $\hat{D}$  traitent respectivement les non-linéarités, c'est-à-dire les crochets de Poisson mais aussi les termes de courbure, le transport le long du champ magnétique d'équilibre et les termes de dissipation [Ott99]. D'une manière tout à fait générale, une solution d'une équation différentielle du premier ordre  $\partial_t \mathbf{f}(t) - a\mathbf{f}(t) = 0$  est du type  $\mathbf{f}(t) = k e^{at}$  à condition que  $a$  soit indépendant du temps. Dans le cas d'un traitement numérique, le choix du schéma temporel revient à celui d'une approximation de l'exponentielle.

Une analyse permet d'identifier au moins trois échelles de temps différentes dans le système correspondant au mouvement parallèle, à la convection perpendiculaire et à la dissipation collisionnelle. La stratégie adoptée est de traiter séparément ces trois échelles par une technique de séparation (*splitting* en anglais), et d'utiliser des schémas numériques différents pour chacune d'elles. On choisit de traiter implicitement tous les opérateurs qui ne sont pas fondamentaux pour la physique étudiée (ici,  $\hat{P}$  et  $\hat{D}$ ). Ainsi, aux échelles de temps où se passe la physique, la stabilité de ces opérateurs est assurée. Par contre, l'opérateur  $\hat{C}$  contient la majeure partie de la physique liée à l'instabilité ETG donc nous choisissons un traitement explicite. La technique de *splitting* assure une précision au deuxième ordre en temps. Détaillons :

$$e^{\mathcal{L}\Delta t} \equiv e^{(\hat{P}+\hat{D})\Delta t} \stackrel{11}{=} e^{\hat{P}\Delta t} e^{\hat{D}\Delta t} \rightarrow d_t (e^{-\mathcal{L}\Delta t} \mathbf{f}) = e^{-\mathcal{L}\Delta t} \hat{C} e^{\Delta t} \mathbf{f}$$

$$e^{-\mathcal{L}2\Delta t} \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_{n-1} = 2\Delta t e^{-\mathcal{L}\Delta t} \hat{C} \mathbf{f}_n$$

Une solution formelle entre les temps  $t_{n-1}$  et  $t_{n+1}$  est la suivante :

$$\mathbf{f}_{n+1} = e^{\hat{P}\Delta t} e^{\hat{D}2\Delta t} e^{\hat{P}\Delta t} \mathbf{f}_{n-1} + 2\Delta t e^{(\hat{P}+\hat{D})\Delta t} \hat{C} \mathbf{f}_n$$

<sup>11</sup>Rigoureusement, les opérateurs  $\hat{P}$  et  $\hat{D}$  ne commutent pas mais on peut montrer que le résidu de cette approximation est de l'ordre  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ .

$\mathbf{f}_{n+1}$  peut ainsi être obtenu en suivant ces cinq étapes :

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \mathbf{f}_{n-1}^* &= e^{\hat{P}\Delta t}\mathbf{f}_{n-1} \\
 (ii) \quad \mathbf{f}_{n-1}^{**} &= e^{\hat{D}\Delta t}\mathbf{f}_{n-1}^* \\
 (iii) \quad \mathbf{f}_{n+1}^* &= \mathbf{f}_{n-1}^{**} + 2\Delta t\hat{C}\mathbf{f}_n \\
 (iv) \quad \mathbf{f}_{n+1}^{**} &= e^{\hat{D}\Delta t}\mathbf{f}_{n+1}^* \\
 (v) \quad \mathbf{f}_{n+1} &= e^{\hat{P}\Delta t}\mathbf{f}_{n+1}^{**}
 \end{aligned}$$

L'étape (iii) correspond à un traitement explicite de  $\hat{C}$  par une méthode *leap-frog* [Pre92] (parfois on parle en français de schéma saute-mouton<sup>12</sup> ou de Verlet). Cette méthode nécessite de connaître les champs à deux temps antérieurs, ce qui n'est évidemment pas le cas à  $t = 0$ . L'initialisation du schéma *leap-frog* se fait par un schéma prédicteur-correcteur :

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \frac{\Delta t}{2} [\text{RHS}(\mathbf{f}_n) + \text{RHS}(\mathbf{f}_{n+1})]$$

où RHS (Right Hand Side) symbolise tout opérateur à faire avancer en temps. Dans le code, cette étape est décomposée en 2 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{n+1}^* &= \mathbf{f}_n + \frac{\Delta t}{2}\text{RHS}(\mathbf{f}_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
 \mathbf{f}_{n+1} &= \mathbf{f}_n + \Delta t\text{RHS}(\mathbf{f}_{n+1}^*)
 \end{aligned}$$

Ce schéma sera rappelé régulièrement au cours de la simulation car plus stable que le schéma *leap-frog* mais 2 fois plus long...

### 3.3 Inversion du Laplacien

Le calcul d'un laplacien ou son inversion sont des opérations très fréquentes dans l'évolution des équations. A chaque itération, il faut calculer par exemple  $W$  défini par  $W \equiv -\rho_*^2 \nabla_{\perp}^2 \phi$  mais aussi  $\psi$  par la relation  $F \equiv (1 - d_*^2 \nabla_{\perp}^2) \psi$ . De plus, le traitement des termes de dissipation du type  $D_P \nabla_{\perp}^2 P$  nécessite également l'inversion d'un laplacien. Le laplacien s'écrit dans notre cas :

$$\nabla_{\perp}^2 f = \partial_x^2 f(x, \theta) + \partial_{\theta}^2 f(x, \theta)$$

<sup>12</sup>C'est en fait le terme originel ; ce schéma ayant été initialement développé par des français.

En utilisant les différences finies pour la partie radiale et les propriétés de la dérivée dans l'espace de Fourier, la discrétisation de cet opérateur est :

$$\partial_{\perp}^2 f_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} - m^2 f_i$$

où  $m$  est le nombre d'onde poloidal, et  $i$  la position sur la grille radiale.

On constate qu'écrit sous forme matricielle, l'opérateur  $\nabla_{\perp}$  précédent est tridiagonal. Grâce à des algorithmes précis, l'inversion d'un opérateur tridiagonal peut être rapide [Pre92].

Le traitement de la dissipation consiste à résoudre une équation de diffusion

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \nabla_{\perp} (\chi(x) \nabla_{\perp} \mathbf{f}) \equiv \hat{D} \mathbf{f} = \partial_x \chi(x) \partial_x \mathbf{f} + \chi(x) \partial_{xx} \mathbf{f} - \chi(x) m^2 \mathbf{f}$$

Une solution formelle est

$$\mathbf{f}_{n+1} = e^{\hat{D} \Delta t} \mathbf{f}_n$$

Le schéma implicite choisi est un schéma Crank-Nicolson, consistant à approximer l'exponentielle par

$$e^{\hat{D} \Delta t} \simeq \frac{1 + \Delta t \hat{D} / 2}{1 - \Delta t \hat{D} / 2} + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Ce qui donne, après calcul, dans le cas général où  $\chi$  dépend de  $x$

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left\{ \left[ \chi_i + \frac{\chi_{i+1} - \chi_{i-1}}{4} \right] \mathbf{f}_{i+1}^{n+1} + \left[ \chi_i - \frac{\chi_{i+1} - \chi_{i-1}}{4} \right] \mathbf{f}_{i-1}^{n+1} \right\} + \left[ 1 + \chi_i \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{2}{(\Delta x)^2} + m^2 \right) \right] \mathbf{f}_i^{n+1} \\ & = \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2} \left\{ \left[ \chi_i + \frac{\chi_{i+1} - \chi_{i-1}}{4} \right] \mathbf{f}_{i+1}^n + \left[ \chi_i - \frac{\chi_{i+1} - \chi_{i-1}}{4} \right] \mathbf{f}_{i-1}^n \right\} + \left[ 1 - \chi_i \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{2}{(\Delta x)^2} + m^2 \right) \right] \mathbf{f}_i^n \end{aligned}$$

de la forme :

$$b_1 \mathbf{f}_{i+1}^{n+1} + b_3 \mathbf{f}_{i-1}^{n+1} + (b_2 + m^2) \mathbf{f}_i^{n+1} = a_1 \mathbf{f}_{i+1}^n + a_3 \mathbf{f}_{i-1}^n + (a_2 + m^2) \mathbf{f}_i^n$$

Les coefficients  $a_{1,2,3}$  et  $b_{1,2,3}$  sont calculés une seule fois en début de simulation car ils n'évoluent pas. A nouveau, l'inversion d'une matrice tridiagonale permet de déterminer les champs au temps  $n + 1$ . On fera attention à prendre des conditions aux limites compatibles avec l'injection de flux :

$$\mathbf{f}_{m \neq 0, n \neq 0}(x = 0) = \mathbf{f}_{m \neq 0, n \neq 0}(x = r_{box}) = \mathbf{f}_{m=0, n=0}(x = r_{box}) = 0$$

et

$$\mathbf{f}_{m=0, n=0}(x = 0) = \mathbf{f}_{m=0, n=0}(\Delta x) - A_f \times \Delta x$$

où  $A_f$  représente le gradient du champ  $f$  au bord intérieur.

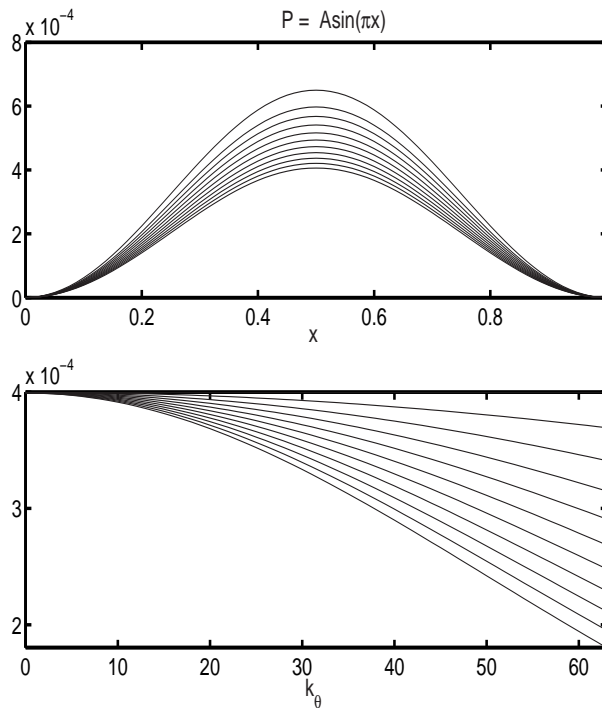
Ici, un test rapide du sous-programme de dissipation seule avec le code est présenté : l'équation à résoudre est

$$\partial_t \mathbf{f} - \chi_f \nabla_{\perp}^2 \mathbf{f} = 0$$

soit

$$(\gamma - \chi_f k_{\perp}^2) \mathbf{f} = 0$$

avec  $\mathbf{f}$  représentant  $P$  ou  $F$  (pour  $\phi$ , il faut un traitement différent, cf § suivant). Pour tester la partie radiale, nous choisissons une fonction propre de l'opérateur :  $\mathbf{f}(x) = \sin(\pi x)$  qui doit rester une sinusoïde au cours du temps si la dissipation est bien traitée. Sur la figure 3.4 (courbe du haut) est représentée l'évolution temporelle de la fonction test : son comportement est correct. En ce qui concerne la partie poloïdale, la dissipation introduit un amortissement proportionnel à  $m^2$ . C'est ce que l'on observe sur la courbe du bas de la figure 3.4.



**FIG. 3.4 :** Test de la procédure de dissipation pour la partie radiale (haut) et pour la partie poloïdale (bas).

### 3.4 Traitement de l'hyper-diffusion

Le terme d'hyperdiffusion n'était pas présent à l'origine dans le développement du code. Seul un terme de dissipation classique était présent. Mais si l'on fait un petit calcul à la Kolmogorov [Kol41], comme ci-dessous sur la cascade d'énergie en supposant un spectre d'énergie donné, on se rend compte que la cascade d'entrophie doit être absorbée.

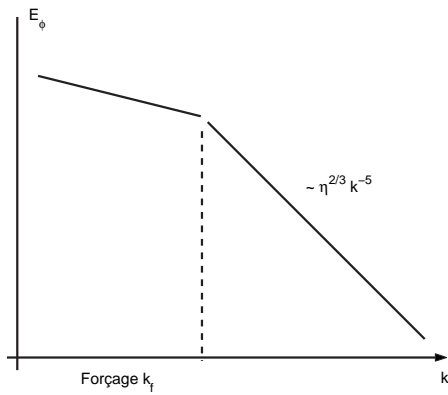


FIG. 3.5 : Schéma d'un spectre d'énergie à la Kolmogorov avec un forçage.

$$\begin{aligned} \partial_t \phi - [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] &= D_{\phi} \nabla_{\perp}^2 \phi \quad (1) \\ &= -D_w \nabla_{\perp}^4 \phi = D_w \nabla_{\perp}^2 W \quad (2) \end{aligned}$$

$$\int \phi^2 = \int E_{\phi}(k) dk$$

$$\begin{aligned} \underbrace{(1) \rightarrow \partial_t \int \frac{(\nabla \phi)^2}{2}}_{-\eta} &= -D_{\phi} \int (\nabla^2 \phi)^2 \\ &= -D_{\phi} \eta^{2/3} \int k^{-1} dk \\ &= D_{\phi} \eta^{2/3} \ln \frac{k_n}{k_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{(2) \rightarrow \partial_t \int \frac{(\nabla \phi)^2}{2}}_{-\eta} &= -D_w \eta^{2/3} \int k dk \\ &= -D_w \eta^{2/3} k_n^2 \end{aligned}$$

Les deux intégrales (1) et (2) sont non bornées mais la coupure dans le premier cas est physiquement impossible ( $k \rightarrow \infty$ ) tandis que la deuxième forme de dissipation introduit un nombre d'onde fini  $k_{diss}$  physiquement acceptable. C'est donc pourquoi, nous avons utilisé ce terme d'hyperdiffusion que l'on rencontre souvent en mécanique des fluides [Fri95]. A chaque itération, l'équation suivante doit être résolue :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -D_{\phi} \nabla_{\perp}^4 \phi \equiv -\hat{D} \phi$$

L'opérateur  $\hat{D}$  s'explique de la façon suivante

$$\hat{D} = D_{\phi} \nabla_{\perp}^4 = D_{\phi} (\partial_x^2 - m^2)^2 = D_{\phi} (\partial_x^4 - 2m^2 \partial_x^2 + m^4)$$



où  $m$  est le nombre d'onde poloïdal. La discrétisation radiale au point  $i$  de l'opérateur  $\hat{D}$  s'écrit :

$$\hat{D}\phi_i = D_\phi \left[ \frac{\phi_{i+2} - 4\phi_{i+1} + 6\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{\Delta x^4} - 2m^2 \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + m^4 \phi_i \right]$$

On a choisi d'implanter dans le code un schéma totalement implicite :

$$\phi^{n+1} = \left(1 + \Delta t \hat{D}\right)^{-1} \phi^n + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Il faut alors calculer la matrice  $1 + \Delta t \hat{D}$  puis l'inverser. Cette matrice n'évolue pas au cours du temps. Elle est calculée une seule fois en début de simulation. Au vu de la discrétisation, cette matrice est pentadiagonale. Les conditions aux bords de la boîte de simulation permettent de définir les coefficients aux coins supérieur gauche et inférieur droit de la matrice.

On distinguera deux cas suivant, que l'on traite l'équilibre ( $m = 0, n = 0$ ) ou les fluctuations ( $m \neq 0, n \neq 0$ ).

Conditions aux bords :

Equilibre	$m = 0, n = 0$	$\partial_x \phi_0 = 0$	$\partial_x^3 \phi_0 = 0$	$\phi_N = 0$	$\partial_x^2 \phi_N = 0$
Fluctuations	$m \neq 0, n \neq 0$	$\phi_0 = 0$	$\partial_x^2 \phi_0 = 0$	$\phi_N = 0$	$\partial_x^2 \phi_N = 0$

En utilisant les développements de Taylor aux points de bord, on peut montrer que la matrice  $\hat{D}$  pour l'équilibre s'écrit :

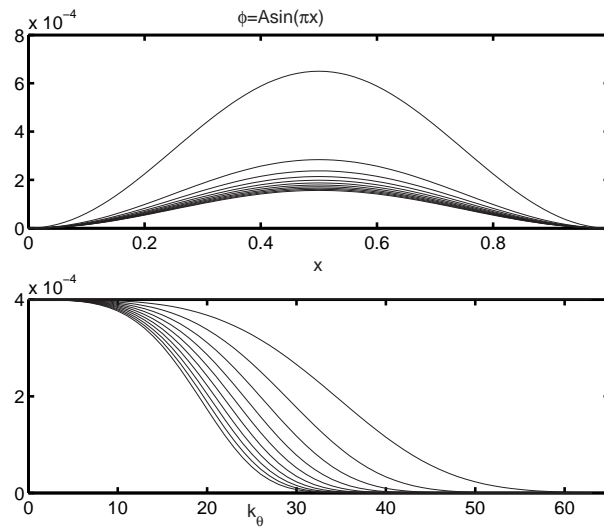
$$\mathcal{D}(m = 0, n = 0) = \frac{D_\phi}{(\Delta x)^4} \begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -4 & 7 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 5 & -4 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour les modes des fluctuations, la matrice est un peu plus compliquée. Elle reste cependant symétrique par rapport aux deux diagonales. C'est pour cela que n'est écrit ci-dessous que le coin gauche supérieur de cette matrice d'hyper-diffusion.

$$\mathcal{D}(m \neq 0, n \neq 0) =$$

$$D_\phi \begin{pmatrix} \frac{6}{\Delta x^4} + \frac{4m^2}{\Delta x^2} + m^4 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{4}{\Delta x^4} - \frac{2m^2}{\Delta x^2} & \frac{5}{\Delta x^4} + \frac{4m^2}{\Delta x^2} + m^4 & -\frac{4}{\Delta x^4} - \frac{2m^2}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta x^4} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{\Delta x^4} & -\frac{4}{\Delta x^4} - \frac{2m^2}{\Delta x^2} & \frac{6}{\Delta x^4} + \frac{4m^2}{\Delta x^2} + m^4 & -\frac{4}{\Delta x^4} - \frac{2m^2}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta x^4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Tout comme pour le traitement de la dissipation simple, cette matrice est heureusement relativement simple puisque elle reste pentadiagonale. Sa décomposition pratique et son inversion sont donc plus rapides grâce aux algorithmes issus de l'algèbre linéaire [Pre92]. Cette matrice 3D a pour dimension :  $nrmax \times nrmax \times mmax$ . A chaque itération, on avance  $\phi$  suivant le schéma implicite précédent. Nous avons testé cette sous-routine à partir d'une fonction propre sinusoïdale en  $x$  :  $\phi \propto \sin(\pi x)$ . Pour la partie poloïdale, l'amortissement est proportionnel à  $m^4$ . Ce test est illustré sur la figure 3.6.



**FIG. 3.6 :** Test de la sous-routine d'hyperdiffusion pour la partie radiale (haut) et la partie poloïdale (bas).

### 3.5 Crochets de Poisson

Les termes dus aux crochets de Poisson sont calculés par un schéma explicite au temps  $t$ .

L'opérateur  $[\cdot, \cdot]$  s'écrit explicitement, dans l'espace réel :

$$[f(x, \theta, \varphi), g(x, \theta, \varphi)] \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

Au temps  $n$  :  $\partial_t \mathbf{f} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}]$  soit :  $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_{n-1} + 2\Delta t [\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ . L'idée adoptée est de calculer les dérivées par rapport à  $\theta$  dans l'espace de Fourier («simple multiplication par  $im$ » [Cha73]) puis de passer dans l'espace réel afin d'y effectuer les multiplications entre dérivées et enfin de repasser dans l'espace de Fourier. Nous utilisons pour cela un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) [Ell82] et son inverse. Ces algorithmes sont programmés par exemple dans la librairie NAG®(Numerical Algorithms Group)<sup>13</sup>. A chaque pas de temps, le calcul d'un crochet de Poisson nécessite l'appel de 5 sous-programmes de FFT et il y a 5 crochets de Poisson à calculer à chaque itération. On voit donc que ces opérations sont de grandes consommatrices de temps de calcul. On fera attention d'éliminer les effets indésirables dus à la superposition de fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist, ce que l'on appelle le phénomène d'aliasing en théorie du signal [Max96], [Pre92].

### 3.6 Courbure

Les termes de courbure sont calculés explicitement au temps  $t$ . L'opérateur de courbure s'écrit dans l'espace réel :

$$\omega_d = \sin \theta \partial_x + \cos \theta \partial_\theta$$

Au temps  $n$  :

$$\partial_t \mathbf{f} = \omega_d \mathbf{g}$$

soit :

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_{n-1} + 2\Delta t \omega_d \mathbf{g}$$

Tout d'abord, rappelons la décomposition en série de Fourier d'un champ  $\mathbf{g}$  :

$$\mathbf{g}(x, m, n) = \sum_{m,n} g_{m,n}(x) e^{i(m\theta+n\varphi)}$$

<sup>13</sup>On trouvera les possibilités de cette librairie sur le site <http://www.nag.org>.

Explicitons l'opérateur  $\omega_d$  :

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \quad & \cos \theta \partial_\theta \sum_{m,n} g_{m,n}(x) e^{i(m\theta+n\varphi)} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \sum_{m,n} g_{m,n}(x) i m e^{i(m\theta+n\varphi)} \\
& = \frac{i}{2} \sum_{m,n} g_{m,n}(x) m \{ e^{i[(m+1)\theta+n\varphi]} + e^{i[(m-1)\theta+n\varphi]} \} \\
& = \frac{i}{2} [(m-1)\mathbf{g}(x, m-1, n) + (m+1)\mathbf{g}(x, m+1, n)] \\
\longrightarrow \quad & \sin \theta \partial_x \sum_{m,n} g_{m,n}(x) e^{i(m\theta+n\varphi)} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \partial_x \left[ \sum_{m,n} g_{m,n}(x) e^{i(m\theta+n\varphi)} \right] \\
& = \frac{i}{2} \partial_x \left[ \sum_{m,n} g_{m,n}(x) \{ e^{i[(m+1)\theta+n\varphi]} - e^{i[(m-1)\theta+n\varphi]} \} \right] \\
& = \frac{i}{2} [\partial_x \mathbf{g}(x, m+1, n) - \partial_x \mathbf{g}(x, m-1, n)] \\
& = \frac{i}{2} \left[ \frac{\mathbf{g}(x + \Delta x, m+1, n) - \mathbf{g}(x - \Delta x, m+1, n)}{2\Delta x} \right] \\
& \quad - \frac{i}{2} \left[ \frac{\mathbf{g}(x + \Delta x, m-1, n) - \mathbf{g}(x - \Delta x, m-1, n)}{2\Delta x} \right]
\end{aligned}$$

Le cas  $m = 0$  est traité de la même façon grâce à la propriété suivante :

$$\mathbf{g}^*(x, m, n) = \mathbf{g}(x, -m, -n)$$

où le symbole \* désigne le complexe conjugué. La courbure du champ magnétique couple donc radialement et poloïdalement les différents modes entre plus proches voisins. Cependant, on évitera que cet opérateur ne génère des modes ( $m = 1, n = 0$ ) par  $\sin \theta \partial_x (\phi_{0,0} - P_{0,0})$  et  $2 \sin \theta \partial_x P_{0,0}$ . Ces modes de grande échelle seraient de trop forte amplitude par rapport aux modes de petites échelles, caractéristiques de la turbulence. C'est pourquoi dans les quatre sous-programmes du code qui traitent la courbure, nous mettons explicitement les termes  $\sin \theta \partial_x$  appliqués à un champ d'équilibre à la valeur 0. Par compensation, il est correct de s'assurer qu'il n'y a aucune génération de termes ( $m = 0, n = 0$ ) par les modes ( $m = 1, n = 0$ ). Ces modes générés par la courbure sont appelés Geodesic Acoustic Modes. Les modes ( $m = 0, n = 0$ ) du potentiel électrique sont appelés communément des «écoulements zonaux» (Zonal Flows en anglais). Ces objets ont été très étudiés car ils jouent un rôle important dans la dynamique et le niveau de saturation d'une turbulence donnée. Un des premiers articles sur le sujet est

la référence [Big90]. Résumons notre choix : il n'y a pas de couplage par la courbure entre  $(m = 0, n = 0)$  et  $(m = 1, n = 0)$ . On pourrait, dans un travail futur, s'affranchir de la restriction concernant la génération de modes  $(m = 0, n = 0)$ . Ainsi, l'étude de l'impact sur le transport des *zonal flows* résultants pourrait être approfondie.

### 3.7 Transport Parallèle

La résolution de la dynamique parallèle se fait via un schéma implicite. Cependant, au lieu d'utiliser un schéma Crank-Nicolson, il est préférable d'écrire un schéma moins oscillant. Ce schéma est basé sur l'approximation de Padé [Man99]. Cette approximation consiste à écrire

$$\exp(-\hat{P}\Delta t) \simeq \frac{1 + \alpha\hat{P}\Delta t}{(1 + \beta_+\hat{P}\Delta t)(1 + \beta_-\hat{P}\Delta t)}$$

où  $\alpha$ ,  $\beta_+$  et  $\beta_-$  sont des coefficients réels reliés entre eux. Il nous faut résoudre à chaque itération :

$$\begin{cases} \partial_t \phi = \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_{\parallel} V \\ \partial_t F = -\frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_{\parallel} (\phi - P) \\ \partial_t P = -\frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_{\parallel} V - \frac{\epsilon}{\rho_*} X_L |\nabla_{\parallel}| P \end{cases}$$

soit :

$$\partial_t \mathbf{f} = - \begin{pmatrix} 0 & -i\hat{k}_{\parallel} \frac{d_*^2 \nabla_{\perp}^2}{1 - d_*^2 \nabla_{\perp}^2} & 0 \\ i\hat{k}_{\parallel} & 0 & -i\hat{k}_{\parallel} \\ 0 & i\hat{k}_{\parallel} \frac{d_*^2 \nabla_{\perp}^2}{1 - d_*^2 \nabla_{\perp}^2} & X_L |k_{\parallel}| \end{pmatrix} \mathbf{f} = -\hat{P} \mathbf{f}$$

Une solution formelle au temps  $n + 1$  s'écrit :

$$\left(1 + \beta_+ \Delta t \hat{P}\right) \left(1 + \beta_- \Delta t \hat{P}\right) \mathbf{f}_{n+1} = \left(1 + \alpha \Delta t \hat{P}\right) \mathbf{f}_n$$

On la décompose en deux étapes :

$$\left(1 + \beta_+ \Delta t \hat{P}\right) \mathbf{f}_n^* = \left(1 + \alpha \Delta t \hat{P}\right) \mathbf{f}_n$$

$$\left(1 + \beta_- \Delta t \hat{P}\right) \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n^*$$

La première étape donne une expression de  $\psi_n^*$  en fonction de  $\psi_n$ ,  $\phi_n$  et  $P_n$  :

$$\psi_n^* - \mathcal{A}(\beta_+, k_{\parallel}, \Delta t, X_L, d_*^2) \nabla_{\perp}^2 \psi_n^* = \psi_n - \mathcal{B}(\alpha, \beta_+, k_{\parallel}, \Delta t, X_L, d_*^2) \nabla_{\perp}^2 \psi_n$$

$$+i\mathcal{C}(\alpha, \beta_+, k_{\parallel}, \Delta t)\phi_n - i\mathcal{D}(\alpha, \beta_+, k_{\parallel}, \Delta t, X_L)P_n$$

L'inversion de la matrice tridiagonale  $1 - \mathcal{A}$  permet de déterminer  $\psi_n^*$ . Connaissant  $\psi_n^*$ , on calcule directement  $V_n^*$  par  $V_n^* = d_*^2 \nabla_{\perp}^2 \psi_n^*$ . Connaissant  $V_n^*$ , on calcule  $\phi_n^*$ ,  $P_n^*$  et  $F_n^*$ .

La deuxième étape donne  $\psi_{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{f}_{n+1}$  :

$$\psi_{n+1} - \mathcal{A}_1(\beta_-, k_{\parallel}, \Delta t, X_L, d_*^2) \nabla_{\perp}^2 \psi_{n+1} =$$

$$F_n^* - i\mathcal{C}_1(\beta_-, k_{\parallel}, \Delta t)\phi_n^* + i\mathcal{D}_1(\beta_-, k_{\parallel}, \Delta t, X_L)P_n^*$$

Sur le même principe, l'inversion de  $1 - \mathcal{A}_1$  donne  $\psi_{n+1}$ . On calcule ensuite  $V_{n+1}$ ,  $\phi_{n+1}$ ,  $P_{n+1}$  et enfin  $F_{n+1}$ .

Dans [Man99], les auteurs montrent qu'il existe une relation entre  $\beta_{\pm}$  et  $\alpha$ . Afin que  $\beta_{\pm}$  restent réels, il faut  $\alpha \leq 1 - \sqrt{2}$  ou  $\alpha \geq 1 + \sqrt{2}$ . En pratique, nous avons choisit  $\alpha = -\frac{1}{2}(1 + X_L)$ , de sorte que  $X_L = 0$  redonne un schéma Crank-Nicolson.

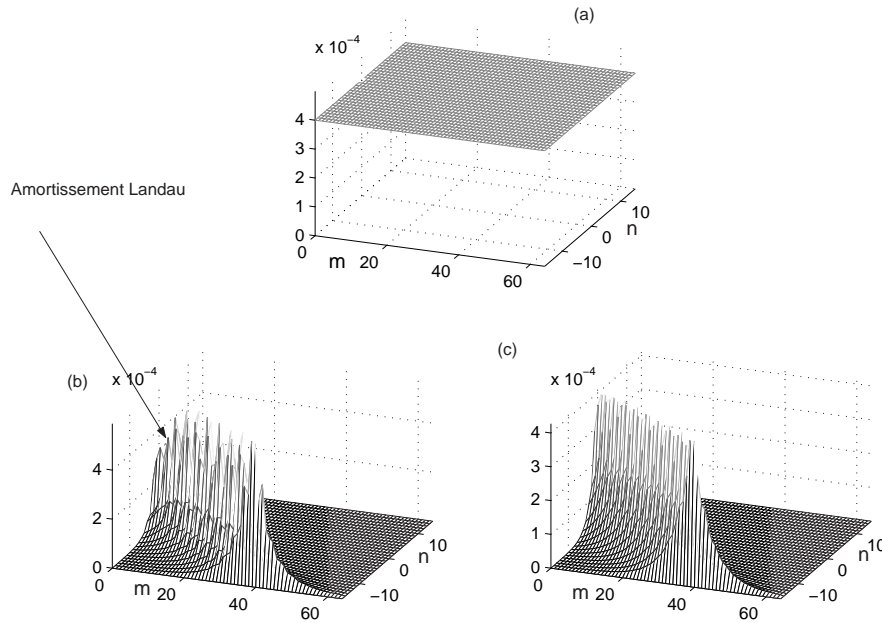


FIG. 3.7 : Test de la procédure de transport parallèle.

La figure 3.7 rend compte du test de cette sous-routine. Les spectres sont représentés à une position radiale ( $x = 0.5$ ) et un temps donné. En partant d'un état initial (a) identique pour tous les champs, on fait tourner le code avec la dynamique parallèle seule. Au bout, d'un temps

très court (ici,  $t = 0.1$  dans nos unités), seuls les modes résonants – i.e. les modes tels que  $k_{\parallel} \approx 0$ , soit  $m \approx n \cdot q(x = 0.5)$  – ne sont pas amortis par la dynamique parallèle. De plus, la signature de l’amortissement Landau apparaît sur le spectre de la pression (b) aux faibles valeurs de  $(m, n)$ . Le spectre du potentiel électrique (c) n’est pas affecté par cet amortissement puisque dans ce test les équations sont découplées (ce ne sera évidemment plus le cas en régime non-linéaire).

### 3.8 Validation du code : conservation de l’énergie et des invariants non linéaires

Dans les paragraphes précédents, nous avons illustré le traitement du transport parallèle et de la dissipation par des exemples afin de valider ces sous-programmes. Cependant, une façon plus complète et plus rigoureuse de valider un code de calcul numérique est de vérifier qu’il conserve bien l’énergie mais également les invariants non linéaires définis par la suite. Intéressons-nous tout d’abord à l’équation du transport de la chaleur.

#### 3.8.1 Equation du transport de la chaleur

Considérons l’équation de la chaleur, sans les termes de courbure et la dynamique parallèle, lorsque la densité électronique est constante

$$\partial_t T_e + [\phi, T_e] - \Gamma \tau [\psi, d_{\star}^2 \nabla_{\perp}^2 \psi] = \nabla_{\perp} (D \nabla_{\perp} T_e)$$

Nous faisons la moyenne de cette équation sur les surfaces magnétiques. Ceci revient à appliquer l’opérateur  $\int \frac{d\theta d\varphi}{(2\pi)^2}$  ou à ne garder que les modes  $m = 0, n = 0$

$$\partial_t \langle T_e \rangle + \underbrace{\langle [\phi, T_e] \rangle}_{\partial_x \langle T_e V_x \rangle} - \underbrace{\Gamma \tau \langle [\psi, d_{\star}^2 \nabla_{\perp}^2 \psi] \rangle}_{\Gamma \tau d_{\star}^2 \partial_x \langle -\partial_{\theta} \psi \nabla_{\perp}^2 \psi \rangle} = \partial_x (D \partial_x \langle T_e \rangle)$$

avec  $V_x \equiv -\partial_{\theta} \phi$ . Soit, écrit plus simplement :

$$\partial_t \langle T_e \rangle + \partial_x (F_{ES} + F_{EM} + F_{coll}) = 0$$

avec  $F_{ES} \equiv \langle -\partial_\theta \phi T_e \rangle$ ,  $F_{EM} \equiv \Gamma \tau d_\star^2 \langle \partial_\theta \psi \nabla_\perp^2 \psi \rangle$  et  $F_{Coll} = -D(x) \partial_x \langle T_e \rangle$ .

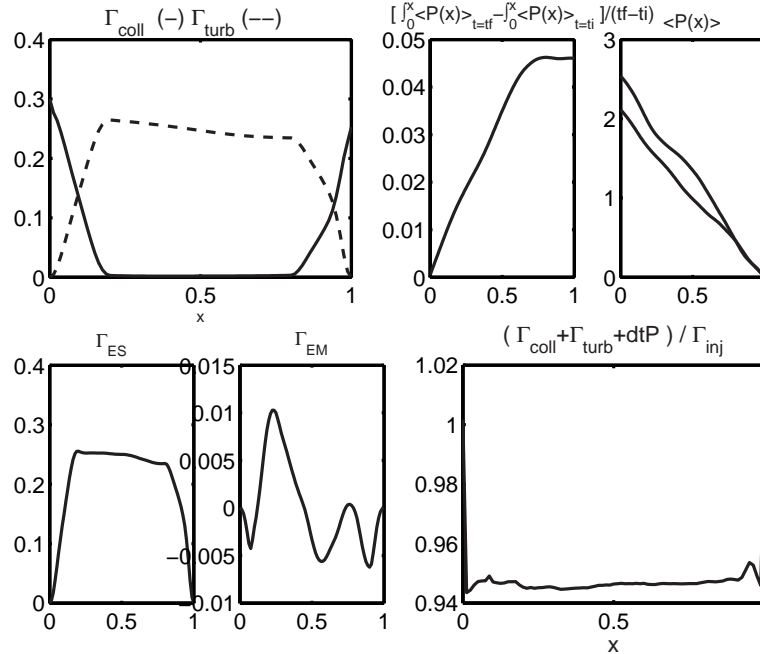
Donc si on intègre cette équation entre 0 et  $x$ , on obtient :

$$\partial_t \int_0^x \langle T_e \rangle dx + F_{ES}(x, t) + F_{EM}(x, t) + F_{coll}(x, t) - \underbrace{F_{ES}(0, t)}_{=0} - \underbrace{F_{EM}(0, t)}_{=0} - \underbrace{F_{coll}(0, t)}_{F_{inj}} = 0$$

Les flux électrostatique et électromagnétique sont nuls en  $x = 0$  du fait des conditions au bord que nous avons choisies. Cette équation doit être vérifiée à tous les temps  $t$ . Mais on peut également prendre la moyenne temporelle de cette équation

$$\frac{1}{t_s} \left[ \int_0^x dx \langle T_e \rangle (t = t_s) - \int_0^x dx \langle T_e \rangle (t = 0) \right] + \overline{F_{ES}(x, t)} + \overline{F_{EM}(x, t)} + \overline{F_{coll}(x, t)} = F_{inj} \quad (3.1)$$

où la notation  $\bar{\cdot}$  désigne la moyenne temporelle. La vérification de cette équation dans le code de calcul est un bon outil de validation de celui-ci. La figure 3.8 illustre bien cet exemple ; pour une simulation typique  $\rho_\star = 0.02$ ,  $d_\star = 0.2$ ,  $F_{inj} = 0.3$ , on obtient le bilan de flux ci-dessous :



**FIG. 3.8 :** Bilan de l'équation du transport de la chaleur pour  $\rho_\star = 0.02$ ,  $d_\star = 0.2$ ,  $F_{inj} = 0.3$ .

Le dernier graphe représente la précision du code puisque d'après l'équation 3.1, le rapport du membre de gauche sur le membre de droite doit être égal à 1. Dans le cas numérique, on



obtient un rapport de 0.95, ce qui est un excellent résultat puisque les pertes numériques dues à tous les schémas utilisées ne s'élèvent qu'à 5 %. Ces faibles pertes sont uniquement dues aux schémas d'avancement temporel légèrement dissipatifs alors que le traitement des dérivées radiales par différences finies ne l'est pas.

### 3.8.2 Invariants non linéaires

Considérons le système d'équations à simuler en ne conservant que les termes non linéaires –i.e. les crochets de Poisson –

$$\partial_t \phi + [\phi, W] + [\psi, V] = 0 \quad (3.2)$$

$$\partial_t F + [\phi, F] + [\psi, P] = 0 \quad (3.3)$$

$$\partial_t P + [\phi, P] - [\psi, V] = 0 \quad (3.4)$$

avec les définitions suivantes :  $W = -\rho_\star^2 \nabla_\perp^2 \phi$ ,  $V = d_\star^2 \nabla_\perp^2 \psi$  et  $F = \psi - V$ . Il est utile de rappeler quelques propriétés des crochets de Poisson entre les champs  $f$  et  $g$  :

$$[f, f] = 0 \quad [f, const] = 0 \quad [f, g] = -[g, f]$$

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g] \quad [f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad \text{identité de Jacobi}$$

De plus on a vu dans la dérivation des équations que  $[\phi, \bullet] \equiv \vec{V}_E \cdot \nabla \bullet = \nabla \cdot (\vec{V}_E \bullet)$  et  $[\psi, \bullet] \equiv -B_p \cdot \nabla \bullet = \nabla \cdot (B_p \bullet)$

$$\phi \times (3.2) \Rightarrow \phi \partial_t \phi + \phi [\psi, V] = 0 \quad \text{et} \quad \psi \times (3.3) \Rightarrow \psi \partial_t F + \psi [\phi, \psi] - \psi [\phi, V] = 0$$

$$\Rightarrow \phi \partial_t \phi - \psi \partial_t F + \phi [\psi, V] + \psi [\phi, V] = 0$$

or  $\int_{\mathcal{V}} \phi [\psi, V] d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \psi [\phi, V] d\mathcal{V}$  obtenu par intégration par parties<sup>14</sup>

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{V}} \phi \partial_t \phi d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \psi \partial_t \psi d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} d_\star^2 \psi \partial_t \nabla_\perp^2 \psi d\mathcal{V} = 0$$

<sup>14</sup>Démonstration du petit calcul d'intégration par parties dans le cas d'une géométrie cartésienne :

$$\begin{aligned} \int \int \int f[g, h] dx dy dz &= \int \int \int f(\partial_x g \partial_y h - \partial_x h \partial_y g) dx dy dz \\ &= \int \int \int \partial_y h (f \partial_g) dx dy dz - \int \int \int \partial_x h (f \partial_y g) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{\phi^2}{2} - \frac{\psi^2}{2} + d_*^2 \frac{(\nabla\psi)^2}{2} \right) d\mathcal{V} = 0$$

où l'intégration se fait sur tout le volume  $\mathcal{V}$ . Ainsi, on a construit un invariant du mouvement du système. On peut en construire d'autres par cette technique, par exemple :  $F \times (3.3) \rightarrow F \partial_t F + F[\psi, P] = 0 \rightarrow F \partial_t F - V[\psi, P] = 0$  et  $P \times (3.4) \rightarrow P \partial_t P - P[\psi, V] = 0$ . Or  $\int_{\mathcal{V}} V[\psi, P] d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} P[\psi, V] d\mathcal{V}$  donc  $\int_{\mathcal{V}} f \partial_t F f \mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} P \partial_t P d\mathcal{V} = 0$ . Soit après intégration :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{F^2}{2} + \frac{P^2}{2} \right) d\mathcal{V} = 0$$

Cette vérification n'a pas été effectuée. En effet, faire évoluer le code avec simplement les non linéarités entraîne très vite des instabilités numériques à cause des cascades directes d'énergie, d'entrophie,...et une vérification sur des temps très courts ne serait pas très pertinente. Par contre, on a vérifié que le calcul des crochets de Poisson est correct car leurs propriétés sont retrouvées numériquement.

## Performances du code ETAE3D

Terminons ce chapitre en évoquant les performances de ce code. Elles sont telles que notre code a été admis à «tourner» sur la machine massivement parallèle du CEA, basée à Grenoble : le calculateur Fujitsu VPP5000 [Har99]. Même si ETAE3D n'est pas un code parallélisé, il est par contre très bien vectorisé comme montrent les résultats de l'analyse de performances.

On intègre le premier membre sur  $x$  et le second sur  $y$  de sorte qu'apparisse  $h$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\int \int h(f \partial_x g) dx dz}_{=0 \text{ par les conditions aux bords}} - \int \int \int h \partial_y (f \partial_x g) dx dy dz \\ &- \underbrace{\int \int h(f \partial_y g) dy dz}_{=0 \text{ par les conditions aux bords}} + \int \int \int h \partial_x (f \partial_y g) dx dy dz \\ &= \int \int \int \left\{ h \partial_x f \partial_y g + \underline{h f \partial_x (\partial_y g)} - h \partial_y f \partial_x g - \underline{h f \partial_y (\partial_x g)} \right\} dx dy dz \\ &= \int \int \int h[f, g] dx dy dz \end{aligned}$$

```

--- Performance Analyser (Serial)-----Date:2002.08.30 Time:12.07.39---
Summary      Program : etae3d_n16
-----
Time :      Real(sec)      SU(sec)      VU(sec)      Count
          8.71504e+00      6.64639e+00      5.65479e+00      1.00000000e+00
-----
Arith./Logical Operations:  SU      VU      Total
Integer - 1.81180191e+08      2.91005000e+05      1.81471196e+08
Floating - 6.49826700e+06      7.39855414e+09      7.40505241e+09
-----
Performance :      MOPS      MFLOPS      Vect.Ratio      Average V.L.
          1.14145e+03      1.11415e+03      0.9753      101
-----
Pipeline Utilization : Memory Access  Add/Mult/etc.  Div/Sqrt  Mask
Active - 0.7089      0.4388      0.0097      0.0008
Efficiency - 0.3037      0.4799      0.1898      0.4410
-----
CPU Statistics :      SU      VU      Average
Mega-Inst./sec - 5.44770e+01      1.64185e+01      7.08955e+01
Mega-Op./sec - 7.85995e+01      2.10568e+01      9.96563e+01
Op./Inst. - 1.44280e+00      1.28251e+00      1.40568e+00
-----
Cache Information :      L1-Cache Hit      L2-Cache Hit      Cache Miss
Instruction - 0.99697      0.00301      0.00001
Operand - 0.99492      0.00137      0.00372
-----

```

Les informations les plus pertinentes de ce test sont :

- Le nombre d'opérations par seconde en Mflops : 1.11415e+3, soit plus de 1 milliards d'opérations par seconde.
- Le taux de vectorisation : 0.9753 proche de la valeur optimale 1.

# Chapitre 4

## Etude linéaire de l'instabilité d'échange ETG

L'instabilité liée au gradient de température électronique fait partie de la famille des instabilités d'échange. Celles-ci sont liées à un gradient macroscopique et à la courbure des lignes de champ. Expérimentalement, dans les tokamaks, on mesure des profils de densité, température, etc... Ces profils présentent généralement de forts gradients susceptibles de donner naissance à des instabilités dommageables pour la stabilité et le confinement du plasma de fusion. L'instabilité la plus étudiée est celle liée au gradient de température ionique car la plupart des moyens de chauffage des tokamaks chauffent cette population.

L'objet de cette thèse n'est pas de faire l'étude linéaire détaillée de l'instabilité ETG ; cependant, cette étape reste nécessaire. C'est pourquoi nous avons répertorié ci-dessous, par difficulté décroissante, les différentes possibilités de traiter ce problème. Tout d'abord, la résolution complète (taux de croissance, fréquences, profils des modes,...) de l'étude linéaire d'une instabilité en géométrie toroïdale ne peut se faire que par traitement numérique. On citera, par exemple, le code girocinétique (dans notre cas, l'approche est fluide), global (comme dans notre cas) de G.L. Falchetto [Fal00], [Fal02] pour l'instabilité ITG électromagnétique. Une façon élégante de simplifier le problème est de faire l'approximation dite de ballonnement. Cette approximation permet le passage de deux dimensions à une dimension dans le calcul des modes propres. En effet, dans un cylindre, un mode propre est de la forme  $\phi(r) \exp[i(m\theta + n\varphi - \omega t)]$  mais ce n'est pas le cas dans un tore où la forme la plus générale  $\phi(r, \theta) \exp[i(n\varphi - \omega t)]$  requiert a priori un calcul bidimensionnel. Cependant, la turbulence tend à développer un vecteur d'onde transverse

au champ magnétique d'équilibre très supérieur au vecteur d'onde parallèle ( $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ ). En mettant à profit cette anisotropie, on peut ramener le calcul des vecteurs propres à un problème 1D. Une forme plus appropriée pour un mode linéaire de nombre toroïdal  $n$  et de fréquence  $\omega$  donnés est  $\phi(r, \theta, \varphi, t) = \hat{\phi}_{n\omega}(\theta') \exp\{in[\varphi - q(r)(\theta - \theta_k)] - i\omega t\}$  où  $\theta_k$  est un angle de référence appelé angle de ballonnement. La représentation de ballonnement qui est une technique de type WKB [Con79], permet la construction d'une solution rigoureusement périodique. Le problème est ramené à la recherche de la fonction 1D,  $\hat{\phi}_{n\omega}(\theta')$ . Attention, ici  $\theta'$  n'est pas la variable angulaire,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , mais la variable étendue,  $-\infty < \theta' < +\infty$ , qui a le sens d'une coordonnée le long du champ magnétique. La technique de ballonnement reste une approximation qui n'est précise que dans la limite des grands nombres d'onde  $n$ . Et dans cette limite, on obtient les relations suivantes :

$$\nabla_{\parallel} \tilde{\phi} \rightarrow \frac{1}{q} \partial_{\theta'} \hat{\phi}_{n\omega} \quad \partial_r \tilde{\phi} \rightarrow -inq'(\theta - \theta_k) \hat{\phi}_{n\omega} \quad \partial_{\theta} \tilde{\phi} \rightarrow -inq \hat{\phi}_{n\omega}$$

Par exemple, l'opérateur  $\nabla_{\parallel} = \frac{1}{q(x)} \partial_{\theta} + \partial_{\varphi}$  appliqué à l'expression du champ  $\phi$  donne :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{q} \partial_{\theta} + \partial_{\varphi} \right) \left[ \hat{\phi}_{n\omega}(\theta) \exp\{in(\varphi - q(\theta - \theta_k))\} \right] \\ & = \exp\{in(\varphi - q(\theta - \theta_k))\} \frac{1}{q} \partial_{\theta} \hat{\phi}_{n\omega} \end{aligned}$$

Chacun des modes  $\hat{\phi}_{n\omega}(\theta')$  est localisé près d'une surface  $r = r_{mn}$ , appelée surface de résonance associée aux nombres d'onde  $m$  et  $n$ , et telle que  $m + n/q(r_{mn}) = 0$ . Même si la fréquence obtenue à l'ordre le plus bas est une excellente approximation de la fréquence exacte, il faut en principe pousser le calcul à l'ordre suivant pour obtenir l'enveloppe globale [Gar01b].

On doit cependant toujours traiter cette approximation par voie numérique. C'est l'approche utilisée par C. Bourdelle dans son code d'analyse de stabilité des plasmas [Bou00]. En rajoutant, l'approximation de fort ballonnement, on peut obtenir un résultat analytique. Cette approximation suppose une concentration de l'instabilité autour de l'angle  $\theta = 0$ . Ceci est compatible avec le fait qu'à cet angle-là, les gradients de pression et de champ magnétique sont colinéaires donc plus favorables à l'instabilité (voir chapitre 2). On peut alors développer les équations à l'ordre  $\theta^2$  et les fonctions propres sont alors des fonctions cylindriques paraboliques analogues à celles de l'oscillateur harmonique quantique dans l'état fondamental. Le calcul dans cette hypothèse pour le modèle fluide étudié est reporté dans l'annexe C. Enfin par l'approximation locale, on

peut trouver facilement de façon analytique le seuil en gradient de température  $A_{T,crit}$  au-delà duquel l'instabilité se développe. Les calculs menant à ce gradient critique sont reportés dans la section suivante.

## 4.1 Cas le plus simple : Approximation locale

L'approximation locale consiste à négliger tout transport parallèle et donc à se focaliser uniquement sur la dynamique perpendiculaire. Dans le calcul suivant, nous avons fait l'approximation électrostatique et nous avons négligé les termes de dissipation.

Avec ces approximations, la loi d'Ohm généralisée se réduit à l'équation du mouvement projetée sur la direction du champ magnétique d'équilibre et cette équation disparaît puisqu'on a supposé l'absence de dynamique parallèle. De plus, l'approximation locale impose également l'approximation de fort ballonnement (voir Annexe C) c'est à dire  $\theta = 0$ . Cette hypothèse modifie l'expression de l'opérateur de courbure, puisque  $\cos \theta = 1$  et  $\sin \theta = 0$ , donc  $\omega_{d\bullet} \rightarrow \partial_{\theta\bullet} \rightarrow ik_{\theta\bullet}$ . Egalement, du fait de l'expression générale pour un champ,  $\phi(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{m,n} \phi_{m,n}(r) e^{-i\omega t} e^{i(m\theta+n\varphi)}$ , la dérivée temporelle  $\partial_t\bullet$  devient une multiplication par  $-i\omega\bullet$ . Les crochets de Poisson  $[f, g]$  doivent être linéarisés : il s'agit de les développer lorsque le champ advecté fluctuant  $g$  est moyenné sur les surfaces magnétiques :  $\langle g \rangle$ . Ce qui donne

$$[f, \langle g \rangle] \equiv \partial_x f \underbrace{\partial_{\theta} \langle g \rangle}_{=0} - \partial_{\theta} f \partial_x \langle g \rangle = -A_g \cdot ik_{\theta} f$$

Le système (2.12-2.13-2.14) se réécrit avec les hypothèses ci-dessus :

$$\begin{cases} -\omega\phi - A_n k_{\theta} \phi + 2\epsilon k_{\theta} (\phi - P) = 0 \\ -\omega P + (A_n + A_T) k_{\theta} \phi + 2\Gamma(1 - \tau)\epsilon k_{\theta} \phi + 4\Gamma\epsilon k_{\theta} P = 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on peut tirer

$$P = \frac{(A_n + A_T) k_{\theta} + 2\Gamma(1 - \tau)\epsilon k_{\theta}}{\omega - 4\Gamma\epsilon k_{\theta}} \phi$$

En remplaçant cette expression de  $P$  dans la première équation on obtient :

$$\omega\phi + A_n k_{\theta} \phi - 2\epsilon k_{\theta} \left( 1 - \frac{(A_n + A_T) k_{\theta} + 2\Gamma(1 - \tau)\epsilon k_{\theta}}{\omega - 4\Gamma\epsilon k_{\theta}} \right) \phi = 0$$

soit

$$(\omega + A_n k_\theta)(\omega - 4\Gamma \epsilon k_\theta) - 2\epsilon k_\theta [\omega - 4\Gamma \epsilon k_\theta - (A_n + A_T) k_\theta - 2\Gamma(1 - \tau)\epsilon k_\theta] = 0$$

soit

$$\omega^2 + \omega [A_n - 2\epsilon(2\Gamma + 1)] k_\theta + 2\epsilon [2\epsilon\Gamma(3 - \tau) + A_n(1 + \eta_e - 2\Gamma)] k_\theta^2 = 0$$

où l'on a introduit le paramètre  $\eta_e \equiv A_T/A_n$ . Ce paramètre caractéristique des modes étudiés a donné son nom au code de calcul présenté au chapitre 3. On pourra également trouver dans la littérature, le nom d'instabilité  $\eta_e$  pour désigner l'instabilité ETG.

Si pour une certaine condition, les racines de cette équation présentent une partie imaginaire positive, alors le système est dit instable et la partie imaginaire correspond au taux de croissance de cette instabilité. Les racines de l'équation précédente sont :

$$\omega_{\pm} = -\frac{1}{2}k_\theta [A_n - 2\epsilon(2\Gamma + 1) \mp \Delta^{1/2}]$$

avec

$$\Delta = k_\theta^2 [A_n^2 - 4\epsilon A_n(2\Gamma + 1) + 4\epsilon^2(2\Gamma + 1)^2] - 8\epsilon k_\theta^2 [2\epsilon\Gamma(3 - \tau) + A_n(1 + \eta_e - 2\Gamma)]$$

Les racines ont une partie imaginaire si  $\Delta < 0$ . Donc la condition de stabilité marginale ( $\Delta = 0$ ) donne

$$\eta_{e,\text{crit}} = \frac{A_n^2 - 4\epsilon A_n(1 + 2\Gamma) + 4\epsilon^2(2\Gamma + 1)^2 - 8\epsilon [2\epsilon\Gamma(3 - \tau) + A_n(1 - 2\Gamma)]}{8\epsilon A_n} \quad (4.1)$$

Cette condition de stabilité est indépendante du nombre d'onde poloïdal  $k_\theta$ . En introduisant des valeurs numériques typiques,  $A_n = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $\Gamma = 5/3$  et  $\epsilon = 0.5$  on trouve

$$\eta_{e,\text{crit}} \approx 1.77$$

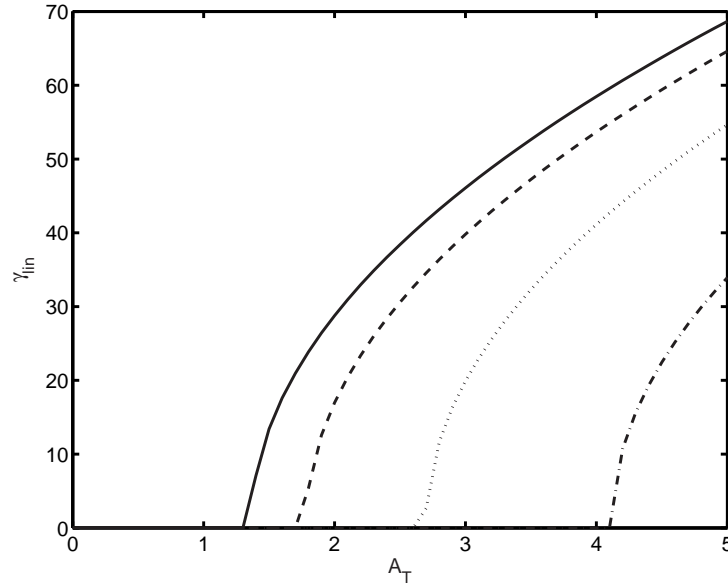
Dans le cas d'un profil de densité plat,  $A_n = 0$  alors l'équation est légèrement modifiée, et l'instabilité est liée dans ce cas à un seuil en température :

$$A_{T,\text{crit}} = \frac{4\epsilon^2 [(2\Gamma + 1)^2 - 4\Gamma(3 - \tau)]}{8\epsilon} \quad (4.2)$$

Avec les mêmes valeurs numériques, on trouve pour seuil en température :

$$A_{T,\text{crit}} \approx 1.36$$

La figure 4.1 illustre la variation du taux de croissance en fonction de la longueur de gradient de température et ceci pour plusieurs valeurs du gradient de densité. On retrouve l'effet stabilisant dû au piquage de la densité dans l'approximation fluide [Sta99], [Rom93].



**FIG. 4.1 :** Taux de croissance linéaire normalisé  $\gamma_{lin}$  en fonction du gradient de température  $A_T$ , pour différentes valeurs de gradient de densité :  $A_n = 0$  (ligne),  $A_n = 1$  (tiret),  $A_n = 2$  (pointillé),  $A_n = 3$  (point-tiret).

## 4.2 Etude linéaire avec le code

Des simulations linéaires peuvent être facilement réalisées avec le code. Il suffit pour cela de choisir la version linéarisée des crochets de Poisson. Il faut également s'assurer que le coefficient de dissipation sur la partie d'équilibre du champ de pression  $P$  est plat sur toute la boîte radiale.

Le premier test à effectuer est de trouver le gradient critique de l'instabilité ETG avec le code. On se place à gradient de densité plat  $A_n = 0$  et à  $\tau$  fixé et égal à 1. Les autres paramètres, typiques des simulations non linéaires, sont  $\rho_* = 0.02$ ,  $d_* = 0.2$ ,  $\epsilon = 0.5$ . Pour plusieurs valeurs du gradient de température électronique  $A_T$ , on fait ainsi évoluer le code durant un temps identique, ici  $t_{sim} = 0.3$ . Etant donnée la structure des champs, on peut définir



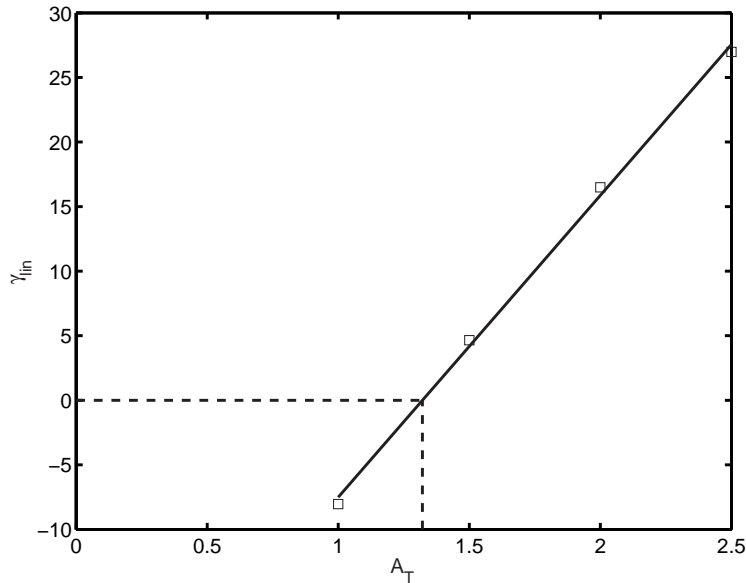
un «taux de croissance» local<sup>15</sup>. En effet, chaque champ s'écrit :

$$f(x, \theta, \varphi, t) = \sum_n \sum_m f_{m,n}(x, t) e^{i(m\theta + n\varphi)}$$

avec  $f_{m,n}(x, t) = f_{m,n}(x) e^{\gamma_{m,n}(x)t}$ . Donc pour chaque mode  $(m, n)$ , on définit le taux de croissance local  $\gamma_{m,n}$  par la relation suivante :

$$\gamma_{m,n}(x, t, \Delta t) \equiv \frac{1}{\Delta t} [\ln(f_{m,n}(x, t + \Delta t)) - \ln(f_{m,n}(x, t))]$$

La figure 4.2 représente le taux de croissance calculé avec la formule précédente pour le mode  $n = -15$ . Il s'agit plus exactement du maximum du taux de croissance sur tous les nombres d'ondes poloïdaux à la position radiale  $x = 0.5$ . On constate donc que lorsque le gradient de température augmente, tous les autres paramètres étant identiques par ailleurs, le taux de croissance croît également et pour une certaine valeur de  $A_T$ , le taux de croissance linéaire  $\gamma_{lin}$  devient positif. Cette valeur critique du gradient de température est estimée à  $A_{T,crit} \simeq 1.32$  et est en accord avec les résultats analytiques.

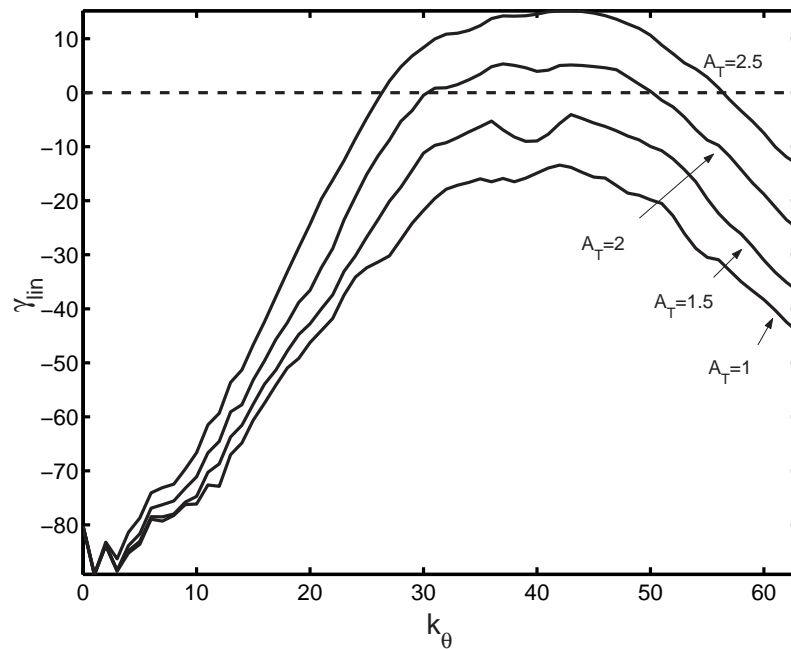


**FIG. 4.2 :** Taux de croissance linéaire  $\gamma_{lin}$  en fonction de la longueur de gradient de température normalisée  $A_T$ .

<sup>15</sup>Le vrai taux de croissance nécessite la résolution des valeurs propres et des fonctions propres du système, généralement de manière spectrale. On se réfèrera par exemple [Fal02].

Sur la figure 4.3, on a représenté le taux de croissance moyenné sur  $x$  en fonction du nombre d'onde poloïdal  $k_\theta$  et ceci pour un nombre d'onde toroïdal  $n = -15$  et pour quatre valeurs de gradient de température. On retrouve deux aspects importants :

- Aux faibles nombres d'onde, le taux de croissance est toujours négatif du fait des résonances Landau
- Aux grands nombres d'onde, c'est la dissipation collisionnelle qui assure l'absence d'instabilité



**FIG. 4.3 :** Taux de croissance linéaire  $\gamma_{lin}$  en fonction du nombre d'onde poloïdal  $k_\theta$  pour 4 valeurs de  $A_T$  et pour  $n = -15$ .

La figure 4.4 représente le profil radial du champ  $\phi$ , pour le mode  $n = -15$  et pour tous les nombres d'onde poloïdaux. Cette figure est issue de la simulation avec  $A_T = 2.5$  et à  $t_{sim} = 0.4$ . On remarque que, à une position radiale donnée, le mode dominant est celui donné par la relation  $m + n \cdot q(x) \simeq 0$ .

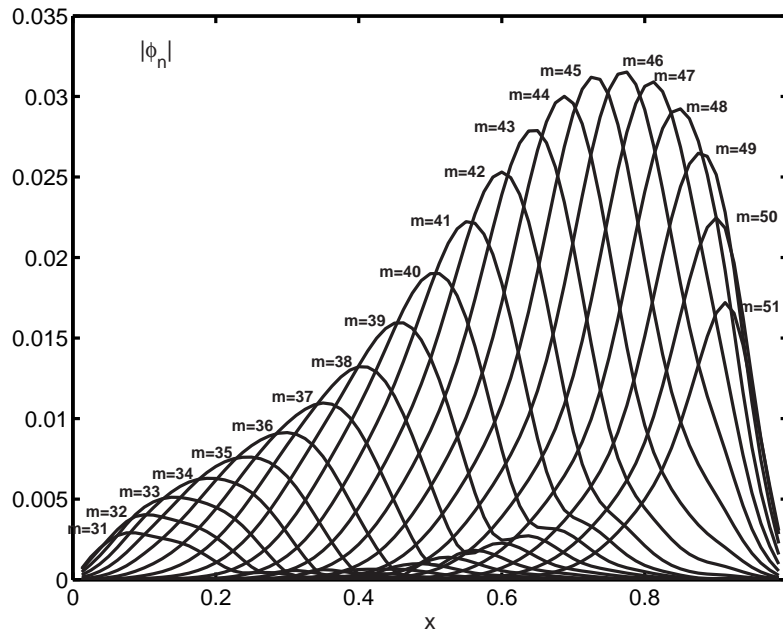


FIG. 4.4 : Structure radiale du champ  $\phi$  pour le mode toroidal  $n = -15$ .

Il est utile de rappeler qu'un champ «réel» périodique dans les directions  $\theta$  et  $\phi$  s'écrit, en projection dans l'espace de Fourier sous la forme :

$$f(x, \theta, \varphi, t) = \sum_{m,n} f_{m,n}(x, t) e^{i(m\theta + n\varphi)}$$

avec  $-npol/2 \leq m \leq npol/2$  et  $-ntor/2 \leq n \leq ntor/2 - 1$ . On définit à un nombre toroidal  $n_0$  donné, la quantité suivante :

$$f_{n_0}(x, \theta, \varphi, t) = \sum_m e^{im\theta} (f_{m,n_0}(x, t) e^{in_0\varphi} + f_{m,-n_0}(x, t) e^{-in_0\varphi})$$

Or, comme on l'a vu au paragraphe décrivant le code, seuls les modes à  $m \geq 0$  sont connus. On obtient donc

$$\begin{aligned} f_{n_0}(x, \theta, \varphi, t) &= \sum_{m \geq 0} e^{im\theta} (f_{m,n_0}(x, t) e^{in_0\varphi} + f_{m,-n_0}(x, t) e^{-in_0\varphi}) \\ &+ \sum_{m \geq 0} e^{-im\theta} (f_{m,-n_0}^*(x, t) e^{in_0\varphi} + f_{m,n_0}^*(x, t) e^{-in_0\varphi}) \end{aligned}$$

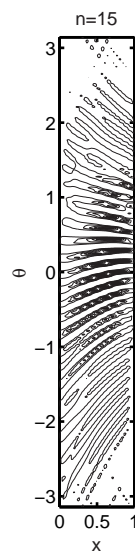
On remarque que pour  $\varphi = 0$  le calcul se simplifie un peu :

$$f_{n_0}(r, \theta, \varphi = 0, t) = \sum_{m \geq 0} e^{im\theta} (f_{m,n_0}(x, t) + f_{m,-n_0}(x, t)) + e^{-im\theta} (f_{m,-n_0}^*(x, t) + f_{m,n_0}^*(x, t))$$

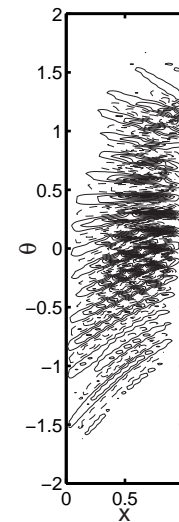
$$\rightarrow f_{n_0}(x, \theta, \varphi = 0, t) = \sum_{m \geq 0} 2\Re\{f_{m, n_0}(x, t)\} + 2\Re\{f_{m, -n_0}(x, t)\}$$

où la notation  $\Re$  désigne la partie réelle du champ complexe  $f$  : le résultat est donc un champ réel.

Nous traçons la structure dans le plan poloïdal  $(x, \theta)$  pour l'angle  $\varphi = 0$  d'un champ, ici le potentiel électrostatique  $\phi$ , et ceci pour un nombre d'onde toroïdal donné. Sur la figure 4.5, est représentée l'équi-potentielle pour le mode  $n = -15$  d'après le calcul précédent.



**FIG. 4.5 :** Iso-potentielle d'un mode global  $n = -15$  dans le plan poloïdal  $(x, \theta)$  pour l'angle  $\varphi = 0$ . Les parties négatives ne sont pas représentées.



**FIG. 4.6 :** Iso-fluctuations du champ  $\phi$ . Tous les modes sont présents.  $A_T = 2.5$  et  $t=0.4$ .

Enfin, la section poloïdale complète – tous les modes toroïdaux sont pris en compte – du champ  $\phi$  en phase linéaire est représentée sur la figure 4.6. Les traits pleins correspondent à des fluctuations positives tandis que les lignes tiretées représentent des iso-fluctuations négatives.

### 4.3 Etude paramétrique linéaire

La rapidité avec laquelle sont obtenus les résultats dans la version linéaire du code nous a permis de faire une étude du taux de croissance en fonction de divers paramètres. La définition

que nous avons choisie pour le taux de croissance linéaire est la suivante :

$$\gamma_n(x = 0.5) = \max_m \left\{ \frac{1}{\Delta t} [\ln(f_{m,n}(x = 0.5, t + \Delta t)) - \ln(f_{m,n}(x = 0.5, t))] \right\}$$

Dans les simulations effectuées, la résolution  $81 \times 128 \times 32$ , le rayon de Larmor normalisé  $\rho_* = 0.02$  et le profil de facteur de sécurité  $q(x)$  exponentiel sont conservés. De plus, à partir de la même condition initiale, on simule différents cas en variant seulement un paramètre. La figure 4.7 représente le taux de croissance en fonction des paramètres  $\beta$ ,  $\tau = T_e/T_i$ ,  $\hat{s} = \frac{x}{q} \frac{dq}{dx}$  le cisaillement magnétique et  $\epsilon = \frac{r_s}{R}$  l'inverse du rapport d'aspect.

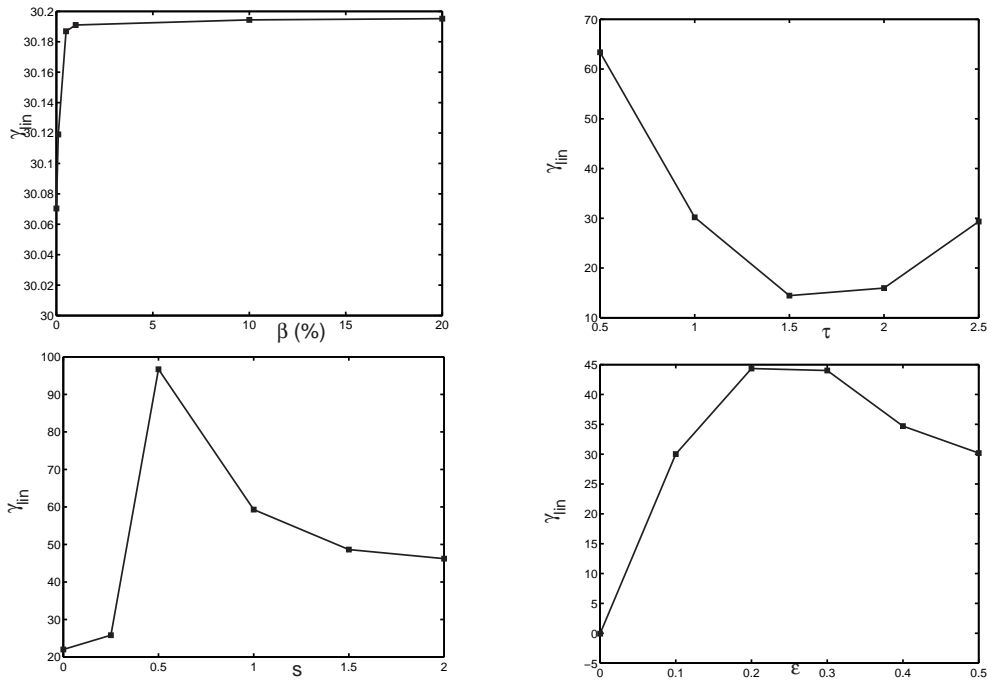


FIG. 4.7 : Taux de croissance linéaire  $\gamma_{lin}$  en fonction de  $\beta$ ,  $\tau$ ,  $\hat{s}$  et  $\epsilon$ .

Ces résultats donne accès qualitativement au rôle de ces paramètres vis-à-vis de l'instabilité. Une diminution du taux de croissance correspond à une augmentation du gradient de température critique et inversement. Ainsi, on retrouve des résultats connus, similaires à ceux présentés dans la référence [Jen01a] : la très faible dépendance du taux de croissance en fonction de  $\beta$ , la stabilisation par augmentation du rapport des températures, la déstabilisation lorsque  $\epsilon$  augmente, en accord avec la formule analytique. L'évolution du taux de croissance en fonction du cisaillement magnétique met en évidence la valeur  $\hat{s} = 0.5$ , caractéristique du fort ballonnement de l'instabilité.

# Chapitre 5

## Dépendance paramétrique du transport de chaleur

La prédiction des dépendances du transport de la chaleur dans un plasma de fusion en fonction des paramètres adimensionnels est un enjeu primordial. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les lois d'échelles établies à partir des différents tokamaks à travers le monde ne sont précises qu'à  $\pm 20\%$ . De plus, la plupart des moyens de chauffage des tokamaks chauffent préférentiellement les ions, augmentant ainsi l'incertitude sur le transport de la chaleur par le canal électronique. Les trois paramètres adimensionnels fondamentaux dans les lois d'échelles :  $\rho_*$ ,  $\beta$  et  $\nu_*$  n'ont cependant pas la même pertinence. Par exemple, la collisionnalité normalisée  $\nu_*$  jouera un rôle d'autant moins grand que le plasma sera chaud car  $\nu_* \propto nRT^{-2}q\epsilon^{-3/2}$ . De même, des instabilités MHD (Magnéto Hydro Dynamique) limitent l'excursion en  $\beta$  des plasmas de tokamaks. Finalement, seul le paramètre  $\rho_* \propto (MT)^{1/2}(\epsilon RB)^{-1}$  diminuera dans les futures machines et son rôle dans le temps de confinement de l'énergie est important voire primordial. L'étude de la dépendance du confinement en fonction de  $\beta$  menée sur les plasmas des tokamaks DIII-D et JET ne donne qu'une faible dépendance du confinement avec ce paramètre dans la limite  $\beta_N < 2$ <sup>16</sup>. Ceci est en désaccord avec les lois d'échelle globales (Eqs. 1.7 et 1.8) et c'est pour cela que l'on invoque des problèmes de colinéarités dans la base de données pour atténuer ce désaccord [ITER99]. Les dernières études menées sur le sujet proposent de séparer le confinement de cœur (plutôt indépendant de  $\beta$ ) du confinement de bord (nettement plus sensible à  $\beta$ ) [Cor02]. Il semble donc nécessaire de clarifier la situation. Un code global

---

<sup>16</sup>La définition du  $\beta$  normalisé est  $\beta_N \equiv \frac{\beta(\%)}{(I_P/aB_\varphi)}$  avec  $I_P$  en MA,  $a$  en m et  $B_\varphi$  en T.

tel que celui développé dans cette thèse permet d'effectuer une étude paramétrique utile pour mieux comprendre le transport de la chaleur et par conséquent le confinement. On pourra en particulier étudier le rôle du paramètre  $\beta$  à travers le modèle électromagnétique choisi.

### Flux injecté - Flux turbulents - Temps de confinement

Un des principaux atouts du code ETAE3D est qu'il opère à «flux fixé» par opposition à «gradient fixé», qui est une autre approche de développement de codes de simulation de la turbulence. Cette dernière suppose notamment une séparation d'échelle entre équilibre et fluctuations. Dans notre approche, un flux de chaleur, tel que

$$\Gamma_{inj} = -\chi_{coll} \cdot \nabla_x P|_{x=0}$$

au point  $x = 0$ , est injecté de façon continue dans le système. Ainsi, les gradients, en particulier le gradient de pression, donc de température, sont libres d'évoluer selon la turbulence et s'adaptent à ce flux entrant. D'autre part, nous avons vu dans la dérivation du modèle ETG mais aussi dans la description du code, que l'état de turbulence génère des flux de chaleur radiaux par les couplages non-linéaires entre les différents champs ; ces flux sont liés à deux vitesses, la vitesse de dérive électrique  $\vec{V}_E = \frac{\vec{E}_{eq} \times \nabla \tilde{\phi}}{B_{eq}^2}$  et la vitesse liée aux fluctuations perpendiculaires du champ magnétique d'équilibre  $\vec{V}_B = \frac{\vec{B}_r \vec{V}_{||}}{B_{eq}}$ . Plus formellement, les flux turbulents de chaleur sont définis ainsi :

$$\Gamma_{ES}(x) \equiv \langle [\phi, P] \rangle_{\theta, \varphi} \quad \Gamma_M(x) \equiv \langle \Gamma \tau [\psi, V] \rangle_{\theta, \varphi}$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne une moyenne sur les surfaces magnétiques ( $\theta$  et  $\varphi$ ) mais aussi sur le temps. La moyenne temporelle est réalisée sur un intervalle où la turbulence est dans sa phase de saturation non linéaire.

Remarque : Le flux  $\Gamma_M$  sera appelé dans la suite de l'exposé flux magnétique. Ceci est un abus de langage car le «vrai» flux magnétique dans un tokamak est défini par  $\Phi \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .

A l'aide de ces flux turbulents, on définit une conductivité turbulente  $\chi_T$ , caractéristique efficace du transport associé à l'instabilité ETG :

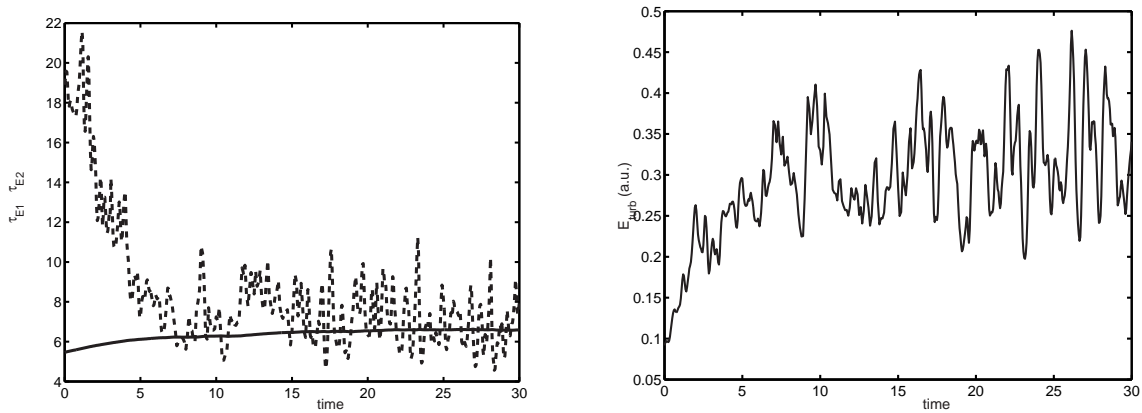
$$\chi_T(x) = - \frac{\Gamma_{ES}(x) + \Gamma_M(x)}{\nabla T_e(x)}$$

Un des objectifs de cette thèse est l'étude de la dépendance de  $\chi_T$  vis-à-vis des paramètres du plasma. Caractériser le transport revient en premier lieu à étudier la conductivité turbulente.

Enfin, nous définissons deux temps de confinement de l'énergie :  $\tau_{E1}$  est basé sur les pertes instantanées et  $\tau_{E2}$  est déduit de la source. Ces temps indiquent l'état de stationnarité de la turbulence du plasma.

$$\tau_{E1} = \frac{E_{th}}{\chi_{coll}(x)\nabla_x T(x)} \Big|_{x=r_{box}} \quad \tau_{E2} = \frac{E_{th}}{\Gamma_{inj}}$$

où l'énergie thermique  $E_{th}$  est définie par  $E_{th} = \int_0^{r_{box}} P_{0,0}(x)dx$ . Lorsque  $\tau_{E2}$  et  $\tau_{E1}$  sont assez proches (typiquement lorsque  $\tau_{E1}$  fluctue autour de  $\tau_{E2}$ ) alors on supposera l'état stationnaire atteint. Ensuite, la simulation sera prolongée de sorte qu'au moins un temps de confinement soit simulé afin d'avoir une bonne statistique. Cet état stationnaire est représenté sur la figure 5.1 pour une simulation typique, ainsi que l'«énergie turbulente» définie par  $E_{turb} = \int_0^{r_{box}} \tilde{p}^2(x)dx$  avec  $\tilde{p}^2(x) = \sum_{m \neq 0, n \neq 0} |P_{m,n}|^2$ .



**FIG. 5.1 :** Temps de confinement (gauche) :  $\tau_{E1}$  (tirets) et  $\tau_{E2}$  (ligne) et énergie turbulente (droite) pour une simulation typique.

Comme on l'a vu au chapitre 2, nous avons supposé que l'essentiel du flux turbulent se concentrait sur des échelles telles que  $k_{\perp}^2 \rho_{*}^2 \ll 1$ , afin de pouvoir négliger certains termes de rayon de Larmor fini qui deviennent important à  $k_{\perp}^2 \rho_{*}^2 \sim 1$  (cf Annexe A). Pour vérifier ceci, nous calculons le spectre du flux électrostatique  $S_{\Gamma}$  défini comme

$$S_{\Gamma,ES}(x, t, m) = \sum_n m \Im \{ P_{m,n}(x, t) \phi_{m,n}^*(x, t) \}$$

et tel que

$$\Gamma_{ES}(x, t) = \sum_m S_{\Gamma,ES}(x, t, m)$$



où la notation  $\Im$  désigne la partie imaginaire d'un nombre complexe. De même, on peut calculer le spectre du flux lié aux fluctuations magnétiques :

$$S_{\Gamma,M}(x,t) = \sum_n m \Im \{ V_{m,n}(x,t) \psi_{m,n}^*(x,t) \}$$

et tel que

$$\Gamma_M(x,t) = \sum_m S_{\Gamma,M}(x,t,m)$$

Le calcul du spectre du flux électrostatique s'explique ainsi :

$$F(x,\theta,\varphi,t) = -\tilde{T} \partial_\theta \tilde{\phi} \text{ et } \bar{F}(x,t) = \langle -\tilde{T} \partial_\theta \tilde{\phi} \rangle_{\theta,\varphi}$$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \left\langle - \sum_{m,n} \tilde{T}(x,m,n) e^{im\theta} e^{in\varphi} \underbrace{\partial_\theta}_{-im'} \sum_{m',n'} \tilde{\phi}^*(x,m',n') e^{-im'\theta} e^{-in'\varphi} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{m,n} \sum_{m',n'} im' \tilde{T}(x,m,n) \tilde{\phi}^*(x,m',n') e^{i(m-m')\theta} e^{i(n-n')\varphi} \right\rangle \\ \langle \cdot \rangle &\Leftrightarrow m = m', n = n' \Rightarrow \sum_{m,n} im \tilde{T}(x,m,n) \tilde{\phi}^*(x,m,n) = \sum_{m,n} im \left[ \Re \{ \tilde{T} \tilde{\phi}^* \} + i \Im \{ \tilde{T} \tilde{\phi}^* \} \right] \\ &= i \sum_{m,n} m \Re \{ \tilde{T}(x,m,n) \tilde{\phi}^*(x,m,n) \} - \sum_{m,n} m \Im \{ \tilde{T}(x,m,n) \tilde{\phi}^*(x,m,n) \} \end{aligned}$$

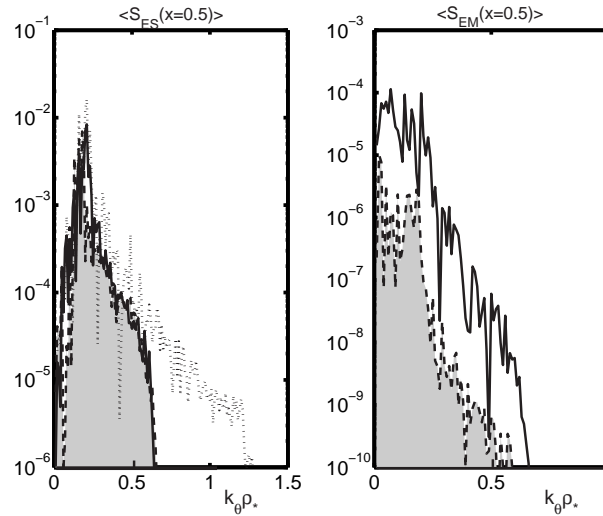
Or on a aussi  $\bar{F}(x,t) = -i \sum_{m,n} m \Re \{ \tilde{T}^* \tilde{\phi} \} + \sum_{m,n} m \Im \{ \tilde{T}^* \tilde{\phi} \}$

soit

$$\begin{aligned} \bar{F}(x,t) &= \frac{1}{2} \left\{ i \sum_{m,n} m \underbrace{[\Re \{ \tilde{T} \tilde{\phi}^* \} - \Re \{ \tilde{T}^* \tilde{\phi} \}]}_{=0} + \sum_{m,n} m \underbrace{[\Im \{ \tilde{T}^* \tilde{\phi} - \Im \{ \tilde{T} \tilde{\phi}^* \}]}_{=2\Im \{ \tilde{T}^* \tilde{\phi} \}} \right\} \\ &= \sum_{m,n} m \Im \{ \tilde{T}^* \tilde{\phi} \} \end{aligned}$$

La figure 5.2 représente le spectre des deux contributions au flux turbulent pour deux valeurs de  $\beta$ . On constate que la plus grande partie du flux à une position radiale donnée ( $x = 0.5$ ) et moyenné en temps, vient de la région autour de  $k_\theta \rho_* = 0.2$  et on constate heureusement qu'il n'y a pas d'accumulation d'énergie aux grands nombres d'ondes poloïdaux  $k_\theta$  (ceci assure que les coefficients de dissipation sont suffisamment grands). La coupure du spectre vers  $k_\theta \rho_* = 0.7$  est justifiée puisque, à résolution plus élevée ( $241 \times 384 \times 96$ ), la même simulation ( $\beta = 1\%$ ) avec des coefficients de dissipation divisés par deux, donne le spectre en pointillés sur la figure

5.2. La coupure de ce spectre est à  $k_\theta \rho_\star \sim 1.4$  au lieu de  $k_\theta \rho_\star \sim 0.7$  mais à plus de trois ordres de grandeur en-dessous du maximum du spectre. Ce dernier est toujours vers  $k_\theta \rho_\star = 0.2$  et globalement, la partie du spectre aux faibles valeurs de  $k_\theta$  est inchangée.



**FIG. 5.2 :** Spectres du flux électrostatique (gauche) et du flux «magnétique» (droite) pour  $\beta = 1\%$  (trait plein) et  $\beta = 0.1\%$  (tirets).  $\rho_\star = 0.01$  dans les deux cas. En pointillé, le cas à haute résolution.

## 5.1 Étude du transport de la chaleur en fonction de $\beta$

Rappelons d'abord que dans les équations simulées, le paramètre  $\beta$  n'apparaît pas explicitement ; il est relié aux deux paramètres adimensionnels  $\rho_\star$  et  $d_\star$  par  $\beta \equiv \frac{\rho_\star^2}{d_\star^2}$  où  $\rho_\star$  est le giro-rayon normalisé, et  $d_\star$  la longueur de peau normalisée. C'est donc en contrôlant  $d_\star$  que l'on contrôle le paramètre  $\beta$  à  $\rho_\star$  fixé.

Il est important également de remarquer que le paramètre  $\beta$  utilisé dans les simulations n'est pas exactement le « $\beta$ » usuel du plasma. Ces deux grandeurs diffèrent d'un facteur  $2(1 + \tau)$  :

$$\beta_{usuel} \equiv \frac{8\pi n(T_i + T_e)}{B^2} = 2(1 + \tau) \frac{\rho_\star^2}{d_\star^2}$$

avec  $\rho_\star$ ,  $d_\star$  et  $\tau$  définis au chapitre 2. Comme discuté dans la présentation du travail de thèse, la manière dont le transport dépend de  $\beta$  n'est pas bien connue. D'une part, il y a la tendance empirique donnée par Ohkawa ( $\chi \propto 1/\beta$ ) et les lois d'échelle données par l'expérience. D'autre

part existent aussi les résultats de Jenko *et al* issus des simulations girocinétiques [Jen00] : la possibilité d'une transition entre fort transport et faible transport lorsque  $\beta$  augmente, à cisaillement magnétique et gradient de température donnés.

Dans une première série de simulations, tous les paramètres sont fixés sauf  $d_*$  et donc  $\beta$ . On espère ainsi trouver une relation qui lie la conductivité turbulente  $\chi$  au rapport des pressions  $\beta$ . On démarre la simulation avec un profil de densité plat  $A_n = 0$  et un profil linéaire pour la pression électronique  $A_T = A_P = 2$  (au dessus du seuil linéaire). Les champs sont initialisés à une amplitude faible ( $\sim 10^{-6}$ ) avec des phases aléatoires. Le rayon de Larmor normalisé  $\rho_* = 0.01$ , dans cette première série, fixe la résolution du domaine simulé à  $121 \times 192 \times 48$  points pour les directions radiale, poloïdale et toroïdale, respectivement. Dans cette simulation, on a  $D_P = D_F = 1 \times 10^{-3}$  et  $D_\phi = 2.5 \times 10^{-5}$ . Pour la partie d'équilibre de la pression  $D_P$  est divisé par 2 puisque ce paramètre doit être aussi petit que possible de sorte que le flux turbulent domine largement le flux collisionnel. Pour toutes les simulations, le profil radial du facteur de sécurité  $q(x)$  est exponentiel :

$$q(x) = q_0 \exp(\hat{s}x)$$

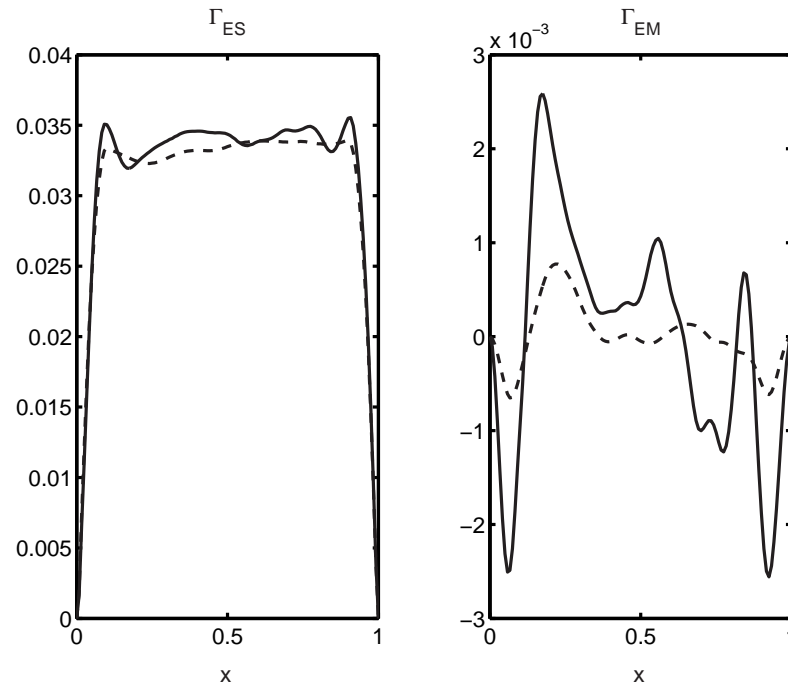
ainsi le cisaillement magnétique  $\hat{s}$  est constant sur tout le domaine radial. Dans ces premières simulations,  $\hat{s}$  vaut 0.5 et  $q_0 = 2$  soit  $2 \leq q(x) \leq 3.29$ .

Deux simulations avec  $\rho_* = 0.01$  et  $\Gamma_{inj} = D_P^{\text{Equil}}(x=0) \times A_T = 1.875 \times 10^{-2} \times 2 = 3.75 \times 10^{-2}$  mais avec deux valeurs de  $\beta = \{0.1\%; 1\%\}$  ont été effectuées. La première chose que l'on a voulu vérifier est l'ordre de grandeur relatif des flux turbulents générés. En effet les simulations girocinétiques de Jenko [Jen00] ont montré que le flux turbulent lié à la vitesse de dérive électrostatique  $\Gamma_{ES}$  était bien plus grand que le flux lié aux fluctuations perpendiculaires du champ magnétique  $\Gamma_M$ . Rappelons que ce sont les flux radiaux qui ont un intérêt dans cette étude. Les contributions sont les suivantes  $\Gamma_{ES}(x) = \langle -\tilde{P} \partial_\theta \tilde{\phi} \rangle$  et  $\Gamma_M(x) = \frac{5}{3} \langle \tilde{V} \partial_\theta \tilde{\psi} \rangle$ . Les crochets représentant la moyenne sur les surfaces magnétiques ainsi que sur le temps.

Pour deux valeurs de  $\beta$ , on a représenté, sur la figure 5.3, le profil radial des deux contributions au flux turbulent. On constate que dans la région «turbulente» (c'est-à-dire la région où la dissipation collisionnelle est minimale  $0.2 \leq x \leq 0.8$ ), le flux électrostatique est plus grand d'un facteur 10-20 que le flux magnétique. Ceci est donc en accord avec les résultats girocinétiques. On remarque également que ces deux profils n'ont pas la même allure : le profil de  $\Gamma_M$

est assez oscillatoire et tantôt positif, tantôt négatif.

Un flux négatif est un flux entrant : les fluctuations magnétiques dans la direction transverse au champ d'équilibre peuvent générer un pincement de chaleur. Une éventuelle explication pourrait tenir compte, peut-être, de l'existence à travers le domaine radial de plusieurs surfaces magnétiques dont le facteur de sécurité correspondant est un nombre rationnel simple : par exemple,  $q=3$ ,  $q=2.5$ ,  $q=2/3$ , etc...



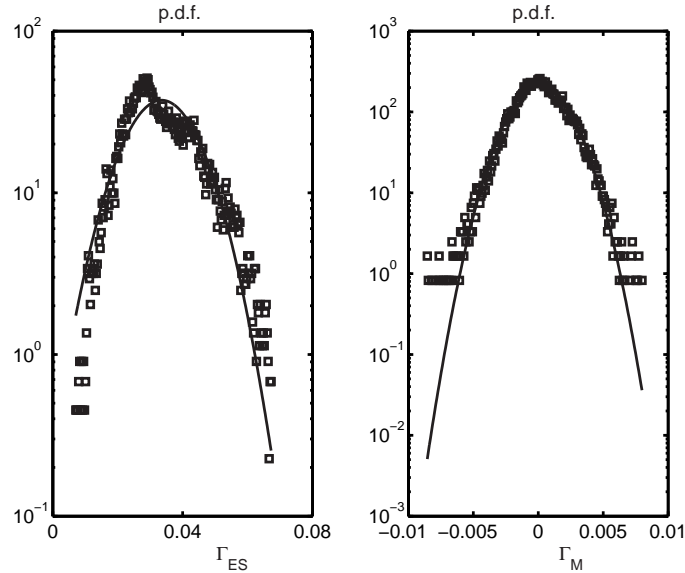
**FIG. 5.3 :** Profils du flux électrostatique (gauche) et du flux «magnétique» (droite) pour  $\beta = 1\%$  (trait plein) et  $\beta = 0.1\%$  (tirets).  $\rho_* = 0.01$  dans les deux cas.

Si l'on regarde la fonction de densité de probabilité (probability density function en anglais, p.d.f.) pour les deux flux calculés, on constate qu'elles sont très différentes. Sur la figure 5.4, nous avons représenté les distributions des flux dans la zone turbulente ( $0.2 \leq x \leq 0.8$ ). Cette distribution est normalisée à son intégrale et comparée à la distribution gaussienne associée définie par

$$f_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x - \bar{x})^2 / (2\sigma^2))$$

où  $\sigma$  et  $\bar{x}$  sont l'écart-type et la moyenne de la distribution, respectivement. La distribution du flux issue des fluctuations magnétiques est plus proche de la gaussienne associée que le flux électrostatique. L'écart à la gaussienne traduit le caractère intermittent du transport turbulent

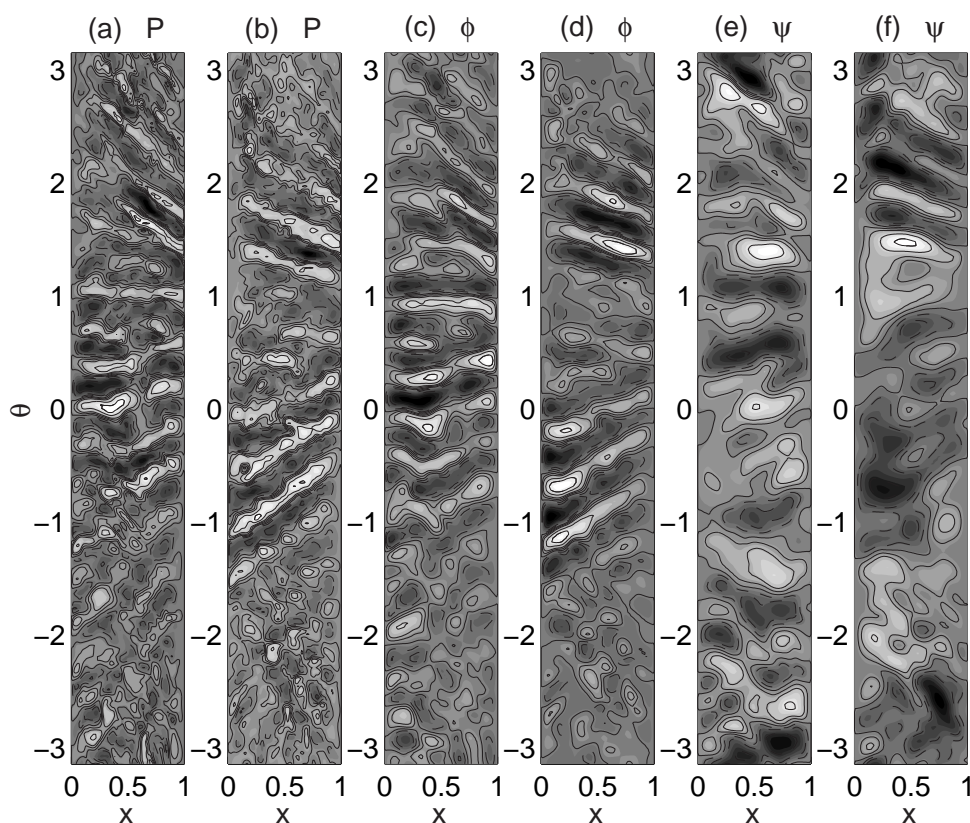
comme il a été observé dans les modèles SOC (Self Organized Critical) ou dans les modèles à avalanches [Car96], [New96],[Sar97].



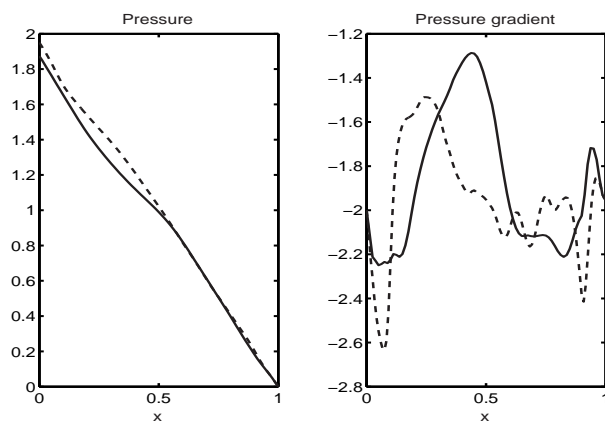
**FIG. 5.4 :** *Fonction de densité de probabilité pour les deux composantes du flux turbulent et distribution gaussienne associée : composante électrostatique à gauche et composante magnétique à droite.*

Les sections poloïdales représentant les fluctuations des champs sont représentées sur la figure 5.5. On voit apparaître pour  $\phi$  mais surtout pour  $P$  des structures plus étendues radialement que poloïdalement ; cette anisotropie est déjà apparue dans la phase linéaire et l'on peut penser que ces structures en phase non-linéaire sont en fait des «restes» des structures linéaires.

La figure 5.6 représente le profil de pression et le gradient associé pour  $\rho_* = 0.01$  et  $\beta = \{1\%; 0.1\%\}$ . On constate que la valeur de flux injecté ( $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ ) laisse localement le gradient de pression proche de la valeur linéaire estimée :  $A_{T,c} \simeq 1.3$ . Cette persistance de structures radialement allongées à faible flux injecté a été également observée par M. Ottaviani dans ses simulations ITG [Ott99].



**FIG. 5.5 :** Sections poloidales des fluctuations de pression (a-b), des fluctuations de potentiel électrique (c-d) et des fluctuations de potentiel vecteur (e-f) pour  $\beta = 1\%$  (a-c-e) et  $\beta = 0.1\%$  (b-d-f).



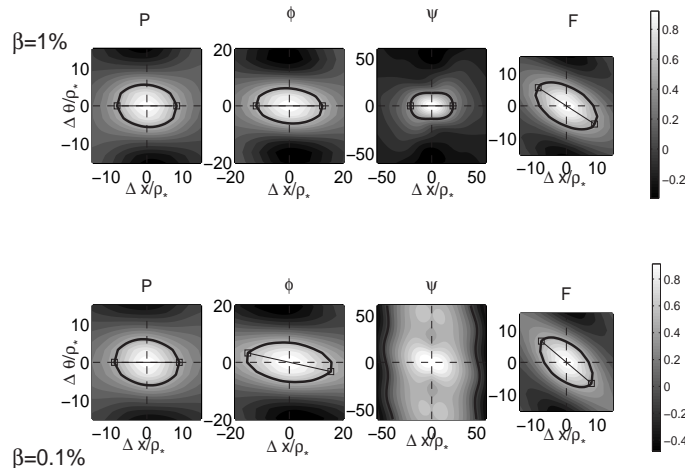
**FIG. 5.6 :** Profils de pression et gradient associé pour  $\beta = 1\%$  (ligne) et  $\beta = 0.1\%$  (tiret).  $\rho_* = 0.01$  et  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$  dans les deux cas.

Afin de caractériser de façon plus quantitative les structures observées et notamment les dépendances vis-à-vis de  $\beta$ , nous calculons la fonction d'autocorrélation bidimensionnelle (radiale et poloïdale) normalisée définie comme :

$$C_f(\Delta x, \Delta\theta) \equiv \langle \delta\tilde{f}(x, \theta, t) \cdot \delta\tilde{f}(x + \Delta x, \theta + \Delta\theta, t) \rangle_{x, \theta, t}$$

avec  $\delta\tilde{f} \equiv f(x, \theta, t) - \langle f(x, \theta, t) \rangle_{\theta, t}$ . Cette fonction d'autocorrélation est normalisée à  $C_f(0, 0)$  et le maximum à ce point vaut alors 1. Les points égaux à  $\frac{1}{2}$  forment une ellipse centrée autour de  $(\Delta x, \Delta\theta) = (0, 0)$ .

Le diamètre maximal définit ainsi la longueur de corrélation  $\lambda_{corr}$  tandis que le diamètre perpendiculaire à cette longueur maximale définit une longueur transverse  $\lambda_{c,\perp}$  et enfin comme nous le verrons plus tard, les cellules allongées seront également caractérisées par le rapport  $\tau_\lambda = \lambda_{corr}/\lambda_{c,\perp}$ . Les fonctions de corrélation en deux dimensions sont représentées sur la figure 5.7 pour les champs  $P$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  et  $F$  et pour les deux valeurs de  $\beta$  choisies.



**FIG. 5.7 :** Fonction d'autocorrélation en 2 dimensions pour les champs  $P$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  et  $F$  pour  $\beta = 1\%$  (courbes du haut) et  $\beta = 0.1\%$  (courbes du bas).

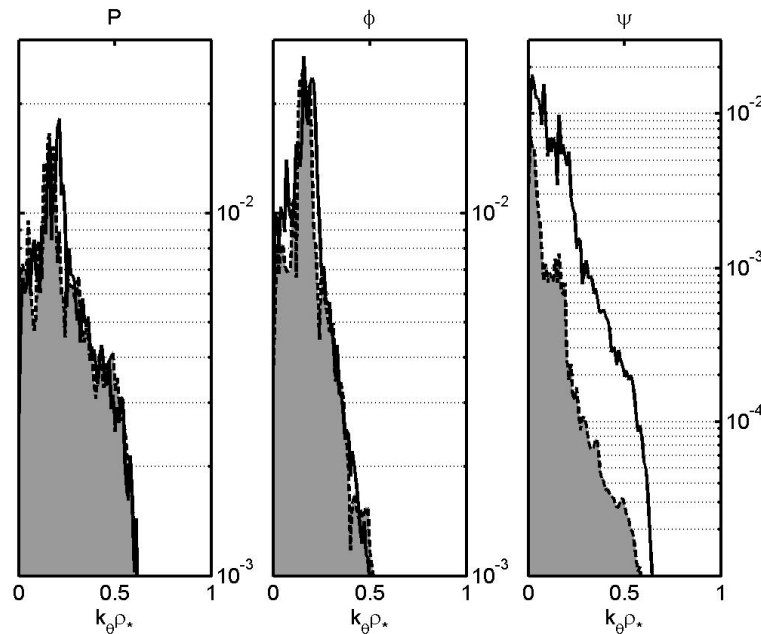
A première vue, l'aspect et la taille des fonctions de corrélation 2D changent peu pour les champs de pression, de potentiel électrique ainsi que pour le champ  $F$  lorsque  $\beta$  varie. Par contre, il apparaît clairement que  $\beta$  (à travers  $d_\star$ ) contrôle directement l'amplitude des fluctuations du potentiel vecteur  $\psi$  par la relation  $\psi = \frac{1}{1+d_\star^2 k_\perp^2} F$ . Les deux termes du dénominateur de la relation précédente sont du même ordre de grandeur. En effet,  $k_\perp^2 \simeq k_\theta^2 \simeq (0.2)^2 / \rho_\star^2$  et  $d_\star^2 \sim 10\rho_\star^2$  soit  $k_\perp^2 d_\star^2 \lesssim 1$ . De plus, le spectre poloïdal de  $\psi$  est contrôlé par  $d_\star$  : il pique autour

d'une valeur  $k_{\theta, \text{pic}} d_*$  finie ; donc lorsque  $\beta$  diminue,  $d_*$  augmente, et  $k_{\theta, \text{pic}}$  diminue donc la taille des cellules augmente ainsi que la longueur de corrélation. La dépendance en  $\beta$  du potentiel vecteur se retrouve aussi dans les structures poloïdales décrites plus haut.

Enfin si l'on regarde les spectres des champs, les résultats précédents sont confirmés comme représenté sur la figure 5.8. Ces spectres définis par  $S_f(m, x, t) = \sum_n |f_{m,n}(x, t)|$  sont moyennés sur le temps et tracés à la position radiale  $x = 0.5$ . Plusieurs éléments sont à remarquer à propos de ces spectres :

- Tous les spectres sont piqués autour de  $k_{\theta} \rho_* \sim 0.2$ , ce qui justifie le fait que nous ayons omis certains effets de rayon de Larmor fini.
- Il n'y a pas d'accumulation d'énergie aux grands  $k_{\theta}$  grâce à la dissipation introduite dans le modèle précisément à cette fin. En particulier la cascade naturelle d'énstrophie sur le champ  $\phi$  est coupée par l'hyperdiffusion.

Ici aussi, le rôle du paramètre  $d_*$  sur le potentiel vecteur est visible : le pic du spectre se déplace vers les faibles  $k_{\theta}$  quand  $\beta$  diminue ; mais également le niveau des fluctuations diminue avec  $\beta$ .

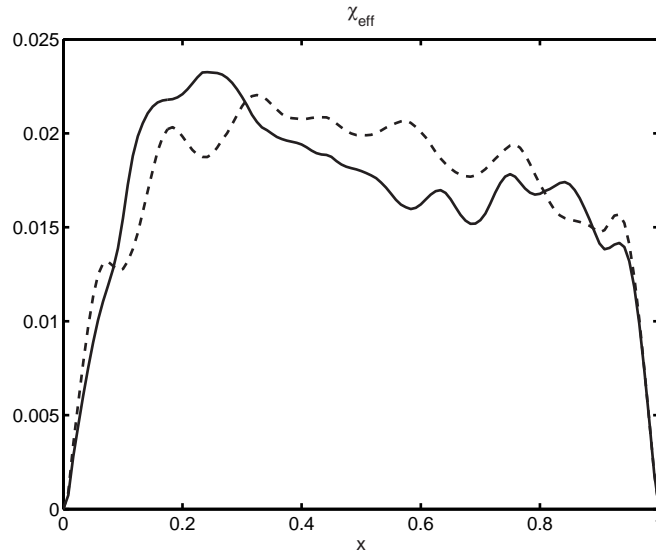


**FIG. 5.8 :** Spectres poloïdaux de la pression (gauche), du potentiel électrique (centre) et du potentiel vecteur (droite) pour  $\beta = 1\%$  (ligne) et  $\beta = 0.1\%$  (tiret).  $\rho_* = 0.01$  dans les deux cas.

Enfin, on calcule la conductivité turbulente à partir de l'expression donnée au paragraphe



précédent. La figure 5.9 représente les profils de  $\chi_T$  obtenus pour les deux valeurs de  $\beta$ . Ceci confirme les résultats déjà trouvés : le transport turbulent de chaleur dépend très peu de  $\beta$ . Si l'on moyenne le profil de  $\chi_T$  sur la région turbulente, on obtient  $\langle \chi_T \rangle / \rho_\star \simeq 2.0$  et  $\langle \chi_T \rangle / \rho_\star \simeq 1.9$  pour  $\beta = 0.1\%$  et  $\beta = 1\%$  respectivement.



**FIG. 5.9 :** Profils de la conductivité turbulente  $\chi_T$  pour deux valeurs de  $\beta$  :  $\beta = 1\%$  (ligne) et  $\beta = 0.1\%$  (tirets).  $\rho_\star = 0.01$  et  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$  dans les deux cas.

Une seconde série de simulations a été effectuée. Afin d'améliorer la statistique des données produites par le code, nous avons souhaité augmenter le temps de simulation. Pour ce faire, nous avons dû augmenter le rayon de Larmor afin de diminuer la résolution nécessaire. Ici, nous avons maintenant  $\rho_\star = 0.02$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  et  $\beta = \{0.1\%; 1\%; 4\%; 16\%\}$ . La valeur  $\beta = 16\%$  n'est absolument pas une valeur acceptable pour une machine à confinement magnétique mais elle permet de donner une limite asymptotique du modèle.

La figure 5.10 représente la fonction de corrélation de quatre champs pour les quatre valeurs de  $\beta$ . Comme pour la série de simulations précédentes, on retrouve les mêmes tendances concernant la dépendance en  $\beta$  de  $\lambda_{corr}^P$  et de  $\chi_T$  aux faibles valeurs de  $\beta$ . Par contre, aux très fortes valeurs de  $\beta$ , on observe un comportement inverse : légère augmentation du transport avec  $\beta$ . La moyenne sur la région turbulente de la conductivité turbulente donne :  $\langle \chi_T \rangle / \rho_\star \simeq \{1.8; 1.6; 1.8; 1.9\}$  pour  $\beta = \{0.1\%; 1\%; 4\%; 16\%\}$ , respectivement. Les figures 5.10 et 5.11 récapitulent ces résultats.

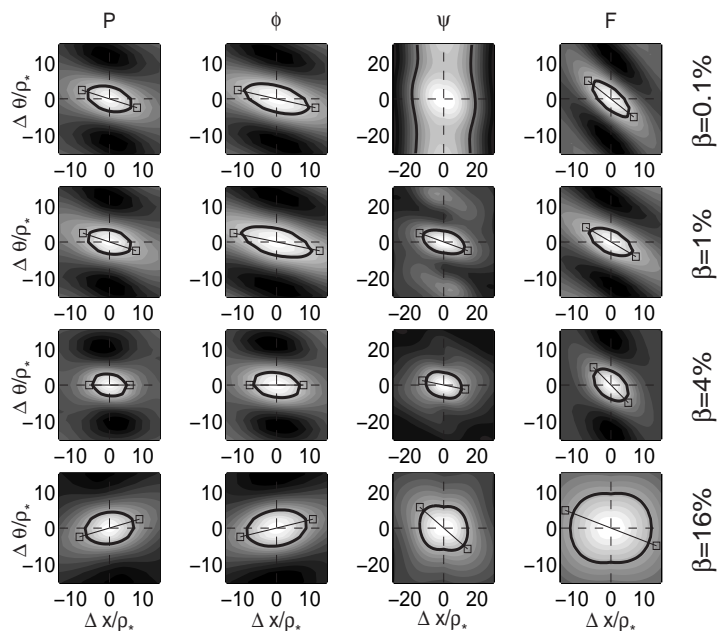


FIG. 5.10 : Fonction d'autocorrélation en 2 dimensions pour les champs  $P$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  et  $F$  pour  $\beta = \{0.1\%; 1\%; 4\%; 16\%\}$ .

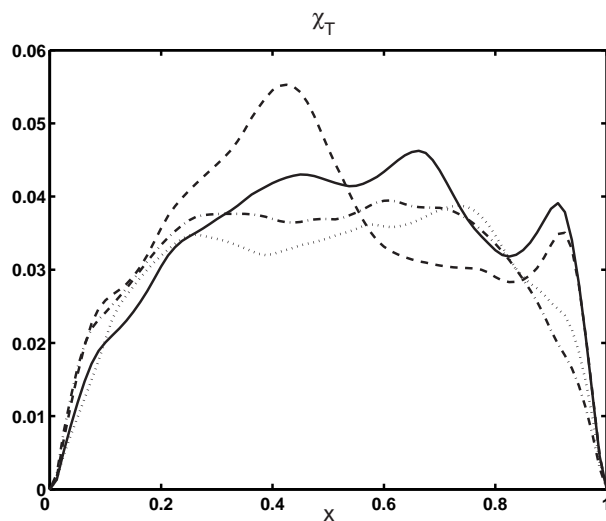


FIG. 5.11 : Profils de la conductivité turbulente  $\chi_T$  pour quatre valeurs de  $\beta$  :  $\beta = 0.1\%$  (ligne),  $\beta = 1\%$  (tirets),  $\beta = 4\%$  (pointillés) et  $\beta = 16\%$  (tirets-points).  $\rho_* = 0.02$  et  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  dans tous les cas.

La figure 5.12 représente la conductivité turbulente moyennée et normalisée  $\langle \chi_T \rangle / \rho_*$  en

fonction de la pression normalisée  $\beta$ , pour les deux séries de simulations décrites ci-dessus. Clairement la dépendance proposée par Ohkawa,  $\chi_T \propto \beta^{-1}$  n'est pas reproduite dans nos simulations.

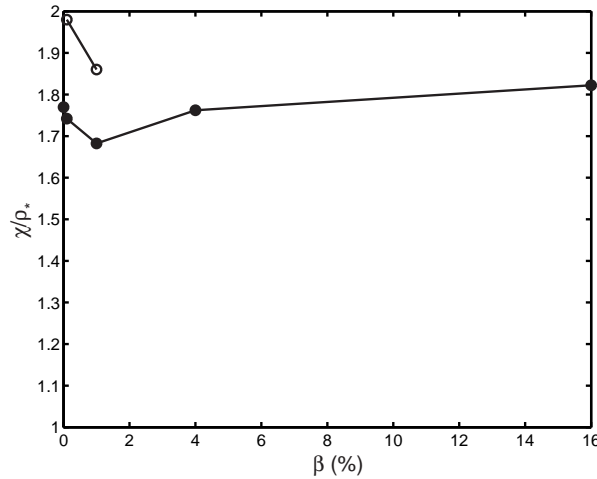


FIG. 5.12 : Conductivité turbulente normalisée à  $\rho_*$  en unités  $\frac{cT_i}{eB}$  pour  $\rho_* = 0.01$  ( $\circ$ ) et  $\rho_* = 0.02$  ( $\bullet$ ).

### Conclusion :

A partir des simulations déjà effectuées, nous pouvons dégager trois conclusions communes à ces simulations, caractéristiques de la turbulence ETG :

- 1- Le transport turbulent observé est essentiellement électrostatique. Le rapport entre les deux composantes du flux turbulent est de l'ordre de  $\beta$ . Ce résultat est en accord avec les simulations girocinétiques de Jenko *et al.*
- 2- Les fluctuations de pression et de potentiel électrique forment des structures radialement allongées que l'on appelle parfois des streamers. Cette caractéristique est en accord avec les résultats girocinétiques.
- 3- Enfin, le niveau de transport turbulent observé est beaucoup plus petit que celui expérimentalement mesuré. Typiquement, la conductivité observée est de l'ordre de  $\chi_B \rho_*$  avec  $\rho_*$ , le rayon de Larmor électronique normalisé. Ce qui donne pour des valeurs typiques de tokamak,  $\chi_T \simeq 10^{-2} T_e^{3/2} [keV] m^2 \cdot s^{-1} \ll \chi_{exp} \sim 1 m^2 \cdot s^{-1}$ . Rappelons que pour l'instabilité ITG, la conductivité turbulente théorique proposée est  $\chi_{ITG} = \chi_B \rho_{*,i}$ .

Une autre conclusion peut être tirée concernant la dépendance du transport turbulent en fonction du paramètre  $\beta$  : celle-ci est très faible voire nulle étant donné les barres d'erreurs inhérentes à ce type de simulations. Ce résultat met en défaut la loi d'Ohkawa. On peut relier cette faible dépendance à la conclusion 1- ci-dessus : le flux électrostatique qui ne dépend pas, par définition, des fluctuations magnétiques, domine largement le transport turbulent.

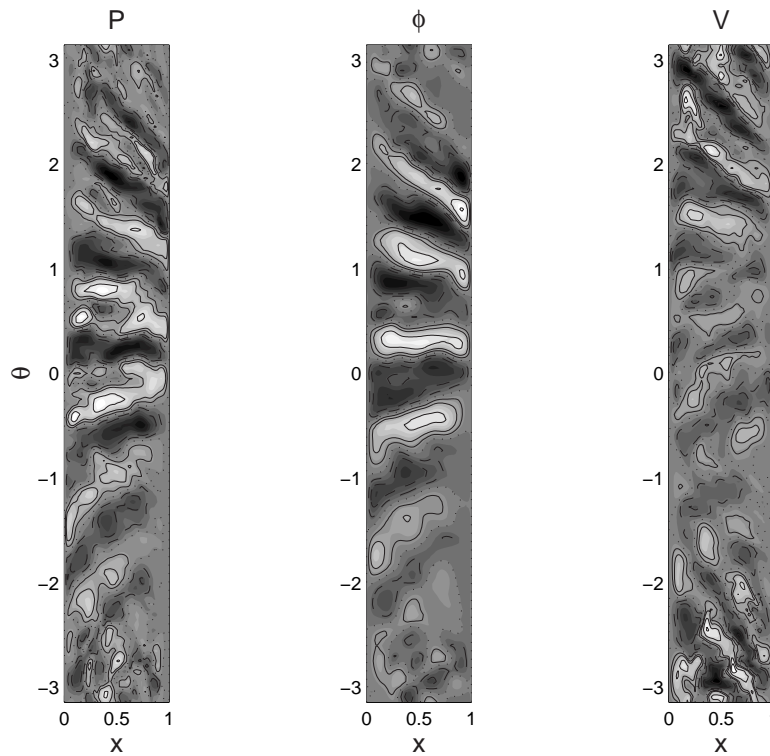
### 5.1.1 Simulation électrostatique

Nous voulons savoir si l'élongation radiale des cellules turbulentes est une signature des fluctuations magnétiques. Pour cela, il faut modifier le modèle et le code Etac3D afin de décrire un système électrostatique. En effet, tendre vers le régime électrostatique, ce n'est pas simplement faire tendre  $\beta$  vers 0 (ou  $d_\star \rightarrow \infty$ ) puisque dans ce cas le terme dans la loi d'Ohm  $[\psi, P]$  persiste. Il faut écrire un nouveau système comprenant toujours le potentiel électrostatique  $\phi$  et la pression électronique  $P$  mais plus le champ  $F$  remplacé par la vitesse parallèle normalisée  $V$ . Il suffit donc d'approximer  $F$  par  $V$  sachant que  $F = \psi - V$  avec  $V = d_\star^2 \nabla_\perp^2 \psi$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \phi - A_n \partial_\theta \phi + 2\epsilon \omega_d (\phi - P) - \rho_\star^2 [\phi, \nabla_\perp^2 \phi] - \frac{\epsilon}{\rho_\star} \nabla_\parallel V &= -D_\phi \nabla_\perp^4 \phi \\ \partial_t V + 2\epsilon \omega_d V + [\phi, V] + \frac{\epsilon}{\rho_\star} \nabla_\parallel (\phi - P) &= D_F \nabla_\perp^2 V \\ \partial_t P + +2\Gamma(1 - \tau)\epsilon \omega_d \phi + 4\Gamma\epsilon \omega_d P + [\phi, P] + \Gamma\tau \frac{\epsilon}{\rho_\star} \nabla_\parallel V &= D_P \nabla_\perp^2 P - \frac{\epsilon}{\rho_\star} X_L |\nabla_\parallel| P \end{aligned}$$

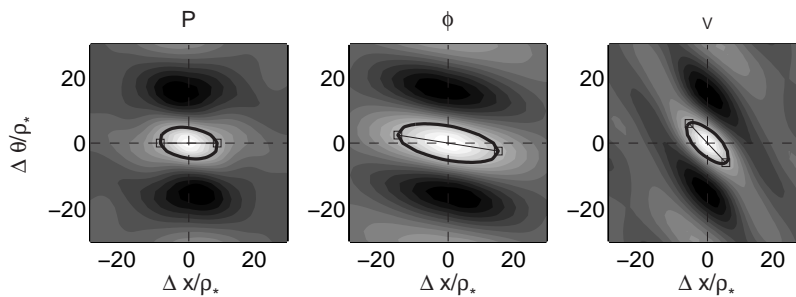
C'est essentiellement le sous-programme qui traite le transport parallèle qui doit être modifié dans le code.

Nous simulons donc un cas électrostatique avec les paramètres suivants :  $\rho_\star = 0.02$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  ; les autres paramètres étant inchangés par rapport aux simulations électromagnétiques. A priori, étant donné la faible dépendance du transport vis-à-vis de  $\beta$  que nous avons trouvée, on s'attend à ce que la version électrostatique du modèle ETG ne donne pas de grands changements. C'est effectivement ce que l'on observe. Les structures 2D représentées sur la figure 5.13 pour la pression ou pour le potentiel ont le même aspect que celles représentées sur la figure 5.5 : elles sont radialement allongées.



**FIG. 5.13 :** Section poloidale des fluctuations de pression (gauche), de potentiel électrique (centre) et de vitesse parallèle (droite) pour la simulation électrostatique.

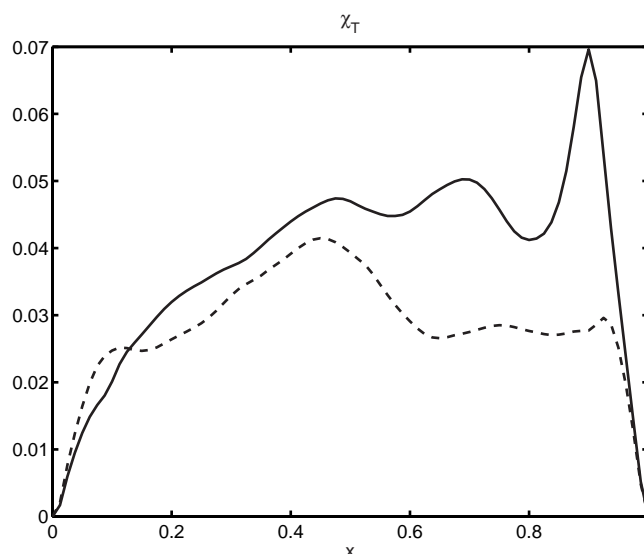
Ce que confirment les fonctions de corrélation bidimensionnelles calculées et tracées sur la figure 5.14 que l'on compare à la figure 5.10.



**FIG. 5.14 :** Fonction de corrélation bidimensionnelle pour les champs  $P$ ,  $\phi$  et  $V$  dans le cas électrostatique.

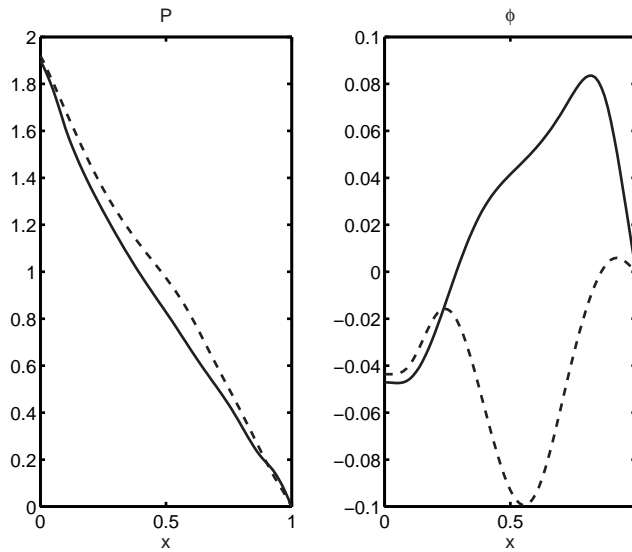
Les vortex radialement allongés ne sont donc pas une caractéristique des fluctuations du champ magnétique d'équilibre. Ces structures appelées parfois *streamers* [Dra88] dans la litté-

rature ont été également observées dans une turbulence ionique. Sont-elles alors, des «restes» des modes linéaires ? Nous apportons des éléments de réponse au paragraphe suivant. En ce qui concerne le transport, il est légèrement augmenté dans le cas électrostatique. Le profil de  $\chi_T$  représenté sur la figure 5.15 en rend compte. On trouve  $\langle \chi_T^{es} \rangle / \rho_\star \simeq 2.2$  à comparer à  $\langle \chi_T \rangle / \rho_\star \simeq \{1.8; 1.6; 1.8; 1.9\}$  pour  $\beta = \{0.1\%; 1\%; 4\%; 16\%\}$ . Quant aux longueurs de corrélation, on trouve  $\lambda_{corr}^P / \rho_\star \simeq 13.5$  et  $\lambda_{c,\perp}^P / \rho_\star \simeq 7.8$  tandis que pour le potentiel électrostatique, on trouve  $\lambda_{corr}^\phi / \rho_\star \simeq 31.1$  et  $\lambda_{c,\perp}^\phi / \rho_\star \simeq 10.4$ .



**FIG. 5.15 :** Profil de conductivité turbulente pour le cas électrostatique (ligne). En rappel, le cas  $\beta = 1\%$  (tiret).

La principale modification issue du cas électrostatique vient du profil de potentiel électrique. Comme on peut le voir sur la figure 5.16, il n'a pas la même allure que pour les simulations incluant les fluctuations magnétiques : dans le cas électrostatique, il n'y a pas de pincement de particules comme dans le cas magnétique. En effet, les fluctuations de densité sont de signe opposé aux fluctuations de potentiel électrique donc un "creux" dans le profil de  $\phi$  correspond à une surdensité. Dans le cas électrostatique, le profil de densité fluctuante est monotone. Cette modification du profil de potentiel électrique pourrait expliquer l'augmentation plus prononcée de  $\chi_T$  pour  $x \geq 0.6$  que l'on observe sur la figure 5.15. Enfin, remarquons qu'une modification du profil de  $\phi$  entraîne également une modification du profil de vitesse de rotation poloïdale  $V_\theta = +\partial_r \phi$ .



**FIG. 5.16 :** Profils de pression (gauche) et du potentiel électrostatique (droite) pour le cas électrostatique (ligne) et pour le cas magnétique  $\beta = 1\%$  (tirets).

### 5.1.2 Simulations à fort flux injecté

Comme nous le verrons plus en détail dans la partie consacrée au *scaling* en fonction de  $\rho_*$ , le flux injecté dans les simulations précédentes ne permet pas au système de s'éloigner véritablement du seuil linéaire en température. On peut penser qu'en augmentant le flux injecté, le système s'éloignera du seuil linéaire et que de nouvelles dépendances apparaîtront peut-être.

Nous réalisons donc une nouvelle série de simulations électromagnétiques avec comme paramètres principaux  $\rho_* = 0.02$ ,  $\beta = \{1\%; 0.1\%\}$  mais

$$\Gamma_{inj} = -\nabla T(x=0) \cdot \chi_{coll}(x=0) = 2 \times 0.15 = 0.3$$

Le rapport entre flux injectés dans cette série de simulations à  $\rho_* = 0.02$  et la série du paragraphe précédent également à  $\rho_* = 0.02$  vaut

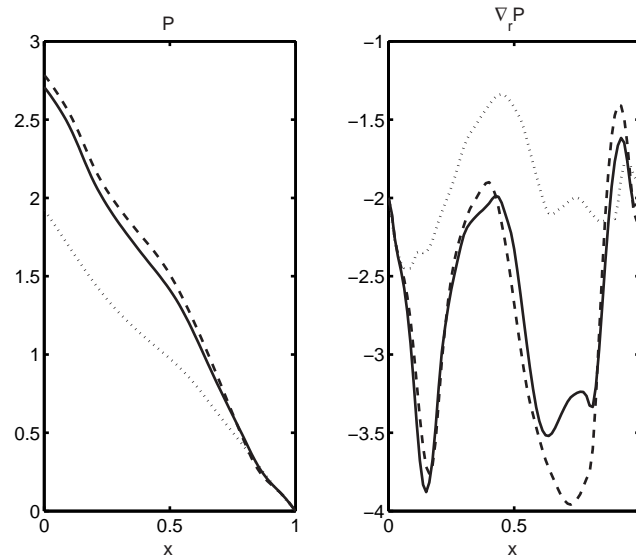
$$\frac{\Gamma_{inj}^{(2)}}{\Gamma_{inj}^{(1)}} = 4$$

Un tel flux injecté porte le système dans un régime hautement non linéaire. Le seuil linéaire n'a pas changé ( $A_{T,c} \sim 1.3$ ) puisque les paramètres de la simulation sont identiques à ceux utilisés dans le chapitre 4. A l'état stationnaire, le gradient de pression est supérieur au gradient critique

linéaire et au gradient obtenu avec un flux injecté quatre fois plus faible. Ceci est représenté sur la figure 5.17 pour les deux valeurs de  $\beta$  choisies. Le gradient de pression moyen des nouvelles simulations vaut :

$$\langle \nabla_x P \rangle^{\beta=1\%} \simeq -2.8 \quad \text{et} \quad \langle \nabla_x P \rangle^{\beta=0.1\%} \simeq -3.0$$

Ces valeurs sont à comparer à la valeur obtenue pour  $\rho_\star = 0.02$  et  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  :  $\langle \nabla_x P \rangle^{\beta=1\%} \simeq -1.8$ . Nous rappelons que les moyennes radiales se font toujours sur la partie de la boîte radiale dite «turbulente» – i.e. où les coefficients de dissipation collisionnelle sont minimaux.

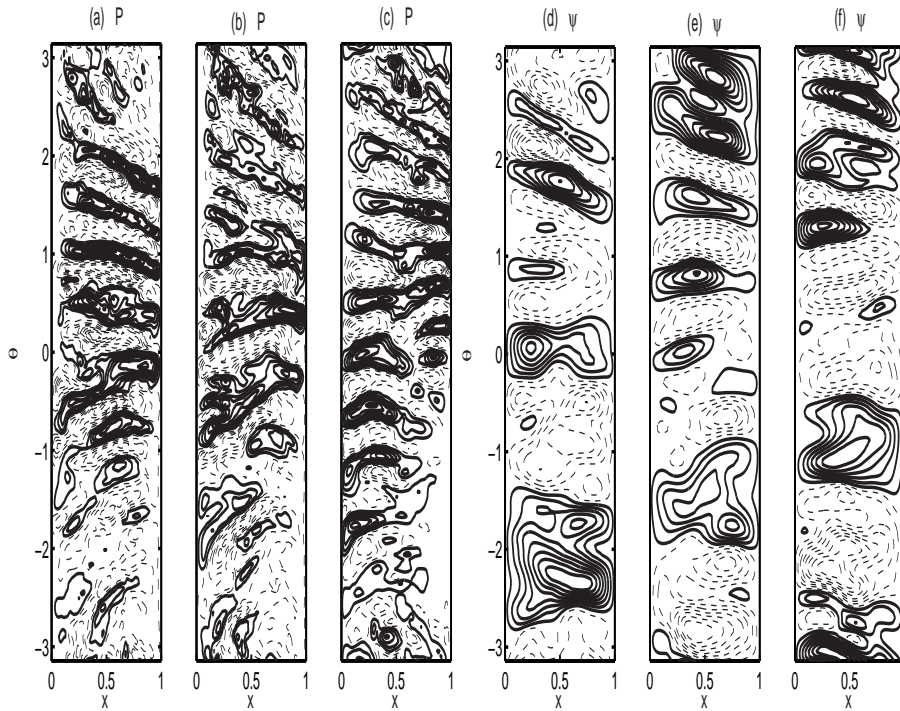


**FIG. 5.17 :** Profils de pression d'équilibre et de gradient associé avec  $\Gamma_{inj} = 0.3$  :  $\beta = 1\%$  (ligne) et  $\beta = 0.1\%$  (tiret). En référence, le cas  $\Gamma_{inj} = 0.075$ ,  $\beta = 1\%$  (pointillés).  $\rho_\star = 0.02$  pour les trois cas.

Avant de s'intéresser aux changements que l'augmentation du flux injecté a pu générer sur le transport turbulent, examinons à nouveau les sections poloïdales de  $P$  et  $\psi$  au même temps donné. A première vue, on constate, sur la figure 5.18, la persistance de vortex turbulents radialement allongés.

Le calcul des fonctions de corrélation en 2D confirme ce résultat. On trouve  $\lambda_{corr}^P/\rho_\star \simeq 13.5$ ,  $\lambda_{corr}^\phi/\rho_\star \simeq 17.6$  et  $\lambda_{corr}^\psi/\rho_\star \simeq 43.6$  pour  $\beta = 1\%$  et  $\lambda_{corr}^P/\rho_\star \simeq 17.8$ ,  $\lambda_{corr}^\phi/\rho_\star \simeq 21.7$  et  $\lambda_{corr}^\psi/\rho_\star \simeq 41.1$  pour  $\beta = 0.1\%$ .





**FIG. 5.18 :** Iso-fluctuations de pression (a-b-c) et de potentiel vecteur (d-e-f) pour  $\Gamma_{inj} = 0.3$ ,  $\beta = 1\%$  (a-d),  $\beta = 0.1\%$  (b-e) et  $\Gamma_{inj} = 0.075$ ,  $\beta = 1\%$  (c-f).  $\rho_* = 0.02$  dans les trois cas.

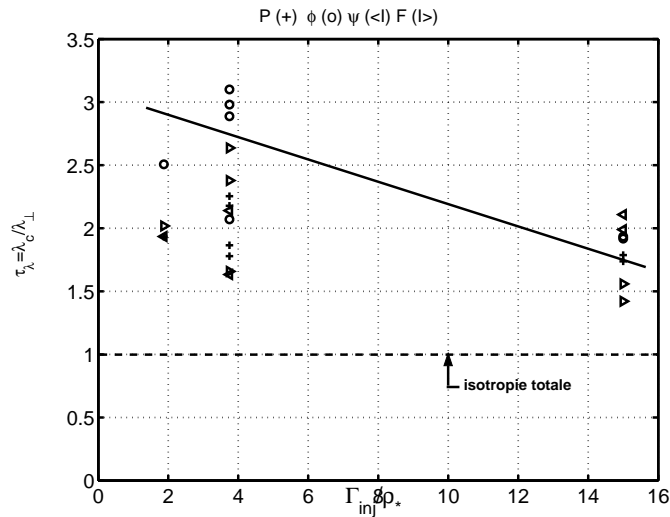
En reportant le rapport  $\tau_\lambda$  défini comme  $\tau_\lambda = \lambda_{corr}/\lambda_{c,\perp}$  en fonction du flux injecté pour chaque champ, comme représenté sur la figure 5.19, on constate que l'isotropisation totale des cellules turbulentes ne s'est pas produite lorsque le flux injecté amène le système loin du seuil linéaire<sup>17</sup>. Ce fait nouveau soulève une discussion entre modes ITG et modes ETG. Les simulations ITG de [Ott99] montrent que pour un gradient de température deux fois plus élevé que le gradient critique, l'isotropisation est totale. Dans le cas présent, nous avons  $\frac{\langle \nabla_x P \rangle}{(\nabla_x P)_{crit}} \simeq 2$ , comme dans [Man99], mais l'isotropisation n'est pas totale. On attribue ceci à la faible efficacité des écoulements zonaux (Zonal Flows en anglais) pour détruire ces cellules radialement allongées dans les modes ETG. Les flots zonaux sont des fluctuations de grande échelle du champ électrique radial. Ils sont donc directement liés au potentiel électrique [Lin98]. En effet, l'équation de conservation de la charge s'écrit de façon générique :  $\partial_t (n - \nabla_\perp^2 \rho_*^2 \phi) = \text{RHS}$  où RHS désigne les autres termes de cette équation (cf Chapitre 2). La moyenne de cette équation

<sup>17</sup>Toutes les valeurs de  $\rho_*$  et  $\beta$  testées sont représentées sur la figure 5.19 d'où il résulte une certaine dispersion des points.

sur les surfaces magnétiques donne  $\partial_t(\langle n \rangle + k_{\perp}^2 \rho_{*}^2 \langle \phi \rangle) = \langle \text{RHS} \rangle$ . Distinguons maintenant les deux types de réponses possibles :

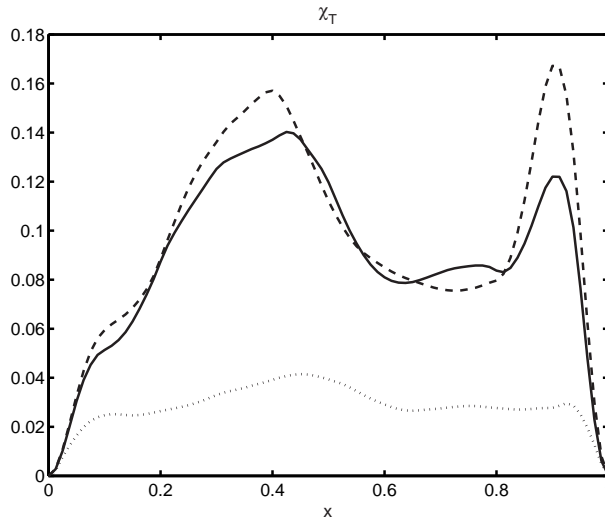
$$\left. \begin{array}{l} \text{Cas ITG : } n_e = \phi - \langle \phi \rangle \\ \partial_t(\langle \phi \rangle - \langle \phi \rangle + k_{\perp}^2 \rho_{*}^2 \langle \phi \rangle) = \langle \text{RHS} \rangle \\ \partial_t \langle \phi \rangle = \frac{1}{k_{\perp}^2 \rho_{*}^2} \langle \text{RHS} \rangle \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Cas ETG : } n_i = \phi \\ \partial_t(\langle \phi \rangle + k_{\perp}^2 \rho_{*}^2 \langle \phi \rangle) = \langle \text{RHS} \rangle \\ \partial_t \langle \phi \rangle = \frac{1}{1+k_{\perp}^2 \rho_{*}^2} \langle \text{RHS} \rangle \simeq \langle \text{RHS} \rangle \end{array}$$

Etant donné que  $\text{RHS}^{\text{ITG}} \simeq \text{RHS}^{\text{ETG}}$  et que  $k_{\perp}^2 \rho_{*}^2 \ll 1$ , on a donc  $[\partial_t \langle \phi \rangle]^{\text{ITG}} \gg [\partial_t \langle \phi \rangle]^{\text{ETG}}$ . On voit bien que l'excitation du potentiel électrique est plus forte dans le cas ITG que dans le cas ETG. La relative inefficacité des écoulements zonaux pour l'ETG est donc directement liée à la réponse de l'espèce adiabatique.



**FIG. 5.19 :** Rapport entre longueurs de corrélations  $\tau_{\chi}$  en fonction du flux injecté normalisé pour  $P$  (+),  $\phi$  (o),  $\psi$  (<) et  $F$  (l>).  $\rho_{*} = 0.02$  dans tous les cas.

En ce qui concerne le transport, les profils de la conductivité turbulente pour ces deux nouvelles simulations sont tracés sur la figure 5.20. On constate que la conductivité turbulente, toujours donnée par la formule  $\chi_T = -\Gamma_T / \nabla T$ , augmente avec le raidissement du profil de température ce qui est cohérent avec  $\chi_T = f(\nabla T)$  comme supposé par le modèle choisi.



**FIG. 5.20 :** Profil de conductivité turbulente avec  $\Gamma_{inj} = 0.3$  :  $\beta = 1\%$  (ligne) et  $\beta = 0.1\%$  (tiret). En référence, le cas  $\Gamma_{inj} = 0.075$ ,  $\beta = 1\%$ .

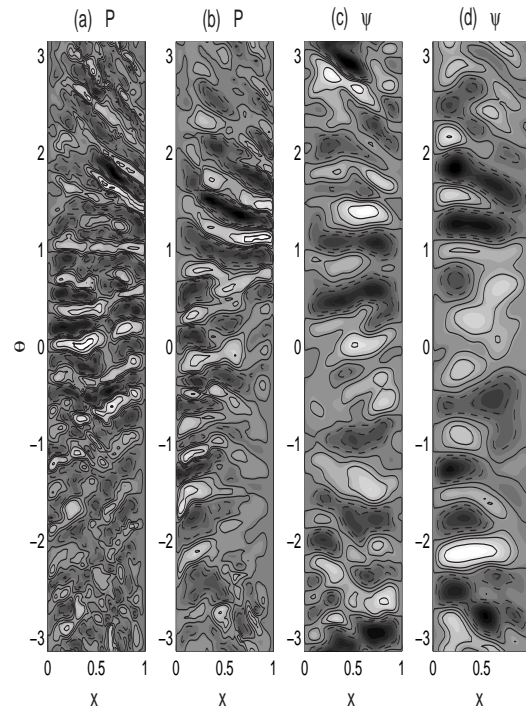
On trouve  $\frac{\langle \chi_T \rangle^{(\beta=1\%)}}{\rho_*} \simeq 5.3$  et  $\frac{\langle \chi_T \rangle^{(\beta=0.1\%)}}{\rho_*} \simeq 5.4$  pour  $\Gamma_{inj} = 0.3$  à comparer avec la valeur  $\langle \chi_T \rangle / \rho_* \simeq 1.9$  pour  $\Gamma_{inj} = 0.075$  et  $\beta = 1\%$ .

En ce qui concerne la dépendance vis-à-vis de  $\beta$  dans cette simulation, elle est très proche des résultats déjà obtenus à flux injecté plus faible : le transport turbulent décroît légèrement avec  $\beta$ .

## 5.2 Rôle du paramètre $\rho_*$ dans le transport de la chaleur

La nature de la dépendance du transport de chaleur avec le rayon de Larmor normalisé  $\rho_*$  est très importante pour les futures machines. En effet, dans ces expériences-là,  $\rho_*$  sera plus petit que dans les tokamaks actuels :  $\rho_* \propto T^{1/2}/(B_T a)$  avec  $T$  la température des ions,  $B_T$  le champ magnétique toroïdal et  $a$  le petit rayon du tokamak. Dans les futures machines, le champ toroïdal  $B_T$  sera un peu plus grand comparé aux expériences actuelles (JET  $\rightarrow B_T = 3.45T$ , ITER  $\rightarrow B_T = 5.7T$ ), la température  $T_i$  pourrait gagner un facteur 2 mais le petit rayon  $a$  sera beaucoup plus grand (JET  $\rightarrow a = 1.25m$ , ITER  $\rightarrow a = 2.80m$ ) soit  $\frac{[T^{1/2}/(B_T a)]^{ITER}}{[T^{1/2}/(B_T a)]^{JET}} \sim 0.38$ . Il est donc crucial de connaître la valeur du coefficient  $\alpha$  qui apparaît dans l'expression  $\chi_T \propto \rho_*^\alpha$ . Si  $\alpha$  vaut 0, (on parle alors de transport de type Bohm) ce n'est vraiment pas favorable tandis

que si  $\alpha = 1$  (transport giro-Bohm), la conductivité diminue et le temps de confinement augmente quand  $\rho_*$  diminue. Dans la plupart des expériences, en présence du mode-H, le transport de la chaleur est de type giro-Bohm [Kot97], [Cor97] mais aussi de récentes simulations girocinétiques globales de la turbulence ITG ont montré l'existence d'une transition Bohm vers giro-Bohm quand  $\rho_* \rightarrow 0$  [Lin02]. Pour ce qui est de l'étude présentée ici, nous avons déjà les simulations nécessaires à ce point de la thèse. En effet, il s'agit de faire une expérience de similarité pour tester la nature giro-Bohm du transport. D'une part, nous avons la simulation avec  $\rho_* = 0.02$  et  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  et d'autre part celle avec  $\rho_* = 0.01$  et  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ . On a doublé  $\rho_*$  et  $\Gamma_{inj}$  entre ces deux simulations donc, par consistance,  $\chi_T$  doit être également doublé et les profils de température doivent être similaires. En utilisant les mêmes outils que pour l'étude du transport en fonction de  $\beta$ , on observe des changements notables : la taille et l'élongation des structures 2D est modifiée avec  $\rho_*$  (voir Figure 5.21).



**FIG. 5.21 :** Iso-fluctuations de pression (a-b) et de potentiel vecteur (c-d) pour  $\rho_* = 0.01$   $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$  (a-c) et  $\rho_* = 0.02$   $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  (b-d).  $\beta = 1\%$  dans les deux cas.

D'une manière plus quantitative, cette dépendance est confirmée par les fonctions de corrélation bidimensionnelle. Elles sont reportées dans le tableau 5.1 après une normalisation à  $\rho_*$  et

$\rho_*$	$\beta(\%)$	$\Gamma_{inj} \times 10^{-2}$	$\hat{s}$	$\lambda_{corr}^P$	$\lambda_{c,\perp}^P$	$\tau_\lambda^P$	$\lambda_{corr}^\psi$	$\lambda_{c,\perp}^\psi$	$\tau_\lambda^\psi$
0.01	0.1	3.75	0.5	18.0	12.1	1.49	102.4		
0.01	1	3.75	0.5	16.6	11.2	1.49	47.4	27.3	1.74
0.02	0.1	7.5	0.5	17.3	7.7	2.25	44.3		
0.02	1	7.5	0.5	16.7	7.7	2.17	30.7	14.3	2.15
0.02	4	7.5	0.5	12.3	6.9	1.78	26.4	16.2	1.63
0.01	0.1	3.75	1	15.7	9.8	1.60	84		

**TAB. 5.1 :** Longueurs de corrélation normalisées à  $\rho_*$  pour  $P$  et  $\Psi$ . *Attention :* les valeurs représentent en fait le double de  $\lambda_{corr}$ .

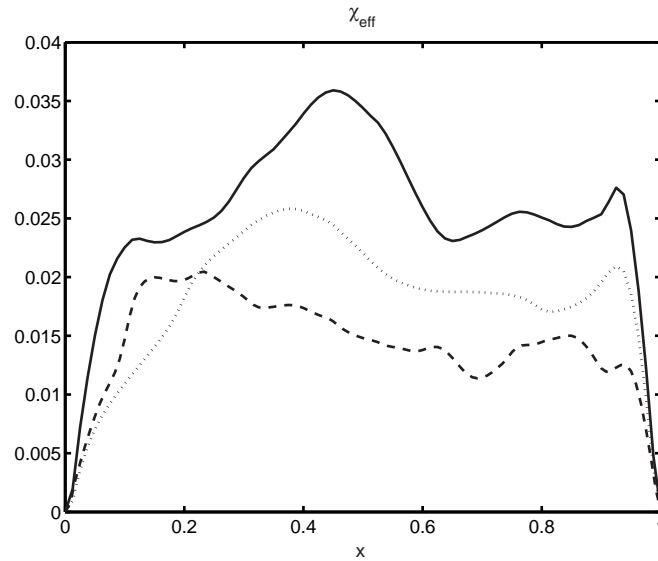
on constate que pour les 2 cas,  $\lambda_{corr}/\rho_*$  sont du même ordre de grandeur ; et ceci pour la pression  $P$ , le potentiel électrostatique  $\phi$  et le champ  $F$ . Ceci suggère donc un transport giro-Bohm.

Remarque : A  $\beta$  fixé, diviser  $\rho_*$  d'un facteur deux implique aussi que  $d_*$  est divisé d'un facteur deux. Or, nous avons vu que la longueur de peau normalisée contrôle le spectre et le niveau de fluctuations du potentiel vecteur. Donc la longueur de corrélation de  $\psi$  doit varier linéairement avec  $d_*$  (donc  $\rho_*$ ) mais ce n'est pas le cas (cf. tableau 5.1). Ceci soulève la question suivante : Qu'est-ce qui stoppe la cascade inverse de  $\psi$  ? On pense que c'est effectivement  $d_*$  mais de plus larges investigations sont nécessaires pour le confirmer.

Si l'on calcule le rapport entre les conductivités turbulentes tout d'abord et les longueurs de corrélation ensuite, on trouve, pour  $\beta = 1\%$  :

$$\frac{\langle \chi_T(x; \rho_* = 0.02) \rangle_x}{\langle \chi_T(x; \rho_* = 0.01) \rangle_x} \simeq 1.9 \quad \frac{\lambda_{corr}(\rho_* = 0.02)}{\lambda_{corr}(\rho_* = 0.01)} \simeq 2.0$$

De même, pour  $\beta = 0.1\%$ , on trouve 1.8 et 1.9, respectivement. Ces valeurs sont très proches de la valeur 2.0, valeur attendue si le transport était exactement giro-Bohm. Pour confirmer ce résultat, il faudrait faire d'autres simulations avec un rayon de Larmor plus petit.



**FIG. 5.22 :** Profils de conductivité turbulente pour  $\rho_* = 0.02$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  (ligne) et  $\rho_* = 0.01$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$  (tirets). En pointillés, le cas de contrôle :  $\rho_* = 0.02$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ .  $\beta = 1\%$  dans les trois cas.

Cependant, il existe un moyen relativement simple pour contrôler la loi d'échelle du transport en fonction de  $\rho_*$ . Nous avons fait une expérience de similarité en supposant le transport purement Bohm, donc indépendant de  $\rho_*$ . Pour cela, nous avons gardé le flux entrant constant, mais doublé le rayon de Larmor. Si le transport est vraiment Bohm, alors la conductivité doit être la même puisque a priori indépendante de  $\rho_*$ . On réalise donc une simulation avec  $\rho_* = 0.02$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$  et  $\beta = 1\%$  à comparer avec le cas  $\rho_* = 0.01$ , les autres paramètres étant identiques. A partir de la figure 5.22, on constate que les deux profils de conductivité sont très différents. Cette expérience de similarité permet donc clairement d'exclure l'hypothèse Bohm pour le transport turbulent.

### 5.3 Autres dépendances paramétriques

Jusqu'à présent, nous avons focalisé notre étude sur deux paramètres essentiels qui sont le rayon de Larmor normalisé  $\rho_*$  et la pression magnétique normalisée  $\beta$  qui entre dans le problème à travers la longueur de peau normalisée  $d_*$ , caractéristique des fluctuations magnétiques perpendiculaires au champ magnétique d'équilibre. Cependant, d'autres paramètres contrôlent

le modèle ETG étudié dans cette thèse : de façon directe, l'inverse du rapport d'aspect  $\epsilon$ , ou moins directement le cisaillement magnétique  $\hat{s}$  qui apparaît dans le profil du facteur de sécurité  $q$ , lui-même entrant dans le modèle par l'opérateur  $\nabla_{\parallel}$ . En effet, dans l'approximation de ballonnement, on peut écrire

$$k_{\parallel} \sim \frac{1}{R} \left( n + \frac{m}{q(x)} \right) \simeq \frac{1}{Rq(x_s)} m \frac{q'}{q} (x - x_s) \simeq \frac{k_{\theta} \hat{s} (x - x_s)}{Rq(x_s)}$$

où  $x_s$  repère la surface de résonance. Le cisaillement magnétique apparaît également dans l'opérateur de courbure lorsqu'on fait l'hypothèse de ballonnement (cf Annexe C) :  $\omega_d = \cos \theta \partial_{\theta} + \sin \theta \partial_x \rightarrow k_{\theta} (\cos \theta + \hat{s} \sin \theta)$ .

### 5.3.1 Effet du cisaillement magnétique

Le rôle du cisaillement magnétique dans le transport de chaleur dans un tokamak n'est pas bien compris actuellement. On sait cependant, depuis plusieurs années, qu'un cisaillement nul ou négatif (c'est-à-dire un profil du facteur de sécurité plat ou inversé) est très favorable pour le confinement de l'énergie. Ceci était prédit par la théorie [Kim94] et cet effet a été observé à la fois dans les expériences (par exemple, [Hoa98] pour Tore Supra) mais également dans les simulations de turbulence ionique [Gar01a]. Au minimum du profil de  $q$  se forme une barrière de transport : le profil de température se raidit fortement augmentant donc la température au centre du plasma. La qualité de la barrière est d'autant meilleure que le minimum du facteur de sécurité est un nombre rationnel de bas ordre. La conductivité à l'intérieur de la barrière est fortement réduite, pouvant atteindre parfois les valeurs néoclassiques. Cette approche est prometteuse à condition que l'on puisse contrôler en temps réel le profil de  $q$ . Des résultats préliminaires, lorsque l'on inverse le profil du facteur de sécurité, ont été obtenus avec le code électromagnétique développé au cours de cette thèse.

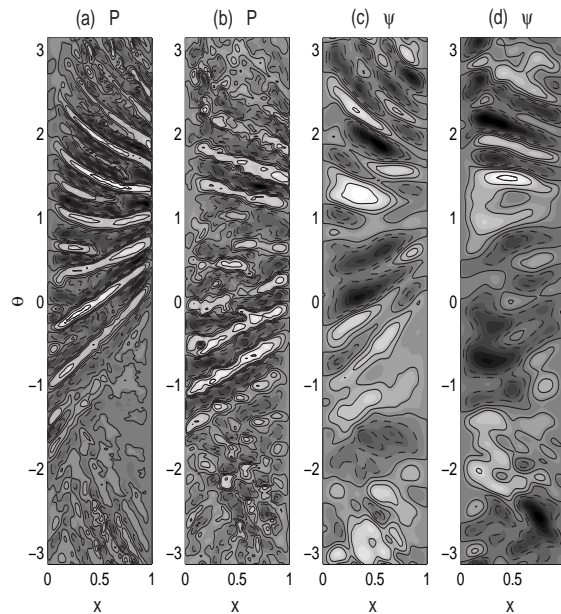
Un autre rôle possible du cisaillement magnétique a été mis en évidence, par Jenko et Dorland dans leurs simulations girocinétiques de turbulence ETG [Jen01a], [Dor00] mais également par [Jiq02], [Ido00]. Jenko *et al* ont mis en évidence une transition entre fort transport et faible transport lorsque le cisaillement magnétique est diminué, à  $\alpha^{18}$  et donc  $\beta$  (gradient de température fixé) constants. Le domaine de faible transport donc favorable est confiné aux «fortes» valeurs de  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0.5$ ) et aux faibles (voire négatives) valeurs de  $\hat{s}$ .

<sup>18</sup>La définition de  $\alpha$  qui est un paramètre de géométrie des surfaces magnétiques est  $\alpha \equiv -q^2 R \partial_x \beta$ .

Le modèle fluide étudié ici permet-il de retrouver une telle transition ? C'est l'objet de la simulation présentée ci-dessous. Les paramètres de celle-ci sont les suivants :  $\rho_\star = 0.01$ ,  $\beta = 0.1\%$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ . Le cisaillement magnétique vaut maintenant  $\hat{s} = 1$ . Le profil de facteur de sécurité, toujours de la forme  $q(x) = q_0 \exp(\hat{s}x)$ , varie dans l'intervalle  $2 \leq q(x) \leq 5.43$ .

Comme attendu (cf. Figure 5.23), les structures 2D sont plus «inclinées» dans la direction poloïdale. Ceci est l'effet direct du cisaillement magnétique. Il n'en demeure pas moins que ces tourbillons restent radialement allongés : on trouve comme rapport entre la longueur de corrélation et la longueur perpendiculaire  $\tau_\lambda^P \simeq 1.6$  pour  $\hat{s} = 1$  à comparer avec  $\tau_\lambda^P \simeq 1.5$  pour  $\hat{s} = 0.5$ . Ils sont même légèrement plus anisotropes.

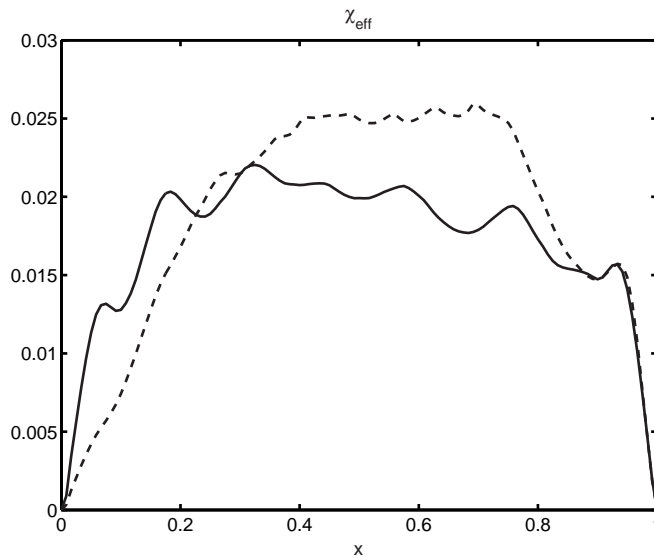
Cela a-t-il une conséquence sur le transport de la chaleur ? A la vue du profil de conductivité électronique, la réponse est affirmative. En effet, on obtient pour cette étude en fonction de  $\hat{s}$ ,  $\langle \chi_T \rangle_x / \rho_\star \simeq 2.2$  pour  $\hat{s} = 1$ . Rappelons que pour  $s = 0.5$  (les autres paramètres étant identiques), nous trouvons  $\langle \chi_T \rangle_x / \rho_\star \simeq 1.8$ . Il y a donc une légère augmentation du transport mais certainement pas la transition observée par les simulations girocinétiques de Jenko, puisque le niveau de transport observé reste très faible comparé aux valeurs girocinétiques.



**FIG. 5.23 :** Iso-fluctuations de pression et de potentiel vecteur pour  $\hat{s} = 1$  (a-c) et  $\hat{s} = 0.1$  (b-d).

$\rho_\star = 0.01$  dans les deux cas.





**FIG. 5.24 :** Profils de conductivité turbulente  $\chi_T$  pour  $\hat{s} = 1$  (ligne) et  $\hat{s} = 0.5$  (tirets).  $\rho_* = 0.01$  et  $\Gamma_{inj} = 0.0375$  dans les deux cas.

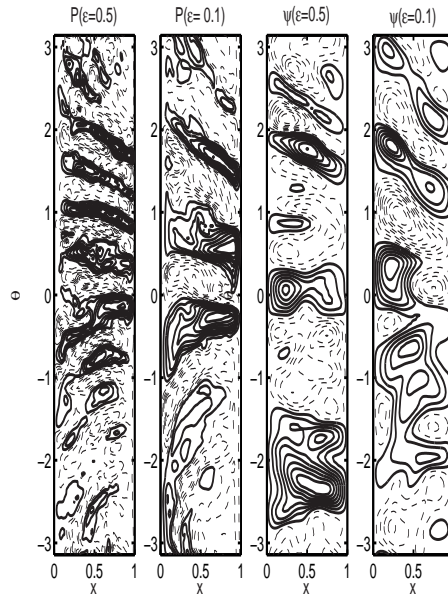
### 5.3.2 Effet de l'inverse du rapport d'aspect

L'inverse du rapport d'aspect  $\epsilon \equiv r_s/R$  apparaît explicitement dans le modèle ETG. On le trouve à la fois dans l'opérateur de courbure  $\omega_d$  et dans le terme de transport parallèle  $\nabla_{\parallel}$ . L'analyse linéaire faite au chapitre 4 a montré que ce paramètre entraine directement dans l'estimation du gradient de température critique pour le développement de l'instabilité. De plus, la limite  $\epsilon = 0$  correspond au cas 2D slab (pas de transport parallèle et pas de courbure). Nous comparons deux simulations :  $\rho_* = 0.02$ ,  $\beta = 1\%$ ,  $\Gamma_{inj} = 0.3$ ,  $\hat{s} = 0.5$  et  $\epsilon = \{0.5; 0.1\}$ . La valeur  $\epsilon = 0.1$  est une valeur typique de tokamak comme on le verra au chapitre suivant, tandis que  $\epsilon = 0.5$  est plutôt une valeur rencontrée pour les tokamaks sphériques, qui sont des machines à petit rapport d'aspect (en exemple, on citera la machine MAST pour laquelle  $R/a = 1.3$ ). En reprenant la formule 4.2 pour le calcul du seuil linéaire, on trouve dans le cas  $\epsilon = 0.1$  (les autres paramètres étant identiques) :

$$A_{T,crit} \approx 0.27$$

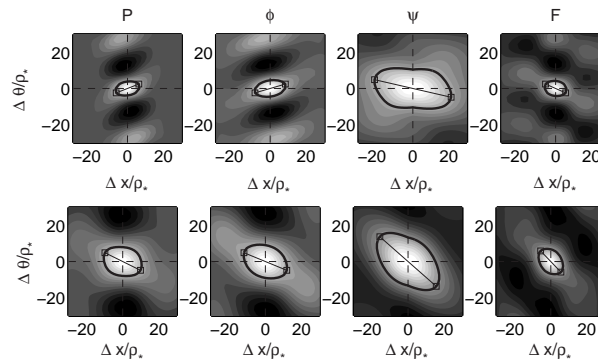
Le seuil linéaire étant plus bas pour  $\epsilon = 0.1$ , à flux injecté égal, le système sera bien au-delà du seuil linéaire, donc «plus turbulent» que dans le cas avec  $\epsilon = 0.5$ .

Avant de s'intéresser au transport turbulent, regardons l'allure des champs fluctuants dans les sections poloïdales 2D. Sur la figure 5.25, la pression et le potentiel vecteur fluctuants sont tracés à un temps donné pour les deux valeurs de  $\epsilon$  choisies. Les cellules turbulentes observées n'ont pas le même aspect : pour  $\epsilon = 0.1$ , elles semblent plus isotropes et plus grandes.



**FIG. 5.25 :** Fluctuations de pression et de potentiel vecteur dans une section poloïdale pour 2 valeurs de  $\epsilon = r_s/R$ .  $\rho_\star = 0.02$  dans les deux cas.

Le calcul de la fonction d'autocorrélation confirme ce point (cf. Figure 5.26).



**FIG. 5.26 :** Fonctions d'auto-corrélation 2D pour les champs  $P$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  et  $F$  pour deux valeurs de  $\epsilon$  :  $\epsilon = 0.5$  (haut) et  $\epsilon = 0.1$  (bas).  $\rho_\star = 0.02$  et  $\Gamma_{inj} = 0.3$  dans les deux cas.

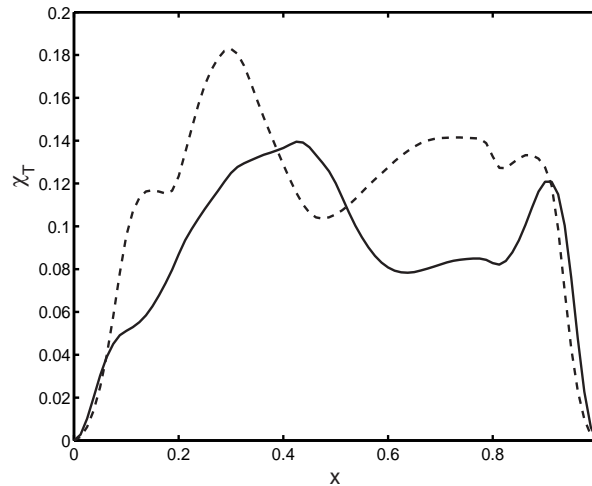
En effet, on trouve comme longueur de corrélation :  $\left(\frac{\lambda_{corr}}{\rho_\star}\right)_{\epsilon=0.5} \simeq 13.5$  et  $\left(\frac{\lambda_{corr}}{\rho_\star}\right)_{\epsilon=0.1} \simeq$

22.1 pour la pression et  $\left(\frac{\lambda_{corr}}{\rho_*}\right)_{\epsilon=0.5} \simeq 43.6$  et  $\left(\frac{\lambda_{corr}}{\rho_*}\right)_{\epsilon=0.1} = 41.7$  pour le potentiel vecteur. La tendance à l'isotropisation est confirmée par le calcul du rapport des longueurs de corrélation  $\tau_\lambda$ , reporté dans le tableau suivant :

	$\tau_\lambda^P$	$\tau_\lambda^\phi$	$\tau_\lambda^\psi$	$\tau_\lambda^F$
$\epsilon = 0.5$	$\simeq 1.7$	$\simeq 1.9$	$\simeq 2.0$	$\simeq 1.4$
$\epsilon = 0.1$	$\simeq 1.3$	$\simeq 1.5$	$\simeq 1.7$	$\simeq 1.4$

L'extension radiale des cellules turbulentes est directement reliée au couplage toroïdal contenu dans la courbure du champ magnétique. Dans le modèle, la force du couplage est contrôlée par  $\epsilon$  : une petite valeur de  $\epsilon$  affaiblit le couplage toroïdal («les lignes de champ sont moins courbées») et renforce l'isotropisation des cellules turbulentes.

Est-ce que cette isotropisation des structures convectives a une conséquence sur le transport de la chaleur ? Intuitivement, on pourrait penser que le transport doit être plus faible puisque des cellules plus rondes sont moins efficaces pour transporter la chaleur que des «fils» joignant les extrémités radiales du domaine. Mais le transport turbulent dépend aussi de l'amplitude des fluctuations. Celle-ci étant directement reliée au gradient de température critique. La figure 5.27 représente le profil radial de conductivité turbulente. On constate que la conductivité turbulente a très légèrement augmenté :  $\langle\chi_T\rangle_x(\epsilon = 0.1) \simeq 0.14$  à comparer avec  $\langle\chi_T\rangle_x(\epsilon = 0.5) \simeq 0.10$ .



**FIG. 5.27 :** Profil de conductivité turbulente pour  $\epsilon = 0.5$  (ligne) et  $\epsilon = 0.1$  (tirets).  $\rho_* = 0.02$  et  $\Gamma_{inj} = 0.3$  dans les deux cas.

Comme le flux injecté est le même pour les deux simulations, le gradient de pression a dû

légèrement diminuer en passant de  $\epsilon = 0.5$  à  $\epsilon = 0.1$ . C'est effectivement le cas, puisque numériquement, on trouve  $\langle \nabla_x P \rangle^{\epsilon=0.5} \simeq -2.8$  et  $\langle \nabla_x P \rangle^{\epsilon=0.1} \simeq -2.1$ . La figure 5.28 montre ce résultat.

Comme prédit également par le gradient critique linéaire, le système est plus turbulent lorsque  $\epsilon = 0.1$  que pour  $\epsilon = 0.5$  à flux injecté égal : les fluctuations de pression ont été multipliées d'un facteur trois environ, comme représenté sur le graphe de droite de la figure 5.28.

Nous pouvons expliquer le résultat précédent «avec les mains» de la façon suivante :

Considérons une expression de  $\chi$  de la forme

$$\chi = C(\epsilon, \nabla T)[\nabla T - \nabla T_c(\epsilon)] \quad (5.1)$$

Nous avons aussi

$$\Gamma_{inj} = -\chi \nabla T \quad (5.2)$$

Pour  $\epsilon = 0.5$  (cas 1), on a  $\frac{\nabla T}{\nabla T_c} \simeq 2$  et pour  $\epsilon = 0.1$  (cas 2), on a  $\frac{\nabla T}{\nabla T_c} \simeq 10$  soit

$$\chi_1 = C(\nabla T_1 - 0.5 \nabla T_1)$$

$$\chi_2 = C(\nabla T_2) \quad \text{On néglige le gradient critique}$$

où on a supposé  $C$  indépendant de  $\epsilon$  et  $\nabla T$ . En remplaçant ces deux expressions dans 5.2, on obtient

$$(\nabla T_1 - 0.5 \nabla T_1) \nabla T_1 = (\nabla T_2)^2$$

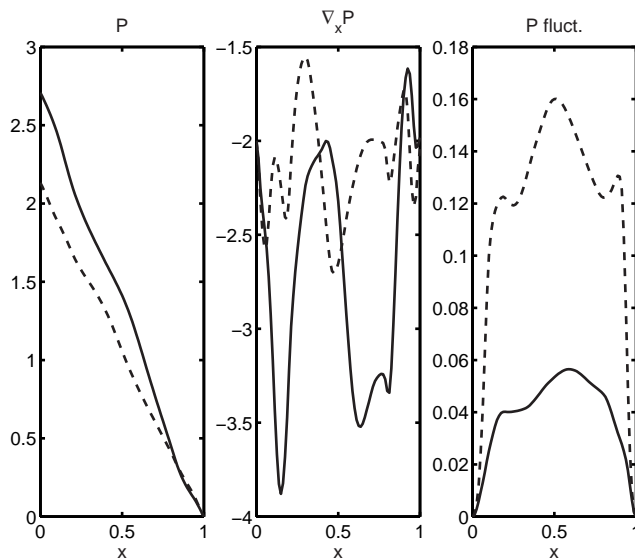
$$\Rightarrow \nabla T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \nabla T_1$$

$$\Rightarrow \frac{\chi_2}{\chi_1} = \frac{\nabla T_2}{0.5 \nabla T_1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \simeq 1.4$$

En prenant, les valeurs numériques tirées des simulations, on trouve :

$$\frac{\langle \chi_2 \rangle}{\langle \chi_1 \rangle} \simeq 1.3$$

Ce petit calcul permet de montrer simplement, par des arguments qualitatifs, que l'augmentation du transport lorsque  $\epsilon$  diminue n'est pas aberrante.



**FIG. 5.28 :** Profils de pression, de gradient de pression et de fluctuations de pression pour  $\epsilon = 0.5$  (ligne) et  $\epsilon = 0.1$  (tiret).  $\rho_\star = 0.02$  et  $\Gamma_{inj} = 0.3$  dans les deux cas.

### Conclusion :

- Nous avons vu au paragraphe précédent que le rôle du paramètre  $\rho_\star$  est déterminant dans la qualité du confinement magnétique. Par des simulations dites de similarité, nous avons montré que le transport associé à la turbulence ETG est dépendant de  $\rho_\star$  (hypothèse Bohm invalidée). En effet, les longueurs de corrélation ainsi que la conductivité turbulente, montrent que le transport est plutôt de type giro-Bohm, c'est-à-dire  $\chi_T \propto \rho_\star$ . Ce résultat est en accord avec les expériences.
- L'étude du transport en fonction du cisaillement magnétique  $\hat{s}$  n'a pas mis en évidence la transition observée dans les simulations girocinétiques. Malgré un allongement accru des *streamers*, le transport reste faible en comparaison des résultats expérimentaux.
- Enfin, l'isotropisation des cellules convectives est observée lorsque l'inverse du rapport d'aspect,  $\epsilon$  diminue. Ceci est essentiellement un effet non linéaire dû à l'augmentation de la turbulence car le seuil de l'instabilité décroît avec ce paramètre.

# Chapitre 6

## Confrontation avec l'expérience

Etant donné les résultats trouvés dans l'étude paramétrique, il ne semble pas possible de reproduire par ce modèle les conductivités thermiques rencontrées dans un tokamak comme Tore Supra. Cependant nous avons essayé de pousser le code aux limites numériques dont nous disposons afin de nous rapprocher des conditions expérimentales.

### 6.1 Résultats expérimentaux

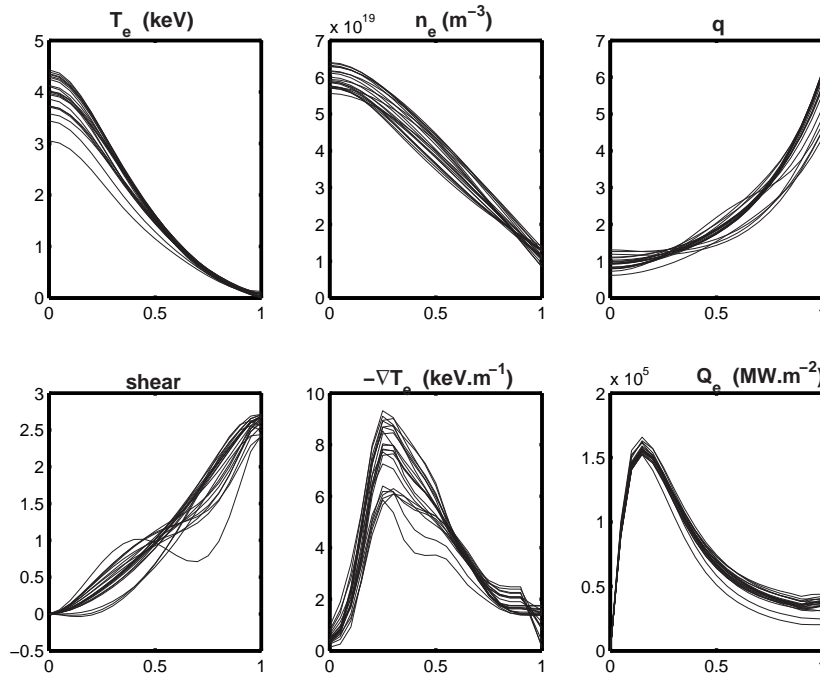
Avant d'arriver à cette expérience numérique, nous présentons brièvement quelques résultats concernant le transport de la chaleur dans Tore Supra. Ce tokamak est particulièrement bien désigné pour étudier le transport de chaleur par le canal électronique grâce notamment au faible couplage collisionnel entre les ions et les électrons. Mais aussi, les électrons sont préférentiellement chauffés et l'on obtient grâce au chauffage par l'onde rapide<sup>19</sup> des températures au centre du plasma de l'ordre de la dizaine de kiloélectron-Volts. Ensuite, a été mise en évidence l'existence d'un gradient de température électronique critique lors des expériences de formation de barrières internes de transport (ITB). Ce gradient est donné par la formule empirique suivante [Hoa01] :

$$\frac{R}{L_{T,c}} = 5(\pm 1) + 10(\pm 2) \frac{|\hat{s}|}{q} \quad (6.1)$$

---

<sup>19</sup>L'onde rapide est une onde dont la fréquence est supérieure à la fréquence cyclotronique ionique ( $\omega \gtrsim 3\omega_{ci}$ ). Elle chauffe préférentiellement les électrons par effet Landau parallèle sur cette population. En un passage dans le plasma, elle peut être absorbée de 15% à 90% (mode «single-pass»); mais cette absorption se fait toujours au centre du plasma d'où les fortes températures obtenues par ce chauffage.

Nous avons choisi un choc bien répertorié de Tore Supra. Il s'agit du choc #19542 avec l'utilisation du chauffage des électrons par l'onde rapide. Les principaux profils de ce choc sont représentés sur la figure 6.1. Le créneau de chauffage par l'onde rapide dure environ 1 seconde, durée suffisante pour obtenir des profils quasi-stationnaires.



**FIG. 6.1 :** Principaux profils du choc #19542 durant le créneau de chauffage par l'onde rapide,  $5.2s < t_{\text{choc}} < 6.3s$ .

A partir du bilan de puissance, on peut trouver un profil de conductivité thermique électronique. Sur la figure 6.2, nous avons représenté le profil expérimental de la conductivité normalisée à la conductivité de Bohm,  $\chi_B = \frac{cT_e}{eB}$  (unité *cgs*). Sur cette même courbe sont également représentés le rayon de Larmor électronique normalisé  $\rho_* = \rho_e/r_s$  et la longueur de peau normalisée,  $d_* = d_e/r_s$ . La longueur de normalisation est telle que  $r/a = 0.5$ , soit  $r_s = 0.5\bar{a} = 0.36\text{m}$  où  $\bar{a}$  est le petit rayon du plasma moyenné sur la durée du créneau de chauffage. On obtient alors comme valeur à mi-rayon :

$$[\rho_*]^{\text{choc}} \simeq 1 \times 10^{-4} \quad [d_*]^{\text{choc}} \simeq 2.2 \times 10^{-3} \Rightarrow \beta = \frac{\rho_*^2}{d_*^2} = 0.002 = 0.2\%$$

Le profil de densité électronique présente un gradient dont nous pouvons estimer la longueur

à  $r/a = 0.5$  :

$$\frac{1}{L_n} \Big|_{r/a=0.5} = - \frac{\nabla n_e}{n_e} \Big|_{r/a=0.5} \simeq 1.92 \implies A_n(r/a = 0.5) = \frac{r_s}{L_n} \Big|_{r/a=0.5} \simeq 0.71$$

Afin de pouvoir comparer les résultats de la simulation, il faut renormaliser le flux injecté en unité propre au modèle choisi. Sur la figure 6.1, le flux de chaleur électronique  $Q_e$  est représenté pendant le créneau de chauffage. Il est exprimé en  $MW.m^{-2}$  mais il faut le ramener aux unités du modèle par la formule

$$F_{resc} = \frac{\Gamma_{inj}}{\rho_\star} = \frac{Q_e[W.m^{-2}].a[m]}{\rho_e[m].n_e[m^{-3}]} \cdot \frac{eB[T]}{cT_e[eV]} \cdot \frac{a[m]}{T_e[J]}$$

L'application numérique donne  $F_{resc} \simeq 120$ .

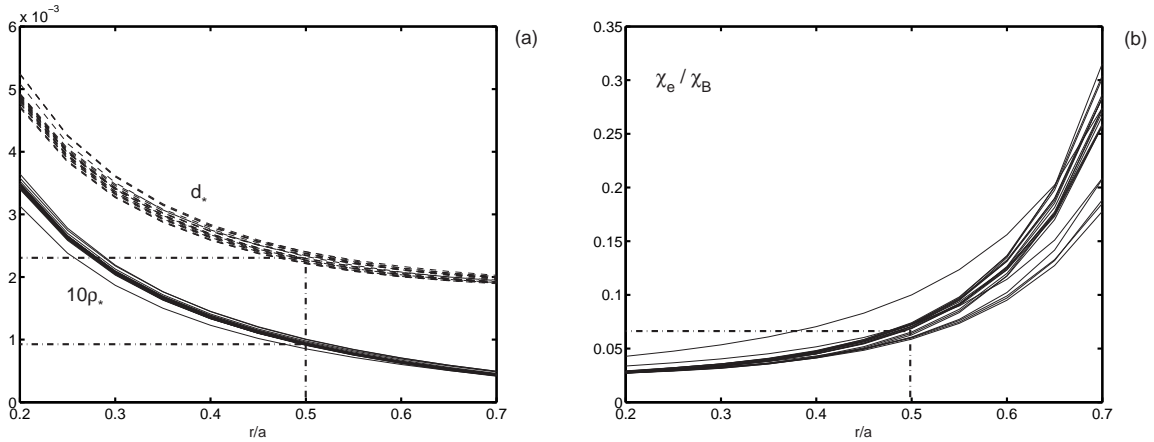


FIG. 6.2 : Profil radial du rayon de Larmor normalisé, de la longueur de peau normalisée (a) et de la conductivité électronique normalisée (b) durant le créneau de chauffage par l'onde rapide.

## 6.2 Simulation

Dans la simulation suivante, nous avons essayé de garder autant de paramètres que possible identiques à ceux du choc. Par exemple, le cisaillement magnétique, l'inverse du rapport d'aspect, le rapport des températures, la pression normalisée, la valeur du facteur de sécurité ont pu être conservés dans la simulation. Ces paramètres expérimentaux ont été mesurés à  $r_s = 0.36m$ . Ils sont reportés pour mémoire dans le tableau 6.1.



$\tau$	$\hat{s}$	$\epsilon$	$q(x = 0.5)$	$\beta$
1.4	1	0.16	1.8	0.2%

**TAB. 6.1 :** Paramètres de la simulation «cas Tokamak» tirés du choc #19542 à  $r/a = 0.5$ .

Nous prenons toujours, pour cette simulation, un profil de densité plat ( $A_n = 0$ ) et un profil de facteur de sécurité exponentiel. Quant au flux de chaleur, nous avons injecté au cours de la simulation les trois valeurs normalisées suivantes :

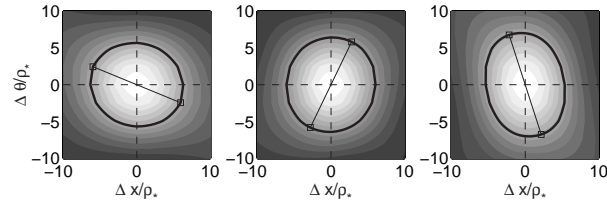
$$\Gamma_{inj}/\rho_* = \{15; 50; 100\}$$

Finalement, hormis la longueur de gradient de densité, un seul paramètre physique important n'a pu être conservé : le rayon de Larmor électronique. Dans la simulation, nous avons  $\rho_* = 0.02$  tandis que pour le choc  $\rho_* \simeq 10^{-4}$ , ce qui donne

$$\frac{[\rho_*]^{sim}}{[\rho_*]^{choc}} \simeq 200$$

Ce sont des limitations numériques qui nous empêchent de diminuer  $\rho_*$  vers des valeurs expérimentales.

Avant d'interpréter les résultats obtenus, il faut signaler que cette simulation n'a pu être possible qu'en augmentant la résolution dans la direction radiale à cause des forts gradients générés mais aussi en diminuant fortement le pas de temps. En conséquence, la simulation n'a été possible que sur des temps courts par rapport au temps de confinement. Il n'est donc pas possible de faire la même analyse de transport que précédemment en calculant par exemple le profil de conductivité turbulente moyennée sur l'état stationnaire. Par contre, il reste possible de mesurer des longueurs de corrélation de la turbulence car celles-ci s'établissent sur des temps beaucoup plus courts. Par exemple, sur la figure 6.3 est représentée la fonction d'auto-corrélation du potentiel électrique pour les trois valeurs de flux injecté.



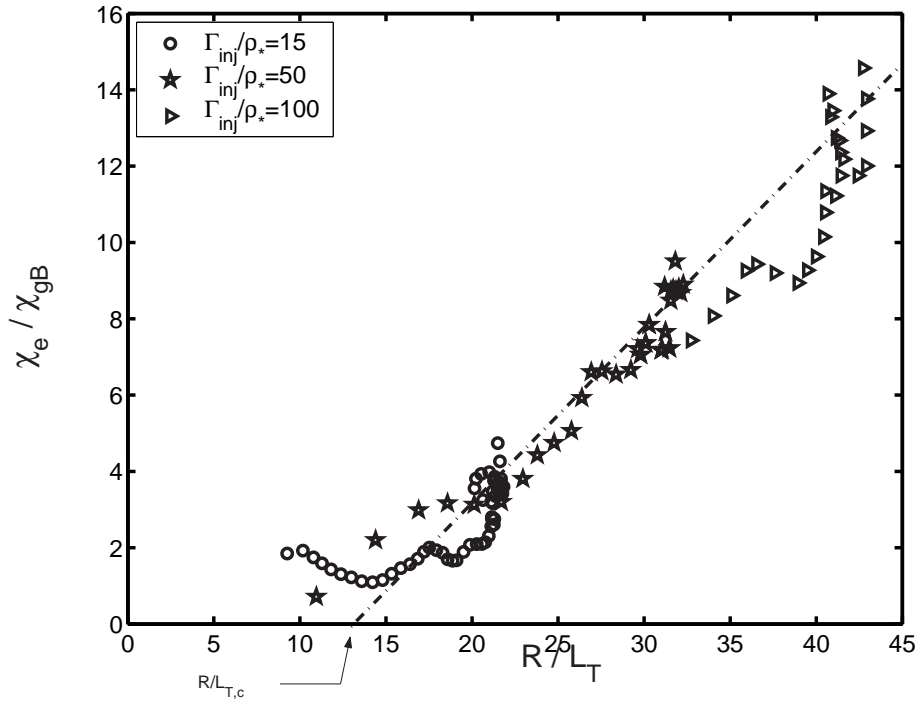
**FIG. 6.3 :** Fonction d'auto-corrélation pour le champ  $\phi$  en fonction des trois valeurs de flux injecté :  $\Gamma_{inj} = 0.3$  (a),  $\Gamma_{inj} = 1$  (b) et  $\Gamma_{inj} = 2$  (c).

On constate que l'isotropisation de la turbulence est totale lorsque le flux injecté est très fort. En effet, le rapport entre les longueurs de corrélation pour le champ  $\phi$ , reportées dans le tableau 6.2, tendent vers la valeur 1, caractéristique d'une isotropie totale.

$\Gamma_{inj}$	$\lambda_{corr}/\rho_*$	$\lambda_{c,\perp}/\rho_*$	$\tau_\lambda$
0.3	16.9	11.4	1.5
1	16.2	12.9	1.3
2	14.4	14.0	1.0

**TAB. 6.2 :** Longueurs de corrélation normalisées, longueurs de corrélation transverses et rapport entre les deux pour le potentiel électrique, issues de la simulation «type Tokamak».

Le résultat de cette simulation est synthétisé sur la figure 6.4. Cette figure montre l'évolution au cours du temps de la conductivité électronique normalisée à  $\chi_{gB} \equiv \chi_B \rho_*$  en fonction du gradient de température normalisé et pour les trois valeurs de flux injecté. Pour la plus petite valeur de  $\Gamma_{inj}$ , le système a pratiquement atteint l'état stationnaire (accumulation de points autour d'un gradient moyen et d'une conductivité moyenne).



**FIG. 6.4 :** Evolution temporelle de la conductivité turbulente normalisée en fonction de la longueur de gradient de température pour trois valeurs de flux injecté  $\Gamma_{inj} = \{0.3(\circ); 1(\star); 2(\triangleright)\}$ .

### 6.3 Interprétation

On constate sur cette figure que lorsque le flux injecté augmente, le gradient de température et la conductivité turbulente augmentent également. On voit aussi que l'on ne peut reproduire le niveau de conductivité obtenu pour ce choc. Il persiste une différence considérable entre la simulation et l'expérience. Il faut comparer les conductivités normalisées à une quantité tenant compte de la nature giro-Bohm du transport,  $\chi_{gB} \equiv \chi_B \rho_*$ . Le gradient de température normalisé  $R/L_{T_e}$  moyenné sur la durée du créneau de chauffage vaut environ  $\left[\frac{R}{L_{T_e}}\right]^{\text{choc}} \simeq 8.5$ . En reportant cette valeur sur le graphe de la figure 6.4, on trouve comme conductivité normalisée  $[\chi_T/\chi_{gB}]^{\text{sim}} \simeq 2$ , d'où le rapport suivant entre l'expérience et la simulation :

$$\frac{[\chi_T/\chi_{gB}]^{\text{choc}}}{[\chi_T/\chi_{gB}]^{\text{sim}}} \simeq 250 \quad !!!$$

Définitivement, nos simulations ne peuvent reproduire les conductivités thermiques expérimentales.

Néanmoins, en interpolant par une droite les points les plus stationnaires de la simulation, on trouve un gradient critique (valeur de  $R/L_T$  pour laquelle  $\chi_T$  est nulle) de l'ordre de

$$[R/L_{T,c}]^{\text{sim}} \simeq 12.0$$

Cette valeur n'est pas très éloignée de la valeur obtenue avec la formule expérimentale 6.1 compte tenu des barres d'erreurs :

$$\left[ \frac{R}{L_{T,c}} \right]^{\#19542} = 10.55 \pm 2.11$$

Elle est par contre en désaccord avec la formule de Hahm et Tang [Hah89] :

$\frac{R}{L_T^{\text{ETG}}} = 1.88 \frac{|\hat{s}|}{q} \left( 1 + Z_{\text{eff}} \frac{T_e}{T_i} \right)$  qui donne avec les paramètres de la simulation et pour  $Z_{\text{eff}} = 1$  la valeur 2.5 environ.

Les résultats de nos simulations non linéaires nous suggèrent la formule suivante pour la conductivité thermique :

$$\chi_T \propto \mathcal{C} \chi_{B\rho_*} \left[ \frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T,c}} \right]^\alpha f(\beta, \hat{s}, \dots)$$

Notre interpolation linéaire conduit à prendre  $\alpha = 1$ . On peut également négliger toute dépendance en fonction de  $\beta$  et  $\hat{s}$ , suite aux résultats du chapitre précédent.

$$\begin{aligned} \chi_T &\simeq \mathcal{C} \chi_{B\rho_*} \left[ \frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T,c}} \right] \\ &= \mathcal{C} \frac{cT_e}{eB} \frac{T_e^{1/2} m_e^{1/2} c}{eBr_s} \left[ \frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T,c}} \right] \\ &= \mathcal{C} \left( \frac{c}{eB} \right)^2 \frac{T_e^{3/2} m_e^{1/2}}{\epsilon R} \left[ \frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T,c}} \right] \\ &= \mathcal{C}^{\text{sim}} \left( \frac{c}{eB} \right)^2 T_e^{3/2} m_e^{1/2} \left[ \frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T,c}} \right] \end{aligned}$$

La dépendance en  $T^{3/2}$  est liée au caractère giro-Bohm du transport de chaleur. On détermine la constante  $\mathcal{C}$  en évaluant la pente de la droite d'interpolation :  $\mathcal{C} \simeq 0.45$ . Ce qui donne

$$\mathcal{C}^{\text{sim}} \equiv \frac{\mathcal{C}}{\epsilon R} \simeq 1.25$$

On peut comparer cette formule avec la formule (11) donnée dans la référence [Hor00] :

$$\chi_e^{\text{es}} = \mathcal{C}_e^{\text{es}} q^2 \left( \frac{R}{L_{T_e}} \right)^{3/2} \left( \frac{\rho_e^2 v_{T_e}}{R} \right) \times \left[ \frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T,c}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= C_e^{\text{es}} q^2 \left( \frac{c}{eB} \right)^2 T_e^{3/2} m_e^{1/2} \left( \frac{R^{1/2}}{L_{T_e}^{3/2}} \right) \left[ \frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T,c}} \right] \\
&= C^{\text{exp}} \left( \frac{c}{eB} \right)^2 T_e^{3/2} m_e^{1/2} \left[ \frac{R}{L_T} - \frac{R}{L_{T,c}} \right]
\end{aligned}$$

avec

$$C^{\text{exp}} \equiv C_e^{\text{es}} q^2 \left( \frac{R^{1/2}}{L_{T_e}^{3/2}} \right)$$

D'après [Hor00], on peut prendre  $C_e^{\text{es}} = 0.05$  et d'après le choc étudié, on prend  $q = 1.8$ . Enfin, si l'on prend les valeurs de  $R (= 2.3\text{m})$  et de  $L_{T_e}^{-1} (\simeq 17.39)$  de la simulation, on estime  $C^{\text{exp}} = 0.05 \times 1.8^2 \times 2.3^{1/2} \times 17.39^{3/2} \simeq 17.81$  mais en prenant les valeurs expérimentales, on trouve alors

$$C^{\text{exp}} = 0.05 \times 1.8^2 \times 2.3^{1/2} \times 3.64^{3/2} \simeq 1.7$$

Ce qui nous permet de conclure

$$\chi_T^{\text{code}} \sim \chi_e^{\text{es}} \ll \chi_e^{\text{exp}}$$

Le modèle ETG développé dans cette thèse ne rend pas bien compte de l'expérience. Cette insuffisance est contenue dans une différence qualitative de comportement : à flux injecté identique, le modèle «répartit» l'énergie essentiellement dans le gradient de température (amenant le système très loin du seuil linéaire) mais pas dans la conductivité thermique tandis que l'expérience montre que la conductivité augmente énormément alors que le gradient de température reste proche du gradient critique.

# Conclusion

Le transport *anormal* de la chaleur dans les tokamaks a pour origine l'état turbulent dans lequel se trouve le plasma. Cette turbulence est générée par de forts gradients de densité, de température, etc...La compréhension aussi complète que possible des différents mécanismes à l'origine de ce transport est indispensable pour une meilleure prédiction du confinement de l'énergie dans les futures machines. Si l'origine des fortes pertes de chaleur par le canal ionique est relativement bien connue maintenant, il n'en est pas de même pour le transport de la chaleur par le canal électronique.

Cette thèse a exploré la pertinence d'un modèle électromagnétique basé sur la turbulence générée par le gradient de température électronique (ETG) afin de tenter de rendre compte du transport de chaleur par les électrons. Ce modèle a été dérivé à partir des équations fluides de transport dans un plasma magnétisé dans l'approximation des faibles fréquences devant la fréquence cyclotronique électronique. Naturellement tridimensionnel, ce modèle fluide n'a pu prendre en compte certains effets cinétiques d'interaction onde-particule. Cependant, outre les fluctuations du champ électrique, les fluctuations du champ magnétique caractérisées par le paramètre  $\beta$  ont été prises en compte, ce qui a constitué la véritable originalité de cette thèse. Nous avons donc développé un code de calcul afin de simuler directement la turbulence de petite échelle produite par l'instabilité ETG. Une autre originalité de ce travail a été de forcer le système par un flux de chaleur et non par un gradient de température. A partir du gradient de température résultant et des flux turbulents issus des non linéarités du modèle, la détermination de la conductivité turbulente a permis la caractérisation du transport. Nous avons en particulier cherché à déterminer comment variait le transport turbulent en fonction des paramètres sans dimension du modèle.



Le modèle et les simulations non linéaires ont clairement mis en évidence le rôle très important du rayon de Larmor électronique normalisé. En effet, nous avons trouvé que le transport suit une loi de type giro-Bohm, c'est-à-dire que le temps de confinement est inversement proportionnel à ce paramètre. Or, dans les prochaines machines, le rayon de Larmor normalisé sera environ trois fois plus petit que dans les machines actuelles entraînant alors une augmentation substantielle du confinement. De plus, ce résultat est en accord avec les expériences actuelles de confinement amélioré (mode-H), avec les expériences de confinement normal (mode-L) pour les électrons mais également avec des simulations de turbulence causée par l'ITG.

Le rôle du paramètre  $\beta$ , rapport entre les pressions cinétique et magnétique a été particulièrement étudié, puisque des modèles empiriques prévoient une forte dépendance du temps de confinement vis-à-vis de ce paramètre. Les résultats de nos simulations ont montré que la conductivité turbulente en dépend très peu. Cette faible dépendance peut être reliée au fait que le flux turbulent issu des fluctuations de potentiel électrostatique excède largement (facteur 20) le flux généré par les fluctuations magnétiques. Ce résultat est en accord avec ceux issus de simulations girocinétiques. Nous avons également constaté que les niveaux de conductivité observés étaient d'un ordre de grandeur inférieurs aux valeurs expérimentales. Ceci est cohérent avec l'hypothèse d'un isomorphisme entre les instabilités ITG et ETG mais un niveau de transport aussi faible est en fort désaccord avec l'expérience.

Dans le souci de confrontation avec d'autres simulations ETG girocinétiques, nous avons testé la dépendance de la conductivité avec le cisaillement magnétique dans le but de trouver un régime de fort transport lorsque l'on augmente ce paramètre à gradient de température donné. Certes le transport observé augmente avec le cisaillement magnétique mais on ne peut pas parler d'un nouveau régime de fort transport car ce dernier reste très faible devant les valeurs expérimentales.

Nous avons trouvé grâce aux simulations directes que le transport diminuait légèrement lorsque l'inverse du rapport d'aspect,  $\epsilon$ , passait d'une valeur faible (type tokamak) à une valeur forte (tokamak sphérique). Cet effet est attribuable à la dépendance du gradient critique en fonction de ce paramètre  $\epsilon$ .

Nous avons également largement étudié les structures turbulentes dans les sections poloidales. En plus des observations directes des fluctuations de champ dans une section poloidale, nous avons systématiquement caractérisé les cellules par la fonction d'auto-corrélation dans

les deux directions. Ce calcul a confirmé l'impression visuelle d'une anisotropie pour ces cellules : elles sont plus étendues radialement que poloïdalement. On les appelle des streamers. La persistance relative de cette anisotropie lorsque le forçage amène le système loin du seuil linéaire est une signature claire de l'inefficacité des écoulements zonaux pour casser ces structures linéaires. Cette inefficacité était attendue car les flots zonaux sont intrinsèquement plus faibles pour l'instabilité ETG que pour l'instabilité ITG. Elle est également invoquée dans les simulations girocinétiques pour justifier la présence de streamers.



Dans l'état actuel de notre étude, l'instabilité ETG (ou du moins le modèle que nous avons développé) semble disqualifiée pour rendre compte des pertes de chaleur par le canal électronique, constatées dans les expériences.

Néanmoins, des études complémentaires pourraient être menées. En particulier, le rôle du gradient de densité n'a pas du tout été abordé. Il serait donc intéressant d'étudier le transport de chaleur en présence d'un gradient de densité, pour se rapprocher des conditions des simulations girocinétiques. Toujours dans ce souci-là, il serait utile de comparer, pour notre modèle, des simulations à gradient fixé avec les simulations existantes à flux fixé. En effet, l'équivalence entre les deux approches n'est pas rigoureusement établie. Enfin, la prise en compte dans notre modèle du décalage de Shafranov, élément de géométrie des surfaces magnétiques, pourrait nous fournir de nouveaux éléments de comparaison.

A partir de ce modèle, il serait également opportun de simuler la turbulence ETG en présence d'un profil de facteur de sécurité inversé. Etant donné que le cisaillement de vitesse poloïdale est faible dans nos simulations, la formation d'une barrière interne de transport ne serait alors due qu'au cisaillement magnétique négatif. Cette question-là est largement ouverte d'un point de vue expérimental.

Enfin, une compréhension plus profonde, ainsi qu'une prédiction plus précise, du transport de chaleur turbulent nécessitera la simulation complète de toutes les instabilités liées aux ions et aux électrons, piégés et circulants.





# Bibliographie

- [Ber88] P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, *L'Ordre dans le Chaos*, Hermann, Paris, (1988)
- [Bey98] P. Beyer, X. Garbet, P. Ghendrih, *Phys. Plasmas* **5**, 4271, (1998)
- [Big90] H. Biglari, P.H. Diamond and P.W. Terry, *Phys. Fluids B* **2**, 1, (1990)
- [Bou00] C. Bourdelle, *Instabilités dans les plasmas de fusion*, Thèse de troisième cycle, Université de Grenoble, 2000
- [Bra65] S.I. Braginskii in *Reviews of Plasmas Physics*, edited by M.A. Leontovitch (Consultants bureau, New-York, 1965) vol I. P 205
- [Bro87] D.L. Brower, W.A. Peebles, N.C. Luhmann, *Nuclear Fusion*, **27**, 2055, (1987)
- [Car96] B.A. Carreras, D. Newman, V.E. Lynch, P.H. Diamond, *Phys. Plasmas*, **3**, 8, (1996)
- [CEA87] *La fusion thermonucléaire contrôlée par confinement magnétique*, Collection CEA, série scientifique, Masson, 1987.
- [Cha73] Champeney D.C., *Fourier Transforms and Their Physical Applications*, Academic Press, New-York, (1973)
- [Chr98] J.P. Christiansen and J.G Cordey, *Nuclear Fusion*, **38**, 12, (1998)
- [Con79] J.W. Connor, R.J. Hastie and J.B. Taylor, *Proc. R. Soc. London A* **365**, 1 (1979)
- [Cor97] ITER Confinement Database And Modeling Working Group (presented by J.G. Cordey), *Plasma Phys. Control. Fusion*, **39**, B115, (1997)
- [Cor02] J.G Cordey *et al*, A two term model of the confinement in ELMy H-Modes using the Global Confinement and Pedestal Databases, *Proc. 19th Int. Conf. Lyon, 2002*, IAEA, to be published
- [Dau80] Dautray R., Watteau J.P., *Fusion Thermonucléaire Contrôlée*, *Revue Générale Nucléaire*, n°6, (1980) 562

- [Dor00] W. Dorland, F. Jenko, M. Kotschenreuther, and B. N. Rogers, Phys. Rev. Lett., **85**, 26 (2000)
- [Dra88] J.F. Drake, P.N. Guzdar, and A.B. Hassan, Phys. Rev. Lett., **61**, 19, (1988)
- [Ell82] Elliott D.F. and Rao K.R., *Fast Transforms : Algorithms, Analyses, Applications*, Academic Press, New-York, (1982)
- [Fal00] G.L. Falchetto and J. Vaclavik, "Effect of finite  $\beta$  on linear stability of Ion Temperature Gradient modes" in *Theory of Fusion Plasmas, Proc. Int. Workshop, Varenna, August 2000*, p. 231
- [Fal02] G.L. Falchetto, *Electromagnetic microinstabilities in tokamak using a global spectral approach*, Thèse, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (2002)
- [Fri95] U. Frisch, *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge, New-York, (1995)
- [Gar01a] X. Garbet *et al*, Phys. Plasmas, **8**, 6, (2001)
- [Gar01b] X. Garbet, *Instabilités, Turbulence et Transport dans un plasma magnétisé*, Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université de Provence, juin 2001
- [Hah89] T.S. Hahm and W.M. Tang, Phys. Fluids B **1**, 1185 (1989)
- [Har99] S. Hardoin et V. Saravane, Présentation du Fujitsu VPP5000, Rencontre CEA-Fujitsu, L'Orme des Merisiers, 14 décembre 1999
- [Has77] A. Hasegawa, K. Mima, Phys. Rev. Lett., **39**, 205, (1977)
- [Has83] A. Hasegawa, M. Wakatani, Phys. Rev. Lett., **50**, 683, (1983)
- [Hat02] R. Hatzkya, T.M. Tran, A. Könies, R. Kleiber and S.J. Allfrey, Phys. Plasmas, **9**, 3, (2002)
- [Hoa98] G.T Hoang, B. Saoutic, L. Guiziou, *et al*, Nuclear Fusion, **38**, 1, (1998)
- [Hoa01] G.T. Hoang, C. Bourdelle, X. Garbet, *et al*, Phys. Rev. Lett., **87**, 12, (2001)
- [Hor81] W. Horton, D.-I. Choi, W.M. Tang, Phys. Fluids, **24**, 1077, (1981)
- [Hor88] W. Horton, B.G. Hong and W.M Tang, Phys. Fluids **31**, 10, (1988)
- [Hor99] W. Horton, Rev. Mod. Phys., **71**, 3, (1999)

- [Hor90] W. Horton, B.G. Hong, T. Tajima and N. Bekki, *Comments Plasma Phys. Contr. Fusion*, **13**, 4, (1990)
- [Hor00] W. Horton, P. Zhu, G.T. Hoang, T. Aniel, M. Ottaviani, and X. Garbet, *Physics of Plasmas*, **7**, 1494, (2000)
- [Ido00] Y. Iodomura, M. Wakatani and S. Tokuda, *Phys. Plasmas*, **7**, 9, (2000)
- [ITER99] ITER Physics Basis, *Nuclear Fusion*, special issue, Vol. 39 No. 12, (1999)
- [Ito99] K. Itoh, S-I. Itoh and A. Fukuyama, *Transport and Structural Formation in Plasmas*, Plasma Physics Series, IoP Publishing, Bristol, (1999)
- [Jen00] F. Jenko, W. Dorland, M. Kotschenreuther and B.N Rogers, *Phys. Plasmas*, **7**, 5, (2000)
- [Jen01a] F. Jenko, W. Dorland and G.W. Hammett, *Phys. Plasmas*, **8**, 9, (2001)
- [Jen01b] F. Jenko and W. Dorland, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **43**, (2001), A141-A150
- [Jiq02] Jiquan Li and Y. Kishimoto, *Phys. Plasmas*, **9**, 4, (2002)
- [Kad65] B.B. Kadomtsev, *Plasma Turbulence*, Academic Press, London, New-York, (1965)
- [Kei99] Keilhacker M., Gibson A., Gormezano C., Lomas P.J., Thomas P.R., Watkins M.L., *et al*, *Nuclear Fusion*, **39**, 2, (1999)
- [Kim94] Kim J.-Y. and M. Wakatani, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 2200, (1994)
- [Kol41] Kolmogorov A.N., *Dokl. Akad. Nauk SSR* **32**, 16-18, (1941) (reprinted in *Proc. R. Soc. Lond.* **A434** 15-17, (1991))
- [Kot97] Kotschenreuther, M., *et al.*, in *Fusion Energy 1996 (Proc 16th Int. Conf. Montreal, 1996)*, Vol. 2, IAEA, Vienna (1997) 371.
- [Lab02] B. Labit, Guide d'utilidation du code ETAE3D, (communication privée)
- [Law57] J.D. Lawson, Some criteria for a power producing thermonuclear reactor, *Proceedings of the Physical Society*, **B70**, 6, (1957)
- [Lie85] Liewer P.C., *Nuclear Fusion*, **25**, 543, (1985)
- [Lin98] Z. Lin, T.S. Hahm, W.W. Lee, W.M. Tang, and R.B. White, *Science*, **281**, 1835-1837 (September 1998)
- [Lin99] Z. Lin, T.S. Hahm, W.W. Lee, W.M. Tang, and P.H. Diamond, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3645 (1999)

- [Lin02] Z. Lin, S. Ethier, T. S. Hahm, and W. M. Tang, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 19, (2002)
- [Man99] G. Manfredi and M. Ottaviani, *Dynamical Systems, Plasmas and Gravitation* (Springer, Berlin, 1999) pp. 82-92
- [Max96] J. Max et J-L. Lacoume, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Tome 1, Paris, Masson , 1996.
- [New96] D.E Newman, B.A. Carreras, P.H. Diamond and T.S. Hahm, *Phys. Plasmas*, **3**, 5, (1996)
- [Ohk78] T. Ohkawa, *Phys. Lett.*, **67A**, 35 (1978)
- [Ott99] M. Ottaviani and G. Manfredi, *Phys. Plasmas*, **6**, 8 (1999)
- [Peg02] Pégourié B., *Etude des Trajectoires, Cours de la Semaine Plasmas Chauds*, Cadarache, 25-29 mars 2002
- [Pre92] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., *Numerical Recipes in Fortran 77*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, (1992)
- [Rom93] F. Romanelli and F. Zonca, *Phys. Fluids B* **5**, 4081 (1993)
- [Sar97] Y. Sarazin, *Etude de la turbulence de bord dans les plasmas magnétisés*, Thèse de troisième cycle, Université de Grenoble, (1997)
- [Sar02] Y. Sarazin, *et al*, "Theoretical understanding of turbulent transport in the SOL", submitted to *Journal of Nuclear Materials*
- [Sta99] G.M. Staebler, *Nuclear Fusion*, **39**, 815, (1999)
- [Sut00] W. Suttrop, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **42**, A1-A14, (2000)
- [Wal02] R.E. Waltz, J.M. Candy and M. N. Rosenbluth, *Phys. Plasmas*, **9**, 5, (2002)
- [Wes97] John Wesson, *Tokamaks*, second edition, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1997

# Annexe A

## Eléments de construction du modèle ETG

Voici le cheminement suivi pour aboutir au modèle ETG que nous avons étudié. On part des équations de Braginskii [Bra65] qui décrivent la dynamique des électrons dans un plasma :

Equation de continuité :

Cette équation traduit la conservation de la masse.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \mathbf{V}_e) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Equation du mouvement :

Cette équation traduit la conservation de la quantité de mouvement. C'est aussi la loi d'Ohm généralisée.

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\vec{\nabla} p_e - \vec{\nabla} \cdot \mathbf{\Pi} - en_e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \right) + \mathbf{R} \quad (\text{A.2})$$

Equation de la chaleur :

$$\frac{3}{2} n_e \frac{dT_e}{dt} + p_e \vec{\nabla} \cdot \mathbf{V}_e = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{q}_e - \mathbf{\Pi} : \vec{\nabla} \mathbf{V}_e + Q_e \quad (\text{A.3})$$

où  $\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \mathbf{V}_e \cdot \vec{\nabla}\bullet$  est la dérivée convective,  $n_e$  est la densité électronique,  $T_e$ , la température électronique,  $p_e = n_e T_e$ , la pression électronique cinétique totale et  $m_e$  est la masse électronique. La vitesse totale  $\mathbf{V}_e$  se décompose en  $\mathbf{V}_\perp + \mathbf{V}_\parallel$ . Dans la revue de Braginskii, on trouvera les expressions de  $\mathbf{\Pi}$ , le tenseur de pression anisotrope,  $\mathbf{R}$ ,  $Q_e$ , les moments de l'équation de Fokker-Planck,  $\mathbf{q}_e$ , le flux de chaleur. Enfin,  $e$  est la valeur absolue de la charge élémentaire :  $e = +1, 6.10^{-19}C$ .

De l'équation (A.2), projetée sur la direction perpendiculaire au champ magnétique d'équilibre, on tire une expression de  $\mathbf{V}_\perp$  :  $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V}_E + \mathbf{V}_{*,pe} + \mathbf{V}_{pol}$  où  $\mathbf{V}_E = \frac{c}{B} \hat{b} \times \vec{\nabla} \tilde{\Phi}$  est la vitesse de dérive électrique,  $\mathbf{V}_{*,pe} = \frac{cT_i}{eB} \hat{b} \times \frac{\vec{\nabla} p_{e,eq}}{p_{e,eq}}$  est la vitesse diamagnétique de pression. L'expression de la vitesse de polarisation est la suivante :

$$\mathbf{V}_{pol} = \frac{m_e}{eB} \hat{b} \times [\partial_t + (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_{*,pe}) \cdot \nabla] (\mathbf{V}_E + \mathbf{V}_{*,pe}) + \frac{\hat{b}}{B} \times \nabla \Pi$$

où  $\hat{b}$  est le vecteur unitaire  $\frac{\mathbf{B}_{eq}}{B_{eq}}$ . Cette vitesse est une correction d'ordre 1 en  $(\rho_e/L_p)^2$ . Cette vitesse fait également apparaître des termes "de rayon de Larmor fini". Enfin, la vitesse liée à la courbure du champ magnétique est définie par

$$V_{ge} = -2 \frac{cT_i}{eB} \hat{b} \times \frac{\nabla B}{B}$$

De plus, on décrit chaque champ par une valeur d'équilibre perturbée par une fluctuation :  $n = n_{e0} + \tilde{n}$ , que l'on inclue dans chaque équation. On ne retient pas la partie totalement d'équilibre.

#### Equation de continuité

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{n}_e + \tilde{V}_E \cdot \nabla n_{e0} + n_{e0} \nabla \cdot \tilde{V}_E + \nabla \cdot (n_{e0} \tilde{V}_{*pe}) + \nabla \cdot (n_{e0} \tilde{V}_{pol}) + \nabla_{\parallel} (n_{e0} \tilde{V}_{\parallel e}) &= 0 \\ \partial_t \frac{\tilde{n}_e}{n_e} + V_{*e} \cdot \nabla \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} - V_{ge} \cdot \nabla \left( \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} - \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} \right) + \\ \rho_s^2 \tilde{V}_E \cdot \nabla_{\perp}^2 \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} + (\nabla_{\parallel,eq} + \tilde{\nabla}_{\parallel}) \tilde{V}_{\parallel e} &= 0 \end{aligned}$$

Nous supposons les ions adiabatiques :

$$\frac{\tilde{n}_i}{n_{i0}} = -\frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} = \frac{\tilde{n}_e}{n_{e0}}$$

De plus,  $\mathbf{V}_E \cdot \nabla g = \frac{c}{B} \hat{b} \times \nabla \tilde{\Phi} \cdot \nabla g = \frac{c}{B} \hat{b} \cdot \nabla \tilde{\Phi} \times \nabla g \equiv \frac{c}{B} [\tilde{\Phi}, g]$  et  $\tilde{\nabla}_{\parallel} f = \frac{\hat{B}}{B} \cdot \nabla f = \nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \frac{\hat{b}}{B} \cdot \nabla f = -\frac{\hat{b}}{B} \times \tilde{A}_{\parallel} \cdot \nabla f \equiv -\frac{1}{B} [\tilde{A}_{\parallel}, f]$ .

Enfin on a posé :

$$\rho_s = \frac{V_s}{\omega_{ce}} \quad \text{et} \quad V_s \equiv \sqrt{\frac{T_i}{m_e}}$$

Ce qui donne :

$$-\partial_t \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} + V_{*e} \cdot \nabla \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} - V_{ge} \cdot \nabla \left( \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} - \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} \right)$$

$$+\rho_s^2 \frac{c}{B} \left[ \tilde{\Phi}, \nabla_{\perp}^2 \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} \right] + \nabla_{\parallel,eq} \tilde{V}_{\parallel e} - \frac{1}{B} \left[ \tilde{A}_{\parallel}, \tilde{V}_{\parallel e} \right] = 0$$

### Equation du mouvement

$$m_e n_e d_t V_{\parallel e} = -\nabla_{\parallel} P_e + e n_e \left( \nabla_{\parallel} \tilde{\Phi} + \frac{1}{c} \partial_t \tilde{A}_{\parallel} \right) - (\nabla \cdot \Pi_e)_{\parallel}$$

$$(\partial_t + \tilde{V}_E \cdot \nabla) \tilde{V}_{\parallel e} = -\frac{V_s^2}{T_i n_e} (\nabla_{\parallel,eq} + \tilde{\nabla}_{\parallel}) \tilde{P}_e - \frac{V_s^2}{T_i n_e} \tilde{\nabla}_{\parallel} P_{e0} + \frac{eV_s^2}{T_i} (\nabla_{\parallel,eq} + \tilde{\nabla}_{\parallel}) \tilde{\Phi} + \frac{eV_s^2}{cT_i} \partial_t \tilde{A}_{\parallel} - V_{ge} \cdot \nabla \tilde{V}_{\parallel e}$$

$$\partial_t \left( \tilde{V}_{\parallel e} - \frac{eV_s^2}{cT_i} \tilde{A}_{\parallel} \right) + \frac{c}{B} \left[ \tilde{\Phi}, \tilde{V}_{\parallel e} \right] - \frac{eV_s^2}{T_i} \nabla_{\parallel,eq} \left( \tilde{\Phi} - \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} \right) + \frac{V_s^2}{B} \left[ \tilde{A}_{\parallel}, \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} \right]$$

$$- \frac{V_s^2}{B} \left[ \tilde{A}_{\parallel}, \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} \right] - \frac{eV_s^2}{cT_i} V_{*pe} \cdot \nabla \tilde{A}_{\parallel} + V_{ge} \cdot \nabla \tilde{V}_{\parallel e} = 0$$

car  $\tilde{\nabla}_{\parallel} P_{e0} = \frac{\tilde{B}}{B} \cdot \nabla P_{e0} = -\frac{\hat{b}}{B} \times \tilde{A}_{\parallel} \cdot \nabla P_{e0} = e n_e \frac{\hat{b}}{B} \times \frac{\nabla P_{e0}}{e n_e} \cdot \nabla \tilde{A}_{\parallel} \equiv -e n_e \mathbf{V}_{*pe} \cdot \nabla \tilde{A}_{\parallel}$

### Equation de la chaleur

$$\frac{3}{2} \partial_t \tilde{P}_e + \frac{3}{2} \tilde{V}_E \cdot \nabla (P_{e0} + \tilde{P}_e) + \frac{5}{2} P_{e0} \nabla \cdot \tilde{V}_E + \frac{5}{2} P_{e0} \nabla \cdot V_{*pe} + \nabla \cdot q_e + \frac{5}{2} P_{e0} (\nabla_{\parallel,eq} + \tilde{\nabla}_{\parallel}) \tilde{V}_{\parallel e} = 0$$

$$\partial_t \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} + \frac{c}{B} \left[ \tilde{\Phi}, \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} \right] + V_{*pe} \cdot \nabla \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} - \Gamma \frac{\bar{T}_e}{T_i} V_{ge} \cdot \nabla \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} + \Gamma V_{ge} \cdot \nabla \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i}$$

$$+ \Gamma V_{ge} \cdot \nabla \left( \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} + \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} \right) + \Gamma \frac{\bar{T}_e}{T_i} \nabla_{\parallel,eq} \tilde{V}_{\parallel e} + \Gamma \frac{\bar{T}_e}{T_i} \tilde{\nabla}_{\parallel} \tilde{V}_{\parallel e} = 0$$

On pose  $\tau \equiv \frac{\bar{T}_e}{T_i}$ .

$$\partial_t \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} + \frac{c}{B} \left[ \tilde{\Phi}, \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} \right] + V_{*pe} \cdot \nabla \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} + \Gamma(1 - \tau) V_{ge} \cdot \nabla \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i}$$

$$+ 2\Gamma V_{ge} \cdot \nabla \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} + \Gamma \tau \nabla_{\parallel,eq} \tilde{V}_{\parallel e} - \Gamma \tau \frac{1}{B} \left[ \tilde{A}_{\parallel}, \tilde{V}_{\parallel e} \right] = 0$$

On choisit les normalisations suivantes :

$$\phi = \frac{e\tilde{\Phi}}{T_i} \quad \psi = \frac{eV_s \tilde{A}_{\parallel}}{cT_i} \quad P = \frac{\tilde{P}_e}{n_e T_i} \quad V_{\parallel} = \frac{\tilde{V}_{\parallel e}}{V_s}$$



De plus, l'équation d'Ampère donne une relation entre  $\psi$  et  $V_{\parallel}$  :

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp}^2 \tilde{A}_{\parallel} &= \frac{4\pi en_e}{c} \tilde{V}_{\parallel e} \rightarrow \frac{cT_e}{ev_e} \nabla_{\perp}^2 \psi = v_e \frac{4\pi en_e}{c} V_{\parallel} \\ \rightarrow V_{\parallel} &= \frac{cm_e}{4\pi e^2 n_e} \nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \nabla_{\perp}^2 \psi = d_e^2 \nabla_{\perp}^2 \psi\end{aligned}$$

où  $d_e$  est l'épaisseur de peau du plasma.

Il faut expliciter les vitesses diamagnétiques et de courbure. Par définition, nous avons :

$$\frac{1}{L_n} \equiv -\frac{\nabla n_{e,eq}}{n_{e,eq}} \quad \text{et} \quad \left( \hat{b} \times \frac{\nabla B}{B} \right) \cdot \nabla f \equiv -\frac{1}{Rr} \omega_d f$$

Afin de se rapprocher d'un système tel celui proposé par Manfredi et Ottaviani pour l'ITG, nous choisissons de renormaliser les longueurs à  $r_s$ , la position radiale dans le plasma, et le temps à  $\frac{r_s^2}{cT_i/eB}$ .

$$\begin{aligned}& \partial_t \phi \frac{cT_i}{eBr_s^2} - \frac{cT_i r_s^2}{eBr_s^2 L_n} \left( \frac{1}{r_s} \partial_{\theta} \phi \right) + 2 \frac{cT_i r_s^2}{eBr_s^2 Rr} \omega_d (\phi - P) - \rho_s^2 \frac{cT_i}{eB} \frac{1}{r_s^4} [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi]_{x,\theta} \\ & - \frac{V_s}{R} \nabla_{\parallel} \left( \frac{d_e^2}{r_s^2} (\nabla_{\perp}^2) \psi \right)_{x,\theta} + \frac{cT_i}{eBr_s^4} [\psi, d_e^2 (\nabla_{\perp}^2) \psi]_{x,\theta} = 0 \\ & \partial_t \left( \psi - \frac{d_e^2}{r_s^2} (\nabla_{\perp}^2) \psi \right)_{x,\theta} \frac{cT_i}{eBr_s^2} - \frac{cT_i}{eBr_s^4} [\phi, d_e^2 (\nabla_{\perp}^2) \psi]_{x,\theta} + \frac{cT_i}{eBr_s^2} [\phi, \psi]_{x,\theta} + \frac{V_s}{R} \nabla_{\parallel} (\phi - P) \\ & + \frac{cT_i}{eBr_s^2} [\psi, P]_{x,\theta} + \frac{cT_i r_s^2}{eBr_s^2} \left( \frac{1}{L_n} + \frac{1}{L_T} \right) \left( \frac{1}{r_s} \partial_{\theta} \psi \right) + 2 \frac{cT_i r_s^2}{eBr_s^2 Rr_s} \omega_d \left( \frac{d_e^2}{r_s^2} (\nabla_{\perp}^2) \psi \right)_{x,\theta} = 0 \\ & \partial_t \frac{cT_i}{eBr_s^2} P + \frac{cT_i r_s^2}{eBr_s^2} [\phi, P]_{x,\theta} + \frac{cT_i r_s^2}{eBr_s^2} \left( \frac{1}{L_n} + \frac{1}{L_T} \right) \left( \frac{1}{r_s} \partial_{\theta} \phi \right) \\ & + 2\Gamma(1-\tau) \frac{cT_i r_s^2}{eBr_s^2 Rr_s} \omega_d \phi + 4\Gamma \frac{cT_i r_s^2}{eBr_s^2 Rr_s} \omega_d P \\ & + \Gamma \tau \frac{V_s}{R} \nabla_{\parallel} \left( \frac{d_e^2}{r_s^2} (\nabla_{\perp}^2) \psi \right)_{x,\theta} - \Gamma \tau \frac{cT_i}{eBr_s^4} [\psi, d_e^2 (\nabla_{\perp}^2) \psi]_{x,\theta} = 0\end{aligned}$$

Il faut rajouter l'amortissement Landau dans l'équation de la pression. Pour des raisons de stabilité numérique nous rajouterons des termes de dissipation dans les trois équations. Finalement, le système minimal à simuler s'écrit :

$$\begin{aligned}& \partial_t \phi - A_n \partial_{\theta} \phi + 2\epsilon \omega_d (\phi - P) - \rho_*^2 [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] \\ & - \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_{\parallel} (d_*^2 \nabla_{\perp}^2 \psi) + [\psi, d_*^2 \nabla_{\perp}^2 \psi] \\ & = D_{\phi} \nabla_{\perp}^2 \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t F + [\phi, F] + \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_{\parallel} (\phi - P) \\
& + [\psi, P] + (A_n + A_T) (\partial_{\theta} \psi) - 2\epsilon \omega_d (d_*^2 \nabla_{\perp}^2 \psi) \\
& = D_F \nabla_{\perp}^2 F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t P + [\phi, P] + (A_n + A_T) (\partial_{\theta} \phi) \\
& + 2\Gamma(1 - \tau) \epsilon \omega_d \phi + 4\Gamma \epsilon \omega_d P \\
& + \Gamma \tau \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_{\parallel} (d_*^2 \nabla_{\perp}^2 \psi) - \Gamma \tau [\psi, d_*^2 \nabla_{\perp}^2 \psi] \\
& = D_P \nabla_{\perp}^2 P - \frac{\epsilon}{\rho_*} \langle P \rangle^{1/2} |\nabla_{\parallel}| P
\end{aligned}$$

Les deux opérateurs non-explicités sont :

$$\omega_d = \sin \theta \partial_x + \cos \theta \partial_{\theta} \quad \nabla_{\parallel} = \frac{1}{q} (q \partial_{\varphi} + \partial_{\theta}) \quad [f, g] = \partial_x f \partial_{\theta} g - \partial_{\theta} f \partial_x g$$

Les différents paramètres adimensionnels sont :

$$\rho_* \equiv \frac{\rho_s}{r_s} \quad d_* \equiv \frac{d_e}{r_s} \quad \epsilon \equiv \frac{r_s}{R} \quad A_n \equiv \frac{r_s}{L_n} \quad A_T \equiv \frac{r_s}{L_T}$$



## Annexe B

# De l'origine du terme de courbure dans la loi d'Ohm généralisée

Le terme de courbure présent dans la loi d'Ohm généralisée, ou équation de conservation de la quantité de mouvement, a pour origine le troisième moment de l'équation de Vlasov qui définit le tenseur de pression :

$$\overline{\overline{P}} \equiv \frac{1}{m_e} \int (\vec{v} - \vec{u}) \otimes (\vec{v} - \vec{u}) f d_3v$$

où  $\vec{u}$  est la vitesse fluide. Ce tenseur de pression se décompose en une partie scalaire  $p \equiv \text{Tr}(\overline{\overline{P}}) / 3$  et une partie anisotrope, le tenseur des contraintes  $\overline{\overline{\Pi}}$ . Dans la revue de Braginskii, est donnée une forme détaillée de ce tenseur des contraintes. Dans, le calcul suivant, nous n'utilisons que l'expression de ce tenseur dans l'approximation non collisionnelle. Reprenons l'équation du mouvement donnée par Braginskii

$$m_e n_e \frac{d\vec{V}_e}{dt} = -\vec{\nabla} p_e - \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\Pi}} - e n_e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V}_e \times \vec{B} \right) + \vec{R} \quad (\text{B.1})$$

Le tenseur de pression anisotrope  $\overline{\overline{\Pi}}$ , appelé également tenseur des contraintes s'écrit, en ne considérant que la partie non collisionnelle

$$\overline{\overline{\Pi}} = \begin{vmatrix} -\eta_3 W_{xy} & \frac{\eta_3}{2} (W_{xx} - W_{yy}) & -\eta_4 W_{yz} \\ \frac{\eta_3}{2} (W_{xx} - W_{yy}) & \eta_3 W_{xy} & \eta_4 W_{yz} \\ -\eta_4 W_{yz} & \eta_4 W_{yz} & 0 \end{vmatrix}$$

avec  $\eta_3 = -\frac{nT_e}{2\Omega_{ce}}$  et  $\eta_4 = -\frac{nT_e}{\Omega_{ce}}$ .

De plus, on a les expressions suivantes :

$$W_{xy} = \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \quad W_{xz} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$W_{yz} = \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \quad W_{xx} - W_{yy} = 2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)$$

Prenons la divergence du tenseur de pression anisotrope :

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \bar{\bar{\Pi}})_x &= \partial_x \left[ -\eta_3 \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] + \partial_y \left[ \eta_3 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right] \\ &\quad + \partial_z \left[ -\eta_4 \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \right] \\ (\nabla \cdot \bar{\bar{\Pi}})_y &= \partial_x \left[ \eta_3 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \right] + \partial_y \left[ \eta_3 \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + \partial_z \left[ \eta_4 \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right] \\ (\nabla \cdot \bar{\bar{\Pi}})_z &= \partial_x \left[ -\eta_4 \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \right] + \partial_y \left[ \eta_4 \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Estimons le terme  $(\bar{\bar{\Pi}} : \nabla \vec{V})$  présent dans l'équation de chaleur de Braginskii :

$$\begin{aligned} -\eta_3 \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \frac{\partial V_x}{\partial x} + \eta_3 \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \frac{\partial V_y}{\partial y} + \eta_3 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ -\eta_4 \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \eta_4 \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

En fait ce terme est une source de chaleur qui ne peut pas être d'origine non-collisionnelle.

Linéarisons le terme de divergence parallèle

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \bar{\bar{\Pi}})_z &= \partial_x \left[ -\eta_4^0 \left( \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial y} \right) \right] + \partial_y \left[ \eta_4^0 \left( \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + \partial_x \left[ -\tilde{\eta}_4 \left( \frac{\partial V_{y0}}{\partial z} + \frac{\partial V_{z0}}{\partial y} \right) \right] + \partial_y \left[ \tilde{\eta}_4 \left( \frac{\partial V_{x0}}{\partial z} + \frac{\partial V_{z0}}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les propriétés suivantes :

- $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  pour les quantités d'équilibre (propriété de l'axisymétrie du tokamak)
- $\frac{\partial}{\partial y} = 0$  pour les quantités d'équilibre (équilibre cylindrique  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ) à l'exception des termes  $\Omega_{ce}$  : terme de courbure !

Introduisons l'expression de  $\eta_4$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \overline{\overline{\Pi}})_z &= \left[ \partial_x \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \partial_y \tilde{V}_z - \partial_y \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \partial_x \tilde{V}_z \right] + \left[ \partial_x \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \partial_z \tilde{V}_y - \partial_y \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \partial_z \tilde{V}_x \right] \\ &\quad + \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \partial_z \left( \partial_x \tilde{V}_y - \partial_y \tilde{V}_x \right) - \frac{\partial_y \tilde{p}_e}{\Omega_{ce}} \frac{\partial V_{z0}}{\partial x} \end{aligned}$$

Examinons maintenant les différents termes les uns après les autres :

### 1. Premier terme

$$\begin{aligned} \left[ \partial_x \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \partial_y \tilde{V}_z - \partial_y \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \partial_x \tilde{V}_z \right] &= \hat{b} \times \overline{\nabla} \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \cdot \overline{\nabla} \tilde{V}_z \\ &= \frac{1}{\Omega_{ce}} \hat{z} \times \overline{\nabla} p_{e0} \cdot \overline{\nabla} \tilde{V}_z - p_{e0} \left( \overline{\nabla} \times \frac{\hat{z}}{\Omega_{ce}} \right) \cdot \overline{\nabla} \tilde{V}_z \\ &= -nm_e \overrightarrow{V_{de}} \cdot \overline{\nabla} \tilde{V}_z - p_{e0} \overline{\nabla} \times \frac{\hat{z}}{\Omega_{ce}} \cdot \overline{\nabla} \tilde{V}_z \end{aligned}$$

On peut montrer que le premier terme ci-dessus s'annule, par opposition, avec un terme issu de la dérivée totale  $\frac{d}{dt}$ . Le deuxième terme est quant à lui le terme de courbure qui apparaît dans le système ETG étudié.

### 2. Estimation du second terme

$$\left[ \partial_x \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \partial_z \tilde{V}_y - \partial_y \left( \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \right) \partial_z \tilde{V}_x \right] \sim \frac{1}{L} \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} k_{\parallel} \tilde{V}_y$$

$L$  représente une longueur macroscopique. En utilisant  $\tilde{V}_y \sim \frac{c}{B} k_{\perp} \phi$  et en comparant ce terme avec le terme  $\nabla_{\parallel} \phi$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{2^{nd} \text{ terme}}{ne \nabla_{\parallel} \phi} &\sim \frac{1}{L} \frac{nT_e}{\Omega_{ce}} k_{\parallel} \frac{c}{B} k_{\perp} \phi \frac{1}{nek_{\parallel} \phi} \\ &\sim (\rho_e k_{\perp}) \left( \frac{\rho_e}{L} \right) \ll 1 \end{aligned}$$

Ce terme est négligeable dans notre cas.

### 3. Estimation du troisième terme

$$\begin{aligned} \frac{p_{e0}}{\Omega_{ce}} \partial_z \left( \partial_x \tilde{V}_y - \partial_y \tilde{V}_x \right) &\sim \frac{nT_e}{\Omega_{ce}} k_{\parallel} \frac{c}{B} k_{\perp}^2 \phi \\ \frac{3^{eme} \text{ terme}}{ne \nabla_{\parallel} \phi} &\sim (k_{\perp} \rho_e)^2 \end{aligned}$$

Ce terme est dit «de rayon de Larmor fini». Il en est apparu, précédemment, dans le développement du modèle ETG (*cf* Annexe A). Nous le négligerons donc.

## 4. Quatrième terme

$$\frac{\partial_y \tilde{p}_e}{\Omega_{ce}} \frac{\partial V_{z0}}{\partial x} \sim \frac{k_{\perp} \tilde{p}}{\Omega_{ce}} \frac{1}{ne} \frac{1}{L} J_{z0}$$

où  $J_{z0}$  est le courant d'équilibre

$$\sim \frac{k_{\perp} \tilde{p}}{\Omega_{ce}} \frac{1}{ne} \frac{1}{L} \frac{cB_P}{L} \sim (k_{\perp} \rho_e) \tilde{p} \frac{cB_P}{v_{th,e} ne L^2}$$

On compare ce terme avec le terme  $\nabla_{\parallel} \tilde{p}$

$$\begin{aligned} \frac{4^{eme} \text{ terme}}{\nabla_{\parallel} \tilde{p}} &\sim (k_{\perp} \rho_e) \cdot \frac{1}{Lk_{\parallel}} \cdot \frac{c}{L} \cdot \left( \frac{B_P^2 m_e}{nTne^2} \right)^{1/2} \\ &\sim (k_{\perp} \rho_e) \cdot \frac{1}{Lk_{\parallel}} \cdot \left( \frac{c/\omega_{pe}}{L} \right) \cdot \left( \frac{B_P^2}{nT} \right)^{1/2} \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\leq 1 \quad \frac{qR}{L} \quad \ll 1 \quad \beta_{pol}^{-1/2} \sim 1 \end{aligned}$$

où  $\left( \frac{c/\omega_{pe}}{L} \right)$  est la longueur de peau normalisée. Nous pouvons négliger ce quatrième terme.

En résumé, la linéarisation du terme  $(\nabla \cdot \overline{\Pi})_z$  donne

★ Un terme du premier ordre qui annule le terme d'advection de vitesse diamagnétique  $\vec{V}_{de} \cdot \vec{\nabla}$

★ Un terme de courbure ( $\omega_{de}$ )

$$-p_{e0} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{B^2} \left( \frac{m_e c}{e} \right) \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_z$$

★ Un terme de rayon de Larmor fini (FLR) de l'ordre  $\mathcal{O}(k_{\perp}^2 \rho_e^2)$  que nous négligeons dans la thèse.

# Annexe C

## Approximation de ballonnement dans l'étude linéaire

Dans un cylindre, un mode propre est de la forme  $\phi(r) \exp[i(m\theta + n\varphi - \omega t)]$  mais ce n'est pas le cas dans un tore où la forme la plus générale  $\phi(r, \theta) \exp[i(n\varphi - \omega t)]$  requiert a priori un calcul bidimensionnel. Cependant, la turbulence tend à développer un vecteur d'onde transverse au champ magnétique d'équilibre très supérieur au vecteur d'onde parallèle ( $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$ ). En mettant à profit cette anisotropie, on peut ramener le calcul des vecteurs propres à un problème 1D. Une forme plus appropriée pour un mode linéaire de nombre toroïdal  $n$  et de fréquence  $\omega$  donnés est  $\phi(r, \theta, \varphi, t) = \hat{\phi}_{n\omega}(\theta') \exp\{in[\varphi - q(r)(\theta - \theta_k)] - i\omega t\}$  où  $\theta_k$  représente l'angle de ballonnement. La représentation de ballonnement est une technique de type WKB qui permet la construction d'une solution rigoureusement périodique. Le problème est ramené à la recherche de la fonction 1D,  $\hat{\phi}_{n\omega}(\theta')$ . La variable angulaire  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ne doit pas être confondue avec la variable étendue  $-\infty \leq \theta' \leq +\infty$  qui a le sens d'une coordonnée le long du champ magnétique. Cette technique n'est valide que dans la limite des grands nombre d'ondes  $n$ . Et dans cette limite, on obtient les relations suivantes :

$$\nabla_{\parallel} \tilde{\phi} \rightarrow \frac{1}{q} \partial_{\theta'} \hat{\phi} \quad \partial_r \tilde{\phi} \rightarrow -inq'(\theta - \theta_k) \hat{\phi} \quad \partial_{\theta} \tilde{\phi} \rightarrow -inq \hat{\phi}$$

Par exemple, l'opérateur  $\nabla_{\parallel} = \frac{1}{q(x)} \partial_{\theta} + \partial_{\varphi}$  appliqué à l'expression du champ  $\phi$  donne :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{q} \partial_{\theta} + \partial_{\varphi} \right) \left[ \hat{\phi}(\theta') \exp\{in(\varphi - q(\theta - \theta_k))\} \right] \\ &= \left[ \frac{1}{q} \partial_{\theta'} \hat{\phi} - \frac{inq}{q} \hat{\phi} + in \hat{\phi} \right] \exp\{in(\varphi - q(\theta - \theta_k))\} \end{aligned}$$



On peut augmenter la difficulté et par conséquent la précision du seuil linéaire en adoptant le formalisme dit de ballonnement. Après un peu d'algèbre, le système 2.12, 2.13, 2.14 linéarisé, devient en appliquant ces transformations et dans l'approximation électrostatique, sans termes de courbure sur  $P$  et  $V$  et sans amortissement Landau :

$$\left\{ \omega + \omega_* - 2\epsilon\omega_d - \frac{2\epsilon\omega_d}{\omega} [\Gamma\tau(\omega + \omega_*) - 2\Gamma\epsilon\omega_d - \omega_{*P}] \right. \\ \left. + \left( \frac{\epsilon}{\rho_*} \right)^2 \frac{\partial_{\theta'\theta'}}{q^2\omega^2} [(1 + \Gamma\tau)\omega + \Gamma\tau\omega_* - 2\Gamma\epsilon\omega_d - \omega_{*P}] \right\} \hat{\phi}(\theta') = 0 \quad (\text{C.1})$$

avec dans l'approximation de ballonnement, l'expression suivante pour l'opérateur de courbure  $\omega_d = k_\theta (\cos \theta + \hat{s}(\theta - \theta_k) \sin \theta)$

Dans la limite de fort ballonnement, la solution est du type  $\phi \propto \exp(-\sigma\theta'^2/2)$  et l'on peut aussi développer  $\omega_d$  pour les faibles valeurs de  $\theta$  autour de la valeur  $\theta_k = 0$ . Ceci donne  $\partial_{\theta'\theta'}\phi \propto (\sigma^2\theta'^2 - \sigma)\phi$  et  $\omega_d \simeq (1 + (\hat{s} - \frac{1}{2})\theta'^2)k_\theta$ . L'équation C.1 devient

$$\omega + \omega_* - 2\epsilon(1 + (\hat{s} - \frac{1}{2})\theta'^2)k_\theta + \frac{2\epsilon\omega_{*P}(1 + (\hat{s} - \frac{1}{2})\theta'^2)k_\theta}{\omega} + \left( \frac{\epsilon}{\rho_*} \right)^2 \frac{\sigma^2\theta'^2 - \sigma}{q^2\omega^2}(\omega - \omega_{*P}) = 0$$

Cette équation est juste pour toutes les valeurs de  $\theta'$ . Donc on peut décomposer ceci en deux équations :

$$\begin{cases} \omega^2 + \omega(\omega_* - 2\epsilon k_\theta) + 2\epsilon\omega_{*P}k_\theta - \left( \frac{\epsilon}{\rho_*} \right)^2 \frac{\sigma}{q^2\omega}(\omega - \omega_{*P}) = 0 \\ -2\epsilon(\hat{s} - \frac{1}{2})k_\theta\omega + 2\epsilon\omega_{*P}(\hat{s} - \frac{1}{2})k_\theta + \left( \frac{\epsilon}{\rho_*} \right)^2 \frac{\sigma^2}{q^2\omega}(\omega - \omega_{*P}) = 0 \end{cases}$$

La première donne :

$$\sigma = \frac{q^2\rho_*^2\omega[\omega^2 + (\omega_* - 2\epsilon k_\theta)\omega + 2\epsilon\omega_{*P}k_\theta]}{\epsilon^2(\omega - \omega_{*P})}$$

La deuxième donne :

$$\begin{aligned} -2\epsilon(\hat{s} - \frac{1}{2})k_\theta(\omega - \omega_{*P}) + \left( \frac{\epsilon}{\rho_*} \right)^2 \frac{\sigma^2}{q^2\omega}(\omega - \omega_{*P}) &= 0 \\ \Rightarrow 2\epsilon(\hat{s} - \frac{1}{2})k_\theta - \left( \frac{\epsilon}{\rho_*} \right)^2 \frac{\sigma^2}{q^2\omega} &= 0 \end{aligned}$$

On remplace  $\sigma$  dans cette relation par l'expression trouvée

$$2\epsilon(\hat{s} - \frac{1}{2})k_\theta - \xi^2\omega^2 \frac{[\omega^2 + (\omega_* - 2\epsilon k_\theta)\omega + 2\epsilon\omega_{*P}k_\theta]^2}{(\omega - \omega_{*P})^2} = 0$$

Les fréquences  $\omega$  à retenir sont telles que la partie réelle de  $\sigma$  soit positive, de sorte que la solution est évanescence à l'infini.

# Annexe D

## Conférences - Séminaires - Publications

### Conférences

- **B. Labit**, M. Ottaviani et D. Escande, 7<sup>ème</sup> conférence de la Société Française de Physique, section plasmas, Piriac s/ mer, 27-30 mars 2001
- **B. Labit** and M. Ottaviani, 9<sup>th</sup> European Fusion Theory Conference, Elsingør, 17-19 octobre 2001
- **B. Labit**, 15<sup>th</sup> US-Transport Task Force meeting, Annapolis, MD, 3-6 avril 2002
- M. Ottaviani, E. Fleurence, X. Garbet, Ph. Ghendrih, V. Grandgirard, **B. Labit**, Y. Sarazin, W. Zwingmann, P. Bertrand, G. Depret, A. Ghizzo and G. Manfredi, 19<sup>th</sup> IAEA Conference, Lyon, 14-19 octobre 2002

### Séminaires

- **B. Labit**, Journées de Dynamique Non Linéaire, Université de Provence, centre Saint Jérôme, 20 novembre 2001
- **B. Labit**, Centre de Recherches en Physique des Plasmas, Lausanne, 12 septembre 2002
- **B. Labit**, Theory Seminar, UKAEA Culham, Adbingdon, 18 septembre 2002

### Publications

- **B. Labit** and M. Ottaviani, *Global numerical study of electron temperature gradient-driven turbulence and transport scaling*, Physics of Plasmas, janvier 2003

# Global numerical study of electron temperature gradient-driven turbulence and transport scaling

B. Labit<sup>a)</sup> and M. Ottaviani

Association Euratom/CEA CEA/DSM/DRFC, Centre d'Étude de Cadarache,  
F-13108 Saint Paul lez Durance, France

(Received 21 May 2002; accepted 16 October 2002)

A three-dimensional, electromagnetic, fluid code with flux boundaries conditions is used to study the scaling of electron thermal transport caused by electron temperature gradient-driven (ETG) turbulence. It is found that close to the ETG threshold, the thermal transport depends weakly on  $\beta$ , which differs from the heuristic formula  $\chi_e \propto 1/\beta$ . It is shown also that electron thermal losses scale like gyro-Bohm. The observed electron temperature profiles appear more resilient than the ion temperature profiles obtained from previous ITG simulations in similar conditions. © 2003 American Institute of Physics. [DOI: 10.1063/1.1527942]

## I. INTRODUCTION

Anomalous heat transport in tokamaks is one of the main obstacles in achieving good energy confinement in fusion plasmas. From a theoretical point of view, it is commonly accepted that confinement properties in the core of the tokamak are mainly determined by some type of turbulence, driven by the presence of equilibrium temperature and density gradients.

Two types of instabilities leading to plasma turbulence are usually considered: the ion temperature gradient (ITG)—trapped electrons mode (TEM) branch, characterized by perpendicular wavelengths in the ion gyroradius range, and the sub- $\rho_i$ -scale electron temperature gradient (ETG) modes that are driven mainly by the temperature gradient of passing electrons. ITG-TEM turbulence has been extensively studied, essentially in the electrostatic limit, in the framework of ITG simulations. These studies show that this model works reasonably well for the ion heat losses, but the resulting parametric dependence seems inadequate to explain the electron heat losses in some experiments.

For example, the data on the electron heat conductivity  $\chi_e$  obtained from the fast wave electron heating (FWEH) experiment in Tore Supra seem to be optimally fitted by the scaling expression  $\chi_e \sim T_e^{1/2}/n_e$ ,<sup>1</sup> where  $T_e$  is the electron temperature and  $n_e$  the plasma density. This dependence is difficult to recover from the ITG-TEM model, since the collisionless version of TEMs would give  $\chi_e \sim T_e^{3/2}$ , with no density dependence, while in order to get the correct empirical density dependence one must resort to the collisional version of TEMs where  $\chi_e \sim T_e^{7/2}/n_e$ , possessing a temperature dependence that is too strong. In recent years, the attention of theorists and modelers has turned to the ETG branch. First, it is interesting to note that the above scaling of the FWEH data are consistent with the 1978 Ohkawa heuristic formula  $\chi_e \sim (c/\omega_{pe})^2 (v_{th,e}/qR)$ ,<sup>2</sup> where  $\omega_{pe}$  is the electron plasma frequency,  $v_{th,e}$  is the electron thermal velocity,  $q$  is the safety factor, and  $R$  is the major radius. When written in

dimensionless units, Ohkawa's formula makes explicit its dependence on the plasma  $\beta$ , since then  $\chi_e/\chi_B \sim \rho_*/\beta$ , where  $\chi_B$  is the Bohm conductivity and  $\rho_*$  is the normalized gyro-radius. Evidently, the dependence on  $\beta$  calls for an electromagnetic model. One notes that the ETG turbulence is naturally electromagnetic, as it will be apparent in the next section. Also, on the experimental side, the work of Colas *et al.*<sup>3</sup> has made apparent a correlation between the internal magnetic fluctuations and the electron heat transport in Tore Supra. One potential difficulty with the ETG model has been emphasized by Jenko *et al.*<sup>4</sup> By assuming an exact isomorphism between the electrostatic versions of ITG and ETG turbulence, one would find a turbulent electron heat transport  $\chi_e/\chi_i \sim (m_e/m_i)^{1/2} \sim 1/60$  to be too small (for deuterium plasmas), because of the mass dependence, which is in contradiction with experimental observations ( $\chi_e \sim \chi_i$ ). However, gyrokinetic flux tube simulation reported in that same work shows that the normalized electron ETG transport is sufficiently big after all. The explanation given by Jenko *et al.*<sup>4</sup> is the generation of streamers, which occur because zonal flows are less effective in breaking up the primary instability as a consequence of the different adiabatic density response proper to the ETG and ITG models. For plasma core parameters, they have also found the possibility of a transition from a low to a high transport regime. This occurs when the magnetic shear is increased, at  $\beta$  and  $\nabla T_e$  fixed. They have also shown that the  $E \times B$  advection term dominates largely over the magnetic flutter term. As far as the  $\beta$  dependence is concerned, the Ohkawa-type transport scaling is recovered only for edge parameters.<sup>5</sup>

These various results coming from different approaches have motivated our work on ETG turbulence and the related transport. We have chosen to work in the fluid limit for ETG turbulence and we have developed a three-dimensional code in order to clarify the parametric dependence of the turbulent transport. Section II is dedicated to the presentation of the fluid electromagnetic model for ETG turbulence and to the various assumptions employed in its derivation. Some nu-

<sup>a)</sup>Electronic mail: labit@drfc.cad.cea.fr

merical aspects are presented in Sec. III. The simulation aiming to understand how steady state turbulent transport scales with the normalized plasma pressure  $\beta$  are presented in Sec. IV. The gyroradius scaling and the magnetic shear scaling are also investigated. Finally, our results are discussed and compared to previous results (Sec. V). In particular, some attention is given to the comparison between our work and the Tore Supra studies of electron thermal transport.

## II. THE ETG FLUID MODEL

In tokamaks, the natural scale separation, given by  $R > L_T \sim a \gg d_e > \rho_e$  allows one to simulate a thin plasma annulus of width  $r_{\text{box}}$  centered around the radial position  $r_s$ , while keeping the periodicity in the poloidal and toroidal angles,  $\theta$  and  $\varphi$ . We also employ a Cartesian metric; the cylindrical Laplacian operator is replaced by the slab one,  $(1/r)\partial_r(r\partial_r\cdot) \rightarrow \partial_r\cdot$ . The topology of the magnetic surfaces remains unchanged; magnetic surfaces are circular, without Shafranov shift and are labeled by the radial coordinate  $x = (r - r_s)/r_{\text{box}}$ . Ignoring the Shafranov shift is acceptable in the usual low- $\beta$ , large aspect ratio ordering, since then  $\alpha \equiv q^2(\beta/\epsilon)A_T < \hat{s}$ .

Starting from the fluid set of Braginskii equations for electrons,<sup>6</sup> one can obtain three evolution equations for the electron pressure, the electric potential, and the parallel momentum. Because  $k_\perp \rho_i \gg 1$  and  $\omega \ll k_\perp v_{\text{th},i}$ , we assume, for simplicity that the ion response is adiabatic  $\tilde{n}_i/n_{i0} = -(e\tilde{\phi}/T_i)$ . The system is closed by the quasineutrality equation,  $\tilde{n}_e/n_0 = \tilde{n}_i/n_0$ , which is valid in the limit  $k_\perp \lambda_{De} \ll 1$ . Moreover, we keep only the nonlinearly important finite Larmor radius (FLR) terms. The linear term  $\partial_t(\rho_*^2 \nabla_\perp^2 \phi)$  is not important because we focus on scales where  $\rho_e^2 k_\perp^2 \ll 1$  as shown in Sec. IV. The instability is driven by the main curvature term, i.e., the one in the continuity equation. Our model containing the main features of ETG turbulence is written as follows:

$$\partial_t \phi - A_n \partial_\theta \phi + 2\epsilon \omega_d (\phi - P) - \rho_*^2 [\phi, \nabla_\perp^2 \phi] - \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_\parallel (d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi) + [\psi, d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi] = -D_\phi \nabla_\perp^4 \phi, \quad (1)$$

$$\partial_t F - 2\epsilon \omega_d (d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi) + [\phi, F] + \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_\parallel (\phi - P) + [\psi, P] = D_F \nabla_\perp^2 F, \quad (2)$$

$$\partial_t P + 2\Gamma(1 - \tau)\omega_d \phi + 4\Gamma\epsilon\omega_d P + [\phi, P] + \Gamma\tau \frac{\epsilon}{\rho_*} \nabla_\parallel (d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi) - \Gamma\tau [\psi, d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi] = D_P \nabla_\perp^2 P - \frac{\epsilon}{\rho_*} X_L |\nabla_\parallel P|, \quad (3)$$

where  $\phi$  is the electrostatic potential,  $\psi$  is the fluctuating part of the vector potential,  $P$  is the total electron pressure, and  $F$  is the quantity defined as  $F \equiv \psi - d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi$ , and the Ampère's law relies on the vector potential and the parallel electron velocity,  $v = d_*^2 \nabla_\perp^2 \psi$ . The ion temperature is assumed to be

constant; we define the temperature ratio  $\tau$  as  $\tau = T_e/T_i$ , and  $\epsilon = r_s/R$  is the inverse aspect ratio.  $\Gamma$  is a constant equal to  $\frac{2}{3}$  in fluid theory.

Lengths are normalized to  $r_s$ , the radial position of the annulus and the time is normalized to  $r_s^2 eB/cT_i$ .  $A_n = r_s/L_n$  and  $A_T = r_s/L_T$  are the normalized gradient scale lengths for density and temperature, respectively. Units of  $n_e T_i$  for the electron pressure,  $T_i/e$  for the potential,  $\tau^{-1/2} v_{\text{th},e} = (Ti/Te)^{1/2} (T_e/m_e)^{1/2}$  for the velocity,  $e\tau^{-1/2} v_{\text{th},e}/T_i$  for the vector potential, and  $cT_i/eB$ , for the turbulent conductivity are employed.

The curvature operator in this geometry is given by  $\omega_d = \cos\theta \partial_\theta + \sin\theta \partial_x$  and  $\nabla_\parallel = \partial_\varphi + [1/q(x)]\partial_\theta$  is the derivative parallel to the equilibrium magnetic field, where  $q(x)$  is the safety factor.

The main control parameters are the normalized Larmor radius  $\rho_*$ , the normalized skin depth  $d_*$ , and the inverse aspect ratio  $\epsilon$ . The parameter  $\beta$ , on which we focus, enters through  $\beta = \rho_*^2/d_*^2$ . One must remark that this parameter is related to the usual definition of  $\beta$  through the relation  $\beta_{\text{usual}} = 2(1 + \tau)\beta$ . Furthermore,  $D_\phi$ ,  $D_F$ , and  $D_P$  are small artificial coefficients set to damp the smallest scales. The main damping mechanism is provided by parallel Landau damping, modeled by the  $|\nabla_\parallel|$  term in Eq. (3), which stands for the operator whose representation in Fourier space is given by  $|k_\parallel|$ .

The average electron temperature is taken to be equal to the ion temperature  $\langle T_e \rangle = T_i = \text{const}$ . Thus Eqs. (1)–(3) must be reinterpreted as the equations for the evolution of the electron temperature difference between two magnetic surfaces, normalized to  $T_i/r_s$ .

The model possesses two types of nonlinearities: the  $E \times B$  convective nonlinearity, expressed as Poisson brackets  $[\phi, \cdot]$  and the magnetic flutter nonlinearity  $[\psi, \cdot]$  resulting from the perpendicular component for magnetic field.

This model is very close to the one given by Horton *et al.*<sup>7</sup> One difference is the use of the flux-limiting parallel heat transport operator that models Landau damping. The other difference is the presence of a curvature operator in the generalized Ohm's law, which is stabilizing; thus, linearly, we find a temperature gradient threshold greater than in Ref. 7. In the simplest case, i.e., in the local approximation ( $k_\parallel \rightarrow 0$ ) and no FLR terms, the threshold corresponds to a critical value of  $\eta_e \equiv A_T/A_n$ ,

$$\eta_{e,\text{crit}} = \frac{[A_n - 2\epsilon(2\Gamma + 1)]^2 - 8\epsilon[2\Gamma\epsilon(3 - \tau) + A_n(1 - 2\Gamma)]}{8\epsilon A_n}.$$

One finds  $\eta_{e,\text{crit}} \approx 1.77$  for  $A_n = 1$ ,  $\epsilon = 0.5$ , and  $\tau = 1$  and including the parallel dynamics, a marginal value is  $A_{T,\text{crit}} = 1.3$  for flat density profile ( $A_n = 0$ ) with  $\tau = 1$ . The linear theory gives the well known results: large  $\tau$  and peaked density profiles are stabilizing. Moreover,  $\beta$  does not play any significant role for the linear threshold. These results are in good agreements with the linear gyrokinetic simulations by Jenko.<sup>8</sup> We conclude this section by summarizing the main differences between this ETG model and the previously studied ITG model of Ref. 9. These are the different treatment of

the adiabatic response, which implies a weaker generation of zonal flows in the ETG case, the electromagnetic terms, related to the magnetic flutter and to the electron inertia in Ohm's law, and the additional curvature operators in Ohm's law and in the pressure equation.

### III. NUMERICAL METHOD

In this section, the main features of the code which solves the nonlinear partial differential equations (1)–(3) are presented. In this initial value code, an hybrid finite-difference-spectral method is used: Fourier transforms are performed to poloidal and toroidal angles, while finite differences are used for the radial variable. The Fourier representation of any field  $f$  is expressed as

$$f(x, \theta, \varphi, t) = \sum_{m,n} f_{m,n}(x, t) e^{i(m\theta + n\varphi)}, \quad (4)$$

where  $m$  and  $n$  are the poloidal and toroidal wave numbers, respectively. The nonlinear terms are computed in real space using dealiased fast Fourier transform (FFT) algorithm, then transforming back to Fourier space with an inverse FFT. Radial derivatives are computed using centered differences, thus the resulting code is second order accurate in space, even for the hyperdiffusive term in Eq. (1).

The time integration uses the same scheme employed by Ottaviani and Manfredi.<sup>9</sup> We use a splitting technique to separate each term as shown here,

$$\frac{dF}{dt} = (\hat{C} + \hat{P} + \hat{D})F. \quad (5)$$

The three operators  $\hat{C}$ ,  $\hat{P}$ , and  $\hat{D}$  denote, respectively, the nonlinear convective term (including curvature terms), the parallel dynamics, and the dissipative terms. The explicit leapfrog method is used to integrate nonlinear terms, while for  $\hat{D}$  and  $\hat{P}$ , which are linear operators, we use implicit Crank–Nicolson and Padé schemes, respectively. For example, the parallel dynamics is treated with the method proposed by Manfredi and Ottaviani,<sup>10</sup> where the exponential is approximated by

$$e^{-\hat{P}\Delta t} \simeq \frac{1 + \alpha\Delta t\hat{P}}{(1 + \beta_+\Delta t\hat{P})(1 + \beta_-\Delta t\hat{P})}, \quad (6)$$

with the relation between coefficients

$$\beta_{\pm} = \frac{1 + \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 1}}{2}, \quad (7)$$

and the condition for  $\alpha$ , in order to have real coefficients,

$$\alpha \leq 1 - \sqrt{2} \quad \text{or} \quad \alpha \geq 1 + \sqrt{2}.$$

In our code, we choose  $\alpha = -\frac{1}{2}(1 + X_L)$  in such a way that  $X_L = 0$  (i.e., no Landau damping), corresponds to the Crank–Nicolson scheme.

In Eq. (1), a classical dissipative term had been tested to damp the smallest scales but it was not sufficient to absorb the enstrophy undergoing a direct cascade so a hyperdiffusive term is implemented with a  $(\Delta x)^2$  space accuracy.

TABLE I. Summary of main physical parameters for simulations.

$\rho_*$	$\Gamma_{\text{inj}} \times 10^{-2}$	$d_*$	$\beta$
0.02	7.5	$\sqrt{0.4}$	0.1
0.02	7.5	0.2	1
0.02	7.5	0.1	4
0.01	3.75	$\sqrt{0.1}$	0.1
0.01	3.75	0.1	1

In this work,  $r_{\text{box}} = 1$ . All fluctuating components  $(\tilde{\phi}, \tilde{P}, \tilde{\psi}, \tilde{V})$  are set to zero at the boundaries. The macroscopic profiles (i.e., the  $m = n = 0$  components, where  $m$  and  $n$  are the poloidal and toroidal wave numbers, respectively) of the electrostatic potential  $\phi$ , the vector potential  $\psi$ , and the parallel velocity  $v$  are set to zero at the outer wall ( $x = 1$ ), while at the inner one ( $x = 0$ ) the radial derivative of the potential is set to zero. Pressure profile goes to zero at the outer wall. A fixed gradient is imposed initially at the inner boundary.

In order to achieve a stationary state, we want to inject energy in the system at a constant rate. This can be done by imposing the incoming flux of energy  $\Gamma_{\text{inj}} = -D_p \nabla T_e$  at the inner radius. In order to avoid excessively high gradients, it is convenient to set  $D_p$  relatively large at  $x = 0$ , and then smoothly decrease it until it reaches its asymptotically small value at  $x = x_b = 0.1$ . We can then set the temperature gradient at  $x = 0$  at a reasonable value, e.g.,  $\nabla T_e(x = 0) = -2$  (above linear threshold), and adjust the thermal conductivity  $D_p(x = 0)$  in order to obtain the wanted value of incoming flux  $\Gamma_{\text{inj}}$ . An increased  $D_p$  near the outer boundary ( $0.9 \leq x \leq 1$ ) was also employed to avoid the build-up of a thermal boundary layer.

### IV. SCALING STUDIES

In order to investigate the scaling of the thermal conductivity with  $\beta$ , the code has been run with a nonzero energy flux  $\Gamma_{\text{inj}}$  at the inner radius, until the system is in steady state. In principle this means that each simulation should be carried out for at least one energy confinement time. The actual duration of the simulation depends on the actual strength of the turbulence, which in turn is a function of the parameter  $\Gamma_{\text{inj}}$ . In most of the simulations shown here, the simulation duration is around one confinement time. But, because of the natural separation between the time and the length scales of the turbulence and those of confinement, such a duration is sufficient since the turbulence reaches a local steady state in much shorter times.

In order to find the transport  $\beta$  scaling, we perform experiments keeping all parameters ( $\rho_*$ ,  $\Gamma_{\text{inj}}$ ,  $\epsilon$ , ...) constant except  $\beta$ . All simulations presented here, are for flat density profile ( $A_n = 0$ ),  $\tau = 1$ ,  $\epsilon = 0.5$  and monotonic exponential  $q$ -profile with constant magnetic shear,  $\hat{s} = 0.5$  and  $2 \leq q(x) \leq 3.3$ . In Table I are reported the summary of the different runs performed with the code for the present study. We remark that if one were to use dimensionless parameters corresponding to realistic tokamak values of the temperature, magnetic field, etc., the resulting value of  $\rho_*$  would be im-

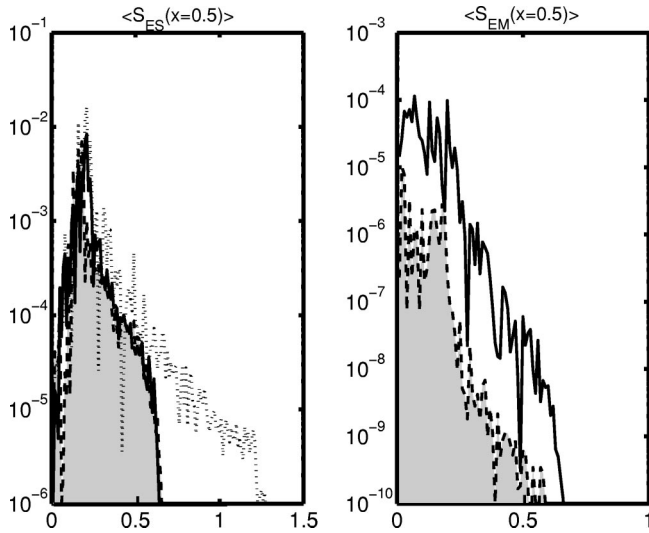


FIG. 1. Electrostatic (left) and magnetic (right) turbulent flux spectrum at  $x=0.5$ , averaged in time for  $\beta=1\%$  (solid) and  $\beta=0.1\%$  (dashed), for  $\rho_* = 1/100$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ . The dotted line represents the flux spectrum when dissipative coefficients are divide by a factor 2.

possibly small to run simulations of any significant duration. However, as far as the study of the present model is concerned, the relevant criterion is that the turbulent structures be somewhat smaller than the box size. As it turns out, when  $\rho_*$  is sufficiently small the size of the vortices scales proportionally to  $\rho_*$ . It would appear that values of  $\rho_*$  in the range of 1/50–1/100 are sufficient to satisfy this criterion. A resolution of  $121 \times 192 \times 48$  (radial  $\times$  poloidal  $\times$  toroidal) points is used and  $D_\phi = 2.5 \times 10^{-5}$ ,  $D_F = D_P = 1 \times 10^{-3}$  when  $\rho_* = 0.01$  while for the other value of  $\rho_*$ , we choose  $81 \times 128 \times 32$  points and  $D_\phi = 5 \times 10^{-5}$ ,  $D_F = D_P = 2 \times 10^{-3}$ .

**A. Thermal transport dependence on  $\beta$**

First of all, we want to verify the approximation  $k_\perp^2 \rho_*^2 \ll 1$  that allows us to neglect some FLR terms. So we compute the flux spectrum  $S_\Gamma$  defined from

$$\Gamma_{es}(x,t) = \sum_m S_\Gamma(x,t) \quad \text{with} \quad S_\Gamma(x,t) = \sum_n m \mathcal{I} \{ P_{m,n}(x,t) \phi_{m,n}^*(x,t) \}$$

for two couples of value for  $\rho_* = 0.01$  and  $\beta = \{1\%; 0.1\%\}$ . As plotted in Fig. 1, we see that most of the turbulent flux (the electrostatic part and the magnetic flutter one), at a given radial position ( $x=0.5$ ) and averaged in time, comes from the region around  $k_\theta \rho_* \sim 0.2$ . Thus one can see that most of the transport comes from a wave number region where the FLR terms are small. In the present model, turbulent fluctuations in the high  $k$  region are damped by the artificial dissipation coefficients. By reducing this dissipation (and at the same time, increasing the resolution) one can verify that the low- $k$  portion of the spectrum is unchanged. If the dissipation is sufficiently small, a further reduction of it would add a small amount of energy only in the high- $k$  region, and this would not affect much the overall transport. Figure 1 shows the spectra obtained by reducing the artificial damping by a

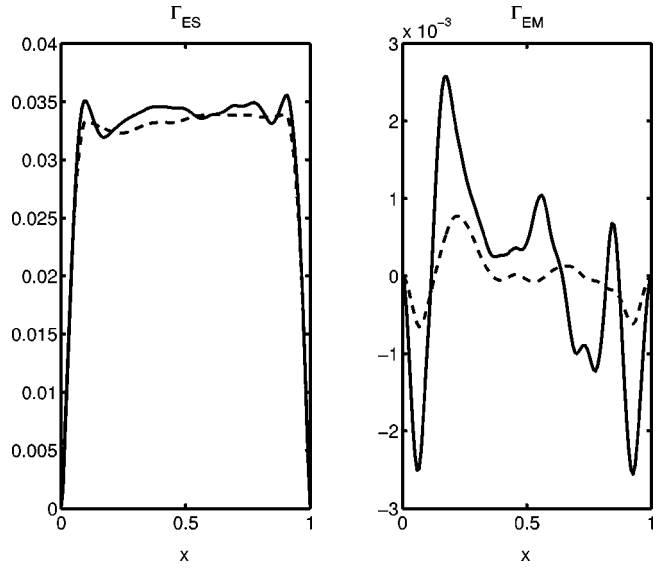


FIG. 2. Electrostatic (left) and magnetic (right) turbulent fluxes for  $\beta = 1\%$  (solid line), and  $\beta = 0.1\%$  (dashed line).

factor 2. A first important result is that the heat turbulent transport is almost electrostatic. There are two contributions to the heat turbulent flux,

$$\Gamma_{es}(x) = \langle -\tilde{P} \partial_\theta \tilde{\phi} \rangle \quad \text{and} \quad \Gamma_{em}(x) = \langle \tilde{v} \partial_\theta \tilde{\psi} \rangle;$$

the electrostatic part and magnetic flutter part, respectively, and where the average is over both angles and time. The dominance of the electrostatic flux is illustrated in Fig. 2, where the two flux contributions are plotted for  $\beta=1\%$  and  $\beta=0.1\%$ .

The contour plot (isolines) of the fluctuating pressure, of the electric potential and of the vector potential in a given poloidal plane (at a given toroidal angle) are shown in Fig. 3 for these two cases. The solid line represents positive fluctuations while the dashed line represents negative fluctua-

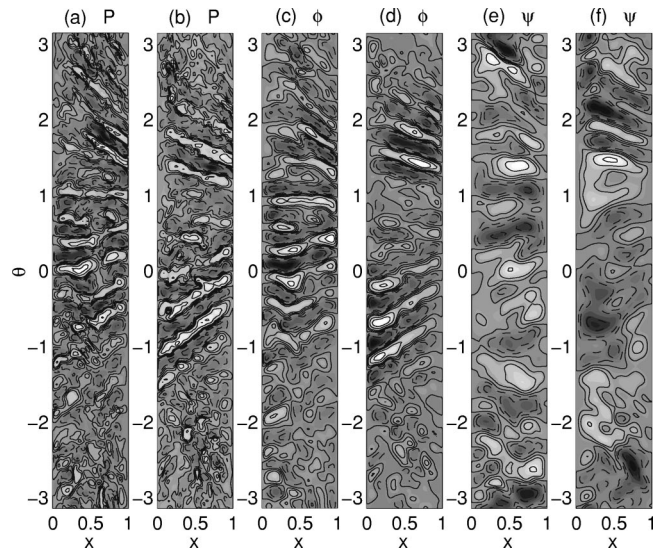


FIG. 3. Isolines of the fluctuating pressure, of the electric potential and of the vector potential for the cases  $\beta=1\%$  (a,c,e) and  $\beta=0.1\%$  (b,d,f).  $\rho_* = 1/100$  in both cases.

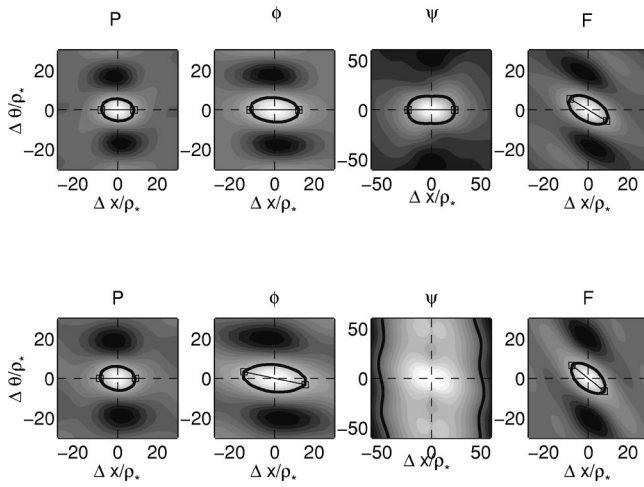


FIG. 4. Self-correlation function  $C(\Delta x, \Delta \theta)$  for  $\beta=1\%$  (upper frames) and  $\beta=0.1\%$  (lower frames), for  $\rho_* = 1/100$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ .

tions. One sees some radially elongated structures for pressure and it seems that the size of the pressure vortices does not depend strongly on  $\beta$ .

In order to be more quantitative, we compute the normalized 2D (radial and poloidal) autocorrelation function<sup>11</sup> for any field  $P$ ,  $\phi$ ,  $\psi$  or  $F$  defined as

$$C_f(\Delta x, \Delta \theta) \equiv \langle \delta \tilde{f}(x, \theta, t) \cdot \delta \tilde{f}(x + \Delta x, \theta + \Delta \theta, t) \rangle_{x, \theta, t}$$

with  $\delta \tilde{f} \equiv f(x, \theta, t) - \langle f(x, \theta, t) \rangle_{\theta, t}$ . Figure 4 exemplifies how the measurement is performed. The points equal to  $\frac{1}{2}$  form an ellipse centered on  $(\Delta x, \Delta \theta) = (0, 0)$ , whose largest diameter defines  $\lambda_{corr}$ .  $\lambda_{c,\perp}$  corresponds to the width of the ellipse in a direction transverse to  $\lambda_{corr}$ . The measurements of  $\lambda_{corr}$  and  $\lambda_{c,\perp}$ , both normalized to  $\rho_*$  are reported in Table II. As one sees clearly,  $\beta$  and so  $d_*$  controls weakly  $P$ , and also  $\phi$  and  $F$  fluctuations, but acts directly on  $\psi$  fluctuations as expressed by the relation  $\psi = [1/(1 + d_*^2 k_\perp^2)] F$ . This aspect is illustrated in Fig. 5, where the spectra of pressure, potential and vector potential fluctuations are plotted, for both cases. Spectra are plotted at the half-box radial position and averaged in time.

Finally, we define the effective turbulent thermal conductivity as

$$\chi_{eff}(x) = \Gamma_{turb}(x) / \nabla T_e(x) = (\Gamma_{es}(x) + \Gamma_{em}(x)) / \nabla T_e(x). \quad (8)$$

TABLE II. Normalized correlation lengths for fields  $P$  and  $\psi$ .

$\rho_*$	$\beta(\%)$	$\Gamma_{inj} \times 10^{-2}$	$\hat{s}$	$\lambda_{corr}^P$	$\lambda_{c,\perp}^P$	$\tau_\lambda^P$	$\lambda_{corr}^\psi$	$\lambda_{c,\perp}^\psi$	$\tau_\lambda^\psi$
0.01	0.1	3.75	0.5	18.0	12.1	1.49	102.4		
0.01	1	3.75	0.5	16.6	11.2	1.49	47.4	27.3	1.74
0.02	0.1	7.5	0.5	17.3	7.7	2.25	44.3		
0.02	1	7.5	0.5	16.7	7.7	2.17	30.7	14.3	2.15
0.02	4	7.5	0.5	12.3	6.9	1.78	26.4	16.2	1.63
0.01	0.1	3.75	1	15.7	9.8	1.60	84		

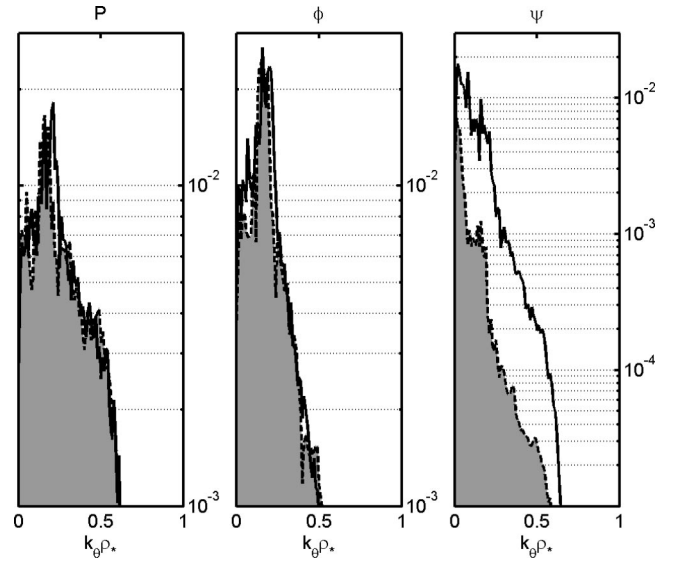


FIG. 5. Pressure (left), electrostatic potential (center) and vector potential (right) spectrum for  $\beta=1\%$  (solid line), and  $\beta=0.1\%$  (dashed line).

Figure 6 shows the turbulent conductivity profile for both values of  $\beta$ . The average of  $\chi_{eff}$  over the turbulent region,  $0.1 \leq x \leq 0.9$ , gives  $\langle \chi_{eff} \rangle_x = 0.0198$  and  $\langle \chi_{eff} \rangle_x = 0.0186$  for  $\beta=0.1\%$  and  $1\%$ , respectively.

A second set of simulations with different parameters  $\rho_* = 1/50$ , and  $\beta = \{0.1\%, 1\%, 4\%\}$  was performed. Again looking at the results reported in Table II and in Fig. 7, we found the same trend: the correlation length for pressure is weakly affected by  $\beta$ . The turbulent conductivity profiles shown in Fig. 8, demonstrate clearly that turbulent transport depends weakly on  $\beta$ :  $\langle \chi_{eff} \rangle_x = \{0.0359; 0.0324; 0.0316\}$  for  $\beta = \{0.1\%; 1\%; 4\%\}$ . In Fig. 9, the normalized turbulent conductivity  $\chi_{eff}/\rho_*$  vs the normalized plasma pressure  $\beta$  for these two sets of parameters is plotted. Clearly, the Ohkawa's scaling,  $\chi_{eff} \propto \beta^{-1}$  is not reproduced in our simulations.

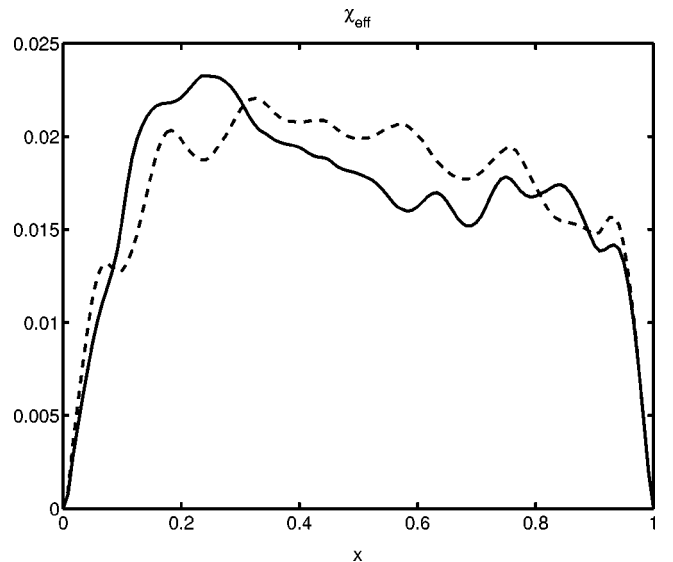


FIG. 6. Effective thermal conductivity for  $\beta=1\%$  (solid line) and  $\beta=0.1\%$  (dashed line) for  $\rho_* = 1/100$  and  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ .

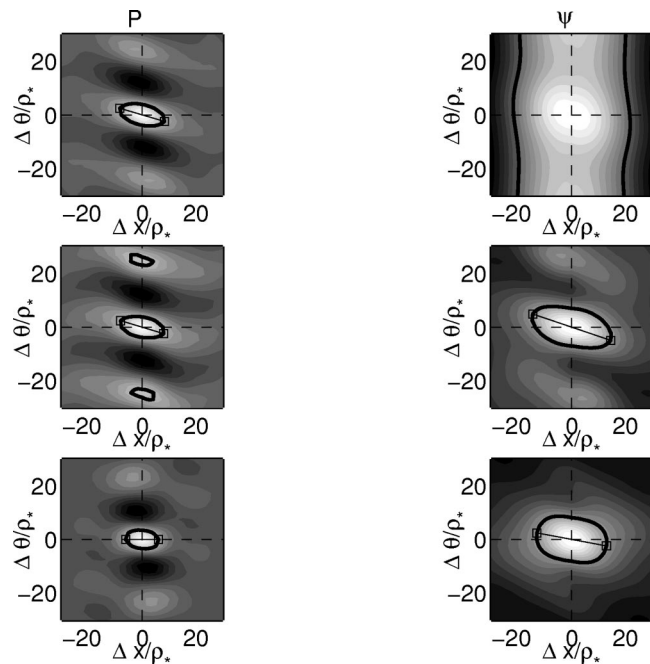


FIG. 7. Self-correlation function  $C_p(\Delta x, \Delta \theta)$  (left) and  $C_\psi(\Delta x, \Delta \theta)$  (right) for  $\beta = 0.1\%$  (upper frames),  $\beta = 1\%$  (middle frames),  $\beta = 4\%$  (lower frames) for  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$ .

**B. Heat transport scaling with  $\rho_*$**

The scaling of heat transport with the normalized gyroradius  $\rho_*$  is very important for the next step devices since, in these experiments  $\rho_*$  will be much smaller than in present machines.

From most of experiments, heat transport for the H-mode, scales like gyro-Bohm.<sup>12</sup> Nevertheless, the fact that numerical simulations cannot be performed at realistically small values of  $\rho_*$  implies that certain conclusions must rely necessarily on the extrapolation of the actual results to smaller values of  $\rho_*$ . As discussed below, it turns out that

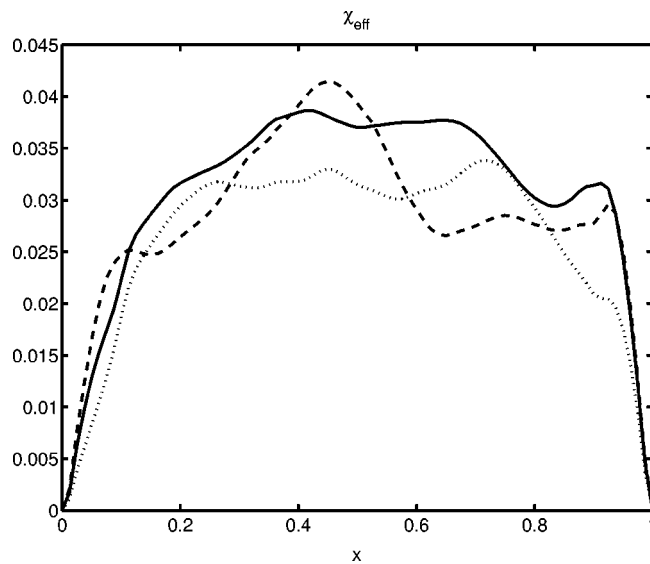


FIG. 8. Effective thermal conductivity for  $\beta = 0.1\%$  (solid line),  $\beta = 1\%$  (dashed line), and  $\beta = 4\%$  (dotted line) for  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$ .

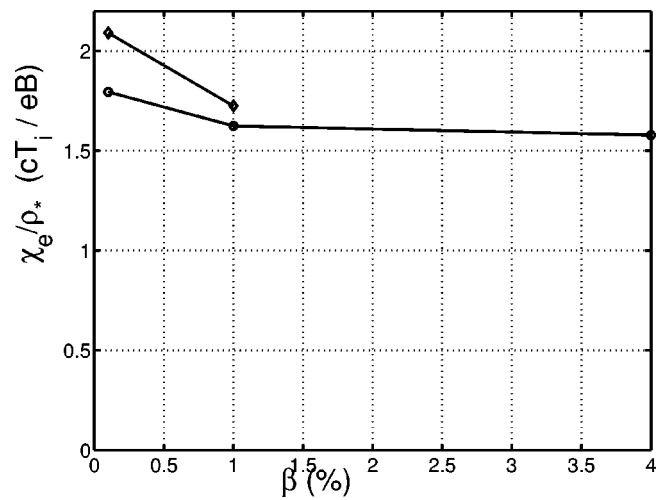


FIG. 9. Turbulent conductivity normalized to  $\rho_*$  in units of  $cT_i/eB$  vs  $\beta$  for  $\rho_* = 0.01$  ( $\diamond$ ) and  $\rho_* = 0.02$  ( $\circ$ ).

gyro-Bohm scaling of the effective thermal conductivity is indeed valid at sufficiently small  $\rho_*$ . This is analogous to what was found previously in the ITG fluid simulations<sup>10</sup> and confirmed in the most recent gyrokinetic simulations at higher resolution.<sup>13</sup> We recall that a necessary condition to observe the asymptotic dependence as  $\rho_*$  becomes very small is that the natural scale length of the turbulence (the correlation length) be somewhat smaller than the relevant macroscopic length (the temperature gradient scale length). Since the correlation length is several times the gyroradius, it is not a surprise that the limiting scaling is observed at rather small  $\rho_*$ . The actual value depends on the other simulation parameters, of which the most important is the temperature scale length, which might explain why smaller  $\rho_*$  is needed in Ref. 13 than in Ref. 10 to observe the gyro-Bohm scaling. When the gyro-Bohm scaling is valid, the outcome of the simulations depend on the injected power  $\Gamma_{inj}$  and on  $\rho_*$  only through the combination  $\Gamma_{inj}/\rho_*$ . In our case, the useful simulations for such a study, are those at  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  from one hand and  $\rho_* = 1/100$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ , on the other hand. If transport exhibits a gyro-Bohm scaling,  $\chi_{eff}$  would be proportional to  $\rho_*$  and the simulations should show the same profiles. In Fig. 10, the contour plot of fluctuating pressure and vector potential are shown for both cases:  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  and  $\rho_* = 1/100$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ . It is apparent that the size of the vortices depends on  $\rho_*$ . The 2D self-correlation functions in the poloidal plane are shown in Fig. 11; they make the gyro-Bohm scaling of the vortex size clearly apparent, since, by normalizing the axis to  $\rho_*$ , the ellipsoid corresponding to the half-height (50% of correlation) is almost unchanged. For completeness, we have also plotted the 1D radial self-correlation function of the pressure and of the electric potential. As reported in Table II, we find that the normalized correlation lengths for pressure  $P$ , but also for electric potential  $\phi$  and the field  $F$  are very close. This suggests a gyro-Bohm scaling for thermal transport. In Fig. 12, the  $\chi_{eff}$  profiles are plotted for both cases. For  $\beta = 1\%$ , we compute the ratio  $\langle \chi_{eff}(x, \rho_* = 0.02) \rangle_x / \langle \chi_{eff}(x, \rho_* = 0.01) \rangle_x = 1.93$  and the



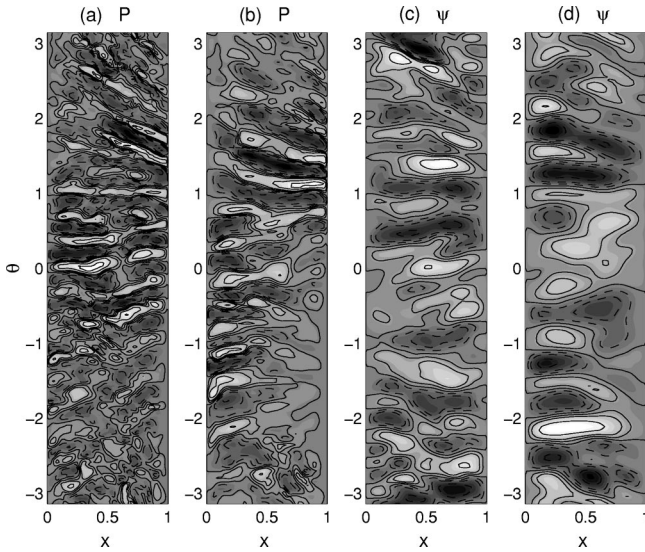


FIG. 10. Isolines of the fluctuating pressure (a,b) and of the vector potential (c,d) for  $\rho_* = 1/100$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$  (a,c) and  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  (b,d) for  $\beta = 1\%$  at  $t = 20$ .

ratio  $\lambda_{corr}(\rho_* = 0.02) / \lambda_{corr}(\rho_* = 0.01) = 2.01$ . Similarly, for  $\beta = 0.1\%$ , one finds 1.82 and 1.92, respectively. These values are fairly close to 2, the expected value if the heat transport were exactly gyro-Bohm-like. Moreover, as a control case, we have performed a similarity experiment assuming that the scaling is purely Bohm; this can be done by keeping the incoming flux constant, while halving the value of  $\rho_*$ . For truly Bohm transport, the turbulent thermal conductivity would remain the same. We compare the cases  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}, \rho_* = 0.01$  and  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}, \rho_* = 0.02$ , as reported in Fig. 12. The thermal conductivity differs significantly in the two cases. From this control case and for this model, in the present regime, we deduce that the thermal transport is definitely closer to gyro-Bohm than to Bohm:  $\chi_e \propto \rho_*$ . This gyro-Bohm scaling is apparent even at moder-

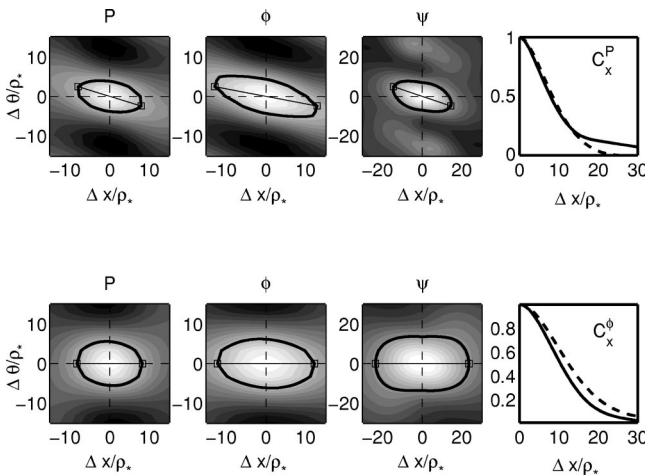


FIG. 11. Self-correlation function  $C_p(\Delta x, \Delta \theta)$  (left),  $C_\phi(\Delta x, \Delta \theta)$  (center), and  $C_\psi(\Delta x, \Delta \theta)$  (right) for  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  (upper frames) and  $\rho_* = 1/100$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$  (lower frames) for  $\beta = 1\%$ . In addition,  $C_x(\Delta x/\rho_*)$  for pressure (upper frame) and potential (lower frame) is plotted:  $\rho_* = 0.02$  (solid line) and  $\rho_* = 0.01$  (dashed line).

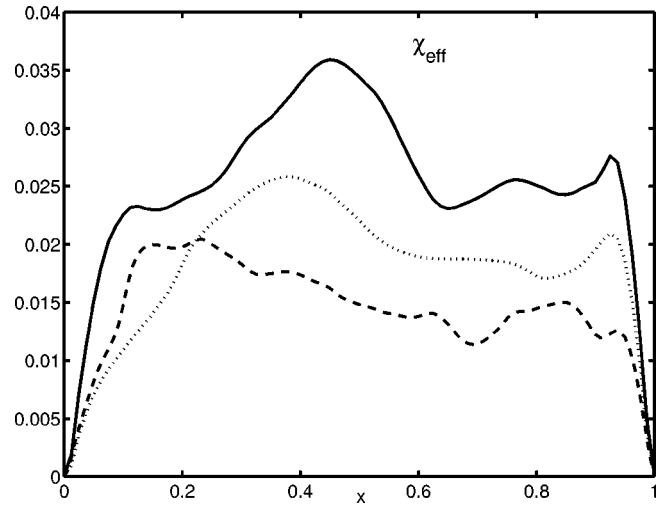


FIG. 12. Effective thermal conductivity for  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$  (solid line) and  $\rho_* = 1/100$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ , (dashed line), and the control case (dotted line),  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ .  $\beta = 1\%$  for the three cases.

ate incoming flux that the system does not depart much from the linear threshold, as in the present case. Figure 13 represents the pressure profile and the pressure gradient. The inverse temperature gradient length averaged over the radial turbulent region, is equal to 1.8 while  $A_{T,c} \sim 1.3$ . This trend has to be confirmed by new simulations with a stronger incoming flux but also a smaller normalized gyroradius.

### C. Preliminary results on the role of the magnetic shear $\hat{s}$

In this section, we focus on  $\hat{s}$  scaling in order to search for a transition from low to high transport level as reported in Jenko's papers. In this simulation, we have  $\rho_* = 1/100$ ,  $d_* = \sqrt{10\rho_*}$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$  and a monotonic  $q$ -profile with  $\hat{s} = 1$ , to be compared with a previous run with the same

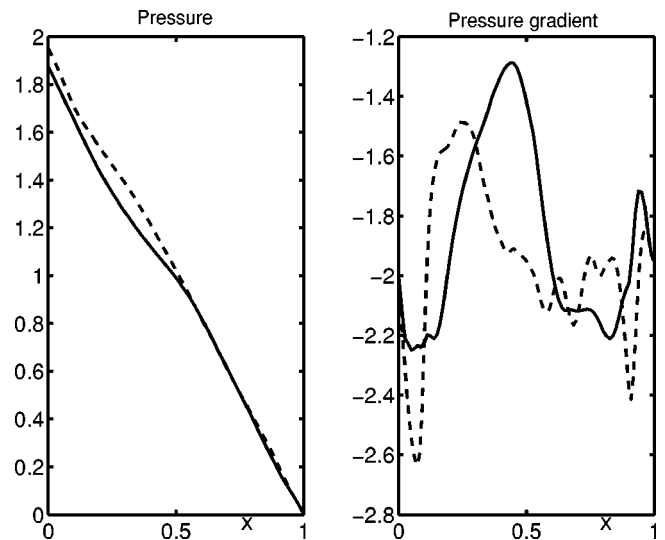


FIG. 13. Pressure profile (left) and corresponding gradient for  $\rho_* = 1/50$ ,  $\Gamma_{inj} = 7.5 \times 10^{-2}$ , solid line and  $\rho_* = 1/100$ ,  $\Gamma_{inj} = 3.75 \times 10^{-2}$ , dashed line for  $\beta = 1\%$ .

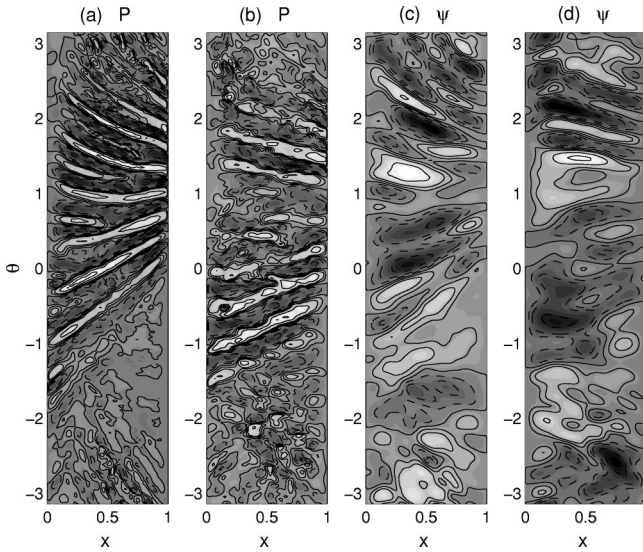


FIG. 14. Isolines of the fluctuating pressure (a,b) and of the vector potential (c,d) for  $\hat{s}=1$  (a,c) and  $\hat{s}=0.5$  (b,d).  $\rho_* = 1/100$ ,  $\beta = 0.1\%$  in both cases.

parameters except  $\hat{s}=0.5$ . Again 2D plots (Fig. 14), self-correlation functions (Fig. 15), and  $\chi_{\text{eff}}$  profiles (Fig. 16) are compared. We find for this simulation  $\lambda_{\text{corr}}^p/\rho_* \approx 15.7$  and  $\lambda_{\text{corr}}^\psi/\rho_* \approx 84$ . The main change comes from  $\lambda_{c,\perp}^p$ . For  $\hat{s}=0.5$ ,  $\lambda_{c,\perp}^p = 12.1$  and for  $\hat{s}=1$ ,  $\lambda_{c,\perp}^p = 9.8$  and so the ‘‘aspect ratio’’ is increased (see 2D poloidal plots), that enhances the transport. The radial averaged turbulent conductivity are  $\langle \chi_{\text{eff}} \rangle_x = \{0.018; 0.022\}$  for  $\hat{s} = \{0.5; 1\}$ .

In Table II, we have also reported the ratio between  $\lambda_{\text{corr}}$  and  $\lambda_{c,\perp}$ :  $\tau_\lambda \equiv \lambda_{\text{corr}}/\lambda_{c,\perp}$ . For all simulations, one finds  $\tau_\lambda > 1$ , but this ratio does not exceed the value 3. Therefore, the observed elongated structures can not be called streamers for which  $\tau_\lambda \gg 1$ .

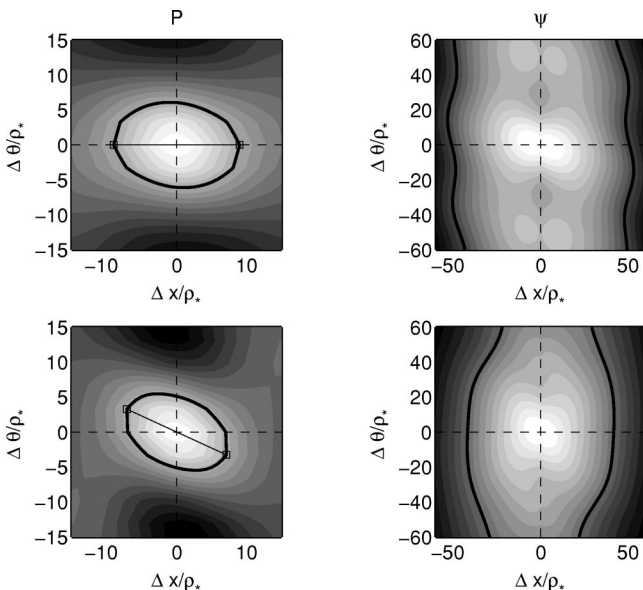


FIG. 15. Self-correlation function  $C_p(\Delta x, \Delta \theta)$  (left) and  $C_\psi(\Delta x, \Delta \theta)$  (right) for  $\hat{s}=0.5$  (upper frames) and  $\hat{s}=1$  (lower frames).  $\rho_* = 1/100$  and  $\beta = 0.1\%$  in both cases.

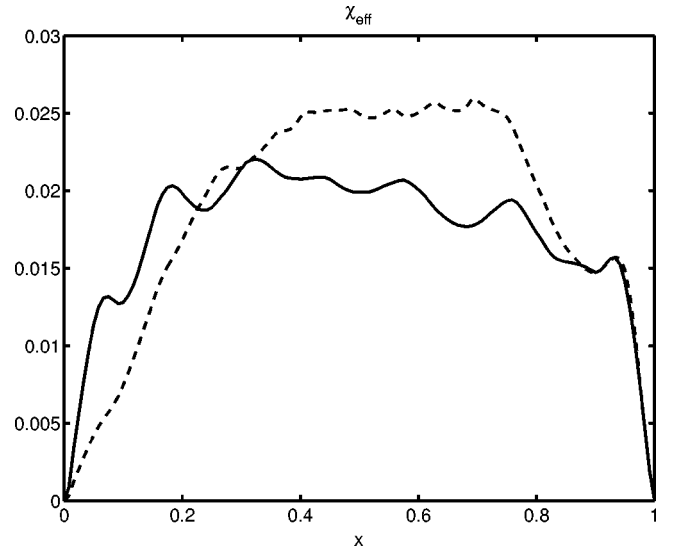


FIG. 16. Effective thermal conductivity for  $\hat{s}=0.5$  solid line and  $\hat{s}=1$  dashed line.  $\rho_* = 1/100$  and  $\beta = 0.1\%$  in both cases.

## V. DISCUSSION AND CONCLUSION

In summary, ETG turbulence and the related heat transport have been studied in the fluid limit, by means of extensive numerical simulations. The first important result is that the overall transport would appear substantially smaller than what is required to reproduce the experimental observations. The typical value of the suitably a dimensionalized numerical heat conductivity is found to be of order unity,  $(\chi_e/\rho_* c T_e/eB)_{\text{sim}} \approx 2$ , whereas, for example, the measured value of the well-documented Tore Supra shot #19542 gives  $(\chi_e/\rho_* c T_e/eB)_{\text{exp}} \approx 45$ . We remark that the simulations explore a regime of moderate incoming heat flux (or input power) such that the temperature gradient is not very much above the threshold value. Nevertheless, this is also observed in some of the FWEH database shots. In these shots, the large input power leaves the temperature gradient close to the threshold value given in Ref. 14. One must also note that all the simulations assume flat density profiles. Our results are consistent with recent slab electrostatic ETG gyrofluid simulations by Jiquan Li and Kishimoto,<sup>15</sup> who also found low transport levels. However our findings are not consistent with previous gyrokinetic flux-tube simulations by Jenko and Dorland, where the observed transport is generally much higher and a transition between regimes of different transport levels is also reported. To date, no transition of this kind could be reproduced by our code. Note that the high transport regime in Ref. 4 is attributed to the presence of radially elongated structures sometimes called streamers. We have well documented observations of similar elongated structures in a poloidal plane, of aspect ratio 2–3, in most of our runs, as shown extensively in the figures. We are inclined to attribute the existence of these structures to the fact that the simulations are not carried out very far from threshold, combined with the fact that zonal flows (ZFs) are not very effective in deforming the ETG vortices. This situation differs from the ITG case where ZFs are comparatively stronger. First runs at even higher input flux ( $\Gamma_{\text{inj}}/\rho_* = 15$ ) seem to

show that the pressure gradient still remains somewhat close to the threshold value in the turbulent region at a localized position; also, the vortices have the tendency to become more isotropic. This difficulty in departing from marginality seems to indicate that the ETG model has intrinsically more transport than the ITG model, in comparable conditions, as suggested in Ref. 4. We also find that transport decreases with  $\beta$ , but more weakly than the  $1/\beta$  dependence of the Ohkawa scaling given by the heuristic electromagnetic mixing-length ETG formula. Heat transport caused by the magnetic flutter is found to be negligible, in line with all the previous studies. Finally we remark that, as expected, the effective conductivity scales proportionally to the electron gyroradius. Future work will be dedicated to a new campaign of simulations devoted again to  $\beta$  scaling, but with much higher incoming flux. They will provide a better understanding of turbulent electron heat transport in the ultrashort (sub- $\rho_i$ ) range.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The authors would like to mention that this work results in part from fruitful discussions during the “Festival de Théorie” in Aix-en-Provence in July 2001. B.L. wishes to

thank D. Escande, X. Garbet, F. Jenko, and Y. Sarazin for their comments and useful discussions. M.O. warmly thanks G. Hammett and W. Dorland for fruitful discussions.

- <sup>1</sup>W. Horton, P. Zhu, G. T. Hoang, T. Aniel, M. Ottaviani, and X. Garbet, *Phys. Plasmas* **7**, 1494 (2000).
- <sup>2</sup>T. Ohkawa, *Phys. Lett.* **67**, 35 (1978).
- <sup>3</sup>L. Colas, X. L. Zou, M. Paume, J. M. Chareau, L. Guizou, G. T. Hoang, Y. Michelot, and D. Grésillon, *Nucl. Fusion* **38**, 6 (1998).
- <sup>4</sup>F. Jenko, W. Dorland, M. Kotschenreuther, and B. N. Rogers, *Phys. Plasmas* **7**, 1904 (2000).
- <sup>5</sup>F. Jenko and W. Dorland, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **43**, A-141 (2001).
- <sup>6</sup>S. I. Braginskii, in *Reviews of Plasmas Physics*, edited by M. A. Leontovitch (Consultants Bureau, New York, 1965), Vol. I, p. 205.
- <sup>7</sup>W. Horton, B. G. Hong, and W. M. Tang, *Phys. Fluids* **31**, 2971 (1988).
- <sup>8</sup>F. Jenko, W. Dorland, and G. W. Hammett, *Phys. Plasmas* **8**, 4096 (2001).
- <sup>9</sup>M. Ottaviani and G. Manfredi, *Phys. Plasmas* **6**, 3267 (1999).
- <sup>10</sup>G. Manfredi and M. Ottaviani, *Dynamical Systems, Plasmas, and Gravitation* (Springer, Berlin, 1991), pp. 82–92.
- <sup>11</sup>Y. Sarazin, Ph. Ghendrih, G. Attuel, C. Clément, X. Garbet, V. Grandgirard, M. Ottaviani, S. Benkadda, P. Beyer, N. Bian, and C. Figarella, “Theoretical understanding of turbulent transport in the SOL” (submitted).
- <sup>12</sup>ITER Physics Basis, *Nucl. Fusion* **39**, 12 (1999).
- <sup>13</sup>Z. Lin, S. Ethier, T. S. Hahn, and W. M. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 195004 (2002).
- <sup>14</sup>G. T. Hoang, C. Bourdelle, X. Garbet, G. Giruzzi, T. Aniel, M. Ottaviani, W. Horton, P. Zhu, and R. V. Budny, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 125001 (2001).
- <sup>15</sup>J. Li and Y. Kishimoto, *Phys. Plasmas* **9**, 1241 (2002).

## Résumé : Transport de chaleur électronique dans un tokamak par simulation numérique directe d'une turbulence de petite échelle

La compréhension de l'état turbulent d'un plasma de fusion, responsable du faible temps de confinement observé, constitue un enjeu fondamental vers la production d'énergie par cette voie. Pour les machines les plus performantes, les tokamaks, les conductivités thermiques ionique et électronique mesurées sont du même ordre de grandeur. Les sources potentielles de la turbulence sont les forts gradients de température, de densité,... présents au cœur d'un plasma de tokamak. Si les pertes de chaleur par le canal ionique sont relativement bien comprises, l'origine du fort transport de chaleur électronique est quant à elle largement inconnue. En plus des fluctuations de vitesses électrostatiques, il existe des fluctuations de vitesses magnétiques, auxquelles des particules rapides sont particulièrement sensibles. Expérimentalement, le temps de confinement peut s'exprimer en fonction de paramètres non adimensionnels. Ces lois d'échelle sont encore trop imprécises, néanmoins de fortes dépendances en fonction du rapport de la pression cinétique à la pression magnétique,  $\beta$  et du rayon de Larmor normalisé,  $\rho_*$  sont prédites.

La thèse proposée ici cherche à déterminer la pertinence d'un modèle fluide non linéaire, électromagnétique, tridimensionnel, basé sur une instabilité particulière pour décrire les pertes de chaleur par le canal électronique et de déterminer les dépendances du transport turbulent associé en fonction de paramètres adimensionnels, dont  $\beta$  et  $\rho_*$ . L'instabilité choisie est une instabilité d'échange générée par le gradient de température électronique (Electron Temperature Gradient (ETG) driven turbulence en anglais). Ce modèle non linéaire est construit à partir des équations de Braginskii. Le code de simulation développé est global au sens qu'un flux de chaleur entrant est imposé, laissant les gradients libres d'évoluer.

A partir des simulations non linéaires, nous avons pu mettre en évidence trois caractéristiques principales pour le modèle ETG fluide : le transport de chaleur turbulent est essentiellement électrostatique ; les fluctuations de potentiel et de pression forment des structures radialement allongées ; le niveau de transport observé est beaucoup plus faible que celui mesuré expérimentalement.

L'étude de la dépendance du transport de chaleur en fonction du rapport de la pression cinétique à la pression magnétique a montré un faible impact de ce paramètre mettant ainsi en défaut la loi empirique d'Ohkawa. En revanche, il a été montré sans ambiguïté le rôle important du rayon de Larmor électronique normalisé dans le transport de chaleur : le temps de confinement est inversement proportionnel à ce paramètre. Enfin, la faible dépendance du transport de chaleur turbulent en fonction du cisaillement magnétique et de l'inverse du rapport d'aspect a été mise en évidence.

Bien que le niveau de transport observé dans les simulations soit plus faible que celui mesuré expérimentalement, nous avons tenté une confrontation directe avec un choc de Tore Supra. Ce tokamak est particulièrement bien désigné pour étudier les pertes de chaleur électronique. En conservant la plupart des paramètres d'un choc bien référencé de Tore Supra, la simulation non linéaire obtenue donne un seuil en gradient de température proche de la valeur expérimentale. Le niveau de transport observé est plus faible d'un facteur cinquante environ que le transport mesuré. Un paramètre important qui n'a pu être conservé est le rayon de Larmor normalisé.

La limitation en  $\rho_*$  devra être franchie afin de confirmer ces résultats. Enfin une rigoureuse confrontation avec des simulations gyrocinétiques permettra de disqualifier ou non l'instabilité ETG pour rendre compte des pertes de chaleur observées.

**Mots-clés** : fusion thermonucléaire, tokamak, plasma, turbulence ETG, simulations numériques

---

## Abstract : Tokamak electron heat transport by direct numerical simulation of small scale turbulence

In a fusion machine, understanding plasma turbulence, which causes a degradation of the measured energy confinement time, would constitute a major progress in this field. In tokamaks, the measured ion and electron thermal conductivities are of comparable magnitude. The possible sources of turbulence are the temperature and density gradients occurring in a fusion plasma. Whereas the heat losses in the ion channel are reasonably well understood, the origin of the electron losses is more uncertain. In addition to the radial velocity associated to the fluctuations of the electric field, electrons are more affected than ions by the magnetic field fluctuations. In experiments, the confinement time can be conveniently expressed in terms of dimensionless parameters. Although still somewhat too imprecise, these scaling laws exhibit strong dependencies on the normalized pressure,  $\beta$  or the normalized Larmor radius,  $\rho_*$ .

The present thesis assesses whether a tridimensional, electromagnetic, nonlinear fluid model of plasma turbulence driven by a specific instability can reproduce the dependence of the experimental electron heat losses on the dimensionless parameters  $\beta$  and  $\rho_*$ . The investigated interchange instability is the Electron Temperature Gradient driven one (ETG). The model is built by using the set of Braginskii equations. The developed simulation code is global in the sense that a fixed heat flux is imposed at the inner boundary, leaving the gradients free to evolve.

From the nonlinear simulations, we have put in light three characteristics for the ETG turbulence : the turbulent transport is essentially electrostatic ; the potential and pressure fluctuations form radially elongated cells called streamers ; the transport level is very low compared to the experimental values.

The thermal transport dependence study has shown a very small role of the normalized pressure, which is in contradiction with the Ohkawa's formula. On the other hand, the crucial role of the electron normalized Larmor has been emphasized : the confinement time is inverse proportional to this parameter. Finally, the low dependence of turbulent transport with the magnetic shear and the inverse aspect ratio is also reported.

Although the transport level observed in the simulations is low compared to the experiments, we have tried a direct confrontation with Tore Supra results. This tokamak is well designed to study the electron heat transport. Keeping most of the parameters from a well referenced Tore Supra shot, the nonlinear simulation gives a threshold quite close to the experimental one. The observed turbulent conductivity is a factor fifty lower than the experimental one. An important parameter can not be matched : the normalized Larmor radius,  $\rho_*$ .

This limitation has to be overcome in order to confirm this results. Finally, a rigorous confrontation between this result and gyrokinetic simulations has to conclude that the ETG instability cannot describe electron heat losses in tokamaks.

**Keywords** : thermonuclear fusion, tokamak, plasma, ETG turbulence, numerical simulations