HAL
open science

Modélisation numérique des résonances par une formulation intégrale - Application au confort acoustique dans une cavité 3D

Alexandre Leblanc

To cite this version:

Alexandre Leblanc. Modélisation numérique des résonances par une formulation intégrale - Application au confort acoustique dans une cavité 3D. Acoustique [physics.class-ph]. Université d'Artois, 2004. Français. NNT : . tel-00261712

HAL Id: tel-00261712

https://theses.hal.science/tel-00261712v1

Submitted on 8 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 2004 **N° d'ordre** 2004ARTO0205

Université d'Artois
Faculté des Sciences Appliquées de Béthune

Thèse

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'université

Spécialité : Mécanique
Option : Acoustique

Présentée et soutenue publiquement par

Alexandre LEBLANC

Modélisation numérique des résonances par une formulation intégrale
Application au confort acoustique dans une cavité 3D

Soutenue le 10 décembre 2004 devant le jury composé de :

Messieurs

Mabrouk Ben Tahar, Professeur des Universités	Rapporteur
Bertrand Dubus, Directeur de Recherche CNRS	Rapporteur
Antoine Lavie, Professeur des Universités	Directeur de thèse
Bruno Duthoit, Professeur des Universités	Examinateur
M'hamed Souli, Professeur des Universités	Examinateur
Christian Vanhille, Enseignant-chercheur	Examinateur

Remerciements

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur M'hamed Souli qui a accepté la présidence de ce Jury.

Je remercie vivement Monsieur Mabrouk Ben Tahar et Monsieur Bertrand Dubus d'avoir accepté de juger ce travail en me faisant l'honneur de le rapporter. J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur Bruno Duthoit pour avoir bien voulu faire partie du Jury.

Je tiens à exprimer tout particulièrement ma gratitude à Monsieur Antoine Lavie, à qui je dois ma formation aux techniques numériques et à l'acoustique. Ses précieux conseils et sa grande compétence ont largement orienté les axes de recherche de cette thèse. Son soutien et sa confiance m'ont donné beaucoup d'enthousiasme au travail. Je ne manquerais pas d'associer à cette motivation Monsieur Christian Vanhille, qui, bien qu'éloigné géographiquement parlant, a toujours su être proche.

Je remercie spécialement Monsieur Martin van Gijzen pour ses précieux conseils sur les algorithmes de résolution de problèmes aux valeurs propres quadratiques ainsi que Monsieur Olivier Dazel pour son aide concernant les matériaux poreux.

Enfin, je voudrais remercier tous ceux qui m'ont côtoyé de près ou de loin durant ces trois années, en particulier mes colocataires Doud et Jean pour m'avoir laisser jouer avec le chat et surtout Maritie, pour tout le reste.

À ma mère.

À Maritie.

Table des matières

Introduction générale **1**

Chapitre 1
Analyse théorique d'une cavité acoustique

1.1 Introduction 3
1.2 Description et mise en équation du problème acoustique 4
1.2.1 Problème acoustique 4
1.2.2 Équation de Helmholtz 5
1.2.3 Conditions aux limites 5
1.3 Représentation intégrale de Helmholtz 6
1.3.1 Théorie 6
1.3.2 Représentation intégrale de Helmholtz intérieure 8
1.3.3 Représentation intégrale de Helmholtz extérieure 9
1.4 Autres formulations intégrales 10
1.4.1 Représentation par potentiel de simple couche 10
1.4.2 Représentation par potentiel de double couche 11
1.4.3 Méthode du potentiel hybride 11
1.4.4 Méthode de superposition d'ondes 12
1.5 Méthode des éléments finis 12
1.6 Conclusions 13

Chapitre 2
Discrétisation des équations

2.1 Introduction 15
2.2 Outils 16
2.2.1 Principe des éléments finis de surface 16
2.2.2 Éléments et fonctions d'interpolation 16
2.2.3 Représentation de la surface 19

2.3 Représentation intégrale de Helmholtz 20
2.3.1 Équation de Helmholtz intérieure 20
2.3.2 Calcul des intégrales 22
2.3.3 Calcul dans le fluide 25
2.4 Prise en compte des symétries 26
2.4.1 Propriétés induites par les symétries 26
2.4.2 Principe de réduction du problème 26
2.5 Conclusions 29

Chapitre 3
Analyse aux fréquences propres

3.1 Introduction 31
3.2 Fréquences propres d'une structure 31
3.2.1 Approche analytique 31
3.3 Fréquences de résonances d'une cavité par méthodes intégrales 33
3.3.1 Principe 33
3.3.2 Méthode du déterminant 33
3.3.3 Méthode des cellules internes 34
3.3.4 Méthode de double réciprocité 35
3.3.5 Méthode de réciprocité multiple 36
3.3.6 Méthode d'expansion en séries 38
3.4 Méthode de l'intégrale particulière 38
3.4.1 Équations de l'intégrale particulière 39
3.4.2 Discrétisation 39
3.4.3 Méthode de la fonction fictive 40
3.4.4 Introduction de points internes 42
3.4.5 Prise en compte de l'absorption 42
3.5 Conclusions 49

Chapitre 4
Traitement numérique des problèmes aux valeurs propres

4.1 Introduction 51
4.2 Problème aux valeurs propres non-hermitien généralisé 52
4.2.1 Méthode QZ 52
4.2.2 Méthode d'Arnoldi avec réitération implicite 53
4.2.3 Algorithme de Jacobi-Davidson 54
4.3 Problème aux valeurs propres non-hermitien quadratique 54

4.3.1 Linéarisation 55
4.3.2 Méthode de Jacobi-Davidson 56
4.4 Conclusions 56

Chapitre 5
Tests de validation

5.1 Propos liminaires 59
5.2 Cas du parallélépipède rectangle 60
5.2.1 Conditions aux frontières Neumann homogène 60
5.2.2 Conditions aux frontières Neumann-Dirichlet homogène 68
5.2.3 Prise en compte d'une absorption 68
5.3 Symétrisation 73
5.4 Points internes 77
5.4.1 Emplacement 77
5.4.2 Densité 82
5.4.3 Distribution 84
5.4.4 Conclusion 84

Chapitre 6
Applications

6.1 Introduction 89
6.2 Compartiment de Sedan 89
6.2.1 Condition de Neumann 89
6.2.2 Conditions mixtes 93

Conclusion générale **99**

Bibliographie **101**

Annexes **107**

Annexe A Systèmes de coordonnées **107**

Annexe B Obtention de l'équation de Helmholtz **111**

Annexe C Représentation intégrale de Helmholtz intérieure **115**

Annexe D Résolution de l'équation des ondes - cas du parallélépipède rectangle **119**

Annexe E Notions de physique des milieux poroélastiques **121**

Table des figures **125**

Notations

- c : célérité du son dans le fluide
- div : opérateur divergence
- $d\underline{r}'$: élément de surface des intégrales de Helmholtz
- g : fonction de Green en champ libre
- G : fonction de Green soumise aux conditions aux limites
- grad : opérateur gradient
- i ou j : nombre complexe de carré -1
- k : nombre d'onde
- $\underline{n}$: normale au point $\underline{r}$ à la surface, orientée positivement vers l'intérieur
- N_i : fonctions de forme
- NE : nombre d'éléments Γ_j du maillage
- NN : nombre de nœuds du maillage
- NNE : nombre de nœuds par éléments Γ_j
- O, X, Y, Z : repère global cartésien
- r : distance entre l'origine du repère et le point $\underline{r}$
- $\underline{r}$: point de calcul
- $\underline{r}'$: point courant sur la surface
- rot : opérateur rotationnel
- t : variable temps
- v_n : vitesse normale de vibration sur la surface
- x, y, z : coordonnées cartésiennes
- h : porosité

- N : module de cisaillement de Biot
- K : coefficient de compressibilité
- Zc : impédance caractéristique acoustique
- Z : impédance de surface
- Y : admittance de surface
- α : angle solide
- Γ : surface intérieure de la structure
- Γ_j : élément du maillage
- δ_{ij} : symbole de Kronecker
- Δ : opérateur laplacien
- ξ, η : coordonnées réduites
- λ : longueur d'onde
- ρ : masse volumique
- ω : pulsation
- Ω_{fl} : domaine fluide
- Ω_s : structure
- $\frac{\partial}{\partial n}$: dérivée au point $\underline{r}$
- β : coefficient d'absorption - modèle de Rajakumar
- β' : coefficient d'absorption - modèle adapté
- ϕ : fonction fictive (liée à l'amplitude de pression)
- σ : résistivité
- α_∞ : tortuosité dynamique
- Λ : longueur caractéristique visqueuse
- Λ' : longueur caractéristique thermique
- ρ_d : masse volumique dynamique

Introduction générale

À l'heure actuelle, le confort acoustique prend une place de plus en plus importante dans les transports (habitacles de voiture, d'avion ou de train), dans les sites industriels et dans les habitations soumis à de fortes nuisances sonores. Le traitement de ces nuisances nécessite une bonne compréhension de l'environnement acoustique et, plus précisément, la connaissance des modes de résonance. À ces fréquences particulières, la puissance transportée par les ondes sonores est à son maximum [1]. En plus de la gêne ressentie et ses conséquences sur les auditeurs (problèmes de santé, dégradation de l'attention et de la sécurité dans un contexte professionnel), ces résonances peuvent également occasionner des dégradations de la structure vibrante.

La lutte contre le bruit passe par une identification précise des résonances. Elle est indispensable pour pouvoir envisager la suppression ou, au moins, leur atténuation par des méthodes d'absorption passive ou par des techniques de contrôle actif (sources d'anti-bruit). Les solutions analytiques ou semi-analytiques sont limitées à des géométries simplifiées [2]. La prise en compte de structures complexes, c'est-à-dire de géométries tridimensionnelles et de revêtements de surface variés, passe par l'emploi d'outils de simulation numérique. Parmi les méthodes possibles, les méthodes des éléments finis de volume et des éléments finis de frontière sont les plus employées [3, 4]. C'est la seconde solution qui est développée dans ce document. Comparativement à la méthode des éléments finis, celle des équations intégrales présente l'avantage de limiter le maillage à l'interface fluide-structure au lieu du volume fluide entier. En plus d'un gain sur le temps de génération du maillage [1], la réduction de la taille du problème se traduit par :

- une diminution du temps de calculs ;
- des moyens de calculs limités ;
- une minimisation du phénomène d'érosion numérique.

Par ailleurs, la restriction du maillage à la surface peut permettre d'élargir considérablement la gamme de fréquences. Une autre alternative consistant à résoudre le problème fluide-structure par un couplage entre la méthode des éléments finis et une formulation intégrale est également

[1] les maillages sont construits avec GiD : http ://gid.cimne.upc.es/

possible. Dans ce cas, le comportement vibratoire de la structure est modélisé par les éléments finis alors que la propagation des ondes de pression dans le fluide est simulée par les équations intégrales. Le couplage est alors réalisé par l'intermédiaire d'une matrice d'impédance reliant les valeurs nodales de la pression et du déplacement sur la surface mouillée.

À l'origine de cette étude, on disposait d'un code de calculs de type équations intégrales [5] adapté à la résolution des problèmes d'acoustique en milieu infini et en régime harmonique. Dans un premier temps, son extension aux problèmes fermés a été réalisée. Ensuite, l'implantation d'une technique de calcul des modes de résonance, basée sur la méthode de l'intégrale particulière [6], a constitué l'essentiel du travail. Parmi les principaux développements effectués[2], on peut citer :

- l'identification des domaines d'utilisation de différents algorithmes d'extraction des fréquences propres ;
- une procédure sur le nombre et la disposition des points internes de collocation qui améliorent la précision ;
- la mise au point d'une prise en compte des impédances de surface apportant une meilleure description du comportement acoustique des revêtements pour les fréquences inférieures à 500 Hz.

La répartition des ondes acoustiques dans la cavité est également un enjeu important pour mieux appréhender le problème. D'un point de vue pratique, la connaissance des modes de résonance, et en particulier des fonctions propres associées, permet par simple sommation de reconstruire les champs sonores. La cartographie acoustique est assurée par un ensemble d'outils de visualisation[3] en phase de post-traitement.

Le rapport débute avec l'exposé du problème acoustique intérieur et des principales méthodes de résolution. L'accent est mis sur la description de la représentation de Helmholtz intérieure. Le deuxième chapitre détaille la discrétisation numérique employée. Le chapitre suivant contient l'état de l'art de l'analyse aux fréquences propres d'une cavité par formulation intégrale. La méthode adoptée dite de l'intégrale particulière est développée. Le quatrième chapitre porte sur le traitement numérique des problèmes aux valeurs propres. Les différents algorithmes d'extraction des fréquences propres sont résumés. Les cinquième et sixième chapitres contiennent respectivement des tests de validation et une application sur un habitacle de voiture simplifié de la méthode de l'intégrale particulière. Enfin, une conclusion et quelques perspectives sont données.

[2] la programmation des calculs est effectuée en Fortran

[3] les outils de visualisation graphique sont développés dans un environnement MatLab

Chapitre 1

Analyse théorique d'une cavité acoustique

1.1 Introduction

Le sujet de ce premier chapitre est l'analyse théorique des problèmes de résonance acoustique.

Après avoir défini le problème acoustique en question, l'écriture de celui-ci mène à différentes équations : l'équation de Helmholtz et les équations aux limites. La résolution analytique de ces équations se limite aux géométries simples [2]. Le traitement des géométries complexes nécessite l'emploi de méthodes numériques. Parmi celles-ci, on se focalise sur les représentations intégrales.

Dans tout le document, on s'intéresse tout particulièrement à la représentation intégrale de Helmholtz intérieure [4]. En effet, elle permet la modélisation du comportement acoustique d'une structure contenant un milieu fluide, communément appelée cavité acoustique.

La section 1.2 de ce chapitre décrit la mise en équations du problème général de propagation acoustique dans une cavité constitué de l'équation de Helmholtz et des conditions de surface.

La partie suivante est consacrée au principe de résolution. Dans le but de résoudre le problème intérieur défini précédemment, la méthode des équations intégrales, qui, par l'intermédiaire des fonctions de Green, permet de réduire le problème volumique à un problème surfacique [2, 7, 5] est choisi. Plus précisément c'est la représentation intégrale de Helmholtz intérieure qui est l'objet de nos développements. On décrit également son équivalent pour le problème extérieur, la représentation de Helmholtz extérieure.

Le paragraphe 1.4 de ce chapitre est consacré aux autres formulations intégrales existantes. Elles sont expliquées succinctement et l'on donne les principaux avantages et inconvénients. Les méthodes présentant un réel intérêt par leur simplicité de mise en œuvre pour le problème

intérieur sont les représentations par potentiel de simple couche [8], de double couche [9], la méthode du potentiel hybride [10] et la méthode de superposition des ondes [11].

Dans la dernière section, d'autres méthodes de résolution telles que la méthode des éléments finis [3], est présentée.

Les conclusions de ce premier chapitre sont ensuite brièvement données.

1.2 Description et mise en équation du problème acoustique

Après avoir défini le problème acoustique à résoudre, on rappelle l'équation des ondes qui le gouverne (équation de Helmholtz). Puis, les conditions aux limites du problème considéré sont données.

1.2.1 Problème acoustique

L'acoustique est une composante de la Physique qui contient l'étude de la dynamique des petites perturbations d'un fluide compressible. Cette étude permet l'analyse de la propagation d'onde dans ce milieu (l'équation des ondes) et des caractéristiques sur la surface de la cavité (conditions aux limites).

Le problème en question est la modélisation du rayonnement acoustique à partir d'une structure contenant un milieu fluide (cf. fig. 1.1 où Ω_{fl} est le fluide, Ω_{ext} la structure et Γ sa frontière).

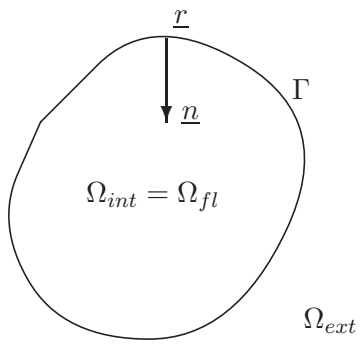


FIG. 1.1: Représentation du domaine acoustique

On considère une onde acoustique se propageant sans amortissement dans ce milieu compressible homogène isotrope, de densité ρ et vitesse du son c. Le fluide est supposé idéal, barotrope, irrotationnel, de vitesse d'écoulement nulle. La dépendance temporelle des variables, dans tout le document et sauf précision contraire, est suivant $e^{-i\omega t}$ où ω désigne la pulsation du régime harmonique.

Les grandeurs physiques qui sont manipulées dépendent de la position du point $\underline{r}$ dans le domaine fluide (cf. annexe A) et de la variable temps t.

1.2.2 Équation de Helmholtz

Dans cette section, le cheminement menant à la mise en équations du problème défini précédemment est rapidement donné [12]. Les calculs sont effectués dans l'annexe (cf. annexe B). On obtient ainsi l'équation de Helmholtz, ou équation des ondes :

$$\Delta p\left(\underline{r}\right) + k^2 p\left(\underline{r}\right) = -\delta\left(\underline{r}, \underline{r}_0\right) \tag{1.1}$$

où p est la pression, δ la fonction de Dirac tridimensionnelle, $\underline{r}$ le point d'application, $\underline{r}_0$ la position d'une éventuelle source et k le nombre d'onde tel que $k = \omega/c$.

1.2.3 Conditions aux limites

On appelle Ω_{int} le volume intérieur de la structure. Il est identique au domaine fluide Ω_{fl} (voir fig. 1.1).

Lorsque la pression acoustique est donnée à la frontière, il s'agit du problème de Dirichlet [12] :

$$p\left(\underline{r}\right) = f\left(\underline{r}\right) \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.2}$$

où f est une fonction connue et continue.

Le problème est de Neumann, quand la dérivée normale de la pression est donnée sur la surface :

$$\frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}\right) = h\left(\underline{r}\right) \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.3}$$

où h est une fonction connue et continue. La dérivée normale d'une fonction f au point $\underline{r}$ étant définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial n}\left(\underline{r}\right) = \lim_{\underline{r} \to \underline{r}'} \left(\mathrm{grad}\left(f\left(\underline{r}'\right)\right).\underline{n}\right) \tag{1.4}$$

où $\underline{n}$ représente la normale en $\underline{r}$ (cf. fig. 1.1).

Il existe une relation directe entre la dérivée normale de la pression et la composante normale de la vitesse (celle-ci étant la dérivée par rapport au temps t du déplacement normal) au point $\underline{r}$ de Γ :

$$\frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}\right) = i\omega\rho v_n\left(\underline{r}\right) \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.5}$$

Il existe une relation de type mixte qui présente généralement un traitement plus réaliste des propriétés acoustiques de Γ. C'est une combinaison linéaire des conditions de Dirichlet et de Neumann :

$$a\left(\underline{r}\right) p\left(\underline{r}\right) + b\left(\underline{r}\right) \frac{\partial p\left(\underline{r}\right)}{\partial n} = f\left(\underline{r}\right) \tag{1.6}$$

où a, b, et f sont des fonctions données pour $\underline{r} \in \Gamma$. Avec une condition homogène ($f(\underline{r}) = 0\ \forall \underline{r}$) l'équation (1.6) équivaut à :

$$p(\underline{r}) = Zv_n(\underline{r}) \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.7}$$

c'est-à-dire que sur la frontière la vitesse normale est proportionnelle à la pression. Z est l'impédance acoustique au point $\underline{r}$ de la frontière et dépend de la fréquence.

Cas du problème extérieur

Il est à noter que dans le cas d'un problème extérieur, une autre condition à imposer est la condition de rayonnement de Sommerfeld. Cette condition caractérise le comportement des solutions de l'équation de Helmholtz à l'infini. Elle signifie que le flux d'énergie qui traverse une sphère de rayon infini est positif et fini (que l'onde doit diverger). Elle s'écrit :

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\left(\frac{\partial}{\partial n}p(\underline{r}) - ikp(\underline{r})\right)\right) = 0 \tag{1.8}$$

$$r \to \infty \quad rp(\underline{r}) \text{ est fini} \tag{1.9}$$

$$r \to \infty \quad p(\underline{r}) \approx \frac{e^{ikr}}{r} \tag{1.10}$$

Pour un problème de diffraction, la pression totale dans Ω_{fl} se décompose en la somme de la pression incidente et la pression diffractée p_{df} : $p = p_{df} + p_{inc}$ [7].

1.3 Représentation intégrale de Helmholtz

Dans cette partie, on introduit la méthode des équations intégrales. La formulation de Helmholtz intérieure est donnée.

1.3.1 Théorie

Deux approches de la théorie des équations intégrales sont possibles : la formulation directe et la formulation indirecte [4]. La formulation directe est utilisée ici : elle mène en particulier aux représentations intégrales de Helmholtz extérieure et intérieure.

La méthode directe fait intervenir les fonctions de Green [4]. Ces fonctions permettent, par l'intermédiaire du second théorème de Green, de réduire le problème volumique à un problème surfacique.

Les fonctions de Green représentent l'influence d'un point $\underline{r}'$ sur un point $\underline{r}$. Si une fonction de Green, que l'on note G, pouvait être obtenue pour chaque type de géométrie et condition

homogène sur la surface, alors la résolution se réduirait à une quadrature standard de fonctions connues. Ce type de fonction n'est cependant généralement pas connu.

La fonction de Green $G(\underline{r}, \underline{r}')$, ou fonction d'influence, qui symbolise donc le champ créé au point $\underline{r}$ par une source ponctuelle située en $\underline{r}'$, a été introduite initialement en électrostatique, pour ensuite trouver application dans de nombreux domaines. Si en $\underline{r}'$, on est en présence de plusieurs sources suivant une distribution $\tau(\underline{r}')$, le champ au point $\underline{r}$ est l'intégrale sur toutes ces sources : $\int \tau(\underline{r}') .G(\underline{r}, \underline{r}') d(\underline{r}')$.

En supposant qu'en tout point de la surface Γ on ait une condition de Dirichlet ou de Neumann nulle partout sauf en un point $\underline{r}'$, où le champ est comparable à une fonction de Dirac, alors le champ au point d'observation $\underline{r}$ est encore $G(\underline{r}, \underline{r}')$. Sous une condition de Dirichlet ou de Neumann non homogène, le champ au point $\underline{r}$ est l'intégration surfacique selon $\underline{r}'$ du produit du second membre de la condition sur la surface par G :

$$\int f(\underline{r}') .G(\underline{r}, \underline{r}') d(\underline{r}') \quad \text{ou} \quad \int h(\underline{r}') .G(\underline{r}, \underline{r}') d(\underline{r}')$$

Dans ce cas, on assimile Γ à un ensemble de sources suivant une certaine distribution. La fonction de Green est donc une solution quand on a homogénéité partout sauf en un point.

En employant la théorie des fonctions de Green, il est possible d'obtenir une solution de l'équation homogène de Helmholtz avec des conditions aux limites inhomogènes, ou de l'équation de Helmholtz inhomogène avec des conditions aux limites homogènes. Par linéarité des équations, on peut aussi résoudre l'équation inhomogène avec des conditions aux limites inhomogènes en superposant les solutions précédentes.

$G(\underline{r}, \underline{r}')$, solution fondamentale, vérifie l'équation de Helmholtz inhomogène [2] :

$$\Delta G(\underline{r}, \underline{r}') + k^2 G(\underline{r}, \underline{r}') = -\delta(\underline{r}, \underline{r}') \tag{1.11}$$

et la condition de symétrie :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = G(\underline{r}', \underline{r}) \tag{1.12}$$

De plus, elle vérifie les conditions aux limites homogènes sur la frontière, de Dirichlet :

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad \underline{r}' \in \Gamma \cup \Omega_{fl} \tag{1.13}$$

ou de Neumann, ($\partial/\partial n$ désignant la dérivée normale au point $\underline{r}$ orientée positivement vers le fluide) :

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \underline{r} \in \Gamma \quad \underline{r}' \in \Gamma \cup \Omega_{fl} \tag{1.14}$$

et la condition de Sommerfeld :

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\left(\frac{\partial}{\partial n}G\left(\underline{r},\underline{r}'\right)-ikG\left(\underline{r},\underline{r}'\right)\right)\right)=0 \tag{1.15}$$

$$r\to\infty \quad rG\left(\underline{r},\underline{r}'\right) \text{ est fini} \tag{1.16}$$

Ces fonctions ne sont connues que pour des géométries simples particulières (le plan infini ou une famille de plans parallèles). Pour des géométries quelconques, la fonction de Green associée à l'espace libre infini g est utilisée. Son emploi complique la formulation intégrale et introduit le problème des fréquences irrégulières [7] dans le cas du problème extérieur. g est moins restrictive que G, car, indépendante de la surface Γ, elle n'est pas soumise aux conditions aux limites sur Γ (G est en fait composée d'une partie continue partout dépendante des conditions imposées sur Γ et d'une autre g continue partout sauf en $\underline{r}=\underline{r}'$).

La solution fondamentale g vérifie donc :

$$\Delta g\left(\underline{r},\underline{r}'\right)+k^2g\left(\underline{r},\underline{r}'\right)=-\delta\left(\underline{r},\underline{r}'\right) \tag{1.17}$$

$$g\left(\underline{r},\underline{r}'\right)=g\left(\underline{r}',\underline{r}\right) \tag{1.18}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\left(\frac{\partial}{\partial n}g\left(\underline{r},\underline{r}'\right)-ikg\left(\underline{r},\underline{r}'\right)\right)\right)=0 \tag{1.19}$$

$$r\to\infty \quad rg\left(\underline{r},\underline{r}'\right) \text{ est fini} \tag{1.20}$$

La solution de ces équations est connue. Dans l'espace tridimensionnel, la solution fondamentale est une onde sphérique divergente :

$$g\left(\underline{r},\underline{r}'\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \tag{1.21}$$

On présente maintenant les représentations intégrales de Helmholtz intérieure et extérieure. Les calculs permettant d'y aboutir sont détaillés dans l'annexe C.

1.3.2 Représentation intégrale de Helmholtz intérieure

Le fluide est contenu à l'intérieur de la structure (cf. fig. 1.1). La représentation intégrale de Helmholtz intérieure modélise le problème de Helmholtz intérieur correspondant :

$$s_0\left(\underline{r}\right)+\iint_\Gamma\left[p\left(\underline{r}'\right)\frac{\partial}{\partial n'}g\left(\underline{r},\underline{r}'\right)-g\left(\underline{r},\underline{r}'\right)\frac{\partial}{\partial n'}p\left(\underline{r}'\right)\right]d\underline{r}'$$

$$=\begin{cases} p\left(\underline{r}\right) & \underline{r}\in\Omega_{int} \quad (1.22a)\\ \dfrac{\alpha\left(\underline{r}\right)}{4\pi}p\left(\underline{r}\right) & \underline{r}\in\Gamma \quad (1.22b)\\ 0 & \underline{r}\in\Omega_{ext} \quad (1.22c)\end{cases}$$

avec $\underline{r}$ le point de calcul, $\underline{r}'$ le point courant sur Γ, $\partial/\partial n'$ la dérivée normale au point $\underline{r}'$ orientée positivement vers le fluide et où s_0 représente l'effet d'une source placée en $\underline{r}_0$ (cf. équation (C.8)). L'angle solide α est défini par :

$$\alpha\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'}\left[\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right] d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.23}$$

α est égal à 2π si $\underline{r}$ est un point de continuité de la tangente à Γ.

L'équation (1.22b) permet de calculer l'inconnue sur la surface (la pression pour un problème de Neumann, sa dérivée normale pour un problème de Dirichlet). Injectée dans l'équation (1.22a), elle permet ensuite d'obtenir la pression en tout point du fluide.

Cette représentation permet de résoudre les problèmes de propagation acoustique dans des cavités. De nombreuses applications existent [4, 13, 14].

La représentation intégrale de Helmholtz intérieure ne souffre pas de l'existence de fréquences irrégulières [7].

Sans source dans le fluide, le terme s_0 disparaît des équations précédentes. Si les parois sont rigides, le second terme de l'intégrale s'annule $((\partial p\left(\underline{r}'\right)/\partial n') = 0)$.

1.3.3 Représentation intégrale de Helmholtz extérieure

Le fluide entoure la structure [4, 5]. Elle est directement corrélée à la représentation de Helmholtz intérieure.

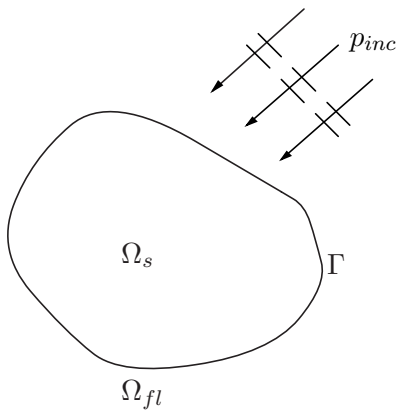


Fig. 1.2: Représentation du domaine acoustique du problème extérieur

Cette représentation permet de modéliser le problème de Helmholtz extérieur (cf. fig. 1.2). Elle s'écrit dans sa forme générale [7] :

$$p_{inc}\left(\underline{r}\right) + \iint_{\Gamma} \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} p\left(\underline{r}'\right) \right] d\underline{r}'$$

$$= \begin{cases} p\left(\underline{r}\right) & \underline{r} \in \Omega_{ext} \quad (1.24a) \\ \dfrac{\alpha_{ext}\left(\underline{r}\right)}{4\pi} p\left(\underline{r}\right) & \underline{r} \in \Gamma \quad (1.24b) \\ 0 & \underline{r} \in \Omega_{int} \quad (1.24c) \end{cases}$$

où :

$$\alpha_{ext}\left(\underline{r}\right) = 4\pi - \alpha\left(\underline{r}\right) \tag{1.25}$$

Après résolution de (1.24b), on obtient la pression p que l'on injecte ensuite dans (1.24a) pour calculer la pression dans Ω_{fl}. Cette formulation présente des fréquences irrégulières pour lesquelles elle admet théoriquement une infinité de solutions [15]. Pour assurer l'unicité de la solution, on peut citer la méthode de Schenck [7], la méthode du champ nul [5] et la méthode de Burton et Miller [16].

1.4 Autres formulations intégrales

Dans ce paragraphe sont présentées quelques méthodes à base d'équations intégrales existant pour le problème intérieur de Neumann et facilement transposable au problème extérieur.

1.4.1 Représentation par potentiel de simple couche

La représentation par potentiel de simple couche (monopôle) fait intervenir une distribution σ initialement inconnue telle que [9] :

$$p\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \sigma\left(\underline{r}'\right) g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_{fl} \cup \Gamma \tag{1.26}$$

Pour un problème de Neumann, la résolution de la dérivée normale de cette dernière équation détermine la valeur de σ sur Γ :

$$p\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \sigma\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right)}{\partial n} d\underline{r}' - \frac{\sigma\left(\underline{r}\right)}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.27}$$

1.4.2 Représentation par potentiel de double couche

La représentation par potentiel de double couche (dipôle) s'exprime habituellement sous la forme suivante, faisant intervenir la densité de surface μ [9] :

$$p\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \mu\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_{fl} \tag{1.28}$$

$$p\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \mu\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' + \frac{\mu\left(\underline{r}\right)}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.29}$$

Une condition de Neumann est prise en compte par [10] :

$$\frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \mu\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.30}$$

Cette intégrale doit être prise en valeur principale selon la formule suivante :

$$\iint_{\Gamma} \mu\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' = \lim_{\underline{r}'' \to \underline{r}'} \frac{\partial}{\partial n''} \iint_{\Gamma} \mu\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}'', \underline{r}'\right) d\underline{r}' \tag{1.31}$$

où $\underline{r}'' \to \underline{r}'$ est suivant la normale à Γ.

La résolution de l'équation (1.30) fournit la valeur de μ dans Γ, permettant le calcul de la pression dans Ω_{fl} et Γ via l'équation 1.28 [17].

1.4.3 Méthode du potentiel hybride

C'est une combinaison des représentations de Helmholtz intérieure et de simple couche, obtenue après avoir imposé une condition de raccord mixte [10] :

$$i\eta \left[p\left(\underline{r}\right)\right] = \left[\frac{\partial p\left(\underline{r}\right)}{\partial n}\right] \tag{1.32}$$

sur Γ où η est un nombre complexe quelconque. Il vient :

$$p\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \gamma\left(\underline{r}'\right) \left(i\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right) g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Omega_{fl} \tag{1.33}$$

$$p\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \gamma\left(\underline{r}'\right) \left(i\eta - \frac{\partial}{\partial n}\right) g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' - \frac{\gamma\left(\underline{r}\right)}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.34}$$

Pour une condition de Neumann :

$$\frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}\right) = \iint_{\Gamma} \gamma\left(\underline{r}'\right) \left(i\eta - \frac{\partial}{\partial n'}\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' - i\eta \frac{\gamma\left(\underline{r}\right)}{2} \quad \underline{r} \in \Gamma \tag{1.35}$$

Étant donné la complexité du noyau de (1.35) et sa forte singularité, sa mise en œuvre n'est pas simple. Il apparaît une intégrale du type de l'équation 1.31 prise en valeur principale.

1.4.4 Méthode de superposition d'ondes

Elle est basée sur l'idée que le champ acoustique d'une structure à géométrie quelconque peut être construit en superposant les champs engendrés par une antenne de sources simples située à l'extérieur de cette cavité [11]. Cette formulation est équivalente à celle de Helmholtz intérieure. La pression s'écrit :

$$p\left(\underline{r}\right) = i\omega\rho \iiint\limits_{\Omega_{ext}} q\left(\underline{r}'\right) g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) d\underline{r}' \tag{1.36}$$

où q est la « force »de la distribution de sources simples.

Le choix de la distribution des sources conditionne la précision des résultats [18].

1.5 Méthode des éléments finis

Cette méthode variationnelle, très utilisée, permet, outre la résolution du problème fluide, de modéliser toute structure rayonnante, hétérogène et de forme complexe, par intégration simultanée des équations de l'élasticité [19, 20].

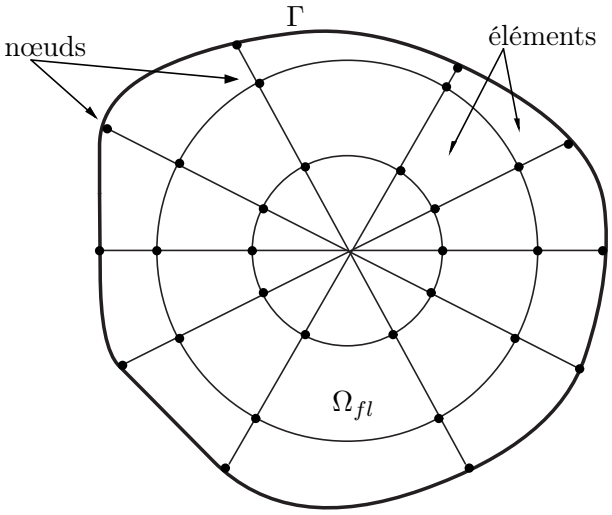


Fig. 1.3: Maillage éléments finis du problème acoustique

Le problème est discrétisé à l'aide d'éléments finis (fig. 1.3). Le déplacement u, la pression p et la dérivée normale du champ de pression Ψ en un point situé à l'intérieur d'un élément sont reliés aux valeurs nodales de déplacement u^e, de la pression p^e et de sa dérivée normale Ψ^e à l'aide de fonctions d'interpolation [3]. Calculs faits, on arrive au système linéaire d'équations

suivant :

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & -[L] \\ -[L]^T & \frac{[H]}{\rho^2 c^2 \omega^2} - \frac{[M_1]}{\rho^2 c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \frac{1}{\rho\omega^2} \{\Psi\} \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

où $[K]$, $[M]$, $[H]$, $[M_1]$ et $[L]$ sont appelées respectivement matrices de rigidité et de masse cohérente pour la structure, matrices de compressibilité et de masse cohérente pour le fluide, et matrice de couplage fluide-structure ou de connectivité.

Ces matrices et les vecteurs $\{u\}$, $\{p\}$ et $\{\Psi\}$ (contenant les valeurs nodales) résultent de l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires.

Les résultat disponibles suite à une modélisation par éléments finis sont classiquement les champ de déplacement et de pression en tous les nœuds du maillage. Outre la capacité à décrire des géométries complexes, les méthodes à base d'éléments finis présentent l'avantage d'être robustes, bien documentées et numériquement performantes (matrices bandes et symétriques). Leur principale limite réside dans la nécessité de conserver une densité de maillage volumique suffisante pour décrire les variations spatiales des champs étudiés. Le critère généralement retenu limite la taille d'un élément quadratique au quart de la longueur d'onde. L'augmentation de la fréquence de travail entraîne l'utilisation d'un maillage plus dense et l'augmentation de la taille du système à résoudre. Les méthodes à base d'éléments finis apparaissent donc comme des méthodes de « faibles ka ». De plus, dans le cas d'un problème ouvert, il est nécessaire de trouver un compromis entre la taille de maillage issue de la troncature du volume fluide et la prise en compte de conditions d'amortissement (traduisant le comportement du fluide à l'infini) sophistiquées [21].

1.6 Conclusions

De toutes les méthodes présentées ci-dessus, c'est la représentation de Helmholtz intérieure qui est développée dans cette thèse. Elle est relativement simple à implémenter, le maillage est réduit à la surface en contact avec le fluide et elle présente un bon comportement numérique.

Chapitre 2

Discrétisation des équations

2.1 Introduction

Ce chapitre concerne le traitement numérique des équations obtenues dans le premier chapitre. Il est similaire à celui qui a permis la mise au point d'un code équations intégrales dédié aux problèmes extérieurs [5, 22]. La discrétisation du problème est réalisée avec des éléments isoparamétriques à variation quadratique. Pour un problème de Neumann, les équations de la représentation intégrale de Helmholtz intérieure permettant le calcul de la pression sur la surface et dans le fluide sont traitées. La discrétisation mène toujours à un système linéaire d'équations dont la résolution permet l'obtention de la pression inconnue. La validation de la numérisation des équations est effectuée par le test classique de la source ponctuelle [7].

La partie 2.2 de ce chapitre introduit le concept de discrétisation [3]. Le découpage en éléments finis de surface est présenté. Le « critère en $\lambda/4$ », qui doit impérativement être respecté pour pouvoir utiliser les éléments de surface en question dans de bonnes conditions, est explicité. Les développements sont présentés pour le cas du problème complètement tridimensionnel (3D).

La section suivante de ce chapitre concerne le traitement numérique des équations de la représentation de Helmholtz intérieure. L'équation de surface est d'abord traitée. Le calcul des intégrales est effectué par l'intermédiaire de la quadrature de Gauss-Legendre [3]. Le traitement des singularités est rappelé ainsi que la prise en compte d'éventuelles symétries planes de la structure.

2.2 Outils

2.2.1 Principe des éléments finis de surface

L'utilisation des éléments finis de surface [3] est classique pour mener à bien la résolution d'équations (cf. (1.22)). Le principe consiste à découper la surface Γ en domaines surfaciques élémentaires Γ_j reliés entre eux par un nombre fini de points (a, b, c, d) appelés nœuds. Un tel découpage forme un maillage (fig. 2.1) :

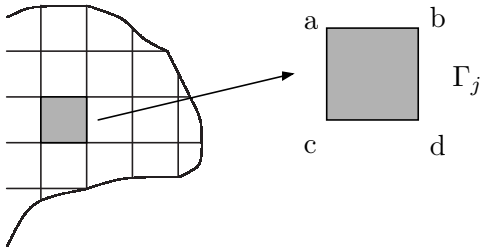


FIG. 2.1: Éléments finis de surface formant un maillage

Sur chaque élément Γ_j, les variables du problème, c'est à dire la pression et sa dérivée normale, dépendent uniquement des valeurs qu'elles prennent aux nœuds de l'élément. Leurs valeurs en tout point sont fournies par l'intermédiaire des fonctions de forme (ou d'interpolation) qui dépendent de leurs coordonnées.

Après discrétisation des équations, on aboutit alors à un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs nodales de la variable inconnue et dont la résolution est la dernière étape du problème. La géométrie des éléments, le nombre de nœuds par élément et la loi de variation des champs de variable à l'intérieur de l'élément sont liés.

2.2.2 Éléments et fonctions d'interpolation

Les différents types d'éléments

D'après Zienkiewicz [3], les fonctions de pondération prennent la valeur unité au nœud considéré et sont nulles partout ailleurs. On utilise des éléments isoparamétriques où la variation des champs (p et $\partial p/\partial n$) et la géométrie sont décrites par les mêmes interpolations. Différents types d'éléments existent : l'élément constant sur lequel les variables sont constantes ; l'élément linéaire sur lequel les fonctions de pondération varient linéairement le long de chaque coté de l'élément ;

l'élément quadratique sur lequel les fonctions de forme varient de façon quadratique le long de chaque coté de l'élément ; des éléments de degré supérieur existent également. L'élément quadratique est un bon compromis entre la précision des calculs et la taille du maillage, il permet aussi de représenter des surfaces courbes en évitant ainsi une dégénérescence sur certains modes pour des géométries particulières comme le cylindre.

Les éléments utilisés

La pression et sa dérivée normale sur un élément Γ_j comportant NNE nœuds sont approchées par les fonctions de forme N_i selon les relations :

$$p\left(\underline{r}\left(\xi,\eta\right)\right) = \sum_{i=1}^{NNE} N_i\left(\xi,\eta\right) p_{ij} \quad \underline{r} \in \Gamma_j \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}\left(\xi,\eta\right)\right) = \sum_{i=1}^{NNE} N_i\left(\xi,\eta\right) \frac{\partial p_{ij}}{\partial n} \quad \underline{r} \in \Gamma_j \tag{2.2}$$

où ξ et η sont les coordonnées réduites de l'élément de surface (cf. fig. 2.3 et fig. 2.4) . Les valeurs nodales p_{ij} et $\partial p_{ij}/\partial n$ sont les valeurs de la pression et de sa dérivée normale au nœud i de l'élément Γ_j. Sur un élément, le nombre de fonctions de forme est égal au nombre de nœuds NNE. Soit deux nœuds de coordonnées réduites (ξ_i, η_i) et (ξ_j, η_j) d'un même élément, on a alors :

$$N_i\left(\xi_j,\eta_j\right) = \delta_{ij} \tag{2.3}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

On emploie des fonctions de forme à variation quadratique. Elles sont soumises au « critère en $\lambda/4$ »[3] qui signifie que les dimensions latérales des éléments de surface doivent être inférieures ou égales au quart de la longueur d'onde de la fréquence de calcul (la longueur d'onde s'écrit $\lambda = c/f$). À maillage donné, ce critère fixe ainsi la fréquence maximale d'utilisation F.

Ce type d'interpolation peut engendrer des discontinuités fictives de la courbure de surface en certains nœuds communs à plusieurs éléments. Ces discontinuités sont négligeables si le découpage est bien conditionné mais sont intégrées dans le code de calcul.

Remarque sur le calcul des normales aux nœuds

Soit un nœud appartenant à plusieurs éléments. On détermine les normales au nœud pour chaque élément et ensuite, par moyennage et normalisation, on récupère la normale résultante au nœud. Cette démarche illustrée par la figure 2.2 est simple et efficace, il faut toutefois noter un « lissage »des nœuds de coins. Deux types d'éléments de surface sont utilisées ici : les éléments quadrilatères à 8 nœuds (fig. 2.3) et les éléments triangulaires à 6 nœuds (fig. 2.4). Pour l'élément

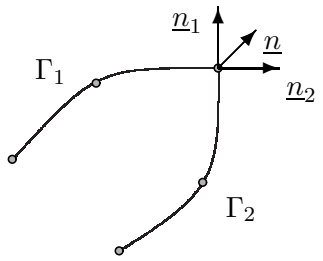


FIG. 2.2: Détermination des normales

quadrilatère à 8 nœuds, les fonctions déduites de cette représentation sont :

$$\begin{cases} N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\xi-1)(1-\eta)(\xi+\eta+1) \\ N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(\xi+1)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\eta-\xi-1) \\ N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ N_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta) \\ N_6(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi) \\ N_7(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1+\xi) \\ N_8(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta) \end{cases} \tag{2.4}$$

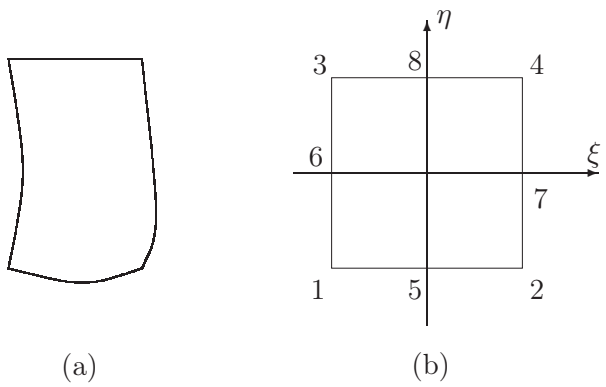
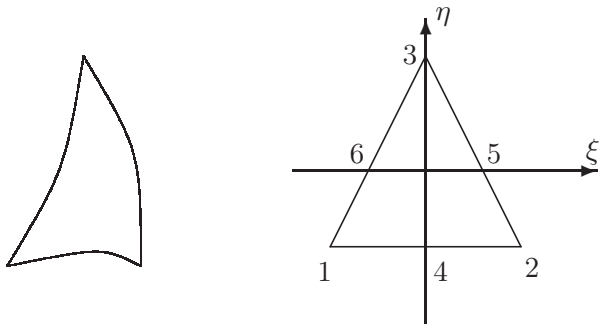


FIG. 2.3: Élément quadrilatère, avec $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, (a) global, (b) réduit.

Pour l'élément triangulaire à 6 nœuds, les fonctions de forme sont :

$$\begin{cases} N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{8}(2\xi+\eta+1)(2\xi+\eta-1) \\ N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{8}(2\xi-\eta+1)(2\xi-\eta-1) \\ N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\eta(1+\eta) \\ N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(2\xi-\eta+1)(1-2\xi-\eta) \\ N_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta)(2\xi+1-\eta) \\ N_6(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta)(1-2\xi-\eta) \end{cases} \tag{2.5}$$



(a) (b)

FIG. 2.4: Élément triangulaire, avec $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, (a) global, (b) réduit.

2.2.3 Représentation de la surface

La géométrie est également interpolée par les fonctions de forme quadratiques N_i déjà définies.

On travaille dans le système de coordonnées cartésiennes (O, X, Y, Z) (cf. annexe A). Il faut exprimer l'élément de surface sur lequel est effectuée l'intégration en fonction des coordonnées locales. L'interpolation est introduite par la relation suivante :

$$\underline{OM'} = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi,\eta)\,\underline{OM}_{ij} \tag{2.6}$$

où $NNE = 6$ ou 8 est le nombre de nœuds par élément, $M'(x', y', z')$ est un point courant de l'élément Γ_j, $M_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ est le nœud i de l'élément Γ_j.

On projette alors ce vecteur sur les trois axes du repère :

$$x' = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi,\eta)\, x_{ij} \tag{2.7}$$

$$y' = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi,\eta)\, y_{ij} \tag{2.8}$$

$$z' = \sum_{i=1}^{NNE} N_i(\xi,\eta)\, z_{ij} \tag{2.9}$$

La normale à la surface au point $\underline{r}'(\xi,\eta)$ de coordonnées (x', y', z') dans le repère cartésien est donnée par [23] :

$$\underline{n}' = \frac{1}{\omega(\xi,\eta)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\underline{r}' \wedge \frac{\partial}{\partial \eta}\underline{r}' \right] \tag{2.10}$$

avec

$$\omega(\xi,\eta) = \left| \frac{\partial}{\partial \xi}\underline{r}' \wedge \frac{\partial}{\partial \eta}\underline{r}' \right| \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\underline{r}' = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi}x' \\ \frac{\partial}{\partial \xi}y' \\ \frac{\partial}{\partial \xi}z' \end{cases} \tag{2.12}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\underline{r}' = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \eta}x' \\ \frac{\partial}{\partial \eta}y' \\ \frac{\partial}{\partial \eta}z' \end{cases} \tag{2.13}$$

La normale $\underline{n}'$ est orientée vers le fluide de façon à ce que $\left(\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{n}'\right)$ forme un trièdre direct, où $\underline{\xi}$ et $\underline{\eta}$ sont les vecteurs directeurs des axes du repère réduit de Γ_j. L'élément de surface élémentaire est [23] :

$$d\underline{r}'(\xi,\eta) = \omega(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \tag{2.14}$$

2.3 Représentation intégrale de Helmholtz

2.3.1 Équation de Helmholtz intérieure

Discrétisation

On fixe quelques notations usuelles :

- NE : nombre d'éléments Γ_j composant la surface Γ de la structure,
- NN : nombre total de nœuds du maillage.

Pour établir les équations discrétisées, on injecte les interpolations (2.1) et (2.2) dans l'équation (1.22b) écrite au nœud de calcul $\underline{r}_m$ du maillage. Il vient donc :

$$\sum_{j=1}^{NE}\sum_{i=1}^{NNE} p_{ij} \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_i(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) - \sum_{j=1}^{NE}\sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ij}}{\partial n'} \iint_{\Gamma_j} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_i(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) = \frac{\alpha_m}{4\pi} p_m \quad (2.15)$$

avec $m = 1, \ldots, NN$ et où α_m est l'angle solide au nœud $\underline{r}_m$ vu de l'intérieur et p_m la pression au nœud $\underline{r}_m$. Les grandeurs indicées par m correspondent à une numérotation globale alors que celles indicées par ij correspondent à une numérotation locale.

Écriture locale

Avec la numérotation locale :

$$\sum_{j=1}^{NE}\sum_{i=1}^{NNE} A_{m\,ij} p_{ij} = \sum_{j=1}^{NE}\sum_{i=1}^{NNE} B_{m\,ij} \frac{\partial p_{ij}}{\partial n'} \quad m = 1, \ldots, NN \quad (2.16)$$

avec

$$A_{m\,ij} = \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_i(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) - \delta_{m\,ij} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (2.17)$$

$$B_{m\,ij} = \iint_{\Gamma_j} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_i(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) \quad (2.18)$$

Écriture globale

Avec la numérotation globale :

$$\sum_{\epsilon=1}^{NN} A_{m\,\epsilon} p_\epsilon = \sum_{\epsilon=1}^{NN} B_{m\,\epsilon} \frac{\partial p_\epsilon}{\partial n'} \quad m = 1, \ldots, NN \quad (2.19)$$

avec

$$A_{m\,\epsilon} = \sum_{s(\epsilon)} \iint_{\Gamma_{s(\epsilon)}} \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_{t(s(\epsilon))}(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) - \delta_{m\,e} \frac{\alpha_m}{4\pi} \quad (2.20)$$

$$B_{m\,\epsilon} = \sum_{s(\epsilon)} \iint_{\Gamma_{s(\epsilon)}} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_{t(s(\epsilon))}(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) \quad (2.21)$$

et : où $s(\epsilon)$ est la liste des éléments auxquels appartient le nœud ϵ, $t(s(\epsilon))$ est la position de ϵ dans la topologie des éléments $\Gamma_{s(\epsilon)}$.

Avec l'une ou l'autre des notations précédentes, on aboutit à la forme matricielle suivante :

$$[A]\{p\} = [B]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} \quad (2.22)$$

où les termes entre crochets sont les matrices contenant les coefficients d'influence entre tous les nœuds du maillage, $\{p\}$ et $\{\partial p/\partial n\}$ sont les vecteurs respectifs de la pression et de sa dérivée normale aux nœuds du maillage. Il s'agit d'un système de NN équations à NN inconnues.

La résolution du système est effectuée par la méthode d'élimination de Gauss avec pivotement partiel [24].

2.3.2 Calcul des intégrales

Les quantités $\underline{r}'$, $d\underline{r}'$, $\underline{n}'$ et N_i on été explicitées dans les paragraphes 2.2.2 et 2.2.3. Il reste à préciser les termes $g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'\right)$ et $\partial g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'\right)/\partial n'$. On note :

$$D_m = \left|\underline{r}_m - \underline{r}'\right| = \sqrt{\left(x_m - x'\right)^2 + \left(y_m - y'\right)^2 + \left(z_m - z'\right)^2} \tag{2.23}$$

La fonction de Green et sa dérivée normale sont :

$$g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikD_m}}{D_m} \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'\right)}{\partial n'} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikD_m}}{{D_m}^2}\left[ik - \frac{1}{D_m}\right]\left(\underline{r}'\left(\xi,\eta\right) - \underline{r}_m\right).\underline{n}'\left(\xi,\eta\right) \tag{2.25}$$

Méthode d'intégration de Gauss-Legendre

Les fonctions à intégrer n'étant pas analytiques, il faut recourir à l'intégration numérique.

La quadrature de Gauss consiste à approcher une intégrale par un développement en série de n points [3] :

$$I = \int_{-1}^{1} f\left(\xi\right) d\xi = \sum_{i=1}^{n} H_i f\left(\xi_i\right) \tag{2.26}$$

$$-1 \leq \xi_i \leq 1 \qquad 0 \leq H_i \leq 2$$

où f joue le rôle de g ou de sa dérivée normale.

Après changement de variables pour se ramener à l'intervalle d'intégration $[-1, 1]$, cette technique permet d'intégrer exactement un polynôme de degré $2n-1$. Les positions et coefficients de pondération H_i intervenant dans les formules de quadrature de Gauss-Legendre sont donnés par des tables et peuvent être calculés numériquement avec beaucoup de précision.

L'extension de la quadrature de Gauss-Legendre aux calculs d'intégrales doubles se fait par l'intermédiaire de la formule [3] :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h\left(u,v\right) dudv = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} U_i V_j h\left(u_i, v_j\right) \tag{2.27}$$

$$-1 \leq u_i, v_j \leq 1 \qquad 0 \leq U_i, V_j \leq 2$$

Les coefficients u_i et v_j sont les points de Gauss suivant les variables u et v, U_i et V_j leurs poids associés.

L'expression générale des intégrales à calculer est :

$$I = \iint_{\Gamma_j} f\left(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)\right) d\xi d\eta \tag{2.28}$$

1er **cas - si** $\underline{r} \notin \Gamma_j$

L'intégrale est dite non diagonale et est calculée directement par la formule de quadrature de Gauss-Legendre (2.27)

Si Γ_j est un quadrangle, l'intégrale se présente, sans étape supplémentaire sous une forme immédiatement exploitable :

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)\right) d\xi d\eta \tag{2.29}$$

Si Γ_j est un triangle, en se reportant aux systèmes de coordonnées réduites du triangle (fig. 2.4), on a :

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{\frac{1-\eta}{2}}^{\frac{\eta-1}{2}} f\left(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)\right) d\xi d\eta \tag{2.30}$$

Il faut transformer cette intégrale pour que la variable ξ prenne ses valeurs entre -1 et 1. Le changement de variable : $u = 2\xi/(1-\eta)$ donne :

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(\underline{r}, \underline{r}'(\xi, \eta)\right) \frac{1-\eta}{2} du d\eta \tag{2.31}$$

2nd **cas - si** $\underline{r} \in \Gamma_j$

L'intégrale est dite diagonale. La fonction à intégrer est singulière en un point. On emploie encore la même technique d'intégration mais avec un découpage adapté de l'élément Γ_j (cf. fig. 2.5 et fig. 2.6).

La dénomination d'intégrales diagonales peut paraître abusive car, en réalité, la seule intégrale qui influence la diagonale des matrices $[A]$ et $[B]$ est celle pour laquelle $\underline{r}$ coïncide avec un des nœuds de la topologie de Γ_j. Toutefois, ces intégrales présentent toutes un point commun, à savoir que la distance D est petite et engendre de grandes variations de la fonction de Green et de sa dérivée normale. Leur calcul réclame donc une attention particulière qui consiste à découper le domaine d'intégration Γ_j en éléments triangulaires, de telle sorte que le sommet commun à ces triangles soit le nœud $\underline{r}$. Sur chacun de ces triangles, la méthode d'intégration est la méthode

de Gauss-Legendre. Pour ce faire et pour augmenter la densité des points de Gauss au voisinage de $\underline{r}$, on procède aux changements de variables adéquats. Cette démarche est inspirée de celles contenues dans les références [25, 26].

Dans le cas d'un quadrangle, une alternative se présente suivante la position de $\underline{r}$:

– si $\underline{r}$ est un sommet, Γ_j est découpé en deux parties (fig. 2.5.a),

– si $\underline{r}$ est le milieu d'un coté, Γ_j est découpé en trois parties (fig. 2.5.b).

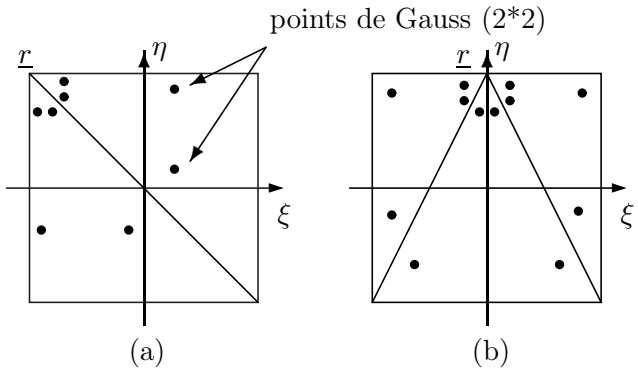


FIG. 2.5: Découpage d'un quadrangle en deux (a) ou trois (b) parties.

Dans le cas d'un triangle, l'élément de surface Γ_j est toujours découpé en deux parties, comme l'indique la figure 2.6.

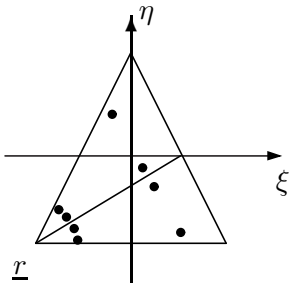


FIG. 2.6: Découpage d'un triangle en deux parties.

Dans tous les cas, la décomposition des intégrales diagonales conduit à des intégrales de la forme :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (1 \pm v)\, f(u,v)\, dudv \tag{2.32}$$

où la singularité de la fonction à intégrer se situe au point $v = \pm 1$. Il faut remarquer que la partie singulière de $f(u,v)$ est contenue dans la fonction de Green ou sa dérivée normale. Le

traitement des intégrales permet de diminuer la singularité de la fonction à intégrer d'un ordre un, par l'intermédiaire du Jacobien introduit dans le changement de variables.

2.3.3 Calcul dans le fluide

À partir de la pression calculée sur Γ (cf. (1.22b)) et des valeurs de $\partial p/\partial n$ données sur Γ, le calcul de la pression dans le fluide est obtenu par l'équation (1.22a).

Après discrétisation, cette équation aboutit au point $\underline{r}_m$ du fluide à :

$$\sum_{j=1}^{NE}\sum_{i=1}^{NNE} p_{ij} \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_i(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) - \sum_{j=1}^{NE}\sum_{i=1}^{NNE} \frac{\partial p_{ij}}{\partial n'} \iint_{\Gamma_j} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_i(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) = p_m \quad (2.33)$$

Écriture locale

On a :

$$p_m = \sum_{j=1}^{NE}\sum_{i=1}^{NNE} a_{m\,ij} p_{ij} - \sum_{j=1}^{NE}\sum_{i=1}^{NNE} b_{m\,ij} \frac{\partial p_{ij}}{\partial n} \quad (2.34)$$

où :

$$a_{m\,ij} = \iint_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_i(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) \quad (2.35)$$

$$b_{m\,ij} = \iint_{\Gamma_j} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_i(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) \quad (2.36)$$

Écriture globale

On a :

$$p_m = \sum_{\epsilon=1}^{NN} a_{m\,\epsilon} p_\epsilon - \sum_{\epsilon=1}^{NN} b_{m\,\epsilon} \frac{\partial p_\epsilon}{\partial n} \quad (2.37)$$

où :

$$a_{m\,\epsilon} = \sum_{s(\epsilon)} \iint_{\Gamma_{s(\epsilon)}} \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_{p(s(\epsilon))}(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) \quad (2.38)$$

$$b_{m\,\epsilon} = \sum_{s(\epsilon)} \iint_{\Gamma_{s(\epsilon)}} g\left(\underline{r}_m, \underline{r}'(\xi,\eta)\right) N_{p(s(\epsilon))}(\xi,\eta)\, d\underline{r}'(\xi,\eta) \quad (2.39)$$

Les intégrales sont calculées de la même façon qu'au paragraphe 2.3.2 par la méthode de Gauss-Legendre, sans le problème des intégrales diagonales. La pression est ainsi obtenue au point $\underline{r}_m$ du fluide.

2.4 Prise en compte des symétries

2.4.1 Propriétés induites par les symétries

En général, les problèmes étudiés présentent des symétries. Le terme symétrie est ici employé au sens large puisqu'il recouvre aussi bien les symétries que les antisymétries de la géométrie et du chargement. Les symétries prévues sont des symétries par rapport à un, deux ou trois plans orthogonaux. En ce qui concerne le système d'équations discrétisées (cf. équation (2.22)), les éléments de $[A]$ et $[B]$ étant notés A_{ij} et B_{ij}, on a :

$$A_{ij} = A_{s(i)s(j)} \tag{2.40}$$

$$B_{ij} = B_{s(i)s(j)} \tag{2.41}$$

où s est une symétrie orthogonale par rapport à un plan et $s\,(i)$ le numéro du nœud symétrique du nœud i dans l'opération s. Cette propriété peut se démontrer facilement en considérant l'expression des quantités A_{ij} et B_{ij} et en remarquant que, s étant une isométrie, elle conserve les distances et le produit scalaire. Cette réduction diminue considérablement les temps d'assemblage et de résolution de la méthode.

2.4.2 Principe de réduction du problème

Les symétries et/ou antisymétries permettent de restreindre la taille des problèmes aux valeurs propres au nombre de nœuds de la partie maillée (partie génératrice) de la structure qui, après symétrisation, permet de reconstituer la totalité de la surface du corps.

Il est suffisant de ne détailler que le traitement particulier de $[A]$, car celui de $[B]$ est identique. Le système peut s'écrire [27] :

$$\left[A'\right]\{p\} = \{b\} \tag{2.42}$$

où les coefficients de $[A']$ sont réduits aux nœuds de la partie génératrice. Trois cas sont distingués, suivant que les symétries et/ou antisymétries s'appliquent par rapport à un, deux ou trois plans orthogonaux. Ces plans sont XOY, XOZ et YOZ où O est l'origine du repère cartésien global.

1er cas : un plan de symétrie ou d'antisymétrie.

Partie génératrice : une moitié de la surface de la structure.

Domaines particuliers :

- D_1 : ensemble des nœuds invariants par s (i.e contenus dans le plan de symétrie ou d'antisymétrie),

- D_2 : ensemble des nœuds non invariants par s.

Si s est une symétrie :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 2A_{ij} & i \in D_1 \\ A_{ij} + A_{s(i)j} & i \in D_2 \end{cases} \tag{2.43}$$

Si s est une antisymétrie :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 0 & i \in D_1 \\ A_{ij} - A_{s(i)j} & i \in D_2 \end{cases} \tag{2.44}$$

2ème cas : deux plans de symétrie et/ou d'antisymétrie.

Partie génératrice : un quart de la surface de la structure.

Domaines particuliers :

- D_1 : ensemble des nœuds invariants par s_1 et s_2,
- D_2 : ensemble des nœuds invariants seulement par s_1,
- D_3 : ensemble des nœuds invariants seulement par s_2,
- D_4 : ensemble des nœuds non invariants par s_1 et s_2.

Si s_1 et s_2 sont deux symétries :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 4A_{ij} & i \in D_1 \\ 2\left(A_{ij} + A_{s_2(i)j}\right) & i \in D_2 \\ 2\left(A_{ij} + A_{s_1(i)j}\right) & i \in D_3 \\ A_{ij} + A_{s_1(i)j} + A_{s_2(i)j} + A_{s_1 0 s_2(i)j} & i \in D_4 \end{cases} \tag{2.45}$$

où $s_1 0 s_2\,(i)$ représente la composition des deux opérateurs s_1 et s_2 appliqués au nœud i.

Si s_1 est une symétrie et s_2 une antisymétrie :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 0 & i \in D_1 \cup D_3 \\ 2\left(A_{ij} + A_{s_2(i)j}\right) & i \in D_2 \\ A_{ij} + A_{s_1(i)j} - A_{s_2(i)j} - A_{s_1 0 s_2(i)j} & i \in D_4 \end{cases} \tag{2.46}$$

Le cas où s_1 est une antisymétrie et s_2 une symétrie se traite de façon analogue.

Si s_1 et s_2 sont deux antisymétries :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 0 & i \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \\ A_{ij} - A_{s_1(i)j} - A_{s_2(i)j} - A_{s_1 0 s_2(i)j} & i \in D_4 \end{cases} \tag{2.47}$$

3ème cas : trois plans de symétrie et/ou d'antisymétrie.

Partie génératrice : un huitième de la surface de la structure.

Domaines particuliers :

- D_1 : ensemble des nœuds invariants par s_1 et s_2,
- D_2 : ensemble des nœuds invariants par s_1 et s_3,
- D_3 : ensemble des nœuds invariants par s_2 et s_3,
- D_4 : ensemble des nœuds invariants seulement par s_1,
- D_5 : ensemble des nœuds invariants seulement par s_2,
- D_6 : ensemble des nœuds invariants seulement par s_3,
- D_7 : ensemble des nœuds non invariants.

Si s_1, s_2 et s_3 sont trois symétries :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 4\left(A_{ij} + A_{s_3(i)j}\right) & i \in D_1 \\ 4\left(A_{ij} + A_{s_2(i)j}\right) & i \in D_2 \\ 4\left(A_{ij} + A_{s_1(i)j}\right) & i \in D_3 \\ 2\left(A_{ij} + A_{s_2(i)j} + A_{s_3(i)j} + A_{s_2 0 s_3(i)j}\right) & i \in D_4 \\ 2\left(A_{ij} + A_{s_1(i)j} + A_{s_3(i)j} + A_{s_1 0 s_3(i)j}\right) & i \in D_5 \\ 2\left(A_{ij} + A_{s_1(i)j} + A_{s_2(i)j} + A_{s_1 0 s_2(i)j}\right) & i \in D_6 \\ A_{ij} + A_{s_1(i)j} + A_{s_2(i)j} + A_{s_3(i)j} + A_{s_1 0 s_2(i)j} & \\ + A_{s_1 0 s_3(i)j} + A_{s_2 0 s_3(i)j} + A_{s_1 0 s_2 0 s_3(i)j} & i \in D_7 \end{cases} \tag{2.48}$$

Si s_1 et s_2 sont deux symétries et s_3 une antisymétrie :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 0 & i \in D_2 \cup D_3 \cup D_6 \\ 4\left(A_{ij} - A_{s_3(i)j}\right) & i \in D_1 \\ 2\left(A_{ij} + A_{s_2(i)j} - A_{s_3(i)j} - A_{s_2 0 s_3(i)j}\right) & i \in D_4 \\ 2\left(A_{ij} + A_{s_1(i)j} - A_{s_3(i)j} - A_{s_1 0 s_3(i)j}\right) & i \in D_5 \\ A_{ij} + A_{s_1(i)j} + A_{s_2(i)j} - A_{s_3(i)j} + A_{s_1 0 s_2(i)j} & \\ - A_{s_1 0 s_3(i)j} - A_{s_2 0 s_3(i)j} - A_{s_1 0 s_2 0 s_3(i)j} & i \in D_7 \end{cases} \tag{2.49}$$

Si s_1 est une symétrie et s_2 et s_3 deux antisymétries :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 0 & i \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_5 \cup D_6 \\ 2\left(A_{ij} - A_{s_2(i)j} - A_{s_3(i)j} + A_{s_2 0 s_3(i)j}\right) & i \in D_4 \\ A_{ij} + A_{s_1(i)j} - A_{s_2(i)j} - A_{s_3(i)j} - A_{s_1 0 s_2(i)j} & \\ -A_{s_1 0 s_3(i)j} + A_{s_2 0 s_3(i)j} - A_{s_1 0 s_2 0 s_3(i)j} & i \in D_7 \end{cases} \tag{2.50}$$

Si s_1, s_2 et s_3 sont trois antisymétries :

$$A'_{ij} = \begin{cases} 0 & i \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6 \\ A_{ij} - A_{s_1(i)j} - A_{s_2(i)j} - A_{s_3(i)j} + A_{s_1 0 s_2(i)j} & \\ +A_{s_1 0 s_3(i)j} + A_{s_2 0 s_3(i)j} - A_{s_1 0 s_2 0 s_3(i)j} & i \in D_7 \end{cases} \tag{2.51}$$

2.5 Conclusions

Ce chapitre présente le traitement numérique des équations du problème intérieur présenté dans le premier chapitre. La numérisation de ces équations est effectuée dans le cas du problème tridimensionnel et avec la prise en compte d'éventuelles symétries planes.

Les outils de discrétisation donnés permettent l'obtention d'un système linéaire d'équations dont la résolution aboutit à la détermination des pressions nodales, puis de la pression dans le fluide.

Chapitre 3

Analyse aux fréquences propres

3.1 Introduction

Les principales nuisances acoustiques dans une cavité sont localisées vers les basses fréquences. À ces fréquences, une cavité produit des résonances qui provoquent une gêne importante [4]. Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps la notion de fréquences propres et leur calcul analytique dans le cas simple d'une cavité rectangulaire ou sphérique. Ensuite, nous appliquons la méthode intégrale à ce problème, conduisant à la résolution d'un problème aux valeurs propres. Les principales formulations de ce problème sont alors exposées ainsi que leurs forces et faiblesses respectives. Enfin, la formulation retenue et développée lors de cette thèse, à savoir la méthode de l'intégrale particulière, est décrite.

3.2 Fréquences propres d'une structure

3.2.1 Approche analytique

Le champ acoustique dans la cavité étudiée doit satisfaire à certaines conditions aux limites, dans l'espace et le temps. On peut aussi montrer que le système d'équations composé de l'équation de Helmholtz homogène et des conditions aux frontières admet une suite infinie de valeurs pour lesquelles le système donne des solutions non nulles [2]. Ces résultats sont généraux : les valeurs k_n^2 de la constante k^2 forment une suite infinie et sont appelées valeurs propres, et les solutions ψ_n correspondantes sont appelées fonctions propres.

On donne maintenant les valeurs et fonctions propres pour un parallélépipède rectangle et une sphère soumis à des conditions aux limites de type Neumann.

Parallélépipède rectangle

La résolution de l'équation des ondes permettant l'obtention des valeurs propres k et de l'amplitude de pression correspondante p au point (x, y, z) est donnée dans l'annexe D.

$$k = \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} \tag{3.1}$$

$$p\,(x, y, z) = p_0 \cos x \frac{n_x \pi}{L_x} \cos y \frac{n_y \pi}{L_y} \cos z \frac{n_z \pi}{L_z} \tag{3.2}$$

avec L_x, L_y et L_z les longueurs des arêtes du parallélépipède, (n_x, n_y, n_z) un triplet d'entiers et p_0 une constante.

Sphère

Pour une condition de Neumann sur la surface de la sphère, les amplitudes de pressions sont données par [2] :

$$p_{m\,ns}\,(r, \theta, \varphi) = (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)\, P_n^m\,(\cos\theta)\, j_n\,(\pi \alpha_{ns} r/a) \tag{3.3}$$

où a est le rayon de la sphère et avec j_n la fonction de Bessel de 1re espèce d'ordre n et P_n^m la fonction de Legendre de 1re espèce, de degré n et d'ordre m.

Les valeurs propres correspondantes k_{ns} sont :

$$k_{ns} = \frac{\pi \alpha_{ns}}{a} \tag{3.4}$$

où α_{ns} est la s-ième racine de l'équation :

$$\frac{d\, j_n\,(\pi\alpha)}{d\,\alpha} = 0 \tag{3.5}$$

Remarque

Le calcul analytique permet une description fine du champ acoustique dans une cavité mais se heurte à de sérieuses difficultés de calcul dès que l'on introduit l'absorption des parois, ou que l'on s'écarte d'une simple géométrie rectangulaire[4]. Néanmoins, à chaque fois que l'on peut trouver un système de coordonnées compatible avec les conditions aux limites et dans lequel l'équation aux dérivées partielles de Helmholtz est séparable, des techniques de développement des solutions sur la base des fonctions propres sont efficaces mais restent mal appropriées à de nombreux problèmes.

[4]Dans les cavités à symétrie cylindrique ou sphérique, les fonctions propres s'expriment au moyen des fonctions trigonométriques, des fonctions de Bessel et des polynômes de Legendre

3.3 Fréquences de résonances d'une cavité par méthodes intégrales

L'objet de cette section est de présenter les principales méthodes intégrales mises au point depuis le début des années 80 pour répondre au problème de l'analyse aux valeurs propres des cavités acoustiques. Après avoir rappelé le problème à résoudre, les formulations susceptibles de le résoudre sont exposées, ainsi que leurs avantages et inconvénients.

3.3.1 Principe

Le problème de propagation d'onde harmonique en terme d'amplitude de pression est gouverné par l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \tag{3.6}$$

Considérant la cavité acoustique définie précédemment (cf. fig. 1.1), le cas d'une structure vibrant en régime harmonique, en contact avec un fluide, est considéré. Le problème aux valeurs propres correspondant consiste à déterminer des fréquences ω (ou nombres d'onde k) propres de la structure ainsi que des variations caractéristiques de pression de la cavité (vecteurs propres).

Parmi les méthodes de résolution se trouvent la méthode du déterminant [28], la méthode des cellules internes [29], la méthode de double réciprocité [30], la méthode de réciprocité multiple [31] et la méthode d'expansion en séries [32].

3.3.2 Méthode du déterminant

La représentation intégrale de Helmholtz intérieure a été définie dans le paragraphe 1.3.2. Après changement de notation, l'équation (2.22) peut être réécrite de la façon suivante :

$$[H(k)]\{p\} = [G(k)]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} \tag{3.7}$$

Suivant les conditions aux frontières, l'équation (3.7) devient :

$$\text{Neumann :} \quad [H(k)]\{p\} = 0 \tag{3.8}$$

$$\text{Dirichlet :} [G(k)]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} = 0 \tag{3.9}$$

$$\text{Mixte homogène :} ([H(k)][ba] - [G(k)])\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} = 0 \tag{3.10}$$

où $[ba]$ est la matrice diagonale de termes $\frac{b(\underline{r}_i)}{a(\underline{r}_i)}$ (cf. eq. (1.6)). L'équation (3.7) peut donc s'écrire dans un cadre général :

$$[A(k)]\{x\} = 0 \tag{3.11}$$

La matrice $[A(k)]$ contient implicitement le paramètre en fréquence k qui ne peut pas être factorisé à l'extérieur de A. Cette formulation empêche l'écriture d'un problème aux valeurs propres standard ou généralisé [33]. Une méthode telle que la méthode du déterminant peut être alors utilisée pour déterminer les solutions de l'équation (3.11), et jusqu'au début des années 80, elle fut la seule. Cette technique a été appliquée aussi bien à l'équation de Helmholtz qu'aux équations d'élasticité [34]. Elle aboutit à l'obtention d'un déterminant complexe.

La méthode du déterminant est sérieusement limitée par deux inconvénients :

- la matrice A doit être formée successivement pour une plage de fréquence déterminée, amenant un temps de calcul prohibitif ;
- pour des fréquences de résonances très proches, la méthode ne permet pas de les distinguer.

Malgré sa simplicité de mise en œuvre, cette méthode ne doit être appliquée que si aucune autre alternative n'est possible.

3.3.3 Méthode des cellules internes

Cette méthode a été appliquée dans un premier temps aux problèmes de vibration de plaques pour en extraire un problème aux valeurs propres algébrique. Elle consiste à proposer une autre représentation intégrale (cf. équation (3.12) avec une autre fonction de Green. Cette nouvelle représentation permet d'extraire le nombre d'onde et de le localiser à l'extérieur de l'intégrale [29].

$$\alpha p\left(\underline{r}\right) + \iint_{\Gamma} \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} p\left(\underline{r}'\right)\right] d\underline{r}' + k^2 \iiint_{\Omega} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) p\left(\underline{r}'\right) d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

La solution fondamentale $g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right)$ utilisée est la fonction de Green en champ libre de l'équation de Laplace et non plus de l'équation de Helmholtz :

$$g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) = \frac{1}{4\pi \left|\underline{r} - \underline{r}'\right|} \quad (3.13)$$

Elle est indépendante de k. Après discrétisation, l'équation (3.12) se présente sous la forme :

$$[G]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - [H]\{p\} = k^2 \iiint_{\Omega} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) p\left(\underline{r}'\right) d\Omega \quad (3.14)$$

Bezine [29] a divisé le domaine fluide Ω en cellules internes. Puis, en plus de discrétiser la frontière, il a utilisé des fonctions de forme pour interpoler la pression dans le membre de droite de l'équation (3.14) et pour intégrer la solution fondamentale et ces fonctions de forme dans les cellules et ainsi obtenir une matrice additionnelle. Après l'application des conditions aux frontières appropriées, les matrices peuvent être écrites sous forme d'un problème aux valeurs propres algébrique. Cette procédure, basée sur la discrétisation de la frontière et du domaine fluide, est connue sous le nom de méthode des cellules internes.

3.3.4 Méthode de double réciprocité

La méthode de double réciprocité se calque sur celle des cellules internes. On peut en effet observer que le terme droit de l'équation (3.14) contenant le domaine intégral peut être converti en intégrales de frontières. Ainsi, une formulation ne contenant que des discrétisations sur la frontière permet d'obtenir facilement un problème aux valeurs propres algébrique. Cette procédure fut pour la première fois utilisée sur un problème d'élasticité [30]. En effet, Nardini et Brebbia montrèrent ainsi que si une fonction ϕ vérifie

$$\nabla^2 \phi = p\left(\underline{r}\right) \tag{3.15}$$

dans le domaine, alors le membre de droite de l'équation (3.14) se réécrit en intégrales surfaciques avec l'aide du théorème de divergence de Gauss. Nous obtenons ainsi :

$$[G]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - [H]\{p\} = k^2\left([G]\left\{\frac{\partial \phi}{\partial n}\right\} - [H]\{\phi\}\right) \tag{3.16}$$

Le théorème de divergence étant finalement appliqué deux fois, cette méthode a plus tard reçu le nom de « méthode de double réciprocité » [35]. La fonction ϕ, inconnue et contenue dans le terme d'inertie (en facteur de k^2) de l'équation (3.16), est liée à l'amplitude de pression par l'équation différentielle (3.15). Nardini et Brebbia proposèrent alors une approximation de la variable inconnue, p ici, par une fonction de forme globale :

$$p\left(\underline{r}'\right) = \sum_{m=1}^{\infty} C\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) \Phi\left(\underline{r}^m\right) \tag{3.17}$$

où $\underline{r}'$ est un point du domaine, $\underline{r}^m$ une source placée sur un point m de la surface et Φ une fonction de densité fictive située en $\underline{r}^m$. La fonction de forme communément utilisée est définie par :

$$C\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) = R - r\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) \tag{3.18}$$

avec R la plus grande distance entre deux points de la structure. Avec les valeurs de p données par (3.17), l'équation différentielle (3.15) peut s'intégrer pour donner :

$$\phi\left(\underline{r}'\right) = -\sum_{m=1}^{\infty} D\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) \Phi\left(\underline{r}^m\right) \tag{3.19}$$

où

$$D\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) = \frac{r^3\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right)}{12} - \frac{R r^2\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right)}{6} \tag{3.20}$$

Les dérivées normales $\partial\phi/\partial n$ à $\underline{r}'$ peuvent être calculées à partir de (3.19) :

$$\frac{\partial \phi\left(\underline{r}'\right)}{\partial n} = -\sum_{m=1}^{\infty} T\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) \Phi\left(\underline{r}^m\right) \tag{3.21}$$

où

$$T\left(\underline{r}',\underline{r}^m\right)=\left[\frac{r\left(\underline{r}',\underline{r}^m\right)}{4}-\frac{R}{3}\right].\left(\underline{r}'-\underline{r}^m\right).\underline{n} \tag{3.22}$$

Les solutions pour ϕ et $\partial\phi/\partial n$ peuvent alors être substituées dans l'équation (3.16) :

$$[G]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\}-[H]\{p\}=k^2\left([G][T]-[H][D]\right)\{\Phi\} \tag{3.23}$$

En exprimant l'équation (3.17) sous forme matricielle :

$$\{p\}=[C]\{\Phi\} \tag{3.24}$$

on obtient l'expression des sources fictives :

$$\{\Phi\}=[C]^{-1}\{p\} \tag{3.25}$$

En utilisant ces valeurs de $\{\Phi\}$ dans (3.23) :

$$[G]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\}-[H]\{p\}=k^2[M]\{p\} \tag{3.26}$$

avec

$$[M]=\left([G][T]-[H][D]\right)[C]^{-1} \tag{3.27}$$

Après application des conditions aux frontières, l'équation (3.26) peut être écrite sous la forme d'un problème aux valeurs propres général :

$$[A]\{x\}=k^2[B]\{x\} \tag{3.28}$$

Cette méthode possède un avantage majeur par rapport à la méthode du déterminant : les matrices $[A]$ et $[B]$, étant indépendantes de la fréquence, ne sont formées qu'une seule fois. Cependant, ces matrices étant denses et non-symétriques, la résolution du problème aux valeurs propres nécessite l'emploi d'algorithmes adaptés. De plus, et à l'inverse des problèmes originaux d'élasticité, cette méthode peut être accompagnée d'une technique de zonage ou par l'introduction de points internes de collocation.

3.3.5 Méthode de réciprocité multiple

Proposée par Nowak et Brebbia [31], la méthode de réciprocité multiple propose d'appliquer le théorème de divergence de Gauss en utilisant des fonctions de Green d'ordre croissant [36], jusqu'à pouvoir négliger les termes de l'intégrale. Ainsi, appliquée à l'équation d'Helmholtz (3.6), l'équation intégrale devient :

$$\alpha p\left(\underline{r}\right)+\sum_{i=1}^{m}\left(-k^2\right)\iint_{\Gamma}p\left(\underline{r}'\right)\left(\frac{\partial}{\partial n'}g\left(\underline{r}',\underline{r}\right)\right)_i d\Gamma\left(\underline{r}'\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(-k^2\right)\iint_{\Gamma}g_i\left(\underline{r}',\underline{r}\right)\frac{\partial}{\partial n'}p\left(\underline{r}'\right)d\Gamma\left(\underline{r}'\right) \tag{3.29}$$

où $g_i\left(\underline{r},\underline{r}'\right)$ sont les fonctions de Green, solutions de l'équation de Laplace à l'ordre i, données par :

$$g_i\left(\underline{r}',\underline{r}\right) = \frac{1}{4\pi\left|\underline{r}'-\underline{r}\right|}\frac{1}{(2i)!}\left|\underline{r}'-\underline{r}\right|^{2i} \tag{3.30}$$

En discrétisant la surface Γ et en intégrant sur les éléments, l'équation (3.29) peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\left[\sum_{i=1}^{m}\left(-k^2\right)^i\left[H_i\right]\right]\{p\} = \left[\sum_{i=1}^{m}\left(-k^2\right)^i\left[G_i\right]\right]\left\{\frac{\partial}{\partial n}p\right\} \tag{3.31}$$

En appliquant les conditions aux frontières dans l'équation (3.31) on obtient :

$$\left[A\left(k\right)\right]\{x\} = \{0\} \tag{3.32}$$

où

$$\left[A\left(k\right)\right] = \left[A_0\right] + k^2\left[A_1\right] + k^4\left[A_2\right] + \ldots + k^{2m}\left[A_m\right] \tag{3.33}$$

Le système d'équations (3.32) peut être alors résolu [37] via une méthode itérative de type Newton-Raphson avec une décomposition LU. Les matrices $A_0 \ldots A_m$ sont indépendantes du paramètre en fréquence k et ne sont calculées qu'une fois. Contrairement à la méthode de double réciprocité, cette technique ne nécessite pas l'utilisation d'une technique auxiliaire pour évaluer efficacement les fréquences de résonance. Cependant, cette méthode nécessitant l'estimation initiale de la fréquence de départ dans le processus d'itération, elle n'est pas adaptée à l'étude des cas pratiques tel un habitacle automobile. La technique de Newton-Raphson peut en fait être considérée comme une méthode du déterminant améliorée et rend donc la méthode de réciprocité multiple non applicable à tout type de problème.

Une alternative existe et consiste à écrire le système d'équations (3.32) sous la forme d'un problème aux valeurs propres général :

$$\left[\overline{A}\right]\{X\} = k\left[\overline{B}\right]\{X\} \tag{3.34}$$

avec

$$\left[\overline{A}\right] = \begin{bmatrix} [A_{m-1}] & [A_{m-2}] & \dots & [A_1] & [A_0] \\ [I] & \ddots & & [0] & [0] \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & [0] & [I] & [0] \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

$$\left[\overline{B}\right] = \begin{bmatrix} [A_m] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [I] & \dots & [0] \\ & & \ddots & \vdots \\ & & [0] & [I] \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$\{X\} = \{\{X_{m-1}\}\ \{X_{m-1}\}\ \dots\ \{X_{m-1}\}\}^T \tag{3.37}$$

Maintenant, le problème peut se résoudre en utilisant des solveurs adaptés, mais l'ordre des matrices étant augmenté, la relative simplicité de cette formulation est à mettre en balance avec des temps de calculs et des coûts de mémoire de stockage prohibitifs. Ainsi, la procédure d'augmentation des matrices rend caduque le principal avantage d'une discrétisation en éléments de surface. De plus, l'apparition de valeurs propres fictives dans certains cas limite fortement l'intérêt de cette méthode sur des problèmes pratiques.

3.3.6 Méthode d'expansion en séries

À partir de l'équation (3.11), Kirkup et Amini [32] développe la matrice $[A(k)]$ suivant une série en k :

$$\left([A_0(k)] + k^2 [A_1(k)] + \ldots + k^{2m} [A_m(k)]\right) \{x\} = \{0\} \tag{3.38}$$

Kamiya *et al.* [38] ont montré que la partie réelle de cette équation est équivalente à l'équation (3.32). Cette méthode peut donc s'écrire sous forme d'un problème aux valeurs propres général mais présente les mêmes désavantages que la méthode de réciprocité multiple.

3.4 Méthode de l'intégrale particulière

Ahmad et Banerjee [6] ont employé l'approche utilisée par la double réciprocité pour résoudre un problème d'élasticité par une nouvelle méthode dite « de l'intégrale particulière ». Ils ont appliqué cette nouvelle méthode à l'acoustique [39] et formulé un problème aux valeurs propres général.

3.4.1 Équations de l'intégrale particulière

Dans cette méthode, l'amplitude de pression est décomposée en deux fonctions :

- une fonction complémentaire,
- une fonction particulière.

Ainsi :

$$p = p^i + p^c \tag{3.39}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p^i}{\partial n} + \frac{\partial p^c}{\partial n} \tag{3.40}$$

La pression complémentaire satisfait la partie homogène de l'équation de Helmholtz (3.6) :

$$\Delta p^c = 0 \tag{3.41}$$

La solution particulière p^i vérifie donc :

$$\Delta p^i + k^2 p = 0 \tag{3.42}$$

La formulation intégrale pour l'équation (3.41) donne :

$$\alpha p^c\left(\underline{r}\right) + \iint_\Gamma p^c\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}', \underline{r}\right) d\Gamma\left(\underline{r}'\right) = \iint_\Gamma g\left(\underline{r}', \underline{r}\right) \frac{\partial}{\partial n} p^c\left(\underline{r}'\right) d\Gamma\left(\underline{r}'\right) \tag{3.43}$$

avec la fonction de Green solution de l'équation de Laplace (3.41) :

$$g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) = \frac{1}{4\pi D} \tag{3.44}$$

où $D = |\underline{r} - \underline{r}'|$. La fonction complémentaire et sa dérivée sont éliminées de l'équation (3.43) par les équations (3.39) et (3.40) :

$$\begin{aligned} \alpha p\left(\underline{r}\right) + \iint_\Gamma p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}', \underline{r}\right) d\Gamma\left(\underline{r}'\right) - \iint_\Gamma g\left(\underline{r}', \underline{r}\right) \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}'\right) d\Gamma\left(\underline{r}'\right) = \\ \alpha p^i\left(\underline{r}\right) + \iint_\Gamma p^i\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}', \underline{r}\right) d\Gamma\left(\underline{r}'\right) - \iint_\Gamma g\left(\underline{r}', \underline{r}\right) \frac{\partial}{\partial n} p^i\left(\underline{r}'\right) d\Gamma\left(\underline{r}'\right) \end{aligned} \tag{3.45}$$

3.4.2 Discrétisation

En utilisant les outils de discrétisation définis dans le paragraphe 2.2.2, l'équation (3.45) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[G]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - [H]\{p\} = [G]\left\{\frac{\partial p^i}{\partial n}\right\} - [H]\left\{p^i\right\} \tag{3.46}$$

En utilisant les approximations de l'amplitude de pression p (Eq. (3.17) et (3.18)) dans l'équation (3.42), la fonction particulière p^i et sa dérivée normale $\partial p^i/\partial n$ sont calculées :

$$p^i\left(\underline{r}'\right) = k^2 \sum_{m=1}^{\infty} D\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) \Phi\left(\underline{r}^m\right) \tag{3.47}$$

où

$$D\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) = \frac{r^3\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right)}{12} - \frac{Rr^2\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right)}{6} \tag{3.48}$$

avec

$$\frac{\partial p^i\left(\underline{r}'\right)}{\partial n} = k^2 \sum_{m=1}^{\infty} T\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) \Phi\left(\underline{r}^m\right) \tag{3.49}$$

et

$$T\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right) = \left[\frac{r\left(\underline{r}', \underline{r}^m\right)}{4} - \frac{R}{3}\right] . \left(\underline{r}' - \underline{r}^m\right) . \underline{n} \tag{3.50}$$

La substitution de ces solutions particulières dans l'équation (3.46) donne :

$$[G]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - [H]\{p\} = k^2\left([G][T] - [H][D]\right)\{\Phi\} \tag{3.51}$$

ou, avec l'équation (3.25) :

$$[G]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} - [H]\{p\} = k^2\left([G][T] - [H][D]\right)[C]^{-1}\{p\} \tag{3.52}$$

A l'instar de l'équation (3.23), la méthode de l'intégrale particulière bénéficie des mêmes avantages et souffre des mêmes inconvénients que ceux de la méthode de double réciprocité. Cependant, des améliorations peuvent être faites sur plusieurs points.

3.4.3 Méthode de la fonction fictive

Numériquement, une inversion matricielle est une opération très pénalisante. Au delà du bon conditionnement de la matrice nécessaire pour une telle opération, les coûts informatiques sont importants pour des systèmes fortement discrétisés. Ali *et al.* [40] ont montré que le problème aux valeurs propres acoustique (en particulier dans le cas des frontières rigides) peut être formulé en terme de fonctions fictives Φ plutôt que p, évitant ainsi l'inversion de la matrice $[C]$ dans l'équation (3.52).

Cas de Neumann

Quand les frontières de la structure sont rigides, $\partial p/\partial n = 0$ pour tous les nœuds du domaine. L'équation (3.52) s'écrit alors :

$$-[H]\{p\} = k^2\left([G][T] - [H][D]\right)[C]^{-1}\{p\} \tag{3.53}$$

et, en remplaçant les deux termes en pression par l'équation (3.17) :

$$-[H][C]\{\Phi\} = k^2([G][T] - [H][D])\{\Phi\} \tag{3.54}$$

En définissant $[A] = -[H][C]$ et $[B] = ([G][T] - [H][D])$, l'équation (3.54) devient :

$$[A]\{\Phi\} = k^2[B]\{\Phi\} \tag{3.55}$$

Le passage de $\{p\}$ à $\{\Phi\}$ n'altère pas les valeurs propres du système.

Cas Mixte

Ici, $p = 0$ et $\partial p/\partial n \neq 0$ sur Γ_1 et $p \neq 0$ et $\partial p/\partial n = 0$ sur Γ_2. L'équation (3.52) peut s'écrire à l'aide de sous-matrices :

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = k^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \tag{3.56}$$

avec

$$[M] = ([G][T] - [H][D])[C]^{-1} \tag{3.57}$$

et

$$p(\Gamma_1) = p_1 \qquad\qquad p(\Gamma_2) = p_2$$
$$\frac{\partial p(\Gamma_1)}{\partial n} = u_1 \qquad\qquad \frac{\partial p(\Gamma_2)}{\partial n} = u_2$$

En prenant en compte que $p_1 = 0$ et $\partial p_2/\partial n = 0$:

$$[G_{11}]\{u_1\} - [H_{12}]\{p_2\} = k^2[M_{12}]\{p_2\} \tag{3.58}$$

$$[G_{21}]\{u_1\} - [H_{22}]\{p_2\} = k^2[M_{22}]\{p_2\} \tag{3.59}$$

De ces deux systèmes d'équations, u_1 est éliminé :

$$-\left[\hat{H}\right]\{p_2\} = k^2\left[\hat{M}\right]\{p_2\} \tag{3.60}$$

où :

$$\left[\hat{H}\right] = [H_{22}] - [G_{21}][G_{11}]^{-1}[H_{12}] \tag{3.61}$$

$$\left[\hat{M}\right] = [M_{22}] - [G_{21}][G_{11}]^{-1}[M_{12}] \tag{3.62}$$

3.4.4 Introduction de points internes

Reprenant l'idée de Ali *et al.* [40] recommandant l'utilisation de points de collocations supplémentaires à l'intérieur de la cavité, une amélioration de l'analyse modale peut être envisagée. Pour incorporer ces « points internes » dans la méthode de l'intégrale particulière avec une condition de frontière de type Neumann, l'équation (3.54) est remplacée par :

$$-\left[\overline{H}\right]\left[\overline{C}\right]\left\{\overline{\Phi}\right\} = k^2\left(\left[\overline{G}\right]\left[\overline{T}\right]-\left[\overline{H}\right]\left[\overline{D}\right]\right)\left\{\overline{\Phi}\right\} \tag{3.63}$$

où

$$\left[\overline{H}\right]=\begin{bmatrix}[H] & [0]\\ [\hat{H}] & [I]\end{bmatrix},\quad \left[\overline{G}\right]=\begin{bmatrix}[G]\\ [\hat{G}]\end{bmatrix},\quad \left\{\overline{\Phi}\right\}=\begin{bmatrix}\{\Phi\}\\ \{\hat{\Phi}\}\end{bmatrix}$$

$\left\{\hat{\Phi}\right\}$ sont les fonctions fictives additionnelles pour les points internes ; $\left[\overline{C}\right]$, $\left[\overline{D}\right]$ et $\left[\overline{T}\right]$ sont les matrices augmentées contenant les coefficients des points internes ainsi que ceux des nœuds de frontière. $\left[\hat{G}\right]$ et $\left[\hat{H}\right]$ sont reliées par :

$$[I]\left\{\hat{p}\right\} + \left[\hat{H}\right]\{p\} = \left[\hat{G}\right]\left\{\frac{\partial p}{\partial n}\right\} \tag{3.64}$$

$[I]$ est la matrice identité d'ordre égal au nombre de points internes.

3.4.5 Prise en compte de l'absorption

Le modèle de Rakajumar et Ali

Rakajumar et Ali [41] ont pour la première fois introduit la prise en compte d'une absorption aux frontières de la cavité dans la méthode de l'intégrale particulière. L'approche employée est de considérer l'équation reliant le gradient de pression du fluide et sa vitesse à la frontière :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho\frac{\partial \underline{V}}{\partial t}.\underline{n} \tag{3.65}$$

Pour prendre en compte l'énergie dissipée, un terme d'absorption est introduit dans l'équation (3.65) :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho\frac{\partial \underline{V}}{\partial t}.\underline{n} + R\,\mathrm{div}\,\underline{V} \tag{3.66}$$

où R est un terme de résistivité acoustique en rayl ($\mathrm{N\,s/m^3}$), telle que définie par Craggs [42], fonction de la fréquence. Comme le terme de divergence de la vitesse représente le débit du fluide traversant un volume élémentaire, le terme $R\,\mathrm{div}\,\underline{V}$ de l'équation (3.66) peut être considéré comme une force due à l'écoulement à travers une couche de mousse, ou de matériaux de type fibreux, disposés sur la frontière. En outre, Zienkiewicz et Newton [43] ont établi la relation $\partial P/\partial n = -\left(1/c\right)\partial P/\partial t$ pour prendre en compte la déperdition d'énergie due au saut de pression

sur une frontière ouverte. Comme $\partial P/\partial t$ est relié à $\operatorname{div} \underline{V}$ par l'équation de la conservation de la masse

$$\operatorname{div} \underline{V} = -\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial P}{\partial t} \tag{3.67}$$

d'un fluide compressible, le terme d'absorption proposé dans l'équation (3.66) est judicieux. Ainsi, en substituant l'expression de $\operatorname{div} \underline{V}$ de l'équation (3.67) dans (3.66), le gradient de pression sur la frontière absorbante s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \frac{\partial \underline{V}}{\partial t}.\underline{n} - \beta\left(\frac{1}{c}\frac{\partial P}{\partial t}\right) \tag{3.68}$$

$\beta = R/\rho c$ est le coefficient d'absorption, réel et sans unité, du matériau absorbant.

Pour des oscillations harmoniques, les pression et vitesse de frontière de l'équation (3.68) s'écrivent : $P = p\,e^{-j\omega t}$ et $V = v\,e^{-j\omega t}$. Rakajumar *et al.* estiment de plus que la vitesse à la frontière absorbante ne doit pas être utilisée puisque l'interface fluide-structure est considérée comme stationnaire. Le gradient de pression peut alors être simplifié :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\frac{\omega}{c}\beta p \tag{3.69}$$

Il faut cependant prendre cette hypothèse avec précaution : les vitesses normales des particules d'air à la surface de l'absorbant peuvent être non nulles, puisqu'il existe un gradient de pression non nul quand $\beta \neq 0$. Donc, il convient de décrire cette formulation comme étant « quasi-rigide », même si la structure elle-même n'oscille pas comme un cas de couplage fluide-structure.

Quand le matériau absorbant est placé sur une partie de la surface désignée par Γ_1, l'équation (3.16) se partitionne de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial n} \\ \frac{\partial p_2}{\partial n} \end{Bmatrix} - [H]\{p\} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [M]\{\Phi\} \tag{3.70}$$

avec

$$[M] = [G][T] - [H][D] \tag{3.71}$$

Les gradients de pression sur les matériaux absorbants et non-absorbants sont désignés par $\partial p_1/\partial n$ et $\partial p_2/\partial n$ respectivement. Ensuite, avec (3.69) :

$$\begin{bmatrix} -j\frac{\omega}{c}\beta G_{11} & G_{12} \\ -j\frac{\omega}{c}\beta G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ \frac{\partial p_2}{\partial n} \end{Bmatrix} - [H]\{p\} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [M]\{\Phi\} \tag{3.72}$$

Pour les frontières non-absorbantes, des parois rigides sont considérées : $\partial p_2/\partial n = 0$. En partitionnant la matrice C dans l'équation (3.24), la substitution de $\{p_1\} = [C_{11}]\{\Phi_1\} - [C_{12}]\{\Phi_2\}$ dans l'équation (3.72) donne :

$$-j\frac{\omega}{c}\beta \begin{bmatrix} G_{11}C_{11} & G_{12}C_{12} \\ G_{21}C_{11} & G_{22}C_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - [H][C]\{\Phi\} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [M]\{\Phi\} \tag{3.73}$$

En incluant $-\beta$ dans la matrice et en notant cette matrice d'absorption $[C']$ et $[K] = -[H][C]$, l'équation (3.73) s'écrit alors :

$$j\frac{\omega}{c}\left[C'\right]\{\Phi\} + [K]\{\Phi\} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [M]\{\Phi\} \tag{3.74}$$

L'équation (3.74) correspond au problème aux valeurs propres pour une cavité acoustique avec la prise en compte d'une absorption à la surface. En définissant ces valeurs propres comme $\lambda_i = j\omega_i/c$ et les vecteurs propres $\{x_i\} = \{\Phi\}$, on obtient le problème quadratique à résoudre suivant :

$$[K]\{\Phi\} + \lambda_i\left[C'\right]\{x_i\} + \lambda_i^2[M]\{x_i\} = 0 \tag{3.75}$$

Les nombres d'onde de résonance sont ainsi obtenus par la relation $k_i = -j\lambda_i$.

Cette formulation implique que β soit constant, bien que ce paramètre soit défini comme dépendant de la fréquence. Un choix évident pour β est donc de prendre une valeur moyenne de la partie réelle de l'admittance acoustique. Ceci entraîne malheureusement une mauvaise prise en compte du comportement de l'admittance acoustique de paroi en basse fréquence. En effet, comme l'indique les figures 3.1 et 3.2 dans le cas d'un panneau de laine de verre standard de 10 cm d'épaisseur, si l'absorption peut être estimée comme grossièrement constante à partir de 1 kHz, il serait trop imprécis d'étendre cette considération pour des fréquences inférieures. Ainsi, nous proposons ici une nouvelle prise en compte de l'absorption dans la méthode de l'intégrale particulière

Un modèle adapté

D'aprés Allard [44] (cf. annexe E), l'impédance caractéristique (en incidence normale) d'un matériau poreux ou fibreux peut s'écrire :

$$Z_c(\omega) = \left(K(\omega)\rho_d(\omega)\right)^{1/2} \tag{3.76}$$

avec ρ_d la masse volumique dynamique du fluide dans le poreux et K le coefficient de compressibilité de l'air. L'impédance de surface s'écrit alors :

$$Z(\omega) = -j\frac{Z_c(\omega)}{\phi(\omega)}\mathrm{cotg}(kd) \tag{3.77}$$

où ϕ représente la porosité du matériau et d son épaisseur.

Les courbes théoriques de l'impédance et admittance acoustiques de surface de la laine de verre sont données par les figures 3.1 et 3.2, l'admittance de surface Y étant défini comme l'inverse de l'impédance de surface Z.

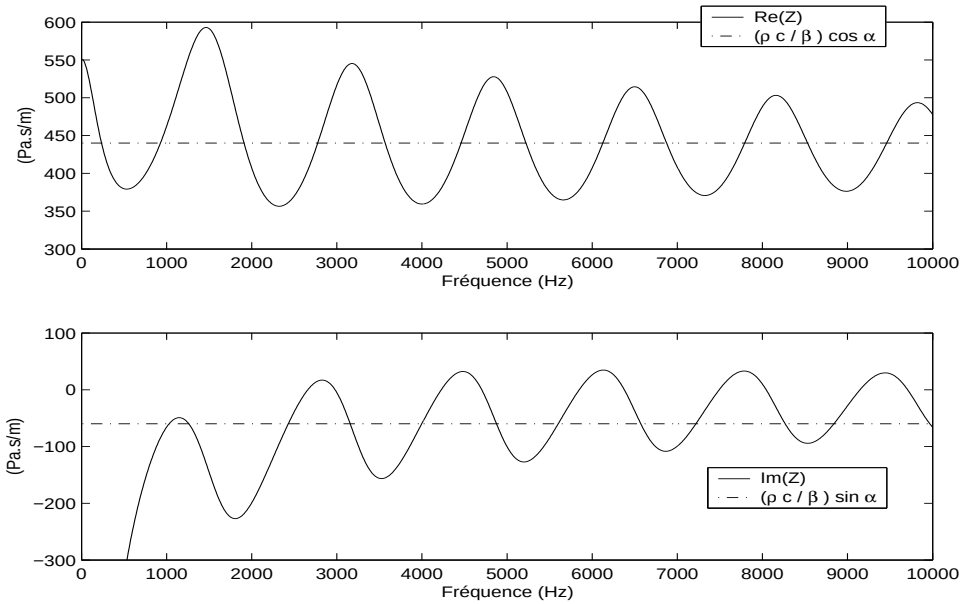


FIG. 3.1: Impédance acoustique théorique d'un panneau type laine de verre (épaisseur 10 cm)

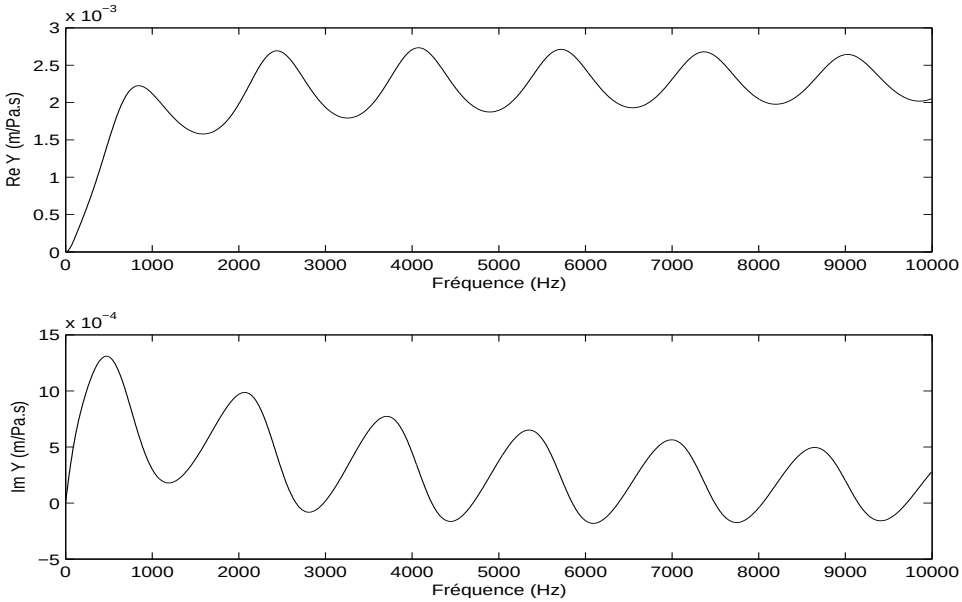


FIG. 3.2: Admittance acoustique théorique d'un panneau type laine de verre (épaisseur 10 cm)

En reprenant les travaux de Rakajumar *et al*, l'impédance de surface est défini par :

$$Z = (\rho c/\beta)\, e^{j\alpha} \tag{3.78}$$

avec α la phase de la vitesse par rapport à la pression et où β est relié à l'amplitude de pression et sa dérivée normale par :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -jk\beta p \tag{3.79}$$

α et β peuvent être déterminés par le calcul d'une impédance moyenne du matériau (cf. fig. 3.1).

L'équation (3.78) peut s'écrire sous la forme :

$$\beta = (\rho c/Z)\, e^{j\alpha} \tag{3.80}$$

La condition d'impédance au point $\underline{r}$ de la frontière absorbante s'écrit :

$$p\,(\underline{r}) = Z v_n\,(\underline{r}) \tag{3.81}$$

avec

$$\frac{\partial p\,(\underline{r})}{\partial n} = j\omega\rho v_n\,(\underline{r}) \tag{3.82}$$

on a donc :

$$\frac{1}{Z} p\,(\underline{r}) = \frac{1}{j\omega\rho}\frac{\partial p\,(\underline{r})}{\partial n} \tag{3.83}$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial p\,(\underline{r})}{\partial n} = -j\omega\rho Y p\,(\underline{r}) \tag{3.84}$$

En identifiant avec l'équation (3.79) on trouve que :

$$e^{j\alpha}\rho c Y = \beta \tag{3.85}$$

Pour des fréquences inférieures à 500 Hz (cf. figures 3.3 et 3.4), on peut constater que l'admittance varie à peu près linéairement avec la fréquence. En posant donc $\beta' = \beta e^{-j\alpha}/k$, on trouve Y tel que :

$$Y = \frac{\beta_r + j\beta_i}{\rho c} k \tag{3.86}$$

ou

$$Z = \frac{\rho c}{(\beta_r + j\beta_i)\, k} \tag{3.87}$$

$\beta' = \beta_r + j\beta_i$ est le nouveau paramètre d'absorption, indépendant de la fréquence. La limitation à 500 Hz est aussi pratique que réaliste car ce sont pour des fréquences souvent bien inférieures que l'on constate les nuisances les plus fortes. Une extension à des intervalles de fréquences est cependant possible, à condition de ne pas avoir de changement de pente de la courbe d'admittance dans les intervalles ciblés.

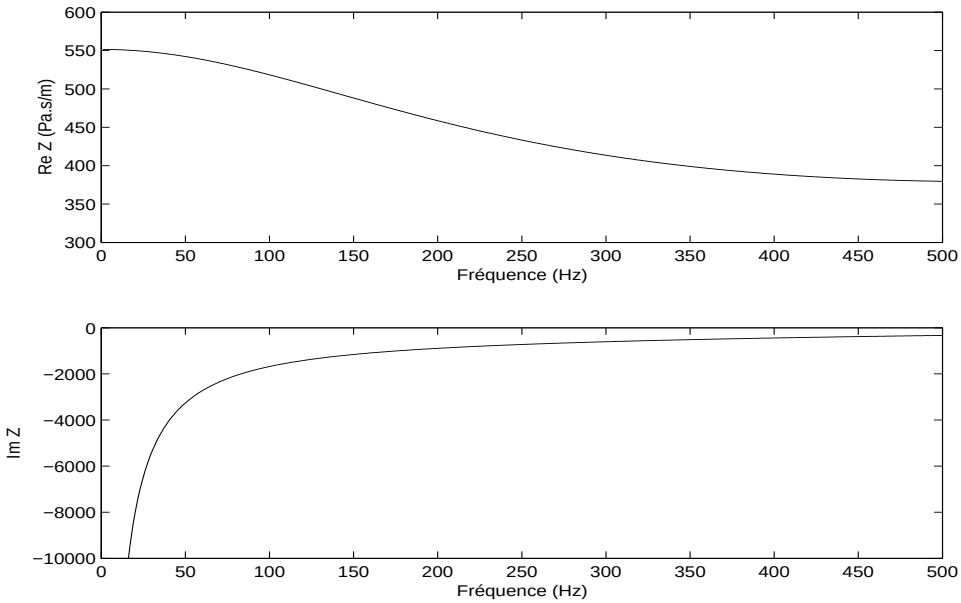


FIG. 3.3: Impédance acoustique théorique d'un panneau type laine de verre, $f \leq 500$Hz (épaisseur 10 cm)

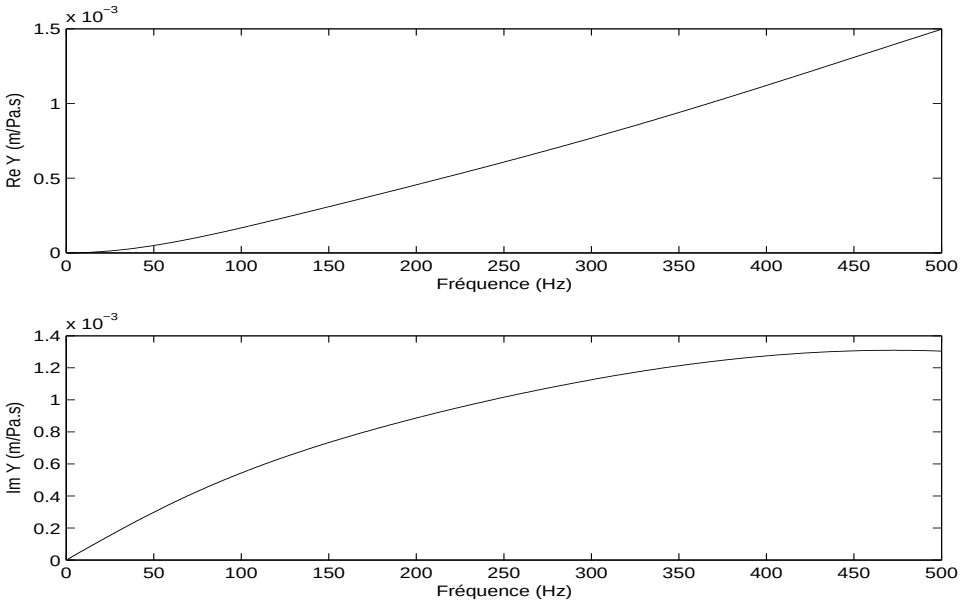


FIG. 3.4: Admittance acoustique théorique d'un panneau type laine de verre, $f \leq 500$Hz (épaisseur 10 cm)

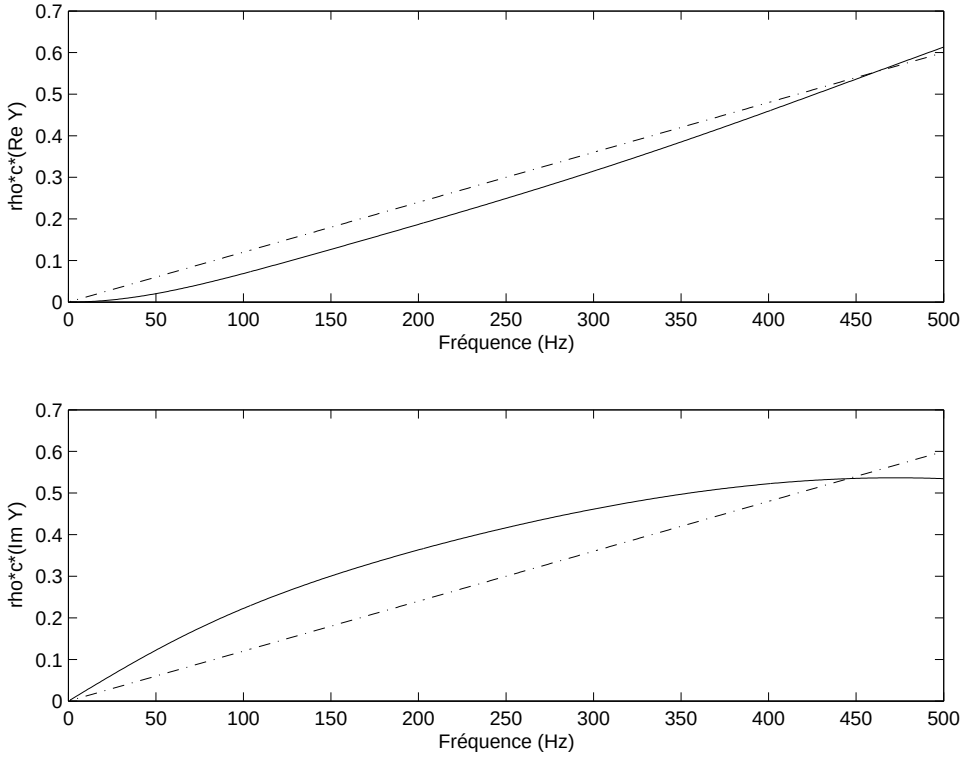


FIG. 3.5: Modèle adapté aux basses fréquences

L'équation (3.84) devient avec (3.86) :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -jk^2\beta' p \tag{3.88}$$

Dans l'exemple de la laine de verre, $\beta' = 0.06 + i0.074$.

L'avantage de cette formulation est de récupérer un problème aux valeurs propres généralisé.

Une meilleure approximation de l'admittance est possible par l'adjonction de termes en k^2 et k^3 dans l'équation (3.86), mais, en plus de la difficulté accrue de résolution, les coefficients liés à ces termes sont trop faibles pour avoir une réelle incidence sur les résultats.

L'équation (3.74) devient avec ce nouveau paramètre d'absorption :

$$j\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[C'\right]\{\Phi\} + [K]\{\Phi\} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [M]\{\Phi\} \tag{3.89}$$

Aux coefficients β de la méthode de Rakajumar se sont substitués les valeurs de β' aux nœuds absorbants. Introduisant j dans $[C']$ et ramenant cette dernière matrice au membre de droite, l'équation (3.89) s'écrit alors :

$$[K]\{\Phi\} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[M'\right]\{\Phi\} \tag{3.90}$$

avec $M'_{ij} = M_{ij} + \mathrm{Im}\left(C'_{ij}\right) - j\mathrm{Re}\left(C'_{ij}\right)$

3.5 Conclusions

Les principales méthodes d'analyse aux valeurs propres de cavités acoustiques sont présentées dans ce chapitre. En particulier, la méthode de l'intégrale particulière est développée et programmée dans le code de calcul EQIVP (EQuations Intégrales aux Valeurs Propres) avec un modèle original de prise en compte des impédances de surface.

Cette méthode permet l'obtention des fréquences de résonance et de leurs éventuels amortissements par absorption pour toute cavité 3D, puis d'obtenir facilement les champs de pression. Dans le cas de la prise en compte de condition mixte sur les surfaces de la structure et de l'ajout de points internes, la méthode de l'intégrale particulière est dite généralisée et désignée dans la suite de ce document GPIM (Generalized Particular Integral Method).

Chapitre 4

Traitement numérique des problèmes aux valeurs propres

4.1 Introduction

Ce chapitre est dédié au traitement numérique des problèmes aux valeurs propres, généraux ou quadratiques, issus de la méthode de l'intégrale particulière. L'avènement des calculateurs modernes et le développement souvent consécutif de méthodes de calculs puissantes, ont permis d'aborder par voie purement numérique des problèmes de calcul de structures dont l'analyse n'était pas envisageable il y a quelques décennies. En particulier, la prévision par le calcul des caractéristiques propres de vibration d'une structure.

Le revers des méthodes de discrétisation modernes, telles que la méthode des éléments finis et dans une moindre mesure les méthodes intégrales, est le nombre de paramètres qu'une analyse détaillée requiert. En quelques années la taille des problèmes aux valeurs propres à traiter est passée de quelques milliers à quelques dizaines, voire centaines de milliers de degrés de liberté [45].

L'expérience a montré dans le passé que le choix des méthodes à mettre en oeuvre est intimement lié au nombre de degrés de liberté n du système. Par exemple, les méthodes de développement du polynôme caractéristique par calcul direct des coefficients sont couramment utilisées pour des problèmes de faibles dimensions ($n \leq 10$), mais sont totalement proscrites dans un cadre général. De plus, l'occupation en mémoire des matrices n'est plus aussi critique qu'il y a quelques années, grâce aux avancées technologiques : un problème aux valeurs propres présentant quelques milliers de degrés de liberté peut aisément se résoudre sur un ordinateur personnel. Reste le souci de performance en termes de précision et de temps de calcul. Après avoir rappelé les méthodes disponibles, un choix raisonné des algorithmes d'extraction des fréquences est alors proposé.

4.2 Problème aux valeurs propres non-hermitien généralisé

Un problème aux valeurs propres non-hermitien généralisé est défini par :

$$[A]\{x\} = \lambda [B]\{x\} \tag{4.1}$$

où $[A]$ et $[B]$ sont des matrices $n \times n$. Dans notre application (cf. eq. (3.52)), ces deux matrices sont réelles et non symétriques, donc non hermitiennes.

La théorie analytique et algébrique de ce problème aux valeurs propres généralisé (PVPG) est beaucoup plus compliquée quand dans le cas d'un problème aux valeurs propres standard (PVPS) $[A]\{x\} = \lambda\{x\}$. Une transformation du PVPG en PVPS est généralement possible, mais échoue ici en raison du caractère non particulier de $[B]$. Aussi, les matrices issues des méthodes intégrales rendent le choix de l'algorithme de résolution compliqué. Parmi ceux existants, l'algorithme direct QZ [46] est réputé le plus performant pour des matrices de dimension faible à modérée.

4.2.1 Méthode QZ

On présente ici la méthode QZ qui est utilisée pour trouver les valeurs et vecteurs propres du problème aux valeurs propres généralisé non-hermitien (cf. eq. (4.1)). Cette méthode est basée sur la décomposition généralisée de Schur, aboutissant à des matrices orthogonales $[Q]$ et $[Z]$ telles que :

$$[Q]^H [A][Z] = [T] \tag{4.2}$$

$$[Q]^H [B][Z] = [S] \tag{4.3}$$

Le but est de trouver les matrices $[Q]$ et $[Z]$ qui, associées à la paire initiale $[A]$ et $[B]$, donnent $[T]$ et $[S]$ triangulaires supérieures. Pour déterminer ces matrices $[Q]$ et $[Z]$, une séquence de $2(n-1)$ transformations d'Householder est appliquée à $[A]$, devenant une matrice Hessenberg supérieure, et à $[B]$, donnant une matrice triangulaire supérieure. Ensuite, une application répétée de transformations d'équivalence unitaire $[Q]$ et $[Z]$ sur $[A]$ et $[B]$ est effectuée. $[A]$ est réduite à une forme triangulaire (ou quasi) tout en préservant la structure de $[B]$. À la convergence, on obtient les formes généralisées de Schur de la paire $[A]$ et $[B]$. Finalement, les valeurs propres sont calculées à partir des diagonales de ces matrices. Les vecteurs propres en sont déduits et, transformés par $[Z]$, fournissent les vecteurs propres du problème originel.

L'algorithme QZ est implémenté dans beaucoup de librairies informatiques d'algèbre linéaire. On le retrouve sous la commande eig(A,B) dans MATLAB et dans les routines xGGEV[5] et xGGES

[5] la lettre x est pour S ou D, réel en simple ou double précision respectivement, C ou Z pour des données de type complexe, simple ou double précision

de LAPACK [47].

Cette méthode souffre néanmoins de quelques désavantages dans la cadre de notre étude. En effet, elle mène à l'obtention de toutes les valeurs propres, et optionnellement, des vecteurs propres. Elle requiert environ $30n^3$ opérations et n^2 d'allocation mémoire pour le seul calcul des valeurs propres, $16n^3$ opérations supplémentaires sont nécessaires pour les vecteurs propres. Pour des structures fortement discrétisées se pose un problème en terme de temps de calculs, et surtout, dans l'optique d'une application concrète, seule l'obtention des résonances les plus basses est intéressante. Dans l'espoir de ne pas à avoir à calculer une grande majorité de valeurs propres inutiles, il faut donc préférer à cette méthode directe des méthodes « plus » itératives comme celle d'Arnoldi avec réinitialisation implicite ou de Jacobi-Davidson. Elle reste néanmoins une référence pour la précision de ces résultats. Enfin, la nature non-symétrique des matrices $[A]$ et $[B]$ empêche l'utilisation d'autres méthodes, souvent trés populaires, comme la méthode de Lanczos [48]. Une extension de la méthode de Lanczos non-symétrique [49] a d'ailleurs été proposée pour le cas généralisé. Cependant, cette méthode hérite de problèmes d'instabilité qui sont encore mal résolus dans le cas généralisé.

4.2.2 Méthode d'Arnoldi avec réitération implicite

La méthode d'Arnoldi avec réitération implicite (IRAM[6]), due à Sorensen [50], connaît un succès croissant pour des calculs performants des valeurs propres. Elle a aussi une convergence accrue à la périphérie du spectre, ce qui est utile dans notre cas. La méthode d'Arnoldi fut originellement considérée comme un algorithme « direct » pour réduire une matrice générale à une matrice Hessenberg supérieure. Ensuite, cet algorithme fut employé comme technique itérative pour approcher les valeurs propres de matrices creuses de grande taille.

De nombreuses améliorations ont permis son extension à la résolution de problèmes aux valeurs propres généralisés avec des matrices non-Hermitiennes, soit par une transformation directe en forme standard soit en utilisant le mode de transformation spectrale. En effet, les méthodes itératives pour les problèmes non-symétriques, telles que la méthode d'itération en sous-espace ou la méthode d'Arnoldi, ne peuvent pas être directement appliquées au problème généralisé. Avant d'utiliser ces méthodes, on doit d'abord transformer le problème standard de la forme

$$[U]\{x\} = \lambda\{x\} \tag{4.4}$$

où $[U] = [B]^{-1}[A]$ (cf. équation (4.1)). Se pose maintenant le problème du choix de $[U]$:

– le produit matrice-vecteur $[U]\{x\}$ doit pouvoir être effectué efficacement ;

[6]Implicit Restarted Arnoldi Method

- il doit y avoir une transformation connue entre les solutions des équations (4.1) et (4.4) ;
- les valeurs propres avec les plus petites parties réelles de l'équation (4.1) doivent être transformées dans celles de l'équation (4.4) puis rapidement approchées par une méthode itérative.

Dans le cas du PVPS, il n'est pas nécessaire d'effectuer cette transformation explicitement, grâce notamment à une factorisation directe de $[B]$, mais la densité des matrices issues de la méthode de l'intégrale particulière pénalise fortement cette possibilité. Afin d'améliorer la convergence de l'algorithme d'Arnoldi avec réitération implicite dans la portion désirée du spectre, il est donc préférable d'utiliser le mode de transformation spectrale. Cette transformation consiste à écrire (4.1) en :

$$([A] - \sigma_s [B])^{-1} [B] \{x\} = \{x\} \nu, \quad \text{où} \quad \nu = \frac{1}{\lambda - \sigma_s} \tag{4.5}$$

permettant de trouver les valeurs propres proches d'un « shift » σ_s. Il faut s'assurer de la stabilité numérique qu'un mauvais choix de transformation spectrale peut dégrader.

La mise en œuvre de cet algorithme fait appel au code ARPACK [51, 52], qui met en application l' IRAM. Cet algorithme destiné au calcul parallèle est aussi disponible dans le code PARPACK [52].

4.2.3 Algorithme de Jacobi-Davidson

Le but de cette méthode est de calculer les vecteurs de Schur de $[A] - \lambda [B]$. Cet algorithme peut être interprété comme une variante d'itération par sous-espaces de l'algorithme QZ.

Avec $\lambda = \alpha/\beta$, le problème aux valeurs propres généralisé $[A] \{x\} = \lambda [B] \{x\}$ est équivalent au problème

$$(\beta [A] - \alpha [B]) \{x\} = 0 \tag{4.6}$$

les valeurs propres généralisées sont désormais dénotées par une paire (α, β). Cette approche est préférable car si λ est indéterminé quand α et/ou β sont nuls ou proche de zéro, la paire reste elle bien définie [46]. Une description détaillée est contenue dans la référence [53].

La méthode de Jacobi-Davidson possède le même atout en terme de possibilité de calcul distribué que l'algorithme d'Arnoldi avec réitération implicite mais a sur cette dernière l'avantage d'être extensible au problème aux valeurs propres quadratique.

4.3 Problème aux valeurs propres non-hermitien quadratique

Le problème aux valeurs propres quadratique suscite actuellement beaucoup d'attention en raison de ses applications étendues dans les secteurs tels que l'analyse dynamique des systèmes

mécaniques en acoustique et la stabilité des écoulements en mécanique des fluides [54]. Un problème aux valeurs propres quadratique est défini par :

$$\left(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]\right) \{x\} = 0 \quad \text{et} \quad \{y\}^t \left(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]\right) = 0 \tag{4.7}$$

où $[M]$, $[K]$ et $[C]$ sont des matrices de taille $n \times n$. Les vecteurs $\{x\}$ et $\{y\}$ et les scalaires correspondants λ sont les vecteurs propres droit, gauche, et les valeurs propres.

La fonction matricielle $L(\lambda) \equiv \lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]$ est un cas particulier d'un polynôme de matrice. Cette fonction est dite « régulière » si le déterminant de $L(\lambda)$ est différent de zéro quelque soit la valeur propre. Autrement, elle est désignée comme « singulière ».

Un problème aux valeurs propres quadratique a $2n$ valeurs propres, avec au moins $2n$ vecteurs propres. Cette propriété apparaît naturellement lors de sa linéarisation.

4.3.1 Linéarisation

Dans cette section, nous considérons une transformation de $L(\lambda)$ analogue à la linéarisation d'une équation différentielle de second ordre. On dit qu'une matrice $(A - \lambda B)$ de dimension $2n \times 2n$ est une linéarisation de $L(\lambda)$ si

$$\begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = E(\lambda)(A - \lambda B) F(\lambda) \tag{4.8}$$

où $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ sont des matrices $2n \times 2n$ avec déterminants constants non nuls. Ainsi, les valeurs propres de $L(\lambda)$ et $(A - \lambda B)$ coïncident. Une linéarisation n'est pas unique et il est important d'en choisir une respectant les symétries et les propriétés spectrales de $L(\lambda)$, si possible.

La plupart des linéarisations utilisées en pratique sont de la première forme

$$\textbf{L1 :} \quad \begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

ou de la deuxième

$$\textbf{L2 :} \quad \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} C & M \\ N & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

où N est une matrice quelconque $n \times n$ non-singulière. En général, N est la matrice identité ou un multiple comme $\|M\| I$ ou $\|K\| I$.

À partir de la forme linéarisée, un PVPG est défini et peut être résolu par les méthodes présentées précédemment. Mais, à l'augmentation des tailles des matrices de n à $2n$, va correspondre aussi un accroissement du temps nécessaire à cette résolution. Il est donc souhaitable d'éviter cette linéarisation et de tenter directement de résoudre le problème aux valeurs propres quadratique. Une méthode émergente en ce domaine est celle de Jacobi-Davidson.

4.3.2 Méthode de Jacobi-Davidson

Dans la méthode de Jacobi-Davidson [55], le problème aux valeurs propres quadratique de dimension n est réduit par projection dans un sous-espace à un problème de plus faible dimension m. Ce problème projeté peut ainsi être résolu par une méthode classique et s'écrit

$$\left(\theta^2 V^* M V + \theta V^* C V + V^* K V\right) s = 0 \tag{4.11}$$

Les colonnes v_i de la matrice $V\,(n \times m)$ forment une base pour le sous-espace de recherche. Pour des raisons de stabilité, les colonnes sont construites pour être orthonormées. Une valeur de Ritz θ est sélectionnée avec les propriétés désirées, comme par exemple la plus grande partie réelle avec un « shift » puis approchée via une équation de correction sur les résidus.

Ce processus est répété tant qu'une paire (λ, x) n'a pas été détectée, autrement dit, jusqu'à ce qu'un vecteur résidu r suffisamment petit soit trouvé. La forme basique de l'algorithme est présenté par l'algorithme 1 (cf. ci-après). La première application de cette méthode aux problèmes quadratiques de grandes dimensions ($n = 250000$) fut effectuée avec succès par Sleijpen *et al.* [54].

4.4 Conclusions

Le choix des algorithmes de résolution du problème aux valeurs propres présenté dans la chapitre précédent est discuté. Une méthode QZ est retenue comme référence en terme de précision pour les PVPG et les problèmes aux valeurs propres quadratique linéarisés (PVPQL). L'IRAM est choisie pour améliorer les coûts en temps de calculs. Elle est aussi très performante quand un domaine ciblé de valeurs propres[7] est recherché. Pour la résolution du problème aux valeurs propres quadratique (PVPQ) du modèle de Rakajumar *et al.* (cf. §3.4.5), la méthode de Jacobi-Davidson est appliquée pour la première fois à notre connaissance sur des matrices denses et non-hermitiennes.

[7] dans notre étude, ce sont les fréquences de résonance les plus basses

Algorithme 1 Méthode de Jacobi-Davidson pour le PVPQ

choisir une matrice $n \times m$ orthonormée v

pour $i = 0, 1, 2$ **faire**

calculer $W_i = C_i V$ et $M_i = V^* W_i$

fin

itérer

calculer des valeurs et vecteurs propres (θ, s) de $\left(\theta^2 M_2 + \theta M_1 + M_0\right) s = 0$.

sélectionner la paire (θ, s) avec $\|s\|_2 = 1$.

calculer $u = Vs$, $p = \Psi'(\theta)\, u$, $r = \Psi(\theta)\, u$.

si $\|r\|_2 < \epsilon$ **alors**

$\lambda = \theta$, $x = u$, **arrêter**

fin

résoudre (approximativement) $t \perp u$ à partir de

$\left(I - \frac{pu^*}{u^* p}\right) \Psi(\theta)\, (I - uu^*)\, t = -r$

orthogonaliser t avec V, $v = t / \|t\|_2$

pour $i = 0, 1, 2$ **faire**

calculer $w_i = C_i v$

$M_i = \begin{bmatrix} M_i & V^* w_i \\ v^* W_i & v^* w_i \end{bmatrix}$,$W_i = [W_i, w_i]$

fin

augmenter $V = [V, v]$

jusqu'à convergence

Chapitre 5

Tests de validation

5.1 Propos liminaires

Le code de calcul EQIVP s'applique aux problèmes tridimensionnels et s'appuie sur la méthode de l'intégrale particulière.

La validation de ce code se fait essentiellement par comparaison avec les valeurs théoriques des modes propres de cavités simples (§3.2.1). Pour des structures plus complexes, les résultats proviennent de la littérature scientifique ou de la méthode des éléments finis (code de calculs ANSYS®).

Le calcul des intégrales se fait toujours avec un nombre suffisant de points de Gauss pour assurer une bonne convergence de l'intégration, ici 4 dans chaque direction (cf. §2.3.2). Les calculs sont conduits sur un ordinateur bi-processeur cadencé à 1 GHz avec 1 Go de mémoire centrale, sous Linux Fedora, à partir de programmes écrits en FORTRAN 77 en double précision.

Les algorithmes utilisés pour la résolution des différents PVPG ou PVPQ ont été présentés dans le chapitre 4.

- La méthode QZ (cf. §4.2.1) sert de référence pour le calcul du PVPG et du PVPQL. Ces problèmes correspondent aux équations de la méthode de l'intégrale particulière avec les différentes conditions aux surfaces du chapitre 3.
- L'IRAM (cf. §4.2.2) est appliqué aux mêmes problèmes que la méthode QZ.
- La méthode de Jacobi-Davidson (cf. §4.2.3) est plus spécifiquement utilisé sur le PVPQ défini par le modèle d'absorption de Rakajumar *et al.* (cf. équation 3.75). Sa variante correspondant au PVPG est aussi testée.

La précision visée sur le calcul des valeurs propres est identique quelque soit la méthode employée (résidus inférieurs à 10^{-9}). Les ajustements nécessaires à la convergence de l'IRAM et de la

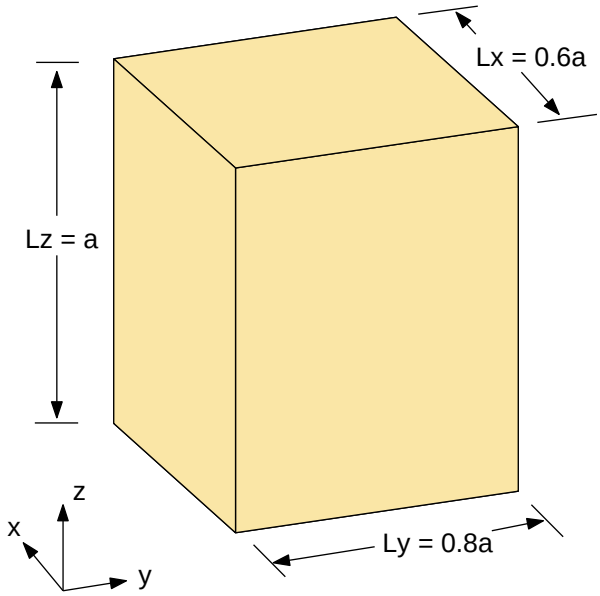


FIG. 5.1: Parallélépipède rectangle

méthode de Jacobi-Davidson sont précisés le cas échéant.

5.2 Cas du parallélépipède rectangle

Un parallélépipède de dimensions $L_x = 0.6a$ $L_y = 0.8a$ et $L_z = a$ est considéré (cf. fig. 5.1).

5.2.1 Conditions aux frontières Neumann homogène

D'après (3.1), on connaît les modes propres de ce parallélépipède pour des conditions aux frontières de type Neumann homogène (parois rigides) :

$$k = \pi\sqrt{\left(\frac{n_x}{0.6a}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{0.8a}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a}\right)^2} \tag{5.1}$$

ou

$$ka = \pi\sqrt{\left(\frac{n_x}{0.6}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{0.8}\right)^2 + n_z^2} \tag{5.2}$$

Le tableau 5.1 reprend les douze premiers modes de ce parallélépipède ainsi que les triplets (n_x,n_y,n_z) associés.

Les trois discrétisations utilisées sont résumées sur la figure 5.3 dans le tableau 5.2 où le ka max correspond à la fréquence d'utilisation la plus élevée imposée par le critère en $\lambda/4$. Les modes sont calculés avec l'IRAM, l'algorithme QZ et la méthode de Jacobi-Davidson. On

Mode	n_x	n_y	n_z	ka
1	0	0	1	3.142
2	0	1	0	3.927
3	0	1	1	5.029
4	1	0	0	5.236
5	1	0	1	6.106
6	0	0	2	6.283
7	1	1	0	6.545
8	1	1	1	7.260
9	0	1	2	7.409
10	0	2	0	7.854
11	1	0	2	8.179
12	0	2	1	8.459

TAB. 5.1: ka des 12 premiers modes

N°	nœuds	éléments	ka max
I	74	24	3.141
II	284	94	7.850
III	1130	376	15.708

TAB. 5.2: Les trois maillages du parallélépipède

constate des modes identiques[8] dans les trois cas avec l'emploi d'un shift σ_s non nul pour assurer la convergence de l'IRAM et avec une taille de sous-espace de projection pour la méthode de Jacobi-Davidson pratiquement égale à la dimension du PVPG initial. Les temps de calculs pour ces trois méthodes en fonction de la taille du problème à résoudre sont illustrés par la figure 5.2.

Maillage I

Les résultats sont contenus dans le tableau 5.3. Même si leur distribution reste conforme à la théorie, la précision des calculs est nettement insuffisante et reste essentiellement due au non

[8] i.e. au moins 5 chiffres significatifs sur les valeurs propres calculées

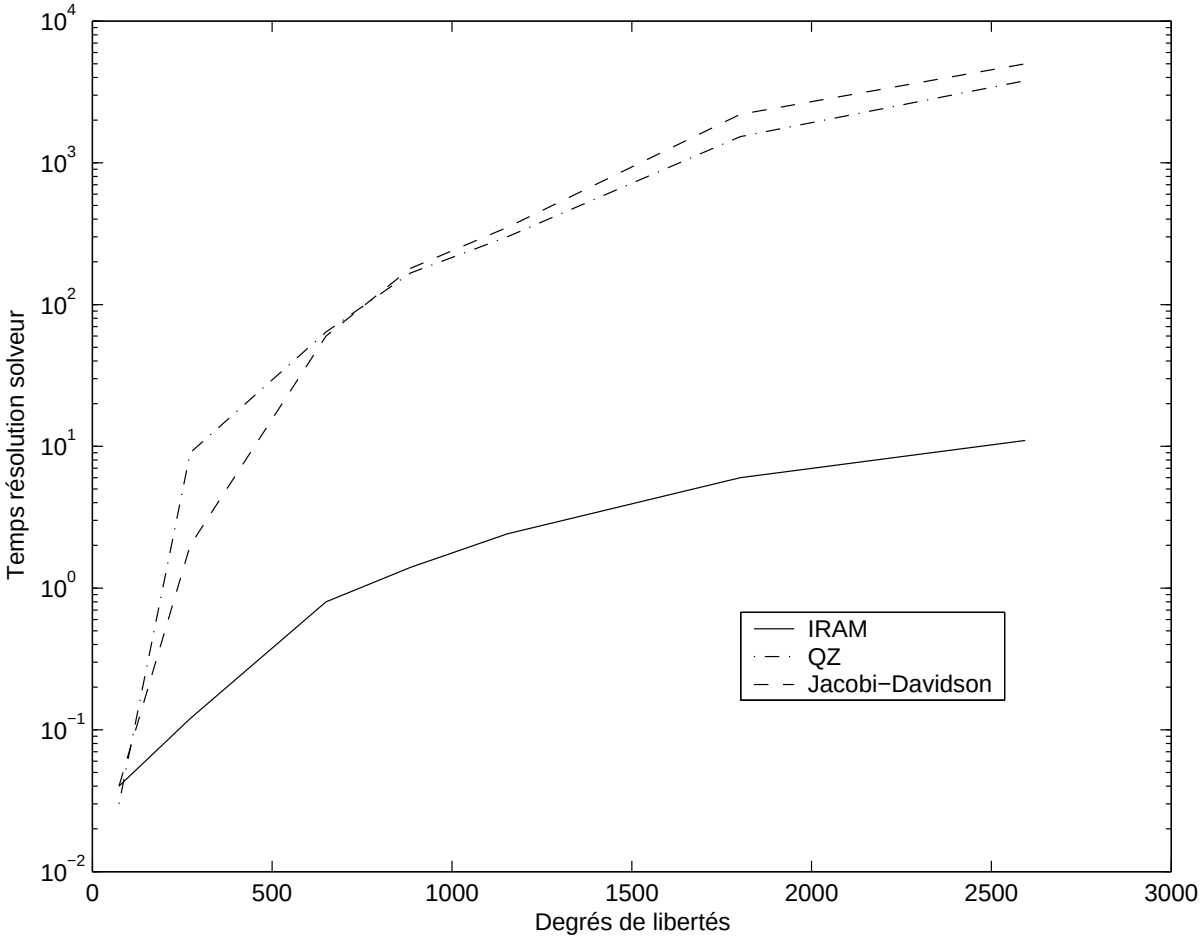


FIG. 5.2: Temps de calcul QZ/IRAM/Jacobi-Davidson

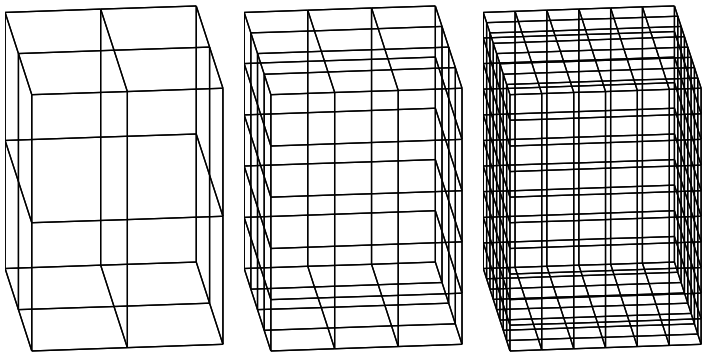


FIG. 5.3: Parallélépipède - Maillages I, II et III

ka	Erreur relative
3.602	14.65 %
4.602	17.19 %
5.991	19.13 %
6.248	19.33 %
7.676	25.71 %
8.109	29.06 %
8.735	33.46 %
8.818	21.46 %
8.931	20.54 %
9.433	20.10 %
9.923	21.32 %
10.020	18.45 %

TAB. 5.3: Parallélépipède - Parois rigides
ka et erreurs pour le maillage I

respect du critère en $\lambda/4$.

Maillage II

D'après le tableau 5.4, la convergence est largement améliorée mais approche les 10% d'erreurs sur certains modes.

En parallèle, la détermination des modes propres permet de reconstituer les amplitudes de la pression dans le parallélépipède. En effet, les vecteurs propres du problème résolu étant les sources fictives de l'équation (3.55), les termes en pression sont facilement obtenus par une simple sommation (cf. éq. (3.17)). La visualisation graphique est effectuée sur le quatrième mode propre du parallélépipède (cf. fig. 5.4 et 5.5). Il correspond au triplet (1,0,0), il s'agit d'un mode axial. Les amplitudes théoriques sont calculées par l'équation (3.2). Sur la figure 5.5, les lignes isobares sont arrondies à l'approche des surfaces. Ce phénomène peut être expliqué par la direction des normales calculées sur les nœuds appartenant aux arêtes et sommets du parallélépipède, et s'atténue à mesure que la discrétisation se fait plus fine.

ka	Erreurs relatives
3.224	2.62 %
4.126	5.07 %
5.326	5.91 %
5.717	9.19 %
6.502	6.48 %
6.620	5.36 %
7.139	9.08 %
7.567	4.23 %
7.702	3.95 %
8.340	6.19 %
8.648	5.74 %
8.996	6.35 %

TAB. 5.4: Parallélépipède - Parois rigides
ka et erreurs pour le maillage II

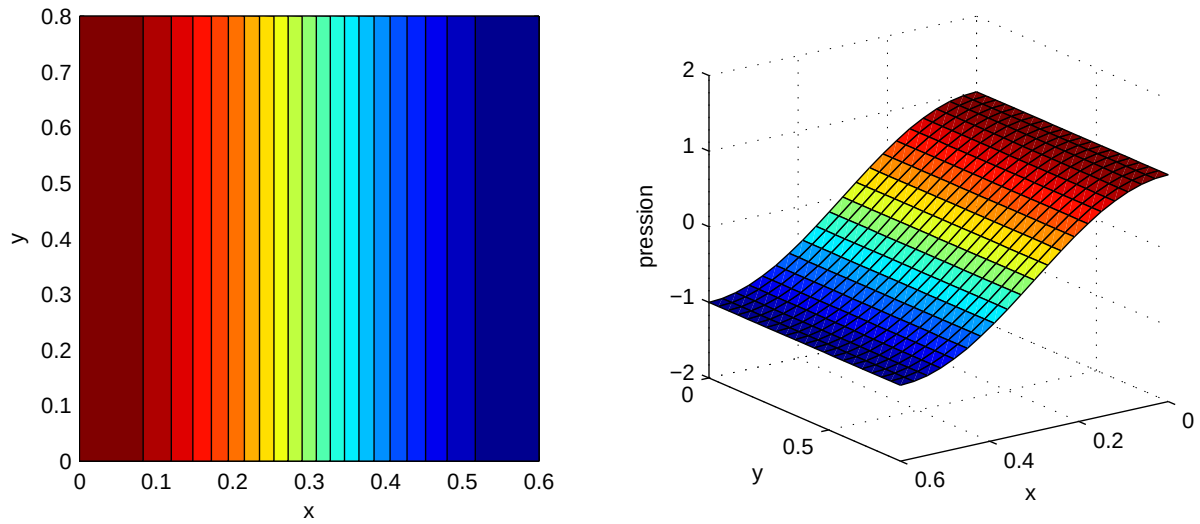


FIG. 5.4: Parallélépipède - Parois rigides
Lignes isobares et pression du 4e mode théorique

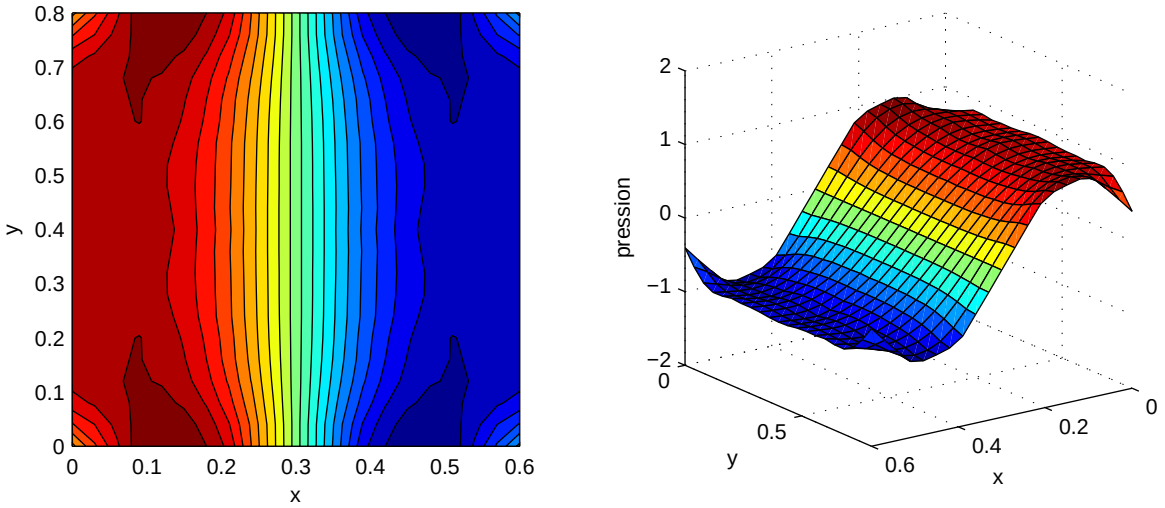


FIG. 5.5: Parallélépipède - Parois rigides
Lignes isobares et pression du 4e - Maillage II

Maillage III

Pour ce maillage, les 12 premiers modes recherchés vérifient tous le critère en $\lambda/4$. L'erreur moyenne est divisée par deux comparativement à la discrétisation précédente. Cette amélioration est aussi visible sur le tracé des lignes isobares (cf. fig. 5.6) qui ont un comportement beaucoup plus régulier.

Conclusion

L'exemple du parallélépipède rectangle a permis d'illustrer la capacité du code à traiter le cas de Neumann homogène. L'obtention des modes propres ainsi que la reconstruction des champs de pression pour les 5 premiers modes ont été réalisées (cf. fig. 5.7). Le critère en $\lambda/4$ doit être vérifié. Ce critère, initialement proposé pour l'analyse fréquentielle des problèmes harmoniques, semble ne plus être suffisant pour l'analyse modale.

Le nombre de vecteurs d'Arnoldi (ncv) à générer dans l'IRAM est dépendant du nombre de valeurs propres recherchées (nev) ; ainsi en prenant $ncv = 2 \times nev$, la méthode converge quelque soit la taille du problème à résoudre. La méthode de Jacobi-Davidson souffre d'un manque de pré-conditionnement des matrices de l'équation (4.6). En effet, sa convergence n'est observée que pour des tailles de sous-espaces pratiquement équivalentes à la taille initiale du problème à résoudre, la rendant moins performante comparativement que la méthode d'Arnoldi et, dans une moindre mesure que la méthode QZ.

ka	Erreurs relatives
3.179	1.19 %
4.023	2.44 %
5.158	2.57 %
5.478	4.62 %
6.333	3.71 %
6.383	1.59 %
6.791	3.76 %
7.372	1.54 %
7.541	1.78 %
8.119	3.37 %
8.388	2.56 %
8.726	3.16 %

TAB. 5.5: Parallélépipède - Parois rigides
ka et erreurs pour le maillage III

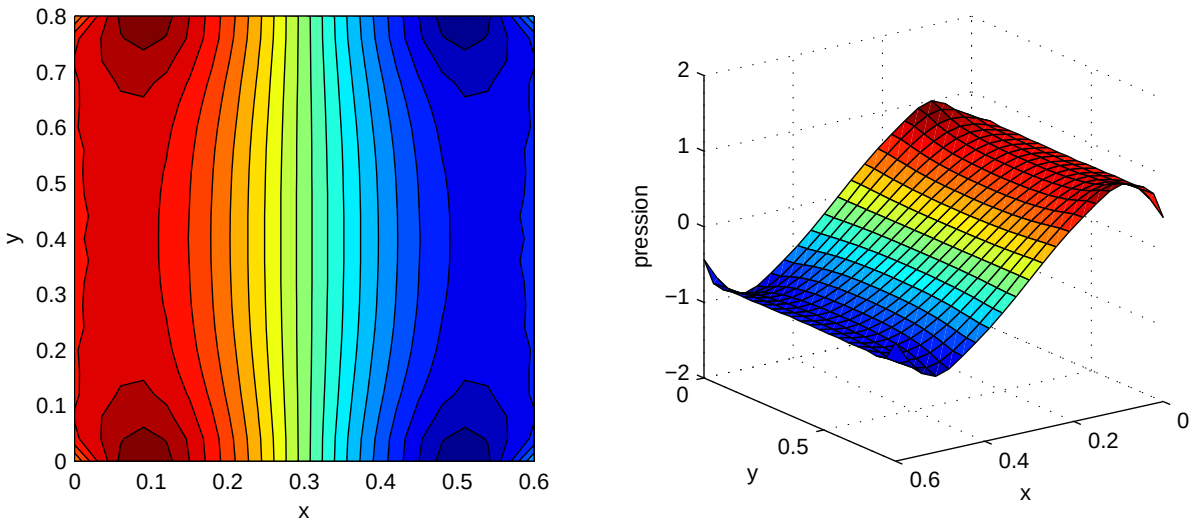


FIG. 5.6: Parallélépipède - Parois rigides
Lignes isobares et pression 4e - Maillage III

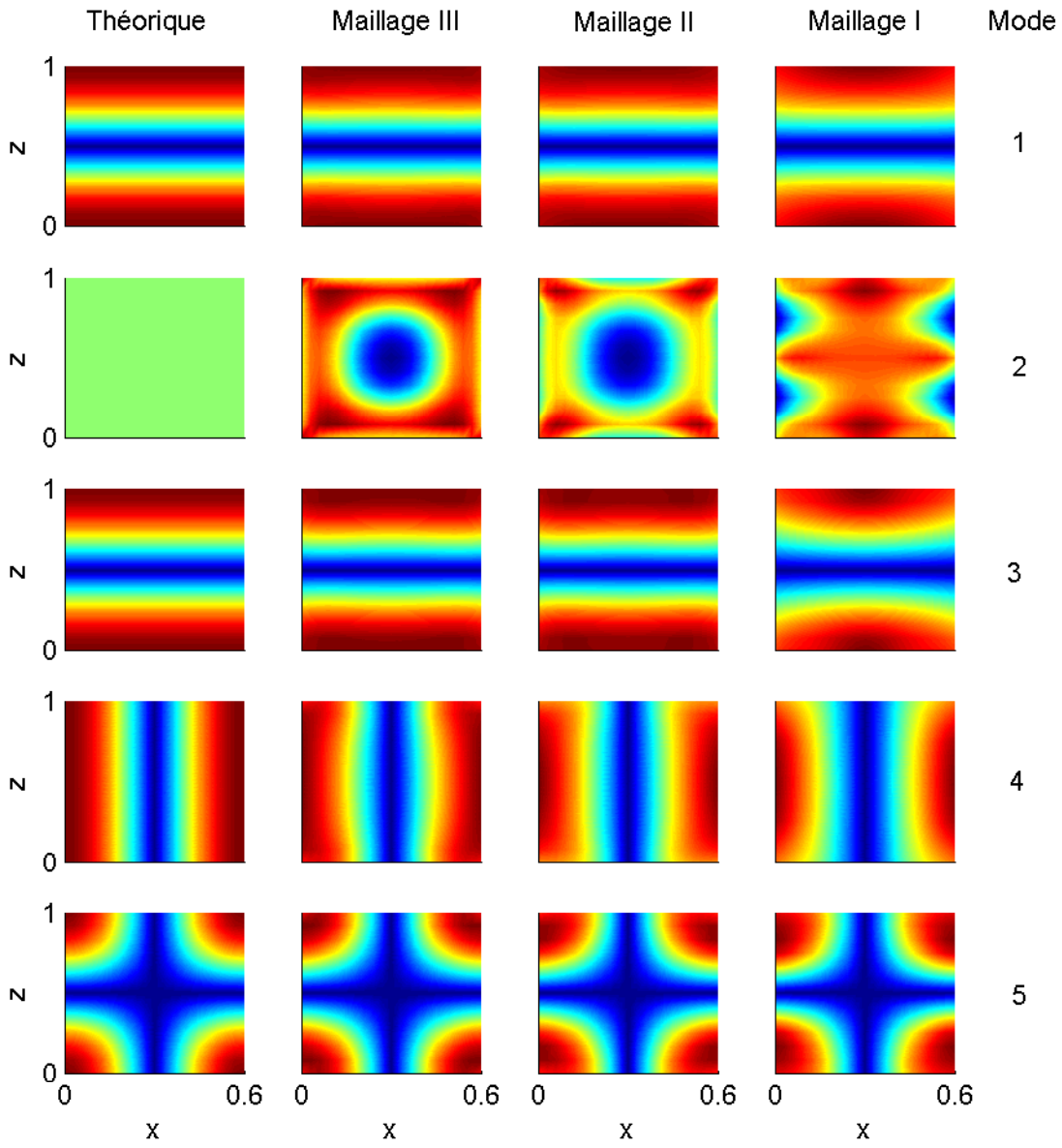


FIG. 5.7: Parallélépipède - Parois rigides Amplitudes de pression - $y = 0.4a$

Mode	n_x	n_y	n_z	ka théorique	ka	Erreurs relatives
1	0	0	0	1.571	1.550	1.32 %
2	0	1	0	4.230	4.334	2.47 %
3	0	0	1	4.712	4.767	1.16 %
4	1	0	0	5.467	5.706	4.38 %
5	0	1	1	6.134	6.229	1.55 %
6	1	1	0	6.731	6.946	3.20 %
7	1	0	1	7.044	7.241	2.79 %
8	0	0	2	7.854	8.131	3.53 %
9	0	2	0	8.010	8.192	2.28 %
10	1	1	1	8.065	8.346	3.48 %
11	0	1	2	8.781	9.054	3.11 %
12	0	2	1	9.159	9.725	6.18 %

TAB. 5.6: Parallélépipède - Face supérieure ouverte, autres parois rigides

5.2.2 Conditions aux frontières Neumann-Dirichlet homogène

Ce type de problème correspond à une structure rigide ouverte à certains endroits. Dans notre cas, une face du parallélépipède est ouverte (en $z = a$ où $p = 0$). Les modes théoriques de cette cavité sont donnés par l'équation (5.3). Les résultats pour les 12 premiers modes obtenus avec le maillage III sont synthétisés dans le tableau 5.6 et la visualisation graphique en figure 5.8.

$$ka = \pi\sqrt{\left(\frac{n_x}{0.6}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{0.8}\right)^2 + (n_z + \frac{1}{2})^2} \tag{5.3}$$

Conclusion

On constate encore une bonne convergence de la méthode de l'intégrale particulière dans le cas de conditions aux limites de type Neumann/Dirichlet.

5.2.3 Prise en compte d'une absorption

Reprenant le deuxième et troisième maillage définis par la figure 5.3, on s'attarde dans un premier temps sur une application du modèle formulé par Rakajumar *et al.* Le matériau absorbant

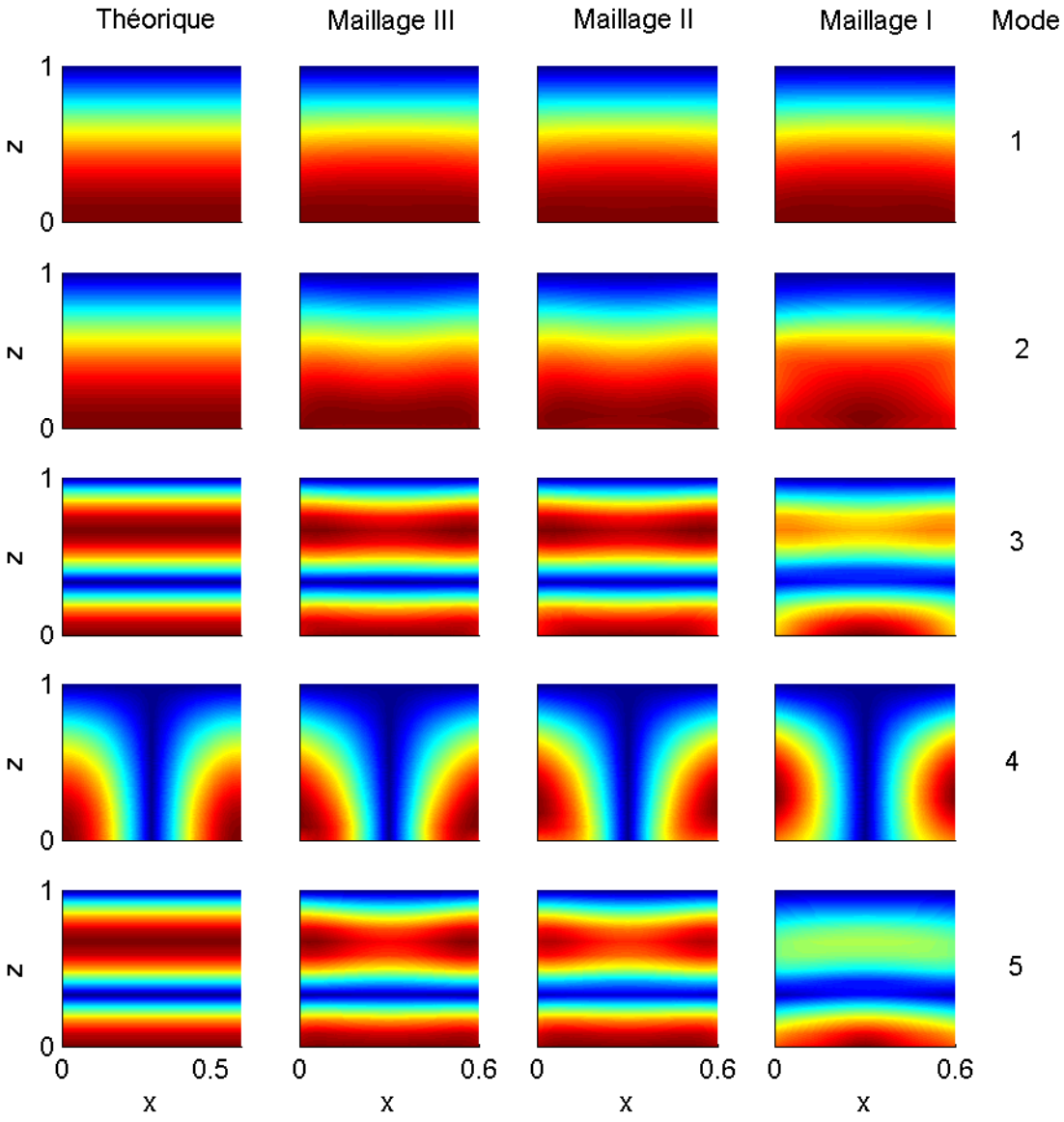


FIG. 5.8: Parallélépipède - Face supérieure ouverte, autres parois rigides
Amplitudes de pression - $y = 0.4a$

Mode	ka	
	Maillage II	Maillage III
1	1.205 -i 1.618	0.901 -i 2.198
2	4.399 -i 0.147	4.283 -i 0.135
3	4.137 -i 1.635	3.725 -i 1.823
4	5.917 -i 0.076	5.683 -i 0.078
5	6.131 -i 0.589	5.993 -i 0.707
6	7.243 -i 0.029	6.436 -i 1.915

TAB. 5.7: Parallélépipède - Face supérieure munie d'une absorption, autres parois rigides
Modes propres, modèle Rakajumar *et al* $\beta = 0.92$

est disposé sur la face en $z = 1$. Les modes obtenus étant complexes, on classe par module croissant.

Modèle de Rakajumar *et al*

Se basant sur les courbes d'impédance acoustique de surface d'un panneau de laine de verre d'épaisseur 10 cm, le coefficient d'absorption β est pris égal à 0.92 (cf. §3.2). Les résultats fournis par le tableau 5.7 montrent un premier mode tendant vers une résonance presque deux fois inférieure au premier mode du parallélépipède muni d'une face ouverte. L'admittance étant quasiment nulle à basse fréquence, nous devrions au contraire nous rapprocher des premiers modes du parallélépipède rigide. Ce modèle surestime donc l'effet de l'absorbant pour les fréquences basses.

Linéarisation

Les résultats et temps de résolution sont identiques quelles que soient les linéarisations employées (cf. §4.3.1). L'avantage de l'IRAM est encore accentué par la structure particulière des matrices de linéarisation (non denses). Une constatation identique peut être faite sur la méthode de Jacobi-Davidson même si le gain apporté est encore trop faible pour préférer l'emploi de celle-ci à la méthode QZ.

Problème quadratique

L'algorithme de Jacobi-Davidson est validé en respectant certains paramètres. Ainsi, l'expérience a montré que la taille de projection des matrices doit être au moins choisi double du nombre de fréquences propres recherchées, avec un choix recommandé au triple. Le choix de la base initiale de sous-espace de recherche est aussi important : l'emploi d'une fonction sinusoïdale

Mode	ka
1	1.550
2	4.334
3	4.767
4	5.706
5	6.229
6	6.946

TAB. 5.8: Parallélépipède - Face supérieure munie d'un absorbant, autres parois rigides - Modes propres, modèle adapté ($\beta' = (1+i)10^6$) - Maillage III

pour sa construction a jusqu'à présent donné de bons résultats. Le critère le plus contraignant concerne le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de l'algorithme résolvant l'équation de correction (cf. algorithme 1). En utilisant un algorithme type DGMRES [56], il est observé qu'un nombre d'itérations environ égal à la taille du problème est nécessaire pour prétendre à une précision de 10^{-9} sur les modes ainsi calculés. Cette convergence peut être améliorée par l'emploi d'un pré-conditionneur de matrices adapté ou par un algorithme interne plus performant, tel BiCGstab(l) [57]. Ainsi, pour des problèmes à dimension faible à modérée, il faut privilégier la linéarisation. L'emploi de l'algorithme de Jacobi-Davidson sous cette forme doit être réservé au cas précis où le stockage des matrices de linéarisation est impossible, faute de mémoire par exemple.

Modèle adapté aux basses fréquences

Le premier test consiste à retrouver les fréquences de résonance du problème de Neumann-Dirichlet (une face « ouverte ») par ce nouveau modèle (cf. § 3.4.5). En effet, la prise en compte d'un fort coefficient d'absorption permet de simuler une condition de Dirichlet sur les nœuds souhaités ($\beta \to \infty$ d'où $Z \to 0$). Pour le parallélépipède discrétisé à 376 éléments et avec un paramètre d'absorption β supérieur à $(1+i)10^6$, le tableau 5.8 montre une parfaite concordance des résultats avec ceux issus de la formulation de type mixte (cf. Tab. 5.6). Des valeurs parasites peuvent subsister mais leur très faible amplitude (d'ordre inverse à celui des paramètres d'absorption employés) permet de les filtrer facilement.

Un second test met en jeu le panneau de laine de verre déjà défini tel que $\beta' = (0.06 + i0.074)$. La partie réelle (resp. imaginaire) correspond à la pente de la partie réelle (resp. imaginaire) de l'admittance de la figure 3.5. Les résultats pour les 6 premiers modes, donnés dans le tableau

Mode	ka	
	II	III
1	3.520 -i 0.244	3.347 -i 0.225
2	4.272 -i 0.062	4.156 -i 0.059
3	5.756 -i 0.220	5.568 -i 0.231
4	5.856 -i 0.040	5.615 -i 0.042
5	7.056 -i 0.167	6.788 -i 0.198
6	7.149 -i 0.418	6.903 -i 0.021

TAB. 5.9: Parallélépipède - Face supérieure munie d'un absorbant,
autres parois rigides - Modes propres, modèle adapté ($\beta' = (0.06 + i0.074)$)

5.9, montrent une altération moins importante des modes que par le modèle de Rakajumar, notamment sur le premier mode.

Conclusions

Le tableau 5.10 résume les résultats obtenus avec le maillage III par les deux modèles de prise en compte des absorptions et par une solution de référence de type éléments finis. On constate que la modèle adapté aux basses fréquences donne les valeurs les plus proches de celles escomptées. La figure 5.9 illustre les champs de pression dans le plan XOZ et en $y = 0.5a$ pour les cinq premiers modes et pour les deux méthodes. Les champs sont moins altérés dans le cas du modèle adapté, témoignant une fois de plus d'une meilleure prise en compte de l'impédance de surface dans la gamme des basses fréquences. Les amplitudes de pression issues du modèle de Rakajumar sont, à l'exception du premier mode, quasiment identiques à celles du parallélépipède ouvert (cf. fig. 5.8). Le modèle adapté donne des amplitudes de pression en adéquation avec le cas rigide pour les premiers modes et s'en écarte progressivement (cf. fig. 5.7).

Remarque

Il est possible d'adapter à son tour le modèle de Rakajumar aux basses fréquences. En prenant comme coefficient d'absorption β la moyenne de l'admittance acoustique sur la gamme de fréquence étudiée (pour notre exemple : $3 < ka < 6$), des résultats tendant vers le modèle adapté sont contenus dans le tableau 5.11. Il faut néanmoins voir que l'admittance sur cette gamme et pour le matériau utilisé passe du simple au double. Pour calculer les modes au plus juste, il conviendrait de déterminer le coefficient d'absorption du modèle de Rakajumar sur une fenêtre fréquentielle encore plus petite et de répéter les calculs pour l'ensemble des fréquences de réso-

Mode	ka		
	MEF	Rakajumar	Adapté
1	3.224	0.901	3.347
2	3.982	3.725	4.156
3	5.097	4.283	5.568
4	5.334	5.683	5.615

TAB. 5.10: Parallélépipède - Face supérieure munie d'un absorbant, autres parois rigides Modes propres par 3 méthodes - Maillage III

Mode	ka	
	Rakajumar adapté	Adapté
1	3.295 -i 0.386	3.347 -i 0.225
2	4.173 -i 0.180	4.156 -i 0.059
3	5.452 -i 0.450	5.568 -i 0.231
4	5.620 -i 0.102	5.615 -i 0.042

TAB. 5.11: Parallélépipède - Face supérieure munie d'un absorbant, autres parois rigides Modes propres - Maillage III

nance. Ce découpage perd vite son intérêt car le temps de calcul est alors multiplié par le nombre de sous-intervalles.

5.3 Symétrisation

Les calculs précédents peuvent être repris en prenant en compte les éventuels plans de symétrie. Les résultats 5.12 sont identiques mais le temps de calculs est nettement diminué. Pour illustration, le cube de dimensions $L_x = 2a$ $L_y = 2a$ et $L_z = 2a$ est considéré (cf. fig. 5.10). Il est discrétisé par 600 éléments, définissant 1802 nœuds pour un ka maximal de 7.85 .

Lorsque le chargement appliqué au problème possède 1, 2 ou 3 plans de symétrie ou d'antisymétrie, la maillage se réduit à la moitié, au quart ou au huitième de la surface (cf. Figures 5.12 5.13 et 5.14).

L'extraction numérique présente quelques difficultés pour l'obtention des modes multiples. Par exemple, pour le mode 5 qui est d'ordre 6, le calcul fournit 2 valeurs proches mais néanmoins

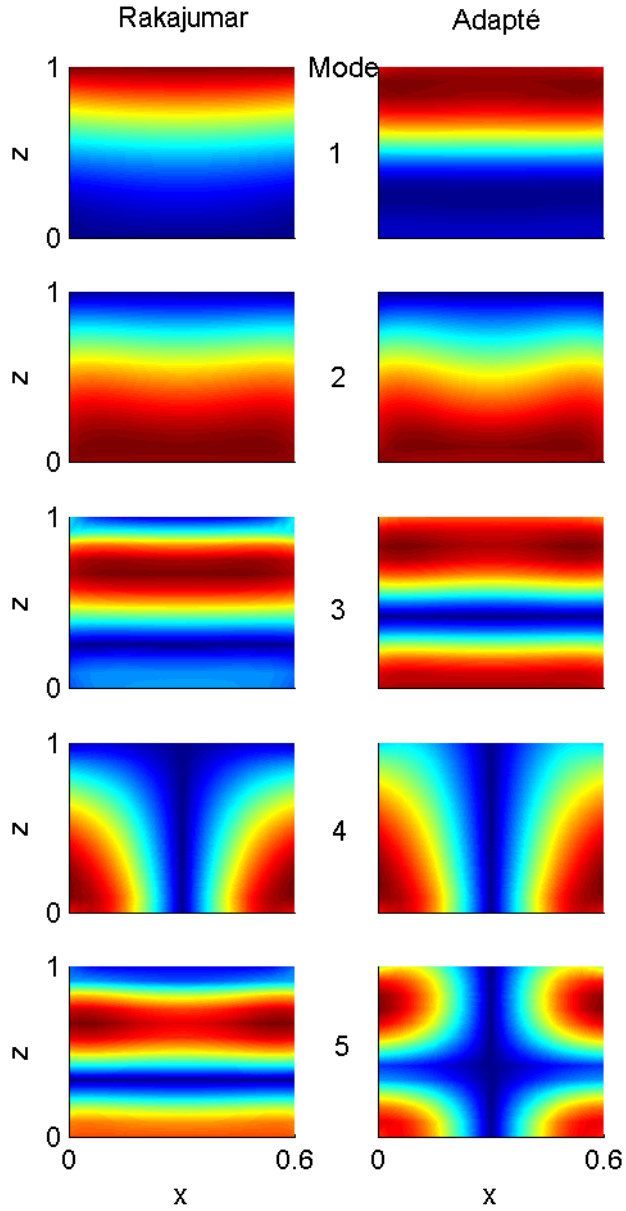


FIG. 5.9: Parallélépipède - Face supérieure absorbante
Amplitudes de pression - Maillage III

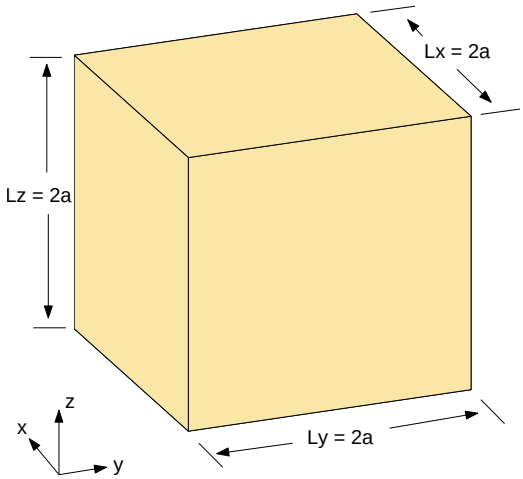


FIG. 5.10: Cube

mode	n_x	n_y	n_z	ka théorique	ka	Erreurs relatives
1	0	0	1	1.571	1.605	2.16 %
	0	1	0			
	1	0	0			
2	0	1	1	2.221	2.272	2.29 %
	1	0	1			
	1	1	0			
3	1	1	1	2.721	2.742	0.77 %
4	0	0	2	3.142	3.247	3.34 %
	0	2	0		3.262	3.81 %
	2	0	0			
5	0	1	2	3.512	3.586	2.10 %
	0	2	1			
	1	0	2			
	1	2	0		3.673	4.58 %
	2	0	1			
	2	1	0			

TAB. 5.12: Cube - Parois rigides
ka des 5 premiers modes

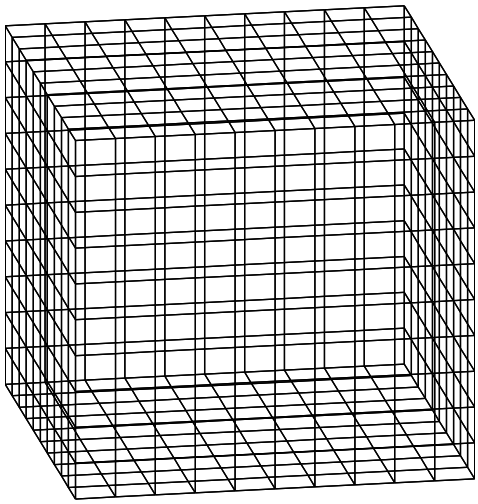


Fig. 5.11: Cube - Maillage I

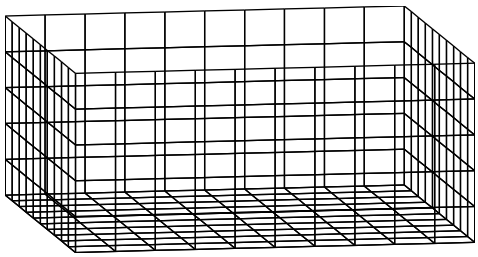


Fig. 5.12: Cube - Maillage II

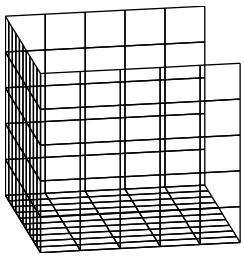


Fig. 5.13: Cube - Maillage III

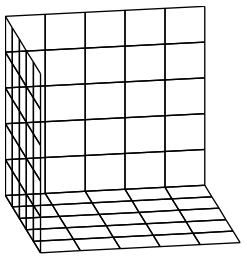


Fig. 5.14: Cube - Maillage IV

Maillage	Nœuds	Solveur	Tps (s) solveur	Total (s)
I	1802	QZ	1474	2135
		IRAM	5.6	662.3
II	941	QZ	197	297.2
		IRAM	1.5	97.4
III	491	QZ	26.5	42.6
		IRAM	0.5	16.4
IV	256	QZ	5.4	14.8
		IRAM	0.2	9.3

Tab. 5.13: Cube - Symétries - Temps de calcul

différentes. Les avantages en termes de temps de résolution sont illustrés par le tableau 5.13 pour les algorithmes QZ et IRAM.

5.4 Points internes

L'introduction de points internes de collocation est discutée en dégageant différents critères d'utilisation.

5.4.1 Emplacement

Il s'agit dans un premier temps de comprendre comment l'introduction de points internes dans la méthode influence cette dernière. Des exemples simples sont traités avec un nombre de points internes réduit. Les structures étudiées dans cette section sont soumises à des conditions aux frontières de type Neumann.

1 point interne

Reprenant le parallélépipède rectangle de dimensions $L_x = 0.6a$ $L_y = 0.8a$ et $L_z = a$ défini précédemment (cf. fig. 5.1), un point interne y est introduit avec le maillage à 24 éléments. Le choix d'une discrétisation grossière est motivé par la sensibilité accrue sur les résultats de l'emploi d'un faible nombre de points internes.

- Plan XOY

Le point interne est placé sur la ligne définie par l'intersection des plans de symétries XOZ et YOZ du parallélépipède. Le graphique 5.15 donne les 6 premiers modes propres et leur variation par rapport aux modes obtenus sans point interne en fonction de d/a, distance entre le point interne et la face parallèle au plan XOY la plus proche.

Les modes sont fortement perturbés pour un placement proche de la surface, jusqu'à $d/a = 0.45$.

Seuls le premier et le sixième modes présentent ensuite des variations. L'emplacement du point interne sur les surfaces nodales explique ce comportement. Si le point interne appartient à une surface nodale, il introduit alors une équation triviale et n'a aucune incidence sur les modes liés à ce plan d'antisymétrie. Pour le premier, les vitesses sont symétriques par rapport à XOZ et YOZ et antisymétriques par rapport à XOY, le point interne introduit donc une équation non triviale que pour ce mode. Le sixième est le cas particulier où toutes les vitesses sont symétriques, l'influence du point interne est donc toujours présente indépendamment de sa position.

- Plan XOZ

Le point interne est maintenant placé sur la ligne définie par l'intersection des plans de symétries XOY et YOZ, les résultats sont reportés dans le graphique 5.16. De manière identique au précédent cas, on constate l'apparition de modes parasites (parfois complexes) pour $d/a \leq 0.1$ et une variation négligeable pour $d/a \geq 0.3$.

- Plan YOZ

Le point interne est maintenant placé sur la ligne définie par l'intersection des plans de symétries XOY et XOZ, les résultats (5.17) montrent un comportement analogue aux deux premiers cas.

6 points internes

On place les points dans le plan $y = 0.4a$ et $z = 0.5a$ de façon uniforme pour $0 \leq x \leq 0.6a$ de telle sorte que la distance entre deux points consécutifs est donnée par $(0.6a - 2d)/5$ où d est la distance définie auparavant. Il apparaît que la distance d'emplacement des points internes de collocation doit être liée à la taille des éléments employés, mais celles, variables, des éléments utilisés dans le maillage à 24 éléments (de $0.5a$ à $0.3a$) ne permet pas pour le moment de le préciser. De plus, un point situé à l'intérieur de la cavité et hors plans de symétries influe sur tous les modes comme le montre le graphique 5.19.

Critère d'emplacement

Pour terminer, on étudie l'influence d'un emplacement quelconque d'un seul point hors plans de symétries (cf. fig. 5.20). Des essais sont réalisés sur 2 discrétisations à 24 et 96 éléments du cube

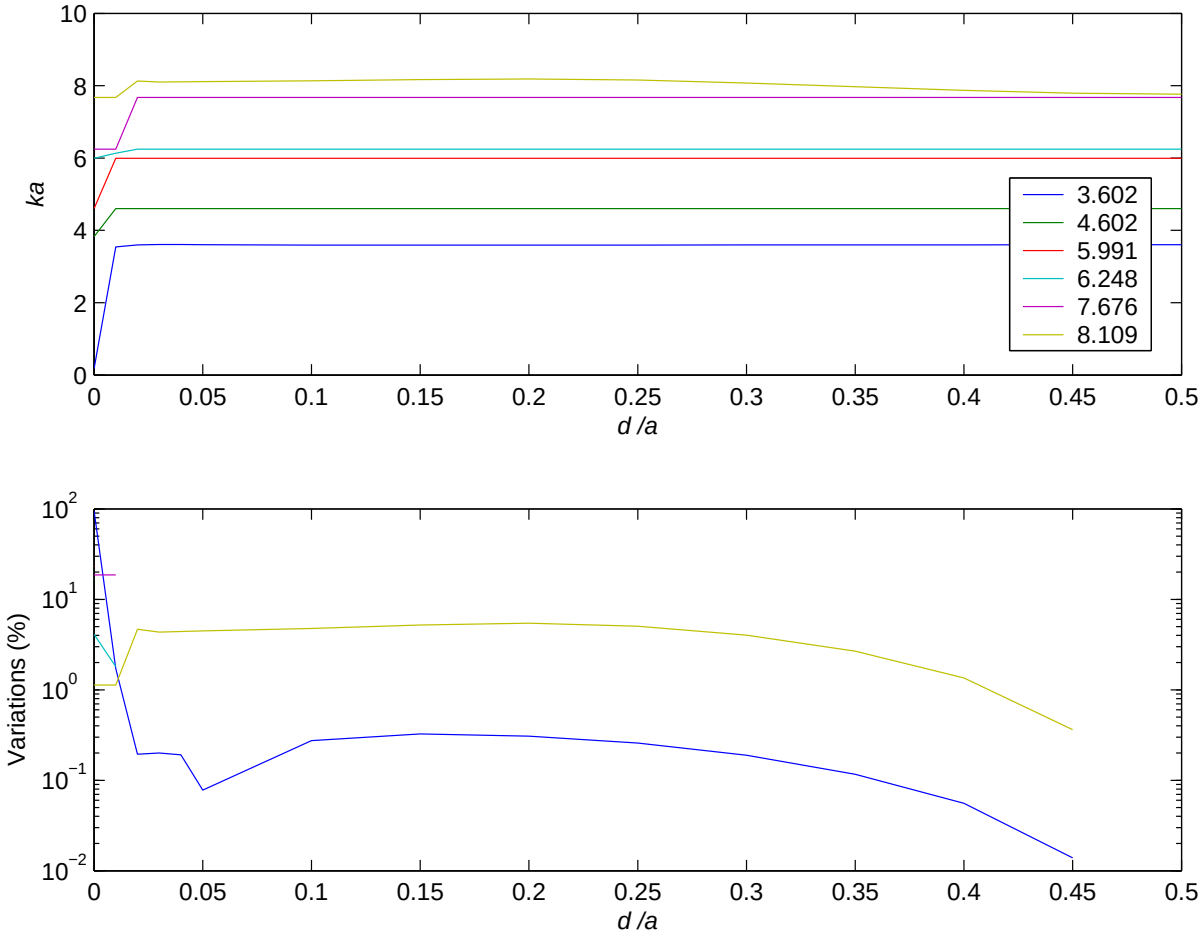


FIG. 5.15: Parallélépipède - 1 point interne ($x = 0.3a$, $y = 0.4a$, $0 \leq z \leq a$)

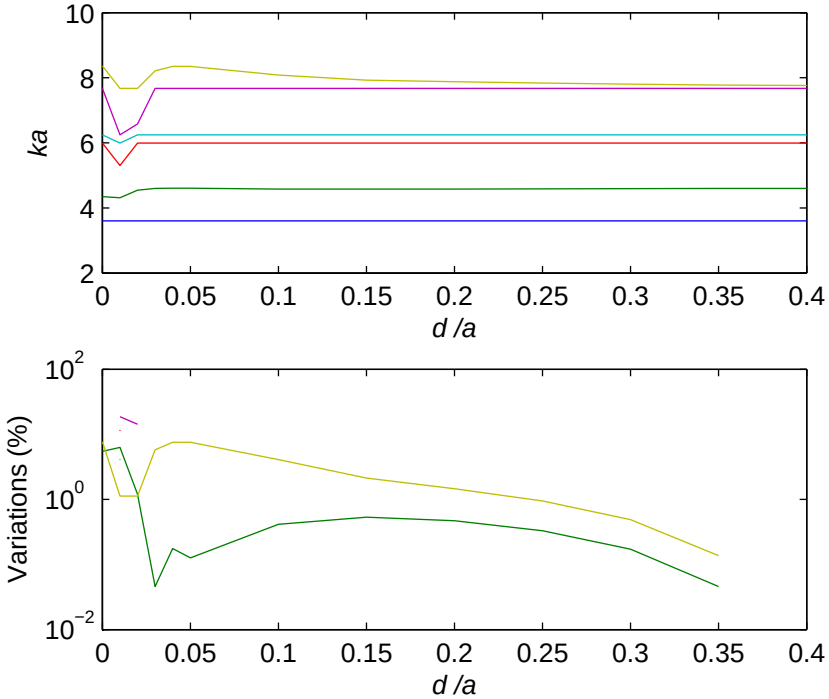


FIG. 5.16: Parallélépipède - 1 point interne ($x = 0.3a$, $z = 0.5a$, $0 \leq y \leq 0.8a$)

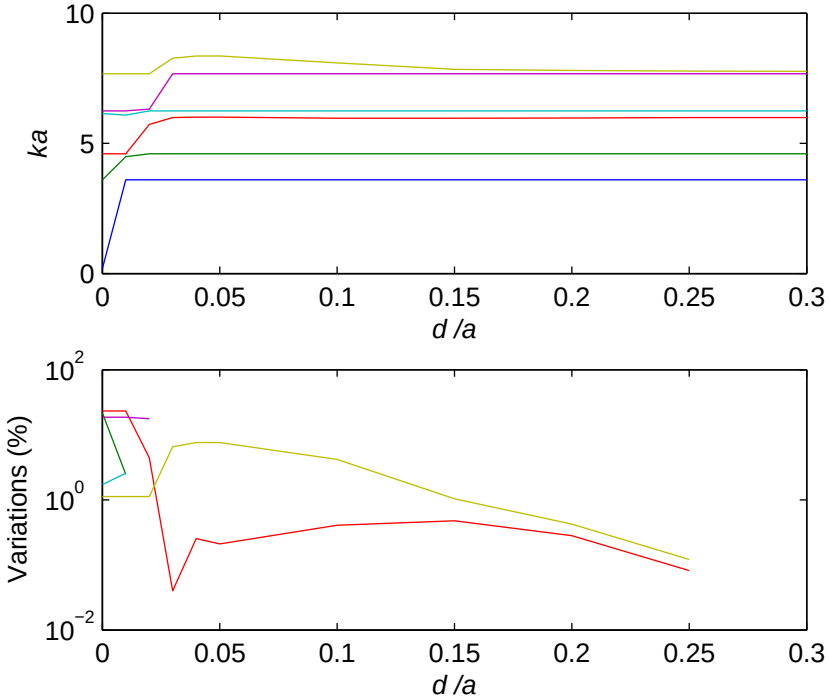


FIG. 5.17: Parallélépipède - 1 point interne ($y = 0.4a$, $z = 0.5a$, $0 \leq x \leq 0.6a$)

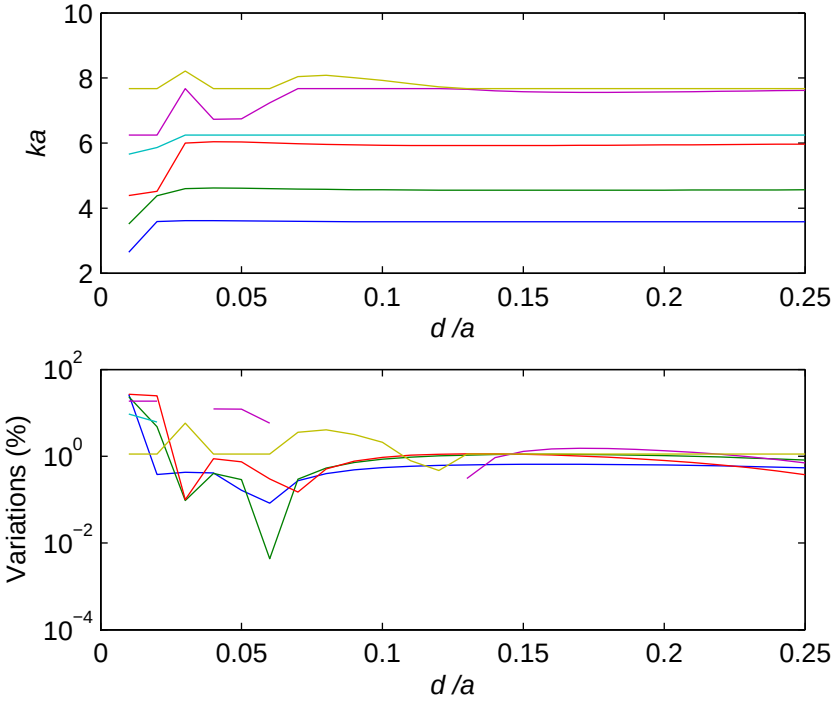


FIG. 5.18: Parallélépipède - 6 points internes ($y = 0.4a$, $z = 0.5a$, $0 \leq x \leq 0.6a$)

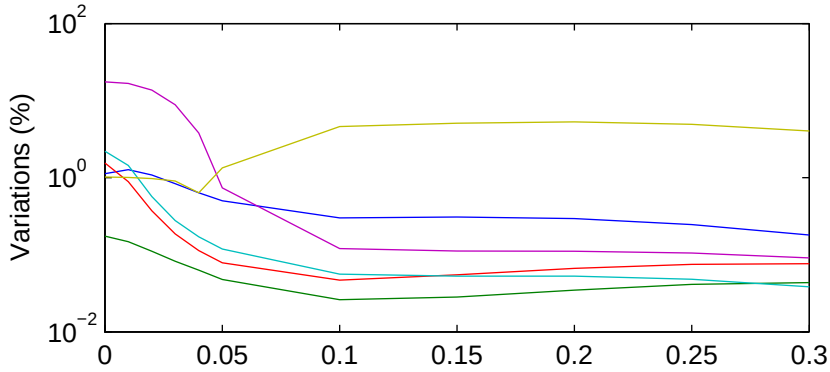


FIG. 5.19: Parallélépipède - 1 point interne ($x = 0.35a$, $y = 0.45a$, $0 \leq z \leq 0.3a$)

$Lx = Ly = Lz = 2a$ et celle à 94 éléments du parallélépipède défini précédemment (cf. Maillage II fig. 5.3). Ces trois maillages sont désignés respectivement par (a), (b) et (c). Les variations

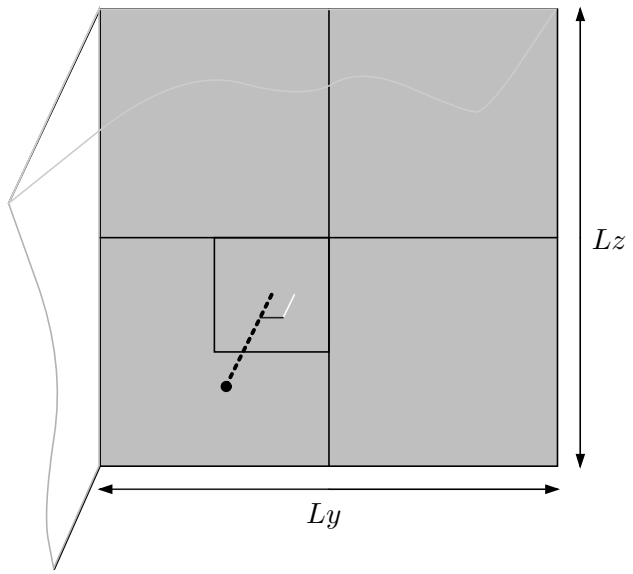


Fig. 5.20: Critère d'emplacement - Placement du point interne - Plan YOZ

sur les résultats initiaux sont données par rapport au critère en $\lambda/4$ de chaque discrétisation. De ces résultats (cf. fig. 5.21), un critère d'emplacement d est dégagé. d est égal à la distance moyenne entre les nœuds de la cavité discrétisé (ici $d = \lambda/8$). La pratique a cependant montré l'apparition de modes parasites (complexes). Bien que se situant dans l'immense majorité des cas sur une plage de fréquences trop élevées pour avoir une importance, ces perturbations peuvent être évitées en adoptant un critère plus restrictif, égal à $\lambda/4$.

5.4.2 Densité

À partir du résultat précédent, des grilles de points internes sont placées à $\lambda/8$ des centres des 6 faces du parallélépipède (cf. fig. 5.22). La convergence est observée pour un nombre de points internes équivalent au nombre d'éléments constituant la discrétisation (cf. fig. 5.23), c'est-à-dire 94. Cependant, on constate peu d'amélioration sur le calcul des modes quand le maillage est suffisant. À contrario, dans ce dernier cas, l'ajout de points de collocation peut dégrader les résultats. Le réel intérêt de l'utilisation de points internes réside dans l'étude de cavité sous-discrétisée, comme par exemple le parallélépipède à 24 éléments (jusqu'à 10% d'amélioration sur les premiers modes).

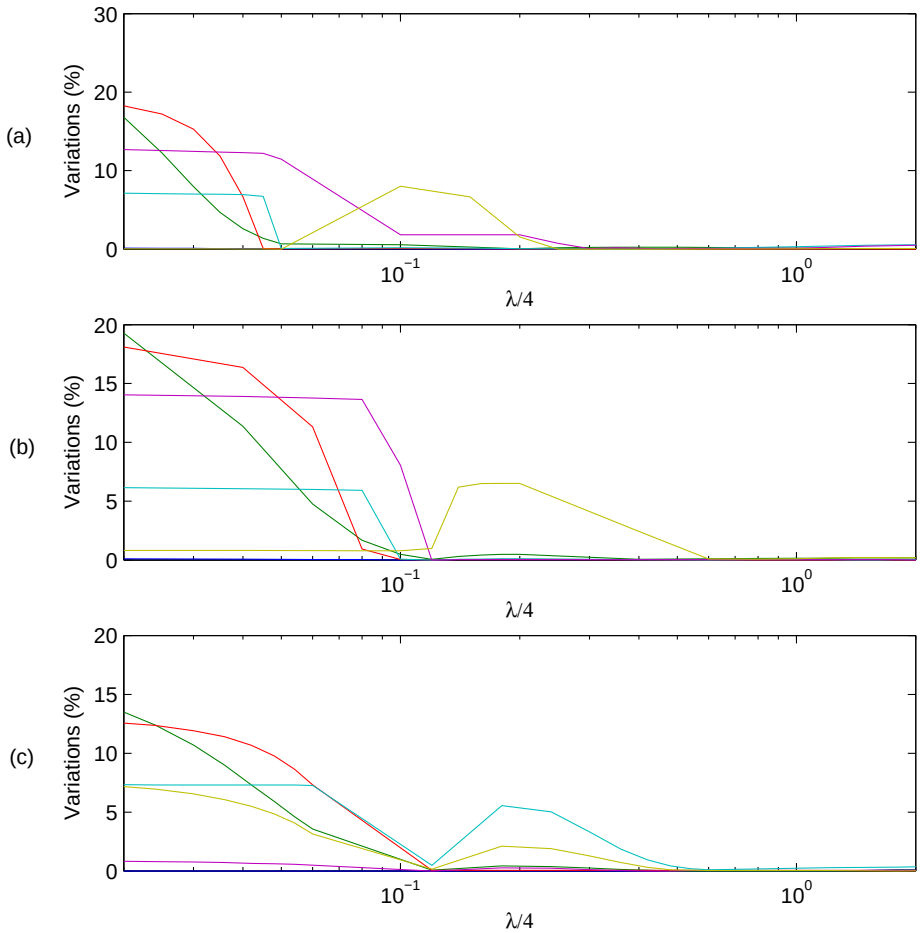


FIG. 5.21: Sensibilité du placement

path(156,-90)(168,-90)

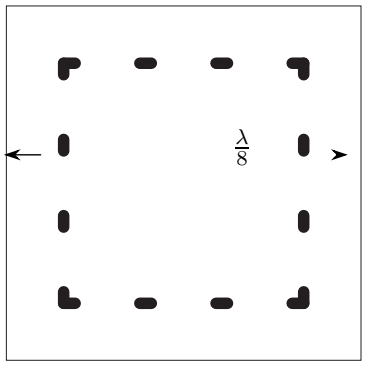


FIG. 5.22: Densité - Vue en coupe du cube avec les grilles de points internes

5.4.3 Distribution

Reprenant le cube à 96 éléments, différentes distributions ont été envisagées (cf. fig. 5.24).

- A : 6 grilles introduisant 296 points situés à $\lambda/8$ des faces,
- B : 6 grilles introduisant 292 points densifiés aux coins et situés à $\lambda/8$ des faces,
- C : distribution aléatoire de 296 points dans une sphère de rayon r variable vérifiant $R_\alpha - \lambda/4 \leq r \leq R_\alpha - \lambda/8$,
- D : distribution aléatoire de 296 points dans une sphère de rayon $r = R_\alpha - \lambda/8$.

où R_α est la distance minimale entre un noeud du maillage et le centre du cube. Les sphères des distributions C et D ont pour origine le centre géométrique du cube.

Les résultats les plus satisfaisants sont obtenus pour les distributions de type A (cf. fig. 5.25). Les placements aléatoires ne semblent offrir que leur facilité d'obtention comme unique avantage. Il faut cependant noter que les résultats de ces deux distributions témoignent de l'inutilité d'adjoindre du « volume » (configuration C) au placement surfacique des points internes (configuration D) si ce dernier est insuffisant.

5.4.4 Conclusion

L'emploi de points internes de collocations dans la méthode de l'intégrale particulière doit être réservé au cas des maillages sous-discrétisés. Un point interne par élément, situé à $\lambda/8$ du centre de celui-ci est un bon compromis. Des améliorations plus nettes sont constatées avec l'emploi de 2 points internes par éléments, placés à $\lambda/8$ et à $\lambda/4$, mais les gains obtenus sont à mettre en rapport avec l'augmentation de la taille du problème aux valeurs propres à résoudre. Ainsi, à temps de calculs égal, il est souvent plus intéressant d'augmenter la discrétisation que d'introduire des points de collocation supplémentaires à l'intérieur de la cavité.

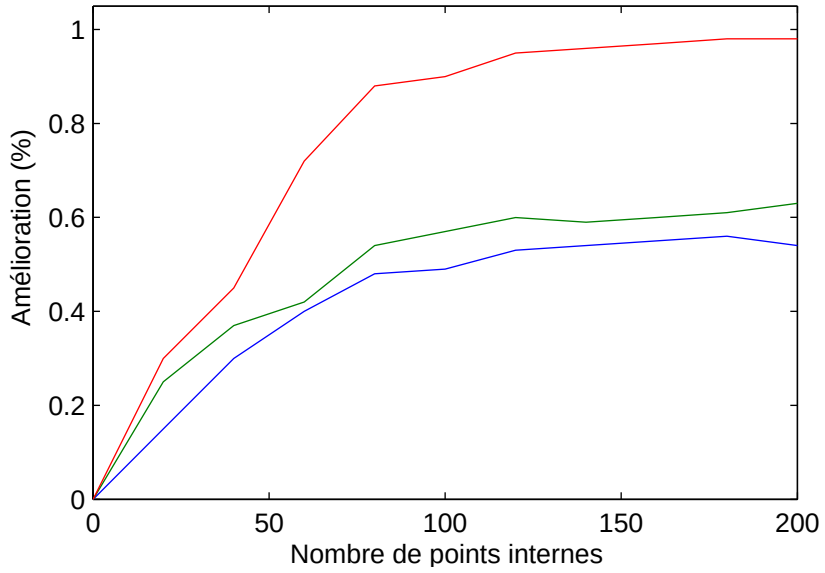


FIG. 5.23: Améliorations sur 3 modes

Une application simple de ces règles d'utilisation est effectuée sur les trois discrétisations du parallélépipède (cf. fig 5.3) ; 48, 188 et 752 points internes sont ainsi introduits dans les maillages I, II et III, respectivement. Les résultats du tableau 5.14 montrent une convergence accrue sur tout les modes pour le maillage I, 11 des 12 modes du II et pour la moitié des modes du III.

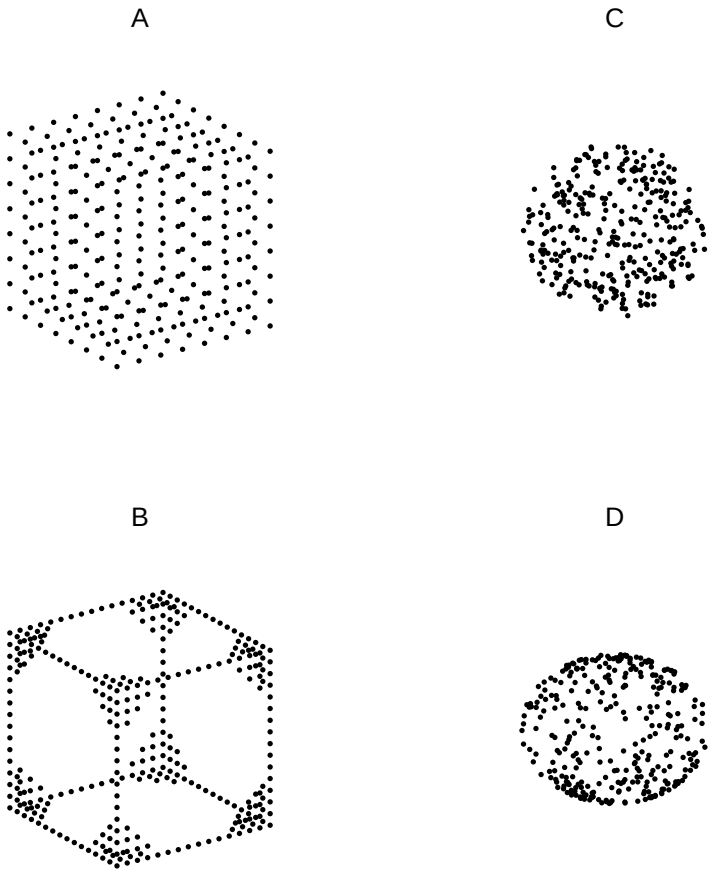


FIG. 5.24: Les 4 configurations de placement

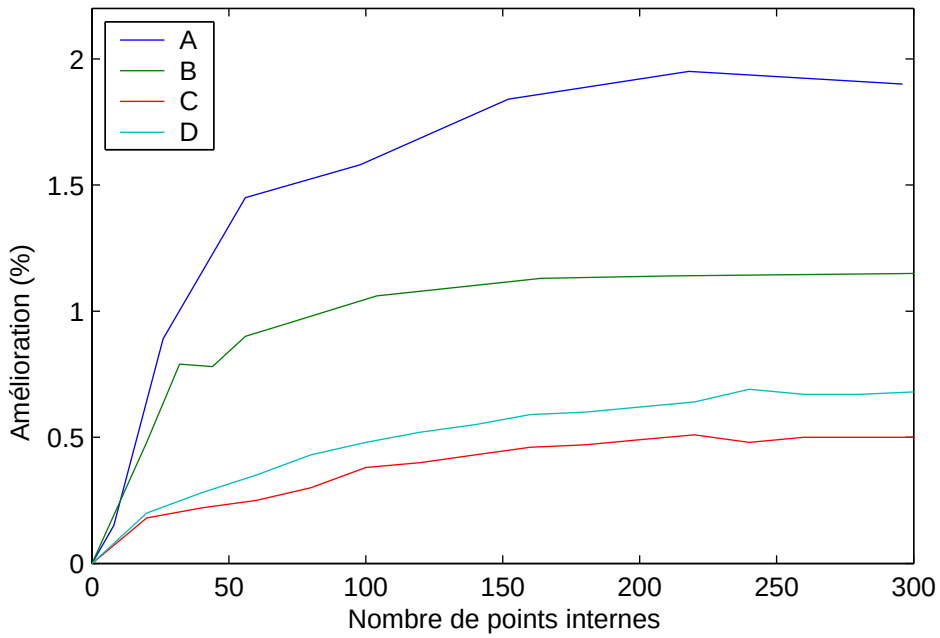


FIG. 5.25: Améliorations sur les 5 premiers modes pour les 4 configurations

Mode	ka		
	I	II	III
1	3.513	3.222	3.183
2	4.349	4.100	4.014
3	5.512	5.335	5.2
4	5.828	5.580	5.401
5	5.959	6.493	6.34
6	6.899	6.552	6.407
7	7.621	7.062	6.81
8	7.636	7.520	7.374
9	7.994	7.603	7.498
10	8.071	8.314	8.104
11	8.497	8.500	8.311
12	9.492	8.760	8.588

TAB. 5.14: Parallélépipède - ka sur 3 discrétisations avec ajout de points internes

Chapitre 6

Applications

6.1 Introduction

Ce chapitre porte sur la modélisation d'un habitacle de voiture simplifié (cf. fig. 6.1) couramment utilisé par de nombreux auteurs [14, 58, 59]. Cette structure ne présente pas de solution analytique.

6.2 Compartiment de Sedan

6.2.1 Condition de Neumann

La table 6.1 montre les résultats de la méthode de l'intégrale particulière (GPIM) face à une méthode du déterminant (DSM) et une méthode éléments finis (FEM) via ANSYS®. Le maillage constitué de 90 éléments rectangulaires pour les méthodes de frontières (BEM) correspond à un maillage éléments finis de 54 « briques ». Le relatif manque de précision de la GPIM est compensé

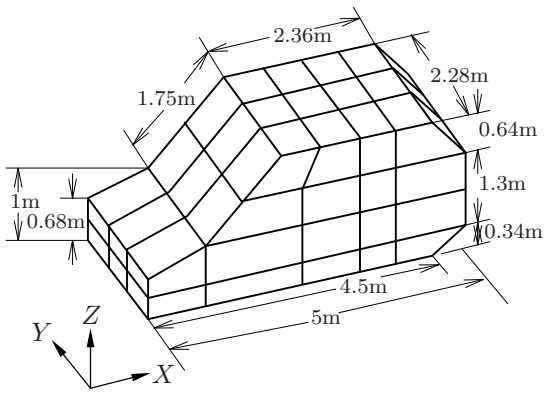


Fig. 6.1: Compartiment Sedan - maillage à 90 éléments

Mode	FEM	BEM	
		DSM	GPIM
1	0.72	0.7	0.74
2	1.22	1.2	1.27
3	1.38	1.4	1.55
4	1.49	1.48	1.57
5	1.55	1.57	1.74

TAB. 6.1: Modes propres (ka) de l'habitacle pour 3 méthodes numériques

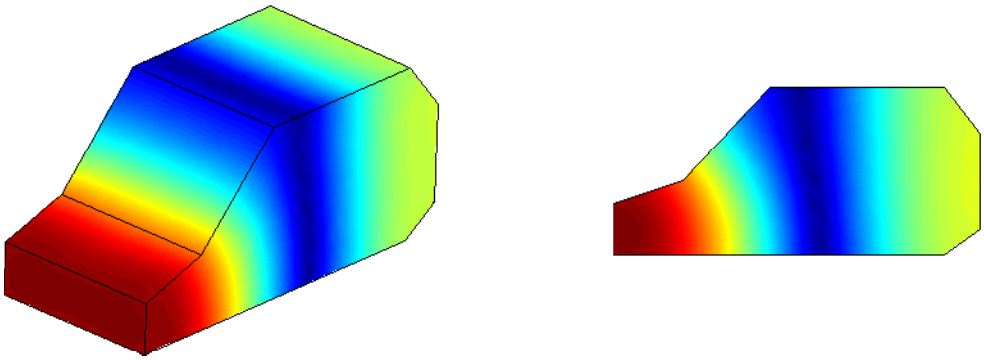


FIG. 6.2: Champs de pression - 1er mode
Vue 3D - Vue dans le plan du 1er tiers

par le gain important en temps de calculs. De plus, cette méthode reste aussi supérieure à la DSM quand des modes propres contigus sont recherchés.

Les figures 6.2 à 6.6 illustrent les champs de pressions régnant sur les surfaces intérieures de l'habitacle ainsi que dans le plan XOZ avec $y = y_{max}/3$ correspondant approximativement au plan occupé par le conducteur.

Pour des discrétisations plus fines (Tableau 6.2), les résultats convergent vers les valeurs propres obtenues par ANSYS® pour un maillage de grande taille (5952 éléments) et considérés comme références.

Symétries

Les modes symétrique et antisymétrique de l'habitacle sont déterminés par l'application de la méthode de l'intégrale particulière sur le demi-maillage de 86 éléments, équivalent au maillage

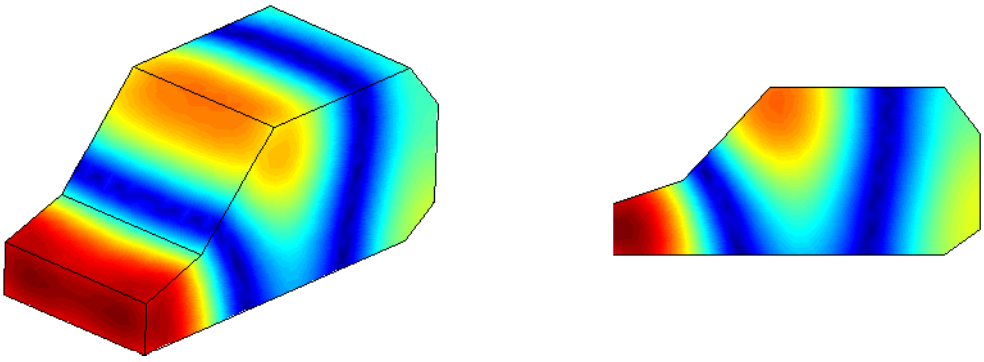


FIG. 6.3: Champs de pression - 2ème mode
Vue 3D - Vue dans le plan du 1er tiers

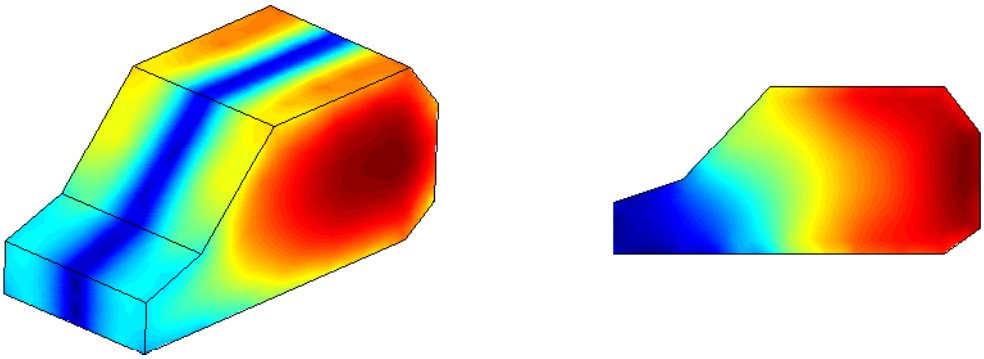


FIG. 6.4: Champs de pression - 3ème mode
Vue 3D - Vue dans le plan du 1er tiers

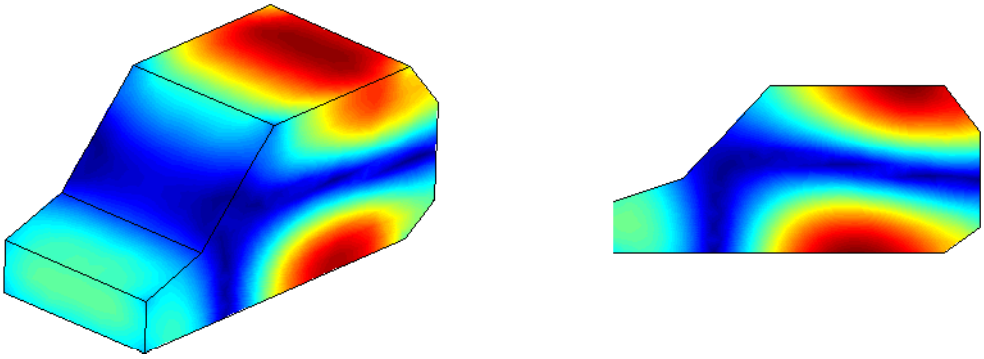


FIG. 6.5: Champs de pression - 4ème mode
Vue 3D - Vue dans le plan du 1er tiers

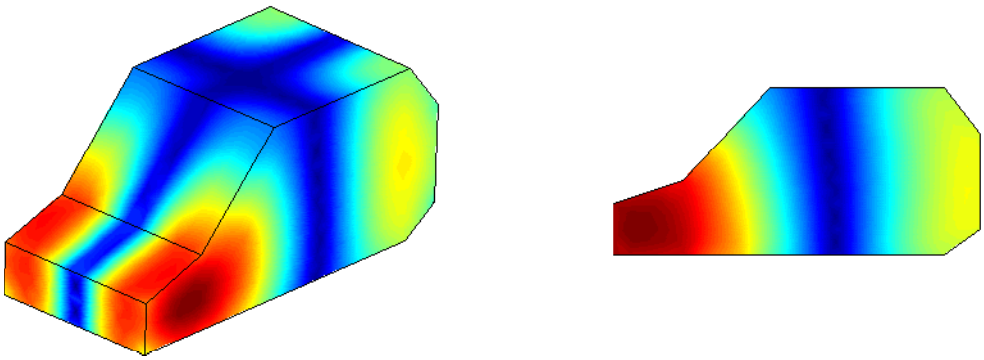


FIG. 6.6: Champs de pression - 5ème mode
Vue 3D - Vue dans le plan du 1er tiers

Mode	GPIM			FEM
	90 elts	172 elts	688 elts	
1	0.743	0.723	0.719	0.715
2	1.275	1.242	1.221	1.22
3	1.55	1.458	1.418	1.38
4	1.573	1.563	1.526	1.49
5	1.745	1.644	1.592	1.55
ka max	1.06	2.454	3.595	

TAB. 6.2: Modes propres (ka) de l'habitacle pour trois discrétisations

Mode	GPIM	
	Symétrique	Antisymétrique
1	0.723	
2	1.242	
3		1.458
4	1.563	
5		1.644

TAB. 6.3: Répartition des modes propres (ka) de l'habitacle

Mode	GPIM	
	90 elts	90 elts + 47 pts
1	0.743	0.740
2	1.275	1.280
3	1.55	1.535
4	1.573	1.552
5	1.745	1.737

TAB. 6.4: Modes propres (ka) de l'habitacle - points internes

complet de 172 éléments du tableau 6.2. Les résultats (cf. Tab. 6.3) confirment la répartition des modes symétriques et antisymétriques comme le laissaient envisager les figures 6.2 à 6.6.

Points internes

L'introduction de points internes vérifiant les conditions énoncées dans le chapitre précédent (cf. §5.4.4) apporte une convergence accrue pour 4 des 5 premiers modes (cf. Tab. 6.4). L'amélioration reste néanmoins faible : la géométrie particulière du compartiment, à l'avant surtout, empêche un placement optimal des points de collocations internes.

6.2.2 Conditions mixtes

Pour tester d'autres conditions aux limites, les calculs suivants sont menés dans 3 configurations :

- le compartiment est équipé d'un toit ouvrant (Neumann-Dirichlet)

Mode	GPIM	
	Neumann	Neumann - Dirichlet
1	0.743	0.512
2	1.275	0.902
3	1.55	1.446
4	1.573	1.661
5	1.745	1.799

TAB. 6.5: Modes propres (ka) de l'habitacle pourvu d'un toit ouvert

- le plafond est tapissé d'un panneau absorbant (Neumann-Absorption)
- le compartiment est équipé d'un toit ouvrant et le sol recouvert d'un panneau absorbant (Neumann-Dirichlet-Absorption)

Neumann-Dirichlet

Les éléments définis en $z = 2.28a$ sont considérés ici comme étant ceux du toit ouvrant. Un décalage très important est observé sur les deux premiers modes (cf. Tab. 6.5). Un mode additionnel $ka = 0.512$ apparaît. La figure 6.7 illustre les champs de pression notamment de ce nouveau premier mode, très bruyant [4], de l'habitacle ainsi configuré.

Neumann-Absorption

Les éléments définis en $z = 2.28a$ correspondent maintenant à un matériau absorbant. Il s'agit d'un panneau de laine de verre aux propriétés identiques avec $\beta = 0.925$ et $\beta' = 0.06 + i0.074$. Le tableau 6.6 montre un décalage plus important sur des modes pour le modèle de Rakajumar. Ce dernier se rapproche fortement sur certains modes (cf. fig. 6.8) des amplitudes de pression obtenues avec un toit ouvert donc d'une condition de Dirichlet. Cette constatation, déjà effectuée dans le paragraphe 5.2.3, montre la difficulté de ce modèle pour décrire correctement le comportement acoustique d'un revêtement à basses fréquences.

Les deux modèles sont néanmoins en accord avec la constatation courante que les modes dans un habitacle automobile pourvu d'absorbants sont plus élevés que ceux du même habitacle pourvu de parois rigides [60].

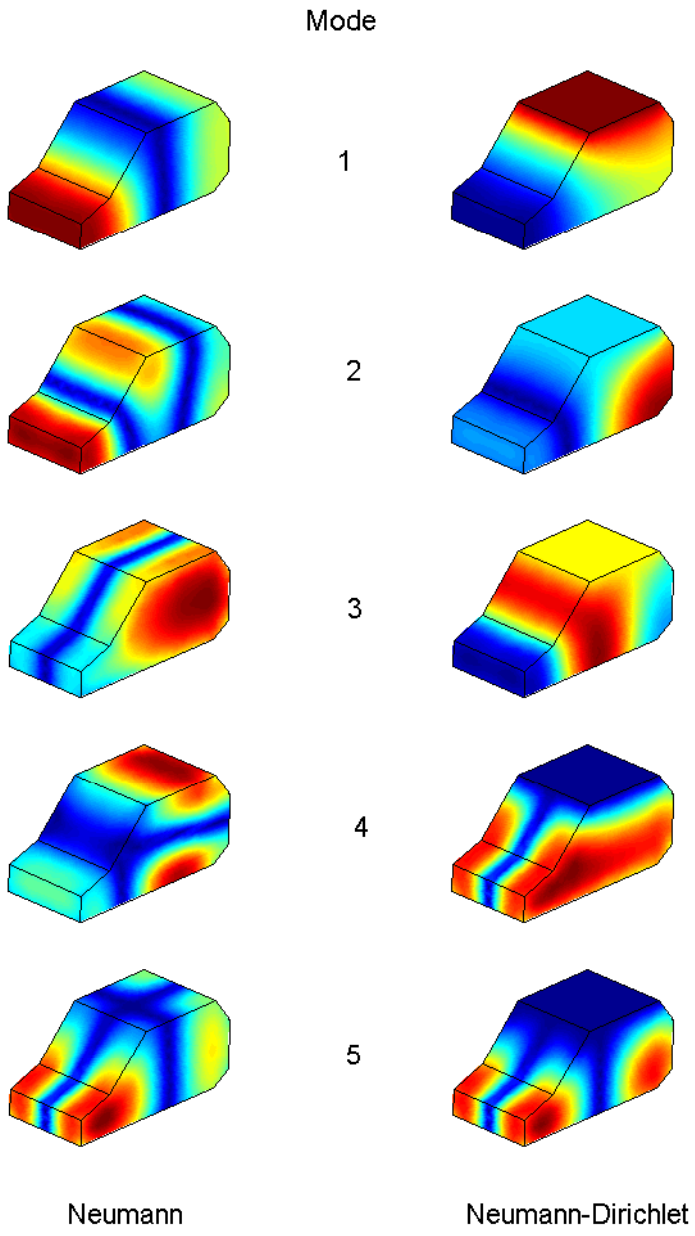


FIG. 6.7: Champs de pression - 5 premiers modes - Neumann-Dirichlet

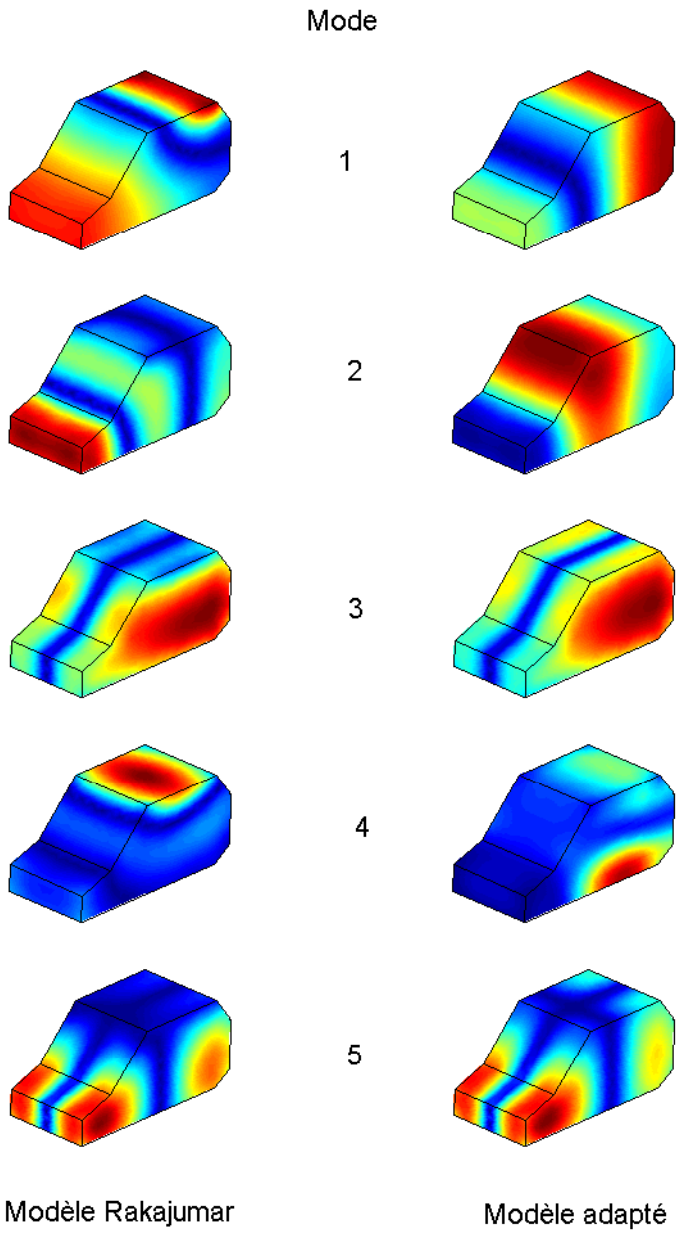


FIG. 6.8: Champs de pression - 5 premiers modes - Neumann-Absorption

Mode	GPIM	
	Rakajumar	Adapté
1	0.767 - i 0.075	0.747 - i 0.004
2	1.383 - i 0.090	1.293 - i 0.013
3	1.634 - i 0.051	1.569 - i 0.012
4	1.777 - i 0.027	1.625 - i 0.043
5	1.797 - i 0.789	1.753 - i 0.005

TAB. 6.6: Modes propres (ka) de l'habitacle pourvu d'un toit absorbant

Mode	GPIM	
	Rakajumar	Adapté
1	0.482 - i 1.152	0.531 - i 0.016
2	1.028 - i 0.527	0.933 - i 0.026
3	1.614 - i 0.391	1.501 - i 0.044
4	1.895 - i 0.931	1.712 - i 0.036
5	1.903 - i 0.193	1.865 - i 0.046

TAB. 6.7: Modes propres (ka) de l'habitacle pourvu d'un toit ouvert et d'un plancher absorbant

Neumann-Dirichlet/Absorption

L'influence du toit ouvert est prépondérante sur celle due à la présence d'un absorbant fort ($\beta = 0.925$ et $\beta = 0.06 + i0.074$) sur le plancher (cf. fig. 6.9) pour le modèle d'impédance adapté. L'influence du revêtement commence se faire sensible pour le quatrième mode où des différences sur la distribution des pressions au niveau du plancher apparaître. Ce phénomène est amplifié dans le modèle de Rakajumar mais ne traduit pas, une fois de plus, une absorption réaliste.

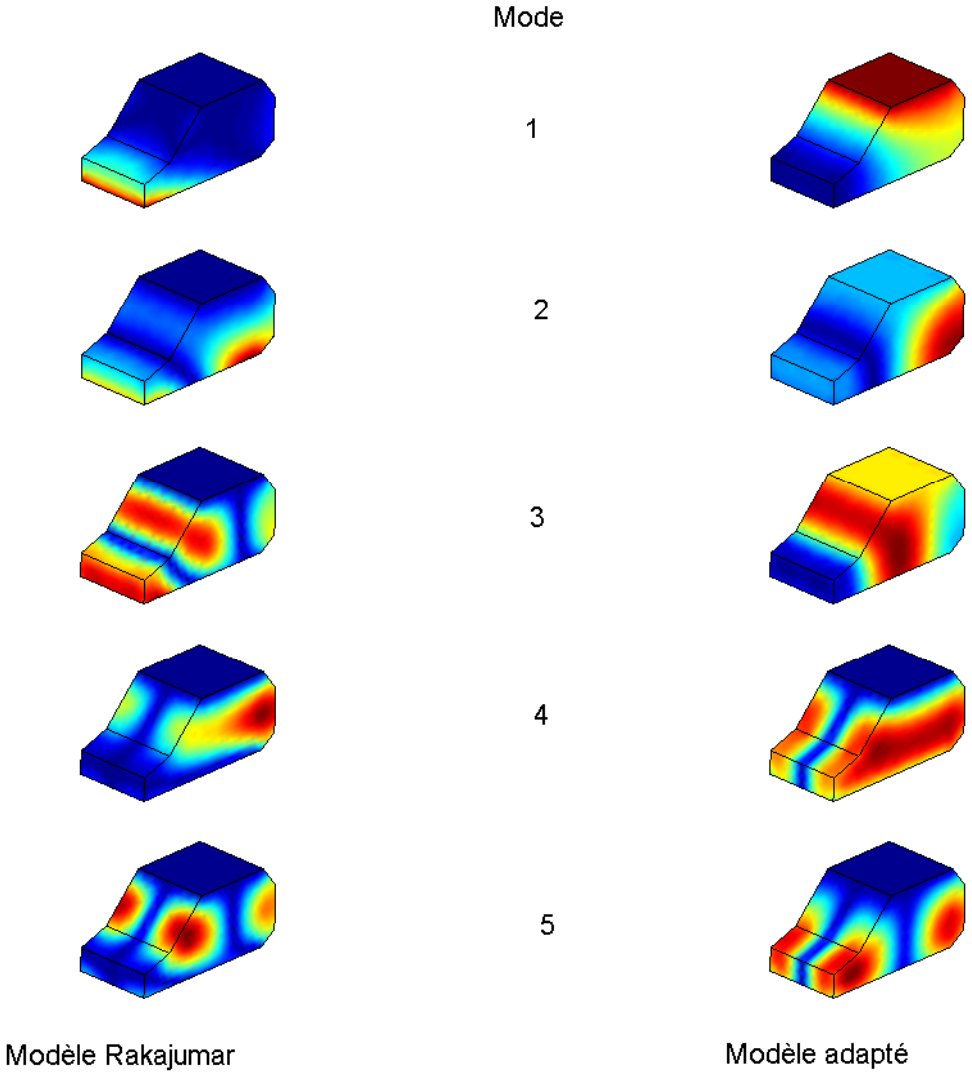


FIG. 6.9: Champs de pression - 5 premiers modes - Neumann-Dirichlet/Absorption

Conclusion générale

Ce document porte sur la modélisation numérique du comportement acoustique dans une cavité. L'effort principal porte sur l'identification des modes de résonance. La solution développée est basée sur la méthode de l'intégrale particulière [61]. Elle repose sur une discrétisation par des éléments isoparamétriques à variation quadratique. Elle a été validée dans le cas de structures tridimensionnelles avec ou sans plan de symétrie ou d'antisymétrie, en particulier des géométries comme le parallélépipède rectangle et le cube qui présentent l'avantage d'admettre une solution analytique simple pour des parois rigides ou molles. Une application à un habitacle de voiture simplifié, dit compartiment de Sedan [58], a mis en valeur le potentiel de cet outil numérique. En parallèle, la mise au point d'outils graphiques de visualisation des champs de pression permet d'interpréter les résultats. Le principal attrait de la formulation intégrale est sa facilité d'exploitation. Même si un tel code nécessite un gros travail de développement et de mise au point, son principal attrait intervient dans sa phase d'exploitation puisque le maillage est limité à la surface de la structure. Comparativement à la méthode des éléments finis, le temps de génération du maillage et la taille du problème sont réduits. Par conséquent, les moyens de calculs sont moins exigeants et diminuent d'autant le coût du matériel informatique nécessaire. Les applications visées sont l'acoustique automobile, déjà largement étudiée par de nombreux auteurs, et l'acoustique architecturale.

Parmi les travaux réalisés, on peut citer :

- les tests de différents algorithmes d'extraction des modes de résonance. Ils ont conduit à privilégier la méthode d'Arnoldi avec réitération implicite [50] qui semble être la plus performante. Pour les problèmes aux valeurs propres quadratiques, l'algorithme de Jacobi-Davidson est une alternative intéressante mais présente des difficultés de mise en œuvre,
- une amélioration de la précision des calculs par l'ajout de points internes de collocation [40]. Une procédure de placement de ces points supplémentaires a été proposée,
- la mise au point d'une technique originale de prise en compte des impédances de surface. Après comparaison avec la méthode de Rakajumar *et al* [41], son apport dans le domaine

des basses fréquences (jusqu'à 500 Hz) est indéniable.

Disposant d'un outil d'identification des résonances fiable et performant, l'amélioration du confort acoustique dans un espace clos est la prochaine étape. Cet objectif peut être atteint essentiellement par deux moyens : l'absorption passive et le contrôle actif. Le premier est déjà opérationnel puisqu'il suffit d'effectuer une étude paramétrique de la cavité : l'utilisateur dispose d'un code de simulation numérique capable de tester et de comparer différentes configurations de panneaux absorbants et, éventuellement, des modifications de géométrie. Par contre, le contrôle actif est une solution attrayante qui est une continuation logique à cette thèse. Dans un premier temps, le code est utilisé pour déterminer la répartition géographique des ondes dans la cavité pour chaque fréquence de résonance que l'on veut traiter. Après avoir repéré les zones bruyantes, le principe est de disposer autour du secteur d'intérêt (par exemple le voisinage de la tête du conducteur d'un véhicule) un certain nombre de sources élémentaires et de définir le signal adéquat de chacune d'entre elles pour, par superposition, générer un anti-bruit qui doit annuler théoriquement le bruit existant. Pour ce faire, il est possible de développer une formulation intégrale capable de fournir la force de rayonnement de chacune des sources [62]. Le nombre et la disposition géographique des sources sont les paramètres du modèle.

Bibliographie

[1] W. E. Falby et P. Surulinarayanasami : Boundary element applications in the automotive industry. *Industrial Applications of the boundary element methods*. Elsevier applied science, 1990.

[2] P. M. Morse et H. Feshbach : *Methods of Theoretical Physics*. Mc Graw-Hill, deuxième édition, 1953.

[3] O.C. Zienkiewicz : *The finite element method in engineering science*. McGraw-Hill, 1971.

[4] R.D. Ciskowski et C.A. Brebbia : *Boundary element methods in acoustics*. Computational Mechanics Publications, 1991.

[5] A. Lavie : *Modélisation du rayonnement ou de la diffraction acoustique par une méthode mixte équations intégrales - champ nul*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois, 1989.

[6] S. Ahmad et P.K. Banerjee : Free vibration analysis using bem particular integrals. *J. Engng Mech. ASCE*, 112:682–695, 1986.

[7] H.A. Schenck : Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 5:41–58, 1968.

[8] G. Chertock : integral equation methods in sound radiation and scattering from arbitrary surfaces. Rapport technique 3538, Nav. Ship. and Res. Dev. Center, Washington D.C., 1971.

[9] J. Giroire : Méthodes d'équations intégrales pour les problèmes extérieurs relatifs à l'équation de helmholtz. Comptes rendus de la journée d'études S.E.E. sur les calculs de propagation et de diffraction par la méthode des éléments finis, 1979.

[10] O.D. Kellog : *Foundations of potential theory*. Springer-Verlag, 1967.

[11] G.H. Koopman, L. Song et J.B. Fahnline : A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition. *Journal of the Acoustical Society of America*, 86:2433–2438, 1989.

[12] M. Bruneau : *Introduction aux théories de l'acoustique.* Publications de l'Université du Maine, 1971.

[13] A.F. Seybert et C.Y.R. Cheng : Application of the boundary element method to acoustic cavity response and muffer analysis. *ASME J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1986.

[14] G.P. Succi : The interior acoustic field of an automobile cabin. *Journal of the Acoustical Society of America*, 81:1688–1694, 1987.

[15] C. Vanhille : *Optimisation d'une combinaison équations intégrales-champ nul appliquée à la diffusion acoustique.* Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois, 1996.

[16] A.J. Burton et G.F. Miller : The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems. *Proc. R. London*, A 323, pages 201–210, 1971.

[17] T. Terai : On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods. *J. Sound and Vibr.*, 69:71–100, 1980.

[18] A. Leblanc : La méthode de superposition des ondes, 2001. Mémoire de DEA.

[19] D.V. Dean : *Finite element study of acoustic wave.* Thèse de doctorat, US Naval Postgraduate School, 1970.

[20] J.N. Decarpigny : *Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques.* Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1984.

[21] R. Bossut : *Modélisation de transducteurs piézoélectriques annulaires immergés par la méthode des éléments finis.* Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Haînaut Cambrésis, 1985.

[22] A. Lavie : Notice d'utilisation du code eqi, 1999. version 6.00.

[23] V. Smirnov : *Cours de Mathématiques Supérieures.* Mir, 1975.

[24] G. Dahlquist et A. Bjork : *Numericals methods.* Prentice Hall, 1974.

[25] J. C. Lachat et J. O. Watson : Effective numerical treatment of boundary element integral equations : a formulation for three-dimensional elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:991–1005, 1976.

[26] G. W. Benthien et Don Barach : Chief, user manual, 1986.

[27] A. Lavie, J.-N. Decarpigny, J.-C. Debus et B. Hamonic : Modélisation de l'intéraction acoustique entre transducteurs flextensionnels de classe 4 assemblés dans une antenne, 1986. Convention DRET n°C.89.34.093.00.470.75.01, second rapport d'avancement.

[28] J.R. Hutchinson et G.K.K. Wong : The boundary element method for plate vibrations. *Proc. ASCE 7th Int. Conf. Electronic Computation*, pages 297–311, 1979.

[29] G. Bezine : A mixed boundary integral-finite element approach to plate vibration problems. *Mech. Res. Commun.*, 7:141–150, 1980.

[30] D. Nardini et C. A. Brebbia : A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Proc. 4th Int. Conf. on BEM*, pages 313–326. Springer, Berlin, 1982.

[31] A.J. Nowak et C.A. Brebbia : The multiple reciprocity method. a new approach for transforming bem domain integrals to the boundary. *Engng Anal. Boundary Elem.*, 6:164–167, 1989.

[32] S.M. Kirkup et S. Amini : Solution of the helmholtz eigenvalue problem via the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:321–330, 1993.

[33] G. De Mey : Calculation of eigenvalues of the helmholtz equation by an integral. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:59–66, 1976.

[34] G.R.C. Tai et R.P. Shaw : Helmholtz equation eigenvalues and eigenmodes for arbitrary domains. *Journal of the Acoustical Society of America*, 56:796–804, 1979.

[35] D. Nardini et C. A. Brebbia : Transient boundary element elastodynamics using the dual reciprocity method and modal superposition. *Proc. 8th Int. Conf. on BEM*, pages 435–443. Springer, Berlin, 1986.

[36] A.J. Nowak : Temperature fields in domains with heat sources using boundary only formulations. *Proc. 10th Int. Conf. on BEM*, volume 2, pages 233–247. Springer, Berlin, 1988.

[37] N. Kamiya et E. Andoh : Robust boundary element scheme for helmholtz eigenvalue equation. *Proc. BEM*, volume 13, pages 839–850. Computational Mechanics Publications, 1991.

[38] N. Kamiya, E. Andoh et K. Nogae : Eigenvalue analysis by boundary element method : new developments. *Engng Anal. Boundary Elem.*, 12:151–162, 1993.

[39] P.K. Banerjee, S. Ahmad et H.C. Wang : A new bem formulation for the acoustic eigenfrequency analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26: 1299–1309, 1988.

[40] A. Ali, C. Rakajumar et S.M. Yunus : On the formulation of the acoustic boundary element eigenvalue problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:1271–1282, 1991.

[41] C. Rakajumar et A. Ali : Acoustic boundary element eigenproblem with sound absorption and its solution using lanczos algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:3957–3972, 1993.

[42] A. Craggs : A finite element model for acoustically lined small rooms. *J. Sound Vib.*, 108:327–337, 1986.

[43] O. C. Zienkiewicz et R. E. Newton : Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. *Proc. Int. Symp. on Finite Element Techniques*, pages 359–379, 1969.

[44] J.F. Allard : *Propagation of sound in porous media : modeling sound absorbing materials.* Chapman et Hall, 1993.

[45] Z. Bai : Study of acoustic resonance in enclosures using eigenanalysis based on boundary element method. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 2:219–234, 1995.

[46] C.B. Moler et G.W. Stewart : An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM J. Numer. Anal*, 10:241–256, 1973.

[47] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney et D. Sorensen : *LAPACK Users' Guide.* SIAM.

[48] C. Lanczos : An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Research of the National Bureau of Standards*, 45(4): 255–282, 1950. Research Paper 2133.

[49] C. Rakajumar et C. R. Rogers : The lanczos algorithm applied to unsymmetric generalized eigenvalue problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1009–1026, 1991.

[50] D. C. Sorensen. : Implicit application of polynomial filters in a k-step arnoldi method. *SIAM J. Matrix Analysis and Applications*, 13(1):357–385, 1992.

[51] R. B. Lehoucq, D. C. Sorensen et C. Yang : *ARPACK Users' Guide : Solution of large scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods.* SIAM.

[52] ARPACK : http ://www.caam.rice.edu/software/arpack/src/.

[53] D. R. Fokkema, G. L. G. Sleijpen et H. A. van der Vorst : Jacobi-davidson style qr and qz algorithms for the partial reduction of matrix pencils. *SIAM J. Sci. Comput.*, 10:94–125, 1998.

[54] G. L. G. Sleijpen, H. A. van der Vorst et M. B. van Gijzen : Quadratic eigenproblems are no problem. *SIAM News*, 29:8–9, 1996.

[55] G. L. G. Sleijpen, G. L. Booten, D. R. Fokkema et H. A. van der Vorst : Jacobi davidson type methods for generalized eigenproblems and polynomial eigenproblems. *BIT*, 36:595–633, 1996.

[56] Y. Saad et M. H. Schultz : Gmres : A generalized minimun residual algorithm for solving nonsymmentric linear systems. *SIAM*, 7:856–869, 1986.

[57] G. L. G. Sleijpen et D. R. Fokkema : Bicgstab(l) for linear equations involving matrices with complex spectrum. *ETNA*, 1:11–32, 1994.

[58] T. C. Yang, C. H. Tseng et S. F. Ling : A boundary-element-based optimization technique for design of enclosure acoustical treatments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 98:302–312, 1995.

[59] M. R. Bai : Study of acoustic resonance in enclosures using eigenanalysis based on boundary element method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 91:2529–2538, 1992.

[60] M. Kronast et M. Hildebrandt : Vibro-acoustic modal analysis of automobile body cavity noise. *Sound and Vibration*, 91:20–23, june 2000.

[61] A. Leblanc, A. Lavie et C. Vanhille : An acoustic resonance study of complex three-dimensional cavities by a particular integral method. Soumis à Acta Acustica, 2004.

[62] S. Takane et T. Sone : A new method for active absorption of sound based on the kirchhoff-helmholtz integral equation. 19th *International Congress on Acoustics (CD-ROM)*, 2001.

[63] P. M. Morse et K. U. Ingard : *Theoretical Acoustics.* Mc Graw-Hill, 1968.

[64] O. Dazel : *Synthèse modale pour les matériaux poreux.* Thèse de doctorat, INSA. de Lyon - ENTPE., 2003.

[65] C. Zikker et C. Kösten : *Sound absorbing materials.* Elsevier applied sciences, 1949.

[66] L. Beranek : Acoustical properties of homogeneous isotropic rigid tiles and flexible blankets. *Journal of the Acoustical Society of America*, 19:556–568, 1947.

[67] K. Attenborough : Acoustical characteristics of rigid fibrous absorbants and granular materials. *Journal of the Acoustical Society of America*, 73:785–799, 1983.

[68] M. Delany et E. Bazley : Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, 3:105–116, 1970.

[69] M. Biot : Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid - i. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28:168–178, 1956.

[70] M. Biot : Theory of propagation of elastic waves in a fluid-filled-saturated porous solid - ii. higer frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28:179–191, 1956.

[71] M. Biot : Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33:1482–1498, 1962.

[72] D. Johnson, J. Koplik et R. Dashen : Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 176:379–402, 1987.

[73] Y. Champoux et J. Allard : Dynamics tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, 70:1975–1979, 1991.

[74] D. Lafarge, P. Lamarinier, J. Allard et V. Tarnow : Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102:1995–2006, 1997.

Annexe A

Systèmes de coordonnées

Dans cette annexe, les différents systèmes de coordonnées utilisés dans ce document servant à décrire l'espace tridimensionnel sont énoncés [2].

Repère cartésien orthonormé

Les coordonnées par rapport à son origine sont déterminées par les axes OX, OY et OZ (cf. A.1). Un point m est repéré par ses coordonnées (x, y, z).

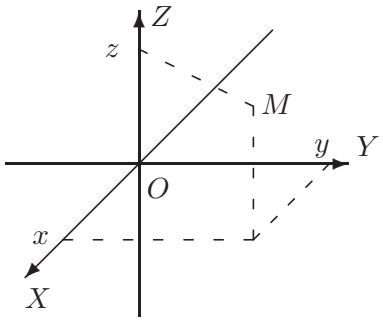


Fig. A.1: Repère cartésien orthonormé

Repère cylindrique

Le point M est positionné par ses coordonnées cylindriques (ρ, φ, z), ρ étant la distance à l'axe OZ dans le plan parallèle à XOY et φ l'angle azimutal à partir de l'axe OX (cf. A.2). Des

relations existent avec les relations cartésiennes :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = \quad z \end{cases} \tag{A.1}$$

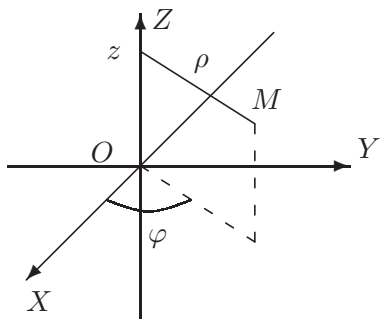


Fig. A.2: Repère cylindrique ($0° \leq \varphi \leq 360°$)

Repère sphérique

Le point M est déterminé par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ), r étant la distance radiale à l'origine O du repère, θ l'angle d'inclinaison à partir de l'axe OZ et φ l'angle azimutal à partir de l'axe OX (cf. A.3). Des relations permettent le passage aux coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = \quad r \cos \theta \end{cases} \tag{A.2}$$

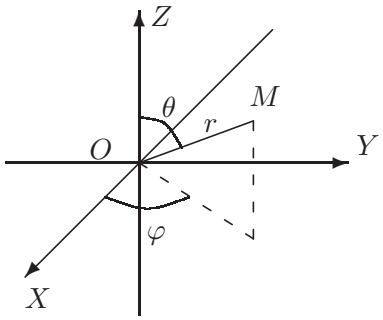


FIG. A.3: Repère sphérique ($0° \leq \theta \leq 180°$, $0° \leq \varphi \leq 360°$)

Annexe B

Obtention de l'équation de Helmholtz

Les calculs menant à l'équation de Helmholtz sont ici brièvement donnés, à partir de la théorie de la Mécanique des Fluides [63].

Toutes les grandeurs physiques sont fonctions de la position du point $\underline{r}$ et du temps t. L'équation des ondes s'obtient à partir des équations de conservation, d'état du fluide et de la linéarisation au premier ordre de toutes les variables du problème.

On suppose un milieu fluide Ω_{fl} de frontière Γ, idéal (non visqueux), barotrope, irrotationnel, de vitesse d'écoulement nulle et de dépendance temporelle harmonique des variables en $e^{-i\omega t}$. Les grandeurs indicées par 0 correspondent à l'état de repos.

Conservation de la masse

À un instant donné, la masse du domaine fluide est :

$$\iiint_{\Omega_{fl}} \rho dV \tag{B.1}$$

où dV est l'élément de volume et ρ la masse volumique du fluide.

Avec q, exprimé par unité de temps, caractérisant une source de débit contenue dans le fluide, le principe de conservation de la masse s'exprime par :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega_{fl}} \rho dV = \iiint_{\Omega_{fl}} \rho q dV \tag{B.2}$$

Le premier membre de l'équation ci-dessus s'exprime par la dérivée matérielle d'une intégrale de volume, pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega_{fl}} \rho dV + \iint_{\Gamma} \rho \underline{v}.\underline{n} dS = \iiint_{\Omega_{fl}} \rho q dV \tag{B.3}$$

$\underline{n}$ étant la normale à Γ orientée positivement vers le fluide et $\underline{v}$ le champ des vitesses.

Par le premier théorème de Green, Ω_{fl} étant quelconque, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho \underline{v}) = \rho q \quad \text{dans } \Omega_{fl} \tag{B.4}$$

Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement s'écrit :

$$\iiint_{\Gamma_{fl}} \underline{v} \rho dV \tag{B.5}$$

$\underline{F}$ est le champ des forces volumiques et $\underline{T}$ celui des forces de contact sur Γ.

La conservation de la quantité de mouvement signifie qu'à chaque instant le torseur dérivée matérielle de la quantité de mouvement d'un domaine est équivalent au torseur des forces extérieures qui s'appliquent à ce domaine :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_{fl}} \underline{v} \rho dV = \iiint_{\Omega_{fl}} \underline{F} \rho dV + \iint_{\Gamma} \underline{T} dS \tag{B.6}$$

p est la pression.

Le fluide est idéal ($\underline{T} = -p\underline{n}$). En écrivant :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_{fl}} \underline{v} \rho dV = \iiint_{\Omega_{fl}} \frac{d}{dt} (\underline{v})\, \rho dV \tag{B.7}$$

et

$$\iint_{\Gamma} p \underline{n} dS = \iiint_{\Omega_{fl}} \text{grad}\,(p)\, dV \tag{B.8}$$

on obtient l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{d}{dt} (\underline{v}) + \text{grad}\,(p) = \rho \underline{F} \tag{B.9}$$

Par l'expression de Helmholtz :

$$\frac{d}{dt} (\underline{v}) = \frac{\partial}{\partial t} (\underline{v}) + \text{rot}\,(\underline{v}) \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad}\left(\underline{v}^2\right) \tag{B.10}$$

on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (\underline{v}) + \text{rot}\,(\underline{v}) \wedge \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad}\left(\underline{v}^2\right) \right) + \text{grad}\,(p) = \rho \underline{F} \tag{B.11}$$

Le fluide étant irrotationnel, cette dernière équation se simplifie :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (\underline{v}) + \frac{1}{2} \text{grad}\left(\underline{v}^2\right) \right) + \text{grad}\,(p) = \rho \underline{F} \tag{B.12}$$

Équation d'état

Le fluide étant barotrope, l'équation d'état s'écrit (relation pression-masse volumique) :

$$p = p_0 + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 (\rho - \rho_0) \tag{B.13}$$

La vitesse du son est définie par :

$$c_0 = \left(\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\right)_0 \tag{B.14}$$

L'équation d'état s'écrit donc :

$$p = p_0 + c_0^2 (\rho - \rho_0) \tag{B.15}$$

Linéarisation

Les grandeurs surmontées d'un prime correspondent aux variations du premier ordre. La vitesse d'écoulement étant nulle, la linéarisation des grandeurs physiques du problème jusqu'au premier ordre s'écrit :

$$\begin{cases} p = p_0 + \varepsilon p' \\ \rho = \rho_0 + \varepsilon p' \\ \underline{v} = \varepsilon \underline{v}' \\ \underline{F} = \underline{F}_0 + \varepsilon \underline{F}' \\ q = q_0 + \varepsilon q' \end{cases} \tag{B.16}$$

On linéarise ainsi les équations B.5, B.12 et B.15 et on ne conserve que les termes de premier ordre. En considérant l'influence de $\underline{F}_0 \rho'$ et $q_0 \rho'$ négligeable, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho' + \rho_0 \operatorname{div}\left(\underline{v}'\right) = \rho_0 q' \tag{B.17}$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\underline{v}' + \operatorname{grad}\left(p'\right) = \rho_0 \underline{F}' \tag{B.18}$$

$$p' = c_0^2 \rho' \tag{B.19}$$

On dérive B.17 par rapport au temps et on y injecte B.19. On applique l'opérateur divergence à B.18. La comparaison des deux expressions résultantes, en rappelant que la divergence du gradient est le laplacien (noté Δ), aboutit à l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p' - \Delta p' = \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}q' - \operatorname{div}\underline{F}'\right) \tag{B.20}$$

On note dans toute la suite du document la variation p' par p, que l'on désigne comme la pression par abus de langage et par souci de simplification de l'écriture. On note également c_0 par c et ρ_0 par ρ.

On définit le nombre d'onde, f étant la fréquence d'excitation et ω la vitesse angulaire :

$$k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \tag{B.21}$$

Le champ des forces volumiques $\underline{F}$ étant considéré nul, et en prenant en compte la dépendance temporelle des variables, on obtient l'équation de Helmholtz inhomogène, pour $\underline{r}$ dans le fluide :

$$\Delta p\left(\underline{r}\right) + k^2 p\left(\underline{r}\right) = i\omega\rho q\left(\underline{r}\right) \tag{B.22}$$

Dans le cas où la source de débit considérée dans le fluide est un apport du fluide de type source ponctuelle unitaire placée en $\underline{r}_0$, on a [12] :

$$\Delta p + k^2 p\left(\underline{r}\right) = -\delta\left(\underline{r}, \underline{r}_0\right) \tag{B.23}$$

Annexe C

Représentation intégrale de Helmholtz intérieure

Dans cette annexe, la démarche qui conduit aux équations intégrales de Helmholtz est détaillée [4]. Il permet d'obtenir les différentes représentations intégrales de Helmholtz.

Il s'agit d'appliquer le second théorème de Green aux fonctions p et de Green de l'espace libre dans le volume extérieur V de surface S en identifiant la fonction p et la fonction nulle dans Ω_{ext} pour réduire la dimension du problème volumique à celle d'un problème surfacique.

On raisonne dans le cas général. Des sources peuvent être présentes dans le fluide. L'effet de la fonction source n'apparaît pas dans les conditions aux limites, il est donc exprimé dans le second membre de l'équation de Helmholtz.

Le domaine intérieur V de frontière S est défini tel que $V = \Omega_R \cup S_R \nsubseteq (\Omega_\varepsilon \cup \Omega_{ext} + S_R)$ (cf. figure C.1).

On écrit l'équation de Helmholtz inhomogène en un point $\underline{r}'$ de V :

$$\Delta' p\left(\underline{r}'\right) + k^2 p\left(\underline{r}'\right) = -\delta\left(\underline{r}', \underline{r}_0\right) \quad \underline{r}' \in V \tag{C.1}$$

L'équation associée pour g est :

$$\Delta' g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) + k^2 g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) = -\delta\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \quad \underline{r}' \in V \quad \underline{r} \in \Omega_\varepsilon \tag{C.2}$$

On applique donc le second théorème de Green à $p\left(\underline{r}'\right)$ et $g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right)$ sur le domaine V :

$$\iiint\limits_V \left[p\left(\underline{r}'\right) \Delta' g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \Delta' p\left(\underline{r}'\right)\right] d\underline{r}' = \iint\limits_S \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}'\right)\right] d\underline{r}' \tag{C.3}$$

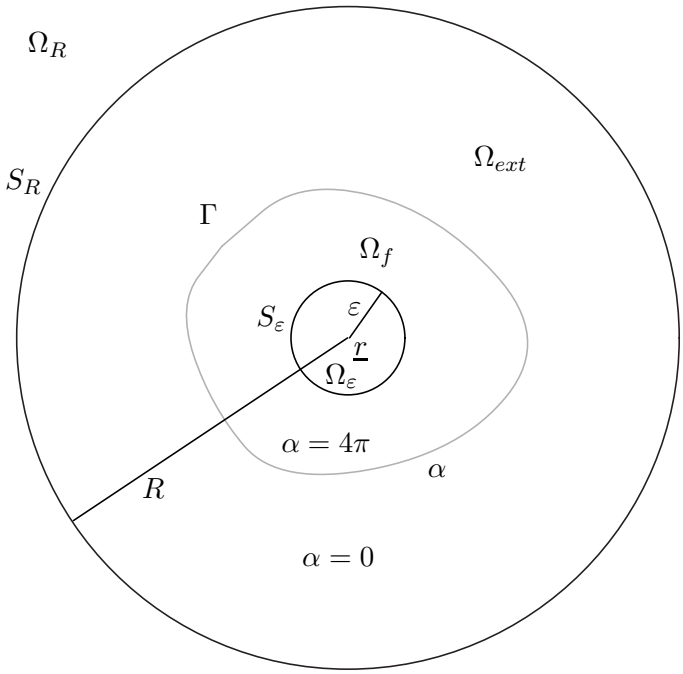


FIG. C.1: Domaine intérieur V

L'intégrale de volume, avec les équations (C.1) et (C.2), se ramène à :

$$\iint_S \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}'\right) \right] d\underline{r}' = \iiint_V \left[\delta\left(\underline{r}', \underline{r}_0\right) g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - \delta\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) p\left(\underline{r}'\right) \right] d\underline{r}' \tag{C.4}$$

La normale à la surface S est dirigée vers l'extérieur du volume V.

On calcule maintenant l'intégrale de volume. $\underline{r} \in \Omega_\varepsilon$ donc $\underline{r} \notin V$ et ainsi :

$$\iiint_V \delta\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) p\left(\underline{r}'\right) d\underline{r}' = 0 \tag{C.5}$$

L'autre partie de l'intégrale de volume s'écrit donc :

$$\iiint_V \delta\left(\underline{r}', \underline{r}_0\right) g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' \tag{C.6}$$

La fonction de Dirac présente est nulle partout dans V sauf en $\underline{r}_0$ où elle est égale à l'unité. Ainsi, l'intégrale (C.6) se réduit à la fonction de Green $g\left(\underline{r}, \underline{r}_0\right)$ qui s'écrit (éq. (1.21)) :

$$\iiint_V \delta\left(\underline{r}', \underline{r}_0\right) g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' = g\left(\underline{r}, \underline{r}_0\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}_0|}}{|\underline{r}-\underline{r}_0|} \tag{C.7}$$

L'intégrale (C.6) représente donc l'effet d'une source placée en $\underline{r}_0$ et l'on note :

$$\iiint_V \delta\left(\underline{r}', \underline{r}_0\right) g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) d\underline{r}' = s_{df}\left(\underline{r}\right) \tag{C.8}$$

On obtient ainsi :

$$\iint_S \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) - g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}'\right) \right] d\underline{r}' = s_{df}\left(\underline{r}\right) \tag{C.9}$$

Or $S = S_\varepsilon + \Gamma$, donc :

$$\begin{aligned}\iint_S \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) - g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}'\right) \right] d\underline{r}' &= \iint_{S_\varepsilon} \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) - g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}'\right) \right] d\underline{r}' \\ &+ \iint_\Gamma \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) - g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}'\right) \right] d\underline{r}' = J_1 + J_2 \end{aligned} \tag{C.10}$$

En respectant le sens des normales, on obtient :

$$J_1 - J_2 = s_{df}\left(\underline{r}\right) \tag{C.11}$$

On sait que :

$$g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \tag{C.12}$$

et que pour une sphère de centre $\underline{r}$:

$$\frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left(ik - \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) \tag{C.13}$$

- Calcul de J_1 ($\underline{r}' \in S_\varepsilon$, $|\underline{r}-\underline{r}'| = \varepsilon$, avec $\varepsilon \to 0$). On a :

$$J_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\varepsilon} \left[\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(p\left(\underline{r}'\right) - \frac{\partial}{\partial n'} p\left(\underline{r}'\right) \right) \right] d\left(\underline{r}'\right) \tag{C.14}$$

Ici, 3 cas se présentent, qui vont permettre de distinguer les problèmes associés à la représentation intégrale de Helmholtz intérieure.

- Problème intérieur associé. On a $\underline{r} \in \Omega_{fl} \to S_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^2$ et donc

$$\begin{aligned} \varepsilon \to 0 \quad J_1 &\sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p\left(\underline{r}\right) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}\right) \right\} S_\varepsilon \\ &\sim \frac{1}{4\pi} \left\{ p\left(\underline{r}\right) \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n} p\left(\underline{r}\right) \right\} 4\pi\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Or,

$$\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \varepsilon^2 \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \to 1 \quad \varepsilon \to 0 \tag{C.16}$$

ainsi :

$$J_1 \to p\left(\underline{r}\right) \quad \varepsilon \to 0 \tag{C.17}$$

et on obtient :

$$s_{df}\left(\underline{r}\right) = - \iint_\Gamma \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) - g\left(\underline{r},\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} p\left(\underline{r}'\right) \right] d\underline{r}' + p\left(\underline{r}\right) \tag{C.18}$$

- Problème surfacique associé. On a $\underline{r} \in \Gamma \rightarrow S_\varepsilon = 2\pi\varepsilon^2$ lorsque Γ est droite. Les calculs mènent à :

$$J_1 \rightarrow \frac{1}{2} p\left(\underline{r}\right) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \tag{C.19}$$

et on obtient :

$$s_{df}\left(\underline{r}\right) = -\iint_\Gamma \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} p\left(\underline{r}'\right)\right] d\underline{r}' + \frac{1}{2} p\left(\underline{r}\right) \tag{C.20}$$

- Problème extérieur associé. $p\left(\underline{r}\right) = 0$ dans Ω_{ext} donc on obtient directement :

$$s_{df}\left(\underline{r}\right) = -\iint_\Gamma \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} p\left(\underline{r}'\right)\right] d\underline{r}' \tag{C.21}$$

On synthétise la représentation intégrale de Helmholtz intérieure en une équation, en notant $\alpha\left(\underline{r}\right)$ l'angle solide au point $\underline{r}$:

$$s_{df}\left(\underline{r}\right) + \iint_\Gamma \left[p\left(\underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) - g\left(\underline{r}, \underline{r}'\right) \frac{\partial}{\partial n'} p\left(\underline{r}'\right)\right] d\underline{r}'$$

$$= \begin{cases} p\left(\underline{r}\right) & \underline{r} \in \Omega_{int} = \Omega_{fl} \quad \text{(C.22a)} \\ \dfrac{\alpha\left(\underline{r}\right)}{4\pi} p\left(\underline{r}\right) & \underline{r} \in \Gamma \quad \text{(C.22b)} \\ 0 & \underline{r} \in \Omega_{ext} \quad \text{(C.22c)} \end{cases}$$

Si Γ est droite, $\alpha = 2\pi$, sinon une formule permet le calcul de $\alpha\left(\underline{r}\right)$ pour n'importe quel type de surface (cf. §1.3.2).

Annexe D

Résolution de l'équation des ondes - cas du parallélépipède rectangle

La théorie modale de la réverbération a pour point de départ l'équation des ondes :

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \tag{D.1}$$

La cavité est supposée rectangulaire, de dimensions L_x, L_y et L_z (cf. fig. 5.1). On cherche les solutions harmoniques :

$$P\left(x, y, z, t\right) = p\left(x, y, z\right) e^{-i\omega t} \tag{D.2}$$

l'équation précédente est alors transformée en

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La résolution [2] repose sur le principe de séparation des variables :

$$p\left(x, y, z\right) = p_x\left(x\right) + p_y\left(y\right) + p_z\left(z\right) \tag{D.3}$$

L'expression du Laplacien devient alors :

$$\nabla^2 p = p_x''\left(x\right) p_y\left(y\right) p_z\left(z\right) + p_x\left(x\right) p_y''\left(y\right) p_z\left(z\right) + p_x\left(x\right) p_y\left(y\right) p_z''\left(z\right) \tag{D.4}$$

où p'' représente la dérivée seconde. On a donc

$$\frac{p_x''}{p_x} + \frac{p_y''}{p_y} + \frac{p_z''}{p_z} + k^2 = 0 \tag{D.5}$$

Dans cette expression, seul p_x''/p_x dépend de x. Cela implique

$$\frac{p_x''}{p_x} = -C_x \quad \text{d'où} \quad p_x'' + C_x p_x = 0 \tag{D.6}$$

Nous voyons que

$$\begin{cases} p_x(x) = A\cosh x\sqrt{-C_x} + B\sinh x\sqrt{-C_x} & \text{si } C_x < 0 \quad \text{(D.7a)} \\ p_x(x) = A\cos x\sqrt{C_x} + B\sin x\sqrt{C_x} & \text{si } C_x > 0 \quad \text{(D.7b)} \end{cases}$$

On a le même résultat pour x et y.

Sous une condition aux limites de Neumann, la vitesse normale s'annule sur les parois. Cela revient à les supposer infiniment rigides, l'impédance acoustique spécifique y est donc *infinie* donc :

$$\text{grad}(P) = -\rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} \tag{D.8}$$

avec selon x :

$$p'_x(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = L_x$$

En reprenant l'équation (D.7), la nullité de $p'_x(x)$ en $x = 0$ implique que B est nul. Il est clair que dans le premier, $p'_x(x)$ ne peut être nul en $x = L_x$ à moins que A soit aussi nul ce qui est trivial. Les seules solutions non triviales sont donc obtenues pour

$$C_x > 0 \quad C_x = k_x^2$$

et l'on a alors en tenant compte des conditions aux limites

$$p_x(x) = A\cos xk_x \quad \text{avec} \quad k_x = \frac{n_x\pi}{L_x}$$

où n_x est un entier.

Le même raisonnement peut être fait pour p_y et p_z, et l'on aboutit à

$$p(x,y,z) = p_0 \cos xk_x \cos yk_y \cos zk_z \quad \text{avec} \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \tag{D.9}$$

La dernière égalité provenant de l'équation (D.5), on a donc :

$$p(x,y,z) = p_0 \cos x\frac{n_x\pi}{L_x} \cos y\frac{n_y\pi}{L_y} \cos z\frac{n_z\pi}{L_z} \tag{D.10}$$

et

$$k = \pi\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} \tag{D.11}$$

Les fonctions ainsi engendrées définissent une base de l'espace des solutions de l'équation fondamentale (D.1), ce qui veut dire que toute solution de l'équation des ondes dans une cavité est nécessairement une combinaison linéaire des modes obtenus par le triplet (n_x, n_y, n_z).

Annexe E

Notions de physique des milieux poroélastiques

Cette annexe présente la modélisation physique des milieux poroélastiques. Après avoir décrit qualitativement les différents phénomènes physiques, une vision globale et historique des recherches dans le domaine est abordée. La modélisation est ensuite considérée en donnant d'abord les hypothèses de départ. Cette présentation s'attache à établir les liens entre les différentes approches de la littérature. Elle est issue de la thèse d'Olivier Dazel [64].

Description qualitative d'un milieu poreux

Les milieux poreux sont des milieux hétérogènes constitués d'une phase solide ou squelette et d'une phase fluide. Ces deux phases sont enchevêtrées à l'échelle macroscopique. Le squelette peut être continu (mousse, céramiques) ou non (matériaux fibreux, granuleux) et considéré comme ayant des propriétés élastiques. La phase fluide est généralement constituée d'air qui sature le réseau des pores. Ces matériaux dissipent l'énergie mécanique par trois mécanismes particuliers que nous présentons qualitativement.

Le premier est associé à la vibration du squelette qui constitue le matériau. Ce mouvement, au niveau moléculaire, se traduit par des rotations irréversibles des molécules les unes par rapport aux autres, dégradant ainsi l'énergie initialement fournie au matériau. On parle de perte par effet structural.

Le second de ces mécanismes est relié à un transfert d'énergie de l'onde acoustique vers la phase solide, la conductivité thermique de l'air étant généralement plus faible que celle du matériau constituant le squelette. L'énergie mécanique de l'onde acoustique est transformée en

chaleur puis expulsée vers le milieu extérieur. On parle de pertes par effets thermiques. C'est ce second phénomène qui se produit majoritairement.

Le dernier mécanisme est rattaché aux effets visqueux. Le phénomène de viscosité est dû au glissement des différentes couches d'un fluide visqueux les unes par rapport aux autres et provoque une dissipation. Lors des phénomènes de propagation d'onde acoustique dans un milieu visqueux, on définit une épaisseur de couche limite visqueuse homogène à une longueur, dépendante de la fréquence. On définit ensuite la notion de dimension caractéristique du milieu de propagation comme une longueur associée de la géométrie du milieu où se produit la propagation. En comparant ces deux longueurs, on tire une information sur l'importance des effets de viscosité.

Supposons maintenant une onde acoustique se propageant dans un volume V donné. Envisageons deux cas : le premier est celui de sa propagation lorsque ce volume est rempli d'air et le second cas est celui où un matériau poreux occupe le volume V. On suppose que les dimensions de ce volume sont grandes devant la taille caractéristique des hétérogénéités du poreux. Le matériau poreux étant constitué majoritairement d'air, l'allure apparente du champ acoustique n'est pas sensiblement différente dans les deux cas. A l'échelle des pores cependant, une différence est mise en évidence. Elle fait apparaître que dans le cas de la propagation dans un milieu poreux, les effets de viscosité seront sensibles, contrairement au cas de la cavité fluide. En effet, dans le cas des milieux poreux, la taille caractéristique du volume où s'effectue la propagation est celle des pores. Pour les applications classiques en acoustique, la dimension caractéristique des pores est de l'ordre de cette longueur caractéristique visqueuse[9]. Si l'onde acoustique se propage dans l'air, la dimension caractéristique du volume est celle de la cavité, par conséquent, on considère les effets visqueux négligeables.

Nous allons maintenant nous intéresser aux modèles poroélastiques par une vision chronologique de la modélisation physique des milieux poreux.

Les modèles de comportement des matériaux poreux

Le formalisme de Zwikker et Kösten

La modélisation du comportement dynamique des milieux poreux remonte au milieu du siècle dernier. Les premiers travaux initiés par Zwikker et Kösten [65] ont été consacrés au cas seul des matériaux à pores cylindriques de section circulaire ayant la même orientation. Ce modèle

[9] à 500 Hz, l'épaisseur de la couche limite visqueuse est de l'ordre de 70 μm, d'ordre de grandeur équivalent aux dimensions des pores des matériaux classiquement utilisés en acoustique

aujourd'hui limité fait néanmoins date car leurs auteurs ont été les premiers à introduire la notion de fréquence de découplage qui représente la fréquence à laquelle on peut considérer qu'une onde acoustique se propageant dans la phase fluide ne met pas en mouvement la phase solide. Ils furent aussi les premiers à considérer que l'on pouvait tenir compte des effets visqueux en modifiant la masse volumique de la phase fluide, c'est-à-dire en la remplaçant par une masse volumique apparente complexe et dépendante de la fréquence. Zwikker et Kösten proposèrent aussi d'introduire les effets thermiques dans la modélisation en modifiant le module de compressibilité dynamique de la phase fluide. Dans les modèles les plus actuels, ces considérations sont toujours vraies même si les fonctions de forme[10] ont été affinées.

Des modèles similaires ont ensuite été développés par Beranek [66] ou Morse et Ingard [63]. Dans la suite des travaux de Zwikker et Kösten, Attenborough [67] proposa une formulation modifiée pour s'affranchir de l'hypothèse de pores circulaires et de même orientation.

Dans les modèles simplifiés de comportement des matériaux poreux, on peut citer celui de Delany et Bazley [68] formulé en 1970 et toujours utilisé étant donnée sa simplicité car il ne nécessite que la connaissance de la résistance au passage de l'air et la masse volumique du matériau. Néanmoins son application est limitée aux matériaux fibreux même si ce modèle a été étendu dans les années 90.

Dans les travaux basés sur les approches de Zwikker et Kösten, le fluide et le solide étaient traités indépendamment, le solide étant considéré comme immobile. Une autre approche fut présentée par Biot en 1956 [69, 70]. Contrairement aux approches que nous venons d'évoquer qui consistaient à considérer l'écoulement d'un fluide dans un tube, Biot proposa d'utiliser le formalisme de la Mécanique des Milieux Continus pour modéliser le comportement dynamique du poreux comme celui d'un milieu homogène équivalent.

L'approche de Biot

Biot suggéra que le milieu poreux pouvait être vu au niveau macroscopique comme la superposition en temps et en espace de deux milieux continus couplés. Cette approche était novatrice dans la mesure où elle s'extrayait du contexte hétérogène des deux phases pour arriver à l'idée de superposition. En particulier, Biot montra que 3 types d'ondes pouvaient se propager dans le milieu poreux, deux ondes de compression et une onde de cisaillement. Ce formalisme est celui qui est encore utilisé de nos jours, même s'il a subi quelques mises à jour ou compléments.

[10] fonctions complexes dépendant de la fréquence traduisant les différents effets

La mécanique et thermodynamique des milieux poreux ouverts

La théorie de Biot se situe dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus et présuppose des hypothèses restrictives comme par exemple une loi de comportement élastique des phases solide et fluide. Cette approche originelle n'intégrant pas clairement les phénomènes dissipatifs, Biot avait lui-même suggéré de tels travaux en remettant à plat son modèle et en y introduisant des notions de thermodynamique [71]. Des travaux plus poussés s'appuyant sur le formalisme le plus global de la Mécanique des Milieux Continus ont aussi été menés afin d'étendre la théorie de Biot.

Le modèle Biot-Allard

Parallèlement à ces travaux théoriques, des approches phénoménologiques[11] ont été menées. La théorie de Biot était initialement dévolue au contexte géotechnique, néanmoins le formalisme pouvait très bien s'adapter à l'acoustique. Il s'agissait alors d'y apporter quelques modifications afin de modéliser le plus fidèlement possible les effets dissipatifs évoqués précédemment. En 1987 Johnson *et al.* [72] ont amélioré la modélisation des effets visqueux en introduisant une fonction de forme visqueuse n'étant pas limitée par la nature géométrique du squelette. Cette fonction avait pour but de modéliser la variation en fréquence du module de dissipation visqueuse du matériau. Ces travaux ont en particulier permis d'établir l'existence d'une longueur caractéristique visqueuseΛ, paramètre intrinsèque du matériau. L'esprit des travaux de Johnson *et al.* consistait à étudier les cas asymptotiques basse et haute fréquence et à relier simplement dans le domaine moyenne fréquence. Par conséquent, non seulement le modèle de Johnson procède d'une observation macroscopique des phénomènes, mais aussi il permet de mettre en évidence des grandeurs propres au matériau comme la longueur caractéristique visqueuse. Champoux et Allard [73], s'inspirant de ces travaux, ont procédé de façon similaire et ont défini une fonction de forme liée aux effets thermiques ainsi qu'une longueur caractéristique thermique Λ'. En 1996, Lafarge *et al.* [74] introduisent un nouveau paramètre, la perméabilité thermique k'_0, améliorant la prise en compte des effets thermiques en basses fréquences. Ces contributions furent regroupées et intégrées dans le cadre de la théorie de Biot-Allard [44] pour former ce qui est maintenant couramment appelé le modèle de Biot-Allard.

Cette théorie constitue aujourd'hui la référence en ce qui concerne la modélisation dynamique du comportement des milieux poreux.

[11] c'est à dire basées sur l'observation expérimentale des phénomènes

Table des figures

1.1 Représentation du domaine acoustique 4
1.2 Représentation du domaine acoustique du problème extérieur 9
1.3 Maillage éléments finis du problème acoustique 12

2.1 Éléments finis de surface formant un maillage 16
2.2 Détermination des normales 18
2.3 Élément quadrilatère, avec $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, (a) global, (b) réduit. 18
2.4 Élément triangulaire, avec $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$, (a) global, (b) réduit. 19
2.5 Découpage d'un quadrangle en deux (a) ou trois (b) parties. 24
2.6 Découpage d'un triangle en deux parties. 24

3.1 Impédance acoustique théorique d'un panneau de laine de verre 45
3.2 Admittance acoustique théorique d'un panneau de laine de verre 45
3.3 Impédance acoustique théorique d'un panneau type laine de verre, $f \leq 500$Hz . . 47
3.4 Admittance acoustique théorique d'un panneau type laine de verre, $f \leq 500$Hz . . 47
3.5 Modèle adapté aux basses fréquences 48

5.1 Parallélépipède rectangle 60
5.2 Temps de calcul QZ/IRAM/Jacobi-Davidson 62
5.3 Parallélépipède - Maillages I, II et III 62
5.4 Parallélépipède - Neumann - Lignes isobares et pression du 4e mode théorique . . 64
5.5 Parallélépipède - Neumann - Lignes isobares et pression du 4e mode pour le maillage II 65
5.6 Parallélépipède - Neumann - Lignes isobares et pression 4e mode, maillage III . . 66
5.7 Parallélépipède - Neumann - Amplitudes de pression des 5 premiers modes 67
5.8 Parallélépipède - Neumann/Dirichlet - Amplitudes de pression des 5 premiers modes 69
5.9 Parallélépipède - Absorption - Amplitudes de pression 74

5.10 Cube 75
5.11 Cube - Maillage I 76
5.12 Cube - Maillage II 76
5.13 Cube - Maillage III 76
5.14 Cube - Maillage IV 76
5.15 Parallélépipède - 1 point interne ($x = 0.3a$, $y = 0.4a$, $0 \leq z \leq a$) 79
5.16 Parallélépipède - 1 point interne ($x = 0.3a$, $z = 0.5a$, $0 \leq y \leq 0.8a$) 80
5.17 Parallélépipède - 1 point interne ($y = 0.4a$, $z = 0.5a$, $0 \leq x \leq 0.6a$) 80
5.18 Parallélépipède - 6 points internes ($y = 0.4a$, $z = 0.5a$, $0 \leq x \leq 0.6a$) 81
5.19 Parallélépipède - 1 point interne ($x = 0.35a$, $y = 0.45a$, $0 \leq z \leq 0.3a$) 81
5.20 Critère d'emplacement - Placement du point interne - Plan YOZ 82
5.21 Sensibilité du placement 83
5.22 Densité - Vue en coupe du cube avec les grilles de points internes 84
5.23 Améliorations sur 3 modes 85
5.24 Les 4 configurations de placement 86
5.25 Améliorations sur les 5 premiers modes pour les 4 configurations 87

6.1 Compartiment Sedan - maillage à 90 éléments 89
6.2 Champs de pression - 1er mode 90
6.3 Champs de pression - 2e mode 91
6.4 Champs de pression - 3e mode 91
6.5 Champs de pression - 4e mode 91
6.6 Champs de pression - 5e mode 92
6.7 Champs de pression - 5 premiers modes - Neumann-Dirichlet 95
6.8 Champs de pression - 5 premiers modes - Neumann-Absorption 96
6.9 Champs de pression - 5 premiers modes - Neumann-Dirichlet/Absorption 98

A.1 Repère cartésien orthonormé 107
A.2 Repère cylindrique ($0° \leq \varphi \leq 360°$) 108
A.3 Repère sphérique ($0° \leq \theta \leq 180°$, $0° \leq \varphi \leq 360°$) 109

C.1 Domaine intérieur V 116

Résumé

À l'heure actuelle, le confort acoustique prend une place de plus en plus importante dans les transports (habitacle de voiture, d'avion ou de train), dans les sites industriels et dans les habitations soumises à de fortes nuisances sonores.

Une bonne compréhension du comportement acoustique d'une cavité nécessite la connaissance de ses modes de résonance. Leur détermination précise est difficile et dépend de plusieurs paramètres. Classiquement, le calcul de ces modes est réalisé à l'aide de la méthode des éléments finis. Cette technique nécessitant de mailler la structure et le fluide, elle peut être pénalisante pour les structures de grande taille et limite ainsi la gamme de fréquence. Nous proposons dans cette thèse une formulation intégrale adaptée au calcul des résonances issue de la méthode de l'intégrale particulière. Elle est modifiée pour éviter les opérations d'inversion de matrice et permet de résoudre un problème avec des conditions aux limites mixtes. Après validation par comparaison avec des solutions analytiques, elle est appliquée à un compartiment de type Sedan, dans le cas rigide ainsi que dans le cas de la prise en compte d'un comportement vibro-élastique sur certaines surfaces. L'ajout de points internes améliorant la convergence, l'emploi de la méthode d'Arnoldi pour les problèmes aux valeurs propres et, en particulier, de l'algorithme de Jacobi-Davidson pour la résolution des problèmes aux valeurs propres quadratiques ainsi que la mise au point d'un nouveau modèle de prise en compte de l'absorption constituent les principaux développements.

Mots-clés: confort acoustique, résonance, méthode des équations intégrales, modélisation numérique, absorption

Abstract

Since vehicle noise problems are now a serious concern in the automotive industry, there is a strong demand to implement a method which can predict the noise level in the early design stage of a vehicle, and particularly, the noise caused by structural vibration. This increasing demand for acoustic eigenvalues analysis calls for an efficient and reliable method of computation of resonance frequencies of acoustical cavities. Classically, the calculation of these frequencies is carried out using the finite element method. This technique requires to mesh the structure and the fluid. It can be expensive in CPU time for large structures. We propose in this thesis an integral formulation based on the particular integral method. It is modified to avoid inversion of matrix and to solve a problem with mixed boundary conditions. After validation by comparison with analytical solutions, it is applied to a compartment of Sedan type with various surface conditions (rigid and elastic). The principal developments deals with : additional internal points to improve convergence, Arnoldi's algorithm to extract eigenvalues in the case of dense and unsymmetric problem, JacobiDavidson's algorithm in the quadratic case, and an original way to take into account boundary absorption.

Keywords: acoustic comfort, resonance, BEM, numerical modeling

NOM : LEBLANC **Prénom** : Alexandre	**Date de Soutenance** : 10 Décembre 2004

TITRE : MODELISATION NUMERIQUE DES RESONANCES PAR UNE FORMULATION INTEGRALE - APPLICATION AU CONFORT ACOUSTIQUE DANS UNE CAVITE 3D

Résumé : À l'heure actuelle, le confort acoustique prend une place de plus en plus importante dans les transports (habitacle de voiture, d'avion ou de train), dans les sites industriels et dans les habitations soumises à de fortes nuisances sonores. Une bonne compréhension du comportement acoustique d'une cavité nécessite la connaissance de ses modes de résonance. Leur détermination précise est difficile et dépend de plusieurs paramètres. Classiquement, le calcul de ces modes est réalisé à l'aide de la méthode des éléments finis. Cette technique nécessitant de mailler la structure et le fluide, elle peut être pénalisante pour les structures de grande taille et limite ainsi la gamme de fréquence. Nous proposons dans cette thèse une formulation intégrale adaptée au calcul des résonances issue de la méthode de l'intégrale particulière. Elle est modifiée pour éviter les opérations d'inversion de matrice et permet de résoudre un problème avec des conditions aux limites mixtes. Après validation par comparaison avec des solutions analytiques, elle est appliquée à un compartiment de type Sedan, dans le cas rigide ainsi que dans le cas de la prise en compte d'un comportement vibro-élastique sur certaines surfaces. L'ajout de points internes améliorant la convergence, l'emploi de la méthode d'Arnoldi pour les problèmes aux valeurs propres et, en particulier, de l'algorithme de Jacobi-Davidson pour la résolution des problèmes aux valeurs propres quadratiques ainsi que la mise au point d'un nouveau modèle de prise en compte de l'absorption constituent les principaux développements.

Abstract : Since vehicle noise problems are now a serious concern in the automotive industry, there is a strong demand to implement a method which can predict the noise level in the early design stage of a vehicle, and particularly, the noise caused by structural vibration. This increasing demand for acoustic eigenvalues analysis calls for an efficient and reliable method of computation of resonance frequencies of acoustical cavities. Classically, the calculation of these frequencies is carried out using the finite element method. This technique requires to mesh the structure and the fluid. It can be expensive in CPU time for large structures. We propose in this thesis an integral formulation based on the particular integral method. It is modified to avoid inversion of matrix and to solve a problem with mixed boundary conditions. After validation by comparison with analytical solutions, it is applied to a compartment of Sedan type with various surface conditions (rigid and elastic). The principal developments deals with: additional internal points to improve convergence, Arnoldi's algorithm to extract eigenvalues in the case of dense and unsymmetric problem, Jacobi-Davidson's algorithm in the quadratic case, and an original way to take into account boundary absorption.

DISCIPLINE : Mécanique

MOTS-CLEFS : confort acoustique, résonance, méthode des équations intégrales, modélisation numérique, absorption

LABORATOIRE : **L**aboratoire d'**A**rtois de **M**écanique, **T**hermique et **I**nstrumentation

DIRECTEUR DE THESE : *Professeur Antoine LAVIE*

JURY : Mabrouk BEN TAHAR, Betrand DUBUS, Antoine LAVIE, Bruno DUTHOIT, M'hamed SOULI, Christian VANHILLE