



HAL
open science

Commande Nonlinéaire et Navigation des Véhicules Marins Sous-actionnés

Jawhar Ghommam

► **To cite this version:**

Jawhar Ghommam. Commande Nonlinéaire et Navigation des Véhicules Marins Sous-actionnés. Automatique / Robotique. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, 2008. Français. NNT : . tel-00261791

HAL Id: tel-00261791

<https://theses.hal.science/tel-00261791>

Submitted on 1 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

JAWHAR GHOMMAM

**Commande Nonlinéaire et Navigation des Véhicules
Marins Sous-actionnés**

Thèse présentée
à l'Université d'Orléans
pour l'obtention du grade de Doctorat (Ph.D)

UNIVERSITE D'ORLEANS
FRANCE

Janvier 2008

©Jawhar Ghommam, 2008

Résumé

Dans cette thèse nous avons traité le problème de la commande des véhicules marins sous-actionnés. Ce travail de recherche est motivé par les défis aussi bien théoriques que pratiques posés pour l'ingénieur automaticien. En effet, ces systèmes ne peuvent pas être stabilisés par des commandes lisses invariantes dans le temps. De plus, en dépit du nombre de méthodes disponibles pour la commande des systèmes mécaniques sous-actionnés, peu ont traité des points pratiques importants tels que l'inclusion explicite de la dynamique dans la formulation du problème de commande et le besoin de faire face aux perturbations environnementales résultants des courants des vagues, par exemple. Cette thèse s'attaque à certains de ces problèmes, formule et résout les problèmes de commande de positionnement dynamique, de la poursuite de trajectoire et du suivi de chemin des véhicules marins sous-actionnés.

La première partie de cette thèse (chapitres 3 et 4) constitue les éléments théoriques fondamentaux pour l'analyse du modèle et la synthèse des commandes pour les véhicules marins sous-actionnés. Particulièrement, nous montrons au chapitre 3 que le modèle de véhicule marin sous-actionné ne satisfait pas la condition nécessaire de Brockett pour la stabilisation par des actions continues et invariantes dans le temps. Cependant, nous montrons qu'il est possible d'atteindre la stabilisation en utilisant une commande discontinue ou variable dans le temps. Le chapitre 4 consiste à appliquer les résultats récents sur les systèmes en cascades nonlinéaires pour résoudre le problème de la détermination des lois de commande qui stabilisent la position et l'orientation d'un vaisseau sous-actionné à l'origine. Deux transformations sont introduites pour représenter le système dans une forme en cascade. Par quelques propriétés du modèle, nous montrons en premier que la stabilisation globale et asymptotique du système se réduit à stabiliser une forme chaînée du premier ordre. Une approche discontinue par backstepping est ensuite employée pour la stabilisation du système sous forme chaînée via un retour d'état partiel. Nous montrons que la loi de commande proposée stabilise exponentiellement le modèle réduit dans un ensemble défini, assurant la stabilisation asymptotique, locale et uniforme du modèle de vaisseau marin sous-actionné. Pour assurer la stabilité uniforme globale la technique du backstepping combinée avec une commande variant

dans le temps est donc employée. Nous exploitons ensuite la structure en cascade pour construire une trajectoire convenable produite par les équations dynamiques d'un véritable bateau sous-actionnés. Nous montrerons que la stabilisation globale peut être assurée par une combinaison de la commande par backstepping et une commande variable dans le temps. Enfin nous abordons le problème de poursuite de trajectoire dans lequel la trajectoire de référence est générée par un navire sous-actionné virtuel. Nous montrerons qu'il existe une commande qui force exponentiellement le navire à la poursuite de la trajectoire partant d'une condition initiale quelconque.

La deuxième partie de cette thèse (chapitre 5 et 6 et 7) est consacrée au problème de la manoeuvre du vaisseau sous-actionné le long d'un chemin désiré avec une dynamique prescrite. La conception de la loi de commande est abordée par deux approches. La première vient d'une observation qu'il est plausible en pratique de manoeuvrer le véhicule tel que sa vitesse totale soit tangente à son chemin de référence. Il sera aussi supposé que le véhicule voyage le long du chemin avec une vitesse de poussée constante. La seconde approche ne conditionne pas la vitesse de poussée pour être constante.

Dans le chapitre 5, nous exploitons l'approche abordée pour le suivi de chemin pour résoudre le problème de coordinations d'un groupe de véhicules marins. Il est possible de manoeuvrer le mouvement de chaque véhicule tel que le mouvement du groupe soit inscrit dans un comportement désiré. Ainsi, les mouvements indépendants des véhicules sont coordonnés de façon à avoir un mouvement d'ensemble unique. Dans ce chapitre nous considérerons le problème des formations ou plusieurs véhicules sont synchronisés de manière à se comporter comme une formation de structure virtuelle.

Le chapitre 6, est dédié au problème général de la commande par retour de sortie pour la stabilisation globale des véhicules marins sous-actionnés. Une application de cet observateur est ensuite présentée au problème de la poursuite de trajectoire d'un vaisseau sous-actionné.

Mots clés Systèmes sous-actionnés, Bateaux, Commandabilité, Stabilité, Poursuite de trajectoires, Suivi de chemins, Contrôle de Formation, Commande non-linéaire, Commande adaptative, Commande par retour de sortie, Systèmes en cascades, Méthode directe de Lyapunov, Technique du Backstepping.

Abstract

This thesis addresses the problem of controlling an underactuated marine vehicle system. The key motivation for this research topic stems from the fact that underactuated systems pose considerable challenges to control system designers since those systems cannot be stabilized by smooth, time-invariant, state-feedback control laws. Furthermore, in spite of the number of methods available for the control of underactuated mechanical systems, few address important practical topics such as the explicit inclusion of dynamics in the control problem formulation and the need to cope with environmental disturbances due to wind and wave currents. This thesis tackles some of this issues, formulates and solves control problems related to dynamic positioning, trajectory tracking and path following, and discusses the application of the new control methodologies derived to marine vehicles like surface vessel-type ships.

The first part of the thesis (Chapter 3 and 4) focuses on showing that the underactuated marine vehicle model does not satisfy Brockett's necessary condition, i.e. it can not be stabilized by a continuous time-invariant state feedback. However, it is possible to achieve stabilization using discontinuous or time varying controllers which makes the purpose of the third chapter. Chapter 4 consists to apply recent results on cascade nonlinear systems to solve the open problem of determining controllers that stabilize the position/heading of the underactuated surface vessel at the origin. Two transformations are introduced to represent the system into a pure cascade form. First we show through some key properties of the model that the global and uniform asymptotic stabilization problem of the resulting cascade system can be reduced to the stabilization problem of a third order chained form. A discontinuous backstepping approach is then employed for the stabilization of the chained form system via a partial state feedback. We show that the proposed control law exponentially stabilizes the reduced model in a defined set, ensuring the uniform local asymptotic stabilization of the underactuated surface vessel model. To ensure the global uniform stability however, a combined backstepping and time varying control approach is therefore employed. Next, we exploit the cascade structure to construct a suitable defined trajectory generated by the dynamic equations of a virtual underactuated ship. We show that we can find a feedback controller that

forces the ship to exponentially follow the desired trajectory from any initial conditions. Using a cascade approach, we show that the tracking error dynamics of the ship can be decomposed as a cascade interconnection of one nonlinear system and a third order chained form system with integrator.

The second part of the thesis is devoted to the problem of steering the underactuated ship along a desired path with prescribed dynamic. Controller design relies on two different approaches, the former comes from an observation that it is reasonable in practice to steer a vessel such that it is on the reference path, and its total velocity is tangent to the path. It is also realistic to assume that the vessel travels along the path with a constant forward speed controlled by the main thruster control system. The latter approach relaxes this observation to let the desired forward speed, be adjusted on-line. These two problems are resolved in Chapter 5.

In Chapter 6, we exploit the path following approach for reason to consider the problem of coordinating a group of marine vehicles that is, we want to steer the motion of each vehicle such that the group's overall motion is governed by a desired behavior. Thus, independent motion is coordinated as a formation according to the behavior decided by the designer. Such control problems have attracted increasing attention during the last decade due to the many benefits of distributed vehicles controlled as a formation. Chapter 6 looks into the formation problem where several marine vehicles are synchronized such that they are controlled as a virtual structure formation. The paths are synchronized such that equal path parameters imply correct vessels configuration.

Chapter 7, is devoted to the general problem of output feedback for global partial-state feedback controller for general marine model systems. Our result is facilitated by deriving a coordinate transformation to cancel the velocity cross terms in the marine model system dynamics to design global exponential velocity observers. An application of such observer is applied to the case of path following problem of an underactuated surface vessel.

Finally, Chapter 8 contains the conclusions and discusses challenging issues that warrant further research.

Keywords Underactuated Systems, Surface Ship, Controllability, Stabilizability, Trajectory Tracking, Path Following, Formation Control, Nonlinear and Adaptive Control, Output Feedback Controller, Cascade Systems, Lyapunov's Direct Method, Backstepping, Stability Analysis.

Avant-propos

The research presented in this thesis is the result of my doctoral studies in the period of September 2004 through January 2008, primarily at the Ecole National D'Ingénieurs de Sfax in the Research Unit on Mechatronics and Autonomous systems (MECA), under the guidance of both Professor Nabil Derbel and Faïçal Mnif, and partly at the University of Orléans under the guidance of Professor Gérard Poisson and Abderraouf BenAli in the Laboratoire de Vision et Robotique.

A thesis such as this is never created in a vacuum. So many have contributed in some fashion that it is even hard to begin acknowledging all those involved. However I will endeavor to try. I would most of all like to thank my advisor Nabil Derbel for accepting me to be part of the research unit ICOS and after the research unit MECA. He has been continuously supporting me through his great modesty and knowledge on control theory, and by his efficiency in dealing with practical issues such as conferences participation and financing some stay in France. And not the least by being a fantastic friend. I am particularly grateful to Professor Faïçal Mnif for being an excellent teacher and mentor to me. In supervising my research, he gave me freedom and encouraged me to be my own boss. I worked hard to raise my competency to the level of his trust. I would like to thank him for being open minded and always listening to my ideas, and adjusting my path in the field of robotic and non-linear control, for all our long discussions on mathematical formulations, control theory and life in general.

I especially would like to thank Professors Gérard Poisson and Abderraouf BenAli for their warm welcoming at the Laboratoire de Vision et Robotique and all their assistance as well as our countless hours of discussions. In particular I would like to thank Professor Gérard Poisson for always being there when I needed and supported me during the first stumbling steps of my career as a researcher. I am indebted to my co-advisor Abderraouf BenAli, he has shared with me his endless technical knowledge and deep insight. I was fortunate enough to have met him at an early stage of my PhD thesis.

I deeply appreciated the discussions with my fellow lab-mates from the Laboratoire de Vision et Robotique. A special thanks to Komar Wieslaw whom I shared office with, for creating an excellent working environment in which I have performed my research, for some polish words he taught me to speak. My research has, in particular, benefited from discussions with Salim Chaïb, Fabrice Babet, Mehdi Ammi, Moussa Boukhnifir, Benjamin Albouy, Hamid Ladjal, Mohamed Gadelrab and Mustapha Hamdi "Stouffa". I am thankful for having been a team-mate of their humor ; engineering skill, dedication, and their experience will forever be highly appreciated.

I wouldn't be able to finish before thinking my colleagues at the Research Unit on MECA in ENIS : special thanks go to Dr. Moez Feki the innovator researcher at MECA for having introduced me in the world of L^AT_EX and for many fruitful discussions, in several topics both on and off research. I benefited greatly from continuous discussion with present and former colleagues at the Research Unit ICOS. When I look back, I am thankful for having been a team-mate of Dr. Hannen Mdhaffar, Chokri Rekik and PhD students Amin Kallel, Ahmed Chaari, Rim Jallouli, Amel Zouari.

Last but not least I am grateful to my whole family whose support and efforts made this dissertation possible. A especial thank will be dedicated to my mother for always being supportive in my choices, especially at important cross-roads in my academic education, she has given me great freedom for choosing my own path in life, and today I would like to partly dedicate this thesis to her and my late father as a token of my respect and gratitude. You are my most precious and I will always love you. Finally, I am deeply grateful to my sisters Jihene and Nawel whom enchanting smile and laughter have helped me through writing the report of my PhD.

Jawhar Ghommam
Orléans, France
January 2008

*To my...
beloved mother,
with whom I share this achievement
for her love and unconditional support during this adventure,
that with her advises and care made me the person who am I today*

Et un signe pour eux est que Nous avons transporté leur descendance sur le bateau chargé ; et Nous leur créâmes des semblables sur lesquels ils montent. Et si Nous le voulons, Nous les noyons ; pour eux alors, pas de secoureur et ils ne seront pas sauvés, sauf par une miséricorde de Notre part, et à titre de jouissance pour un temps. (Coran, 41-44,36)

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iv
Avant-Propos	vi
Table des matières	xiii
Table des figures	xv
1 Introduction générale	1
1.1 Problématique associées aux véhicules marins sous-actionnés	1
1.2 Cadre applicatif et motivation de ce travail	3
1.3 Systèmes non-holonomes et sous-actionnés	4
1.3.1 Travaux antérieurs sur les systèmes non-holonomes	5
1.3.2 Travaux antérieurs sur les véhicule sous-actionné	8
1.4 Contributions de la thèse	10
1.5 Contenu des chapitres	13
1.6 Publications	14
2 Préliminaires	17
2.1 Outils mathématiques et concept de stabilité	17
2.1.1 Notations	17
2.1.2 Notion de stabilité au sens de Lyapunov	19
2.1.3 Stabilité des systèmes perturbés	24
2.1.4 Stabilité de cascades non-linéaires variantes dans le temps	24
2.2 Principe de comparaison	28
2.3 Inégalité de Gronwall-Bellman	29
2.4 Non-holonomie et Sous-actionnement	29
2.4.1 Définitions de la Non-holonomie et du Sous-actionnement	29
2.4.2 Controllabilité	30
2.4.3 Stabilisabilité	34
2.4.4 L'intégrateur non-holonyme	36

2.4.5	Double intégrateur non-holonome	37
2.5	Différentes approches de poursuite de trajectoires	39
2.6	Conclusion	41
I Modélisation, stabilisation à l'origine et poursuite de trajectoire		42
3	Modélisation d'un véhicule marin	43
3.1	Modèle Cinématique et Notations	43
3.1.1	Description générale	43
3.1.2	Modèle cinématique	46
3.2	Modèle Dynamique d'un bateau à 6 DDL	47
3.2.1	Masse ajoutée	48
3.2.2	Termes de Coriolis et Centrifuges	48
3.2.3	Forces d'amortissements	49
3.2.4	Forces de poussée	49
3.2.5	Propulseurs	51
3.3	Forces environnementales	53
3.3.1	Courants océaniques	53
3.3.2	Forces du vent	54
3.4	Modèle du bateau à 3 DDL	55
3.4.1	Modèle du bateau navigant à petite vitesse	56
3.4.2	Modèle du bateau navigant à grande vitesse	57
3.5	Test de non-holonomie du véhicule marin sous-actionné	58
3.5.1	Controllabilité et stabilisabilité du véhicule sous-actionné	60
3.6	Conclusion	63
4	Systèmes en cascades pour la stabilisation et la poursuite	64
4.1	Modèle en forme cascade du véhicule marin sous-actionné	64
4.2	Commande pour la stabilisation du modèle du bateau sous-actionné	67
4.2.1	Conditions de stabilité pour la structure en cascade	67
4.2.2	Commande discontinue	69
4.2.3	Commande variant dans le temps	74
4.3	Poursuite de trajectoires pour le modèle sous-actionné du bateau	79
4.3.1	Conception de la loi de commande	82
4.3.2	Analyse de stabilité	85
4.4	Résultats de simulations	86
4.5	Conclusion	88

II	Applications au Suivi de Chemins	92
5	Différentes Approches pour le Suivi de Chemins des USV	93
5.1	Paramétrisation d'un chemin	94
5.1.1	Paramétrisation discrète	95
5.1.2	Paramétrisation continue	95
5.2	Suivi de Chemins : Première Approche	100
5.2.1	Système de coordonnées dans le repère de Serret-Frenet	100
5.2.2	Formulation du problème pour le suivi de chemin	102
5.2.3	Conception de la Loi de Commande	105
5.3	Suivi de Chemins : Deuxième Approche	109
5.3.1	Conception de la Loi de Commande	112
5.3.2	Résultats de simulation	116
6	Contrôle de Formation	119
6.1	Introduction	119
6.2	Contrôle et Coordination de Groupe	123
6.3	Architecture de Commande pour la Coordination du groupe	125
6.4	Loi de Commande pour la Synchronisation	128
6.5	Introduction d'une action intégrale	133
6.6	Contrôle de Formation de Navires Sous-Actionnés	137
6.6.1	Configuration du groupe de la formation	138
6.6.2	Formulation du problème	140
6.6.3	Suivi de chemins et lois de commandes	140
6.6.4	Robustesse vis à vis des perturbations environnementales	150
6.7	Simulations	152
6.8	Conclusion	154
7	Observateur pour véhicule marin sous-actionné : Application au suivi de chemins	156
7.1	Illustration de l'approche	158
7.2	Structure de navigation des véhicules marins	160
7.3	Conception d'observateur pour le véhicule marin	161
7.3.1	Retour d'état partiel	161
7.3.2	Retour de sortie	164
7.4	Observateur pour le suivi de chemin d'un USV	167
7.5	Conception d'un observateur en présence de perturbations environnementales	171
7.6	Résultats de Simulation	173
7.7	Conclusion	173

8 Conclusion et perspectives	176
8.1 Conclusion	176
8.2 Perspectives	177
Bibliographie	180
A Astuces Mathématiques	188
A.1 Inégalité de Young.	188
A.2 Formules trigonométriques	189
B Démonstrations des lemmes et théorèmes	190
B.1 Preuve du Lemme 2.3	190
B.2 Preuve du Lemme 2.5	191
B.3 Preuve de la dérivée à droite de $\varphi(t)$	192
B.4 Preuve du Théorème 3.1	192
B.5 Preuve du Théorème 3.2	197
C Technique du Backstepping	199

Table des figures

1.1	Propulseurs transversaux réalisant le plein actionnement du bateau. . .	4
1.2	Roulement sans glissement.	5
1.3	Positionnement dynamique d'un navire.	10
1.4	Formation d'un groupe de bateaux.	12
2.1	Illustration de la définition intuitive de la stabilité.	20
2.2	Illustration de la définition formelle de la stabilité. (i) Pour tout choix de la boule d'exigence $\ x\ < R$ il doit être possible de construire (ii) une sous boule de conditions initiales $\ x_0\ < r$. telle que (iii) pour toute condition initiale appartenant à cette sous boule, la trajectoire résultante reste emprisonnée dans la grande boule de taille R	20
3.1	Systèmes de coordonnées utilisés pour décrire le mouvement d'un bateau.	44
3.2	Équilibre hydrostatique.	50
3.3	Plan A_{wp} délimitant le volume du fluide statique.	51
3.4	Positionnement dynamique des bateaux.	57
3.5	Bateau navigant à grande vitesse.	57
4.1	Modèle en cascade du bateau sous-actionné.	67
4.2	Bateau sous-actionné : problème de poursuite de trajectoires.	80
4.3	(a) Trajectoire du bateau dans le plan XY , (b,c-d) Convergence respective de x, y et ψ à l'origine	87
4.4	Convergence des vitesses linéaires et angulaire à zéro	88
4.5	(a) Trajectoire du bateau dans le plan XY , (b,c-d) allures de x, y et ψ	89
4.6	Allures des vitesses linéaires et angulaire à zéro	90
4.7	(a) Trajectoire du bateau dans le plan XY , (b,c-d) Allure de x, y et ψ .	91
5.1	Un bateau navigue d'un point vers un autre en suivant une ligne droite	95
5.2	Interpolation cubique de quatre points	97
5.3	Robot Manipulateur Staubli de L'ENSI-Bourges	98
5.4	(a) x_1 : chemin parcouru, y_d chemin désiré, et les vitesses de parcours, (b) Les différentes erreurs : z_1 et z_2	99

5.5	Courbe $C(\theta)$ sur laquelle un point est représenté par une variable θ , un vecteur de position $r_d(\theta)$ et les vecteurs unitaires tangent et normal $T(\theta)$ et $N(\theta)$	101
5.6	Modèle de bateau et repère de Serret-Frennet.	102
5.7	Forme en cascade du système (5.23)	108
5.8	Interprétation de l'erreur cinématique dans un repère attaché au bateau.	110
5.9	(a) Evolution de la trajectoire du véhicule dans le plan (x, y) , (b) convergence des erreurs de positions x_e, y_e (c) vitesse de glissement, (d) erreur d'orientation ψ_e	117
5.10	(a) Evolution de la trajectoire du véhicule dans le plan (x, y) en présence des perturbations environnementales, (b) convergence des erreurs de positions x_e, y_e en présence des perturbations environnementales (c) vitesse de glissement en présence des perturbations environnementales, (d) erreur d'orientation ψ_e en présence des perturbations environnementales	118
6.1	Flotte de la marine Américaine en formation.	119
6.2	Force de l'aire Royal Groupe aerobatique en V.	121
6.3	Mouvement en groupe d'oies	121
6.4	Brise-glace et navire de forage dans les eaux de Beaufort.	122
6.5	Ravitaillement entre deux navires.	122
6.6	2 tugboats aident un porte avion a entrer dans le port de J.F.Kennedy.	123
6.7	Architecture à 2 niveaux pour la coordination de N systèmes	126
6.8	Synchronisation de deux modèles d'autopilot de Nomoto	127
6.9	Système (6.1) en boucle fermée (cas perturbé)	135
6.10	Poursuite de trajectoire pour les trois agents	137
6.11	Convergence des variables $z_i, i = 1 \dots 2$	138
6.12	Synchronisation de θ_1 et θ_2 avec θ_0	138
6.13	Modèle 3D d'un tugboat.	139
6.14	Configuration des bateaux durant la formation.	139
6.15	Système (6.73) est sous la forme cascade quand $\ddot{\theta}_i = 0$	147
6.16	Position et orientation des bateaux pendant la formation.	153
6.17	Erreur de poursuite de position.	154
6.18	Synchronisation des paramètres des trajectoires.	154
7.1	<i>La structure GNC pour un système marin</i> (Ihle, 2006)	160
7.2	Interprétation de l'erreur cinématique attaché au USV.	167
7.3	<i>Mouvement du bateau dans un plan $x - y$</i>	173
7.4	(a) <i>Convergence exponentielle des erreurs cinématiques</i> , (b,c,d) <i>Convergence des vitesses estimées</i>	175
8.1	Prototype experimental, le bateau pétrolier seabex I.	179

Chapitre 1

Introduction générale

”J’ai seulement eu en vue d’exposer dans cet Ouvrage ce que je suis parvenu à faire en ce moment et ce qui, peut-être, pourra servir de point de départ pour d’autres recherches de même genre.” M. A. Lyapunov

1.1 Problématique associées aux véhicules marins sous-actionnés

La diversité des systèmes sous-actionnés en robotique est une source de développements importants pour l’automatique, dans la mesure où la commande de ces systèmes donne souvent lieu à des problèmes qu’on ne peut pas résoudre avec des techniques classiques. En outre, les applications dédiées aux véhicules marins et nécessitant un niveau d’autonomie élevé sont de plus en plus nombreuses. En effet, l’intrusion de ces systèmes en milieu très perturbé nécessite une bonne robustesse et de fortes capacités de mouvement.

La place importante réservée aux véhicules non-holonomes et sous-actionnés dans les applications robotiques repose en partie sur l’existence de stratégies de commande simples et robustes pour stabiliser des trajectoires de référence. Les applications de type platooning par exemple, où il s’agit de contrôler la position d’un véhicule par rapport au véhicule précédant se déplaçant en marche avant, sont essentiellement basées sur des techniques d’automatique linéaire. Cependant, d’autres applications nécessitent d’utiliser des outils plus élaborés, notamment lorsque le contrôle de la situation complète

(i.e. position et orientation) du véhicule est nécessaire. Les études consacrées à ce type d'applications sont nombreuses, ce qui ne facilite pas toujours leur lisibilité en terme d'intérêt applicatif. Un premier objectif de cette introduction est d'exposer les principaux problèmes étudiés dans la littérature consacrée à la stabilité à l'origine et la stabilisation de trajectoires, et de donner un aperçu des approches existantes pour la synthèse de retours d'état.

La commande des véhicules non-holonomes et des véhicules sous-actionnés fait généralement l'objet d'études distinctes. Ceci est en partie justifié par la différence de structure des modèles associés. Pour les systèmes non-holonomes, la difficulté (du point de vue de l'automaticien) se situe au niveau du modèle cinématique, alors qu'elle est liée à la dynamique pour les systèmes sous-actionnés. Cette distinction implique également une hiérarchie en ce qui concerne la difficulté à synthétiser des lois de commande : alors que des méthodes assez générales ont été proposées pour la commande des systèmes non-holonomes (et plus généralement des systèmes de commande nonlinéaires "sans dérive"), les systèmes sous-actionnés ont jusqu'à présent été étudiés au cas par cas, en raison de la difficulté à mettre en évidence des propriétés structurelles suffisamment générales et exploitables pour la synthèse. Malgré cela, ces deux classes de systèmes possèdent de nombreux points communs, rarement explicités, dont la compréhension peut permettre de progresser vers un traitement unifié des problèmes de commande.

L'objectif principal de cette thèse est de contribuer à la commande des systèmes non-linéaires qui ne peuvent pas être rigoureusement commandé par des méthodes linéaires. L'objectif final de ce projet de recherche est d'entreprendre une étude compréhensive du problème de la stabilisation, de la poursuite de trajectoire et du suivi de chemin qui surgit dans le contexte de la commande autonome des véhicules marins sous-actionnés. La stabilisation des véhicules marins, implique les applications de stationnement dans les ports et le positionnement dynamique dans les mers, soit pour le ravitaillement stationnaire soit pour exécuter des tâches de pointes sous marines. La poursuite de trajectoire consiste à générer une commande permettant au véhicule de poursuivre une trajectoire admissible à celui-ci. Le suivi de chemin, est une opération plus délicate que celui de la poursuite de trajectoire. En effet, le chemin est défini a priori et le véhicule consiste à garder sa direction tangente au chemin, la commande qui va être générée doit assurer l'auto réglage de la vitesse linéaire du véhicule le long du chemin (selon la courbure). En général pour être manoeuvrés, les véhicules sous-actionnés exigent des opérations manuelles d'un opérateur habile et expérimenté même pour des simples manoeuvres. L'automatisation de ces opérations, va nous permettre de couper le cordon ombilical entre l'opérateur et le véhicule marin, et par la même occasion, d'élargir le champ d'application du véhicule ainsi que l'amélioration de ses performances.

Avant de couper ce lien qui existe entre le véhicule et l'opérateur, nous devons cependant trouver une solution adéquate au problème de combiner la non-linéarité et le sous-actionnement dans un unique cadre. Les techniques développées pour les applications de la commande des véhicules marins pleinement actionnés sont désormais non adéquates pour les véhicules non-linéaires sous-actionnés. En résolvant ce type problème, nous devons tout d'abord connaître les limites des techniques précédemment étudiés pour les systèmes pleinement actionnés. puis nous devons étendre ces techniques pour concevoir des solutions simples et pratiques pour les véhicules sous-actionnés.

Le reste de ce chapitre décrit les principales motivations qui ont engendré les travaux présentés dans cette thèse, ainsi nous présentons quelques uns de ceux qui ont été menés dans le domaine des véhicules non-holonomes et sous-actionnés. L'objectif n'est pas de donner un bilan complet des travaux dans le domaine rapporté dans la littérature, mais simplement de mettre en lumière les principales contributions qui ont été sources de notre réflexion.

1.2 Cadre applicatif et motivation de ce travail

De nos jours de nombreux navires naviguent sur les océans propulsés avec un simple propulseur et un gouvernail. Ils disposent ainsi de deux contrôles indépendants. Par conséquent ils sont considérés comme sous actionnés dans la mesure où ils ne peuvent pas atteindre simultanément les trois degrés de liberté dans le plan par l'usage des actionneurs. De plus, pour ce type de navires le coût nécessaire pour les équiper d'actionneurs supplémentaires, afin de les rendre entièrement actionnés, est supérieur au gain en matière de stabilité. Ces facteurs économiques sont à considérer lors de la réalisation d'un nouveau navire. Cependant la tendance actuelle pousse à équiper ces navires avec un propulseur monté transversalement au navire (voir Figure 1.1), c'est à dire en supplément de leur configuration habituelle. Ce qui permet un "actionnement" complet pour des applications à faible vitesse lors des manoeuvres dans les ports ou dans des espaces confinés. Mais puisque ces propulseurs transversaux perdent leurs performances lors de grandes vitesses, ils ne constituent pas une solution pour l'actionnement complet des navires. Par ailleurs un navire complètement actionné pourrait être exposé à la panne d'un de ses moteurs, diminuant ainsi sa mobilité. Il serait alors nécessaire d'envisager des solutions, soit de redondance matérielle, soit une solution algorithmique de commande. Il est évident qu'une solution basée sur la commande serait plus rentable économiquement que l'ajout d'actionneurs redondants. Ainsi, les bateaux



FIG. 1.1 – Propulseurs transversaux réalisant le plein actionnement du bateau.

sous-actionnés s’inscrivent dans la catégorie des systèmes non-holonomes, objet de la section suivante.

1.3 Systèmes non-holonomes et sous-actionnés

Au cours des dernières années, il y a eu un intérêt considérable dans l’étude des systèmes non-holonomes et sous-actionnés. Du point de vue théorique, cet intérêt a été suscité par le fait que ces systèmes posent des défis mathématiques dans la théorie de la commande. Dans le même temps, ces problèmes apparaissent dans beaucoup d’applications pratiques du domaine de robotique mobile, en particulier dans la robotique terrestre et marine, lorsque le nombre d’actionneurs d’un véhicule mobile est inférieur au nombre de degrés de libertés. (*e.g.* un bateau sous-actionné est considéré comme non-holonyme car il ne possède pas de propulseur transversal). Enfin, le désir d’automatisation de certaines manoeuvre des véhicules sous-actionnés. En effet, cette automatisation permettant d’élargir le champ d’application de ces véhicules et améliorera leurs performances. La littérature sur les systèmes non-holonomes et sous-actionnés est extrêmement vaste, et mérite un très long aperçu. Le lecteur pourra trouver dans (Kolmanovsky et McClamroch, 1995) une excellente étude sur ce domaine. On pourra aussi voir (Wen, 1996) pour un exposé plus rapide des concepts clés sur les types de commande des systèmes non-holonomes. La référence (Wen, 1996), guide le lecteur à travers les différentes définitions de non-holonomie, en commençant par le plus classique des concepts du domaine de la mécanique pure, exposent les problèmes liés à la cinématique des systèmes non-holonomes. Dans ce qui suit est développée une brève introduction à ce domaine fascinant.

1.3.1 Travaux antérieurs sur les systèmes non-holonomes

Un système mécanique est dit être non-holonome si ses vitesses généralisées satisfont une égalité et que de plus celle-ci ne peut pas être écrite sous une condition équivalente sur les positions généralisées du système¹ (Wen, 1996). Une contrainte non-holonome ne réduit pas forcément l'espace de configuration du système mécanique. Les classes de systèmes suivants sont dit systèmes non-holonomes :

1. *Roulement sans glissement dans le cas des véhicules sur roues*, ces contraintes cinématiques résultent de l'hypothèse de roulement sans glissement. Considérons une roue en contact avec le sol plan et qui roule sans glisser sur ce sol, (voir Figure 1.2) le roulement sans glissement se traduit par la vitesse nulle du point I de la

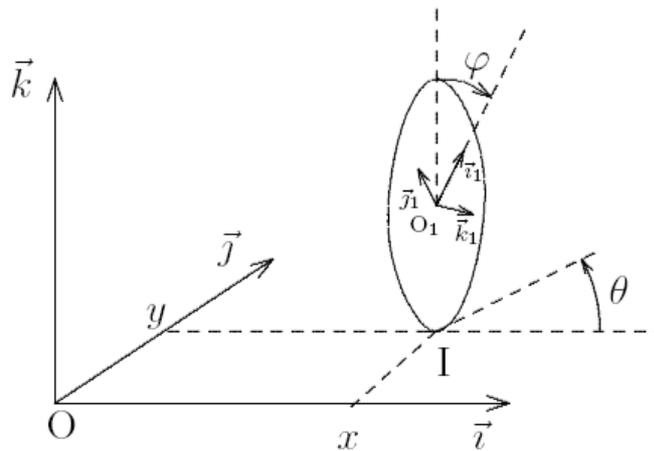


FIG. 1.2 – Roulement sans glissement.

roue en contact avec le sol.

2. *Conservation du moment angulaire* : soit un système Lagrangien, si un sous-ensemble q_u de l'ensemble des coordonnées généralisées n'apparaît pas dans la matrice $M(q)$, alors q_u est appelé l'ensemble des coordonnées cycliques. Dans ce cas, l'équation de Lagrange associée à q_u s'écrit $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{ui}}) = \frac{\partial L}{\partial q_{ui}} = 0$ où L est le Lagrangien et \dot{q}_{ui} sont les vitesses généralisées. Il s'avère que, dans plusieurs cas que cette équation est non-intégrable. Un exemple typique à ce cas de figure est celui d'un corps rigide flottant dans l'espace sans qu'il y ait de couples externes qui lui soient appliqués.
3. *Système mécanique sous-actionné* : un système sous-actionné est un système dont la dimension de son espace de configuration dépasse en nombre l'espace de ses

¹Une définition formelle d'un système non-holonome sera donnée au chapitre 2

entrées de commandes. Les conditions de non-intégrabilités, peuvent se manifester pour les systèmes sous-actionnés comme des contraintes d'accélération qui ne peuvent pas être intégrées pour avoir des conditions équivalentes en vitesse. Ces contraintes sont appelées contraintes non-holonomes de second ordre. Le lecteur pourra trouver dans les travaux de (Oriolo.G. et Nakamura, 1991) les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système mécanique sous-actionné, abrite des contraintes non-holonomes de second ordre ou de premier ordre ou tout simplement des contraintes holonomes.

Une grande variété de modèles mathématiques de systèmes non-holonomes a été étudiée dans la littérature. En particulier, la classification des systèmes non-holonomes selon leurs catégories ainsi que des transformations permettant d'écrire leurs modèles sous formes canoniques. A titre d'exemple, la cinématique de plusieurs systèmes non-holonomes comme les véhicules à roues peut être transformée sous la forme connue dite forme chaînée, (Murray et Sastry, 1993b). D'autres exemples intéressants de systèmes non-holonomes s'écrivent sous la forme chaînée. Nous citons parmi eux le tricycle, le véhicule remorqueur qui tire plusieurs wagons, sans oublier bien sûr les robots manipulateurs non-holonomes, (Murray et Sastry, 1993b; Kolmanovsky et McClamroch, 1995; Nakamura et Sordalen, 2001).

Un certain nombre de stratégies de commande ont été proposés pour différentes classes de systèmes non-holonomes. Ces propositions se divisent en deux grandes catégories : la commande en boucle ouverte et la commande en boucle fermée. Dans la première, la commande est pré-calculée en se basant sur la connaissance des configurations initiales et finales du système. Ces stratégies sont souvent associées à des problèmes de planification de mouvement. C'est-à-dire la nécessité d'obtenir une commande en boucle ouverte permettant de diriger un système non-holonyme le long d'une trajectoire admissible et réalisable entre deux points de l'espace de travail. Cette configuration s'effectue sous réserve de plusieurs critères, tels que l'évitement d'obstacles, le plus court chemin, la commande optimale, le nombre minimum de manoeuvres. Plusieurs méthodes de planifications de mouvement pour les véhicules non-holonomes ont été mises au point. Elles peuvent être classé selon trois catégories : la technique de la géométrie différentielle, la technique algébrique différentielle et l'approche de la commande basée sur la paramétrisation du chemin (Kolmanovsky et McClamroch, 1995). Par leur nature, les stratégies en boucle ouverte ne peuvent pas compenser les perturbations et les erreurs de modélisation. D'où la nécessité de considérer la stratégie de commande en boucle fermée afin de fournir une bonne robustesse vis a vis des incertitudes et des perturbations.

Le problème de suivi de chemin en boucle fermée est sans doute chronologiquement le premier à avoir été étudié. En particulier dans le cadre de la conduite automatisée

étant donnée une courbe du plan et une vitesse d'avancement non nulle pour le véhicule commandé. Il s'agit simplement d'annuler la distance d'un point du véhicule à cette courbe en commandant uniquement l'orientation du véhicule (pour un véhicule de type unicycle), ou l'angle du volant (pour un véhicule de type voiture). Parmi les travaux précurseurs dans ce domaine, on peut citer ([Dickmanns et Zapp, 1987](#)). Une étude plus détaillée de la synthèse de ce type de commande est donnée dans ([Samson, 1995](#); [Canudas-de Wit *et al.*, 1996](#)).

Le problème de stabilisation de trajectoire non-stationnaire se distingue du précédent par le fait que la vitesse d'avancement n'est plus fixée à l'avance. Ceci revient essentiellement à définir un repère se déplaçant le long d'une courbe et à réguler l'erreur de situation entre ce repère et le véhicule commandé. En raison du fait que le linéarisé le long d'une trajectoire de référence des modèles de commande des véhicules non-holonomes est génériquement contrôlable (au sens par exemple de ([Sontag, 1990](#))), de nombreuses trajectoires de référence peuvent être asymptotiquement stabilisées en utilisant des retours d'états « classiques ». C'est-à-dire linéaires ou localement assimilables à des retours d'état linéaires. La plupart des résultats sur la stabilisation asymptotique de trajectoire ([Kanayama *et al.*, 1990](#); [Samson et Ait-Abderrahim, 1991](#)) consistent à utiliser de tels retours d'état. Toutefois, ces commandes n'assurent la convergence de l'erreur de suivi vers zéro que sous des conditions de non convergence de la trajectoire vers un point fixe (conditions qualifiées aussi « d'excitation persistante »). Il n'est donc pas possible de garantir une telle convergence sans une connaissance a priori de la trajectoire de référence.

Le problème de stabilisation de configuration fixe ne peut être résolu par des méthodes de linéarisation, du fait de la non commandabilité du linéarisé autour d'un point fixe. En outre, le théorème de ([Brockett, 1983](#)), une des contributions les plus marquantes dans ce domaine, implique qu'il n'existe pas de retour d'état continu et dépendant uniquement de l'état - retour d'état continu autonome qui stabilise asymptotiquement la configuration des véhicules non-holonomes à une valeur de référence fixe. Différents types de retours d'état ont alors été proposés afin d'éviter cette difficulté. Les retours d'états instationnaires hybrides, c'est-à-dire continus par rapport au temps mais échantillonnés en l'état ([Sordalen et Egeland, 1995](#); [Bennani et Rouchon, 1995](#)), fournissent une première possibilité. L'utilisation de retours d'état discontinus a aussi été proposée ([Canudas-de Wit et Sordalen, 1992](#)), bien qu'elle ne permette pas de garantir une stabilité asymptotique ([A et Rosier, 2001](#)). Une autre possibilité, proposée dans ([Samson et Ait-Abderrahim, 1991](#)), consiste à utiliser des retours d'état réguliers instationnaires (périodiques par rapport au temps). De nombreuses méthodes de synthèse de telles commandes ont été développées ([Pomet, 1992](#); [Coron, 1992](#); [M'Closkey, 1994](#); [Morin *et al.*, 1997](#)) et testées expérimentalement ([M'Closkey et Murray, 1997](#)). Toute-

fois, quel que soit le type de retour d'état utilisé, il semble impossible de contourner le dilemme pratique suivant (voir (Morin, 2004) pour plus de détails) : l'utilisation de retours d'état "réguliers" (au moins Lipschitz-continus) peut éventuellement permettre d'obtenir des propriétés de robustesse (aux dynamiques non-modélisées, aux retards, à l'échantillonnage) satisfaisantes (Maini *et al.*, 1999), mais conduit à des convergences lentes (de type polynomiale). A l'opposé, une convergence exponentielle peut être obtenue avec des retours d'état seulement continus (M'Closkey et Murray, 1997; Morin *et al.*, 1997), mais ce type de commande ne possède pas de bonnes propriétés de robustesse et conduit à une forte sensibilité aux bruits de mesure.

Le dilemme précédent est une première illustration des difficultés pratiques liées à la stabilisation asymptotique de certaines trajectoires, pour les véhicules non-holonomes. Une deuxième illustration est donnée par un résultat récent de (Lizárraga, 2003). La question abordée dans cet article est la suivante : existe-t-il un retour d'état régulier qui permette de stabiliser asymptotiquement toute trajectoire admissible d'un système nonlinéaire ? Evidemment, ce retour d'état peut dépendre de la trajectoire de référence, et il peut aussi être non-stationnaire (sinon, le théorème de Brockett impliquerait directement la non-existence de tels retours d'état puisque les configurations fixes ne pourraient être asymptotiquement stabilisées). Il est montré dans (Lizárraga, 2003) modulo quelques hypothèses techniques assez faibles, que de tels retours d'état n'existent pas pour les véhicules non-holonomes classiques (unicycle, véhicules ...). Ce résultat explique en particulier pourquoi, pour un même système de commande, différents retours d'état doivent être utilisés pour stabiliser asymptotiquement différentes trajectoires de référence

Toutes ces difficultés de commande suggèrent que l'objectif de stabilisation asymptotique est sans doute trop contraignant pour la commande des véhicules non-holonomes.

1.3.2 Travaux antérieurs sur les véhicule sous-actionné

Un système mécanique sous actionné est défini par le fait que l'espace constitué par le vecteur commande est inférieur à la dimension de l'espace de configuration du système mécanique. En d'autres termes, un système mécanique est dit sous-actionné lorsque le nombre de commandes est inférieur au nombre de degrés de libertés du système. Une caractéristique équivalente des systèmes sous-actionnés est qu'ils possèdent une dynamique non-intégrable décrivant une accélération.

Différentes recherches ont été menées dans ce domaine. La première concerne l'amélioration de la commande de systèmes de véhicules sous-actionnés. Tout d'abord, pour le même

espace de configuration, un système pleinement actionné nécessite plus de commandes que s'il est sous-actionné. Ce qui augmente le prix et le poids du système. Trouver un moyen pour commander une version d'un système sous-actionné, permettrait d'éliminer certains des dispositifs de commande d'améliorer la performance globale, ou de réduire le coût de construction du véhicule. La deuxième raison pratique pour laquelle nous étudions les systèmes sous-actionnés est que le sous-actionnement fournit une technique de commande pour la sauvegarde des systèmes sous-actionnés. Si par exemple le système pleinement actionné se trouve endommagé et que nous disposons d'un contrôleur sous-actionné, alors nous pouvons l'utiliser en cas d'urgence afin d'échapper à l'échec de tout le système. Ces raisons poussent à la conception des commandes pour les systèmes sous-actionnés et peuvent être considérablement utiles pour les avions, les fusées et engins spatiaux où les pannes des propulseurs pourraient provoquer des accidents catastrophiques pour le véhicule ou pour la mission.

Il est important de souligner que certaines lois de commande développées jusqu'ici pour les systèmes véhicules marins sous-actionnés ne prennent pas en compte explicitement leur dynamique. Ignorer la dynamique des véhicules est totalement irréaliste. De plus, même si la dynamique est prise en compte, les résultats obtenus par des commandes en boucles fermées ne sont pas satisfaisantes.

Le second axe de recherche concerne la manoeuvrabilité. En effet, la difficulté de manoeuvrer un véhicule sous-actionné à une destination bien spécifique avec une orientation souhaitée a récemment reçu une attention particulière dans la littérature. Cette tâche soulève des défis au niveau du système de commande du véhicule, parce que, en plus d'être sous-actionné, ce type de véhicule abrite des effets hydrodynamiques complexes qui doivent nécessairement être pris en compte lors de la phase de conception du contrôleur. Les travaux les plus reconnus dans ce domaine sont ceux de (Leonard, 1995). Dans ces travaux, une stratégie de commande en boucle ouverte a été utilisée en exploitant une commande périodique variant dans le temps afin de pouvoir positionner et orienter le véhicule sous-actionné à la configuration désirée. Une loi de commande lisse et continue permettant d'aboutir exponentiellement à une position/orientation donnée a été introduite par (Egeland *et al.*, 1996). Dans (Pettersen et Egeland, 1995), une loi de commande périodique qui stabilise asymptotiquement le véhicule à l'origine a été présentée. Inspiré par les travaux de (Morin et Samson, 1995), (Pettersen et Egeland, 1997) a proposé une commande périodique non-stationnaire permettant d'avoir une stabilité exponentielle du véhicule marin sous-actionné. Ce résultat ne dépend en aucun cas de la connaissance a priori des paramètres du modèle et par conséquent, la stabilité exponentielle est robuste aux variations paramétriques du modèle. Dans (Pettersen et Nijmeijer, 1998), une loi de commande variant dans le temps a été proposée et qui a aboutit à une stabilisation/poursuite globale et pratique du véhicule marin sous-actionné.

1.4 Contributions de la thèse

La contribution primordiale de cette thèse est d'avoir fourni un travail sur l'étude et l'utilisation d'une nouvelle approche de commande des véhicules marins sous-actionnés non-linéaires, ainsi que le développement d'outils en vue de l'implémentation de ces commandes sur des systèmes physiques. Plus précisément, les principales contributions portent sur les points suivants

- **Stabilisation du véhicule marin sous-actionné**

La stabilisation des véhicules marins, implique les applications de stationnement dans les ports et le positionnement dynamique dans les océans, soit pour le ravitaillement stationnaire, soit pour exécuter des tâches de pointes sous-marines (voir Figure 1.3).

Le contrôle de la position et de l'orientation d'un navire sans la présence de pro-



FIG. 1.3 – Positionnement dynamique d'un navire.

pulseurs latéraux est traité. Ce type de navire appartient à la classe des véhicules sous-actionnés pour lesquels une configuration constante ne peut pas être stabilisable asymptotiquement par un retour d'état continu ni par une commande discontinue par retour d'état pur. Nous proposons à cet effet une transformation de coordonnées permettant d'écrire le modèle du système véhicule marin sous la forme d'une cascade de deux sous-systèmes en maître esclave, pour lesquels la commande du maître suffira pour garantir la stabilité de la totalité du système. Cependant le sous-système maître n'a pas la forme classique sur laquelle nous pouvons appliquer une commande continue par retour d'état. A cet effet

nous avons proposé une commande discontinue par l'utilisation de la technique du backstepping. Cette méthode permet d'aboutir à une stabilité exponentielle locale de tout le système. Afin de rendre la stabilité de ce système par cette méthode globale, nous faisons intervenir une commande par feedforward pour que le système puisse sortir du domaine de singularité puis nous basculons vers la technique de la commande discontinue par le backstepping. Néanmoins cette solution est souvent sensible aux perturbations extérieures ainsi qu'aux variations des paramètres du modèle qui pourra induire à un dysfonctionnement de la commande. Nous améliorons cette commande en développant une nouvelle version de la commande précédente en assurant la convergence asymptotique et uniforme de tous les états du système à l'origine comme suit.

- **Poursuite de trajectoires du véhicule marin sous-actionné**

La poursuite de trajectoire s'impose dès lors que l'on doit prendre en compte des contraintes dynamiques, i.e., dépendant du temps. Ces contraintes dynamiques sont de deux types : celles qui concernent l'environnement (présence de mobiles) que nous n'allons pas traiter dans cette thèse, et celles qui concernent le système robotique (sa dynamique). A l'instar de la plupart des méthodes de navigation, la poursuite de trajectoire, pose le problème de la forme de la trajectoire que le véhicule sous-actionné doit suivre, sachant que le véhicule marin sous-actionné n'a pas la possibilité de se déplacer en un temps optimal dans sa direction sous-actionnée, nous devons dans tous les cas assurer la convergence du véhicule à sa trajectoire désirée sans aucune difficulté. A cet effet, nous considérons que la trajectoire à poursuivre est générée par un véhicule marin fictif de référence sous-actionné, mais de même cinématique et dynamique que le véhicule marin sous-actionné réel. Nous exprimons alors l'erreur dynamique résultante entre les véhicules réel et virtuel après quelques transformations sous la forme de cascade de deux sous-systèmes, la stabilité exponentielle est assurée en imposant une condition d'excitation persistante sur la vitesse angulaire du véhicule.

- **Suivi de chemin du véhicule marin sous-actionné**

Dans cette thèse nous avons traité deux approches différentes pour le suivi de chemin, la première consiste à remarquer que le bateau sous-actionné peut, à l'aide de ses propres propulseurs (i.e. en gardant la vitesse de poussée constante), converger vers le chemin désiré. Cette approche est semblable à celle de (Samson, 1995) dans laquelle celui-ci a utilisé le principe de la base de Serret-Frenet afin de décrire l'erreur géométrique du bateau relativement au chemin. Cependant, dans cette approche, l'auteur considère une seule erreur cinématique, qui est la distance du centre de gravité du robot mobile à la tangente $\{T\}$ du repère de Serret-Frenet. L'objectif sera donc d'annuler cette erreur (distance), mais l'analyse de la convergence montre que cette erreur doit toujours rester bornée inférieure à un nombre

très petit afin d'éviter une division par zéro dans la loi de commande qui peut engendrer une sursaturation des couples moteurs. Dans cette thèse nous avons pu éliminer ce problème en considérant non pas une seule erreur cinématique mais plutôt deux erreurs qui constituent l'erreur transversale et latérale. Le but est d'annuler ces deux erreurs et non plus une seule. La singularité dans la commande est dans ce cas disparue. En seconde approche, nous avons cherché une écriture plus générale de l'erreur cinématique entre le bateau et le chemin à suivre. Nous avons proposé, une transformation globale permettant d'exprimer l'erreur cinématique dans un repère attaché au bateau tel que les axes de celui ci sont parallèles respectivement aux vecteurs vitesses linéaires, transversale et latérale.

- **Contrôle de Formation**

Dans ce travail nous abordons une nouvelle application au mouvement d'ensemble des véhicules marins, c'est un problème de coordination de mouvement entre plusieurs véhicules. (voir Figure 1.4).

Une extension du suivi de chemin est développée pour la formation d'un groupe



FIG. 1.4 – Formation d'un groupe de bateaux.

de véhicules marins sous-actionnés. Tout d'abord, une configuration pour la formation des véhicules est définie, qui conduit à générer un chemin pour chaque véhicule, membre du groupe. Ensuite, en se basant sur le concept de la commande adopté pour le suivi de chemin, nous proposons un schéma de commande permettant de synchroniser les véhicules le long de leurs chemins. Ce schéma de commande est montré pour une classe de systèmes pouvant se mettre sous une forme dite forme triangulaire. Nous appliquons ce schéma de commande à la structure triangulaire de la dynamique des erreurs du véhicule sous-actionné.

- **Observateur d'état pour véhicule marin sous-actionné**

La mesure des vitesses pour un véhicule marin en général n'est pas disponible.

L'estimation de ces vitesses est donc nécessaire pour la commande. La position et l'orientation d'un bateau sont mesurable et sont données par le système NAVSTAR (i.e. un DGPS : Differential Global Positioning System) et un gyrocompas. Puisque les mesures de la position du bateau sont souvent corrompues par les perturbations, la détermination numérique des vitesses ne sera pas effective. Une alternative sera de construire un observateur permettant, à partir de la mesure de position ainsi que de l'orientation du bateau, de déterminer une estimation des vitesses de ce bateau. Nous adressons dans ce travail le problème de la non disponibilité de la mesure des vitesses pour un bateau sous-actionné. Nous proposons à cet effet deux schémas d'observation. Le premier se sert de la mesure de la position/orientation du bateau et de la vitesse de rotation du bateau que l'on appelle observateur par retour d'état partiel. Le second schéma se sert uniquement de la mesure de position/orientation du bateau.

1.5 Contenu des chapitres

Outre cette introduction qui fait office à la fois de motivation et de présentation générale du problème, le manuscrit se compose de huit chapitres organisés comme suit.

Chapitre 2 Ce chapitre présente un préliminaire mathématique dans lequel, nous donnerons quelques notations utilisées dans ce manuscrit ainsi que les principales définitions, et théorèmes sur la stabilité au sens de Lyapunov. Nous présentons aussi quelques résultats concernant la stabilité des systèmes cascades non-linéaires. Ensuite afin de familiariser le lecteur sur le sous-actionnement et la non-holonomie nous avons consacré toute une partie pour définir les différents résultats et théorèmes concernant ce domaine. Nous finirons par donner des définitions et la relation entre la poursuite de trajectoire et le suivi de chemin.

Chapitre 3 Ce chapitre décrit qualitativement le modèle cinématique et dynamique d'un bateau. Nous présentons la dynamique générale d'un bateau à 6 degrés de libertés (ddl). Ensuite nous fournirons des hypothèses simplificatrices afin de décrire le modèle cinématique et dynamique en 3 ddl. Nous finirons par donner les raisons pour lesquelles un bateau devient sous-actionné, puis de tester la non-holonomie du bateau suite à son sous-actionnement.

Chapitre 4 Ce chapitre se divise en deux parties, la première concerne la stabilisation d'un véhicule marin de type bateau à l'origine, la première approche utilisée dans cette approche est celle de la commande discontinue, la deuxième approche celle de la

commande variant dans le temps. La deuxième partie de ce chapitre sera consacré à la poursuite de trajectoire d'un bateau sous-actionné.

Chapitre 5 Ce chapitre traite le problème de suivi de chemin par deux approches différentes. La première est de considérer que le véhicule marin sous-actionné est propulsé avec une vitesse d'avancement constante. La seconde considère que cette vitesse (d'avancement) ne peut pas être constante mais variable selon la nature du chemin adopté.

Chapitre 6 Nous présentons dans ce chapitre une nouvelle approche de commande pour la coordination et la synchronisation d'un ensemble de systèmes mécaniques. En effet, ce chapitre contient une introduction à la notion de formation de groupe ainsi que la théorie que nous avons proposée à une classe de systèmes mécaniques pouvant s'écrire sous la forme triangulaire. Cette théorie est par la suite étendue au cas des bateaux sous-actionnés.

Chapitre 7 Ce chapitre donne une solution pour la reconstruction d'état par un retour d'état partiel et retour de sortie pour les véhicules marins sous-actionnés. Le résultat du schéma d'observation est appliqué au suivi de chemin pour un véhicule marin sous-actionné.

Chapitre 8 Ce chapitre conclut ce manuscrit et propose quelques perspectives.

1.6 Publications

Ce qui suit est une liste des publications rédigées au cours des quatre dernières années, qui sont soit publiées, soit acceptées pour publications, soit en cours de révision.

Articles de revues

- i/ J.Ghommam, F.Mnif, A.Benali & N.Derbel , *Asymptotic Backstepping Stabilization of an Underactuated Surface Vessel*, In IEEE Transactions on Control Systems Technology, Volume : 14, Issue : 6.
- ii/ J.Ghommam, F.Mnif, A.Benali & N.Derbel, *On the dynamic properties and control of underactuated surface vessels*, Int. J. Modelling, Identification and Control, Vol. 2, No. 1, 2007.

- iii/ J.Ghommam, F.Mnif & N.Derbel, *Global Stabilization and Tracking control of Underactuated Surface Vessels*, à soumettre.
- iv/ J.Ghommam, F.Mnif, A.Benali & N.Derbel, *Nonsingular Serret-Frenet-based path following control for an underactuated surface vessel*, soumis à Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control (ASME).

Articles de conférences

– 2007

- i/ J.Ghommam, F.Mnif, A.Benal & G.Poisson, *Observer design for Euler Lagrange system : Application to path following control of an underactuated surface vessel*, in IEEE/RSJ International conference on intelligent robots and systems, IROS'07, October 2007.
- ii/ J.Ghommam, F.Mnif, G.Poisson & N.Derbel, *Nonlinear Formation Control of a Group of Underactuated Ships*, in Proceedings of IEEE/OES Oceans 07 Aberdeen Conference. 2007.
- iii/ J.Ghommam, F.Mnif, A.Benali & G.Poisson, *Guidance based path following control for an underactuated ship*, in Proceedings of IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices. 2007.
- iv/ J.Ghommam, F.Mnif & N.Derbel, *Robust path following control of underactuated ship*, in Proceedings of IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices. 2007.
- v/ J.Ghommam, F.Mnif & N.Derbel, *Formation Control based Path Following : Application to a Double Integrator*, in Proceedings of IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices. 2007.

– 2006

- i/ J.Ghommam, F.Mnif, N.Derbel, G.Poisson & A.BenAli, *Backstepping Technique for the tracking control of an underactuated surface vessel*, in Proceedings of the 7th International Conference on Marine Control of Marine Craft, IFAC 2006, Lisbon, Portugal.

ii/ J.Ghommam, A.Benali & G.Poisson, *Stabilisation par la méthode du backstepping d'un navire sous-actionné*, in Proceedings of the Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA 2006, Bordeaux.

iii/ J. Ghommam, F. Mnif, & N. Derbel, *Backstepping Technique for tracking control of an underactuated surface vessel with unmeasured thruster dynamic*. in Proceedings of the 6th International Philadelphia Engineering Conference on : Computational Aspects and Correspondence IPEC'06.

– 2005

i/ J. Ghommam, F. Mnif, & N.Derbel, *Path following for underactuated marine craft using Line Of Sight algorithm*, in the proceeding of the International Conference on Machine Intelligence, Touzer-Tunisia, November 5-7, 2005.

ii/ J. Ghommam, F. Mnif, A.Benali & N.Derbel, *Asymptotic Backstepping Stabilization of an Underactuated Surface Vessel*, in the proceedings of IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices. 2005.

Chapitre 2

Préliminaires

Quelques définitions sur la stabilité au sens de Lyapunov sont rappelées brièvement. La notion de stabilité doit ici être comprise dans le sens de Lyapunov. Pour une synthèse de la stabilité des systèmes dynamiques, le lecteur est appelé à consulter les références (Khalil, 1996) et (Sastry, 1999). Nous expliquons ensuite le concept de sous-actionnement de robots mobiles ainsi que la définition des contraintes non-holonomes, tout en donnant la nuance qui peut exister entre la non-holonomie et le sous-actionnement de ces derniers. Une discussion sur les concepts d'accessibilité, de contrôlabilité et de stabilité de systèmes marins sous-actionnés. Finalement nous proposons une vue globale sur les différents schémas de contrôle du mouvement d'un objet mécanique.

2.1 Outils mathématiques et concept de stabilité

2.1.1 Notations

Certaines notations seront utilisées tout au long de cette thèse que nous listons ci-dessous.

- Les dérivées totales par rapport au temps d'une fonction $x(t)$ sont notées par $\dot{x}, \ddot{x}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$.

L'indice d'une fonction $x(\psi, \beta, t)$ par rapport à un argument, représente la dérivée partielle de cette fonction par rapport à cet argument e.g $x^t(\psi, \beta, t) := \frac{\partial x}{\partial t}$, $x^{\theta^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}$.

Le gradient $x^\psi(\psi, \beta, t)$ avec $\psi \in \mathbb{R}^n$ est toujours un vecteur ligne.

- Pour une fonction f définie par $f : X \rightarrow Y$, nous dirons que f est de classe \mathcal{C}^r , si $f^{x^k}(x)$, $k = \{0, 1, \dots, r\}$ est définie et continue pour tout $x \in X$. f est *continue* si $f \in \mathcal{C}^0$, f est continûment différentiable si $f \in \mathcal{C}^1$, et f est dite lisse si $f \in \mathcal{C}^\infty$.
- La norme- p d'un vecteur $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, la norme 2 ou dite encore la norme euclidienne est par contre la plus utilisée dans ce manuscrit, notée par $\|x\| := \|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$. Ceci se réduit par une valeur absolue pour des scalaires x .
- La norme- \mathcal{L}_p d'un signal $x(t)$ est définie par $\|x\|_{\mathcal{L}_p} := \left(\int_{t_0}^\infty |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$, en particulier la norme infinie est définie par $\|x\|_{\mathcal{L}_\infty} = \text{ess sup}\{|x(t)| : t \geq 0\}$.
- La norme-2 induite d'une matrice A est donnée par

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$$

- Pour une matrice $P = P^\top > 0$, notons par $\lambda_{\min}(P)$ et $\lambda_{\max}(P)$ respectivement les valeurs minimale et maximale des valeurs propres de la matrice P .

Remarque 2.1 La notation utilisée pour la dérivée partielle, par exemple $x^t(\theta, \beta, t)$ est une notation compacte qui permet de donner une bonne lecture des équations mathématiques. Cependant, l'indice de cette dérivée partielle peut être confondue avec d'autres opérations mathématiques, comme celle de la puissance d'une fonction. Pour enlever cette ambiguïté, nous écrivons la liste des argument de la fonction en question et la dérivé partielle se met juste avant la liste des arguments et les autres opérations

Symboles	Signification
\in	élément de
\forall	pour tout
\exists	il existe
$:=$	défini comme
\Rightarrow	implique que
\rightarrow	converge vers
\mapsto	associé à
\nearrow	tend vers une limite à droite
\searrow	tend vers une limite à gauche
USV	Underactuated Surface Vessel
i.e.	ce qui signifie

TAB. 2.1 – Abbreviations mathématiques.

mathématiques se placent après la liste. Par exemple, $f^t(x, \theta, t)^2 = \left(\frac{\partial f(x, \theta, t)}{\partial t}\right)^2$ et $\xi^{\theta^2}(\theta, t)^\top = \left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta^2}\right)^\top$.

Définition 2.1 Une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie pour tout (t, x) est lipschitzienne en x , si pour deux vecteurs x_1 et x_2 et pour tout t , nous avons

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\|$$

si cette condition est vraie pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ alors la fonction $f(t, x)$ est dite **globalement lipschitzienne**. Elle est dite **localement lipschitzienne** quand la condition est satisfaite dans une région de \mathbb{R}^n .

Définition 2.2 Une fonction continue $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe \mathcal{K} si elle est strictement croissante et si $\alpha(0) = 0$.

Définition 2.3 Une fonction continue $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est dite de classe \mathcal{L} ($\sigma \in \mathcal{L}$) si elle est décroissante et si elle tend vers zéro lorsque son argument tend vers l'infini.

Définition 2.4 Une fonction continue $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est dite fonction de classe \mathcal{KL} ($\beta \in \mathcal{KL}$) si $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $\beta(s, \cdot) \in \mathcal{L}$ pour tout $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

2.1.2 Notion de stabilité au sens de Lyapunov

Le concept de stabilité est très intuitif dans le contexte des systèmes mécaniques. Considérons, par exemple, une bille sur une surface non plane (voir Figure 2.1-a)). Une position d'équilibre sera dite stable si, après toute perturbation suffisamment petite sur la position de la bille, celle-ci reste à jamais arbitrairement proche de cette position d'équilibre.

Définition 2.5 (définition formelle) Un système est stable au sens de Lyapunov, si $\forall R > 0, \exists r > 0$ tel que $\|x_0\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R$.

Cette définition signifie que, quelle que soit la boule d'exigence de taille R il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de taille r telle que, pour toutes les



FIG. 2.1 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

conditions initiales comprises dans cette sous-boule, les trajectoires résultantes seront, en tout temps, comprises dans la boule d'exigence de taille R .

Lorsque le système est stable, il est toujours possible de trouver une telle sous-boule, même lorsque le rayon R de la boule d'exigence est diminué de manière à le rendre arbitrairement petit, augmentant ainsi les contraintes sur les conditions initiales.

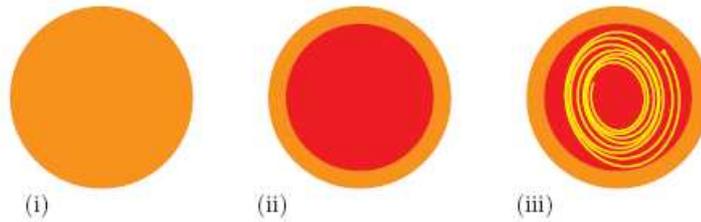


FIG. 2.2 – Illustration de la définition formelle de la stabilité. (i) Pour tout choix de la boule d'exigence $\|x\| < R$ il doit être possible de construire (ii) une sous boule de conditions initiales $\|x_0\| < r$, telle que (iii) pour toute condition initiale appartenant à cette sous boule, la trajectoire résultante reste emprisonnée dans la grande boule de taille R .

Ceci corrobore la définition intuitive de la stabilité. En effet, en considérant la bille captive dans un bol, une hauteur de référence arbitraire de la bille peut être considérée comme étant une mesure de la boule d'exigence R . Maintenant, s'il existe toujours une certaine hauteur suffisamment petite (correspondant à r), de telle sorte que, si la bille est lâchée à n'importe quelle hauteur comprise dans l'intervalle défini par cette hauteur (associée à r), elle ne pourra jamais dépasser la hauteur d'exigence de référence (associée à R), alors la bille sera stable au sens de Lyapunov. Ceci ne signifie pas pour autant que la bille revienne asymptotiquement à son point d'équilibre. Ainsi, la bille est stable dans le cas d'un bol convexe et instable lorsque le bol est concave.

L'instabilité est définie dès lors que la stabilité n'a pas lieu.

Définition 2.6 *Un système est instable au sens de Lyapunov lorsque il n'est pas stable au sens de la définition 2.5*

D'une manière générale, le système véhicule marin considéré tout au long de ce document est représenté par une équation différentielle de dimension finie de la forme

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.1)$$

où $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ représente le temps, $x \in \mathbb{R}^6$ est l'état et $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ est considérée localement de Lipschitz en x . Nous supposons que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre pour le système (2.1). Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $x = 0$ nous introduisons les définitions suivantes

Définition 2.7 *Le point d'équilibre $x = 0$ de (2.1) est dit **localement stable** s'il existe une constante positive $r > 0$ tel que pour tout $(t_0, x_0(t_0)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{B}_r$ il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{K}$ telle que*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t_0 \geq 0, \forall x(t_0) \in \mathcal{B}_r \quad (2.2)$$

*Si l'inégalité (2.2) est vérifiée pour tout $(t_0, x_0(t_0)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$ alors l'origine est **globalement stable**.*

Définition 2.8 *Le point d'équilibre $x = 0$ de (2.1) est dit*

- **(Localement) asymptotiquement stable** s'il existe une constante $r > 0$ telle que pour toute paire $(t_0, x_0(t_0)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{B}_r$, il existe une fonction $\beta \in \mathcal{KL}$ telle que

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall x(t_0) \in \mathcal{B}_r \quad (2.3)$$

- **Semi-globalement asymptotiquement stable** Si pour toute constante $r > 0$ et pour toute paire $(t_0, x_0(t_0)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{B}_r$, il existe une fonction $\beta \in \mathcal{KL}$ telle que (2.3) est vérifiée.
- **Globalement asymptotiquement stable (GAS)** s'il existe une fonction $\beta \in \mathcal{KL}$ telle que pour toute paire $(t_0, x_0(t_0)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$ l'inégalité (2.3) est vérifié.

Définition 2.9 Le point d'équilibre $x = 0$ de (2.1) est dit **(localement) exponentiellement stable** s'il est (localement) asymptotiquement stable et (2.3) est vérifiée avec :

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, r > 0, \gamma > 0$$

Dans le même contexte, nous pouvons définir pour le point d'équilibre $x = 0$ de (2.1) la notion de **semi globalement exponentiellement stable** et **globalement exponentiellement stable (GES)**

Définition 2.10 Le point d'équilibre $x = 0$ de (2.1) est dit **uniformément stable** s'il existe une constante positive $r > 0$ et une fonction $\alpha \in \mathcal{K}$ indépendantes de t_0 , telle que $\forall t \geq t_0 \geq 0, \forall x(t_0) \in \mathcal{B}_r$

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|) \quad (2.4)$$

Si l'inégalité (2.4) est vérifiée pour tout $(t_0, x(t_0)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$, alors l'origine est **globalement uniformément stable**

Définition 2.11 Le point d'équilibre $x = 0$ de (2.1) est dit **(localement) uniformément et exponentiellement stable/semi-globalement et uniformément exponentiellement stable(GUES)**, s'il est (localement) uniformément et asymptotiquement stable/semi-globalement et uniformément asymptotiquement stable/globalement et uniformément asymptotiquement stable et (2.4) est satisfaite avec

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, r > 0, \gamma > 0$$

Pour prouver les propriétés de stabilité d'un système, de nombreuses méthodes sont basées sur le théorème de Lyapunov (Khalil, 1996), qui est énoncé comme suit

Théorème 2.1 Soit $x = 0$ un point d'équilibre de (2.1) et soit le domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant $x = 0$. Soit la fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ de class \mathcal{C}^1 , telle que

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ et } V(x) > 0 \text{ dans } D \\ \dot{V}(x) &\leq 0 \text{ dans } D \end{aligned}$$

alors $x = 0$ est stable. De plus, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ dans } D - \{0\}$$

alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Notons que pour avoir une stabilité asymptotique du point d'équilibre $x = 0$, il est nécessaire de prouver que $\dot{V}(x) < 0$ dans $D - \{0\}$. Cela dit, il existe d'autres théorèmes qui permettent de montrer la stabilité asymptotique quand $\dot{V}(x) \leq 0$. Pour les systèmes autonomes, il est possible de prouver la stabilité asymptotique quand $\dot{V}(x) \leq 0$ en considérant le théorème de LaSalle, alors que pour les systèmes non-autonomes le Lemme de Barbalat est employé pour prouver la stabilité asymptotique.

Théorème 2.2 (Théorème de LaSalle), (Khalil, 1996) Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ de (2.1) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable ayant les propriétés suivantes :

- D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $\bar{x} \in D$;
- $V(x) > V(\bar{x}) \quad \forall x \neq \bar{x}$ dans D ($V(x)$ est minimum en \bar{x})
- $\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in D$
- l'ensemble $S \subset D$ tel que $\dot{V}(x) = 0$ ne contient pas de trajectoires du système autre que $x(t) = \bar{x}$.

□

Lemme 2.1 (Lemme de Barbalat), (Khalil, 1996) Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $[0, \infty)$. Supposons que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$ existe et est finie. Alors

$$\phi \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

□

En combinant la méthode directe de Lyapunov et le Lemme de Barbalat, nous obtenons le théorème de LaSalle et Yoshizawa

Théorème 2.3 (Théorème de LaSalle et Yoshizawa), (Khalil, 1996) Soit $x = 0$ un point d'équilibre de (2.1), avec f est localement de Lipschitz en x et uniforme en t . Soit $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continûment différentiable tels que :

$$\begin{aligned} \gamma_1(|x|) &\leq V(x, t) \leq \gamma_2(|x|) \\ \dot{V} &= V^t + V^x f(x, t) \leq -W(x) \leq 0 \end{aligned}$$

où γ_1 et γ_2 sont des fonctions de classes \mathcal{K}_∞ et W est une fonction continue. Alors, toutes les solutions de (2.1) sont globalement uniformément bornées et satisfont

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0$$

De plus, si $W(x)$ est définie positive, alors le point d'équilibre $x = 0$ est **GUAS**. □

2.1.3 Stabilité des systèmes perturbés

Considérons le système décrit par :

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x) \quad (2.5)$$

avec $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues en t et localement de Lipschitz en x sur $[0, \infty) \times D$, et $D \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine qui contient l'origine $x = 0$. Nous traitons ce système comme une perturbation du système nominal (2.1). Le terme perturbateur $g(t, x)$ est dû aux erreurs de modélisation ou à des incertitudes. Dans la majorité des cas, nous n'avons pas la forme explicite de $g(t, x)$ mais nous pouvons avoir quelques informations sur $g(t, x)$, comme par exemple la borne supérieure de $\|g(t, x)\|$. Supposons que l'origine $x = 0$ est exponentiellement stable pour le système nominal (2.1). Si le terme perturbateur disparaît à l'origine i.e. $g(t, 0) = 0, \forall t$, alors il existe des conditions sur $g(t, x)$ permettant de montrer que l'origine reste exponentiellement stable pour le système perturbé (2.5). (Voir Khalil, 1996, Théorème 5.1).

Dans le cas général, nous ne pouvons pas savoir si $g(t, 0) = 0$. Dans ce cas, le point $x = 0$ peut ne pas être le point d'équilibre du système perturbé (2.5). Le meilleur que l'on peut espérer est que si $g(t, x)$ est petit, alors $x(t)$ sera borné par une valeur petite. Ceci nous amène au concept de la bornitude finale.

Définition 2.12 *Les solutions de $\dot{x} = f(t, x)$ sont dites uniformément finalement bornées s'il existe des constantes b et c telles que, pour tout $\alpha \in [0, c]$, il existe un temps positif $T = T(\alpha)$ tel que, pour tout $x_0 \in B_\alpha$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on a :*

$$\|x(t_0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (2.6)$$

Lorsque ceci est vrai pour toute constante positive α , les solutions sont dites globalement uniformément finalement bornées

2.1.4 Stabilité de cascades non-linéaires variantes dans le temps

Lors de l'étude des systèmes complexes, il est courant, de simplifier l'analyse de stabilité par une décomposition du système en un ensemble de sous-systèmes interconnectés. Parmi les différents types d'interconnexions, la structure de cascade est particulièrement intéressante. Dans cette situation, les sous-systèmes sont inter-connectés

de manière unilatérale. A savoir la sortie d'un sous-système amont constitue l'entrée d'un sous-système aval. La modularité qu'offre cette approche a donné lieu à des résultats performants, du point de vu analytique et de la mise au point de lois de commandes. Dans la pratique nous considérons les types de systèmes pouvant se mettre sous la forme suivante

$$\dot{x} = f_1(t, x) + g(t, x, y)y \quad (2.7a)$$

$$\dot{y} = f_2(t, y) \quad (2.7b)$$

où $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, f_1(t, x)$ est une fonction continûment différentiable en (t, x) et $f_2(t, y), g(t, x, y)$ sont continues en fonction de leurs arguments et sont respectivement Lipschitz en y et (x, y) .

Le système (2.7) peut être interprété comme le système

$$\Sigma_1 : \dot{x} = f_1(t, x)$$

perturbé par l'état du système

$$\Sigma_2 : \dot{y} = f_2(t, y)$$

à travers la matrice d'interconnection $g(t, x, y) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Pour l'analyse de stabilité du système en cascade (2.7), nous avons les résultats suivants

Lemme 2.1 (Panteley et Loria, 1998) La cascade (2.7) est **GUAS**, si les conditions suivantes sont satisfaites :

- Condition sur le sous système Σ_1 : Le système $\dot{x} = f_1(t, x)$ est **GUAS** et s'il existe une fonction continûment différentiable $V(t, x) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\begin{aligned} W(x) &\leq V(t, x) \\ V^t(t, x) + V^x(t, x).f_1(t, x) &\leq 0 \quad \forall \|x\| \geq \eta \\ \|V^x\| \|x\| &\leq cV(t, x), \forall \|x\| \geq \eta \end{aligned}$$

avec $W(x)$ une fonction définie positive et $c > 0$ et $\eta > 0$ sont des constantes,

- Condition sur le terme d'interconnection : La fonction $g(t, x, y)$ satisfait l'inégalité suivante pour tout $t_0 \geq 0$

$$\|g(t, x, y)\| \leq \theta_1(\|y\|) + \theta_2(\|y\|)\|x\|$$

où $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sont des fonctions continues.

- Condition sur le sous-système Σ_2 : Le système $\dot{y} = f_2(t, y)$ est **GUAS** et pour tout $t_0 \geq 0$ nous avons

$$\int_{t_0}^{\infty} \|y(t, t_0, y(t_0))\| dt \leq \kappa(\|y(t_0)\|)$$

avec $\kappa(\cdot)$ est une fonction de classe \mathcal{K} .

□

Lemme 2.2 (Panteley et Loria, 1998) Si les conditions du Théorème 2.3 sont satisfaites, et si les deux sous-systèmes $\dot{x} = f_1(t, x)$ et $\dot{y} = f(t, y)$ sont **GES**, alors le système en cascade (2.7) est également **GES**. □

Toutefois les résultats de (Panteley et Loria, 1998) ne traitent que des propriétés de stabilité locale ou globale de l'origine. Ils ne s'appliquent donc pas aux concepts, pourtant courants, de stabilité semi-globale. Pour illustrer ces propos, considérons l'exemple suivant :

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + \frac{x_1 x_2}{\sqrt{1+x_1^2}} \quad (2.8a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + d(t) \quad (2.8b)$$

En l'absence de la perturbation $d(t)$, par application directe du Théorème 2.4 la cascade (2.8) est bien globalement asymptotiquement stable à l'origine. Cependant, quand $|d(t)| > 1$, l'état de la variable x_1 diverge malgré le fait que x_2 est bornée. En conséquence, pour analyser la stabilité de systèmes en cascades perturbés, nous présentons un Lemme qui complète celui de 2.2.

Lemme 2.3 (Do, 2004) Considérons le système décrit par l'équation non-linéaire suivante

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x, \xi(t)) \quad (2.9)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$, $f(t, x)$ est une fonction continue en t et localement Lipschitz en x . Il existe $\sigma_0 > 0$ et les constantes positives c_i , $1 \leq i \leq 4$, λ_j , $1 \leq j \leq 2$, c , ε_0 , μ_0 , c_0 et une fonction α_0 de classe \mathcal{K} , tels que les conditions suivantes sont satisfaites

C1 Il existe une fonction de Lyapunov tel que

$$\begin{aligned} c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) &\leq c_2 \|x\|^2, & \|V^x(t, x)\| &\leq c_3 \|x\| \\ V^t(t, x) + V^x(t, x) \cdot f(t, x) &\leq -\frac{c_4 \|x\|^2}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} + \frac{c_0}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} \end{aligned}$$

C2 Le terme $g(t, x, \xi(t))$ satisfait l'inégalité suivante :

$$\|g(t, x, \xi(t))\| \leq \frac{1}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} (\lambda_1 + \lambda_2 \|x\|) \|\xi(t)\|$$

C3 $\xi(t)$ converge globalement et asymptotiquement au voisinage de l'origine :

$$\|\xi(t)\| \leq \alpha_0(\|\xi(t_0)\|) e^{-\sigma_0(t-t_0)} + \varepsilon_0, \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

C4 La condition sur les gains satisfait

$$c_4 - c_3\varepsilon_0\left(\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{4\mu_0}\right) > 0$$

alors la solution $x(t)$ de (2.9) converge asymptotiquement à une boule centrée à l'origine, i.e.

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|\xi(t_0), \xi(t_0)\|)e^{-\sigma(t-t_0)} + \epsilon(\|\xi(t_0), \xi(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (2.10)$$

avec $\epsilon(s) = \sqrt{(a_4/c_1 a_1)\sqrt{1 + cx_m^2(s)}}$, σ et α sont donnés par :

si $\frac{a_1}{\sqrt{1+cx_m^2(s)}} = \sigma_0$

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \sqrt{\frac{1}{c_1}e^{a_2(s)/\sigma_0}\left(c_2s^2 + \left(\frac{a_2(s)a_4}{a_1}\sqrt{1 + cx_m^2(s)}\right)\phi\right)} \\ \sigma &= \frac{1}{2}(a_1 - d) \end{aligned}$$

si $\frac{a_1}{\sqrt{1+cx_m^2(s)}} \neq \sigma_0$

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \sqrt{\frac{1}{c_1}e^{a_2(s)/\sigma_0}\left(c_2s^2 + \left(\frac{a_3(s)a_1 + a_2(s)a_4\sqrt{1 + cx_m^2(s)}}{a_1|a_1 - \sigma_0\sqrt{1 + cx_m^2(s)}|}\sqrt{1 + cx_m^2(s)}\right)\right)} \\ \sigma(s) &= \frac{1}{2}\min\left(\frac{a_1}{\sqrt{1 + cx_m^2(s)}}, \left|\frac{a_1}{\sqrt{1 + cx_m^2(s)}} - \sigma_0\right|\right) \end{aligned}$$

avec $a_1 = \frac{1}{c_1}(c_4 - \lambda_2 c_3 \varepsilon_0 - \frac{\lambda_1 c_3 \varepsilon_0}{4\mu_0})$, $a_2(s) = \frac{c_3}{c_1}(\lambda_1 + \lambda_2) \alpha_0(s)$,

$a_3(s) = \frac{\lambda_1 c_3}{4} \alpha_0(s)$, $a_4 = c_0 + \lambda_1 c_3 \varepsilon_0 \mu_0$, $0 < d < a_1$,

$\phi \geq (t - t_0)e^{-d(t-t_0)}$, $\forall t \geq t_0 \geq 0$,

$x_m(s) = \sqrt{\frac{1}{c_1}\left(\frac{a_4}{a_1} + \sqrt{W_m(s)}\right)}$,

$$\begin{aligned} W_m(s) &= \left(V(s) - \frac{a_4}{a_1}\right)e^{\left(\frac{2(a_2(s) + a_3(s) + a_2(s)a_4/a_1)}{\sigma_0}\right)} + \frac{a_3(s) + a_2(s)a_4/a_1}{8(a_2(s) + a_3(s) + a_2(s)a_4/a_1)} \\ &\quad \times e^{\left(\frac{2(a_2(s) + a_3(s) + a_2(s)a_4/a_1)}{\sigma_0} - 1\right)} \end{aligned}$$

quand $c_0 = 0$ et $\varepsilon_0 = 0$, nous aurons $\epsilon = 0$ est le système (2.9) est globalement asymptotiquement stable. \square

Démonstration Voir l'Appendice B.1. \square

2.2 Principe de comparaison

Le lemme de comparaison est un moyen permettant l'analyse du comportement des solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x, t)$. Ce lemme peut être utilisé dans des situations où la dérivé d'une fonction scalaire $v(t)$ satisfait l'inégalité $\dot{v}(t) \leq f(v(t), t)$. Dans ce cas, le principe du lemme nous permet de comparer les solutions de l'équation différentielle $\dot{v}(t) \leq f(v(t), t)$ avec les solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x, t)$. De plus le principe de comparaison est utilisé quand $v(t)$ n'est pas différentiable mais ayant une dérivée à droite $D^+v(t)$ qui satisfait une inégalité différentiable. Pour être plus précis, la dérivée à droite d'un signal $x(t)$ est définie¹ par

$$D^+x(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

et satisfait les propriétés suivantes

1. Si $x(t)$ est différentiable en t , alors $D^+x(t) = \dot{x}(t)$

2. Si

$$\frac{1}{h}|x(t+h) - x(t)| \leq g(h, t), \quad \forall h \in (0, b]$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} g(h, t) = g_0(t)$$

alors $D^+x(t) \leq g_0(t)$.

Lemme 2.4 (Lemme de comparaison) (Khalil, 1996) Considérons l'équation différentielle scalaire suivante

$$\dot{u} = f(u, t), \quad u(t_0) = u_0$$

avec $f(u, t)$ une fonction continue et localement Lipschitz en u , pour tout $t \geq 0$ et $u \in J \subset \mathbb{R}$. Soit $[t_0, T)$ l'intervalle contenant les solutions de $u(t)$. Supposons que $u(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T)$ et soit $v(t)$ une fonction continue dont sa dérivée à droite $D^+v(t)$ satisfait l'inégalité différentielle suivante

$$D^+v(t) \leq f(v(t), t), \quad v(t_0) \leq u_0$$

avec $v(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T)$, alors $v(t) \leq u(t)$ pour tout $t \in [t_0, T)$. □

Démonstration (Khalil, 1996). □

¹La limite $h \rightarrow 0^+$ veut dire que h approche zéro de droite

2.3 Inégalité de Gronwall-Bellman

Lemme 2.5 Considérons une fonction continue $\mu : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \phi : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $\nu : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Si une fonction continue $x(t) : [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait l'inégalité

$$x(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^t \nu(\tau) \phi(\tau) x(\tau) d\tau$$

pour tout $t_0 \leq t \leq T$, alors sur le même interval nous avons

$$x(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^t \nu(\tau) \phi(\tau) \mu(\tau) e^{\int_{\tau}^t \nu(\sigma) \phi(\sigma) d\sigma} d\tau$$

En particulier, si $\mu(t) = \mu$, avec μ une constante et $\nu(t) = 1$, alors

$$x(t) \leq \mu e^{\int_{t_0}^t \phi(\tau) d\tau}, \quad t_0 \leq t \leq T$$

□

Démonstration Voir l'Appendice B.2.

□

2.4 Non-holonomie et Sous-actionnement

2.4.1 Définitions de la Non-holonomie et du Sous-actionnement

Dans ce paragraphe, nous donnons une définition formelle des systèmes mécaniques sous-actionnés et non-holonomes décrits par un modèle général régi par des équations différentielles du second ordre.

Définition 2.13 (Système Sous-actionné)(Goldstein, 1980)(Wen, 1996) Soit le système mécanique affine en la commande décrit par l'équation suivante

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}) + G(q)u \tag{2.11}$$

avec q le vecteur des positions généralisées, $f(\cdot)$ est le champ de vecteur traduisant la dynamique du système, \dot{q} est le vecteur des vitesses généralisées, G est la matrice

d'entrée et u est le vecteur des entrées généralisées. Le système (2.11) est dit sous-actionné si les entrées généralisées ne peuvent pas commander les accélérations instantanées dans toutes les directions de l'espace des configurations. Ceci s'explique quand $\text{rang}(G) < \dim(q)$, où $\dim(q)$ est généralement défini comme étant le nombre de degrés de libertés de (2.11).

Definition 2.14 (Système Non-holonome)(Goldstein, 1980)(Wen, 1996) *Considérons un système mécanique décrit par*

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, u) \quad (2.12)$$

avec q le vecteur des états indépendants généralisés, $f(\cdot)$ est le champ de vecteur traduisant la dynamique du système et u est le vecteur des entrées généralisés. Supposons qu'il existe des contraintes empêchant le mouvement de (2.12) dans toutes les directions de l'espace de configuration. Si ces contraintes satisfont la propriété d'intégrabilité complète, c'est à dire, si elles peuvent être écrites sous la forme suivante

$$h(q, t) = 0$$

alors selon la terminologie utilisée dans (Goldstein, 1980), ces contraintes sont appelées contraintes **holonomes**. Si ces contraintes ne peuvent être exprimées sous cette forme, alors elles sont dites contraintes **non-holonomes**. En particulier, ces contraintes sont dites non-holonomes de second ordre si elles sont non-intégrables en accélérations, c'est à dire si ces contraintes s'écrivent sous la forme suivante :

$$g(\dot{q}, q, t) = 0$$

2.4.2 Contrôlabilité

Le problème de caractériser la contrôlabilité locale et globale des systèmes non-linéaires est difficile et fait partie des problèmes critiques du domaine de la théorie des systèmes non-linéaires. (voir (Lee et Markus., 1976) pour une présentation lucide des travaux dans ce domaine). Un résultat fondamental sur la contrôlabilité d'un système non-linéaire provient d'un théorème qui énonce que si la linéarisation d'un système non-linéaire autour d'un point d'équilibre est contrôlable alors le système non-linéaire est lui même localement contrôlable (Lee et Markus., 1976). L'approche de la géométrie différentielle pour l'analyse de contrôlabilité a été développée dans laquelle un système non-linéaire est considéré comme étant une famille de champs de vecteurs. Dans ce contexte, une large théorie sur la commande de tels systèmes est basée sur l'algèbre de

Lie (Hermann, 1968); (Sussmann et Jurdjevic., 1972). Le lecteur pourra se référer à (Bullo *et al.*, 2000) pour quelques travaux récents dans lesquels les auteurs présentent une technique de test de controllabilité ainsi qu'un algorithme de commande pour le mouvement de systèmes mécaniques sous-actionnés. Une très bonne introduction à la commande des systèmes non-linéaires, incluant le concept de la géométrie différentielle est présenté dans (Isidori, 1989) et (Nijmeijer et van der Schaft, 1990).

Considérons un système non-linéaire affine en la commande donné par l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (2.13)$$

avec $x = [x_1, \dots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ sont les coordonnées locales pour une variété M donnée, $u = [u_1, \dots, u_m]^\top \in U \subset \mathbb{R}^m$ sont les variables de commande, f, g_1, \dots, g_m sont des champs de vecteurs de M . Le champ de vecteur f est dit sans dérive et $g_i, i = 1, \dots, m$ sont les champs de vecteurs d'entrées.

Soit deux points quelconques x_0 et x_1 dans M . Notre but est de savoir si on peut faire modifier l'état de x_0 au point x_1 en utilisant une commande admissible dans un intervalle de temps fini. Avant de répondre à cette question, nous donnons quelques définitions utiles.

Definition 2.15 (Controllabilité) (Nijmeijer et van der Schaft, 1990) Le système non-linéaire (2.13) est dit *controllable*, si pour tous points x_0, x_1 dans M , il existe un temps fini $T \geq t_0 \geq 0$ et une commande admissible $u : [t_0, T] \rightarrow U$, telle que l'unique solution de (2.13) au temps $t = T$ avec la condition initiale $x_0(t_0) = x_0$ et pour une commande $u(\cdot)$ donnée $x(t)$ satisfait $x(T) = x_1$.

Considérons le système (2.13) et désignons par x_0 un point arbitraire dans M . Soit un voisinage V de x_0 dans M et un temps $T > 0$, $R^V(x_0, T)$ désigne l'ensemble des points qui peuvent être atteint autour de x_0 dans un temps fini T en suivant une trajectoire admissible qui y reste dans V pour $t \leq T$. Mathématiquement on l'exprime de la façon suivante :

$$R^V(x_0, T) = \{x \in M : \exists u : [0, T] \rightarrow U \text{ tel que l'évolution de (2.13) de } x_0(t_0) = x_0 \text{ satisfait } x(t) \in V, t_0 \leq t \leq T, \text{ et } x(T) = x_1\}$$

Une extension de cette définition, conduit au concept d'ensemble atteignable à partir de x_0 durant une période $t \in [0, T]$ comme suit

$$R^V(x_0, \leq T) = \bigcup_{t \leq T} R^V(x_0, t)$$

Définition 2.16 (Accessibilité) (Nijmeijer et van der Schaft, 1990) Le système (2.13) est dit localement accessible à partir de x_0 si $R^V(x_0, \leq T)$ contient un sous ensemble non vide de M pour tout voisinage V de x_0 et pour tout $T > 0$. Si cela est vrai pour tout $x_0 \in M$, alors le système est dit localement accessible.

Le test d'accessibilité locale, est effectué en utilisant à ce qu'on appelle l'algèbre d'une accessibilité \mathcal{C} . Nous notons par la suite, par $V^\infty(M)$ l'algèbre de Lie d'un champs de vecteur d'une variété M .

Définition 2.17 (Algèbre d'une accessibilité) L'algèbre d'accessibilité \mathcal{C} pour (2.13) est le plus petit sous-algèbre de $V^\infty(M)$ contenant f, g_1, \dots, g_m .

L'algèbre d'une accessibilité \mathcal{C} est aussi appelé algèbre de Lie, (Isidori, 1989). Un élément de \mathcal{C} est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme

$$[v_k, [v_{k-1}, [\dots, [v_2, v_1] \dots]]]$$

, où $v_i, i \in \{1, \dots, k\}$ est un élément de l'ensemble $\{f, g_1, \dots, g_m\}$. L'algèbre d'une accessibilité peut aussi être utilisée pour définir l'accessibilité d'une distribution.

Définition 2.18 (Accessibilité d'une distribution) L'accessibilité d'une distribution C de (2.13) est une distribution générée par l'algèbre d'une accessibilité \mathcal{C} , e.g.,

$$C(x) = \text{span}\{v(x) : v \in \mathcal{C}\}, \quad x \in M$$

Compte tenu des définitions précédemment données, nous pouvons énoncer un premier théorème sur l'accessibilité d'un système pouvant se mettre sous la forme (2.13)

Théorème 2.5 Le système (2.13) est localement accessible à partir de x_0 si et seulement si

$$\dim[C(x_0)] = n \tag{2.14}$$

(cette condition est aussi appelée condition de rang d'accessibilité). De plus, si cette condition est vraie pour tout $x \in M$, alors le système est localement accessible. \square

Démonstration La preuve de ce théorème est disponible dans l'une des références suivantes : (Sussmann et Jurdjevic., 1972) ou (Nijmeijer et van der Schaft, 1990) \square

Définition 2.19 (Forte accessibilité locale) *Le système (2.13) est dit fortement localement accessible à partir de x_0 , si pour tout voisinage V de x_0 , l'ensemble $R^V(x_0, T)$ contient un ouvert non vide pour tout $T > 0$ suffisamment petit. Si cela est vrai pour tout x_0 , alors le système est dit fortement localement accessible.*

Pour que nous ayons une condition de rang d'accessibilité plus forte que celle de (2.14), nous introduisons la notion de sous-algèbre comme suit

Définition 2.20 (Algèbre d'une forte accessibilité) *Soit \mathcal{C} l'algèbre d'une accessibilité pour (2.13). Définissons \mathcal{C}_0 comme le plus petit sous-algèbre qui contient g_1, \dots, g_m qui satisfait $[f, v] \in \mathcal{C}_0$ pour tout $v \in \mathcal{C}_0$. Définissons la distribution involutive suivante*

$$C_0(x) = \text{span}\{v(x) : v \in \mathcal{C}_0\}$$

Alors, \mathcal{C}_0 est appelé algèbre d'une forte accessibilité et C_0 est appelé distribution d'une forte accessibilité.

Un élément de \mathcal{C}_0 est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme $[v_k, [v_{k-1}, [\dots, [v_1, g_i] \dots]]]$, où $i = 1, \dots, m$ et $k = 0, 1, 2, \dots$ et $v_i, i \in \{1, \dots, k\}$ est dans l'ensemble $\{f, g_1, \dots, g_m\}$.

Exemple 2.2 *Pour un système linéaire de la forme*

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^m b_i u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

avec b_1, \dots, b_m sont les colonnes d'une matrice d'entrée B . Nous pouvons facilement vérifier que

$$C_0 = \text{span}\{b_i, Ab_i, \dots, A^{n-1}b_i\}, i = 1, \dots, m$$

et par conséquent

$$C_0(x) = \text{Im}[B:AB:\dots:A^{n-1}B]$$

Pour les systèmes sans dérive e.g. $f = 0$, leur contrôlabilité peut être vérifiée en testant la condition suffisante donnée par le théorème de Chow ([Hermann, 1968](#))

Théorème 2.6 *Soit le système donné par l'équation suivante*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad u = (u_1, \dots, u_m) \in U \quad (2.15)$$

est contrôlable si la condition de rang d'accessibilité est satisfaite. \square

Il est souvent intéressant de renforcer la définition de la contrôlabilité locale du système (2.13). Un nouveau concept de contrôlabilité est introduit par (Sussmann, 1987) qui représente la contrôlabilité locale en temps faible (Small Time Locally Controllable : **STLC** system)

Définition 2.21 (STLC) (Sussmann, 1987) *le système (2.13) est dit **STLC** (Small Time Locally Controllable) d'un point $x_0 \in M$ s'il est localement accessible à partir de x_0 et si x_0 est à l'intérieure de $R^V(x_0, \leq T)$ pour tout $T \geq 0$ et pour tout voisinage V de x_0 . Si cela est valable pour tout $x_0 \in M$, alors le système est dit **STLC***

Cependant, on peut employer un résultat plus simple pour l'application de cette définition qui peut être brièvement expliqué comme suit : Un crochet de Lie formé d'une combinaison de champ de vecteurs $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ est dit mauvais s'il contient un nombre pair δ^i de chaque champ de vecteurs $g_i, i = 1, \dots, m$ et un nombre impaire δ^0 de champ de vecteur f . Un crochet de Lie est dit bon s'il n'est pas mauvais.

Par exemple :

$$\begin{aligned} [[f, g_i], [f, g_j]] &\text{ est bon et de degré } 4 \\ [g_i, [f, g_i]] &\text{ est mauvais et de degré } 3 \end{aligned}$$

2.4.3 Stabilisabilité

Le concept de la stabilisabilité est fortement lié au concept de l'existence d'une loi de commande pour un système donné qui pourra rendre le système en boucle fermée asymptotiquement stable autour d'un point d'équilibre. Pour les systèmes linéaires, la contrôlabilité implique la stabilisabilité du système. Cependant ceci n'est pas vrai pour les systèmes non-linéaires. Le théorème de Brockett (Brockett, 1983) donne une condition nécessaire sur la stabilité des systèmes non-linéaire par une loi de commande continue.

Théorème 2.7 Considérons le système donné par

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.16}$$

avec $f(0, 0) = 0$ et $f(., .)$ est définie continue dans un voisinage autour de l'origine. Si (2.16) est stabilisable par une commande continue (e.g s'il existe une fonction continue $u = k(x)$ tels que l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable de $\dot{x} = f(x, k(x))$, où la stabilité est définie au sens de Lyapunov), alors l'image de f doit contenir un ouvert au voisinage de l'origine. \square

En général, il est impossible de stabiliser par le moyen d'une commande continue, tout système vérifiant $m < n$ et $\text{rang}[g_1(0), \dots, g_m(0)] = m$. En effet sous cette condition, la variété $(x, y) \rightarrow G(x)u$ ne peut contenir un voisinage de zéro dans son image, quand nous nous limitons à un infiniment petit du voisinage de zéro. Récrivons G sous la forme vectorielle suivante

$$G(x) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{pmatrix}$$

dans ce cas $G_1(x)$ est de dimensions $m \times m$ et est non singulière pour tout x appartenant à un voisinage N de l'origine. Alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \in \text{Im} \{N \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n : (x, u) \mapsto G(x)u\} \Rightarrow a = 0$$

(puisque $G_1(x)u = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow G_2(x)u = 0$).

Si la condition $\text{rang}[g_1(0), \dots, g_m(0)] = m$ est non satisfaite, nous ne pouvons pas conclure qu'il n'existe pas une loi de commande continue.

Exemple 2.3 Soit le système décrit par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ux_2 \\ \dot{x}_2 &= -ux_1 \end{aligned}$$

avec $(x_1, x_2)^\top$ est l'état du système, u est son entrée. Supposons que ce modèle est caractérisé par une contrainte sur les vitesses e.g.

$$x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = 0$$

Cette contrainte est connue sous le nom de contrainte holonome puis que l'on peut intégrer, on obtient

$$0.5(x_1^2 + x_2^2) = \text{constante}$$

Nous pouvons réduire ainsi le système du second ordre en un système de premier ordre, par le changement de coordonnées suivant

$$\begin{aligned} r &= x_1^2 + x_2^2 \\ \phi &= \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \end{aligned}$$

et on obtient le système réduit suivant

$$\dot{\phi} = u, \quad r = r(0)$$

puis que le système de départ (non réduit), nous avons $m = 1 < 2 = n$, nous nous ne pouvons pas dire qu'il n'est pas stabilisable par le moyen d'une commande continue, en effet puisque le changement de variable est un difféomorphisme global, il garde les propriétés de la stabilité du système d'origine, le système réduit peut être stabilisable par le moyen de la commande $u = -k_1\phi = -k_1 \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$.

2.4.4 L'intégrateur non-holonyme

Brockett a introduit la notion de système d'intégrateur nonholonome pouvant se mettre sous la forme suivante (Brockett, 1983) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 - x_2 u_1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur d'état et $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'entrée. Nous pouvons montrer que tout modèle cinématique complètement non-holonyme (e.g le modèle cinématique d'un robot mobile à deux roues) ayant trois états et deux entrées peuvent se transformer sous la forme (2.17) via un changement de coordonnées locales (Murray et Sastry, 1993b). L'intégrateur non-holonyme abrite pratiquement toutes les propriétés de base d'un système non-holonyme. Celui ci est connu comme le "benchmark" pour la commande non-linéaire des des systèmes automatiques (Brockett, 1983); (Bloch et Drakunov, 1994); (Hespanha, 1994); (Murray et Sastry, 1993a).

Considérons la linéarisation autour d'un point d'équilibre $(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq})$ qui correspondrait à une entrée nominale nulle $u = 0$. Dans ce cas le système (2.17) linéarisé est donné par

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.18}$$

avec $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq}, y_{eq})$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq}, y_{eq})$ et

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

Le système invariant dans le temps équation de (2.18) est contrôlable si et seulement si la matrice de contrôlabilité $\mathcal{C} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ satisfait la condition de contrôlabilité suivante

$$\text{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

puis que

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_{2eq} & x_{1eq} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est de rang 2 pour tout point d'équilibre $(x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq}, u_{1eq}, u_{2eq})$, alors le système linéaire résultant de la linéarisation autour du point d'équilibre de l'intégrateur non-holonyme n'est pas contrôlable.

Cependant, en réécrivant (2.17) sous la forme standard (2.13), on obtient :

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

avec $g_1 = (1, 0, -x_2)^\top$, et $g_2 = (0, 1, x_1)^\top$. Calculons les crochets de Lie de g_1 et g_2 . Nous obtenons $[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x) - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2(x) = [0, 0, 2]^\top$. Nous pouvons donc conclure que l'intégrateur nonholonyme est contrôlable puisque la condition du rang d'accessibilité est satisfaite, ce qui veut dire que $C(x) = \text{span}\{g_1, g_2, [g_1, g_2]\} = 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Il faut par contre noter qu'il ne peut pas exister une loi de commande continue qui stabilise asymptotiquement l'origine de (2.17). Ceci s'explique du fait que les conditions de Brockett ne sont plus valides, car il n'y a aucun point de la forme $(0, 0, \epsilon)^\top$, pour tout $\epsilon \neq 0$ est dans l'image de la variété $(x, u)^\top \rightarrow (u_1, u_2, x_1 u_2 - x_2 u_1)^\top$.

2.4.5 Double intégrateur non-holonyme

Dans de nombreuses applications nous sommes amené à décrire le mouvement d'un système non-holonyme par la cinématique et la dynamique. Le modèle d'intégrateur cité dans le paragraphe 2.4.4 est insuffisant. Afin de prévenir cette insuffisance, le modèle d'intégrateur non-holonyme doit être étendu à un modèle sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= u_1 \\ \ddot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

avec $x = (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^\top \in \mathbb{R}^5$ est le vecteur d'état et $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'entrée. La forme (2.19) est appelé le double intégrateur non-holonyme étendu (*extended nonholonomic double integrator* : **ENDI**). Ce dernier sera utilisé pour montrer

les différentes propriétés de la contrôlabilité d'un système non-holonyme pouvant se mettre sous la forme (2.19). En effet, pour montrer la contrôlabilité du système sous-actionné comme un bateau, il nous faut passer par une forme semblable à celle de (2.19).

Propriétés de Stabilisabilité et de contrôlabilité de (2.19) Le système ENDI, appartient à la classe des systèmes non-linéaire affine en commande comme le montre l'équation suivante

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$$

où $x \in M$, M est une variété à n -dimension, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée. f, g_1, \dots, g_n sont les champs de vecteurs de M . Le théorème suivant résume les propriétés de contrôlabilité et de stabilisabilité d'un système **ENDI**.

Théorème 2.4 Considérons le système du double intégrateur non-holonyme étendu, donné par (2.19). Soit \mathcal{M}_e l'ensemble des points d'équilibres, solutions de (2.19) correspondant à $u = 0$. Nous avons, $\mathcal{M}_e = \{x \in \mathbb{R}^5 : \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0\}$. Alors le système (2.19) satisfait les conditions suivantes :

1. Il n'existe pas de commande par feedback invariante dans le temps qui stabilise asymptotiquement le système (2.19) en boucle fermée $x_e \in \mathcal{M}_e$.
2. Le système (2.19) est localement fortement accessible pour tout $x \in \mathbb{R}^5$
3. Le système (2.19) est **STLC** pour tout point d'équilibre $x_e \in \mathcal{M}_e$.

□

Démonstration Nous commençons par montrer chaque point du théorème à part :

1. Le système **ENDI**, équation (2.19), peut être écrit sous la forme $\dot{x} = f(x, u)$, avec $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top, u = (u_1, u_2)^\top$, et $f(x, u)$ est définie de $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$. Une condition nécessaire pour l'existence d'une loi de commande par feedback continue qui stabilise asymptotiquement le système (2.19), est qu'il faut que l'image de l'application $f(x, u)$ contient un voisinage de zéro. En particulier, il faut qu'elle contient des points de la forme $\epsilon = (0, 0, \gamma, 0, 0)^\top$, avec γ est une constante arbitraire non nulle. Remarquons que l'équation $f(x, u) = \epsilon$ implique que $(x_4, x_5, x_1x_5 - x_2x_4, u_1, u_2)^\top = (0, 0, \gamma, 0, 0)^\top$ qui n'a pas de solution (x, u) puisque γ est non nulle. Par conséquent, les conditions nécessaires de Brockett ne sont pas valides. Par suite le système **ENDI** ne peut être asymptotiquement

stabilisable au point $x_e \in \mathcal{M}_e$ par le moyen d'une commande continue invariant dans le temps par feedback.

2. Réécrivons le système (2.19) comme suit

$$\dot{x} = f(x) + g_1 u_1 + g_2 u_2$$

avec $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^\top$, les champs de vecteurs, f, g_1 et g_2 sont définis comme suit :

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_1 x_5 - x_2 x_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considérons les Crochets de Lie suivantes :

$$[g_1, f] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [g_2, f] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [g_2, [f, [g_1, f]]] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarquons que $\text{span}(g_1, g_2, [g_1, f], [g_2, f], [g_2, [f, [g_1, f]]]) = 5$ pour tout $x \in \mathbb{R}^5$. Donc la condition du rang de forte accessibilité est satisfaite, et par suite le système (2.19) est localement fortement accessible pour tout $x \in \mathbb{R}^5$.

3. Notons que le système (2.19) satisfait la condition du rang de la forte accessibilité, à partir de la Définition 2.9 (l'aspect applicatif). Nous pouvons montrer que tous les mauvais Crochets peuvent être exprimés comme une combinaison linéaire de bon Crochets, il s'ensuit que le système **ENDI** est **STLC**

□

2.5 Différentes approches de poursuite de trajectoires

Dans ce paragraphe, nous classifions les différentes approches de poursuite de trajectoires selon leur utilisation dans les applications.

La définition formelle du concept de poursuite peut être établi en conformité avec la définition donnée par (Fossen, 2002).

Définition 2.22 *Quand l'objectif est de forcer la sortie du système $y(t) \in \mathbb{R}^m$ pour le suivi d'une sortie désirée $y_d(t) \in \mathbb{R}^m$, il sera défini comme un problème de suivi.*

Le problème de commander la sortie d'un système à suivre une référence donnée, peut être traité avec différentes applications. Une des approches est celle du problème de la stabilisation en un point, ou le problème de stationnement (Frezza, 1999), qui consiste à faire diriger un objet à un point de configuration fixe, peu importe le comportement du système entre l'état initial et l'état finale. Dans ce cas, le signal de référence y_d est stationnaire. Ce problème est connu sous le nom de problème de régulation (Khalil, 1996).

Dans le problème de suivi de chemin, le signal de référence est non-stationnaire. L'objectif est de parvenir à faire approcher puis de faire suivre l'objet une courbe géométrique pré-définie. Dans la définition de (Encarnacao et Pascoal, 2001), le chemin est indiqué sans aucune spécification temporelle, tandis que dans la définition de (Skjetne et Fossen, 2004), (Aguilar et Hespanha, 2004), (Frezza, 2000) et (Fossen, 2002), le chemin est paramétré avec une variable continue. La définition d'un chemin paramétré donnée par (Fossen, 2002) est :

Définition 2.23 *Un chemin paramétré est défini comme une courbe géométrique $y_d(\theta) \in \mathbb{R}^m$ avec $m \geq 1$ paramétré par une variable de chemin θ*

L'objectif de suivi de chemin d'un système pour un chemin désiré

$$y_d(\theta), \theta \in [0, \infty)$$

est de faire tendre l'erreur

$$e_p(t) = y(t) - y_d(t), \quad t \geq 0$$

vers zéro (Aguilar et Kokotovic, 2004). Notons qu'il peut y avoir des contraintes sur θ qui reflète les limitations physiques de la vitesse et de l'accélération de l'objet. Le problème de poursuite de trajectoires est un cas spécial du problème de suivi de chemin, où le chemin est paramétré en terme de temps ($\theta(t) = t$) et l'erreur de poursuite s'écrit comme

$$e_T(t) = y(t) - y_d(t), \quad t > 0$$

Inspiré des travaux de (Hauser et Hindman, 2000), (Skjetne et Fossen, 2004) a défini le problème de manoeuvre, où l'action de la manoeuvre d'un système est définie par une courbe dans l'espace des entrées/états tout en restant compatible avec la dynamique du système.

$$y_d = \{(x_d(\theta), u_d(\theta)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r : \theta \in \mathbb{R}\}$$

Le problème de manoeuvre selon (Skjetne, 2005) se décompose en deux tâches principales : la tâche géométrique qui consiste à forcer l'erreur de poursuite à converger vers zéro

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_d(\theta(t))| = 0, \quad \theta(t) \in \mathbb{R}$$

et la tâche dynamique qui consiste à forcer la vitesse de l'objet à une vitesse désirée

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\theta}(t) - v_s(\theta, t)| = 0, \quad \theta(t) \in \mathbb{R}$$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné quelques notations mathématiques qui seront utilisées dans les chapitres suivants. Nous avons ensuite présenté les notions de stabilité asymptotique, des systèmes non-linéaire s'écrivant sous une forme canonique ou sous une forme cascade. Les notions de non-holonomie et de sous-actionnement qui constituent les thèmes de cette thèse ont été aussi présenté. Le dernier paragraphe de chapitre cerne le contexte de la manoeuvre des bateaux le long des trajectoires et donne des définitions adoptée à la poursuite et le suivi de chemins qui vont être traités dans les chapitres suivants.

Première partie

Modélisation, stabilisation à l'origine et poursuite de trajectoire

Chapitre 3

Modélisation d'un véhicule marin

Dans ce chapitre, nous présentons un résumé des principales propriétés du modèle dynamique d'un véhicule marin à 6 degrés de libertés (DDL). Dans la première partie du chapitre, la cinématique et la dynamique d'un bateau à 6DDL est présentée suivi de quelques notations. Ensuite le modèle du bateau à 3 DDL utilisé pour les opérations de suivi et de la poursuite de trajectoire est déduit à partir du modèle complet à 6 DDL. Nous présentons aussi les différentes forces externes qui entrent en jeux dans la structure de commande du véhicule marin. La deuxième partie de ce chapitre explicite le modèle sous-actionné qui va être utilisé tout au long de cette thèse. Le test de non-holonomie ainsi que le teste de controllabilité sont ensuite présentés pour le véhicule marin sous-actionné.

3.1 Modèle Cinématique et Notations

3.1.1 Description générale

Le mouvement dynamique d'un objet doit être décrit par rapport à certaines références ou systèmes de coordonnées. En effet nous sommes principalement intéressé à la dynamique du véhicule marin dans une zone très limitée où les opérations hydrodynamiques et les forces appliquées aux propulseurs sont dominantes, nous pouvons négliger les effets de la rotation de la terre et de laisser les repères géographiques locaux approximativement confondus avec le référentiel d'inertie.

Les différents repères que nous allons utiliser sont illustrés dans la figure [3.1](#) et sont

présentés ainsi

NEB (repère-n) Ce repère est appelé repère Nord-Est-Bas (o_n, x_n, y_n, z_n) . Ce repère est choisi fixé à la terre. L'axe x_n est dirigé vers le Nord terrestre, l'axe y_n vers le l'esst et l'axe z_n est dérigé vers le centre de la terre. L'origine o_n est placé dans le repère géodésique ellipsoïde (WGS84).

BODY (repère-b) C'est un repère (o_b, x_b, y_b, z_b) attaché au véhicule marin. L'axe x_b est dirigé vers l'avant du bateau, y_b est dirigé vers le tribord et l'axe z_b complète le système de référence orthogonal dextral. L'origine o_b est souvent placé au centre de gravité du bateau. Cependant selon les applications cet origine peut être placé dans d'autres endroits.

RP (repère-s) C'est le référentiel parallèle, le repère-s est fixé au bateau avec une orientation horizontale, mais tourné d'un angle ψ_d autour de l'axe z . L'angle ψ_d est l'angle d'orientation désiré du véhicule marin.

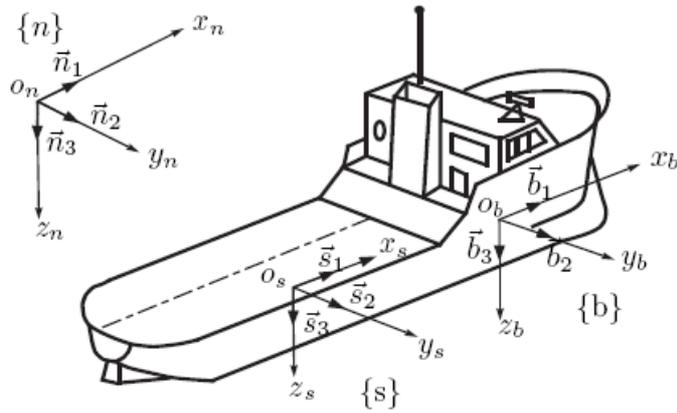


FIG. 3.1 – Systèmes de coordonnées utilisés pour décrire le mouvement d'un bateau.

Les notations suivantes seront utilisées pour décrire la position, la vitesse linéaire et la vitesse angulaire du bateau :

- \mathbf{p}_{cb}^a : Distance (position) du point c au point b exprimé dans le repère a
- $\theta_{cb}, \mathbf{q}_{cb}$: L'orientation du repère b relativement à c exprimée en fonction respectivement des angles d'Euler et des unités quaterniennes.
- \mathbf{v}_{cb}^a : La vitesse linéaire d'un point du repère b relativement au repère c exprimé dans le repère a
- ω_{cb}^a : vitesse angulaire d'un point dans le repère b relativement au repère c exprimé dans le repère a .
- \mathbf{f}^a : Force linéaire exprimée dans le repère a
- \mathbf{m}_b^a : Le moment autour d'un point du repère b exprimé dans le repère a

Une unité quaternionienne \mathbf{q} est une alternative pour contrer les singularités retrouvées en utilisant les angles d'Euler, et est définie par

$$\mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{q} \mid \mathbf{q}^\top \mathbf{q} = 1, \mathbf{q} = [\eta_{\mathbf{q}}, \varepsilon_{\mathbf{q}}^\top]^\top, \eta_{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}, \varepsilon_{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (3.1)$$

La transformation (rotation) d'un repère b à un repère a est noté par $\mathbf{R}_b^a = \mathbf{R}(\theta_{ab}) = \mathbf{R}(q_{ab})$, tel que pour tout vecteur c^b exprimé dans le repère b , son expression dans le repère a s'écrit

$$c^a = \mathbf{R}_b^a c^b \quad (3.2)$$

Notons que la matrice de rotation \mathbf{R}_b^a implicitement prend l'orientation θ_{ab} comme argument. L'ensemble des matrices de rotation de dimensions 3×3 sont notées $SO(3)$.

Propriété 3.1 (Matrice de Rotation) Une matrice de rotation $\mathbf{R} \in SO(3)$ satisfait

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top \quad (3.3)$$

$$\|\mathbf{R}\|_2 = \det(\mathbf{R}) = 1 \quad (3.4)$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{S}(\mathbf{c})\mathbf{d} = -\mathbf{S}(\mathbf{d})\mathbf{c} \quad (3.5)$$

avec $\mathbf{S} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est une matrice anti-symétrique

$$\mathbf{S}(\alpha) = -\mathbf{S}^\top(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété 3.2 (Dérivée d'une matrice de rotation) La dérivée d'une matrice de rotation $\mathbf{R} \in SO(3)$ est

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_b^a) := \dot{\mathbf{R}}_b^a = \mathbf{R}_b^a \mathbf{S}(\omega_{ab}^b) \quad (3.6)$$

La transformation à partir d'un repère n à un autre repère b est effectuée selon trois rotations successives, nous suivons la convention de rotations successives autour des axes z, y et x en terme d'angles d'Euler $\theta_{nb} = [\phi, \theta, \psi]^\top$

$$\mathbf{R}_b^n = \mathbf{R}(\theta_{nb}) = \mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi} \Leftrightarrow \mathbf{R}_n^b = \mathbf{R}^\top(\theta_{nb}) = \mathbf{R}_{x,\phi}^\top \mathbf{R}_{y,\theta}^\top \mathbf{R}_{z,\psi}^\top \quad (3.7)$$

En utilisant $c(\cdot) = \cos(\cdot)$ et $s(\cdot) = \sin(\cdot)$, les matrices $\mathbf{R}_{z,\psi}$, $\mathbf{R}_{y,\theta}$ et $\mathbf{R}_{x,\phi}$ s'écrivent

$$\mathbf{R}_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z,\psi} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

soit donc la matrice \mathbf{R}_b^n

$$\mathbf{R}_b^n = \begin{bmatrix} c\psi c\phi & s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi - c\psi s\theta c\phi \\ -s\psi c\phi & c\psi c\phi - s\psi s\theta s\phi & c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi \\ s\theta & -c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.1.2 Modèle cinématique

La position d'un point arbitraire dans un repère fixe a , exprimé dans le repère n est donné par

$$\mathbf{p}_{na}^n = \mathbf{p}_{nb}^n + \mathbf{R}_b^n \mathbf{p}_{ba}^b \quad (3.10)$$

où \mathbf{p}_{na}^n est la position du véhicule et \mathbf{p}_{ba}^b est la position du point a relativement à l'origine du repère fixe. La dérivé de \mathbf{p}_{na}^n est la vitesse \mathbf{v}_{na}^n relativement au repère fixe de la terre, ainsi nous écrivons

$$\dot{\mathbf{p}}_{na}^a := \mathbf{v}_{na}^a = \mathbf{R}_b^n \mathbf{v}_{nb}^b - \mathbf{R}_b^n \mathbf{S}(p_{ba}^b) \omega_{nb}^b \quad (3.11)$$

Si dans le cas, où nous avons $p_{ba}^b = 0$, nous aurons la vitesse linéaire habituelle

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_b^n \mathbf{v}_{nb}^b \quad (3.12)$$

La propriété 3.2 contient une équation différentielle permettant de déterminer une relation entre les vitesses de rotation du repère n et du repère b . Cependant, dans diverses applications, il est plus pratique d'utiliser directement les angles d'Euler θ_{nb} . Il est montré dans (Fossen, 2002) que la relation entre les vitesses de rotation est

$$\dot{\theta}_{nb} = \mathbf{T}_\theta \omega_{nb}^b \quad (3.13)$$

avec

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}, \quad \theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

Notons que \mathbf{T}_θ est singulière pour la valeur de $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Afin d'éviter cette singularité nous pouvons faire appel à la représentation quaternienne plutôt que celle de la représentation par les angles d'Euler. Cependant l'utilisation de la représentation d'Euler pour caractériser la cinématique étant donnée la restriction physique empêchant le bateau d'opérer dans une région proche de la singularité $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(Fossen, 2002) a suggéré de regrouper la position et l'orientation du véhicule marin exprimées dans le repère attaché à la terre dans un vecteur η et les vitesses linéaires et

angulaires exprimées dans le repère attaché au bateau dans un autre vecteur ν comme suit :

$$\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{nb}^n \\ \theta_{nb} \end{bmatrix}, \quad \nu = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{nb}^b \\ \omega_{nb}^b \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

En utilisant ce résultat, nous pouvons écrire que

$$\dot{\eta} = \mathbf{J}(\theta_{nb})\nu \quad (3.15)$$

avec $\mathbf{J} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est la matrice diagonale

$$\mathbf{J}(\theta_{nb}) = \text{diag}(\mathbf{R}_b^n(\theta_{nb}), \mathbf{T}_\theta(\theta_{nb})) \quad (3.16)$$

3.2 Modèle Dynamique d'un bateau à 6 DDL

En utilisant la notation (η, ν) de (3.14), (Fossen, 1994) a montré que l'on peut écrire sous une forme compacte la dynamique et la cinématique d'un véhicule marin à 6 DDL sous la forme :

$$\dot{\eta} = \mathbf{J}(\eta)\nu \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{M}\dot{\nu} + \mathbf{C}(\nu)\nu + \mathbf{D}(\nu)\nu + \mathbf{g}(\eta) = \tau_{prop} + \tau_{env} \quad (3.17b)$$

avec $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ désigne la matrice des inerties, qui est la somme des masses du corps rigide et la masse hydrodynamique ajoutée.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{CR} + \mathbf{M}_A \quad (3.18)$$

La masse du corps-rigide, exprimée dans le repère b est donnée par

$$\mathbf{M}_{CR} = \mathbf{M}_{CR}^\top = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & -mS(\mathbf{r}_{bG}^b) \\ mS(\mathbf{r}_{bG}^b) & \mathbf{I}_b \end{bmatrix} > 0 \quad (3.19)$$

avec m la masse du corps rigide, \mathbf{r}_{bG}^b la position de son centre de gravité et $\mathbf{I}_b = \mathbf{b}^\top$ le tenseur d'inertie de celui ci par rapport à l'origine du repère b .

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_b^\top = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.1 Masse ajoutée

Contrairement aux volumes submergés, la masse ajoutée \mathbf{M}_A est constante. Par contre, la masse ajoutée due à l'effet hydrodynamique des bateaux dépend de la fréquence du mouvement de l'eau. Si nous considérons les basses fréquences du mouvement de l'eau, nous pouvons donc supposer que \mathbf{M}_A est constante. Elle est calculée quand la limite de la fréquence est proche de zéro i.e.

$$\mathbf{M}_A = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{M}_A(\omega) \quad (3.21)$$

Pour les bateaux admettant une symétrie par rapport au plan (xoz) (basbord/tribord symétriques), nous avons :

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} -X_{\dot{u}} & 0 & -X_{\dot{\omega}} & 0 & -X_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & -Y_{\dot{v}} & 0 & -Y_{\dot{p}} & 0 & -Y_{\dot{r}} \\ -Z_{\dot{u}} & 0 & -Z_{\dot{\omega}} & 0 & -Z_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & -K_{\dot{v}} & 0 & -K_{\dot{p}} & 0 & -K_{\dot{r}} \\ -M_{\dot{u}} & 0 & -M_{\dot{\omega}} & 0 & -M_{\dot{q}} & 0 \\ 0 & -N_{\dot{v}} & 0 & -N_{\dot{p}} & 0 & -N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3.2.2 Termes de Coriolis et Centrifuges

La matrice $\mathbf{C}(\cdot)$ contient des termes non-linéaires dûs aux effets de Coriolis et des forces Centrifuges. Les forces de Coriolis et centrifuges sont des forces qui ne dissipent pas d'énergie. La matrice \mathbf{C} est anti-symétrique, i.e.

$$\mathbf{C}(\nu) = -\mathbf{C}^\top(\nu) \quad (3.23)$$

une représentation de cette matrice est donnée par

$$\mathbf{C}(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{S}(\mathbf{M}_{11}\nu_1 + \mathbf{M}_{12}\nu_2) \\ -\mathbf{S}(\mathbf{M}_{11}\nu_1 + \mathbf{M}_{12}\nu_2) & -\mathbf{S}(\mathbf{M}_{12}^\top\nu_1 + \mathbf{M}_{22}\nu_2) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

où les matrices \mathbf{M}_{ij} sont des blocs de dimensions 3×3 formant la matrice \mathbf{M}

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{12}^\top & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

3.2.3 Forces d'amortissements

Dans l'équation (3.17), la matrice $\mathbf{D}(\nu)$ représente les forces d'amortissement. Cette matrice est souvent exprimée par la somme d'une matrice constante \mathbf{D}_L et d'une matrice \mathbf{D}_N fonction de la vitesse ν .

$$\mathbf{D}(\nu) = \mathbf{D}_L + \mathbf{D}_N(\nu) \quad (3.26)$$

Dans cette représentation, \mathbf{D}_L représente les forces d'amortissements linéaires tandis que $\mathbf{D}_N(\nu)$ représente les effets des forces non-linéaires, telles que les forces visqueuses turbulentes. Un bateau qui navigue à très faible vitesse et soumis à des accélérations continues, subit un amortissement faible proportionnel à la vitesse. Par conséquent pour un bateau qui navigue à une vitesse importante, il est raisonnable de supposer que les forces d'amortissement linéaires de type visqueux sont présentes et sont dominantes par rapport aux amortissement non-linéaires $\mathbf{D}_N(\nu)$. Les accélérations dans ce cas sont petites. Même si la recherche d'une matrice universel $\mathbf{D}(\nu)$ est nontrivial, les forces d'amortissement sont toujours dissipatives.

$$\nu^\top \left[\mathbf{D}(\nu) + \mathbf{D}^\top(\nu) \right] \nu > 0, \quad \forall \nu \neq 0 \quad (3.27)$$

3.2.4 Forces de poussée

Outre, la masse et les forces d'amortissements, les véhicules marins subissent également des forces de gravité et de flottabilité. Dans la terminologie hydrodynamique, la gravitation et la flottabilité produisent les *forces de poussée*. Ces forces sont équivalentes aux forces de raideur d'un système "masse-ressort-amortisseur". Dans l'équation (3.17) le terme $\mathbf{g}(\eta)$ représente le vecteur des forces de poussée.

Poussée d'Archimède

La Poussée d'Archimède est un effet statique dû à la présence d'un solide immergé dans un fluide. Elle est égale à la force opposée au poids que subit le volume de fluide contenu dans l'enveloppe immergée du système.

$$B = \rho g \bar{V} \quad (3.28)$$

où ρ est la densité du fluide, g est l'accélération de la pesanteur, \bar{V} est le volume de fluide déplacé, ou volume du solide, donné par l'expression suivante

$$\bar{V} = \frac{\pi}{4} (2r)^2 l = \pi r^2 l$$

avec r le rayon et l la longueur du volume immergé du système.

Forces de Pesanteur

Le poids engendre des effets opposés à ceux de la poussée d'Archimède et s'applique au centre de gravité du solide. On le modélise ainsi :

$$W = mg \quad (3.29)$$

où m est la masse du solide

Les équations (3.28) et (3.30) permettent d'établir une relation d'équilibre hydrostatique exprimée par $G = W - B$, appelée aussi résultante hydrostatique. Le comportement du solide immergé dépend du signe de G . Nous allons distinguer trois situations, (Figure 3.2). a)- Flottaison : le solide remonte en surface. b)- Flottabilité neutre : ou équilibre hydrostatique, le solide reste à la profondeur voulue. c)- Immersion : le solide est en plongée permanente, à une vitesse définie par les caractéristiques du fluide. Dans la Figure 3.2, C_F est le centre de flottabilité, C_G est le centre gravité et C_M est le centre de masse.

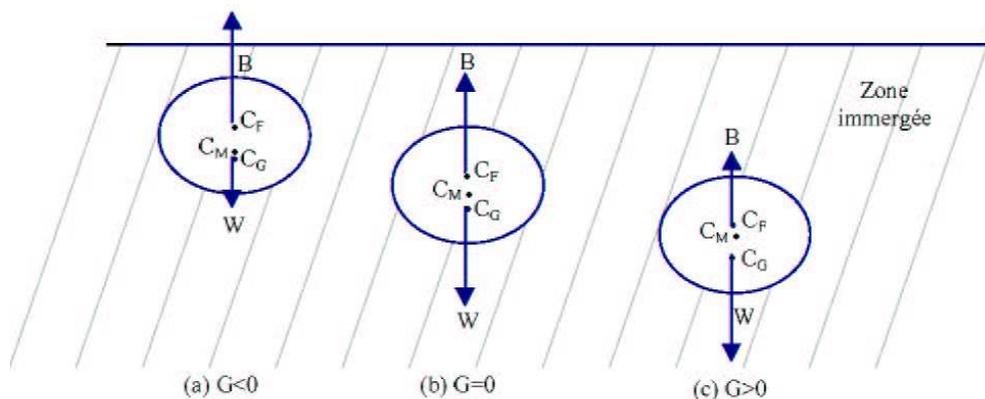


FIG. 3.2 – Équilibre hydrostatique.

Finalement le couple résultant de la gravité (effet de la pesanteur) et de la flottabilité (Poussée d'Archimède) dans le cas d'un véhicule marin de type bateau s'exprime par

(Fossen, 2002) :

$$\mathbf{g}(\eta) = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}^b \\ \mathbf{m}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho g \int_0^z A_{wp}(\zeta) d\zeta \sin \theta \\ \rho g \int_0^z A_{wp}(\zeta) d\zeta \cos \theta \sin \phi \\ \rho g \int_0^z A_{wp}(\zeta) d\zeta \cos \theta \cos \phi \\ \rho g \nabla \overline{GM}_T \sin \phi \cos \theta \cos \phi \\ \rho g \nabla \overline{GM}_L \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ \rho g \nabla (-\overline{GM}_L \cos \theta + \overline{GM}_T) \sin \phi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

avec \overline{GM}_T et \overline{GM}_L les hauteurs méta-centrique d'un bateau, et qui désignent la distance entre le centre de carène¹ $M_i, i = \{T, L\}$ et le centre de gravité C_G . A_{wp} représente le plan transversal limitant le volume du fluide statique. voir Figure 3.3.

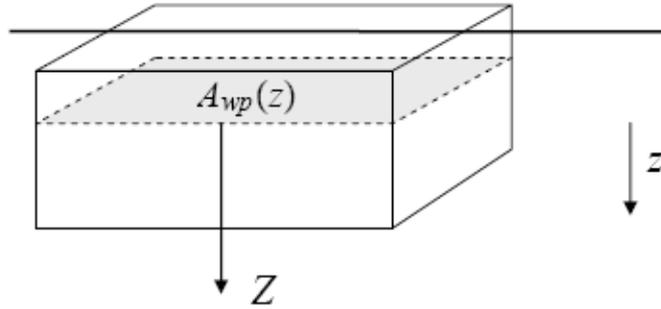


FIG. 3.3 – Plan A_{wp} délimitant le volume du fluide statique.

3.2.5 Propulseurs

Par les termes propulseurs, nous considérons un dispositif fournissant une force d'amplitude F_i et de direction α_i dans le plan xoy du bateau. Les forces résultantes le long des axes x et y , sont notées respectivement u_{ix} et u_{iy} qui constituent une partie du vecteur des forces issues des propulseurs

$$\mathbf{u}_i^b = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

¹La carène étant la partie immergée de la coque d'un navire. Le centre de carène est le centre géométrique du volume immergé (*volume du fluide déplacé*), la position du centre de carène varie avec les tirants d'eau (*la hauteur de la partie immergée du bateau*), l'assiette (*l'état d'équilibre du bateau dans l'eau par rapport au plan horizontal*) et la gîte (*inclinaison transversale d'un navire*).

Considérant également le basculement des gouvernes, qui n'est autre que l'angle que font les forces produites avec le plan xy du repère b . Nous obtenons le vecteur des forces de propulsion suivant :

$$\bar{\mathbf{u}}_i^b = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{bmatrix} = F_i \cos \mu_i \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \\ \tan \mu_i \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

avec F_i la force produite et $\mu_i \neq \mp \frac{\pi}{2}$ l'angle de basculement produit par les gouvernes avec le plan xoy du repère b . Si l'on suppose que $\mu_i = 0$ alors il y a uniquement les forces le long des axes x et y qui soient produites. i.e. pour tout propulseurs i :

$$\bar{\mathbf{u}}_i^b = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Nous supposons également que le $i^{\text{ème}}$ propulseur est localisé dans le repère b par

$$\mathbf{r}_{bt_i}^b = [x_{bt_i}^b, y_{bt_i}^b, z_{bt_i}^b]^\top \quad (3.34)$$

qui traduit la distance qui sépare l'origine du repère b de la position du propulseur i dans le repère b . L'ensemble des forces résultantes issues de chaque propulseur i est τ_i sont données par

$$\tau_i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^b \\ \mathbf{r}_{bt_i}^b \times \mathbf{u}_i^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{S}(r_{bt_i}^b) \end{bmatrix} \mathbf{u}_i^b \quad (3.35)$$

la troisième composante de $\bar{\mathbf{u}}_i^b$ est nulle. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \tau_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -z_{bt_i}^b \\ z_{bt_i}^b & 0 \\ -y_{bt_i}^b & x_{bt_i}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{r}_{bt_i}^b) \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (3.36)$$

Si l'on suppose également que les propulseurs sont positionnés à la même profondeur z_{bt}^b alors

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{i=1}^n \mathbf{B}(\mathbf{r}_{bt_i}^b) \mathbf{u}_i \\ &= [\mathbf{B}(\mathbf{r}_{bt_1}^b), \mathbf{B}(\mathbf{r}_{bt_2}^b), \dots, \mathbf{B}(\mathbf{r}_{bt_n}^b)] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_{bt_i}^b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{bt}^b & -y_{bt_i}^b \\ 0 & 1 & 0 & -z_{bt}^b & 0 & x_{bt_i}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (3.38)$$

Ce qui implique que les moments en roulis et en tangage sont donnés par les expressions suivantes

$$\tau_4 = -z_{bt}^b \tau_2 \quad (3.39a)$$

$$\tau_5 = z_{bt}^b \tau_1 \quad (3.39b)$$

Puis que nous n'avons pas l'intention de mettre des hélices pour avoir un mouvement de roulis, de tangage et de lacet, le couple τ résultant peut être réduit à $\tau = [\tau_1, \tau_2, 0, 0, \tau_6]^\top$, ainsi pour un bateau à 3 DDL, le couple des forces appliquées est $\tau_{3DDL} = [\tau_u, \tau_v, \tau_r]^\top$. Ainsi nous écrivons le couple de forces appliqué τ :

$$\tau = \mathbf{B}_u \tau_u \quad (3.40)$$

avec

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{bt}^b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_{bt}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \quad (3.41)$$

3.3 Forces environnementales

Dans ce paragraphe, nous traitons les perturbations environnementales τ_{env} que le bateau peut subir. L'origine de ces forces est dû principalement aux courants océaniques, aux vents et aux vagues. Nous considérons, dans cette thèse, uniquement les effets dus aux vents et aux courants océaniques.

3.3.1 Courants océaniques

Les effets des courants océaniques sont souvent simulés en boucle fermée du système, en introduisant la relation vectorielle suivante

$$\nu_r = \nu - \nu_c \quad (3.42)$$

avec $\nu_c \in \mathbb{R}^3$ la vitesse du courant exprimée dans le repère b par

$$\nu_c = \begin{bmatrix} u_c & v_c & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} V_c \cos(\beta_c - \psi) & V_c \sin(\beta_c - \psi) & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (3.43)$$

et V_c est l'amplitude de la vitesse du courant et β_c la direction du courant. Ainsi, on extrait la vitesse relative du bateau, par rapport à un repère horizontal lié au fluide, par :

$$\nu_r = \begin{bmatrix} u - u_c & v - v_c & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (3.44)$$

3.3.2 Forces du vent

Le vent est défini comme le mouvement de l'air relatif à la surface de la terre. Les modèles mathématiques décrivant les forces et les moments du vent sont utilisés dans les techniques de commandes du bateau afin d'améliorer les performances et la robustesse du système dans des conditions extrêmes. Nous présentons ici un modèle simplifié du vent. Identiquement au courant d'eau, le vent est caractérisé par une vitesse V_w et une orientation ψ_w . Les composantes du vecteur vent exprimées dans le repère terrestre sont données par

$$\begin{bmatrix} u_w^n \\ v_w^n \\ 0 \end{bmatrix} = V_w \begin{bmatrix} \cos \psi_w \\ \sin \psi_w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

relativement au repère bateau, (i.e. le repère b), le vecteur vent s'exprime de la façon suivante :

$$u_r = V_w \cos(\psi_w - \psi) - u \quad (3.46)$$

$$v_r = V_w \sin(\psi_w - \psi) - v \quad (3.47)$$

Dans le repère b , l'amplitude et la direction du vecteur vent sont calculées par les relations suivantes

$$V_r = \sqrt{u_r^2 + v_r^2} \quad (3.48)$$

$$\gamma_r = \tan^{-1} \left[\frac{v_r}{u_r} \right] = \psi_w - \psi \quad (3.49)$$

La vitesse du vent V_w et sa direction peuvent être mesurées par un anémomètre. Ces mesures doivent être correctement filtrées. Seules les moments moyens et les forces du vent sont compensés par l'autopilot. En effet, puisque l'inertie du bateau est importante, Il est inutile que le système de commande de l'autopilot compense les petites rafales de vents. Afin de pouvoir implémenter un compensateur pour un bateau à 3 DDL par une action d'anticipation, un modèle de vent à 3 DDL fonction de la vitesse V_r et l'orientation γ_r s'avère être utile. Pour ce faire, nous proposons le vecteur des forces généralisées suivant :

$$\tau_{env} = \begin{bmatrix} X_{vent} & Y_{vent} & N_{vent} \end{bmatrix}^\top \quad (3.50)$$

(Isherwood, 1972) a suggéré que l'on peut exprimer les composantes des forces du vent (X_{vent}, Y_{vent}) dans les directions x et y ainsi que le moment (en lacet N_{vent}) par les relations empiriques :

$$\begin{aligned} X_{vent} &= 0.5C_X(\gamma_r)\rho_a V_r^2 A_T \quad (N) \\ Y_{vent} &= 0.5C_Y(\gamma_r)\rho_a V_r^2 A_L \quad (N) \\ N_{vent} &= 0.5C_N(\gamma_r)\rho_a V_r^2 A_L L \quad (Nm) \end{aligned} \quad (3.51)$$

C_X et C_Y sont des coefficients de forces, C_N est un coefficient de moment, $\rho_a(kg/m^3)$ est la densité de l'air, $A_T(m^2)$ et $A_L(m^2)$ sont respectivement les surfaces de projection et transversale et latérale. $L(m)$ est la longueur du bateau. La vitesse V_r est en m/s .

3.4 Modèle du bateau à 3 DDL

Nous traiterons tout au long de cette thèse, le mouvement planaire d'un véhicule marin. Dans ce mode d'opération, nous avons besoin uniquement de la dynamique dans les directions respectives d'avancement (l'axe u), de glissement (l'axe v) et de lacet (autour de l'axe r). Les mouvements dans les directions verticale (c'est à dire en descente), en tangage et en roulis sont négligées. Le modèle du bateau à 3 DDL s'obtient à partir du modèle complet à 6 DDL (3.17). Le modèle planaire s'obtient en regroupant les éléments représentatifs du mouvement d'avancement de glissement et du lacet, et en annulant les autres éléments qui représentent le mouvement en descente, en roulis et en tangage. Le modèle résultant est décrit en terme du vecteur position $\eta = [x, y, \psi]^T$ et le vecteur vitesse $\nu = [u, v, r]^T$. Le modèle s'écrit (Fossen, 2002)

$$\dot{\eta} = \mathbf{R}(\psi)\nu \quad (3.52a)$$

$$\mathbf{M}\dot{\nu} + \mathbf{C}(\nu)\nu + \mathbf{D}(\nu)\nu = \tau + \tau_{env} \quad (3.52b)$$

$\mathbf{R}(\psi)$ est la matrice de rotation obtenue en faisant une rotation par rapport à l'axe z du repère b

$$\mathbf{R}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Tout au long de cette thèse, nous supposons que le modèle du bateau admet une symétrie par rapport à l'axe xz du repère b . On a alors les expressions des matrices suivantes :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} m - X_{\dot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & m - Y_{\dot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{C}_\nu = \mathbf{C}_{RB}(\nu) + \mathbf{C}_A(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_v v \\ 0 & 0 & m_u u \\ m_v v & -m_u u & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{D}(\nu) = \begin{bmatrix} -X_u - X_{|u|u}|u| & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v - Y_{|v|v}|v| & 0 \\ 0 & 0 & -N_r - N_{|r|r}|r| \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

A titre de simplification, nous considérons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} m_u &= m - X_{\dot{u}}, & d_u &= -X_u - X_{|u|u}|u| \\ m_v &= m - Y_{\dot{v}}, & d_v &= -Y_v - Y_{|v|v}|v| \\ m_r &= I_z - N_{\dot{r}}, & d_r &= -N_r - N_{|r|r}|r| \\ m_{uv} &= m_u - m_v \end{aligned}$$

Différentes missions sont attribuées aux bateaux selon leur taille et leur poids. A cet effet, nous classifions les missions selon leur modes de navigation. Le premier mode de navigation est la navigation à faible vitesse. Ce mode est commun pour les bateaux pétroliers. Le deuxième mode est celui de la navigation des bateaux à une grande vitesse telles que les bateaux de transit.

Pour chaque mode de navigation, nous présentons le modèle associé avec lequel nous pouvons traiter la loi de commande permettant d'exécuter la mission attribuée au bateau en question.

3.4.1 Modèle du bateau naviguant à petite vitesse

Les applications de navigation à faibles vitesses, sont (i) celles connues sous le nom de stationnement statique (Mooring systems) des bateaux, (Voir Figure 3.4), et (ii) celles connues sous le nom de positionnement dynamique des bateaux. Pour de telles applications, la vitesse linéaire totale des bateaux $U = \sqrt{u^2 + v^2}$ est presque nulle ($U \approx 0$); ce qui implique une matrice de Coriolis $\mathbf{C}(\nu)$ approximativement nulle. Le modèle (3.52) se réduit alors à la forme suivante

$$\dot{\eta} = \mathbf{R}(\psi)\nu \quad (3.57a)$$

$$\mathbf{M}\dot{\nu} + \mathbf{D}(\nu)\nu = \tau + \tau_{env} \quad (3.57b)$$

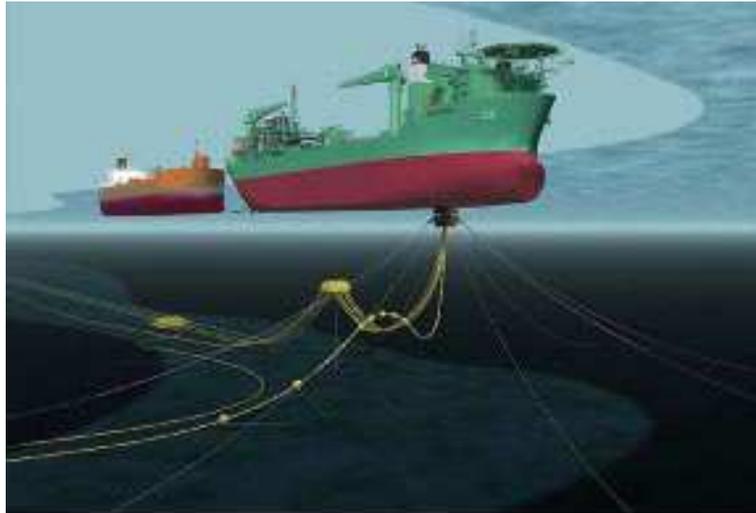


FIG. 3.4 – Positionnement dynamique des bateaux.

3.4.2 Modèle du bateau navigant à grande vitesse

La navigation des bateaux à grande vitesse, implique que la vitesse linéaire totale $U \neq 0$. Par conséquent, le modèle à 3 DDL s'écrit comme (3.52). De plus, la majorité des



FIG. 3.5 – Bateau navigant à grande vitesse.

navires sont équipés d'un propulseur monté transversalement ; c'est à dire en supplément de leur configuration habituelle. Ce qui permet un *actionnement* complet pour des applications à faible vitesse lors des manoeuvres dans les ports ou dans des espaces confinés. Mais ces propulseurs transversaux perdent leurs performances lors de grandes vitesses. En effet, le flux d'eau pénétrant les tunnels, où ces propulseurs sont installés, freine la force transversale permettant au navire de se déplacer dans la direction de glissement. Ceci conduit au sous actionnement du navire. Par conséquent, nous pouvons

considérer la force dans la direction de glissement pratiquement nulle, soit $\tau_v = 0$. Nous écrivons, ainsi, le modèle (3.52) sous la forme suivante

$$\dot{\eta} = \mathbf{R}(\psi)\nu \quad (3.58a)$$

$$\mathbf{M}\dot{\nu} + \mathbf{C}(\nu)\nu + \mathbf{D}(\nu)\nu = \begin{bmatrix} \tau_u \\ 0 \\ \tau_r \end{bmatrix} + \tau_{env} \quad (3.58b)$$

Ainsi en l'absence des forces environnementales, le modèle dynamique (3.59) s'écrit sous une forme développée comme suit

$$\dot{x} = u \cos \psi - v \sin \psi \quad (3.59a)$$

$$\dot{y} = u \sin \psi + v \cos \psi \quad (3.59b)$$

$$\dot{\psi} = r \quad (3.59c)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{m_u}(\tau_u + m_v vr - d_u u) \quad (3.59d)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{m_v}(m_u ur + d_v v) \quad (3.59e)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{m_r}(\tau_r + m_{uv} uv - d_r r) \quad (3.59f)$$

Nous remarquons que, suite à l'absence du contrôle τ_v dans la direction du glissement, la cinquième équation du système (3.59) représente une contrainte *non-holonyme*.

Dans le paragraphe suivant, nous discuterons les différentes propriétés du modèle du bateau sous-actionné en termes d'holonomie, de controllabilité, et de stabilabilité du modèle.

3.5 Test de non-holonomie du véhicule marin sous-actionné

Quand le véhicule marin est sous-actionné, la dynamique non-actionnée implique l'existence d'une contrainte en accélération. Les travaux de (Oriolo.G. et Nakamura, 1991) et (Wichlund et Egeland, 1995) montrent des conditions nécessaires et suffisantes sur l'accélération pour que le système soit non-holonyme du second ou du premier ordre ou tout simplement holonyme. Présentons en bref, ces différentes conditions.

Considérons une classe de système décrit par

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\nu} + \mathbf{C}(\nu)\nu + \mathbf{D}(\nu)\nu + \mathbf{g}(\eta) &= \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{\eta} &= \mathbf{R}(\eta)\nu \end{aligned}$$

avec $\eta \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}^m, m < n, \dot{\mathbf{M}} = 0$ et \mathbf{M} et \mathbf{R} sont des matrices non-singulières. Cette classe de systèmes comprend les systèmes sous-actionnés comme les véhicules marins (bateaux en particulier). Soit la matrice \mathbf{M}_u qui désigne les derniers $n - m$ lignes de la matrice \mathbf{M} . Définissons les matrices $\mathbf{C}_u(\nu), \mathbf{D}_u(\nu)$ et $g_u(\eta)$ de la même manière. Dans ce cas, la contrainte résultante du sous actionnement du modèle s'écrit de la manière suivante

$$\mathbf{M}_u\dot{\nu} + \mathbf{C}_u(\nu)\nu + \mathbf{D}_u(\nu)\nu = 0 \quad (3.60)$$

La contrainte (3.60) est dite *partiellement intégrable* si elle peut se mettre sous la forme

$$h_p(\nu, \eta, t) = 0$$

où $h_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$. Elle est dite *totalelement intégrable* si elle peut se mettre sous la forme

$$h_t(\eta, t) = 0$$

où $h_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$. Si la contrainte (3.60) n'est pas partiellement intégrable, alors le système est non-holonome de second ordre. Si la contrainte est partiellement intégrable mais n'est pas totalelement intégrable, alors le système est dit non-holonome de premier ordre (e.g. le système à uniquement une contrainte sur sa vitesse). Quand la contrainte est totalelement intégrable, alors le système est dit holonome. Pour un véhicule sous actionné, ses contraintes ne sont pas en général partiellement intégrable. Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que (3.60) soit partiellement ou totalelement intégrable.

Théorème 2.5 *La contrainte (3.60) est partiellement intégrable si et seulement si*

1. g_u est une constante.
2. $(\mathbf{C}_u(\nu) + \mathbf{D}(\nu))$ est une matrice constante.
3. La distribution Ω^\top définie par $\Omega^\top = \text{Ker}((\mathbf{C}_u(\nu) + \mathbf{D}(\nu))\mathbf{R}^{-1}(\eta))$ est complètement intégrable.

Théorème 2.6 *La contrainte (3.60) est totalelement intégrable si et seulement si*

1. Elle est partiellement intégrable

2. $(\mathbf{C}_u(\nu) + \mathbf{D}(\nu)) = 0$.
3. La distribution Δ définie par $\Delta(\eta) = \ker[\mathbf{M}_u \mathbf{R}^{-1}(\eta)]$ est complètement intégrable.

Démonstration Les preuves de ces deux théorèmes sont disponibles dans (Wichlund et Egeland, 1995)

A partir des Théorèmes 2.5 et 2.6, nous pouvons appliquer le test de non-holonomie à notre modèle de bateau sous-actionné (3.59).

Proposition 2.1 (Ghommam et al., 2007b) *Le modèle du bateau sous-actionné (3.59) est un système non-holonome de second ordre.*

Démonstration Nous pouvons écrire la contrainte de l'équations (3.59) sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} 0, m - Y_v, 0 \end{bmatrix} \dot{\nu}_h + [0, 0, -m + X_{\dot{u}u}] \nu_h + [0, -m + Y_v - Y_{|v|v}|v|, 0] \nu_h = 0$$

Nous remarquons que cette contrainte ne satisfait pas la deuxième condition du Théorème 2.5 car la matrice de Coriolis $\mathbf{C}_u(\eta_h) = [0, 0, -m + X_{\dot{u}u}]$ et la matrice d'amortissement $D_u(\nu_h) = [0, -m + Y_v - Y_{|v|v}|v|, 0]$ dépendent de ν_h . Par conséquent, la contrainte de la cinquième équation de (3.59) n'est pas partiellement intégrable et dans ce cas le sous-actionnement signifie la non-holonomie du système.

3.5.1 Contrôlabilité et stabilisabilité du véhicule sous-actionné

Pour pouvoir appliquer les notions de contrôlabilité et de stabilisabilité du véhicule marin sous-actionné, nous devons transformer le système (3.59) sous une forme similaire à un double intégrateur étendu. Pour cela considérons le difféomorphisme global donné

par le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \psi \\
x_2 &= x \cos \psi + y \sin \psi \\
x_3 &= x \sin \psi - y \cos \psi \\
u_1 &= \dot{r} = \frac{m_{uv}}{m_r} uv - \frac{d_r}{m_r} r + \frac{1}{m_r} \tau_3 \\
u_2 &= \dot{u} - u_1 x_3 + vr - r^2 x_2 = \frac{m_v}{m_u} vr - \frac{d_u}{m_u} u + \frac{1}{m_u} \tau_1 - u_1 x_3 + vr - r^2 x_2
\end{aligned} \tag{3.61}$$

ce qui donne après une double dérivation

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= u_1 \\
\ddot{x}_2 &= \ddot{x} \cos \psi - \dot{x} \dot{\psi} \sin \psi + \left(-\dot{x} \dot{\psi} - x \ddot{\psi} \right) \sin \psi - x \dot{\psi}^2 \cos \psi \\
&\quad + \ddot{y} \sin \psi + \dot{y} \dot{\psi} \cos \psi + \left(\dot{y} \dot{\psi} + y \ddot{\psi} \right) \cos \psi - y \dot{\psi}^2 \sin \psi \\
&= u_2 \\
\dot{x}_3 &= \dot{x} \sin \psi - \dot{y} \cos \psi + r x_2 \\
&= \dot{x}_1 x_2 - v
\end{aligned}$$

ou sous une forme plus compacte :

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= u_1 \\
\ddot{x}_2 &= u_2 \\
\dot{x}_3 &= \dot{x}_1 x_2 - v
\end{aligned} \tag{3.62}$$

En appliquant un deuxième changement de coordonnées donné par

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= x_2 \\
z_3 &= -2x_3 + x_1 x_2
\end{aligned} \tag{3.63}$$

nous pouvons écrire la dynamique du véhicule sous-actionné dans le nouveau système de coordonnées comme suit

$$\begin{aligned}
\ddot{z}_1 &= u_1 \\
\ddot{z}_2 &= u_2 \\
\dot{z}_3 &= z_1 \dot{z}_2 - z_2 \dot{z}_1 + 2v
\end{aligned} \tag{3.64}$$

avec la contrainte non-holonome (3.59) pour la vitesse de glissement v dans le nouveau système de coordonnées qui s'écrit sous la forme :

$$m_v \dot{v} + m_u \left(\dot{z}_2 + \dot{z}_1 \frac{z_1 z_2 - z_3}{2} \right) \dot{z}_1 + d_v v = 0 \tag{3.65}$$

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'étude de controllabilité et de stabilisabilité du système décrit par (3.64)-(3.65) afin de déduire celles du bateau sous-actionné (3.59).

Théorème 2.7 *Considérons le modèle du véhicule marin sous-actionné décrit par (3.59). Soit \mathcal{M}_e l'ensemble des points d'équilibres solutions de (3.59) pour $\tau_h = 0$, e.g. $\mathcal{M}_e = \{(x, y, \psi, u, v, r)^\top \in \mathbb{R}^6 : u = v = r = 0\}$. Alors le véhicule marin sous-actionné satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Il n'existe pas de commande par feedback, continue et invariante dans le temps qui stabilise asymptotiquement le système (3.64) en un point $(x_{eq}, y_{eq}, \psi_{eq}, 0, 0, 0)^\top \in \mathcal{M}_e$*
2. *Le véhicule marin sous-actionné est localement fortement accessible pour tout point $(x, y, \psi, u, v, r)^\top \in \mathbb{R}^6$.*
3. *Le véhicule marin sous-actionné est **STLC** pour tout point $(x_{eq}, y_{eq}, \psi_{eq}, 0, 0, 0)^\top \in \mathcal{M}_e$.*

Démonstration

1. Réécrivons le modèle équivalent du bateau sous-actionné (3.64)-(3.65) sous la forme $\dot{q} = f(q, u)$ avec $q = (z_1, z_2, z_3, \dot{z}_1, \dot{z}_2, v)^\top$, $u = (u_1, u_2)^\top$ et $f(q, u) : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une commande continue par feedback qui stabilise asymptotiquement (3.64)-(3.65) est que l'image de l'application $f(q, u) : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ doit contenir un voisinage de l'origine. Puisqu'il n'y a pas de points de la forme $(0, 0, \gamma, 0, 0, 0)$, $\gamma \neq 0$ qui sont dans l'image de $f(q, u)$, il s'ensuit d'après Brockett que (3.59) ne peut pas être stabilisable asymptotiquement en $(x_{eq}, y_{eq}, \psi_{eq}, 0, 0, 0)^\top \in \mathcal{M}_e$ via une loi de commande continue invariante dans le temps.
2. Considérons le système (3.64)-(3.65), que l'on peut écrire sous la forme suivante

$$\dot{q} = f(q) + g_1 u_1 + g_2 u_2 \quad (3.66)$$

avec

$$f(q) = \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_1 q_5 - q_2 q_4 + 2q_6 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{m_u}{m_v} \left(q_5 + q_4 \frac{q_1 q_2 - q_3}{2} \right) q_4 - \frac{d_v}{m_v} q_6 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons conclure que l'accessibilité de la distribution C de (3.66) est donnée par :

$$C(q) = \text{span}\{g_1, g_2, [g_1, f], [g_2, f], [g_1, [g_2, f]], [[g_1, f], [g_2, f]]\}(q)$$

est de dimension 6 pour tout $q \in \mathbb{R}^6$. Par conséquent, la condition du rang de forte accessibilité est vérifiée.

3. Notons que le système (3.66) satisfait la condition du rang de la forte accessibilité, à partir de la définition 2.9 (l'aspect applicatif). Donc, nous pouvons montrer que chaque mauvais crochet peut être exprimé comme une combinaison linéaire de bons crochets. Il s'en suit que le véhicule marin sous-actionné (3.59) est **STLC**.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle général d'un véhicule marin à 6 DDL. A partir de ce modèle, nous avons donné le modèle d'un bateau à 3 DDL pouvant se déplacer sur une surface plane de l'océan en exposant les différents modes de navigation de celui-ci. En effet, nous avons analysé la situation où le bateau navigue dans l'océan avec une grande vitesse, ce qui entraîne un sous-actionnement au niveau de son contrôle dans la direction du glissement. Pour s'assurer de la possibilité de sa commande, nous avons eu recours aux techniques de tests de contrôlabilité et de stabilisabilité avancés des systèmes non-holonomes. A cet effet, nous avons montré qu'un bateau sous-actionné ne peut pas être stabilisable en utilisant une loi de commande lisse et continue dans le temps. Par contre, il est toujours possible de le stabiliser en utilisant des lois de commandes discontinues variant dans le temps, ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Systèmes en cascades pour la stabilisation et la poursuite

Dans ce chapitre, nous résolvons le problème de la stabilisation asymptotique globale et uniforme des véhicules marins sous-actionnés, en premier au moyen d'un retour d'état discontinu puis au moyen d'un retour lisse et variant dans le temps. Ce résultat est présenté en application d'une théorie récente des systèmes en cascades. Nous exploitons la structure cascade du véhicule marin sous-actionné, pour construire une loi de commande permettant d'exécuter le suivi de trajectoires.

4.1 Modèle en forme cascade du véhicule marin sous-actionné

Afin de simplifier la conception de la loi de commande pour la stabilisation du bateau sous-actionné, un changement de coordonnées est considéré (Pettersen et Fosse, 2000) pour transformer la cinématique issue de (3.59) en une simple représentation polynômial. Définissons le vecteur $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]^T \in \mathbb{R}^3$ comme suit :

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}^T \eta = \mathcal{T}(\eta) \quad (4.1)$$

La fonction réciproque de $\mathcal{T}(\eta)$ est obtenue comme suit :

$$\eta = \mathcal{T}^{-1}(\eta) = \mathbf{R}\mathbf{z} \quad (4.2)$$

Puis que \mathcal{T} et \mathcal{T}^{-1} existent et que leurs dérivées existent pour tout η et z , le changement de coordonnées (4.1) est un difféomorphisme global. De plus nous remarquons l'équivalence $\mathbf{z} = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$.

La dérivée par rapport au temps de z est donnée par

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{R}}^\top \eta + \mathbf{R}^\top \dot{\eta} \quad (4.3)$$

sachant que

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{r}}$$

avec

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation (4.3) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{r}}^\top \mathbf{R}^\top \eta + \mathbf{R}^\top \dot{\eta} \\ &= \hat{\mathbf{r}}^\top \mathbf{R}^\top \eta + \mathbf{R}^\top \mathbf{R} \nu \end{aligned} \quad (4.4)$$

En se servant de la transformation (4.1), la représentation d'état du bateau sous-actionné (3.59) s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}^\top \mathbf{R}^\top \eta \\ \mathbf{M}^{-1} (\tau - \mathbf{C}(\nu)\nu - \mathbf{D}(\nu)\nu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Ou bien sous une forme plus explicite l'équation (4.4) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u + z_2 r \\ \dot{z}_2 &= v - z_1 r \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= r \\ \dot{u} &= \frac{m_v}{m_u} vr - \frac{d_u}{m_u} u + \frac{1}{m_u} \tau_1 \\ \dot{v} &= -\frac{m_u}{m_v} ur - \frac{d_v}{m_v} v \end{aligned} \quad (4.6b)$$

$$\dot{r} = \frac{m_{uv}}{m_r} uv - \frac{d_r}{m_r} r + \frac{1}{m_r} \tau_3$$

Posons $A = \frac{m_u}{m_v}$, $B = \frac{d_v}{m_v}$, et

$$\tau_u = \frac{m_u}{m_v} vr - \frac{d_u}{m_u} u + \frac{1}{m_u} \tau_1 \quad (4.7)$$

$$\tau_r = \frac{m_{uv}}{m_r} uv - \frac{d_r}{m_r} r + \frac{1}{m_r} \tau_3 \quad (4.8)$$

Le système (4.6) devient

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tau_u \\ \dot{v} &= -Aur - Bv \\ \dot{r} &= \tau_r \end{aligned} \quad (4.9)$$

La stabilisation de $z = [z_1, z_2, z_3]^\top$ autour de l'origine s'effectue en utilisant la technique de backstepping, et en considérant les variables u, v et r comme des commandes virtuelles. Cependant, puisque la direction du vecteur porté par \vec{v} est sous-actionnée, nous ne pouvons pas considérer v comme une commande virtuelle permettant de stabiliser z_2 . Une solution consisterait alors à éliminer la variable de \dot{z}_2 , Proposons pour cela le changement de variables suivant :

$$Z_2 = z_2 + \frac{v}{B} \quad (4.10)$$

La dynamique du sous-système (z_1, Z_2) s'exprime sous la forme :

$$\dot{z}_1 = u + Z_2 r - \frac{v}{B} r \quad (4.11)$$

$$\dot{Z}_2 = -\frac{A}{B} u r - z_1 r \quad (4.12)$$

Nous introduisons une nouvelle variable α telle que :

$$u = -\frac{B}{A} (z_1 + \alpha) \quad (4.13)$$

Le modèle du bateau sous-actionné après les transformations (4.1), (4.7), (4.8) et (4.13) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : & \begin{cases} \dot{z}_1 = -\frac{B}{A} z_1 - \frac{B}{A} \alpha + (Z_2 - \frac{v}{B}) r \\ \dot{v} = -Bv + B(z_1 + \alpha) r \end{cases} \\ \Sigma_2 : & \begin{cases} \dot{Z}_2 = \alpha r \\ \dot{z}_3 = r \\ \dot{\alpha} = \tau_\alpha \\ \dot{r} = \tau_r \end{cases} \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec

$$\tau_\alpha = \frac{B}{A} (z_1 + \alpha) - r (Z_2 - \frac{v}{B}) - \frac{A}{B} \tau_u$$

Notons que le système (4.14) a une structure en cascade comme le montre la figure 4.1, avec

$$\begin{aligned} \xi &= [Z_2, z_3, \alpha, r]^\top \\ z &= [z_1, v]^\top \\ u_{\alpha, r} &= [\tau_\alpha, \tau_r]^\top \end{aligned}$$

Dans le but de proposer une commande par retour d'état partiel, seuls les états du sous-système Σ_1 sont utilisés. L'interconnection entre le sous-système Σ_1 et celui de Σ_2 est considérée comme un élément de perturbation. Le système (4.14) s'écrit alors sous la forme cascade évoquée en paragraphe 2.1.3

$$\dot{z} = f(z) + \psi(z, \xi) \quad (4.15)$$

$$\dot{\xi} = a(\xi, u) \quad (4.16)$$

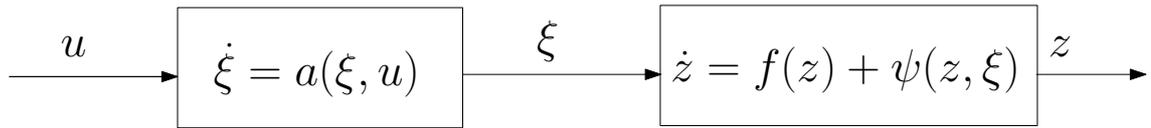


FIG. 4.1 – Modèle en cascade du bateau sous-actionné.

avec $\psi(z, \xi)$ le terme d'interconnection. Dans ce cas, nous allons montrer que la stabilisation du sous-système en ξ assure la stabilisation de toute la cascade. Cette propriété est due au fait que le terme d'interconnection $\psi(z, \xi)$ aui abrite une condition de croissance par rapport à la variable z .

4.2 Commande pour la stabilisation du modèle du bateau sous-actionné

Dans ce paragraphe, nous proposons deux approches de commande permettant la stabilisation autour de l'origine du système (4.15,4.16). La première étape consiste à trouver une loi de commande discontinue par retour d'état partiel qui stabilise localement et exponentiellement le sous-système en ξ . La stabilisation de celui-ci garantit la stabilité de tout le système en cascade. La deuxième étape consiste à trouver une loi de commande variant dans le temps permettant la stabilité uniforme et globale de toute la cascade (4.15,4.16).

4.2.1 Conditions de stabilité pour la structure en cascade

Dans la structure cascade (4.15,4.16), nous remarquons que seul le sous-système ξ contient la commande u . L'idée de la commande de ce système est inspirée de (Panteley et Loria, 1998). Cette idée consiste à remarquer que si le système nominal $\dot{z} = f(z, 0)$ est exponentiellement stable et s'il existe une commande $u = k(\xi)$ tel que le sous-système en ξ est exponentiellement stable et si de plus $\psi(z, \xi)$ vérifie la condition d'accroissement :

$$\|\psi(t, z, \xi)\| \leq \theta_1(\|\xi\|) + \theta_2(\|\xi\|) \|z\| \quad (4.17)$$

où θ_1, θ_2 sont des fonctions continues de $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, alors le système (z, ξ) est globalement exponentiellement stable.

Proposition 3.1 *Le sous-système nominal (4.15) (i.e $\psi(z, \xi) = 0$) est exponentiellement stable*

Démonstration Le système nominal (4.15) s'écrit de la façon suivante

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A}z_1 \\ -Bv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A} & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix} z \quad (4.18)$$

Le système (4.18) est un système linéaire, où les valeurs propres de la matrice associée sont $\lambda_1 = -B/A$ et $\lambda_2 = -B$, ce qui montre que z est exponentiellement stable. \square

Proposition 3.2 *Le terme $\psi(z, \xi)$ donné par l'expression :*

$$\psi(z, \xi) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A}\alpha + \left(Z_2 - \frac{v}{B}\right)r \\ B(z_1 + \alpha)r \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

satisfait la condition (4.17).

Démonstration La fonction $\psi(z, \eta)$ peut être écrite sous la forme suivante

$$\psi(z, \xi) = \begin{bmatrix} r & 0 & -\frac{B}{A} & -\frac{v}{B} \\ 0 & 0 & Br & Bz_1 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \psi(z, \xi) &= \mathbf{G}_1(z) + \mathbf{G}_2(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{v}{B} \\ 0 & 0 & 0 & Bz_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 & -\frac{B}{A} & 0 \\ 0 & 0 & Br & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\mathbf{x} = [z, \xi]^\top$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_1(z)\|_2 &\leq \max\left(B, \frac{1}{B}\right) \sqrt{(z_1^2 + v^2)} \\ &= \max\left(B, \frac{1}{B}\right) \|x_1\|_2 \\ &= \theta_1 \|x_1\|_2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\mathbf{G}_2(\mathbf{x})\|_2 &\leq (B+1)\|r\|_2 + \frac{B}{A} \leq (B+1)\|\xi\|_2 + \frac{B}{A} \\ &= \theta_2(\|\xi\|_2)\end{aligned}$$

et par conséquent nous avons d'après la propriété de la somme des normes que :

$$\|\psi(z, \xi)\|_2 \leq \|\mathbf{G}_1(z)\|_2 + \|\mathbf{G}_2(t, \mathbf{x})\|_2.$$

Par conséquent le système (4.15,4.16) est stable autour de l'origine □

4.2.2 Commande discontinue

Dans cette partie, nous désirons déterminer une loi de commande $u = k(\xi)$ qui stabilise exponentiellement le sous-système (4.16), sachant que la forme de $\dot{\xi} = a(\xi, u)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{Z}_2 &= \alpha r \\ \dot{z}_3 &= r \\ \dot{\alpha} &= \tau_\alpha \\ \dot{r} &= \tau_r\end{aligned}$$

cette forme ne satisfait pas la condition nécessaire de Brockett (Brockett, 1983). Nous ne pouvons donc pas trouver une loi de commande $u(\xi)$ continue, lisse et invariante dans le temps. A cet effet, nous proposons de concevoir une loi discontinue permettant la stabilité exponentielle locale de (4.16). Notons par ailleurs que le sous-système (4.16) peut se mettre sous la forme chaînée suivante, en posant le changement de variables suivant :

$$\xi_1 = z_3 \quad \xi_2 = \alpha \quad \xi_3 = Z_2 \quad u_1 = r \quad u_2 = \tau_\alpha$$

Ce qui permet d'aboutir à la forme chaînée d'ordre 3 suivante

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= u_1 \\ \dot{\xi}_2 &= u_2 \\ \dot{\xi}_3 &= \xi_2 u_1 \\ \dot{u}_1 &= \tau_r\end{aligned} \tag{4.20}$$

Afin de stabiliser autour de l'origine $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^\top$ et u_1 , nous proposons d'utiliser la technique de backstepping en trois étapes.

Stabilisation de ξ_1 Afin de rendre ξ_1 exponentiellement stable, nous utilisons le retour d'état linéaire $u_1 = -k_1\xi_1$ avec k_1 un gain positif. Le système (4.20) s'écrit alors sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -k_1\xi_1 \\ \dot{\xi}_2 &= u_2 \\ \dot{\xi}_3 &= -k_1\xi_2\xi_1 \\ \dot{u}_1 &= \tau_r\end{aligned}\tag{4.21}$$

Le problème consiste maintenant à trouver une loi de commande u_2 , telle que si pour toutes conditions initiales appartenant à l'ensemble $\Omega = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 | \xi_1(t_0) \neq 0\}$, les états ξ_1, ξ_2, ξ_3 et u_1 en boucle fermée reste bornés et convergent exponentiellement vers zéro. Procédons maintenant par l'application du backstepping en trois étapes :

Étape 1 : stabilisation du sous système ξ_3 Définissons une fonction de Lyapunov pour la dynamique de la troisième équation de (4.21) en considérant ξ_2 comme une commande virtuelle pour stabiliser le sous-système ξ_3 .

$$V_1(\xi_3) = 0.5\xi_3^2\tag{4.22}$$

Si nous choisissons $\xi_2 = \Psi_1(\xi_3, \xi_1)$ telle que

$$\Psi_1(\xi_3, \xi_1) = \frac{k_3}{k_1} \frac{\xi_3}{\xi_1}\tag{4.23}$$

la dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov (4.22) devient

$$\dot{V}_1 = -k_3\xi_3^2, \quad k_3 \geq 0\tag{4.24}$$

Étape 2 : stabilisation du sous système ξ_2 Dans cette étape nous introduisons la nouvelle variable $\varpi_2 = \xi_2 - \Psi_1(\xi_3, \xi_1)$ qui représente la déviation de l'état ξ_2 par rapport à $\Psi_1(\xi_3, \xi_1)$. Considérons la troisième équation de (4.21), où la variable ξ_2 est remplacée par $\varpi_2 = \xi_2 - \Psi_1(\xi_3, \xi_1)$

$$\dot{\xi}_3 = -k_1(\varpi_2 + \Psi_1)\xi_1\tag{4.25}$$

$$\dot{\varpi}_2 = u_2 + k_3(\varpi_2 + \Psi_1) - k_3\frac{\xi_3}{\xi_1}\tag{4.26}$$

Soit la nouvelle fonction de Lyapunov définie par :

$$V_2(\xi_3, \varpi_2) = V_1(\xi_3) + \frac{1}{2}\varpi_2^2\tag{4.27}$$

En dérivant la fonction de $V_2(\xi_3, \varpi_2)$ par rapport au temps et en choisissant la loi de commande u_2 :

$$u_2 = \Psi_2(\xi_3, \xi_2, \xi_1) \quad (4.28)$$

$$= k_1 \xi_3 \xi_1 - k_3(\varpi_2 + \Psi_1) - k_2 \varpi_2 + k_3 \frac{\xi_3}{\xi_1} \quad (4.29)$$

on peut écrire :

$$\dot{V}_2 = -k_3 \xi_3^2 - k_2 \varpi_2^2, \quad k_2 \geq 0 \quad (4.30)$$

Proposition 3.3 *Soit le système (4.21), si nous choisissons pour expressions des lois de commande u_1 et u_2 :*

$$u_1 = -k_1 \xi_1 \quad (4.31)$$

$$u_2 = k_1 \xi_3 \xi_1 - k_3(\varpi_2 + \Psi_1) - k_2 \varpi_2 + k_3 \frac{\xi_3}{\xi_1} \quad (4.32)$$

avec $k_3 > 0, k_2 > 0$ et $k_3 > k_1$. Alors nous avons les propriétés suivantes :

1. Les états $\xi_i, i = 1 \dots 3$ sont bornés et convergent exponentiellement vers l'origine pour tout $\xi \in \Omega = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 | \xi_1(t_0) \neq 0\}$.
2. Les commandes (4.31) et (4.32) sont bien définies et bornées pour tout $t \geq 0$.

Démonstration

1. Pour montrer la convergence des états ξ_3 et ϖ_2 ainsi que leurs bornitudes, nous intégrons la relation (4.30) :

$$V_2(t) - V_2(t_0) = -k_3 \int_{t_0}^t \xi_3^2(\tau) d\tau - k_2 \int_{t_0}^t \varpi_2^2(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

en utilisant le fait que $V_2(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$, nous avons

$$W_2(t) = k_3 \int_{t_0}^t \xi_3^2(\tau) d\tau + k_2 \int_{t_0}^t \varpi_2^2(\tau) d\tau \leq V_2(t_0) \quad (4.34)$$

Puisque $W_2(t)$ est une fonction uniformément continue, alors d'après le Lemme de Barbalat (Khalil, 1996) ξ_3 et ϖ_2 sont bornées. De plus $\lim_{t \rightarrow \infty} W_2 = 0$, et par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_3(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \varpi_2(t) = 0$.

2. Puisque $\varpi_2(t)$ converge vers zéro, nous pouvons conclure que $\xi_2(t) \rightarrow \Psi_1(\xi_3, \xi_1) = \frac{k_1 \xi_3}{k_3 \xi_1}$, pour garantir la convergence ainsi que la bornitude de ξ_2 , nous devons assurer tout d'abord la convergence et la bornitude de ξ_3/ξ_1 quand $t \rightarrow \infty$. Notons que

$$\dot{V}_1 = -2k_3 V_1 \quad (4.35)$$

d'après (4.35), nous pouvons conclure que V_1 converge exponentiellement vers zéro selon la loi $e^{-2k_3 t}$, par conséquent ξ_3 converge vers zéro selon la loi $e^{-k_3 t}$. Puisque ξ_1 converge exponentiellement vers zéro selon la loi $e^{-k_1 t}$, nous concluons que le rapport (ξ_3/ξ_1) est borné et tend vers zéro selon la loi $e^{-(k_3-k_1)t}$, si et seulement si $k_3 > k_1$ et $\xi_1(t_0) \neq 0$. \square

Puisque u_1 n'est pas la vraie commande permettant la stabilisation de tout le système (4.21), nous procédons par une étape supplémentaire de backstepping.

Étape 3 : Commande τ_r Notons par $\chi(t, \xi) = u_1 = -k_1 \xi_1$, et définissons la nouvelle variable :

$$\tilde{u} = u_1 - \chi(t, \xi) \quad (4.36)$$

et considérons la fonction de Lyapunov $V_3 = V_1 + 0.5\tilde{u}^2$. A partir de l'équation (4.30), la dérivée de la fonction de Lyapunov V_3 s'écrit comme suit :

$$\dot{V}_3 = -k_3 \xi_3^2 - k_2 \varpi_2^2 + \tilde{u}(\tau_r - \dot{\chi}(t, \xi)) \quad (4.37)$$

Pour rendre (4.37) définie négative, nous choisissons τ_r telle que :

$$\tau_r = -k_4 \tilde{u} + \dot{\chi}(t, \xi), \quad k_4 > 0 \quad (4.38)$$

Ce qui donne l'expression suivante :

$$\dot{V}_3 = -k_3 \xi_3^2 - k_2 \varpi_2^2 - k_4 \tilde{u}^2 \leq 0 \quad (4.39)$$

Nous pouvons ainsi résumer la construction de la loi de commande pour le sous-système $\dot{\xi} = a(\xi, u)$ dans le théorème suivant

Théorème 3.1 *Considérons le système (4.20). Si les lois de commandes τ_α et τ_r sont choisies telles que*

$$\tau_\alpha = \begin{cases} \tau_\alpha^* & \text{si } \xi_1(0) = 0 \\ k_1 \xi_3 \xi_1 - k_3 (\varpi_2 + \Psi_1) - k_2 \varpi_2 + k_3 \frac{\xi_3}{\xi_1} & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall t, t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.40)$$

$$\tau_r = \begin{cases} \tau_r^* & \text{si } \xi_1(0) = 0 \\ -k_4 u_1 + k_4 \chi(t, \xi) + \dot{\chi}(t, \xi) & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall t, t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.41)$$

où $t_1 > t_0$, $\tau_\alpha^* \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\tau_r^* \in \mathbb{R} - \{0\}$ sont deux constantes, alors les états $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top$ et la commande u_1 convergent vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$ pour toute condition initiale $\xi_1(t_0)$

Démonstration En utilisant le Lemme de Barbalat appliqué à (4.39), nous montrons que $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, u_1)^\top$ est borné et converge vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$. De plus à partir de (4.39), nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &\leq -2 \min\{k_3, k_2, k_4\} V_3(t) \\ V_3(t) &\leq V_3(t_0) e^{-\sigma(t-t_0)} \end{aligned} \quad (4.42)$$

avec $\sigma = 2 \min\{k_3, k_2, k_4\}$, ce qui implique que le vecteur d'état $(\xi^\top, u_1)^\top$ converge exponentiellement vers zéro quand $t \rightarrow \infty$ selon la loi suivante

$$\|(\xi(t), u_1(t))\| \leq \|(\xi(t_0), u_1(t_0))\| e^{-\frac{1}{2}\sigma(t-t_0)}, \quad \forall \xi_1(t) \neq 0 \quad (4.43)$$

Reste maintenant à traiter le cas où la variable d'état $\xi_1(t_0) = 0$. Dans ce cas la commande (4.32) ne peut plus être utilisée car celle-ci divergera à l'infinie. L'idéal serait de faire éloigner l'état ξ du point singulier $(\xi_1(t_0), \xi_2(t_0), \xi_3(t_0))^\top = (0, \xi_2^*, \xi_3^*)^\top$ de façon à ce que $\xi(t_0) \in \Omega$. Physiquement cela s'interprète par un changement de conditions initiales du bateau. Nous appliquons, à cet effet, une propulsion τ_α^* et τ_r^* pendant un temps t_1 faisant de sorte que le bateau se déplace à une position $\xi = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)^\top \neq (0, \xi_2^*, \xi_3^*)^\top$, une fois que le bateau se trouve éloigné du point singulier, nous appliquons de nouveau la commande (4.31) et (4.32) et le bateau se stabilise à l'origine. \square

Corollaire 3.1 Avec la convergence exponentielle du sous-système ξ et ayant vérifié les conditions des propositions 3.1 et 3.2, alors $(z_1, v, Z_2, z_3, \alpha, r)^\top$ convergent vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$.

Discussion Malgré la simplicité de la commande (4.40) et (4.41) en termes d'implémentation et d'exécution numérique, celle-ci n'est pas robuste vis-à-vis des perturbations. En effet, nous pouvons rencontrer des situations où l'angle d'orientation du bateau $\psi(t)$, est perturbé $\delta(t)$. Dans ce cas nous aurons $\xi_1^{pert}(t) = \xi_1(t) + \delta(t)$. Il peut exister un temps $T \geq t_0 \geq 0$ tels que $\xi_1(T) = -\delta(T)$. Dans ce cas, la commande (4.32) diverge vers l'infinie et peut causer la destruction du moteur propulseur. L'une des solutions pour éviter ce problème est d'utiliser un prédicteur empêchant que $\xi_1^{pert}(T)$ soit égale à zéro. Cette solution n'est cependant pas facile à mettre en oeuvre. Dans le paragraphe suivant, nous proposons une solution robuste faisant usage d'une loi de commande variant dans le temps.

4.2.3 Commande variant dans le temps

Dans ce paragraphe, nous proposons une solution globale à la stabilisation du sous-système décrit par (4.20), qui représente une méthode basée sur une combinaison entre la technique du backstepping et une commande variant dans le temps. Rappelons que dans la technique précédente, nous avons eu recours à une division par l'état ψ dans la construction de la commande en utilisant le backstepping. Dans la présente technique nous allons éviter cette division en définissant une fonction $\phi(u_1)$ lisse de classe \mathcal{C}^∞ comme suit

$$\phi(u_1) = u_1^{2l+1} \quad (4.44)$$

avec l un nombre supérieur ou égal à 1. Puisque (4.20) est de dimension 3 avec intégrateur, nous utiliserons quatre étapes du backstepping pour la détermination de la loi de commande.

Étape 1 : Considérons les sous-systèmes ξ_3 et ξ_2 de (4.20), i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_3 &= \xi_2 u_1 \\ \dot{\xi}_2 &= u_2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

où u_2 est considérée comme la commande de (4.45), alors que u_1 est une fonction lisse dépendant du temps. Considérons les variables suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_3 \\ x_2 &= \xi_2 - \varpi \end{aligned} \quad (4.46)$$

avec ϖ une fonction stabilisante que nous allons déterminer. Soit alors la fonction Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$, sa dérivé le long des trajectoires (4.45) est :

$$\dot{V}_1 = x_1 u_1 (\varpi + x_2) \quad (4.47)$$

Choisissons comme fonction stabilisante ϖ

$$\varpi = -c_1 x_1 \phi(u_1), \quad c_1 > 0 \quad (4.48)$$

L'équation (4.47) devient alors :

$$\dot{V}_1 = -c_1 x_1^2 u_1^{2l+2} + x_1 x_2 u_1 \quad (4.49)$$

En vertu de (4.46) et (4.48) la dynamique de x_1 s'écrit comme suit

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 u_1^{2l+2} + x_2 u_1 \quad (4.50)$$

Notons que pour une valeur arbitraire de $u_1(t)$ nous aurons $\varpi = 0$ si $x_1 = \xi_3 = 0$.

Étape 2 : La dérivée par rapport au temps de la deuxième équation de (4.46) est donnée par

$$\dot{x}_2 = u_2 - \varpi^{x_1}(x_1, u_1)(x_2 + \varpi)u_1 - \varpi^{\mu_1}(x_1, u_1)\dot{\phi}(u_1) \quad (4.51)$$

avec $\mu_1 = \phi(u_1)$. Soit la fonction de Lyapunov $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}x_2^2$. Sa dérivée le long des trajectoires de (4.46) est donnée par

$$\dot{V}_2 = -c_1x_1^2u_1^{2l+2} + x_1x_2u_1 + x_2(u_2 - \varpi^{x_1}(x_1, u_1)(x_2 + \varpi)u_1 - \varpi^{\mu_1}(x_1, u_1)\dot{\phi}(u_1)) \quad (4.52)$$

A cette étape nous choisissons l'expression de la commande u_2 comme suit :

$$u_2 = -c_2x_2 - x_1u_1 + \varpi^{x_1}(x_1, u_1)(x_2 + \varpi)u_1 + \varpi^{\mu_1}(x_1, u_1)\dot{\phi}(u_1), \quad c_2 > 0 \quad (4.53)$$

L'équation (4.52) devient :

$$\dot{V}_2 = -c_1x_1^2u_1^{2l+2} - c_2x_2^2 \quad (4.54)$$

Dans le nouveau système de coordonnées $x = (x_1, x_2)$, le sous-système (4.46) en boucle fermée est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -c_1x_1u_1^{2l+2} + x_2u_1 \\ \dot{x}_2 &= -c_2x_2 - x_1u_1 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Remarque 3.1 *La dérivée de la fonction de Lyapunov (4.54) est négative, s'il existe une fonction $u_1(t)$ lisse et continue de la variable t .*

Étape 3 : Comme nous venons de mentionner dans la remarque 3.1, les étapes précédentes du backstepping n'imposent aucune condition sur $u_1(t)$ sauf peut être qu'elle soit lisse en fonction du temps t . Afin d'obtenir la convergence et la bornitude de l'état ξ de l'équation (4.45), nous faisons en sorte que u_1 soit la sortie du système (variant dans le temps) suivant :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= a_0\xi_1 + a_1y_1 + a_2y_2 + \gamma(z_1, z_2)\delta(t) \\ u_1 &= y_1 \\ &:= \chi(y, t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$a_i, i = 0 \dots 2$ sont des constantes telles que le polynôme $s^3 - a_2s^2 - a_1s - a_0$ est de Hurwitz, γ est une fonction telle que " $\gamma(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$ ". Nous choisissons $\gamma(x_1, x_2)$ égale à $\tanh(x_1^2 + x_2^2)$, $\delta(t)$ est une fonction bornée et périodique que l'on peut choisir comme $\delta(t) = \sin t$.

Proposition 3.3 : *Le point d'équilibre $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ et $y_1 = y_2 = 0$ du système variant dans le temps construit par (4.45) et (4.56) est globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS).*

Démonstration Le système composé de $\dot{\xi}_1 = u_1$ et (4.56) peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{y} = Ay + h(t, x_1, x_2) \quad (4.57)$$

$$\text{avec } y = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(x_1, x_2)\delta(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que le système (4.57) est **GUAS**, nous devons tout d'abord montrer la bornitude uniforme globale puis l'attractivité uniforme de la solution.

1. **Bornitude uniforme globale :** Pour montrer la bornitude de $y(t)$, nous utilisons la fonction de Lyapunov $V(y) = y^\top Py$, avec P une matrice symétrique définie positive et satisfaisant $PA + A^\top P = -I$. La dérivée de $V(y)$ par rapport au temps satisfait l'inégalité :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\|y\|^2 + 2y^\top Ph \\ &\leq -\|y\|^2 + \frac{|h|}{\sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}} \|y\| \end{aligned}$$

Puisque $\gamma(x_1, x_2) = \tanh(x_1^2 + x_2^2)$, nous avons

$$|\gamma(x_1, x_2)\delta(t)| < 1$$

et par conséquent, il existe θ tel que :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\|y\|^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}} \|y\| \\ &\leq -(1 - \theta)\|y\|^2 - \theta\|y\|^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}} \|y\|; \quad 0 < \theta < 1 \\ &\leq -(1 - \theta)\|y\|^2, \quad \forall \|y\| \geq \zeta \end{aligned}$$

avec $\zeta = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}}$. Puisque

$$\lambda_{\min}(P)\|y\|^2 \leq V(y) \leq \lambda_{\max}(P)\|y\|^2,$$

alors

$$\dot{V} \leq -\frac{1 - \theta}{\lambda_{\max}(P)} V, \quad \forall \|y\| \geq \zeta$$

et par conséquent nous en déduisons que

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp\left[-\frac{1-\theta}{2\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)\right] \|y(t_0)\|, \quad \forall \|y\| \geq \zeta$$

Définissons $\beta = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}}\zeta$, soit Ψ_β l'ensemble défini par

$$\Psi_\beta = \{y \in \mathbb{R}^3 : V(y) \leq \lambda_{\min}(P)\beta^2\}$$

L'ensemble Ψ_β contient la boule $\mathcal{B}_\zeta(0) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\| \leq \zeta\}$ puisque

$$\begin{aligned} \|y\| \leq \zeta &= \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}}\beta \Rightarrow \lambda_{\max}(P)\|y\|^2 \leq \\ &\Rightarrow V(y) \leq \lambda_{\min}(P)\beta^2 \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que toute solution de Ψ_β reste dans cet ensemble, d'où pour tout $t \geq t_0$ nous avons

$$\|y(t)\| \leq \beta$$

En vertu de (4.54), il existe une constante ϵ indépendante de t_0 tels que $x_1^2(t) + x_2^2(t) \leq x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) \leq \epsilon$, et par conséquent nous montrons la bornitude globale et uniforme de $\xi(t)$ et $y(t)$.

2. **Attractivité uniforme et globale** : Pour montrer l'attractivité de la solution, nous utilisons le principe des invariants de LaSalle (Khalil, 1996). Considérons le terme $\delta(t) = \sin t$ dans (4.57) comme le premier élément de l'équation différentielle suivante

$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \zeta, \quad \zeta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\zeta = [\delta(t), \dot{\delta}(t)]^\top$. Considérons maintenant le système autonome en cascade suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -c_1 x_1 u_1^{2l+2} + x_2 u_1 \\ \dot{x}_2 &= -c_2 x_2 - x_1 u_1 \\ \dot{y} &= Ay + h(t, x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \zeta \\ \dot{\zeta} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \zeta \end{aligned} \tag{4.58}$$

En appliquant le théorème de LaSalle, toute trajectoire $(x_1(t), x_2(t), y(t), \zeta(t))$ tend vers le plus grand sous-ensemble invariant $M \subset E$, où E est l'ensemble de tous les points vérifiant $\dot{V}_2 = 0$. E est donné par

$$E = E_1 \cup E_2 \tag{4.59}$$

avec

$$E_1 = \{(x_1(t), x_2(t), y(t), \zeta(t)) \in \mathbb{R}^7 \mid u_1 = x_2 = 0\} \quad (4.60)$$

et

$$E_2 = \{(x_1(t), x_2(t), y(t), \zeta(t)) \in \mathbb{R}^7 \mid x_1 = x_2 = 0\} \quad (4.61)$$

Nous pouvons à cet effet, prouver la convergence de x_1 et x_2 de deux façons : d'une part en montrant que E_2 est le plus grand sous-ensemble de E et d'autre part quand $\gamma(x_1, x_2) = 0$, et par conséquent, en vertu de l'équation (4.57), $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, et enfin l'état $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top$ tend vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$.

Il est donc clair que E_2 est le plus grand sous-ensemble invariant de E . Si ce n'est pas vrai, alors il existe des trajectoires $(x_1(t), x_2(t), y(t), \zeta(t)) \in E$ pour tout $t \geq 0$ et un intervalle non-vide \mathcal{I} tel que $(x_1(t), x_2(t)) \neq (0, 0)$ pour tout $t \in \mathcal{I}$. Ceci implique que $u_1(t) = 0$ pour tout $t \in \mathcal{I}$. A partir des équations (4.55), nous pouvons remarquer que x_1 et x_2 sont des constantes sur \mathcal{I} puisque leurs dérivées sont nulles. De plus en se référant à l'équation (4.56), nous vérifions que pour tout $t \in \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= 0 \\ 0 &= a_0 \xi_1 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \gamma(x_1, x_2) \delta(t) \end{aligned} \quad (4.62)$$

qui mène à une contradiction entre (4.62) et la propriété qui affirme que $\gamma(x_1, x_2) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$. \square

Étape 4 : Commande τ_r Puisque u_1 est une commande virtuelle qui ne peut pas être utilisée sur le système (4.45). A cet effet nous définissons la nouvelle variable

$$\tilde{u} = u_1 - \chi(t, y) \quad (4.63)$$

Soit, la fonction de Lyapunov $V_3 = V_1 + 0.5\tilde{u}^2$. A partir de l'équation (4.45), la dérivée de la fonction de Lyapunov V_3 s'écrit comme suit :

$$\dot{V}_3 = -c_1 x_1^2 u_1^{2l+2} - c_2 x_2^2 + \tilde{u}(\tau_r - \dot{\chi}(t, y)) \quad (4.64)$$

Pour rendre (4.64) définie négative, il suffit de choisir τ_r telle que

$$\tau_r = -c_3 \tilde{u} + \dot{\chi}(t, y), \quad c_3 > 0 \quad (4.65)$$

Ce qui donne

$$\dot{V}_3 = -c_1 x_1^2 u_1^{2l+2} - c_2 x_2^2 - c_3 \tilde{u}^2 \quad (4.66)$$

Nous pouvons, ainsi, résumer la construction de la loi de commande pour le sous-système $\dot{\xi} = a(\xi, u)$ par le théorème suivant

Théorème 3.2 (?) *Le système (4.20) est **GUAS** autour du point d'équilibre $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, u_1) = (0, 0, 0, 0)$ lorsque les lois de commandes τ_α et τ_r sont exprimées par :*

$$\tau_\alpha = -c_2\xi_2 - (c_2c_1\phi(u_1) + u_1)\xi_3 + \frac{\partial^{\xi_3}\varpi}{\partial\xi_3}\xi_2u_1 + \frac{\partial\varpi}{\partial\mu_1}\dot{\phi}(u_1) \quad (4.67)$$

$$\tau_r = -c_3u_1 + c_3\chi(t, y) + \dot{\chi}(t, y) \quad (4.68)$$

Démonstration Posons l'état $x = (x_1u_1, x_2, \tilde{u})^\top$. A partir de l'équation (4.66), nous pouvons écrire que

$$\dot{V}_3 \leq -\min\{c_1, c_2, c_3\} \|x\|^2$$

en utilisant le théorème de LaSalle-Yoshizawa (Khalil, 1996), le point d'équilibre $x = 0$ est alors **GUAS**. En vertu de la Proposition 3.3 $\chi(t, y) = y_1 = 0$ et ξ sont **GUAS** et par conséquent l'origine $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, u_1)$ est également **GUAS**. \square

Corollaire 3.2 *La convergence uniforme et globalement asymptotique du sous-système ξ et au vu des propositions 3.1 et 3.2, l'ensemble du vecteur $(z_1, v, Z_2, z_3, \alpha, r)^\top$ converge globalement et uniformément asymptotiquement vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$.*

4.3 Poursuite de trajectoires pour le modèle sous-actionné du bateau

Dans ce paragraphe nous présentons une technique simple pour le contrôle du modèle sous-actionné du bateau en vue du suivi de trajectoires. L'idée de base est de considérer le système comme constitué de plusieurs sous-systèmes plus simples inter-connectés en cascade. L'analyse de stabilité s'appuie alors sur la théorie des cascades. Le problème de suivi de trajectoires consiste à considérer un bateau fictif de référence de même caractéristique que le bateau réel, avec l'état $[\eta_d, \nu_d]^\top$, doit être suivi par le bateau réel (voir figure 4.2). Si nous considérons les mêmes transformations appliquées au bateau

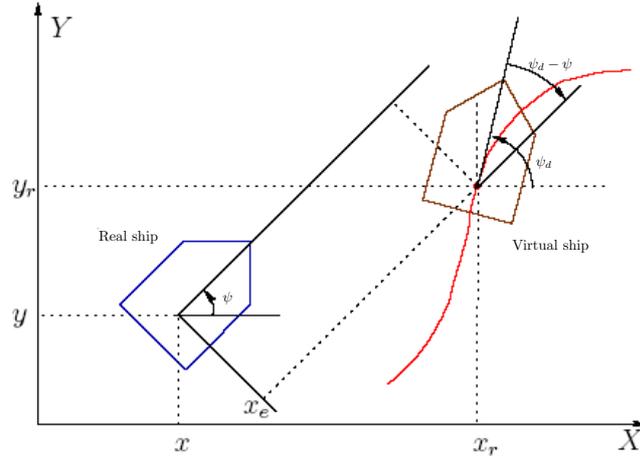


FIG. 4.2 – Bateau sous-actionné : problème de poursuite de trajectoires.

réel (4.14), la trajectoire désirée est générée par le modèle :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{1d} &= -\frac{B}{A}z_{1d} - \frac{B}{A}\alpha_d + \left(Z_{2d} - \frac{v_d}{B}\right)r_d \\
 \dot{v}_d &= -Bv_d + B(z_{1d} + \alpha_d)r_d \\
 \dot{Z}_{2d} &= \alpha_d r_d \\
 \dot{z}_{3d} &= r_d \\
 \dot{\alpha}_d &= \tau_{\alpha_d} \\
 \dot{r}_d &= \tau_{r_d}
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Nous supposons que les signaux de références $(x_d, y_d, u_d, v_d, r_d)$ et (τ_{1d}, τ_{2d}) sont bornés sur l'intervall $[0, \infty)$. Afin de simplifier l'écriture du modèle de poursuite, nous définissons les variables d'erreurs suivantes

$$\begin{aligned}
 e_1 &= z_1 - z_{1d} & e_2 &= v - v_d & e_3 &= Z_2 - Z_{2d} \\
 e_4 &= z_3 - z_{3d} & e_5 &= \alpha - \alpha_d & e_6 &= r - r_d
 \end{aligned}$$

L'équation dynamique des erreurs s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
 \Sigma'_1 : & \begin{cases} \dot{e}_1 = -\frac{B}{A}e_1 - \frac{B}{A}e_5 + (e_3e_6 + r_de_3 - Z_{2d}e_6) \\ \quad -\frac{1}{B}(e_2e_6 + r_de_2 - v_de_6) \\ \dot{e}_2 = -Be_2 + B(e_5e_6 + r_de_5 + \alpha_de_6) \\ \quad + e_1e_6 + r_de_1 - z_{1d}e_6 \end{cases} \\
 \Sigma'_2 : & \begin{cases} \dot{e}_3 = e_5e_6 + r_de_5 + \alpha_de_6 \\ \dot{e}_4 = e_6 \\ \dot{e}_5 = \tau_\alpha - \tau_{\alpha_d} \\ \dot{e}_6 = \tau_r - \tau_{r_d} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Le problème de poursuite est par conséquent transformé en un problème de stabilisation du modèle d'erreur (4.70) autour de zéro.

Proposition 3.4 *Les états du sous-système \sum'_1 sont bornés et exponentiellement convergent si et seulement si les états de \sum'_2 sont bornés et exponentiellement convergent.*

Démonstration Pour le sous-système \sum'_1 , considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_1 = 0.5e^\top \Xi e \quad (4.71)$$

avec $e = (e_1, e_2)^\top$ et $\Xi = \text{diag}(B, \frac{1}{B})$. La dérivée de la fonction (4.71) le long des solutions de \sum'_1 est

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= B e_1 \dot{e}_1 + \frac{1}{B} e_2 \dot{e}_2 \\ &= -\frac{B^2}{A} e_1^2 - e_2^2 - \frac{B^2}{A} e_1 e_5 + B e_1 (e_3 e_6 + r_d e_3 - Z_{2d} e_6) \\ &\quad - e_1 e_2 e_6 - e_1 e_2 r_d + v_d e_6 e_1 + e_2 e_5 e_6 + e_2 r_d e_5 \\ &\quad + \alpha_d e_2 e_6 + e_2 e_1 e_6 + r_d e_1 e_2 - z_{1d} e_2 e_6 \end{aligned} \quad (4.72)$$

Puisque $(x_d, y_d, u_d, v_d, r_d)$ et (τ_{1d}, τ_{2d}) sont bornés, alors les variables $(z_{1d}, Z_{2d}, \alpha_d)$ sont également bornés. D'où

$$\dot{V}_1 \leq -a_1 V_1 + a_2(t) \sqrt{V_1} \quad (4.73)$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \min\left\{B, \frac{B}{A}\right\} \\ a_2(t) &= \sqrt{2B} \left(\left| \frac{B^2}{A} e_5 \right| + \left| B e_3 e_6 \right| + \left| B r_d e_3 \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| B Z_{2d} e_6 \right| + \left| v_d e_6 \right| + \left| \alpha_d e_6 \right| + \left| e_6 e_5 \right| \right) \end{aligned}$$

Il faut noter que si l'on suppose que les états du sous-système \sum'_2 sont bornés et exponentiellement convergent alors $a_2(t)$ l'est aussi. Soit le changement de variable $\varphi(t) = \sqrt{V_1}$, sachant que $\dot{\varphi} = \frac{\dot{V}_1}{2\sqrt{V_1}}$ alors si $V_1 \neq 0$, nous avons la relation suivante

$$\dot{\varphi} \leq -\frac{a_1}{2} \varphi + \frac{1}{2} a_2(t) \quad (4.74)$$

Quand $V_1 = 0$, nous montrons que (Voir appendice B.3) la dérivée à droite $D^+ \varphi$ satisfait $D^+ \varphi \leq \frac{a_2(t)}{2\sqrt{2}}$ et par conséquent l'inégalité (4.74) est satisfaite pour toute valeur de V_1 .

En appliquant le Lemme de comparaison (Khalil, 1996), φ satisfait

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0)e^{-\frac{a_1}{2}(t-t_0)} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{-\frac{a_1}{2}(t-\theta)} |a_2(\theta)| d\theta \quad (4.75)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \| e_1(t) \| \\ \| e_2(t) \| \end{array} \right) &\leq \left(\begin{array}{c} \| e_1(t_0) \| \\ \| e_2(t_0) \| \end{array} \right) e^{-\frac{a_1}{2}(t-t_0)} + \frac{1}{2\sqrt{a_1}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{a_1}{2}(t-\theta)} |a_2(\theta)| d\theta \\ &\leq \left(\begin{array}{c} \| e_1(t_0) \| \\ \| e_2(t_0) \| \end{array} \right) e^{-\frac{a_1}{2}(t-t_0)} + \frac{1}{\sqrt[3]{a_1}} [1 - e^{-\frac{a_1}{2}(t-t_0)}] \sup_{t \geq t_0} |a_2(t)| \end{aligned} \quad (4.76)$$

Puisque $a_1 > 0$ et en supposant que $a_2(t)$ est bornée et converge exponentiellement vers zéro, et d'après la relation (4.76), il existe $\sigma_0 > 0$ et une fonction γ de classe- \mathcal{K} tels que

$$\left(\begin{array}{c} \| e_1(t) \| \\ \| e_2(t) \| \end{array} \right) \leq \gamma \left(\| e_{\Sigma_1'}(t_0), e_{\Sigma_2'}(t_0) \| \right) e^{-\sigma_0(t-t_0)} \quad (4.77)$$

avec $e_{\Sigma_1'} = (e_1, e_2)^\top$ et $e_{\Sigma_2'} = (e_3, e_4, e_5, e_6)^\top$. \square

Remarque 3.2 Notons que d'après la Proposition 3.4, il suffit de choisir une loi de commande qui stabilise exponentiellement le sous-système Σ_2' . Une application de la technique du backstepping permet d'aboutir à ce critère.

4.3.1 Conception de la loi de commande

Définissons le changement de variables :

$$\begin{aligned} x_1 &= e_3 - \alpha e_4 & x_2 &= e_5 & x_3 &= e_4 \\ u_1 &= r & u_{1d} &= r_d & u_2 &= \tau_\alpha \\ u_{2d} &= \tau_{\alpha_d} & \tilde{u}_1 &= u_1 - u_{1d} & \tilde{u}_2 &= u_2 - u_{2d} \end{aligned}$$

Le sous-système Σ_2' peut être réécrit sous la forme triangulaire suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_{1d}x_2 - u_2x_3 \\ \dot{x}_2 &= \tilde{u}_2 \\ \dot{x}_3 &= \tilde{u}_1 \\ \dot{\tilde{u}}_1 &= \tau_r - \tau_{rd} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Comme dans la section 2.3, nous définissons une fonction lisse $\phi(u_{1d})$ comme suit

$$\phi(u_{1d}) = u_{1d}^{2l+1} \quad (4.79)$$

La technique du backstepping pourra être appliquée pour le sous-système (4.79) en 4 étapes :

Étape 1 : Commençons par le sous-système x_1 de (4.78)

$$\dot{x}_1 = u_{1d}x_2 - u_2x_3 \quad (4.80)$$

Nous considérons la variable x_2 comme une commande virtuelle servant à stabiliser x_1 . Les variables u_{1d} et x_3 sont des fonctions variantes dans le temps. Soit la fonction de Lyapunov suivante

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (4.81)$$

La dérivée de (4.81) le long des solutions de (4.78) satisfait :

$$\dot{V}_1 = u_{1d}x_1x_2 - x_1u_2x_3 \quad (4.82)$$

Observons quand $x_3 = 0$, pour $c_1 > 0$, $\varpi_1(x_1, \phi(u_{1d})) = -c_1\phi(u_{1d})x_1$ est une fonction stabilisante permettant de rendre (4.82) négative. Pour cela, introduisons la nouvelle variable

$$z = x_2 - \varpi_1(x_1, \phi(u_{1d})) \quad (4.83)$$

alors (4.82) devient :

$$\dot{V}_1 = -c_1u_{1d}\phi(u_{1d})x_1^2 + u_{1d}x_1z - x_1u_2x_3 \quad (4.84)$$

Étape 2 : La variable z est maintenant considérée comme une commande virtuelle. Soit la fonction de Lyapunov V_2 définie par

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z^2 \quad (4.85)$$

Sa dérivée satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -c_1u_{1d}\phi(u_{1d})x_1^2 + u_{1d}x_1z - x_1u_2x_3 \\ & + z \left[(u_2 - u_{2d}) - \varpi_1^\phi(x_1, \phi(u_{1d})) \frac{d\phi}{dt} - \varpi_1^{x_1}(x_1, \phi(u_{1d})) \frac{dx_1}{dt} \right] \end{aligned}$$

En choisissant la commande u_2 comme suit

$$u_2 = u_{2d} - u_{1d}x_1 - c_2z + \varpi_1^\phi(x_1, \phi(u_{1d})) \frac{d\phi(u_{1d})}{dt} + \varpi_1^{x_1}(x_1, \phi(u_{1d}))u_{1d}x_2 \quad (4.86)$$

avec $c_2 > 0$, nous obtenons l'expression pour \dot{V}_2 suivante

$$\dot{V}_2 = -c_1u_{1d}\phi(u_{1d})x_1^2 - c_2z^2 - \left[x_1 - z\varpi_1(x_1, \phi(u_{1d}))^{x_1} \right] u_2x_3 \quad (4.87)$$

Étape 3 : A ce stade, nous allons définir la fonction de Lyapunov V_3 pour les trois premières équations du système (4.78) comme suit

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}x_3^2 \quad (4.88)$$

En vertu de l'équation (4.88), la dérivée de V_3 donne

$$\dot{V}_3 = -c_1 u_{1d} \phi(u_{1d}) x_1^2 - c_2 z^2 + x_3(u_1 - u_{1d}) - \left[x_1 - z \varpi_1^{x_1}(x_1, \phi(u_{1d})) \right] u_2 x_3$$

En choisissant la command u_1 comme

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1d} + [-c_3 x_3 + (x_1 - z \varpi_1^{x_1}(x_1, \phi(u_{1d}))) u_2] \\ &= u_{1d} + \varpi_2(x_1, x_2, x_3, u_2, u_{1d}) \end{aligned} \quad (4.89)$$

avec $c_3 > 0$ et

$$\varpi_2 = [-c_3 x_3 + (x_1 - z \varpi_1^{x_1}(x_1, \phi(u_{1d}))) u_2]$$

nous obtenons l'expression suivante pour \dot{V}_3 :

$$\dot{V}_3 = -c_1 u_{1d} \phi(u_{1d}) x_1^2 - c_2 z^2 - c_3 x_3^2 \quad (4.90)$$

Étape 4 : Puisque la commande u_1 n'est pas la vraie commande pour le sous-système (4.78), nous introduisons la nouvelle variable u_{1e} comme suit

$$u_{1e} = \tilde{u}_1 - \varpi_2(x_1, x_2, x_3, u_2, u_{1d})$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov V_3 le long des solutions (4.78) devient

$$\dot{V}_3 = -c_1 u_{1d} \phi(u_{1d}) x_1^2 - c_2 z^2 - c_3 x_3^2 + x_3 u_{1e} \quad (4.91)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov V_4 définie par

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2} u_{1e}^2 \quad (4.92)$$

Sa dérivée le long des solutions de (4.78) donne :

$$\dot{V}_4 = -c_1 u_{1d} \phi(u_{1d}) x_1^2 - c_2 z^2 - c_3 x_3^2 + u_{1e}(x_3 + (\tau_r - \tau_{rd}) - \dot{\varpi}_2) \quad (4.93)$$

En choisissant la commande τ_r suivante :

$$\tau_r = \tau_{rd} - x_3 + \dot{\varpi}_2 - c_4 u_{1e}, \quad c_4 > 0 \quad (4.94)$$

Nous obtenons

$$\dot{V}_4 = -c_1 u_{1d} \phi(u_{1d}) x_1^2 - c_2 z^2 - c_3 x_3^2 - c_4 u_{1e}^2 \quad (4.95)$$

4.3.2 Analyse de stabilité

Dans ce paragraphe, nous énonçons notre résultat par rapport au problème de poursuite exponentielle de (4.78)

Proposition 3.5 (?), (?) *Le point d'équilibre (e_3, e_4, e_5, e_6) de la boucle fermée obtenue par (4.94), (4.86) et (4.78), est exponentiellement stable si la vitesse angulaire de référence satisfait la relation suivante*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf |r_d(t)| > 0 \quad (4.96)$$

Démonstration La condition sur la vitesse angulaire de référence r_d de (4.96), implique qu'il existe un temps fini $t^* \geq 0$ tel que $|r_d(t)| \geq \kappa$ et par suite $|u_{1d}| \geq \kappa$ pour tout $t \geq t^*$.

Soit

$$\beta = \min \{c_1 \kappa^{2k+2}, c_2, c_3, c_4\}$$

alors (4.95) implique

$$\dot{V}_4(t, x) \leq -2\beta V_4(t, x), \quad \forall t \geq t^* \quad (4.97)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall-Bellman (Khalil, 1996) à (4.97), nous obtenons la relation suivante

$$V_4(t, x(t)) \leq e^{-2\beta(t-t_0)} V_4(t_0, x(t_0)) \quad \forall t \geq t_0 \geq t^* \quad (4.98)$$

Par construction $V_4(t, x) = V_4(t, \pi(\theta_e))$, avec $\theta_e = (e_3, e_4, e_5, e_6)^\top$ est bornée par une fonction quadratique de la variable θ_e . Plus précisément, il existe deux constantes positive β_1, β_2 tels que

$$\beta_1 |\theta_e|^2 \leq V_4(t, \pi(\theta_e)) \leq \beta_2 |\theta_e|^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.99)$$

Ce qui implique que

$$|\theta_e| \leq \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} e^{-\beta(t-t_0)} |\theta_e(t_0)| \quad \forall t \geq t_0 \geq t^* \quad (4.100)$$

alors $\forall t \geq t_0 \geq 0$, nous obtenons la relation :

$$|\theta_e(t)| \leq \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} e^{\beta t^*} e^{-\beta(t-t_0)} |\theta_e(t_0)| \quad (4.101)$$

□

Corollaire 3.3 *En vertu de la proposition 3.4 et 3.5, nous pouvons conclure que le système formé par \sum_1' et \sum_2' est globalement exponentiellement stable pour tout $t \geq t^*$.*

4.4 Résultats de simulations

Dans ce paragraphe, nous considérons deux cas de simulations afin d'illustrer le comportement asymptotique du modèle sous-actionné du bateau autour de l'origine d'une part et en utilisant la loi de commande discontinue et la commande variante dans le temps. Nous illustrons à la fin notre proposition par une simulation montrant l'efficacité de la commande pour la poursuite de trajectoires du modèle sous-actionné.

La première partie de la simulation décrit une application de la loi de commande discontinue et une commande variant dans le temps développées respectivement en sections 4.2.2 et 4.2.3 pour stabiliser la bateau sous-actionné à l'origine. L'objectif est de stationner le véhicule marin sous-actionné à la position $(x, y) = 0$ avec une orientation $\psi = 0$. Après application du changement de coordonnées de la section 4.1, les paramètres de la commande (4.40,4.41) sont choisis tels que $k_1 = 10, k_2 = 5, k_3 = 5$ et $k_4 = 5$. Les conditions initiales sont comme suit $[x(0), y(0), \psi(0), u(0), v(0), r(0)]^\top = [-25.50, 15.64, \frac{\pi}{3}, 200, 0.1, -10.50]^\top$. La figure 4.3.a, montre la trajectoire effectuée par le bateau sous-actionné afin qu'il puisse stationner à la position $(x, y) = 0$ et $\psi = 0$. Les figures 4.3.b, 4.3.c et 4.3.d montrent respectivement l'évolution asymptotique des trois variables x, y et ψ vers zéro. La figure 4.4 montre la convergence des vitesses linéaires u et v et angulaire r vers zéro, ce qui traduit le stationnement statique du bateau au point d'équilibre $(x, y, \psi) = (0, 0, 0)$. Nous effectuons les simulations dans le cas où la commande variant dans le temps de la section 4.2.3. Nous avons changé les conditions initiales afin de diversifier le champ d'applications des deux commandes. Ainsi nous considérons les conditions initiales suivantes $[x(0), y(0), \psi(0), u(0), v(0), r(0)]^\top = [-24.75, -37, \frac{\pi}{3}, 3.65, 0, 0]^\top$. Les paramètres de la commande (4.67,4.68) sont tels que $c_1 = 10, c_2 = 10, c_3 = 15, a_0 = -2, a_1 = -7$ et $a_2 = -0.5$.

Comme pour la commande discontinue, nous traçons l'évolution de la trajectoire du bateau avant de se stabiliser à l'origine à la figure 4.5.a. Les figures 4.5.b,4.5.c et 4.5.d montrent la convergence des variables x, y et l'orientation ψ . Nous remarquons ainsi que la dynamique de l'orientation ψ est moins rapide que celle de la position (x, y) : elle se stabilise après certaines oscillations. Ceci est dû au fait que la commande τ_r (permettant la stabilisation de la dynamique r et donc de l'orientation ψ) est dépendante d'une fonction périodique du temps qui est la fonction $\sin t$. Ceci est visible à la figure

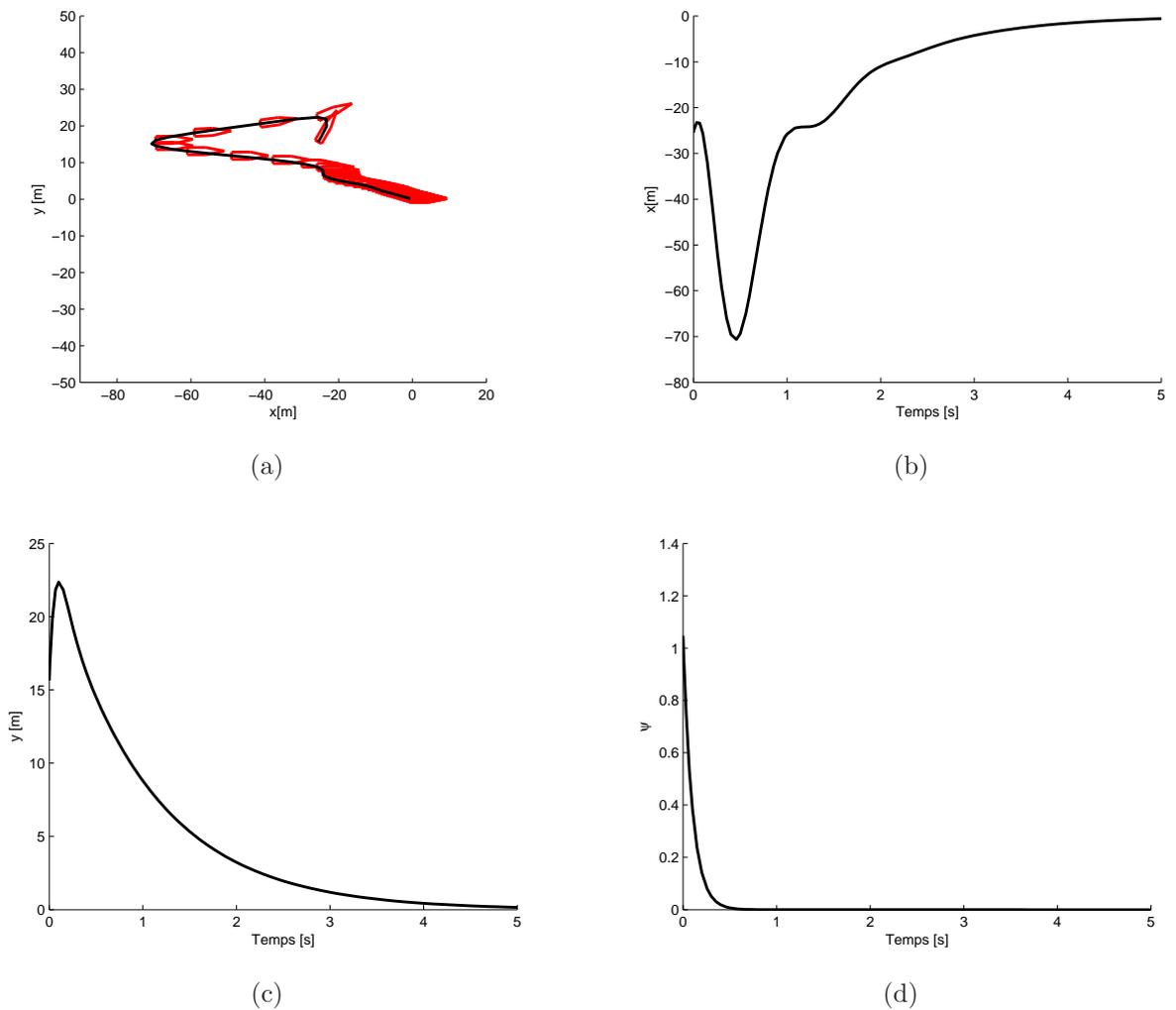


FIG. 4.3 – (a) Trajectoire du bateau dans le plan XY , (b,c-d) Convergence respective de x , y et ψ à l'origine

4.6 quant à la variation de la dynamique de la vitesse angulaire r .

La deuxième partie de la simulation décrit une application de la loi de commande (4.94), (4.86) pour la poursuite d'une trajectoire circulaire d'un bateau sous-actionné. Nous considérons les conditions initiales suivantes $[x(0)y(0)\psi(0)u(0)v(0)r(0)] = [8.7, 7.48, 0.5, 0.1, 0, 0]$. La trajectoire de référence circulaire est générée par le modèle (4.69), où nous avons considéré les conditions initiales pour le modèle de référence : $x_d = 0$, $y_d = 0$, $\psi_d = 0$ rad, $u_d(0) = 1ms^{-1}$, $v_d(0) = 1ms^{-1}$, $rd(0) = 0.5rads^{-1}$. Les gains des commandes (4.94), (4.86) sont choisis tels que $c_1 = 50$, $c_2 = 80$, $c_3 = 5$, $c_4 = 10$, $c_5 = 3$.

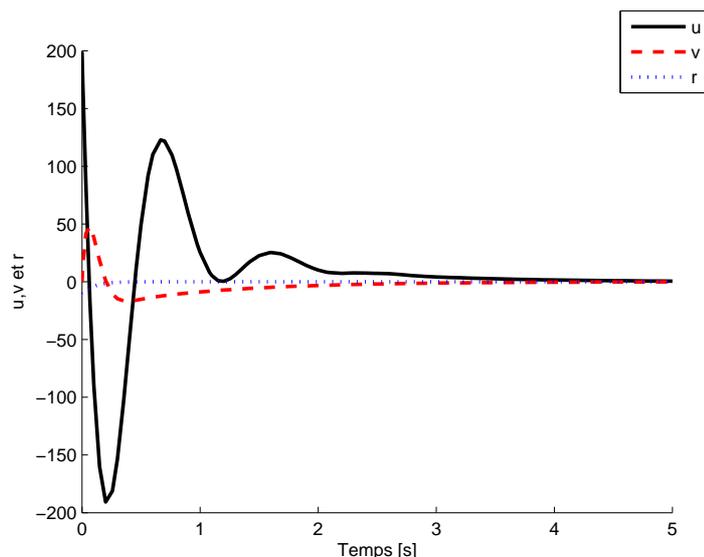


FIG. 4.4 – Convergence des vitesses linéaires et angulaire à zéro

La figure 4.7.a montre l'évolution de la position et l'orientation du bateau dans un plan XY . Ainsi, nous remarquons que le bateau sous-actionné poursuit parfaitement (exponentiellement) la trajectoire circulaire de référence. Les figures 4.7.b, 4.7.c et 4.7.d montrent la convergence exponentielle des vitesses linéaires et angulaires respectivement u , v et r vers leurs vitesses désirés.

4.5 Conclusion

Comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent, qu'un système sous-actionné ne satisfait pas les conditions de Brockett par conséquent il n'est pas possible de le contrôler via une commande continue lisse et invariante dans le temps. Nous avons, à cet effet, résolu le problème de la stabilisation d'un bateau sous-actionné par deux approches différentes. Notre approche repose sur une transformation permettant de décrire le modèle du bateau sous-actionné sous la forme d'une cascade de deux sous-systèmes, un sous-système que l'on appelle système gouverneur et l'autre sous-système gouverné. L'idée est d'assurer la stabilisation à l'origine du sous-système gouverneur. En obtenant cette stabilité et par l'application directe du théorème énoncé par (Pantley et Loria, 1998), nous pouvons conclure à la stabilité de tout le système en cascade. Le sous-système gouverneur est décrit par une structure de système chaîné. Pour le commander, nous avons proposé deux types de commandes, i.e. une commande discontinue et une commande variant dans le temps. Dans les deux types de commandes, nous

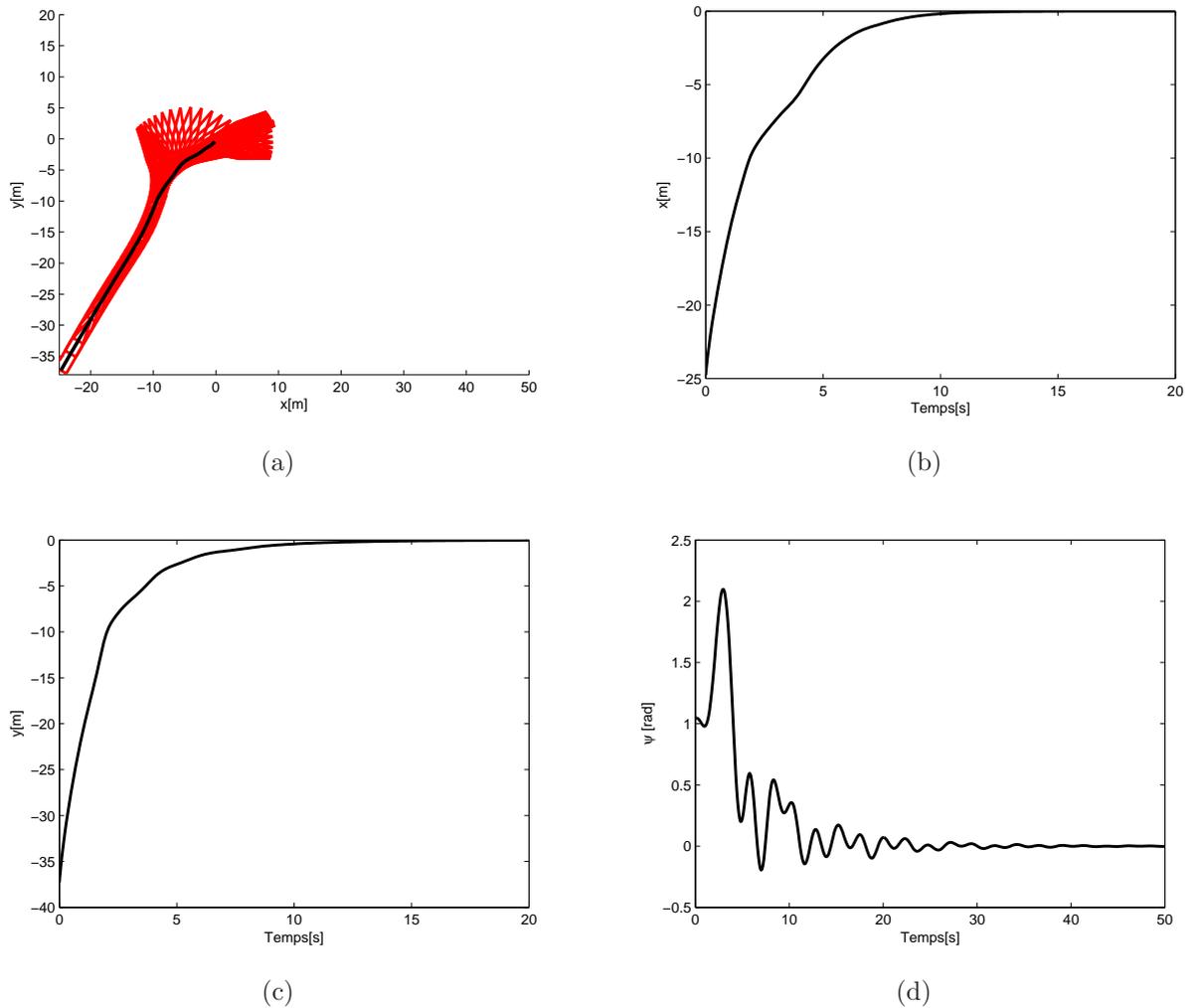


FIG. 4.5 – (a) Trajectoire du bateau dans le plan XY , (b,c-d) allures de x , y et ψ

avons réussi à obtenir un comportement asymptotique à l'origine.

La structure en cascade du système a permis d'étendre le principe de la stabilisation au concept de la poursuite de trajectoires, en faisant une restriction sur la nature de la vitesse angulaire de référence r_d . Ainsi, nous avons pu montrer la convergence exponentielle du bateau sous-actionné vers sa trajectoire désirée.

Cependant, il est certainement utile de généraliser cette étude, et de trouver une stratégie de commande pour la poursuite de trajectoire ou le suivi de chemin quand la connaissance du modèle du bateau sous-actionné est incertaine, dans ce cas l'approche des systèmes en cascades ne peuvent plus être utilisés à cause du fait que la structure cascade sera certainement détruite. Une résolution à ce problème est exposée dans le chapitre suivant où le problème de suivi de chemin est considéré.

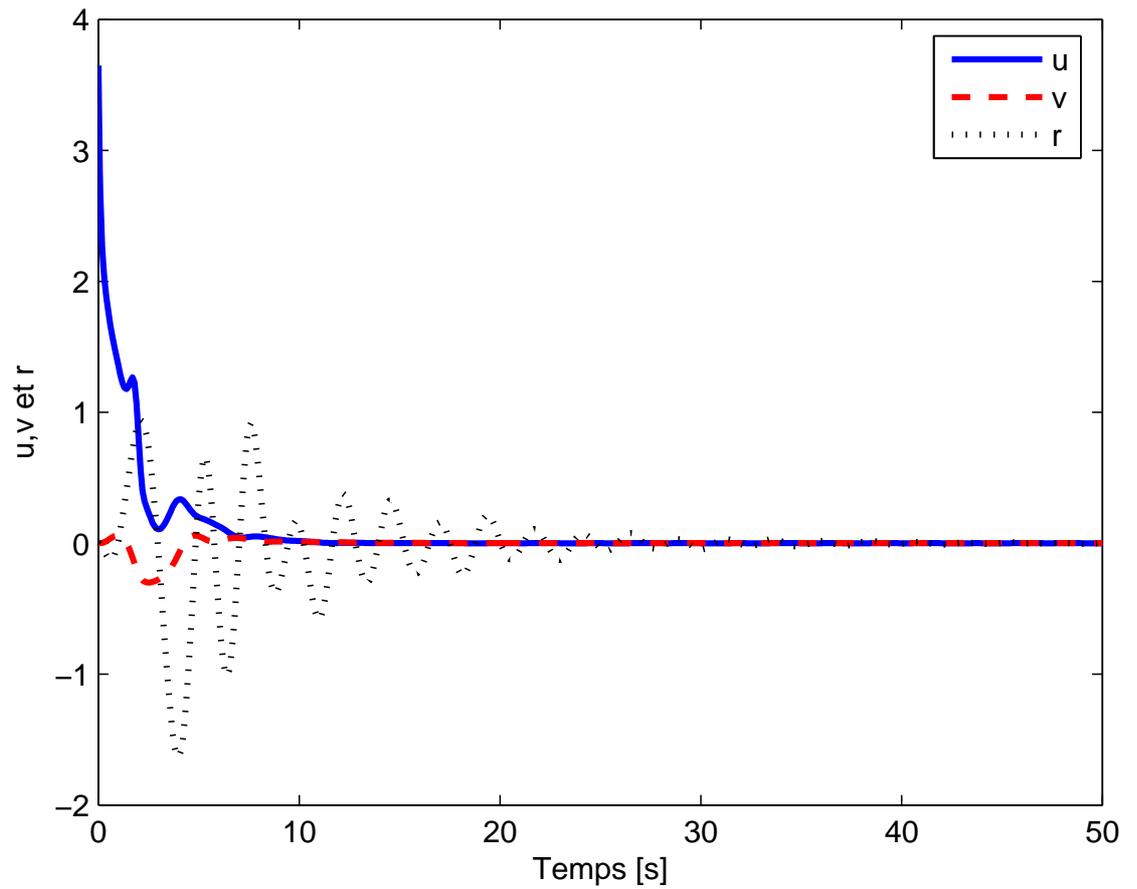


FIG. 4.6 – Allures des vitesses linéaires et angulaire à zéro

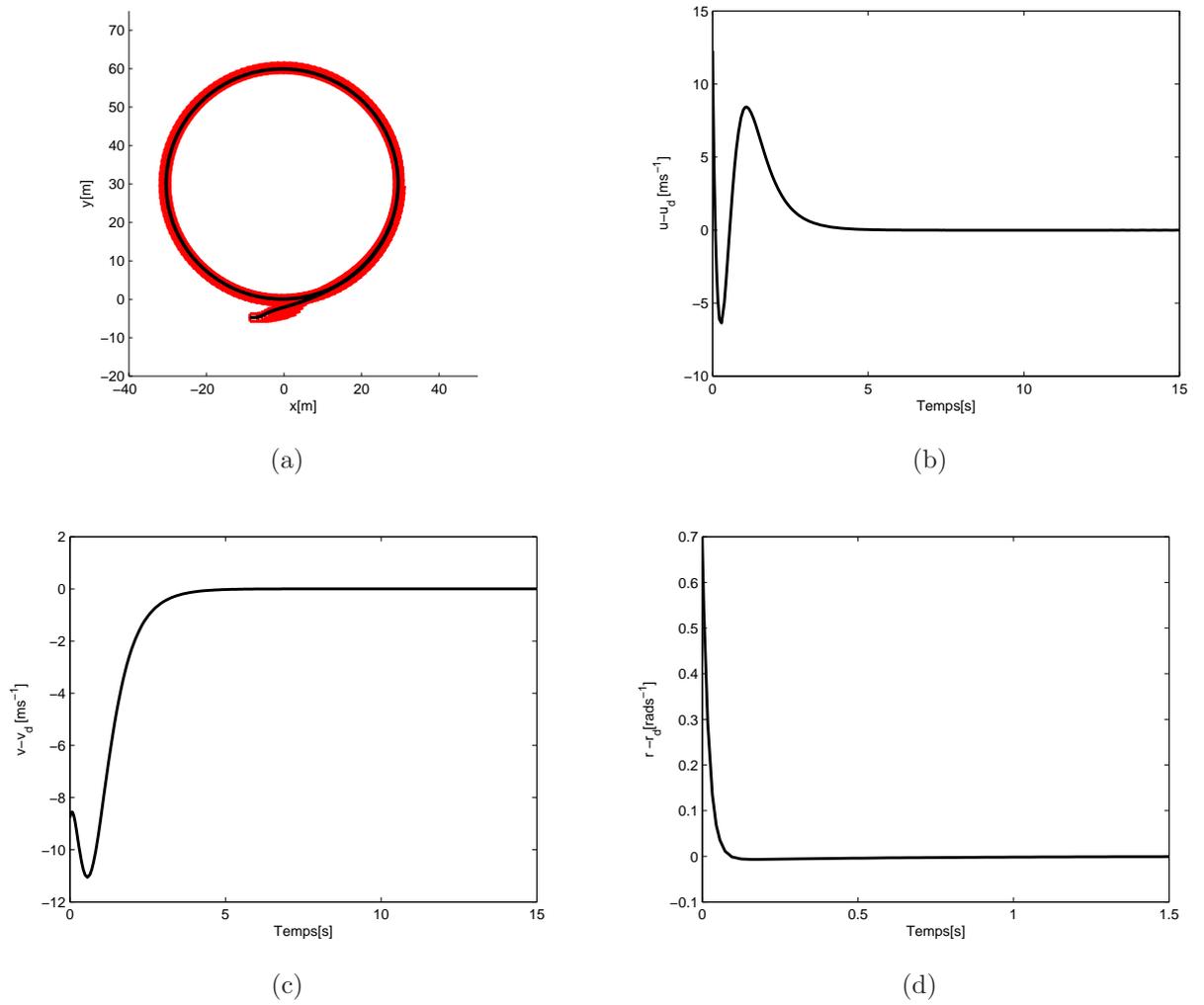


FIG. 4.7 – (a) Trajectoire du bateau dans le plan XY , (b,c-d) Allure de x, y et ψ

Deuxième partie

Applications au Suivi de Chemins

Chapitre 5

Différentes Approches pour le Suivi de Chemins des USV

Les problèmes de la poursuite de trajectoires (*trajectory tracking*) et le suivi de chemins (*path following*) des bateaux sous-actionnés ont eu un grand intérêt de la part de la communauté des automaticiens durant la dernière décennie. Le premier problème se rapporte au cas où le bateau doit suivre une trajectoire de référence produite par un véhicule virtuel comme nous l'avons détaillé dans le chapitre 4. Le second problème consiste à faire naviguer le bateau en suivant un chemin prédéfini, qui n'est pas nécessairement généré par un modèle virtuel donné. La difficulté principale d'application de ces deux méthodes de navigation provient du fait que seules le lacet et la montée sont actionnés alors que l'axe de glissement ne l'est pas. Cette configuration est la plus commune pour les véhicules marins.

Dans l'approche de la poursuite de trajectoires, le modèle de référence à suivre dépend principalement des paramètres physiques du bateau ; ce qui d'une part réduit considérablement la robustesse de la commande vis-à-vis des variations paramétriques et d'autre part complique la nature des lois de commande. Ceci a motivé les chercheurs à s'intéresser plutôt aux problèmes de suivi de chemins qui sont plus pratique en terme d'implémentation sur un système réel.

L'un des travaux de référence utilisé dans l'approche de suivi de chemins est celui de ([Samson, 1992](#)). L'auteur propose la stratégie de projeter la position actuelle d'un robot mobile sur le chemin désiré, en s'assurant qu'il existe toujours un véhicule virtuel sur la trajectoire tout prêt du véhicule réel. Ceci est réalisé en appliquant le principe du repère de Serret-Frennet (**SF**) qui n'est autre que le repère tangent au point de la projection du chemin. Le problème de suivi de chemins est par suite résolu dans

l'espace d'erreurs de la base (**SF**). Cependant, cette approche n'est pas tout à fait globale en terme de solutions. En effet, elle présente une singularité. Considérons une trajectoire paramétrée par une variable s . Pour tout point de la trajectoire, il existe un cercle de rayon $r(s) = 1/c(s)$ tangent associé à celui ci, avec $c(s)$ la courbure de la trajectoire. Si à un instant donné, le véhicule se trouve au centre de ce cercle, alors le point projeté orthogonal du véhicule sur la trajectoire se déplacera avec une vitesse infinie i.e. $c(s) = 0$. [Samson \(1992\)](#) a résolu ce problème en imposant au véhicule d'être toujours dans une région (tube) qui entoure la trajectoire de rayon inférieure au minimum des rayons des plus grandes courbures de la trajectoire. Une telle restriction fait que les résultats obtenus ne sont pas globaux du point de vue théorique. Un travail portant sur l'utilisation de la base Serret-Frennet pour le suivi de trajectoires sur les bateaux sous actionnés a été présenté dans la référence ([Do, 2004](#)) en imposant la même condition que celle de [Samson \(1992\)](#) pour les robots mobile.

Dans ce chapitre, nous présentons différentes approches pour le suivi de chemins des bateaux sous actionnés. La première approche consiste à améliorer l'approche de ([Samson, 1992](#)), au lieu de considérer une base SF attachée au point de projection sur le chemin qui est le plus proche du véhicule. Nous considérons que l'origine de la base SF évolue dynamiquement selon une fonction convenablement choisie, ce qui nous permet de surmonter la singularité trouvée dans l'approche adoptée par [Samson \(1992\)](#) et [Do \(2004\)](#). Notons que cette solution présente une limitation. En effet, afin de simplifier notre approche, nous avons considéré que la vitesse linéaire totale est constante. Mais, il est toujours possible de relaxer notre supposition dans le cas où la vitesse linéaire totale est dépendante du temps. La seconde approche suit pratiquement le même raisonnement que celui de la base de (**SF**) à la différence que le repère attaché au point de la trajectoire n'est pas tangent à ce chemin. De plus nous avons fait en sorte que la vitesse linéaire du bateau évolue en fonction du changement de la courbure de la trajectoire. Pour plus de détails le lecteur pourra consulter les références ([Ghommem et al., 2007e](#)) et ([Ghommem et al., 2007c](#)).

5.1 Paramétrisation d'un chemin

Dans le problème de navigation, le principal objectif est de faire converger le bateau à un chemin paramétré \mathcal{C} . Deux méthodes de paramétrisation d'un chemin sont possibles : Par paramétrage discret ou continu.

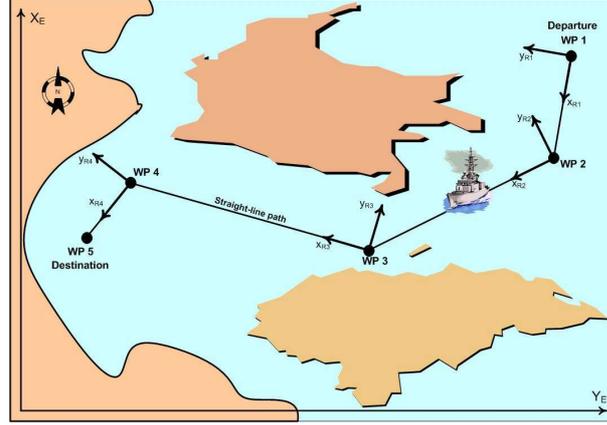


FIG. 5.1 – Un bateau navigue d'un point vers un autre en suivant une ligne droite

5.1.1 Paramétrisation discrète

Une paramétrisation discrète d'un chemin est définie comme suit. Soit $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices permettant d'identifier chaque segment $l_i, i \in \mathcal{I}$ du chemin (voir figure 5.1). A chaque segment l_i , nous désignons un repère local \mathcal{R}_i dont l'origine est placée au point p_i et l'axe x est dirigé vers le point p_{i+1} . Désignons par $e_1 = [1, 0]^\top, e_2 = [0, 1]^\top$ et ψ_i l'angle d'orientation du repère \mathcal{R}_i par rapport à un repère de référence \mathcal{E} , ce qui permet d'écrire :

$$\psi_i = \arctan \left(\frac{e_2^\top (p_{i+1} - p_i)}{e_1^\top (p_{i+1} - p_i)} \right)$$

Soit le vecteur position $p \in \mathcal{E}$. Exprimons le vecteur p dans chaque repère local \mathcal{R}_i . Ce qui permet d'écrire la relation suivante

$$\eta(p, i) = R(\psi_i)(p - p_i), \quad \text{et} \quad R(\psi_i) = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i \end{bmatrix}$$

Nous obtenons la relation du projeté de la position p sur le segment l_i par : $e_1^\top \eta(p, i)$, le module $|e_2^\top \eta(p, i)|$ représente la distance Euclidienne de p à l_i . Ainsi le chemin est défini par l'ensemble des points pour lesquels nous avons

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{R}^3, \quad \exists i \in \mathcal{I}, \text{ avec } |e_2^\top R(\psi_i)^\top (p - p_i)| = 0\}$$

5.1.2 Paramétrisation continue

Cette méthode, consiste à générer un chemin à partir d'un ensemble de $(n + 1)$ points, et à construire une courbe suffisamment différentiable permettant de relier les

différents *points* en utilisant les techniques d'interpolations polynômial et des splines.

Afin de construire le chemin désiré $p_d(\theta)$, nous subdivisons le chemin en n sous-chemins $p_{di}, i = 1, \dots, n$. Chaque sous-chemin est représenté par un polynôme $P(\theta)$ d'un certain degré. Puis, nous concaténons les expressions de chaque sous chemin pour en construire une expression générale pour le chemin global, afin d'assurer que le chemin construit est suffisamment différentiable en chaque *point*, les polynômes doivent avoir le plus haut degré.

Pour plus de clarté, considérons un chemin planaire $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices de sous-chemin de \mathcal{C} . Un point de \mathcal{C} a pour coordonnées $p_d = [x_d(\theta), y_d(\theta)]^\top$, $\theta \in [0, n]$. Soit $p_{di} = [x_{di}(\theta), y_{di}(\theta)]^\top$ avec $i \in \mathcal{I}$ un point se trouvant sur un sous-chemin i . Désignons par $p_i = [x_i, y_i]^\top$, $i \in \mathcal{I} \cup \{n+1\}$ les coordonnées d'un *point* du chemin. La condition de différentiabilité du chemin $p_d(\theta) \in C^r$, c'est à dire, la condition entre deux sous-chemins de \mathcal{C} doit satisfaire les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \nearrow i-1} x_{d,i-1}(\theta) &= \lim_{\theta \searrow i-1} x_{d,i}(\theta) & \lim_{\theta \nearrow i-1} y_{d,i-1}(\theta) &= \lim_{\theta \searrow i-1} y_{d,i}(\theta) \\ \lim_{\theta \nearrow i-1} x_{d,i-1}^\theta(\theta) &= \lim_{\theta \searrow i-1} x_{d,i}^\theta(\theta) & \lim_{\theta \nearrow i-1} y_{d,i-1}^\theta(\theta) &= \lim_{\theta \searrow i-1} y_{d,i}^\theta(\theta) \\ &\vdots & &\vdots \\ \lim_{\theta \nearrow i-1} x_{d,i-1}^{\theta^r}(\theta) &= \lim_{\theta \searrow i-1} x_{d,i}^{\theta^r}(\theta) & \lim_{\theta \nearrow i-1} y_{d,i-1}^{\theta^r}(\theta) &= \lim_{\theta \searrow i-1} y_{d,i}^{\theta^r}(\theta) \end{aligned}$$

pour $i \in \mathcal{I} - \{1\}$. Soit les polynômes d'ordres k suivants :

$$\begin{aligned} x_{d,i}(\theta) &= a_{k,i}\theta^k + \dots + a_{1,i}\theta + a_{0,i} \\ y_{d,i}(\theta) &= b_{k,i}\theta^k + \dots + b_{1,i}\theta + b_{0,i} \end{aligned}$$

avec $\{a_{ji}, b_{ji}\}$ sont des coefficients à déterminer. Pour chaque sous-chemin, il y a $2(k+1)$ inconnus, soit $2n(k+1)$ coefficients inconnus à déterminer pour la totalité du chemin. Plusieurs méthodes existent pour calculer ces coefficients. La plus pratique est de formuler le problème de recherche des coefficients inconnus à un problème algébrique linéaire à résoudre, e.g. $A\phi = b$, où $\phi = A^{-1}b$ est le vecteur de tous les coefficients inconnus. Cependant, cette méthode peut rencontrer un problème numérique quand le nombre de sous-chemins augmentent et qui se manifeste dans l'inversion de la matrice A .

Exemple 3.1 *Nous désirons tracer à partir de quatres points un chemin par la méthode présentée ci-dessus. Nous fixons les coordonnées de ces quatres points comme suit $(x_d(\theta), y_d(\theta)) = [(0, 0), (2, 2), (3, 3), (5, 2.5)]$ ce qui donne le chemin de la figure 5.2.*

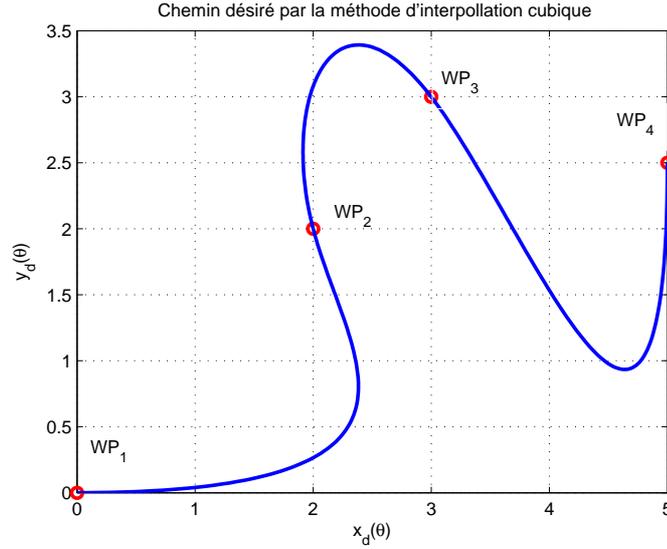


FIG. 5.2 – Interpolation cubique de quatre points

Dans la figure 5.2, nous remarquons que la solution entre deux *points* successifs est donnée par :

$$\begin{aligned} x_d(\theta) &= a_3\theta^3 + a_2\theta^2 + a_1\theta + a_0 \\ y_d(\theta) &= b_3\theta^3 + b_2\theta^2 + b_1\theta + b_0 \end{aligned}$$

cette solution est indépendante du temps. Le chemin peut en effet être transformé en une trajectoire qui varie en fonction du temps et cela en définissant un profil de vitesse $u_d(t)$ sur le chemin. Sachant que la vitesse d'un point sur le chemin pouvant être calculée par la formule suivante

$$|\dot{p}_d(\theta(t))| = \sqrt{x_d^\theta(\theta(t))^2 + y_d^\theta(\theta(t))^2} |\dot{\theta}| = |u_d(t)|$$

d'où la dynamique assignée au paramètre θ est

$$\dot{\theta} = \frac{u_d(t)}{\sqrt{x_d^\theta(\theta(t))^2 + y_d^\theta(\theta(t))^2}}$$

En choisissant $u_d(t) = 0$, ceci permettra à un objet en déplacement le long d'un chemin, de s'arrêter. Pour une valeur de $u_d(t) > 0$, l'objet se déplace dans la direction positive du chemin. Quand $u_d(t) < 0$, celui ci se déplace dans la direction négative du chemin.

En général, dans les problèmes de navigation (suivi de chemins), nous désirons avoir une certaine dynamique le long du chemin c'est à dire assigner une vitesse désirée au paramètre θ du chemin. Selon le type de commande utilisée et suivant la forme du

système à commander, la dynamique assigné $\dot{\theta}$ se déduit à partir de la conception de la loi de commande (c'est à dire : utiliser la variable $\dot{\theta}$ comme étant une commande intermédiaire dans la conception de la loi de commande). Afin d'illustrer ceci nous donnons un exemple d'un robot dessinateur que l'on désire commander afin qu'il puisse dessiner une forme géométrique représenté par un chemin $y_d = [\theta, \tanh(\theta)]^\top$.

Exemple 3.2 *Pour le robot manipulateur de la figure 5.3, (celui ci peut être un robot dessinateur ou robot de soudage), l'objectif de la commande de ce robot est de manoeuvrer son extrémité le long d'un chemin donné avec une certaine dynamique. Nous imposons à la vitesse de manoeuvre de ne pas dépasser une vitesse de 3ms^{-1}*



FIG. 5.3 – Robot Manipulateur Staubli de L'ENSI-Bourges

Afin de simplifier l'implémentation de la commande, supposons que l'on ne peut commander que deux degrés de libertés de ce robot. Le mouvement du robot est donc représenté par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \mathbf{M}\dot{x}_2 + \mathbf{D}(x_2)x_2 + \mathbf{K}(x_1)x_1 &= u \end{aligned}$$

avec $x = [x_1, x_2]^\top$ est le vecteur position/vitesse de son extrémité, $u \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur commande, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top > 0$ est la matrice d'inertie du robot, $\mathbf{D}(x_2) > 0$ est l'amortissement du système et $\mathbf{K}(x_1)$ est la raideur du système. Nous désirons que la position de

l'extrémité du robot $y = x_1$ suit un chemin défini par $y_d(\theta)$ avec une erreur inférieure à $10^{-3}m$. Pour ceci, nous appliquons la technique du backstepping, en définissant les variables suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_d(\theta) \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(x_1, y_d(\theta), y_d^\theta(\theta), \omega_\theta(\theta, t)) \\ \alpha_1 &= -K_1 z_1 + y_d^\theta(\theta) \omega_\theta(\theta, t) \end{aligned}$$

Les commandes employées dans la procédure du backstepping sont les suivants :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \dot{\theta} + \omega_\theta(\theta, t) \\ \ddot{\theta} &= \varepsilon_\theta \tanh(z_1^\top y_d^\theta(\theta) + z_2^\top \alpha_1^\theta(\theta)) \\ u &= -K_2 z_2 + \mathbf{K}(x_1)x_1 + \mathbf{D}(x_2)\alpha_1(\theta) \\ &\quad + \mathbf{M}(-z_1 + \alpha^t(\theta) + \alpha^\theta \omega_\theta(\theta, t) + \alpha^{x_1} x_2) \end{aligned}$$

Nous montrons alors par l'usage du lemme de Barbalat (*Khalil, 1996*) que $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta} = 0$. Par conséquent, la position de l'extrémité du robot converge vers le chemin désiré avec une dynamique $\dot{\theta} = \omega_\theta(\theta, t)$.

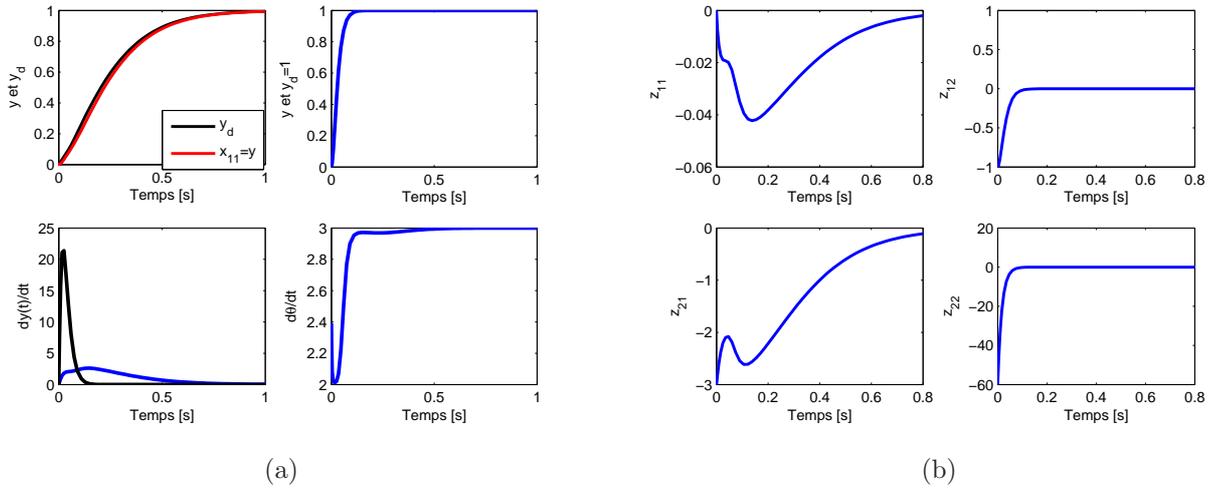


FIG. 5.4 – (a) x_1 : chemin parcouru, y_d chemin désiré, et les vitesses de parcours, (b) Les différentes erreurs : z_1 et z_2 .

L'approche que nous avons adoptée pour le suivi de chemins d'un robot manipulateur à deux degrés de libertés, suppose que l'on a un actionneur pour chaque direction (i.e. $\text{span}(u) = 2$), ce qui permet de faciliter le choix des variables d'erreurs utilisées dans la procédure de backstepping pour exprimer la position de l'extrémité du robot

relative au chemin. Certes, ce choix n'est pas global quand le système est sous-actionné (i.e. $\text{span}(u) < 3ddl$). Un changement de coordonnées s'avère important, afin de faciliter la détermination de la commande permettant au système d'une part de converger vers le chemin désiré et d'autre part de lui assigner une certaine dynamique de parcours. Dans (Fossen *et al.*, 2003) et (Breivik et Fossen, 2004), ce problème a été résolu pour les véhicules marins sous-actionnés en réduisant l'espace des degrés de liberté (i.e. de 3 ddl à 2 ddl), afin d'avoir $\text{span}(\tau) = 2ddl$. Dans ces travaux, le chemin à suivre est un ensemble de lignes droites reliées entre elles. L'approche adoptée est celle de l'algorithme de (Line of Sight LOS).

Afin de donner une flexibilité à la construction de chemins, nous proposons deux approches de suivi de chemins pour bateaux sous-actionné. La première approche est celle basée sur la représentation des coordonnées dans la base de Serret-Frenet en considérant que la vitesse de transit du bateau est constante. La deuxième approche est similaire à la première : nous exigeons en plus que la vitesse de transit du bateau soit ajustée en fonction de la courbure du chemin.

5.2 Suivi de Chemins : Première Approche

5.2.1 Système de coordonnées dans le repère de Serret-Frenet

Dans ce paragraphe, nous allons présenter brièvement les notions de base des coordonnées de Serret-Frenet. Pour plus de détails concernant les éléments théoriques de ce système de coordonnées, voir (Egeland et Gravdahl, 2002).

Soit une courbe $C(x_d, y_d)$ avec $x_d = x_d(\theta)$ et $y_d = y_d(\theta)$ où θ est une variable de paramétrisation de la courbe C (Voir figure 5.5). Soit le vecteur position d'un point sur la courbe à un instant donné t noté par $r_d = [x_d(\theta(t)), y_d(\theta(t))]$. Nous supposons que $r_d(\theta)$ est régulièrement paramétré sur la courbe C , i.e. $r_d \in \mathcal{C}^1$ et $r_d^\theta \neq 0$ dans un intervalle $\theta \in I$. Le vecteur vitesse le long de la courbe C est donné par $v_d(t) = \dot{r}_d(t)$. Nous pouvons calculer l'expression de la longueur d'un arc s de la courbe C comme suit

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \left| \frac{dr_d}{d\hat{\theta}} \right| d\hat{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\left(\frac{dx_d}{d\hat{\theta}} \right)^2 + \left(\frac{dy_d}{d\hat{\theta}} \right)^2} d\hat{\theta}$$

Par conséquent, la variable θ et/ou la variable s peuvent être utilisées pour représenter d'une manière précise une courbure de C . L'expression du vecteur unitaire tangent $T(t)$

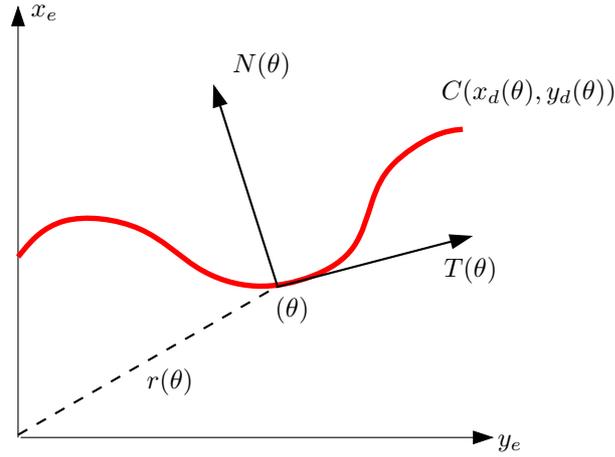


FIG. 5.5 – Courbe $C(\theta)$ sur laquelle un point est représenté par une variable θ , un vecteur de position $r_d(\theta)$ et les vecteurs unitaires tangent et normal $T(\theta)$ et $N(\theta)$.

est donné par l'expression suivante

$$T(t) = \frac{v_d(t)}{|v_d(t)|} = \frac{v_d(t)}{\dot{s}}$$

ou encore

$$T(s) = \frac{dr_d}{ds} = \frac{r_d^\theta}{|r_d^\theta|}$$

Dans ce qui suit nous allons utiliser la variable s comme variable de paramétrisation de la courbe C . Soit ψ_{SF} la direction de $T(s)$, qui est l'angle entre l'axe x_e et la tangente $T(s)$. Puisque le vecteur $T(s)$ a deux composantes i.e. $[T_x, T_y]$, nous pouvons donc écrire que $\psi_{SF} = \tan^{-1}\left(\frac{T_y(s)}{T_x(s)}\right)$ et

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{SF}) \\ \sin(\psi_{SF}) \end{bmatrix}$$

Il est intéressant de voir le taux d'accroissement du vecteur T par rapport à s , i.e. $\frac{dT}{ds}$. Nous trouvons le résultat suivant

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\psi_{SF}} \frac{d\psi_{SF}}{ds} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi_{SF}) \\ \cos(\psi_{SF}) \end{bmatrix} \frac{d\psi_{SF}}{ds}$$

Notons que $|\frac{dT}{ds}| = |\frac{d\psi_{SF}}{ds}|$. Nous définissons le vecteur courbure par $K(s) = \frac{dT}{ds}$ et la courbure par $\kappa(s) = |K(s)| = |\frac{d\psi_{SF}}{ds}|$. Par ailleurs nous constatons que le vecteur T et $K(s)$ sont perpendiculaires. En effet, le produit scalaire de $(T^\top \cdot \frac{dT}{ds}) = 0$. Ainsi, nous pouvons écrire que $N(s) = \frac{K(s)}{|K(s)|}$, ou encore :

$$\kappa(s) = K(s)^\top N(s)$$

De la même façon nous pouvons établir l'expression du taux d'accroissement de la normale $N(s)$ par rapport à la longueur de l'arc s :

$$\frac{dN(s)}{ds} = \frac{dN}{d\psi_{SF}} \frac{d\psi_{SF}}{ds} = \kappa(s) \begin{bmatrix} -\cos(\psi_{SF}) \\ -\sin(\psi_{SF}) \end{bmatrix}$$

et par conséquent, on obtient les équations suivantes de Serret Frenet :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \kappa N \\ \frac{dN}{ds} &= -\kappa T \\ \dot{\psi}_{SF} &= \kappa \dot{s} \end{aligned}$$

5.2.2 Formulation du problème pour le suivi de chemin

Dans ce qui suit, nous allons considérer le problème de suivi de chemins pour un bateau sous-actionné en se basant sur les coordonnées des erreurs cinématiques exprimées dans le repère de Serret-Frennet. Nous considérons les notations suivantes : $\psi_{SF} = \psi_d$, la normale à la trajectoire du repère (**SF**), N est portée par l'axe Qy_e et la tangente au chemin T est portée par l'axe Qx_e (Voir figure 5.6).

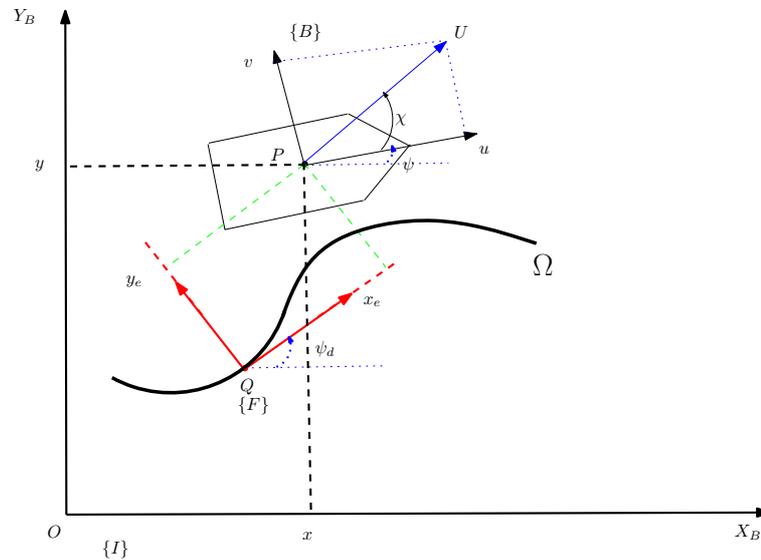


FIG. 5.6 – Modèle de bateau et repère de Serret-Frennet.

Les objectifs du suivi de chemins pour un bateau sous-actionné se déplaçant avec une vitesse linéaire totale constante le long d'un chemin Ω donné, sont : a) Réduire à

zéro l'erreur transversale y_e et longitudinale x_e respectivement. b) Réduire à zéro l'angle que fait le vecteur de la vitesse linéaire du bateau et la tangente à la trajectoire.

Nous proposons donc de développer la cinématique du bateau (3.52) dans le repère de Serret-Frennet $\{F\}$. Contrairement à ce qui a été présenté dans le travail de (Do, 2004), le repère (SF) n'est pas attaché à un point de la trajectoire qui se trouve à proximité du bateau, mais son origine est variable dans le temps sur la trajectoire Ω .

Equations Cinématiques

Considérons la figure 5.6. Soit Q un point arbitraire sur la trajectoire à suivre et considérons le repère (SF), $\{F\}$ attaché à ce point. Le paramètre s est la distance curveligne entre le point Q et un point quelconque de la trajectoire. Soit P le centre de gravité du bateau dont les coordonnées peuvent être exprimées soit dans le repère d'inertie $\{I\}$ comme $[x, y]_I^\top$ ou dans le repère de Frenet $\{F\}$ comme $[x_e, y_e]_F^\top$. La courbure de la trajectoire au point Q est notée par $\kappa(s)$, ψ_d désigne l'angle que fait l'axe $\overrightarrow{Qx_e}$ avec $\overrightarrow{OX_B}$, ψ désigne l'angle que fait l'axe $\overrightarrow{OX_B}$ avec le vecteur vitesse u . Notons par $\psi_e = \psi - \psi_d$ l'écart entre ψ et ψ_d . Soit $U = \sqrt{u^2 + v^2}$ l'expression de la vitesse linéaire totale du bateau. La vitesse d'avancement u est supposée constante.

La vitesse du point P exprimée dans le repère de base $\{I\}$ est donnée par :

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \mathbf{R}^{-1} \left(\frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} \right)_{\{F\}} + \mathbf{R}^{-1} (\dot{\psi}_d \times \overrightarrow{QP}) \quad (5.1)$$

avec $\dot{\psi}_d = \kappa(s)\dot{s}$, \mathbf{v}_P et \mathbf{v}_Q sont les vitesses des point P et Q exprimés respectivement dans le repère de base $\{I\}$. \mathbf{R} est la matrice de rotation de changement de repère (e.g. du repère de base $\{I\}$ au repère de Frennet $\{F\}$), donnée par

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_d) & \sin(\psi_d) & 0 \\ -\sin(\psi_d) & \cos(\psi_d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La multiplication à gauche de l'équation (5.1) par la matrice \mathbf{R} , donne

$$\mathbf{R}\mathbf{v}_P = \mathbf{R}\mathbf{v}_Q + \left(\frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} \right)_{\{F\}} + (\dot{\psi}_d \times \overrightarrow{QP}) \quad (5.2)$$

En utilisant les coordonnées suivants, $\mathbf{v}_P = [\dot{x}, \dot{y}, 0]^\top$, $\mathbf{R}\mathbf{v}_Q = [\dot{s}, 0, 0]^\top$, $\left(\frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} \right)_{\{F\}} = [\dot{x}_e, \dot{y}_e, 0]^\top$ et $(\dot{\psi}_d \times \overrightarrow{QP}) = [-\kappa(s)\dot{s}y_e, \kappa(s)\dot{s}x_e, 0]^\top$, puis en résolvant l'équation (5.2) pour \dot{x}_e et \dot{y}_e , nous obtenons la relation matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{s}(1 - \kappa(s)y_e) \\ \dot{s}\kappa(s)x_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

En substituant les équations cinématiques du bateau (3.52) dans l'équation (5.3) et en utilisant l'expression de la dynamique de ψ_e , on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= (u \cos \psi - v \sin \psi) \cos \psi_d + (u \sin \psi + v \cos \psi) \sin \psi_d - \dot{s} [1 - \kappa(s)y_e] \\ \dot{y}_e &= -(u \cos \psi - v \sin \psi) \sin \psi_d + (u \sin \psi + v \cos \psi) \cos \psi_d - \kappa(s)x_e \\ \dot{\psi}_e &= r - \kappa(s)\dot{s}\end{aligned}\tag{5.4}$$

Pour plus de clarté, nous réécrivons l'équation (5.4) sous une forme plus compacte en définissant la nouvelle variable

$$\psi_e^* = \psi_e + \chi\tag{5.5}$$

avec χ l'angle fait par le vecteur vitesse d'avancement avec celui de la vitesse totale du bateau. Selon la figure 5.6, χ peut être calculé de la façon suivante

$$\chi = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)\tag{5.6}$$

u est défini comme étant une vitesse constante. En utilisant l'expression (5.5), l'équation (5.4) devient

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= U \cos \psi_e^* - \dot{s} [1 - \kappa(s)y_e] \\ \dot{y}_e &= U \sin \psi_e^* - \dot{s}\kappa(s)x_e \\ \dot{\psi}_e^* &= r + \dot{\chi} - \kappa(s)\dot{s}\end{aligned}\tag{5.7}$$

Equation Dynamique

Le modèle dynamique du véhicule marin est obtenu en superposant les équations (5.7) par les équations dynamiques du véhicule dans la direction du glissement et du lacet comme suit

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= U \cos \psi_e^* - \dot{s} [1 - \kappa(s)y_e] \\ \dot{y}_e &= U \sin \psi_e^* - \dot{s}\kappa(s)x_e \\ \dot{\psi}_e^* &= r + \dot{\chi} - \kappa(s)\dot{s} \\ \dot{v} &= -\frac{m_{11}}{m_{22}}ur - \frac{d_v}{m_{22}}v + \frac{1}{m_{22}}\tau_{wv}(t) \\ \dot{r} &= \frac{(m_{11} - m_{22})}{m_{33}}uv - \frac{d_r}{m_{33}}r + \frac{1}{m_{22}}\tau_r \frac{1}{m_{33}}\tau_{rv}(t)\end{aligned}\tag{5.8}$$

$\tau_{wv}(t)$ et $\tau_{rv}(t)$ sont des perturbations environnementales dues aux vents et supposées bornées :

$$|\tau_{wv}(t)| \leq \tau_{wv}^{Max}, \quad |\tau_{rv}(t)| \leq \tau_{rv}^{Max}$$

Remarquons que l'on ne dispose pas d'une dynamique dans la direction d'avancement, étant donnée qu'on a supposé que la vitesse dans cette direction u est constante.

En ayant le modèle dynamique du bateau sous-actionné (5.8), nous pouvons énoncer le principal objectif du suivi de chemins le long d'une trajectoire Ω donnée.

Étant données un profil de la vitesse angulaire r_d et une trajectoire paramétrée par sa longueur de courbure s , nous désirons déterminer une loi de commande τ_r par retour d'état qui permet la convergence à zéro de x_e, y_e et ψ_e^ .*

5.2.3 Conception de la Loi de Commande

La structure triangulaire du modèle dynamique (5.8), nous permet de concevoir la loi de commande τ_r en deux étapes. Dans la première étape, nous déterminons une loi de commande virtuelle qui permet de stabiliser la dynamique x_e, y_e et $\bar{\psi}_e$. Dans la seconde étape, et en utilisant la technique du backstepping nous stabilisons l'erreur r_e .

Étape 1 : Stabilisation de la dynamique (x_e, y_e) . La loi de commande virtuelle permettant la stabilisation de l'erreur cinématique de (5.8) est inspirée par le changement de variable effectué par (Do, 2004). Considérons alors la variable suivante

$$\bar{\psi}_e = \psi_e^* - \alpha_{\psi_e^*} \quad (5.9)$$

avec $\alpha_{\psi_e^*}$ une commande virtuelle pour ψ_e^* . Substitutions (5.9) dans les deux premières équations de (5.8) ; ce qui permet d'écrire les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= U \cos \alpha_{\psi_e^*} - \dot{s} [1 - \kappa(s) y_e] + p_x \\ \dot{y}_e &= U \sin \alpha_{\psi_e^*} - \kappa(s) \dot{s} x_e + p_y \end{aligned} \quad (5.10)$$

avec

$$\begin{aligned} p_x &= U \left[(\cos \bar{\psi}_e - 1) \cos \alpha_{\psi_e^*} + \sin \bar{\psi}_e \sin \alpha_{\psi_e^*} \right] \\ p_y &= U \left[\sin \bar{\psi}_e \cos \alpha_{\psi_e^*} - (\cos \bar{\psi}_e - 1) \sin \alpha_{\psi_e^*} \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

De la seconde equation de (5.11), nous pouvons facilement choisir la commande virtuelle $\alpha_{\psi_e^*}$ afin de stabiliser la dynamique y_e comme suit

$$\alpha_{\psi_e^*} = -\arcsin\left(\frac{k_2 y_e}{\sqrt{1+x_e^2+y_e^2}}\right), \quad k_2 > 0 \quad (5.12)$$

La substitution de l'équation (5.12) dans (5.10), donne :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= U\varpi_1^{-1}\varpi_2 - \dot{s}[1 - \kappa(s)y_e] + p_x \\ \dot{y}_e &= -k_2 U y_e \varpi_1^{-1} - \kappa(s)\dot{s}x_e + p_y \end{aligned} \quad (5.13)$$

avec $\varpi_1 = \sqrt{1+x_e^2+y_e^2}$ et $\varpi_2 = \sqrt{1+x_e^2+(1-k_2^2)y_e^2}$. Nous pouvons utiliser \dot{s} comme une commande auxiliaire afin de stabiliser la dynamique x_e comme suit

$$\dot{s} = k_1 x_e \varpi_1^{-1} + U\varpi_1^{-1}\varpi_2 \quad (5.14)$$

avec k_1 une constante positive, par conséquent (5.13) devient

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= -k_1 x_e \varpi_1^{-1} + \dot{s}\kappa(s)y_e + p_x \\ \dot{y}_e &= -k_2 U y_e \varpi_1^{-1} - \kappa(s)\dot{s}x_e + p_y \end{aligned} \quad (5.15)$$

Notons que si l'on considère la fonction de Lyapunov $V_1 = 0.5(x_e^2 + y_e^2)$, sa dérivée le long des trajectoires de (5.15) ne contiendra pas les termes $\kappa(s)\dot{s}x_e$ et $\dot{s}\kappa(s)y_e$, ce qui simplifiera considérablement l'analyse de stabilité.

Afin de stabiliser la dynamique de $\bar{\psi}_e$, nous définissons la nouvelle variable suivante

$$r_e = r - \alpha_r \quad (5.16)$$

où α_r est une commande virtuelle pour la vitesse angulaire r . La différenciation de l'équation par rapport au temps (5.9), donne

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}}_e &= \beta(r_e + \alpha_r) - \frac{u}{U^2}\left(\frac{d_{22}}{m_{22}}v - \frac{1}{m_{22}}\tau_{wv}(t)\right) - \kappa(s)\dot{s} \\ &\quad + k_2 x_e y_e \varpi_1^{-2} \varpi_2^{-1} (k_1 x_e \varpi_1^{-1} - \dot{s}\kappa(s)y_e - p_x) \\ &\quad - k_2(1+x_e^2)\varpi_1^{-2}\varpi_2^{-1}(k_2 U y_e \varpi_1^{-1} + \kappa(s)x_e \dot{s} - p_y) \end{aligned} \quad (5.17)$$

avec $\beta = \left(1 - \frac{u^2 m_{11}}{U^2 m_{22}}\right)$. Ceci permet de choisir la commande virtuelle comme suit

$$\begin{aligned} \alpha_r &= -\frac{k_3}{\beta}\bar{\psi}_e + \frac{\kappa(s)}{\beta}\dot{s} + \frac{u}{\beta U^2}\left(\frac{d_{22}}{m_{22}}v\right) \\ &\quad - k_2 x_e y_e \varpi_1^{-2} \varpi_2^{-1} (k_1 x_e \varpi_1^{-1} - \dot{s}\kappa(s)y_e - p_x) - \frac{u}{\beta U^2} \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{\bar{\psi}_e}{\varepsilon_1} \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}}\right) \\ &\quad + k_2(1+x_e^2)\varpi_1^{-2}\varpi_2^{-1}(k_2 U y_e \varpi_1^{-1} + \kappa(s)x_e \dot{s} - p_y) \end{aligned} \quad (5.18)$$

k_3 et ε_1 sont des constantes positives. La dynamique en boucle fermée de $\bar{\psi}_e$ est donnée par :

$$\dot{\bar{\psi}}_e = -k_3\bar{\psi}_e + \beta r_e + \frac{u}{U^2 m_{22}} (\tau_{wv}(t) - \tau_{wv}^{Max} \tanh(\frac{\bar{\psi}_e \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_1 m_{22}})) \quad (5.19)$$

Étape 2 : Stabilisation de la dynamique r_e La différenciation de l'équation (5.16) par rapport au temps, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{r}_e = & \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} \right) uv - \frac{d_{33}}{m_{33}} r + \frac{\tau_r}{m_{33}} + \frac{\tau_{wr}(t)}{m_{33}} - \alpha_r^{\psi_e} (r - \kappa(s)\dot{s}) \\ & + \alpha_r^{x_e} (k_1 x_e \varpi_1^{-1} - \kappa(s)y_e \dot{s} - p_x) + \alpha_r^{y_e} (k_1 U y_e \varpi_1^{-1} + \kappa(s)x_e \dot{s} - p_y) \\ & + \alpha_r^v \left(\frac{m_{11}}{m_{22}} ur + \frac{d_{22}}{m_{22}} v + -\frac{1}{m_{22}} \tau_{wv}(t) \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

A partir de l'équation (5.20), nous choisissons la commande τ_r comme suit

$$\begin{aligned} \tau_r = & m_{33} \left(-k_4 r_e - \beta \bar{\psi}_e - \left(\frac{m_{11} - m_{22}}{m_{33}} \right) uv + \frac{d_{33}}{m_{33}} \alpha_r + \alpha_r^{\psi_e} (r - \kappa(s)\dot{s}) \right. \\ & - \alpha_r^{x_e} (k_1 x_e \varpi_1^{-1} - \kappa(s)y_e \dot{s} - p_x) - \alpha_r^{y_e} (k_1 U y_e \varpi_1^{-1} + \kappa(s)x_e \dot{s} - p_y) \\ & \left. - \alpha_r^v \left(\frac{m_{11}}{m_{22}} ur + \frac{d_{22}}{m_{22}} v \right) - \frac{\tau_{wr}^{Max}}{m_{33}} \tanh\left(\frac{r_e \tau_{wr}^{Max}}{\varepsilon_2 m_{33}}\right) - \alpha_r^v \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{r_e \alpha_r^v \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_3 m_{22}}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

En substituant l'expression de la commande (5.21) dans (5.20), la dynamique en boucle fermée de r_e s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} r_e = & -\left(k_4 + \frac{d_{33}}{m_{33}}\right) r_e - \beta \bar{\psi}_e + \frac{\tau_{wr}}{m_{33}} - \frac{\tau_{wr}^{Max}}{m_{33}} \tanh\left(\frac{r_e \tau_{wr}^{Max}}{\varepsilon_2 m_{33}}\right) - \alpha_r^v \frac{\tau_{wv}}{m_{33}} \\ & - \alpha_r^v \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{r_e \alpha_r^v \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_3 m_{22}}\right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

en rassemblant les équations (5.15), (5.19) et (5.22), on écrit la dynamique en boucle fermée du bateau sous-actionné comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e = & -k_1 x_e \varpi_1^{-1} + \dot{\kappa}(s)y_e + p_x \\ \dot{y}_e = & -k_2 U y_e \varpi_1^{-1} - \kappa(s)\dot{s}x_e + p_y \\ \dot{\bar{\psi}}_e = & -k_3 \bar{\psi}_e + \beta r_e + \frac{u}{U^2 m_{22}} (\tau_{wv}(t) - \tau_{wv}^{Max} \tanh(\frac{\bar{\psi}_e \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_1 m_{22}})) \\ \dot{v} = & -\frac{m_{11}}{m_{22}} ur - \frac{d_v}{m_{22}} v + \frac{1}{m_{22}} \tau_{wv}(t) \\ r_e = & -\left(k_4 + \frac{d_{33}}{m_{33}}\right) r_e - \beta \bar{\psi}_e + \frac{\tau_{wr}}{m_{33}} - \frac{\tau_{wr}^{Max}}{m_{33}} \tanh\left(\frac{r_e \tau_{wr}^{Max}}{\varepsilon_2 m_{33}}\right) - \alpha_r^v \frac{\tau_{wv}}{m_{33}} \\ & - \alpha_r^v \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{r_e \alpha_r^v \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_3 m_{22}}\right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Analyse de stabilité

L'objectif de la commande (5.21) est de rendre le véhicule sous-actionnée capable de suivre la trajectoire Ω paramétrée par son abscisse curveligne s . Nous montrons, par le biais du théorème suivant, que le système (5.23) en boucle fermée est stable.

Théorème 3.1 (Ghommam et al., 2007a) *Supposons que le modèle du véhicule marin décrit par la dynamique (5.8) se déplaçant avec une vitesse d'avancement constante, tangentiellement à une trajectoire lisse paramétrée par son abscisse curveligne s , la commande τ_r donnée par (5.21), ultimement satabilise les erreurs transversales et longitudinales (i.e. x_e et y_e respectivement) ainsi que $\bar{\psi}_e$, en ajustant convenablement les paramètres k_1, k_2, k_3, k_4 et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. En outre, la vitesse de glissement v est rendue bornée. Plus de détails de la démonstration du Théorème 3.1 sont donnés en Annexe B.4.*

Démonstration du Théorème 3.1 : grandes lignes Le système (5.23) possède une forme particulière que l'on peut classer parmi les systèmes en cascades comme le montre la (Figure 6.15). Pour montrer l'ultime stabilité de tout le système, nous

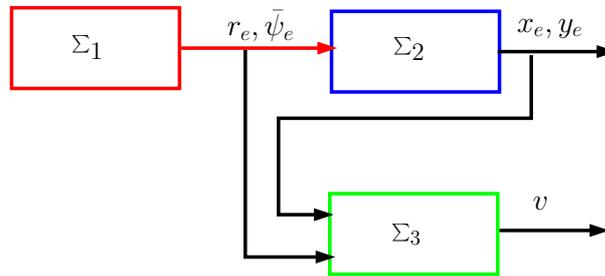


FIG. 5.7 – Forme en cascade du système (5.23)

procédons par prouver la stabilité du sous-système $(r_e, \bar{\psi}_e)$, puis celui du sous-système (x_e, y_e) et finalement on montrera la bornitude du sous-système v . Pour ceci, nous considérons en premier lieu la fonction de Lyapunov associée au sous système $(r_e, \bar{\psi}_e)$ comme suit :

$$V_2 = \frac{1}{2}(r_e^2 + \bar{\psi}_e^2) \quad (5.24)$$

sa dérivée par rapport au temps, nous permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$\dot{V}_2 \leq -c_1 V_1 + \zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i, \quad \text{avec} \quad c_1 = \min(k_3, k_4 + \frac{d_{33}}{m_{33}}) \quad (5.25)$$

ceci nous permet de conclure que le vecteur $X_{1e} = [\bar{\psi}_e, r_e]$ vérifie, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|X_{1e}\| &\leq \sqrt{2V_1(t_0)}e^{-0.5c_1(t-t_0)} + \sqrt{\frac{\zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}{c_1}} \\ &\leq a(.)e^{-0.5c_1(t-t_0)} + b \end{aligned} \quad (5.26)$$

où nous définissons $a(.) = \sqrt{2V_1(t_0)}$ et $b = \sqrt{\frac{\zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}{c_1}}$. En choisissant convenablement k_1, k_4, ε_i , la constante b peut être réduite aussi faible que possible.

Pour la stabilité du sous-système (x_e, y_e) , nous écrivons les deux premières équations de (5.23) sous la forme matricielle comme suit

$$\dot{X}_{2e} = f(t, X_{2e}) + g(t, X_{2e}, \xi(t)) \quad (5.27)$$

avec $X_{2e} = [x_e, y_e]^\top$, $\xi(t) = \psi_e(t)$. Les fonctions $f(t, X_{2e})$ et $g(t, X_{2e}, \xi(t))$ sont définies par :

$$f(t, X_{2e}) = \begin{bmatrix} -k_1 x_e \varpi_1^{-1} + \dot{\kappa}(s) y_e \\ -k_2 U y_e \varpi_1^{-1} - \kappa(s) \dot{x}_e \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$g(t, X_{2e}, \xi(t)) = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}^\top \quad (5.29)$$

Nous pouvons montrer que le système nominal (5.27), i.e. $\dot{X}_{2e} = f(t, X_{2e})$ est exponentiellement stable, puisque le terme perturbateur $g(t, X_{2e}, \xi(t))$ est majoré par une fonction linéaire de $\bar{\psi}_e$. Nous pouvons conclure que X_{2e} est ultimement borné.

Afin de montrer que la vitesse de glissement est bornée, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_3 = 0.5v^2 \quad (5.30)$$

La dérivée de V_3 par rapport au temps, permet d'écrire

$$\dot{V}_3 \leq \gamma_1(\bullet)(V_3 + \gamma_2(\bullet))e^{-\sigma(t-t_0)} + \rho_1(\bullet)$$

avec $\gamma_1(\bullet)$ et $\gamma_2(\bullet)$ sont des fonctions non-décroissantes de $\|(x_e, y_e, \bar{\psi}_e, r_e)\|$, $\rho_1(\bullet)$ est une constante positive qui dépend des valeurs maximales des perturbations environnementales.

□

5.3 Suivi de Chemins : Deuxième Approche

Dans l'approche que nous venons de présenter, nous avons exprimé l'erreur cinématique du bateau dans un repère tangent au chemin dont l'origine évolue dynamiquement en fonction du temps au fur et à mesure que le bateau approche la trajectoire

désirée. Dans cette approche, nous avons supposé que la vitesse linéaire de poussée du bateau est constante. Cela limite les applications potentielles marines des bateaux. L'approche que nous allons présenter dans ce paragraphe assouplit en quelque sorte cette limitation en ajustant la vitesse de poussée en ligne en fonction de la forme du chemin à suivre. L'idée se repose sur un changement de coordonnées global proposé par (Lefeber *et al.*, 2001) pour la poursuite de trajectoire des robots mobiles.

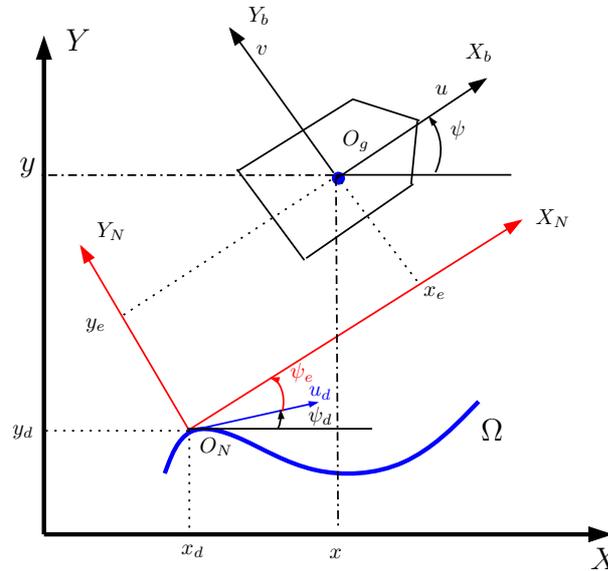


FIG. 5.8 – Interprétation de l'erreur cinématique dans un repère attaché au bateau.

Equations des erreurs cinématiques

Nous interprétons les erreurs cinématiques exprimées dans un repère attaché au bateau (Lefeber *et al.*, 2001) (Voir figure 5.8) comme suit

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}^\top(\psi)(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d) \quad (5.31)$$

où

$$\mathbf{R}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} x_e & y_e & \psi_e \end{bmatrix}^\top$ est le vecteur des erreurs exprimée dans le repère (O_g, X_b, Y_b) ,
 $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} x & y & \psi \end{bmatrix}^\top$ est le vecteur définissant la position/orientation du bateau dans

le repère de référence (O, X, Y) et $\eta_d = \begin{bmatrix} x_d & y_d & \psi_d \end{bmatrix}^\top$ est le vecteur définissant la position et l'orientation désirées sur le chemin Ω , avec

$$\psi_d = \arctan\left(\frac{y_d^s(s)}{x_d^s(s)}\right) \quad (5.32)$$

Nous choisissons le repère (O_g, X_b, Y_b) attaché au bateau, tels que l'axe $O_g X_b$ soit parallèle à la direction de poussée et l'axe $O_g Y_b$ soit parallèle la direction de glissement du bateau. Nous voulons que la vitesse désirée de poussée u_d soit tangente au chemin Ω . Dans cette configuration, la différentiation de (5.31) par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= u - u_d \cos \psi_e + r y_e \\ \dot{y}_e &= v + u_d \sin \psi_e - r x_e \\ \dot{\psi}_e &= r - r_d \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec u_d et r_d sont données par les expressions suivantes :

$$u_d = \sqrt{[x_d^s(s)]^2 + [y_d^s(s)]^2} \dot{s}, \quad r_d = \frac{x_d^s(s) y_d^{s^2}(s) - x_d^{s^2}(s) y_d^s(s)}{[x_d^s(s)]^2 + [y_d^s(s)]^2} \dot{s} \quad (5.34)$$

Equations dynamiques

On pourra regrouper les équations nécessaire pour exprimer le modèle dynamique du véhicule marin dans la direction de poussée, du glissement et de lacet :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= u - u_d \cos(\psi_e) + r y_e \\ \dot{y}_e &= v + u_d \sin(\psi_e) - r x_e \\ \dot{\psi}_e &= r - r_d \\ \dot{u} &= \frac{m_{22}}{m_{11}} v r - \frac{d_u}{m_{11}} u + \frac{1}{m_{11}} \tau_u + \frac{1}{m_{11}} \tau_{wu}(t) \\ \dot{v} &= -\frac{m_{11}}{m_{22}} u r - \frac{d_v}{m_{22}} v + \frac{1}{m_{22}} \tau_{vv}(t) \\ \dot{r} &= \frac{(m_{11} - m_{22})}{m_{33}} u v - \frac{d_r}{m_{33}} r + \frac{1}{m_{33}} \tau_r + \frac{1}{m_{33}} \tau_{wr}(t) \end{aligned} \quad (5.35)$$

$\tau_{wu}, \tau_{vv}(t)$ et $\tau_{vr}(t)$ sont des perturbations environnementales dues aux vents et aux courants d'eau, supposées bornées :

$$|\tau_{wu}(t)| \leq \tau_{wu}^{Max}, \quad |\tau_{vv}(t)| \leq \tau_{vv}^{Max}, \quad |\tau_{vr}(t)| \leq \tau_{vr}^{Max}$$

A partir du modèle (5.35), nous pouvons énoncer le principal objectif de suivi de chemins le long d'une trajectoire Ω donnée par la seconde approche.

Déterminer les lois de commandes τ_u et τ_r afin de forcer le bateau sous-actionné (5.35) à suivre un chemin donné Ω paramétré par $(x_d(s), y_d(s))$, avec s l'abscisse curviligne du chemin. Nous désirons également que la vitesse de poussée du bateau soit ajustée en ligne en fonction de la forme du chemin.

5.3.1 Conception de la Loi de Commande

Le forme du système (5.35) est semblable à celle du système (5.8) sauf que nous possédons en plus une autre équation différentielle décrivant la dynamique du mouvement le long de la direction de poussée. Comme nous l'avons décrit pour la première approche, nous décomposons la conception de la loi de commande en deux étapes en utilisant la technique de Backstepping.

Étape 1 : Stabilisation de la dynamique $(x_e, y_e, \bar{\psi}_e)$

Définissons les variables suivantes

$$u_e = u - \alpha_u, \quad \bar{\psi}_e = \psi_e - \alpha_{\psi_e}, \quad r_e = r - \alpha_r \quad (5.36)$$

avec $\alpha_u, \alpha_{\psi_e}$ et α_r sont des commandes virtuelles pour u, ψ_e et r respectivement. En substituant (5.36) dans les deux premières équations de (5.35), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= u_e + \alpha_u - u_d \cos \psi_e + r y_e \\ \dot{y}_e &= v + u_d \sin \alpha_{\psi_e} + u_d \Delta - r x_e \end{aligned} \quad (5.37)$$

avec $\Delta = \left(\sin \bar{\psi}_e \cos \alpha_{\psi_e} + (\cos \bar{\psi}_e - 1) \sin \alpha_{\psi_e} \right)$. De la première équation (5.37), nous choisissons l'expression de α_u comme suit

$$\alpha_u = -\phi_1 + u_d \cos \psi_e \quad (5.38)$$

avec $\phi_1 = \frac{k_1 x_e}{\sqrt{1+x_e^2+y_e^2}}$, k_1 est un paramètre positif que l'on déterminera lors de l'analyse de stabilité. La seconde équation de (5.37), peut être stabilisée en considérant la variable v comme une commande virtuelle à condition que la dynamique v soit actionnée : ce qui n'est pas le cas pour les bateaux sous-actionnés. Nous ne pouvons pas utiliser cette variable. Une alternative permettant la stabilisation de la dynamique y_e est d'utiliser

l'abscisse curviligne s comme une commande auxiliaire pour la stabilisation de y_e . Pour cela, nous choisissons la commande virtuelle α_{ψ_e} comme suit :

$$\alpha_{\psi_e} = -\arctan\left(\frac{\phi_2 + v_d}{\gamma(t)}\right) \quad (5.39)$$

et la commande auxiliaire \dot{s} ,

$$\dot{s} = \frac{\sqrt{\gamma(t)^2 + (\phi_2 + v_d)^2}}{\sqrt{x_d^s(s)^2 + y_d^s(s)^2}} \quad (5.40)$$

avec $\phi_2 = \frac{k_2 y_e}{\sqrt{1+x_e^2+y_e^2}}$ et v_d est une valeur filtrée¹ de v à déterminer, $|\gamma(t)|$ est une valeur qui vérifie :

$$|v_d| < u_d^{min} \leq |\gamma| \leq u_d^{max}$$

Avec l'expression (5.39), nous concluons que la vitesse désirée de poussé u_d est donnée par l'expression suivante

$$u_d = \sqrt{\gamma(t)^2 + (\phi_2 + v_d)^2} \quad (5.41)$$

Remarquons que si $x_e \rightarrow 0$ alors $u_d \rightarrow \sqrt{\gamma^2 + v_d^2}$. Si γ est nulle, alors la vitesse de poussée sera égale à la vitesse de glissement. Or en général dans le cas de la non-holonomie des véhicules, la vitesse transversale doit être physiquement supérieure à la vitesse de glissement. Ce qui explique la présence de γ dans l'expression (5.40).

Remarque 3.1 En adoptant la même approche de suivi de chemins que dans les chapitres 6 et 7, la stabilisation de y_e se fait directement en éliminant le terme u_d de l'expression $u_d \sin \alpha_{\psi_e}$: simplement en choisissant pour la commande virtuelle α_{ψ_e} , l'expression $\alpha_{\psi_e} = -\arcsin\left(\frac{\phi_2 + v_d}{u_d}\right)$ sachant que la vitesse u_d ne peut jamais être nulle.

Substituons les expressions (5.38) et (5.39) respectivement dans les équations (5.37). Nous obtenons la dynamique en boucle fermée suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= -\phi_1 + u_e + r y_e \\ \dot{y}_e &= -\phi_2 + v_e + u_d \Delta - r x_e \end{aligned} \quad (5.42)$$

Il est important de noter que si u_d est borné, et $(u_e, v_e) \rightarrow (0, 0)$, alors x_e, y_e sont bornés et tendent asymptotiquement vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$.

¹Pour construire une erreur $v_e = v - v_d$ qu'on essayera de la stabiliser à l'origine

Pour stabiliser $\bar{\psi}_e$ à l'origine, nous différencions la deuxième équation de (5.36), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}}_e = & \left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)(r_e + \alpha_r) - r_d + \frac{\gamma(t)}{u_d^2} \left[\dot{v}_d + k_2 \left(\frac{v_d + u_d \sin(\psi_e)}{\varpi} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{y_e(x_e(\alpha_u - u_d \cos(\psi_e)) + y_e(v_d + u_d \sin(\psi_e)))}{\varpi^3} \right) \right] - \frac{k_2\gamma(t)x_e y_e}{u_d^2\varpi^3} u_e \\ & + \frac{k_2\gamma(t)(1 + x_e^2)}{u_d^2\varpi^3} v_e - \frac{\dot{\gamma}(t)}{u_d^2} (\phi_2 + v_d) \end{aligned} \quad (5.43)$$

où nous avons défini la variable $\varpi = \sqrt{1 + x_e^2 + y_e^2}$. Afin de rendre la dynamique $\bar{\psi}_e$ stable à l'origine, nous choisissons la commande virtuelle α_r comme suit

$$\begin{aligned} \alpha_r = & \left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)^{-1} \left(-k_3\psi_e + r_d - \frac{\gamma(t)}{u_d^2} \left[\dot{v}_d + k_2 \left(\frac{v_d + u_d \sin \psi_e}{\varpi} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{y_e(x_e(\alpha_u - u_d \cos \psi_e) + y_e(v_d + u_d \sin \psi_e))}{\varpi^3} \right) \right] + \frac{\dot{\gamma}(t)}{u_d^2} (\phi_2 + v_d) - \frac{u_d \Delta}{\bar{\psi}_e} y_e \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Le dernier terme de l'équation (5.44) sert à éliminer le produit mixte $\frac{u_d \Delta}{\bar{\psi}_e} y_e$ ultérieurement lors de l'utilisation de fonction de Lyapunov quadratique en y_e , ψ_e et x_e . Le rapport $\frac{\Delta}{\bar{\psi}_e}$ est défini pour tout $\bar{\psi}_e \in \mathbb{R}$. Pour que α_r soit également défini, il faut que $1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi} \neq 0$. En effet en choisissant k_2 tel que

$$k_2 < \frac{(u_d^{max})^2}{u_d^{min}} \quad (5.45)$$

le terme $1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}$ devient strictement positif et par conséquent α_r est défini dans \mathbb{R} . En remplaçant (5.44) dans (5.43), la dynamique en boucle fermée de $\bar{\psi}_e$ devient

$$\dot{\bar{\psi}}_e = -k_3\psi_e + \left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)r_e - \frac{u_d \Delta}{\bar{\psi}_e} y_e - \frac{k_2\gamma(t)x_e y_e}{u_d^2\varpi^3} u_e + \frac{k_2\gamma(t)(1 + x_e^2)}{u_d^2\varpi^3} v_e \quad (5.46)$$

Pour déterminer l'expression de v_d , nous différencions $v_e = v - v_d$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{v}_e = & -\frac{d_v}{m_{22}}v - \frac{m_{11}}{m_{22}}ur + \frac{1}{m_{22}}\tau_{wv}(t) - \dot{v}_d \\ = & -\frac{d_v}{m_{22}}v - \frac{m_{11}}{m_{22}}(u_e\alpha_r + r_e u + \alpha_u\alpha_r) + \frac{1}{m_{22}}\tau_{wv}(t) - \dot{v}_d \end{aligned} \quad (5.47)$$

ce qui permet de choisir l'expression pour \dot{v}_d , comme suit

$$\dot{v}_d = -\frac{d_v}{m_{22}}v_d - \frac{m_{11}}{m_{22}}\alpha_u\alpha_r + \frac{k_2\gamma(t)(1 + x_e^2)}{u_d^2\varpi^3}\bar{\psi}_e - \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{v_e \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_v m_{22}}\right) \quad (5.48)$$

Substituons (5.48) dans l'équation (5.47), nous obtenons la dynamique suivante de v_e

$$\begin{aligned} \dot{v}_e = & -\frac{d_v}{m_{22}}v_e - \frac{m_{11}}{m_{22}}(ur_e + u_e\alpha_r) + \frac{k_2\gamma(t)(1+x_e^2)}{u_d^2\varpi^3}\bar{\psi}_e + \frac{1}{m_{22}}\tau_{wv}(t) \\ & - \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{v_e \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_v m_{22}}\right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Notons que α_r dépend explicitement de \dot{v}_d . Pour dégager l'expression de \dot{v}_d , nous substituons (5.44) dans (5.48). Nous obtenons alors :

$$\dot{v}_d = \frac{1}{\beta} \left(-\frac{d_v}{m_{22}}v_d - \frac{m_{11}}{m_{22}}\alpha_u\alpha_r^{v_d} + \frac{k_2\gamma(t)(1+x_e^2)}{u_d^2\varpi^3}\bar{\psi}_e - \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{v_e \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_v m_{22}}\right) \right) \quad (5.50)$$

avec $\beta = \left(1 + \frac{m_{11}}{m_{22}}\left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)^{-1}\frac{\gamma(t)}{u_d^2}\alpha_u\right)$ et :

$$\begin{aligned} \alpha_r^{v_d} = & \left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)^{-1} \left(-k_3\psi_e + r_d - \frac{\gamma(t)}{u_d^2} \left[k_2\left(\frac{v_d + u_d \sin \psi_e}{\varpi} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{y_e(x_e(\alpha_u - u_d \cos \psi_e) + y_e(v_d + u_d \sin \psi_e))}{\varpi^3} \right] \right) + \frac{\dot{\gamma}(t)}{u_d^2}(\phi_2 + v_d) - \frac{u_d\Delta}{\bar{\psi}_e} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\beta \neq 0$, ainsi que $\alpha_r^{v_d}$. Par conséquent, il n'y aura pas de singularité dans l'expression de \dot{v}_d .

Étape 2 : Stabilisation de la dynamique (u_e, r_e) . Dans cette étape, nous allons déterminer les lois de commandes τ_u et τ_r permettant la stabilisation de u_e et r_e à l'origine. Différencions alors la première et la dernière équation de (5.36). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{u}_e = & -\frac{d_u}{m_{11}}u + \frac{m_{22}}{m_{11}}vr + \frac{1}{m_{11}}\tau_u + \frac{1}{m_{11}}\tau_{wu}(t) - \dot{\alpha}_u \\ \dot{r}_e = & -\frac{d_r}{m_{33}}r + \frac{(m_{11} - m_{22})}{m_{33}}uv + \frac{1}{m_{33}}\tau_r + \frac{1}{m_{33}}\tau_{wr}(t) - \dot{\alpha}_r \end{aligned} \quad (5.51)$$

ce qui permet de choisir les commandes τ_u et τ_r comme suit

$$\begin{aligned} \tau_u = & -k_4u_e + d_u\alpha_u - m_{22}vr + \dot{\alpha}_u - \tau_{wu}^{Max} \tanh\left(\frac{u_e \tau_{wu}^{Max}}{\varepsilon_u m_{11}}\right) + m_{11}\frac{k_2\gamma(t)x_e y_e}{u_d^2\varpi^3}\bar{\psi}_e + \frac{m_{11}^2}{m_{22}}\alpha_r v_e \\ \tau_r = & -k_5r_e + d_r\alpha_r - \frac{(m_{11} - m_{22})}{m_{33}}uv + \dot{\alpha}_r - \tau_{wr}^{Max} \tanh\left(\frac{r_e \tau_{wr}^{Max}}{\varepsilon_r m_{33}}\right) + \frac{m_{33}m_{11}}{m_{22}}uv_e \\ & - m_{33}\left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)\bar{\psi}_e \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ainsi, la dynamique en boucle fermée du système (5.35), s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_e &= -\phi_1 + u_e + ry_e \\
\dot{y}_e &= -\phi_2 + v_e + u_d\Delta - rx_e \\
\dot{\bar{\psi}}_e &= -k_3\bar{\psi}_e + \left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)r_e - \frac{u_d\Delta}{\bar{\psi}_e}y_e - \frac{k_2\gamma(t)x_ey_e}{u_d^2\varpi^3}u_e + \frac{k_2\gamma(t)(1+x_e^2)}{u_d^2\varpi^3}v_e \\
\dot{v}_e &= -\frac{d_v}{m_{22}}v_e - \frac{m_{11}}{m_{22}}(ur_e + u_e\alpha_r) + \frac{k_2\gamma(t)(1+x_e^2)}{u_d^2\varpi^3}\bar{\psi}_e + \frac{1}{m_{22}}\tau_{wv}(t) \\
&\quad - \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{v_e}{\varepsilon_v} \frac{\tau_{wv}^{Max}}{m_{22}}\right) \\
\dot{u}_e &= -\left(\frac{k_4}{m_{11}} + \frac{d_u}{m_{11}}\right)u_e + \frac{k_2\gamma(t)x_ey_e}{u_d^2\varpi^3}\bar{\psi}_e + \frac{m_{11}}{m_{22}}\alpha_rv_e + \frac{1}{m_{11}}\tau_{wu} \\
&\quad - \frac{\tau_{wu}^{Max}}{m_{11}} \tanh\left(\frac{u_e}{\varepsilon_u} \frac{\tau_{wu}^{Max}}{m_{11}}\right) \\
\dot{r}_e &= -\left(\frac{k_5}{m_{33}} + \frac{d_r}{m_{33}}\right)r_e + \frac{m_{11}}{m_{22}}uv_e - \left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)\bar{\psi}_e + \frac{1}{m_{33}}\tau_{wr}(t) \\
&\quad - \frac{\tau_{wr}^{Max}(t)}{m_{33}} \tanh\left(\frac{r_e}{\varepsilon_r} \frac{\tau_{wr}^{Max}}{m_{33}}\right)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Nous présentons maintenant notre résultat principal pour le suivi de chemins par la seconde approche dont on donne la preuve à l'Annexe B.5

Théorème 3.2 (Ghommem et al., 2007c) *Soit une trajectoire Ω paramétrée par son abscisse curviligne s . Le bateau sous-actionné est modélisé par l'erreur cinématique et la dynamique (5.35). Si l'application de la commande (5.52) au système (5.35), permet l'existence de conditions initiales acceptables tels que les erreurs de suivi de chemins $(x_e, y_e, \bar{\psi}_e, v_e, u_e, r_e)$ convergent exponentiellement à une boule centrée à l'origine, en choisissant convenablement les constantes $k_1, k_2, k_{3,4}, \varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_r$.*

5.3.2 Résultats de simulation

Afin d'illustrer notre approche pour le suivi de chemins, nous testons notre commande (5.21) sur le véhicule marin. Les paramètres de la commande sont $k_1 = 10, k_2 = 10, k_3 = 15, k_4 = 5, \varepsilon_i = 0.02, i = 1, 2, 3$ et $\zeta = 0.2785$. Les conditions initiales pour le bateau sont $\begin{bmatrix} x(0) & y(0) & \psi(0) & v(0) & r(0) & s(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1m & -2m & 1.62rad & 0ms^{-1} & 0rads^{-1} & 0 \end{bmatrix}$. Le chemin suivi est défini par $x_d = s$ et $y_d = 10 \times \tanh(0.5s)$. Nous supposons que l'amplitude de la perturbation est $\tau_{wv} = 1N$ et $\tau_r = 1N + \delta$, avec δ un nombre aléatoire ($0 \leq \delta \leq 1$). En premier

lieu, nous supposons que les perturbations sont nulles pour montrer la convergence exponentielle du véhicule vers la trajectoire désirée i.e. x_e, y_e et ψ_e . La figure 5.3.2.a montre l'évolution de la trajectoire du bateau dans le plan (x, y) , les figure 5.3.2.b, 5.3.2.c et 5.3.2.d montrent la convergence exponentielle des erreur x_e, y_e et ψ_e vers l'origine : ce qui prouve l'efficacité de l'approche.

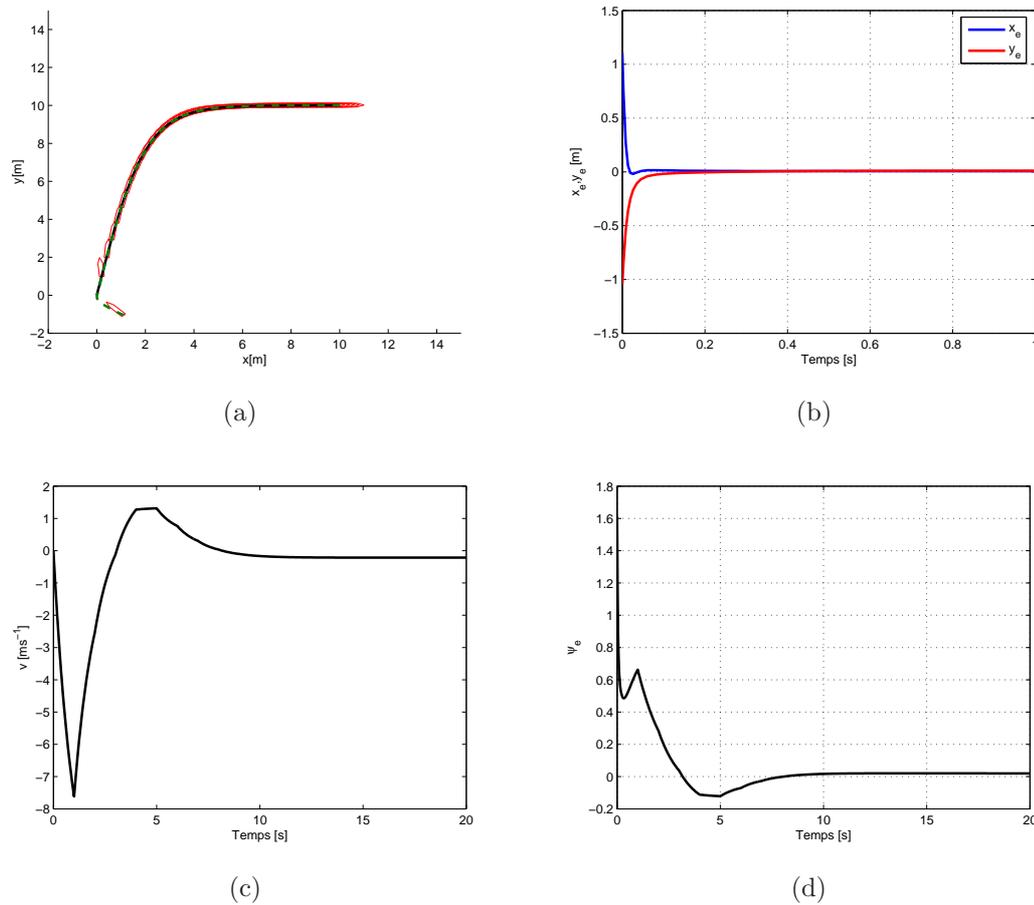


FIG. 5.9 – (a) Evolution de la trajectoire du véhicule dans le plan (x, y) , (b) convergence des erreur de positions x_e, y_e (c) vitesse de glissement, (d) erreur d'orientation ψ_e

En second lieu, nous introduisons les perturbations dans la direction du lacet ainsi que dans la direction de glissement. Il est clair que dans la figure 5.3.2.b 5.3.2.d le véhicule marin tend d'une façon asymptotique vers la trajectoire désirée. Cependant la réponse transitoire de la vitesse de glissement v est plus lente comparée au cas où les perturbations due aux effet de la composante τ_{wv} sont absentes.

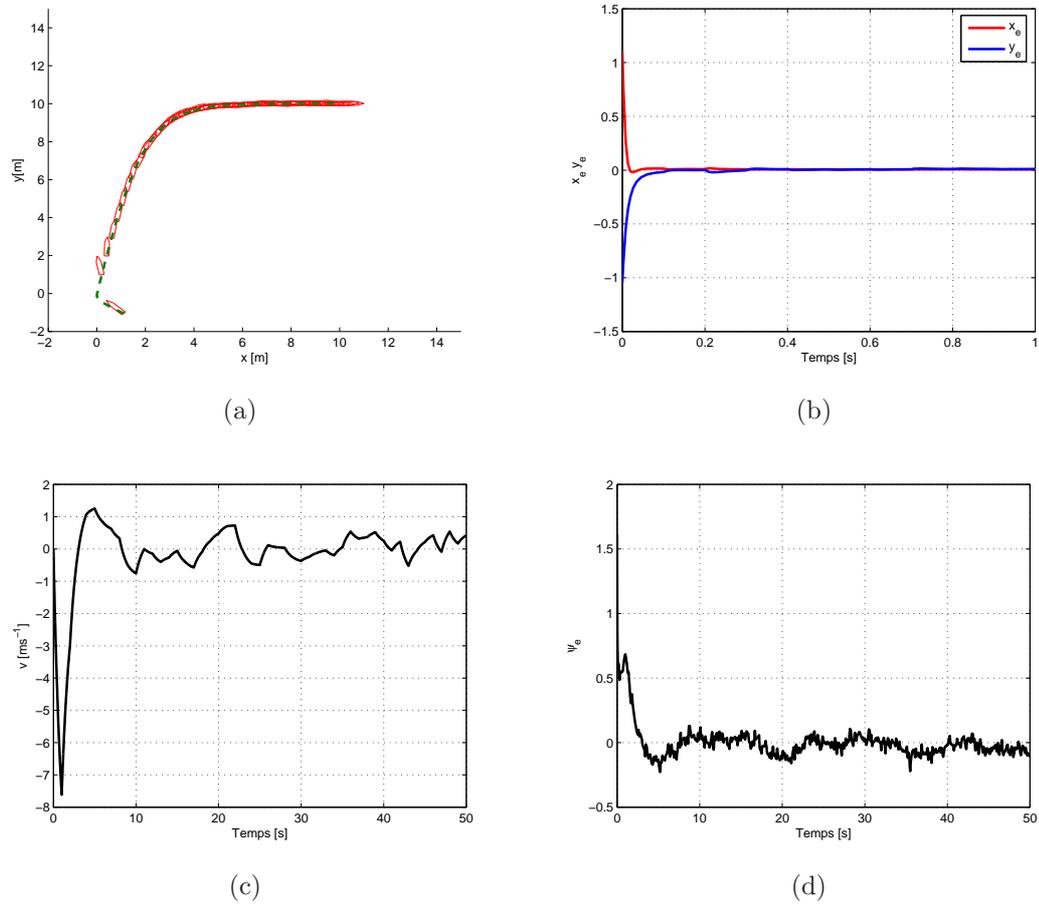


FIG. 5.10 – (a) Evolution de la trajectoire du véhicule dans le plan (x, y) en présence des perturbations environnementales, (b) convergence des erreurs de positions x_e, y_e en présence des perturbations environnementales (c) vitesse de glissement en présence des perturbations environnementales, (d) erreur d'orientation ψ_e en présence des perturbations environnementales

Chapitre 6

Contrôle de Formation

Dans ce chapitre, nous traitons le problème du contrôle de formation pour la coordination de navires, appelés tout le long de ce chapitre "véhicules marins". L'objectif de la commande de chaque véhicule marin est de converger puis de maintenir sa position dans le groupe, sachant que la structure entière de la formation doit suivre une trajectoire donnée avec une vitesse désirée.



FIG. 6.1 – Flotte de la marine Américaine en formation.

6.1 Introduction

L'idée de la coordination d'un ensemble d'objets en mouvement, a pris naissance dans les applications militaires. En effet, cette coordination est utilisée dans des applications aériennes, aquatiques et terrestres (voir Figure 6.1), pour un exemple d'appli-

cations marines. Différents types de structures pour la coordination d'engins mobiles, sont utilisées : la formation en pointe de fleche ou forme de V, en carré, en colonne ou en une ligne côte à côte (voir Figure 6.2). L'apport de cette idée sur les applications était d'assurer la sûreté et l'armement défensif du corps militaire de l'armée, et qui faisaient partie de la motivation pour laquelle on a employé le mouvement d'ensemble de bateaux, également connu sous le nom de *convoyer* pour le transport des approvisionnements pendant la seconde guerre mondiale.

Il y a quelques années, l'armée de l'air américaine a utilisé de plus en plus souvent les engins de types " *Unmanned Aerial Vehicles*" (UAVs) équipés par des capteurs et des caméras pour des fins d'exploration, de surveillance et de reconnaissance automatique. De nos jours, un ensemble de groupes de UAVs sont utilisés tels qu'un parmi de ces véhicules s'investit dans une région particulière tandis que les autres s'occupent de la sécurisation de l'espace d'exploration. Toutefois la NASA envisage un autre type d'application pour le vaisseau spatial " *Terrestrial Planet Finder*" (prévu pour être lancé en 2014). Celle ci considère la navigation en coordination de vaisseaux comme étant un seul engin jouant le rôle d'un grand telescope spatial. Ces vaisseaux seront virtuellement connectés et peuvent se positionner d'une manière automatique dans la structure de la formation. (Wang, 1996), (Beard *et al.*, 1996).

Pendant les saisons froides, il est courant d'observer une troupe d'oiseaux volant en formation. La forme en V de la formation montrée dans la Figure 6.3, est utilisé par les oiseaux de grandes tailles, tels que les canards et les oies. Ce type de formation permet aux oiseaux de réduire la dépense énergétique et la puissance de vol. Voler en formation favorise également la communication et la coordination dans le groupe et peut expliquer l'avantage de migrer ensemble plutôt qu'en solitude.

Les écologistes et les socio-biologistes évolutionnistes essaient de comprendre la coordination et le groupement naturel en modélisant le comportement social de chaque individu : un tel comportement dépend essentiellement de la structure du groupe, des obstacles voisins et des prédateurs (à détecter et à éviter). Quelques travaux sur la modélisation du comportement individuel par rapport à son proche voisin sont détaillés dans les références (Partridge, 1982), (Okubo, 1986), (Vicsek *et al.*, 1982), ect. Ces observations ont motivé les ingénieurs automatismes de développer des lois de commande par rétroaction qui synchronisent et contrôlent la coordination de véhicules autonomes. Dans la littérature, différentes applications couvrent actuellement un très large domaine d'opération, telle que la coordinations des robots manipulateurs, des robots mobiles, des satellites et des véhicules (aériens et sous-marins). (Sheikholeslam et Desoer, 1992a) précise que dans ce types d'applications, les contraintes de communication et les perturbations environnementales posent des défis pour la conception des lois de commande.



FIG. 6.2 – Force de l'aire Royal Groupe aerobatique en V.

Nous présentons, ainsi, quelques applications marines afin d'expliquer l'importance du concept de coordination de bateaux. Une explication détaillée du contrôle de formation et aux problèmes confrontés est présentée dans le paragraphe suivant.



FIG. 6.3 – Mouvement en groupe d'oies

Exemple 4.1 (Brise-glace escorteur) *Pendant l'hiver, la mer de Boscina gèle. Ainsi des navires non équipés doivent être escortées par un brise-glace à des ports finlandais et estoniens (voir Figure 6.4). Les plus gros bateaux comme les pétroliers nécessitent deux brises-glace au plus. Le navire et l'escorte doivent être situés à une distance déterminée afin d'éviter des collisions possibles. Deux méthodes permettent d'escorter le navire vers les eaux non gelées : 1) Tracer une trajectoire désirée le long de la glace puis manoeuvrer le groupe de navires et escorter celui-ci. 2) Commander le*

navire afin qu'il garde une distance constante aux brises-glaces.



FIG. 6.4 – Brise-glace et navire de forage dans les eaux de Beaufort.

Exemple 4.2 (Ravitaillement des navires) *C'est une méthode de transfert de fuel, munitions, provisions d'un bateau d'approvisionnement vers un autre bateau quand ce dernier est en mission (voir Figure 6.5).*



FIG. 6.5 – Ravitaillement entre deux navires.

Exemple 4.3 (Manipulation coopérative) *C'est l'action de coordonner le mouvement d'un ensemble de bateaux appelés "tugboats" afin de manipuler la position et l'orientation d'un grand navire, comme par exemple une plateforme de sous-marin, un porte avion (voir Figure 6.6). Une telle opération nécessite une haute précision de positionnement. Dans ce cas l'utilisation d'un système de commande globale qui permet de contrer rapidement tout mouvement non-désiré, améliore considérablement la sécurité du navire.*



FIG. 6.6 – 2 *tugboats* aident un porte avion a entrer dans le port de J.F.Kennedy.

Les problèmes traités dans la littérature, et le nombre de systèmes de commande développés dans le domaine de coordination d'objets en mouvement sont variés. Dans ce qui suit, nous donnons un bref aperçu du point de vu théorique, des différentes approches adoptées. Sur cette base, nous commentons notre choix sur l'approche adopter pour la coopération de véhicules marins sous-actionnés.

6.2 Contrôle et Coordination de Groupe

Il existe de nombreux travaux sur le contrôle par retour de la sortie des formations des systèmes autonomes. Des résultats récents peuvent être trouvés dans les références (Beard *et al.*, 1996), (Nijmeijer et Rodriguez-Angelez, 2003), (Fax et Murray, 2004), (Spry et Hedrick, 2004), (Ögren, 2004), (Kingston *et al.*, 2005), (Kumar *et al.*, 2005). Les applications présentées sont toutes différentes les unes des autres. Par ailleurs, il existe trois méthodes fondamentales sur lesquelles les différentes approches ont été fondées.

L'approche Leader-Follower

L'architecture de la méthode Leader-Follower, définit un leader de la formation, tandis que les autres membres du groupe suivent la position et l'orientation du leader avec un certain offset donné. Les premiers travaux sur cette méthode, appliquée à la coordination de robots mobiles, sont reportés dans (Wang, 1996). (Sheikholeslam et Desoer, 1992b), ont élaboré une loi de commande décentralisée pour le contrôle de congestion d'autoroute en utilisant des informations en provenance de la dynamique du leader et de la distance. L'avantage de cette approche est que la stabilité du groupe est directement déduite de la stabilité individuelle des véhicules. Elle est également très dépendante

de l'évolution du leader vers l'objectif imposé par la loi de commande. Dans un autre sens, si l'un des suiveurs est perturbé, la formation ne sera plus maintenue. En outre, le leader est considéré comme un point de rupture de la formation, si le leader tombe en panne la formation est alors corrompue.

L'approche comportementale

La méthode comportementale est souvent utilisée pour la coordination de robots mobiles. Cependant le contrôle des robots mobiles représente un défi en lui même. En effet, ces derniers doivent traiter beaucoup de données en temps réel tout en travaillant dans un espace (dans la plupart des cas) non structuré, et doivent exécuter plusieurs tâches à la fois telle que la manipulation, l'exploration, le traçage, ou bien de pouvoir se déplacer en suivant des points pré-définis, évidemment tout en évitant des obstacles (statiques et dynamique). Un robot autonome doit donc réaliser plusieurs buts en même temps. Cependant, ceci peut causer un conflit entre un robot et un autre dans la formation. Un degré d'importance entre les robots de la formation est donc assigné. L'avantage de cette approche est qu'il sera facile de déterminer une stratégie de commande quand les véhicules ont différents objectifs à atteindre. Par contre, l'inconvénient de cette approche est qu'il n'est pas évident de définir le comportement de tout le groupe de la formation. De plus il est difficile d'analyser le comportement du groupe et d'assurer sa stabilité théoriquement.

Structure Virtuelle

Dans l'approche de la structure virtuelle, la formation entière est considérée comme un seul élément virtuel jouant le rôle d'un corps rigide. La loi de commande est conçue pour chaque véhicule en définissant une dynamique pour la structure virtuelle. Le mouvement de celle-ci est, par conséquent, traduit en un mouvement désiré pour chaque véhicule. La stratégie adoptée afin de réaliser la formation sur la base de cette approche est d'assigner à chaque membre de la formation une trajectoire à suivre en respectant une certaine configuration dans l'espace du mouvement, puis d'utiliser une commande par rétroaction afin d'interdire aux membres de la formation de dévier de la trajectoire voulue. Une application est traitée par (Beard *et al.*, 1996) et (Ren *et W.*, 2004). (Egerstedt *et Hu*, 2001), considèrent que chaque membre de la formation poursuit un élément virtuel défini par une fonction qui spécifie la géométrie désirée de la structure de la formation.

L'avantage de cette approche est qu'il est facile de prescrire un comportement en coordination avec les membres du groupe. En conséquence, la formation est maintenue tout au long de la manœuvre. Cependant, imposer à la formation, de se comporter comme un seul corps rigide limite les différents types d'applications i.e quand la forme de

la formation varie dans le temps ou bien lors qu'on demande qu'elle soit reconfigurable durant la manoeuvre. Cette approche peut donc ne pas être un choix optimal pour certaines applications.

6.3 Architecture de Commande pour la Coordination du groupe

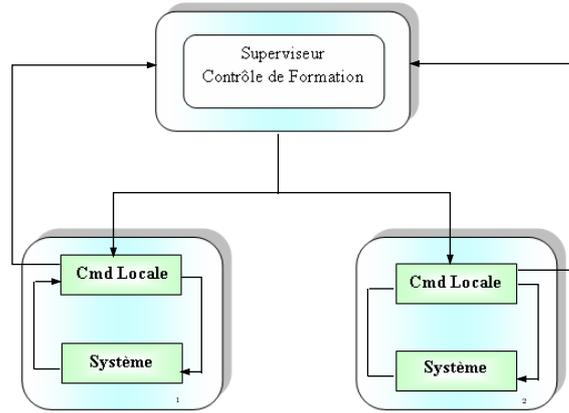
(Beard *et al.*, 1996), considèrent que le contrôle de coordination de systèmes indépendants fait intervenir au moins deux couches d'abstraction comme le montre la figure 6.7. La couche de supervision est un mécanisme qui coordonne le mouvement de chaque sous-système afin de synchroniser le comportement désiré du groupe. En revanche, la couche "bas niveau", chaque sous-système pour être compatible avec le mécanisme de coordination. La "loi de commande" locale, doit résoudre différents objectifs locaux tels que le suivi de trajectoires, la planification de trajectoires avec ou sans évitement d'obstacles.

Cette représentation englobe, la centralisation et la décentralisation de l'implémentation et la conception de la loi de commande. La commande centralisée possède un superviseur (Schéma de coordination) à un point centralisé de la structure de formation. Par contre la commande décentralisée, suppose qu'une version locale du schéma de coordination soit implémentée pour chaque système. La technique centralisée est totalement dépendante de l'état du système. Elle exige une grande bande-passante pour la communication d'information. Pour la commande décentralisée, le schéma local de coordination doit être synchronisé, souvent avec les voisins proches du groupe. Une solution ne demandant qu'une basse bande-passante, peut être accomplie en construisant un observateur local (les états requis pour la formation).

Communication et partage d'informations

Quand plusieurs systèmes doivent être coordonnés, les informations décrivant l'état de ces systèmes doivent être échangés pour que la tâche de la commande puisse être exécutée correctement. (Ren et Atkins, 2005) énonce l'axiome intuitif suivant

Axiome 4.1 *Le partage d'information est une condition nécessaire pour accomplir la coordination du groupe.*

FIG. 6.7 – Architecture à 2 niveaux pour la coordination de N systèmes

La quantité de l'information communiquée dépend de la tâche de coordination effectuée. Si l'on veut synchroniser la position de deux systèmes, dans ce cas l'information sur la position de ces deux systèmes doivent être connues. Si maintenant le but est de synchroniser le mouvement de deux systèmes (position et vitesse), alors les informations sur la vitesse et sur la position doivent être partagées.

Exemple 4.4 *Considérons, une approximation du modèle de Nomoto d'un pilote automatique du bateau (Fossen, 2002). Cette approximation donne lieu à une fonction de transfert liant la vitesse angulaire du lacet et l'action du gouvernail exprimée par :*

$$\frac{r(s)}{\delta(s)} = \frac{K}{1 + Ts}$$

avec T et K sont respectivement la constante de temps et le gain de Nomoto. Soit donc les modèles du pilote automatique de deux bateaux

$$r_i(s) = \frac{K_i}{1 + T_i s} \delta_i(s), \quad i = 1, 2$$

sachant que $\dot{\psi}_i = r_i$, où ψ_i est l'orientation du i -ème bateau. Nous pouvons écrire alors

$$\frac{\psi_i}{\delta_i} = \frac{K_i}{s(1 + T_i s)}$$

Si nous fixons l'objectif de coordination qui est d'avoir une même orientation des deux bateaux, e.g. $\psi_1 = \psi_2$, dans ce cas les bateaux doivent échanger entre eux l'information de leur orientation. Nous choisissons une action proportionnelle-dérivée comme commande issue de l'action du gouvernail δ_i :

$$\delta_i = -k_p(\psi_i - \psi_j) - k_d \dot{\psi}_i, \quad i, j = 1, 2, i \neq j$$

k_p et k_d sont des constantes positives. Nous fixons une condition initiale de l'orientation pour le premier bateau $\psi_1 = -20^\circ$ et $\psi_2 = -40^\circ$. La synchronisation est montrée à la figure 6.8. Il est aisé de constater que les bateaux se déplacent parallèlement avec une même orientation en se communiquant leurs orientations. Dans cet exemple, seule l'orientation du bateau est contrôlée. Pour avoir la position du bateau, d'autres modèles plus complexes et d'autres stratégies de commandes employées pouvant fournir les informations sur la position du bateau.

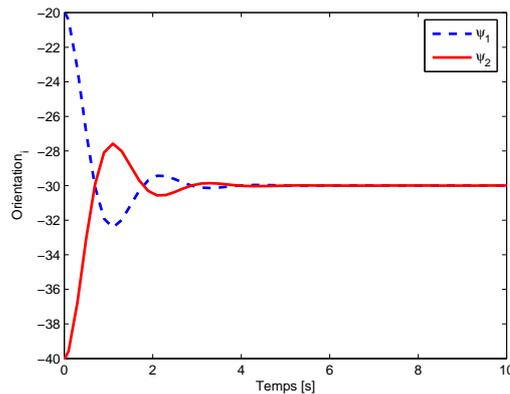


FIG. 6.8 – Synchronisation de deux modèles d'autopilot de Nomoto

L'objectif de la coordination de groupe peut se traduire par : (i) se rassembler dans une configuration donnée, (ii) finir le mouvement à un point de rendez vous en un temps désigné, ou (iii) tout simplement synchroniser le mouvement des différents membres du groupe. Une alternative permettant le partage d'informations sur la position et la vitesse durant la manoeuvre est de considérer le cas de la synchronisation des chemins qui incorpore non seulement l'information sur la position mais aussi l'information sur la vitesse et l'accélération. Le mouvement du groupe peut donc être coordonné avec un minimum d'informations, puisque la connaissance de la position du membre sur le chemin implique la connaissance de sa vitesse. Pour réaliser une bonne synchronisation, les chemins doivent donc être coordonnés depuis le début de la manoeuvre. D'où le choix de synchroniser un ensemble de navires manoeuvrant dans un espace largement ouvert est d'utiliser l'approche de la structure virtuelle précédemment exposée pour laquelle les navires peuvent uniquement échanger leurs positions relatives au centre de la structure virtuelle durant l'opération de synchronisation.

Afin d'illustrer notre approche, nous généralisons le développement de la loi de commande sur une classe de fonctions pouvant se mettre sous la forme normale de (Isidori, 1989). Cette forme est commune à plusieurs systèmes mécaniques pleinement

actionnés. Toutefois, cette forme n'est pas toujours apparente pour les systèmes sous-actionnés. Cependant, il est toujours possible, à partir d'un *difféomorphisme* ou un changement de variables adéquats, de re-écrire les équations décrivant la dynamique des systèmes sous-actionnés sous une forme normale. La loi de commande de tels systèmes s'effectue itérativement en utilisant la technique standard du backstepping (Krstić *et al.*, 1995). Le paragraphe suivant est consacré à la généralisation du problème de synchronisation d'un ensemble de systèmes mécaniques pouvant s'écrire sous une forme normale, sur la base de la méthode de la structure virtuelle et le suivi de trajectoires. Une application de cette approche sur un ensemble de véhicules marins sous-actionnés est ensuite détaillée.

6.4 Loi de Commande pour la Synchronisation

En général, un système mécanique peut être représenté par le modèle de second ordre, suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= f_{1i}(x_{1i}) + G_{1i}(x_{1i})x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} &= f_{2i}(x_i) + G_{2i}(x_{2i})u_i \\ y_i &= h_i(x_{1i}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Où l'indice i représente le i ème système du groupe. $x_{ji} \in \mathbb{R}^m$ sont les états, x_i représente le vecteur de tous les états $x_i = [x_{1i}^\top, x_{2i}^\top]^\top \in \mathbb{R}^n$ avec $n = 2m$, $y_i \in \mathbb{R}^m$ est la sortie du système i , $u_i \in \mathbb{R}^m$ est sa commande. Les fonctions G_{1i} , G_{2i} , f_{1i} et f_{2i} sont des supposées continues. Les matrices G_{1i} , G_{2i} , $h_i^{x_{1i}}$ sont de rang plein.

L'objectif de la commande, est de résoudre le problème de synchronisation pour un groupe de r véhicules marins, décrit chacun par le modèle (6.1), qui consiste à faire converger et maintenir chaque véhicule à sa position dans la formation. Ceci est possible en définissant un chemin du centre de la structure virtuelle. Les autres chemins décrits par les membres du groupe doivent se synchroniser avec celui-ci, en d'autres termes les paramètres des chemins θ_i doivent se synchroniser avec le paramètre du chemin du centre de la structure virtuelle θ_0 . Mathématiquement, on formalise le principe de la formation d'un groupe de r membres comme suit.

Définition 4.1 (Problème de Synchronisation) *Soit un groupe de r membres poursuivant chacun une trajectoire désirée $\xi_i(\theta_i)$, $i = 1 \dots r$, où θ_i est le paramètre du chemin i . Trouver la loi de commande u_i permettant de résoudre les deux tâches suivantes :*

1. Pour toute fonction continue $\theta_i(t)$, forcer la sortie y_i à converger vers le chemin désiré $\xi_i(\theta(t))$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \xi_i(\theta_i(t))| = 0 \quad (6.2)$$

2. Forcer les paramètres des chemins i à se synchroniser avec le chemin du centre de la structure.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta_i(t) - \theta_0(t)| = 0, \quad i = 1 \dots r \quad (6.3)$$

Avant de procéder à la résolution du problème (6.2) et (6.3), nous imposons les hypothèses suivantes

Hypothèse 4.1

1. Pour chaque valeur de θ_i , il existe une valeur unique de $y_i(\theta_i)$.
2. Pour un chemin $\xi(\theta) \in \mathcal{C}^n$ il existe un entier K fini tels que $|\xi^{\theta_i}(\theta)| \leq K \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, i = \{0, 1 \dots r\}$.

La première hypothèse signifie que l'on a toujours une solution de x_{1i} par rapport au paramètre θ_i de chaque chemin i . La deuxième hypothèse signifie que l'on a toujours un chemin régulier, et que la structure virtuelle se déplace toujours vers l'avant.

Passons maintenant à la conception de la loi de commande pour chaque membre de la formation par l'utilisation de la technique du backstepping en trois étapes (Kristić *et al.*, 1995). La première partie de la conception de la loi de commande résout la tâche (6.2). La tâche (6.3) est résolue en employant la dérivée par rapport au temps du paramètre du chemin i comme une commande intermédiaire afin de pouvoir synchroniser les chemins i avec celui de la structure virtuelle.

Étape 1 Nous commençons par définir les variables d'erreurs suivantes

$$z_{1i} = y_i - \xi_i(\theta_i) \quad (6.4)$$

$$z_{2i} = x_{2i} - \alpha_{1i} \quad (6.5)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = \dot{\theta}_i - \omega_i(t, x) \quad (6.6)$$

où l'on définit $x = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ri}]^\top$, $\omega_i(t, x)$ est une fonction strictement positive qui spécifie à quelle vitesse, le i -ème membre de formation doit avancer afin de maintenir la synchronisation. α_{1i} est une variable de commande virtuelle associée à l'état x_{2i} qu'on va fixer un peu plus tard dans la conception. Dérivons (6.4) par rapport au temps. Nous obtenons :

$$\dot{z}_{1i} = \dot{y}_i - \xi_i^{\theta_i}(\dot{\tilde{\theta}}_i + \omega_i(t, x)) = h_i^{x_{1i}} G_{1i}(x_{1i}) x_{2i} + h_i^{x_{1i}} f_{1i}(x_{1i}) - \xi_i^{\theta_i}(\dot{\tilde{\theta}}_i + \omega_i(t, x)) \quad (6.7)$$

Choisissons une matrice A_{1i} "Hurwitzienne" solution de l'équation de Riccati. Pour toute matrice $P_{1i} = P_{1i}^\top > 0$:

$$P_{1i}A_{1i} + A_{1i}^\top P_{1i} = -Q_{1i}, \quad Q_{1i} = Q_{1i}^\top > 0 \quad (6.8)$$

Définissons la fonction candidate suivante de Lyapunov :

$$V_1 = \sum_{i=1}^r z_{1i}^\top P_{1i} z_{1i} \quad (6.9)$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} h_i^{x_i} G_{1i} z_{2i} - \sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} \xi_i^{\theta_i} \dot{\theta}_i + \sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} \left[h_i^{x_{1i}} G_{1i} \alpha_{1i} \right. \\ & \left. + h_i^{x_{1i}} f_{1i}(x_{1i}) - \xi_i^{\theta_i} \omega_i(t, x) \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

Nous choisissons la commande virtuelle α_{1i} comme suit :

$$\alpha_{1i} = G_{1i}^{-1} (h_i^{x_{1i}})^{-1} \left[A_{1i} z_{1i} - h_i^{x_{1i}} f_{1i}(x_{1i}) + \xi_i^{\theta_i} \omega_i(t, x) \right] \quad (6.11)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\dot{V}_1 = - \sum_{i=1}^r z_{1i}^\top Q_{1i} z_{1i} + \sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} h_i^{x_i} G_{1i} z_{2i} - \sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} \xi_i^{\theta_i} \dot{\theta}_i \quad (6.12)$$

Étape 2 La dérivée par rapport au temps de (6.5), est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2i} = & \dot{x}_{2i} - \dot{\alpha}_{1i} = G_{2i}(x_i) u_i + f_{2i}(x_i) - \alpha_{1i}^t - \alpha_{1i}^{\theta_i} (\dot{\theta}_i + \omega_i(t, x)) \\ & - \sum_{j=1}^r \alpha_{1j}^{x_{1j}} \left(G_{1j}(x_{1j}) x_{2j} + f_{1j}(x_{1j}) \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

De même, choisissons une matrice A_{2i} "Hurwitzienne" solution de l'équation de Riccati. Alors pour toute matrice $P_{2i} = P_{2i}^\top > 0$:

$$P_{2i}A_{2i} + A_{2i}^\top P_{2i} = -Q_{2i}, \quad Q_{2i} = Q_{2i}^\top > 0 \quad (6.14)$$

puis choisissons la fonction candidate suivante de Lyapunov :

$$V_2 = V_1 + \sum_{i=1}^r z_{2i}^\top P_{2i} z_{2i} \quad (6.15)$$

Sa dérivée par rapport au temps est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & - \sum_{i=1}^r z_{1i}^\top Q_{1i} z_{1i} + \sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} h_i^{x_i} G_{1i} z_{2i} - \sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} \xi_i^{\theta_i} \dot{\theta}_i \\ & + \sum_{i=1}^r 2z_{2i}^\top P_{2i} \left[G_{2i}(x_i) u_i + f_{2i}(x_i) - \alpha_{1i}^t - \alpha_{1i}^{\theta_i} (\dot{\theta}_i + \omega_i(t, x)) \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^r \alpha_{1j}^{x_{1j}} \left(G_{1j}(x_{1j}) x_{2j} + f_{1j}(x_{1j}) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

Le choix de la loi de commande suivante :

$$\begin{aligned} u_i = & G_{2i}^{-1} \left[- P_{2i}^{-1} G_{1i}^\top (h_i^{x_{1i}})^\top P_{1i} z_{1i} + A_{2i} z_{2i} - f_{2i}(x_i) + \alpha_{1i}^t + \alpha_{1i}^{\theta_i} \omega_i(t, x) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^r \alpha_{1j}^{x_{1j}} \left(G_{1j}(x_{1j}) x_{2j} + f_{1j}(x_{1j}) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

permet d'écrire :

$$\dot{V}_2 = - \sum_{i=1}^r z_i^\top Q_i z_i - \left(\sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} \xi_i^{\theta_i} + \sum_{i=1}^r 2z_{2i}^\top P_{2i} \alpha_{1i}^{\theta_i} \omega_i \right) \dot{\theta}_i \quad (6.18)$$

avec $z_i = [z_{1i}^\top, z_{2i}^\top]^\top$ et $Q_i := \text{diag}(Q_{1i}, Q_{2i})$. Remarquons ici, que si $\dot{\theta}_i = 0$ dans ce cas nous aurons

$$\dot{V}_2 \leq - \sum_{i=1}^r z_i^\top Q_i z_i \quad (6.19)$$

Étape 3 L'équation (6.17) résout donc le premier objectif de la tâche (6.2). Pour que l'on puisse terminer la résolution de la deuxième tâche (6.1), nous devons procéder par trouver une loi de mise à jour de $\dot{\theta}_i$ afin de rendre négatif le second membre de (6.17). Pour cela, considérons la fonction de Lyapunov augmentée suivante :

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \gamma_i (\theta_i - \theta_0)^2 \quad (6.20)$$

Sa dérivée par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & - \sum_{i=1}^r z_i^\top Q_i z_i - \left(\sum_{i=1}^r 2z_{1i}^\top P_{1i} \xi_i^{\theta_i} + \sum_{i=1}^r 2z_{2i}^\top P_{2i} \alpha_{1i}^{\theta_i} \omega_i \right) \dot{\theta}_i \\ & + \sum_{i=1}^r \gamma_i (\theta_i - \theta_0) (\dot{\theta}_i + \omega_i - \dot{\theta}_0) \end{aligned} \quad (6.21)$$

A partir de (6.21), nous pouvons tout d'abord choisir la vitesse de formation ω_i , suivante :

$$\omega_i = \dot{\theta}_0 \quad (6.22)$$

Le choix de $\dot{\theta}_0$, peut être considéré comme celui de dans (Do, 2004), soit :

$$\dot{\theta}_0 = \omega_0(t)(1 - \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_0)})e^{-z^\top \Lambda z} \quad (6.23)$$

où $\omega_0(t)$ est une fonction bornée définie positive, $z = [z_{11}^\top, z_{12}^\top, \dots, z_{1n}^\top]^\top$, Λ est une matrice définie positive, et κ_1 et κ_2 sont deux constantes positives, avec $\kappa_1 > 1$. Le choix de ce type de fonctions s'explique comme suit : quand l'erreur entre la position du membre et la trajectoire à suivre est grande, le centre de la structure virtuelle attend à ce que le reste des membres de la formation l'attrape. Quand cette erreur converge vers zéro alors $\dot{\theta}_0$ se rapproche de la valeur $\omega_0(t)$, la vitesse avec laquelle la formation se déplace.

Nous pouvons donc ré-écrire l'équation (6.21) comme suit :

$$\dot{V}_3 = - \sum_{i=1}^r z_i^\top Q_i z_i - \sum_{i=1}^r \sigma_i \dot{\theta}_i \quad (6.24)$$

avec $\sigma_i = 2z_{1i}^\top P_{1i} \xi_i^{\theta_i} + 2z_{2i}^\top P_{2i} \alpha_{1i}^{\theta_i} \omega_i - \gamma_i(\theta_i - \theta_0)$. Il est clair que pour rendre négatif le second membre de (6.23), il suffit de choisir :

$$\dot{\theta}_i = \sigma_i \quad (6.25)$$

Par conséquent, on a :

$$\dot{V}_3 \leq - \sum_{i=1}^r z_i^\top Q_i z_i - \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \quad (6.26)$$

Ainsi, nous enonçons le Théorème suivant :

Théorème 4.1 *Le système (6.1), bouclé avec la commande (6.17) devient :*

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= F_i(x_i)z_i + g_i(t, x_i, \theta_i)\dot{\theta}_i \\ F_i(x_i) &= \begin{bmatrix} A_{1i} & h_i^{x_{1i}} G_{1i} \\ -P_{2i}^{-1} G_{1i}^\top (h_i^{x_{1i}})^\top P_{1i} & A_{2i} \end{bmatrix} \\ g_i(t, x_i, \theta_i) &= \begin{bmatrix} \xi_i^{\theta_i} \\ -\alpha_{1i}^{\theta_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.27)$$

En choisissant pour $\dot{\theta}_i$ l'expression (6.25) et pour $\omega_i(t, x)$ l'expression (6.23), les objectifs (6.2) et (6.3) sont atteints.

Démonstration : Prenons la fonction de Lyapunov définie par $V_3 = \sum_{i=1}^r z_i^\top P_i z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \gamma_i (\theta_i - \theta_0)^2$. Sa dérivée par rapport au temps, donne l'inégalité (6.26), donc on a : $V_3 \leq 0$, i.e $(z_i(t), \theta_i(t) - \theta_0(t))$ est borné. En appliquant le lemme de Barbalat, (Khalil, 1996) à l'équation (6.26), nous en déduisons que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_{1i} = \lim_{t \rightarrow \infty} z_{2i} = 0 \quad (6.28)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i = 0 \quad (6.29)$$

A partir de de (6.28) et (6.29), il est claire que l'on a satisfait les conditions (6.2) et (6.3). \square

Le théorème 4.1 établit que tous les paramètres des chemins θ_i se synchronisent et que le groupe se déplace le long du chemin dans une configuration donnée. Pour un membre de la formation, la loi et la mise à jour du paramètre du chemin sont comme suit :

$$u_i = G_{2i}^{-1} \left[-P_{2i}^{-1} G_{1i}^\top (h_i^{x_{1i}})^\top P_{1i} z_{1i} + A_{2i} z_{2i} - f_{2i}(x_i) + \alpha_{1i}^t + \alpha_{1i}^{\theta_i} \omega_i(t, x) + \sum_{j=1}^r \alpha_{1j}^{x_{1j}} \left(G_{1j}(x_{1j}) x_{2j} + f_{1j}(x_{1j}) \right) \right] \quad (6.30)$$

$$\dot{\theta}_i = \sigma_i + \omega_0(t) (1 - \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_0)}) e^{-z^\top \Pi z}$$

On note que la loi de commande pour un membre de la formation dépend non seulement de l'information sur ses états mais aussi de l'information sur les états des autres membres du groupe.

6.5 Introduction d'une action intégrale

Le contrôleur généré par le backstepping sur le modèle (6.1), suppose que le modèle n'est pas soumis à des perturbations. Par conséquent, celui-ci ne permet pas d'éliminer les perturbations externes à moyennes non nulles à moins qu'elles ne soient à la sortie d'un procédé intégrateur. Afin d'être en mesure d'éliminer ces erreurs, une solution consiste à doter le contrôleur obtenus d'une action intégrale (Loría, 2001). L'idée de principe se résume à introduire, d'une manière virtuelle, un intégrateur dans le modèle et a procéder à l'élaboration de la loi de commande de façon conventionnelle à l'aide de la méthode du backstepping. Ensuite, cet intégrateur sera transféré dans le contrôleur. Cela permettra de garantir une erreur nulle due aux perturbations à moyennes non nulles à l'entrée et/ou à la sortie du procédé.

Considérons le système non-linéaire de (Skjetne, 2005), pouvant se mettre sous la forme normale (6.1) suivante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \Gamma \left[g(x, u) + \Phi(x)b \right] \\ \dot{b} &= 0\end{aligned}\tag{6.31}$$

$$y = h(x)\tag{6.32}$$

avec $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ est une constante (ou à moyenne non nulle) provenant des perturbations externes. Le biais b est dépendant de la commande u par l'intermédiaire de la matrice Γ qui est de rang plein. Si $b = 0$ alors le système est non-perturbé et pouvant s'écrire sous la forme (6.1).

Une étape supplémentaire dans la conception du contrôleur s'avère donc nécessaire pour obtenir une loi d'adaptation pour \hat{b} . La loi d'adaptation est dérivée selon (Skjetne, 2005) comme suit :

$$\dot{\hat{b}} = 2\Pi\Phi(x)^\top \Gamma^\top \Upsilon z\tag{6.33}$$

avec l'erreur d'estimation $\tilde{b} = b - \hat{b}$, $\Pi = \Pi^\top > 0$ est une matrice de gain, $\Phi(x)$ est la matrice de régression adaptative et Υ satisfait la relation suivante :

$$\Upsilon F(x) + F(x)^\top \Upsilon \leq -I\tag{6.34}$$

où $F(x)$ est celle donnée par (6.27). En boucle fermée, l'équation (6.27) avec perturbation s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= F_i(x_i)z_i + g_i(t, x_i, \theta_i)\dot{\theta}_i - \Gamma_i\Phi_i(x_i)\tilde{b}_i \\ \dot{\tilde{b}} &= -2\Pi\Phi(x)^\top \Gamma^\top \Upsilon_i z_i \\ \dot{\theta}_i &= \sigma_i + \omega_0(t)(1 - \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_0)})e^{-z^\top \Pi z}\end{aligned}\tag{6.35}$$

Le schéma bloc du système (6.1) bouclé est représenté par la figure 6.9.

Théorème 4.2 *Considérons la boucle fermée avec le biais de perturbation dû aux perturbations environnementales (6.35), montrée à la figure 6.9 pour $i = 1, \dots, n$. La loi de commande (6.17) ainsi que la loi d'adaptation (6.33) utilisées, permettent de stabiliser (z, σ, \tilde{b}) autour de l'origine, d'une manière uniformément bornée, avec*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| (z(t), \sigma(t), \tilde{b}) \right| = 0$$

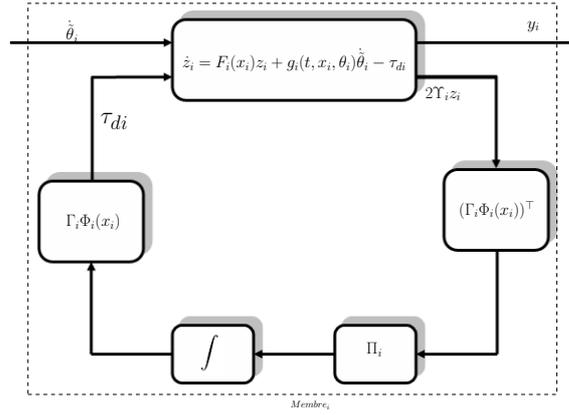


FIG. 6.9 – Système (6.1) en boucle fermée (cas perturbé)

Démonstration : Afin d'analyser la stabilité du système perturbé en boucle fermée (6.35), nous proposons la fonction de Lyapunov candidate suivante

$$V_b = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i^\top \Pi_i^{-1} \tilde{b}_i$$

Sa dérivé par rapport au temps donne :

$$\dot{V}_b = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i^\top \Pi_i^{-1} \dot{\tilde{b}}_i = -2 \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i^\top \Phi(x)^\top \Gamma^\top \Upsilon z \quad (6.36)$$

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov V_{clb} constituée par la fonction de Lyapunov V_3 augmentée par la fonction de Lyapunov V_b comme suit

$$V_{clb} = V_3 + V_b$$

Sa dérivée par rapport au temps donne l'inégalité suivante :

$$\dot{V}_{clb} \leq - \sum_{i=1}^r z_i^\top Q_i z_i - \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \quad (6.37)$$

L'inégalité (6.37) est négative ou nulle ce qui implique que la solution $(z(t), \sigma(t), \tilde{b}(t))$ est bornée. En appliquant le même argument que celui employé dans la preuve du théorème 4.1, nous concluons que l'origine $(z(t), \sigma(t))$ converge asymptotiquement vers zéro ; c'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |(z(t), \sigma(t))| = 0$$

□

Exemple Pour illustrer notre approche sur le contrôle de formation, nous proposons de simuler le résultat obtenue sur un modèle simple de type double intégrateur, ([Ghommem et al., 2007b](#)), donnée comme suit

$$\ddot{x}_i = u_i, \quad i = 1 \dots n \quad (6.38)$$

que l'on peut écrire sur la forme (6.1), comme suit

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1i} &= x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} &= u_i \\ y_i &= x_{1i} \end{aligned} \quad (6.39)$$

avec $f_{1i}(x_{1i}) = f_{2i}(x_i) = 0$, $G_{1i}(x_{1i}) = G_{2i}(x_i) = 1$ et $h(x_{1i}) = x_{1i}$. La technique du backstepping appliquée à chacun des doubles intégrateurs donne les lois de commande d'adaptation suivantes :

$$\begin{aligned} u_i &= -k_{2i}z_{2i} - z_{1i} + \alpha_{1i}^t + \alpha_{1i}^{\theta_i} \omega_i(t, x) + \sum_{j=1}^n \alpha_{1i}^{x_{1j}} x_{2j} \\ \dot{\theta}_i &= -\gamma_i(\theta_i - \theta_0) + \left(\alpha_{1i}^{\theta_i} z_{2i} + \xi_i^{\theta_i}(\theta_i) z_{1i} \right) + \omega_0(t) (1 - \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_0)}) e^{-\kappa_3 z^\top \Pi z} \end{aligned} \quad (6.40)$$

où k_{2i} sont des constantes scalaires. Les fonctions stabilisantes α_{1i} sont données par l'expression suivante $\alpha_{1i} = -k_{1i}z_{1i} + \xi_i^{\theta_i}(\theta_i) \omega_i(t, x)$. Les variables d'erreurs z_{1i} et z_{2i} sont indiquées dans les équations (6.4) et (6.5).

Nous considérons la simulation d'un groupe de trois agents¹ afin d'illustrer l'efficacité de ce contrôleur. Les conditions initiales ainsi que les paramètres qui rentrent en jeu dans ce contrôleurs sont données comme suit :

$$\begin{aligned} k_{1i} &= 5, \quad k_{2i} = 5, \quad \gamma_i = 1 \\ \kappa_1 &= 0.5, \quad \kappa_2 = 10, \quad \kappa_3 = 10 \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_1(0) = 1, \quad \theta_2(0) = 0.5 \end{aligned}$$

La trajectoire de référence, que le centre de la structure virtuelle doit suivre, est choisie tel que $\xi_0 = 0$. Pour les autres agents, les trajectoires choisies sont :

$$\begin{aligned} \xi_1(\theta_1) &= 5 + 3 \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \\ \xi_2(\theta_2) &= -5 - 3 \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

¹Agent pour dire que tout un système mobile est modélisé par un double intégrateur

La position pour chaque agent est donnée par :

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = 4, \quad x_{13} = -3$$

Les choix faits pour les chemins ξ_i signifient que le premier agent est contraint pour

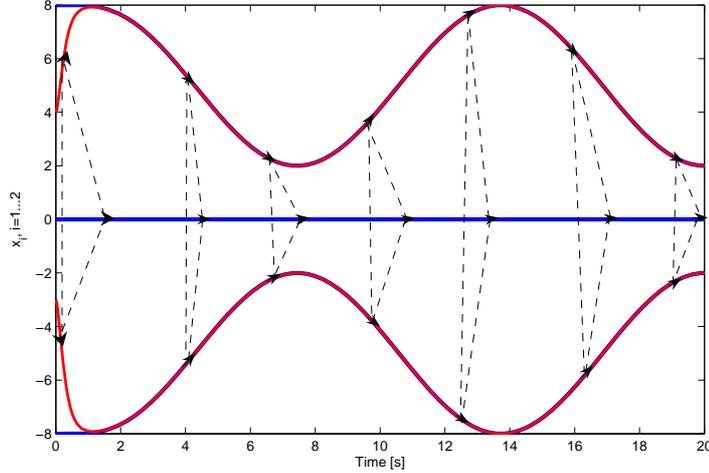


FIG. 6.10 – Poursuite de trajectoire pour les trois agents

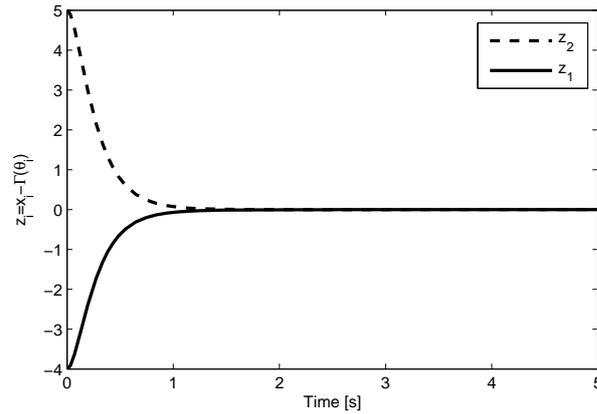
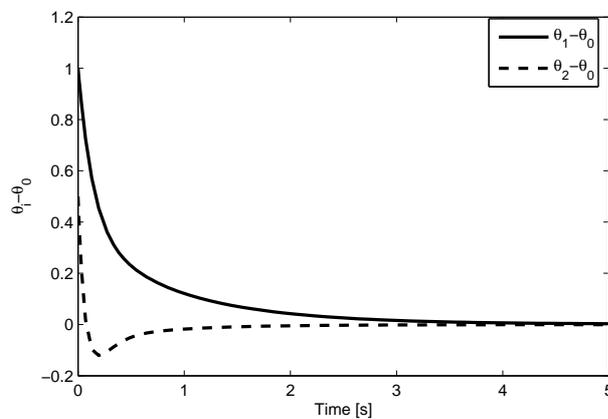
suivre une ligne droite. Par contre les deux autres agents se déplacent sur deux chemins sinusoïdaux. L'évolution des positions des agents en fonction du temps sont tracés à la figure 6.10. Les variables d'erreurs sont tracées à la figure 6.11, tandis que les erreurs sur les paramètres des chemins sont tracées à la figure 6.12. Il est clair que, d'après ces figures, chaque agent suit asymptotiquement son chemin désiré produit par la structure virtuelle. Par conséquent la formation est ainsi réussie.

6.6 Contrôle de Formation de Navires Sous-Actionnés

Nous allons pouvoir appliquer cette théorie sur la coopération d'un ensemble de bateaux sous-actionnés. Considérons le modèle d'un tugboat (figure 6.13) équipé de deux hélices/gouvernails en arrière et d'une hélice transversale. Celle-ci est rendue non opérationnelle durant la manoeuvre. Comme au chapitre 1, nous simplifions les modèles mathématiques des bateaux pour les écrire sous la forme suivante :

$$\dot{\eta}_i = \mathbf{R}(\psi_i)\nu_i \quad (6.41)$$

$$\mathbf{M}_i\dot{\nu}_i = -\mathbf{C}(\nu_i)_i\nu_i - \mathbf{D}_i\nu_i + \tau_i + b_i \quad (6.42)$$

FIG. 6.11 – Convergence des variables $z_i, i = 1 \dots 2$ FIG. 6.12 – Synchronisation de θ_1 et θ_2 avec θ_0

où b_i est le vecteur qui rassemble les constantes inconnues issues des perturbations environnementales, que nous considérons nulles en premier temps. i.e. $b_i = [0]_{3 \times 1}$.

6.6.1 Configuration du groupe de la formation

Pour un nombre de n -bateaux, on associe n chemins paramétrés. Quand ces derniers sont synchronisés, les bateaux sont dit en formation. Nous adoptons la structure virtuelle décrite précédemment pour réaliser cette formation. Le centre de cette structure se déplace le long d'un chemin de référence $\xi_0(\theta_0) = [x_{d0}(\theta_0), y_{d0}(\theta_0)]^T$, avec θ_0 le paramètre de ce chemin.



FIG. 6.13 – Modèle 3D d'un tugboat.

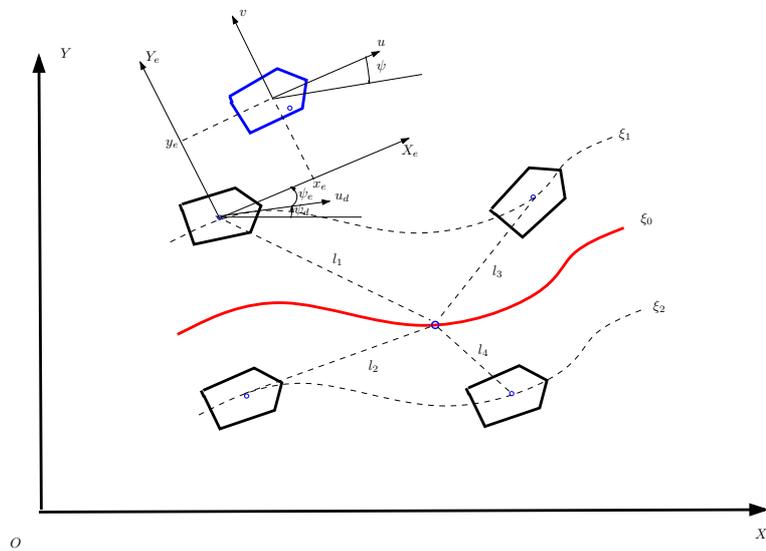


FIG. 6.14 – Configuration des bateaux durant la formation.

Nous désignons par $l_i(x_{d0}(\theta_i), y_{d0}(\theta_i))$, la distance entre le centre de la structure virtuelle et chaque bateau de la formation (figure 6.14). Quand le centre de la structure virtuelle se déplace le long du chemin $\xi_0(\theta_0)$, le reste des bateaux vont se déplacer le long de leurs chemins $\xi_i(\theta_i)_{1 \leq i \leq n} = [x_{di}(\theta_i), y_{di}(\theta_i)]^T$, où θ_i est le paramètre du i -ème chemin.

$$\xi_i(\theta_i) = \xi_0(\theta_0) + \mathbf{R}(\psi_{d0}(\theta_i))l_i(x_{d0}(\theta_i), y_{d0}(\theta_i)) \quad (6.43)$$

$\mathbf{R}(\psi_{d0}(\theta_i))$ est la matrice de rotation du repère lié au centre de la structure virtuelle du

repère fixe OXY donnée par

$$\mathbf{R}(\psi_{d0}(\theta_i)) = \begin{bmatrix} \cos \psi_0(\theta_i) & -\sin \psi_0(\theta_i) & 0 \\ \sin \psi_0(\theta_i) & \cos \psi_0(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

$$\psi_{d0}(\theta_i) = \arctan\left(\frac{y_{d0}^{\theta_i}}{x_{d0}^{\theta_i}}\right) \quad (6.45)$$

6.6.2 Formulation du problème

Afin de simplifier la conception du contrôleur pour la formation, nous supposons que tous les états des bateaux sont mesurés et qu'il n'y a pas de retard de transmission entre les bateaux. Nous considérons également que les conditions de l'Hypothèse 4.1 sont vérifiées. En suivant la définition 4.1, le problème de synchronisation des bateaux se résume en deux conditions, à savoir :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\eta_i(t) - \eta_{di}(t)\| = 0 \quad (6.46a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta_i(t) - \theta_0(t)| = 0 \quad (6.46b)$$

L'objectif que nous devons atteindre est double : *i)* Poursuite de la position et orientation des bateaux (chaque bateau doit se déplacer avec une vitesse linéaire tangente au chemin). *ii)* Synchronisation des paramètres de l'ensemble des chemins.

6.6.3 Suivi de chemins et lois de commandes

Identiquement au chapitre 5, nous interprétons l'erreur de poursuite du chemin pour chaque véhicule marin exprimée dans un repère attaché au chemin ξ_i comme suit :

$$\begin{bmatrix} x_{ei} \\ y_{ei} \\ \psi_{ei} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^\top(\psi_i) \begin{bmatrix} x_i - x_{di} \\ y_i - y_{di} \\ \psi_i - \psi_{di} \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

avec ψ_{di} l'angle entre le chemin et l'axe \mathbf{X} défini par

$$\psi_{di} = \arctan\left(\frac{y_{di}^{\theta_i}}{x_{di}^{\theta_i}}\right) \quad (6.48)$$

Dans la figure 6.14, (O, X, Y) désigne un repère fixe attaché à la terre ; (O_{ei}, X_{ei}, Y_{ei}) est un repère attaché au chemin ξ_i , tels que $(O_{ei}X_{ei})$ et $(O_{ei}Y_{ei})$ sont respectivement parallèles aux vecteurs vitesses linéaires d'avancement u et de glissement v . La

différentiation par rapport au temps de l'équation (6.47), donne le modèle d'erreurs cinématiques suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ei} &= u_i - u_{di} \cos \psi_{ei} + r_i y_{ei} \\ \dot{y}_{ei} &= v_i + u_{di} \sin \psi_{ei} + r_i x_{ei} \\ \dot{\psi}_{ei} &= r_i - r_{di}\end{aligned}\tag{6.49}$$

où,

$$u_{di} = \sqrt{x_{di}^{\theta_i}(\theta_i)^2 + y_{di}^{\theta_i}(\theta_i)^2} \dot{\theta}_i\tag{6.50}$$

$$r_{di} = \frac{x_{di}^{\theta_i}(\theta_i) y_{di}^{\theta_i^2}(\theta_i) - x_{di}^{\theta_i^2}(\theta_i) y_{di}^{\theta_i}(\theta_i)}{x_{di}^{\theta_i}(\theta_i)^2 + y_{di}^{\theta_i}(\theta_i)^2} \dot{\theta}_i\tag{6.51}$$

Les équations (6.50) et (6.51) expriment respectivement les vitesses linéaires et angulaires désirées de chaque bateau. Il faut noter que ces vitesses sont ajustées par $\dot{\theta}_i$. Le modèle d'erreurs cinématiques avec la deuxième équation dynamique (6.42) permettent de ré-écrire le modèle dynamique pour chaque véhicule marin comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ei} &= u_i - u_{di} \cos \psi_{ei} + r_i y_{ei} \\ \dot{y}_{ei} &= v_i + u_{di} \sin \psi_{ei} + r_i x_{ei} \\ \dot{\psi}_{ei} &= r_i - r_{di} \\ \dot{u}_i &= \bar{\tau}_{ui} \\ \dot{v}_i &= -a_i v_i - b_i u_i r_i \\ \dot{r}_i &= \bar{\tau}_{ri}\end{aligned}\tag{6.52}$$

avec :

$$\begin{aligned}a_i &= \frac{m_{11i}}{m_{22i}}, & b_i &= \frac{d_{22i}}{m_{22i}}, \\ \bar{\tau}_{ui} &= \frac{m_{22i}}{m_{11i}} v_i r_i - \frac{d_{11i}}{m_{11i}} u_i + \frac{1}{m_{11i}} \tau_{ui} \\ \bar{\tau}_{ri} &= \frac{m_{11i} - m_{22i}}{m_{33i}} u_i v_i - \frac{d_{33i}}{m_{33i}} r + \frac{1}{m_{33i}} \tau_r\end{aligned}$$

Nous avons à l'aide de la transformation (6.47), converti le problème de suivi de chemins en un problème de régulation de (6.52).

Puisque la structure (6.52) est sous la forme triangulaire, semblable à celle de (6.1), nous pouvons donc utiliser la technique du backstepping afin de déterminer le contrôleur pour le système (6.52). Cependant, étant donné que celui-ci présente une contrainte de second-ordre, nous ne pouvons pas appliquer directement la technique du backstepping vectorielle précédemment détaillée, Nous apportons donc quelques modifications légères à la technique standard.

Idée de la commande : La technique du *backstepping* consiste à trouver une fonction stabilisante pour chaque sous-système jusqu'à parvenir à déterminer la vraie commande du système. Pour notre système (6.52), nous commençons par la stabilisation de la dynamique de x_{ei} . Ceci s'effectue en considérant u_i comme une entrée de commande à celui-ci. Par contre pour stabiliser la dynamique y_{ei} , nous ne pouvons pas considérer v_i comme une entrée de commande. En effet, celle-ci est de nature non commandable (sous-actionnée). Une solution est de considérer la dérivée par rapport au temps du paramètre θ_i comme une entrée intermédiaire servant à la stabilisation de y_{ei} . Toutefois, cette méthode n'est pas directement applicable puisque nous voulons utiliser cette variable comme une entrée de commande pour synchroniser le mouvement du groupe. Pour remédier, nous définissons la variable suivante :

$$\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_i - \omega_i(t, x_e, y_e, \psi_e) \quad (6.53)$$

avec $x_e = [x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{en}]^\top$, $y_e = [y_{e1}, y_{e2}, \dots, y_{en}]^\top$, $\psi_e = [\psi_{e1}, \psi_{e2}, \dots, \psi_{en}]^\top$. $\omega_i(t, x_e, y_e, \psi_e)$ est une fonction définie positive, définissant la vitesse pour laquelle le véhicule marin se déplace, afin de maintenir sa position dans la formation.

Avant de procéder à la conception du contrôleur, nous définissons les variables suivantes :

$$\begin{aligned} u_{ei} &= u_i - \alpha_{ui} \\ \bar{\psi}_{ei} &= \psi_{ei} - \alpha_{\psi_{ei}} \\ r_{ei} &= r_i - \alpha_{r_i} \end{aligned} \quad (6.54)$$

α_{ui} , $\alpha_{\psi_{ei}}$ et α_{r_i} sont des commandes virtuelles que l'on déterminera plus tard dans le développement de la loi de commande. Afin d'être cohérent dans la présentation, nous procéderons au développement en quatre étapes en commençant par la dynamique de x_{ei} .

Étape 1 : Stabilisation de la dynamique de x_{ei} En substituant la première équation de (6.54) dans la première équation de (6.52) avec l'utilisation de la relation (6.53), nous obtenons l'équation suivante :

$$\dot{x}_{ei} = u_{ei} + \alpha_{ui} - u_{di} \cos \psi_{ei} + r_i y_{ei} \quad (6.55)$$

En utilisant l'expression de la vitesse linéaire désirée définie en (6.50) tout en définissant $\bar{u}_{di} = \sqrt{x_{di}^{\theta_i}(\theta_i)^2 + y_{di}^{\theta_i}(\theta_i)^2}$, l'équation (6.55) se ré-écrit de la façon suivante :

$$\dot{x}_{ei} = u_{ei} + \alpha_{ui} - \bar{u}_{di}(\dot{\theta}_i + \omega_i) \cos \psi_{ei} + r_i y_{ei} \quad (6.56)$$

Choisissons maintenant la commande virtuelle α_{ui} comme suit :

$$\alpha_{ui} = -\varphi_{1i} + \bar{u}_{di} \omega_i \cos \psi_{ei} \quad (6.57)$$

avec $\varphi_{1i} = \frac{k_{1i}x_{ei}}{\varpi_{1i}}$, $k_{1i} > 0$ et $\varpi_{1i} = \sqrt{1 + x_{ei}^2 + y_{ei}^2}$. La dynamique de x_{ei} en boucle fermée est donnée par :

$$\dot{x}_{ei} = -\varphi_{1i} - \bar{u}_{di}\dot{\theta}_i \cos \psi_{ei} + u_{ei} + r_i y_{ei} \quad (6.58)$$

Étape 2 : Stabilisation de la dynamique de y_{ei} .

Imposons une vitesse désirée dans la direction non-actionnée v_{di} . L'erreur de la vitesse de glissement est donnée par

$$v_{ei} = v_i - v_{di}$$

Choisissons pour la commande virtuelle $\alpha_{\psi_{ei}}$ comme suit

$$\alpha_{\psi_{ei}} = -\arcsin\left(\frac{\varphi_{2i} + v_{di}}{u_{d0i}}\right) \quad (6.59)$$

avec $\varphi_{2i} = \frac{k_{2i}y_{ei}}{\varpi_{1i}}$, $k_{2i} > 0$ and $u_{d0i} = \bar{u}_{di}\omega_i$. En substituons (6.59) dans la deuxième équation de (6.52), nous obtenons la dynamique suivante en boucle fermée de y_{ei} :

$$\dot{y}_{ei} = -\varphi_{2i} + v_{ei} + u_{d0i}\Delta_i + \bar{u}_{di}\dot{\theta}_i \sin \psi_{ei} - r_i x_{ei} \quad (6.60)$$

où nous avons défini $\Delta_i = \sin \bar{\psi}_{ei} \cos \alpha_{\psi_{ei}} + ((\cos \bar{\psi}_{ei} - 1) \sin \alpha_{\psi_{ei}})$.

Étape 3 : Stabilisation de la dynamique de $\bar{\psi}_{ei}$.

En dérivant par rapport au temps la deuxième équation de (6.54)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}}_{ei} = & \left(1 - \frac{k_{2i}x_{ei}}{\varpi_{1i}U_i}\right)(r_{ei} + \alpha_{ri}) - r_{di} - \frac{k_{2i}y_{ei}x_{ei}}{\varpi_{1i}^3U_i}u_{ei} + \frac{k_{2i}(1 + x_{ei}^2)}{\varpi_{1i}^2U_i}v_{ei} - \frac{\varphi_{2i} + v_{di}}{u_{d0i}U_i}\dot{u}_{d0i} \\ & + \frac{\dot{v}_{di}}{U_i} + \frac{k_{2i}}{U_i} \left[\frac{v_{di} + u_{di} \sin \psi_{ei}}{\varpi_{1i}} - \frac{y_{ei}^2(v_{di} + u_{di} \sin \psi_{ei}) - y_{ei}x_{ei}(\alpha_{ui} - u_{di} \cos \psi_{ei})}{\varpi_{1i}^3} \right] \end{aligned} \quad (6.61)$$

avec : $U_i = \sqrt{u_{d0i}^2 - (\varphi_{2i} + v_{di})^2}$. A partir de l'équation (6.61), nous pouvons choisir k_{2i} tel que

$$\begin{aligned} k_{2i} & \leq |\min(u_{d0i}) - \max(v_{di})| := k'_{2i} \\ k_{2i} & \leq \min(U_i) := k''_{2i} \end{aligned}$$

Soit :

$$k_{2i} = \min(k'_{2i}, k''_{2i})$$

La commande virtuelle α_{ri} peut donc être choisie afin de stabiliser la dynamique de (6.61) comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_{ri} = & \left(1 - \frac{k_{2i}x_{ei}}{\varpi_{1i}U_i}\right)^{-1} \left(-\frac{k_{3i}\bar{\psi}_{ei}}{\varpi_{2i}} + \bar{r}_{di}\omega_i - \frac{\dot{v}_{di}}{U_i} - \frac{u_{d0i}\Delta_i y_{ei}}{\bar{\psi}_{ei}} + \frac{\varphi_{2i} + v_{di}}{u_{d0i}U_i}\dot{u}_{d0i} \right. \\ & \left. - \frac{k_{2i}}{U_i} \left[\frac{v_{di} + u_{d0i} \sin \psi_{ei}}{\varpi_{1i}} - \frac{y_{ei}^2(v_{di} + u_{di} \sin \psi_{ei}) + y_{ei}x_{ei}(\alpha_{ui} - u_{d0i} \cos \psi_{ei})}{\varpi_{1i}^3} \right] \right) \end{aligned} \quad (6.62)$$

pour laquelle nous avons définie $\bar{r}_{di} = \frac{x_{di}^{\theta_i}(\theta_i)y_{di}^{\theta_i^2}(\theta_i) - x_{di}^{\theta_i^2}(\theta_i)y_{di}^{\theta_i}(\theta_i)}{x_{di}^{\theta_i}(\theta_i)^2 + y_{di}^{\theta_i}(\theta_i)^2}$. Remarquons que le terme $\frac{u_{d0i}\Delta_i y_{ei}}{\bar{\psi}_{ei}}$ est inclus dans l'expression de la commande virtuelle α_{ri} afin d'éliminer le produit mixte dans l'expression de la dynamique de y_{ei} . Par ailleurs ce terme est bien définie car $\frac{\sin \bar{\psi}_e}{\bar{\psi}_e} = \int_0^1 \cos t\bar{\psi}_e dt$ et $\frac{\cos \bar{\psi}_e - 1}{\bar{\psi}_e} = \int_0^1 \sin t\bar{\psi}_e dt$ sont définies pour toute valeur de $\bar{\psi}_e$.

La dynamique de $\bar{\psi}_e$ en boucle fermée est par suite donnée par l'expression suivante

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}}_{ei} = & -\frac{k_{3i}\bar{\psi}_{ei}}{\varpi_{2i}} + \left(1 + \frac{k_{2i}x_{ei}}{\varpi_{1i}U_i}\right)r_{ei} - \frac{k_{2i}y_{ei}x_{ei}}{\varpi_{1i}^3U_i}u_{ei} + \frac{k_{2i}(1+x_{ei}^2)}{\varpi_{1i}^3U_i}v_{ei} - \frac{u_{d0i}\Delta_i y_{ei}}{\bar{\psi}_{ei}} \\ & + \frac{\bar{u}_{di}\dot{\theta}_i k_{2i}}{U_i} \left[\frac{\sin \psi_{ei}}{\varpi_{1i}} - \frac{y_{ei}^2 \sin \psi_{ei} - x_{ei}y_{ei} \cos \psi_{ei}}{\varpi_{1i}^3} \right] \end{aligned} \quad (6.63)$$

Afin de déterminer l'expression de v_{di} , nous différencions par rapport au temps $v_{ei} = v_i - v_{di}$. On obtient

$$\begin{aligned} \dot{v}_{ei} &= -a_i v_i - b_i u_i r_i - \dot{v}_{di} \\ &= -a_i v_i - b_i u_{ei} \alpha_{ri} - b_i r_{ei} u_i - b_i \alpha_{ui} \alpha_{ri} - \dot{v}_{di} \end{aligned} \quad (6.64)$$

ce qui nous permet de choisir l'expression de \dot{v}_{di} comme suit

$$\dot{v}_{di} = -a_i v_{di} - b_i \alpha_{ui} \alpha_{ri} + \frac{k_{2i}(1+x_{ei}^2)}{\varpi_{1i}^3 U_i} \bar{\psi}_{ei} \quad (6.65)$$

le dernier terme de l'expression (6.65) est inclus pour éliminer le produit mixte dans l'expression de la dynamique de $\bar{\psi}_{ei}$. Ceci permet d'écrire

$$\dot{v}_{ei} = -a_i v_{ei} - b_i r_{ei} u_i - b_i u_{ei} \alpha_{ri} - \frac{k_{2i}(1+x_{ei}^2)}{\varpi_{1i}^3 U_i} \bar{\psi}_{ei} \quad (6.66)$$

Étape 4 : Stabilisation de la dynamique (u_{ei}, r_{ei})

Dans cette étape, les commandes \bar{r}_{ui} et \bar{r}_{ri} seront déterminées. A partir de la première équation (6.54), il est facile de déterminer la dérivée par rapport au temps de u_{ei} . Ainsi, on obtient l'expression suivante

$$\begin{aligned} \dot{u}_{ei} = & \bar{r}_{ui} - \alpha_{ui}^{\theta_i} (\dot{\theta}_i + \omega_i) - \partial \alpha_{ui}^t - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{x_{ej}} \left(u_j - \bar{u}_{dj} (\dot{\theta}_j + \omega_j) \cos \psi_{ej} + r_j y_{ej} \right) \\ & - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{y_{ej}} \left(\bar{u}_{dj} (\dot{\theta}_j + \omega_j) \sin \psi_{ej} - r_j x_{ej} + v_j \right) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{\psi_{ej}} \left(r_{ej} + \alpha_{rj} \right. \\ & \left. - \bar{r}_{dj} (\dot{\theta}_j + \omega_j) \right) \end{aligned} \quad (6.67)$$

L'équation (6.67), nous motive à choisir la loi de commande $\bar{\tau}_{ui}$ comme suit

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{ui} &= -k_{4i}u_{ei} + \alpha_{ui}^{\theta_i}\omega_i + \alpha_{ui}^t + \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{x_{ej}} \left(u_j - u_{d0j} \cos \psi_{ej} + r_j y_{ej} \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{y_{ej}} \left(u_{d0i} \sin \psi_{ei} - r_j x_{ej} + v_j \right) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{\psi_{ej}} \left(r_{ej} + \alpha_{rj} - \bar{r}_{dj} \omega_j \right) \\ &\quad + \frac{k_{2i} y_{ei} x_{ei}}{\varpi_{1i}^3 U_i} \bar{\psi}_{ei} + b_i v_{ei} \alpha_{ri} - x_{ei}\end{aligned}\quad (6.68)$$

avec k_{4i} une constante positive que l'on déterminera dans l'analyse de la stabilité. Les deux derniers termes de l'équation (6.68) sont utilisés afin d'éliminer les produits mixtes en x_{ei} , $\bar{\psi}_{ei}$ et v_{ei} . La substitution de (6.68) dans (6.67) permet d'écrire la dynamique en boucle fermée de u_{ei} comme suit

$$\begin{aligned}\dot{u}_{ei} &= -k_{4i}u_{ei} - \alpha_{ui}^{\theta_i} \dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{x_{ej}} \bar{u}_{dj} \dot{\theta}_j \cos \psi_{ej} - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{\psi_{ej}} \bar{r}_{dj} \dot{\theta}_j + b_i v_{ei} \alpha_{ri} - x_{ei} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{y_{ej}} \left(v_{ej} + \bar{u}_{dj} \dot{\theta}_j \sin \psi_{ej} \right) + \frac{k_{2i} y_{ei} x_{ei}}{\varpi_{1i}^3 U_i} \bar{\psi}_{ei}\end{aligned}\quad (6.69)$$

De même, à partir de la dernière équation de (6.54), la dérivée de r_{ei} par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned}\dot{r}_{ei} &= \bar{\tau}_{ri} - \alpha_{ri}^{\theta_i} (\dot{\theta}_i + \omega_i) - \alpha_{ri}^t - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{x_{ej}} \left(u_j - \bar{u}_{dj} (\dot{\theta}_j + \omega_j) \cos \psi_{ej} + r_j y_{ej} \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{y_{ej}} \left(\bar{u}_{dj} (\dot{\theta}_j + \omega_j) \sin \psi_{ej} - r_j x_{ej} + v_j \right) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{\psi_{ej}} \left(r_{ej} + \alpha_{rj} \right. \\ &\quad \left. - \bar{r}_{dj} (\dot{\theta}_j + \omega_j) \right)\end{aligned}\quad (6.70)$$

La loi de commande $\bar{\tau}_{ri}$ est ainsi déduite à partir de l'équation (6.70). Elle s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{ri} &= -k_{5i}r_{ei} + \alpha_{ri}^{\theta_i}\omega_i + \alpha_{ri}^t + \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{x_{ej}} \left(u_j - u_{d0j} \cos \psi_{ej} + r_j y_{ej} \right) - \left(1 + \frac{k_{2i} x_{ei}}{\varpi_{1i} U_i} \right) \bar{\psi}_{ei} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{y_{ej}} \left(u_{d0i} \sin \psi_{ei} - r_j x_{ej} + v_j \right) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{\psi_{ej}} \left(r_{ej} + \alpha_{rj} - \bar{r}_{dj} \omega_j \right) + b_i v_{ei} u_i\end{aligned}\quad (6.71)$$

avec k_{5i} une constante positive. Substituons (6.71) dans l'équation (6.70). On extrait,

ainsi, la dynamique en boucle fermée de r_{ei} suivante

$$\begin{aligned} \dot{r}_{ei} = & -k_{5i}r_{ei} - \alpha_{ri}^{\theta_i} \dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{x_{ej}} \bar{u}_{dj} \dot{\theta}_j \cos \psi_{ej} - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{y_{ej}} \left(v_{ej} + \bar{u}_{dj} \dot{\theta}_j \sin \psi_{ej} \right) \\ & - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{\psi_{ej}} \bar{r}_{dj} \dot{\theta}_j - \left(1 + \frac{k_{2i}x_{ei}}{\varpi_{1i}U_i} \right) \bar{\psi}_{ei} + b_i v_{ei} u_i \end{aligned} \quad (6.72)$$

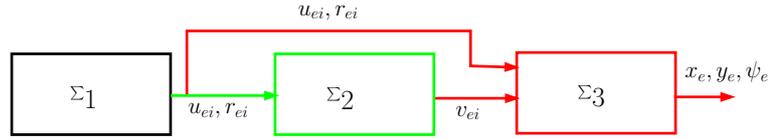
Le système (6.52) avec la loi de commande en boucle fermée (6.68)-(6.71) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ei} &= -\varphi_{1i} - \bar{u}_{di} \dot{\theta}_i \cos \psi_{ei} + u_{ei} + r_i y_{ei} \\ \dot{y}_{ei} &= -\varphi_{2i} + v_{ei} + u_{d0i} \Delta_i + \bar{u}_{di} \dot{\theta}_i \sin \psi_{ei} - r_i x_{ei} \\ \dot{\psi}_{ei} &= \left(1 - \frac{k_{2i}x_{ei}}{\varpi_{1i}U_i} \right) (r_{ei} + \alpha_{ri}) - r_{di} - \frac{k_{2i}y_{ei}x_{ei}}{\varpi_{1i}^3U_i} u_{ei} + \frac{k_{2i}(1+x_{ei}^2)}{\varpi_{1i}^2U_i} v_{ei} - \frac{\varphi_{2i} + v_{di}}{u_{d0i}U_i} \dot{u}_{d0i} \\ &+ \frac{\dot{v}_{di}}{U_i} + \frac{k_{2i}}{U_i} \left[\frac{v_{di} + u_{di} \sin \psi_{ei}}{\varpi_{1i}} - \frac{y_{ei}^2(v_{di} + u_{di} \sin \psi_{ei}) - y_{ei}x_{ei}(\alpha_{ui} - u_{di} \cos \psi_{ei})}{\varpi_{1i}^3} \right] \\ \dot{v}_{ei} &= -a_i v_{ei} - b_i r_{ei} u_i - b_i u_{ei} \alpha_{ri} - \frac{k_{2i}(1+x_{ei}^2)}{\varpi_{1i}^3U_i} \bar{\psi}_{ei} \\ \dot{u}_{ei} &= -k_{4i}u_{ei} - \alpha_{ui}^{\theta_i} \dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{x_{ej}} \bar{u}_{dj} \dot{\theta}_j \cos \psi_{ej} - \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{\psi_{ej}} \bar{r}_{dj} \dot{\theta}_j + b_i v_{ei} \alpha_{ri} - x_{ei} \\ &- \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{y_{ej}} \left(v_{ej} + \bar{u}_{dj} \dot{\theta}_j \sin \psi_{ej} \right) + \frac{k_{2i}y_{ei}x_{ei}}{\varpi_{1i}^3U_i} \bar{\psi}_{ei} \\ \dot{r}_{ei} &= -k_{5i}r_{ei} - \alpha_{ri}^{\theta_i} \dot{\theta}_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{x_{ej}} \bar{u}_{dj} \dot{\theta}_j \cos \psi_{ej} - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{y_{ej}} \left(v_{ej} + \bar{u}_{dj} \dot{\theta}_j \sin \psi_{ej} \right) \\ &- \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{\psi_{ej}} \bar{r}_{dj} \dot{\theta}_j - \left(1 + \frac{k_{2i}x_{ei}}{\varpi_{1i}U_i} \right) \bar{\psi}_{ei} + b_i v_{ei} u_i \end{aligned} \quad (6.73)$$

Remarquons que pratiquement dans chaque équation de (6.73), il apparaît le terme $\dot{\theta}_i$. Si l'on considère ce terme est nul ($\dot{\theta}_i = 0$), le système (6.73) est dit, système en cascade comme le montre la figure 6.15. Dans cette structure, la dynamique du système \sum_1 , $u = (u_{ei}, r_{ei})$ est considérée comme entrée respective pour le sous système \sum_2 et \sum_3 dans ce cas, le système (6.73) peut être ré-écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, u) \end{aligned} \quad (6.74)$$

Pour ce type de système en cascade, il est établi dans (Chaillet, 2006), le résultat suivant : Si le système aval $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u)$ est **iISS**(Sontag, 1990) et si de plus


 FIG. 6.15 – Système (6.73) est sous la forme cascade quand $\dot{\tilde{\theta}}_i = 0$.

le système amont $\dot{x}_2 = f_2(x_2, u)$ est également **iISS** alors la cascade (6.74) est **iISS**. D'autre part si l'entrée u converge exponentiellement vers zéro alors la cascade l'est aussi.

Ainsi, on a montré le premier point de notre objectif de contrôle de formation (6.46), qui représente la convergence de la position de chaque membre de la formation vers la trajectoire spécifiée. Cependant, la synchronisation n'étant pas encore réalisée. En effet, il faut que le paramètre de chaque trajectoire puisse être synchronisé avec celui de la structure virtuelle. Il faut donc continuer la dérivation du contrôleur en considérant que dans le système (6.73) le terme $\dot{\tilde{\theta}}_i$ n'est pas nul et il faut, par conséquent, chercher une expression pour $\dot{\tilde{\theta}}_i$ afin de satisfaire le second point de l'objectif (6.46). Ainsi considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1 = V_{10} + \sum_{i=1}^n \delta_i (\theta_i - \theta_0)^2 \quad (6.75)$$

avec $V_{10} = 0.5 \sum_{i=1}^n (x_{ei}^2 + y_{ei}^2 + \bar{\psi}_{ei}^2 + u_{ei}^2 + v_{ei}^2 + r_{ei}^2)$ et δ_i est une constante positive. La dérivée par rapport au temps de la fonction (6.75) donne

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -W + \sum_{i=1}^n \Theta_{1i} + \sum_{i=1}^n \Theta_{2i} \dot{\tilde{\theta}}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Theta_{3ij} \dot{\tilde{\theta}}_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \delta_i (\theta_i - \theta_0) (\dot{\tilde{\theta}}_i + \omega_i - \dot{\theta}_0) \end{aligned} \quad (6.76)$$

où l'on défini

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^n \frac{k_{1i}x_{ei}^2}{\varpi_{1i}} + \frac{k_{2i}y_{ei}^2}{\varpi_{1i}} + \frac{k_{3i}\bar{\psi}_{ei}^2}{\varpi_{2i}} + k_{4i}u_{ei}^2 + k_{5i}r_{ei}^2 + a_i v_{ei}^2 \\
\Theta_{1i} &= y_{ei}v_{ei} - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{y_{ej}} v_{ej}r_{ei} - \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{y_{ej}} v_{ej}u_{ei} \\
\Theta_{2i} &= \bar{u}_{di} \sin \psi_{ei} y_{ei} - \bar{u}_{di} \cos \psi_{ei} x_{ei} + \frac{\bar{u}_{di} k_{2i}}{U_i} \left[\frac{\sin \psi_{ei}}{\varpi_{1i}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{y_{ei}^2 \sin \psi_{ei} - x_{ei} y_{ei} \cos \psi_{ei}}{\varpi_{1i}^3} \right] - \alpha_{ui}^{\theta_i} u_{ei} - \alpha_{ri}^{\theta_i} r_{ei} \\
\Theta_{3ij} &= -\alpha_{ri}^{x_{ej}} \bar{u}_{dj} \cos \psi_{ej} u_{ei} - \alpha_{ui}^{y_{ej}} \bar{u}_{dj} \sin \psi_{ej} u_{ei} - \alpha_{ui}^{\psi_{ej}} \\
&\quad \times \bar{r}_{dj} u_{ei} - \alpha_{ri}^{x_{ej}} \bar{u}_{dj} \cos \psi_{ej} r_{ei} - \alpha_{ri}^{y_{ej}} \bar{u}_{dj} \sin \psi_{ej} r_{ei} \\
&\quad - \alpha_{ri}^{\bar{\psi}_{ej}} \bar{r}_{dj} r_{ei}
\end{aligned}$$

Remarque 4.1 : Il est important de noter que l'expression $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Theta_{3ij} \dot{\theta}_j$ est équivalente à l'expression $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} \dot{\theta}_i$.

D'après la remarque 4.1, l'expression (6.76) est ré-écrite de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= -W + \sum_{i=1}^n \Theta_{1i} + \sum_{i=1}^n \left(\Theta_{2i} + \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} \right) \dot{\theta}_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \delta_i (\theta_i - \theta_0) (\dot{\theta}_i + \omega_i - \dot{\theta}_0)
\end{aligned} \tag{6.77}$$

L'objectif est de rendre négative la dérivée de la fonction de Lyapunov V_1 . De ce fait, nous pouvons choisir d'annuler le terme $\omega_i - \dot{\theta}_0$, puis de choisir convenablement le terme $\dot{\theta}_i$ de façon à rendre les deux derniers termes de (6.77) négatifs ou nuls. Ainsi, choisissons ω_i et $\dot{\theta}_i$ comme suit :

$$\omega_i = \dot{\theta}_0 = \omega_0(t) (1 - \kappa_1 e^{-\kappa_2(t-t_0)}) e^{-X^\top \Lambda X} \tag{6.78}$$

$$\dot{\theta}_i = -\varepsilon_v \left(\Theta_{2i} + \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} + \delta_i (\theta_i - \theta_0) \right) \tag{6.79}$$

où ε_v est une constante positive, $X = [x_e, y_e, \psi_e]^\top$ et $\Lambda = \text{diag}(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ une matrice définie positive tel que les $\Pi_i, i = 1 \dots 3$ sont aussi des matrices définies positives de dimensions $3n \times 3n$. $\kappa_i, i = 1 \dots 2$ sont des constantes positives avec $\kappa_1 < 1$.

Le choix des expressions (6.78) et (6.79), permet d'écrire la dérivée de la fonction de

Lyapunov (6.77) comme suit :

$$\dot{V}_1 = -W - \varepsilon_v \sum_{i=1}^n \left(\Theta_{2i} + \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} + \gamma_i(\theta_i - \theta_0) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \Theta_{1i} \quad (6.80)$$

Nous pouvons à ce stade résumer le principal concept de formation de groupe de bateaux par le théorème suivant.

Théorème 4.3 (Ghommem et al., 2007d) *Supposons que le i -ème bateau sous-actionné suit une trajectoire donnée par ξ_i , sous l'action du contrôleur $\bar{\tau}_{ui}$ et $\bar{\tau}_{ri}$ donné par (6.68) et (6.71) et la loi d'adaptation du paramètre de la trajectoire donnée par (6.79), l'objectif (6.46) est donc atteint.*

Preuve : Pour démontrer le théorème 4.3, nous devons montrer que la dérivée de la fonction de Lyapunov (6.80) est négative. Nous commençons par trouver une majoration du terme Θ_{1i} en appliquant l'inégalité de Young. Nous obtenons, après un calcul simple, le résultat suivant

$$\begin{aligned} |\Theta_{1i}| \leq & \varepsilon_{1i} v_{ei}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_{1i}} y_{ei}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_{2i}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial y_{ej}} v_{ej} \right)^2 + \varepsilon_{2i} r_{ei}^2 \\ & + \varepsilon_{3i} u_{ei}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_{3i}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_{ui}}{\partial y_{ej}} v_{ej} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.81)$$

avec $\varepsilon_{ki}, k = 1 \dots 3$ des constantes positives arbitraires. Choisissons ε_{2i} et ε_{3i} assez grand. Nous garantissons l'inégalité suivante

$$|\Theta_{1i}| \leq \varepsilon_{1i} v_{ei}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_{1i}} y_{ei}^2 + \frac{1}{4\varepsilon_{2i}} + \varepsilon_{2i} r_{ei}^2 + \varepsilon_{3i} u_{ei}^2. \quad (6.82)$$

En substituant (6.82) dans (6.80), nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{k_{1i} x_{ei}^2}{\varpi_{1i}} + \left(\frac{k_{2i}}{\varpi_{1i}} - \frac{1}{4\varepsilon_{1i}} \right) y_{ei}^2 + \frac{k_{3i}}{\varpi_{2i}} \bar{\psi}_{ei}^2 \right. \\ & + (k_{4i} - \varepsilon_{3i}) u_{ei}^2 + (k_{5i} - \varepsilon_{2i}) r_{ei}^2 + (a_i - \varepsilon_{1i}) v_{ei}^2 \\ & \left. - \varepsilon_v \sum_{i=1}^n \left(\Theta_{2i} + \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} + \gamma_i(\theta_i - \theta_0) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (6.83)$$

Choisissons la constante ε_{1i} tel que

$$\frac{4}{k_{1i}} \leq \varepsilon_{1i} \leq a_i \quad (6.84)$$

et les constantes ε_{4i} et ε_{5i} tels que

$$k_{4i} > \varepsilon_{3i} \quad \text{et} \quad k_{5i} > \varepsilon_{2i} \quad (6.85)$$

L'inégalité (6.83) implique que $\dot{V}_3 < 0$. Par conséquent les états $(x_{ei}, y_{ei}, \bar{\psi}_{ei}, u_{ei}, v_{ei}, r_{ei}, \theta_i - \theta_0)$ sont bornés, en utilisant les arguments du théorème 4.1. Nous concluons le résultat suivant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{ei}, y_{ei}, \bar{\psi}_{ei}, u_{ei}, v_{ei}, r_{ei}) = 0 \quad (6.86)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\Theta_{2i} + \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} + \delta_i(\theta_i - \theta_0) \right) = 0 \quad (6.87)$$

En utilisant la limite donnée par (6.87) et compte tenu des expressions de Θ_{2i} et Θ_{3ji} , nous obtenons la limite suivante

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\Theta_{2i} + \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} \right) = 0 \quad (6.88)$$

Par conséquent nous obtenons le résultat voulu.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_i - \theta_0) = 0 \quad (6.89)$$

□

6.6.4 Robustesse vis à vis des perturbations environnementales

Dans ce paragraphe, nous allons considérer que chaque membre de la formation subit une perturbation environnementale issues des forces de vent et de courant d'eau. Ces perturbations sont inconnues et évoluent lentement dans le temps. Dans notre cas, ces perturbations sont considérées des constantes inconnues. Quand ces perturbations sont présentes, le modèle dynamique du bateau à la forme de (6.42). Avec $b_i = [\tau_{udis_i}, \tau_{vdis_i}, \tau_{rdis_i}]^T$ est le vecteur des perturbations respectivement dans la direction d'avancement, de glissement et du lacet. Les trois dernières équations de (6.52) en présence des perturbations sont ré-écrites de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \bar{\tau}_{ui} + \bar{\tau}_{udis_i} \\ \dot{v}_i &= -a_i v_i - b_i u_i r_i + \bar{\tau}_{vdis_i} \\ \dot{r}_i &= \bar{\tau}_{ri} + \bar{\tau}_{rdis_i} \end{aligned} \quad (6.90)$$

avec $\bar{\tau}_{udis_i} = \frac{\tau_{udis_i}}{m_{11i}}$, $\bar{\tau}_{vdis_i} = \frac{\tau_{vdis_i}}{m_{22i}}$ et $\bar{\tau}_{rdis_i} = \frac{\tau_{rdis_i}}{m_{33i}}$. Pour vaincre les perturbations de la direction de glissement (la dynamique non-actionnée), nous proposons un observateur pour la composante $\bar{\tau}_{vdis}$ de la perturbation comme suit

$$\begin{aligned}\dot{\hat{v}}_i &= k_{x_{1i}}\tilde{v}_i - b_i u_i r_i - a_i \hat{v}_i + \hat{\tau}_{vdis} \\ \dot{\hat{\tau}}_{vdis_i} &= k_{x_{2i}}\tilde{v}_i\end{aligned}\quad (6.91)$$

avec $\tilde{v}_i = v_i - \hat{v}_i$. Il est clair que les erreurs d'estimation \tilde{v}_i et $\tilde{\tau}_{vdis_i}$ sont exponentiellement stable si toutes les racines du polynôme caractéristique $\mathbf{H}(p) = p^2 + k_{x_1}p + k_{x_2}$ associé au système

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{v}}_i \\ \dot{\tilde{\tau}}_{vdis_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{x_{1i}} & 1 \\ -k_{x_{2i}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \tilde{\tau}_{vdis_i} \end{bmatrix}$$

ont toutes une partie réelle strictement négative. La dynamique de la vitesse de glissement est donc choisie comme suit

$$\dot{v}_{di} = -a_i v_{di} - b_i \alpha_{ui} \alpha_{ri} + \frac{k_{2i}(1 + x_{ei}^2)}{\varpi_{1i}^3 U_i} \bar{\psi}_{ei} + \hat{\tau}_{vdis_i} \quad (6.92)$$

Le choix de \dot{v}_{di} est évident, car l'erreur de vitesse de glissement comportera l'erreur d'estimation de la perturbation qui est exponentiellement stable comme le montre l'équation suivante

$$\dot{v}_e = -a_i v_{ei} - b_i r_{ei} u_i - b_i u_{ei} \alpha_{ri} - \frac{k_{2i}(1 + x_{ei}^2)}{\varpi_{1i}^3 U_i} \bar{\psi}_{ei} + \tilde{\tau}_{vdis_i} \quad (6.93)$$

Puisque les constantes $\bar{\tau}_{udis_i}$ et $\bar{\tau}_{rdis_i}$ sont directement reliées aux entrées de commandes $\bar{\tau}_{ui}$ et $\bar{\tau}_{ri}$, les expressions de ces commandes diffèrent légèrement de celles définies dans les équations (6.68) et (6.71) :

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{ui} &= -k_{4i} u_{ei} + \alpha_{ui}^{\theta_i} \omega_i + \alpha_{ui}^t + \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{x_{ej}} \left(u_j - u_{d_{0j}} \cos \psi_{ej} + r_j y_{ej} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{y_{ej}} \left(u_{d_{0i}} \sin \psi_{ei} - r_j x_{ej} + v_{dj} \right) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ui}^{\psi_{ej}} \left(r_{ej} + \alpha_{rj} - \bar{r}_{dj} \omega_j \right) \\ &+ \frac{k_{2i} y_{ei} x_{ei}}{\varpi_{1i}^3 U_i} \bar{\psi}_{ei} + b_i v_{ei} \alpha_{ri} - x_{ei} - \hat{\tau}_{udis_i} \\ \bar{\tau}_{ri} &= -k_{5i} r_{ei} + \alpha_{ri}^{\theta_i} \omega_i + \alpha_{ri}^t + \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{x_{ej}} \left(u_j - u_{d_{0j}} \cos \psi_{ej} + r_j y_{ej} \right) - \left(1 + \frac{k_{2i} x_{ei}}{\varpi_{1i} U_i} \right) \bar{\psi}_{ei} \\ &+ \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{y_{ej}} \left(u_{d_{0i}} \sin \psi_{ei} - r_j x_{ej} + v_{dj} \right) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ri}^{\psi_{ej}} \left(r_{ej} + \alpha_{rj} - \bar{r}_{dj} \omega_j \right) \\ &+ b_i v_{ei} u_i - \hat{\tau}_{rdis_i}\end{aligned}\quad (6.94)$$

$\hat{\tau}_{udis_i}$, $\hat{\tau}_{rdis_i}$ sont les estimées respectives de $\bar{\tau}_{udis_i}$ et $\bar{\tau}_{rdis_i}$ qui sont calculées par la loi d'adaptation suivante

$$\dot{\hat{b}}_i = \Gamma_i X_{ei} \quad (6.95)$$

avec $X_{ei} = [u_{ei}, v_{ei}, r_{ei}]^\top$ et Γ_i est une matrice définie positive. Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant résumant les points importants développés pour le contrôle de formation robuste.

Théorème 4.4 (Ghommem *et al.*, 2007d) *Supposons que le i -ème bateau sous-actionné suit une trajectoire donnée par ξ_i et soumis aux perturbations environnementales constantes et inconnues, sous l'action du contrôleur $\bar{\tau}_{ui}$ et $\bar{\tau}_{ri}$ donné par (6.94), la loi d'adaptation donnée par (6.55) ainsi que la loi d'adaptation du paramètre de la trajectoire $\tilde{\theta}_i$ donnée par (6.79), l'objectif (6.46) est atteint.*

Démonstration : Considérons la fonction de Lyapunov augmentée suivante

$$V_2 = V_1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \tilde{b}_i^\top \Gamma^{-1} \tilde{b}_i \quad (6.96)$$

Sa dérivée par rapport au temps de (6.96) est exprimée par :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \tilde{b}_i^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{b}}_i \quad (6.97)$$

En utilisant la loi de commande donnée par (6.94), l'équation (6.97) devient

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -W - \varepsilon_v \sum_{i=1}^n \left(\Theta_{2i} + \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} + \gamma_i (\theta_i - \theta_0) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \Theta_{1i} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i^\top X_{ei} - \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i^\top \Gamma^{-1} \dot{\tilde{b}}_i \\ &= -W - \varepsilon_v \sum_{i=1}^n \left(\Theta_{2i} + \sum_{j=1}^n \Theta_{3ji} + \gamma_i (\theta_i - \theta_0) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \Theta_{1i} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i^\top \left(X_{ei} - \Gamma^{-1} \dot{\tilde{b}}_i \right) \end{aligned} \quad (6.98)$$

Notons que dans l'équation (6.98), tous les termes en \tilde{b}_i ont été regroupés, afin qu'ils puissent être éliminés. Nous choisissons la loi d'adaptation donnée par (6.95). Ceci permet d'écrire l'équation (6.98) identiquement à l'équation (6.80). Le reste de la démonstration suit le même argument utilisé dans la preuve du théorème 4.3. \square

6.7 Simulations

Afin d'illustrer l'efficacité de l'algorithme de commande proposé pour la coordination d'un groupe de bateaux, nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats

de simulations effectuées dans l'environnement Matlab/Simulink pour le contrôle de formation d'un groupe de trois bateaux sous-actionnés identiques. Les simulations ont été réalisées sur un modèle de tugboat (Fossen, 2002). Le bateau a une longueur de $1.19m$, une masse de $17.6kg$ et les paramètres numériques suivant : $m_{11} = 19, m_{22} = 35.2, m_{33} = 4.2, d_{11} = 4, d_{22} = 1, d_{33} = 10$. Les paramètres du contrôleur ont été choisis comme suit : $k_{1i} = 10, k_{2i} = 2, k_{3i} = 20, k_{4i} = 10$ et $k_{5i} = 15, \varepsilon_v = 1, \delta_i = 2, \kappa_1 = 0.5$ et $\kappa_2 = 1$, les matrices $\Pi_i, i = 1 \dots 3$ sont des matrices unitaires $\mathbf{I}_{3 \times 3}$. La trajectoire de référence du centre de la structure virtuelle est choisie tels que $\xi_0 = (\theta_0, 0)$. La distance de chaque membre du groupe au centre de la structure virtuelle est choisie telle que

$$\begin{aligned} l_1(x_{d0}(\theta_0), y_{d0}(\theta_0)) &= (0, 0) \\ l_2(x_{d0}(\theta_1), y_{d0}(\theta_1)) &= (0, 3 + 2\cos(\theta_1)) \\ l_3(x_{d0}(\theta_2), y_{d0}(\theta_2)) &= (0, -3 - 2\cos(\theta_2)) \end{aligned}$$

Il est clair qu'à partir de ces choix, le premier véhicule coïncide avec le centre de la structure virtuelle et se déplace le long d'une ligne droite, alors que les autres membres du groupe se déplacent sur deux trajectoires sinusoïdales. La figure 6.16

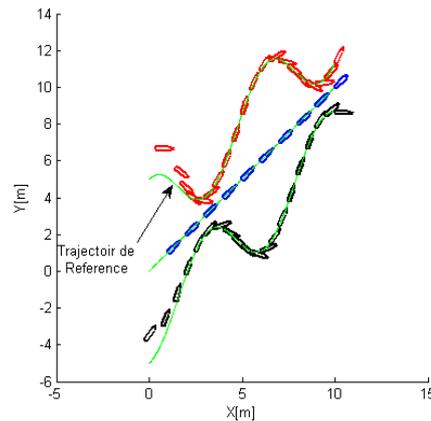


FIG. 6.16 – Position et orientation des bateaux pendant la formation.

présente l'évolution de la position et de l'orientation des bateaux dans le plan (XY) durant le processus de formation. La figure 6.17 donne l'évolution de l'erreur de position/orientation en fonction du temps, ce qui explique que chaque bateau converge asymptotiquement vers sa trajectoire désirée. La figure 6.18 montre la synchronisation entre chaque paramètre de la trajectoire avec le paramètre de la trajectoire générée par structure virtuelle. Il est clair que le processus de coordination entre les bateaux est réussi.

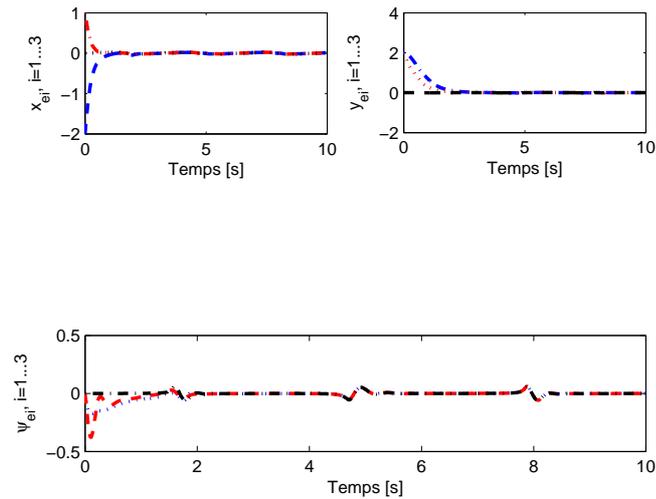


FIG. 6.17 – Erreur de poursuite de position.

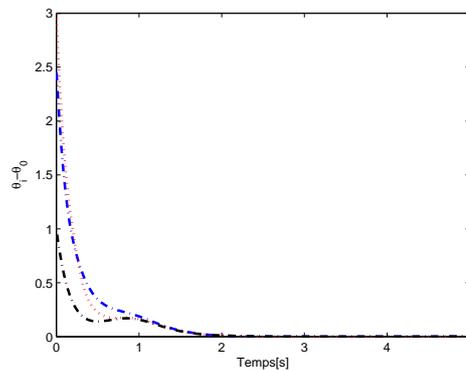


FIG. 6.18 – Synchronisation des paramètres des trajectoires.

6.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une commande décentralisée pour le suivi de chemins d'un groupe de bateaux sous-actionnés. La synchronisation entre les bateaux est accomplie en communiquant le minimum d'informations portant sur l'évolution des paramètres de la trajectoire de chaque bateau. Des simulations ont été effectuées afin de montrer l'efficacité du contrôleur. Cependant, le contrôleur que nous avons développé considère qu'il n'existe pas de perturbations de communication entre les bateaux. De même, il ne tient pas compte du retard de communication entre chaque membre du groupe de la formation. Une étude plus approfondie sur la robustesse de la commande

vis-à-vis des perturbations et le retard de communication doit être analysée. Ce travail fait donc l'objet d'une étude ultérieure.

Chapitre 7

Observateur pour véhicule marin sous-actionné : Application au suivi de chemins

Dans plusieurs travaux récents, beaucoup de résultats pratiques permettant d'avoir une solution *globale* asymptotique de l'erreur d'observation pour un véhicule marin sous-actionné ont été développés. Certains n'assurent qu'une stabilité *semi-globale* de l'observateur. Ce qui empêche ces résultats d'étendre la région d'attraction sur tout l'espace d'état. Cette limitation est due à la présence des termes cubiques qui apparaissent dans la dérivée de la fonction de Lyapunov. Ces termes sont originaires des forces de Coriolis et centrifuges, qui ne peuvent pas être compensés par des termes stabilisant, et qui sont en général des termes quadratiques. Les termes cubiques peuvent être compensés dans un compact autour de l'origine en choisissant le gain de l'observateur suffisamment grand. Cependant, nous ne pouvons pas trouver un gain constant pouvant assurer la stabilité asymptotique de l'observateur. Dans ce chapitre, nous proposons de concevoir un observateur par retour de sortie, en suivant deux méthodes basées sur une transformation permettant d'annuler les termes de Coriolis dans la dynamique du véhicule marin. Cette transformation permet d'aboutir à une stabilité exponentielle globale de l'observateur.

Définition 5.1 (Problème de retour de sortie globale) *Le problème de retour de sortie globale pour les systèmes Euler-Lagrange, en particulier les véhicules marins, consiste à concevoir une commande par rétro-action, en mesurant uniquement la position q , sachant que pour toute condition initiale $(q(t_0), \dot{q}(t_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et pour toute trajectoire désirée $q_d(t) \in \mathcal{C}^2$, on a $\|\dot{q}_d\| < V_d < \infty$, avec :*

$$(q(t), \dot{q}(r)) \rightarrow (q_d(t), \dot{q}_d(t)) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

Le problème de commande par retour d'état est double : D'une part, la synthèse d'un retour d'état, et d'autre part, la reconstruction de l'état non mesuré à utiliser dans la commande. La commande résultante est alors dite par retour de sortie dans la mesure où elle n'utilise que l'information de la sortie mesurée. Pour les systèmes linéaires, les deux problèmes peuvent être traités séparément, puis combinés (*principe de séparation*). Une telle approche ne garantit pas systématiquement les mêmes résultats dans le cas de systèmes non linéaires.

Quelques travaux sur la commande par retour de sortie ont été appliqués sur les robots manipulateurs par (Berghuis et Nijmeijer, 1993), où la structure de commande a donnée une stabilité exponentielle semi-globale de tout le système. Une extension de ce résultat aux systèmes Euler-Lagrange a été proposée par (Paulsen et Egeland, 1995). Cependant, ni Berghuis et Nijmeijer (1993) ni Paulsen et Egeland (1995) n'ont résolu le problème global de la stabilité de la commande par retour de sortie. La raison réside dans le fait que les termes de Coriolis et centrifuges ont causé des composantes de troisième ordre dans la dérivée de la fonction de Lyapunov ; ce qui a permis d'aboutir à une stabilité locale. Cependant, il est toujours possible d'élargir la région d'attraction du système en choisissant les gains de la commande suffisamment grands pour garantir une stabilité semi-globale du système. (Loria, 1996), a proposé une solution qui permet d'élargir de façon automatique la région d'attraction en fonction du taux d'accroissement des différents états du système, et ce en utilisant des fonctions hyperboliques et trigonométriques. L'auteur a résolu le problème de retour d'état global pour un système d'Euler-Lagrange à 1-DDL. Or cette méthode n'est pas extensible à un système à n -DDL. (Zhang *et al.*, 1997) ont proposé un retour de sortie dynamique pour un système à n -DDL en utilisant un changement de coordonnées non-linéaires. Cependant, ce changement de coordonnées n'est pas réciproque, et par conséquent la commande n'est pas implementable sans la mesure des vitesses.

Dans ce chapitre, nous exposons une méthode simple et pratique permettant d'avoir un retour de sortie/états qui permet d'aboutir à une stabilité exponentielle globale du système. Cette méthode consiste à faire éliminer les termes non-désirés du système dans la dérivée de la fonction de Lyapunov. Cette méthode consiste à trouver un changement de coordonnées adéquat pouvant éliminer les termes de Coriolis et centrifuges dans la dynamique du bateau.

7.1 Illustration de l'approche

Pour mieux exposer l'approche adoptée dans ce chapitre, nous considérons le système non-linéaire décrit par les équations différentielles suivantes

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.1a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_2^2 + u \quad (7.1b)$$

Nous supposons dans ce qui suit que x_1 est la position et x_2 est une vitesse non mesurable. Pour reconstruire les états de (7.1), nous choisissons un observateur d'ordre plein pour le système (7.1). La présence du terme non-linéaire x_2^2 va causer un problème quant à la construction de la fonction de Lyapunov. Pour cela nous choisissons d'éliminer ce terme dans (7.1). A cet effet, nous posons le changement de variable suivant :

$$z_1 = \zeta(x_1)x_2 \quad (7.2)$$

$\zeta(x_1)$ est une variable scalaire qui dépend que de la position x_1 , qui sera déterminée plus tard. La dérivée par rapport au temps de (7.2) est

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{\zeta}(x_1)x_2 + \zeta(x_1)\dot{x}_2 \\ &= \dot{\zeta}(x_1)x_2 + \zeta(x_1)(-x_2 - x_2^2 + u) \\ &= \left[\dot{\zeta}(x_1) - \zeta(x_1)x_2 \right] x_2 - z_1 + \zeta(x_1)u \end{aligned} \quad (7.3)$$

Nous voulons que le terme entre crochet de (7.3) soit nul. Dans ce cas le terme non-linéaire x_2^2 sera éliminé de la dynamique z . Choisissons $\zeta(x_1)$ tels que

$$\dot{\zeta}(x_1) - \zeta(x_1)x_2 = 0 \quad (7.4)$$

soit alors

$$\frac{\partial \zeta}{\zeta} x_2 = x_2 dx_1, \quad \Rightarrow \int_{\zeta(x_1(t_0))}^{\zeta(x_1)} \frac{\partial \zeta}{\zeta} = \int_{x_1(t_0)}^{x_1} dx_1$$

Pour une condition initiale nulle, nous obtenons la solution suivante :

$$\zeta(x_1) = e^{x_1(t)} \quad (7.5)$$

Ainsi le système (7.3), devient

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left[\zeta(x_1) \right]^{-1} z \\ \dot{z}_1 &= -z_1 + \zeta(x_1)u \end{aligned} \quad (7.6)$$

Le système (7.6) possède une structure remarquable à savoir, qu'il est linéaire en fonction de l'état non-mesuré z_1 . En utilisant un observateur d'ordre plein pour reconstruire

les états x_1 et z_1 , nous choisissons l'observateur suivant

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \left[\zeta(x_1) \right]^{-1} \hat{z}_1 + K_0(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{z}}_1 &= -\hat{z}_1 + \zeta(x_1)u + K_2(x_1)(x_1 - \hat{x}_1)\end{aligned}\quad (7.7)$$

avec \hat{x}_1 et \hat{z}_1 sont les estimés respectives de x_1 et z_1 , K_0 est un gain d'observateur, strictement positif. $K_2(x_1)$ est une fonction de x_1 , que l'on déterminera.

L'erreur dynamique d'observation est déterminée à partir de (7.6) et (7.7), donnée par

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \left[\zeta(x_1) \right]^{-1} \tilde{z}_1 - K_0 \tilde{x}_1 \quad (7.8a)$$

$$\dot{\tilde{z}}_1 = -\tilde{z}_1 - K_2(x_1)\tilde{x}_1 \quad (7.8b)$$

Afin de montrer que l'erreur d'estimation de l'observateur (7.7) est exponentiellement stable, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_1 = 0.5(\tilde{x}_1^2 + \tilde{z}_1^2) \quad (7.9)$$

Sa dérivée par rapport au temps donne

$$\dot{V}_1 = -K_0 \tilde{x}_1^2 - \tilde{z}_1^2 + \left(\left[\zeta(x_1) \right]^{-1} - K_2(x_1) \right) \tilde{x}_1 \tilde{z}_1 \quad (7.10)$$

Afin de rendre (7.10) négative, nous choisissons l'expression pour $K_2(x_1)$ comme suit

$$K_2(x_1) = \left[\zeta(x_1) \right]^{-1} \quad (7.11)$$

Ainsi nous aurons $\dot{V}_1 = -K_0 \tilde{x}_1^2 - \tilde{z}_1^2 < 0$ et par conséquent

$$\|(\tilde{x}_1(t), \tilde{z}_1(t))\| \leq \gamma_0 \|(\tilde{x}_1(t_0), \tilde{z}_1(t_0))\| e^{-\sigma_0(t-t_0)}, \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq \infty \quad (7.12)$$

Ainsi les erreurs d'estimation \tilde{x}_1 et \tilde{z}_1 sont globalement exponentiellement convergentes vers zéro. Or, d'après l'équation (7.2), nous avons la relation suivante

$$\tilde{z}_1 = \zeta(x_1)\tilde{x}_2 \quad (7.13)$$

et admettons que la solution de $x_1(t)$ ne diverge pas vers l'infinie, car notre but est de faire converger la position $x_1(t)$ vers une position désirée ou trajectoire désirée que l'on suppose bornée. Puisque \tilde{z}_1 est exponentiellement convergent, nous concluons alors la convergence exponentielle de \tilde{x}_2 vers zéro.

En se basant sur cette idée, nous proposons de construire un observateur par retour de sortie pour un véhicule marin de la forme donnée par (3.52).

7.2 Structure de navigation des véhicules marins

La plupart des systèmes de commande sont construits sur la base des capteurs, des signaux de référence et la commande par rétroaction. Un système marin tel que le véhicule marin est également construit sur la base de trois blocs indépendants qui sont le système de guidage, le système de navigation et le bloc commande. En terminologie marine ces trois blocs sont appelés GNC (voir figure 7.1). (Fossen, 2002)

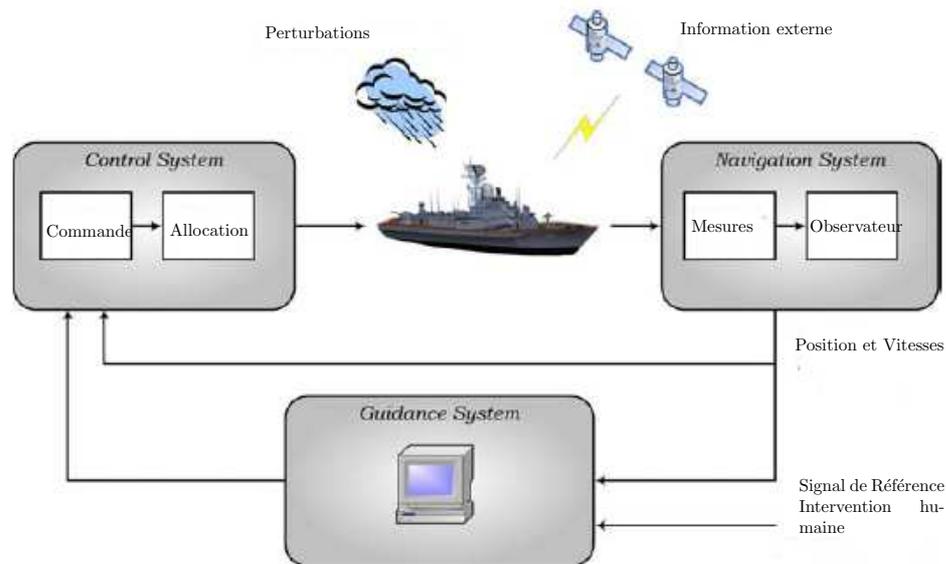


FIG. 7.1 – La structure GNC pour un système marin (Ihle, 2006)

Les blocs GNC représentent trois systèmes inter-connectés :

- Le système de Guidage. Ce bloc fournit, les informations nécessaires pour la commande du système, à savoir : les signaux de référence, (la position désirée du véhicule, la vitesse et l'accélération). Ces informations sont introduites par un opérateur humain.
- Le système de Navigation. Ce bloc est essentiel pour la commande et la navigation du véhicule marin, destiné à estimer la position, l'orientation et la distance effectuée par le véhicule durant la manoeuvre. Dans plusieurs cas, le système de navigation est chargé d'estimer les vitesses du véhicule. L'estimateur permettant de reconstruire les états non mesurables du véhicule marin est appelé observateur.
- Le système de Contrôle. Ce bloc détermine la commande en force et en moments nécessaires afin de satisfaire un certain objectif. Ce bloc est lui même

composé de deux sous-blocs, à savoir, la loi de commande et le contrôle de puissance. Le sous-bloc loi de commande consiste à fournir des forces et des moments généralisées, tandis que le sous-bloc de contrôle d'allocation consiste à distribuer ces forces généralisées aux différents actionneurs d'une façon optimale.

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressé à l'établissement des lois de commande pour le véhicule afin d'accomplir une certaine tâche dont le bloc système de contrôle est chargé d'y fournir les consignes utiles pour la navigation. Dans ce qui suit, nous nous intéressons plutôt par le bloc "Navigation" pour la détermination d'un observateur permettant de reconstruire les états non-mesurables du véhicule marin.

7.3 Conception d'observateur pour le véhicule marin

Dans ce chapitre, nous considérons que le véhicule marin est décrit par la dynamique (3.52) sans perturbations. Ainsi la dynamique du véhicule est donnée comme suit

$$\dot{\eta} = \mathbf{R}(\psi)\nu \quad (7.14a)$$

$$\mathbf{M}\dot{\nu} = -\mathbf{C}(\nu)\nu - \mathbf{D}(\nu)\nu + \tau \quad (7.14b)$$

7.3.1 Retour d'état partiel

Dans cette partie, nous considérons que seule la position et l'orientation du bateau η ainsi que la vitesse angulaire r autour de l'axe vertical z du véhicule sont mesurables. Les vitesses u, v sont, par contre, non-mesurables. Selon ces hypothèses, nous devons résoudre un problème par retour d'état partiel, car nous avons déjà l'état r mesurable que nous pouvons introduire dans la commande.

Bien que l'état r soit disponible, nous avons toujours des termes en produit mixte uv qui se manifestent dans la dynamique du véhicule marin et sont non désirables pour la construction d'un observateur exponentiellement convergent. Pour cela, nous proposons un changement de variables permettant d'annuler les termes de Coriolis $\mathbf{C}(\nu)\nu$ de la dynamique du véhicule.

$$z_1 = e^{\chi(t,\eta)}\nu \quad (7.15)$$

avec $\chi(t, \eta)$ une matrice que l'on souhaite déterminer afin d'annuler le terme $\mathbf{C}(\nu)\nu$ de (7.14). La dérivée de (7.15) par rapport au temps donne :

$$\dot{z}_1 = e^{\chi(t, \eta)} \dot{\nu} + \dot{\chi}(t, \eta) e^{\chi(t, \eta)} \nu \quad (7.16)$$

En substituant l'expression $\dot{\nu}$ de (7.14) dans (7.16), nous obtenons :

$$\dot{z}_1 = e^{\chi(t, \eta)} \mathbf{M}^{-1} \left[-\mathbf{C}(\nu)\nu - \mathbf{D}(\nu)\nu + \tau \right] + \dot{\chi}(t, \eta) e^{\chi(t, \eta)} \nu \quad (7.17)$$

Réécrivant (7.17) sous la forme suivante

$$\dot{z}_1 = e^{\chi(t, \eta)} \mathbf{M}^{-1} \left[\tau - \mathbf{D}(\nu)\nu \right] + e^{\chi(t, \eta)} \left[\dot{\chi}(t, \eta) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}(\nu) \right] \nu \quad (7.18)$$

Nous remarquons que, pour éliminer les termes de Coriolis, nous devons choisir la matrice $\chi(t, \eta)$ telle que :

$$\dot{\chi}(t, \eta) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}(\nu) = 0 \quad (7.19)$$

La résolution de (7.19) n'est pas évidente, mais il est toujours possible de trouver une solution particulière pour cette équation. Nous remarquons à partir de (7.14) les relations suivantes

$$\begin{aligned} u &= \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi \\ v &= \dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi \end{aligned}$$

alors nous proposons une solution particulière à (7.19)

$$\chi(t, \eta) = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_v \epsilon_{13} \\ 0 & 0 & m_u \epsilon_{23} \\ m_v \epsilon_{13} & -m_u \epsilon_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_{13} &= y \cos \psi - x \sin \psi + \xi_1(t), & \epsilon_{23} &= y \sin \psi + x \cos \psi + \xi_2(t) \\ \dot{\xi}_1(t) &= yr \sin \psi + xr \cos \psi, & \dot{\xi}_2(t) &= -yr \cos \psi + xr \sin \psi \end{aligned} \quad (7.21)$$

Nous remarquons que la matrice $\chi(t, \eta)$ ne dépend que des états qui sont mesurables à savoir x, y, ψ et r . Ainsi en utilisant le changement de coordonnées (7.15), la dynamique du bateau (7.14) dans le nouveau système de coordonnées s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \mathbf{R}(\psi) e^{-\chi(t, \eta)} z_1 \\ \dot{z}_1 &= e^{\chi(t, \eta)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} e^{-\chi(t, \eta)} z_1 + e^{\chi(t, \eta)} \mathbf{M}^{-1} \tau \end{aligned} \quad (7.22)$$

Ainsi, nous proposons l'observateur suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}} &= \mathbf{R}(\psi) e^{-\chi(t, \eta)} \hat{z}_1 - \mathbf{K}_0 (\eta - \hat{\eta}) \\ \dot{\hat{z}}_1 &= e^{\chi(t, \eta)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} e^{-\chi(t, \eta)} \hat{z}_1 + e^{\chi(t, \eta)} \mathbf{M}^{-1} \tau - \mathbf{K}_1(t, \eta) (\eta - \hat{\eta}) \end{aligned} \quad (7.23)$$

avec $\hat{\eta}$ et \hat{z}_1 les estimées respectives de η et z_1 ; $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0^\top$ est une matrice diagonale positive et $\mathbf{K}_1(t, \eta)$ est une matrice que l'on désire déterminer. L'erreur d'estimation de l'observateur (7.23) est donné par

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}} &= \mathbf{R}(\psi)e^{-\chi(t,\eta)}\tilde{z}_1 - \mathbf{K}_0\tilde{\eta} \\ \dot{\tilde{z}}_1 &= -e^{\chi(t,\eta)}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}e^{-\chi(t,\eta)}\tilde{z}_1 - \mathbf{K}_1(t, \eta)\tilde{\eta}\end{aligned}\quad (7.24)$$

Nous voulons déterminer la matrice $\mathbf{K}_1(t, \eta)$ telle que $\tilde{\eta}$ et \tilde{z}_1 convergent exponentiellement vers zéro. Pour cela, nous posons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_{obs} = 0.5\left(\tilde{\eta}^\top P_{01}\tilde{\eta} + \tilde{z}_1^\top P_{02}\tilde{z}_1\right) \quad (7.25)$$

avec P_{01}, P_{02} deux matrices symétriques définies positives. La dérivée de (7.25) par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned}\dot{V}_{obs} &= -\tilde{\eta}^\top P_{01}\mathbf{K}_0\tilde{\eta} + \tilde{\eta}^\top P_{01}\mathbf{R}(\psi)e^{-\chi(t,\eta)}\tilde{z}_1 \\ &\quad - \tilde{z}_1^\top P_{02}e^{\chi(t,\eta)}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}e^{-\chi(t,\eta)}\tilde{z}_1 - \tilde{z}_1^\top P_{02}\mathbf{K}_1(t, \eta)\tilde{\eta}\end{aligned}\quad (7.26)$$

En regroupant les termes quadratiques, nous obtenons la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{V}_{obs} &= -\tilde{\eta}^\top P_{01}\mathbf{K}_0\tilde{\eta} - \tilde{z}_1^\top P_{02}e^{\chi(t,\eta)}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}e^{-\chi(t,\eta)}\tilde{z}_1 \\ &\quad + \tilde{\eta}^\top \left(P_{01}\mathbf{R}(\psi)e^{-\chi(t,\eta)} - \mathbf{K}_1(t, \eta)^\top P_{02} \right) \tilde{z}_1\end{aligned}\quad (7.27)$$

Afin de rendre négative, \dot{V}_{obs} , nous choisissons une expression pour \mathbf{K}_1 de sorte que le dernier terme de (7.27) soit nul, soit alors :

$$\mathbf{K}_1(t, \eta) = (P_{02}^{-1}P_{01}\mathbf{R}(\psi)e^{-\chi(t,\eta)})^\top \quad (7.28)$$

Ce qui permet de conclure qu'en ayant l'expression de $\mathbf{K}_1(t, \eta)$ comme l'indique (7.28), la dérivée de la fonction de Lyapunov V_{obs} s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{V}_{obs} &= -\tilde{\eta}^\top P_{01}\mathbf{K}_0\tilde{\eta} - \tilde{z}_1^\top P_{02}e^{\chi(t,\eta)}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}e^{-\chi(t,\eta)}\tilde{z}_1 < 0, \quad \forall \tilde{\eta} \neq 0, \tilde{z}_1 \neq 0 \\ &\leq -\lambda_{min}(P_{01}\mathbf{K}_0)\tilde{\eta}^\top \tilde{\eta} - \lambda_{min}(P_{02})\lambda_{min}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D})\tilde{z}_1^\top \tilde{z}_1\end{aligned}\quad (7.29)$$

Posons les vecteurs suivants :

$$\mathbf{x} = [\tilde{\eta}^\top, \tilde{z}_1^\top]^\top$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{P_{01}, P_{02}\}$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}\{\lambda_{min}(P_{01}\mathbf{K}_0), \lambda_{min}(P_{02})\lambda_{min}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D})\}$$

et notons la relation suivante

$$\begin{aligned}V_{obs} &= 0.5\tilde{\eta}^\top P_{01}\tilde{\eta} + 0.5\tilde{z}_1^\top P_{02}\tilde{z}_1 \\ &\leq 0.5\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} \leq \frac{\lambda_{max}(\mathbf{P})}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\end{aligned}\quad (7.30)$$

ainsi que

$$\dot{V}_{obs} \leq -\mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (7.31)$$

en combinant (7.30) et (7.31), nous obtenons la relation suivante

$$\dot{V}_{obs} \leq -\frac{2\lambda_{min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{max}(\mathbf{P})} V_{obs} \quad (7.32)$$

ce qui permet de conclure à partir de (7.32) que $\tilde{\eta}$ et \tilde{z}_1 convergent exponentiellement vers zéro i.e.

$$\|(\tilde{\eta}(t), \tilde{z}_1(t))\| \leq \|(\tilde{\eta}(t_0), \tilde{z}_1(t_0))\| e^{-\sigma_0(t-t_0)}$$

Désignons par $\hat{\nu}$ l'estimée du vecteur vitesse ν . L'erreur d'estimation de ν est $\tilde{\nu} = \nu - \hat{\nu}$. D'après (7.15), nous avons :

$$\hat{\nu} = e^{-\chi(t,\eta)} \hat{z}_1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\nu} = e^{-\chi(t,\eta)} \tilde{z}_1 \quad (7.33)$$

Il est facile de montrer que les éléments de la matrice $e^{-\chi(t,\eta)}$ sont bornés, alors $\tilde{\nu}$ converge exponentiellement vers zéro et par conséquent il existe une constante γ_0 telle que

$$\|(\tilde{\eta}(t), \tilde{\nu}(t))\| \leq \gamma_0 \|(\tilde{\eta}(t_0), \tilde{\nu}(t_0))\| e^{-\sigma_0(t-t_0)} \quad (7.34)$$

En utilisant (7.33), (7.24) la dynamique du système (7.14) se ré-écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\hat{\nu}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\eta) \hat{\nu} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}(\hat{\nu}) \hat{\nu} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \hat{\nu} + \mathbf{M}^{-1} \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}} \\ \dot{\tilde{\nu}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_0 & \mathbf{R}(\psi) e^{-\chi(t,\eta)} \\ -\mathbf{K}(t,\eta) & -e^{\chi(t,\eta)} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} e^{-\chi(t,\eta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.35)$$

avec $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{R}(\psi) e^{-\chi(t,\eta)}$, $\mathbf{A}_{21} = e^{-\chi(t,\eta)} (P_{02}^{-1} P_{01} \mathbf{R}(\psi) e^{-\chi(t,\eta)})^\top$ et $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}(\hat{\nu}) e^{-\chi(t,\eta)}$. A partir de (7.33), nous pouvons construire un retour d'état partiel permettant de faire converger le bateau vers un chemin pré-défini. Le développement de la loi de commande sera élaboré par la suite.

7.3.2 Retour de sortie

Dans le cas du retour d'état partiel, nous avons supposé que les états x, y, ψ et r sont mesurables. En général, dans la plus part des cas pratiques, seule la position et l'orientation du bateau sont mesurables, alors que le vecteur vitesse ne l'est pas. La résolution de l'équation différentielle (7.19) a permis de trouver une solution particulière faisant intervenir la connaissance de la mesure de la vitesse angulaire r . Dans le cas du

retour de sortie, nous proposons de trouver une solution globale ne faisant pas intervenir les variables d'états non-mesurables. Considérons le changement de coordonnées (7.15), en remplaçant la matrice et $e^{\lambda(t,\eta)}$ par la matrice $\Omega(\eta)$. Si nous parvenons à trouver une solution globale pour chaque élément $\omega_{ij}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ de la matrice Ω , alors nous pouvons conclure que le changement de coordonnées $z_1 = \Omega(\eta)\nu$ est global.

Ré-écrivant l'équation (7.17) en fonction de $\Omega(\eta)$. Ceci donne l'équation suivante

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\left[-\mathbf{C}(\nu)\nu - \mathbf{D}(\nu)\nu + \tau\right] + \dot{\Omega}(\eta)\nu \\ &= \left[\dot{\Omega}(\eta)\nu - \Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}(\nu)\nu\right] + \Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\left[\tau - \mathbf{D}(\nu)\Omega^{-1}(\eta)z_1\right] \end{aligned} \quad (7.36)$$

Comme précédemment nous voulons que le premier terme entre crochet, contenant la matrice de Coriolis soit compensé, e.g

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}(\eta)\nu - \Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}(\nu)\nu &= 0 \\ \Downarrow \\ \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{11} & \dot{\omega}_{12} & \dot{\omega}_{13} \\ \dot{\omega}_{21} & \dot{\omega}_{22} & \dot{\omega}_{23} \\ \dot{\omega}_{31} & \dot{\omega}_{32} & \dot{\omega}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{m_v}{m_u}v \\ 0 & 0 & \frac{m_u}{m_v}u \\ \frac{m_v}{m_r}v & -\frac{m_u}{m_r}u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (7.37)$$

L'équation matricielle, (7.37) représente un système d'équations différentielles que nous proposons de résoudre. En effet on peut ré-écrire (7.37) de la façon suivante

$$\dot{\omega}_{i1}u + \dot{\omega}_{i2}v + \dot{\omega}_{i3}r + \frac{m_{vu}}{m_r}\omega_{i3}uv - \frac{m_v}{m_u}\omega_{i1}vr + \frac{m_u}{m_v}\omega_{i2}ur = 0, \quad i = 1, \dots, 3 \quad \forall(\eta, u, v, r) \in \mathbb{R}^6 \quad (7.38)$$

Sachant $\Omega(\eta)$ dépend explicitement de la position x, y et l'orientation ψ , alors il est évident que $\omega_{ij}(\eta)$ dépend explicitement de x, y et ψ . Nous pouvons en conséquence transformer l'équation différentielle (7.38) en une équation différentielle à dérivée partielle comme suit

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\omega_{i1}}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial\omega_{i1}}{\partial y}\sin\psi\right)u^2 + \left(-\frac{\partial\omega_{i2}}{\partial x}\sin\psi + \frac{\partial\omega_{i2}}{\partial y}\cos\psi\right)v^2 + \frac{\partial\omega_{i3}}{\partial\psi}r^2 \\ &+ \left(-\frac{\partial\omega_{i1}}{\partial x}\sin\psi + \frac{\partial\omega_{i1}}{\partial y}\cos\psi + \frac{\partial\omega_{i2}}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial\omega_{i2}}{\partial y}\sin\psi + \frac{m_{vu}}{m_r}\omega_{i3}\right)uv \\ &+ \left(\frac{\partial\omega_{i1}}{\partial\psi} + \frac{\partial\omega_{i3}}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial\omega_{i3}}{\partial y}\sin\psi + \frac{m_u}{m_v}\omega_{i2}\right)ur \\ &+ \left(\frac{\partial\omega_{i2}}{\partial\psi} - \frac{\partial\omega_{i3}}{\partial x}\sin\psi + \frac{\partial\omega_{i3}}{\partial y}\cos\psi + \frac{m_v}{m_u}\omega_{i1}\right)vr = 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

Pour que l'équation à dérivée partielle (7.39) soit vraie pour tout $(\eta, u, v, r) \in \mathbb{R}^6$, il suffit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial x} \cos \psi + \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial y} \sin \psi &= 0, & -\frac{\partial \omega_{i2}}{\partial x} \sin \psi + \frac{\partial \omega_{i2}}{\partial y} \cos \psi &= 0, & \frac{\partial \omega_{i3}}{\partial \psi} &= 0 \\ -\frac{\partial \omega_{i1}}{\partial x} \sin \psi + \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial y} \cos \psi + \frac{\partial \omega_{i2}}{\partial x} \cos \psi + \frac{\partial \omega_{i2}}{\partial y} \sin \psi + \frac{m_{vu}}{m_r} \omega_{i3} &= 0 \\ \frac{\partial \omega_{i1}}{\partial \psi} + \frac{\partial \omega_{i3}}{\partial x} \cos \psi + \frac{\partial \omega_{i3}}{\partial y} \sin \psi + \frac{m_u}{m_v} \omega_{i2} &= 0, & \frac{\partial \omega_{i2}}{\partial \psi} - \frac{\partial \omega_{i3}}{\partial x} \sin \psi + \frac{\partial \omega_{i3}}{\partial y} \cos \psi + \frac{m_v}{m_u} \omega_{i1} &= 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

Ainsi, une famille de solutions au système d'équations aux dérivées partielles (7.40) est donnée par

$$\begin{aligned} \omega_{i1} &= \frac{1}{m_r} \left((m_u \kappa_{i3} x + m_r \kappa_{i1}) \sin \psi - (m_u \kappa_{i3} y - m_r \kappa_{i2}) \cos \psi \right) \\ \omega_{i2} &= \frac{m_v}{m_u m_r} \left((m_u \kappa_{i3} x + m_r \kappa_{i1}) \cos \psi + (m_u \kappa_{i3} y - m_r \kappa_{i2}) \sin \psi \right) \\ \omega_{i3} &= \kappa_{i3} \end{aligned} \quad (7.41)$$

avec κ_{i1} , κ_{i2} et κ_{i3} sont des constantes arbitraires. Nous pouvons choisir ces constantes tels que la matrice $\Omega(\eta)$ soit inversible. Nous pouvons choisir $\kappa_{33} = \kappa_{21} = \kappa_{12} = 1$. Les autres constantes sont nulles. Ainsi, nous obtenons la matrice $\Omega(\eta)$:

$$\Omega(\eta) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\frac{m_v}{m_u} \sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \frac{m_v}{m_u} \cos \psi & 0 \\ \frac{m_u}{m_r} (x \sin \psi - y \cos \psi) & \frac{m_v}{m_r} (x \cos \psi + y \sin \psi) & 1 \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

Remarquons que la matrice $\Omega(\eta)$ de (7.42), (au contraire de la matrice $\chi(t, \eta)$ de (7.20) et par conséquent de $e^{\chi(t, \eta)}$) ne fait pas intervenir la connaissance de la mesure de la vitesse angulaire r . Nous pouvons, par conséquent, construire un observateur pour le système décrit par (7.22) comme celui de (7.23) avec la matrice $\mathbf{K}(\eta)$ donnée par

$$\mathbf{K}_1(\eta) = (P_{02}^{-1} P_{01} \mathbf{R}(\psi) \Omega(\eta)^{-1})^\top \quad (7.43)$$

En utilisant les mêmes arguments de la démonstration du paragraphe précédent, nous montrons qu'avec le changement de coordonnées $z_1 = \Omega(\eta)\nu$, l'erreur d'observation sur les vitesses linéaire et angulaire convergent exponentiellement vers zéro. De même, nous montrons que la dynamique (7.14) pouvant se mettre sous la forme (7.35) avec $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{R}(\psi)\Omega^{-1}(\eta)$, $\mathbf{A}_{21} = \Omega^{-1}(\eta)(P_{02}^{-1}P_{01}\mathbf{R}(\psi)\Omega^{-1}(\eta))^\top$ et $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}(\hat{v})\Omega^{-1}(\eta)$.

7.4 Observateur pour le suivi de chemin d'un USV

Nous reprenons les schémas de suivi de chemins par la deuxième approche du chapitre 5. Nous interprétons les erreurs cinématiques exprimées dans un repère lié au bateau par (5.31) voir (figure 7.2). En utilisant (7.33), nous ré-écrivons les trois équations des

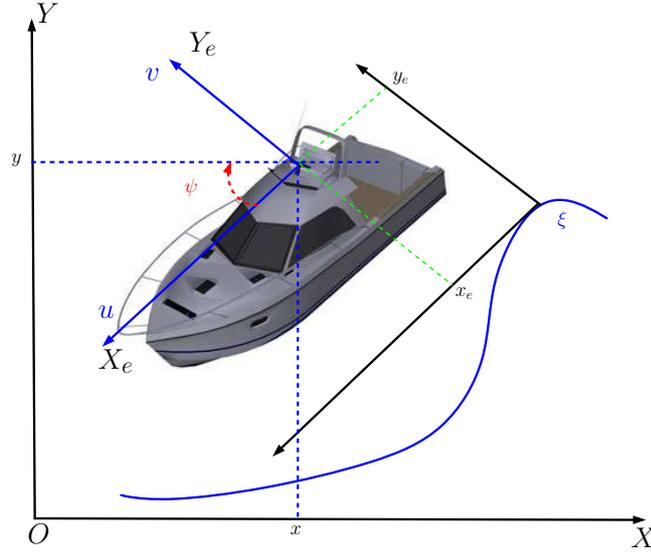


FIG. 7.2 – Interprétation de l'erreur cinématique attaché au USV.

erreurs cinématiques (5.33) comme suit

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= \hat{u} - u_d \cos \psi_e + (\hat{r} + \tilde{r})y_e + \tilde{u} \\ \dot{y}_e &= \hat{v} + u_d \sin \psi_e - (\hat{r} + \tilde{r})x_e + \tilde{v} \\ \dot{\psi}_e &= \hat{r} - r_d + \tilde{r}\end{aligned}\quad (7.44)$$

Ainsi, en combinant la cinématique et la nouvelle dynamique du véhicule marin sous-actionné en introduisant les composantes de l'observateur (7.33), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= \hat{u} - u_d \cos \psi_e + (\hat{r} + \tilde{r})y_e + \tilde{u} \\ \dot{y}_e &= \hat{v} + u_d \sin \psi_e - (\hat{r} + \tilde{r})x_e + \tilde{v} \\ \dot{\psi}_e &= \hat{r} - r_d + \tilde{r} \\ \dot{\hat{u}} &= \frac{m_v}{m_u} \hat{v} \hat{r} - \frac{d_u}{m_u} \hat{u} + \frac{1}{m_u} \tau_1 + \Phi_u \\ \dot{\hat{v}} &= -\frac{m_u}{m_v} \hat{u} \hat{r} - \frac{d_v}{m_v} \hat{v} + \Phi_v \\ \dot{\hat{r}} &= \frac{m_{uv}}{m_r} \hat{u} \hat{v} - \frac{d_r}{m_r} \hat{r} + \frac{1}{m_r} \tau_2 + \Phi_r\end{aligned}\quad (7.45)$$

avec Φ_u, Φ_v et Φ_r sont respectivement les composantes du vecteur $\mathbf{A}_{21}\tilde{\eta} + \mathbf{A}_{22}\tilde{z}_1$. Comme dans le chapitre 5, et afin de stabiliser x_e et y_e , nous définissons les variables d'erreur suivantes

$$u_e = \hat{u} - \alpha_u, \quad \bar{\psi}_e = \psi_e - \alpha_{\psi_e}, \quad r_e = \hat{r} - \alpha_r \quad (7.46)$$

avec

$$\alpha_u = -\phi_1 + u_d \cos \psi_e, \quad \alpha_{\psi_e} = -\arctan\left(\frac{\phi_2 + v_d}{\gamma(t)}\right) \quad (7.47)$$

où nous avons choisi pour la vitesse linéaire u_d l'expression suivante

$$u_d = \sqrt{\gamma(t)^2 + (\phi_2 + v_d)^2}$$

avec $\phi_1 = \frac{k_1 x_e}{\sqrt{1+x_e^2+y_e^2}}$, $\phi_2 = \frac{k_2 y_e}{\sqrt{1+x_e^2+y_e^2}}$, $k_1 > 0, k_2 > 0$, et v_d est une valeur filtrée de \hat{v} à déterminer ultérieurement. La quantité $|\gamma(t)|$ est choisie de telle sorte que :

$$|v_d| < u_d^{min} \leq |\gamma| \leq u_d^{max}$$

Par la suite, et afin de stabiliser $\bar{\psi}_e$, nous choisissons une fonction stabilisante α_r donnée par la même expression que celle de (5.44). La dynamique de $\bar{\psi}_e$ est alors définie par

$$\dot{\bar{\psi}}_e = -k_3 \bar{\psi}_e + \left(1 - \frac{k_2 \gamma(t) x_e}{u_d^2 \varpi}\right) (r_e + \tilde{r}) - \frac{u_d \Delta}{\bar{\psi}_e} y_e - \frac{k_2 \gamma(t) x_e y_e}{u_d^2 \varpi^3} (u_e + \tilde{u}) + \frac{k_2 \gamma(t) (1 + x_e^2)}{u_d^2 \varpi^3} (v_e + \tilde{v}) \quad (7.48)$$

La valeur filtrée de \hat{v} peut être obtenue d'une façon similaire à (5.50) sans le terme de compensation $-\frac{\tau_{uv}^{Max}}{m_{22}} \tanh\left(\frac{v_e \tau_{uv}^{Max}}{\varepsilon_v m_{22}}\right)$. Ainsi la dynamique de l'erreur de la vitesse de glissement s'écrit de la manière suivante

$$\dot{v}_e = -\frac{d_v}{m_v} v_e - \frac{m_u}{m_v} (\hat{u} r_e + u_e \alpha_r) + \frac{k_2 \gamma(t) (1 + x_e^2)}{u_d^2 \varpi^3} \bar{\psi}_e + \Phi_v \quad (7.49)$$

Les commandes τ_1 et τ_2 , s'obtiennent en différenciant la première et la dernière équation de (7.46) pour obtenir les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m_u \left(-k_4 u_e + \frac{d_{11}}{m_{11}} \alpha_u - \frac{m_{22}}{m_{11}} \hat{v} \hat{r} + \frac{k_2 x_e y_e}{\varpi_1 U} \bar{\psi}_e + \frac{m_{11}}{m_{22}} v_e \alpha_r - x_e + \frac{\partial \alpha_u}{\partial u_d} \dot{u}_d \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha_u}{\partial x_e} (\hat{u} - u_d \cos \psi_e + \hat{r} y_e) + \frac{\partial \alpha_u}{\partial y_e} (\hat{v} + u_d \sin \psi_e - \hat{r}) + \frac{\partial \alpha_u}{\partial \psi_e} (\hat{r} - r_d) + \right) \\ \tau_2 &= m_r \left(-k_5 r_e + \frac{d_r}{m_r} \alpha_r - \frac{m_{uv}}{m_r} \hat{u} \hat{v} - \left(1 - \frac{k_2 \gamma(t) x_e}{u_d^2 \varpi}\right) \bar{\psi}_e + \frac{m_u}{m_v} v_e \hat{u} + \frac{\partial \alpha_r}{\partial x_e} (\hat{u} \right. \\ &\quad \left. - u_d \cos \psi_e + \hat{r} y_e) + \frac{\partial \alpha_r}{\partial y_e} (\hat{v} + u_d \sin \psi_e - \hat{r}) + \frac{\partial \alpha_r}{\partial \psi_e} (\hat{r} - r_d) + \frac{\partial \alpha_r}{\partial u_d} \dot{u}_d \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \alpha_r}{\partial \dot{v}_d} \ddot{v}_d + \frac{\partial \alpha_r}{\partial \dot{u}_d} \ddot{u}_d \right) \end{aligned} \quad (7.50)$$

Ainsi en utilisant les commandes (7.50), l'erreur cinématique ainsi que la dynamique en boucle fermée du bateau s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_e &= -\phi_1 + (\hat{r} + \tilde{r})y_e + u_e + \tilde{u} \\
 \dot{y}_e &= -\phi_2 - (\hat{r} + \tilde{r})x_e + u_d\Delta + v_e + \tilde{v} \\
 \dot{\psi}_e &= -k_3\psi_e + \left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)(r_e + \tilde{r}) - \frac{u_d\Delta}{\psi_e}y_e \\
 &\quad - \frac{k_2\gamma(t)x_ey_e}{u_d^2\varpi^3}(u_e + \tilde{u}) + \frac{k_2\gamma(t)(1+x_e^2)}{u_d^2\varpi^3}(v_e + \tilde{v}) \\
 \dot{v}_e &= -\frac{d_v}{m_v}v_e - \frac{m_u}{m_v}r_e\hat{u} - \frac{m_u}{m_v}u_e\alpha_r \\
 &\quad - \frac{k_2\gamma(t)(1+x_e^2)}{u_d^2\varpi^3}\bar{\psi}_e + \Phi_v \\
 \dot{u}_e &= -\left(k_4 - \frac{d_u}{m_u}\right)u_e + \frac{k_2\gamma(t)x_ey_e}{u_d^2\varpi^3}\bar{\psi}_e + \frac{m_u}{m_v}v_e\alpha_r - x_e \\
 &\quad - \frac{\partial\alpha_u}{\partial x_e}(\tilde{r}y_e + \tilde{u}) + \frac{\partial\alpha_u}{\partial y_e}(\tilde{r}x_e - \tilde{v}) - \frac{\partial\alpha_u}{\partial\psi_e}\tilde{r} + \Phi_u \\
 \dot{r}_e &= -\left(k_5 - \frac{d_r}{m_r}\right)r_e - \left(1 - \frac{k_2\gamma(t)x_e}{u_d^2\varpi}\right)\bar{\psi}_e + \frac{m_u}{m_v}v_e\hat{u} \\
 &\quad - \frac{\partial\alpha_r}{\partial x_e}(\tilde{r}y_e + \tilde{u}) + \frac{\partial\alpha_r}{\partial y_e}(\tilde{r}x_e - \tilde{v}) - \frac{\partial\alpha_r}{\partial\psi_e}\tilde{r} + \Phi_r
 \end{aligned} \tag{7.51}$$

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant pour le suivi de chemins dans le cas d'un observateur par retour de sortie ou bien par retour partiel d'état.

Théorème 5.1 (Ghommem et al., 2007a) *Soit le chemin $\xi(\theta)$ défini par son paramètre θ . Supposons qu'ils n'existe pas de perturbations environnementales agissant sur le bateau, le modèle dynamique est donné par (7.14), Si l'on applique au bateau les lois de commandes τ_1 et τ_2 décrites par les équations (7.50) et en reconstituant les états non mesurés par l'observateur (7.33), alors les erreurs cinématiques et dynamiques convergent exponentiellement vers zéro.*

Démonstration Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = W + V_{obs} \tag{7.52}$$

avec

$$W = 0.5(x_e^2 + y_e^2) + 0.5(\bar{\psi}_e^2 + v_e^2 + u_e^2 + r_e^2) \tag{7.53}$$

D'abord, exprimons la dérivée par rapport au temps de la fonction W :

$$\begin{aligned} \dot{W} = & -\frac{k_1 x_e^2}{\varpi} - \frac{k_2 y_e^2}{\varpi} - k_3 \bar{\psi}_e^2 - \frac{d_v}{m_v} v_e^2 - \left(k_4 - \frac{d_u}{m_u}\right) u_e^2 \\ & - \left(k_5 - \frac{d_r}{m_r}\right) r_e^2 + y_e v_e + \sum_{i=0}^3 \Theta_i \end{aligned} \quad (7.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \tilde{u} x_e + \tilde{v} y_e \\ \Theta_1 &= v_e \Phi_v + u_e \Phi_u + r_e \Phi_r \\ \Theta_2 &= -\frac{\partial \alpha_r}{\partial \psi_e} \tilde{r} r_e - \frac{\partial \alpha_u}{\partial \psi_e} \tilde{r} u_e \\ \Theta_3 &= (\tilde{r} y_e + \tilde{u}) \left[-\frac{\partial \alpha_u}{\partial x_e} u_e - \frac{\partial \alpha_r}{\partial x_e} r_e \right] + (\tilde{r} x_e - \tilde{v}) \left[\frac{\partial \alpha_u}{\partial y_e} u_e + \frac{\partial \alpha_r}{\partial y_e} r_e \right] \\ &+ \left(1 - \frac{k_2 \gamma(t) x_e}{u_d^2 \varpi}\right) \tilde{r} \bar{\psi}_e - \frac{k_2 \gamma(t) x_e y_e}{u_d^2 \varpi^3} \tilde{u} \bar{\psi}_e + \frac{k_2 \gamma(t) (1 + x_e^2)}{u_d^2 \varpi^3} \tilde{v} \bar{\psi}_e \end{aligned} \quad (7.55)$$

Vue la forme de \dot{V} et afin de conclure de la stabilité de (7.51), nous devons trouver une borne supérieure à (7.54). Après un calcul simple en utilisant la règle de l'inégalité de Young, nous obtenons la relation suivante :

$$|\Psi| = \left| y_e v_e + \sum_{i=0}^3 \Omega_i \right| \leq \mu_0 \|X_e\|^2 + \mu_1 \|Y_e\|^2 + \mu_2 \|\tilde{\nu}\|^2 \quad (7.56)$$

avec $X_e = [x_e, y_e, \bar{\psi}_e]^\top$, $Y_e = [u_e, v_e, r_e]^\top$ et $\tilde{\nu} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{r}]^\top$. μ_0, μ_1, μ_2 et ε_1 sont des constantes positives arbitraires. En substituant (7.56) and (7.54), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -\left(\frac{k_1}{\varpi} - \mu_0\right) x_e^2 - \left(\frac{k_2}{\varpi} - \mu_0\right) y_e^2 - (k_3 - \mu_0) \bar{\psi}_e^2 \\ & - \left(\frac{d_v}{m_v} - \mu_1\right) v_e^2 - \left(k_4 - \frac{d_u}{m_u} - \mu_1\right) u_e^2 \\ & - \left(k_5 - \frac{d_r}{m_r} - \mu_1\right) r_e^2 + \mu_2 \|\tilde{\nu}\|^2 \end{aligned} \quad (7.57)$$

Nous pouvons calculer $\tilde{\nu}$ en fonction de la nouvelle variable \tilde{z}_1 de deux façon, selon ce que nous voulons faire (un retour de sortie ou un retour partiel d'état). En effet, nous pouvons écrire la relation suivante

$$\|\tilde{\nu}\|^2 = \tilde{z}_1^\top \Omega^\top \Omega^{-1} \tilde{z}_1 \quad (7.58)$$

En utilisant les inégalités (7.29) et (7.57), nous pouvons écrire la relation suivante

$$\begin{aligned}
 \dot{V} \leq & -\left(\frac{k_1}{\varpi_1} - \mu_0\right)x_e^2 - \left(\frac{k_2}{\varpi_1} - \mu_0\right)y_e^2 - \left(\frac{k_3}{\varpi_2} - \mu_0\right)\bar{\psi}_e^2 \\
 & -\left(\frac{d_{22}}{m_{22}} - \mu_1\right)v_e^2 - \left(k_3 - \frac{d_{11}}{m_{11}} - \mu_1\right)u_e^2 \\
 & -\left(k_4 - \frac{d_{33}}{m_{33}} - \mu_1\right)r_e^2 - \lambda_{\min}(P_{01}K_0)\|\tilde{\eta}\|^2 \\
 & -\left(\lambda_{\min}(P_{02})\lambda_{\min}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}) - \mu_2\right)\|\tilde{z}_1\|^2
 \end{aligned} \tag{7.59}$$

avec μ_2 est choisi tels que $\lambda_{\min}(P_{02})\lambda_{\min}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}) - \mu_2 > 0$. L'inégalité (7.59), peut être ré-écrite de la façon suivante :

$$\dot{V} \leq -W \leq 0 \tag{7.60}$$

avec $W = k_1^*x_e^2 + k_2^*y_e^2 + k_3^*\bar{\psi}_e^2 + k_4^*v_e^2 + k_5^*u_e^2 + k_6^*r_e^2 + k_7^*\|\tilde{\eta}\|^2 + k_8^*\|\tilde{z}_1\|^2$. A partir de la définition de la fonction de Lyapunov (7.52), nous concluons que $V(t)$ est bornée, alors les variables $(x_e, y_e, \bar{\psi}_e, v_e, u_e, r_e, \tilde{\eta}, \tilde{z}_1)$ sont également bornées pour tout $t \geq t_0 \geq 0$. En intégrant l'inégalité (7.60), nous obtenons

$$\int_{t_0}^t W(\tau)d\tau \leq V(t_0) - V(t) \leq V(t_0) \tag{7.61}$$

Nous remarquons d'après (7.61) que $V(t_0)$ existe et est borné. De même W est uniformément continue et sa dérivée est également bornée. Donc, en utilisant le lemme de Barbalat (Khalil, 1996), nous avons $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$. ce qui implique que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_e, y_e, \bar{\psi}_e, v_e, u_e, r_e, \tilde{\eta}, \tilde{z}_1) = 0 \tag{7.62}$$

Comme x_e et y_e convergent exponentiellement vers zéro, nous pouvons en conclure que $x \rightarrow x_b$ et $y \rightarrow y_b$ avec x_b et y_b sont deux fonctions continues bornées. Ainsi, l'erreur d'observation $\tilde{\nu} \rightarrow 0$, puisque \tilde{z}_1 l'est aussi d'après (7.62). \square

7.5 Conception d'un observateur en présence de perturbations environnementales

En présence de perturbations environnementales, la dynamique (7.14) s'écrit de la façon suivante

$$\mathbf{M}\dot{\nu} = -\mathbf{C}(\nu)\nu - \mathbf{D}(\nu)\nu + \tau + \tau_{dis} \tag{7.63}$$

En conservant le même changement de coordonnées $z_1 = \Omega(\eta)\nu$, un observateur pour (7.63) peut être construit de la façon suivante

$$\dot{\hat{z}}_1 = -\Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\Omega(\eta)^{-1}\hat{z}_1 + \Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\tau - \Omega(\eta)\hat{\Theta} \tag{7.64}$$

avec $\hat{\Theta} = [\hat{\tau}_{dis_u}, \hat{\tau}_{dis_v}, \hat{\tau}_{dis_r}]$ est le vecteur estimé du vecteur des perturbations τ_{dis} . La dynamique de l'erreur des estimés du vecteur z_1 s'écrit

$$\dot{\tilde{z}}_1 = -\Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\Omega(\eta)^{-1}\tilde{z}_1 + \Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\tilde{\Theta} \quad (7.65)$$

A partir de (7.65), nous devons choisir une loi adaptative pour $\hat{\Theta}$. Pour cela, nous proposons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_0 = 0.5(\tilde{z}_1^\top \tilde{z}_1 + \tilde{\Theta}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}) \quad (7.66)$$

avec Γ est une matrice définie positive. La dérivée par rapport au temps de (7.66) donne

$$\dot{V}_0 = -\tilde{z}_1^\top \Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\Omega(\eta)^{-1}\tilde{z}_1 - \tilde{\Theta}^\top \Gamma^{-1} \dot{\hat{\Theta}} + \tilde{z}_1^\top \Omega(\eta)\mathbf{M}^{-1}\tilde{\Theta} \quad (7.67)$$

Ce qui permet de choisir la loi adaptative pour $\hat{\Theta}$ comme suit

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma\mathbf{M}^{-1}\Omega(\eta)^\top \tilde{z}_1 \quad (7.68)$$

ce qui permet de conclure que

$$\dot{V}_0 \leq -\lambda_{min}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D})\|\tilde{z}_1\|^2 \quad (7.69)$$

Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}_1 = 0$. Cependant, il est important de remarquer que la loi adaptative (7.68) ne peut être implémentée sur le contrôleur. En effet celle ci contient le vecteur incertain z_1 , qui dépend du vecteur incertain τ_{dis} . Le seul moyen de contourner ce problème est de substituer l'expression de $\tilde{z}_1 = z_1 - \hat{z}_1$ dans l'expression (7.68). En intégrant l'équation (7.68), nous obtenons :

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\Theta}(t_0) + \Gamma\mathbf{M}^{-1} \int_{t_0}^t \Omega(\eta)^\top (z_1(x) - \hat{z}_1(x)) dx \quad (7.70)$$

Or, d'après la transformation $z_1 = \Omega(\eta)\nu$ et la première équation de (7.14) nous avons

$$z_1 = (R(\psi)\Omega(\eta))^{-1}\dot{\eta} \quad (7.71)$$

En substituant (7.71) dans (7.70), nous obtenons :

$$\hat{\Theta}(t) = \hat{\Theta}(t_0) - \Gamma\mathbf{M}^{-1} \int_{t_0}^t \Omega(\eta)^\top \hat{z}_1(x) dx + \Gamma\mathbf{M}^{-1} \int_{\eta(t_0)}^{\eta(t)} \Omega(\theta)^\top (R(\theta)\Omega(\theta))^{-1} d\theta \quad (7.72)$$

Notons que le terme de droite de (7.72) ne contient que des termes connues. L'estimé $\hat{\Theta}$ ne peut pas être calculé à partir de (7.68), mais plutôt à partir de (7.72).

7.6 Résultats de Simulation

Dans cette partie, nous simulons la commande (7.50), sur le modèle de bateau (7.14), en se basant sur la structure d'observateur (7.35). Le chemin adopté pour cette simulation est un chemin hyperbolique donné par $x_d(s) = s$ et $y_d(s) = 10 \tanh(0.1s)$. Les conditions initiales sont $(\eta(0), \nu(0)) = (-10, 2, \pi/3, 1, 0, 0)$ et $(\hat{\eta}(0), \hat{\nu}(0)) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$. La figure 7.3 montre que le mouvement du bateau dans un plan (o, x, y) est entrainé de suivre le chemin hyperbolique. La figure 7.4.a illustre bien la convergence exponentielle vers zéro des erreurs cinématiques. Tandis que les figures 7.4.b, 7.4.c et 7.4.d montrent que les estimés des vitesses linéaires et angulaires convergent vers leurs valeurs désirées.

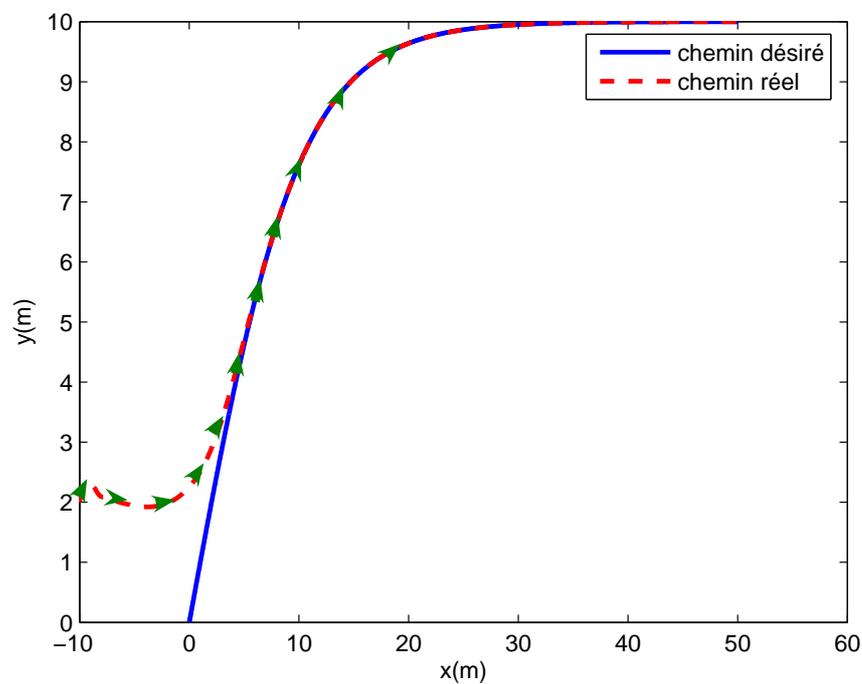
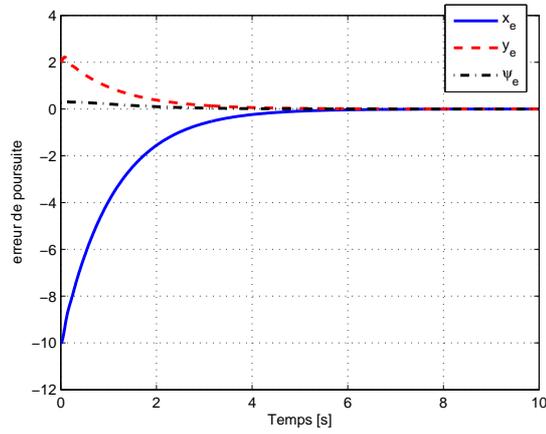


FIG. 7.3 – *Mouvement du bateau dans un plan $x - y$*

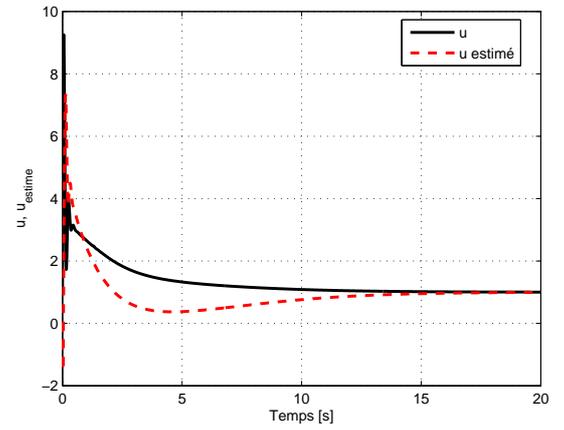
7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode permettant de concevoir un observateur par retour d'état partiel pour un modèle de bateau décrit par (7.14). Cet

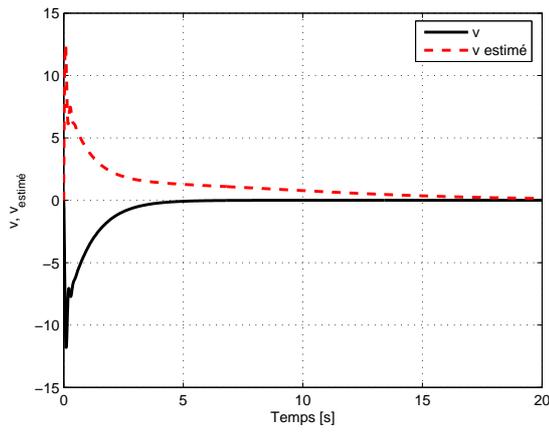
observateur est construit sur la base d'un changement de coordonnées donné par (7.15) tout en supposant que la vitesse angulaire est toujours disponible (mesurable). Cette solution cependant n'est pas tout à fait pratique, car en général, dans diverses applications, les vitesses linéaires et angulaire sont non mesurables. Nous avons, donc considéré un autre changement de coordonnées plus général que celui de (7.15), qui a permis de concevoir une loi de commande par feedback ne contenant que des informations disponibles en fonction des états estimés et de la position du bateau. Néanmoins, cette approche reste uniquement valable dans le cas d'un modèle de bateau sans être soumis à des perturbations environnementales. Nous avons, donc proposé un schéma d'un observateur adaptatif, qui permet de considérer les termes incertains des composantes du vecteur des perturbations environnementales.



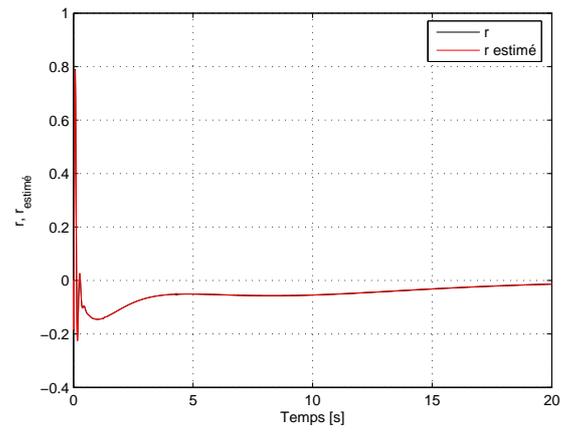
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 7.4 – (a) Convergence exponentielle des erreurs cinématiques, (b,c,d) Convergence des vitesses estimées .

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

8.1 Conclusion

Dans cette thèse différentes méthodes de commande des véhicules marins sous-actionnés ont été élaborées. L'accent a été particulièrement mis sur cinq types de problèmes :

- La stabilisation du véhicule marin sous-actionné à l'origine en adoptant l'approche des systèmes en cascades,
- La poursuite de trajectoire. Abordée via le problème de suivi de la position et en de l'orientation, d'une cible mobile ayant les mêmes propriétés cinématiques et dynamiques du véhicule marin sous-actionné. L'analyse de stabilité de la commande est faite en ayant recours aux propriétés de systèmes en cascades,
- Le suivi de chemin paramétré abordé par deux méthodes différentes. La première consiste à considérer la vitesse de parcours du véhicule constante le long du chemin. La seconde consiste à faire varier cette vitesse en fonction de la courbure du chemin,
- La coopération et synchronisation des véhicules marins. Par la proposition d'une nouvelle technique permettant de maintenir le mouvement de l'ensemble des véhicules en formation,
- Le dernier problème a consisté à considérer l'observateur des vitesses du véhicule marin. D'un point de vue théorique, nous avons démontré qu'une stabilisation à une configuration fixe (l'origine dans notre cas) peut être obtenue par deux façons possibles pour les véhicules marins sous-actionnés.

En ce qui concerne la poursuite de trajectoire engendrée par le mouvement de la cible, nous avons montré que la convergence du véhicule marin sous-actionné est exponen-

tielle à condition que l'on garantisse la propriété d'excitation persistante de la vitesse angulaire du véhicule marin. En ce qui concerne Le suivi de chemins, nous avons défini a priori géométrie de la trajectoire que le bateau doit suivre. La technique que nous avons employé est celle des chemins paramétrés. En effet, puisque la dérivée par rapport au temps du paramètre du chemin représente en quelque sorte la vitesse pour la quelle le véhicule utilise pour avancer sur le chemin, nous avons utilisé cette variable afin de la considérer comme une commande auxiliaire pour simplifier les lois de commandes appliquées au véhicule marins. Pour le suivi du chemin, nous avons considéré le cas où le véhicule marin sous-actionné subi des perturbations environnementales, des techniques de compensations de ces perturbations ont été employées tels que la commande adaptative.

Les problèmes de coordination des véhicules marins sont des applications très récentes et différentes techniques ont été utilisées dans la littérature. Nous avons contribué dans ces applications avec une technique simple qui se base sur la structure virtuelle et le suivi de chemin afin de coordonner la position, l'orientation ainsi que les vitesses des véhicules. L'analyse de stabilité de la coordination est principalement basée sur la théorie de Lyapunov.

Les applications citées ci-dessus, supposent que l'on a accès au mesures des vitesse des véhicules marins. En général ceci n'est pas possible. En effet, nous mesurons uniquement les positions et orientation du véhicule puis une dérivation numérique permettrait l'obtention des ces vitesses. Puisque la mesure des positions et orientation n'est parfaite, la mesure des vitesses sera donc aberrantes. Pour cela nous avons proposé de faire une estimation des états de vitesses via la construction d'un observateur pour les véhicules marins sous-actionnés. Nous avons à cet effet proposé deux types d'observateurs, le premier est un observateur par retour d'état partiel, où l'on suppose que nous avons une mesure de la vitesse de rotation du véhicule, le deuxième schéma d'observateur suppose que nous disposons de la mesure des positions/orientation du véhicule.

8.2 Perspectives

A l'issue de ce travail de thèse, plusieurs problèmes demeurent ouverts et d'autres investigations restent à développer. Nous présentons ici ce qui nous semble être le cadre des travaux où des avancées importantes sont tout à fait envisageables.

L'extension de l'approche de commande pour la stabilisation. En effet, la poursuite de trajectoire ainsi que le suivi de chemins dans le cas du véhicule à 6 DDL est sans doute

le problème auquel il faudrait porter un intérêt particulier. Ce problème de commande est totalement différent quand la configuration des actionneurs est différente du cas sous-actionné à 3DLL. Tout particulièrement quand le véhicule se déplace dans un espace de dimensions 3, doté d'actionneurs pouvant donner des forces dans la direction d'avancement, en rotation, en lacet et en tangage mais pas de mouvement dans les directions de descente et de glissement. Un autre problème qui semble aussi intéressant, c'est quand le véhicule marin ne dispose pas d'actionneurs pouvant donner une force en roulis.

Les principaux exemples traités dans les différents chapitres exigent une parfaite connaissance du modèle du véhicule marin sous-actionné. Des extensions de ces résultats auront pour objet de ne plus imposer de telles hypothèse et de généraliser la commande à un modèle incertain du véhicule sous-actionné. Aussi le mouvement des véhicules été considéré dans des milieu libres (sans obstacles), une stratégie d'évitement d'obstacles et de collision pourrait aussi être implantée.

L'exemple illustratif du chapitre 6 consiste en une démonstration alternative du suivi de chemin pour la formation d'une flotte de véhicules sous-actionné. Jusqu'ici, nous n'avons pas considéré les contraintes de communications ainsi que le retard de transmission d'information entre véhicules. Peu d'auteurs ont traité ce problème pour la coordination et la synchronisation des systèmes mécaniques, quelques résultats sur ce sujet peuvent être trouvé dans le récent travail de (Ihle, 2006) et (Arrichiello.F., 2006). Ce domaine de recherche demeure cependant à explorer.

Différentes questions surgissent lors de la tentative de combler le fossé entre la théorie et la pratique. En dépit de l'énorme effort en matière de commande des systèmes non-linéaires, il y a encore un manque d'applications pratiques qui peuvent illustrer comment la théorie développée peut être utilisée pour contrôler une catégorie de systèmes tels que les véhicule marins. Les simulations menées indiquent que les types de stratégies de commandes développés sont de bonnes approches pour des applications pratiques. Toutefois, des travaux supplémentaires sont nécessaires pour passer de la théorie à la pratique et à mettre en oeuvre les stratégies élaborées sur des véhicules réels. A cet effet, nous proposons comme travail de recherche futur, de tester nos algorithmes de commande sur un prototype pétrolier expérimentale le seabex I (Voir Figure 8.1) après avoir équipé ce prototype par les instruments nécessaires pour pouvoir le commander.



FIG. 8.1 – Prototype experimental, le bateau pétrolier seabex I.

Bibliographie

- A, B. et ROSIER, L. (2001). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer., 208 pages.
- AGUIAR, A. P. et HESPANHA, J. P. (2004). Logic-based switching control for trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty. *Dans Proc. American Control Conf.*, Boston, MA. USA.
- AGUIAR, A. P., D. B. D. J. P. H. et KOKOTOVIC, P. (2004). Path-following or reference-tracking? *Dans Proc. 5th IFAC/EURON Symp. on Intelligent Autonomous Vehicles*,., Lisbon, Portugal.
- ARRICHELLO.F. (2006). *Coordination Control of Multiple Mobile Robots*. Thèse de doctorat, Universita Degli Studi di Cassino, Cassino, Italy. 172.
- BEARD, R. W., LAWTON, J. et HADAEGH, F. Y. (1996). A coordination architecture for spacecraft formation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 9(6):777–790.
- BENNANI, M. et ROUCHON, P. (1995). Robust stabilization of flat and chained systems. *Dans In Proc. of the 3rd European Control Conf*, Rome.
- BERGHUIS, H. et NIJMEIJER, H. (1993). Global regulation of robots using only position measurments. *Systems & Control Letters*, 21.
- BLOCH, A. et DRAKUNOV, S. (1994). Stabilization of a nonholonomic system via sliding modes. *Dans Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA.
- BREIVIK, M. et FOSSEN, T. (2004). Path following of straight lines and circles for marine surface vessels. *Dans Proc. IFAC Conf. Contr. Appl. Marine Systems*, IFAC, Ancona, Italy.
- BROCKETT, R. W. (1983). *Asymptotic stability and feedback stabilization*. Differential Geometric Control Theory. (R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussman, Eds.), Boston, USA. pp. 181-191.

- BULLO, F., LEONARD, N. et LEWIS., A. (2000). Controllability and motion algorithms form underactuated lagrangian systems on lie groups. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45(8):1437–1454.
- Canudas-de WIT, C., SICILIANO, B. et BASTIN, G. (1996). *Theory of Robot Control*. Communications and Control Engineering Series. Springer., 550 pages.
- Canudas-de WIT, C. et SORDALEN, O. (1992). Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomics constraints. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 37(11):48–59.
- CHAILLET, A. (2006). *Stability and robustness of nonlinear systems-Applications to cascades*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud, France.
- CORON, J.-M. e. d. N. (1992). Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems. *Dans IFAC Nonlinear Control Systems Design Symp*, (NOLCOS).
- DICKMANN, E. et ZAPP, A. (1987). Autonomous high speed road vehicle guidance by computer vision. *Dans Proceedings of the 10th IFAC World Congress*.
- DO, K.D. and Pan, J. (2004). State-and output-feedback robust path-following controllers for underactuated ships using serret-frenet frame. *Ocean Engineering*, 31.
- EGELAND, O., DALSMO, M. et SORDALEN, O. (1996). Feedback control of a nonholonomic underwater vehicle with constant desired configuration. *International Journal of Robotics Research*, 15(1):24–35.
- EGELAND, O. et GRAVDAHL, J. T. (2002). *Modeling and Simulation for Automatic Control*. Marine Cybernetics, Trondheim, Norway.
- EGERSTEDT, M. et HU, X. (2001). Formation constrained multi-agent control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17.
- ENCARNACAO, P. et PASCOAL, A. (2001). Combined trajectory tracking and path following : An application to the coordinated control of autonomous marine craft. *Dans Proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control.*, Orlando, FL, USA.
- FAX, J. A. et MURRAY, R. M. (2004). Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49.
- FOSSEN, T. I. (1994). *Guidance and Control of Oceab Vehicles*. John Wiley & Sons. England.
- FOSSEN, T. I. (2002). *Marine control systems*. Trondheim,. Norway : Marine Cybernetics.

- FOSSEN, T. I., BREIVIK, M. et SKJETNE, R. (2003). Line-of-sight path following of underactuated marine craft. *Dans Proc. IFAC Conf. Manoeuvring and Contr. Marine Crafts*, IFAC, Girona, Spain, pp. 244–249.
- FREZZA, R. (1999). Path following for air vehicles in coordinated flight. *Dans Proc. 1999 IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics.*, Atlanta, GA, USA.
- FREZZA, R. (2000). How much does one need to know about a curve in order to follow it with a nonholonomic vehicle? *Dans Proc. Int. Conf. on Mathematical Theory of Networks and Systems.*, Perpignan, France. MTNS.
- GHOMMAM, J., MNIF, F., BENALI, A. et DERBEL, N. (2007a). Nonsingular serret-frenet-based path following control for an underactuated surface vessel. (*Submitted to*) *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control (ASME)*.
- GHOMMAM, J., MNIF, F., BENALI, A. et DERBEL, N. (2007b). On the dynamic properties and control of underactuated surface vessels. *Int. J. Modelling, Identification and Control*, 2(1).
- GHOMMEM, J., MNIF, F., A.BENALI, POISSONS, G. et DERBEL, N. (2007a). Observer design for euler lagrange system : Application to path following control of an underactuated surface vessel. *Dans Proc IEEE/RSJ International conference on intelligent robots and systems, IROS'07.*, San Diego, USA.
- GHOMMEM, J., MNIF, F. et DERBEL, N. (2007b). Formation control based path following : Application to a double integrator. *Dans Proc IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, Hammamet, Tunisia.
- GHOMMEM, J., MNIF, F. et DERBEL, N. (2007c). Robust path following control of underactuated ship. *Dans Proc IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, Hammamet, Tunisia.
- GHOMMEM, J., MNIF, F., POISSONS, G. et DERBEL, N. (2007d). Nonlinear formation control of a group of underactuated ships. *Dans Proc of IEEE/OES Oceans 07 Aberdeen Conference.*, Aberdeen, England.
- GHOMMEM, J. F. M., BENALI, A., DERBEL, N. et POISSON, G. (2007e). Guidance based path following control for an underactuated ship. *Dans Proc IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, Hammamet, Tunisia.
- GOLDSTEIN, H. (1980). *Classical Mechanics*. 2nd. ed.. Addison-Wesley., Reading, MA, USA. 672 pages.

- HAUSER, J. et HINDMAN, R. (2000). Manoeuvre regulation from trajectory tracking : Feedback linearizable systems. *Dans Proc. IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems Design.*, Lake Tahoe, CA, USA.
- HERMANN, R. (1968). *Accessibility problems for path systems*. Differential Geometry and the Calculus of Variations. Brookline., Ma, USA. pp 241-257.
- HESPANHA, J. P. (1994). Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching. *Dans Proc. 13th World Congress of IFAC.*, Francisco, CA, USA. pp. 467-472.
- IHLE, I.-A. F. (2006). *Coordinated Control of Marine Craft*. Thèse de doctorat, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway. 18, 172.
- ISHERWOOD, R. (1972). Wind resistance of merchant ships. *RINA Transaction*, 115.
- ISIDORI, A. (1989). *Nonlinear Control Systems. 2nd ed.*. Springer-Verlag. Berlin, Germany.
- KANAYAMA, Y., KIMURA, Y. et MIYAZAKI, F. and Noguchi, T. (1990). A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. *Dans IEEE Conf. on Robotics and Automation, (ICRA)*, pp. 384–389.
- KHALIL, H. K. (1996). *Nonlinear Systems. 2nd ed.*. Prentice-Hall. New Jersey, USA.
- KINGSTON, D. B., WEI, R. et BEARD, R. W. (2005). Consensus algorithms are input to-state stable. *Dans Proc. 2005 American Control Conference*, Portland, OR, USA.
- KOLMANOVSKY, I. et MCCLAMROCH, N. H. (1995). Developments in nonholonomic control problems. *Control Systems Magazine*, 15(5):20–36.
- KRISTIĆ, M., I. K. et KOKOTOVIĆ, P. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley & Sons, Inc. New York, USA.
- KUMAR, V., LEONARD, N. et MORSE, A. S. (2005). Cooperative control. *Dans Lecture Notes in Control and Information Sciences*.
- LEE, E. B. et MARKUS., L. (1976). *Foundation of Optimal Control*. . John Wiley., New York, USA.
- LEFEBER, E., J. JAKUBIAK, K. T. et NIJMEIJER, H. (2001). Observer based kinematic tracking controllers for a unicycle-type mobile robot. *Dans Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*.
- LEONARD, N. (1995). Periodic forcing, dynamics and control of underactuated spacecraft and underwater vehicles. *Dans Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 3980–3985.

- LIZÁRRAGA, D. A. (2003). Obstructions to the existence of universal stabilizers for smooth control systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 16(1):255–277.
- LORIA, A. (1996). Global tracking control of one degree of freedom euler-lagrange systems without velocity measurements. *European Journal of Control*, 2.
- LORÍA, A. (2001). Cascaded nonlinear time-varying systems : analysis and design. *Dans Tech. report, LAG UMR CNRS 5528. Lecture notes, minicourse at IPN.*
- MAINI, M., MORIN, P., POMET, J.-B. et SAMSON, C. (1999). On the robust stabilization of chained systems by continuous feedback. *Dans IEEE Conf. on Decision and Control (CDC).*
- M'CLOSKEY, R. T. (1994). *Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems.* Thèse de doctorat, California Institute of Technology, USA.
- M'CLOSKEY, R. T. et MURRAY, R. M. (1997). Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5):614–628.
- MORIN, P. et Samson, C. (2004). Practical and asymptotic stabilization of chained systems by the transverse function control approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(1):23–57.
- MORIN, P., POMET, J.-B. et SAMSON, C. (1997). Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless controllable systems via oscillatory approximation of lie brackets in closed-loop. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38:22–49.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (1995). Time-varying exponential stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls. *Dans IEEE Conf on Decision and Control*, New Orleans.
- MURRAY, R. M. et SASTRY, S. (1993a). Discontinuous control of the brockett integrator. *European Journal of Control*, 4(1):49–63.
- MURRAY, R. M. et SASTRY, S. (1993b). Nonholonomic motion planning : Steering using sinusoids. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(5):700–716.
- NAKAMURA, Yoshihiko, W. C. et SORDALEN, O. J. (2001). Design and control of the nonholonomic manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(1):48–59.
- NIJMEIJER, H. et RODRIGUEZ-ANGELEZ, A. (2003). Synchronization of mechanical systems. *Series on Nonlinear Science, London*, 46.

- NIJMEIJER, H. et van der SCHAFT, A. J. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag. New York, USA.
- ÖGREN, P., F. E. . L. N. E. (2004). Cooperative control of mobile sensor networks : Adaptive gradient climbing in a distributed environment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49.
- OKUBO, A. (1986). *Dynamical aspects of animal grouping : Swarms, schools, flocks, and herds*. Advances in Biophysics. 22,1-94.
- ORIOLO, G. et NAKAMURA, Y. (1991). Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints : Underactuated manipulators. *Dans Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control.*, Brighton, UK. pp. 2398-2403.
- PANTELEY, E. et LORIA, A. (1998). On global uniform asymptotic stability of non linear time-varying non autonomous systems in cascade. *Syst. Contr. Lett.*, 33(2):131–138.
- PARTRIDGE, B. L. (1982). *The structure and function of fish schools*. Scientific American.
- PAULSEN, M. et EGELAND, O. (1995). An output feedback tracking controller for ships with nonlinear damping terms. *Dans Proc. IFAC CAMS'95*, Trondheim, Norway.
- PETTERSEN, K. et EGELAND, O. (1995). Position and attitude control of an underactuated autonomous underwater vehicle. *Dans Proc. 35th CDC*, Kobe, Japan.
- PETTERSEN, K. et EGELAND, O. (1997). Robust control of an underactuated surface vessel with thruster dynamics. *Dans Proc. American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico.
- PETTERSEN, K. et NIJMEIJER, H. (1998). Tracking control of an underactuated surface vessel. *Dans Proc. 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA.
- PETTERSEN, K. Y. et FOSSE, T. (2000). Underactuated dynamic positioning of ship-experimental results. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 8(5):856–158.
- POMET, J.-B. (1992). Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems & Control Letters*, 18:467–473.
- REN, W., R. W. et ATKINS, E. M. (2005). A survey of consensus problems in multi-agent coordination. *Dans Proc. American Control Conference*.
- REN, W. et W., B. R. (2004). Formation feedback control for multiple spacecraft via virtual structures. *Dans IEE Proc. Control Theory and Applications*.

- SAMSON, C. (1992). Path following and time-varying feedback stabilization of a wheeled mobile robot. *Dans in Proceedings of the ICARCV'92*.
- SAMSON, C. (1995). Control of chained systems : application to path following and time varying point stabilization. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 40(11):64–77.
- SAMSON, C. et AIT-ABDERRAHIM, K. (1991). Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space. *Dans IEEE Conf. on Robotics and Automation*, (ICRA), pp. 1136–1141.
- SASTRY, S. (1999). *Nonlinear Systems : Analysis, Stability and Control*. Springer-Verlag. New York, USA.
- SHEIKHOESLAM, S. et DESOER, C. A. (1992a). Auvs : In space, air, water, and on the ground. *IEEE Control Systems Magazine*, 37.
- SHEIKHOESLAM, S. et DESOER, C. A. (1992b). Control of interconnected nonlinear dynamical systems : The platoon problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37.
- SKJETNE, R., O. N. S. et FOSSEN, T. I. (2004). A nonlinear ship maneuvering model : Identification and adaptive control with experiments for a model ship. *Modeling, Identification and Control*, 25(1):327.
- SKJETNE, R. (2005). *The Maneuvering Problem*. Thèse de doctorat, Department of Engineering Cybernetics, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.
- SONTAG, E. D. (1990). *Mathematical Control Theory*. Vol. 6 of TAM. Springer-Verlag. New York, USA.
- SORDALEN, O. et EGELAND, O. (1995). Exponential stabilization of chained nonholonomic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):35–49.
- SPRY, S. et HEDRICK, J. K. (2004). Formation control using generalized coordinates. *Dans Proc. 43rd IEEE Conf. Decision & Control*, Atlantis, Paradise Island, The Bahamas.
- SUSSMANN, H. (1987). A general theorem on local controllability. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25(1):158–194.
- SUSSMANN, H. et JURDJEVIC., V. (1972). Controllability of nonlinear systems. *Journal of Differential Equations*, 12(2):95–116.

- VICSEK, T., CZIRÓK, A., BEN-JACOB, E., COHEN, I. et SHOCHET, O. (1982). Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 75(6):1226–1229.
- WANG, P. K. C. (1996). Navigation strategies for multiple autonomous robots moving in formation. *Journal of Robotic Systems*, 8(2):177–195.
- WEN, J. T.-Y. (1996). *Control of nonholonomic systems*. The Control Handbook (William S. Levine, Ed). CRC Press & IEEE Press., Florida, USA. pp. 1359-1368.
- WICHLUND, K. Y., O. S. et EGELAND, O. (1995). Control properties of underactuated vehicles. *Dans Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation.*, IEEE Computer Society Press. Nagoya, Japan. pp. 2009-2014.
- ZHANG, F., DAWSON, D., de QUEIROZ, M. et DIXON, W. (1997). Globla adaptive output feedback tracking control of robot manipulator. *Dans Proceedings of the 36th International IEEE Conference on Decision and Control*, San diego, USA.

Annexe A

Astuces Mathématiques

A.1 Inégalité de Young.

Lemme A.1 Pour tout réel $p > 1$ et tout réel a et b , on a :

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{p-1}{p}|b|^{\frac{p}{p-1}} \quad (\text{A.1})$$

Preuve Du fait de la concavité de la fonction logarithme, nous avons pour tout réel strictement positif x et y

$$\log(x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{p-1}{p}}) = \frac{1}{p}\log(x) + \frac{p-1}{p}\log(y) \quad (\text{A.2})$$

$$\leq \log\left(\frac{1}{p}x + \frac{p-1}{p}y\right), \quad (\text{A.3})$$

ou encore

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{p-1}{p}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{p-1}{p}y \quad (\text{A.4})$$

On obtient ce résultat en prenant :

$$x = |a|^p, \quad y = |b|^{\frac{p}{p-1}}$$

Corollaire A.1 Il s'en suit de l'inégalité de Young que pour $p = 2$

$$|ab| \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad (\text{A.5})$$

Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante qui se trouve être très utile dans l'analyse de stabilité par les fonctions de Lyapunov

Proposition A.1 Pour tout, a et $b > 0$, $\lambda > 0$ et $p > 1$, $q > 0$, nous avons

$$a^{p-1}y^q \leq \lambda a^p + \frac{b^{pq}}{\lambda^{p-1}} \quad (\text{A.6})$$

Proposition A.2 Pour $\lambda > 0$

$$ab \leq \frac{\lambda}{2}a^2 + \frac{1}{2\lambda}b^2 \quad (\text{A.7})$$

Ce qui coïncide avec le Corollaire A.1 pour $\lambda = 1$

A.2 Formules trigonométriques

Les relations trigonométriques utilisées dans les chapitres 5, 6 et 7 s'expriment comme suit :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{A.8})$$

ainsi que les dérivés des fonctions arcsin, arccos et arctan sont

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{A.9})$$

Propriété A.1 La propriété suivante servira pour montrer la bornitude des fonctions de Lyapunov. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, nous avons

$$|x| - x \tanh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 0.2785\lambda \quad (\text{A.10})$$

Cette relation peut être démontrée en faisant le tableau de variation de la fonction $f_\lambda(x) = |x| - x \tanh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Annexe B

Démonstrations des lemmes et théorèmes

B.1 Preuve du Lemme 2.3

Nous commençons par montrer que x est borné. A partir des conditions **C1**, **C2** et **C3**, nous avons

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\left(c_4 - c_3\varepsilon_0\left(\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{4\mu_0}\right)\right)\frac{\|x\|^2}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} + \frac{c_3\|x\|}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} \\ &\quad \times (\lambda_1 + \lambda_2\|x\|)\alpha_0(\|\xi(t_0)\|)e^{-\sigma_0(t-t_0)} + \frac{\lambda_1c_3\varepsilon_0\mu_0 + c_0}{\sqrt{1+c\|x\|^2}}\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

en utilisant l'inégalité de Young, l'équation (B.1) réécrit

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -(a_1 - a_2e^{-\sigma_0(t-t_0)})\frac{V}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} + \frac{a_3e^{-\sigma_0(t-t_0)}}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} + \frac{a_4}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} \\ &= -(a_1 - a_2e^{-\sigma_0(t-t_0)})\frac{(V - a_4/a_1)}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} + \frac{(a_3 + a_2a_4/a_1)e^{-\sigma_0(t-t_0)}}{\sqrt{1+c\|x\|^2}}\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Considérons maintenant l'équation différentielle suivante

$$\dot{\kappa} = -(a_1 - a_2e^{-\sigma_0(t-t_0)})\frac{\kappa}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} + \frac{(a_3 + a_2a_4/a_1)e^{-\sigma_0(t-t_0)}}{\sqrt{1+c\|x\|^2}}\quad (\text{B.3})$$

soit alors la fonction de Lyapunov

$$W = 0.5\kappa^2\quad (\text{B.4})$$

La dérivé de (B.4) le long des solutions de (B.3) et par l'utilisation de la condition C4, nous avons

$$\begin{aligned}\dot{W} &= a_2 e^{-\sigma_0(t-t_0)} \frac{\kappa^2}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} + \frac{(a_3 + a_2 a_4/a_1) \kappa e^{-\sigma_0(t-t_0)}}{\sqrt{1+c\|x\|^2}} \\ &\leq 2(a_2 + a_3 + a_2 a_4/a_1) W e^{-\sigma_0(t-t_0)} + \frac{(a_3 + a_2 a_4/a_1)}{4} e^{-\sigma_0(t-t_0)} \\ &= W_m\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

A partir de (B.5), en utilisant le principe de comparaison, nous vérifions que $V(t) \leq a_4/a_1 + \sqrt{2W_m}$, et puis que $\|x\| \leq x_m$, nous aurons après substitution de cette inégalité dans (B.2) l'inégalité suivante

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{a_1}{\sqrt{1+cx_m^2}} - a_2 e^{-\sigma_0(t-t_0)}\right)V + a_3 e^{-\sigma_0(t-t_0)} + a_4 \quad (\text{B.6})$$

En résolvant l'inégalité (B.6), nous obtenons le résultat (2.10).

B.2 Preuve du Lemme 2.5

Soit

$$y(t) = \int_{t_0}^t \phi(\tau)x(\tau)d\tau$$

et

$$z(t) = \mu(t) + \nu(t)y(t) - x(t) \geq 0$$

Alors, $y(t)$ est différentiable et l'on a

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \phi(t)x(t) \\ &= \phi(t)\mu(t) + \phi(t)\nu(t)y(t) - \phi(t)z(t)\end{aligned}$$

c'est une équation différentielle linéaire avec sa fonction d'état transitoire donnée par

$$\Phi(t, \tau) = e^{\int_{\tau}^t \nu(\sigma)\phi(\sigma)d\sigma}$$

Puisque $y(t_0) = 0$, alors

$$y(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[\phi(\tau)\mu(\tau) - \phi(\tau)z(\tau)]d\tau$$

avec le terme

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\phi(\tau)\mu(\tau)d\tau < 0$$

Par conséquent

$$y(t) \leq \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\phi(\tau)\mu(\tau)d\tau$$

et puisque $x(t) \leq \mu(t) + \nu(t)y(t)$, nous avons alors le résultat du lemme 2.5 \square

B.3 Preuve de la dérivée à droite de $\varphi(t)$

Nous montrons que la dérivée à droite $D^+\varphi(t)$ satisfait $D^+\varphi(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}a_2(t)$.
Considérons les deux propriétés suivantes (Khalil, 1996)

1. Si $\varphi(t)$ est différentiable en t , alors $D^+\varphi(t) = \dot{\varphi}(t)$
2. Si $\frac{1}{h}|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq g(t, h)$, $\forall h \in (0, b]$ et $\lim_{h \rightarrow 0^+} g(t, h) = g_0(t)$ alors $D^+\varphi(t) \leq g_0(t)$.

Considérons, le cas où $\varphi(\xi(t)) = 0$, nous pouvons vérifier que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}|\varphi(\xi(t+h)) - \varphi(\xi(t))| &= \frac{\sqrt{2}}{2h}|\xi(t+h)| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2h} \left| \int_t^{t+h} F(\tau, \xi(\tau)) d\tau \right| \\ &\leq \left| \frac{\sqrt{2}}{2}F(t, 0) + \frac{\sqrt{2}}{2h} \int_t^{t+h} [F(\tau, \xi(\tau)) - F(t, \xi(t))] d\tau \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}F(t, 0) + \frac{\sqrt{2}}{2h} \int_t^{t+h} |F(\tau, \xi(\tau)) - F(t, \xi(t))| d\tau \end{aligned}$$

avec $\xi(t) = (\sqrt{B}e_1 + \frac{1}{\sqrt{B}}e_2) - 2e_1e_2$ et

$$|F(t, \xi(t))| \leq -\frac{1}{2}a_1\xi(t) + \frac{1}{2}a_2(t)$$

Puis que $F(t, \xi(t))$ est une fonction continue en t , pour tout réel donné $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|\tau - t| < \delta$, $|F(\tau, \xi(\tau)) - F(t, \xi(t))| < \epsilon$. Donc, pour tout $h < \delta$,

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} |F(\tau, \xi(\tau)) - F(t, \xi(t))| d\tau < \epsilon$$

et par conséquent

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |F(\tau, \xi(\tau)) - F(t, \xi(t))| d\tau = 0$$

D'où, d'après la propriété 2 de la dérivée à droite, nous concluons que

$$D^+\varphi(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}a_2(t)$$

B.4 Preuve du Théorème 3.1

Afin de Montrer la stabilité du système (5.23), nous considérons tout d'abord le sous-système $(r_e, \bar{\psi}_e)$ ensuite nous traitons le sous-système (x_e, y_e) et puis enfin nous prouvons la bornitude de la vitesse de glissement v .

- Stabilité de $(r_e, \bar{\psi}_e)$: Considérons la fonction candidate de Lyapunov définie par

$$V_2 = \frac{1}{2}(r_e^2 + \bar{\psi}_e^2) \quad (\text{B.7})$$

sa dérivé par rapport au temps le long des solutions (5.22) et (5.19) satisfait

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\left(k_4 + \frac{d_r}{m_r}\right)r_e^2 - k_3\bar{\psi}_e^2 + \zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \\ &\leq -\left(k_4 + \frac{d_r}{m_r}\right)r_e^2 - \frac{k_3}{\Delta}\bar{\psi}_e^2 + \zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \\ &\leq -c_1 V_1 + \zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i, \quad \text{where } c_1 = \min(k_3, k_4 + \frac{d_r}{m_r}) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

où nous avons utilisé la propriété A.2. En intégrant l'inégalité (B.8), nous obtenons

$$V_1(t) \leq V_1(t_0)e^{-c_1(t-t_0)} + \frac{\zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}{c_1} \quad (\text{B.9})$$

Soit $X_{1e} = [\bar{\psi}_e, r_e]$, alors à partir de (B.9), nous montrons que :

$$\begin{aligned} \|X_{1e}\| &\leq \sqrt{2V_1(t_0)}e^{-0.5c_1(t-t_0)} + \sqrt{\frac{\zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}{c_1}} \\ &\leq a(\cdot)e^{-0.5c_1(t-t_0)} + b \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Nous notons par $a(\cdot) = \sqrt{2V_1(t_0)}$ et $b = \sqrt{\frac{\zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}{c_1}}$, En choisissant convenablement les paramètres k_1, k_4, ε_i , la constante b peut être réduite aussi petit que désiré

- Stabilité de (x_e, y_e) : Pour étudier la stabilité de (x_e, y_e) , nous ré-écrivons (5.23) sous la forme suivante

$$\dot{X}_{2e} = f(t, X_{2e}) + g(t, X_{2e}, \xi(t)) \quad (\text{B.11})$$

avec $X_{2e} = [x_e, y_e]^\top$, $\xi(t) = \psi_e(t)$. Les fonctions $f(t, X_{2e})$ and $g(t, X_{2e}, \xi(t))$ sont définies comme suit

$$f(t, X_{2e}) = \begin{bmatrix} -k_1 x_e \varpi_1^{-1} + \dot{s}\kappa(s)y_e \\ -k_2 U y_e \varpi_1^{-1} - \kappa(s)\dot{s}x_e \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$g(t, X_{2e}, \xi(t)) = \begin{bmatrix} p_x & p_y \end{bmatrix}^\top \quad (\text{B.13})$$

Dans ce qui suit nous montrons que si le sous-système $\dot{X}_{2e} = f(t, X_{2e})$ est exponentiellement stable, et le terme perturbateur $g(t, X_{2e}, \xi(t))$ converge exponentiellement dans une boule centré à l'origine de dimension très petite, alors l'origine

du système (5.23) converge exponentiellement à une boule centrée à l'origine. Afin de montrer cette convergence, nous utiliserons le Lemma 2.1.4, nous commençons par montrer que le sous-système nominal $\dot{X}_{2e} = f(t, X_{2e})$ est globalement exponentiellement stable, nous pouvons le montrer en prenant la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = 0.5(x_e^2 + y_e^2)$$

Il est aisé ensuite de vérifier que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|X_{2e}\|^2 \leq V_2 &\leq \alpha_2 \|X_{2e}\|^2 \\ \dot{V}_2 &\leq -\alpha_4 \varpi_1^{-1} \|X_{1e}\|^2 + \alpha_0 \varpi_1^{-1} \\ \left\| \frac{\partial V_2}{\partial X_{2e}} \right\| &\leq \alpha_3 \|X_{2e}\| \end{aligned}$$

avec $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$ et $\alpha_4 = \min\{k_1, k_2 U_{max}\}$. La condition **C1** du lemme 2.1.4 est par suite vérifiée.

Nous vérifions ensuite que le terme perturbateur $g(t, X_{2e}, \xi(t))$ a fonction linéaire de $\xi(t) = \psi_e(t)$. Les propriétés de la norme Euclidienne, permettent d'avoir

$$\begin{aligned} \|g(t, X_{2e}, \xi(t))\| \leq \|p_x\| + \|p_y\| &\leq U_{max} \left(|\cos(\bar{\psi}_e) - 1| \cos(\alpha_{\psi_e^*}) + |\sin(\bar{\psi}_e)| \sin(\alpha_{\psi_e^*}) \right. \\ &\quad \left. + |\sin(\bar{\psi}_e)| \cos(\alpha_{\psi_e^*}) + |\cos(\bar{\psi}_e) - 1| \sin(\alpha_{\psi_e^*}) \right) \end{aligned}$$

Remarquons que $|\cos(\bar{\psi}_e) - 1| \leq |\bar{\psi}_e|$ et $|\sin(\bar{\psi}_e)| \leq |\bar{\psi}_e|$, nous pouvons écrire alors

$$\|g(t, X_{2e}, \xi(t))\| \leq 2U_{max} \varpi_1^{-1} \left(1 + 2k_2 |y_e| \right) |\bar{\psi}_e|$$

La condition de linéarité de la condition **C2** est par suite vérifiée.

Nous allons aussi montrer que $\psi_e(t)$ converge exponentiellement à une boule centrée à l'origine, il est clair qu'en utilisant (6.31) nous avons

$$|\bar{\psi}_e| \leq \gamma_0 e^{-0.5c_1(t-t_0)} + \rho_0$$

donc la condition **C3** du lemme est aussi vérifiée. Nous devons en plus des conditions précédentes, montrer la condition des gains présentée dans la condition **C4** du lemme et donnée par

$$\alpha_4 - \alpha_3 \rho_0 \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{4\varepsilon} \right) > 0$$

Pour montrer que cette condition est vérifiée, nous choisissons les paramètres de la commande tels que

$$\begin{aligned} k_1 &\geq \frac{2\rho_0}{4\varepsilon(U_{max} - \rho_0)} + \frac{\rho_0}{4\varepsilon} \\ k_2 &\leq \frac{k_1}{2\rho_0} - \frac{1}{8\varepsilon} \end{aligned}$$

et les constantes ζ, ε_i tels que

$$\rho_0 > U_{max} \sqrt{\zeta \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i}$$

Nous concluons d'après le Lemma 2.1.4, l'origine de la cascade (5.22) converge globalement et asymptotiquement à une boule centrée à l'origine.i.e.,

$$\|X_{2e}\| \leq \gamma_1(\|X_{2e}(t_0), \xi(t_0)\|)e^{-\sigma_0(t-t_0)} + \rho(\|X_{2e}(t_0), \xi(t_0)\|) \quad (\text{B.14})$$

Il reste à montrer que la vitesse de glissement v reste bornée. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_3 = 0.5v^2$$

sa dérivée par rapport au temps le long des trajectoires de la quatrième équation de (5.7) permet d'obtenir l'égalité

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -\frac{d_v}{m_v} \left(1 + \frac{m_u}{m_v} \frac{u^2}{\beta U^2}\right) v^2 - \frac{m_u}{m_v} u \left(r_e + \frac{k_3}{\beta} \bar{\psi}_e\right) v \\ &+ \left(\frac{\kappa(s)}{\beta} (k_1 x_e \varpi_1^{-1} + U \varpi_1^{-1} \varpi_2) - k_2 x_e y_e \varpi_1^{-2} \varpi_2^{-1} (k_1 x_e \varpi_1^{-1} - \dot{s} \kappa(s) y_e - p_x)\right. \\ &\left. + k_2 (1 + x_e^2) \varpi_1^{-2} \varpi_2^{-1}\right) v + \left(\frac{\tau_{wv}(t)}{m_v} - \frac{u}{\beta U^2} \tau_{wv}^{Max} \tanh\left(\frac{\bar{\psi}_e \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_1 m_v}\right)\right) v \end{aligned}$$

Par la suite nous posons $\Omega = \left(\frac{\kappa(s)}{\beta} (k_1 x_e \varpi_1^{-1} + U \varpi_1^{-1} \varpi_2) - k_2 x_e y_e \varpi_1^{-2} \varpi_2^{-1} (k_1 x_e \varpi_1^{-1} - \dot{s} \kappa(s) y_e - p_x) + k_2 (1 + x_e^2) \varpi_1^{-2} \varpi_2^{-1}\right)$. Nous désirons chercher une borne supérieure de Ω , pour cela nous calculons la valeur absolue de celle-ci comme suit :

$$|\Omega| \leq \left|\frac{\kappa(s)}{\beta}\right| (k_1 |x_e| + U) + k_2 |x_e| |y_e| (k_1 |x_e| + |\kappa(s)| |y_e| (k_1 |x_e| + U) + |p_x| + k_2 (1 + x_e^2))$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Young, du corollaire A.1 nous obtenons la relation suivante

$$\begin{aligned} |\Omega| |v| &\leq \left(1 + \frac{k_2}{2}\right) v^2 + \frac{1}{2} v^2 \left(k_1 k_2 x_e^2 + x_e^2 y_e^2 + k_2 y_e^2 U + k_2 p_x^2\right) + \frac{1}{2} \left(U^2 + k_2^2\right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(k_1 k_2 x_e^2 y_e^2 + x_e^2 y_e^2 k_2^2 \kappa(s)^2 + k_2 y_e^2 U |\kappa(s)| x_e^2 + k_2 x_e^2 y_e^2 + k_2 x_e^2 + k_2^2 x_e^4\right) \end{aligned}$$

Nous appliquons de même pour les termes $-\frac{m_u}{m_v} u \left(r_e + \frac{k_3}{\beta} \bar{\psi}_e\right) v$ et $\left(\frac{\tau_{wv}(t)}{m_v} - \frac{u}{\beta U^2} \tau_{wv}^{Max} \tanh\left(\frac{\bar{\psi}_e \tau_{wv}^{Max}}{\varepsilon_1 m_v}\right)\right) v$ l'inégalité de Young, nous obtenons le résultat suivant

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -\mu V_3 + f_1(\xi(t)) V_3 + f_2(\xi(t)) + \rho_1(\tau_{wv}^{Max}) \\ &\leq f_1(\xi(t)) V_3 + f_2(\xi(t)) + \rho_1 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

avec $\mu = \frac{1}{2} + \frac{d_v}{m_v} \left(1 + \frac{m_u}{m_v} \frac{u^2}{\beta U^2}\right) - \left(1 + \frac{k_2^2}{2}\right) - \frac{m_u^2}{2m_v^2} u^2 \left(1 + \left(\frac{k_3^2}{2\beta^2}\right)\right)$, où nous avons choisi, k_3 tels que

$$0 < k_3 \leq \frac{m_v}{m_u} \beta \left(\frac{1}{2} - \frac{d_v}{m_v} \left(1 + \frac{m_u}{m_v} \frac{u^2}{\beta U^2}\right) + \left(1 + \frac{k_2^2}{2}\right) + \frac{m_u^2}{2m_v^2} u^2 \right)$$

$\rho_1(\tau_{wv}^{Max})$ est une constante qui dépend des perturbations environnementales. Les fonctions $f_1(\xi(t))$ et $f_2(\xi(t))$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} f_1(\xi(t)) &= \left(k_1 k_2 x_e^2 + x_e^2 y_e^2 + k_2 y_e^2 U + k_2 p_x^2 + r_e^2 + \bar{\psi}_e^2 \right) \\ f_2(\xi(t)) &= \frac{1}{2} \left(k_1 k_2 x_e^2 y_e^2 + x_e^2 y_e^2 k_2^2 \kappa(s)^2 + k_2 y_e^2 U |\kappa(s)| x_e^2 + k_2 x_e^2 y_e^2 + k_2 x_e^2 + k_2^2 x_e^4 \right) \end{aligned}$$

Nous remarquons que les fonctions $f_1(\xi(t))$ et $f_2(\xi(t))$ satisfont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} f_1(\xi(t)) &\leq \gamma_{11}(\xi(t_0)) e^{-\sigma_1(t-t_0)} \\ f_2(\xi(t)) &\leq \gamma_{22}(\xi(t_0)) e^{-\sigma_2(t-t_0)} \end{aligned}$$

avec γ_{11} et γ_{22} sont des fonctions de classe \mathcal{K} , et σ_1 et σ_2 sont des constantes positives. Nous pouvons ainsi ré-écrire (B.15) sous la forme suivante

$$\dot{V}_3 \leq \gamma_1(\bullet)(V_3 + \gamma_2(\bullet)) e^{-\sigma(t-t_0)} + \rho_1(\bullet) \quad (\text{B.16})$$

Résolvons l'inégalité (B.15). Pour cela nous posons $x = V_3$ et nous écrivons l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f_1(\xi(t))x + f_2(\xi(t)) + \rho_1 \quad (\text{B.17})$$

Notons par $\Phi(t, \delta) = e^{-\int_\delta^t f_1(\xi(\tau)) d\tau}$ la fonction de transition de l'équation différentielle (B.17). La solution de celle-ci est donnée comme suit

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \delta) f_2(\xi(\delta)) d\delta + \int_{t_0}^t \rho_1 \Phi(t, \delta) d\delta \\ &= x(t_0) e^{\sigma_1^{-1} \gamma_{11}(1-e^{-\sigma_1(t-t_0)})} + \gamma_{22}(\xi(t_0)) e^{\sigma_2 t_0} \int_{t_0}^t e^{-\sigma_2 \tau} e^{\sigma_1^{-1} \gamma_{11}(e^{-\sigma_1(\tau-t_0)} - e^{-\sigma_1(t-t_0)})} d\tau \\ &\quad + \rho_1 \int_{t_0}^t e^{\sigma_1^{-1} \gamma_{11}(1-e^{-\sigma_1(t-t_0)})} d\tau \end{aligned}$$

Sachant que $f_1(\xi(t)) \geq 0$ pour tout t , alors $\Phi(t, \delta) = e^{-\int_\delta^t f_1(\xi(\tau)) d\tau} \leq e^{\sigma_1^{-1} \gamma_{11}(\xi(t_0))}$. En appliquant le principe de comparaison (Khalil, 1996), nous pouvons en conclure que

$$\begin{aligned} V_3(t) &= V_3(t_0) e^{\sigma_1^{-1} \gamma_{11}(\xi(t_0))} + \gamma_{22}(\xi(t_0)) e^{(\sigma_2 + \sigma_1)t_0} \int_{t_0}^t e^{-\sigma_2 \tau} d\tau \\ &\quad + \rho_1 e^{\sigma_1^{-1} \gamma_{11}(\xi(t_0))} (t - t_0) \\ &\leq \gamma_3(\bullet) \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

avec $\gamma_3(\bullet)$ est une fonction de classe \mathcal{K} . Remplaçant (B.18) dans (B.16), nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &\leq \gamma_1(\bullet)(\gamma_3(\bullet) + \gamma_2(\bullet))e^{-\sigma(t-t_0)} + \rho_1(\bullet) \\ &\leq \gamma_4(\bullet)e^{-\sigma(t-t_0)} + \rho_1(\bullet)\end{aligned}\tag{B.19}$$

ce qui permet de conclure que la vitesse v converge exponentiellement à une boule centrée à l'origine. i.e.,

$$|v| \leq \alpha(\|\xi(t_0)\|)e^{-\sigma_3(t-t_0)} + \delta$$

B.5 Preuve du Théorème 3.2

La forme du système (5.53) est connue sous le nom de système en cascade. Afin de simplifier l'analyse de la stabilité, remarquons qu'il est constitué de deux cascades, une cascade formée par les états $(\bar{\psi}_e, v_e, u_e, r_e)$, qui est indépendante de l'autre cascade constituée de x_e et y_e . Donc pour montrer la stabilité de x_e et y_e il suffit de garantir celle des variables $(\bar{\psi}_e, v_e, u_e, r_e)$. Pour cela, considérons la fonction de Lyapunov associée à la première cascade formée par $\xi_{1e} = (\bar{\psi}_e, v_e, u_e, r_e)^\top$ comme suit

$$V_1 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_e^2 + v_e^2 + r_e^2 + u_e^2)\tag{B.20}$$

la dérivée de (B.20) par rapport au temps, en se servant de la propriété A.2 nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -k_3\bar{\psi}_e^2 - \frac{d_v}{m_v}v_e^2 - \left(\frac{k_4}{m_u} + \frac{d_u}{m_u}\right)u_e^2 - \left(\frac{k_5}{m_r} + \frac{d_r}{m_r}\right)r_e^2 + \rho_2 \\ &\leq -\sigma V + \rho_2\end{aligned}\tag{B.21}$$

avec $\sigma = 2\min\left(k_3, \frac{d_v}{m_v}, \left(\frac{k_4}{m_u} + \frac{d_u}{m_u}\right), \left(\frac{k_5}{m_r} + \frac{d_r}{m_r}\right)\right)$ et $\rho_2 = 0.2785(\varepsilon_v + \varepsilon_u + \varepsilon_r)$. Ainsi nous pouvons écrire à partir de (B.21) l'inégalité suivante

$$V_1(t) \leq V_1(t_0)e^{-\sigma(t-t_0)} + \frac{\rho_2}{\sigma}$$

d'où

$$\|\xi_{1e}\| \leq \sqrt{2V_1(t_0)}e^{-\frac{\sigma}{2}(t-t_0)} + \sqrt{\frac{2\rho_2}{\sigma}} = \alpha(\|\xi_{1e}(t_0)\|)e^{-\frac{\sigma}{2}(t-t_0)} + \rho_3$$

La constante ρ_3 peut être rendue très petite, si nous choisissons $\varepsilon_v, \varepsilon_u$ et ε_r infiniment petit. Nous pouvons à cet effet faire l'approximation suivante

$$|\cos(\bar{\psi}_e) - 1| \approx |\bar{\psi}_e|, \quad |\sin(\bar{\psi}_e)| \approx |\bar{\psi}_e|$$

Pour analyser la stabilité de (x_e, y_e) , nous considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 + \theta V_1 \quad (\text{B.22})$$

avec θ est une constante positive qui sera déterminée plus tard. La dérivée de (B.22) par rapport au temps le long des trajectoires de (5.53), après utilisation de l'inégalité de Young est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -(k_1 - \lambda)x_e^2 - (k_2 - 2\lambda)y_e^2 + \frac{1}{4\lambda}(u_e^2 + v_e^2 + \bar{\psi}_e^2) \\ & - \theta \left(-k_3 \bar{\psi}_e^2 - \frac{d_v}{m_v} v_e^2 - \left(\frac{k_4}{m_u} + \frac{d_u}{m_u} \right) u_e^2 - \left(\frac{k_5}{m_r} + \frac{d_r}{m_r} \right) r_e^2 \right) + \theta \rho_2 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Si nous choisissons la constante λ tels que $\lambda < 0.5 \min(k_1, k_2)$ et θ suffisamment grand, nous concluons à $(x_e, y_e, \bar{\psi}_e, v_e, u_e, r_e)$ la convergence exponentielle du vecteur à une boule centrée à l'origine.

Annexe C

Technique du Backstepping

Cet annexe donne un aperçu sur la technique du Backstepping pour la stabilisation. Voir la référence ([Krstić *et al.*, 1995](#)) pour plus de détails.

Considérons le problème de la stabilisation du système non linéaire sous la forme triangulaire suivant

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2), \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + u\end{aligned}$$

L'idée derrière la technique du backstepping est, de considérer l'état x_2 comme une "commande virtuelle" pour x_1 . Donc, s'il est possible de rendre $x_2 = -x_1 - f_1(x_1)$, alors l'état x_1 sera stabilisé. Ceci pourra être vérifié en considérant la fonction de Lyapunov $V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$. Mais puisque x_2 n'est pas la vraie commande pour x_1 , nous désignons le changement de variables suivant

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(x_1)\end{aligned}$$

avec $\alpha(x_1) = -x_1 - f(x_1)$. Introduisant la fonction de Lyapunov $V_1(z_1) = \frac{1}{2}z_1^2$, nous

obtenons

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= x_3 + f_2(x_1, x_2) - \alpha_1^{x_1}(x_1)(x_2 + f_1(x_1)) := x_3 + \bar{f}_2(z_1, z_2) \\ \dot{V}_1 &= -z_1^2 + z_1 z_2\end{aligned}$$

En Procédant récursivement, nous définissons les variables suivantes

$$\begin{aligned}z_3 &= x_3 - \alpha_2(z_1, z_2), \\ V_2 &= V_1 + \frac{1}{2}z_2^2\end{aligned}$$

Pour déterminer l'expression de $\alpha_2(z_1, z_2)$, observons que

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= z_3 + \alpha_2(z_1, z_2) + \bar{f}_2(z_1, z_2) \\ \dot{V}_2 &= -z_1^2 + z_2(z_1 + z_3 + \alpha_2(z_1, z_2) + \bar{f}_2(z_1, z_2))\end{aligned}$$

Choisissons $\alpha_2(z_1, z_2) = -z_1 - z_2 - \bar{f}_2(z_1, z_2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -z_1 z_2 + z_3 \\ \dot{V}_2 &= -z_1^2 - z_2^2 + z_2 z_3\end{aligned}$$

Récursivement, à l'étape i , définissons

$$\begin{aligned}z_{i+1} &= x_{i+1} - \alpha_i(z_1, \dots, z_i) \\ V_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i z_k^2\end{aligned}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1} + \alpha_i(z_1, \dots, z_i) + \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i) \\ \dot{V}_i &= -\sum_{k=1}^{i-1} z_k^2 + z_{i-1} z_i + z_i(z_{i+1} + \alpha_i(z_1, \dots, z_i) + \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i))\end{aligned}$$

En utilisant l'expression $\alpha_i(z_1, \dots, z_i) = -z_{i-1} - z_i - \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= -z_{i-1} - z_i + z_{i+1} \\ \dot{V}_i &= -\sum_{k=1}^i z_k^2 + z_i z_{i+1}\end{aligned}$$

A l'étape n , nous obtenons

$$\dot{z}_n = \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n) + u$$

En choisissant

$$u = \alpha_n(z_1, \dots, z_n) = -z_{n-1} - z_n - \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n)$$

pour la fonction de Lyapunov suivante

$$V_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n z_k^2$$

il s'en suit que

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= -z_{n-1} - z_n \\ \dot{V}_n &= -\sum_{k=1}^n z_k^2 \end{aligned}$$

Le développement qui suit la technique du Backstepping, est de trouver une transformation globale (un difféomorphisme) permettant de passer des coordonnées en z aux coordonnées en x . La stabilité du système est prouvée en recourant à de simples fonctions de Lyapunov quadratiques. Il faut aussi noter que la dynamique obtenue en fonction des coordonnées en z est linéaire. L'avantage de la technique du Backstepping est sa flexibilité pour le choix des fonctions stabilisantes α_i qui sont choisies simplement sans éliminer toutes les non-linéarités afin de rendre la fonction \dot{V}_i négative.