



**HAL**  
open science

# Equations de réaction-diffusion de type KPP : ondes pulsatoires, dynamique non triviale et applications.

Michaël Bages

► **To cite this version:**

Michaël Bages. Equations de réaction-diffusion de type KPP : ondes pulsatoires, dynamique non triviale et applications.. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2007. Français. NNT : . tel-00262323

**HAL Id: tel-00262323**

**<https://theses.hal.science/tel-00262323v1>**

Submitted on 11 Mar 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE TOULOUSE III - PAUL SABATIER

U.F.R MATHÉMATIQUES INFORMATIQUE GESTION

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

en Mathématiques Appliquées

présentée par

**Michaël BAGES**

intitulée

---

**ÉQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION DE TYPE KPP :**  
**ONDES PULSATOIRES, DYNAMIQUE NON TRIVIALE**  
**ET APPLICATIONS**

---

rapportée par : Mariana HARAGUS  
Régis MONNEAU

et soutenue le 17 décembre 2007 devant le jury composé de

Thierry GALLAY	Examineur
François HAMEL	Examineur
Patrick MARTINEZ	Directeur de thèse
Régis MONNEAU	Rapporteur
Jean-Michel ROQUEJOFFRE	Directeur de thèse
Violaine ROUSSIER-MICHON	Examinatrice

*Institut de Mathématiques de Toulouse*

*Unité Mixte de Recherche CNRS - UMR 5219*

*Université Paul Sabatier Toulouse 3 - Bât 1R3, 31 062 TOULOUSE cedex 9, France*



---

# REMERCIEMENTS

---

*La vie et les obstacles décident du chemin.*

B.B.

Je tiens en premier lieu à remercier mes directeurs de thèse, Jean-Michel Roquejoffre et Patrick Martinez. Jean-Michel m'a fait découvrir son riche et passionnant domaine de la réaction-diffusion en DEA. C'est un grand honneur d'avoir travaillé à ses côtés ; ses qualités scientifiques et son abnégation dans la recherche sont un véritable exemple pour moi. Canaliser toutes ses idées aurait été difficile sans la présence de Patrick. Sa disponibilité et son soutien constant, ainsi que ses qualités hors pair de pédagogue et son souci de la rigueur, m'ont été d'une aide précieuse. Merci encore à tous les deux pour votre engagement permanent durant ces années.

Je suis très reconnaissant envers Mariana Haragus et Régis Monneau qui ont accepté la lourde tâche de rapporter mon travail malgré un emploi du temps très chargé. Je vous remercie chaleureusement de l'intérêt que vous avez porté à ma thèse. C'est un grand plaisir que Violaine Roussier-Michon, Thierry Gallay et François Hamel aient accepté de faire partie de mon jury. Je remercie François Hamel pour l'intérêt qu'il porte à mes travaux depuis leurs débuts ainsi que la clarté de ses articles sur lesquels mes recherches s'appuient. Je remercie également Thierry Gallay pour son cours sur la réaction-diffusion donné à l'école d'été à Grenoble en 2005 et qui m'a suivi durant toute la fin de thèse. Merci enfin à Violaine pour tous ses conseils envers les plus jeunes.

J'ai eu la chance d'effectuer ma thèse dans le cadre idéal du laboratoire MIP. Merci tout d'abord à Christine qui faisait du passage au secrétariat un vrai moment de bonheur. Je remercie tous les thésards du MIP qui ont fait du labo une deuxième famille, en particulier ceux de ma génération : Nicolas, mon ancien co-bureau du 202, pour les bonnes odeurs de casse-croûte, à Jean-Luc pour son petit grain de folie, à Marc pour sa bonne humeur (et ses blagues pas drôles!), à Raymond pour son caractère bien trempé, à Mounir, Samy, Ali, Davuth et Élie, ainsi qu'à notre adorable duo de postdocs Aude et Olivier. Je remercie également les jeunes thésards pour leur enthousiasme, tout particulièrement mes nouveaux co-bureaux pour avoir ravivé l'ambiance du 202. Je n'oublie pas non plus mes camarades de Picard et LSP, avec une mention spéciale pour Julien, qui a été un coéquipier de choc en prépa agreg.

Mes enseignements effectués à l'UPS ont été l'occasion de mieux faire connaissance avec certains collègues, en particulier Jean-Claude Yakoubsohn et Michel Pradel, avec

qui j'ai échangé de nombreuses discussions pédagogiques. Merci à tous les deux pour votre soutien, ainsi qu'à Judith qui m'a en plus si souvent libéré Patrick.

Heureusement que les amis nous rappellent qu'il y a une vie en dehors du labo. Merci à Alex pour tous nos fous rires et ta patate légendaire, Seb pour ton si grand coeur, François pour ta gentillesse hors du commun, et Xav pour notre si belle amitié depuis le primaire. Merci à vous pour tous les bons moments passés ensemble. Une pensée également à mes amis foteux, en particulier le noyau dur des Souessois, pour nos week end festifs et notre belle saison victorieuse 2005 !

Mes derniers remerciements s'adressent naturellement à ma famille à laquelle je suis très attaché. J'ai une affection particulière pour ma marraine et mon parrain : ils ont toujours été présents à mes côtés et c'est un grand plaisir qu'ils soient là pour ma soutenance. Un gros bisou également à ma cousine préférée Ophélie, l'un des piliers de la famille. Merci à mes deux frérots que j'adore et sans qui la vie ne serait vraiment pas pareille. Enfin, c'est un grand bonheur de remercier ici mes parents pour l'amour inestimable qu'ils me portent et qui me donne force et conviction dans tout ce que j'entreprends.

---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
I Contexte . . . . .	1
I.1 Ondes progressives . . . . .	1
I.2 Ondes pulsatoires . . . . .	5
I.3 Bref aperçu des travaux connexes . . . . .	7
II Présentation des résultats obtenus . . . . .	8
II.1 Existence d'ondes pulsatoires d'une équation de type ignition dans un cylindre : une nouvelle preuve . . . . .	8
II.2 Existence d'ondes pulsatoires de type KPP au comportement précisé	11
II.3 Dynamique non triviale en temps grand pour une équation de type KPP en milieu périodique . . . . .	14
II.4 Ondes pulsatoires pour le système de la SHS avec terme source monostable . . . . .	18
<b>1 Existence d'ondes pulsatoires d'une équation de type ignition dans un cylindre : une nouvelle preuve</b>	<b>23</b>
1.1 Introduction . . . . .	23
1.2 La démarche utilisée . . . . .	24
1.3 Résultats prérequis . . . . .	26
1.3.1 Propriétés qualitatives des ondes . . . . .	26
1.3.2 Problèmes aux valeurs propres . . . . .	26
1.4 Estimations sur $c$ . . . . .	27
1.4.1 Borne supérieure sur la vitesse . . . . .	27
1.4.2 Borne inférieure sur la vitesse . . . . .	29
1.5 Passage à la limite . . . . .	30
1.5.1 Extraction d'une sous-suite convergente . . . . .	31
1.5.2 Solutions exponentielles . . . . .	32
1.5.3 Conditions à l'infini . . . . .	32
1.6 Continuation locale de solutions . . . . .	36
1.6.1 Description formelle de la méthode . . . . .	37
1.6.2 Détermination du poids . . . . .	39
1.6.3 Les propriétés de $w^0$ . . . . .	40
1.6.4 Etude du problème de Cauchy $(PB)_s$ . . . . .	42
1.6.5 La différentiabilité de l'application $F$ . . . . .	44

1.6.6	La décomposition $T(1, 0) = T + K$ avec $T$ contractant et $K$ compact	48
1.6.7	Le noyau de $I - T(1, 0)$	54
1.6.8	Fin de la continuation locale	57
1.6.9	Synthèse de l'étape continuation locale	59
<b>2</b>	<b>Existence d'ondes pulsatoires de type KPP au comportement précisé</b>	<b>61</b>
2.1	Introduction et résultat principal	61
2.2	Propriétés de la valeur propre principale $k(\lambda)$	63
2.2.1	Convexité de $k(\lambda)$ et construction du poids	63
2.2.2	Analyticité de $k(\lambda)$	65
2.3	Existence d'ondes de vitesse $c > c^*$ par point fixe	65
2.3.1	Point fixe dans l'espace à poids	65
2.3.2	Comportement de $\tilde{u}$ en $+\infty$	69
2.4	Existence d'ondes de vitesse $c^*$ par sur et sous-solutions	70
2.4.1	Le comportement exponentiel	71
2.4.2	Existence par sous-solution et sur-solution	72
<b>3</b>	<b>Dynamique non triviale en temps grand pour une équation de type KPP en milieu périodique</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction et résultats principaux	77
3.1.1	Dynamique en milieu homogène	77
3.1.2	Dynamique en milieu périodique	78
3.1.3	Plan du chapitre	81
3.2	Le cas homogène : preuve directe	81
3.2.1	L'équation et les propriétés du shift	81
3.2.2	Convergence dans l'espace à poids	84
3.3	Le cas homogène : étude du shift par la méthode générale	86
3.3.1	Etude de l'équation différentielle	89
3.3.2	Approximation de $u$ et estimations	91
3.3.3	Déformation du contour	96
3.3.4	Lemmes techniques	101
3.3.5	Etude de la partie dominante du shift	106
3.3.6	Comportement des dérivées du shift	109
3.4	Convergence en milieu périodique	110
3.4.1	Equation du shift	110
3.4.2	Convergence	111
3.5	Propriétés du shift en milieu périodique	113
3.5.1	Généralités sur l'équation différentielle	115
3.5.2	Etude de l'équation homogène au voisinage de $\lambda = 0$	117
3.5.3	Exposants de Floquet pour $\lambda$ proche de 0	122
3.5.4	Localisation du spectre de $L$	123
3.5.5	Approximation de $u(\lambda, x)$ au voisinage de $\lambda = 0$	125
3.5.6	Déformation du contour	129
3.5.7	Le terme dominant du shift	133
3.5.8	Comportement des dérivées du shift en temps grand	138
3.6	Stabilité des ondes pulsatoires	140

---

<b>4 Ondes pulsatoires pour le système de la SHS avec terme source mono-stable</b>	<b>147</b>
4.1 Introduction : les systèmes considérés . . . . .	147
4.2 Les résultats . . . . .	148
4.2.1 Théorème principal . . . . .	148
4.2.2 L'équation scalaire reliée au système et ses propriétés . . . . .	149
4.2.3 Relation entre les ondes de l'équation et du système . . . . .	150
4.3 Relation formelle entre le système et l'équation . . . . .	150
4.3.1 Condition aux limites . . . . .	150
4.3.2 Relation formelle entre le système et l'équation . . . . .	151
4.4 Existence d'ondes progressives . . . . .	153
4.5 Propriétés qualitatives des ondes pulsatoires de l'équation . . . . .	159
4.5.1 Positivité de la vitesse . . . . .	159
4.5.2 Comportement linéaire des ondes pulsatoires . . . . .	161
4.5.3 Non existence et décroissance exponentielle en $-\infty$ . . . . .	168
4.6 Existence d'ondes pulsatoires pour l'équation . . . . .	170
4.6.1 Existence d'ondes pulsatoires pour $c > c^*$ . . . . .	171
4.6.2 Existence d'ondes pulsatoires pour $c = c^*$ . . . . .	173
4.6.3 Comportement linéaire des ondes en $+\infty$ . . . . .	176
4.7 Relation entre les ondes du système et de l'équation . . . . .	179
<b>Bibliographie</b>	<b>188</b>



---

# INTRODUCTION

---

L'objet de cette thèse est l'étude d'équations de réaction-diffusion de type KPP (pour Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov) en milieu périodique et plus particulièrement l'existence, les propriétés qualitatives et la stabilité des solutions ondes pulsatoires. On donne à la fin une application au système de la SHS (Self-propagating High-temperature Synthesis) en combustion solide.

La thèse est divisée en quatre chapitres. Dans le premier, nous donnons, pour une équation d'advection-réaction-diffusion à coefficients périodiques posée sur un cylindre infini et avec une nonlinéarité de type ignition, une nouvelle preuve de l'existence d'ondes pulsatoires, résultat déjà démontré par Xin [95] puis Berestycki et Hamel [6].

Nous démontrons ensuite l'existence d'ondes pulsatoires au comportement précisé à l'infini pour une équation de réaction-diffusion unidimensionnelle dont la nonlinéarité est de type KPP et périodique en espace.

Nous nous intéressons au chapitre 3 à l'existence de comportements nouveaux en temps grand pour cette équation en milieu périodique et nous montrons que certaines données initiales donnent lieu à une dynamique non triviale au sens où elle ne se réduit pas à la simple convergence vers une onde pulsatoire.

On démontre enfin au chapitre 4 l'existence d'ondes pulsatoires pour un système de réaction-diffusion en dimension une modélisant la combustion solide.

## I Contexte

### I.1 Ondes progressives

Les équations de réaction-diffusion sont des équations aux dérivées partielles paraboliques qui servent de modèles dans de nombreux domaines comme la combustion (cf Williams [92]) ou la dynamique des populations (cf Murray [61]). Elles permettent de rendre compte et de mieux comprendre les phénomènes de propagation (propagation de flammes, invasion d'espèces, ...) grâce à l'existence de solutions particulières de l'équation appelées ondes progressives. L'équation type de la théorie

$$u_t - u_{xx} = f(u) \quad \text{sur } \mathbb{R}, \tag{1}$$

a été introduite à la fin des années 30 par Fisher [28] comme modèle de génétique des populations ( $f(u) = u(1-u)$ ) et par Zeldovich et Frank-Kamenetskii [97] en combustion. L'inconnue  $u$  représente une densité de gène dominant dans le premier cas et la température en combustion. Elle a donné lieu au travail mathématique pionnier de Kolmogorov,

Petrovsky et Piskunov [53] qui ont posé les bases de la théorie de la réaction-diffusion. Les nonlinéarités  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  considérées ici vérifient les propriétés générales

$$f \geq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0,$$

et sont classées en deux catégories (cf figure 1)

(i) **Nonlinéarité de type KPP.** La fonction  $f$  vérifie de plus les propriétés suivantes :

$$f > 0 \text{ sur } ]0, 1[, \quad f'(1) < 0 < f'(0), \quad f(u) \leq f'(0)u \quad \forall u \in [0, 1].$$

(ii) **Nonlinéarité de type ignition.** Il existe  $\theta \in (0, 1)$  tel que

$$f = 0 \text{ sur } [0, \theta], \quad f > 0 \text{ sur } ]\theta, 1[, \quad f'(1) < 0.$$

Précisons qu'il existe une troisième catégorie de nonlinéarités qui ne sera pas étudiée ici : les nonlinéarités de type bistable. Elles sont telles qu'il existe un zéro intermédiaire  $a \in ]0, 1[$  tel que  $f < 0$  sur  $]0, a[$  et  $f > 0$  sur  $]a, 1[$ .

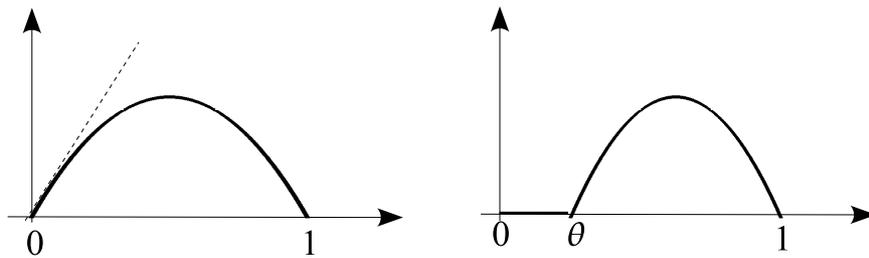


FIG. 1 – Nonlinéarités de type KPP et ignition

### Premiers résultats sur l'existence d'ondes progressives

Pour ce type de nonlinéarités, l'équation (1) possède des solutions particulières de type ondes progressives. Il s'agit des solutions de la forme  $u(t, x) = \phi_c(x + ct)$ , avec  $c \neq 0$ , où  $\phi_c$  vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} -\phi_c'' + c\phi_c' = f(\phi_c), \\ \phi_c(-\infty) = 0, \quad \phi_c(+\infty) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Ces ondes progressives représentent l'invasion de l'état 0 par l'état 1 et consistent en la propagation d'un profil constant  $\phi_c$  à vitesse  $c$  (cf figure 2). Si  $f$  est de type KPP, Kolmogorov, Petrovsky et Piskunov [53] ont montré que ce problème possède une solution si et seulement si  $c \geq c^* = 2\sqrt{f'(0)}$  et que le profil  $\phi_c$  est strictement croissant et unique à translation près. Si  $f$  est par contre de type ignition, Johnson et Nachbar [49] ont prouvé l'unicité de la vitesse de propagation. Précisons que la vitesse est également unique dans le cas bistable.

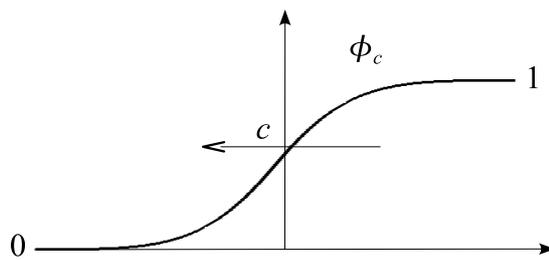


FIG. 2 – Profil et vitesse d'une onde progressive

### Propriétés qualitatives et stabilité des ondes progressives

Une fois résolue la question de l'existence des ondes progressives, il vient celle de leur stabilité afin de comprendre dans quelle mesure ces solutions particulières gouvernent la dynamique en temps grand de l'équation (1). On étudie ainsi le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (3)$$

Dans le cas de nonlinéarités de type ignition ou bistable, l'unique onde progressive (à translation près) décrit le comportement en temps grand pour une vaste classe de données initiales. Il s'agit des données exponentiellement décroissantes en  $-\infty$  dans le cas ignition et possédant des limites à l'infini de part et d'autre du zéro intermédiaire dans le cas bistable (cf Kanel [50, 51], Fife et McLeod [27]). Pour étudier la stabilité locale, il est possible dans ce cas de se placer dans un espace à poids pour déplacer le spectre dans le demi-plan  $\Re z < 0$ . Sattinger a ainsi montré la stabilité locale des ondes dans de tels espaces avec un taux de décroissance exponentiel en temps [76, 77].

Le cas d'une nonlinéarité de type KPP est plus difficile du fait de l'existence d'un continuum de vitesses. Cependant, les ondes de vitesse supérieures ( $c > c^*$ ) sont localement stables dans un espace à poids comme dans le cas ignition [76, 77]. Mais pour des données initiales plus générales, il se pose le délicat problème de la sélection de la vitesse : si la solution du problème de Cauchy (3) converge vers une onde progressive  $\phi_c(x + ct)$  en temps grand, quelle est la vitesse  $c$  de cette onde et comment est-elle sélectionnée ?

Pour le résoudre, il est nécessaire de connaître le comportement en  $-\infty$  des ondes progressives  $\phi_c$ . Le résultat est le suivant (cf [1, 2]) : quand  $x \rightarrow -\infty$ ,

- si  $c > c^*$ ,  $\phi_c(x) = Ae^{\lambda_c x} + O(e^{(\lambda_c + \delta)x})$ , avec  $A > 0$ ,  $\delta > 0$  et  $\lambda_c = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}$ ,
- si  $c = c^*$ ,  $\phi_{c^*}(x) = (Ax + B)e^{\frac{c^*}{2}x} + O(e^{(\frac{c^*}{2} + \delta)x})$ , avec  $A < 0$ ,  $B \in \mathbb{R}$  et  $\delta > 0$ .

Le taux de décroissance exponentiel apparaît de la manière suivante. Le comportement en  $-\infty$  de l'onde est donné par une exponentielle  $e^{\lambda x}$  solution de l'équation linéarisée en  $\phi = 0$

$$-\phi'' + c\phi' - f'(0)\phi = 0,$$

ce qui revient à chercher  $\lambda$  solution de l'équation  $\lambda^2 - c\lambda + 1 = 0$ . C'est la plus petite racine

$$\lambda_c = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}$$

qui est sélectionnée et elle est double pour  $c = c^*$ , ce qui engendre un comportement différent.

Les principaux résultats sur la question de la sélection de la vitesse dans le cas KPP ont été obtenus par Uchiyama [84], Bramson [17] et Lau [55]. Ils disent d'une part que si  $u_0$  décroît suffisamment en  $-\infty$ , alors c'est la vitesse  $c^*$  qui est sélectionnée, mais si  $u_0(x) \sim e^{\lambda c x}$  quand  $x \rightarrow -\infty$  et  $u_0(+\infty) = 1$ , alors  $u(t, x)$  converge vers une onde progressive de vitesse  $c$ . Le cas de la vitesse critique  $c = c^*$  est délicat. Contrairement au cas des vitesses supérieures, aucun poids ne permet de déplacer le spectre dans le demi-plan  $\Re z < 0$ . Deux types de résultats ont été démontrés. Les premiers portent sur des données initiales de type Heaviside [53, 17, 84] et montre la convergence en temps grand vers l'onde de vitesse  $c^*$  dans le sens suivant : il existe un shift  $m(t)$  se comportant comme  $m(t) = c^*t + \frac{3}{2}c^* \log(t) + o(1)$  tel que  $u(t, x - m(t))$  converge vers  $\phi_{c^*}(x)$ . Autrement dit, la solution a un profil qui converge vers celui de l'onde de vitesse  $c^*$  mais en diffère d'un shift dont la dérivée converge vers  $c^*$ , et qui est cependant non borné. D'autres travaux s'intéressent à des données initiales  $u_0$  très proches de l'onde progressive à l'infini : par exemple, quand  $u_0 - \phi_{c^*}$  est à support compact ou bien telle que  $\frac{u_0 - \phi_{c^*}}{\phi_{c^*}} \in L^1(\mathbb{R}^-)$ . On a alors dans ce cas convergence vers l'onde de vitesse  $c^*$  avec taux de convergence algébrique ; Kirchgässner a montré un taux de convergence de  $t^{-1/4}$  [52], puis Gallay a obtenu le taux optimal de  $t^{-3/2}$  [33].

### Existence et stabilité d'ondes progressives plissées

La notion d'onde progressive se généralise en plusieurs dimensions. En milieu homogène, représenté typiquement par l'équation suivante

$$u_t - \Delta u = f(u) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

la généralisation est immédiate en onde progressive plane de la forme

$$u(t, x) = \phi_c(x \cdot e + ct)$$

se propageant dans la direction  $-e$  avec un profil constant en temps  $\phi$ , solution de l'équation (2). Notons que les ensembles de niveaux de tels solutions sont des plans.

La situation est différente en milieu inhomogène. Prenons le cas du cylindre  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \omega\}$ , avec  $\omega$  borné de  $\mathbb{R}^{N-1}$ , et de l'équation de réaction-diffusion suivante

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \alpha(y)u_x = f(u), & (x, y) \in \Sigma, \\ \partial_\nu u = 0, & (x, y) \in \partial\Sigma, \end{cases} \quad (5)$$

où  $\alpha \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R})$ ,  $\nu$  désigne le vecteur normal unitaire sortant de  $\partial\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\omega$  et  $\partial_\nu u$  la dérivée normale. La dépendance en  $y$  conduit à chercher des solutions particulières sous la forme

$$u(t, x, y) = \phi_c(x + ct, y),$$

appelées ondes progressives plissées et dont les ensembles de niveaux ne sont plus plans mais courbes. Le profil  $\phi$  satisfait alors l'équation elliptique suivante :

$$\begin{cases} -\Delta \phi_c + (c + \alpha(y))\partial_x \phi_c = f(\phi_c), & (x, y) \in \Sigma, \\ \partial_\nu \phi_c = 0, & (x, y) \in \partial\Sigma, \\ \phi_c(-\infty, y) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_c(+\infty, y) = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Ce problème a été étudié par Berestycki, Larrouturou, Lions et Nirenberg [13, 16]. Ils ont montré que le problème (6) admet une unique solution  $(c, \phi)$  si  $f$  est de type ignition tandis que si  $f$  est de type KPP, il existe une solution  $(c, \phi_c)$  si et seulement si  $c \geq c^*$ . Dans les deux cas, le profil est unique à translations près en la variable  $x$ , et il est strictement croissant en  $x$ . Dans le cas ignition, Berestycki, Larrouturou et Roquejoffre [14, 69] ont ensuite montré la stabilité locale de ces ondes avec convergence exponentielle en temps. Les résultats de convergence globale ont été obtenus ensuite par Roquejoffre [70]. Dans le cas KPP, la situation est plus délicate. Mallordy et Roquejoffre [58] ont étudié le cas des ondes de vitesses supérieures : ils ont montré la stabilité locale avec décroissance exponentielle en temps ainsi que la convergence globale vers les ondes pour des données initiales ayant le même comportement en  $-\infty$ . La convergence globale s'étudie dans ce cas en obtenant une inéquation linéaire sur la différence  $|u - \phi_c|$ .

## I.2 Ondes pulsatoires

L'étude de la propagation en milieu périodique, c'est à dire pour des équations de la forme

$$u_t - u_{xx} = f(x, u) \quad \text{sur } \mathbb{R}, \quad (7)$$

où  $f(x, u)$  est une fonction 1-périodique en  $x$  telle que pour tout  $x$  l'application  $u \mapsto f(x, u)$  est une des nonlinéarités classiques, a été considéré dans les années 80 en tant que modèle d'écologie par Shigesada, Kawasaki et Teramoto [80]. Les auteurs ont montré que la propagation se faisait alors sous la forme plus générale d'ondes progressives pulsatoires dont voici la définition :

**Définition 1.** Une onde pulsatoire  $u(t, x)$  de l'équation (7) est une solution pour laquelle il existe une vitesse  $c \neq 0$  telle que

$$u\left(t + \frac{1}{c}, x\right) = u(t, x + 1), \quad (8)$$

$$u(t, -\infty) = 0, \quad u(t, +\infty) = 1. \quad (9)$$

Pour faire le lien avec les notions précédentes, notons qu'une onde pulsatoire est une solution de la forme

$$u(t, x) = \phi(t, x + ct), \quad (10)$$

où la fonction  $\phi(t, y)$  est  $1/c$  périodique en  $t$  et vérifie  $\phi(t, -\infty) = 0$  et  $\phi(t, +\infty) = 1$ . Autrement dit, une onde pulsatoire est caractérisée par un profil qui est périodique en temps (au lieu de constant dans le cas homogène) et qui avance à une certaine vitesse  $c$  (cf figure 3). Une autre façon classique de représenter une onde pulsatoire est de la voir comme une solution de la forme

$$u(t, x) = \phi(x + ct, x), \quad (11)$$

où  $\phi(\tau, x)$  est une fonction 1-périodique en  $x$  et vérifiant  $\phi(-\infty, x) = 0$  et  $\phi(+\infty, x) = 1$ . Nous privilégions ici le premier point de vue.

Les premiers résultats d'existence d'ondes pulsatoires ont été établis par Xin pour des nonlinéarités de type bistable et ignition dans  $\mathbb{R}^N$  [93, 94, 95]. L'auteur a montré qu'il existe une unique solution  $(c, u)$  à translation en temps près en temps et que la solution

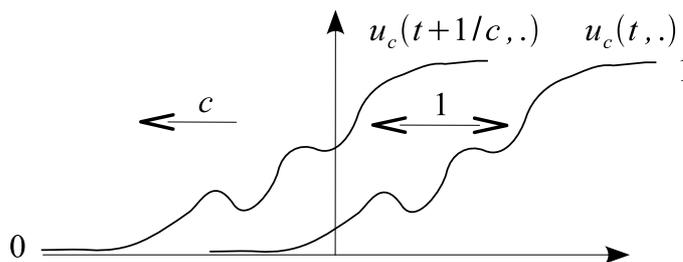


FIG. 3 – Profil et vitesse d'une onde pulsatoire

est croissante en temps. Les nonlinéarités  $f(x, u)$  de type KPP ont été considérées ensuite par Hudson et Zinner [48] qui ont montré l'existence d'ondes pulsatoires pour une demi-droite de vitesse  $[c_0, +\infty[$ . Ces résultats ont été généralisés par Berestycki et Hamel [6] dans des domaines périodiques généraux. Quand  $f$  est de type ignition, la vitesse est unique tandis que pour des nonlinéarités de type KPP, il existe des ondes pulsatoires si et seulement si  $c \geq c^* > 0$ . De plus, les ondes pulsatoires sont croissantes en temps et dans le cas ignition sont uniques à translation près en temps. Berestycki, Hamel et Nadirashvili [9] ont obtenu une formule variationnelle sur la vitesse minimale :

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0, \quad (12)$$

où  $k(\lambda)$  désigne la valeur propre principale d'un opérateur  $L_\lambda$  qui est donné par la relation suivante dans le cas de l'équation (7)

$$L_\lambda v = v'' + 2\lambda v' + (\lambda^2 + f'_u(x, 0))v. \quad (13)$$

Cet opérateur apparaît en cherchant des solutions de l'équation linéarisée en 0 de la forme  $u(t, x) = e^{\lambda(x+ct)}\phi(x)$  (cf section II.2). Cette formule variationnelle permet d'étudier la dépendance de la vitesse de l'onde en fonction des paramètres de l'équation. Les régimes d'homogénéisation de ces fronts de type KPP sont étudiés quant à eux par El Smaili [26]. Le cas d'ondes pulsatoires reliant un état stable périodique à l'état 0 a été étudié par Berestycki, Hamel, Roques [10, 11] dans le cadre d'un modèle d'invasion biologique pour lequel  $f_u(x, 0)$  peut changer de signe en fonction de  $x$ . Les fronts pulsatoires dans des milieux périodiques en temps ont également été étudiés par Fréjacques [32], Nolen et Xin [62] (voir aussi l'article de revue [96]).

De nombreux résultats d'existence d'ondes pulsatoires (ou ondes modulées) ont été également obtenus pour divers problèmes par des méthodes de bifurcation, notamment ceux de Schneider et al [24, 37, 36, 44]. Mentionnons également dans la même thématique l'étude des fronts de solidification périodiques (coarsening fronts) pour l'équation de Allen-Cahn par Scheel [78]. La stabilité de ces ondes est également étudiée, voir par exemple les travaux de Sandstede et Scheel [72, 73].

Mentionnons pour terminer que les propriétés qualitatives des fronts de type KPP sont actuellement activement étudiées : Hamel a obtenu récemment, dans un cadre très général, la monotonie en temps ainsi que le comportement spatial exponentiel en  $-\infty$  [39], avec des conséquences sur l'unicité et la stabilité de ces fronts (Hamel, Roques).

## I.3 Bref aperçu des travaux connexes

### I.3.1 Réaction-diffusion dans des milieux généraux

La notion d'ondes progressives a été généralisée très récemment par Matano ainsi que par Berestycki et Hamel [5] pour donner un sens à la notion de propagation dans des domaines très généraux (connexes réguliers de  $\mathbb{R}^N$ ) ainsi qu'un cadre unifié aux nombreuses notions d'ondes progressives existantes (planes, courbes, coniques, pulsatoires). Les auteurs utilisent pour cela le point commun de tous ces fronts : ils convergent uniformément vers 0 ou 1 loin de leurs ensembles de niveaux. Des propriétés qualitatives ont été établies pour ces ondes généralisées et l'étude de leur existence ouvre un vaste champ de recherche.

Quand le milieu de propagation est peu connu, celui-ci peut être représenté par un milieu aléatoire. La propagation de fronts pulsatoires dans de tels milieux est étudié en particulier par Nolen et Xin [63, 96].

### I.3.2 Systèmes de réaction-diffusion

L'étude des systèmes de réaction-diffusion a donné lieu à une vaste littérature. Il est hors de propos ici de faire une bibliographie exhaustive du sujet. Nous mentionnons juste quelques sujets de recherche en plein essor.

Le modèle thermodiffusif est activement étudié. Sous des contraintes de pertes de chaleur, l'étude du système est délicate puisque celle-ci ne se ramène pas à l'étude d'une équation scalaire. Berestycki, Hamel, Kiselev et Ryzhik [8] ont montré que ce système possède des fronts progressifs par une demi-droite de vitesses admissibles.

Un enjeu essentiel en combustion est de comprendre l'influence du champ de vitesse sur la propagation des flammes. L'étude du couplage des équations de réaction-diffusion avec celles de la mécanique des fluides est ainsi d'un enjeu majeur. Ce problème est très difficile et est étudié actuellement pour des couplages faibles de type Boussinesq. Citons notamment les travaux de Berestycki, Constantin et Ryzhik [4], et de Constantin, Roquejoffre, Ryzhik et Vladimirova [23] sur les problèmes d'existence et d'extinction, ainsi que celui de Constantin, Kiselev et Ryzhik [22] sur les questions d'instabilités.

L'étude de l'existence d'ondes pulsatoires pour des systèmes de réaction-diffusion généraux est très complexe. De nombreux résultats ont cependant été obtenu par des méthodes de bifurcation. Voir par exemple les travaux de Haragus et Sandstede [41], de Sandstede et Scheel [73, 74] et de Texier-Picard et Volpert [83]. Le seul résultat de nature non perturbative a été obtenu par Constantin, Domelevo, Roquejoffre et Ryzhik [21] pour l'existence de fronts pulsatoires d'un modèle de combustion dyphasique.

Nous mentionnons un dernier axe de recherche très prometteur, celui des systèmes généraux de la forme  $u_t = \Delta u + f(u)$  qui possède deux états  $u^-$  (stable) et  $u^+$  (instable) tels que par exemple la matrice jacobienne  $Jf(u^+)$  possède au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive et  $Jf(u^-)$  uniquement des valeurs propres de parties réelles strictement négatives, et en particulier des fronts linéaires (pulled fronts) pour lesquels la dynamique dépend directement de l'équation linéarisée au voisinage de l'état instable  $u^-$ . Des résultats de nature formelle ont été obtenus par Elbert et Van Saarloos ; ils ont établi d'une part un critère général de prédiction de la vitesse de propagation en fonction de la donnée initiale et ont donné des termes d'ordres supérieurs dans le

développement asymptotique  $m(t) = c^*t + \frac{3}{2}c^*\log(t) + o(1)$  du terme de dérive  $m(t)$  [86, 87, 88, 25].

## II Présentation des résultats obtenus

Notre travail se situe dans ce contexte, et son but est d'obtenir l'existence ainsi que des propriétés qualitatives fines des ondes pulsatoires d'équations de réaction-diffusion. Nous décrivons ici les résultats principaux obtenus dans la thèse. Leur motivation et leur contexte ne sont pas repris dans les chapitres suivants.

### II.1 Existence d'ondes pulsatoires d'une équation de type ignition dans un cylindre : une nouvelle preuve

On s'intéresse au chapitre 1 à l'existence d'ondes pulsatoires pour une équation d'advection-réaction-diffusion suivante posée sur un cylindre infini  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \omega\}$  dont la section  $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$  est un ouvert connexe régulier et borné. L'équation est la suivante

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + q(x, y) \cdot \nabla u = f(u), & (x, y) \in \Sigma, \\ \partial_\nu u = 0, & (x, y) \in \partial\Sigma, \end{cases} \quad (14)$$

où  $\nu$  désigne le vecteur normal unitaire sortant de  $\partial\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\omega$  et  $\partial_\nu u$  la dérivée normale. De plus, le terme source non linéaire  $f$  est ici de type ignition.

L'équation (14) représente un modèle classique de combustion d'un milieu réactif dans un cylindre. Il s'agit plus précisément du modèle thermodiffusif (avec nombre de Lewis égal à un) de propagation de flamme prémixée [12]. L'inconnue  $u$  désigne la température normalisée du milieu réactif et  $q$  son champ de vitesse.

Le champ  $q(x, y) = (q_1(x, y), \dots, q_N(x, y))$  est supposé de classe  $C^2$  sur  $\bar{\Sigma}$  et vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} q = 0 & \text{dans } \bar{\Sigma}, \\ \forall (x, y) \in \bar{\Sigma}, & q(x + L, y) = q(x, y), \\ \int_{(0, L) \times \omega} q_1(x, y) dx dy = 0, \\ q \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Sigma. \end{cases}$$

La première hypothèse signifie que le milieu est considéré comme incompressible. De plus,  $q$  est  $L$ -périodique en  $x$  et sa première composante est de moyenne nulle. On peut représenter ce champ de vitesse comme une fluctuation turbulente par rapport à un champ de vitesse moyen.

La périodicité du champ de vitesse conduit à chercher des solutions particulières de type ondes pulsatoires : il s'agit des solutions de (14) qui se propagent vers la gauche sont les solutions  $u \in C^{1,2}(\bar{\Sigma})$  telle qu'il existe  $c \neq 0$  vérifiant :

$$u\left(t + \frac{L}{c}, x, y\right) = u(t, x + L, y) \quad \forall t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \bar{\Sigma},$$

et telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t, -\infty, y) = 0, \quad u(t, +\infty, y) = 1, \quad \text{uniformément par rapport à } y.$$

Nous donnons une nouvelle preuve du résultat suivant

**Théorème 1.** [6, 95] *L'équation (14) possède une solution d'onde pulsatoire  $(c, u)$ .*

Les deux preuves actuelles de Xin [95] et de Berestycki et Hamel [6] partent du changement de variables (11) :

$$u(t, x, y) = \phi(x + ct, x, y) = \phi(\tau, x, y),$$

qui conduit à étudier les solutions  $\phi(\tau, x, y)$  définies sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \overline{\omega}$  de l'équation elliptique dégénérée suivante :

$$\begin{cases} \Delta\phi + 2\phi_{\tau x} - q(x, y) \cdot \nabla_{x, y}\phi - (q_1(x, y) + c)\phi_{\tau} + f(\phi) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \omega, \\ \partial_\nu\phi = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \partial\omega, \\ \phi(-\infty, \cdot, \cdot) = 0, \quad \phi(+\infty, \cdot, \cdot) = 1 & \text{uniformément en } (x, y), \\ \phi(\tau, x + L, y) = \phi(\tau, x, y) & \text{pour tout } (\tau, x, y). \end{cases} \quad (15)$$

Cette équation est bien dégénérée puisque la matrice des coefficients des termes de plus haut degré est la suivante en les variables  $(\tau, x, y_1, \dots, y_{N-1})$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et elle est de déterminant 0. Pour l'étudier, Xin utilise ensuite une méthode de continuation [95] tandis que Berestycki et Hamel utilisent une méthode de régularisation-troncature [6]. Dans les deux cas, les preuves font appel à un résultat de régularité d'équations elliptiques dégénérées qui est utilisé sans démonstration par Xin [95] et démontré et utilisé par Berestycki et Hamel. Ces derniers démontrent effectivement dans un article indépendant [7] un résultat de régularité  $C^1$  uniformément en  $\varepsilon$  sur la solution  $\phi^\varepsilon$  de l'équation régularisée associée à (15)

$$\varepsilon\phi_{\tau\tau} + \Delta\phi + 2\phi_{\tau x} - q(x, y) \cdot \nabla_{x, y}\phi - (q_1(x, y) + c)\phi_{\tau} + f(\phi) = 0.$$

En raison de l'importance de ce résultat, il nous a semblé intéressant d'en présenter une autre preuve, ne faisant pas appel à la régularité elliptique, et conduisant à montrer l'existence de solutions périodiques en temps pour une équation parabolique non linéaire. Nous utilisons pour cela une méthode de continuation et les outils employés sont les résultats classiques sur les équations paraboliques. Toutefois, un certain nombre de propriétés qualitatives a priori, démontrées par Berestycki et Hamel, seront utilisées sans être redémontrées.

Voici les grandes lignes de la démarche utilisée ici. Elle repose sur le changement de variables (10) qui consiste à se placer dans le repère mobile à la vitesse  $c$

$$\xi = x + ct.$$

Plus précisément, on pose

$$u(t, x, y) = v(t, x + ct, y), \quad v(t, \xi, y) = u(t, \xi - ct, y). \quad (16)$$

La fonction  $v$  est  $L/c$  - périodique en temps puisque

$$v\left(t + \frac{L}{c}, \xi, y\right) = u\left(t + \frac{L}{c}, \xi - ct - L, y\right) = u(t, \xi - ct, y) = v(t, \xi, y),$$

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + q(\xi - ct, y) \cdot \nabla v + cv_\xi = f(v) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ v(t, -\infty, y) = 0, v(t, +\infty, y) = 1, & \forall t, \text{ uniformément en } y, \\ v\left(t + \frac{L}{c}, \xi, y\right) = v(t, \xi, y). \end{cases} \quad (17)$$

Pour travailler avec des fonctions 1-périodiques en temps, on effectue ensuite le changement de variable :

$$w(\tau, \xi, y) = v\left(\frac{L}{c}\tau, \xi, y\right) = v(t, \xi, y). \quad (18)$$

La fonction  $w$  est ainsi 1-périodique en temps et vérifie le problème :

$$\begin{cases} \frac{c}{L}w_\tau - \Delta w + q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w + cw_\xi = f(w) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ w(\tau, -\infty, y) = 0, w(\tau, +\infty, y) = 1, & \forall \tau, \text{ uniformément en } y, \\ w(\tau + 1, \xi, y) = w(\tau, \xi, y). \end{cases} \quad (19)$$

La question de l'existence d'ondes pulsatoires revient ainsi à montrer que le problème (19) possède une solution  $(c, w)$ . On utilise pour cela une méthode de continuation qui consiste à introduire un paramètre  $s \in [0, 1]$  dans l'équation en considérant les problèmes

$$(Pbm)_s \begin{cases} \frac{c^{(s)}}{L}w_\tau^{(s)} - \Delta w^{(s)} + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w^{(s)} + c^{(s)}w_\xi^{(s)} = f(w^{(s)}) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu w^{(s)} = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ w^{(s)}(\tau, -\infty, y) = 0, w^{(s)}(\tau, +\infty, y) = 1, \\ w^{(s)}(\tau + 1, \xi, y) = w^{(s)}(\tau, \xi, y). \end{cases}$$

Pour  $s = 0$ , on obtient l'équation

$$\frac{c^{(0)}}{L}w_\tau^{(0)} - \Delta w^{(0)} + c^{(0)}w_\xi^{(0)} = f(w^{(0)}).$$

En revenant à la variable initiale par le changement inverse

$$u(t, x, y) = v(t, x + ct, y) = w\left(\frac{c}{L}t, x + ct, y\right),$$

on est ramené à l'équation de réaction-diffusion classique

$$u_t^{(0)} - \Delta u^{(0)} = f(u^{(0)}).$$

Cette équation possède une unique solution d'onde progressive unidimensionnelle de la forme  $u(t, x, y) = \phi(x + ct)$ , qui est donc aussi une onde pulsatoire. Pour  $s = 1$ , on obtient l'équation étudiée. On souhaite alors montrer que le problème  $(Pbm)_s$  possède une solution pour tout  $s \in [0, 1]$  en *continuant* la solution existante pour  $s = 0$  par rapport au paramètre  $s$ . On procède pour cela en 3 étapes :

1. En partant du fait que l'équation admet une solution pour  $s = 0$ , on montre qu'il existe  $\delta > 0$  tel que le problème  $(Pbm)_s$  admette une solution  $(c^{(s)}, w^{(s)})$ ,  $\forall s \in [0, \delta[$ .
2. On pose  $s_{max} = \sup \{\tau \in [0, 1] \text{ tel que l'équation a une solution pour tout } s \in [0, \tau[ \}$ . On montre alors que  $s_{max}$  est atteint, c'est-à-dire qu'on a une solution en  $s_{max}$ .
3. Si  $s_{max} < 1$ , on montre qu'il existe  $\delta > 0$  tel que l'équation a une solution  $\forall s \in [s_{max}, s_{max} + \delta[$  et ceci contredit la définition de  $s_{max}$ . Ainsi,  $s_{max} = 1$  et par l'étape 2 on a une solution pour  $s = 1$ .

Les étapes 1 et 3 sont identiques, il s'agit de *continuer localement* la solution par rapport au paramètre. Pour cela, on linéarise l'équation autour d'une solution onde pulsatoire et on utilise le théorème des fonctions implicites. L'étape 2 consiste à *passer à la limite* dans le paramètre de continuation et une suite de solutions  $(c^{(s_n)}, w^{(s_n)})_n$ . Il est important pour cela d'obtenir un encadrement a priori sur la vitesse pour pouvoir extraire de la suite  $(c^{(s_n)})_n$  une sous-suite convergente. On montrera que la suite  $(w^{(s_n)})_n$  converge localement vers  $w_\infty$  qui vérifie l'équation, les conditions au bord et aux limites, ce dernier point étant le plus délicat.

## II.2 Existence d'ondes pulsatoires de type KPP au comportement précisé

Nous avons rappelé dans la première partie l'importance de connaître le comportement des ondes progressives en  $-\infty$  pour étudier le problème de Cauchy en milieu homogène. Ceci est dû au fait que pour une nonlinéarité de type KPP, c'est le comportement au voisinage de l'état instable 0 qui pilote la dynamique du système. Les résultats actuels sur l'existence d'ondes pulsatoires ne précisaient pas le comportement en l'infini jusqu'à un travail, très récent et difficile mené en parallèle par Hamel [39] (nous détaillons plus loin les différences avec notre contribution).

L'objet du chapitre est l'étude du comportement exponentiel en  $-\infty$  des ondes pulsatoires pour l'équation de réaction diffusion (7). Pour cela, nous construisons des ondes pulsatoires qui possèdent le comportement exponentiel attendu en  $-\infty$ . Nous considérons une nonlinéarité  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R}^+)$  de type KPP qui a les propriétés suivantes :

- (i)  $f$  est 1-périodique en  $x$ ,
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, 0) = f(x, 1) = 0$  et  $f(x, u) > 0$  pour  $u \in (0, 1)$ ,
- (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'_u(x, 0) := \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u} > 0$  et  $f'_u(x, 1) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{f(x, u)}{u - 1} < 0$ ,
- (iv)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall u \in (0, 1)$ ,  $f'_u(x, u) \leq f'_u(x, 0)$ .

Pour construire nos ondes pulsatoires, nous nous plaçons dans le repère en mouvement de l'onde  $\xi = x + ct$  en posant

$$\tilde{u}(t, \xi) = u(t, \xi - ct); \quad u(t, x) = \tilde{u}(t, x + ct).$$

L'équation (7) s'écrit alors dans ce repère

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}). \quad (20)$$

La fonction  $\tilde{u}$  représente le profil de l'onde pulsatoire et est  $1/c$ -périodique en temps. Elle est solution du problème

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{u}(t, \xi), \\ \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{u}(t, +\infty) = 1. \end{cases} \quad (21)$$

On cherche ici une solution du problème (21) dont le comportement en  $-\infty$  est donné par une fonction  $p(t, \xi)$  solution de l'équation linéarisée au voisinage de  $u = 0$

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - f'_u(\xi - ct, 0)p = 0 \quad (22)$$

de la forme suivante

$$p(t, \xi) = e^{\lambda\xi}\psi(\xi - ct),$$

avec  $\lambda > 0$  et  $\psi > 0$  1-périodique. La forme de  $p$  généralise le comportement exponentiel des ondes progressives en tenant compte de la périodicité en temps de la solution à l'aide du terme  $\psi$ . En injectant l'ansatz précédent dans l'équation linéarisée, on est ainsi ramené à chercher  $\lambda$  et  $\psi$  solution de l'équation

$$L_\lambda\psi := \psi'' + 2\lambda\psi' + (\lambda^2 + f'_u(x, 0))\psi = c\lambda\psi,$$

$L_\lambda$  agissant dans  $C_{per}^2(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $v \in C^2(\mathbb{R})$  1-périodique. Pour cela, on considère la valeur propre principale  $k(\lambda)$  de l'opérateur  $L_\lambda$ ; il s'agit de l'unique valeur propre pour laquelle il existe une fonction propre strictement positive. On écrit alors le problème précédent sous la forme  $k(\lambda) = c\lambda$ , la fonction  $\psi$  étant choisie comme la fonction propre associée à  $k(\lambda)$ ; on la notera  $\psi_\lambda$  dans la suite.

La fonction  $k(\lambda)$  a été étudiée par Berestycki, Hamel et Nadirasvili [9] pour obtenir la formulation variationnelle suivante sur la vitesse minimale

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0. \quad (23)$$

En particulier, la fonction  $k(\lambda)$  est convexe et strictement positive; la fonction continue positive  $k(\lambda)/\lambda$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}_+^*$  en  $c^*$  et l'image de cette fonction est  $[c^*, +\infty[$ . Ceci permet de définir le taux de décroissance exponentielle de la façon suivante

$$\lambda_c = \min\{\lambda > 0 \text{ tel que } k(\lambda) = c\lambda\}, \quad \lambda^* = \lambda_{c^*}.$$

La valeur  $\lambda_c$  représente ainsi le premier point d'intersection de  $k(\lambda)$  avec la droite  $c\lambda$  (cf figure 4).

Une attention particulière est à porter au cas  $c = c^*$  où  $\lambda^*$  est alors une racine double de l'équation  $k(\lambda) = c^*\lambda$ . Le comportement exponentiel est alors de la forme  $-\xi e^{\lambda^*\xi}\psi^*(\xi - ct)$ , où  $\psi^* > 0$  est une fonction propre de  $L_{\lambda^*}$  associée à  $k(\lambda^*)$ . Nous montrons alors l'existence d'ondes pulsatoires avec ce comportement précis quand  $\xi \rightarrow -\infty$ :

**Théorème 2.** *Soient  $c > c^*$  et  $\psi_{\lambda_c} > 0$  une fonction propre de  $L_{\lambda_c}$  associée à  $k(\lambda_c) = c\lambda_c$ . Alors il existe une onde pulsatoire  $\tilde{u}_c$  solution de (21) telle que*

$$\tilde{u}_c(t, \xi) = e^{\lambda_c\xi}\psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda_c+\delta)\xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty,$$

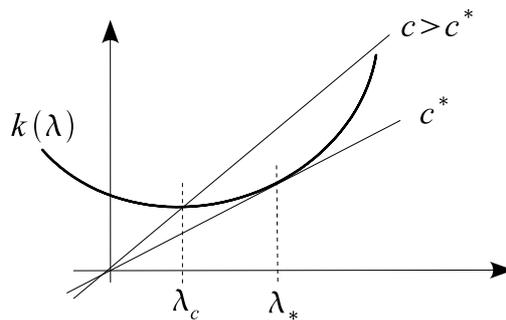


FIG. 4 – Taux de décroissance exponentielle  $\lambda_c$  de l'onde  $\tilde{u}_c$ .

avec  $\delta > 0$ . Soient  $c = c^*$  et  $\psi^* > 0$  une fonction propre de  $L_{\lambda^*}$  associée à  $k(\lambda^*) = c^*\lambda^*$ . Alors il existe une onde pulsatoire  $\tilde{u}_{c^*}$  solution de (21) telle que

$$\tilde{u}_{c^*}(t, \xi) = -\xi e^{\lambda^*\xi} \psi^*(\xi - c^*t) + O(e^{\lambda^*\xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty.$$

Nous utilisons deux approches différentes pour traiter les deux cas. Dans celui des vitesses supérieures  $c > c^*$ , nous utilisons un théorème de point fixe dans l'espace à poids des fonctions ayant le comportement exponentiel souhaité. La construction du poids est possible grâce au fait que  $k(\lambda) < c\lambda$  pour  $\lambda$  supérieur mais proche de  $\lambda_c$ . Pour  $c = c^*$ , on a l'inégalité  $k(\lambda) > c^*\lambda$  pour  $\lambda$  proche de  $\lambda_*$ . Ceci permet de construire l'onde de vitesse supérieure par la méthode des sur et sous solutions, choisies avec le même comportement en  $-\infty$  (celui de l'onde).

**Remarque 1.** (i) Pour l'onde de vitesse  $c^*$ , le comportement plus précis attendu en  $-\infty$  et qui généralise celui des ondes progressives est le suivant :

$$\tilde{u}_{c^*}(t, \xi) = e^{\lambda^*\xi} (-\xi \psi^*(\xi - c^*t) + \Psi^*(\xi - c^*t)) + o(e^{\lambda^*\xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty,$$

où  $p(t, \xi) = e^{\lambda^*\xi} (-\xi \psi^*(\xi - ct) + \Psi^*(\xi - ct))$  est solution de l'équation linéarisée (22). Ceci revient à chercher  $\psi^*$  et  $\Psi^*$  1-périodiques et solutions des équations

$$-\psi'' - 2\lambda^*\psi' + (c^*\lambda^* - \lambda^{*2} - f'_u(x, 0))\psi = 0, \quad (24)$$

$$-\Psi'' - 2\lambda^*\Psi' + (c^*\lambda^* - \lambda^{*2} - f'_u(x, 0))\Psi = -2\psi^{*'} + (c^* - 2\lambda^*)\psi^*. \quad (25)$$

(ii) Notre approche est généralisable en plusieurs dimensions d'espace, au moins pour le cas  $c > c^*$ .

Terminons par préciser que Hamel [39] a démontré dans un cadre très général que toute onde pulsatoire (notamment celles construites dans [6]) est équivalente en  $-\infty$  à  $e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct)$ . Nous obtenons ici que le différence entre  $u_c$  et son équivalent a une décroissance plus rapide que  $u_c$ . De plus, nous donnons ici une preuve auto-contenue de l'existence d'ondes pulsatoires ayant ce comportement précisé. Redisons que les résultats de ce chapitre ne contiennent pas [6] et [39], son intérêt étant plutôt dans la simplicité des preuves données.

### II.3 Dynamique non triviale en temps grand pour une équation de type KPP en milieu périodique

Nous étudions ici la dynamique en temps grand pour le problème de Cauchy en milieu périodique

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, u), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (26)$$

pour une classe de données initiales proches des ondes pulsatoires  $u_c$  construites précédemment dont on connaît le comportement précis en  $-\infty$ .

#### Le cas homogène

Notre travail a été motivé par l'obtention de comportements nouveaux en temps grand dans le cas homogène, c'est à dire le problème de Cauchy (3). Les résultats classiques de dynamique en temps grand que nous avons rappelés portent sur la convergence vers les ondes progressives pour des données initiales ayant en  $-\infty$  le même comportement qu'une onde progressive, ou bien une décroissance très rapide. On se demande naturellement ce qui se passe si on affaiblit ces hypothèses sur la donnée initiale.

On s'intéresse ici à des données initiales  $u_0$  comprises entre deux translatées d'une onde progressive de vitesse  $c > c^*$  :

$$\phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x + M),$$

avec  $M > 0$ . Ce type de données initiales a été considéré très récemment par Roquejoffre et Roussier [71] pour une équation de type bistable en dimension deux avec des données initiales comprises entre deux translatées d'ondes planes ou de fronts coniques. Les auteurs ont montré que la solution du problème de Cauchy a une dynamique non triviale en temps grand : le profil de la solution converge vers celui de l'onde mais en diffère d'un shift qui peut ne converger vers aucune constante. Le problème de l'étude de la dynamique dans le cas KPP était une question ouverte. Nous la résolvons ici pour une nonlinéarité  $f$  de classe  $C^2$  et vérifiant  $f''(u) < 0$ ; le résultat obtenu est le suivant

**Théorème 3.** *Soient  $c > c^* = 2\sqrt{f'(0)}$ ,  $M > 0$  et  $u(t, x)$  la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ \phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x + M). \end{cases} \quad (27)$$

*Soit  $m(t, x)$  la solution du problème*

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0, x) = \phi_c^{-1}(u_0(x)) - x. \end{cases} \quad (28)$$

*Alors*

(i) *La fonction  $m$  vérifie les propriétés suivantes quand  $t \rightarrow +\infty$*

$$0 \leq m(t, x) \leq M, \quad \|m_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \|m_x(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

(ii) Il existe  $\gamma > 0$  tel que si  $v(t, x) = |u(t, x) - \phi_c(x + ct + m(t, x))|$ , alors  $\tilde{v}(t, \xi) = v(t, \xi - ct)$  vérifie

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |e^{-\gamma \xi} \tilde{v}(t, \xi)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

**Remarque 2.** On peut montrer en fait que la convergence en (ii) est uniforme

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - \phi_c(x + ct + m(t, x))| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Ce résultat dit que la solution  $u(t, x)$ , qui reste comprise entre les deux translatées de l'onde

$$\phi_c(x + ct) \leq u(t, x) \leq \phi_c(x + M + ct),$$

voit son profil converger localement vers celui de l'onde progressive puisque  $m_x \rightarrow 0$  mais elle en diffère d'un shift qui varie de plus en plus lentement en temps grand ( $m_t \rightarrow 0$ ) (cf figure 5). Il est important de comprendre que la dynamique est réellement non triviale : l'équation du shift se ramène par une transformée de Hopf-Cole à une équation d'advection-diffusion à coefficients constants pour laquelle il existe de nombreuses solutions qui ne convergent vers aucune constante (et même certaines qui oscillent indéfiniment en temps grand [19, 89]), ce qui montre que la solution peut ne converger vers aucune translatée de l'onde  $u_c$ .

Notons que puisque la solution est comprise entre deux translatées de l'onde, l'idée de départ pour étudier le problème de Cauchy est de chercher directement  $u$  sous la forme  $\phi_c(x + ct + m(t, x))$ , ce qui donne une équation difficile à étudier. On utilise la connaissance du comportement de  $\phi_c$  en  $-\infty$  pour chercher  $m$  de sorte que  $\phi_c(x + ct + m(t, x))$  soit presque solution de (1), la différence étant petite au sens où elle décroît plus vite que  $\phi_c$  en  $-\infty$ ; ceci permet de montrer la convergence asymptotique en choisissant  $m$  solution de (28). L'équation du shift se ramenant à une équation d'advection-diffusion, la solution explicite de la solution donne le taux de décroissance optimal en  $t^{-1/2}$  sur les dérivées.

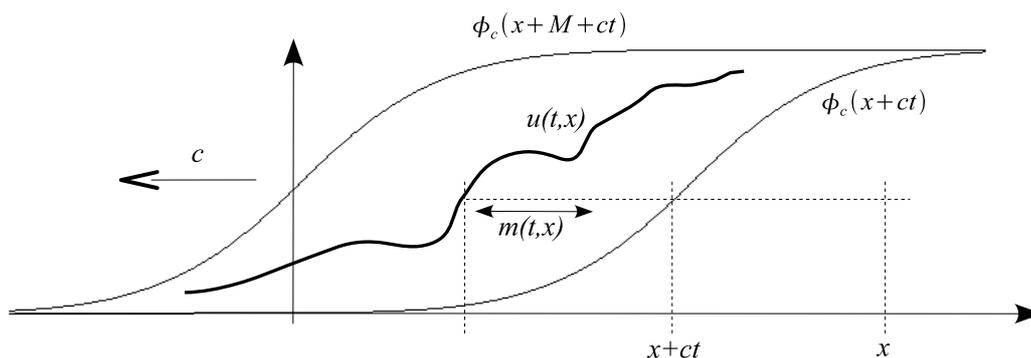


FIG. 5 – Dynamique non triviale en milieu homogène

### Le cas périodique

Le résultat principal du chapitre 3 est l'extension du résultat précédent au cadre périodique du problème de Cauchy (26). Notons qu'il n'existe aucun résultat sur la stabilité

des ondes pulsatoires de type KPP. Nous considérons une nonlinéarité  $f$  appartenant à  $C^2(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R}^+)$  et qui possède les propriétés suivantes :

- (i)  $f$  est 1-périodique en  $x$ ,
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x, 0) = f(x, 1) = 0$  et  $f(x, u) > 0$  pour  $u \in (0, 1)$ ,
- (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'_u(x, 0) := \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u} > 0$  et  $f'_u(x, 1) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{f(x, u)}{u-1} < 0$ ,
- (iv)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall u \in [0, 1]$ ,  $f''_u(x, u) \leq 0$ .

Avant d'étudier la dynamique non triviale, commençons par noter que les ondes pulsatoires de vitesse supérieure  $c > c^*$  construites précédemment sont stables avec taux de décroissance exponentielle. Le résultat qui utilise essentiellement les mêmes techniques que la section précédente est le suivant :

**Théorème 4.** *Soient  $c > c^*$  et  $u(t, x)$  la solution du problème de Cauchy (26) où  $u_0(x) \in [0, 1]$  satisfait les propriétés suivantes avec  $\varepsilon > 0$*

- (i)  $u_0(\xi) = u_c(0, x) + O(e^{(\lambda_c + \varepsilon)x})$  quand  $x \rightarrow -\infty$ ,
- (ii)  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) > 0$ .

*Il existe alors  $\gamma > 0$  tel que  $\|u(t, \cdot) - u_c(t, \cdot)\|_\infty = O(e^{-\gamma t})$ .*

L'objectif du chapitre 3 est d'étudier la classe plus large de données initiales comprises entre deux translatées en temps d'une onde pulsatoire  $u_c$  de vitesse  $c > c^*$

$$u_c(0, x) \leq u(0, x) \leq u_c(M, x).$$

Ceci est possible car  $\partial_t u_c > 0$  [6]. On obtient alors l'équivalent du théorème 3 dans le cas périodique

**Théorème 5.** *Soient  $c > c^*$ ,  $M > 0$ ,  $u_c$  l'onde pulsatoire du théorème 2 et  $u(t, x)$  la solution du problème de Cauchy (26) telle que*

$$u_c(0, x) \leq u(0, x) \leq u_c(M, x),$$

*Soit  $m(t, x)$  la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}})m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0, x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x)). \end{cases} \quad (29)$$

*Alors*

- (i) *La fonction  $m(t, x)$  possède les propriétés suivantes quand  $t \rightarrow +\infty$  :*

$$0 \leq m(t, x) \leq M, \quad \|m_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \|m_x(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

- (ii) *Il existe  $\gamma > 0$  tel que si  $v(t, x) = |u(t, x) - u_c(t + m(t, x), x)|$ , alors  $\tilde{v}(t, \xi) = v(t, \xi - ct)$  vérifie*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |e^{-\gamma \xi} \tilde{v}(t, \xi)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

**Remarque 3.** *On peut montrer en fait que la convergence en (ii) est uniforme*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_c(t + m(t, x), x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Si la donnée initiale est comprise entre deux translatées de l'onde pulsatoire  $u_c$ , le théorème nous dit comme précédemment que le profil de la solution converge localement vers celui de l'onde puisque  $m_x \rightarrow 0$  la solution diffère de l'onde d'un shift  $m(t, x)$  qui varie de plus en plus lentement en temps ( $m_t \rightarrow 0$ ). Notons que nous obtenons un taux de décroissance optimal sur les dérivées du shift puisque ce taux est le même que le taux optimal du cas homogène.

La preuve de ce résultat est délicate. L'obtention de l'équation sur le shift et la convergence en temps grand s'obtient comme dans le cas homogène grâce à la connaissance précise du comportement en  $-\infty$  de l'onde  $u_c$  (théorème 2). L'étude des propriétés du shift  $m$  est le plus difficile et est basée sur des estimations fines d'un noyau de type chaleur sous-jacent. Tout d'abord, l'équation du shift se ramène, par une transformation de Hopf-Cole, à l'équation parabolique linéaire à coefficients périodiques suivante

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x + (c\lambda_c - \lambda_c^2 - \zeta(x))w = 0, \\ w(0, x) = w_0(x) \text{ bornée.} \end{cases} \quad (30)$$

Contrairement au cas homogène, on ne connaît plus explicitement la solution. On utilise l'approche semi-groupe qui permet d'obtenir une formule pour  $w$ ; sa transformée de Laplace est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients périodiques; cette équation se résout grâce aux exposants de Floquet associés; on revient ensuite à  $w$  par transformation de Laplace inverse, et on estime cette formule intégrale par des techniques d'analyse complexe (déformation de contour, singularités) et d'analyse de Fourier (noyau de la chaleur, Fourier inverse).

**Remarque 4.** (i) Ce résultat est spécifique à la dimension un puisqu'il est basé sur l'étude de l'équation différentielle vérifiées par la transformée de Laplace du shift.

(ii) Précisons que les estimations fines obtenues sur le noyau de la chaleur ne peut pas être obtenu par les résultats actuels de la littérature sur les problèmes linéaires à coefficients périodiques [64].

Nous obtenons enfin un résultat de stabilité pour l'onde pulsatoire de vitesse  $c^*$  avec un taux de décroissance algébrique. L'étude du cas  $c = c^*$  est bien plus délicat que celui des ondes de vitesse supérieure du fait de la présence de 0 dans le spectre essentiel. Le résultat obtenu utilise les outils développés dans la preuve du théorème 5; notons que le taux optimal dans le cas homogène est  $t^{-3/2}$  et a été obtenu par Gallay [33].

**Théorème 6.** *Soit  $u(t, x)$  la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, u), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

où  $u_0 \in [0, 1]$  est de la forme  $u_0(x) = u_{c^*}(0, x) + h(x)$ , avec  $h$  à support compact. Alors

$$\|u(t, \cdot) - u_{c^*}(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

## II.4 Ondes pulsatoires pour le système de la SHS avec terme source monostable

On étudie au chapitre 4 l'existence d'ondes pulsatoires pour le système de réaction-diffusion en dimension un suivant

$$\begin{cases} T_t - T_{xx} = TY, \\ Y_t = -TY. \end{cases} \quad (31)$$

Il s'agit d'un modèle simple de combustion solide utilisé en particulier pour étudier les processus de synthèse de matériaux par combustion auto-propagée (SHS, 'Self-propagating High-temperature Synthesis'). La fonction  $T(t, x)$  représente la température et  $Y(t, x)$  la fraction massique du réactant solide.

Ce système s'obtient à partir du modèle termodiffusif classique dans l'étude de la propagation de flamme prémélangée en milieu gazeux [12] :

$$\begin{cases} T_t - T_{xx} = f(T)Y, \\ Y_t - \frac{1}{Le}Y_{xx} = -f(T)Y. \end{cases}$$

Notons que le champ de vitesse est nul comparé au chapitre 1. Le nombre de Lewis est le quotient de la diffusivité thermique par la diffusivité moléculaire ; cette dernière étant nulle dans le cas de la combustion solide, on obtient le système (31) à la limite  $Le \rightarrow +\infty$ . Notons que nous considérons ici  $f(T) = T$  ; La dépendance du taux de réaction  $f$  par rapport à  $T$  est complexe ; l'hypothèse  $f(T) = T$  que nous faisons ici est très simplificatrice du point de vue physique mais permet une étude mathématique du système.

Le système (31) étant homogène, il est naturel de se demander comment apparaissent de telles ondes pulsatoires. Celles-ci vont jouer un rôle dans l'étude de la dynamique en temps grand du système, pour une distribution initiale  $Y_0(x)$  périodique du réactant.

Quand la distribution initiale est uniforme, autrement dit quand on considère des limites à l'infini de  $T$  et  $Y$  sont uniformes, on est conduit à étudier les solutions globales en temps de type ondes progressives  $T(t, x) = \tilde{T}(x + ct)$ ,  $Y(t, x) = \tilde{Y}(x + ct)$ , le triplet  $(c, \tilde{T}, \tilde{Y})$  étant alors solution du problème

$$\begin{cases} -\tilde{T}'' + c\tilde{T}' = \tilde{T}\tilde{Y}, \\ c\tilde{Y}' = -\tilde{T}\tilde{Y}, \\ \tilde{T}(-\infty) = 0, \quad \tilde{T}(+\infty) = 1, \\ \tilde{Y}(-\infty) = 1, \quad \tilde{Y}(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

L'existence et l'unicité d'ondes progressives pour une demi-droite de vitesses admissibles ont été obtenus par Logak [56] pour des nonlinéarités plus générales de la forme  $f(T)Y$  avec  $f$  de type KPP. Dans le cas de nonlinéarités de type ignition, le problème avait été résolu par Berestycki, Nicolaenko et Scheurer [15]. Nous retrouvons le résultat de Logak par la méthode présentée ici.

Les ondes pulsatoires apparaissent en considérant une distribution périodique du réactant dans la zone fraîche ; ceci revient à considérer les limites suivantes quand  $x \rightarrow -\infty$  :

$$T(t, -\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (Y(t, x) - Y_p(x)) = 0,$$

où  $Y_p(x)$  est une fonction 1-périodique strictement positive. Les conditions aux limites dans la zone brûlée, c'est à dire quand  $x \rightarrow +\infty$ , sont les suivantes. Si on impose que la combustion est complète en  $+\infty$ , c'est à dire  $Y(t, +\infty) = 0$ , alors la température de fin de combustion est

$$T(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle := \int_0^1 Y_p(x) dx.$$

Une onde pulsatoire  $(T(t, x), Y(t, x))$  solution de (31) et avec une distribution périodique  $Y_p$  en  $-\infty$  est alors une solution classique définie pour tout  $t, x \in \mathbb{R}$ , telle qu'il existe  $c \neq 0$  pour lequel

$$T(t + \frac{1}{c}, x) = T(t, x + 1), \quad Y(t + \frac{1}{c}, x) = Y(t, x + 1),$$

et telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$T(t, -\infty) = 0, \quad T(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (Y(t, x) - Y_p(x)) = 0, \quad Y(t, +\infty) = 0.$$

On considère ainsi au final le système :

$$\begin{cases} T_t - T_{xx} = TY, \\ Y_t = -TY, \\ T(t + \frac{1}{c}, x) = T(t, x), \quad Y(t + \frac{1}{c}, x) = Y(t, x), \\ T(t, -\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (Y(t, x) - Y_p(x)) = 0, \\ T(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle, \quad Y(t, +\infty) = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Bien que de nombreux travaux portent sur les systèmes en milieu homogène, peu de résultats mathématiquement rigoureux existent sur ce type de systèmes en milieu inhomogène. Citons par exemple le travail de Haragus et Schneider [44] et ceux Sandstede et Scheel [72, 73] sur l'étude de l'existence de fronts par des techniques de bifurcation. L'asymptotique "hautes énergies d'activation" a été étudiée en détail par des méthodes de développements raccordés (Matkowsky, Sivashinsky [59]). Lorsque la donnée en  $-\infty$  est périodique, les seuls travaux existants à notre connaissance sont ceux de Monneau et Weiss [60] qui portent sur l'existence d'ondes pulsatoires pour l'équation de Stefan en les variables limites  $T_\infty$  et  $Y_\infty$  :

$$\partial_t T_\infty - Y^0 \partial_t \chi = \Delta T_\infty,$$

où  $Y^0$  désigne la donnée initiale de  $Y_\infty$  et

$$\chi(t, x) \begin{cases} = 0, & \text{esssup}_{(0,t)} T_\infty(\cdot, x) < 1, \\ \in [0, 1], & \text{esssup}_{(0,t)} T_\infty(\cdot, x) = 1, \\ = 1, & \text{esssup}_{(0,t)} T_\infty(\cdot, x) > 1. \end{cases}$$

Nous montrons au chapitre 4 que le problème (33) est de type KPP et nous caractérisons l'ensemble des vitesses admissibles :

**Théorème 7.** *Le système (33) possède une solution classique  $(T, Y)$  telle que  $T > 0$  et  $Y > 0$  si et seulement si  $c \geq c^*$ ; de plus,*

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda},$$

où  $k(\lambda)$  est la valeur propre principale de l'opérateur

$$L_\lambda v = v'' + 2\lambda v' + (\lambda^2 + Y_p(x))v,$$

agissant sur les fonctions  $v \in C^2(\mathbb{R})$  1-périodique

Pour étudier le problème (33), nous nous plaçons dans le repère mobile en posant

$$\tilde{T}(t, \xi) = T(t, \xi - ct), \quad \tilde{Y}(t, \xi) = Y(t, \xi - ct).$$

Les ondes pulsatoires sont alors les solutions  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$   $1/c$ -périodiques en temps du problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{T}_t - \tilde{T}_{\xi\xi} + c\tilde{T}_\xi = \tilde{T}\tilde{Y}, \\ \tilde{Y}_t + c\tilde{Y}_\xi = -\tilde{T}\tilde{Y}, \\ \tilde{T}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{T}(t, \xi), \quad \tilde{Y}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{Y}(t, \xi), \\ \tilde{T}(t, -\infty) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\tilde{Y}(t, \xi) - Y_p(\xi - ct)) = 0, \\ \tilde{T}(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle, \quad \tilde{Y}(t, +\infty) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Un outil important dans l'étude de l'existence d'ondes pulsatoires est le principe du maximum pour les équations paraboliques, mais il n'est pas vérifié en général pour les systèmes. Il existe des exceptions, comme les systèmes monotones qui possèdent un principe de comparaison (cf [90]). Toutefois, notre système n'est pas monotone. La non-linéarité spécifique  $f(T) = T$  considérée ici nous permet de ramener la recherche d'ondes pulsatoires du système (31) en la recherche d'ondes pulsatoires de l'équation scalaire

$$u_t - u_{xx} = Y_p(x)(1 - e^{-u}), \quad (35)$$

grâce au nouveau changement de variables

$$T(t, x) = u_t(t, x) \quad \text{et} \quad Y(t, x) = Y_p(x)e^{-u(t, x)}. \quad (36)$$

Ceci explique que la vitesse minimale est la même que précédemment. Notons que la non-linéarité  $1 - e^{-u}$  ne possède ici qu'un point fixe  $u = 0$ . Une onde pulsatoire  $u(t, x)$  de (35) est alors une solution de classe  $C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$  telle qu'il existe  $c \neq 0$  pour lequel

$$u(t + \frac{1}{c}, x) = u(t, x + 1),$$

mais qui relie cette fois les états 0 et  $+\infty$  :

$$u(t, -\infty) = 0, \quad u(t, +\infty) = +\infty.$$

Pour obtenir des ondes du système à l'aide des relations (36), il est nécessaire de construire des ondes positives de (35) qui ont un comportement linéaire bien précis

en  $+\infty$ . Pour formuler notre résultat, nous nous plaçons comme précédemment dans le repère mobile en posant  $\tilde{u}(t, \xi) = u(t, \xi - ct)$ , les ondes pulsatoires étant alors les solutions  $(c, \tilde{u})$  du problème

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}}), \\ \tilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{u}(t, \xi), \\ \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{u}(t, +\infty) = +\infty. \end{cases} \quad (37)$$

Avec les notations de la section II-2, nous obtenons le résultat suivant

**Théorème 8.** *Pour tout  $c \geq c^*$ , le problème (37) possède une solution  $\tilde{u} > 0$  qui a les propriétés suivantes : pour tout  $t$ ,*

$$\forall c \geq c^*, \quad \tilde{u}(t, \xi) = \alpha + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + Z_p(\xi - ct) + O(e^{-\beta\xi}) \quad \text{quand } \xi \rightarrow +\infty,$$

$$\forall c > c^*, \quad \tilde{u}(t, \xi) = e^{\lambda c \xi} \psi_{\lambda c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda c + \delta)\xi}) \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty,$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ ,  $\delta > 0$  et  $Z_p$  est une fonction régulière et 1-périodique.

On obtient ensuite des solutions de (34) grâce aux relations

$$\tilde{T}(t, \xi) = \tilde{u}_t(t, \xi) + c\tilde{u}_\xi(t, \xi) \quad \text{et} \quad \tilde{Y}(t, \xi) = Y_p(\xi - ct)e^{-\tilde{u}(t, \xi)},$$

équivalentes de (36) dans le repère mobile.

Notons que la difficulté est ici d'obtenir des ondes non bornées qui possèdent un comportement bien précis à l'infini. Pour cela, nous procédons de la façon suivante. Pour les vitesses supérieures  $c > c^*$  nous nous ramenons aux nonlinéarités classiques possédant deux points fixes en tronquant la nonlinéarité  $1 - e^{-u}$  en une fonction régulière  $f_M(u)$  qui est égale à  $1 - e^{-u}$  sur  $[0, M/2]$  mais qui s'annule pour  $u \geq M$ . Il existe ainsi grâce au théorème 2 une onde pulsatoire  $u_M$  pour tout  $M > 0$  reliant les états 0 en  $-\infty$  et  $M$  en  $+\infty$ . On obtient ensuite à la limite  $M \rightarrow +\infty$  une solution de (37) pour laquelle on montre qu'elle possède le bon comportement linéaire quand  $\xi \rightarrow +\infty$  grâce à un développement en série de Fourier en  $t$ . Pour l'onde de vitesse minimale, on raisonne directement sur une suite d'ondes de vitesse  $c_n > c^*$  de puis on passe à la limite  $c_n \rightarrow c^*$ .

**Remarque 5.** La preuve de l'existence d'ondes pulsatoires pour l'équation (35) se généralise en dimension supérieure, ainsi que l'ensemble de cette démarche.



# EXISTENCE D'ONDES PULSATOIRES D'UNE ÉQUATION DE TYPE IGNITION DANS UN CYLINDRE : UNE NOUVELLE PREUVE

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle preuve de l'existence d'ondes pulsatoires pour l'équation (1.1). On considère un cylindre infini  $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \omega\}$  dont la section  $\omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$  est un ouvert connexe régulier et borné et on s'intéresse aux solutions classiques de l'équation parabolique semi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + q(x, y) \cdot \nabla u = f(u), & t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \Sigma, \\ \partial_\nu u = 0, & t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \partial\Sigma, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\nu = \nu(x)$  désigne le vecteur normal unitaire sortant de  $\partial\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\omega$  et  $\partial_\nu u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$  la dérivée normale. Par solution classique, nous entendons une fonction  $u \in C^{1,2}(\overline{\Sigma})$  (une fois dérivable en  $t$ , deux fois dérivables en  $(x, y)$ ). Le champ de vitesse  $q(x, y) = (q_1(x, y), \dots, q_N(x, y))$  est supposé de classe  $C^2$  sur  $\overline{\Sigma}$  et vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} q = 0 & \text{dans } \overline{\Sigma}, \\ \forall (x, y) \in \overline{\Sigma}, \quad q(x+L, y) = q(x, y), \\ \int_{(0,L) \times \omega} q_1(x, y) dx dy = 0, \\ q \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (1.2)$$

Ainsi,  $q$  est périodique en  $x$  de période  $L > 0$ . Le terme source non linéaire  $f$  est de type ignition avec les propriétés suivantes :  $f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ , il existe  $\theta \in (0, 1)$  tel que  $f = 0$  sur  $[0, \theta]$ ,  $f > 0$  sur  $]\theta, 1[$ ,  $f(1) = 0$  et  $f'(1) < 0$  (cf figure 1.1).

Au vu de la périodicité du champ de vitesse, les solutions particulières qui nous intéressent sont les ondes pulsatoires qui se propagent, par convention, vers la gauche du cylindre :

**Définition 1.1.1.** *Une onde progressive pulsatoire  $u(t, x, y)$  de l'équation (1.1) est une solution classique  $u$  telle qu'il existe  $c \neq 0$  (vitesse de l'onde) vérifiant :*

$$u\left(t + \frac{L}{c}, x, y\right) = u(t, x + L, y) \quad \forall t \in \mathbb{R}, (x, y) \in \overline{\Sigma},$$

et telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t, -\infty, y) = 0, \quad u(t, +\infty, y) = 1, \quad \text{uniformément par rapport à } y.$$

L'objectif de ce chapitre est de donner une preuve alternative du résultat suivant

**Théorème 1.1.1.** [6, 95] *L'équation (1.1) possède une solution d'onde pulsatoire  $(c, u)$ .*

## 1.2 La démarche utilisée

Notre preuve repose sur le changement de variables naturel qui consiste à se placer dans le repère mobile à la vitesse  $c$ . Ceci conduit à étudier l'existence de solutions périodiques en temps pour une équation parabolique non linéaire. Pour cela, nous utiliserons une méthode de continuation ainsi que les outils classiques des équations paraboliques.

Nous commençons ainsi par nous placer dans le repère mobile

$$\xi = x + ct$$

en effectuant le changement de fonctions suivant :

$$v(t, \xi, y) = u(t, \xi - ct, y) = u(t, x, y). \quad (1.3)$$

La fonction  $v$  est  $L/c$  - périodique en temps puisque

$$v\left(t + \frac{L}{c}, \xi, y\right) = u\left(t + \frac{L}{c}, \xi - ct - L, y\right) = u(t, \xi - ct, y) = v(t, \xi, y),$$

et elle vérifie le problème :

$$\begin{cases} v_t - \Delta v + q(\xi - ct, y) \cdot \nabla v + cv_\xi = f(v) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ v(t, -\infty, y) = 0, v(t, +\infty, y) = 1, & \forall t, \text{ uniformément en } y, \\ v\left(t + \frac{L}{c}, \xi, y\right) = v(t, \xi, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

La vitesse  $c$  étant une inconnue du problème, nous effectuons un nouveau changement de variables pour travailler avec des fonctions 1-périodique en temps :

$$w(\tau, \xi, y) = v\left(\frac{L}{c}\tau, \xi, y\right) = v(t, \xi, y). \quad (1.5)$$

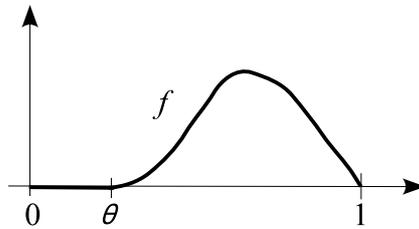


FIG. 1.1 – Nonlinéarité de type ignition

L'application  $w$  est alors 1-périodique en temps et vérifie le problème :

$$\begin{cases} \frac{c}{L}w_\tau - \Delta w + q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w + cw_\xi = f(w) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ w(\tau, -\infty, y) = 0, \quad w(\tau, +\infty, y) = 1, & \forall \tau, \text{ uniformément en } y, \\ w(\tau + 1, \xi, y) = w(\tau, \xi, y). \end{cases} \quad (1.6)$$

La question de l'existence d'ondes pulsatoires revient ainsi à montrer le résultat suivant

**Théorème 1.2.1.** *Le problème (1.6) possède une solution  $(c, w)$ .*

On considère les problèmes suivants paramétrés par  $s \in [0, 1]$  :

$$(Pbm)_s \quad \begin{cases} \frac{c^{(s)}}{L}w_\tau^{(s)} - \Delta w^{(s)} + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w^{(s)} + c^{(s)}w_\xi^{(s)} = f(w^{(s)}) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu w^{(s)} = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ w^{(s)}(\tau, -\infty, y) = 0, \quad w^{(s)}(\tau, +\infty, y) = 1, \\ w^{(s)}(\tau + 1, \xi, y) = w^{(s)}(\tau, \xi, y). \end{cases}$$

Pour  $s = 0$ , on obtient l'équation

$$\frac{c^{(0)}}{L}w_\tau^{(0)} - \Delta w^{(0)} + c^{(0)}w_\xi^{(0)} = f(w^{(0)}).$$

En revenant à la variable initiale par le changement inverse

$$u(t, x, y) = v(t, x + ct, y) = w\left(\frac{c}{L}t, x + ct, y\right),$$

on est ramené à l'équation de réaction-diffusion classique

$$u_t^{(0)} - \Delta u^{(0)} = f(u^{(0)}).$$

Cette équation possède une unique solution d'onde progressive unidimensionnelle de la forme  $u(t, x, y) = \phi(x + ct)$  [49], qui est donc aussi une onde pulsatoire. Pour  $s = 1$ , on obtient l'équation étudiée. On souhaite alors montrer que le problème  $(Pbm)_s$  possède une solution pour tout  $s \in [0, 1]$  en *continuant* la solution existante pour  $s = 0$  par rapport au paramètre  $s$ . On procède pour cela en 3 étapes :

1. En partant du fait que l'équation admet une solution pour  $s = 0$ , on montre qu'il existe  $\delta > 0$  tel que le problème  $(Pbm)_s$  admette une solution  $(c^{(s)}, w^{(s)})$ ,  $\forall s \in [0, \delta[$ .
2. On pose  $s_{max} = \sup \{\tau \in [0, 1] \text{ tel que l'équation a une solution pour tout } s \in [0, \tau]\}$ . On montre alors que  $s_{max}$  est atteint, c'est-à-dire qu'on a une solution en  $s_{max}$ .
3. Si  $s_{max} < 1$ , on montre qu'il existe  $\delta > 0$  tel que l'équation a une solution  $\forall s \in [s_{max}, s_{max} + \delta[$  et ceci contredit la définition de  $s_{max}$ . Ainsi,  $s_{max} = 1$  et par l'étape 2 on a une solution pour  $s = 1$ .

Les étapes 1 et 3 sont identiques, il s'agit de *continuer localement* la solution par rapport au paramètre. Pour cela, on linéarise l'équation autour d'une solution onde pulsatoire et on utilise le théorème des fonctions implicites. L'étape 2 consiste à *passer à la limite* dans le paramètre de continuation et une suite de solutions  $(c^{(s_n)}, w^{(s_n)})_n$ . Il

est important pour cela d'obtenir un encadrement à priori sur la vitesse pour pouvoir extraire de la suite  $(c^{(s_n)})_n$  une sous-suite convergente. On montrera que la suite  $(w^{(s_n)})_n$  converge localement vers  $w_\infty$  qui vérifie l'équation, les conditions au bord et aux limites, ce dernier point étant le plus délicat.

Après avoir rappeler les propriétés qualitatives à priori des ondes pulsatoires, nous traitons dans les sections suivantes successivement des estimations sur la vitesse  $c$ , du passage à la limite, puis de la continuation de la solution périodique.

### 1.3 Résultats prérequis

Nous nous intéressons ici uniquement à l'existence d'ondes pulsatoires et non aux propriétés qualitatives. Celles-ci sont néanmoins des informations préliminaires indispensables pour étudier l'existence d'ondes ; nous les rappelons ainsi sans les redémontrer. Le problème aux valeurs propres présenté ci-dessous permet de construire des sur-solutions exponentielles qui seront nécessaires pour la suite.

#### 1.3.1 Propriétés qualitatives des ondes

**Proposition 1.3.1.** [6, 95] *Si  $(c, u)$  est une solution onde pulsatoire de (1.1), alors on a les propriétés suivantes*

- (i) *l'onde vérifie  $0 < u < 1$  et est strictement croissante par rapport à  $t$ ,*
- (ii) *la vitesse  $c$  est strictement positive et unique,*
- (iii) *l'onde  $u$  est unique à translation en  $t$  près.*

**Remarque 1.3.1.** Il est naturel que la vitesse  $c$  soit positive : l'état 1 stable envahit l'état 0 instable et vu les conditions aux limites, l'onde se propage ainsi vers la gauche du cylindre.

#### 1.3.2 Problèmes aux valeurs propres

**Proposition 1.3.2.** [6] 1) *Pour tout  $(s, c, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ , il existe un unique  $\mu = \mu(s, c, \lambda) \in \mathbb{R}$  (valeur propre principale) et une fonction strictement positive  $\phi = \phi_{s,c,\lambda} \in C^2(\overline{\Sigma})$ , unique à une constante multiplicative près, tels que :*

$$\begin{cases} L_{s,c,\lambda}\phi = \mu\phi & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu\phi = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ \phi(x+L, y) = \phi(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

où l'opérateur  $L_{s,c,\lambda}$  est défini par

$$L_{s,c,\lambda}\phi = -\Delta\phi + sq(x, y) \cdot \nabla\phi - 2\lambda\phi_x + \lambda(sq_1(x, y) + c)\phi.$$

2) *La fonction  $\mu$  est  $C^2$  en  $(s, c, \lambda)$  et elle vérifie*

$$\mu(s, c, 0) = 0, \quad \text{et} \quad \partial_\lambda\mu(s, c, 0) = c.$$

3) *Il existe  $\lambda > 0$  tel que pour tout  $c \in [\underline{c}, \bar{c}]$  et  $s \in [0, 1]$ ,*

$$\delta(s, c, \lambda) := \mu(s, c, \lambda) - \lambda^2 > 0.$$

*Démonstration.* 1) Les points 1) et 2) sont démontrés dans [6]. Notons que la régularité de  $\mu$  découle de la simplicité de la valeur propre principale.

3) On déduit du point 2) que  $\partial_\lambda \mu(s, c, 0) = c \geq \underline{c}$  et qu'il existe  $M > 0$  tel que  $|\partial_\lambda^2 \mu(s, c, \lambda)| \leq M$  pour  $(s, c, \lambda) \in [\underline{c}, \bar{c}] \times [0, 1] \times [0, 1]$ . On a ainsi pour  $\lambda \in [0, \frac{\underline{c}}{2M}]$

$$\partial_\lambda \mu(s, c, \lambda) \geq \underline{c} - M\lambda \geq \underline{c}/2,$$

et donc  $\mu(s, c, \lambda) \geq \underline{c}\lambda/2$ . Il existe alors  $\lambda$  suffisamment petit tel que pour  $c \in [\underline{c}, \bar{c}]$  et  $s \in [0, 1]$ , on ait  $\delta(s, c, \lambda) := \mu(s, c, \lambda) - \lambda^2 > 0$ .  $\square$

## 1.4 Estimations sur $c$

Dans cette section, on considère une solution onde pulsatoire  $(c, u)$  de (1.1) et on établit des estimations à priori sur la vitesse. On établit d'abord une borne supérieure puis ensuite une borne inférieure. Ces estimations permettront de passer à la limite sur la vitesse  $c$  dans la section suivante. Ces deux étapes sont assez semblables à celles de [6], la différence étant qu'elles sont faites directement sur le domaine non borné.

### 1.4.1 Borne supérieure sur la vitesse

**Proposition 1.4.1.** *Il existe  $\bar{c} > 0$  (ne dépendant que de  $\theta$ ,  $f$  et  $\|q_1\|_\infty$ ) tel que pour toute onde pulsatoire  $(c, u)$  de (1.1), on ait  $c < \bar{c}$ .*

*Démonstration.* Soit  $(c, u)$  une onde pulsatoire de (1.1), elle vérifie ainsi le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + q(x, y) \cdot \nabla u = f(u) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ \forall t \in \mathbb{R}, u(t, -\infty, y) = 0, u(t, +\infty, y) = 1, & \text{uniformément par rapport à } y. \end{cases}$$

On considère alors une fonction  $\bar{f}$  avec les mêmes propriétés que  $f$  mais strictement positive sur  $]\theta/2, 2[$  (au lieu de  $]\theta, 1[$ ) et strictement supérieure à  $f$ . Soit alors  $(\bar{c}, \bar{\phi})$  une

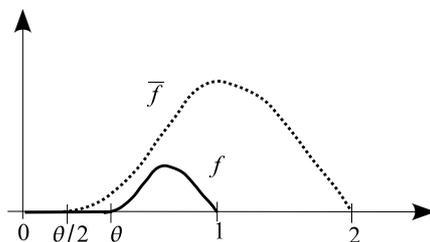


FIG. 1.2 – Les nonlinéarités  $f$  et  $\bar{f}$

onde unidimensionnelle associée à  $\bar{f}$ , c'est à dire une solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\bar{\phi}'' + c_1 \bar{\phi}' = \bar{f}(\bar{\phi}), \\ \bar{\phi}(-\infty) = \theta/4, \quad \bar{\phi}(+\infty) = 2. \end{cases}$$

La fonction  $U(t, x, y) = \bar{\phi}(x + (c_1 + \|q_1\|_\infty)t)$  est alors solution de :

$$\begin{cases} U_t - \Delta U - \|q_1\|_\infty U_x = \bar{f}(U), \\ \partial_\nu U = 0, \\ \forall t \in \mathbb{R}, U(t, -\infty, y) = \theta/4, U(t, +\infty, y) = 2, \text{ uniformément par rapport à } y, \\ U(0, x, y) = \bar{\phi}(x). \end{cases}$$

Puisque  $u_0$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  et que  $\bar{\phi}$  est unique à translation près et est à valeurs dans  $[\theta/4, 2]$ , on peut la translater de telle sorte que  $U_0(x, y) = \bar{\phi}(x) \geq u_0(x, y)$ .

Considérons maintenant la différence  $U - u$ . Elle vérifie l'équation :

$$\begin{cases} (U - u)_t - \Delta(U - u) - \|q_1\|_\infty U_x - q \cdot \nabla u = \bar{f}(U) - f(u), \\ \partial_\nu(U - u) = 0, \\ (U - u)(0, x, y) = U_0 - u_0 \geq 0. \end{cases}$$

En posant

$$k(t, x, y) = \frac{\bar{f}(U) - \bar{f}(u)}{U - u} = \int_0^1 \bar{f}'(u + \sigma(U - u)) d\sigma$$

et en remarquant que  $U$  ne dépend pas de  $y$ , on obtient le problème :

$$\begin{cases} (U - u)_t - \Delta(U - u) + q(x, y) \cdot \nabla(U - u) - k(t, x, y)(U - u) \\ = (\bar{f}(u) - f(u)) + (q_1 + \|q_1\|_\infty)U_x \geq 0, \\ \partial_\nu(U - u) = 0, \\ (U - u)(0, x, y) = U_0 - u_0 \geq 0, \\ U - u \text{ bornée,} \end{cases}$$

puisque  $f(u) \leq \bar{f}(u)$  et  $U_x = \bar{\phi}' > 0$  (propriété de monotonie de l'onde  $\bar{\phi}$ ).

Ainsi, par le principe du maximum faible parabolique, on a  $U - u \geq 0$ . D'où

$$u(t, x, y) \leq U(t, x, y) = \bar{\phi}(x + (c_1 + \|q_1\|_\infty)t), \forall t \geq 0, \forall (x, y) \in \Sigma.$$

On a alors :

$$u(t, x + NL, y) = u\left(t + N\frac{L}{c}, x, y\right) \leq \bar{\phi}\left(x + (c_1 + \|q_1\|_\infty)\left(t + N\frac{L}{c}\right)\right).$$

On considère maintenant  $(x_\theta, y_\theta) \in \Sigma$  tel que  $u(0, x_\theta, y_\theta) = \theta$ . En prenant  $x := x_\theta - NL$ , on obtient

$$\theta = u(0, x_\theta, y_\theta) \leq \bar{\phi}\left(x_\theta + N\left((c_1 + \|q_1\|_\infty)\frac{L}{c} - L\right)\right).$$

Puisque  $\bar{\phi}(x)$  tend vers  $\theta/4$  quand  $x \rightarrow -\infty$ , on en déduit, en faisant  $N \rightarrow +\infty$ , que l'on doit avoir  $(c_1 + \|q_1\|_\infty)\frac{L}{c} - L \geq 0$ , c'est à dire :

$$c \leq \bar{c} := c_1 + \|q_1\|_\infty,$$

ce qui correspond à notre estimation.  $\square$

### 1.4.2 Borne inférieure sur la vitesse

**Proposition 1.4.2.** *Il existe  $\underline{c} > 0$  tel que pour tout onde pulsatoire  $(c, u)$  de (1.1), on ait  $c > \underline{c}$ .*

*Démonstration.* On travaille dans la variable  $v$  ; on intègre d'abord l'équation vérifiée par  $v$  puis on établit l'estimation inférieure.

*Étape 1 - Intégration de l'équation.* On travaille sur l'équation vérifiée par  $v$  :

$$v_\tau - \Delta v + q(\xi - ct, y) \cdot \nabla v + cv_\xi = f(v),$$

qu'on intègre sur  $[0, L/c] \times [-M, M] \times \omega$  :

$$\int_0^{L/c} \int_{[-M, M] \times \omega} (v_\tau - \Delta v + q(\xi - ct, y) \cdot \nabla v + cv_\xi) dt d\xi dy = \int_0^{L/c} \int_{[-M, M] \times \omega} f(v) dt d\xi dy.$$

Regardons chacun des termes du membre de gauche :

– Le premier terme donne par périodicité

$$\int_0^{L/c} v_t(t, \xi, y) dt = v(L/c, \xi, y) - v(0, \xi, y) = 0.$$

– Pour le deuxième, on a

$$\int_{[-M, M] \times \omega} \Delta v dx dy = \int_{\partial([-M, M] \times \omega)} \partial_\nu v = \int_{[-M, M] \times \partial\omega} \partial_\nu v + \int_{\{-M, M\} \times \omega} \partial_\nu v.$$

On a d'une part  $\partial_\nu v = 0$  sur  $\partial\omega$  et d'autre part

$$\int_{\{-M, M\} \times \omega} \partial_\nu v = \int_0^{L/c} \int_\omega (v_\xi(t, M, y) - v_\xi(t, -M, y)) dt dy \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0.$$

En effet,  $|v_\xi(t, \xi)| \rightarrow 0$  quand  $|\xi| \rightarrow +\infty$  grâce aux estimations paraboliques et aux limites finies de  $v$  quand  $|\xi| \rightarrow +\infty$ .

– Le troisième terme donne

$$\int_{[-M, M] \times \omega} q(\xi - ct, y) \cdot \nabla v = - \int_{[-M, M] \times \omega} v \operatorname{div} q(\xi - ct, y) + \int_{\partial([-M, M] \times \omega)} v q(\xi - L\tau, y) \cdot \nu.$$

Comme  $\operatorname{div}(q) = 0$  dans  $\Sigma$  et  $q \cdot \nu = 0$  sur  $\partial\Sigma$ , ce terme est égal à :

$$\int_{\{-M, M\} \times \omega} v q(\xi - L\tau, y) \cdot \nu = \int_\omega [v(t, M, y) q_1(M - ct, y) - v(t, -M, y) q_1(-M - ct, y)] \rightarrow 0$$

quand  $M \rightarrow +\infty$  car  $v(t, \xi, y)$  a pour limites 0 et 1 en  $\xi \rightarrow \pm\infty$  et  $q_1$  est de moyenne nulle sur la cellule  $[0, L] \times \omega$ .

– Finalement, quand  $M \rightarrow +\infty$

$$\int_{[-M, M] \times \omega} cv_\xi = c \int_\omega (v(t, M, y) - v(t, -M, y)) dy \rightarrow c|\omega|.$$

En effet,

$$c|\omega| - c \int_\omega (v(t, M, y) - v(t, -M, y)) dy = c \int_\omega v(t, -M, y) dy + c \int_\omega (1 - v(t, M, y)) dy.$$

On conclut par convergence uniforme en  $y$  de  $v(t, -M, y)$  vers 0 et de  $v(t, M, y)$  vers 1.

En passant à la limite  $M \rightarrow +\infty$ , on en déduit finalement que :

$$\int_0^{L/c} \int_{\Sigma} f(v(t, \xi, y)) dt d\xi dy = L|\omega|.$$

*Étape 2 - Borne inférieure.* Montrons qu'il existe une borne inférieure stictement positive sur la vitesse. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite de solutions  $(c_n, v_n)$  telle que  $c_n \rightarrow 0$ . Écrivons l'équation de  $v_n$  sous la forme

$$v_{n,t} - \Delta v_n + q(\xi - ct, y) \cdot \nabla v_n + c_n v_{n,\xi} - \frac{f(v_n)}{v_n} v_n = 0.$$

Puisque les coefficients de cette équation ( $c_n, \|q\|_{\infty}$  et  $f(v_n)/v_n$ ) sont bornés, les estimations paraboliques de type Schauder [54] donnent l'existence d'une constante  $C_{univ}$  indépendante de  $n$  telle que pour tout  $N > 0$

$$\|v_n\|_{C^{1/2,1}([1,2] \times [N, N+1] \times \bar{\omega})} \leq C_{univ} \|v_n\|_{\infty} \leq C_{univ}.$$

En utilisant la périodicité en temps, on obtient que

$$\|v_n\|_{C^{1/2,1}(\mathbb{R} \times \bar{\Sigma})} \leq C_{univ}.$$

D'autre part, il existe  $\varepsilon$  assez petit tel que  $f(u) \geq \frac{f(\theta_1)}{2}$ ,  $\forall u \in [\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon]$ , où  $\theta_1 = \frac{1+\theta}{2}$ . Pour tout  $t$ , il existe  $(\xi_t, y_t)$  tel que  $v_n(t, \xi_t, y_t) = \frac{1+\theta}{2}$ . Les estimations paraboliques donnent alors :

$$|v_n(t, \xi, y) - v_n(t, \xi_t, y_t)| \leq C_{univ} \|(\xi, y) - (\xi_t, y_t)\|.$$

Considérons alors un ouvert  $B_t$  de volume  $\gamma$ , avec  $\gamma$  fixé assez petit, tel que

$$B_t \subset \{(\xi, y) / \|(\xi, y) - (\xi_t, y_t)\| \leq \frac{\varepsilon}{C_{univ}}\}.$$

Ainsi, pour tout  $(\xi, y) \in B_t$ ,  $|v_n(t, \xi, y) - v_n(t, \xi_t, y_t)| \leq \varepsilon$  et donc  $f(v_n(t, \xi, y)) \geq \frac{f(\theta_1)}{2}$ . Par conséquent, pour tout  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} L|\omega| &= \int_0^{L/c_n} \int_{\Sigma} f(v_n(t, \xi, y)) dt d\xi dy \geq \int_0^{L/c_n} \left( \int_{B_t} f(v_n(t, \xi, y)) d\xi dy \right) dt \\ &\geq \int_0^{L/c_n} \gamma \frac{f(\theta_1)}{2} dt = \frac{L\gamma f(\theta_1)}{2c_n}, \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque  $c_n \rightarrow 0$ . Ainsi il existe  $\underline{c} > 0$  tel que  $\underline{c} < c$  pour toute solution  $(c, v)$ .  $\square$

## 1.5 Passage à la limite

On s'intéresse dans cette section à l'étape 2 de passage à la limite. Il s'agit de montrer que si pour une suite de paramètres  $s_n$  convergeant vers  $s$  il existe une suite de solutions  $(c_n, w_n) := (c^{(s_n)}, w^{(s_n)})$  du problème  $(Pbm)_{s_n}$ , alors on peut passer à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans cette suite de solutions et obtenir une solution de  $(Pbm)_s$ .

### 1.5.1 Extraction d'une sous-suite convergente

Considérons ainsi une suite de paramètres  $s_n \rightarrow s$  et montrons que  $(Pbm)_s$  possède une solution. La suite de fonctions  $(c_n, w_n)$  est solution du problème

$$(Pbm)_{s_n} \quad \begin{cases} \frac{c_n}{L} w_{n,\tau} - \Delta w_n + s_n q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w_n + c_n w_{n,\xi} = f(w_n) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu w_n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ w_n(\tau, -\infty, y) = 0, \quad w_n(\tau, +\infty, y) = 1, \\ w_n(\tau + 1, \xi, y) = w_n(\tau, \xi, y), \end{cases}$$

Pour obtenir une fonction limite non triviale, on impose la condition de normalisation suivante

$$\max_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \times \omega} w_n(\tau, \xi, y) = \theta.$$

Ceci est possible puisque  $w_n$  est définie à translation près. En effet, si  $w_n$  est solution de  $(Pbm)_{s_n}$ , alors

$$W_n(\tau, \xi, y) := w_n(\tau + r, \xi + Lr, y),$$

avec  $r \in \mathbb{R}$ , est aussi solution. Ces éléments suffisent pour montrer que  $(c_n, w_n) \rightarrow (c_\infty, w_\infty)$  solution de  $(Pbm)_s$ .

Tout d'abord, d'après les estimations de la section 1.2, on a  $0 < \underline{c} \leq c_n \leq \bar{c}$ ,  $\forall n$ . La suite  $(c_n)_n$  est donc bornée et on peut en extraire une sous-suite convergeant vers  $c := c_\infty$  avec  $0 < \underline{c} \leq c \leq \bar{c}$ . On note encore  $(c_n)_n$  cette sous-suite. D'après les résultats prérequis, on a  $0 \leq w_n \leq 1$ . Les coefficients de l'équation

$$\frac{c_n}{L} w_{n,\tau} - \Delta w_n + s_n q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w_n + c_n w_{n,\xi} - \frac{f(w_n)}{w_n} w_n = 0,$$

étant bornés, il existe pour tout  $N \in \mathbb{N}$  une constante  $C_N$  telle que pour  $0 < \alpha < 1$ , on a l'estimation parabolique suivante :

$$\|w_n\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([1,2] \times [-N,N] \times \bar{\omega})} \leq C_N,$$

$C_N$  étant indépendant de  $n$ . Ces estimations sont valables sur  $\mathbb{R} \times [-N, N] \times \bar{\omega}$  par périodicité de  $w_n$ . Par le théorème d'Ascoli et le procédé d'extraction diagonale, on peut extraire de  $w_n$  une sous-suite, notée encore  $w_n$ , qui converge dans  $C_{loc}^{1,2}(\mathbb{R} \times \Sigma)$  vers  $w := w_\infty$ . Montrons alors le résultat suivant :

**Proposition 1.5.1.** *La fonction limite  $w$  est solution de  $(Pbm)_s$ .*

Vu la convergence de  $w_n$  vers  $w$ , cette dernière vérifie

$$\begin{cases} \frac{c}{L} w_\tau - \Delta w + s q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w + c w_\xi = f(w) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ w(\tau + 1, \xi, y) = w(\tau, \xi, y). \end{cases} \quad (1.8)$$

Le point délicat est de montrer qu'elle vérifie les conditions à la limite. Pour cela, on a besoin de sur-solutions exponentielles.

### 1.5.2 Solutions exponentielles

Puisque  $w_n$  vérifie la condition de normalisation

$$\max_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \times \omega} w_n(\tau, \xi, y) = \theta,$$

$w_n$  vérifie l'équation suivante pour  $\xi \leq 0$

$$\frac{c_n}{L} w_{n,\tau} - \Delta w_n + s_n q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w_n + c_n w_{n,\xi} = 0.$$

On note par la suite  $P_n$  l'opérateur parabolique suivant

$$P_n(w) := \frac{c_n}{L} w_\tau - \Delta w + s_n q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w + c_n w_\xi.$$

On cherche alors des sur-solutions  $p_n > 0$  de ces équations vérifiant

$$P_n(p_n) = \delta_n p_n,$$

avec  $\delta_n > 0$ . Les  $p_n$  sont cherchées sous forme exponentielle :

$$p_n(\tau, \xi, y) = e^{\lambda_n \xi} \phi_n(\xi - L\tau, y).$$

Le triplet  $(\delta_n, \lambda_n, \phi_n(x, y))$  doit alors vérifier l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta \phi_n + s_n q(x, y) \cdot \nabla \phi_n - 2\lambda_n \phi_{n,x} + \lambda_n (s_n q_1(x, y) + c_n) \phi_n = (\lambda_n^2 + \delta_n) \phi_n, \\ \partial_\nu \phi_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \\ \phi_n(x + L, y) = \phi_n(x, y). \end{cases} \quad (1.9)$$

La proposition 1.3.2 donne alors l'existence pour tout  $n$  du triplé

$$(\delta_n, \lambda_n, \phi_n) := (\delta(s_n, c_n, \lambda), \lambda, \phi_n)$$

qui satisfait les conditions. Notons qu'on a alors

$$p_n(\tau, \xi, y) = e^{\lambda \xi} \phi_n(\xi - L\tau, y),$$

c'est à dire que le terme exponentiel ne dépend pas de  $n$ .

### 1.5.3 Conditions à l'infini

Pour terminer cette section, montrons que l'application  $w := w_\infty$  vérifie les conditions à l'infini. Nous commençons par la limite en  $-\infty$ .

**Proposition 1.5.2.** *La fonction limite vérifie  $w(\tau, -\infty, y) = 0$ .*

Pour montrer ce résultat, nous commençons par établir la décroissance exponentielle des fonctions  $w_n$  en les majorant par

$$p_n(\tau, \xi, y) = e^{\lambda \xi} \phi_n(\xi - L\tau, y),$$

puis nous estimons  $\phi_n$  indépendamment de  $n$ . Nous avons besoin pour cela de fixer la condition de normalisation suivante sur  $\phi_n$

$$\min_{\Sigma} \phi_n = 1.$$

**Lemme 1.5.3.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a l'estimation suivante*

$$\forall \tau, \forall \xi \leq 0, \forall y, \quad w_n(\tau, \xi, y) \leq p_n(\tau, \xi, y). \quad (1.10)$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. On considère la fonction

$$\bar{p}_n(\tau, \xi, y) := (1 + m_n e^{-\delta_n \tau}) p_n(\tau, \xi, y) + \varepsilon,$$

où  $m_n$  est une constante à déterminer. On a alors

$$\begin{aligned} P_n(\bar{p}_n - w_n) = P_n(\bar{p}_n) &= -\delta_n m_n e^{-\delta_n \tau} p_n + (1 + m_n e^{-\delta_n \tau}) \delta_n p_n, \\ &= \delta_n p_n \geq 0. \end{aligned}$$

De plus,  $p_n(\tau, 0, y) = \phi_n(-L\tau, y) \geq 1$ , donc si on choisit  $m_n > 0$ , on a

$$(\bar{p}_n - w_n)(\tau, 0, y) \geq 1 - w_n(\tau, 0, y) \geq 0.$$

Enfin, compte-tenu du fait que  $w_n(0, \xi, y) \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow -\infty$ , on a

$$(\bar{p}_n - w_n)(0, \xi, y) \geq m_n e^{\lambda \xi} + \varepsilon - w_n(0, \xi, y) \geq 0, \quad \forall \xi \leq 0, y \in \omega,$$

si on choisit  $m_n$  assez grand. On conclut en appliquant le principe du maximum parabolique sur le demi-cylindre  $(-\infty, 0) \times \omega$ . Puisque

$$\begin{cases} P_n(\bar{p}_n - w_n) \geq 0, \\ (\bar{p}_n - w_n)(\tau, 0, y) \geq 0, \\ (\bar{p}_n - w_n)(0, \xi, y) \geq 0, \\ \bar{p}_n - w_n \text{ bornée} \end{cases}$$

la fonction  $\bar{p}_n - w_n$  est toujours positive ou nulle. Ensuite, on fixe  $\tau \in (0, 1)$  et on considère l'inégalité  $w_n(\tau + n, \xi, y) \leq \bar{p}_n(\tau + n, \xi, y)$ . En utilisant la périodicité de  $p_n$  et  $w_n$ , on voit en faisant  $n \rightarrow \infty$  que

$$w_n(\tau, \xi, y) \leq p_n(\tau, \xi, y) + \varepsilon,$$

et ceci est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc

$$w_n(\tau, \xi, y) \leq p_n(\tau, \xi, y),$$

qui est l'estimation souhaitée. □

*Démonstration de la proposition 1.5.2.* Les fonctions  $\phi_n$  vérifient les estimations suivantes avec  $R > 0$  :

$$1 \leq \phi_n \leq R$$

d'après la normalisation choisie,  $\min_{\bar{\Sigma}} \phi_n = 1$ , et l'inégalité de Harnack jusqu'à la frontière.

On a ainsi l'inégalité suivant, pour tout  $\xi \leq 0$ ,

$$w_n(\tau, \xi, y) \leq R e^{\lambda \xi} \phi_n(\xi - L\tau, y).$$

On obtient ainsi à la limite

$$w(\tau, \xi, y) \leq R e^{\lambda \xi},$$

pour tout  $\xi \leq 0$ , et donc  $w(\tau, -\infty, y) = 0$ . □

Regardons maintenant la limite en  $+\infty$ .

**Lemme 1.5.4.** *La fonction limite vérifie  $w(\tau, +\infty, y) = 1$ .*

*Démonstration.* Nous allons d'abord montrer que

$$\forall y, w(t, Lt, y) \rightarrow 1, \text{ quand } t \rightarrow +\infty,$$

c'est à dire que, à  $y$  fixé,  $w$  tend vers 1 dans la direction  $\mathbb{R} \cdot (1, L, 0) + (0, 0, y)$ . Nous reviendrons ensuite à la direction  $\mathbb{R} \cdot (0, 1, 0)$  grâce à la périodicité de  $w$  en  $t$ .

Le choix de la direction  $(1, L, 0)$  provient du fait que  $w(t, Lt, y) = u(\frac{L}{c}t, 0, y)$ ,  $u$  étant la variable initiale de l'équation. Puisque  $\partial_t u_n > 0$ , on obtient à la limite  $\partial_t u \geq 0$ . En fait,  $\partial_t u > 0$ . En effet,  $U := u_t$  est une solution positive de l'équation

$$\begin{cases} U_t - \Delta U + q \cdot \nabla U - f'(u)U = 0, \\ \partial_\nu U = 0. \end{cases}$$

Par le principe du maximum fort, soit  $U = 0$ , soit  $U > 0$ . Si  $U = u_t = 0$ , alors  $u(t, x)$  est constante et  $u(N/c, 0, 0) = u(0, N, 0)$  ne dépend pas de  $N$ . Ceci est absurde au vu des limites différentes quand  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . De plus,  $0 < u(t, x, y) < 1$ , donc  $u(t, x, y)$  admet une limite  $\bar{u}(x, y)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Cette fonction  $\bar{u}$  est périodique puisqu'en passant à la limite  $t \rightarrow +\infty$  dans la relation d'onde pulsatoire  $u(t + L/c, x, y) = u(t, x, +L, y)$ , on obtient  $\bar{u}(x + L, y) = \bar{u}(x, y)$  en passant à la limite  $t \rightarrow +\infty$ . De plus,  $\bar{u}$  vérifie l'équation

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + q \cdot \nabla \bar{u} = f(\bar{u}) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu \bar{u} = 0 & \text{sur } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (1.11)$$

Nous allons montrer que  $\bar{u} = 1$ . La première étape est de prouver que

$$f(\bar{u}) = 0.$$

Pour cela, on intègre l'équation (1.11) sur  $C = [0, L] \times \omega$  et on montre que

$$\int_C f(\bar{u}) dx dy = \int_C (-\Delta \bar{u} + q \cdot \nabla \bar{u}) dx dy = 0.$$

En effet, on a d'une part, par périodicité de  $\bar{v}$ .

$$\begin{aligned} \int_{[0, L] \times \omega} \Delta \bar{u} dx dy &= \int_{\partial([0, L] \times \omega)} \partial_\nu \bar{u} dS \\ &= \int_{[0, L] \times \partial\omega} \partial_\nu \bar{u} dS + \int_{\{0, L\} \times \omega} \partial_\nu \bar{u} dS \\ &= \int_\omega (\bar{u}_x(L, y) - \bar{u}_x(0, y)) dy = 0, \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_{[0, L] \times \omega} q \cdot \nabla \bar{u} dx dy = - \int_{[0, L] \times \omega} \bar{u} \operatorname{div} q dx dy + \int_{\partial([0, L] \times \omega)} \bar{u} q \cdot \nu dS,$$

Puisque  $\operatorname{div} q = 0$  dans  $\Sigma$  et  $q \cdot \nu = 0$  sur  $\partial\Sigma$ , il reste

$$\begin{aligned} \int_{[0,L] \times \omega} q \cdot \nabla \bar{u} \, dx dy &= \int_{\{0,L\} \times \omega} \bar{u} q \cdot \nu \, dS \\ &= \int_{\omega} (\bar{u}(L, y) q_1(L, y) - \bar{u}(0, y) q_1(0, y)) \, dy = 0, \end{aligned}$$

par périodicité de  $\bar{u}$  et de  $q$ .

La deuxième étape consiste à montrer que

$$\int_{\Sigma} |\nabla \bar{u}|^2 \, dx dy = 0.$$

Pour cela, on multiplie l'équation (1.11) par  $\bar{u}$  et on intègre sur  $C$ . On obtient

$$\int_C (-\bar{u} \Delta \bar{u} + \bar{u} q \cdot \nabla \bar{u}) \, dx dy = \int_C \bar{u} f(\bar{u}) \, dx dy = 0,$$

puisque  $f(\bar{u}) = 0$ . Développons le membre de gauche. On a d'une part

$$-\int_C \bar{u} \Delta \bar{u} \, dx dy = \int_C |\nabla \bar{u}|^2 \, dx dy - \int_{\partial C} \bar{u} \partial_{\nu} \bar{u} \, dS = \int_C |\nabla \bar{u}|^2,$$

par périodicité de  $\bar{u}$  et le fait que  $\partial_{\nu} \bar{u} = 0$  sur  $\partial\Sigma$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_C \bar{u} q \cdot \nabla \bar{u} \, dx dy &= - \int_C \bar{u} \operatorname{div}(\bar{u} q) \, dx dy + \int_{\partial C} \bar{u}^2 q \cdot \nu \, dS \\ &= - \int_C (q \cdot \nabla \bar{u} + \bar{u} \operatorname{div} q) \, dx dy + \int_{\partial C} \bar{u}^2 q \cdot \nu \, dS = 0. \end{aligned}$$

On déduit que  $\bar{u}(x, y) = \bar{u}$  est constante.

Enfin, la condition de normalisation

$$\max_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \times \omega} w(\tau, \xi, y) = \theta$$

et le fait que  $w_{\tau} + Lw_{\xi} = u_t > 0$  implique que  $\bar{u} > \theta$ , d'où  $\bar{u} = 1$  d'après les propriétés de  $f$ .

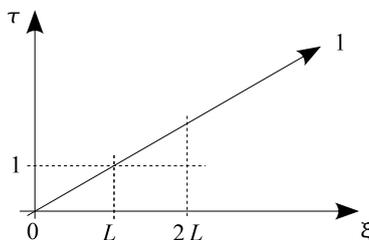


FIG. 1.3 – Limite dans la direction  $(1, L)$  en  $(\tau, \xi)$

Revenons au repère initial. On fixe  $\tau_0 \in [0, 1]$  et  $y_0 \in \omega$  et on montre que  $w(\tau_0, +\infty, y_0) = 1$ . On effectue pour cela le changement de variable  $v = 1 - w$  et on montre que

$v(\tau_0, +\infty, y_0) = 0$ . la fonction  $v$  vérifie  $0 < v < 1$  et par périodicité de  $w$  par rapport à  $\tau$ , on a

$$\begin{aligned} v(\tau_0, L(\tau_0 + n), y_0) &= 1 - w(\tau_0, L(\tau_0 + n), y_0) \\ &= 1 - w(\tau_0 + n, L(\tau_0 + n), y_0) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe alors  $n$  assez grand tel que

$$0 \leq v(\tau_0, L(\tau_0 + n), y_0) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leq v(\tau_0, L(\tau_0 + n + 1), y_0) \leq \varepsilon.$$

L'inégalité de Harnack implique qu'il existe  $C_L$  ne dépendant que de  $L$  tel que pour  $\xi \in D_n = [L(\tau_0 + n), L(\tau_0 + n + 1)]$ ,

$$v(\tau_0, \xi, y_0) \leq \sup_{[\tau_0-1, \tau_0+1] \times D_0 \times \omega} v(\tau, \xi, y) \leq C_L \inf_{[\tau_0, \tau_0+1] \times D_0 \times \omega} v(\tau, \xi, y) \leq C_L \varepsilon,$$

ce qui conclut la démonstration. □

## 1.6 Continuation locale de solutions

On s'intéresse maintenant à la continuation locale, c'est à dire les étapes 1 et 3 de notre preuve. Il s'agit de montrer le résultat suivant :

**Théorème 1.6.1.** *Soit  $s_0 \in [0, 1[$  tel que le problème  $(Pbm)_{s_0}$  admette une solution  $(c^{(s_0)}, w^{(s_0)})$ . Alors il existe  $\delta$  tel que le problème  $(Pbm)_s$  possède une solution  $(c^{(s)}, w^{(s)})$  pour tout  $s \in [s_0, s_0 + \delta[$ .*

Rappelons tout d'abord le problème  $(Pbm)_s$  :

$$(Pbm)_s \quad \begin{cases} \frac{c}{L} w_\tau - \Delta w + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w + cw_\xi = f(w) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu w = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ w(\tau, -\infty, y) = 0, \quad w(\tau, +\infty, y) = 1, \\ w(\tau + 1, \xi, y) = w(\tau, \xi, y). \end{cases}$$

En partant d'une solution  $(c^0, w^0) := (c^{(s_0)}, w^{(s_0)})$  de  $(Pbm)_{s_0}$ , on cherche à construire une solution  $(c, w) = (c^{(s)}, w^{(s)})$  de  $(Pbm)_s$  pour tout  $s$  proche de  $s^0$ . En posant

$$d := c - c^0, \quad z := w - w^0,$$

on est ramené à chercher une solution  $(d, z) = (d^{(s)}, z^{(s)})$  du problème

$$\widetilde{(Pbm)}_s \quad \begin{cases} \frac{c^0}{L} z_\tau - \Delta z + s^0 q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z + c^0 z_\xi - f'(w^0)z + d\left(\frac{1}{L}w_\tau^0 + w_\xi^0\right) \\ = (s_0 - s)q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla(w_0 + z) + g(w^0, z, d) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = z(\tau, +\infty, y) = 0, \\ z(\tau + 1, \xi, y) = z(\tau, \xi, y), \end{cases}$$

où

$$g(w^0, z, d) := -d\left(\frac{1}{L}z_\tau + z_\xi\right) + f(w^0 + z) - f(w^0) - f'(w^0)z.$$

Nous allons utiliser le théorème des fonctions implicites pour montrer l'existence d'une solution pour tout  $s$  proche de  $s^0$ .

### 1.6.1 Description formelle de la méthode

Notre méthode pour déterminer la solution  $(d, z)$  consiste à étudier le problème de Cauchy

$$(PB)_s \begin{cases} \frac{c^0}{L} z_\tau - \Delta z + s^0 q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z + c^0 z_\xi - f'(w^0)z + d\left(\frac{1}{L}w_\tau^0 + w_\xi^0\right) \\ = (s_0 - s)q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla(w_0 + z) + g(w^0, z, d) \quad \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = z(\tau, +\infty, y) = 0, \\ z(0, \xi, y) = z_0(\xi, y), \end{cases} \quad (1.12)$$

et à déterminer la donnée initiale  $z_0$  telle que la solution du problème soit 1-périodique.

On considère pour cela l'application

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times Y_1 \rightarrow Y_2, \quad (s, d, z_0) \mapsto z(1) - z_0,$$

où  $z$  est la solution du problème de Cauchy  $(PB)_s$ . Les espaces fonctionnels  $Y_1, Y_2$  sont deux espaces de Banach qui seront précisés par la suite. Puisqu'on part d'une solution  $w^0$  1-périodique, on a  $F(s^0, 0, 0) = 0$ . Notre problème se ramène à chercher  $(d, z_0)$  proches de  $(0, 0)$  tels que  $F(s, d, z_0) = 0$ . Notons que puisque les coefficients de  $(PB)_s$  sont 1-périodiques, on obtient bien une solution 1-périodique.

Pour obtenir un tel couple  $(d, z_0)$ , on va appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction  $F$ . Le point important est de montrer que  $D_{d, z_0} F(s^0, 0, 0)$  est un isomorphisme si on choisit bien les espaces  $Y_1$  et  $Y_2$ . Dans cette section d'introduction, nous nous proposons juste de calculer formellement  $D_{d, z_0} F(s^0, 0, 0) \cdot (d, z_0)$ . Dans la suite, on note

$$\psi^0 = \frac{1}{L} w_\tau^0 + w_\xi^0, \quad (1.13)$$

ainsi que l'opérateur parabolique

$$Pz := z_\tau - \frac{L}{c^0} \Delta z + \frac{Ls^0}{c^0} q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z + Lz_\xi - \frac{L}{c^0} f'(w^0)z. \quad (1.14)$$

Pour calculer la différentielle, on utilise la solution  $z$  du problème de Cauchy  $(PB)_{s^0}$ . Avec les notations précédentes,  $(PB)_{s^0}$  s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{c^0}{L} Pz + d\psi^0 = g(w^0, d, z) \quad \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = 0 = z(\tau, +\infty, y), \\ z(0, \xi, y) = z_0(\xi, y). \end{cases} \quad (1.15)$$

On introduit ensuite l'opérateur d'évolution  $T(\tau, s)$  associé à l'opérateur parabolique  $P$ . Il est défini de la façon suivante : à la fonction  $G(\xi, y)$ , il associe la solution  $z(\tau, \xi, y) := T(\tau, s)G(\xi, y)$  du problème

$$\begin{cases} Pz = 0 \quad \text{dans } (s, +\infty) \times \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = 0 = z(\tau, +\infty, y), \\ z(s, \xi, y) = G(\xi, y). \end{cases} \quad (1.16)$$

La formule de Duhamel dit alors que la solution  $z$  de (1.15) vérifie :

$$z(1) = T(1, 0)z_0 + \int_0^1 T(1, s) \left( \frac{L}{c^0} g(w^0(s), d, z(s)) - d \frac{L}{c^0} \psi^0(s) \right) ds. \quad (1.17)$$

Nous verrons que  $\psi^0$  est 1-périodique en temps et vérifie

$$\begin{cases} P\psi^0 = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu \psi^0 = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ \psi^0(\tau, -\infty, y) = 0 = \psi^0(\tau, +\infty, y), \end{cases} \quad (1.18)$$

d'où on déduit

$$T(1, s) \left( d \frac{L}{c^0} \psi^0(s) \right) = d \frac{L}{c^0} \psi^0(1) = d \frac{L}{c^0} \psi^0(0).$$

En notant  $\psi_0^0 = \psi^0(0)$ , on a par conséquent,

$$\begin{aligned} F(s^0, d, z_0) - F(s^0, 0, 0) &= F(s^0, d, z_0) = z(1) - z_0, \\ &= (T(1, 0) - I)z_0 - d \frac{L}{c^0} \psi_0^0 + \int_0^1 T(1, s) \left( \frac{L}{c^0} g(w^0, d, z) \right) ds. \end{aligned}$$

Comme  $g(w^0, d, z)$  est quadratique en  $(d, z_0)$ , on aura ainsi

$$D_{d, z_0} F(s^0, 0, 0) \cdot (d, z_0) = (T(1, 0) - I)z_0 - d \frac{L}{c^0} \psi_0^0. \quad (1.19)$$

La différentielle  $D_{d, z_0} F(s^0, 0, 0)$  est alors un isomorphisme de  $\mathbb{R} \times Y_1$  sur  $Y_2$  si on a existence et l'unicité de la solution  $(d, z_0)$  de l'équation :

$$(I - T(1, 0))z_0 + d \frac{L}{c^0} \psi_0^0 = h \in Y_2. \quad (1.20)$$

Pour étudier cette équation, on est ainsi amené à étudier les propriétés de l'opérateur  $I - T(1, 0)$ . On montrera que  $I - T(1, 0)$  est un opérateur de Fredholm, en décomposant l'opérateur  $T(1, 0)$  en  $T + K$  un opérateur contractant plus un opérateur compact, et que 0 est une valeur propre simple algébrique et géométrique de  $T(1, 0)$  associée à la fonction propre  $\psi_0^0$  :

$$N(I - T(1, 0)) = N(I - T(1, 0))^2 = \mathbb{R}\psi_0^0.$$

Le plan de cette section est alors le suivant. Nous commençons par nous placer dans un espace à poids (ce sera l'espace  $Y_2$ ) qui permet de travailler avec un nouvel opérateur parabolique  $Q$  qui possède de meilleures propriétés que  $P$  vis à vis de l'utilisation du principe du maximum, un outil utilisé dans toute la section. Après avoir étudié les propriétés de  $\psi_0$ , nous établirons que le problème de Cauchy  $(PB)_s$  est bien posé dans l'espace à poids. La suite de la section détaille les étapes énoncées ci dessus, c'est à dire le calcul de la différentielle puis l'étude des propriétés de  $I - T(1, 0)$ . Nous concluons alors en montrant que (1.20) possède une unique solution ; ceci est rendu possible par un choix judicieux de  $Y_1$  comme hyperplan de  $Y_2$ . Une dernière sous-section synthétise enfin la démarche utilisée.

### 1.6.2 Détermination du poids

Le coefficient d'ordre 0 de l'opérateur parabolique  $P$  de notre problème, défini par (1.14), est  $-L/c^0 f'(w^0)$ . Ce coefficient tend vers  $-L/c^0 f'(1)$  qui est strictement positif quand  $\xi \rightarrow +\infty$  mais vers 0 quand  $\xi \rightarrow -\infty$ . Ces propriétés ne sont pas satisfaisantes pour étudier notre problème. On souhaiterait travailler avec un opérateur dont le coefficient d'ordre zéro ait des limites strictement positives quand  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , ce qui permettrait via le principe du maximum la construction de sur-solutions très utile pour la suite. Pour remédier à ceci, on va travailler dans un espace à poids. On cherche pour cela une fonction poids  $p(\tau, \xi, y)$  telle que si on pose

$$Pz = P(pz^{(p)}) = pQ(z^{(p)}),$$

alors l'opérateur parabolique  $Q$  possède les propriétés souhaitées.

En remplaçant  $z$  par  $pz^{(p)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} Pz &= \left( p_\tau - \frac{L}{c^0} \Delta p + \frac{Ls^0}{c^0} q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla p + Lp_\xi \right) z^{(p)} \\ &\quad + \left( z_\tau^{(p)} - \frac{L}{c^0} \Delta z^{(p)} + \left( \frac{Ls^0}{c^0} q(\xi - L\tau, y) - 2 \frac{\nabla p}{p} \right) \cdot \nabla z^{(p)} + Lz_\xi^{(p)} - \frac{L}{c^0} f'(w^0) z^{(p)} \right) p. \end{aligned}$$

La difficulté est alors de trouver  $\delta^0 > 0$  et  $\tilde{p}$  strictement positive et 1-périodique en  $\tau$  tels que :

$$\tilde{P}\tilde{p} := \tilde{p}_\tau - \frac{L}{c^0} \Delta \tilde{p} + \frac{Ls^0}{c^0} q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla \tilde{p} + L\tilde{p}_\xi = \delta^0 \tilde{p}.$$

**Lemme 1.6.2.** *Il existe  $\delta^0 > 0$  et  $\tilde{p}$  strictement positive telle que*

$$\tilde{P}\tilde{p} = \tilde{p}_\tau - \frac{L}{c^0} \Delta \tilde{p} + \frac{Ls^0}{c^0} q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla \tilde{p} + L\tilde{p}_\xi = \delta^0 \tilde{p}. \quad (1.21)$$

De plus,  $\tilde{p}$  est de la forme suivante :

$$\tilde{p}(\tau, \xi, y) = e^{\lambda\xi} \phi^0(\xi - L\tau, y), \quad (1.22)$$

avec  $\lambda > 0$ , et  $\phi^0$  strictement positive et  $L$ -périodique en sa première variable.

*Démonstration.* On cherche le poids  $\tilde{p}$  de la forme (1.22). Le triplet  $(\delta^0, \lambda, \phi^0(x, y))$  doit alors vérifier l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta \phi^0 + s^0 q(x, y) \cdot \nabla \phi^0 - 2\lambda \phi_x^0 + \lambda(s^0 q_1(x, y) + c^0) \phi^0 - \lambda^2 \phi^0 = \frac{\delta^0 c^0}{L} \phi^0, \\ \partial_\nu \phi^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \\ \phi^0(x + L, y) = \phi^0(x, y). \end{cases} \quad (1.23)$$

L'existence d'une telle solution est une conséquence de la proposition 1.3.2.  $\square$

La limite en  $+\infty$  du coefficient d'ordre 0 étant déjà strictement positive, on a juste besoin d'un poids exponentiel en  $-\infty$ . On tronque pour cela la fonction  $\tilde{p}$  à la valeur 1 pour  $\xi \geq 1$ . Pour cela, on considère une fonction positive  $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  valant 1 pour  $\xi \leq 0$ , 0 pour  $\xi \geq 1$  et décroissante entre 0 et 1, et on pose

$$p = \chi \tilde{p} + (1 - \chi).$$

On a alors  $Pz = pQ(z^{(p)})$  avec

$$Q(z^{(p)}) = z_\tau^{(p)} - \frac{L}{c^0} \Delta z^{(p)} + \left( \frac{Ls^0}{c^0} q - 2 \frac{\nabla p}{p} \right) \cdot \nabla z^{(p)} + Lz_\xi^{(p)} + \left( \frac{\tilde{P}p}{p} - \frac{L}{c^0} f'(w^0) \right) z^{(p)}, \quad (1.24)$$

où  $\tilde{P}p(\tau, \xi, y)$  vaut  $\delta p$  si  $\xi \leq 0$  et 0 si  $\xi \geq 1$ . Ainsi, l'opérateur parabolique  $Q$  a les propriétés voulues :

$$\begin{cases} \frac{\tilde{P}p}{p} - \frac{L}{c^0} f'(w^0) \rightarrow \delta^0 > 0 & \text{quand } \xi \rightarrow -\infty, \\ \frac{\tilde{P}p}{p} - \frac{L}{c^0} f'(w^0) \rightarrow -\frac{L}{c^0} f'(1) > 0 & \text{quand } \xi \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

La fonction  $\phi^0$  étant  $L$ -périodique en  $x$ , on peut la choisir telle que

$$\inf_{\bar{\Sigma}} \phi^0 = 1.$$

On considère alors la fonction poids régulière

$$p_0(\xi, y) = p(0, \xi, y) = \begin{cases} e^{\lambda \xi} \phi^0(\xi, y) & \text{pour } \xi \leq 0, \\ 1 & \text{pour } \xi \geq 1, \end{cases}$$

et les espaces qui seront fondamentaux dans la suite :

$$X := UC^0(\bar{\Sigma}) = \{z \in C^0(\mathbb{R} \times \bar{\omega}, \mathbb{R}), z(\xi, y) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0, \text{ uniformément en } y \in \bar{\omega}\},$$

muni de la norme

$$\|z\|_\infty = \sup_{(\xi, y) \in \Sigma} |z(\xi, y)|,$$

et l'espace à poids

$$X_\lambda := UC_\lambda^0(\bar{\Sigma}) = \{z \in C^0(\mathbb{R} \times \bar{\omega}, \mathbb{R}), \frac{z}{p_0} \in UC^0(\bar{\Sigma})\},$$

muni de la norme

$$\|z\|_\lambda := \left\| \frac{z}{p_0} \right\|_\infty.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach.

Cet espace à poids est l'espace d'arrivée de la fonction  $F$ ; on définit ainsi

$$Y_2 := X_\lambda.$$

L'espace  $Y_1$  sera un hyperplan de  $Y_2$  que l'on déterminera à la fin de la section.

### 1.6.3 Les propriétés de $w^0$

Rappelons que la fonction  $w^0$  est solution du problème  $(Pbm)_{s^0}$ . Il est essentiel pour la suite de montrer que  $w^0$  vérifie l'estimation suivante

**Lemme 1.6.3.** *Il existe  $\beta > 0$  tel que pour  $M$  assez grand,*

$$\forall \tau, \forall \xi \leq -M, \forall y, \quad |w^0(\tau, \xi, y)| \leq \|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{\beta\xi} p(\tau, \xi, y). \quad (1.25)$$

Ainsi,  $\psi^0 = \frac{1}{L}w_\tau^0 + w_\xi^0$  et  $\nabla w^0$  sont dans  $X_\lambda$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Soit  $\beta > 0$  assez petit tel que

$$\delta^0 - \frac{L}{c^0}\beta^2 + \beta \frac{Ls^0}{c^0}q_1 + L\beta - \frac{L}{c^0}\left(\lambda + \frac{\phi_x^0}{\phi^0}\right)\beta \geq 0.$$

(Un tel choix est possible puisque  $\delta^0 > 0$ ). On considère la fonction

$$\bar{p}(\tau, \xi, y) := (\|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{\beta\xi} + m_0 e^{-\delta^0\tau})p(\tau, \xi, y) + \varepsilon.$$

On se place sur le demi-cylindre  $(-\infty, -M) \times \omega$  de sorte que  $w^0 \leq \theta$  et ainsi

$$w_\tau^0 - \frac{L}{c^0}\Delta w^0 + \frac{Ls^0}{c^0}q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w^0 + Lw_\xi^0 = 0.$$

On va alors montrer que sur  $(-\infty, -M) \times \omega$

$$\bar{p} - \psi^0 \geq 0$$

à l'aide du principe du maximum faible parabolique. Tout d'abord,

$$(\bar{p} - w^0)(\tau, -M, y) \geq \|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{-\beta M} e^{-\lambda M} - w^0(\tau, -M, y) \geq 0.$$

Ensuite, compte-tenu du fait que  $w_0^0 \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow -\infty$ , on a

$$(\bar{p} - w^0)(0, \xi, y) \geq m_0 e^{\lambda\xi} + \varepsilon - w^0(0, \xi, y) \geq 0,$$

si on choisit  $m_0$  assez grand. Enfin,

$$\begin{aligned} P(\bar{p} - w^0) &= P(\bar{p}) \\ &= -m_0 \delta^0 e^{-\delta^0\tau} p - \|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{\beta\xi} \left( \frac{L}{c^0}\beta^2 + \beta \frac{Ls^0}{c^0}q_1(\xi - L\tau, y) + L\beta \right) p \\ &\quad + (\|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{\beta\xi} + m_0 e^{-\delta^0\tau}) \delta^0 p - \frac{L}{c^0} \|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{\beta\xi} \beta p_\xi \\ &= \left( \delta^0 - \frac{L}{c^0}\beta^2 + \beta \frac{Ls^0}{c^0}q_1 + L\beta - \frac{L}{c^0}\left(\lambda + \frac{\phi_x^0}{\phi^0}\right)\beta \right) \|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{\beta\xi} p \geq 0. \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le principe du maximum faible parabolique sur le demi-cylindre  $(-\infty, -M) \times \omega$ . Puisque

$$\begin{cases} P(\bar{p} - w^0) \geq 0, \\ (\bar{p} - w^0)(\tau, -M, y) \geq 0, \\ (\bar{p} - w^0)(0, \xi, y) \geq 0, \\ \bar{p} - w^0 \text{ bornée,} \end{cases}$$

la fonction  $\bar{p} - w^0$  est positive sur  $(-\infty, -M) \times \omega$ . On raisonne de même avec la fonction  $\bar{p} + w^0$ , et on en déduit que  $|w^0| \leq \bar{p}$ . Ensuite, on fixe  $\tau \in (0, 1)$  et on considère l'inégalité

$|w^0(\tau + n, \xi, y)| \leq \bar{p}(\tau + n, \xi, y)$ . En utilisant la périodicité de  $p$  et  $\psi^0$ , on voit en faisant  $n \rightarrow \infty$  que

$$|w^0(\tau, \xi, y)| \leq \|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{\beta\xi} p(\tau, \xi, y) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient finalement

$$|w^0(\tau, \xi, y)| \leq \|w^0(\cdot, -M, \cdot)\|_\infty e^{(\beta+\lambda)M} e^{\beta\xi} p(\tau, \xi, y),$$

le résultat attendu.

On obtient ainsi les mêmes estimations exponentielles sur les dérivées de  $w^0$  grâce aux estimations paraboliques. De plus, puisque  $w^0(\tau, +\infty, y) = 1$ , ses dérivées ont une limite nulle quand  $\xi \rightarrow +\infty$  par les estimations paraboliques. On en déduit que  $\psi_0^0 = \frac{1}{L}w_\tau^0 + w_\xi^0$  et  $\nabla w^0$  sont dans  $X_\lambda$ .  $\square$

#### 1.6.4 Etude du problème de Cauchy $(PB)_s$ .

Nous montrons dans cette section que l'application  $F$  est bien définie dans l'espace  $X_\lambda$ . Nous étudions pour cela le problème de Cauchy (1.12) et prouvons qu'il est bien posé dans l'espace  $X_\lambda$ .

**Lemme 1.6.4.** *Soit  $(s, d, z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X_\lambda$ . Alors le problème de Cauchy (1.12) admet une unique solution  $z(\tau, \xi, y)$  qui est globale en  $\tau$  et qui vérifie  $z(\tau) \in X_\lambda$  pour tout  $\tau \geq 0$ . En particulier, l'application*

$$F : (s, d, z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X_\lambda \mapsto z(1) - z_0 \in X_\lambda, \quad (1.26)$$

où  $z$  est la solution de (1.12), est bien définie, puisque  $z(1) \in X_\lambda$ .

*Démonstration.* Nous allons étudier le problème (1.12) en l'écrivant sous la forme équivalente suivante

$$\begin{cases} \frac{c}{L}z_\tau - \Delta z + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z + cz_\xi \\ = f(w^0 + z) - f(w^0) - (c - c^0)\psi^0 - (s - s^0)q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w^0, \\ \partial_\nu z = 0 \quad \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = 0 = z(\tau, +\infty, y), \\ z(0, \xi, y) = z_0(\xi, y). \end{cases} \quad (1.27)$$

Commençons par travailler dans l'espace  $X$ . L'opérateur  $-\Delta$  muni du domaine

$$D(-\Delta) = \{u \in X; -\Delta u + u \in X, \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Sigma\}$$

est sectoriel sur  $X$  [57]. De plus, si pour  $\alpha > 1/2$  fixé, on note  $X^\alpha = D((-\Delta)^\alpha)$  [45], alors l'application

$$\tau \mapsto B(\tau) : \mathbb{R} \rightarrow L(X^\alpha, X)$$

définie par

$$B(\tau)z := sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z + cz_\xi,$$

est de classe  $C^1$  puisque  $q$  est  $C^1$ . Ainsi, si  $z_0 \in X$ , le problème Cauchy homogène

$$\begin{cases} \frac{c}{L}z_\tau - \Delta z + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z + cz_\xi = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = 0 = z(\tau, +\infty, y), \\ z(0, \xi, y) = z_0(\xi, y) \in X, \end{cases} \quad (1.28)$$

possède une unique solution  $z$  globale en temps et à valeurs dans  $X$  [45]. Quand  $z_0 \in X$ , le problème de Cauchy non linéaire (1.27) admet ainsi une solution locale en temps car le second membre est régulier en temps et à valeurs dans  $X$ ; la solution est en fait globale en temps car le second membre est à croissance au plus linéaire en  $z$  [45]. On peut donc considérer la valeur de  $z$  au temps 1. Il reste à montrer que si  $z_0 \in X_\lambda$  alors  $z(1) \in X_\lambda$ . Pour cela, on va écrire  $z = p^{(s)}z^*$ , avec une nouvelle fonction poids  $p^{(s)}$  strictement positive et adaptée au problème considéré et montrer que  $z^*(1) \in X$ . On a

$$\begin{aligned} & \frac{c}{L}z_\tau - \Delta z + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z + cz_\xi \\ &= \left( \frac{c}{L}p_\tau^{(s)} - \Delta p^{(s)} + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla p^{(s)} + cp_\xi^{(s)} \right) z^* \\ & \quad + \left( \frac{c}{L}z_\tau^* - \Delta z^* + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z^* - 2\frac{\nabla p^{(s)}}{p^{(s)}} + cz_\xi^* \right) p^{(s)}. \end{aligned}$$

De façon similaire à la construction de  $p$ , on pose

$$p^{(s)}(\tau, \xi, y) := \chi(\xi)e^{\lambda\xi}\phi^{(s)}(\xi - L\tau, y) + (1 - \chi(\xi)),$$

avec  $\phi^{(s)}$  strictement positive,  $L$ -périodique en sa première variable, et solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\phi^{(s)} + sq(x, y) \cdot \nabla\phi^{(s)} - 2\lambda\phi_x^{(s)} + (c\lambda + s\lambda q_1(x, y) - \lambda^2)\phi^{(s)} = \delta^{(s)}\phi^{(s)}, \\ \partial_\nu\phi^{(s)} = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ \phi^{(s)}(x + L, y) = \phi^{(s)}(x, y). \end{cases} \quad (1.29)$$

Ce problème admet une solution  $(\delta^{(s)}, \phi^{(s)})$  avec  $\phi^{(s)}$  strictement positive d'après la proposition 1.3.2. Le problème en  $z^*$  devient alors

$$\begin{cases} \frac{c}{L}z_\tau^* - \Delta z^* + sq(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla z^* - 2\frac{\nabla p^{(s)}}{p^{(s)}} + cz_\xi^* + \delta^{(s)}z^* \\ = \frac{1}{p^{(s)}} \left( f(w^0 + z) - f(w^0) - (c - c^0)\psi^0 - (s - s^0)q(\xi - L\tau, y) \cdot \nabla w^0 \right), \\ \partial_\nu z^* = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ z^*(0, \xi, y) = \frac{z_0(\xi, y)}{p^{(s)}(0, \xi, y)} \in X. \end{cases} \quad (1.30)$$

On note que

$$\frac{f(w^0 + z) - f(w^0)}{p^{(s)}} = \frac{f(w^0 + p^{(s)}z^*) - f(w^0)}{p^{(s)}} = \left( \int_0^1 f'(w^0 + \sigma p^{(s)}z^*) d\sigma \right) z^*.$$

De plus, on sait d'après le lemme 1.6.3 que

$$\frac{\psi^0}{p^{(s)}}, \frac{\nabla w^0}{p^{(s)}} \in X.$$

On peut alors résoudre le problème en  $z^*$  localement puis globalement pour obtenir une solution  $z^*$  telle que  $z^*(\tau) \in X$  pour tout  $\tau \geq 0$ . On en déduit que si  $z_0 \in X_\lambda$ , alors la solution de (1.27) vérifie  $z(\tau) \in X_\lambda$  pour tout  $\tau \geq 0$ .  $\square$

### 1.6.5 La différentiabilité de l'application $F$

**Lemme 1.6.5.** *L'application  $F$  définie par (1.26) est de classe  $C^1$  sur un voisinage de  $(s^0, 0, 0)$  et  $D_{d,z_0}F(s^0, 0, 0)$  est définie par*

$$D_{d,z_0}F(s^0, 0, 0) \cdot (d, z_0) = (T(1, 0) - I)z_0 - d \frac{L}{c^0} \psi^0(0). \quad (1.31)$$

*Démonstration.* Pour voir que l'application  $F$  est de classe  $C^1$  sur un voisinage de  $(s^0, 0, 0)$ , on montre que ses différentielles partielles par rapport à  $s$ ,  $d$  et  $z_0$  sont continues.

Ici on va calculer explicitement les différentielles partielles en  $(s^0, 0, 0)$  par rapport à  $d$  et  $z_0$  et montrer que

$$F'_d(s^0, 0, 0) = -\frac{L}{c^0} \psi^0(0) \quad \text{et} \quad D_{z_0}F(s^0, 0, 0) \cdot z_0 = (T(1, 0) - I)z_0.$$

– *Différentiabilité par rapport à  $z_0$ .* Rappelons que

$$F(s^0, 0, z_0) = (T(1, 0) - I)z_0 + \frac{L}{c^0} \int_0^1 T(1, s)g(z)ds,$$

avec

$$g(z) = f(w^0 + z) - f(w^0) - f'(w^0)z.$$

On doit donc montrer que

$$\left\| \int_0^1 T(1, s)(f(w^0 + z) - f(w^0) - f'(w^0)z)ds \right\|_\lambda = o(\|z_0\|_\lambda).$$

Notons que  $\|z_0\|_\lambda = \left\| \frac{z_0}{p_0} \right\|_\infty$ . Posons alors comme précédemment  $z = pz^{(p)}$ , avec  $z^{(p)}$  solution de

$$\begin{cases} Qz^{(p)} = 0, \\ z^{(p)}(0) = z_0^{(p)}. \end{cases}$$

On considère ensuite  $Z_s(1) = T(1, s)g(pz^{(p)})$  la valeur au temps 1 de la solution du problème

$$\begin{cases} PZ = 0, \\ Z(s) = g(p(s)z^{(p)}(s)). \end{cases}$$

Puisqu'on doit estimer  $\frac{Z_s(1)}{p_0} = \frac{Z_s(1)}{p(1)}$ , posons  $Z_s = pZ_s^{(p)}$ ,  $Z_s^{(p)}$  étant solution de

$$\begin{cases} QZ_s^{(p)} = 0, \\ Z_s^{(p)}(s) = \frac{g(p(s)z^{(p)}(s))}{p(s)} = \frac{f(w^0 + pz^{(p)}) - f(w^0) - f'(w^0)pz^{(p)}}{p}(s). \end{cases}$$

On est donc amené à estimer

$$\left\| \int_0^1 T(1, s)g(z)ds \right\|_\lambda = \left\| \frac{1}{p_0} \int_0^1 Z_s(1)ds \right\|_\infty = \left\| \int_0^1 \frac{Z_s(1)}{p(1)}ds \right\|_\infty = \left\| \int_0^1 Z_s^{(p)}(1)ds \right\|_\infty$$

par rapport à

$$\|z_0\|_\lambda = \|z_0^{(p)}\|_\infty.$$

On a l'estimation suivante sur  $Z_s^{(p)}(1)$  :

$$\|Z_s^{(p)}(1)\|_\infty \leq C \left\| \frac{f(w^0 + pz^{(p)}) - f(w^0) - f'(w^0)pz^{(p)}}{p(s)}(s) \right\|_\infty.$$

De plus, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left| \frac{f(w^0 + pz^{(p)}) - f(w^0) - f'(w^0)pz^{(p)}}{p(s)}(s) \right| \leq M|z^{(p)}(s)|^2,$$

avec  $M = \max_{[0,1]} |f''|$ . On utilise enfin que

$$\|z^{(p)}(s)\|_\infty \leq C\|z^{(p)}(0)\|_\infty.$$

On a donc finalement

$$\left\| \int_0^1 Z_s^{(p)}(1)ds \right\|_\infty \leq C\|z^{(p)}(0)\|_\infty^2,$$

et donc

$$D_{z_0}F(s^0, 0, 0) \cdot z_0 = (T(1, 0) - I)z_0.$$

– *Dérivabilité par rapport à  $d$* . On fixe ici  $z_0 = 0$ . On réécrit différemment l'équation vérifiée par  $z = z^{(d)}$  de la façon suivante

$$z_\tau - \frac{L}{c}\Delta z + \frac{s_0 L}{c}q \cdot \nabla z + Lz_\xi - \frac{L}{c}f'(w_0)z = \frac{L}{c}(g(z) - d\psi^0),$$

avec  $c = c_0 + d$ . En utilisant les opérateurs

$$Az := -\frac{L}{c_0}\Delta z \quad \text{et} \quad B_d(\tau)z := \frac{s_0 L}{c_0 + d}q \cdot \nabla z + Lz_\xi - \frac{L}{c_0 + d}f'(w_0)z,$$

cette équation s'écrit

$$z_\tau + \left(1 - \frac{d}{c_0 + d}\right)Az + B_d(t)z = \frac{L}{c_0 + d}(g(z) - d\psi^0).$$

En écrivant finalement l'équation par rapport à l'opérateur parabolique  $P$ , on obtient

$$Pz := z_\tau + (A + B_0(t))z = \frac{d}{c_0 + d}Az + (B_0(t) - B_d(t))z + \frac{L}{c_0 + d}(g(z) - d\psi^0).$$

Puisque l'opérateur d'évolution associé à  $P$  est  $T(t, s)$ , la formule de Duhamel donne

$$z(1) = \int_0^1 T(1, s) \left( \frac{d}{c_0 + d}Az(s) + (B_0(s) - B_d(s))z(s) + \frac{L}{c_0 + d}g(z(s)) - \frac{dL}{c_0 + d}\psi^0(s) \right) ds.$$

Pour  $d = 0$ , la solution est  $z^{(0)} = 0$ , on calcule donc

$$F'_d(s^0, 0, 0) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{z^{(d)}(1)}{d},$$

avec

$$\frac{z^{(d)}(1)}{d} = \int_0^1 T(1, s) \left( \frac{Az^{(d)}}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)} + \frac{Lg(z^{(d)})}{d(c_0 + d)} - \frac{L\psi^0}{c_0 + d} \right) ds.$$

Par périodicité de  $\psi^0$ , on a

$$T(1, s)\psi^0(s) = \psi^0(1) = \psi^0(0).$$

Ainsi,

$$\frac{z^{(d)}(1)}{d} = -\frac{L}{c_0 + d}\psi^0(0) + \int_0^1 T(1, s) \left( \frac{Az^{(d)}}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)} + \frac{Lg(z^{(d)})}{d(c_0 + d)} \right) ds.$$

On est ainsi ramené à prouver que

$$\left\| \int_0^1 T(1, s) \left( \frac{Az^{(d)}}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)} + \frac{Lg(z^{(d)})}{d(c_0 + d)} \right) ds \right\|_{\lambda} \xrightarrow{d \rightarrow 0} 0,$$

soit

$$\left\| \frac{1}{p(0)} \int_0^1 T(1, s) \left( \frac{Az^{(d)}}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)} + \frac{Lg(z^{(d)})}{d(c_0 + d)} \right) ds \right\|_{\infty} \xrightarrow{d \rightarrow 0} 0.$$

Pour cela, on commence d'abord par noter que puisque  $z^{(d)}$  est solution de l'équation

$$z_{\tau} - \frac{L}{c}\Delta z + \frac{s_0 L}{c}q \cdot \nabla z + Lz_{\xi} - \frac{L}{c}f'(w_0)z + \frac{L}{c}\frac{g(z)}{z}z = -\frac{Ld}{c}\psi^0,$$

avec  $z_0^{(d)} = 0$ , les estimations paraboliques donnent l'existence de  $C > 0$  indépendant de  $d$  tel que

$$\|z^{(d)}\|_{C^{1,2}([0,1] \times \mathbb{R})} \leq Cd.$$

Ceci nous dit en particulier que  $z^{(d)} \rightarrow 0$  dans  $C^{1,2}([0,1] \times \mathbb{R})$  quand  $d \rightarrow 0$ . Pour  $\xi \leq 0$ , montrons que nous avons l'estimation suivante

$$|z^{(d)}(\tau, \xi, y)| \leq C' dp(\tau, \xi, y) = C' de^{\lambda\xi} \phi^0(\xi - L\tau, y).$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned} & P\left(C' de^{\lambda\xi} \phi^0(\xi - L\tau, y) - z^{(d)}(\tau, \xi, y)\right) \\ &= C' de^{\lambda\xi} \phi^0(\xi - L\tau, y) - \frac{d}{c_0 + d} Az^{(d)} - (B_0(t) - B_d(t))z^{(d)} - \frac{L}{c_0 + d}(g(z^{(d)}) - d\psi^0) \\ &= d\left(C' e^{\lambda\xi} \phi^0(\xi - L\tau, y) + \frac{L}{c_0 + d}\psi^0\right) - \frac{d}{c_0 + d} Az^{(d)} - (B_0(t) - B_d(t))z^{(d)} - \frac{L}{c_0 + d}g(z^{(d)}). \end{aligned}$$

On peut choisir  $C$  et  $d$  assez petit tel que l'expression précédente soit positive. On choisit d'abord  $C$  de sorte que le premier terme soit positif, ce qui est possible car d'après les propriétés de  $\psi^0$ , il existe  $C$  tel que

$$\left| \frac{L}{c_0 + d} \psi^0 \right| \leq C e^{\lambda \xi} \phi^0(\xi - L\tau, y).$$

On note ensuite que les autres termes sont quadratiques en  $d$ . On a en effet tout d'abord

$$\left\| d \frac{1}{c_0 + d} A z^{(d)} \right\|_{\infty} \leq C d \frac{1}{c_0 + d} \|z^{(d)}\|_{\infty} \leq C' d^2.$$

Ensuite, puisque

$$(B_0(t) - B_d(t))z^{(d)} = d \left( \frac{s_0 L}{c_0(c_0 + d)} q \cdot \nabla z^{(d)} - \frac{L}{c_0(c_0 + d)} f'(w_0) z^{(d)} \right),$$

on a

$$\left\| (B_0(t) - B_d(t))z^{(d)} \right\|_{\infty} \leq C d \|z^{(d)}\|_{\infty} \leq C' d^2.$$

Enfin,  $g(z) = O(z^2)$  pour  $z$  proche de 0 donc pour  $d$  petit

$$|g(z^{(d)})| \leq C z^{(d)2} \leq C' d^2.$$

Finalement, si  $d$  est assez petit, on a

$$P \left( C' d e^{\lambda \xi} \phi^0(\xi - L\tau, y) - z^{(d)}(\tau, \xi, y) \right) \geq 0.$$

Quitte à prendre  $C'$  plus grand, on a de plus les conditions suivantes

$$C' d \phi^0(-L\tau, y) - z^{(d)}(\tau, 0, y) \geq 0,$$

et

$$C' d e^{\lambda \xi} \phi^0(\xi, y) - z^{(d)}(0, \xi, y) = C' d e^{\lambda \xi} \phi^0(\xi, y) \geq 0.$$

Le principe du maximum donne alors l'estimation pour  $\xi \leq 0$

$$|z^{(d)}(\tau, \xi, y)| \leq C' d e^{\lambda \xi} \phi^0(\xi - L\tau, y).$$

D'après les estimations paraboliques, les dérivées de  $z^{(d)}$  ont la même décroissance exponentielle, ainsi il existe  $C > 0$  tel que

$$\left| \frac{A z^{(d)}}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)} + \frac{L g(z^{(d)})}{d(c_0 + d)} \right| \leq C d p(\tau, \xi, y).$$

On considère alors

$$Z_s(1) = T(1, s) \left( \frac{A z^{(d)}(s)}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)}(s) + \frac{L g(z^{(d)}(s))}{d(c_0 + d)} \right),$$

qui est la valeur au temps 1 de la solution du problème

$$\begin{cases} PZ = 0, \\ Z(s) = \frac{A z^{(d)}(s)}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)}(s) + \frac{L g(z^{(d)}(s))}{d(c_0 + d)}. \end{cases}$$

Puisqu'on doit estimer  $\frac{Z_s(1)}{p_0} = \frac{Z_s(1)}{p(1)}$ , posons  $Z_s = pZ_s^{(p)}$ ,  $Z_s^{(p)}$  étant solution de

$$\begin{cases} QZ_s^{(p)} = 0, \\ Z_s^{(p)}(s) = \frac{1}{p(s)} \left( \frac{Az^{(d)}(s)}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)}(s) + \frac{Lg(z^{(d)}(s))}{d(c_0 + d)} \right) \end{cases}$$

Les estimations paraboliques donnent ainsi l'existence de  $C > 0$  tel que

$$\|Z_s^{(p)}(1)\|_\infty \leq C \left\| \frac{1}{p(s)} \left( \frac{Az^{(d)}(s)}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)}(s) + \frac{Lg(z^{(d)}(s))}{d(c_0 + d)} \right) \right\|_\infty \leq C'd.$$

On en déduit que

$$\left\| \frac{1}{p(0)} \int_0^1 T(1, s) \left( \frac{Az^{(d)}(s)}{c_0 + d} + \frac{B_0(t) - B_d(t)}{d} z^{(d)}(s) + \frac{Lg(z^{(d)}(s))}{d(c_0 + d)} \right) ds \right\|_\infty \xrightarrow{d \rightarrow 0} 0.$$

□

### 1.6.6 La décomposition $T(1, 0) = T + K$ avec $T$ contractant et $K$ compact

Compte-tenu de la formule de  $D_{d, z_0} F(s^0, 0, 0)$  donnée par (1.31), on est amené à étudier les propriétés de l'opérateur

$$T(1, 0) : X_\lambda \rightarrow X_\lambda, \quad z_0 \mapsto z(1),$$

où  $z$  est la solution de

$$\begin{cases} Pz = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = 0 = z(\tau, +\infty, y), \\ z(0, \xi, y) = z_0(\xi, y). \end{cases} \quad (1.32)$$

Le lemme suivant permet d'affirmer que  $T(1, 0)X_\lambda \subset X_\lambda$  :

**Lemme 1.6.6.** *Si  $z_0 \in X_\lambda$ , le problème (1.32) admet une unique solution  $z(\tau, \cdot, \cdot)$  telle que pour tout  $\tau \geq 0$ ,  $z(\tau, \cdot, \cdot) \in X_\lambda$ .*

*Démonstration.* Le problème (1.32), avec  $z_0 \in X$ , admet une solution unique, notée  $z$ . Cette fonction  $z$  est aussi la solution unique du problème suivant posé dans le demi-cylindre  $(-\infty, 0) \times \omega$  :

$$\begin{cases} Pz^* = 0 & \text{dans } (-\infty, 0) \times \omega, \\ \partial_\nu z^* = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ z^*(\tau, -\infty, y) = 0, \\ z^*(\tau, 0, y) = z(\tau, 0, y), \\ z^*(0, \cdot, \cdot) = z_0. \end{cases} \quad (1.33)$$

Mais le problème suivant, posé dans le demi-cylindre  $(-\infty, 0) \times \omega$

$$\begin{cases} Q\tilde{z} = 0 & \text{dans } (-\infty, 0) \times \omega, \\ \partial_\nu \tilde{z} = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ \tilde{z}(\tau, -\infty, y) = 0, \\ \tilde{z}(\tau, 0, y) = \frac{z(\tau, 0, y)}{p(\tau, 0, y)}, \\ \tilde{z}(0, \cdot, \cdot) = \tilde{z}_0 := \frac{z_0}{p} \in X, \end{cases} \quad (1.34)$$

admet aussi une solution unique  $\tilde{z}$  telle que  $\tilde{z}(\tau) \in X$  pour  $\tau \geq 0$ , et la fonction  $p\tilde{z}$  vérifie (1.33). Par unicité de la solution de (1.33), on en déduit que  $z = p\tilde{z}$ , donc  $z(\tau, \cdot, \cdot) \in X_\lambda$ .  $\square$

Le but de cette partie est de prouver la décomposition suivante

**Proposition 1.6.7.** *On peut décomposer l'opérateur  $T(1, 0) : X_\lambda \rightarrow X_\lambda$  sous la forme*

$$T(1, 0) = T + K,$$

avec  $T : X_\lambda \rightarrow X_\lambda$  contractant et  $K : X_\lambda \rightarrow X_\lambda$  compact.

*Démonstration.* Pour démontrer ce résultat, on procède ainsi : on commence par fixer  $M$  assez grand tel que  $w^0 \leq \theta$  pour  $\xi \leq -M$ , et  $w^0$  assez proche de 1 de sorte que  $f'(w^0) \leq f'(1)/2$  pour  $\xi \geq M$ . Ensuite, on rappelle que  $z^{(p)} := z/p$  est solution de

$$\begin{cases} Qz^{(p)} = 0, \\ \partial_\nu z^{(p)} = 0, \\ z^{(p)}(\tau, -\infty, y) = 0 = z^{(p)}(\tau, +\infty, y), \\ z^{(p)}(0, \xi, y) = \frac{z_0}{p_0} \in X. \end{cases} \quad (1.35)$$

On note  $\tilde{T}(1, 0) : X \rightarrow X$  l'opérateur période associé à cette équation. On cherche alors à décomposer  $\tilde{T}(1, 0)$  sous la forme  $\tilde{T}(1, 0) = \tilde{T} + \tilde{K}$  avec  $\tilde{T}$  contractant et  $\tilde{K}$  compact. Pour cela, on écrit  $z^{(p)}$  sous la forme :  $z^{(p)} = \tilde{v} + v^*$ , avec  $\tilde{v}$  et  $v^*$  solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} Q_1 \tilde{v} = 0, \\ \partial_\nu \tilde{v} = 0, \\ \tilde{v}(\tau, -\infty, y) = 0 = \tilde{v}(\tau, +\infty, y), \\ \tilde{v}(0, \xi, y) = v_0 = \frac{z_0}{p_0} \in X, \end{cases} \quad (1.36)$$

et

$$\begin{cases} Q_2 v^* = (\tilde{a} - a)\tilde{v}, \\ \partial_\nu v^* = 0, \\ v^*(\tau, -\infty, y) = 0 = v^*(\tau, +\infty, y), \\ v^*(0, \xi, y) = 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

où

$$Q_1 v := v_\tau - \frac{L}{c^0} \Delta v + \left( \frac{Ls^0}{c^0} q(\xi - L\tau, y) - 2 \frac{\nabla p}{p} \right) \cdot \nabla v + Lv_\xi + \tilde{a}(\tau, \xi, y)v,$$

$$Q_2 v := v_\tau - \frac{L}{c^0} \Delta v + \left( \frac{L s^0}{c^0} q(\xi - L\tau, y) - 2 \frac{\nabla p}{p} \right) \cdot \nabla v + L v_\xi + a(\tau, \xi, y) v,$$

les fonctions  $a$  et  $\tilde{a}$  étant définies par

$$a(\tau, \xi, y) := \frac{\tilde{P}p}{p} - \frac{L}{c^0} f'(w^0(\tau, \xi, y)),$$

et

$$\tilde{a}(\tau, \xi, y) := \begin{cases} a(\tau, \xi, y) = \delta^0 > 0 \text{ pour } \xi \leq -M, \\ \text{régulière, minorée par une constante positive pour } -M \leq \xi \leq M, \\ a(\tau, \xi, y) = -\frac{L}{c^0} f'(w^0(\tau, \xi, y)) \geq -\frac{L}{2c^0} f'(1) > 0 \text{ pour } \xi \geq M. \end{cases}$$

On définit alors

$$\tilde{T} : X \rightarrow X, \quad \tilde{T}v_0 = \tilde{v}(1),$$

où  $\tilde{v}$  est la solution de (1.36) associée à la donnée initiale  $v_0$ , et

$$\tilde{K} : X \rightarrow X, \quad \tilde{K}v_0 = v^*(1),$$

où  $v^*$  est la solution de (1.37), dont le second membre utilise la solution  $\tilde{v}$  de (1.36) associée à la donnée initiale  $\tilde{v}_0$ .

On admet pour l'instant que  $\tilde{T}$  et  $\tilde{K}$  sont respectivement contractant et compact, avec  $\|\tilde{T}z_0\|_\infty \leq C\|z_0\|_\infty$  et  $C < 1$ . On considère alors les opérateurs :

$$T : X_\lambda \rightarrow X_\lambda, \quad Tz_0 = p(1)\tilde{T}\frac{z_0}{p_0} = p_0\tilde{T}\frac{z_0}{p_0},$$

et

$$K : X_\lambda \rightarrow X_\lambda, \quad Kz_0 = p(1)\tilde{K}\frac{z_0}{p_0} = p_0\tilde{K}\frac{z_0}{p_0}.$$

Notons que  $T$  et  $K$  sont bien à valeurs dans  $X_\lambda$ . En effet, si  $z_0 \in X_\lambda$ ,  $z_0/p_0 \in X$ , donc  $\tilde{T}(z_0/p_0) \in X$ , donc  $p_0\tilde{T}(z_0/p_0) \in X_\lambda$ .

Montrons alors que les opérateurs  $T, K : X_\lambda \rightarrow X_\lambda$  sont respectivement contractant et compact, et que  $T(1, 0)z_0 = Tz_0 + Kz_0$ . On a d'abord

$$T(1, 0)z_0 = z(1) = p(1)\tilde{T}(1, 0)\frac{z_0}{p_0} = p(0) \left( \tilde{T}\frac{z_0}{p_0} + \tilde{K}\frac{z_0}{p_0} \right) = Tz_0 + Kz_0,$$

d'où  $T(1, 0) = T + K$ . Ensuite, on suppose que  $\|\tilde{T}z_0\|_\infty \leq C\|z_0\|_\infty$  avec  $C < 1$ , alors on a

$$\|Tz_0\|_\lambda = \left\| \frac{Tz_0}{p_0} \right\|_\infty = \left\| \tilde{T}\frac{z_0}{p_0} \right\|_\infty \leq C \left\| \frac{z_0}{p_0} \right\|_\infty = C\|z_0\|_\lambda,$$

d'où  $T$  est contractant. Montrons enfin que  $K$  est compact. Soit  $z_{0,n}$  une suite bornée de  $X_\lambda$ , c'est à dire  $\|z_{0,n}\|_\lambda \leq C$ , et montrons que l'on peut extraire de  $(Kz_{0,n})_n$  une sous-suite convergente. Puisque  $\tilde{K}$  est compact dans  $X$  et que la suite  $\left( \frac{z_{0,n}}{p_0} \right)_n$  est bornée

dans  $X$ , on peut extraire de  $\left( \tilde{K}\frac{z_{0,n}}{p_0} \right)_n$  une sous-suite (notée de la même façon) qui converge vers  $\tilde{z}_0$  dans  $X$ , d'où

$$\|Kz_{0,n} - p_0\tilde{z}_0\|_\lambda = \|\tilde{K}\frac{z_{0,n}}{p_0} - \tilde{z}_0\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,  $K$  est compact. □

Pour conclure, il reste à montrer le résultat suivant

**Lemme 1.6.8.** *Les opérateurs  $\tilde{T}, \tilde{K} : X \rightarrow X$  sont respectivement contractant et compact.*

*Démonstration.* 1)  $\tilde{T}$  est contractant. Pour  $\alpha > 0$  assez petit, la fonction

$$\bar{v}(\tau, \xi, y) = \|v_0\|_\infty e^{-\alpha\tau}$$

est une sur-solution de l'équation (1.36) vérifiée par  $\tilde{v}$ . En effet, si  $\alpha$  est assez petit,

$$Q_1\bar{v} = (-\alpha + \tilde{a})\|v_0\|_\infty e^{-\alpha\tau} \geq 0,$$

puisque  $\tilde{a}$  est strictement positif et minoré. On a alors :

$$\begin{cases} Q_1(\bar{v} - \tilde{v}) = Q_1\bar{v} \geq 0, \\ \partial_\nu(\bar{v} - \tilde{v}) = 0, \\ (\bar{v} - \tilde{v})(0, \xi, y) \geq 0, \\ \bar{v} - \tilde{v} \text{ bornée,} \end{cases}$$

ainsi le principe du maximum faible parabolique nous assure que  $\bar{v} - \tilde{v} \geq 0$ . De même,  $\bar{v} + \tilde{v} \geq 0$ , ainsi

$$|\tilde{v}(\tau, \xi, y)| \leq \bar{v}(\tau, \xi, y),$$

donc

$$\|\tilde{T}v_0\|_\infty = \|\tilde{v}(1, \xi, y)\|_\infty \leq e^{-\alpha}\|v_0\|_\infty,$$

d'où  $\tilde{T} : X \rightarrow X$  est contractant.

2)  $\tilde{K}$  est compact. L'opérateur  $\tilde{K}$  est bien défini. Pour montrer qu'il est compact, on va considérer une suite de données initiales  $(v_{0,n})_n$  bornée dans  $X$  et montrer qu'on peut en extraire une sous-suite qui converge dans  $X$ .

On note  $T_2(t, s)$  l'opérateur d'évolution associée à l'opérateur  $Q_2$  : à une donnée initiale  $V_0$ , on associe  $V(t, \xi, y) = T_2(t, s)V_0(\xi, y)$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Q_2V = 0, \\ \partial_\nu V = 0, \\ V(\tau, -\infty, y) = 0 = V(\tau, +\infty, y), \\ V(s, \xi, y) = V_0(\xi, y). \end{cases} \quad (1.38)$$

On a alors la formule suivante :

$$v^*(1, \xi, y) = \int_0^1 T_2(1, s)(\tilde{a} - a)(s, \xi, y)\tilde{v}(s, \xi, y)ds.$$

L'extraction d'une sous-suite convergente nécessite les 2 étapes suivantes :

1. Montrer que la suite  $(v_n^*(1))_n$  décroît uniformément exponentiellement à l'infini, plus précisément qu'il existe  $C$  et  $\alpha$  indépendants de  $n$  tels que pour  $|\xi|$  assez grand,

$$v_n^*(1, \xi, y) \leq Ce^{-\alpha\xi}.$$

2. En partant de données initiales continues  $v_{0,n}$ , on montre que les fonctions  $v_n^*(1)$  sont  $C^1$  et que la suite  $(v_n^*(1))_n$  est bornée en norme  $C^1$ .

Montrons, si on admet les deux points ci dessus, que l'on peut conclure. Puisque  $\|v_n^*(1)\|_{C^1} \leq C$ , on peut extraire, d'après le théorème d'Ascoli et le procédé d'extraction diagonale, une sous suite convergeant uniformément sur tout compact de  $\Sigma$  vers  $v_1^*$ . La question est de savoir si  $v_1^* \in UC^0(\bar{\Sigma})$  et si la convergence est uniforme.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Prenons  $M_0$  assez grand tel que  $|v_n^*(1, \xi, y)| \leq \varepsilon$  pour  $|\xi| \geq M_0$ . Ainsi  $|v_1^*(\xi, y)| \leq \varepsilon$  pour  $|\xi| \geq M_0$  et donc  $v_1^* \in UC^0(\bar{\Sigma})$ . De plus,  $|v_n^*(1, \xi, y) - v_1^*(\xi, y)| \leq 2\varepsilon$  pour  $|\xi| \geq M_0$ . Ensuite, puisqu'on a convergence locale, on choisit  $n_0$  assez grand tel que  $|v_n^*(1, \xi, y) - v_1^*(\xi, y)| \leq \varepsilon$  pour  $\xi \in [-M_0, M_0]$ ,  $\forall n \geq n_0$ . Ainsi,

$$\|v_n^*(1, \cdot, \cdot) - v_1^*(\cdot, \cdot)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

*Étape 1 - Décroissance exponentielle uniforme.* On commence par remarquer que

$$\begin{cases} Q_1(\|v_{0,n}\|_\infty - \tilde{v}_n) \geq 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \partial_\nu(\|v_{0,n}\|_\infty - \tilde{v}_n) = 0, \\ (\|v_{0,n}\|_\infty - \tilde{v}_n)(0, \xi, y) \geq 0, \end{cases} \quad (1.39)$$

donc

$$|\tilde{v}_n(\tau, \xi, y)| \leq \|v_{0,n}\|_\infty \leq m_0.$$

On en déduit que pour  $\beta$  assez grand

$$\begin{cases} Q_2(m_0 e^{\beta\tau} - v_n^*) = (\beta + a)m_0 e^{\beta\tau} - (\tilde{a} - a)\tilde{v}_n \geq 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \partial_\nu(m_0 e^{\beta\tau} - v_n^*) = 0, \\ (m_0 e^{\beta\tau} - v_n^*)(0, \xi, y) \geq 0, \end{cases} \quad (1.40)$$

donc par le principe du maximum faible parabolique

$$|v_n^*| \leq m_0 e^{\beta\tau}.$$

Ensuite, l'équation vérifiée par  $v_n^*$  est :

$$Q_2 v_n^* = (\tilde{a} - a)\tilde{v}_n.$$

Soit  $M$  choisi comme précédemment tel que  $\tilde{a} = a$  pour  $|\xi| \geq M$ . On va montrer la décroissance exponentielle pour  $\xi \rightarrow +\infty$  et on se place pour cela sur le cylindre  $\Sigma_M = [M, +\infty[ \times \omega$  (la décroissance en  $-\infty$  se montrant de la même façon). On pose  $V(\tau, \xi, y) = C e^{-\alpha\xi}$  avec  $\alpha, C > 0$  à fixer. Alors :

$$Q_2 V = \left( -\frac{L}{c^0} \alpha^2 - \alpha \left( \frac{L s^0}{c^0} q_1 - 2 \frac{p\xi}{p} \right) + a \right) C e^{-\alpha\xi} \geq 0,$$

pour  $\alpha$  assez petit. La différence  $V - v_n^*$  vérifie alors :

$$\begin{cases} Q_2(V - v_n^*) \geq 0 & \text{sur } \Sigma_M, \\ \partial_\nu(V - v_n^*) = 0, \\ (V - v_n^*)(\tau, M, y) = C e^{-\alpha M} - v_n^*(\tau, M, y), \\ (V - v_n^*)(0, \xi, y) = C e^{-\alpha\xi} \geq 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Ainsi, si on choisit  $C = e^{\alpha M} m_0 e^\beta$ , on obtient que

$$\forall n, \forall \tau \leq 1, v_n^*(\tau, \xi, y) \leq C e^{-\alpha \xi}, \forall \xi \geq M.$$

*Étape 2 - Régularité.* On va couper l'intégrale en deux :

$$v_n^*(1, \xi, y) = \int_0^{1/2} T_2(1, s)((\tilde{a} - a)\tilde{v}_n) ds + \int_{1/2}^1 T_2(1, s)((\tilde{a} - a)\tilde{v}_n) ds =: V_{1,n}^*(\xi, y) + V_{2,n}^*(\xi, y).$$

On considère :

$$V_n^* := T_2(1, s)((\tilde{a} - a)\tilde{v}_n),$$

la valeur au temps 1 de la solution du problème

$$\begin{cases} Q_2 V_n^* = 0, \\ \partial_\nu V_n^* = 0, \\ V_n^*(\tau, -\infty, y) = 0 = V_n^*(\tau, +\infty, y), \\ V_n^*(s, \xi, y) = (\tilde{a} - a)\tilde{v}_n(s). \end{cases} \quad (1.42)$$

Dans la suite, on utilisera l'espace d'interpolation réel  $(X, D)_{\beta, p}$  entre l'espace  $X$  (ici  $UC^0(\bar{\Sigma})$ ) et le domaine  $D$  de l'opérateur (ici  $UC^0(\bar{\Sigma})$ ) ainsi que les estimations de l'opérateur d'évolution suivantes [57] : si  $0 \leq s < t$ ,

- 1) Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in X$ ,  $\|T(t, s)x\| \leq C\|x\|$ .
- 2) Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $0 < \beta < 1$ . Il existe  $C > 0$  tel que

$$\|T(t, s)x\|_{(X, D)_{\beta, p}} \leq \frac{C}{(t - s)^\beta} \|x\|.$$

- 3) Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $0 < \beta < 1$ . Il existe  $C > 0$  tel que pour  $x \in (X, D)_{\beta, p}$ , alors

$$\|T(t, s)x\|_{(X, D)_{\beta, p}} \leq C\|x\|_{(X, D)_{\beta, p}}.$$

Regardons d'abord  $V_{1,n}^*(\xi, y)$  : dans ce cas,  $s \in [0, 1/2]$ , donc on résout le problème (1.42) sur l'intervalle de temps  $[s, 1]$ , qui est de longueur au moins  $1/2$  : cela nous dit que la fonction  $V_n^*$  est bien de classe  $C^1$ , et va nous permettre de borner uniformément par rapport à  $s$  sa norme  $C^1$  en fonction de  $\|v_{0,n}\|_\infty$ . Plus précisément, les estimations citées ci-dessus impliquent que

$$\|V_n^*(1)\|_{(X, D)_{\beta, p}} \leq C\|(\tilde{a} - a)\tilde{v}_n(s)\|_X \leq C\|\tilde{v}_n(t)\|_X \leq C\|v_{0,n}\|_X \leq C,$$

d'où finalement par intégration

$$\|V_{1,n}^*\|_{(X, D)_{\beta, p}} \leq C.$$

On regarde maintenant  $V_{2,n}^*(\xi, y)$  : à présent,  $s \in [1/2, 1]$ , donc  $\tilde{v}_n$  est la solution du problème parabolique (1.36) résolu à partir de la donnée initiale continue  $v_{0,n}$  sur l'intervalle de temps  $[0, s]$  donc de longueur au moins  $1/2$ , donc on va pouvoir majorer uniformément par rapport à  $s$  la norme  $C^1$  de  $\tilde{v}_n$  par  $\|v_{0,n}\|_\infty$ . Ensuite on résout le problème parabolique (1.42) à partir de la donnée initiale  $(\tilde{a} - a)\tilde{v}_n(s)$  sur l'intervalle de temps  $[s, 1]$ , qui est de longueur très petite lorsque  $s$  est proche de 1, mais cette fois on

a juste besoin de dire que la solution garde la même régularité que la condition initiale. Les estimations donne :

$$\|V_n^*(1)\|_{(X,D)_{\beta,p}} \leq C\|(\tilde{a} - a)\tilde{v}_n(s)\|_{(X,D)_{\beta,p}} \leq C\|\tilde{v}_n(t)\|_{(X,D)_{\beta,p}} \leq C\|v_{0,n}\|_X \leq C,$$

d'où finalement par intégration

$$\|V_{2,n}^*\|_{(X,D)_{\beta,p}} \leq C.$$

Pour conclure, il reste à vérifier qu'il existe  $\beta > 0$  tel que  $(X, D)_{\beta,p} \hookrightarrow C^1(\bar{\Sigma})$ . Or, si  $0 < \theta < 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $\theta m$  non entier alors [57] :

$$(C(\bar{\Sigma}), C^m(\bar{\Sigma}))_{\theta, \infty} = C^{\theta m}(\bar{\Sigma}).$$

Il suffit donc de prendre  $m = 2$  et  $\theta > \frac{1}{2}$ . □

### 1.6.7 Le noyau de $I - T(1, 0)$

On va de nouveau utiliser la fonction  $\psi^0 := \frac{1}{L}w_\tau^0 + w_\xi^0$ . En se ramenant au repère initial

$$u^0(t, x, y) = w^0\left(\frac{c^0}{L}t, x + c^0t, y\right),$$

on remarque que  $\psi^0 = \frac{1}{c^0}u_t^0$ . Or,  $u^0$  est croissante en temps, d'où  $\psi^0 = \frac{1}{c^0}u_t^0 \geq 0$ . Le principe du maximum fort parabolique permet de conclure que  $\psi^0 > 0$ .

Comme  $w^0$  est 1-périodique,  $\psi^0$  aussi et donc

$$\psi_0^0(\xi, y) := \psi_0(0, \xi, y) \in N(I - T(1, 0)).$$

Montrons que le noyau est en fait engendré par  $\psi_0^0$  :

**Lemme 1.6.9.** *Le noyau de  $I - T(1, 0)$  est l'espace vectoriel engendré par  $\psi_0^0$  :*

$$N(I - T(1, 0)) = \mathbb{R} \cdot \psi_0^0.$$

*Démonstration.* Soit  $z_0 \in N(I - T(1, 0))$ . La démonstration se fait en deux étapes :

1. On montre qu'il existe  $C$  tel que  $z_0 \leq C\psi_0^0$ .
2. Soit  $C'$  le plus petit  $C$  vérifiant l'inégalité ci-dessus, on montre alors que  $z_0 = C'\psi_0^0$ .

*Étape 1.* Commençons par fixer  $M$  tel que  $w_0(\tau, \xi, y) \leq \theta$  pour  $\xi \leq -M$  et tel que  $-f'(w_0(\tau, \xi, y)) \geq \beta > 0$  pour  $\xi \geq M$ . Soit  $z$  la solution de l'équation issue de  $z_0$  :

$$\begin{cases} Pz = 0 & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = 0, & z(\tau, +\infty, y) = 0, \\ z(0, \xi, y) = z_0(\xi, y). \end{cases} \quad (1.43)$$

La fonction  $\psi^0$  est strictement positive donc minorée positivement sur  $[0, 1] \times [-M, M] \times \omega$ . Il existe donc  $C > 0$  assez grand tel que  $C\psi^0 - z \geq 0$  sur  $[0, 1] \times [-M, M] \times \omega$ .

On travaille ensuite sur le demi-cylindre de droite :  $[M, +\infty[ \times \omega$ . Sur ce demi-cylindre, on a :

$$\begin{cases} P(C\psi^0 - z) = 0, \\ \partial_\nu(C\psi^0 - z) = 0, \\ (C\psi^0 - z)(\tau, M, y) \geq 0, \\ (C\psi^0 - z)(0, \xi, y) = C\psi_0^0 - z_0. \end{cases} \quad (1.44)$$

On considère maintenant les deux cas suivants :

- soit  $C\psi_0^0 - z_0 \geq 0, \forall \xi \geq M, \forall y$ , et dans ce cas on a bien  $z_0 \leq C\psi_0^0$  sur le demi-cylindre de droite,

- soit  $C\psi_0^0 - z_0$  n'est pas positive partout. Dans ce cas, soit  $-k := \inf(C\psi_0 - z_0) < 0$ ,  $C\psi_0 - z_0$  étant borné puisque  $\psi_0^0$  et  $z_0$  tendent vers 0 quand  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Posons alors  $V(\tau, \xi, y) = ke^{-\alpha\tau}$ , avec  $\alpha > 0$  à déterminer. On a alors, à condition de choisir  $\alpha$  assez petit :

$$\begin{cases} P(C\psi^0 - z + V) = PV = (-\alpha - \frac{L}{c^0} f'(w^0))ke^{-\alpha\tau} \geq 0, \\ \partial_\nu(C\psi^0 - z + V) = 0, \\ (C\psi^0 - z + V)(\tau, M, y) \geq 0, \\ (C\psi^0 - z + V)(0, \xi, y) = (C\psi_0^0 - z_0) - \inf(C\psi_0^0 - z_0) \geq 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Le principe du maximum faible parabolique implique alors que  $C\psi^0 - z + V \geq 0$ . En utilisant le fait que  $z_0 \in N(I - T(1, 0))$ , et plus précisément que  $z$  est 1-périodique en temps, on a pour tout  $n \geq 0$ ,

$$C\psi_0^0 - z_0 = (C\psi^0 - z)(\tau = n) \geq -ke^{-\alpha n}.$$

En faisant  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $C\psi_0^0 - z_0 \geq 0$ .

On travaille enfin sur le demi-cylindre de gauche :  $] -\infty, -M] \times \omega$ . Sur ce demi-cylindre, on ne travaille pas directement sur l'équation vérifiée par  $C\psi^0 - z$  mais on prend en compte le poids et on travaille sur l'équation vérifiée par  $(C\psi^0 - z)/p$  :

$$\begin{cases} Q\left(\frac{C\psi^0 - z}{p}\right) = 0, \\ \frac{C\psi^0 - z}{p}(\tau, -M, y) \geq 0, \\ \frac{C\psi^0 - z}{p}(0, \xi, y) = \frac{C\psi_0^0 - z_0}{p(0, \xi, y)}. \end{cases} \quad (1.46)$$

On considère à nouveau les deux cas suivants :

- soit  $C\psi_0^0 - z_0 \geq 0, \forall \xi \leq -M, \forall y$ , et dans ce cas on a bien  $z_0 \leq C\psi_0^0$  sur le demi-cylindre de gauche,

- soit  $C\psi_0^0 - z_0$  n'est pas positive partout. Dans ce cas, soit

$$-k = \inf_{\xi \leq -M, y \in \omega} \left( \frac{C\psi^0 - z}{p} \right) (0, \xi, y) < 0.$$

Posons alors  $V(\tau, \xi, y) = ke^{-\alpha\tau}$ , avec  $\alpha > 0$  à déterminer. On a alors :

$$\begin{cases} Q \left( \frac{C\psi^0 - z}{p} + V \right) = QV = (-\alpha + \delta)ke^{-\alpha\tau} \geq 0, \\ \partial_\nu \left( \frac{C\psi^0 - z}{p} + V \right) = 0, \\ \left( \frac{C\psi^0 - z}{p} + V \right) (\tau, -M, y) \geq 0, \\ \left( \frac{C\psi^0 - z}{p} + V \right) (0, \xi, y) \geq 0. \end{cases} \quad (1.47)$$

Alors

$$\frac{C\psi^0 - z}{p} + V \geq 0.$$

En utilisant la périodicité de  $\psi_0^0$ ,  $z_0$  et  $p(0)$ , on en déduit que, pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$(C\psi_0^0 - z_0)(\xi, y) \geq -kp(0, \xi, y)e^{-\alpha n},$$

donc  $C\psi_0^0 - z_0 \geq 0$  sur le demi-cylindre de gauche.

*Étape 2.* D'après l'étape 1, il existe  $C$  tel que  $z_0 \leq C\psi_0^0$ . Soit alors  $C'$  le plus petit  $C$  vérifiant l'inégalité précédente. On a alors  $z_0 \leq C'\psi_0^0$  et le but est de montrer que  $z_0 = C'\psi_0^0$ . Supposons par l'absurde que  $C'\psi_0^0 - z_0$  est positive mais non identiquement nulle. On regarde alors l'équation vérifiée par  $C'\psi^0 - z$  :

$$\begin{cases} P(C'\psi^0 - z) = 0, \\ \partial_\nu(C'\psi^0 - z) = 0, \\ (C'\psi^0 - z)(0, \xi, y) \geq 0, \neq 0. \end{cases} \quad (1.48)$$

Le principe du maximum faible nous donne d'abord que  $C'\psi^0 - z \geq 0$ . On peut donc appliquer le principe du maximum fort. Ainsi, soit  $C'\psi^0 - z = 0$  sur  $[0, 1] \times \Sigma$ , soit  $C'\psi^0 - z > 0$  sur  $]0, 1[ \times \Sigma$ . Puisque  $C'\psi^0(0) - z_0$  est non identiquement nulle, on a donc  $C'\psi - z > 0$  sur  $]0, 1[ \times \Sigma$ , et en particulier  $(C'\psi_0^0 - z_0)(\xi, y) = (C'\psi - z)(1, \xi, y) > 0$  sur  $\Sigma$ . Enfin, d'après le lemme de Hopf, on a  $(C'\psi^0 - z)(\tau, \xi, y) > 0$  sur  $]0, 1[ \times \bar{\Sigma}$ , puisque sinon il existerait  $(\tau_0, \xi_0, y_0) \in ]0, 1[ \times \partial\Sigma$  tel que  $\partial_\nu(C'\psi^0 - z)(\tau_0, \xi_0, y_0) < 0$ , ce qui est absurde. Par périodicité, on a donc la positivité stricte sur le compact  $[0, 1] \times [-M, M] \times \omega$ . On peut donc trouver  $C'' < C'$  tel que  $(C''\psi^0 - z)(\tau, \xi, y) \geq 0$  sur  $[0, 1] \times [-M, M] \times \omega$  puis sur  $\mathbb{R} \times \Sigma$  d'après l'étape 1 et la périodicité en  $\tau$ . Ceci contredit la minimalité de  $C'$  et par conséquent  $z_0 = C'\psi_0^0$ .  $\square$

Puisque  $(I - U)^2 z_0 = z_0 - z(2)$ , un élément du noyau de  $(I - U)^2$  est 2-périodique. On a donc le même résultat sur le noyau de  $(I - U)^2$  en considérant dans la démonstration précédente les temps entiers pairs  $\tau = 2n$ . Ainsi

**Lemme 1.6.10.**  $N(I - T(0, 1))^2 = \mathbb{R} \cdot \psi_0^0$ .

### 1.6.8 Fin de la continuation locale

Commençons par tirer quelques conséquences des sections précédentes. Rappelons que  $T(1, 0)$  se décompose sous la forme  $T(1, 0) = T + K$  avec  $T$  contractant et  $K$  compact. Ainsi,  $I - T$  est un isomorphisme et on écrit  $I - T(1, 0)$  sous la forme

$$\begin{aligned} I - T(1, 0) &= I - T - K, \\ &= (I - T) - K, \\ &= (I - T)(I - (I - T)^{-1}K), \\ &= (I - T)(I - k), \end{aligned}$$

avec  $k = (I - T)^{-1}K$  compact. Puisque  $I - k$  est un opérateur de Fredholm, il en est de même de  $I - T(1, 0)$  et donc

$$R(I - T(1, 0)) = N(I - T(1, 0))^{\perp}$$

et

$$\dim N(I - T(1, 0))^{\perp} = \dim N(I - T(1, 0)) = \dim(\mathbb{R}.\psi_0^0) = 1.$$

On note alors  $e^*$  un générateur de  $N(I - T(1, 0))^{\perp}$ . On a alors le résultat suivant

**Lemme 1.6.11.** *On peut choisir  $e^*$  tel que  $\langle e^*, \psi_0^0 \rangle = 1$ .*

*Démonstration.* Si  $\langle e^*, \psi_0^0 \rangle \neq 0$ , il suffit de normaliser correctement  $e^*$ . Supposons donc par l'absurde que  $\langle e^*, \psi_0^0 \rangle = 0$ . Ainsi,

$$\psi_0^0 \in (\mathbb{R}.e^*)^{\perp} = N(I - T(1, 0))^{\perp} = R(I - T(1, 0)).$$

Il existe donc  $\psi_1 \in X_{\lambda}$  tel que  $\psi_0^0 = (I - T(1, 0))\psi_1$ . Alors

$$(I - T(1, 0))^2\psi_1 = (I - T(1, 0))\psi_0^0 = 0,$$

d'où

$$\psi_1 \in N(I - T(1, 0))^2 = N(I - T(1, 0)) = \mathbb{R}.\psi_0^0.$$

On en déduit que  $\psi_0^0 = (I - T(1, 0))\psi_1 = 0$ , ce qui est absurde.  $\square$

Revenons maintenant à la continuation locale. Il reste à montrer que  $D_{d,z_0}F(s^0, 0, 0) : \mathbb{R} \times Y_1 \rightarrow X_{\lambda}$  définie par

$$D_{d,z_0}F(s^0, 0, 0).(d, z_0) = (I - T(1, 0))z_0 + d\frac{L}{c_0}\psi_0^0$$

est un isomorphisme. Pour cela, on se donne  $h \in X_{\lambda}$ , et on cherche à montrer que l'équation

$$(I - T(1, 0))z_0 + d\frac{L}{c_0}\psi_0^0 = h. \tag{1.49}$$

possède une unique solution  $(d, z_0) \in \mathbb{R} \times Y_1$ , qui vérifie de plus

$$|d| + \|z_0\|_{\lambda} \leq c\|h\|_{\lambda}.$$

Si  $(d, z_0)$  vérifie (1.49) alors, en projetant sur  $\mathbb{R}.e^*$ , on a d'une part

$$\langle e^*, (I - T(1, 0))z_0 + d\frac{L}{c^0}\psi_0^0 \rangle = \langle e^*, h \rangle.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle e^*, (I - T(1, 0))z_0 + d\frac{L}{c^0}\psi_0^0 \rangle &= \langle e^*, (I - T(1, 0))z_0 \rangle + \langle e^*, d\frac{L}{c^0}\psi_0^0 \rangle \\ &= \langle (I - T(1, 0))^*e^*, z_0 \rangle + d\frac{L}{c^0}\langle e^*, \psi_0^0 \rangle \\ &= \langle 0, z_0 \rangle + d\frac{L}{c^0} = d\frac{L}{c^0}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d = \frac{c^0}{L}\langle e^*, h \rangle,$$

et on est ramené à résoudre l'équation

$$(I - T(1, 0))z_0 = h - \langle e^*, h \rangle\psi_0^0.$$

Or,  $\langle e^*, h - \langle e^*, h \rangle\psi_0^0 \rangle = \langle e^*, h \rangle - \langle e^*, h \rangle\langle e^*, \psi_0^0 \rangle = 0$  donc

$$h - \langle e^*, h \rangle\psi_0^0 \in (\mathbb{R}.e^*)^\perp = R(I - T(1, 0)).$$

Il existe donc  $z_0$  tel que  $(I - T(1, 0))z_0 = h - \langle e^*, h \rangle\psi_0^0$ . Si  $z_1$  est un autre solution, alors  $z_1 - z_0 \in N(I - T(1, 0)) = \mathbb{R}.\psi_0^0$  et donc  $z_1$  est de la forme  $z_1 = z_0 + \gamma\psi_0^0$  avec  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Pour assurer l'unicité de la solution, on définit l'espace  $Y_1$  suivant

$$Y_1 := \{z_0 \in X_\lambda, \langle e^*, z_0 \rangle = 0\}.$$

Ceci fixe l'unicité puisqu'il existe un seul  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que

$$\langle e^*, z_0 + \gamma\psi_0^0 \rangle = 0.$$

De plus, puisque  $d = \frac{c^0}{L}\langle e^*, h \rangle$  et  $z_0 = (I - T(1, 0))^{-1}(h - \langle e^*, h \rangle\psi_0^0)$ , on a

$$\begin{aligned} |d| + \|z_0\|_\lambda &= \left| \frac{c^0}{L}\langle e^*, h \rangle \right| + \|(I - T(1, 0))^{-1}(h - \langle e^*, h \rangle\psi_0^0)\|_\lambda \\ &\leq \frac{c^0}{L}\|e^*\| \cdot \|h\|_\lambda + C\|h - \langle e^*, h \rangle\psi_0^0\|_\lambda \\ &\leq \frac{c^0}{L}\|e^*\| \cdot \|h\|_\lambda + C(\|h\|_\lambda + \|e^*\| \cdot \|h\|_\lambda \|\psi_0^0\|_\lambda) \\ &\leq \left( \frac{c^0}{L}\|e^*\| + C + C\|e^*\| \cdot \|\psi_0^0\|_\lambda \right) \|h\|_\lambda \\ &\leq C'\|h\|_\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi,  $D_{d, z_0}F(s^0, 0, 0) : \mathbb{R} \times Y_1 \rightarrow X_\lambda$  est bien un isomorphisme.

Le théorème des fonctions implicites donne alors l'existence d'une solution  $(c, w)$  de  $(Pbm)_s$  de la forme  $(c^{(s)}, w^{(s)})$  pour  $s$  proche de  $s_0$ .

### 1.6.9 Synthèse de l'étape continuation locale

Pour clarifier les idées, nous reprenons dans l'ordre les éléments de l'étape de continuation locale. Rappelons qu'à partir d'une solution  $(c^0, w^0)$  de  $(Pbm)_{s_0}$ , nous voulions construire une solution  $(c^{(s)}, w^{(s)})$  de  $(Pbm)_s$  pour  $s$  proche de  $s_0$ . En posant,  $d := c - c^0$  et  $z := w - w^0$ , nous avons ramener le problème à celui de la recherche d'une solution  $(d, z) = (d^{(s)}, z^{(s)})$  de

$$(\widetilde{Pbm})_s \quad \begin{cases} \frac{c^0}{L}Pz + d\psi^0 = g(w^0, d, z) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = z(\tau, +\infty, y) = 0, \\ z(\tau, \xi, y) = z(\tau + 1, \xi, y), \end{cases}$$

Pour étudier les solutions périodiques de ce problème, nous considérons le problème de Cauchy associé

$$(PB)_s \quad \begin{cases} \frac{c^0}{L}Pz + d\psi^0 = g(w^0, d, z) & \text{dans } \Sigma, \\ \partial_\nu z = 0 & \text{sur } \partial\Sigma, \\ z(\tau, -\infty, y) = z(\tau, +\infty, y) = 0, \\ z(0, \xi, y) = z_0(\xi, y), \end{cases}$$

le but étant alors de trouver un couple  $(d, z_0)$  tel que la solution  $z$  de  $(PB)_s$  soit 1-périodique. On introduit ainsi naturellement la fonction

$$F : (s, d, z_0) \mapsto z(1) - z_0,$$

où  $z$  est la solution du problème  $(PB)_s$ . Un couple  $(d, z_0)$  tel que la solution  $z$  de  $(PB)_s$  soit 1-périodique vérifie alors  $F(s, d, z_0) = 0$ . Puisque  $F(s^0, 0, 0) = 0$ , nous utilisons le théorème des fonctions implicites. On est ainsi ramené à montrer que la différentielle  $D_{d, z_0}F(s^0, 0, 0)$ , qui est donné par la relation

$$D_{d, z_0}F(s^0, 0, 0) \cdot (d, z_0) = (T(1, 0) - I)z_0 - d\frac{L}{c^0}\psi_0^0,$$

est un isomorphisme, c'est à dire que l'équation :

$$(I - T(1, 0))z_0 + d\frac{L}{c^0}\psi_0^0(0) = h$$

possède une unique solution. Cela nécessite une étude précise de l'opérateur période  $T(1, 0)$ . On choisit pour cela judicieusement les espaces  $Y_1$  et  $Y_2$  tels que

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times Y_1 \rightarrow Y_2.$$

Pour  $Y_2$ , on choisit l'espace à poids  $X_\lambda$  de sorte que l'opérateur parabolique  $P$  soit remplacé par un opérateur dont le coefficient d'ordre 0 ait des limites strictement positives quand  $\xi \rightarrow -\infty$ . Ceci permet, via le principe du maximum, de construire des sur-solutions indispensables pour obtenir les propriétés de  $T(1, 0)$ . On obtient finalement que  $I - T(1, 0)$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0 de noyau  $\mathbb{R}\psi_0^0$ . On choisit alors pour  $Y_1$  un hyperplan de  $X_\lambda$  qui permet d'obtenir l'unicité dans l'équation

$$(I - T(1, 0))z_0 + d\frac{L}{c^0}\psi_0^0 = h.$$

Le théorème des fonctions implicites donne alors l'existence de  $\delta > 0$  et d'une fonction  $(d(s), z_0(s))$  définie sur  $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$  et vérifiant

$$F(s, d(s), z_0(s)) = 0,$$

c'est à dire que la solution  $z$  du problème de Cauchy  $(PB)_s$  associée à  $z_0(s)$  est 1-périodique.

# EXISTENCE D'ONDES PULSATOIRES DE TYPE KPP AU COMPORTEMENT PRÉCISÉ

---

## 2.1 Introduction et résultat principal

Dans ce chapitre, on étudie l'équation de réaction-diffusion en milieu périodique 1D suivante

$$u_t - u_{xx} = f(x, u), \quad (2.1)$$

où  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R}^+)$  a les propriétés suivantes :

- (i)  $f$  est 1-périodique en  $x$ ,
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, 0) = f(x, 1) = 0$  et  $f(x, u) > 0$  pour  $u \in (0, 1)$ ,
- (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}, f'_u(x, 0) := \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u} > 0$  et  $f'_u(x, 1) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{f(x, u)}{u-1} < 0$ ,
- (iv)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall u \in (0, 1), f'_u(x, u) \leq f'_u(x, 0)$ .

On note alors  $\zeta(x) := f'_u(x, 0)$ ; il s'agit d'une fonction  $C^1$  et 1-périodique.

Rapellons qu'une onde pulsatoire de (2.1) est définie de la façon suivante

**Définition 2.1.1.** *Une onde pulsatoire  $u(t, x)$  de l'équation (2.1) est une solution classique de classe  $C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$  définie pour tout  $t, x \in \mathbb{R}$ , telle qu'il existe  $c \neq 0$  pour lequel*

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \quad u\left(t + \frac{1}{c}, x\right) = u(t, x + 1),$$

et telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$u(t, -\infty) = 0, \quad u(t, +\infty) = 1.$$

Berestycki et Hamel ont montré l'existence d'ondes pulsatoires de vitesse  $c \geq c^*$  [6]. On s'intéresse ici plus précisément à l'étude du comportement précis en  $-\infty$  en montrant l'existence d'ondes pulsatoires dont le comportement en  $-\infty$  généralise celui des ondes progressives. Pour cela, nous travaillerons par la suite dans le repère mobile de l'onde, ce qui consiste à effectuer le changement de variable  $\tilde{u}(t, \xi) = u(t, \xi - ct)$ . L'équation (2.1) s'écrit alors dans ce repère

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}). \quad (2.2)$$

La fonction  $\tilde{u}$  est  $1/c$ -périodique en temps et solution du problème

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{u}(t, \xi), \\ \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{u}(t, +\infty) = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

On cherche ici une solution du problème (2.3) dont le comportement en  $-\infty$  est donné par une fonction  $p_\lambda(t, \xi)$  solution de l'équation linéarisée au voisinage de  $u = 0$

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - \zeta(\xi - ct)p = 0,$$

et dont la forme généralise celle des ondes progressives en prenant en compte la périodicité de l'équation

$$p_\lambda(t, \xi) = e^{\lambda\xi} \psi_\lambda(\xi - ct),$$

avec  $\lambda > 0$  et  $\psi > 0$  fonction 1-périodique. Ceci revient à chercher  $\lambda$  et  $\psi$  solution de l'équation

$$L_\lambda \psi := \psi'' + 2\lambda\psi' + (\lambda^2 + \zeta(x))\psi = c\lambda\psi,$$

$L_\lambda$  agissant dans  $C_{per}^2(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $v \in C^2(\mathbb{R})$  1-périodique. Pour cela, on considère la valeur propre principale  $k(\lambda)$  de l'opérateur  $L_\lambda$ . Il s'agit de l'unique valeur propre de l'opérateur  $L_\lambda$  pour laquelle il existe une fonction propre strictement positive, et elle est bien définie par la théorie de Krein-Rutman. On écrit alors le problème précédant sous la forme  $k(\lambda) = c\lambda$ ,  $\psi_\lambda$  étant choisie comme fonction propre (1-périodique) de l'opérateur  $L_\lambda$  associée à  $k(\lambda)$ . La fonction  $k$  a été étudié par Berestycki, Hamel et Nadirashvili [9] pour obtenir la formulation variationnelle suivante sur la vitesse minimale

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0.$$

La fonction continue positive  $k(\lambda)/\lambda$  atteint son minimum  $c^*$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ; de plus, l'image de  $k(\lambda)/\lambda$  est  $[c^*, +\infty[$ , ce qui permet de définir le taux de décroissance exponentielle (cf figure 2.1)

$$\lambda_c = \min\{\lambda > 0 \text{ tel que } k(\lambda) = c\lambda\}, \quad \lambda^* = \lambda_{c^*}.$$

Une attention particulière est à porter au cas  $c = c^*$  où  $\lambda^*$  est alors une racine double de l'équation  $k(\lambda) = c^*\lambda$ . Les solutions exponentielles sont alors de la forme

$$e^{\lambda^*\xi}(-\xi\psi^*(\xi - c^*t) + \Psi^*(\xi - c^*t)),$$

avec  $\psi^* > 0$  et  $\Psi^*$  sont solutions 1-périodiques des équations

$$-\psi^{*''} - 2\lambda^*\psi^{*'} + (c^*\lambda^* - \lambda^{*2} - \zeta(x))\psi^* = 0, \quad (2.4)$$

$$-\Psi^{*''} - 2\lambda^*\Psi^{*'} + (c^*\lambda^* - \lambda^{*2} - \zeta(x))\Psi^* = -2\psi^{*'} + (c^* - 2\lambda^*)\psi^*. \quad (2.5)$$

On montre alors le résultat suivant

**Théorème 2.1.1.** *Soient  $c > c^*$  et  $\psi_{\lambda_c} > 0$  une fonction propre de  $L_{\lambda_c}$  associée à  $k(\lambda_c) = c\lambda_c$ , alors il existe une onde pulsatoire  $\tilde{u}_c$  solution de (2.3) telle que*

$$\tilde{u}_c(t, \xi) = e^{\lambda_c\xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda_c + \delta)\xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty,$$

avec  $\delta > 0$ . Soient  $c = c^*$  et  $\psi^* > 0$  une fonction propre de  $L_{\lambda_{c^*}}$  associée à  $k(\lambda^*) = c^*\lambda^*$ , alors il existe une onde pulsatoire  $\tilde{u}_{c^*}$  solution de (2.3) telle que

$$\tilde{u}_{c^*}(t, \xi) = -\xi e^{\lambda^*\xi} \psi^*(\xi - c^*t) + O(e^{\lambda^*\xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty.$$

**Remarque 2.1.1.** Pour l'onde de vitesse  $c^*$ , le comportement plus précis attendu en  $-\infty$  et qui généralise celui des ondes progressives est le suivant :

$$\tilde{u}_{c^*}(t, \xi) = e^{\lambda^* \xi} (-\xi \psi^*(\xi - c^* t) + \Psi^*(\xi - c^* t)) + o(e^{\lambda^* \xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty.$$

Nous utilisons deux approches différentes pour traiter les deux cas. Dans celui des vitesses supérieures, nous utilisons un théorème de point fixe dans l'espace à poids des fonctions ayant le comportement exponentiel souhaité. La construction du poids est possible grâce au fait que  $k(\lambda) < c\lambda$  pour  $\lambda$  supérieur mais proche de  $\lambda_c$ . Pour  $c = c^*$ , on a  $k(\lambda) > c^* \lambda$  pour  $\lambda$  proche de  $\lambda^*$ . Ceci permet de construire l'onde de vitesse supérieure par la méthode des sur et sous solutions. On construit pour cela une sur-solution et une sous-solution de (2.2) qui ont le même comportement exponentiel souhaité pour l'onde. La mise en oeuvre de cette démarche est rendue possible par l'étude de la valeur propre principale  $k(\lambda)$  que nous détaillons dans la section suivante.

## 2.2 Propriétés de la valeur propre principale $k(\lambda)$

Nous détaillons dans cette section quelques propriétés de la fonction  $k(\lambda)$  qui sont indispensables pour construire les ondes pulsatoires. Rappelons que  $k(\lambda)$  est la valeur propre principale de l'opérateur

$$L_\lambda v := v'' + 2\lambda v' + (\lambda^2 + \zeta(x))v,$$

agissant dans  $C_{per}^2(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $v \in C^2(\mathbb{R})$  1-périodique, où  $\zeta(x) = f'_u(x, 0) > 0$  est une fonction de classe  $C^1$ , strictement positive et 1-périodique.

### 2.2.1 Convexité de $k(\lambda)$ et construction du poids

Nous commençons par un premier lemme qui rappelle les propriétés établies dans [9] :

**Lemme 2.2.1.** [9] 1) *La fonction  $k(\lambda)$  est une fonction convexe sur  $\mathbb{R}$  minorée par une constante strictement positive. Plus précisément, il existe une fonction convexe  $k_0$  telle que  $k_0(0) = k'_0(0) = 0$  et*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 < \min \zeta \leq \min \zeta + k_0(\lambda) \leq k(\lambda) \leq \max \zeta + k_0(\lambda).$$

2) *La fonction  $\frac{k(\lambda)}{\lambda}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et a les limites suivantes :*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{k(\lambda)}{\lambda} = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0.$$

*De plus,  $\frac{k(\lambda)}{\lambda}$  atteint son minimum sur  $\mathbb{R}_+^*$ .*

Le lemme permet de définir la vitesse minimale de propagation

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda}.$$

On déduit du fait que  $c^*$  est le minimum et de la limite infinie en  $0^+$  que la fonction continue  $\frac{k(\lambda)}{\lambda}$  atteint toutes les valeurs  $c \geq c^*$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , autrement dit pour tout  $c \geq c^*$ , il existe  $\lambda > 0$  tel que  $k(\lambda) = c\lambda$ . On définit alors les taux de décroissance exponentielle (cf figure 2.1)

$$\lambda_c = \min\{\lambda > 0 \text{ tel que } k(\lambda) = c\lambda\}, \quad \lambda_* = \lambda_{c^*}.$$

On considère  $\psi_{\lambda_c}$  une fonction propre strictement positive associée à  $\lambda_c$ . On note pour

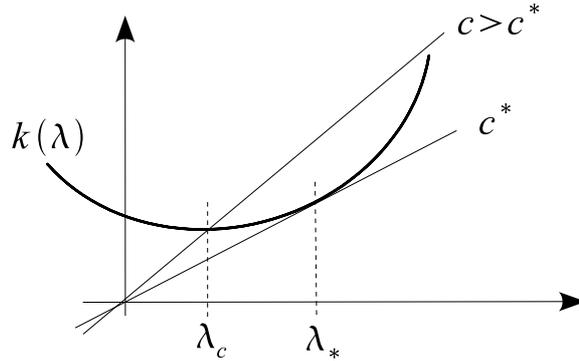


FIG. 2.1 – Taux de décroissance exponentielle  $\lambda_c$  de l'onde  $\tilde{u}_c$ .

finir

$$p_{\lambda_c}(t, \xi) = e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct),$$

le terme qui sera dominant dans le comportement en  $-\infty$  des ondes de vitesse  $c > c^*$ . Celles-ci vont être construites grâce à un point fixe dans un espace à poids. L'existence du poids est une conséquence du résultat suivant qui découle de la convexité de  $k$  :

**Lemme 2.2.2.** *Soit  $c > c^*$ . Alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $k(\lambda) < c\lambda$  sur  $]\lambda_c, \lambda_c + \delta[$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons donc que le résultat est faux. Pour tout  $\varepsilon$ , il existe donc  $\delta_\varepsilon$  avec  $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon$  tel que  $k(\lambda_c + \delta_\varepsilon) \geq c(\lambda_c + \delta_\varepsilon)$ . Or,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k(\lambda_c + \delta_\varepsilon) - k(\lambda_c)}{\delta_\varepsilon} = k'_d(\lambda_c) \quad \text{et} \quad \frac{k(\lambda_c + \delta_\varepsilon) - k(\lambda_c)}{\delta_\varepsilon} \geq \frac{c(\lambda_c + \delta_\varepsilon) - c\lambda_c}{\delta_\varepsilon} = c.$$

On en déduit que

$$k'_d(\lambda_c) \geq c.$$

Puisque  $k$  est convexe, on a l'inégalité suivante pour tout  $\delta \in \mathbb{R}$  :

$$k(\lambda_c + \delta) \geq k(\lambda_c) + k'_d(\lambda_c)\delta = c\lambda_c + k'_d(\lambda_c)\delta.$$

Appliquons ceci à  $\delta = \lambda_* - \lambda_c$ . Notons que  $\delta > 0$  puisque  $\lambda_c$  est une fonction strictement décroissante de  $c$ . On obtient  $k(\lambda_*) \geq c\lambda_c + c(\lambda_* - \lambda_c) = c\lambda_*$ . On en déduit que  $c^* = \frac{k(\lambda_*)}{\lambda_*} \geq c$ , d'où la contradiction.  $\square$

D'après le lemme précédent, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$q_\delta := c(\lambda_c + \delta) - k(\lambda_c + \delta) > 0.$$

En notant  $\psi_{\lambda_c+\delta}$  la fonction propre associée à  $k(\lambda_c + \delta)$ , on définit le poids de la façon suivante

$$p_{\lambda_c+\delta}(t, \xi) = e^{(\lambda_c+\delta)\xi} \psi_{\lambda_c+\delta}(\xi - ct).$$

La fonction  $p_{\lambda_c+\delta}$  est choisie comme sur-solution de l'équation linéarisée en 0; en effet,

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_{\xi} - \zeta(\xi - ct)p = q_{\delta}p,$$

avec  $q_{\delta} > 0$ . Ceci va permettre de construire une solution  $\tilde{u}(t, \xi)$  de l'équation telle que pour  $\xi \rightarrow -\infty$

$$\tilde{u}(t, \xi) = p_{\lambda_c}(t, \xi) + O(p_{\lambda_c+\delta}(t, \xi)).$$

### 2.2.2 Analyticité de $k(\lambda)$

Pour construire l'onde de vitesse minimale, on a besoin au contraire de montrer qu'on peut choisir  $\delta > 0$  suffisamment petit tel que  $k(\lambda_* + \delta) > c^*(\lambda_* + \delta)$ . On utilise pour cela l'analyticité de la fonction  $k(\lambda)$  qui provient du théorème de Kato-Rellich (cf [67]).

**Lemme 2.2.3.** *La fonction  $k(\lambda)$  est analytique.*

On en déduit le résultat suivant

**Corollaire 2.2.4.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $0 < \delta \leq \varepsilon$  tel que  $k(\lambda_* + \delta) > c^*(\lambda_* + \delta)$ .*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. On suppose que  $k(\lambda) = c^*\lambda$  sur un intervalle  $[\lambda_*, \lambda_* + \varepsilon]$ . Or, par définition de  $\lambda_*$ ,  $k(\lambda) > c^*\lambda$  à gauche de  $\lambda_*$ . Ceci contredit l'analyticité de  $k$  en  $\lambda_*$ .  $\square$

## 2.3 Existence d'ondes de vitesse $c > c^*$ par point fixe

Dans cette section, on construit pour chaque vitesse  $c > c^*$ , une solution du problème (2.3) telle que pour tout  $t$ ,

$$\tilde{u}(t, \xi) = e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda_c+\delta)\xi}) \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty,$$

où  $\delta > 0$ . Pour cela, nous allons utiliser un théorème de point fixe dans l'espace de fonctions ayant le bon comportement exponentiel en  $-\infty$ , c'est à dire des fonctions  $u$  telle que  $u(\xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi)$  soit comprise entre deux multiples de  $p_{\lambda_c+\delta}(0, \xi)$ .

### 2.3.1 Point fixe dans l'espace à poids

Nous allons travailler par la suite dans l'espace à poids suivant :

$$X_{\delta} := \left\{ u \in BUC(\mathbb{R}), 0 \leq u \leq 1, \frac{u(\xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi)}{p_{\lambda_c+\delta}(0, \xi)} \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \right\},$$

où  $BUC(\mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions bornées uniformément continues sur  $\mathbb{R}$ . Muni de la distance

$$d_{\delta}(u, v) := \|u - v\|_{\delta} = \left\| \frac{u - v}{p_{\lambda_c+\delta}(0, \xi)} \right\|_{\infty},$$

$(X_\delta, d_\delta)$  est un espace métrique complet.

On regarde alors l'opérateur  $T$  suivant : soit  $\tilde{u}_0 \in X_\delta$ , on définit  $T(\tilde{u}_0)(\xi) = \tilde{u}(1/c, \xi)$ , où  $\tilde{u}(t, \xi)$  est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(0, \xi) = \tilde{u}_0(\xi). \end{cases} \quad (2.6)$$

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $\tilde{u}_0 \in X_\delta$  et  $\tilde{u}$  la solution de (2.6). Alors, pour tout  $t \geq 0$ , l'application*

$$\xi \longmapsto \frac{\tilde{u}(t, \xi) - p_{\lambda_c}(t, \xi)}{p_{\lambda_c+\delta}(t, \xi)}$$

est bornée pour  $\xi \in \mathbb{R}$ . En particulier, l'opérateur  $T$  est bien défini : si  $\tilde{u}_0 \in X_\delta$ , alors  $T(\tilde{u}_0) \in X_\delta$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, si  $\tilde{u}_0 \in BUC(\mathbb{R})$ , le problème (2.6) admet une unique solution  $\tilde{u}(t, \xi) \in BUC(\mathbb{R})$ , régulière et globale en temps car le second membre  $f(\xi - ct, \tilde{u})$  est à croissance au plus linéaire en  $\tilde{u}$  [45]. De plus, par le principe du maximum faible parabolique,  $0 \leq \tilde{u}(t, \xi) \leq 1$ .

On suppose ensuite que  $\tilde{u}_0 \in X_\delta$ . Montrons alors que dans ce cas

$$\frac{\tilde{u}(t, \xi) - p_{\lambda_c}(t, \xi)}{p_{\lambda_c+\delta}(t, \xi)},$$

est bornée. C'est le cas pour  $\xi \geq 0$ , on se restreint donc à  $\xi \leq 0$ . On commence par montrer que la fonction est majorée. Puisque  $\tilde{u}_0 \in X_\delta$  et que  $\tilde{u}$ ,  $p_{\lambda_c}$  et  $p_{\lambda_c+\delta}$  sont bornés pour  $\xi \leq 0$ , il existe  $C > 0$  tel que pour  $\xi \leq 0$

$$\tilde{u}(0, \xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi) \leq Cp_{\lambda_c+\delta}(0, \xi),$$

et pour  $t \geq 0$

$$\tilde{u}(t, 0) - p_{\lambda_c}(t, 0) \leq Cp_{\lambda_c+\delta}(t, 0).$$

On considère par la suite les opérateurs paraboliques

$$P\tilde{u} := \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi,$$

et

$$\tilde{P}\tilde{u} := \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi - \zeta(\xi - ct)\tilde{u}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} P(\tilde{u} - p_{\lambda_c} - Cp_{\lambda_c+\delta}) &= f(\xi - ct, \tilde{u}) - \zeta(\xi - ct)p_{\lambda_c} - C(\zeta(\xi - ct) + q_\delta)p_{\lambda_c+\delta} \\ &\leq \zeta(\xi - ct)(\tilde{u} - p_{\lambda_c} - Cp_{\lambda_c+\delta}) - Cq_\delta p_{\lambda_c+\delta}, \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{P}(\tilde{u} - p_{\lambda_c} - Cp_{\lambda_c+\delta}) \leq -Cq_\delta p_{\lambda_c+\delta} \leq 0.$$

On a finalement

$$\begin{cases} \tilde{P}(\tilde{u} - p_{\lambda_c} - Cp_{\lambda_c+\delta}) \leq 0, \\ \tilde{u}(0, \xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi) - Cp_{\lambda_c+\delta}(0, \xi) \leq 0 & \text{pour } \xi \leq 0, \\ \tilde{u}(t, 0) - p_{\lambda_c}(t, 0) - Cp_{\lambda_c+\delta}(t, 0) \leq 0 & \text{pour } t \geq 0, \\ \tilde{u} - p_{\lambda_c} - Cp_{\lambda_c+\delta} & \text{bornée,} \end{cases}$$

donc par le principe du maximum on a pour  $t \geq 0$  et  $\xi \leq 0$

$$\tilde{u}(t, \xi) - p_{\lambda_c}(t, \xi) \leq Cp_{\lambda_c+\delta}(t, \xi).$$

Montrons ensuite qu'il existe un minorant. On sait déjà qu'il existe une constante  $C' > 0$  telle que pour  $\xi \leq 0$

$$\tilde{u}(0, \xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi) \geq -C'p_{\lambda_c+\delta}(0, \xi),$$

et pour  $t \geq 0$

$$\tilde{u}(t, 0) - p_{\lambda_c}(t, 0) \geq -C'p_{\lambda_c+\delta}(t, 0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(\tilde{u} - p_{\lambda_c} + C'p_{\lambda_c+\delta}) &= f(\xi - ct, \tilde{u}) - \zeta(\xi - ct)p_{\lambda_c} + C'(\zeta(\xi - ct) + q_\delta)p_{\lambda_c+\delta} \\ &= \zeta(\xi - ct)(\tilde{u} - p_{\lambda_c} + C'p_{\lambda_c+\delta}) + f(\xi - ct, \tilde{u}) - \zeta(\xi - ct)\tilde{u} + C'q_\delta p_{\lambda_c+\delta}. \end{aligned}$$

La formule de Taylor donne

$$f(\xi - ct, \tilde{u}) = f(\xi - ct, 0) + f'_u(\xi - ct, 0)\tilde{u} + \int_0^{\tilde{u}} (v - \tilde{u})f''_u(\xi - ct, v)dv,$$

soit

$$f(\xi - ct, \tilde{u}) - \zeta(\xi - ct)\tilde{u} = \int_0^{\tilde{u}} (v - \tilde{u})f''_u(\xi - ct, v)dv \geq -\max_{\mathbb{R} \times [0,1]} |f''_u| \frac{\tilde{u}^2}{2}.$$

Cependant, puisque on a montré que  $0 \leq \tilde{u} \leq p_{\lambda_c} + Cp_{\lambda_c+\delta}$ , on a

$$-\frac{\tilde{u}^2}{2} \geq -\frac{1}{2}(p_{\lambda_c} + Cp_{\lambda_c+\delta})^2,$$

d'où

$$\tilde{P}(\tilde{u} - p_{\lambda_c} + C'p_{\lambda_c+\delta}) \geq -\frac{1}{2} \max_{\mathbb{R} \times [0,1]} |f''_u| (p_{\lambda_c} + Cp_{\lambda_c+\delta})^2 + C'q_\delta p_{\lambda_c+\delta}.$$

Puisque  $p_{\lambda_c}(t, \xi) = \phi(\xi - ct)e^{\lambda_c \xi}$  et  $\delta < \lambda_c$ , il existe  $A >, B > 0$  tels que pour tout  $t$  et  $\xi \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} (p_{\lambda_c}(t, \xi) + Cp_{\lambda_c+\delta}(t, \xi))^2 &\leq Ae^{2\lambda_c \xi}, \\ Be^{(\lambda_c+\delta)\xi} &\leq p_{\lambda_c+\delta}(t, \xi). \end{aligned}$$

On en déduit qu'avec  $\delta < \lambda_c$  et  $C'$  assez grand, on a alors

$$\tilde{P}(\tilde{u} - p_{\lambda_c} + C'p_{\lambda_c+\delta}) \geq 0.$$

On conclut ainsi par le principe du maximum que pour  $t \geq 0$  et  $\xi \leq 0$

$$\tilde{u}(t, \xi) - p_{\lambda_c}(t, \xi) \geq -C'p_{\lambda_c+\delta}(t, \xi).$$

Ceci conclut la preuve du lemme. □

Montrons maintenant que l'opérateur  $T$  est contractant dans  $(X_\delta, d_\delta)$  :

**Lemme 2.3.2.** *l'opérateur  $T$  est contractant dans  $(X_\delta, d_\delta)$  : si  $\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2 \in X_\delta$ , alors*

$$d_\delta(T\tilde{u}_0^1, T\tilde{u}_0^2) \leq e^{-q_\delta/c} d_\delta(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2), \quad \text{avec } e^{-q_\delta/c} < 1.$$

*Démonstration.* Soient  $\tilde{u}_0^1$  et  $\tilde{u}_0^2$  dans  $X_\delta$  et  $\tilde{u}^1$  et  $\tilde{u}^2$  les solutions des problèmes de Cauchy (2.6) associés. On a alors

$$(\partial_t - \partial_{\xi\xi} + c\partial_\xi - f'_u(\xi - ct, a(t, \xi)))(\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2) = 0,$$

où  $a(t, \xi)$  est compris entre  $\tilde{u}^1(t, \xi)$  et  $\tilde{u}^2(t, \xi)$ . On pose ensuite

$$(\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2)(t, \xi) = p_{\lambda_c + \delta}(t, \xi)v(t, \xi).$$

Sur  $v$ , on obtient l'équation

$$Qv := v_t - v_{\xi\xi} + \left( c - 2 \frac{\partial_\xi p_{\lambda_c + \delta, \xi}}{p_{\lambda_c + \delta}} \right) v_\xi + (\zeta(\xi - ct) - f'_u(\xi - ct, a(t, \xi)) + q_\delta)v = 0.$$

Par hypothèse, on a  $f'_u(\xi - ct, a) \leq \zeta(\xi - ct)$ , d'où

$$\tilde{a}(t, \xi) := \zeta(\xi - ct) - f'_u(\xi - ct, a(t, \xi)) + q_\delta \geq q_\delta > 0.$$

Montrons qu'on a alors

$$\|v(1/c, \xi)\|_\infty \leq e^{-q_\delta/c} \|v_0\|_\infty.$$

On considère pour cela la fonction  $\bar{v}(t, \xi) = \|v_0\|_\infty e^{-q_\delta t}$ ; celle-ci est sur-solution de l'équation  $Qv = 0$  puisque

$$Q\bar{v} = (-q_\delta + \tilde{a})\|v_0\|_\infty e^{-q_\delta t} \geq 0.$$

On a alors :

$$\begin{cases} Q(\bar{v} - v) = Q\bar{v} \geq 0, \\ (\bar{v} - v)(0, \xi) = \|v_0\|_\infty - v_0(\xi) \geq 0, \\ \bar{v} - v \text{ bornée.} \end{cases}$$

Le principe du maximum faible parabolique assure ainsi que  $v(t, \xi) \leq \bar{v}(t, \xi)$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ . De même,

$$\begin{cases} Q(\bar{v} + v) = Q\bar{v} \geq 0, \\ (\bar{v} + v)(0, \xi) = \|v_0\|_\infty + v_0(\xi) \geq 0, \\ \bar{v} + v \text{ bornée,} \end{cases}$$

d'où  $v(t, \xi) \geq -\bar{v}(t, \xi)$ . Finalement,  $|v(t, \xi)| \leq \bar{v}(t, \xi)$ , ce qui donne pour  $t = 1/c$ ,  $\|v(1/c, \xi)\|_\infty \leq e^{-q_\delta/c} \|v_0\|_\infty$ .

Ceci nous permet de montrer que  $T$  est contractant : en effet,  $e^{-q_\delta/c} < 1$  et

$$\begin{aligned} d_\delta(T\tilde{u}_0^1, T\tilde{u}_0^2) &= \|\tilde{u}^1(1/c, \xi) - \tilde{u}^2(1/c, \xi)\|_\delta \\ &= \|p_{\lambda_c + \delta}(1/c, \xi)v(1/c, \xi)\|_\delta \\ &= \left\| \frac{p_{\lambda_c + \delta}(1/c, \xi)v(1/c, \xi)}{p_{\lambda_c + \delta}(0, \xi)} \right\|_\infty \\ &= \|v(1/c, \xi)\|_\infty \\ &\leq e^{-q_\delta/c} \|v_0\|_\infty \\ &= e^{-q_\delta/c} \left\| \frac{\tilde{u}_0^1 - \tilde{u}_0^2}{p_{\lambda_c + \delta}(0, \xi)} \right\|_\infty = e^{-q_\delta/c} d_\delta(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2). \end{aligned}$$

□

Ainsi,  $T$  a un unique point fixe  $\tilde{u}_0$  dans  $X_\delta$ , et la solution  $\tilde{u}$  du problème de Cauchy associé vérifie

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \\ \tilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{u}(t, \xi). \end{cases}$$

De plus, par le principe du maximum fort parabolique, on a  $0 < \tilde{u} < 1$ .

### 2.3.2 Comportement de $\tilde{u}$ en $+\infty$

Pour que la fonction  $\tilde{u}$  qu'on vient de construire soit une onde pulsatoire, il reste à montrer qu'elle vérifie  $\tilde{u}(t, +\infty) = 1$ . Montrons tout d'abord que  $\tilde{u}$  est strictement positive et bornée inférieurement par une constante strictement positive pour  $\xi \geq 0$ . Le lemme suivant permet de montrer qu'il existe  $M > 0$  et  $\gamma > 0$  tels que  $\tilde{u}(0, \xi) \geq \gamma > 0$  pour  $\xi \geq M$  :

**Lemme 2.3.3.** *La fonction  $\tilde{u}$  vérifie  $\liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{u}(0, \xi) > 0$ .*

*Démonstration.* Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $\xi_n \rightarrow +\infty$  telle que  $\tilde{u}(0, \xi_n) \rightarrow 0$ . On suppose aussi que  $\xi_n \geq 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\tilde{u}(0, \xi_n) \leq \varepsilon$ . D'après l'inégalité de Harnack et les estimations paraboliques, il existe  $C > 0$  tel que pour  $t \in [0, 1/c]$ ,  $\tilde{u}(t, \xi_n) \leq C\varepsilon$  et  $\tilde{u}_\xi(t, \xi_n) \leq C\varepsilon$ . On intègre alors l'équation sur  $[0, 1/c] \times [-M, \xi_n]$  :

$$\int_0^{1/c} \int_{-M}^{\xi_n} (\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi) dt d\xi = \int_0^{1/c} \int_{-M}^{\xi_n} f(\xi - ct, \tilde{u}(t, \xi)) dt d\xi.$$

Par périodicité en  $t$  de  $\tilde{u}$ , il reste

$$\int_0^{1/c} (-\tilde{u}_\xi(t, \xi_n) + \tilde{u}_\xi(t, -M) + c\tilde{u}(t, \xi_n) - c\tilde{u}(t, -M)) dt d\xi = \int_0^{1/c} \int_{-M}^{\xi_n} f(\xi - ct, \tilde{u}(t, \xi)) dt d\xi.$$

Passons alors à la limite  $M \rightarrow +\infty$ . Puisque  $\tilde{u}(t, -M) \rightarrow 0$ , on a aussi  $\tilde{u}_\xi(t, -M) \rightarrow 0$  par les estimations paraboliques. On obtient ainsi à la limite

$$z_n := \int_0^{1/c} \int_{-\infty}^{\xi_n} f(\xi - ct, \tilde{u}(t, \xi)) dt d\xi = \int_0^{1/c} (-\tilde{u}_\xi(t, \xi_n) + c\tilde{u}(t, \xi_n)) dt \leq C(1 + 1/c)\varepsilon.$$

On en déduit que  $z_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Or,  $\tilde{u}(t, \xi) \geq a > 0$  sur  $[0, 1/c] \times [0, 1]$  donc d'après les propriétés de  $f$

$$z_n \geq \int_0^{1/c} \int_0^1 f(\xi - ct, \tilde{u}(t, \xi)) dt d\xi := b > 0,$$

$b$  étant indépendant de  $n$ . On obtient ainsi une contradiction.  $\square$

D'après le lemme, il existe  $\alpha > 0$  et  $M > 0$  tels que  $\tilde{u}(0, \xi) \geq \alpha$  pour  $\xi \geq M$ . Puisque  $\tilde{u} > 0$ , il existe  $\beta > 0$  tel que  $\tilde{u}(t, M) \geq \beta$  pour tout  $t \in [0, 1/c]$ . Posons alors  $P\tilde{u} := \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi$  et  $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ , on a alors :

$$\begin{cases} P(\tilde{u} - \gamma) = f(\xi - ct, \tilde{u}) \geq 0, \\ (\tilde{u} - \gamma)(0, \xi) \geq 0, \\ (\tilde{u} - \gamma)(t, M) \geq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum donne alors que  $\tilde{u}(t, \xi) \geq \gamma > 0$  pour  $t \in [0, 1/c]$  et  $\xi \geq M$ . Ceci permet d'obtenir la limite en  $+\infty$ .

**Lemme 2.3.4.** *Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{u}(t, +\infty) = 1$ .*

*Démonstration.* On pose  $U = 1 - \tilde{u}$  et  $f(x, \tilde{u}) = (1 - \tilde{u})h(x, \tilde{u})$ . Comme  $f'_u(x, 1) < 0$ ,  $h(x, \tilde{u})$  ne s'annule pas en  $\tilde{u} = 1$  et donc  $h(x, \tilde{u}) \geq h_0 > 0$  pour  $0 < \gamma \leq \tilde{u} \leq 1$ . On se place donc dans la suite dans le domaine  $\xi \geq M$ .  $U$  vérifie l'équation

$$QU := U_t - U_{\xi\xi} + cU_\xi + h(\xi - ct, \tilde{u})U = 0.$$

On construit alors une sur-solution de cette équation de la manière suivante : soient  $C > 0$  et  $\mu > 0$  des constantes à déterminer, on pose

$$V(t, \xi) = \|U_0\|_\infty e^{-hot} + Ce^{-\mu\xi}.$$

On a en effet

$$QV = \|U_0\|_\infty e^{-hot}(h(\xi - ct, \tilde{u}) - h_0) + Ce^{-\mu\xi}(h(\xi - ct, \tilde{u}) - \mu^2 - c\mu).$$

Puisque  $h \geq h_0 > 0$ , on choisit  $\mu > 0$  suffisamment petit pour que  $\mu(\mu + c) \leq h_0$  et on fixe  $C = e^{\mu M}$ . On a alors :

$$\begin{cases} Q(V - U) \geq 0, \\ (V - U)(0, \xi) \geq \|U_0\|_\infty - U(0, \xi) \geq 0, \\ (V - U)(t, M) \geq 1 - U(t, M) \geq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum dit alors que  $U(t, \xi) \leq V(t, \xi)$  pour  $t \geq 0$  et  $\xi \geq M$ . Comme  $U$  est périodique, on évalue l'inégalité précédente en  $t = t + N/c$  puis on fait tendre  $N \rightarrow +\infty$ . On récupère  $U(t, \xi) \leq Ce^{-\mu\xi} \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Ainsi,  $\tilde{u}(t, +\infty) = 1$ .  $\square$

## 2.4 Existence d'ondes de vitesse $c^*$ par sur et sous-solutions

Nous allons construire dans cette section une solution du problème (2.3) pour  $c = c^*$  telle que pour tout  $t$ ,

$$\tilde{u}_{c^*}(t, \xi) = -\xi e^{\lambda^* \xi} \psi^*(\xi - c^* t) + O(e^{\lambda^* \xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty.$$

Les ondes de vitesse supérieure  $c > c^*$  ont été construites grâce à un point fixe dans un espace à poids. Rappelons que l'existence de ce poids  $p_{\lambda_c + \delta}$  vient du fait que  $k(\lambda) < c\lambda$  quand  $\lambda$  est proche et strictement supérieur à  $\lambda_c$ . Cette inégalité n'est plus valable quand  $c = c^*$ . En fait, on a même le contraire puisque du fait de l'analyticité, il existe des valeurs de  $\delta > 0$  aussi petites que l'on veut pour lesquelles  $k(\lambda^* + \delta) > c^*(\lambda^* + \delta)$ . Néanmoins, cette nouvelle inégalité permet d'obtenir une sur-solution  $\bar{u}$  et une sous solution  $\underline{u}$  de l'équation qui ont le comportement ci-dessus en  $-\infty$  et qui vérifient  $\underline{u} \leq \bar{u}$ . Ceci donne l'existence d'une solution comprise entre les deux et qui possède le bon comportement exponentiel en  $-\infty$ .

Notons que nous montrons ici plus précisément que le comportement en  $-\infty$  est de la forme

$$\tilde{u}_{c^*}(t, \xi) = -e^{\lambda^* \xi}(-\xi \psi^*(\xi - c^* t) + \Psi^*(\xi - c^* t)) + O(e^{\lambda^* \xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty,$$

où  $\phi_* > 0$  et  $\psi_*$  sont solutions des équations

$$\begin{aligned} -\psi^{*''} - 2\lambda^* \psi^{*'} + (c^* \lambda^* - \lambda^{*2} - \zeta(x))\psi^* &= 0, \\ -\Psi^{*''} - 2\lambda^* \Psi^{*'} + (c^* \lambda^* - \lambda^{*2} - \zeta(x))\Psi^* &= -2\psi^{*'} + (c^* - 2\lambda^*)\psi^*. \end{aligned}$$

Dans cette section, nous commençons par montrer que les problèmes ci-dessus possèdent une solution puis nous construisons les sur et sous-solution.

### 2.4.1 Le comportement exponentiel

L'équation  $k(\lambda) = c^* \lambda$  possède une racine double en  $\lambda^* > 0$ . Ceci amène à regarder des solutions de l'équation linéarisée

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c^* \tilde{u}_\xi - \zeta(\xi - c^* t)\tilde{u} = 0,$$

sous la forme

$$\tilde{u}(t, \xi) = e^{\lambda^* \xi}(-\xi \psi^*(\xi - ct) + \Psi^*(\xi - c^* t)).$$

En injectant cet ansatz dans l'équation linéarisée, l'identification des termes en  $e^{\lambda^* \xi}$  et en  $\xi e^{\lambda^* \xi}$  donnent respectivement les équations

$$\begin{aligned} -\psi^{*''} - 2\lambda^* \psi^{*'} + (c^* \lambda^* - \lambda^{*2} - \zeta(x))\psi^* &= 0, \\ -\Psi^{*''} - 2\lambda^* \Psi^{*'} + (c^* \lambda^* - \lambda^{*2} - \zeta(x))\Psi^* &= -2\psi^{*'} + (c^* - 2\lambda^*)\psi^*. \end{aligned}$$

La première équation est  $L_{\lambda^*} \psi^* = c^* \lambda^* \psi^*$ ; on choisit alors  $\psi^*$  comme fonction propre strictement positive associée à la valeur propre principale  $k(\lambda^*) = c^* \lambda^*$  de l'opérateur  $L_{\lambda^*}$ . La deuxième équation s'écrit quant à elle

$$(L_{\lambda^*} - k(\lambda^*))\Psi^* = (2\lambda^* - c^*)\psi^* + 2\psi^{*'}.$$

Nous allons montrer que cette équation possède une solution qui est  $-v^*$  avec

$$v^* := \left. \frac{d\psi_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*}.$$

Pour cela, considérons la fonction

$$v_\lambda = \frac{\psi_\lambda - \psi^*}{\lambda - \lambda^*},$$

où  $\psi_\lambda$  est fonction propre de l'opérateur  $L_\lambda$  pour la valeur propre  $k(\lambda)$ . La fonction  $v_\lambda$  vérifie alors l'équation différentielle

$$L_\lambda v_\lambda - k(\lambda)v_\lambda = \frac{k(\lambda) - k(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} \psi^* - 2\psi^{*'} - (\lambda + \lambda^*)\psi_\lambda.$$

Nous allons passer à la limite  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  dans cette équation. Tout d'abord,  $k$  est analytique et on a

$$\frac{k(\lambda) - k(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} \rightarrow k'(\lambda^*) = c^*.$$

En effet, puisque

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda} > 0,$$

On a

$$0 = \left( \frac{k(\lambda)}{\lambda} \right)' \Big|_{\lambda=\lambda^*} = \frac{k'(\lambda^*)\lambda^* - k(\lambda^*)}{\lambda^{*2}} = \frac{k'(\lambda^*)\lambda^* - c^*\lambda^*}{\lambda^{*2}} = \frac{k'(\lambda^*) - c^*}{\lambda^*}.$$

Par différentiabilité de  $\psi_\lambda$ ,  $v_\lambda$  converge dans  $C^2$  vers  $v^*$  quand  $\lambda \rightarrow \lambda^*$ , et  $v^*$  est solution de l'équation

$$(L_{\lambda^*} - k(\lambda^*))v^* = (c^* - 2\lambda^*)\psi^* - 2\psi^{*'}.$$

Autrement dit, en prenant  $\Psi^* = -v^*$ , on obtient bien une solution.

### 2.4.2 Existence par sous-solution et sur-solution

Les fonctions  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  vont être construite à partir des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} u^{(0)}(t, \xi) &= (-\xi\psi^*(\xi - c^*t) + \Psi^*(\xi - c^*t))e^{\lambda^*\xi}, \\ u^{(1)}(t, \xi) &= \psi^*(\xi - c^*t)e^{\lambda^*\xi}, \\ u^{(2)}(t, \xi) &= \psi_{\lambda^*+\delta}(\xi - c^*t)e^{(\lambda^*+\delta)\xi}, \end{aligned}$$

où  $\delta$  sera choisi suffisamment petit. On note par la suite

$$NL(u) = u_t - u_{\xi\xi} + c^*u_\xi - f(\xi - c^*t, u),$$

l'opérateur non-linéaire et

$$L(u) = u_t - u_{\xi\xi} + c^*u_\xi - \zeta(\xi - c^*t)u,$$

l'opérateur linéarisé au voisinage de  $u = 0$ .

#### La sur-solution

Considérons la fonction,

$$\bar{U}(t, \xi) = u^{(0)}(t, \xi) + Cu^{(1)}(t, x),$$

où  $C > 0$  est choisi tel que

$$\bar{U}(t, 0) = \Psi^*(-c^*t) + C\psi^*(-c^*t) \geq 1, \quad \forall t.$$

Ceci est possible car  $\Psi^*$  est bornée et  $\psi^* > 0$ . Remarquons que  $\bar{U}$  est solution de l'équation linéarisée  $L\bar{u} = 0$ , et vérifie donc

$$NL(\bar{U}) \geq 0,$$

puisque  $f(x, u) \leq \zeta(x)u$  d'après l'hypothèse (iv). C'est donc un candidat pour la sur-solution. Mais  $\overline{U}(t, \xi) \rightarrow -\infty$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$  donc nous devons modifier  $\overline{U}$  pour  $\xi \geq 0$ . On introduit alors l'abscisse

$$\overline{\xi}(t) := \inf\{\xi \in \mathbb{R}, \overline{U}(t, \xi) = 1\} \leq 0,$$

et on définit la fonction  $C^2$  par morceaux  $\overline{u}$  par

$$\overline{u}(t, \xi) = \begin{cases} \overline{U}(t, \xi) & \text{pour } \xi \leq \overline{\xi}(t), \\ 1 & \text{pour } \xi \geq \overline{\xi}(t). \end{cases}$$

Nous avons  $NL(\overline{u}) \geq 0$  pour  $(t, \xi) \neq (t, \overline{\xi}(t))$ ; de plus, le saut de la dérivée spatiale de  $\overline{u}$  est négatif. Donc  $\overline{u}$  est sur-solution faible, au sens des distributions :

$$NL(\overline{u}) \geq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'([0, 1/c^*] \times \mathbb{R}),$$

c'est à dire que pour toute fonction test positive  $\phi \in \mathcal{D}([0, 1/c^*] \times \mathbb{R})$ , on a

$$\int_{0, 1/c^*} \int_{\mathbb{R}} NL(\overline{u}) \phi \, dt d\xi \geq 0.$$

### La sous-solution

On considère maintenant la fonction  $\underline{U}$

$$\underline{U}(t, \xi) = u^{(0)}(t, \xi) - Au^{(1)}(t, \xi) + u^{(2)}(t, \xi),$$

où  $\delta$  et  $A$  sont deux constantes; on prend  $\delta \in ]0, \lambda_*/2[$ , et  $A$  sera fixé dans la suite pour avoir  $NL(\underline{U}) \leq 0$ . Comme pour la sur-solution, nous avons besoin de modifier  $\underline{U}$  pour obtenir une sous-solution intéressante. Notons que

$$\underline{U}(t, 0) = \Psi^*(-c^*t) - A\psi^*(-c^*t) + \psi_{\lambda^*+\delta}(-c^*t) \leq 0, \quad \forall t,$$

si  $A$  est suffisamment grand. On définit alors l'abscisse

$$\underline{\xi}(t) := \inf\{\xi \in \mathbb{R}, \underline{u}(t, \xi) = 0\} \leq 0,$$

et la fonction  $\underline{u}$  par

$$\underline{u}(t, \xi) = \begin{cases} \underline{U}(t, \xi) & \text{pour } \xi \leq \underline{\xi}(t), \\ 0 & \text{pour } \xi \geq \underline{\xi}(t). \end{cases}$$

Nous montrerons plus loin que pour  $A$  suffisamment grand, on a

$$NL(\underline{U}) \leq 0,$$

pour  $\xi \leq \underline{\xi}(t)$ . Par conséquent,  $NL(\underline{u}) \leq 0$  si  $\xi \neq \underline{\xi}(t)$ ; de plus,  $\underline{u}$  a un saut de dérivée positif au point  $\underline{\xi}(t)$ . Ceci montre que  $\underline{u}$  est une sous-solution faible.

Le point important est donc de montrer que

$$NL(\underline{U}) \leq 0,$$

pour  $\xi \leq \underline{\xi}(t)$  si on choisit  $A$  suffisamment grand. Puisque

$$\underline{U}(t, \xi) = (-\xi - A)\psi^*(\xi - c^*t)e^{\lambda_*\xi} + \Psi^*(\xi - c^*t)e^{\lambda_*\xi} + \psi_{\lambda_*+\delta}(\xi - c^*t)e^{(\lambda_*+\delta)\xi},$$

on a  $\underline{\xi}(t) > -A$ . De plus, il existe  $C$  indépendant de  $A$  tel que  $\underline{U}(t, \cdot)$  s'annule sur  $[-A, -A + C]$  pour tout  $t$ . On en déduit que

$$\underline{\xi}(t) = -A + C(t),$$

où  $C(t)$  est bornée en  $t$  et indépendante de  $A$ . Rappelons que  $u^{(2)}$  vérifie l'égalité

$$L(u^{(2)}) = -q_\delta u^{(2)},$$

avec  $q_\delta > 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} NL(\underline{U}) &= L(\underline{U}) + \zeta(\xi - c^*t)\underline{U} - f(\xi - c^*t, \underline{U}) \\ &= -q_\delta u^{(2)} + \zeta(\xi - c^*t)\underline{U} - f(\xi - c^*t, \underline{U}). \end{aligned}$$

On cherche alors à montrer que pour  $\xi \leq \underline{\xi}(t)$ .

$$\zeta(\xi - c^*t)\underline{U} - f(\xi - c^*t, \underline{U}) \leq q_\delta u^{(2)}.$$

Notons d'une part qu'il existe  $C_1 > 0$  tel que pour  $\xi \leq 0$ ,

$$|\underline{U}(t, \xi)| \leq C_1 A e^{3\lambda_*\xi/4},$$

et ainsi

$$\zeta(\xi - c^*t)\underline{U} - f(\xi - c^*t, \underline{U}) \leq C\underline{U}^2 \leq C_1^2 A^2 e^{3\lambda_*\xi/2}.$$

D'autre part,

$$qu^{(2)}(t, \xi) \geq qC_2 e^{(\lambda_*+\delta)\xi}.$$

Ainsi,  $NL(\underline{U}) \leq 0$  dès que

$$qC_2 e^{(\lambda_*+\delta)\xi} \geq C_1^2 e^{3\lambda_*\xi/2},$$

c'est dire si

$$\xi \leq \xi_A := \frac{1}{\lambda_*/2 - \delta} \left( -2 \ln A + \ln \frac{qC_2}{C_1^2} \right).$$

Puisque  $\underline{\xi}(t) = -A + C(t)$  avec  $C(t)$  bornée, on en déduit que  $\underline{\xi}(t) \leq \xi_A$  si on choisit  $A$  suffisamment grand.

### Existence de la solution

A l'aide de notre sur solution  $\bar{u}$  et de notre sous-solution  $\underline{u}$  vérifiant  $\underline{u} \leq \bar{u}$ , on peut construire une solution  $\tilde{u}$  du problème (2.3) telle que

$$\underline{u} \leq \tilde{u} \leq \bar{u}.$$

On considère pour cela l'opérateur période  $T$  défini par  $T(\tilde{u}_0)(\xi) = \tilde{u}(1/c^*, \xi)$ , où  $\tilde{u}(t, \xi)$  désigne la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c^*\tilde{u}_\xi = f(\xi - c^*t, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(0, \xi) = \tilde{u}_0(\xi). \end{cases}$$

On note alors  $\underline{u}^0(\xi) = \underline{u}(0, \xi)$  et  $\bar{u}^0(\xi) = \bar{u}(0, \xi)$ , qui vérifient  $\underline{u}^0 \leq \bar{u}^0$ . On considère alors la suite

$$\bar{u}^n = T^n(\bar{u}^0).$$

Alors la suite  $\bar{u}^n$  est décroissante et minorée : pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\underline{u}^0 \leq \bar{u}^{n+1} \leq \bar{u}^n \leq \bar{u}^0,$$

et pour  $n \geq 1$   $\bar{u}^n$  est  $C^2$ .

En effet,  $\bar{u}^1 = T(\bar{u}^0) = u(1/c^*, \xi)$ ,  $u$  étant la solution de

$$\begin{cases} u_t - u_{\xi\xi} + c^*u_\xi = f(\xi - c^*t, u), \\ u(0, \xi) = \bar{u}^0(\xi). \end{cases}$$

Notons tout d'abord qu'à partir de  $u(0, \xi) = \bar{u}^0(\xi)$   $C^2$  par morceaux, on obtient  $\bar{u}^1 = u(1/c^*, \xi)$  qui est  $C^{2+\alpha}$  par régularité. De plus, rappelons que

$$\begin{cases} NL(\bar{u}) \geq 0, \\ \bar{u}(0, \xi) = \bar{u}^0(\xi) \end{cases}$$

au sens des distributions. Si on note  $v = \bar{u} - u$ , on a alors

$$\begin{aligned} v_t - v_{\xi\xi} + c^*v_\xi &\geq f(\xi - c^*t, \bar{u}) - f(\xi - c^*t, u) \\ &= \frac{f(\xi - c^*t, \bar{u}) - f(\xi - c^*t, u)}{\bar{u} - u} (\bar{u} - u) \\ &= f'_u(\xi - c^*t, a(t, \xi))v \end{aligned}$$

où  $a$  est compris entre  $u$  et  $\bar{u}$ . Ainsi,

$$\begin{cases} v_t - v_{\xi\xi} + c^*v_\xi - f'_u(\xi - c^*t, a(t\xi))v \geq 0, \\ v(0, \xi) = 0, \end{cases}$$

au sens des distributions. Le principe du maximum assure alors que  $v \geq 0$ , c'est à dire  $u \leq \bar{u}$  et donc

$$\bar{u}^1(\xi) = u(1/c^*, \xi) \leq \bar{u}(1/c^*, \xi) = \bar{u}^0(\xi).$$

On obtient de la même façon que  $\underline{u}_0 \leq \bar{u}^1$ . Ainsi

$$\underline{u}_0 \leq \bar{u}^1 \leq \bar{u}^0.$$

On obtient alors par récurrence la propriété souhaitée.

On peut ainsi extraire de  $\bar{u}^n$  une sous-suite qui converge dans  $C_{loc}^2$  et on note  $\phi$  cette limite. Notons qu'alors toute la suite converge vers  $\phi$  par monotonie. L'opérateur  $T$  étant continu, le passage à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans la relation  $T(\bar{u}^n) = \bar{u}^{n+1}$  donne

$$T\phi = \phi.$$

On considère alors la solution  $\tilde{u}_{c^*}$  du problème de Cauchy associé à  $\phi(\xi)$

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c^*\tilde{u}_\xi = f(\xi - c^*t, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(0, \xi) = \phi(\xi). \end{cases}$$

Montrons qu'il s'agit de l'onde pulsatoire de vitesse  $c^*$ . La relation  $T\phi = \phi$  dit que  $\tilde{u}_{c^*}$  est  $1/c^*$ -périodique en  $t$ . Par l'inégalité  $\underline{u}^0 \leq \phi \leq \bar{u}^0$  et le principe du maximum, on obtient que pour tout  $t$

$$\underline{u}(t, \xi) \leq \tilde{u}_{c^*}(t, \xi) \leq \bar{u}(t, \xi).$$

Ainsi,  $\tilde{u}_{c^*}(t, -\infty) = 0$  et on a plus précisément

$$\tilde{u}_{c^*}(t, \xi) = -\xi e^{\lambda^* \xi} \psi^*(\xi - c^* t) + O(e^{\lambda^* \xi}), \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty.$$

Enfin, la limite  $\tilde{u}(t, +\infty) = 1$  s'obtient comme dans le cas des vitesses supérieures. Ceci conclut la preuve du théorème 2.1.1.

# DYNAMIQUE NON TRIVIALE EN TEMPS GRAND POUR UNE ÉQUATION DE TYPE KPP EN MILIEU PÉRIODIQUE

---

## 3.1 Introduction et résultats principaux

On s'intéresse dans ce chapitre au problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, u), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

pour une nonlinéarité  $f$  périodique en  $x$  et de type KPP. Plus précisément, on étudie la stabilité des ondes pulsatoires  $u_c$  construites au chapitre précédent. Ces ondes étant croissantes en  $t$  (cf [6]), on considère également la dynamique de (3.1) pour des données initiales comprises entre deux translatées en  $t$ . Ceci est possible grâce à la connaissance du comportement précis en  $-\infty$  de ces ondes. Notons que déjà dans le cadre homogène, l'étude de la dynamique de conditions initiales comprises entre deux translatées d'une onde progressive est nouvelle dans le cas KPP ; nous commençons par présenter les résultats obtenus dans ce cas.

### 3.1.1 Dynamique en milieu homogène

En milieu homogène, le problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

Précisons que nous considérons une nonlinéarité  $f \in C^2([0, 1])$  qui vérifie  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f(u) > 0$  pour  $u \in (0, 1)$  et  $f''(u) \leq 0$ .

Les résultats classiques de dynamique en temps grand pour (3.2) porte sur la stabilité et la convergence globale vers les ondes progressives pour des données initiales se comportant comme l'onde en  $-\infty$  [33, 84]. On s'intéresse ici à des données initiales  $u_0$  comprises entre deux translatées d'une onde progressive de vitesse  $c > c^*$ . On obtient un comportement nouveau en temps grand

**Théorème 3.1.1.** *Soient  $c > c^*$ ,  $M > 0$  et  $u(t, x)$  la solution du problème de Cauchy (3.2) avec*

$$\phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x + M).$$

Soit  $m(t, x)$  la solution du problème

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0, x) = \phi_c^{-1}(u_0(x)) - x. \end{cases} \quad (3.3)$$

Alors

(i) La fonction  $m$  vérifie les propriétés suivantes quand  $t \rightarrow +\infty$

$$0 \leq m(t, x) \leq M, \quad \|m_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \|m_x(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

(ii) Il existe  $\gamma > 0$  tel que si  $v(t, x) = |u(t, x) - \phi_c(x + ct + m(t, x))|$ , alors  $\tilde{v}(t, \xi) = v(t, \xi - ct)$  vérifie

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |e^{-\gamma\xi} \tilde{v}(t, \xi)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

**Remarque 3.1.1.** On peut montrer en fait que la convergence en (ii) est uniforme

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - \phi_c(x + ct + m(t, x))| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Ce résultat dit que le profil de  $u(t, x)$  converge localement vers celui de l'onde progressive puisque  $m_x \rightarrow 0$  mais  $u$  diffère de l'onde d'un shift qui varie de plus en plus lentement en temps grand ( $m_t \rightarrow 0$ ). Il est important de comprendre que la dynamique est réellement non triviale et que la solution ne converge pas à priori vers aucune translatée de l'onde progressive. L'équation du shift se ramène en effet à une équation d'advection diffusion pour laquelle il existe de nombreuses données initiales pour laquelle la solution ne converge même localement vers aucune constante ; certaines solutions oscillent même indéfiniment en temps grand [19, 89].

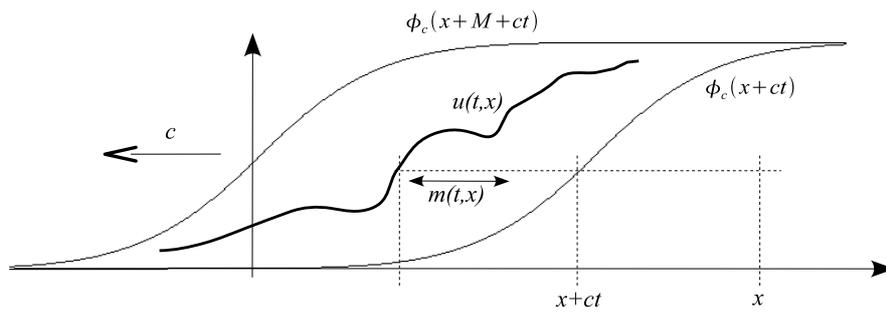


FIG. 3.1 – Dynamique non triviale en milieu homogène

### 3.1.2 Dynamique en milieu périodique

L'objectif de ce chapitre est d'étendre le résultat précédent au milieu périodique (3.1). La nonlinéarité  $f$  est choisie  $C^2(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R}^+)$  avec les propriétés suivantes :

(i)  $f$  est 1-périodique en  $x$ ,

- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, 0) = f(x, 1) = 0$  et  $f(x, u) > 0$  pour  $u \in (0, 1)$ ,
- (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}, f'_u(x, 0) := \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x, u)}{u} > 0$  et  $f'_u(x, 1) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{f(x, u)}{u-1} < 0$ ,
- (iv)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall u \in [0, 1], f''_u(x, u) \leq 0$ .

On note alors  $\zeta(x) := f'_u(x, 0)$ . La preuve de l'existence de dynamiques non triviales s'appuie sur celle des ondes pulsatoires au comportement précisé en  $-\infty$  construites au chapitre 2. Nous rappelons les notations et les résultats obtenus.

### Rappel : existence d'ondes pulsatoires au comportement précisé

Une onde pulsatoire est, via le changement de variables  $\tilde{u}(t, \xi) = u(t, \xi - ct)$ , une solution  $(c, \tilde{u})$  du problème

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_{\xi} = f(\xi - ct, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{u}(t, \xi), \\ \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{u}(t, +\infty) = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

On note  $L_\lambda$  l'opérateur

$$L_\lambda v = v'' + 2\lambda v' + (\lambda^2 + \zeta(x))v, \quad (3.5)$$

agissant sur les fonctions  $v \in C^2(\mathbb{R})$  1-périodique, et  $k(\lambda)$  la valeur propre principale de cet opérateur, qui est l'unique valeur propre associée à une fonction propre strictement positive. La vitesse minimale de propagation des ondes pulsatoires  $c^*$  est alors donnée par la formule suivante :

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda}. \quad (3.6)$$

On note également  $\lambda_c$  le plus petit  $\lambda > 0$  tel que  $k(\lambda) = c\lambda$  et  $\psi_{\lambda_c}$  une fonction propre strictement positive de l'opérateur  $L_{\lambda_c}$  associée à la valeur propre  $k(\lambda_c) = c\lambda_c$ . On a montré que pour tout  $c > c^*$ , le problème (3.4) possède une solution  $(c, \tilde{u}_c)$  qui a le comportement suivant quand  $\xi \rightarrow -\infty$  : il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\tilde{u}_c(t, \xi) = e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda_c + \delta)\xi}).$$

On note alors

$$u_c(t, x) = \tilde{u}_c(t, x + ct)$$

l'onde pulsatoire de vitesse  $c$  dans le repère initial.

### Dynamique non triviale en milieu périodique

Nous considérons le problème de Cauchy (3.1) pour des données initiales comprises entre deux translatées en temps d'une onde pulsatoire de vitesse  $c > c^*$  au comportement précisé à l'infini

$$u_c(0, x) \leq u_0(x) \leq u_c(M, x),$$

où  $M > 0$ . Nous montrons que la solution du problème de Cauchy  $u(t, x)$ , qui reste coincée entre les deux translatées de l'onde pour tout  $t \geq 0$

$$\forall t \geq 0, \quad u_c(t, x) \leq u(t, x) \leq u_c(t + M, x),$$

possède une dynamique similiaire à celle obtenue en milieu homogène :

**Théorème 3.1.2.** Soient  $c > c^*$ ,  $M > 0$  et  $u(t, x)$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, u), \\ u_c(0, x) \leq u(0, x) \leq u_c(M, x). \end{cases} \quad (3.7)$$

Soit  $m(t, x)$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right)m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0, x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x)). \end{cases} \quad (3.8)$$

Alors

(i) La fonction  $m(t, x)$  possède les propriétés suivantes quand  $t \rightarrow +\infty$  :

$$0 \leq m(t, x) \leq M, \quad \|m_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \|m_x(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

(ii) Il existe  $\gamma > 0$  tel que si  $v(t, x) = |u(t, x) - u_c(t + m(t, x), x)|$ , alors  $\tilde{v}(t, \xi) = v(t, \xi - ct)$  vérifie

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |e^{-\gamma\xi} \tilde{v}(t, \xi)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

**Remarque 3.1.2.** On peut montrer en fait que la convergence en (ii) est uniforme

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_c(t + m(t, x), x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Si la donnée initiale est comprise entre deux translatées de l'onde pulsatoire  $u_c$ , le théorème nous dit que le profil de la solution converge localement vers celui de l'onde puisque  $m_x \rightarrow 0$  mais la solution diffère de l'onde via le shift  $m(t, x)$  qui varie de plus en plus lentement en temps ( $m_t \rightarrow 0$ ). Notons que nous obtenons un taux de décroissance optimal sur les dérivées du shift puisque ce taux est le même que le taux optimal du cas homogène.

### Stabilité des ondes pulsatoires

Nous complétons ce chapitre par des résultats de stabilité des ondes pulsatoires. Nous commençons par la stabilité globale des ondes pulsatoires de vitesses supérieures avec taux de convergence exponentiel en temps. Ce résultat classique ne fait appel qu'à l'utilisation d'un espace à poids. Le deuxième résultat est plus intéressant puisqu'il porte sur l'onde de vitesse minimale qui est beaucoup plus délicate à étudier. Il établit que si on perturbe initialement l'onde pulsatoire de vitesse  $c^*$  par une fonction à support compact, alors la solution converge vers l'onde en  $t^{-1/2}$ . Ce résultat apporte une première contribution à l'étude du cas critique. C'est une conséquence de l'étude fine de l'équation (3.8).

**Théorème 3.1.3.** Soient  $c > c^*$  et  $\tilde{u}(t, \xi)$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(0, \xi) = \tilde{u}_0(\xi), \end{cases}$$

où  $\tilde{u}_0(x) \in [0, 1]$  satisfait les propriétés suivantes avec  $\varepsilon > 0$

(i)  $\tilde{u}_0(\xi) = \tilde{u}_c(0, \xi) + O(e^{(\lambda_c + \varepsilon)\xi})$  quand  $\xi \rightarrow -\infty$ ,

(ii)  $\liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0(\xi) > 0$ .

Il existe alors  $\gamma > 0$  tel que

$$\|\tilde{u}(t, \cdot) - \tilde{u}_c(t, \cdot)\|_\infty = O(e^{-\gamma t}).$$

**Théorème 3.1.4.** Soit  $\tilde{u}(t, \xi)$  la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c^* \tilde{u}_\xi = f(\xi - c^*t, \tilde{u}), \\ \tilde{u}(0, \xi) = \tilde{u}_0(\xi), \end{cases}$$

où

$$\tilde{u}_0(\xi) = \tilde{u}_{c^*}(0, \xi) + \tilde{w}_0(\xi) \in [0, 1],$$

avec  $\tilde{w}_0(\xi)$  à support compact. Alors,

$$\|\tilde{u}(t, \cdot) - \tilde{u}_{c^*}(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

### 3.1.3 Plan du chapitre

Nous présentons dans la section suivante la preuve du cas homogène. Cette démonstration ne se généralise qu'en partie au milieu périodique car l'étude de l'équation du shift est alors bien plus difficile que dans le cas homogène où elle se ramène à une équation d'advection-diffusion à coefficients constants. Nous présentons ainsi dans la section 3.3 notre stratégie d'étude du shift en commençant par le cas simplifié du milieu homogène pour lequel les calculs sont explicites. Nous généralisons ensuite ce résultat au milieu périodique en commençant par montrer la convergence en temps grand vers le profil attendu (section 3.4) puis en établissant les propriétés du shift dans la section 3.5.

## 3.2 Le cas homogène : preuve directe

Dans cette section, nous démontrons le théorème 3.1.1. On considère ainsi pour  $c > c^*$  et  $M > 0$  la solution  $u(t, x)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(u), \\ \phi_c(x) \leq u_0(x) \leq \phi_c(x + M). \end{cases}$$

On cherche le comportement en temps grand de la solution  $u(t, x)$  sous la forme  $U(t, x) = \phi_c(x + ct + m(t, x))$ . Nous commençons par déterminer l'équation et les propriétés du shift  $m$  puis nous montrons la convergence en temps grand de  $u$  vers  $U$ .

### 3.2.1 L'équation et les propriétés du shift

La fonction  $U(t, x) = \phi_c(x + ct + m(t, x))$  est solution de l'équation

$$U_t - U_{xx} = (-\phi_c'' + c\phi_c') + (\phi_c'(m_t - m_{xx}) - \phi_c''(2m_x + m_x^2)),$$

c'est à dire

$$U_t - U_{xx} - f(U) = \phi_c'(m_t - m_{xx}) - \phi_c''(2m_x + m_x^2).$$

Notons qu'on pourrait chercher la solution du problème de Cauchy directement sous la forme

$$u(t, x) = \phi_c(x + ct + m(t, x)),$$

ce qui revient à annuler le membre de droite dans l'équation précédente. On aurait alors l'équation suivante sur le shift

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - \frac{\phi_c''}{\phi_c'}(2m_x + m_x^2) = 0, \\ m_0(x) = \phi_c^{-1}(v_0(x)) - x. \end{cases}$$

Cette équation est parabolique, nonlinéaire et à coefficients variables et il est donc difficile d'obtenir des propriétés fines de la solution d'une telle équation.

Nous allons procéder différemment en obtenant une équation plus simple sur le shift qu'on pourra étudier mais en contrepartie il faudra montrer la convergence en temps grand vers le profil  $U$ . Nous écrivons l'équation de  $U$  plutôt sous la forme suivante

$$U_t - U_{xx} - f(U) = \phi_c'(m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2) - (\phi_c'' - \lambda_c \phi_c')(2m_x + m_x^2).$$

L'idée est de choisir  $m(t, x)$  de sorte que le membre de droite de l'équation précédente ait une décroissance exponentielle plus rapide que l'onde progressive  $\phi_c$ . Ceci permettra de montrer la convergence vers le profil  $U$  en temps grand dans un espace à poids. Rappelons pour cela que si  $c > c^*$ , alors il existe  $A > 0$  et  $\delta > 0$  tels que pour  $x \rightarrow -\infty$ ,

$$\phi_c(x) = Ae^{\lambda_c x} + O(e^{(\lambda_c + \delta)x}),$$

$$\phi_c'(x) = A\lambda_c e^{\lambda_c x} + O(e^{(\lambda_c + \delta)x}),$$

$$\phi_c''(x) = A\lambda_c^2 e^{\lambda_c x} + O(e^{(\lambda_c + \delta)x}).$$

Ainsi, le terme  $\phi_c'' - \lambda_c \phi_c'$  est un  $O(e^{(\lambda_c + \delta)x})$ , mais ce n'est pas le cas de  $\phi_c'$  qui se comporte comme  $\phi_c$ . On choisit donc  $m(t, x)$  qui annule le terme en  $\phi_c'$ , c'est à dire qui vérifie l'équation

$$m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0.$$

On choisit de plus  $m_0$  de sorte que  $U(0, x) = \phi_c(x + m_0(x)) = u_0$ . Ceci est possible car  $\phi_c$  est strictement croissante donc inversible et donc on choisit  $m_0(x) = \phi_c^{-1}(u_0(x)) - x$ .

Le shift  $m$  vérifie l'équation parabolique non-linéaire

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - \lambda_c m_x^2 = 0, \\ m_0(x) = \phi_c^{-1}(u_0(x)) - x. \end{cases}$$

Notons que, d'après les hypothèses,  $m_0(x)$  est bornée avec  $0 \leq m_0(x) \leq M$ . Pour étudier une telle équation, on effectue la transformation de Hopf-Cole  $w(t, x) = e^{\lambda_c m(t, x)}$ ,  $w$  étant alors solution de l'équation d'advection-diffusion

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x = 0, \\ w_0(x) = w(0, x) = \exp(\lambda_c(\phi_c^{-1}(u_0(x)) - x)), \end{cases}$$

avec  $w_0$  bornée. La fonction  $w$  a alors les propriétés suivantes quand  $t \rightarrow +\infty$

$$\|w_x(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \|w_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Pour montrer ceci, on peut effectuer le nouveau changement de variable

$$W(t, x) = w(t, x - 2\lambda_c t),$$

qui permet d'obtenir l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} W_t - W_{xx} = 0, \\ W_0(x) = w_0(x) \geq 0 \text{ et bornée.} \end{cases}$$

Puisque  $w_t = W_t + 2\lambda_c W_x$  et  $w_x = W_x$ , il suffit alors d'appliquer le résultat suivant

**Lemme 3.2.1.** *La solution  $W(t, x)$  de l'équation de la chaleur est bornée  $\|W(t, \cdot)\|_\infty \leq \|W_0\|_\infty$  et vérifie les estimations suivantes :*

$$\|W_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad \|W_x(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

*Démonstration.* La solution s'écrit grâce au noyau de la chaleur

$$W(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t} W_0(y) dy.$$

La dérivée en  $x$  est

$$\begin{aligned} W_x(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{y-x}{2t} e^{-(x-y)^2/4t} W_0(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} z e^{-z^2} W_0(x + 2\sqrt{t}z) dz, \end{aligned}$$

par le changement de variable  $y = x + 2\sqrt{t}z$ . Ainsi,

$$|W_x(t, x)| \leq \frac{\|W_0\|_\infty}{\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |z| e^{-z^2} dz \leq \frac{\|W_0\|_\infty}{\sqrt{\pi t}} = \frac{C}{\sqrt{t}}$$

Passons à la dérivée en  $t$ . On obtient

$$\begin{aligned} W_t(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{-1}{2t^{3/2}} + \frac{(y-x)^2}{4t^2} \right) e^{-(x-y)^2/4t} W_0(y) dy. \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2z-1}{t} e^{-z^2} W_0(x + 2\sqrt{t}z) dz. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|W_t(t, x)| \leq \frac{\|W_0\|_\infty}{t\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} (2|z| + 1) e^{-z^2} dz \leq \frac{C}{t}.$$

□

Revenons à l'équation sur  $U$ . Elle s'écrit

$$U_t - U_{xx} - f(U) = -g(t, x),$$

avec

$$g(t, x) = (2m_x + m_x^2)(\phi_c'' - \lambda_c \phi_c').$$

Puisque  $\lambda_c m_x = w_x e^{-\lambda_c m}$  et  $m \geq 0$ , on a  $|m_x| \leq |w_x|/\lambda_c$ , d'où le second membre de l'équation a les propriétés fondamentales suivantes :

$$|2m_x + m_x^2| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad |\phi_c'' - \lambda_c \phi_c'| = O(e^{(\lambda_c + \delta)(x+ct)}).$$

### 3.2.2 Convergence dans l'espace à poids

Montrons maintenant la convergence de  $u$  vers  $U$ .

**Lemme 3.2.2.** *Soit  $v(t, x) = u(t, x) - U(t, x)$ . Alors il existe  $\gamma > 0$  tel que  $\tilde{v}(t, \xi) = v(t, \xi - ct)$  vérifie*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |e^{-\gamma\xi} \tilde{v}(t, \xi)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

*Démonstration.* On va estimer la différence  $v = u - U$ , l'autre différence  $U - u$  s'estimant de manière identique. La fonction  $v$  vérifie l'équation

$$v_t - v_{xx} = f(u) - f(U) + g(t, x).$$

Un développement de Taylor à l'ordre deux donne

$$f(u) = f(U) + f'(U)(u - U) + \frac{1}{2}f''(a)(u - U)^2,$$

pour un certain  $u \leq a \leq U$ . Puisque  $f'' \leq 0$  et  $f'(U) \leq f'(0)$ , on a alors

$$f(u) - f(U) \leq f'(0)v.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} - f'(0)v \leq g(t, x), \\ v(0, x) = 0, \end{cases}$$

avec

$$g(t, x) = (2m_x + m_x^2)(\phi_c'' - \lambda_c \phi_c').$$

On se place ensuite dans le repère de l'onde en posant  $\tilde{v}(t, \xi) = v(t, \xi - ct)$ ,  $\tilde{v}$  vérifiant alors

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi - f'(0)\tilde{v} \leq g(t, \xi - ct), \\ \tilde{v}(0, x) = 0, \end{cases}$$

où  $g(t, \xi - ct) = (2m_x + m_x^2)(\phi_c'' - \lambda_c \phi_c')$ , avec

$$|2m_x + m_x^2| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad |\phi_c'' - \lambda_c \phi_c'| = O(e^{(\lambda_c + \delta)\xi}).$$

Pour montrer la convergence de  $\tilde{v}$  vers 0, on se place dans l'espace à poids :

$$X_\gamma := \{u \in BUC(\mathbb{R}), e^{-\gamma x} u(x) \in BUC(\mathbb{R})\}, \quad \|u\|_\gamma = \|e^{-\gamma x} u(x)\|_\infty.$$

Le poids est choisi afin de travailler avec un nouvel opérateur dont le terme d'ordre 0 est strictement positif. L'inéquation sur  $\tilde{v}$  s'écrit

$$\tilde{v}_t + L\tilde{v} \leq g(t, \xi - ct)$$

avec

$$L := -\frac{d^2}{d\xi^2} + c\frac{d}{d\xi} - f'(0)Id.$$

Se placer dans l'espace à poids revient à effectuer le changement de variables  $z(t, \xi) = e^{-\gamma\xi}\tilde{v}(t, \xi)$ . On obtient alors

$$z_t + \mathcal{L}z \leq e^{-\gamma\xi}g(t, \xi - ct)$$

où le nouvel opérateur  $\mathcal{L}$  est

$$\mathcal{L} := -\frac{d^2}{d\xi^2} + (c - 2\gamma)\frac{d}{d\xi} + (-\gamma^2 + c\gamma - f'(0))Id.$$

On choisit alors  $\gamma$  pour que  $q_\gamma := -\gamma^2 + c\gamma - f'(0) > 0$ , ce qui revient à prendre

$$\lambda_c = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} < \gamma < \frac{c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}.$$

Le problème complet sur  $z$  est

$$\begin{cases} z_t + \mathcal{L}z \leq G(t, \xi) := e^{-\gamma\xi}g(t, \xi - ct), \\ z(0, x) = 0. \end{cases}$$

Notons que

$$G(t, \xi) \leq |2m_x + m_x^2|e^{-\gamma\xi}|\phi_c'' - \lambda_c\phi_c'|$$

où  $|2m_x + m_x^2|$  est borné et  $|\phi_c'' - \lambda_c\phi_c'| = O(e^{(\lambda_c + \delta)\xi})$ . On en déduit que si on choisit  $\gamma < \lambda_c + \delta$  alors  $G$  est bornée. On choisit définitivement  $\gamma$  dans l'intervalle  $]\lambda_c, \lambda_c + \delta[$ . Il existe ainsi  $C > 0$  tel que

$$G(t, \xi) \leq \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

On considère alors la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} Z_t + q_\gamma Z = \frac{C}{\sqrt{t}}, \\ Z(0) = 0, \end{cases}$$

qui est donnée par la formule

$$Z(t) = C \int_0^t \frac{e^{-q_\gamma(t-s)}}{\sqrt{s}} ds.$$

Notons que

$$\begin{cases} (Z - z)_t + \mathcal{L}(Z - z) \geq \frac{C}{\sqrt{t}} - G(t, \xi) \geq 0, \\ (Z - z)(0, x) = 0, \end{cases}$$

donc d'après le principe du maximum, nous avons  $z(t, \xi) \leq Z(t)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ , c'est à dire

$$\tilde{v}(t, \xi) \leq e^{\gamma\xi}Z(t).$$

On procède de même avec  $-v = U - u$  en remplaçant  $f$  et  $g$  par  $-f$  et  $-g$ . On obtient ainsi

$$-\tilde{v}(t, \xi) \leq e^{\gamma\xi}Z(t),$$

Il reste à montrer que  $Z(t)$  décroît comme  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ . Pour étudier  $Z(t)$ , on l'écrit sous la forme

$$Z(t) = e^{-q_\gamma t} \int_0^t \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} ds$$

et on remarque que

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} \right) = q_\gamma \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} - \frac{e^{q_\gamma s}}{2s^{3/2}}.$$

Ainsi,

$$\frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} \sim \frac{1}{q_\gamma} \frac{d}{ds} \left( \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} \right)$$

quand  $s \rightarrow +\infty$ . Puisque

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} ds = +\infty,$$

on a équivalence des sommes partielles c'est à dire que pour  $t \rightarrow +\infty$

$$\int_1^t \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} ds \sim \frac{1}{q_\gamma} \int_1^t \frac{d}{ds} \left( \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} \right) ds = \frac{1}{q_\gamma} \left( \frac{e^{q_\gamma t}}{\sqrt{t}} - e^{q_\gamma} \right).$$

Finalement, puisque

$$\int_0^t \frac{e^{-q_\gamma(t-s)}}{\sqrt{s}} ds = e^{-q_\gamma t} \int_0^1 \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} ds + e^{-q_\gamma t} \int_1^t \frac{e^{q_\gamma s}}{\sqrt{s}} ds,$$

on a bien le comportement souhaité

$$\int_0^t \frac{e^{-q_\gamma(t-s)}}{\sqrt{s}} ds = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

□

### 3.3 Le cas homogène : étude du shift par la méthode générale

La démonstration précédente ne se généralise qu'en partie au cas périodique. Nous verrons dans la section suivante qu'on montre de la même façon la convergence vers le bon profil dans un espace à poids bien choisi. Cependant l'étude des propriétés du shift est bien plus difficile en milieu périodique. En effet, l'équation du shift

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\left(\lambda_c + \frac{\phi_c'}{\phi_c}\right)m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0, x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x)) \text{ bornée,} \end{cases}$$

se ramène par la transformation de Hopf-Cole

$$w(t, x) = \phi_c(x) e^{c\lambda_c m(t, x)}, \quad m(t, x) = \frac{1}{c\lambda_c} \log \left( \frac{w(t, x)}{\phi_c(x)} \right),$$

à l'équation linéaire suivante

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x + (c\lambda_c - \lambda_c^2 - \zeta(x))w = 0, \\ w(0, x) = \phi_c(x) \exp(c\lambda_c u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x))) \text{ bornée.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Cette équation est linéaire mais à coefficients périodiques, donc on ne connaît pas explicitement le semi-groupe d'évolution associé à l'équation. L'étude des propriétés de la solution est ainsi délicate et nous la détaillons dans la section 3.5. Dans cette section d'introduction au cas périodique, nous commençons par mettre en oeuvre notre stratégie d'étude du shift dans le cas homogène  $Y_p = 1$  pour lequel les calculs sont explicites.

Dans le cas homogène, l'équation sur le shift se réduit à

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\lambda_c m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \\ m(0, x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x)). \end{cases}$$

Nous avons vu que la transformation de Hopf-Cole

$$w(t, x) = e^{c\lambda_c m(t, x)}, \quad m(t, x) = \frac{1}{c\lambda_c} \log(w(t, x))$$

permet de se ramener à l'équation linéaire suivante sur  $w$  :

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x = 0, \\ w(0, x) = \phi_c(x) \exp(c\lambda_c u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x))). \end{cases}$$

Le but de cette section est de montrer les estimations suivantes sur  $w$  en temps grand, sans utiliser la solution explicite de l'équation, mais avec une stratégie qui se généralise au cas périodique.

**Proposition 3.3.1.** *On a les estimations suivantes quand  $t \rightarrow +\infty$  :*

$$\|w_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \|w_x(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Pour étudier le comportement en temps grand du shift, on utilise la théorie des semi-groupes. L'opérateur elliptique associé à l'équation d'évolution

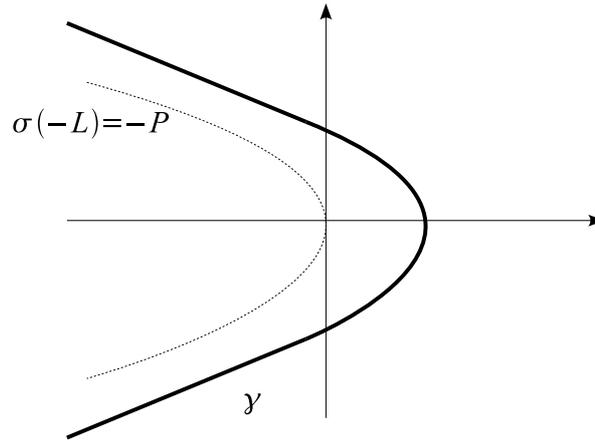
$$L := -\frac{d^2}{dx^2} - 2\lambda_c \frac{d}{dx},$$

est un opérateur sectoriel dans l'espace  $BUC(\mathbb{R})$  des fonctions bornées uniformément continues. Nous verrons qu'un point important est que le spectre de cet opérateur ne possède pas d'éléments de partie réelle négative à l'exception de 0. Ici on connaît en fait explicitement le spectre de  $L$  : il est donné par la parabole dans le plan complexe [45]

$$P = \{\xi^2 - 2\lambda_c i\xi, \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Puisque  $L$  est sectoriel, l'opérateur  $-L$  engendre ainsi un semi-groupe analytique  $e^{-tL}$  [45] et donc le shift s'écrit

$$w(t, x) = e^{-tL} w_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{t\lambda} (\lambda I + L)^{-1} w_0(x) d\lambda,$$

FIG. 3.2 – chemin d'intégration  $\gamma$ .

où  $\gamma$  est un chemin classique qui entoure le spectre de  $-L$  (cf figure 3.2).

Dans la suite, on pose

$$u(\lambda, x) := (\lambda I + L)^{-1} w_0(x).$$

qui est solution de l'équation différentielle

$$-u'' - 2\lambda_c u' + \lambda u = w_0. \quad (3.10)$$

La fonction  $u$  est la transformée de Laplace en  $t$  de  $w$  définie de manière classique par

$$u(\lambda, x) = \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} w(t, x) dt.$$

Il existe un lien étroit entre le comportement à l'infini d'une fonction réelle  $u(t)$  et celui de sa transformée de Laplace au voisinage de  $\lambda = 0$ . On est ainsi amené à étudier  $u(\lambda, x)$  au voisinage de  $\lambda = 0$  en tant qu'unique solution bornée de l'équation différentielle (3.10).

Pour étudier les propriétés de  $w$

$$w(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda,$$

on cherche à capter le terme dominant qui s'obtient en déformant le contour  $\gamma$  en la droite  $i\mathbb{R}$  et en remplaçant  $u(\lambda, x)$  par son terme dominant au voisinage de  $\lambda = 0$ . Cette déformation est néanmoins délicate du fait de la non intégrabilité de  $u(\lambda, x)$  au voisinage de  $\lambda = 0$ . Nous travaillerons ainsi sur la dérivée  $w_{tt}$

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{t\lambda} \lambda^2 u(\lambda, x) d\lambda$$

qui permet un gain d'intégrabilité et montrons que  $\|w_{tt}(t, \cdot)\|_{\infty} = O(1/t)$ . En intégrant en temps et en utilisant l'équation, ceci permettra d'obtenir les informations sur les dérivées de  $w$ .

### 3.3.1 Etude de l'équation différentielle

#### L'équation homogène.

L'équation homogène

$$-u'' - 2\lambda_c u' + \lambda u = 0$$

possède deux solutions indépendantes

$$u_1(\lambda, x) = e^{-\lambda_c(1-\delta(\lambda))x},$$

$$u_2(\lambda, x) = \frac{u_1(x, \lambda)}{2\lambda_c\delta(\lambda)} e^{-2\lambda_c\delta(\lambda)x} = \frac{1}{2\lambda_c\delta(\lambda)} e^{-\lambda_c(1+\delta(\lambda))x},$$

où

$$\delta(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\lambda_c^2}}.$$

Ici,  $\sqrt{z} = e^{\ln(z)/2}$ , où  $\ln$  désigne la détermination du logarithme définie sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  et telle que  $\ln(1) = 0$ . Le coefficient devant  $u_2$  sert de normalisation pour pouvoir écrire  $u_2$  sous la forme intégrale

$$u_2(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} e^{-2\lambda_c\delta(\lambda)y} dy.$$

Dans le cas général, nous n'aurons plus explicitement les solutions  $u_1$  et  $u_2$ , mais juste  $u_2$  en fonction de  $u_1$  par une formule intégrale (variation des constantes). L'important en vu d'étudier la dynamique en temps grand de  $w(t, x)$  est d'obtenir un développement limité de  $u_1(\lambda, x)$  à l'ordre deux en  $\lambda$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Ici, puisque

$$\delta(\lambda) = 1 + \frac{1}{2\lambda_c^2}\lambda - \frac{1}{8\lambda_c^4}\lambda^2 + O(\lambda^3),$$

nous avons

$$u_1(\lambda, x) = \exp\left(\left(\frac{1}{2\lambda_c}\lambda - \frac{1}{8\lambda_c^3}\lambda^2 + O(\lambda^3)\right)x\right).$$

Un autre point essentiel est de noter que si  $\lambda \neq 0$  est tel que  $\Re(\lambda) \geq 0$ , alors  $\Re(\delta(\lambda)) > 1$  et donc

$$u_1(\lambda, x) = e^{\mu_1 x} \quad \text{et} \quad u_2(\lambda, x) = \frac{1}{2\lambda_c\delta(\lambda)} e^{\mu_2 x},$$

avec  $\Re(\mu_1) > 0$  et  $\Re(\mu_2) < -2\lambda_c$  puisque  $\mu_1 + \mu_2 = -2\lambda_c$ .

#### L'équation non homogène.

Nous montrons ici que le spectre de  $-L$  n'a pas d'éléments de partie réelle positive sauf en  $\lambda = 0$ . On construit pour cela l'unique solution bornée de l'équation non homogène :

**Lemme 3.3.2.** *Soient  $w_0 \in BUC(\mathbb{R})$  et  $\lambda \neq 0$  tel que  $\Re(\lambda) \geq 0$ . Alors il existe une unique solution bornée de l'équation différentielle*

$$-u'' - 2\lambda_c u' + \lambda u = w_0$$

donnée par la relation

$$u(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} u_2(\lambda, y) w_0(y) e^{2\lambda_c y} dy + u_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^x u_1(\lambda, y) w_0(y) e^{2\lambda_c y} dy.$$

**Remarque 3.3.1.** Le résultat reste vrai pour toute valeur  $\lambda \in \rho(-L)$  mais le résultat ci-dessus est suffisant pour la suite.

*Démonstration.* On cherche la solution par variation de la constante

$$u(\lambda, x) = \alpha(\lambda, x)u_1(\lambda, x) + \beta(\lambda, x)u_2(\lambda, x).$$

Notons tout d'abord que le wronskien est donné par

$$W(x) = u_1u_2' - u_2u_1' = -e^{-2\lambda_c x}.$$

Le couple  $(\alpha', \beta')$  est solution du système linéaire

$$\begin{cases} \alpha'u_1 + \beta'u_2 = 0, \\ \alpha'u_1' + \beta'u_2' = -w_0. \end{cases}$$

On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \alpha'(\lambda, x) &= -u_2(\lambda, x)w_0(x)e^{2\lambda_c x} = -\frac{w_0(x)}{2\lambda_c\delta(\lambda)}e^{(\mu_2+2\lambda_c)x}, \\ \beta'(\lambda, x) &= u_1(\lambda, x)w_0(x)e^{2\lambda_c x} = w_0(x)e^{(\mu_1+2\lambda_c)x}, \end{aligned}$$

avec  $\Re(\mu_2+2\lambda_c) < 0$  et  $\Re(\mu_1+2\lambda_c) > 0$ . Ainsi,  $\alpha'(\lambda, x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\beta'(\lambda, x)$  sur  $\mathbb{R}^-$ , d'où

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda, x) &= \alpha_0 + \int_x^{+\infty} u_2(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy, \\ \beta(\lambda, x) &= \beta_0 + \int_{-\infty}^x u_1(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} u(\lambda, x) &= \alpha_0 u_1(\lambda, x) + u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} u_2(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy \\ &\quad + \beta_0 u_2(\lambda, x) + u_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^x u_1(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy. \end{aligned}$$

Notons que  $|\alpha_0 u_1(\lambda, x)| \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et que  $|\beta_0 u_2(\lambda, x)| \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow -\infty$ . Les deux autres termes sont bornés. On obtient par exemple pour le premier

$$\begin{aligned} |u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} u_2(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy| &\leq C e^{\Re(\mu_1)x} \int_x^{+\infty} |u_2(\lambda, y)| e^{2\lambda_c y} dy \\ &\leq C e^{\Re(\mu_1)x} \int_x^{+\infty} e^{(\Re(\mu_2)+2\lambda_c)y} dy \\ &\leq C e^{(\Re(\mu_1+\mu_2)+2\lambda_c)x} \leq C, \end{aligned}$$

puisque  $\mu_1 + \mu_2 = -2\lambda_c$ . On en déduit que l'unique solution bornée s'obtient pour  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ .  $\square$

D'après le lemme précédent, on a la formule intégrale suivante sur  $u(\lambda, x)$  :

$$u(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} u_2(\lambda, y) w_0(y) e^{2\lambda_c y} dy + u_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^x u_1(\lambda, y) w_0(y) e^{2\lambda_c y} dy.$$

En remplaçant  $u_1$  par  $e^{-\lambda_c(1-\delta(\lambda))x}$  et  $u_2$  par

$$u_2(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} e^{-2\lambda_c \delta(\lambda) y} dy = e^{-\lambda_c(1-\delta(\lambda))x} \int_x^{+\infty} e^{-2\lambda_c \delta(\lambda) y} dy,$$

on obtient finalement :

$$u(\lambda, x) = \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{-\lambda_c \delta(\lambda)(2z-y-x)} e^{\lambda_c(y-x)} dz dy. \quad (3.11)$$

### 3.3.2 Approximation de $u$ et estimations

Pour étudier le comportement en temps grand du shift  $w$ , il est nécessaire d'étudier le comportement au voisinage de  $\lambda = 0$  de sa transformée de Laplace. Afin d'obtenir une approximation de  $u(\lambda, x)$  au voisinage de  $\lambda = 0$ , on remplace dans l'expression (3.11)  $\delta(\lambda)$  par son développement limité jusqu'à l'ordre deux en  $\lambda = 0$

$$\delta(\lambda) \sim 1 + \frac{1}{2\lambda_c^2} \lambda - \frac{1}{8\lambda_c^4} \lambda^2,$$

on obtient l'expression tronquée  $u_{tq}$  de  $u$  au voisinage de  $\lambda = 0$

$$u_{tq}(\lambda, x) := \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{\left(-\frac{\lambda}{2\lambda_c} + \frac{\lambda^2}{8\lambda_c^3}\right)(2z-y-x)} dz dy. \quad (3.12)$$

Nous commençons par une remarque

**Remarque 3.3.2.** La fonction  $\omega \rightarrow u_{tq}(i\omega, x)$  n'est pas à priori intégrable au voisinage de  $\omega = 0$ . Pour voir ceci, on prend le cas  $w_0 = 1$ . On a alors

$$u_{tq}(i\omega, x) := \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{\left(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}\right)(2z-y-x)} dz dy.$$

Regardons séparément les deux intégrales. La première donne

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} e^{2\lambda_c(y-z)} e^{\left(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}\right)(2z-y-x)} dz dy \\ &= \int_{y=x}^{+\infty} \left( \int_{z=y}^{+\infty} e^{-\left(\frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3} + 2\lambda_c\right)z} dz \right) e^{(x+y)\left(\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}\right)} e^{2\lambda_c y} dy \\ &= \int_{y=x}^{+\infty} \left[ \frac{e^{-\left(\frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3} + 2\lambda_c\right)z}}{\left(\frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3} + 2\lambda_c\right)} \right]_{z=y}^{+\infty} e^{(x+y)\left(\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}\right)} e^{2\lambda_c y} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{y=x}^{+\infty} \frac{e^{-(\frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3} + 2\lambda_c)y}}{(\frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3} + 2\lambda_c)} e^{(x+y)(\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})} e^{2\lambda_c y} dy \\
&= \frac{e^{(\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})x}}{(\frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3} + 2\lambda_c)} \int_{y=x}^{+\infty} e^{-(\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})y} dy \\
&= \frac{e^{(\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})x}}{(\frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3} + 2\lambda_c)} \left[ -\frac{e^{-(\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})y}}{\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}} \right]_{y=x}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}} \frac{1}{\frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3} + 2\lambda_c} \\
&= 32\lambda_c^6 \left( \frac{1}{\omega} \right) \left( \frac{1}{\omega + 4\lambda_c^2 i} \right) \left( \frac{1}{\omega^2 + 4\lambda_c^2 i\omega + 8\lambda_c^4} \right).
\end{aligned}$$

On a donc une explosion en  $1/\omega$  au voisinage de  $\omega = 0$ . Notons que cette singularité n'apparaît pas pour la deuxième intégrale puisqu'on obtient

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} dz dy \\
&= e^{(\frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})x} \int_{y=-\infty}^x e^{(2\lambda_c + \frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})y} dy \int_{z=x}^{+\infty} e^{-(2\lambda_c + \frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3})z} dz \\
&= \frac{1}{2\lambda_c + \frac{i\omega}{2\lambda_c} + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}} \frac{1}{2\lambda_c + \frac{i\omega}{\lambda_c} + \frac{\omega^2}{4\lambda_c^3}} \\
&= 32\lambda_c^6 \left( \frac{1}{16\lambda_c^4 + 4\lambda_c^2 i\omega + \omega^2} \right) \left( \frac{1}{8\lambda_c^4 + 2\lambda_c^2 i\omega + \omega^2} \right).
\end{aligned}$$

**Lemme 3.3.3.** *La fonction  $\omega \rightarrow \omega^2 u_{tq}(i\omega, x)$  est  $L^1(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Puisque  $w_0$  est bornée, on a

$$|\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)| \leq C\omega^2 \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}(2z-y-x)} dz dy.$$

On reprend les mêmes calculs que précédemment mais sans les termes complexes. On obtient finalement

$$\begin{aligned}
|\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)| &\leq 32\lambda_c^6 C\omega^2 \left( \frac{1}{\omega^2 \omega^2 + 8\lambda_c^4} + \frac{1}{16\lambda_c^4 + \omega^2} \frac{1}{8\lambda_c^4 + \omega^2} \right) \\
&= 32\lambda_c^6 C \left( \frac{1}{\omega^2 + 8\lambda_c^4} + \frac{\omega^2}{(16\lambda_c^4 + \omega^2)(8\lambda_c^4 + \omega^2)} \right)
\end{aligned}$$

On a majoré  $|\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)|$  par une fonction qui est bien  $L^1$  puisque elle est bornée au voisinage de  $\omega = 0$  et est équivalente  $C'/\omega^2$  quand  $\omega \rightarrow \pm\infty$ .  $\square$

**Lemme 3.3.4.** *Pour tout  $\delta > 0$ , l'application  $\omega \rightarrow \frac{d}{d\omega}(\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)) \in L^1([\delta, +\infty))$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord,

$$\omega^2 u_{tq}(i\omega, x) = \omega^2 \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} dz dy.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega}(\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)) &= 2\omega u_{tq}(i\omega, x) - \frac{(2\lambda_c^2 i + 2\omega)(\omega^2)}{4\lambda_c^3} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \\ &\quad w_0(y)(2z - y - x) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} dz dy. \end{aligned}$$

La fonction  $\omega u_{tq}(i\omega, x)$  est intégrable, regardons l'autre terme. Pour la première intégrale, on a

$$\begin{aligned} & \left| - \frac{(2\lambda_c^2 i + 2\omega)(\omega^2)}{4\lambda_c^3} \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} w_0(y)(2z - y - x) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} dz dy \right| \\ & \leq C(2\lambda_c^2 + \omega)\omega^2 \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} (2z - y - x) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}(2z-y-x)} dz dy. \end{aligned}$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned} & \int_{z=y}^{+\infty} (2z - y - x) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}(2z-y-x)} dz \\ & = e^{\lambda_c(y-x)} \int_{z=y}^{+\infty} (2z - y - x) e^{-\lambda_c(2z-y-x)} e^{-\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}(2z-y-x)} dz \\ & = \frac{e^{\lambda_c(y-x)}}{2} \int_{s=y-x}^{+\infty} s e^{-(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})s} ds \quad \text{par le changement } s = 2z - y - x. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_a^{+\infty} s e^{-\alpha s} ds = \left( \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha a},$$

on a alors

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\lambda_c(y-x)}}{2} \int_{s=y-x}^{+\infty} s e^{-(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})s} ds \\ & = \frac{e^{\lambda_c(y-x)}}{2} \left( \frac{y-x}{\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}} + \frac{1}{(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})^2} \right) e^{-(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(y-x)} \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{y-x}{\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}} + \frac{1}{(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})^2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}(y-x)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{(2\lambda_c^2 i + 2\omega)(\omega^2)}{4\lambda_c^3} \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} w_0(y)(2z - y - x)e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} dz dy \right| \\
& \leq C(2\lambda_c^2 + \omega)\omega^2 \int_{y=x}^{+\infty} \left( \frac{y-x}{\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}} + \frac{1}{(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})^2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}(y-x)} dy \\
& = C(2\lambda_c^2 + \omega)\omega^2 \int_0^{+\infty} \left( \frac{s}{\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}} + \frac{1}{(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})^2} \right) e^{-\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}s} ds \\
& = C(2\lambda_c^2 + \omega)\omega^2 \left( \frac{1}{(\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})^2(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})} + \frac{1}{(\lambda_c + \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})^2(\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})} \right) = O(1/\omega^3)
\end{aligned}$$

On procède de même pour la deuxième intégrale.  $\square$

**Lemme 3.3.5.** On a  $|u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x)| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$ .

*Démonstration.* Rappelons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
u(\lambda, x) &= \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{-\lambda_c \delta(\lambda)(2z-y-x)} e^{\lambda_c(y-x)} dz dy, \\
u_{tq}(\lambda, x) &:= \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\frac{\lambda}{2\lambda_c} + \frac{\lambda^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} dz dy.
\end{aligned}$$

Si on note

$$\delta(\lambda) = 1 + \delta_0(\lambda) + O(\lambda^3), \quad \text{avec} \quad \delta_0(\lambda) = \frac{1}{2\lambda_c^2} \lambda - \frac{1}{8\lambda_c^4} \lambda^2,$$

alors on a

$$\begin{aligned}
& u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x) \\
&= \left( \iint + \iint \right) w_0(y) \left( e^{-\lambda_c \delta(\lambda)(2z-y-x)} e^{\lambda_c(y-x)} - e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\lambda_c \delta_0(\lambda))(2z-y-x)} \right) dz dy \\
&= \left( \iint + \iint \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-\lambda_c \delta_0(\lambda)(2z-y-x)} \left( e^{-\lambda_c O(\lambda^3)(2z-y-x)} - 1 \right) dz dy.
\end{aligned}$$

On va utiliser l'inégalité suivante avec  $a, b \in \mathbb{R}$

$$|e^{a+ib} - 1| \leq C(e^{|a+ib|} - 1).$$

Pour la montrer, on écrit tout d'abord que

$$\begin{aligned}
|e^{a+ib} - 1| &= |e^{a+ib} - e^{ib} + e^{ib} - 1| \\
&\leq |e^{a+ib} - e^{ib}| + |e^{ib} - 1| \\
&\leq |e^a - 1| + |e^{ib} - 1|.
\end{aligned}$$

Ensuite, on a les inégalités suivantes

$$|e^a - 1| \leq C_1(e^{|a|} - 1) \quad \text{et} \quad |e^{ib} - 1| \leq C_2(e^{|b|} - 1),$$

puisque les quotients sont bornés. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} |e^a - 1| &\leq C_1(e^{|a|} - 1) \leq C_1(e^{|a+ib|} - 1), \\ |e^{ib} - 1| &\leq C_2(e^{|b|} - 1) \leq C_2(e^{|a+ib|} - 1), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

On déduit de cette inégalité l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &|u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x)| \\ &\leq C \left( \iint + \iint \right) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-\lambda_c \Re e \delta_0(\lambda)(2z-y-x)} \left( e^{C'|\lambda|^3(2z-y-x)} - 1 \right) dz dy \\ &= C \left( \iint + \iint \right) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-\lambda_c \left( \frac{\Re e \lambda}{2\lambda_c^2} - \frac{(\Re e \lambda)^2 - (\Im m \lambda)^2}{8\lambda_c^4} \right) (2z-y-x)} \left( e^{C'|\lambda|^3(2z-y-x)} - 1 \right) dz dy. \end{aligned}$$

On considère alors la fonction

$$F(\sigma) = \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-\sigma(2z-y-x)} dz dy$$

de sorte que

$$|u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x)| \leq C(F(\sigma_1) - F(\sigma_2)),$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= -\frac{\Re e \lambda}{2\lambda_c} - \frac{(\Re e \lambda)^2}{8\lambda_c^3} + \frac{(\Im m \lambda)^2}{8\lambda_c^3} + C'|\lambda|^3, \\ \sigma_2 &:= -\frac{\Re e \lambda}{2\lambda_c} - \frac{(\Re e \lambda)^2}{8\lambda_c^3} + \frac{(\Im m \lambda)^2}{8\lambda_c^3}. \end{aligned}$$

La fonction  $F(\sigma)$  se calcule explicitement. On obtient ainsi

$$F(\sigma) = \frac{1}{2\sigma(\lambda_c + \sigma)} + \frac{1}{2(\lambda_c + \sigma)(2\lambda_c + \sigma)}.$$

Par conséquent, si on note  $I_{1,2}(\lambda)$  les  $\sigma$  compris entre  $\sigma_1(\lambda)$  et  $\sigma_2(\lambda)$ , on a

$$\begin{aligned} |u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x)| &\leq C(F(\sigma_1) - F(\sigma_2)) \\ &\leq C \sup_{\sigma \in I_{1,2}(\lambda)} |F'(\sigma)| \cdot |\sigma_1(\lambda) - \sigma_2(\lambda)| \\ &\leq C \sup_{\sigma \in I_{1,2}(\lambda)} |F'(\sigma)| \cdot |\lambda|^3. \end{aligned}$$

Au voisinage de  $\sigma = 0$ ,  $F'(\sigma) \sim \frac{-1}{4\lambda_c \sigma^2}$ . Remarquons qu'on ne peut pas espérer mieux qu'une estimation en  $1/|\lambda|$ . En effet, pour  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  on a  $|\lambda| = |\Im m \lambda| = |\omega|$  et  $\Re e \lambda = 0$ , d'où  $\sigma_1(i\omega) = -\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3} + C'|\omega|^3$  et  $\sigma_2(i\omega) = -\frac{\omega^2}{8\lambda_c^3}$ . On obtient ainsi

$$|u(i\omega, x) - u_{tq}(i\omega, x)| \leq C \frac{|\omega|^3}{|\omega|^4} \leq \frac{C'}{|\omega|}.$$

Dans tous les cas,  $|\sigma_2(\lambda)| \geq C|\lambda|^2$  pour  $\lambda$  proche de 0 et on obtient l'estimation annoncée.  $\square$

### 3.3.3 Déformation du contour

Rappelons que l'objectif est d'étudier les propriétés en temps grand du shift qui est donné par la formule

$$w(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda.$$

Pour cela, nous cherchons à expliciter cette intégrale. L'idée est de déformer le contour  $\gamma$  en l'axe  $i\mathbb{R}$  et remplacer  $u(\lambda, x)$  par son terme dominant  $u_{tq}$  au voisinage de  $\lambda = 0$ . L'intérêt est que l'intégrale

$$w(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda$$

possède une expression plus explicite que nous étudierons ensuite. Cependant, nous avons vu que  $u_{tq}(\lambda, x)$  n'est pas intégrable au voisinage de  $\lambda = 0$ . Pour remédier à ceci, nous appliquerons cette procédure sur la dérivée seconde en temps

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda,$$

le gain du  $\lambda^2$  nous permettant de travailler avec la fonction  $\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)$  intégrable.

#### Déformation du contour.

Puisque la fonction  $\lambda \rightarrow \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x)$  est holomorphe sur l'ouvert  $\rho(-L)$  et qu'il n'y a pas de spectre de  $-L$  dans le demi-plan  $\Re e \lambda \geq 0$  à l'exception de  $\lambda = 0$ , le théorème de Cauchy dit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\delta, \varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda,$$

où le chemin  $\gamma_{\delta, \varepsilon}$  est défini par (cf figure 3.3)

$$\gamma_{\delta, \varepsilon} := D_{\delta}^- \cup [-i\delta, -i\varepsilon] \cup C_{\varepsilon} \cup [i\varepsilon, i\delta] \cup D_{\delta}^+,$$

avec

$$D_{\delta}^- = \{-i\delta + t(-1 - mi), t \geq 0\}, \quad D_{\delta}^+ = \{i\delta + t(-1 + mi), t \geq 0\},$$

$$C_{\varepsilon} = \{\varepsilon e^{i\theta}, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

est homotope au chemin  $\gamma$  dans  $\rho(-L)$ . La quantité  $m > 0$  est telle que ce chemin contourne bien le spectre et  $\varepsilon$  est amené à tendre vers 0.

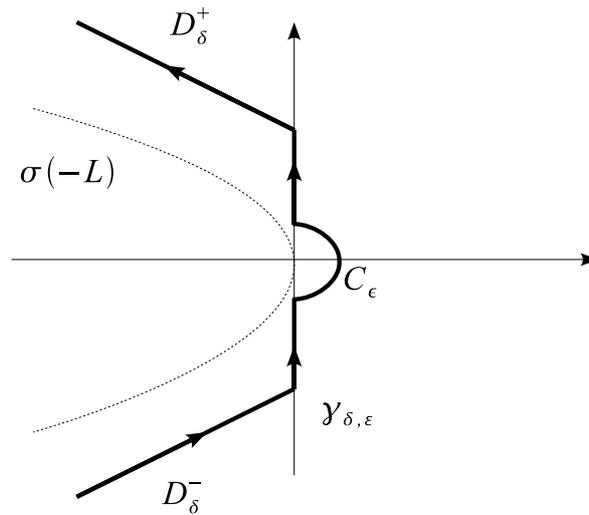
On note alors  $\tilde{\gamma}_{\delta, \varepsilon} := [-i\delta, -i\varepsilon] \cup C_{\varepsilon} \cup [i\varepsilon, i\delta]$ , de telle sorte que

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta, \varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_{\delta}^- \cup D_{\delta}^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda.$$

On note alors  $\gamma_{\varepsilon} := ]-i\infty, -i\varepsilon] \cup C_{\varepsilon} \cup [i\varepsilon, i\infty[$ , de sorte que

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta, \varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta, \varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \int_{D_{\delta}^- \cup D_{\delta}^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda$$

FIG. 3.3 – Contour d'intégration  $\gamma_{\delta, \varepsilon}$ 

On décompose finalement  $w_{tt}$  sous la forme

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta, \varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda - \frac{1}{2i\pi} \int_{]-i\infty, -i\delta] \cup [i\delta, i\infty[} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda, \quad (3.13)$$

cette égalité étant vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**Passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .**

Il s'agit ensuite de passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour le deuxième terme de (3.13), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta, \varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\delta}^{i\delta} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} \omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta, \varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda - \int_{[-i\delta, i\delta]} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda \\ = \int_{C_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda - \int_{[-i\varepsilon, i\varepsilon]} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda, \end{aligned}$$

et les deux dernières intégrales tendent vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  car on intègre la fonction bornée  $\lambda^2 (u - u_{tq})(\lambda, x)$  sur des chemins  $C_\varepsilon$  et  $[-i\varepsilon, i\varepsilon]$  dont la longueur tend vers 0.

Grâce au terme  $\lambda^2$ , on peut passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Lemme 3.3.6.** *Nous avons*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda, \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega.$$

*Démonstration.* Rappelons que

$$f(t, x) := \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda.$$

Puisque  $\lambda \rightarrow \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x)$  est continue au voisinage de  $\lambda = 0$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\int_{C_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda \rightarrow 0.$$

De la même façon,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega - \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega \right| = \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega \right| \rightarrow 0.$$

□

En passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (3.13), on a ainsi

$$\begin{aligned} w_{tt}(t, x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} \omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{]-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty[} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.14)$$

### Estimation des termes.

Estimons d'abord le quatrième terme de (3.14)

**Lemme 3.3.7.** *On a*

$$\left| \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda \right| = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

*Démonstration.* Puisque  $L$  est sectoriel, il existe  $M > 0$  et  $\omega > 0$  tels que

$$\|(\lambda I + L)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \leq M'$$

On en déduit que puisque  $w_0$  est bornée  $|(\lambda I + L)^{-1} w_0(x)| \leq M'$ . Considérons l'intégrale sur le chemin  $D_\delta^+ = \{i\delta + s(-1 + mi), s \geq 0\}$ , l'autre se traitant de la même façon. En effectuant le changement de variable  $\lambda = i\delta + s(-1 + mi)$ , on a alors

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} (\lambda I + L)^{-1} w_0(x) d\lambda \right| \leq C \int_0^{+\infty} ((m + \delta)^2 + 2(m + \delta)s + s^2) e^{-ts} ds \leq \frac{C'}{t},$$

d'où le résultat. □

L'étude de la deuxième et troisième intégrale de (3.14) se fait par intégration par parties

**Lemme 3.3.8.** *On a*

$$\left| I_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} \omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega \right| = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\left| I_3 := \frac{1}{2i\pi} \int_{]-i\infty, -i\delta] \cup [i\delta, i\infty[} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda \right| = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

*Démonstration. Estimation de  $I_2$ .* Rappelons que la fonction  $\omega^2(u - u_{tq})(i\omega, x)$  est régulière en dehors de  $\omega = 0$  et lipschitzienne en  $\omega = 0$  d'après le lemme 3.3.5. La fonction  $\frac{d}{d\omega}(\omega^2(u - u_{tq})(i\omega, x))$  est ainsi bornée et on peut effectuer une intégration par parties

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} \omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{e^{i\omega t}}{it} \right) \omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi it} \left( [\omega^2 e^{i\omega t} (u - u_{tq})(i\omega, x)]_{-\delta}^{\delta} - \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} \frac{d}{d\omega} (\omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x)) d\omega \right). \end{aligned}$$

Le terme entre parenthèses étant borné par rapport à  $t$ , on en déduit l'estimation.

*Estimation de  $I_3$ .* Regardons l'intégrale sur  $[i\delta, i\infty[$ . En effectuant le changement de variable  $\lambda = i\omega$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{i\delta}^{i\infty} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\infty} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{d}{d\omega} \left( \frac{e^{i\omega t}}{it} \right) \omega^2 u_{tq}(i\omega, x) d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi it} \left( [\omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x)]_{\delta}^{+\infty} - \int_{\delta}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d}{d\omega} (\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)) d\omega \right). \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à montrer que la parenthèse est bornée. On rappelle pour cela que  $\omega \rightarrow \omega^2 u_{tq}(i\omega, x)$  est bornée et que  $\omega \rightarrow \frac{d}{d\omega}(\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)) d\omega \in L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

La première intégrale de (3.14) est plus difficile à estimer. Nous commençons par l'expliciter grâce à une inversion de Fourier

**Lemme 3.3.9.** *On a*

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{e^{-\frac{(t-A)^2}{4B}}}{\sqrt{2B}} \right) dz dy, \quad (3.15) \end{aligned}$$

avec

$$A(x, y, z) = \frac{2z - x - y}{2\lambda_c}, \quad B(x, y, z) = \frac{2z - x - y}{8\lambda_c^3}.$$

*Démonstration.* Nous cherchons à estimer

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega,$$

où

$$u_{tq}(i\omega, x) = \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} dz dy.$$

Nous considérons seulement par la suite le premier terme

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} dz dy \right) d\omega,$$

l'autre se traitant de manière identique. L'idée est de faire apparaître une transformée de Fourier inverse. Pour cela, nous avons besoin d'invertir l'intégration en  $\omega$  et l'intégration en  $(y, z)$  à l'aide du théorème de Fubini. Ceci est possible car la fonction

$$\omega \rightarrow \omega^2 e^{i\omega t} e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} e^{2\lambda_c(y-z)}$$

est  $L^1$  en  $(\omega, y, z)$  d'après les remarques précédentes. On peut alors permuter les intégrales pour obtenir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} w_0(y) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} (-\omega^2) e^{(-\frac{i\omega}{2\lambda_c} - \frac{\omega^2}{8\lambda_c^3})(2z-y-x)} d\omega \right) e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy.$$

Entre parenthèse on a fait apparaître une transformée de Fourier inverse connue, puisque, en notant

$$A(x, y, z) = \frac{2z - x - y}{2\lambda_c}, \quad B(x, y, z) = \frac{2z - x - y}{8\lambda_c^3}.$$

et avec la convention

$$\mathcal{F}g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} g(t) d\omega,$$

on a

$$\mathcal{F} \left( \frac{e^{-\frac{(t-A)^2}{4B}}}{\sqrt{2b}} \right) (\omega) = e^{-iA\omega - B\omega^2}, \quad \mathcal{F} \left( \frac{d^2}{dt^2} \frac{e^{-\frac{(t-A)^2}{4B}}}{\sqrt{2B}} \right) (\omega) = -\omega^2 e^{-iA\omega - B\omega^2}.$$

On obtient ainsi le résultat annoncé.  $\square$

On pose alors par la suite

$$W(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} \frac{e^{-\frac{(t-A)^2}{4B}}}{\sqrt{2B}} dz dy, \quad (3.16)$$

où

$$A(x, y, z) = \frac{2z - x - y}{2\lambda_c}, \quad B(x, y, z) = \frac{2z - x - y}{8\lambda_c^3}.$$

L'intégrale  $W$  est convergente et on obtient en dérivant

$$W_{tt}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{e^{-\frac{(t-A)^2}{4B}}}{\sqrt{2B}} \right) dz dy.$$

Nous pouvons conclure que

$$w_{tt}(t, x) = W_{tt} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

L'étude des propriétés de  $W$  fait l'objet des deux sections suivantes dans lesquelles nous montrons en particulier que  $W_{tt} = O\left(\frac{1}{t}\right)$ .

### 3.3.4 Lemmes techniques

L'étude de la partie dominante  $W$  repose sur des estimations intégrales que nous détaillons dans le cas homogène.

**Lemme 3.3.10.** *Soient  $a > 0, b > 0$ . On a les estimations suivantes :*

$$I_1(t) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx \text{ est bornée,} \quad (3.17)$$

$$I_2(t) := \int_0^{+\infty} |t-x| \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{3/2}} dx = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad (3.18)$$

$$I_3(t) := \int_0^{+\infty} ((t-x)^2 + x) \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{5/2}} dx = O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (3.19)$$

**Remarque 3.3.3.** La première intégrale est même constante en  $t$  et on a la relation

$$I_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

*Démonstration.* L'idée pour estimer ces intégrales est de découper  $\mathbb{R}^+$  en  $[0, t] \cup [t, +\infty[$  et de faire le changement de variables

$$u = \frac{(t-x)^2}{2x}$$

sur chacune des deux intégrales. Les trois intégrales s'estiment de la même façon.

Nous commençons par détailler l'estimation de  $I_3$ . On coupe ainsi en

$$I_3(t) = \int_0^t ((t-x)^2 + x) \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{5/2}} dx + \int_t^{+\infty} ((t-x)^2 + x) \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{5/2}} dx.$$

Pour l'intégrale sur  $[0, t]$  le changement de variables correspond à

$$x = t + u - \sqrt{u^2 + 2ut},$$

avec

$$dx = \left( \frac{t + u - \sqrt{u^2 + 2ut}}{\sqrt{u^2 + 2ut}} \right) du.$$

On a alors

$$\int_0^t \frac{(t-x)^2 + x}{x^{5/2}} e^{-a \frac{(t-x)^2}{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(2u+1)t + 2u^2 + u - (2u+1)\sqrt{u^2 + 2ut}}{\sqrt{u^2 + 2ut}(t + u - \sqrt{u^2 + 2ut})^{3/2}} e^{-2au} du.$$

Pour montrer que cette intégrale est en  $O(\frac{1}{t})$ , on factorise par  $1/t$  :

$$\frac{1}{t} \int_0^{+\infty} \frac{(2u+1) + 2u^2/t + u/t - (2u+1)\sqrt{u^2/t^2 + 2u/t}}{\sqrt{u^2/t + 2u}(1 + u/t - \sqrt{u^2/t^2 + 2u/t})^{3/2}} e^{-2au} du.$$

Il reste alors à montrer que l'intégrale restante est bornée. On va montrer pour cela qu'elle converge quand  $t \rightarrow +\infty$  vers

$$\int_0^{+\infty} \frac{2u+1}{\sqrt{2u}} e^{-2au} du.$$

La convergence ponctuelle dans l'intégrande est claire. Il reste à dominer par une fonction intégrable indépendante de  $t$ . On se limite pour cela à  $t \geq 1$ . On a tout d'abord

$$\begin{aligned} & \frac{(2u+1) + 2u^2/t + u/t - (2u+1)\sqrt{u^2/t^2 + 2u/t}}{\sqrt{u^2/t + 2u}} \\ & \leq \frac{(2u+1) + 2u^2 + u + (2u+1)\sqrt{u^2 + 2u}}{\sqrt{2u}}. \end{aligned}$$

Le terme  $1 + u/t - \sqrt{u^2/t^2 + 2u/t}$  dans le dénominateur est plus gênant. On utilise pour cela l'estimation suivante : si on note  $g(s) = 1 + s - \sqrt{s^2 + 2s}$ , alors il existe  $C > 0$  tel que

$$\forall s > 0, \quad g(s) \geq \frac{C}{1+s}.$$

Cela découle du fait que pour la fonction  $h(\sigma) = \sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}$  il existe  $C > 0$  tel que  $h(\sigma) \geq C/\sigma$  pour tout  $\sigma \geq 1$ . On en déduit que pour  $t \geq 1$ ,

$$1 + u/t - \sqrt{u^2/t^2 + 2u/t} = g(u/t) \geq \frac{C}{1+u/t} \geq \frac{C}{1+u}.$$

On a alors la majoration suivante pour  $t \geq 1$  :

$$\begin{aligned} & \frac{(2u+1) + 2u^2/t + u/t - (2u+1)\sqrt{u^2/t^2 + 2u/t}}{\sqrt{u^2/t + 2u}(1 + u/t - \sqrt{u^2/t^2 + 2u/t})^{3/2}} e^{-2au} \\ & \leq \frac{((2u+1) + 2u^2 + u + (2u+1)\sqrt{u^2 + 2u})(1+u)}{C\sqrt{2u}} e^{-2au}, \end{aligned}$$

cette fonction étant bien intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

L'intégrale sur  $[t, +\infty]$  amène au changement de variables

$$x = t + u + \sqrt{u^2 + 2ut},$$

avec

$$dx = \left( \frac{t + u + \sqrt{u^2 + 2ut}}{\sqrt{u^2 + 2ut}} \right) du.$$

On a alors

$$\int_t^{+\infty} \frac{(t-x)^2 + x}{x^{5/2}} e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(2u+1)t + 2u^2 + u + (2u+1)\sqrt{u^2 + 2ut}}{\sqrt{u^2 + 2ut}(t + u + \sqrt{u^2 + 2ut})^{3/2}} e^{-2au} du.$$

Pour montrer que cette intégrale est en  $O(\frac{1}{t})$ , on factorise par  $1/t$  :

$$\frac{1}{t} \int_0^{+\infty} \frac{(2u+1) + 2u^2/t + u/t + (2u+1)\sqrt{u^2/t^2 + 2u/t}}{\sqrt{u^2/t + 2u}(1 + u/t + \sqrt{u^2/t^2 + 2u/t})^{3/2}} e^{-2au} du.$$

Il reste alors à montrer que l'intégrale restante est bornée. On va montrer pour cela qu'elle converge quand  $t \rightarrow +\infty$  vers

$$\int_0^{+\infty} \frac{2u+1}{\sqrt{2u}} e^{-2au} du.$$

La convergence ponctuelle dans l'intégrande est claire. Il reste à dominer par une fonction intégrable indépendante de  $t$ . Dans ce cas la majoration est directe puisque pour  $t \geq 1$  on a

$$\begin{aligned} & \frac{(2u+1) + 2u^2/t + u/t + (2u+1)\sqrt{u^2/t^2 + 2u/t}}{\sqrt{u^2/t + 2u}(1 + u/t + \sqrt{u^2/t^2 + 2u/t})^{3/2}} e^{-2au} du \\ & \leq \frac{(2u+1) + 2u^2 + u + (2u+1)\sqrt{u^2 + 2u}}{\sqrt{2u}} e^{-2au} du. \end{aligned}$$

L'intégrale  $I_1$  s'estime de la même façon

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^t \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_t^{+\infty} \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t+u - \sqrt{u^2 + 2ut}} + \sqrt{t+u + \sqrt{u^2 + 2ut}}}{\sqrt{u^2 + 2ut}} e^{-2au} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u/t - \sqrt{u^2/t^2 + 2u/t}}}{\sqrt{u^2/t + 2u}} e^{-2au} du \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u/t + \sqrt{u^2/t^2 + 2u/t}}}{\sqrt{u^2/t + 2u}} e^{-2au} du \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + u + \sqrt{u^2 + 2u}}}{\sqrt{2u}} e^{-2au} du \leq C, \end{aligned}$$

les dernières inégalités étant vérifiées pour tout  $t \geq 1$ .

Il reste à étudier la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_0^{+\infty} |t-x| \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{3/2}} dx = \int_0^t |t-x| \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{3/2}} dx + \int_t^{+\infty} |t-x| \frac{e^{-a\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{3/2}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u^2+2ut}-u}{\sqrt{u^2+2ut}\sqrt{t+u-\sqrt{u^2+2ut}}} e^{-2au} du \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u^2+2ut}+u}{\sqrt{u^2+2ut}\sqrt{t+u+\sqrt{u^2+2ut}}} e^{-2au} du. \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales sont des  $O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ . Prenons le cas de la deuxième (le signe  $-$  dans le dénominateur de la première se traitant avec les inégalités introduites pour  $I_3$ ). Si on factorise les puissances de  $t$ , on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u^2/t+2u}+u/\sqrt{t}}{\sqrt{u^2/t+2u}\sqrt{1+u/t+\sqrt{u^2/t^2+2u}}} e^{-2au} du,$$

où l'intégrale restante est bornée puisque pour  $t \geq 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u^2/t+2u}+u/\sqrt{t}}{\sqrt{u^2/t+2u}\sqrt{1+u/t+\sqrt{u^2/t^2+2u}}} e^{-2au} du \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u^2+2u}+u}{\sqrt{2u}} e^{-2au} du \leq C.$$

□

**Lemme 3.3.11.** *Si  $a > 0, b > 0, c > 0$  alors il existe  $d > 0$  tel que*

$$J_1(t) := \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{e^{-b\frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx = O(e^{-dt}), \quad (3.20)$$

$$J_2(t) := \int_0^{+\infty} |t-x| e^{-ax} \frac{e^{-b\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{3/2}} dx = O(e^{-dt}), \quad (3.21)$$

$$J_3(t) := \int_0^{+\infty} ((t-x)^2+x) e^{-ax} \frac{e^{-b\frac{(t-x)^2}{x}}}{x^{5/2}} dx = O(e^{-dt}). \quad (3.22)$$

**Remarque 3.3.4.** La première intégrale possède la formule explicite suivante

$$J_1(t) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{e^{-b\frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-2\sqrt{b}(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})t}.$$

*Démonstration.* Pour montrer le comportement exponentiel, nous adaptons la preuve du lemme précédent. Nous détaillons l'estimation sur  $J_1$ , les deux autres intégrales se traitant de la même façon.

On cherche donc à estimer

$$J_1(t) := \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{e^{-b\frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx = O(e^{-dt}).$$

Pour cela, on va effectuer le changement de variables

$$u = ax + b \frac{(t-x)^2}{x}.$$

On note que la fonction  $x \rightarrow ax + b \frac{(t-x)^2}{x}$  atteint son minimum au point  $x = \sqrt{\frac{b}{a+b}}t$  et que ce minimum vaut

$$2bt \left( \sqrt{\frac{a+b}{b}} - 1 \right).$$

On coupe alors l'intégrale  $J_1$  en deux :

$$J_1(t) = \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a+b}}t} e^{-ax} \frac{e^{-b \frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_{\sqrt{\frac{b}{a+b}}t}^{+\infty} e^{-ax} \frac{e^{-b \frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Pour l'intégrale sur  $[0, \sqrt{\frac{b}{a+b}}t]$ , le changement de variables correspond à

$$x = \frac{1}{2} \left( 2bt + u - \sqrt{u^2 + 4but - 4abt^2} \right),$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{u + 2bt}{\sqrt{u^2 + 4but - 4abt^2}} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a+b}}t} e^{-ax} \frac{e^{-b \frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_{2bt(\sqrt{\frac{a+b}{b}}-1)}^{+\infty} \left( \frac{u + 2bt}{\sqrt{u^2 + 4but - 4abt^2}} - 1 \right) \frac{e^{-u} du}{\sqrt{2} (2btu - \sqrt{u^2 + 4but - 4abt^2})^{1/2}}. \end{aligned}$$

On effectue alors un second changement de variables

$$v = u - 2bt \left( \sqrt{\frac{a+b}{b}} - 1 \right).$$

En posant

$$\alpha := \frac{a}{b} > 0 \quad \varepsilon := \sqrt{1 + \frac{a}{b}} - 1 > 0,$$

on a

$$2u + 4bt = 2v + 4b\sqrt{1 + \alpha}t.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a+b}}t} e^{-ax} \frac{e^{-b \frac{(t-x)^2}{x}}}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{v + 4bt\sqrt{1 + \alpha}}{\sqrt{v(v + 4bt\sqrt{1 + \alpha})}} - 1 \right) \frac{e^{-v} e^{-2b\varepsilon t} dv}{\sqrt{2} \left( v + 2bt\sqrt{1 + \alpha} - \sqrt{v(v + 4bt\sqrt{1 + \alpha})} \right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Si on sort le terme exponentiel  $e^{-2b\epsilon t}$ , il reste à montrer que l'intégrale restante est bornée. On a en effet

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left( \frac{v + 4bt\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{v(v+4bt\sqrt{1+\alpha})}} - 1 \right) \frac{e^{-v} dv}{\sqrt{2} \left( v + 2bt\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{v(v+4bt\sqrt{1+\alpha})} \right)^{1/2}} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\left( v + 4bt\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{v(v+4bt\sqrt{1+\alpha})} \right) e^{-v} dv}{\sqrt{2} \sqrt{v(v+4bt\sqrt{1+\alpha})} \left( v + 2bt\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{v(v+4bt\sqrt{1+\alpha})} \right)^{1/2}} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t \left( v/t + 4b\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{v/t(v/t+4b\sqrt{1+\alpha})} \right) e^{-v} dv}{\sqrt{t} \sqrt{t} \sqrt{2} \sqrt{v(v/t+4b\sqrt{1+\alpha})} \left( v/t + 2b\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{v/t(v/t+4b\sqrt{1+\alpha})} \right)^{1/2}} \end{aligned}$$

L'intégrale précédente est bien convergente en  $v = 0$  grâce à l'estimation suivante de la preuve du lemme précédent : il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $s > 0$ ,

$$1 + s - \sqrt{s^2 + 2s} \geq \frac{C}{1 + s}.$$

Ainsi l'intégrale sur  $[0, \sqrt{\frac{b}{a+b}}t]$  décroît exponentiellement vite. On procède de même avec l'intégrale sur  $[\sqrt{\frac{b}{a+b}}t, +\infty]$  mais cette fois-ci avec le changement de variables

$$x = \frac{1}{2} \left( 2bt + u + \sqrt{u^2 + 4but - 4abt^2} \right).$$

L'absence de signe  $-$  supprime la subtilité sur le dénominateur.  $\square$

### 3.3.5 Etude de la partie dominante du shift

Nous nous intéressons maintenant à l'expression

$$W(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} \frac{e^{-\frac{(t-A)^2}{4B}}}{\sqrt{2B}} dz dy,$$

avec

$$A(x, y, z) = \frac{2z - x - y}{2\lambda_c}, \quad B(x, y, z) = \frac{2z - x - y}{8\lambda_c^3}.$$

On note par la suite

$$W_1(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} \frac{e^{-\frac{(t-A)^2}{4B}}}{\sqrt{2B}} dz dy,$$

et

$$W_2(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} \frac{e^{-\frac{(t-A)^2}{4B}}}{\sqrt{2B}} dz dy.$$

Nous allons voir que les deux intégrales donnent des comportements différents.

**Etude de  $W_1$** 

On effectue tout d'abord le changement de variables  $z' = z - y$ ,  $y' = y - x$  de jacobien 1. On obtient alors

$$W_1(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{y'=0}^{+\infty} \int_{z'=0}^{+\infty} w_0(y' + x) e^{-2\lambda_c z'} \frac{e^{-\frac{(t-\tilde{A})^2}{4\tilde{B}}}}{\sqrt{\tilde{B}}} dy' dz',$$

avec

$$\tilde{A}(y', z') = \frac{2z' + y'}{2\lambda_c}, \quad \tilde{B}(y', z') = \frac{2z' + y'}{8\lambda_c^3}.$$

On effectue ensuite le changement de variables

$$Y = \tilde{A}(y', z') = \frac{2z' + y'}{2\lambda_c}, \quad Z = z'.$$

de jacobien  $2\lambda_c$ . Celui-ci envoie le quart de plan  $(\mathbb{R}^+)^2$  sur le domaine

$$D_1 = \{(Y, Z), Y \geq 0, 0 \leq Z \leq \lambda_c Y\}.$$

Ainsi,

$$W_1(t, x) = \frac{2\lambda_c^2}{\sqrt{\pi}} \iint_{D_1} w_0(2\lambda_c Y - 2Z + x) e^{-2\lambda_c Z} \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Y)^2}{Y}}}{\sqrt{Y}} dY dZ.$$

Les dérivées par rapport à  $t$  donnent

$$\partial_t W_1(t, x) = \frac{-4\lambda_c^4}{\sqrt{\pi}} \iint_{D_1} w_0(2\lambda_c Y - 2Z + x) e^{-2\lambda_c Z} (t - Y) \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Y)^2}{Y}}}{Y^{3/2}} dY dZ,$$

$$\partial_{tt} W_1(t, x) = \frac{-4\lambda_c^4}{\sqrt{\pi}} \iint_{D_1} w_0(2\lambda_c Y - 2Z + x) e^{-2\lambda_c Z} (Y - 2\lambda_c^2 (t - Y)^2) \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Y)^2}{Y}}}{Y^{5/2}} dY dZ.$$

On a alors les estimations suivantes

**Lemme 3.3.12.** *La fonction  $W_1$  est bornée et quand  $t \rightarrow +\infty$ , on a*

$$|\partial_t W_1(t, x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad |\partial_{tt} W_1(t, x)| = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

*Démonstration.* Regardons d'abord  $W_1$ . Puisque l'intégrande est positive et  $w_0$  bornée, on peut majorer l'intégrale sur  $D_1$  par l'intégrale sur  $(\mathbb{R}^+)^2$ . Ceci permet de découpler les variables  $Y$  et  $Z$ . On obtient ainsi

$$W_1(t, x) \leq C \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_c Z} dZ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Y)^2}{Y}}}{\sqrt{Y}} dY.$$

L'estimation (3.17) permet alors de conclure.

Pour  $\partial_t W_1(t, x)$ , on a

$$|\partial_t W_1(t, x)| \leq C \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_c Z} dZ \int_0^{+\infty} |t - Y| \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Y)^2}{Y}}}{Y^{3/2}} dY.$$

On conclut avec l'estimation (3.18).

Pour  $\partial_{tt}W_1(t, x)$ , on majore comme précédemment

$$|\partial_{tt}W_1(t, x)| \leq C \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_c Z} dZ \int_0^{+\infty} (Y + 2\lambda_c^2(t - Y)^2) \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Y)^2}{Y}}}{Y^{3/2}} dY,$$

puis on utilise l'estimation (3.19).  $\square$

### Etude de $W_2$

On commence par effectuer le changement de variables  $z' = z - x, y' = y - x$  de jacobien 1. On obtient

$$W_2(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{y'=-\infty}^0 \int_{z'=0}^{+\infty} w_0(y' + x) e^{2\lambda_c(y'-z')} \frac{e^{-\frac{(t-\bar{A})^2}{4\bar{B}}}}{\sqrt{2\bar{B}}} dz' dy',$$

avec

$$\bar{A}(y', z') = \frac{2z' - y'}{2\lambda_c}, \quad \bar{B}(y', z') = \frac{2z' - y'}{8\lambda_c^3}.$$

On effectue alors le deuxième changement de variable

$$Y = y', \quad Z = \bar{A}(y', z') = \frac{2z' - y'}{2\lambda_c}$$

de jacobien  $\lambda_c$  et qui envoie le domaine  $] -\infty, 0] \times [0, +\infty[$  en le domaine

$$D_2 = \{(Y, Z), Y \leq 0, Z \geq -\frac{Y}{2\lambda_c}\}.$$

Ainsi,

$$W_2(t, x) = \frac{2\lambda_c}{\sqrt{\pi}} \iint_{D_2} w_0(Y + x) e^{\lambda_c Y} e^{-2\lambda_c^2 Z} \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Z)^2}{Z}}}{\sqrt{Z}} dY dZ.$$

En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient successivement

$$\partial_t W_2(t, x) = \frac{-2\lambda_c^3}{\sqrt{\pi}} \iint_{D_2} w_0(Y + x) e^{\lambda_c Y} e^{-2\lambda_c Z} (t - Z) \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Z)^2}{Z}}}{Z^{3/2}} dY dZ,$$

$$\partial_{tt} W_2(t, x) = \frac{-2\lambda_c^3}{\sqrt{\pi}} \iint_{D_2} w_0(Y + x) e^{\lambda_c Y} e^{-2\lambda_c Z} (Z - 2\lambda_c^2(t - Z)^2) \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Z)^2}{Z}}}{Z^{5/2}} dY dZ.$$

On a alors les estimations suivantes

**Lemme 3.3.13.** *Il existe  $a > 0$  tel que*

$$|W_2(t, x)|, |\partial_t W_2(t, x)|, |\partial_{tt} W_2(t, x)| = O(e^{-at}).$$

*Démonstration.* Puisque l'intégrande est positive et  $w_0$  bornée, on peut majorer l'intégrale sur  $D_2$  par l'intégrale sur  $(\mathbb{R}^+)^2$ . Ceci permet de découpler les variables  $Y$  et  $Z$ . On obtient ainsi

$$W_2(t, x) \leq C \int_{-\infty}^0 e^{\lambda_c Y} dY \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_c Z} \frac{e^{-\lambda_c^2 \frac{(t-Z)^2}{Z}}}{\sqrt{Z}} dZ.$$

On conclut à l'aide de l'estimation (3.20) avec  $a = \lambda_c$  et  $b = \lambda_c^2$ . Pour les dérivées, on procède comme dans le lemme précédent puis on utilise les estimations (3.21) et (3.22).  $\square$

### 3.3.6 Comportement des dérivées du shift

Nous pouvons conclure maintenant sur les propriétés du shift et montrer que quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\|w_x(t, \cdot)\|_\infty, \|w_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

1) *Dérivée temporelle.* D'après les sections précédentes nous avons  $w_{tt} = W_{tt} + O(1/t)$ . Puisque  $W_{tt} = O(1/t)$ , on en déduit que

$$|w_{tt}(t, x)| = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Puisque  $w$  est bornée, montrons qu'on a alors

$$|w_t(t, x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Il suffit pour cela d'écrire un développement de Taylor à l'ordre deux en  $t$  :

$$w(t + \sqrt{t}, x) = w(t, x) + w'(t, x)\sqrt{t} + w''(\tau, x)\frac{t}{2}, \quad \tau \in [t, t + \sqrt{t}].$$

Ainsi,

$$w'(t, x) = \frac{w(t + \sqrt{t}, x) - w(t, x)}{\sqrt{t}} - w''(\tau, x)\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

On en déduit que

$$|w'(t, x)| \leq \frac{2}{\sqrt{t}} \sup_{[t, t+\sqrt{t}]} |w(\cdot, x)| + \frac{\sqrt{t}}{2} \sup_{[t, t+\sqrt{t}]} |w''(\cdot, x)|.$$

Finalement,  $|w'(t, x)| \leq C/\sqrt{t}$ .

2) *Dérivée spatiale.* Nous revenons ensuite à l'équation

$$w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x = 0.$$

L'estimation sur  $w_t$  permet alors de montrer que

$$|w_x(t, \cdot)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Pour montrer cela, on écrit d'abord l'équation sous la forme

$$\frac{d}{dx}(w_x e^{2\lambda_c x}) = e^{2\lambda_c x} w_t.$$

On a ainsi

$$w_x(t, x) = \left( w_x(t, 0) + \int_0^x e^{2\lambda_c y} w_t(t, y) dy \right) e^{-2\lambda_c x}.$$

Puisque  $w$  est bornée, il en est de même pour  $w_x$  grâce aux estimations paraboliques. Par conséquent

$$w_x(t, 0) + \int_0^x e^{2\lambda_c y} w_t(t, y) dy \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

Ainsi,  $w_x(t, 0) = \int_{-\infty}^0 e^{2\lambda_c y} w_t(t, y) dy$  et

$$w_x(t, x) = \left( \int_{-\infty}^x e^{2\lambda_c y} w_t(t, y) dy \right) e^{-2\lambda_c x}.$$

D'après l'estimation sur  $w_t$  on obtient finalement

$$|w_x(t, x)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \left( \int_{-\infty}^x e^{2\lambda_c y} dy \right) e^{-2\lambda_c x} \leq \frac{C'}{\sqrt{t}}.$$

### 3.4 Convergence en milieu périodique

Venons en maintenant au cas périodique. Si  $c > c^*$  et  $M > 0$ , rappelons que nous étudions le comportement en temps grand de la solution  $u(t, x)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, u), \\ u_c(0, x) \leq u(0, x) \leq u_c(M, x). \end{cases}$$

Dans cette section, nous montrons le point (ii) du théorème 3.1.2. Pour cela, nous établissons l'équation du shift  $m$  qui permet de prouver la convergence de  $u(t, x)$  vers le profil  $u_c(t + m(t, x), x)$  dans un espace à poids. Nous admettrons pour le moment les propriétés sur le shift  $m(t, x)$  dont l'étude fait l'objet de la section 3.5.

#### 3.4.1 Equation du shift

Pour l'étude du comportement en temps grand de  $u$ , on considère l'ansatz

$$U(t, x) = u_c(t + m(t, x), x)$$

qui vérifie l'équation

$$U_t - U_{xx} - f(x, U) = u_{c,t}(m_t - m_{xx}) - u_{c,tt}m_x^2 - 2u_{c,tx}m_x.$$

Comme dans le cas homogène, remarquons que si nous cherchons directement la solution sous la forme  $u(t, x) = u_c(t + m(t, x), x)$ , ceci revient à annuler le second membre de l'équation ci-dessus. On obtient alors une équation sur le shift trop complexe à étudier. L'idée est plutôt de choisir  $m(t, x)$  pour que le terme de droite ait une décroissance exponentielle supérieure à celle de l'onde pulsatoire  $u_c$  quand  $x + ct \rightarrow -\infty$ . Ceci permettra de montrer la convergence dans un bon espace à poids.

Pour cela, on utilise le fait que pour  $x + ct \rightarrow -\infty$ ,

$$u_c(t, x) = \psi_{\lambda_c}(x) e^{\lambda_c(x+ct)} + O(e^{(\lambda_c+\beta)(x+ct)}).$$

Les mêmes types d'estimations sont valables pour les dérivées grâce aux estimations paraboliques. On a notamment  $u_{c,t} = c\lambda_c u_c + O(e^{(\lambda_c+\beta)(x+ct)})$ , d'où

$$u_{c,tt} = \lambda_c u_{c,t} + O(e^{(\lambda_c+\beta)(x+ct)}), \quad u_{c,tx} = \left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right) u_{c,t} + O(e^{(\lambda_c+\beta)(x+ct)}).$$

On écrit alors l'équation sur  $U$  sous la forme

$$\begin{aligned} U_t - U_{xx} - f(x, U) &= u_{c,t} \left( m_t - m_{xx} - 2\left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right) m_x - c\lambda_c m_x^2 \right) \\ &\quad + 2m_x \left( \left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right) u_{c,t} - u_{c,tx} \right) + m_x^2 (c\lambda_c u_{c,t} - u_{c,tt}). \end{aligned}$$

D'après les estimations précédentes,

$$\left( \lambda + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) u_{c,t} - u_{c,tx} = O(e^{(\lambda_c+\beta)(x+ct)}), \quad c\lambda_c u_{c,t} - u_{c,tt} = O(e^{(\lambda_c+\beta)(x+ct)}).$$

Ainsi, seul le premier terme du membre de droite pose problème puisque  $u_{c,t}$  se comporte comme l'onde pulsatoire. On choisit alors  $m$  pour annuler ce terme là. On obtient ainsi l'équation

$$m_t - m_{xx} - 2\left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right) m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0.$$

On fixe  $m_0(x)$  de sorte que  $U(0, x) = u(0, x)$  c'est à dire tel que  $u_c(m_0(x), x) = u_0(x)$ . Ceci est possible car  $u_c$  est strictement croissante en  $t$  et on a alors

$$m_0(x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x)).$$

Avec un tel choix de shift  $m(t, x)$  l'équation sur  $U$  devient

$$U_t - U_{xx} - f(x, U) = g(t, x),$$

avec

$$g(t, x) = 2m_x \left( \left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right) u_{c,t} - u_{c,tx} \right) + m_x^2 (c\lambda_c u_{c,t} - u_{c,tt}).$$

L'étude des propriétés de  $m$  montrera que  $m_x = O(t^{-1/2})$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Ainsi, quand  $\tau \rightarrow +\infty$  et  $x + ct \rightarrow +\infty$ , on a

$$g(t, x) = O(t^{-1/2} e^{(\lambda_c+\beta)(x+ct)}).$$

### 3.4.2 Convergence

Montrons maintenant la convergence de  $u$  vers  $U$ . Cette étape est similaire au cas homogène.

**Lemme 3.4.1.** *On a*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x) - u_c(t + m(t, x), x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

*Démonstration.* Nous allons estimer la différence  $v = u - U$ , l'opposé  $U - u$  se traitant de la même manière. La fonction  $v$  vérifie l'équation

$$v_t - v_{xx} = f(x, u) - f(x, U) + 2m_x((\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}})u_{c,t} - u_{c,tx}) + m_x^2(c\lambda_c u_{c,t} - u_{c,t}).$$

Un développement de Taylor à l'ordre deux donne

$$f(x, u) = f(x, U) + f'_u(x, U)(u - U) + \frac{1}{2}f''_u(x, a)(u - U)^2,$$

avec  $U \leq a \leq u$ . Puisque  $f'_u(x, U) \leq f'_u(x, 0) = \zeta(x)$  et  $f''_u(x, c) \leq 0$ , on obtient finalement

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} - \zeta(x)v \leq -g(t, x), \\ v(0, x) = 0. \end{cases}$$

On se place ensuite dans le repère mobile  $\xi = x + ct$  en posant

$$\tilde{v}(t, \xi) = v(t, \xi - ct), \quad \tilde{u}(t, \xi) = u(t, \xi - ct), \quad \tilde{U}(t, \xi) = U(t, \xi - ct).$$

On obtient ainsi

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi - \zeta(\xi - ct)\tilde{v} \leq -g(t, \xi - ct),$$

avec pour  $\tau \rightarrow +\infty$  et  $\xi \rightarrow +\infty$ ,

$$g(t, \xi) = O(t^{-1/2}e^{(\lambda_c + \beta)\xi}).$$

On se place ensuite dans l'espace à poids.

$$X_\delta := \{u \in BUC(\mathbb{R}), \frac{u(\xi)}{p_\delta(0, \xi)} \in BUC(\mathbb{R})\}, \quad \|u\|_\delta = \left\| \frac{u}{p_\delta(0, \cdot)} \right\|_\infty,$$

où

$$p_\delta(t, \xi) = e^{(\lambda_c + \delta)\xi} \psi_{\lambda_c + \delta}(\xi - ct).$$

Rappelons que  $p$  vérifie l'équation

$$p_t - p_{\xi\xi} + cp_\xi - \zeta(\xi - ct)p = q_\delta p,$$

où  $q_\delta := c(\lambda_c + \delta) - k(\lambda_c + \delta) > 0$  pour  $\delta$  assez petit. Le poids permet de travailler avec un opérateur avec un terme d'ordre 0 strictement positif. En effet, si on pose  $\tilde{v}(t, \xi) = p_\delta(t, \xi)z(t, \xi)$ , on obtient l'inéquation suivante sur  $z$  :

$$\begin{cases} z_t - z_{\xi\xi} + (c - 2\frac{p_{\delta,\xi}}{p_\delta})z_\xi + q_\delta z \leq -\frac{g(t, \xi - ct)}{p_\delta}, \\ z(0, \xi) = 0, \end{cases}$$

Pour que  $\frac{g(t, \xi - ct)}{p_\delta}$  soit borné en  $\xi$ , il faut alors choisir  $\delta < \beta$ . On a alors

$$\frac{|g(t, \xi - ct)|}{p_\delta} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

On considère alors la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} Z_t + q_\delta Z = \frac{C}{\sqrt{t}}, \\ Z(0) = 0, \end{cases}$$

qui est donnée par la formule

$$Z(t) = C \int_0^t \frac{e^{-q_\delta(t-s)}}{\sqrt{s}} ds.$$

D'après le principe du maximum, nous avons

$$z(t, \xi) \leq Z(t) \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$$

pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ . On en déduit finalement que pour  $\gamma = \lambda_c + \delta$ ,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |e^{-\gamma \xi} \tilde{v}(t, \xi)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

□

### 3.5 Propriétés du shift en milieu périodique

Dans cette section nous démontrons le point (i) du théorème 3.1.2, que nous énonçons ici sous forme de théorème

**Théorème 3.5.1.** *La solution  $m(t, x)$  du problème de Cauchy (3.8)*

$$\begin{cases} m_t - m_{xx} - 2\left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right)m_x - c\lambda_c m_x^2 = 0, \\ m_0(x) = u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x)) \text{ bornée,} \end{cases}$$

*vérifie les estimations suivantes quand  $t \rightarrow +\infty$  :*

$$\|m_x(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad \|m_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \quad (3.23)$$

Précisons que l'étude de cette équation est insensible au fait que  $c > c^*$  ou  $c = c^*$ . Ceci servira dans la section suivante pour étudier la stabilité à vitesse critique.

Pour étudier cette équation non-linéaire, on effectue la transformation de Hopf-Cole

$$w(t, x) = \psi_{\lambda_c}(x) e^{c\lambda_c m(t, x)}, \quad m(t, x) = \frac{1}{c\lambda_c} \log\left(\frac{w(t, x)}{\psi_{\lambda_c}(x)}\right),$$

afin d'obtenir l'équation linéaire suivante sur  $w$  :

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x + (c\lambda_c - \lambda_c^2 - \zeta(x))w = 0, \\ w(0, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \exp(c\lambda_c u_c(\cdot, x)^{-1}(u_0(x))), \end{cases} \quad (3.24)$$

avec  $w_0(x)$  bornée.

En effet, si on note  $a(x) = c\lambda_c - \lambda_c^2 - \zeta(x)$ , alors on a

$$-\psi''_{\lambda_c} - 2\lambda_c\psi'_{\lambda_c} + a(x)\psi_{\lambda_c} = 0,$$

et

$$\begin{aligned} w_t &= c\lambda_c\psi_{\lambda_c}e^{c\lambda_cm}m_t, \\ w_x &= e^{c\lambda_cm}(\psi'_{\lambda_c} + c\lambda_c\psi_{\lambda_c}m_x), \\ w_{xx} &= e^{c\lambda_cm}(\psi''_{\lambda_c} + 2c\lambda_c\psi'_{\lambda_c}m_x + c\lambda_c\psi_{\lambda_c}m_{xx} + c^2\lambda_c^2\psi_{\lambda_c}m_x^2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} - 2\lambda_cw_x + a(x)w &= e^{c\lambda_cm} \left( c\lambda_c\psi_{\lambda_c}m_t - \psi''_{\lambda_c} - 2c\lambda_c\psi'_{\lambda_c}m_x - c\lambda_c\psi_{\lambda_c}m_{xx} - c^2\lambda_c^2\psi_{\lambda_c}m_x^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda_c(\psi'_{\lambda_c} + c\lambda_c\psi_{\lambda_c}m_x) + a(x)\psi_{\lambda_c} \right) \\ &= e^{c\lambda_cm} \left( c\lambda_c\psi_{\lambda_c}m_t - 2c\lambda_c\psi'_{\lambda_c}m_x - c\lambda_c\psi_{\lambda_c}m_{xx} - c^2\lambda_c^2\psi_{\lambda_c}m_x^2 - 2c\lambda_c^2\psi_{\lambda_c}m_x \right) \\ &= c\lambda_c\psi_{\lambda_c}e^{c\lambda_cm} \left( m_t - m_{xx} - 2\left(\lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}}\right)m_x - c\lambda_cm_x^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Finalement, puisque  $0 \leq m \leq M$ ,  $1 \leq w \leq e^{c\lambda_cM}$  et que

$$m_t = \frac{1}{c\lambda_cw}w_t, \quad m_x = \frac{\psi_{\lambda_c}}{c\lambda_cw} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w(t,x)}{\psi_{\lambda_c}(x)} \right),$$

On est donc ramené à montrer que la solution  $w(t,x)$  de (3.24) vérifie

$$\|w_t(t, \cdot)\|_{\infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w(t,x)}{\psi_{\lambda_c}(x)} \right) \right\|_{\infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \quad (3.25)$$

Pour étudier l'équation (3.24), on considère l'opérateur elliptique sous-jacent

$$Lu := -u'' - 2\lambda_cu' + a(x)u. \quad (3.26)$$

C'est un opérateur sectoriel dans  $BUC(\mathbb{R})$  [82]. Il engendre ainsi un semi-groupe analytique  $e^{-tL}$  [45], d'où

$$w(t,x) = e^{-tL}w_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{t\lambda}(\lambda I + L)^{-1}w_0(x)d\lambda,$$

où  $\gamma$  est un chemin classique qui entoure un secteur  $\Sigma$  contenant le spectre de  $-L$  (cf figure 3.4).

L'objectif est de montrer qu'en déformant le contour  $\gamma$  en la droite  $i\mathbb{R}$ , on capte la partie dominante de  $w$ . La déformation du contour se fait en plusieurs étapes. La première est de mieux localiser le spectre de  $L$ . On montre ainsi que si  $\lambda \in \sigma(L)$ , alors  $\lambda = 0$  ou  $\Re(\lambda) > 0$ . Ceci permet de ramener le problème à l'étude de  $u(\lambda, x) := (\lambda I + L)^{-1}w_0(x)$

au voisinage de  $\lambda = 0$ . Notons que  $u(\lambda, x)$  n'est autre que la transformée de Laplace en  $t$  de  $w$  définie classiquement pour  $\Re(\lambda) > 0$  par

$$u(\lambda, x) = \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} w(t, x) dt.$$

On est ainsi ramené à étudier les solutions bornées de l'équation différentielle vérifiée par  $u$  :

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u = -\lambda u + w_0. \quad (3.27)$$

Nous verrons que le comportement en temps grand de  $w$  est guidé par celui de sa transformée de Laplace  $u$  au voisinage de  $\lambda = 0$ . Pour cela, nous dériverons un développement à l'ordre 2 de  $u(\lambda, x)$  au voisinage de  $\lambda = 0$  et nous déformerons le contour  $\gamma$  en  $i\mathbb{R}$ . Cette déformation est délicate du fait de la non intégrabilité de  $u(\lambda, x)$  au voisinage de  $\lambda = 0$ . Nous travaillerons ainsi sur la dérivée  $w_{tt}$  :

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{t\lambda} \lambda^2 u(\lambda, x) d\lambda$$

et montrerons que  $w_{tt} = O(1/t)$ . En intégrant en temps et en utilisant l'équation, ceci permettra d'obtenir les informations sur les dérivées.

### 3.5.1 Généralités sur l'équation différentielle

Nous rappelons ici quelques généralités sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques que nous appliquons à notre équation (3.27), plus précisément les exposants de Floquet et l'existence de solutions bornées. L'équation différentielle (3.27) peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante où  $U = (u, u')$

$$U' = A_{\lambda}(x)U + F,$$

avec

$$A_{\lambda}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(x) + \lambda & -2\lambda_c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -w_0 \end{pmatrix}.$$

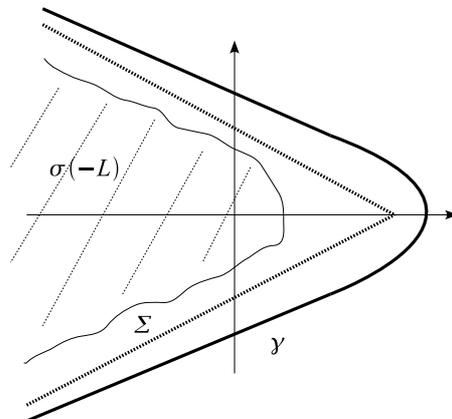


FIG. 3.4 – Contour d'intégration  $\gamma$

Puisque  $A(x)$  est 1-périodique, le théorème de Floquet [18] dit que pour toute matrice fondamentale  $M_\lambda(x)$  solution de l'équation homogène

$$M'_\lambda = A_\lambda(x)M_\lambda,$$

il existe une fonction  $S_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$  de classe  $C^1$  et 1-périodique et une matrice  $B_\lambda$  telles que

$$M_\lambda(x) = S_\lambda(x)e^{xB_\lambda}.$$

On note alors  $\mu_1(\lambda)$  et  $\mu_2(\lambda)$  les exposants de Floquet de l'équation qui sont les valeurs propres de  $B_\lambda$  et sont définies à  $2i\pi$  près. Si les deux exposants sont distincts, les solutions de l'équation homogène sont engendrées par deux fonctions  $U_i(\lambda, x)$  de la forme

$$U_i(\lambda, x) = v_i(\lambda, x)e^{\mu_i(\lambda)x},$$

où les fonctions  $v_i$  sont 1-périodiques.

Une première remarque importante est que

$$\Re(\mu_1(\lambda)) + \Re(\mu_2(\lambda)) = -2\lambda_c. \quad (3.28)$$

En effet, considérons pour  $M_\lambda$  la matrice fondamentale engendrée par les colonnes  $(U_1, U'_1)$  et  $(U_2, U'_2)$  et  $W_\lambda(x) = \det M_\lambda(x)$  son wronskien. On a d'une part

$$W_\lambda(x) = (v_1v'_2 - v_2v'_1 + (\mu_2 - \mu_1)v_1v_2)e^{(\mu_1(\lambda)+\mu_2(\lambda))x},$$

qu'on écrit sous la forme

$$W_\lambda(x) = -b_\lambda(x)e^{(\mu_1(\lambda)+\mu_2(\lambda))x},$$

avec

$$b_\lambda(x) := v_2v'_1 - v_1v'_2 + (\mu_1(\lambda) - \mu_2(\lambda))v_1v_2$$

bornée et 1-périodique. D'autre part

$$W_\lambda(x) = W_\lambda(0)e^{\int_0^x \text{tr}(A_\lambda(s))ds} = W_\lambda(0)e^{-2\lambda_c x}.$$

D'où le résultat.

Le second point qui sera utile par la suite est de donner une condition suffisante sous laquelle l'équation (3.27) possède une solution bornée

**Lemme 3.5.2.** *Si  $w_0$  est bornée et si  $\Re(\mu_1(\lambda))$  et  $\Re(\mu_2(\lambda))$  sont de signes opposés, alors il existe une unique solution bornée de l'équation*

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u + \lambda u = w_0$$

qui est donnée par la relation suivante où on prend la convention fixe  $\Re(\mu_1(\lambda)) > 0$

$$u(\lambda, x) = U_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} \frac{w_0(y)}{b_\lambda(y)} U_2(\lambda, y) e^{2\lambda_c y} dy + U_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^x \frac{w_0(y)}{b_\lambda(y)} U_1(\lambda, y) e^{2\lambda_c y} dy.$$

*Démonstration.* On cherche la solution générale de l'équation par variation de la constante

$$u(\lambda, x) = \alpha(\lambda, x)U_1(\lambda, x) + \beta(\lambda, x)U_2(\lambda, x).$$

Le couple  $(\alpha', \beta')$  est ainsi solution du système linéaire

$$\begin{cases} \alpha'U_1 + \beta'U_2 = 0, \\ \alpha'U_1' + \beta'U_2' = -w_0, \end{cases}$$

qui se résout en

$$\alpha'(\lambda, x) = \frac{U_2(\lambda, x)w_0(x)}{W_\lambda(x)}, \quad \beta'(\lambda, x) = -\frac{U_1(\lambda, x)w_0(x)}{W_\lambda(x)}.$$

On obtient ainsi

$$\alpha(\lambda, x) = -\frac{w_0(x)}{b_\lambda(x)}U_2(\lambda, x)e^{2\lambda_c x}, \quad \beta(\lambda, x) = \frac{w_0(x)}{b_\lambda(x)}U_1(\lambda, x)e^{2\lambda_c x}.$$

Puisque on a fixé  $\Re(\mu_1(\lambda)) > 0$  la relation implique que  $\Re(\mu_2(\lambda)) < -2\lambda_c$ . Ceci nous dit que  $|\alpha'|$  se comporte comme une exponentielle décroissante et  $|\beta'|$  comme une exponentielle positive. On intègre alors en

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda, x) &= \alpha_0 + \int_x^{+\infty} u_2(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy. \\ \beta(\lambda, x) &= \beta_0 + \int_{-\infty}^x u_1(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy. \end{aligned}$$

L'unique solution bornée s'obtient alors avec  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ . □

### 3.5.2 Etude de l'équation homogène au voisinage de $\lambda = 0$

Le comportement en temps grand de  $w$  étant guidé par celui de sa transformée de Laplace  $u(\lambda, x)$  au voisinage de  $\lambda = 0$ , il est important d'étudier les solutions de l'équation (3.27) au voisinage de  $\lambda = 0$ . On commence dans cette section par l'équation homogène

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u + \lambda u = 0. \quad (3.29)$$

pour laquelle on détermine pour  $\lambda$  proche de 0 une nouvelle base de solutions  $u_1(\lambda, x), u_2(\lambda, x)$  dont on connaît la dépendance précise en  $\lambda$ .

#### Détermination des $u_i(0, x)$

Pour  $\lambda = 0$ , l'équation (3.29) qui est alors

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u = 0$$

admet 2 solutions indépendantes que sont

$$u_1(0, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \quad \text{et} \quad u_2(0, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda_c y}}{\psi_{\lambda_c}^2(y)} dy.$$

En effet, la solution  $\psi_{\lambda_c}$  est déjà connue et la deuxième s'obtient par variation de la constante sous la forme  $u_2(0, x) = v(x)u_1(0, x) = v(x)\psi_{\lambda_c}(x)$ . On obtient alors l'équation

$$v'' + 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) v' = 0,$$

et on choisit

$$v'(x) = \frac{e^{-2\lambda_c x}}{\psi_{\lambda_c}^2(x)}, \quad \text{puis} \quad v(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda_c y}}{\psi_{\lambda_c}^2(y)} dy.$$

Pour  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda$  petit, on cherche deux solutions proches de celles pour  $\lambda = 0$ .

### Détermination de $u_1(\lambda, x)$ pour $\lambda$ proche de 0

Cherchons d'abord une solution  $u_1(\lambda, x)$  proche de  $\psi_{\lambda_c}(x)$ . Nous allons montrer le résultat suivant

**Proposition 3.5.3.** *Pour  $\lambda$  proche de 0, l'équation homogène (3.29) possède une solution  $u_1(\lambda, x)$  qui admet le développement asymptotique suivant, uniforme en  $x$ , quand  $\lambda \rightarrow 0$  :*

$$u_1(\lambda, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \exp \left( \int_0^x \left( \lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2 + O(\lambda^3) \right) \right), \quad (3.30)$$

où  $\delta w_1$  et  $\delta w_2$  sont les fonctions strictement positives et 1-périodiques :

$$\delta w_1(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} dy = \int_{-\infty}^0 \frac{\psi_{\lambda_c}^2(z+x)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{2\lambda_c z} dz, \quad (3.31)$$

$$\delta w_2(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} \delta w_1^2(y) e^{-2\lambda_c(x-y)} dy = \int_{-\infty}^0 \frac{\psi_{\lambda_c}^2(z+x)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} \delta w_1^2(z+x) e^{2\lambda_c z} dz. \quad (3.32)$$

*Démonstration.* Pour  $\lambda$  proche de 0, on cherche la solution  $u_1(\lambda, x)$  sous la forme  $u_1(\lambda, x) = e^{v(\lambda, x)}$ . L'équation vérifiée par  $w = v'$  est alors

$$-w' - 2\lambda_c w + a(x) + \lambda = w^2. \quad (3.33)$$

On va montrer que pour  $\lambda$  proche de 0,  $w(\lambda, x)$  admet le développement asymptotique suivant, uniforme en  $x$

$$w(\lambda, x) = \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} + \lambda \delta w_1(x) - \lambda^2 \delta w_2(x) + O(\lambda^3). \quad (3.34)$$

L'équation (3.33) est une équation de Riccati. Notons que  $w_0 = \psi'_{\lambda_c}/\psi_{\lambda_c}$  est solution de cette équation pour  $\lambda = 0$ . On considère alors  $\delta w = w - w_0$  qui est solution de

$$\delta w' + 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) \delta w = \lambda - \delta w^2. \quad (3.35)$$

Cette équation est non-linéaire. On va chercher une solution proche de la solution bornée  $\delta w_{lin}$  de l'équation linéaire correspondante

$$z' + 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) z = \lambda \quad (3.36)$$

qui est

$$\delta w_{lin} = \lambda \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} dy.$$

En effet, les solutions de l'équation homogène associée à (3.36) sont de la forme  $C \frac{e^{-2\lambda_c x}}{\psi_{\lambda_c}^2(x)}$ ; on cherche ensuite une solution bornée de (3.36) sous la forme  $\alpha(x) \frac{e^{-2\lambda_c x}}{\psi_{\lambda_c}^2(x)}$ , ce qui donne l'équation  $\alpha' = \lambda \psi_{\lambda_c}^2(x) e^{2\lambda_c x}$ . Le seul choix de  $\alpha$  est alors

$$\alpha(x) = \lambda \int_{-\infty}^x \psi_{\lambda_c}^2(y) e^{2\lambda_c y} dy.$$

On écrit alors  $\delta w_{lin} = \lambda \delta w_1$ , avec

$$\delta w_1 = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} dy.$$

Notons que  $\delta w_1$  est 1-périodique; il suffit pour cela d'effectuer le changement de variable  $z = x - y$  pour obtenir

$$\delta w_1(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{\psi_{\lambda_c}^2(z+x)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{2\lambda_c z} dz.$$

Cette fonction  $\delta w_1$  est le premier terme dans le développement de  $\delta w$ . Puisque  $\psi_{\lambda_c}$  est bornée avec  $m \leq \psi_{\lambda_c} \leq M$ , on a l'encadrement

$$\frac{m^2}{2\lambda_c M^2} \leq \delta w_1 \leq \frac{M^2}{2\lambda_c m^2},$$

et donc  $\delta w_{lin}$  est d'ordre  $\lambda$ . Le théorème de point fixe permet alors de montrer l'existence de  $\delta w$  :

**Lemme 3.5.4.** *Pour  $\lambda$  assez petit, il existe une solution  $\delta w$  de l'équation non-linéaire (3.35)*

$$\delta w' + 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) \delta w = \lambda - \delta w^2,$$

qui vérifie  $\|\delta w - \delta w_{lin}\|_{\infty} = O(|\lambda|^2)$ .

*Démonstration du lemme.* Commençons par noter que l'unique solution bornée de l'équation différentielle

$$z' + 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) z = f,$$

où  $f$  est bornée, est donnée par

$$z(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} f(y) dy.$$

On écrit alors l'équation non-linéaire (3.36) sous la forme d'un point fixe  $T\delta w = \delta w$ , où  $T$  est l'opérateur

$$Tu := \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} (\lambda - u^2(y)) dy,$$

défini sur l'espace métrique

$$E_\lambda = C^0(\mathbb{R}, \bar{D}(0, (\|\delta w_1\|_\infty + 1)|\lambda|)).$$

Muni de la distance  $d_\infty$  associée à la norme infinie,  $E_\lambda$  est un espace complet.

Vérifions tout d'abord que l'opérateur est bien défini pour  $\lambda$  petit, c'est à dire que  $T(E_\lambda) \subset E_\lambda$ . On a en effet

$$\begin{aligned} \|Tu\|_\infty &\leq \|\delta w_1\|_\infty (|\lambda| + \|u\|_\infty^2) \\ &\leq \|\delta w_1\|_\infty (|\lambda| + (\|\delta w_1\|_\infty + 1)^2 |\lambda|^2) \\ &= |\lambda| (\|\delta w_1\|_\infty + (\|\delta w_1\|_\infty + 1)^2 |\lambda|). \end{aligned}$$

Or pour  $\lambda$  assez petit,  $(\|\delta w_1\|_\infty + 1)^2 |\lambda| \leq 1$ , d'où  $\|Tu\|_\infty \leq (\|\delta w_1\|_\infty + 1)|\lambda|$ .

Montrons que  $T$  est contractant pour  $\lambda$  petit. On a

$$Tu - Tv = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} (v - u)(v + u) dy.$$

Ainsi,  $\|Tu - Tv\|_\infty \leq 2\|\delta w_1\|_\infty (\|\delta w_1\|_\infty + 1)|\lambda| \|u - v\|_\infty$  avec  $2\|\delta w_1\|_\infty (\|\delta w_1\|_\infty + 1)|\lambda| < 1$  pour  $\lambda$  petit.

D'après le théorème de point fixe de Picard, l'opérateur  $T$  a alors un unique point fixe noté  $\delta w$  qui vérifie la relation

$$\delta w = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} (\lambda - \delta w^2(y)) dy.$$

C'est donc l'unique solution de l'équation non linéaire. De plus,

$$\delta w - \delta w_{lin} = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} \delta w^2(y) dy,$$

d'où puisque  $\delta w \in E_\lambda$ ,  $\|\delta w - \delta w_{lin}\|_\infty = O(|\lambda|^2)$ . □

Terminons la preuve de la proposition 3.5.3. D'après ce qui précède, on a un développement de la forme

$$\delta w = \lambda \delta w_1 + O(|\lambda|^2).$$

Pour continuer le développement, on considère la différence

$$\widetilde{\delta w} = \delta w - \lambda \delta w_1$$

qui est solution de l'équation différentielle

$$\widetilde{\delta w}' + 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) \widetilde{\delta w} = -\widetilde{\delta w}^2 - \lambda^2 \delta w_1^2 - 2\lambda \widetilde{\delta w} \delta w_1. \quad (3.37)$$

Nous cherchons  $\widetilde{\delta w}$  proche de la solution bornée de

$$z' + 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) z = -\lambda^2 \delta w_1^2$$

qui est donnée par

$$z = -\lambda^2 \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} \delta w_1^2(y) e^{-2\lambda_c(x-y)} dy.$$

On pose alors par la suite

$$\delta w_2(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} \delta w_1^2(y) e^{-2\lambda_c(x-y)} dy$$

de sorte que  $z = -\lambda^2 \delta w_2$ . Notons que  $\delta w_2$  est 1-périodique puisque si on effectue le changement de variable  $z = x - y$ , on obtient

$$\delta w_2(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{\psi_{\lambda_c}^2(z+x)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} \delta w_1^2(z+x) e^{2\lambda_c z} dz.$$

Le résultat suivant permet de montrer que

$$\delta w = \lambda \delta_1 - \lambda^2 \delta w_2 + O(|\lambda|^3),$$

ce qui permet d'obtenir le développement (3.34) et de conclure la preuve de la proposition.  $\square$

**Lemme 3.5.5.** *Pour  $\lambda$  assez petit, il existe une solution  $\widetilde{\delta w}$  de l'équation non-linéaire (3.37)*

$$\widetilde{\delta w}' + 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}}{\psi_{\lambda_c}} \right) \widetilde{\delta w} = -\widetilde{\delta w}^2 - \lambda^2 \delta w_1^2 - 2\lambda \widetilde{\delta w} \delta w_1$$

qui vérifie  $\|\widetilde{\delta w} + \lambda^2 \delta w_2\|_{\infty} = O(|\lambda|^3)$ .

*Démonstration du lemme.* On raisonne comme dans le lemme précédent en considérant ici l'opérateur

$$Tu := \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} (-u^2 - \lambda^2 \delta w_1^2 - 2\lambda u \delta w_1) dy,$$

défini sur l'espace métrique

$$E_{\lambda} = C^0(\mathbb{R}, \bar{D}(0, (\|\delta w_1\|_{\infty}^2 + 1)|\lambda|^2)).$$

Sur l'espace complet  $(E_{\lambda}, d_{\infty})$ ,  $T$  est contractant pour  $\lambda$  petit. Il possède ainsi un unique point fixe  $\widetilde{\delta w}$  qui vérifie la relation

$$\widetilde{\delta w} = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} (-\widetilde{\delta w}^2 - \lambda^2 \delta w_1^2 - 2\lambda \widetilde{\delta w} \delta w_1) dy.$$

et qui est ainsi solution de (3.37). On a de plus

$$\widetilde{\delta w} + \lambda^2 \delta w_2 = \int_{-\infty}^x \frac{\psi_{\lambda_c}^2(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x)} e^{-2\lambda_c(x-y)} (-\widetilde{\delta w}^2 - 2\lambda \widetilde{\delta w} \delta w_1) dy,$$

d'où puisque  $\widetilde{\delta w} \in E_{\lambda}$  et  $\delta w_1$  est bornée,  $\|\widetilde{\delta w} + \lambda^2 \delta w_2\|_{\infty} = O(|\lambda|^3)$ .  $\square$

### Détermination de $u_2(\lambda, x)$ pour $\lambda$ proche de 0

On cherche ensuite une deuxième solution  $u_2(\lambda, x)$  proche de  $u_2(0, x)$ . Puisque  $u_1(\lambda, x)$  ne s'annule pas pour  $\lambda$  petit, on cherche  $u_2(\lambda, x)$  sous la forme  $u_2(\lambda, x) = u_1(\lambda, x)v(\lambda, x)$ ,  $v$  vérifiant l'équation

$$-v'' - 2 \left( \frac{u_1'}{u_1} + \lambda_c \right) v' = 0.$$

Une solution est alors donnée par la formule

$$u_2(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda_c y}}{u_1^2(\lambda, y)} dy. \quad (3.38)$$

### 3.5.3 Exposants de Floquet pour $\lambda$ proche de 0

Le développement asymptotique (3.30) de  $u_1(\lambda, x)$  permet de montrer qu'au voisinage de  $\lambda = 0$  les parties réelles des exposants de Floquet  $\mu_i(\lambda)$  sont de signes opposés

**Lemme 3.5.6.** *Pour  $\lambda$  proche de 0,  $\lambda \neq 0$  et  $\Re(\lambda) \geq 0$ , les  $\Re(\mu_i(\lambda)) > 0$  sont de signe opposé.*

*Démonstration.* Nous supposons par l'absurde que  $\Re(\mu_i(\lambda)) \leq 0$ . Puisque  $(U_1(\lambda, x), U_2(\lambda, x))$  forme une base de solutions de (3.29), on en déduit que toute solution de (3.29) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} u(\lambda, x) &= \alpha_1(\lambda)U_1(\lambda, x) + \alpha_2(\lambda)U_2(\lambda, x) \\ &= \alpha_1(\lambda)v_1(\lambda, x)e^{\mu_1(\lambda)x} + \alpha_2(\lambda)v_2(\lambda, x)e^{\mu_2(\lambda)x}, \end{aligned}$$

où les  $v_i$  sont périodiques, et est donc bornée quand  $x \rightarrow +\infty$ . Nous allons obtenir une contradiction en montrant que

$$|u_1(\lambda, x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

à l'aide du développement asymptotique (3.30).

Rappelons ce développement ; on a

$$u_1(\lambda, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \exp \left( \int_0^x (\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2 + O(\lambda^3)) \right).$$

Ainsi,

$$|u_1(\lambda, x)| = \psi_{\lambda_c}(x) \exp \left( \int_0^x \Re(\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2 + O(\lambda^3)) \right).$$

Si on pose  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ , on a alors

$$\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2 = (\lambda_1 \delta w_1 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \delta w_2) + i(\lambda_2 \delta w_1 - 2\lambda_1 \lambda_2 \delta w_2).$$

Ainsi,

$$\Re(\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2) = \lambda_1 \delta w_1 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \delta w_2.$$

Distinguons deux cas :  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_1 > 0$ .

(i) Si  $\lambda_1 = 0$ , alors  $\lambda_2 \neq 0$  et alors pour  $\lambda \simeq 0$

$$\Re(\lambda\delta w_1 - \lambda^2\delta w_2 + O(\lambda^3)) = \lambda_2^2\delta w_2 + O(|\lambda|^3).$$

(ii) Si  $\lambda_1 > 0$ , alors pour  $\lambda \simeq 0$ ,

$$\Re(\lambda\delta w_1 - \lambda^2\delta w_2 + O(\lambda^3)) = \lambda_1\delta w_1 + O(|\lambda|^2).$$

Dans les deux cas, puisque les fonctions  $\delta w_i$  sont positives et périodiques elles sont minorées par des constantes strictement positives et donc il existe  $m > 0$  tel que si  $\lambda$  est proche de 0,

$$\Re(\lambda\delta w_1 - \lambda^2\delta w_2 + O(\lambda^3)) \geq m.$$

On en déduit que  $|u_1(\lambda, x)| \geq \psi_{\lambda_c}(x)e^{mx} \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .  $\square$

### 3.5.4 Localisation du spectre de $L$

Afin de rabattre le contour d'intégration  $\gamma$  sur l'axe des imaginaires purs, il est nécessaire de montrer qu'il n'y a pas d'éléments du spectre de  $-L$  de partie réelle positive hormis 0 :

**Proposition 3.5.7.** *Soit  $\lambda \in \sigma(-L)$ . Alors  $\lambda = 0$  ou  $\Re(\lambda) < 0$ .*

*Démonstration.* On considère  $\lambda$  tel que  $\Re(\lambda) > 0$  ou  $\lambda \in i\mathbb{R}^*$  et on veut montrer que  $\lambda \in \rho(-L)$ , c'est à dire que si  $f \in BUC(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution bornée  $u$  de  $-Lu - \lambda u = f$ , autrement dit de

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u + \lambda u = -f.$$

L'écriture vectorielle, en posant  $U = (u, u')$ , est alors

$$U' = A(x)U + F,$$

avec

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(x) + \lambda & -2\lambda_c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

On note  $\mu_1(\lambda)$  et  $\mu_2(\lambda)$  les exposants de Floquet. D'après le lemme 3.5.2, on sait qu'il est suffisant de montrer que les  $\Re(\mu_1(\lambda))$  sont de signes opposés, puisqu'alors, si  $\Re(\mu_1(\lambda)) > 0$ , l'unique solution est donnée par la formule

$$u(\lambda, x) = U_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} \frac{w_0(y)}{b(y)} U_2(\lambda, y) e^{2\lambda_c y} dy + U_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^x \frac{w_0(y)}{b(y)} U_1(\lambda, y) e^{2\lambda_c y} dy.$$

Le point important pour cela est de montrer que  $\Re\mu_i(\lambda)$  ne s'annule pas quand dans l'ensemble des  $\lambda \neq 0$  tels que  $\Re(\lambda) \geq 0$ . Supposons par l'absurde qu'il existe  $\bar{\lambda}$  tel que  $\mu_1(\bar{\lambda})$  soit de partie réelle nulle. Alors la fonction  $U_1(\bar{\lambda}, x) = v_1(\bar{\lambda}, x)e^{\mu_1(\bar{\lambda})x}$  est bornée et vérifie l'équation

$$Lu + \bar{\lambda}u = 0.$$

Nous allons voir que ceci est impossible à cause de l'existence de  $\psi_{\lambda_c} > 0$  solution de  $L\psi_{\lambda_c} = 0$ . On suppose dans la suite que  $\Re U_1(\bar{\lambda}, x) \neq 0$ ; on remplace sinon  $U_1$  par  $iU_1$ . L'idée est de considérer le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v_t + Lv = 0, \\ v(0, x) = \Re U_1(\bar{\lambda}, x). \end{cases}$$

La solution de cette équation est  $v(t, x) = \Re(e^{\lambda t} U_1(\bar{\lambda}, x))$ . Puisque  $U_1(\bar{\lambda}, x)$  est bornée et  $\psi_{\lambda_c} > 0$  il existe  $C > 0$  tel que

$$-C\psi_{\lambda_c} \leq \Re U_1(\bar{\lambda}, x) \leq C\psi_{\lambda_c}.$$

On traite ensuite les deux cas  $\Re \bar{\lambda} > 0$  et  $\Re \bar{\lambda} = 0$  séparément.

(i) Le cas  $\Re \bar{\lambda} > 0$ . D'après le principe du maximum, on en déduit que

$$\forall t \geq 0, \quad -C\psi_{\lambda_c} \leq \Re(e^{\lambda t} U_1(\bar{\lambda}, x)) \leq C\psi_{\lambda_c}.$$

Puisque  $\Re \bar{\lambda} > 0$ , on obtient une contradiction en passant à la limite  $t \rightarrow +\infty$ .

(ii) Le cas  $\Re \bar{\lambda} = 0$ . On pose  $\bar{\lambda} = i\sigma$  avec  $\sigma \neq 0$ . On suppose, quitte à remplacer  $U_1(\bar{\lambda}, x)$  par  $-U_1(\bar{\lambda}, x)$ , que

$$q_0 := \inf\{q > 0, \Re U_1(\bar{\lambda}, \cdot) \leq q\psi_{\lambda_c}\} > 0.$$

On distingue à nouveau deux cas

( $\alpha$ ) Il existe  $x_0$  tel que  $\Re U_1(\bar{\lambda}, x_0) = q_0\psi_{\lambda_c}(x_0)$ . D'après le principe du maximum, on a alors pour  $t > 0$ ,  $\Re(e^{-i\sigma t} U_1(\bar{\lambda}, x_0)) \leq q_0\psi_{\lambda_c}(x_0)$ . Le principe du maximum fort impose que soit l'inégalité est stricte, soit les deux fonctions  $\Re(e^{i\sigma t} U_1(\bar{\lambda}, x))$  et  $q_0\psi_{\lambda_c}(x)$  sont égales. En prenant  $t_0 = 2\pi/\sigma$ , on a bien l'égalité au point  $(t_0, x_0)$ , donc finalement

$$\Re(e^{i\sigma t} U_1(\bar{\lambda}, x)) = q_0\psi_{\lambda_c}(x).$$

En notant  $U_1 = u + iv$ , on a d'une part

$$\Re(e^{i\sigma t} U_1(\bar{\lambda}, x)) = \Re((u + iv)(\cos(\sigma t) + i \sin(\sigma t))) = u \cos(\sigma t) - v \sin(\sigma t).$$

D'autre part, on a l'égalité en  $t = 0$

$$\Re(U_1(\bar{\lambda}, x)) = u = q_0\psi_{\lambda_c}(x).$$

On en déduit que pour tout  $t > 0$ , on a

$$u \cos(\sigma t) - v \sin(\sigma t) = u,$$

c'est à dire

$$u \frac{\cos(\sigma t) - 1}{t} = v \frac{\sin(\sigma t)}{t}.$$

En passant à la limite  $t \rightarrow 0$ , on obtient  $\sigma v = 0$  d'où  $v = u = 0$ , c'est à dire  $U_1 = 0$ , ce qui est absurde.

( $\beta$ ) Il existe  $x_n \rightarrow +\infty$  tel que  $\Re U_1(\bar{\lambda}, x_n) - q_0\psi_{\lambda_c}(x_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . On se ramène au premier cas par le procédé suivant. On regarde le problème de Cauchy

$$\begin{cases} v_t^n - v_{xx}^n - 2\lambda_c v_x^n + a_n(x)v^n = 0, \\ v^n(0, x) = \Re u_n(x), \end{cases}$$

avec  $a_n(x) = a(x+x_n)$  et  $u_n(x) = U_1(\bar{\lambda}, x+x_n)$ . La solution est  $v^n(t, x) = \Re(e^{-\lambda t} u_n(x))$ . La suite de fonctions  $a_n$  étant bornée dans  $C^1$ , on peut en extraire par Ascoli et le procédé d'extraction diagonale une sous suite convergeant uniformément sur tout compact. On note  $a_\infty$  la limite qui est 1-périodique. On procède de même pour  $u_n(x)$  qui converge vers  $u_\infty(x)$  et  $\psi_{\lambda_c}(x+x_n)$  qui converge vers  $\psi_\infty(x)$ . Par régularité parabolique, on extrait ensuite de  $v^n$  une sous suite qui converge localement dans  $C^{1,2}$  vers la solution  $v$  de l'équation

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} - 2\lambda_c v_x + a_\infty(x)v = 0, \\ v(0, x) = \Re u_\infty(x), \end{cases}$$

qui est  $v(t, x) = \Re(e^{-\lambda t} u_\infty(x))$ . De plus, puisque  $\Re U_1(\bar{\lambda}, x_n) - q_0 \psi_{\lambda_c}(x_n) \rightarrow 0$ , on obtient que  $\Re u_\infty(0) = q_0 \psi_\infty(0)$ . On est donc ramené au cas  $(\alpha)$ .

Montrons pour conclure que les  $\Re \mu_i(\lambda)$  sont de signes opposés. Pour  $|\lambda_0|$  assez petit, on sait que  $\Re \mu_1(\lambda_0)$  et  $\Re \mu_2(\lambda_0)$  sont de signes opposés d'après le lemme 3.5.5. On fixe  $\Re \mu_1(\lambda_0) > 0$ . Supposons ensuite par l'absurde qu'il existe  $\lambda_1$  tel que les deux multiplicateurs soient de partie réelle strictement négative. On note encore  $\lambda_1$  le nombre complexe de plus petit module qui vérifie cette propriété. Puisque  $\mu_1(\lambda) + \mu_2(\lambda) = -2\lambda_c$ , les fonctions  $\Re \mu_1(\lambda)$  et  $\Re \mu_2(\lambda)$  ne se croisent pas sur le segment  $[\lambda_0, \lambda_1]$  donc sont régulières. La fonction  $\Re \mu_1(\lambda)$  doit donc s'annuler sur  $[\lambda_0, \lambda_1]$ , ce qui est absurde d'après le raisonnement précédent.  $\square$

### 3.5.5 Approximation de $u(\lambda, x)$ au voisinage de $\lambda = 0$

#### Formule intégrale de $u$ pour $\lambda$ proche de 0

Pour  $\lambda \neq 0$ ,  $\Re(\lambda) \geq 0$ , l'équation non homogène (3.27)

$$-u'' - 2\lambda_c u' + a(x)u + \lambda u = w_0$$

possède une unique solution bornée qui est donnée d'après le lemme 3.5.2 par une formule intégrale faisant intervenir la base  $(U_1, U_2)$  de solutions de l'équation homogène. Pour  $\lambda$  proche de 0, on souhaite écrire cette solution bornée en fonction de la nouvelle base  $(u_1, u_2)$ .

D'après la preuve du lemme, on sait que  $u_1$  s'écrit sous la forme

$$u_1(\lambda, x) = \alpha_1(\lambda)U_1(\lambda, x) = \alpha_1(\lambda)v_1(\lambda, x)e^{\mu_1(\lambda)x},$$

ce qui veut dire que

$$|u_1(\lambda, x)| = |\alpha_1(\lambda)v_1(\lambda, x)|e^{\Re(\mu_1(\lambda))x}.$$

De même, puisque  $\Re \mu_2 = -2\lambda_c - \Re \mu_1 < 0$ , on a

$$|u_2(\lambda, x)| = |\alpha_2(\lambda)v_2(\lambda, x)|e^{\Re(\mu_2(\lambda))x}.$$

On remarque ensuite que le wronskien de  $(u_1(\lambda, x), u_2(\lambda, x))$  est égal

$$W_\lambda(x) = -e^{-2\lambda_c x},$$

c'est à dire que pour cette base,  $b_\lambda(x) = 1$ . En effet, puisque d'après la relation (3.38)

$$u_2(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda_c y}}{u_1^2(\lambda, y)} dy,$$

on a bien la relation

$$\begin{aligned}
W_\lambda(x) &= u_1(\lambda, x)u_2'(\lambda, x) - u_2(\lambda, x)u_1'(\lambda, x) \\
&= u_1(\lambda, x) \left( u_1'(\lambda, x) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda_c y}}{u_1^2(\lambda, y)} dy + \frac{e^{-2\lambda_c x}}{u_1(\lambda, x)} \right) \\
&\quad - u_1'(\lambda, x)u_2(\lambda, x) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda_c y}}{u_1^2(\lambda, y)} dy \\
&= -e^{-2\lambda_c x}.
\end{aligned}$$

En reprenant la preuve du lemme 3.5.2, les éléments précédant permettent de montrer le résultat suivant

**Proposition 3.5.8.** *Soit  $w_0 \in BUC(\mathbb{R})$ . Pour  $\lambda$  proche de 0,  $\lambda \neq 0$  et  $\Re(\lambda) \geq 0$ , il existe une unique solution bornée de l'équation différentielle (3.27) donnée par la relation*

$$u(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} u_2(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy + u_2(\lambda, x) \int_{-\infty}^x u_1(\lambda, y)w_0(y)e^{2\lambda_c y} dy. \quad (3.39)$$

### Approximation de $u$ pour $\lambda$ proche de 0

Si on remplace  $u_2$  en fonction de  $u_1$

$$u_2(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda_c y}}{u_1^2(\lambda, y)} dy$$

dans la relation (3.39), on obtient l'expression suivante de  $u$  :

$$u(\lambda, x) = u_1(\lambda, x) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{u_1(\lambda, y)}{u_1^2(\lambda, z)} w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy. \quad (3.40)$$

Pour  $\lambda$  proche de 0, puisque

$$u_1(\lambda, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \exp \left( \int_0^x \left( \lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2 + O(\lambda^3) \right) \right),$$

on peut approcher  $u_1$  par son expression tronquée

$$u_{1,tq}(\lambda, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \exp \left( \int_0^x (\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2) \right). \quad (3.41)$$

afin d'obtenir l'expression tronquée de  $u$

$$u_{tq}(\lambda, x) = u_{1,tq}(\lambda, x) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{u_{1,tq}(\lambda, y)}{u_{1,tq}^2(\lambda, z)} w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy. \quad (3.42)$$

On obtient ainsi l'approximation suivante de  $u$  :

$$\begin{aligned}
u_{tq}(\lambda, x) &= \psi_{\lambda_c}(x) \exp \left( \int_0^x (\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2) \right) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} \\
&\quad \exp \left( \int_0^y (\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2) - 2 \int_0^z (\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2) \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy,
\end{aligned}$$

soit

$$u_{tq}(\lambda, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} e^{-\lambda A + \lambda^2 B} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy, \quad (3.43)$$

où les fonctions  $A(x, y, z)$  et  $B(x, y, z)$  sont définies par

$$A(x, y, z) = \int_x^z \delta w_1 + \int_y^z \delta w_1, \quad B(x, y, z) = \int_x^z \delta w_2 + \int_y^z \delta w_2.$$

Comme nous l'avons remarqué dans le cas homogène, la fonction  $\omega \rightarrow u_{tq}(i\omega, x)$ , où

$$u_{tq}(i\omega, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} e^{-i\omega A - \omega^2 B} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy,$$

n'est pas à priori intégrable au voisinage de  $\omega = 0$  : le cas  $\psi_{\lambda_c} = \delta w_1 = \delta w_2 = 1$  ramène à la situation du milieu homogène et donne une explosion en  $\frac{1}{\omega}$  au voisinage de  $\omega = 0$ .

Puisque  $0 < m_0 \leq \psi_{\lambda_c} \leq M_0$ , les fonctions  $\delta w_i$  vérifient le même type d'estimations

$$0 < m_i \leq \delta w_i \leq M_i.$$

Ainsi,

$$m_1(2z - y - x) \leq A(x, y, z) \leq M_1(2z - y - x),$$

$$m_2(2z - y - x) \leq B(x, y, z) \leq M_2(2z - y - x).$$

On retrouve ainsi les estimations suivantes

**Lemme 3.5.9.** *La fonction  $\omega \rightarrow \omega^2 u_{tq}(i\omega, x)$  est  $L^1(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Puisque  $w_0$  est bornée, on a

$$|\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)| \leq C\omega^2 \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-m_i\omega^2(2z-y-x)} dz dy.$$

Le membre de droite est  $L^1$  en  $\omega$  d'après les calculs du cas homogène.  $\square$

**Lemme 3.5.10.** *L'application  $\omega \rightarrow \frac{d}{d\omega}(\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)) \in L^1([\delta, +\infty))$ , avec  $\delta > 0$ .*

*Démonstration.* On a tout d'abord,

$$\begin{aligned} & \omega^2 u_{tq}(i\omega, x) \\ &= \omega^2 \psi_{\lambda_c}(x) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} e^{-i\omega A - \omega^2 B} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\omega}(\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)) = 2\omega u_{tq}(i\omega, x) \\ & + \omega^2 \psi_{\lambda_c}(x) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} (-iA - 2\omega B) e^{-i\omega A - \omega^2 B} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy. \end{aligned}$$

La fonction  $\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)$  est intégrable, on regarde l'autre terme. Notons qu'il existe  $m > 0$  et  $M > 0$  tels que

$$m(2z - y - x) \leq A(x, y, z), B(x, y, z) \leq M(2z - y - x),$$

d'où

$$|-iA - 2\omega B| \leq A + 2\omega B \leq M(1 + 2\omega)(2z - y - x).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} & \left| \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{2\lambda_c(y-z)} (-iA - 2\omega B) e^{-i\omega A - \omega^2 B} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy \right| \\ & \leq C(1+2\omega) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) e^{2\lambda_c(y-z)} (2z-y-x) e^{-m\omega^2(2z-y-x)} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy. \end{aligned}$$

On est ramené ainsi à la même estimation que dans le cas homogène (cf lemme 3.3.4).  $\square$

**Lemme 3.5.11.** *On a  $|u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x)| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$ .*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que

$$u_1(\lambda, x) = u_{1,tq}(\lambda, x) e^{\int_0^x O(\lambda^3)},$$

où

$$u_{1,tq}(\lambda, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \exp\left(\int_0^x (\lambda \delta w_1 - \lambda^2 \delta w_2)\right).$$

On obtient ainsi l'égalité

$$\begin{aligned} & u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x) \\ & = \psi_{\lambda_c}(x) \left( \iint + \iint \right) \left( (e^{\int_z^y O(\lambda^3) + \int_z^x O(\lambda^3)} - 1) w_0(y) \frac{u_{1,tq}(\lambda, y)}{u_{1,tq}^2(\lambda, z)} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy \right. \\ & = \psi_{\lambda_c}(x) \left( \iint + \iint \right) \left( e^{\int_z^y O(\lambda^3) + \int_z^x O(\lambda^3)} - 1 \right) w_0(y) \frac{\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} e^{-\lambda A + \lambda^2 B} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy, \end{aligned}$$

avec

$$A(x, y, z) = \int_x^z \delta w_1 + \int_y^z \delta w_1, \quad B(x, y, z) = \int_x^z \delta w_2 + \int_y^z \delta w_2.$$

Notons que puisque

$$0 < \underline{A} \leq \frac{A(x, y, z)}{2z - y - x} \leq \overline{A}, \quad 0 < \underline{B} \leq \frac{B(x, y, z)}{2z - y - x} \leq \overline{B},$$

l'inégalité pour  $a, b \in \mathbb{R}$

$$|e^{a+ib} - 1| \leq C(e^{|a+ib|} - 1)$$

permet d'avoir l'estimation

$$\begin{aligned} & |u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x)| \\ & \leq C \left( \iint + \iint \right) \left( e^{C|\lambda|^3(2z-y-x)} - 1 \right) e^{-A\Re\lambda} e^{B((\Re\lambda)^2 - (\Im\lambda)^2)} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy \\ & \leq C \left( \iint + \iint \right) \left( e^{C|\lambda|^3(2z-y-x)} - 1 \right) e^{-\underline{A}\Re\lambda(2z-y-x)} e^{\overline{B}(\Re\lambda)^2(2z-y-x)} e^{-\underline{B}(\Im\lambda)^2(2z-y-x)} dz dy. \end{aligned}$$

En considérant la

$$F(\sigma) = \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) e^{2\lambda_c(y-z)} e^{-\sigma(2z-y-x)} dz dy$$

de sorte que

$$|u(\lambda, x) - u_{tq}(\lambda, x)| \leq C(F(\sigma_1) - F(\sigma_2)),$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= \underline{A}\Re e\lambda - \overline{B}\Re e^2\lambda + \underline{B}\Im m^2\lambda - C|\lambda|^3, \\ \sigma_2 &:= \underline{A}\Re e\lambda - \overline{B}\Re e^2\lambda + \underline{B}\Im m^2\lambda, \end{aligned}$$

on conclut comme dans le cas homogène (cf lemme 3.3.5).  $\square$

### 3.5.6 Déformation du contour

Rappelons que l'objectif est d'étudier les propriétés en temps grand du shift qui est donné par la formule

$$w(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda.$$

Pour cela, nous cherchons à expliciter cette intégrale. L'idée est de déformer le contour  $\gamma$  en l'axe  $i\mathbb{R}$  et remplacer  $u(\lambda, x)$  par son terme dominant  $u_{tq}$  au voisinage de  $\lambda = 0$ . L'intérêt est que l'intégrale

$$w(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{i\mathbb{R}} e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda$$

possède une expression plus explicite que nous étudierons. Cependant, nous avons vu que  $u_{tq}(\lambda, x)$  n'est pas intégrable au voisinage de  $\lambda = 0$ . Pour remédier à ceci, nous appliquerons cette procédure sur la dérivée seconde en temps

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda,$$

le gain du  $\lambda^2$  nous permettant de travailler avec la fonction  $\omega^2 u_{tq}(i\omega, x)$  intégrable.

#### Déformation du contour.

Puisque la fonction  $\lambda \rightarrow \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x)$  est holomorphe sur l'ouvert  $\rho(-L)$  et qu'il n'y a pas de spectre de  $-L$  dans le demi-plan  $\Re e\lambda \geq 0$  à l'exception de  $\lambda = 0$  la théorème de Cauchy dit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

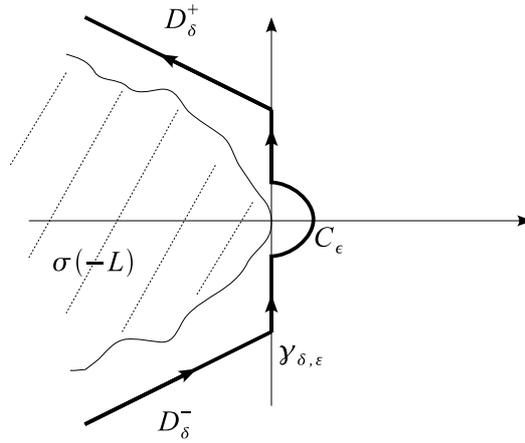
$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\delta, \varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda,$$

où le chemin  $\gamma_{\delta, \varepsilon}$  défini par (cf figure )

$$\gamma_{\delta, \varepsilon} := D_{\delta}^- \cup [-i\delta, -i\varepsilon] \cup C_{\varepsilon} \cup [i\varepsilon, i\delta] \cup D_d^+,$$

avec

$$D_{\delta}^- = \{-i\delta + t(-1 - mi), t \geq 0\}, \quad D_d^+ = \{i\delta + t(-1 + mi), t \geq 0\},$$

FIG. 3.5 – Contour d'intégration  $\gamma_{\delta,\varepsilon}$ 

$$C_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta}, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

est homotope au chemin  $\gamma$  dans  $\rho(-L)$ . La quantité  $m > 0$  est telle que ce chemin contourne bien le spectre et  $\varepsilon$  est amené à tendre vers 0.

On note alors  $\tilde{\gamma}_{\delta,\varepsilon} := [-i\delta, -i\varepsilon] \cup C_\varepsilon \cup [i\varepsilon, i\delta]$ , de telle sorte que

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta,\varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda.$$

On note alors  $\gamma_\varepsilon := [-i\infty, -i\varepsilon] \cup C_\varepsilon \cup [i\varepsilon, i\infty[$ , de sorte que

$$\begin{aligned} w_{tt}(t, x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta,\varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta,\varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda \end{aligned}$$

On décompose finalement  $w_{tt}$  sous la forme

$$\begin{aligned} w_{tt}(t, x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta,\varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{]-i\infty, -i\delta] \cup [i\delta, i\infty[} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda, \end{aligned} \quad (3.44)$$

cette égalité étant vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ .

### Passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$

Il s'agit ensuite de passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour le deuxième terme de (3.44), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta,\varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\delta}^{i\delta} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} \omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta,\varepsilon}} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda - \int_{[-i\delta, i\delta]} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda \\ = \int_{C_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda - \int_{[-i\varepsilon, i\varepsilon]} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda, \end{aligned}$$

et les deux dernières intégrales tendent vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  car on intègre la fonction bornée  $\lambda^2(u - u_{tq})(\lambda, x)$  sur des chemins  $C_\varepsilon$  et  $[-i\varepsilon, i\varepsilon]$  dont la longueur tend vers 0.

Pour le premier terme de (3.44), on peut passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  grâce au terme  $\lambda^2$

**Lemme 3.5.12.** *Nous avons*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda, \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega.$$

*Démonstration.* Rappelons que

$$f(t, x) := \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda.$$

Puisque  $\lambda \rightarrow \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x)$  est continue au voisinage de  $\lambda = 0$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\int_{C_\varepsilon} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda \rightarrow 0.$$

De la même façon,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega - \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega \right| = \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega \right| \rightarrow 0.$$

□

En passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (3.44), on a ainsi

$$\begin{aligned} w_{tt}(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} \omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{]-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty[} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.45)$$

### Estimation des termes

Estimons d'abord le quatrième terme de (3.45)

**Lemme 3.5.13.** *On a*

$$\left| \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda \right| = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

*Démonstration.* Puisque  $L$  est sectoriel, il existe  $M > 0$  et  $\omega > 0$  tels que

$$\|(\lambda I + L)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \leq M'$$

On en déduit que puisque  $w_0$  est bornée  $|(\lambda I + L)^{-1}w_0(x)| \leq M'$ . Considérons l'intégrale sur le chemin  $D_\delta^+ = \{i\delta + s(-1 + mi), s \geq 0\}$ , l'autre se traitant de la même façon. En effectuant le changement de variable  $\lambda = i\delta + s(-1 + mi)$ , on a alors

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^+} \lambda^2 e^{t\lambda} (\lambda I + L)^{-1} w_0(x) d\lambda \right| \leq C \int_0^{+\infty} ((m + \delta)^2 + 2(m + \delta)s + s^2) e^{-ts} ds \leq \frac{C'}{t},$$

d'où le résultat.  $\square$

L'étude de la deuxième et de la troisième intégrale de (3.45) se fait par intégration par parties comme dans le cas homogène (cf lemme 3.3.8)

**Lemme 3.5.14.** *On a*

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} \omega^2 (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega \right| = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{]-i\infty, -i\delta] \cup [i\delta, i\infty[} \lambda^2 e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda \right| = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

La première intégrale de (3.45) est plus difficile à estimer. Nous commençons par l'explicitier grâce à une inversion de Fourier

**Lemme 3.5.15.** *On a*

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega \\ &= \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{w_0(y) \psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{e^{-\frac{(t-A(x,y,z))^2}{4B(x,y,z)}}}{\sqrt{2B(x,y,z)}} \right) e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy, \end{aligned} \tag{3.46}$$

avec

$$A(x, y, z) = \int_x^z \delta w_1 + \int_y^z \delta w_1, \quad B(x, y, z) = \int_x^z \delta w_2 + \int_y^z \delta w_2.$$

*Démonstration.* Nous cherchons à estimer

$$f(t, x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega,$$

avec

$$u_{tq}(i\omega, x) = \psi_{\lambda_c}(x) \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{w_0(y) \psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} e^{-i\omega A(x,y,z) - \omega^2 B(x,y,z)} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy.$$

Nous considérons seulement par la suite la première intégrale

$$\psi_{\lambda_c}(x) \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} e^{-i\omega A(x,y,z)-\omega^2 B(x,y,z)} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy,$$

l'autre se traitant de manière identique. L'idée est de faire apparaître une transformée de Fourier inverse. Pour cela, nous avons besoin d'invertir l'intégration en  $\omega$  et l'intégration en  $(y, z)$  à l'aide du théorème de Fubini. Ceci est possible car la fonction

$$\omega \rightarrow \omega^2 e^{i\omega t} e^{-i\omega A(x,y,z)-\omega^2 B(x,y,z)} e^{2\lambda_c(y-z)}$$

est  $L^1$  en  $(\omega, y, z)$  d'après les remarques précédentes. On peut alors permuter les intégrales pour obtenir

$$\frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \int_y^{+\infty} w_0(y) \frac{\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} (-\omega^2) e^{-i\omega A(x,y,z)-\omega^2 B(x,y,z)} d\omega \right) e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy.$$

Entre parenthèse on a fait apparaître une transformée de Fourier inverse connue, puisque, avec la convention  $\mathcal{F}g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} g(t) d\omega$ , on a

$$\mathcal{F} \left( \frac{e^{-\frac{(t-a)^2}{4b}}}{\sqrt{2b}} \right) (\omega) = e^{-ia\omega - b\omega^2}, \quad \mathcal{F} \left( \frac{d^2}{dt^2} \frac{e^{-\frac{(t-a)^2}{4b}}}{\sqrt{2b}} \right) (\omega) = -\omega^2 e^{-ia\omega - b\omega^2}.$$

On obtient ainsi le résultat annoncé.  $\square$

On pose alors par la suite

$$W(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} \frac{e^{-\frac{(t-A(x,y,z))^2}{4B(x,y,z)}}}{\sqrt{2B(x,y,z)}} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy, \quad (3.47)$$

où

$$A(x, y, z) = \int_x^z \delta w_1 + \int_y^z \delta w_1, \quad B(x, y, z) = \int_x^z \delta w_2 + \int_y^z \delta w_2.$$

La conclusion de cette section est que

$$w_{tt}(t, x) = W_{tt}(t, x) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

Dans la section suivante, nous étudions la fonction  $W$  et montrons en particulier que  $W_{tt} = O\left(\frac{1}{t}\right)$ .

### 3.5.7 Le terme dominant du shift

Nous étudions dans cette section le terme  $W$  défini par (3.47). Nous l'écrivons par la suite sous la forme

$$W(t, x) = W_1(t, x) + W_2(t, x),$$

avec

$$W_1(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} \frac{e^{-\frac{(t-A(x,y,z))^2}{4B(x,y,z)}}}{\sqrt{2B(x,y,z)}} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy \quad (3.48)$$

et

$$W_2(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} \frac{e^{-\frac{(t-A(x,y,z))^2}{4B(x,y,z)}}}{\sqrt{2B(x,y,z)}} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy \quad (3.49)$$

Nous allons voir que ces deux intégrales donnent des comportements différents en temps grand. Le premier terme  $W_1$  est borné, tandis que le second  $W_2$  décroît exponentiellement vite en temps.

### Étude du terme $W_1$ .

Pour étudier  $W_1$ , on effectue le changement de variables  $z' = z - y, y' = y - x$ . On obtient alors

$$W_1(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{w_0(x+y)\psi_{\lambda_c}(x+y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x+y+z)} \frac{e^{-\frac{(t-\tilde{A}(x,y,z))^2}{4\tilde{B}(x,y,z)}}}{\sqrt{2\tilde{B}(x,y,z)}} e^{-2\lambda_c z} dz dy,$$

avec

$$\tilde{A}(x, y, z) = \int_x^{x+y+z} \delta w_1 + \int_{x+y}^{x+y+z} \delta w_1, \quad \tilde{B}(x, y, z) = \int_x^{x+y+z} \delta w_2 + \int_{x+y}^{x+y+z} \delta w_2.$$

On effectue ensuite le second changement de variables

$$Y = y, \quad Z = \tilde{A}(x, y, z) = \int_x^{x+y+z} \delta w_1 + \int_{x+y}^{x+y+z} \delta w_1.$$

Le changement de variables est différent du cas  $Y_p = 1$  car ici  $\tilde{A}$  n'est pas croissant en  $y$  mais il l'est encore par rapport à  $z$ . Si  $F$  désigne une primitive de  $\delta w_1$ , on a alors  $\tilde{A}(x, y, z) = 2F(x+y+z) - F(x) - F(x+y)$ . On pose ainsi

$$Z = 2F(x+y+z) - F(x) - F(x+y),$$

$$z = F^{-1}\left(\frac{1}{2}(Z + F(x) + F(x+y))\right) - x - y.$$

De plus,

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{2\delta w_1(F^{-1}(Z/2 + (F(x) + F(x+y))/2))} = \frac{1}{2\delta w_1(x+y+z)}.$$

On a ainsi

$$W_1(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_{\tilde{A}(x,y,0)}^{+\infty} \frac{w_0(x+y)\psi_{\lambda_c}(x+y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x+y+Z)} \frac{e^{-2\lambda_c z}}{2\delta w_1(x+y+z)} \sqrt{\frac{\tilde{A}}{2\tilde{B}}} \frac{e^{-\frac{\tilde{A}}{4\tilde{B}} \frac{(t-Z)^2}{Z}}}{\sqrt{Z}} dy dZ.$$

On note ensuite  $\tilde{c}(x, y, z) = \frac{\tilde{A}(x,y,z)}{\tilde{B}(x,y,z)}$  qui est minoré et majoré. En inversant la relation  $Z = \tilde{A}(x, y, 0) = F(x+y) - F(x)$  en  $y = F^{-1}(Z + F(x)) - x$ , Fubini permet d'écrire  $W_1$  sous la forme suivante

$$W_1(t, x) = \int_0^{+\infty} V_1(x, Z) \frac{e^{-\tilde{c}(x,y,Z) \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{\sqrt{Z}} dZ,$$

avec

$$V_1(x, Z) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{F^{-1}(Z+F(x))-x} \frac{w_0(x+y)\psi_{\lambda_c}(x+y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x+y+z)} \frac{e^{2\lambda_c(x+y)}e^{-2\lambda_c F^{-1}(\frac{1}{2}(Z+F(x)+F(x+y)))}}{2\delta w_1(x+y+z)} \sqrt{\tilde{c}} dy.$$

De plus (en se restreignant à des compacts en temps), on peut dériver sous le signe intégral. On a ainsi

$$\partial_t W_1(t, x) = \int_0^{+\infty} \tilde{c}(x, y, Z) V_1(x, Z) (Z-t) \frac{e^{-\tilde{c}(x, y, Z) \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{Z^{3/2}} dZ,$$

et

$$\partial_{tt} W_1(t, x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \tilde{c}(x, y, Z) V_1(x, Z) \left( \frac{\tilde{c}}{2} (Z-t)^2 - Z \right) \frac{e^{-\tilde{c}(x, y, Z) \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{Z^{5/2}} dZ.$$

Les estimations sur  $W_1$  et ses dérivées découlent du résultat suivant

**Lemme 3.5.16.** *La fonction  $V_1(x, Z)$  est bornée.*

*Démonstration.* Puisque  $w_0$ ,  $\psi_{\lambda_c}$ ,  $\delta w_1$  et  $\tilde{c}$  sont des fonctions bornées, on a

$$V_1(x, Z) \leq C \int_0^{F^{-1}(Z+F(x))-x} e^{2\lambda_c(x+y)} e^{-2\lambda_c F^{-1}(\frac{1}{2}(Z+F(x)+F(x+y)))} dy.$$

Le point important est que  $\delta w_1$  est 1-périodique. L'idée est alors de l'écrire sous la forme  $\delta w_1(x) = M + \varepsilon(x)$ , sa moyenne plus une fonction périodique de moyenne nulle. Ainsi,  $F(x) = Mx + g(x)$ , avec  $g$  bornée. En inversant, on obtient que  $F^{-1}$  s'écrit sous la forme  $F^{-1}(y) = \frac{y}{M} + h(y)$ , avec  $h$  bornée. En effet, si on pose

$$h(y) := F^{-1}(y) - \frac{y}{M},$$

alors on a

$$y = F\left(\frac{y}{M} + h(y)\right) = M\left(\frac{y}{M} + h(y)\right) + g\left(\frac{y}{M} + h(y)\right) = y + Mh(y) + g\left(\frac{y}{M} + h(y)\right).$$

Ainsi,

$$h(y) = -\frac{1}{M}g\left(\frac{y}{M} + h(y)\right),$$

et est donc bornée.

Revenons à l'intégrale. Notons que

$$\begin{aligned} F^{-1}(Z + F(x)) - x &= F^{-1}(Z + Mx + g(x)) - x \\ &= \frac{1}{M}(Z + Mx + g(x)) + h(Z + Mx + g(x)) - x \\ &= \frac{Z}{M} + H(x, Z), \end{aligned}$$

avec  $H$  bornée. De la même façon, on a

$$\begin{aligned}
F^{-1} \left( \frac{1}{2}(Z + F(x) + F(x + y)) \right) \\
&= F^{-1} \left( \frac{Z}{2} + \frac{1}{2}(Mx + g(x)) + \frac{1}{2}(M(x + y) + g(x + y)) \right) \\
&= F^{-1} \left( \frac{Z}{2} + Mx + \frac{M}{2}y + \frac{1}{2}(g(x) + g(x + y)) \right) \\
&= \frac{1}{M} \left( \frac{Z}{2} + Mx + \frac{M}{2}y + \frac{1}{2}(g(x) + g(x + y)) \right) \\
&\quad + h \left( \frac{Z}{2} + Mx + \frac{M}{2}y + \frac{1}{2}(g(x) + g(x + y)) \right).
\end{aligned}$$

Au final,

$$F^{-1} \left( \frac{1}{2}(Z + F(x) + F(x + y)) \right) = \frac{Z}{2M} + x + \frac{y}{2} + G(x, y, Z),$$

avec  $G$  bornée. Ainsi,

$$e^{2\lambda_c(x+y)} e^{-2\lambda_c F^{-1}(\frac{1}{2}(Z+F(x)+F(x+y)))} = e^{\lambda_c y} e^{-\lambda_c Z/M} e^{-2\lambda_c G(x,y,Z)} \leq C e^{\lambda_c y} e^{-\lambda_c Z/M}.$$

Au final,

$$V_1(x, Z) \leq C e^{-\lambda_c Z/M} \int_0^{Z/M+H(x,Z)} e^{\lambda_c y} dy,$$

d'où

$$V_1(x, Z) \leq C e^{-\lambda_c Z/M} (e^{\lambda_c(Z/M+H(x,Z))} - 1) = C(e^{\lambda_c H(x,Z)} - e^{-\lambda_c Z/M}) \leq C(e^{\lambda_c H(x,Z)}).$$

On en déduit que  $V_1$  est bornée. □

**Corollaire 3.5.17.** *La fonction  $W_1$  est bornée. De plus, quand  $t \rightarrow +\infty$ ,*

$$|\partial_t W_1(t, x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad |\partial_{tt} W_1(t, x)| = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

*Démonstration.* Puisque  $V_1$  est bornée et  $\tilde{c} \geq m > 0$ , on a

$$|W_1(t, x)| \leq C \int_0^{+\infty} \frac{e^{-m \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{\sqrt{Z}} dZ.$$

La fonction  $W_1$  est ainsi bornée grâce à l'estimation (3.17). Pour les dérivées, on utilise les estimations (3.18) et (3.19). □

**Étude du terme  $W_2$ .**

Pour  $W_2$ , on effectue le changement de variables  $z' = z - x, y' = y - x$  :

$$W_2(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} \frac{w_0(x+y)\psi_{\lambda_c}(x+y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x+z)} \frac{e^{-\frac{(t-\bar{A}(x,y,z))^2}{4\bar{B}(x,y,z)}}}{\sqrt{2\bar{B}(x,y,z)}} e^{2\lambda_c(y-z)} dydz,$$

avec

$$\bar{A}(x, y, z) = \int_x^{x+z} \delta w_1 + \int_{x+y}^{x+z} \delta w_1, \quad \bar{B}(x, y, z) = \int_x^{x+z} \delta w_2 + \int_{x+y}^{x+z} \delta w_2.$$

On effectue ensuite le changement de variables

$$Y = y, \quad Z = \bar{A}(x, y, z) = \int_x^{x+z} \delta w_1 + \int_{x+y}^{x+z} \delta w_1.$$

Si  $F$  désigne une primitive de  $\delta w_1$ , on a alors  $\bar{A}(x, y, z) = 2F(x+z) - F(x) - F(x+y)$ .

On pose alors

$$Z = 2F(x+z) - F(x) - F(x+y),$$

$$z = F^{-1}\left(\frac{1}{2}(Z + F(x) + F(x+y))\right) - x.$$

De plus,

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{2\delta w_1(F^{-1}(Z/2 + (F(x) + F(x+y))/2))} = \frac{1}{2\delta w_1(x+z)}.$$

On a ainsi

$$W_2(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \int_{\bar{A}(x,y,0)}^{+\infty} \frac{w_0(x+y)\psi_{\lambda_c}(x+y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x+z)} \frac{e^{2\lambda_c(y-z)}}{2\delta w_1(x+z)} \sqrt{\frac{\bar{A}}{2\bar{B}}} \frac{e^{-\frac{\bar{A}}{4\bar{B}} \frac{(t-Z)^2}{Z}}}{\sqrt{Z}} dydZ.$$

On note ensuite  $\bar{c}(x, y, z) = \frac{\bar{A}(x,y,z)}{\bar{B}(x,y,z)}$  qui est minoré et majoré. Fubini permet alors d'écrire  $W_2$  sous la forme

$$W_2(t, x) = \int_0^{+\infty} V_2(x, Z) \frac{e^{-\bar{c}(x,y,Z) \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{\sqrt{Z}} dZ,$$

avec

$$V_2(x, Z) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{2\sqrt{\pi}} \int_{F^{-1}(F(x)-Z)-x}^0 \frac{w_0(x+y)\psi_{\lambda_c}(x+y)}{\phi_c^2(x+z)} \frac{e^{2\lambda_c(x+y)} e^{-2\lambda_c F^{-1}(\frac{1}{2}(Z+F(x)+F(x+y)))}}{2\delta w_1(x+z)} \sqrt{\bar{c}} dy.$$

Dérivons  $W_2$  en temps, on obtient

$$\partial_t W_2(t, x) = \int_0^{+\infty} \bar{c}(x, y, Z) V_1(x, Z) (Z - t) \frac{e^{-c(x,y,Z) \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{Z^{3/2}} dZ,$$

et

$$\partial_{tt} W_2(t, x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} c(x, y, Z) V_1(x, Z) \left(\frac{c}{2}(Z-t)^2 - Z\right) \frac{e^{-c(x,y,Z) \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{Z^{5/2}} dZ.$$

Afin d'estimer  $W_2$  et ses dérivées, on a besoin du résultat suivant

**Lemme 3.5.18.** *Il existe  $C, \alpha > 0$  tels que  $|V_2(x, Z)| \leq Ce^{-\alpha Z}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $w_0, \psi_{\lambda_c}, \delta w_1$  et  $\tilde{c}$  sont des fonctions bornées, on a

$$V_2(x, Z) \leq C \int_{F^{-1}(F(x)-Z)-x}^0 e^{2\lambda_c(x+y)} e^{-2\lambda_c F^{-1}(\frac{1}{2}(Z+F(x)+F(x+y)))} dy.$$

On reprend les mêmes notations que pour  $V_1$ . On obtient cette fois que

$$F^{-1}(F(x) - Z) - x = Z/M + H(x, Z),$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{2}(Z + F(x) + F(x+y))\right) = \frac{Z}{2M} + x + y/2 + G(x, y, Z),$$

avec  $H$  et  $G$  bornée. On a ainsi

$$e^{2\lambda_c(x+y)} e^{-2\lambda_c F^{-1}(\frac{1}{2}(Z+F(x)+F(x+y)))} \leq Ce^{\lambda_c y} e^{-\lambda_c Z/M}.$$

Au final,

$$V_2(x, Z) \leq Ce^{-\lambda_c Z/M} \int_{-Z/M+H(x,Z)}^0 e^{\lambda_c y} dy,$$

d'où

$$V_2(x, Z) \leq Ce^{-\lambda_c Z/M} (1 - e^{-\lambda_c Z/M} e^{\lambda_c H(x,Z)}) \leq Ce^{-\lambda_c Z/M}.$$

□

**Corollaire 3.5.19.** *Il existe  $C, a > 0$  tels que pour  $t \rightarrow +\infty$ ,*

$$|W_2(t, x)|, |\partial_t W_2(t, x)|, |\partial_{tt} W_2(t, x)| = O(e^{-at}).$$

*Démonstration.* D'après l'estimation précédente, et le fait que  $\bar{c} \geq m > 0$ , on a

$$|W_2(t, x)| \leq C \int_0^{+\infty} e^{-aZ} \frac{e^{-m \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{\sqrt{Z}} dZ.$$

L'estimation (3.20) permet alors de conclure sur  $W_2$ . Pour les dérivées, on utilise les estimations (3.21) et (3.22). □

### 3.5.8 Comportement des dérivées du shift en temps grand

Nous pouvons maintenant démontrer le point (i) du théorème 3.1.2 qui nous dit que quand  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\|m_x(t, \cdot)\|_\infty, \|m_t(t, \cdot)\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

1) *La dérivée temporelle.* Les deux sections précédentes nous disent au final que

$$|w_{tt}(t, x)| = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Puisque  $w$  est bornée, on en déduit que

$$|w_t(t, x)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Pour montrer cela, il suffit d'écrire un développement de Taylor à l'ordre deux en  $t$  :

$$w(t + \sqrt{t}, x) = w(t, x) + w'(t, x)\sqrt{t} + w''(\tau, x)\frac{t}{2}, \quad \tau \in [t, t + \sqrt{t}].$$

Ainsi,

$$w'(t, x) = \frac{w(t + \sqrt{t}, x) - w(t, x)}{\sqrt{t}} - w''(\tau, x)\frac{\sqrt{t}}{2}.$$

On en déduit que

$$|w'(t, x)| \leq \frac{2}{\sqrt{t}} \sup_{[t, t+\sqrt{t}]} |w(\cdot, x)| + \frac{\sqrt{t}}{2} \sup_{[t, t+\sqrt{t}]} |w''(\cdot, x)|.$$

Finalement,  $|w'(t, x)| \leq C/\sqrt{t}$ .

2) *La dérivée spatiale.* On considère ensuite

$$z(t, x) = \frac{w(t, x)}{\psi_{\lambda_c}(x)}$$

solution de l'équation

$$z_t - z_{xx} - 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}(x)}{\psi_{\lambda_c}(x)} \right) z_x = 0.$$

La conclusion précédente nous dit que

$$|z_t(t, \cdot)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

On a alors

$$|z_x(t, \cdot)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

On écrit pour cela l'équation d'abord sous la forme

$$z_{xx} + a(x)z_x = z_t,$$

avec  $a(x) = 2 \left( \lambda_c + \frac{\psi'_{\lambda_c}(x)}{\psi_{\lambda_c}(x)} \right)$  fonction 1-périodique, puis

$$\frac{d}{dx}(z_x e^{A(x)}) = e^{A(x)} z_t,$$

avec  $A(x) = \int_0^x a(y)dy$  une primitive de  $a(x)$ . Ainsi,

$$z_x(t, x) = \left( z_x(t, 0) + \int_0^x e^{A(y)} z_t(t, y) dy \right) e^{-A(x)}.$$

Notons que

$$\int_0^1 \frac{\psi'_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}(y)} dy = \ln \psi_{\lambda_c}(1) - \ln \psi_{\lambda_c}(0) = 0,$$

d'où  $\int_0^x \frac{\psi'_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}(y)} dy$  est bornée en  $x$ . Il existe donc  $M > 0$  tel que

$$2\lambda_c x - M \leq A(x) \leq 2\lambda_c x + M.$$

Puisque  $z_x$  est bornée par les estimations paraboliques, quand  $x \rightarrow -\infty$

$$z_x(t, 0) + \int_0^x e^{A(y)} z_t(t, y) dy \rightarrow 0.$$

Ainsi,  $z_x(t, 0) = \int_{-\infty}^0 e^{A(y)} z_t(t, y) dy$  et donc

$$z_x(t, x) = \left( \int_{-\infty}^x e^{A(y)} z_t(t, y) dy \right) e^{-A(x)}.$$

On en déduit que

$$|z_x(t, x)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \left( \int_{-\infty}^x e^{A(y)} dy \right) e^{-A(x)} \leq \frac{C'}{\sqrt{t}}.$$

### 3.6 Stabilité des ondes pulsatoires

Nous terminons ce chapitre en démontrant les résultats de stabilité des ondes pulsatoires.

*Démonstration du théorème 3.1.3.* On procède en deux étapes. On montre d'abord la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  et uniforme sur tout ensemble de la forme  $] -\infty, \xi_0]$  puis la convergence uniforme en  $+\infty$ . Dans toute la suite, nous poserons

$$\tilde{v}(t, \xi) = |\tilde{u}(t, \xi) - \tilde{u}_c(t, \xi)|.$$

*Étape 1 : la convergence uniforme en  $-\infty$ .* On établit tout d'abord comme dans la section 3.4 l'inéquation

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi - \zeta(\xi - ct)\tilde{v} \leq 0.$$

On pose ensuite  $\tilde{v}(t, \xi) = p_{\lambda_c + \delta}(t, \xi)\tilde{z}(t, \xi)$ , avec

$$p_{\lambda_c + \delta}(t, \xi) = e^{(\lambda_c + \delta)\xi} \psi_{\lambda_c + \delta}(\xi - ct),$$

et  $\delta$  choisi assez petit tel que

$$q_\delta := c(\lambda_c + \delta) - k(\lambda_c + \delta) > 0.$$

On a l'inéquation suivante sur  $\tilde{z}$  :

$$Q\tilde{z} := \tilde{z}_t - \tilde{z}_{\xi\xi} + \left( c - 2\frac{\partial_\xi p_{\lambda_c + \delta}}{p_{\lambda_c + \delta}} \right) \tilde{z}_\xi + q_\delta \zeta \leq 0.$$

De plus, il existe  $C > 0$  tel que

$$\tilde{z}(0, \xi) = \frac{\tilde{v}(0, \xi)}{p_{\lambda_c + \delta}(0, \xi)} \leq \begin{cases} C e^{(\varepsilon - \delta)\xi} & \text{pour } \xi \leq 0, \\ C e^{-\lambda_c \xi} & \text{pour } \xi \geq 0 \end{cases}$$

En choisissant  $\delta < \varepsilon$ ,  $\tilde{z}(0, \xi)$  est alors bornée et décroît de façon exponentielle en  $-\infty$ . On considère alors  $Z(t) = \|z_0\|_\infty e^{-q\delta t}$  de sorte que

$$\begin{cases} Q(\tilde{z} - Z) = Q\tilde{z} \leq 0, \\ \tilde{z}(0, \xi) - Z(0) \leq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum assure alors que  $\tilde{z}(t, \xi) \leq Z(t) = \|\tilde{z}_0\|_\infty e^{-q\delta t}$  pour tout  $t$  et  $\xi \in \mathbb{R}$ . On obtient donc

$$\tilde{v}(t, \xi) = p_{\lambda_c + \delta}(t, \xi) \tilde{z}(t, \xi) \leq \|\tilde{z}_0\|_\infty \psi_{\lambda_c + \delta}(\xi - ct) e^{(\lambda_c + \delta)\xi} e^{-q\delta t}.$$

Ainsi, pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\sup_{\xi \leq \xi_0} |\tilde{v}(t, \xi)| = O(e^{-q\delta t}).$$

*Étape 2 : la convergence uniforme en  $+\infty$ .* On a besoin d'abord de montrer que  $\tilde{u}(t, \xi)$  converge uniformément vers 1 sur  $[M, +\infty[$ . D'après l'étape 1,  $\tilde{u}(t, M) \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow +\infty$ ; par l'hypothèse (ii), on en déduit alors qu'il existe  $k > 0$  tel que  $\tilde{u}_0(\xi) \geq k$  sur  $[M, +\infty[$  et  $\tilde{u}(t, M) \geq k$ . Puisque

$$(\tilde{u} - k)_t - (\tilde{u} - k)_{\xi\xi} + c(\tilde{u} - k)_\xi = f(\xi - ct, \tilde{u}) \geq 0,$$

le principe du maximum dit alors que  $u(t, x) \geq k$  pour tout  $t \geq 0$  et  $x \geq M$ . Ceci implique la convergence uniforme vers 1 (cf lemme 3.3 de [58]).

On revient ensuite à la différence

$$\tilde{v}(t, \xi) = |\tilde{u}(t, \xi) - \tilde{u}_c(t, \xi)|.$$

L'idée est d'écrire cette fois une équation sur  $\tilde{v}$  qui tient compte de la situation en  $\xi \rightarrow +\infty$ , c'est à dire quand  $\tilde{u}$  est proche de 1 et  $f'_u(\xi - ct, \tilde{u}) < 0$ . On va montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  et  $t_0$  tel que pour  $t \geq t_0$ , on ait pour  $\xi \in [M, +\infty[$

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi + \alpha\tilde{v} \leq 0.$$

On écrit pour cela

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi \leq \text{sign}(\tilde{u} - \tilde{u}_c)(f(\xi - ct, \tilde{u}) - f(\xi - ct, \tilde{u}_c)).$$

Supposons que  $\tilde{u} \geq \tilde{u}_c$ , alors on écrit

$$f(\xi - ct, \tilde{u}) = f(\xi - ct, \tilde{u}_c) + f'_u(\xi - ct, \tilde{u}_c)(\tilde{u} - \tilde{u}_c) + \frac{1}{2}f''_u(\xi - ct, a)(\tilde{u} - \tilde{u}_c)^2,$$

avec  $\tilde{u}_c \leq a \leq \tilde{u}$ . Alors d'une part  $f''_u(\xi - ct, a) \leq 0$ . D'autre part, soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $f'_u(\xi - ct, 1 - \varepsilon) \leq -\alpha < 0$  et  $M > 0$  assez grand pour que pour  $\xi \geq M$ ,  $\tilde{u}_c(0, \xi) \geq 1 - \varepsilon$ . Alors puisque  $f'_u$  est décroissante en  $u$ , et  $\tilde{u}_c$  croissante en  $t$ , on a pour tout  $\xi \geq M$ ,

$$f'_u(\xi - ct, \tilde{u}_c(t, x)) \leq f'_u(\xi - ct, 1 - \varepsilon) \leq -\alpha < 0,$$

d'où le résultat. Dans le cas  $\tilde{u} \leq \tilde{u}_c$ , on procède de façon symétrique en estimant  $f'_u(\xi - ct, \tilde{u}(t, x))$  au lieu de  $f'_u(\xi - ct, \tilde{u}_c(t, x))$ . Puisque  $\tilde{u}(t, x)$  converge uniformément vers 1, il

existe  $t_0$  tel que pour  $t \geq t_0$ , on ait  $\tilde{u}_c(t, x) \geq 1 - \varepsilon$  pour  $x \geq M$ . L'estimation est alors valable pour  $t \geq t_0$ .

Pour  $t \geq t_0$ , on ainsi

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi + \alpha\tilde{v} \leq 0.$$

De plus  $\tilde{v}(t_0, \xi)$  est bornée et  $\tilde{v}(t, M) \leq Ce^{-q_\delta t}$  par l'étape 1. Considérons la fonction

$$\bar{v}(t, x) = \|\tilde{v}(t_0, \cdot)\|_\infty e^{-\alpha(t-t_0)} + Ce^{-q_\delta t}.$$

On note

$$L\tilde{v} := \tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi + \alpha\tilde{v}.$$

Ainsi,

$$L\bar{v} = (\alpha - q_\delta)Ce^{-q_\delta t}.$$

On choisit alors  $\delta$  tel que  $q_\delta < \alpha$ . Ceci est possible car  $q_\delta = c(\lambda_c + \delta) - k(\lambda_c + \delta)$ ,  $k(\lambda_c) = c\lambda_c$  et  $k$  est continue. On a ainsi

$$\begin{cases} L(\bar{v} - \tilde{v}) = L\bar{v} - L\tilde{v} \geq 0, \\ (\bar{v} - \tilde{v})(t, M) \geq Ce^{-q_\delta t} - \tilde{v}(t, M) \geq 0, \\ (\bar{v} - \tilde{v})(t_0, \xi) \geq \|\tilde{v}(t_0, \cdot)\|_\infty - \tilde{v}(t_0, \xi) \geq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum donne ainsi que pour  $t \geq t_0$  et  $\xi \geq M$

$$\tilde{v}(t, \xi) \leq \|\tilde{v}(t_0, \cdot)\|_\infty e^{-\alpha(t-t_0)} + Ce^{-q_\delta t}.$$

On a ainsi la convergence uniforme de  $\tilde{v}$  vers 0 sur  $[M, +\infty[$ , exponentielle en  $t$ . Ceci conclut la preuve de la proposition.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.1.4.* On procède en deux étapes. On montre d'abord la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  et uniforme sur tout ensemble de la forme  $] - \infty, \xi_0]$  puis la convergence uniforme en  $+\infty$ . Nous considérons comme précédemment

$$\tilde{v}(t, \xi) = |\tilde{u}(t, \xi) - \tilde{u}_c(t, \xi)|.$$

*Étape 1 : la convergence uniforme en  $-\infty$ .* On établit tout d'abord comme dans la section 3.4 l'inéquation

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi - \zeta(\xi - ct)\tilde{v} \leq 0.$$

L'idée est de se ramener à l'équation linéaire étudiée dans la section 3.5. Le changement de variables  $\tilde{z}(t, \xi) = e^{-\lambda_c \xi} \tilde{v}(t, \xi)$  donne l'inéquation

$$\tilde{z}_t - \tilde{z}_{\xi\xi} + (c - 2\lambda_c)\tilde{z}_\xi + a(\xi - ct)\tilde{z} \leq 0,$$

avec  $a(x) = c\lambda_c - \lambda_c^2 - \zeta(x)$  et  $\tilde{z}_0 = \tilde{w}_0$  est à support compact. Ainsi, par le principe du maximum,  $\tilde{z}(t, \xi) \leq \tilde{w}(t, \xi)$  où  $\tilde{w}(t, \xi)$  est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\xi\xi} + (c - 2\lambda_c)\tilde{w}_\xi + a(\xi - ct)\tilde{w} = 0, \\ \tilde{w}(0, \xi) = \tilde{z}_0(\xi). \end{cases}$$

En posant  $w(t, x) = \tilde{w}(t, x + ct)$ , on obtient la solution  $w(t, x)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - 2\lambda_c w_x + a(x)w = 0, \\ w(0, x) = \tilde{z}_0(x). \end{cases}$$

On est ainsi ramené à étudier l'équation de la section 3.5. La différence majeure est que la donnée initiale  $w_0$  est maintenant à support compact au lieu de bornée comme dans la section précédente. Cette différence va nous permettre d'établir tout d'abord l'équivalent en temps grand

$$w(t, x) = W_1(t, x) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

où  $W_1$  est défini en (3.48), puis que  $\|W_1(t, \cdot)\|_\infty = O(t^{-1/2})$ .

Pour étudier le comportement en temps grand de  $w$ , nous raisonnons directement sur la formule

$$w(t, x) = e^{-tL}w_0(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{t\lambda} (\lambda I + L)^{-1} w_0(x) d\lambda. \quad (3.50)$$

Le fait que  $w_0$  soit à support compact permet ici d'utiliser l'approche de la section 3.5 directement sur  $w$  au lieu de

$$w_{tt}(t, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \lambda^2 e^{t\lambda} (\lambda I + L)^{-1} w_0(x) d\lambda.$$

La raison est la suivante : la transformée de Laplace

$$u(\lambda, x) = \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda} w(t, x) dt$$

ainsi que son approximation  $u_{tq}$  sont alors bornés au voisinage de  $\lambda = 0$  et n'ont plus de singularités. Regardons le cas de  $u_{tq}(i\omega, x)$  au voisinage de  $\omega = 0$ ; rappelons pour cela que nous avons l'estimation

$$|u_{tq}(i\omega, x)| \leq C \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) w_0(y) e^{-m\omega^2(2z-y-x)} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy.$$

C'est la première intégrale qui pose problème : le changement de variables  $z' = z - y$ ,  $y' = y - x$  la transforme ici en

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} w_0(y+x) e^{-m\omega^2 y} dy \int_0^{+\infty} e^{-2(\lambda_c + m\omega^2)z} dz &\leq \frac{1}{2\lambda_c + 2m\omega^2} \int_0^{+\infty} w_0(y+x) dy \\ &\leq \frac{C}{2\lambda_c + 2m\omega^2}. \end{aligned}$$

Ces propriétés permettent de déformer le contour dans la formule (3.50) en procédant en deux temps comme dans la section précédente : on déforme tout d'abord le contour de sorte que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on ait comme dans (3.44)

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_{\delta, \varepsilon}} e^{t\lambda} (u - u_{tq})(\lambda, x) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{]-i\infty, -i\delta] \cup [i\delta, i\infty[} e^{t\lambda} u_{tq}(\lambda, x) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.51)$$

On passe ensuite à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  comme pour (3.45)

$$\begin{aligned} w(t, x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\omega t} (u - u_{tq})(i\omega, x) d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{]-\infty, -\delta] \cup [\delta, \infty[} e^{i\omega t} u_{tq}(i\omega, x) d\omega + \frac{1}{2i\pi} \int_{D_\delta^- \cup D_\delta^+} e^{t\lambda} u(\lambda, x) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.52)$$

On conclut alors de la même manière : puisque les trois derniers termes sont en  $O(1/t)$ , et le premier terme est égal grâce à une inversion de Fourier à

$$W(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} + \int_{y=-\infty}^x \int_{z=x}^{+\infty} \right) \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} \frac{e^{-\frac{(t-A(x,y,z))^2}{4B(x,y,z)}}}{\sqrt{2B(x,y,z)}} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy,$$

avec

$$A(x, y, z) = \int_x^z \delta w_1 + \int_y^z \delta w_1, \quad B(x, y, z) = \int_x^z \delta w_2 + \int_y^z \delta w_2,$$

on a l'estimation

$$w(t, x) = W(t, x) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

uniforme en  $x$ . On rappelle ensuite que  $W = W_1 + W_2$  où  $W_1$  et  $W_2$  représentent chacune des intégrales doubles. Puisque  $\|W_2(t, \cdot)\|_\infty$  décroît exponentiellement vite dès que  $w_0$  est bornée, on obtient bien le développement

$$w(t, x) = W_1(t, x) + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

On est ainsi amené à étudier le comportement de

$$W_1(t, x) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=x}^{+\infty} \int_{z=y}^{+\infty} \frac{w_0(y)\psi_{\lambda_c}(y)}{\psi_{\lambda_c}^2(z)} \frac{e^{-\frac{(t-A(x,y,z))^2}{4B(x,y,z)}}}{\sqrt{2B(x,y,z)}} e^{2\lambda_c(y-z)} dz dy$$

quand  $t \rightarrow +\infty$ . Pour cela, nous l'écrivons sous la forme

$$W_1(t, x) = \int_0^{+\infty} V_1(x, Z) \frac{e^{-\tilde{c}(x,y,Z)\frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{\sqrt{Z}} dZ,$$

avec

$$V_1(x, Z) = \frac{\psi_{\lambda_c}(x)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{F^{-1}(Z+F(x))-x} \frac{w_0(x+y)\psi_{\lambda_c}(x+y)}{\psi_{\lambda_c}^2(x+y+z)} \frac{e^{2\lambda_c(x+y)} e^{-2\lambda_c F^{-1}(\frac{1}{2}(Z+F(x)+F(x+y)))}}{2\delta w_1(x+y+z)} \sqrt{\tilde{c}} dy.$$

Si nous reprenons l'étude du terme  $V_1(x, Z)$  comme dans la section précédente, nous obtenons que

$$V_1(x, Z) \leq C e^{-\lambda_c Z/M} \int_0^{Z/M+B(x,Z)} w_0(y+x) e^{\lambda_c y} dy \leq C e^{-\lambda_c Z/M} \int_0^{Z/M+\bar{B}} w_0(y+x) e^{\lambda_c y} dy,$$

où  $B(x, Z) \leq \bar{B}$  est une fonction bornée. Par la suite, nous noterons  $[a, b]$  le support de  $w_0$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \int_0^{Z/M+\bar{B}} w_0(y+x) e^{\lambda_c y} dy &\leq \|w_0\|_\infty \int_0^{Z/M+\bar{B}} \mathbf{1}_{(a,b)}(x+y) e^{\lambda_c y} dy, \\ &\leq \|w_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(a-x,b-x)}(y) \mathbf{1}_{(0,Z/M+\bar{B})}(y) e^{\lambda_c y} dy. \end{aligned}$$

Notons que si  $\max(a - x, 0) \leq \min(b - x, Z/M + \bar{B})$ , alors

$$\mathbf{1}_{(a-x, b-x)}(y) \mathbf{1}_{(0, Z/M + \bar{B})}(y) = \mathbf{1}_{(\max(a-x, 0), \min(b-x, Z/M + \bar{B}))}(y),$$

tandis que si  $\max(a - x, 0) > \min(b - x, Z/M + \bar{B})$ ,

$$\mathbf{1}_{(a-x, b-x)}(y) \mathbf{1}_{(0, Z/M + \bar{B})}(y) = 0.$$

La figure 3.6 représente le domaine d'intégration dans l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(a-x, b-x)}(y) \mathbf{1}_{(0, Z/M + \bar{B})}(y) e^{\lambda_c y} dy,$$

en fonction de  $(x, Z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

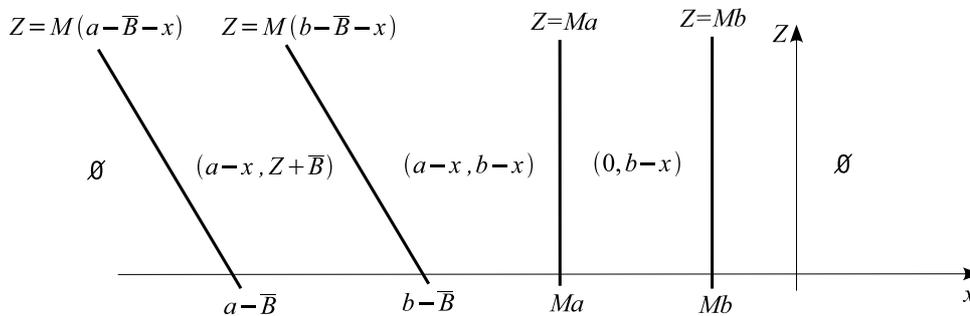


FIG. 3.6 – Domaine d'intégration en fonction de  $(x, Z)$

On montre ainsi en particulier que pour  $x \geq a - \bar{B}$ , on a

$$V_1(x, Z) \leq C(a, b, \bar{B}) e^{-\lambda_c Z/M},$$

tandis que pour  $x \leq a - \bar{B}$ , on a

$$V_1(x, Z) \leq C(a, b, \bar{B}) e^{-\lambda_c x} e^{-\lambda_c Z/M}.$$

On en déduit que  $W_1(t, x)$  converge vers 0 exponentiellement vite quand  $t \rightarrow +\infty$  sur tout compact en  $x$  (le terme  $W_1$  possède les mêmes propriétés que le terme  $W_2$  de la section précédente). Afin d'obtenir une convergence uniforme, on utilise que

$$V_1(x, Z) \leq C(a, b, \bar{B}) e^{-\lambda_c x} e^{-\lambda_c Z/M},$$

pour tout  $z \geq M(a - \bar{B} - x)$ . Puisque  $\tilde{c} \geq m > 0$ , on a alors

$$\begin{aligned} W_1(t, x) &\leq e^{-\lambda_c x} \int_{M(a - \bar{B} - x)}^{+\infty} e^{-l_c z/M} \frac{e^{-\tilde{c}(x, y, Z) \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{\sqrt{Z}} dZ \\ &\leq e^{-\lambda_c x} \int_{M(a - \bar{B} - x)}^{+\infty} e^{-\lambda_c z/M} \frac{e^{-m \frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{\sqrt{Z}} dZ. \end{aligned}$$

De plus, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $Z \geq 0$ ,

$$\frac{e^{-m\frac{(t-Z)^2}{4Z}}}{\sqrt{Z}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}},$$

on en déduit finalement qu'il existe  $C' > 0$  tel que

$$\|W_1(t, \cdot)\|_\infty \leq \frac{C'}{\sqrt{t}}.$$

Finalement, puisque

$$\tilde{v}(t, \xi) \leq e^{\lambda c \xi} \tilde{z}(t, \xi) \leq e^{\lambda c \xi} \tilde{w}(t, \xi) = e^{\lambda c \xi} w(t, \xi - ct),$$

on en déduit que pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ , on a

$$\max_{\xi \leq \xi_0} |\tilde{u}(t, \xi) - \tilde{u}_c(t, \xi)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

*Étape 2 : la convergence uniforme en  $+\infty$ .* La démonstration est similaire à celle de la proposition précédente et on reprend ici les mêmes notations. On obtient que pour un certain  $t_0 > 0$ , on a pour  $t \geq t_0$

$$\tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi + \alpha\tilde{v} \leq 0.$$

La différence est que cette fois, on a  $\tilde{v}(t, M) \leq Ct^{-1/2}$ . On considère alors la sur-solution

$$\bar{v}(t, x) = \|\tilde{v}(t_0, \cdot)\|_\infty e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

On note

$$L\tilde{v} := \tilde{v}_t - \tilde{v}_{\xi\xi} + c\tilde{v}_\xi + \alpha\tilde{v}.$$

Ainsi, dès que  $t \geq \frac{1}{2\alpha}$ , on a

$$L\bar{v} = \frac{C(-1/2 + \alpha t)}{t^{3/2}} \geq 0,$$

On a ainsi pour  $t \geq t_1 := \max\{t_0, \frac{1}{2\alpha}\}$  et  $\xi \geq M$

$$\begin{cases} L(\bar{v} - \tilde{v}) = L\bar{v} - L\tilde{v} \geq 0, \\ (\bar{v} - \tilde{v})(t, M) \geq Ct^{-1/2} - \tilde{v}(t, M) \geq 0, \\ (\bar{v} - \tilde{v})(t_0, \xi) \geq \|\tilde{v}(t_0, \cdot)\|_\infty - \tilde{v}(t_0, \xi) \geq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum donne ainsi que pour  $t \geq t_1$  et  $\xi \geq M$

$$\tilde{v}(t, \xi) \leq \|\tilde{v}(t_0, \cdot)\|_\infty e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{C}{t}.$$

On a ainsi la convergence uniforme de  $\tilde{v}$  vers 0 sur  $[M, +\infty[$ . Ceci conclut la preuve du théorème  $\square$

## ONDES PULSATOIRES POUR LE SYSTÈME DE LA SHS AVEC TERME SOURCE MONOSTABLE

---

### 4.1 Introduction : les systèmes considérés

On étudie dans ce chapitre le système de réaction-diffusion en dimension un suivant

$$\begin{cases} T_t - T_{xx} = TY, \\ Y_t = -TY, \end{cases} \quad (4.1)$$

qui est un modèle simple de combustion de solide réactif. Il est utilisé en particulier pour étudier les processus de synthèse de matériaux par combustion auto-propagée (modèle SHS, 'Self-propagating High-temperature Synthesis'). La fonction  $T(t, x)$  représente la température et  $Y(t, x)$  la fraction massique du réactant solide.

Nous considérons ici une distribution périodique du réactant dans la zone fraîche. Ceci conduit aux conditions aux limites suivantes quand  $x \rightarrow -\infty$  :

$$\forall t, \quad T(t, -\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (Y(t, x) - Y_p(x)) = 0,$$

où  $Y_p(x)$  est une fonction 1-périodique strictement positive. Les conditions aux limites dans la zone brûlée, c'est à dire quand  $x \rightarrow +\infty$ , sont les suivantes. On impose d'abord la condition  $Y(t, +\infty) = 0$ , ce qui signifie que la combustion est complète en  $+\infty$ . Nous verrons que ceci fixe la température de fin de combustion à la valeur suivante (voir 4.3.1)

$$T(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle := \int_0^1 Y_p(x) dx.$$

La condition au bord périodique conduit à chercher des solutions particulières sous la forme d'ondes pulsatoires :

**Définition 4.1.1. (Onde pulsatoire du système)** *Une onde pulsatoire  $(T(t, x), Y(t, x))$  solution de (4.1) dont la fonction  $Y$  possède une distribution périodique  $Y_p$  en  $-\infty$ , est une solution classique, c'est à dire de classe  $C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ , définie pour tout  $t, x \in \mathbb{R}$ , telle qu'il existe  $c \neq 0$  pour lequel*

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \quad T\left(t + \frac{1}{c}, x\right) = T(t, x + 1), \quad Y\left(t + \frac{1}{c}, x\right) = Y(t, x + 1),$$

et telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$T(t, -\infty) = 0, \quad T(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (Y(t, x) - Y_p(x)) = 0, \quad Y(t, +\infty) = 0.$$

On considère ainsi au final le système :

$$\begin{cases} T_t - T_{xx} = TY, \\ Y_t = -TY, \\ T(t + \frac{1}{c}, x) = T(t, x), \quad Y(t + \frac{1}{c}, x) = Y(t, x), \\ \forall t, \quad \tilde{T}(t, -\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (Y(t, x) - Y_p(x)) = 0, \\ \forall t, \quad T(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle, \quad Y(t, +\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Nous nous plaçons ici dans le repère

$$\tilde{T}(t, \xi) = T(t, \xi - ct), \quad \tilde{Y}(t, \xi) = Y(t, \xi - ct).$$

Le système (4.1) devient alors

$$\begin{cases} \tilde{T}_t - \tilde{T}_{\xi\xi} + c\tilde{T}_\xi = \tilde{T}\tilde{Y}, \\ \tilde{Y}_t + c\tilde{Y}_\xi = -\tilde{T}\tilde{Y}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Les ondes pulsatoires sont alors les solutions  $\frac{1}{c}$ -périodiques en temps du problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{T}_t - \tilde{T}_{\xi\xi} + c\tilde{T}_\xi = \tilde{T}\tilde{Y}, \\ \tilde{Y}_t + c\tilde{Y}_\xi = -\tilde{T}\tilde{Y}, \\ \tilde{T}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{T}(t, \xi), \quad \tilde{Y}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{Y}(t, \xi), \\ \forall t, \quad \tilde{T}(t, -\infty) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\tilde{Y}(t, \xi) - Y_p(\xi - ct)) = 0, \\ \forall t, \quad \tilde{T}(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle, \quad \tilde{Y}(t, +\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

## 4.2 Les résultats

### 4.2.1 Théorème principal

Notre résultat principal montre que le problème (4.4) est de type KPP, c'est dire qu'il existe une demi-droite de vitesses admissibles  $[c^*, +\infty[$  pour lesquelles le système possède une solution. Définissons ce qui va être la vitesse minimale :

**Définition 4.2.1. (Vitesse minimale  $c^*$ )** On considère le réel  $c^*$  donné par la formule suivante :

$$c^* = \min_{\lambda > 0} \frac{k(\lambda)}{\lambda}, \quad (4.5)$$

où  $k(\lambda)$  est la valeur propre principale de l'opérateur

$$L_\lambda v = v'' + 2\lambda v' + (\lambda^2 + Y_p(x))v, \quad (4.6)$$

agissant sur les fonctions  $v \in C^2(\mathbb{R})$  1-périodique.

On sait d'après [9] que  $c^* > 0$  car  $Y_p > 0$ . On prouve alors le résultat suivant :

**Théorème 4.2.1.** *Le système (4.4) possède une solution classique  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$  telle que  $\tilde{T} > 0$  et  $\tilde{Y} > 0$  si et seulement si  $c \geq c^*$ .*

### 4.2.2 L'équation scalaire reliée au système et ses propriétés

Notre démarche consiste à ramener l'étude du système (4.1) à celle de l'équation scalaire

$$u_t - u_{xx} = Y_p(x)(1 - e^{-u}). \quad (4.7)$$

Dans la section 4.3, nous commençons par établir un lien formel entre le système (4.1) et l'équation (4.7). Le lien rigoureux apparaît en considérant les ondes pulsatoires de l'équation dont voici la définition :

**Définition 4.2.2. (Onde pulsatoire de l'équation)** *Une onde pulsatoire  $u(t, x)$  solution de (4.7) qui se propage vers la gauche est une solution classique de classe  $C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$  définie pour tout  $t, x \in \mathbb{R}$ , telle qu'il existe  $c \neq 0$  pour lequel*

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, \quad u\left(t + \frac{1}{c}, x\right) = u(t, x + 1),$$

et telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$u(t, -\infty) = 0, \quad u(t, +\infty) = +\infty.$$

Si on effectue le changement de fonction  $\tilde{u}(t, \xi) = u(t, \xi - ct)$ , l'équation (4.7) devient

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}}), \quad (4.8)$$

et les ondes pulsatoires de (4.7) sont alors les solutions  $(c, \tilde{u})$  du problème

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}}), \\ \tilde{u}\left(t + \frac{1}{c}, \xi\right) = \tilde{u}(t, \xi), \\ \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{u}(t, +\infty) = +\infty. \end{cases} \quad (4.9)$$

On établit ensuite dans la section 4.5 quelques propriétés qualitatives des ondes pulsatoires de l'équation (4.7) ainsi que la non existence pour  $c < c^*$ . Les résultats sont regroupés ci dessous :

**Proposition 4.2.2.** (i) *Il n'existe pas d'ondes pulsatoires  $\tilde{u} > 0$  de (4.9) de vitesse  $c < c^*$ .*

(ii) *Soit  $(c, \tilde{u})$  une onde pulsatoire de (4.9) strictement positive qui a une croissance sous-exponentielle quand  $\xi \rightarrow +\infty$ , alors la croissance est linéaire : il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta > 0$  tels que*

$$\tilde{u}(t, \xi) = \alpha + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + Z_p(\xi - ct) + O(e^{-\beta\xi}),$$

où  $Z_p$  est régulière et 1-périodique (cf la formule explicite (4.26)).

Dans la section 4.6, on construit des ondes pulsatoires pour l'équation (4.7) ayant un comportement exponentiel précis quand  $\xi \rightarrow -\infty$  et un comportement linéaire quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . En notant  $\lambda_c$  le plus petit  $\lambda > 0$  tel que  $k(\lambda) = c\lambda$  et  $\psi_{\lambda_c} > 0$  une fonction propre de l'opérateur  $L_{\lambda_c}$  associée à la valeur propre  $k(\lambda_c) = c\lambda_c$ , on a le résultat suivant

**Théorème 4.2.3.** *Pour tout  $c \geq c^*$ , le problème (4.9) possède une solution  $\tilde{u} > 0$  qui a les propriétés suivantes : pour tout  $t$ ,*

$$\forall c \geq c^*, \quad \tilde{u}(t, \xi) = \alpha + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + Z_p(\xi - ct) + O(e^{-\beta\xi}) \quad \text{quand } \xi \rightarrow +\infty,$$

$$\forall c > c^*, \quad \tilde{u}(t, \xi) = e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + O(e^{(\lambda_c + \delta)\xi}) \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty,$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ ,  $\delta > 0$  et  $Z_p$  est une fonction régulière et 1-périodique.

### 4.2.3 Relation entre les ondes de l'équation et du système

On établit enfin dans la section 4.7 le lien précis entre les solutions d'ondes pulsatoires de l'équation (4.9) et du système (4.4). Les résultats sont regroupés dans la proposition suivante qui permet de remonter aux ondes pulsatoires du système

**Proposition 4.2.4.** (i) Soit  $c \geq c^*$  et  $\tilde{u}$  la solution de (4.9) du théorème 4.2.3. Alors si on pose

$$\tilde{T}(t, \xi) = \tilde{u}_t(t, \xi) + c\tilde{u}_\xi(t, \xi) \quad \text{et} \quad \tilde{Y}(t, \xi) = Y_p(\xi - ct)e^{-\tilde{u}(t, \xi)}, \quad (4.10)$$

le triplet  $(c, \tilde{T}, \tilde{Y})$  est solution de (4.4).

(ii) Inversement, soit  $(c, \tilde{T}, \tilde{Y})$  une solution de (4.4) telle que  $\tilde{T} > 0$ . Alors  $c > 0$  et  $\tilde{Y} > 0$ . De plus,

$$s \mapsto \tilde{T}\left(t + \frac{s - \xi}{c}, s\right) \in L^1(\mathbb{R}^-),$$

et si on pose

$$\tilde{u}(t, \xi) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{T}\left(t + \frac{s - \xi}{c}, s\right) ds = \int_{-\infty}^0 \tilde{T}(t + \sigma, \xi + c\sigma) d\sigma, \quad (4.11)$$

le couple  $(c, \tilde{u})$  est solution de (4.9).

## 4.3 Relation formelle entre le système et l'équation

### 4.3.1 Condition aux limites

**Lemme 4.3.1.** Soit  $(T(t, x), Y(t, x))$  une solution classique bornée du système (4.1) telle que

$$T\left(t + \frac{1}{c}, x\right) = T(t, x + 1), \quad Y\left(t + \frac{1}{c}, x\right) = Y(t, x + 1), \quad \forall t, x \in \mathbb{R},$$

et telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$T(t, -\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (Y(t, x) - Y_p(x)) = 0, \quad Y(t, +\infty) = 0.$$

Si  $T(t, x)$  possède une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$  indépendante de  $t$  alors cette limite est

$$T(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle.$$

*Démonstration.* On se place ici dans le repère  $(t, \xi)$  et on raisonne avec le système (4.3). En ajoutant les deux équations de ce système et en intégrant sur  $(0, 1/c) \times \mathbb{R}$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{1/c} (\tilde{T}_t + \tilde{Y}_t - \tilde{T}_{\xi\xi} + c(\tilde{T}_\xi + \tilde{Y}_\xi)) d\xi dt = 0.$$

Puisque  $\tilde{T}$  et  $\tilde{Y}$  sont  $1/c$ -périodiques en  $t$ , il reste

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{1/c} (-\tilde{T}_{\xi\xi} + c(\tilde{T}_\xi + \tilde{Y}_\xi)) d\xi dt = 0.$$

Puisque  $\tilde{T}_\xi(t, +\infty) = \tilde{T}_\xi(t, -\infty) = 0$  par régularité parabolique, on obtient

$$T_\infty = -c \int_{\mathbb{R}} \int_0^{1/c} \tilde{Y}_\xi d\xi dt,$$

d'après les limites fixées en  $-\infty$ . On a alors

$$T_\infty = -c \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{1/c} (\tilde{Y}(t, N) - \tilde{Y}(t, -N)) dt = c \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{1/c} \tilde{Y}(t, -N) dt,$$

puisque  $\tilde{Y}(t, +\infty) = 0$ . Or,

$$\int_0^{1/c} \tilde{Y}(t, -N) dt = \int_0^{1/c} (\tilde{Y}(t, -N) - Y_p(-N - ct)) dt + \int_0^{1/c} Y_p(-N - ct) dt.$$

Or,  $\tilde{Y}(t, -N) - Y_p(-N - ct) \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow +\infty$  et les fonctions  $\tilde{Y}$  et  $Y_p$  sont bornées, donc la première intégrale du membre de droite tend vers 0 par convergence dominée. De plus,  $Y_p(-N - ct) = Y_p(-ct)$ , on obtient alors

$$T_\infty = c \int_0^{1/c} Y_p(-ct) dt = \int_0^1 Y_p(\tau) d\tau,$$

qui est bien la limite souhaitée.  $\square$

**Remarque 4.3.1.** On peut facilement montrer avec les estimations paraboliques que la limite de  $T(t, x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$  est indépendante de  $t$ .

### 4.3.2 Relation formelle entre le système et l'équation

Nous expliquons ici de manière formelle comment l'équation (4.7) apparaît à partir du système (4.1). Considérons ainsi une solution  $(T, Y)$  du système (4.1). L'idée est de poser

$$U(t, x) = \int_0^t T(s, x) ds,$$

et d'intégrer la deuxième équation  $Y_t = -TY$  en temps. On obtient

$$Y(t, x) = Y_0(x) e^{-\int_0^t T(s, x) ds} = Y_0(x) e^{-U(t, x)}.$$

La première équation de (4.1) permet alors d'obtenir l'équation vérifiée par  $U$ . En effet,

$$\begin{aligned} U_t(t, x) - U_{xx}(t, x) &= T(t, x) - \int_0^t T_{xx}(s, x) ds, \\ &= \int_0^t T_t(s, x) ds + T(0, x) - \int_0^t T_{xx}(s, x) ds, \\ &= \int_0^t (T_t(s, x) - T_{xx}(s, x)) ds + T(0, x), \\ &= - \int_0^t Y_t(s, x) ds + T(0, x), \\ &= Y_0(x) - Y(t, x) + T(0, x). \\ &= T_0(x) + Y_0(x)(1 - e^{-U(t, x)}). \end{aligned}$$

En prenant en compte les conditions aux limites sur  $T$ ,  $U(t, x)$  vérifie finalement le problème suivant :

$$\begin{cases} U_t - U_{xx} = T_0(x) + Y_0(x)(1 - e^{-U}), \\ \forall t, \quad U(t, -\infty) = 0, \quad U(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle t, \\ U(0, x) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Le bon repère étant celui qui se déplace avec l'onde, nous travaillerons essentiellement dans le système de coordonnées  $(t, \xi)$  dans la suite. Regardons alors l'équivalent de l'équation (4.12) pour le système (4.3) : il suffit de poser  $\tilde{U}(t, \xi) = U(t, \xi - ct)$ ,  $\tilde{U}$  vérifiant alors le problème

$$\begin{cases} \tilde{U}_t - \tilde{U}_{\xi\xi} + c\tilde{U}_\xi = T_0(\xi - ct) + Y_0(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{U}}), \\ \tilde{U}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{U}(t, +\infty) = \langle Y_p \rangle t, \\ \tilde{U}(0, \xi) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Notons qu'on passe directement de l'équation précédente au système (4.3) par les changements de fonctions suivants :

$$\tilde{U}(t, \xi) = \int_0^t \tilde{T}(s, \xi - ct + cs) ds,$$

$$\tilde{T} = \tilde{U}_t + c\tilde{U}_\xi \quad \text{et} \quad \tilde{Y}(t, \xi) = Y_0(\xi - ct)e^{-\tilde{U}(t, \xi)}.$$

L'équation (4.7) qui nous intéresse vraiment ici n'apparaît qu'en considérant les solutions ondes pulsatoires  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$  et elle s'obtient en passant formellement à la limite  $t \rightarrow +\infty$ . En effet, si  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$  est une onde pulsatoire du système, alors la fonction  $\tilde{U}(t, \xi) := \int_0^t \tilde{T}(s, \xi - ct + cs) ds$  tend à être  $1/c$ -périodique en temps grand. On a en effet

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t + \frac{1}{c}, \xi) &= \int_0^{t+1/c} \tilde{T}(s, \xi - ct - 1 + cs) ds, \\ &= \int_0^{1/c} \tilde{T}(s, \xi - ct - 1 + cs) ds + \int_{1/c}^{t+1/c} \tilde{T}(s, \xi - ct - 1 + cs) ds, \\ &= \int_0^{1/c} \tilde{T}(s, \xi - ct - 1 + cs) ds + \int_0^t \tilde{T}(s' + 1/c, \xi - ct + cs') ds', \\ &= \int_0^{1/c} \tilde{T}(s, \xi - ct - 1 + cs) ds + \int_0^t \tilde{T}(s', \xi - ct + cs') ds', \\ &= \int_0^{1/c} \tilde{T}(s, \xi - ct - 1 + cs) ds + \tilde{U}(t, \xi), \end{aligned}$$

avec  $\int_0^{1/c} \tilde{T}(s, \xi - ct - 1 + cs) ds \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . De plus, en passant formellement à la limite  $t \rightarrow +\infty$  dans l'équation (4.13), on obtient le problème suivant pour  $\tilde{u} := \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{U}(t, \xi)$

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}}), \\ \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{u}(t, +\infty) = +\infty. \end{cases} \quad (4.14)$$

Combiné à la périodicité  $\tilde{u}(t + 1/c, \xi) = \tilde{u}(t, \xi)$ , il s'agit bien des ondes pulsatoires de l'équation (4.7).

Notons de plus qu'en passant formellement à la limite  $t \rightarrow +\infty$  dans les égalités

$$\tilde{T} = \tilde{U}_t + c\tilde{U}_\xi \quad \text{et} \quad \tilde{Y}(t, \xi) = Y_0(\xi - ct)e^{-\tilde{U}(t, \xi)}.$$

on obtient les relations 4.10 entre ondes de l'équation et du système.

**Remarque 4.3.2.** Dans le cas particulier  $Y_p = 1$ , on est amené à étudier les solutions d'ondes progressives  $T(t, x) = \tilde{T}(x + ct)$ ,  $Y(t, x) = \tilde{Y}(x + ct)$  du système (4.1), c'est à dire les solutions du problème

$$\begin{cases} -\tilde{T}'' + c\tilde{T}' = \tilde{T}\tilde{Y}, \\ c\tilde{Y}' = -\tilde{T}\tilde{Y}, \\ \tilde{T}(-\infty) = 0, \quad \tilde{T}(+\infty) = 1, \\ \tilde{Y}(-\infty) = 1, \quad \tilde{Y}(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'équation (4.7) devient

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1 - e^{-u}, \\ u(t, -\infty) = 0, \quad u(t, +\infty) = +\infty, \end{cases}$$

et les solutions qui nous intéressent sont les ondes progressives  $u(t, x) = \tilde{u}(x + ct)$ , c'est à dire les solutions de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' + c\tilde{u}' = 1 - e^{-\tilde{u}}, \\ \tilde{u}(-\infty) = 0, \quad \tilde{u}(+\infty) = +\infty. \end{cases}$$

Cette étude est détaillée dans la section 4.4

## 4.4 Existence d'ondes progressives

Dans cette section, nous prouvons l'existence d'ondes progressives pour le système (4.1) avec notre démarche qui consiste à réduire le problème à celui de l'existence d'ondes progressives pour une équation scalaire. Nous retrouvons ici, par une méthode différente, le résultat de Logak [56].

Les ondes progressives de (4.1), sont les solutions de la forme  $T(t, x) = \tilde{T}(x + ct)$ ,  $Y(t, x) = \tilde{Y}(x + ct)$ . Complété des conditions aux limites uniformes, le problème complet est le suivant

$$\begin{cases} -\tilde{T}'' + c\tilde{T}' = \tilde{T}\tilde{Y}, \\ c\tilde{Y}' = -\tilde{T}\tilde{Y}, \\ \tilde{T}(-\infty) = 0, \quad \tilde{T}(+\infty) = 1, \\ \tilde{Y}(-\infty) = 1, \quad \tilde{Y}(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Nous allons prouver le résultat ci-dessous

**Proposition 4.4.1.** *Il existe une vitesse minimale  $c^* = 2$  telle que :*

- si  $c \geq 2$ , le problème (4.15) possède une solution  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$  avec  $\tilde{T}, \tilde{Y} > 0$ .

- si  $c < 2$ , le problème (4.15) ne possède pas de solutions  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$  telles que  $\tilde{T}, \tilde{Y} > 0$ .

**Remarque 4.4.1.** Nous verrons que si  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$  est solution de (4.15), alors  $\tilde{Y} > 0$  mais on ne peut rien dire a priori sur le signe de  $\tilde{T}$ . On se limite cependant ici aux solutions positives du système.

Notre démarche consiste à réduire l'étude de (4.1) à celle des ondes progressives  $u(t, x) = \tilde{u}(x + ct)$  de l'équation scalaire

$$u_t - u_{xx} = 1 - e^{-u},$$

qui sont les solutions du problème

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' + c\tilde{u}' = 1 - e^{-\tilde{u}}, \\ \tilde{u}(-\infty) = 0, \quad \tilde{u}(+\infty) = +\infty. \end{cases} \quad (4.16)$$

Nous étudions d'abord l'équation (4.16), puis nous établissons les relations

$$\tilde{T} = c\tilde{u}', \quad \tilde{Y} = e^{-\tilde{u}} \quad \text{et} \quad \tilde{u}(x) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^x \tilde{T}(s) ds. \quad (4.17)$$

qui permettent de relier les problèmes (4.1) et (4.16).

Sur l'équation (4.16), on montre le résultat suivant :

**Proposition 4.4.2.** *Il existe une vitesse minimale  $c^* = 2$  telle que :*

- si  $c \geq 2$ , le problème (4.16) possède une solution  $u > 0$ , strictement croissante, et qui croît linéairement en  $t/c$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .
- si  $c < 2$ , le problème (4.16) ne possède pas de solution  $u > 0$ .

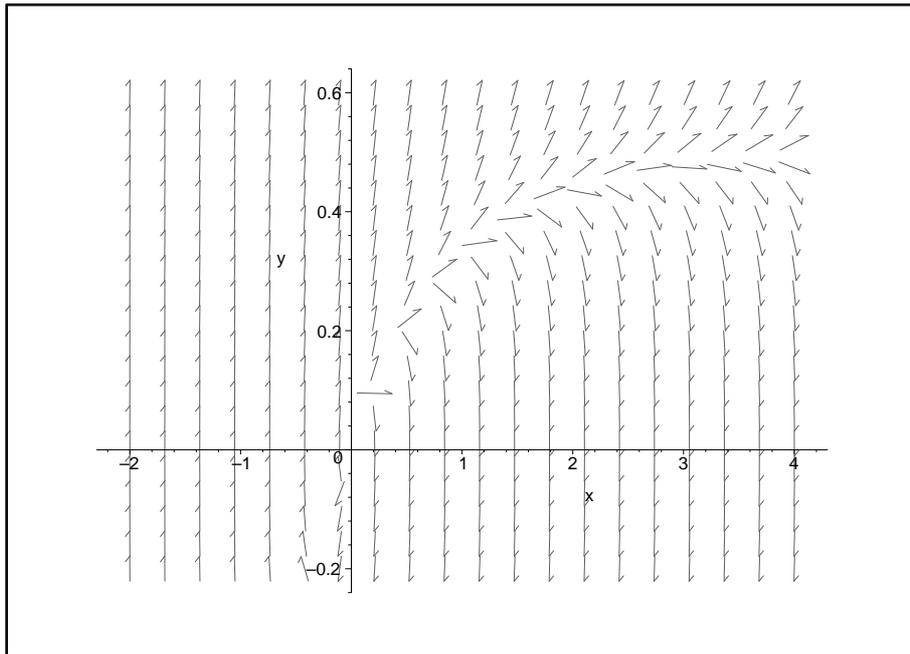


FIG. 4.1 – Plan de phase pour  $c = c^* = 2$

*Démonstration.* Nous montrons d'abord que la condition  $c \geq 2$  est nécessaire, puis qu'elle est suffisante. Nous travaillons dans le plan de phase  $(u, u')$ . En posant  $v = u'$ , on obtient la formulation équivalent de (4.16)

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = cv + e^{-u} - 1, \\ u(-\infty) = 0, u(+\infty) = +\infty, \end{cases} \quad (4.18)$$

**La condition  $c \geq 2$  est nécessaire.** Si on pose  $U = (u, v)$ , le système (4.18) s'écrit sous la forme  $U' = F(U)$  avec

$$F(U) = F(u, v) = (v, cv + e^{-u} - 1).$$

On s'intéresse ici au comportement des solutions autour du seul point critique  $(0, 0)$ . Pour cela, on étudie les valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix},$$

c'est à dire les racines du polynôme caractéristique  $P(\lambda) = \lambda^2 - c\lambda + 1$  dont le discriminant est  $\Delta = c^2 - 4$ .

Si  $\Delta < 0$ , c'est à dire  $|c| < 2$ , les racines sont complexes conjuguées. Les trajectoires spiralent autour de  $(0, 0)$  en se rapprochant. Ainsi,  $u$  devient négatif, ce qui est à exclure.

Si  $\Delta > 0$ , c'est à dire  $|c| > 2$ , on a deux racines réelles distinctes. Le point  $(0, 0)$  est alors un noeud stable ou instable. Si  $c < -2$ , les racines sont strictement négatives et le noeud est stable : aucune trajectoire ne tend vers 0 en  $-\infty$ . Par contre si  $c > 2$ , les racines sont strictement positives et le noeud est instable.

**La condition  $c \geq 2$  est suffisante.** Les trajectoires dans le plan de phase ont une pente :

$$\frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'} = c + \frac{e^{-u} - 1}{v}. \quad (4.19)$$

*Étape 1 : réduction à une équation scalaire.* On cherche alors une trajectoire dans le plan de phase qui s'écrit sous la forme  $v(u)$ , solution de l'équation (4.19) variant de 0 à  $1/c$ . On écrit ce problème sous la forme

$$\begin{cases} v' = g(u, v), \\ v(-\infty) = 0, v(+\infty) = \frac{1}{c}, \end{cases} \quad (4.20)$$

avec

$$g(u, v) = c + \frac{e^{-u} - 1}{v}.$$

Pour montrer l'existence de solutions, nous allons utiliser le théorème de l'anti-entonnoir [47]. Nous construisons un anti-entonnoir pour  $u \in ]0, +\infty[$  à l'aide des barrières

$$v_1(u) = \frac{1 - e^{-u}}{c}, \quad \text{et} \quad v_2(u) = \frac{1 - e^{-2u}}{c}.$$

Tout d'abord,  $v_1$  est une barrière supérieure stricte car

$$v_1'(u) = \frac{e^{-u}}{c} > g(u, v_1(u)) = 0.$$

Pour  $v_2$ , on obtient une barrière inférieure stricte pour  $u > 0$  :

$$\begin{aligned} g(u, v_2(u)) &= c - c \frac{1 - e^{-u}}{1 - e^{-2u}} = c \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{1 - e^{-2u}} = ce^{-u} \frac{1 - e^{-u}}{(1 - e^{-u})(1 + e^{-u})} = ce^{-u} \frac{1}{1 + e^{-u}} \\ &= \frac{2}{c} e^{-2u} \frac{c^2/2}{e^{-u}(1 + e^{-u})} \geq \frac{2}{c} e^{-2u} \frac{c^2/2}{2} \geq \frac{2}{c} e^{-2u} = v_2'(u) \end{aligned}$$

puisque  $c \geq 2$ . On a donc construit une barrière inférieure stricte au dessus d'une barrière supérieure stricte : l'ensemble

$$E := \{(u, v), v_1(u) \leq v \leq v_2(u)\}$$

est par définition un anti-entonnoir. De plus,  $E$  est étroit car  $v_2(u) - v_1(u)$  tend vers 0 quand  $u$  tend vers 0 et  $+\infty$  et

$$\frac{\partial g}{\partial v} = c + \frac{1 - e^{-u}}{v^2} > 0.$$

Le théorème de l'anti-entonnoir [47] dit alors qu'il existe une unique solution  $v(u)$  de l'équation différentielle (4.20) telle que  $v_1(u) < v(u) < v_2(u)$  d'où  $v(u) \rightarrow 0$  quand  $u \rightarrow 0$  et  $v(u) \rightarrow 1/c$  quand  $u \rightarrow +\infty$ . Enfin,  $v$  est strictement croissante puisque

$$v'(u) = c + \frac{e^{-u} - 1}{v(u)} > c + \frac{e^{-u} - 1}{v_1(u)} = 0.$$

*Étape 2 : retour au système dans le plan de phase.* L'étape 1 a permis de construire une solution  $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  du problème

$$\begin{cases} \phi'(x) = c + \frac{1 - e^{-x}}{\phi(x)}, \\ \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0, \quad \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{c}, \\ \frac{1 - e^{-x}}{c} \leq \phi(x) \leq \frac{1 - e^{-2x}}{c}, \forall x > 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

On considère alors un couple  $(x_0, y_0)$  avec  $y_0 = \phi(x_0)$  et on considère la solution  $(u(t), v(t))$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = cv(t) + e^{-u(t)} - 1, \\ u(0) = x_0, v(0) = y_0. \end{cases} \quad (4.22)$$

définie sur l'intervalle  $]T_*, T^*[$ . On va montrer que la solution  $(u(t), v(t))$  est en fait globale et se déplace sur le graphe de  $\phi$ , et que par conséquent la fonction  $u(t)$  strictement positive est solution de 4.16.

On considère l'intervalle maximal  $]T_{\min}, T_{\max}[$  sur lequel  $(u(t), v(t)) \in Q_1 := (\mathbb{R}_+^*)^2$  (c'est vrai pour  $t = 0$ ). On cherche d'abord à montrer que  $(u(t), v(t))$  se déplace sur le graphe de  $\phi$ , c'est à dire que

$$v(t) = \phi(u(t)).$$

Pour cela, on regarde l'application  $F : ]T_{\min}, T_{\max}[ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(t, w) = cv(t) + (e^{-u(t)} - 1) \frac{v(t)}{w}.$$

On s'aperçoit alors d'une part que

$$F(t, v(t)) = cv(t) + (e^{-u(t)} - 1) \frac{v(t)}{v(t)} = cv(t) + (e^{-u(t)} - 1) = v'(t),$$

et que d'autre part si  $w(t) = \phi(u(t))$ , alors

$$F(t, w(t)) = cv(t) + (e^{-u(t)} - 1) \frac{v(t)}{w(t)},$$

et

$$\begin{aligned} w'(t) &= \phi'(u(t))u'(t) = \phi'(u(t))v(t) \\ &= \left( c + \frac{e^{-u(t)} - 1}{\phi(u(t))} v(t) \right) = cv(t) + (e^{-u(t)} - 1) \frac{v(t)}{w(t)}. \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions  $v$  et  $\phi \circ u$  sont égales sur  $]T_{\min}, T_{\max}[$  par unicité de la solution du problème de Cauchy ( $F$  est bien localement lipschitzienne)

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)), \\ z(0) = y_0. \end{cases}$$

Ainsi, le point  $(u(t), v(t))$  se déplace sur le graphe de la fonction  $\phi$ . Montrons ensuite que  $T_* = T_{\min}$  et  $T^* = T_{\max}$ . Supposons par l'absurde que  $T_{\max} < T^*$ , alors  $(u(T_{\max}), v(T_{\max})) \in \partial Q_1$ , c'est à dire que  $(u(T_{\max}), v(T_{\max})) = (0, 0)$ , ce qui est impossible car  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  et  $(0, 0)$  est un point d'équilibre du système. On raisonne de même pour  $T_* = T_{\min}$ . La solution  $(u, v)$  reste ainsi dans  $Q_1$  pendant tout son intervalle d'existence.

Regardons le comportement près de  $T_*$ . Puisque  $u'(t) = v(t) > 0$ ,  $u$  est strictement croissante et strictement positive. Ainsi,  $v(t) = \phi(u(t))$  est croissante par composition et minorée donc  $(u(t), v(t))$  est bornée quand  $t \rightarrow T_*$ , d'où  $T_* = -\infty$ . De plus,  $(u(t), v(t))$  tend vers une limite quand  $t \rightarrow T_*$  qui vaut  $(l, \phi(l))$ , avec  $l \geq 0$ . Ce point  $(l, \phi(l))$  est nécessairement un point d'équilibre, c'est à dire  $(0, 0)$  Ainsi,

$$(u(t), v(t)) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} (0, 0).$$

Regardons enfin le comportement en  $T^*$ . Puisque  $u'(t) = v(t) = \phi(u(t)) \leq 1/c$ , on a  $0 < u(t) \leq x_0 + t/c$  et  $0 < v(t) \leq 1/c$ . Ainsi,  $(u(t), v(t))$  ne peut pas exploser en temps fini et donc  $T^* = +\infty$ . Par monotonie, on en déduit que quand  $t \rightarrow +\infty$ , ou bien  $u(t) \rightarrow L$ , ou bien  $u(t) \rightarrow +\infty$ . Dans le premier cas, on a alors  $v(t) \rightarrow \phi(L)$  et nécessairement  $(L, \phi(L)) = (0, 0)$ , ce qui est absurde par stricte monotonie de  $u$  et  $v$ . Ainsi,

$$u(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty, \quad v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1/c,$$

d'où  $u(t) \sim t/c$  en  $+\infty$ . □

Nous démontrons maintenant la proposition 4.4.1. C'est une conséquence du lemme suivant qui établit le lien entre les ondes du système et de l'équation :

**Lemme 4.4.3.** (i) Soit  $c \geq 2$  et  $\tilde{u}$  la solution du problème (4.16) construite dans la proposition 4.4.2. Alors si on pose

$$\tilde{T} = c\tilde{u}', \quad \tilde{Y} = e^{-\tilde{u}},$$

le triplet  $(c, \tilde{T}, \tilde{Y})$  est solution de (4.15).

(ii) Inversement, si  $(c, \tilde{T}, \tilde{Y})$  est une solution de (4.15) avec  $\tilde{T} > 0$ , alors  $c > 0, \tilde{Y} > 0$  et  $\tilde{T} \in L^1(\mathbb{R}^-)$ . De plus, si on pose

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^x \tilde{T}(s) ds,$$

alors le couple  $(c, \tilde{u})$  est solution de (4.16).

*Démonstration.* (i) De l'équation au système. Considérons une solution  $\tilde{u} > 0$  de (4.16) et posons

$$\tilde{T} = c\tilde{u}', \quad \tilde{Y} = e^{-\tilde{u}}.$$

La solution est de classe  $C^3$  et on a

$$-\tilde{T}'' + c\tilde{T}' = (-\tilde{T}' + c\tilde{T})' = c(-\tilde{u}'' + c\tilde{u}') = c(1 - e^{-\tilde{u}})' = c\tilde{u}'e^{-\tilde{u}} = \tilde{T}\tilde{Y}.$$

De même,

$$c\tilde{Y}' = c(e^{-\tilde{u}})' = -c\tilde{u}'e^{-\tilde{u}} = -\tilde{T}\tilde{Y}.$$

Le couple  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$  vérifie bien les deux équations de (4.15). Les conditions aux limites découlent de celles de  $\tilde{u}$  et  $\tilde{u}'$ .

(ii) Du système à l'équation. Soit  $(c, \tilde{T}, \tilde{Y})$  une solution (4.15) telle que  $\tilde{T} > 0$ . Commençons par montrer la positivité de  $c$  et de  $\tilde{Y}$ . La deuxième équation de (4.15) s'intègre en

$$\tilde{Y}(x) = \tilde{Y}(x') \exp\left(-\frac{1}{c} \int_{x'}^x \tilde{T}(s) ds\right), \quad (4.23)$$

avec  $x' \in \mathbb{R}$ . Montrons tout d'abord que  $c > 0$ . Puisque  $\tilde{Y}(-\infty) = 1$ , on peut choisir  $x'$  tel que  $\tilde{Y}(x') > 0$ . La formule (4.23) implique que  $c > 0$  pour obtenir les bonnes limites  $\tilde{Y}(-\infty) = 1$  et  $\tilde{Y}(+\infty) = 0$ . On en déduit aussi que  $\tilde{Y} > 0$ . En effet, si  $\tilde{Y}$  s'annule en un point  $x'$  alors elle est identiquement nulle, ce qui contredit la limite  $\tilde{Y}(-\infty) = 1$ .

Montrons ensuite que  $\tilde{T} \in L^1(\mathbb{R}^-)$ . En intégrant la première équation de (4.15) sur  $[a, b]$ , on obtient

$$\int_a^b \tilde{T}(s)\tilde{Y}(s) ds = \tilde{T}'(a) - \tilde{T}'(b) + c(\tilde{T}(b) - \tilde{T}(a)).$$

On prend d'abord  $a = 0$  et  $b = +\infty$ . Puisque  $\tilde{T}\tilde{Y} > 0$ ,  $\int_0^b \tilde{T}(s)\tilde{Y}(s) ds$  a une limite quand  $b \rightarrow +\infty$  (qui peut être  $+\infty$ ), et donc la relation précédente implique que  $\tilde{T}'(b)$  possède

une limite quand  $b \rightarrow +\infty$  qui est forcément 0 puisque  $\tilde{T}(+\infty) = 1$ . En procédant de même avec  $a = -\infty$  et  $b = 0$ , on obtient au final

$$\tilde{T}'(\pm\infty) = 0.$$

En prenant  $a = -\infty$  et  $b = +\infty$ , on obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{T}(s)\tilde{Y}(s)ds = c.$$

Puisque  $\tilde{Y}(-\infty) = 1$ , on déduit que  $\tilde{Y}(x) \geq 1/2$  pour  $x \leq \alpha$  et ainsi la relation précédente nous dit que  $\tilde{T} \in L^1(\mathbb{R}^-)$ .

Revenons maintenant à la relation (4.23). Puisque  $\tilde{T} \in L^1(\mathbb{R}^-)$ , on peut passer à la limite  $x' \rightarrow -\infty$ , ce qui donne

$$\tilde{Y}(x) = \exp\left(-\frac{1}{c} \int_{-\infty}^x \tilde{T}(s)ds\right) \quad (4.24)$$

On pose alors

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^x \tilde{T}(s)ds.$$

La première équation du système donne alors

$$-\tilde{T}'' + c\tilde{T}' = \tilde{T}e^{-\tilde{u}},$$

ce qui donne

$$-\tilde{u}''' + c\tilde{u}'' = \tilde{u}'e^{-\tilde{u}}.$$

En intégrant, on obtient

$$-\tilde{u}'' + c\tilde{u}' = -e^{-\tilde{u}} + A,$$

avec  $A \in \mathbb{R}$ . Le fait que  $\tilde{T} \in L^1(\mathbb{R}^-)$  entraîne  $\tilde{u}(-\infty) = 0$  et les conditions  $\tilde{T} > 0$  et  $\tilde{T}(+\infty) = 1$  impliquent que  $\tilde{u}(+\infty) = +\infty$ . Vu les limites de  $\tilde{T}$ , on obtient aussi  $\tilde{u}'(-\infty) = 0$  et  $\tilde{u}'(+\infty) = 1/c$ . Enfin, puisque  $\tilde{T}'(\pm\infty) = 0$ ,  $\tilde{u}''(\pm\infty) = 0$ . On déduit de ces limites que  $A = 1$  et donc par conséquent

$$-\tilde{u}'' + c\tilde{u}' = 1 - e^{-\tilde{u}}.$$

Le couple  $(c, \tilde{u})$  est donc bien solution de (4.16). □

## 4.5 Propriétés qualitatives des ondes pulsatoires de l'équation

### 4.5.1 Positivité de la vitesse

Nous nous intéressons en premier lieu à la positivité de la vitesse

**Lemme 4.5.1.** *Soit  $(c, \tilde{u})$  une solution de (4.9). Alors  $c > 0$ .*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $c < 0$ . Puisque  $\tilde{u}(0, \xi) \rightarrow +\infty$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ , il existe pour tout  $N$  un rang  $\xi'_N$  pour lequel  $\tilde{u}(0, \xi) \geq N$  pour tout  $\xi \geq \xi'_N$ . L'inégalité de Harnack dit alors qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\xi$  telle que pour tout  $\xi \geq \xi'_N$

$$\sup_{[0, 2/c] \times [\xi, \xi+1]} \tilde{u} \leq C \inf_{[1/c, 2/c] \times [\xi, \xi+1]} \tilde{u}.$$

Puisque  $\tilde{u}$  est  $1/c$ -périodique en  $t$ , on en déduit que  $\sup_{D_\xi} \tilde{u} \leq C \inf_{D_\xi} \tilde{u}$ , où  $D_\xi = [0, 1/c] \times [\xi, \xi + 1]$ . Ainsi,  $\tilde{u}(t, \xi) \geq N/C$  pour tout  $\xi \geq \xi'_N$ . Par conséquent, pour tout  $N$  il existe  $\xi_N$  tel que  $\tilde{u}(t, \xi) \geq N$  pour tout  $t$  et  $\xi \geq \xi_N$ .

L'onde pulsatoire  $\tilde{u}(t, \xi)$  est  $1/|c|$  périodique par rapport à  $t$ , son coefficient de Fourier d'ordre 0 est

$$\tilde{u}_0(\xi) = |c| \int_0^{1/|c|} \tilde{u}(t, \xi) dt.$$

Puisque  $\tilde{u}(t, +\infty) = +\infty$ , on a  $\tilde{u}_0(+\infty) = +\infty$ . On va obtenir une contradiction sur cette limite si  $c < 0$ . À partir de l'équation vérifiée par  $\tilde{u}(t, \xi)$ , dérivons l'équation différentielle vérifiée par  $\tilde{u}_0$ . On a

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0''(\xi) - c\tilde{u}_0'(\xi) &= |c| \int_0^{1/|c|} (\tilde{u}_{\xi\xi}(t, \xi) - c\tilde{u}_\xi(t, \xi)) dt, \\ &= |c| \int_0^{1/|c|} (\tilde{u}_t(t, \xi) - Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}(t, \xi)})) dt. \end{aligned}$$

Or  $\tilde{u}$  est  $1/|c|$  périodique en  $t$  et

$$|c| \int_0^{1/|c|} Y_p(\xi - ct) dt = \int_0^1 Y_p(\tau) d\tau = \langle Y_p \rangle.$$

Il reste donc au final

$$\tilde{u}_0''(\xi) - c\tilde{u}_0'(\xi) = -\langle Y_p \rangle + |c| \int_0^{1/|c|} Y_p(\xi - ct) e^{-\tilde{u}(t, \xi)} dt,$$

dont la solution générale s'écrit :

$$\tilde{u}_0(\xi) = A_0 + B_0 e^{c\xi} + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + U_0(\xi),$$

avec

$$U_0(\xi) = \int_{\xi_N}^{\xi} (1 - e^{c(\xi-s)}) \left( \int_0^{1/|c|} Y_p(s - ct) e^{-\tilde{u}(t, s)} dt \right) ds \geq 0.$$

D'après l'estimation obtenue plus haut, on a pour tout  $\xi \geq \xi_N$  :

$$\int_0^{1/|c|} Y_p(s - ct) e^{-\tilde{u}(t, s)} dt \leq \frac{\|Y_p\|_\infty}{|c|} e^{-N}.$$

On obtient ainsi que

$$U_0(\xi) \leq \frac{\|Y_p\|_\infty}{|c|} e^{-N} \int_{\xi_N}^{\xi} (1 - e^{c(\xi-s)}) ds = \frac{\|Y_p\|_\infty}{|c|} e^{-N} (\xi - \xi_N + \frac{1}{c} (1 - e^{c(\xi - \xi_N)})).$$

Puisque  $c < 0$ , les termes en  $e^{c\xi}$  tendent vers 0 quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Les termes dominants sont les termes linéaires. Choisissons alors  $N$  assez grand pour que  $\|Y_p\|_\infty e^{-N} < \langle Y_p \rangle$ . On en déduit l'équivalent suivant quand  $\xi \rightarrow +\infty$  :

$$\tilde{u}_0(\xi) \sim \left( \frac{\langle Y_p \rangle}{c} + \frac{\|Y_p\|_\infty}{|c|} e^{-N} \right) \xi.$$

Puisque  $c < 0$ , le coefficient est négatif, ce qui est en contradiction avec la limite  $\tilde{u}_0(+\infty) = +\infty$ .  $\square$

### 4.5.2 Comportement linéaire des ondes pulsatoires

Au vu des relations (4.10), une onde pulsatoire  $\tilde{u}$  de l'équation ne peut donner une onde du système que si elle possède un comportement linéaire quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Nous construirons d'ailleurs de telles ondes à la section suivante. Nous montrons ici que toute onde pulsatoire de l'équation a un comportement linéaire de la forme

$$\tilde{u}(t, \xi) \sim \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi,$$

à condition que la croissance en  $+\infty$  est supposée sous exponentielle, c'est à dire que  $\tilde{u}(t, \xi) = O(e^{\alpha\xi})$  pour tous  $\alpha > 0$ . Pour montrer ce résultat, nous avons besoin au préalable de savoir que la croissance est au moins linéaire :

**Lemme 4.5.2.** *Soit  $(c, \tilde{u})$  une solution strictement positive de (4.9) à croissance sous exponentielle quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Alors  $\tilde{u}(t, \xi)$  a une croissance au moins linéaire, plus précisément il existe  $A > 0$  tel que  $\tilde{u}(t, \xi) \geq \frac{A}{c}\xi$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\xi \geq 0$ .*

*Démonstration.* Commençons par noter qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\tilde{u}(t, \xi) \geq \varepsilon$  pour tout  $t$  et  $\xi \geq 0$ . Cette assertion est vraie pour  $\tilde{u}(0, \xi)$  puisque  $\tilde{u}(0, \xi)$  est strictement positive et vérifie  $\tilde{u}(0, +\infty) = +\infty$ . Puisque  $\tilde{u}$  est périodique en  $t$ , on obtient le résultat en appliquant l'inégalité de Harnack comme dans la démonstration du lemme précédent.

Vu que  $Y_p$  est minoré inférieurement, il existe  $\tilde{A} > 0$  tel que  $Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}}) \geq \tilde{A}$  pour  $\xi \geq 0$ . On va construire une sous-solution qui a un comportement linéaire en  $\xi$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Pour cela, on considère la fonction  $h$  définie pour  $\xi \geq 0$  par

$$h(\xi) := \lambda \arctan(\mu\xi),$$

$\lambda$  et  $\mu$  étant deux paramètres à fixer pour que  $w$  soit sous-solution. Notons que

$$h'(\xi) = \frac{\lambda\mu}{1 + \mu^2\xi^2}, \quad h''(\xi) = -2\lambda\mu^2 \frac{\mu\xi}{(1 + \mu^2\xi^2)^2}.$$

La fonction  $h$  a les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(0) = 0, h'(0) = \lambda\mu, h''(0) = 0, \\ \max h = \lambda\pi/2, \\ h'' \leq 0, \\ \max(-h'') = 2\lambda\mu^2 M_0, \quad M_0 := \max_{\mathbb{R}^+} \frac{s}{(1 + s^2)^2}. \end{array} \right.$$

La grandeur  $\varepsilon$  étant fixé telle que  $\tilde{u}(t, \xi) \geq \varepsilon$  pour tout  $t$  et  $\xi \geq 0$ , on choisit les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  de sorte que

$$\lambda \leq \frac{2\varepsilon}{\pi}, \quad \mu \leq \frac{c}{2M_0}, \quad A := c\lambda\mu \leq \tilde{A}.$$

On construit alors la sous-solution en considérant le problème de transport suivant posé pour  $t \geq 0$  et  $\xi \geq 0$  :

$$\begin{cases} w_t + cw_\xi = A, \\ w(0, \xi) = h(\xi), \\ w(t, 0) = 0, \end{cases}$$

La solution de ce problème est alors

$$w(t, \xi) = \begin{cases} h(\xi - ct) + At & \text{si } \xi \geq ct, \\ \frac{A}{c}\xi & \text{si } \xi \leq ct. \end{cases}$$

Montrons tout d'abord que  $w$  est  $C^2$ . Elle est tout d'abord continue du fait que  $h(0) = 0$ . Pour voir qu'elle est  $C^1$ , il suffit de voir  $w_\xi$  et  $w_t$  existent et sont continues. Puisque  $h'(0) = A/c$ ,  $w_\xi$  et  $w_t$  existent et sont continues puisque

$$w_\xi(t, \xi) = \begin{cases} h'(\xi - ct) & \text{si } \xi \geq ct, \\ \frac{A}{c} & \text{si } \xi \leq ct, \end{cases}$$

$$w_t(t, \xi) = \begin{cases} A - ch'(\xi - ct) & \text{si } \xi \geq ct, \\ 0 & \text{si } \xi \leq ct. \end{cases}$$

L'existence et la continuité des dérivées secondes découlent enfin de  $h''(0) = 0$ .

Si on note  $L$  l'opérateur

$$Lu := u_t - u_{\xi\xi} + cu_\xi,$$

alors la fonction  $w$  vérifie

$$Lw = -w_{\xi\xi} \leq 2\lambda\mu^2 M_0 \leq c\lambda\mu \times \frac{2\mu M_0}{c} \leq A.$$

On a ainsi

$$\begin{cases} L(\tilde{u} - w) = L\tilde{u} - Lw \geq \tilde{A} - A \geq 0, \\ (\tilde{u} - w)(0, \xi) \geq \varepsilon - h(\xi) \geq \varepsilon - \lambda\pi/2 \geq 0, \\ (\tilde{u} - w)(t, 0) = \tilde{u}(t, 0) \geq 0, \\ |\tilde{u} - w| \text{ a une croissance sous exponentielle à l'infini.} \end{cases}$$

D'après le principe du maximum,  $\tilde{u}(t, \xi) \geq w(t, \xi)$  pour  $t \geq 0$  et  $\xi \geq 0$ . Soient  $t \geq 0$  et  $\xi \geq 0$ . Soit  $n \geq \xi - ct$ , alors on a

$$\tilde{u}(t, \xi) = \tilde{u}(t + n/c, \xi) \geq w(t + n/c, \xi) = \frac{A}{c}\xi,$$

puisque  $\xi \leq c(t + n/c) = ct + n$ . On a donc la minoration linéaire  $\tilde{u}(t, \xi) \geq \frac{A}{c}\xi$  pour  $\xi \geq 0$ .  $\square$

**Proposition 4.5.3.** *Soit  $(c, \tilde{u})$  une solution strictement positive de (4.9) à croissance sous exponentielle quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$  tels que pour  $\xi \rightarrow +\infty$*

$$\tilde{u}(t, \xi) = \alpha + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + Z_p(\xi - ct) + O(e^{-\beta \xi}), \quad (4.25)$$

où

$$Z_p(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{Y}_p(-n)}{4\pi^2 n^2} e^{-2i\pi n x}, \quad (4.26)$$

est une fonction réelle, régulière, 1-périodique et vérifie  $Z_p''(x) = \langle Y_p \rangle - Y_p(x)$ .

*Démonstration.* Nous allons développer la solution en série de Fourier par rapport à la variable  $t$  et montrer que le comportement linéaire est donné par le coefficient  $\tilde{u}_0$  tandis que les autres apportent une contribution à décroissance exponentielle.

1) *Développement en série de Fourier.* L'onde pulsatoire  $\tilde{u}(t, \xi)$  est  $1/c$  périodique par rapport à  $t$ , on peut donc la développer en série de Fourier :

$$\tilde{u}(t, \xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(\xi) e^{2i\pi n c t} \quad \text{avec} \quad u_n(\xi) = c \int_0^{1/c} \tilde{u}(t, \xi) e^{-2i\pi n c t} dt.$$

En remplaçant  $\tilde{u}$  par sa série dans l'équation (4.9), on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( -u_n''(\xi) + c u_n'(\xi) + 2i\pi n c u_n(\xi) \right) e^{2i\pi n c t} = Y_p(\xi - ct) (1 - e^{-\tilde{u}(t, \xi)}).$$

Cette égalité représente le développement en série de Fourier de la fonction  $1/c$ -périodique

$$t \mapsto Y_p(\xi - ct) (1 - e^{-\tilde{u}(t, \xi)}).$$

Ceci donne les équations différentielles suivantes sur  $u_n$  :

$$u_n''(\xi) - c u_n'(\xi) - 2i\pi n c u_n(\xi) = -c \int_0^{1/c} Y_p(\xi - ct) (1 - e^{-\tilde{u}(t, \xi)}) e^{-2i\pi n c t} dt.$$

On coupe alors le second membre sous la forme

$$-c \int_0^{1/c} Y_p(\xi - ct) e^{-2i\pi n c t} dt + c \int_0^{1/c} Y_p(\xi - ct) e^{-\tilde{u}(t, \xi)} e^{-2i\pi n c t} dt.$$

En effectuant le changement de variables  $\tau = \xi - ct$  dans la première intégrale, on a alors, puisque  $Y_p$  est 1-périodique

$$-\left( \int_0^1 Y_p(\tau) e^{2i\pi n \tau} d\tau \right) e^{-2i\pi n \xi} + c \int_0^{1/c} Y_p(\xi - ct) e^{-\tilde{u}(t, \xi)} e^{-2i\pi n c t} dt.$$

Ainsi, si on pose  $h(t, \xi) = Y_p(\xi - ct) e^{-\tilde{u}(t, \xi)}$ , on a l'équation

$$u_n''(\xi) - c u_n'(\xi) - 2i\pi n c u_n(\xi) = -\widehat{Y}_p(-n) e^{-2i\pi n \xi} + \widehat{h}_n(\xi).$$

2) *Le terme dominant  $u_0$ .* Le comportement linéaire est donné par le terme  $u_0$ . Ce dernier vérifie l'équation

$$u_0''(\xi) - cu_0'(\xi) = f_0(\xi) := -\langle Y_p \rangle + c \int_0^{1/c} Y_p(\xi - ct) e^{-\tilde{u}(t,\xi)} dt.$$

L'équation caractéristique étant  $x^2 - cx$  de racines 0 et  $c$ , les solutions de l'équation homogène sont de la forme  $A_0 + B_0 e^{c\xi}$ . On obtient ensuite la solution particulière  $\frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi$  pour le second membre  $-\langle Y_p \rangle$ . On obtient la solution particulière pour l'autre terme par variation de la constante ; au final, la solution générale est

$$u_0(\xi) = A_0 + B_0 e^{c\xi} + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + U_0(\xi),$$

avec

$$U_0(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} (1 - e^{c(\xi-s)}) \left( \int_0^{1/c} Y_p(s-ct) e^{-\tilde{u}(t,s)} dt \right) ds.$$

D'après le lemme 4.5.2, on a l'estimation

$$\int_0^{1/c} Y_p(s-ct) e^{-\tilde{u}(t,s)} dt \leq \frac{\|Y_p\|_{\infty}}{c} e^{-\frac{A}{c}s}.$$

On déduit l'encadrement suivant sur  $U_0(\xi)$  :

$$U_0(\xi) \leq C e^{-\frac{A}{c}\xi},$$

avec  $C > 0$ . Puisque  $u_0(\xi) = c \int_0^{1/c} \tilde{u}(t,\xi) dt$ ,  $u_0$  a une croissance sous-exponentielle quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . On en déduit que  $B_0 = 0$ .

3) *Estimation des coefficients  $u_n$ .* Pour  $n \neq 0$ , on a l'équation différentielle

$$u_n''(\xi) - cu_n'(\xi) - 2i\pi ncu_n(\xi) = -\widehat{Y}_p(-n) e^{-2i\pi n\xi} + \widehat{h}_n(\xi).$$

Étudions tout d'abord l'équation homogène. L'équation caractéristique  $x^2 - cx - 2i\pi nc = 0$  a pour discriminant

$$\Delta_n = c^2 + 8i\pi nc = \rho_n e^{i\theta_n},$$

avec  $\theta_n \in ]-\pi/2, \pi/2[$  et donc les racines sont les suivantes

$$r_n^- = \frac{c - \sqrt{\Delta_n}}{2} = \frac{c - \sqrt{\rho_n} e^{i\theta_n/2}}{2}, \quad r_n^+ = \frac{c + \sqrt{\Delta_n}}{2} = \frac{c + \sqrt{\rho_n} e^{i\theta_n/2}}{2}.$$

Montrons tout d'abord que

$$\Re(r_n^+) > 0, \quad \Re(r_n^-) < 0.$$

On note pour cela que puisque  $\theta_n/2 \in ]-\pi/4, \pi/4[$ , on a  $\cos(\theta_n/2) \geq \sqrt{2}/2$ , et donc

$$\Re(r_n^+) = \frac{c + \sqrt{\rho_n} \cos(\theta_n/2)}{2} \geq \frac{c}{2} > 0.$$

D'autre part,

$$\Re(r_n^-) = \frac{c - \sqrt{\rho_n} \cos(\theta_n/2)}{2} \leq \frac{1}{2} \left( c - \sqrt{\frac{\rho_n}{2}} \right).$$

Or,  $\rho_n^2 = c^4 + 64\pi^2 n^2 c^2 \geq 64\pi^2 n^2 c^2$ , donc  $\sqrt{\frac{\rho_n}{2}} \geq \frac{8\pi c}{\sqrt{2}}$  et ainsi

$$\Re(r_n^-) \leq -\frac{1}{2} \left( \frac{8\pi}{\sqrt{2}} - 1 \right) c < 0.$$

Les solutions de l'équation homogène sont ainsi de la forme

$$u_n(\xi) = A_n e^{r_n^+ \xi} + B_n e^{r_n^- \xi},$$

avec  $A_n$  et  $B_n$  des constantes quelconques. Une solution particulière pour le second membre  $-\widehat{Y}_p(-n)e^{-2i\pi n\xi}$  est donné par

$$u_n^{(1)}(\xi) = \frac{\widehat{Y}_p(-n)}{4\pi^2 n^2} e^{-2i\pi n\xi}.$$

Pour l'autre terme  $\widehat{h}_n(\xi)$ , on montre le résultat suivant

**Lemme 4.5.4.** *Il existe  $\alpha > 0$ ,  $C > 0$  tels que :*

(i) *Le coefficient  $\widehat{h}_n(\xi)$  vérifie pour tout  $n \neq 0$  et tout  $\xi \geq 0$  :*

$$|\widehat{h}_n(\xi)| \leq \frac{C}{n^2} e^{-\alpha\xi},$$

(ii) *il existe une solution particulière  $u_n^{(2)}(\xi)$  de*

$$u_n''(\xi) - cu_n'(\xi) - 2i\pi ncu_n(\xi) = \widehat{h}_n(\xi)$$

*qui vérifie*

$$|u_n^{(2)}(\xi)| \leq \frac{C}{n^2} |\xi| e^{-\alpha\xi}.$$

*Démonstration.* (i) Pour estimer

$$\widehat{h}_n(\xi) = c \int_0^{1/c} h(t) e^{-2i\pi nct} dt,$$

on effectue deux intégrations par parties. On obtient ainsi

$$\widehat{h}_n(\xi) = \frac{c}{(2i\pi nc)^2} \int_0^{1/c} h_{tt}(t, \xi) e^{-2i\pi nct} dt,$$

où

$$h_{tt}(t, \xi) = e^{-\tilde{u}} ((-c)^2 Y_p'' + 2c Y_p' \tilde{u}_t - Y_p \tilde{u}_{tt} + Y_p \tilde{u}_t^2).$$

Notons que d'après le lemme 4.5.2, on a l'estimation  $e^{-\tilde{u}} \leq e^{-A\xi/c}$ . On cherche alors à montrer que le terme entre parenthèse a une croissance sous-exponentielle. La fonction  $Y_p$  est  $C^2$  et périodique donc elle est bornée ainsi que ses dérivées première et seconde.

Regardons les dérivées de  $\tilde{u}$ . Les estimations paraboliques locales permettent de dire que puisque  $u$  est à croissance sous-exponentielle, il en est de même de  $u_t$ . En réitérant cet argument, on obtient que  $u_{tt}$  est également à croissance sous-exponentielle. Il existe ainsi au final  $\alpha > 0$  tel que

$$|\widehat{h}_n(\xi)| \leq \frac{C}{n^2} e^{-\alpha\xi}.$$

(ii) On cherche une solution particulière par la méthode de variation des constantes ; on obtient ainsi

$$u_n^{(2)}(\xi) = \left( E_n + \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} e^{-r_n^+ s} \widehat{h}_n(s) ds \right) e^{r_n^+ \xi} + \left( F_n - \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} e^{-r_n^- s} \widehat{h}_n(s) ds \right) e^{r_n^- \xi}.$$

Il s'agit ensuite de bien choisir les coefficients  $E_n$  et  $F_n$ .

*Choix de  $E_n$ .* Puisque  $\Re(r_n^+) > 0$ , la fonction  $e^{-r_n^+ s} \widehat{h}_n(s)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  ; on pose alors

$$E_n = - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} e^{-r_n^+ s} \widehat{h}_n(s) ds.$$

Le premier terme de  $u_n^{(2)}$  vérifie alors

$$\begin{aligned} |e^{r_n^+ \xi} \int_\xi^\infty \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} e^{-r_n^+ s} \widehat{h}_n(s) ds| &\leq \frac{C}{n^2 |\sqrt{\Delta_n}|} e^{\Re(r_n^+) \xi} \int_\xi^\infty e^{-(\Re(r_n^+) + \alpha)s} ds, \\ &\leq \frac{C}{n^2 |\sqrt{\Delta_n}| (\alpha + \Re(r_n^+))} e^{-\alpha\xi} \leq \frac{C'}{n^2} e^{-\alpha\xi}. \end{aligned}$$

*Choix de  $F_n$ .* Le choix de  $F_n$  dépend du fait que  $e^{-(\Re(r_n^-) + \alpha)s}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$  ou non, c'est à dire si  $\Re(r_n^-) + \alpha > 0$  ou non. Si c'est le cas, on choisit comme précédemment

$$F_n = - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} e^{-r_n^- s} \widehat{h}_n(s) ds,$$

et on obtient alors le même type d'estimation exponentielle que précédemment. Si  $\Re(r_n^-) + \alpha \leq 0$ , alors on choisit  $F_n = 0$ . On distingue alors deux cas : si  $\Re(r_n^-) + \alpha < 0$ , alors

$$|e^{r_n^- \xi} \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} e^{-r_n^- s} \widehat{h}_n(s) ds| \leq \frac{C e^{-\alpha\xi}}{-n^2 |\sqrt{\Delta_n}| (\alpha + \Re(r_n^-))} \leq \frac{C'}{n^2} e^{-\alpha\xi},$$

tandis que si  $\Re(r_n^-) + \alpha = 0$ ,

$$|e^{r_n^- \xi} \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{\Delta_n}} e^{-r_n^- s} \widehat{h}_n(s) ds| \leq \frac{C}{|\sqrt{\Delta_n}|} |\xi| e^{-\alpha\xi} \leq \frac{C'}{n^2} |\xi| e^{-\alpha\xi}.$$

On a montré ainsi qu'il existe une solution particulière  $u_n^{(2)}$  telle que

$$|u_n^{(2)}(\xi)| \leq \frac{C}{n^2} |\xi| e^{-\alpha\xi}.$$

□

Finalement, toute solution de l'équation différentielle s'écrit

$$u_n(\xi) = A_n e^{r_n^+ \xi} + B_n e^{r_n^- \xi} + \frac{\widehat{Y}_p(-n)}{4\pi^2 n^2} e^{-2i\pi n \xi} + u_n^{(2)}(\xi),$$

avec  $\Re(r_n^+) > 0$ ,  $\Re(r_n^-) < 0$  et  $|u_n^{(2)}(\xi)| \leq \frac{C}{n^2} |\xi| e^{-\alpha \xi}$ . Puisque  $\tilde{u}$  est à croissance sous-exponentielle, alors

$$u_n(\xi) = c \int_0^{1/c} \tilde{u}(t, \xi) e^{-2i\pi n c t} dt$$

aussi et on en déduit que  $A_n = 0$  puisque  $e^{r_n^+ \xi}$  est le terme dominant. Ainsi,

$$u_n(\xi) = B_n e^{r_n^- \xi} + \frac{\widehat{Y}_p(-n)}{4\pi^2 n^2} e^{-2i\pi n \xi} + u_n^{(2)}(\xi).$$

4) *Sommation et conclusion.* D'après le théorème de convergence normale, on a tout d'abord

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n(\xi)| < +\infty.$$

De plus,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\widehat{Y}_p(-n)}{4\pi^2 n^2} e^{-2i\pi n \xi} \right| < +\infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n^{(2)}(\xi)| < +\infty.$$

On en déduit que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |B_n e^{r_n^- \xi}| < +\infty.$$

Pour  $\xi = 0$ , on obtient  $\sum |B_n| < +\infty$ . Ainsi,

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n e^{r_n^- \xi} \right| \leq \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |B_n| \right) e^{-\beta \xi},$$

avec  $\beta = -\max \Re(r_n^-) > 0$ .

Puisque  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(\xi)$  converge, on en déduit finalement que

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, \xi) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(\xi) e^{2i\pi n c t} \\ &= A_0 + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{Y}_p(-n)}{4\pi^2 n^2} e^{-2i\pi n (\xi - c t)} + U_0(\xi) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left( B_n e^{r_n^- \xi} + u_n^{(2)}(\xi) \right) e^{2i\pi n c t}. \end{aligned}$$

On définit alors

$$Z_p(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\widehat{Y}_p(-n)}{4\pi^2 n^2} e^{-2i\pi n x}.$$

Notons que  $Z_p$  est une fonction réelle, régulière, 1-périodique et que sa dérivée seconde est

$$Z_p''(x) = \langle Y_p \rangle - Y_p(x).$$

De plus,

$$\begin{aligned} |U_0(\xi) + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left( B_n e^{r_n^- \xi} + u_n^{(2)}(\xi) \right) e^{2i\pi n c t}| &\leq |U_0(\xi)| + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left| B_n e^{r_n^- \xi} + u_n^{(2)}(\xi) \right| \\ &\leq C e^{-\alpha \xi} + \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |B_n| \right) e^{-\beta \xi} + C' |\xi| e^{-\alpha \xi}. \end{aligned}$$

On en déduit le développement asymptotique souhaité pour  $\xi \rightarrow +\infty$

$$\tilde{u}(t, \xi) = A_0 + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + Z_p(\xi - ct) + O(e^{-\gamma \xi}),$$

avec  $A > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $Z_p$  1-périodique.  $\square$

### 4.5.3 Non existence et décroissance exponentielle en $-\infty$

La non existence d'ondes de vitesse  $c < c^*$  et la décroissance exponentielle en  $-\infty$  découlent du lemme suivant démontré dans [6] et que nous utiliserons de nouveau dans la dernière section :

**Lemme 4.5.5.** [6] *Soient  $(c, u)$  une onde pulsatoire de (4.7) telle que  $u > 0$ . Soit*

$$\Lambda := \liminf_{t \rightarrow -\infty, x \in [0,1]} \frac{u_t(t, x)}{u(t, x)}.$$

Alors  $0 < \Lambda < +\infty$  et  $k(\Lambda/c) = \Lambda$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord que les fonctions  $\frac{u_t}{u}$  et  $\frac{u_x}{u}$  sont globalement bornées. Pour cela, écrivons l'équation de  $u$  sous la forme

$$u_t - u_{xx} - \left( Y_p(x) \frac{1 - e^{-u}}{u} \right) u = 0,$$

c'est à dire une équation linéaire à coefficients bornés. Montrons que  $\frac{u_t}{u}$  est bornée (on procède de même pour  $\frac{u_x}{u}$ ). Il s'agit de montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $(t_0, x_0)$ ,  $|u_t(t_0, x_0)| \leq C u(t_0, x_0)$ . Nous allons utiliser pour cela les estimations paraboliques et l'inégalité de Harnack. Les estimations  $W_{loc}^{2,p}$  nous disent qu'il existe une constante  $C$  telle que sur des domaines du type  $K_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times [x_0 - \alpha/2, x_0 + \alpha/2]$ , on a

$$\|u_t\|_{L^p(K_{1/2})} + \|u_{xx}\|_{L^p(K_{1/2})} \leq C \sup_{K_1} u.$$

Ainsi,  $u \in W^{2,p}(K_{1/2})$  et donc par les injections de Sobolev pour  $p$  assez grand, on a  $u \in C^{\alpha/2, \alpha}(K_{1/2})$ . On peut alors appliquer les estimations de Schauder qui donnent

$$\|u_t\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(K_{1/2})} + \|u_{xx}\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(K_{1/2})} \leq C' \sup_{K_1} u.$$

Par conséquent, il existe  $C_1$  telle que pour tout  $(t_0, x_0)$

$$|u_t(t_0, x_0)| \leq C_1 \sup_{\substack{t \in [t_0 - 1, t_0 + 1] \\ x \in [x_0 - 1/2, x_0 + 1/2]}} u(t, x).$$

On utilise ensuite l'inégalité de Harnack qui nous dit qu'il existe une constante  $C_2$  telle que

$$\sup_{\substack{t \in [t_0-1, t_0+1] \\ x \in [x_0-1/2, x_0+1/2]}} u(t, x) \leq C_2 \inf_{\substack{t \in [t_0-1/2, t_0+1/2] \\ x \in [x_0-1/2, x_0+1/2]}} u(t, x) \leq C_2 u(t_0, x_0).$$

Au final, on a donc  $|u_t(t_0, x_0)| \leq C_1 C_2 u(t_0, x_0)$ . On peut procéder de la même façon pour  $u_x/u$ . Ainsi, la quantité  $\Lambda$  est bien définie.

Considérons une suite  $(t_n, x_n)$  avec  $x_n \in [0, 1]$  et  $t_n \rightarrow -\infty$  telle que

$$\frac{u_t(t_n, x_n)}{u(t_n, x_n)} \rightarrow \Lambda \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Quitte à extraire, on peut supposer que  $x_n \rightarrow x_\infty \in [0, 1]$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Notons que d'après la limite  $u(t, -\infty) = 0$  et la propriété de périodicité  $u(t+1/c, x) = u(t, x+1)$ , on a  $u(t, x) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow -\infty$  localement en  $x$ . On considère alors les fonctions strictement positives

$$w_n(t, x) = \frac{u(t+t_n, x)}{u(t_n, x_n)}$$

qui sont localement bornées puisque  $u_t/u$  et  $u_x/u$  sont globalement bornées. Elles satisfont les équations linéaires

$$\partial_t w_n - \partial_{xx} w_n - Y_p(x) \frac{f(u(t+t_n, x))}{u(t+t_n, x)} w_n = 0.$$

Par les estimations paraboliques standards, les fonctions strictement positives  $w_n$  convergent dans  $C_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ , à extraction près d'une sous-suite, vers une fonction positive  $w(t, x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$  solution de l'équation

$$w_t - w_{xx} - Y_p(x) w = 0.$$

De plus,  $w(0, x_\infty) = 1$  d'où  $w$  est strictement positive d'après le principe du maximum fort. Notons que  $w$  vérifie aussi la condition d'ondes pulsatoires  $w(t+1/c, x) = w(t, x+1)$ .

Montrons que  $w_t(t, x) = \Lambda w(t, x)$ . Notons tout d'abord que

$$\partial_t w_n(t, x) = \frac{u_t(t+t_n, x)}{u(t+t_n, x)} w_n(t, x).$$

D'après la définition de  $\Lambda$  et le choix de  $(t_n, x_n)$ , on en déduit que  $w_t(0, x_\infty) = \Lambda w(0, x_\infty) = \Lambda$  et que  $w_t(t, x) \geq \Lambda w(t, x)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in [0, 1]$ . Cette inégalité est valable pour tout  $x$  au vu de la propriété de périodicité de  $w$ . De plus, puisque  $\partial_t w_n/w_n = u_t(t+t_n, x)/u(t+t_n, x)$  et  $\partial_x w_n/w_n = u_x(t+t_n, x)/u(t+t_n, x)$  et puisque  $u_t/u$  et  $u_x/u$  sont globalement bornées, alors  $w_t/w$  et  $w_x/w$  sont globalement bornées. On considère alors la fonction  $z = w_t/w$ . Elle est solution de l'équation

$$z_t - z_{xx} - 2 \frac{w_x}{w} z_x = 0.$$

et vérifie  $z \geq \Lambda$  avec  $z(0, x_\infty) = \Lambda$ . Puisque  $w(1/c, x_\infty - 1) = w(0, x_\infty) = \Lambda$ , le principe du maximum fort assure que  $z(t, x) = \Lambda$  pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ , c'est à dire que  $w_t(t, x) = \Lambda w(t, x)$ . Ainsi, la fonction  $w(t, x)e^{-\Lambda t}$  ne dépend pas de  $t$ .

On considère alors la fonction  $\psi(x) = w(0, x)e^{-\lambda x}$  avec  $\lambda = \Lambda/c$ . C'est une fonction de classe  $C^2$ , strictement positive, solution de l'équation

$$-\psi'' - 2\lambda\psi' + (c\lambda - \lambda^2 - Y_p(x))\psi = 0.$$

Autrement dit,  $\lambda$  vérifie  $k(\lambda) = c\lambda$ , soit  $k(\Lambda/c) = \Lambda$ . Puisque  $k(\lambda)$  est minorée par une constante strictement positive, on en déduit que  $\Lambda > 0$ .  $\square$

Le lemme dit que pour toute solution  $(c, u)$  strictement positive de (4.7), il existe  $\lambda = \Lambda/c > 0$  tel que  $k(\lambda) = c\lambda$ . Puisque ceci n'est possible que pour  $c \geq c^*$ , on a le résultat suivant

**Corollaire 4.5.6.** *Il n'existe pas d'ondes pulsatoires strictement positives de (4.7) de vitesse  $c < c^*$ .*

On déduit également du lemme la décroissance exponentielle de toute onde pulsatoire en  $-\infty$

**Corollaire 4.5.7.** *Soit  $(c, \tilde{u})$  une solution de (4.9) strictement positive. Alors il existe  $C$  et  $\delta > 0$  tels que  $\tilde{u}(t, \xi) \leq Ce^{\delta\xi}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\xi \leq 0$ .*

## 4.6 Existence d'ondes pulsatoires pour l'équation

Dans cette section, nous démontrons le théorème d'existence 4.2.3. Il s'agit de prouver que pour tout  $c \geq c^*$ , il existe une solution  $(c, \tilde{u})$  du problème (4.9) ayant les propriétés suivantes :

$$\forall c \geq c^*, \quad \tilde{u}(t, \xi) = \alpha + \frac{\langle Y_p \rangle}{c}\xi + Z_p(\xi - ct) + O(e^{-\beta\xi}) \quad \text{quand } \xi \rightarrow +\infty.$$

$$\forall c > c^*, \quad \tilde{u}(t, \xi) = e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct) + o(e^{(\lambda_c + \delta)\xi}) \quad \text{quand } \xi \rightarrow -\infty.$$

Notre démarche est la suivante. Pour construire une onde pulsatoire de vitesse  $c > c^*$ , on approche le problème (4.9) par des problèmes de type KPP classiques. On tronque pour cela la nonlinéarité  $f(u) = 1 - e^{-u}$  en une fonction régulière positive  $f_M(u)$  de support  $[0, M]$ , inférieure ou égale à  $f$ , égale à  $f(u)$  sur  $[0, M/2[$  et nulle pour  $u \geq M$ . On regarde alors le problème approché suivant :

$$(PB)_M \quad \begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - ct)f_M(\tilde{u}), \\ \tilde{u}(t + \frac{1}{c}, \xi) = \tilde{u}(t, \xi), \\ \tilde{u}(t, -\infty) = 0, \quad \tilde{u}(t, +\infty) = M. \end{cases} \quad (4.27)$$

Nous considérons alors la solution  $(c, \tilde{u}_M)$  de  $(PB)_M$  que nous avons construite au chapitre 2. Nous montrerons que la suite  $\tilde{u}_M$  est croissante en  $M$  et est bornée par  $p_{\lambda_c}$ . Ceci permettra de passer à la limite  $M \rightarrow +\infty$  afin d'obtenir une solution  $(c, \tilde{u})$  de (4.9) qui possède le comportement souhaité en  $-\infty$ .

Pour l'onde de vitesse  $c^*$ , nous procédons différemment car la construction de l'onde de vitesse minimale au chapitre 2 ne permet pas de récupérer ces informations. Nous approchons plutôt l'onde de vitesse minimale à l'aide des ondes de vitesse supérieure.

Nous considérons ainsi une suite  $c_n$  qui converge vers  $c^*$  par valeurs supérieures et  $\tilde{u}_n$  la solution de (4.9) que nous construisons. Nous imposons alors une condition de normalisation sur  $\tilde{u}_n$  (vérifiée quitte à translater) ce qui permettra à l'aide des estimations paraboliques de passer à la limite  $n \rightarrow +\infty$ . Cependant, ce procédé ne permet pas de préciser le comportement en  $-\infty$ .

Nous concluons cette section en montrant le comportement linéaire en  $+\infty$  des ondes pulsatoires construites.

#### 4.6.1 Existence d'ondes pulsatoires pour $c > c^*$

Nous considérons ainsi la solution  $(c, \tilde{u}_M)$  de vitesse supérieure de  $(PB)_M$  construite au chapitre 2 et nous cherchons à passer à la limite  $M \rightarrow +\infty$  sur  $\tilde{u}_M$ . Rappelons que par construction,  $\tilde{u}_M$  est dans l'espace

$$X_{\delta, M} := \left\{ u \in BUC(\mathbb{R}), 0 \leq u \leq M, \frac{u(\xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi)}{p_{\lambda_c + \delta}(0, \xi)} \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\},$$

où  $BUC(\mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions bornées uniformément continues sur  $\mathbb{R}$ . Montrons tout d'abord que  $p_{\lambda_c}(t, \xi) = e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct)$  est une borne supérieure de  $\tilde{u}_M$  :

**Lemme 4.6.1.** *Pour tout  $M$ , on a  $\tilde{u}_M(t, \xi) \leq p_{\lambda_c}(t, \xi)$ .*

*Démonstration.* L'équation vérifiée par  $U = \tilde{u}_M - p_{\lambda_c}$  est la suivante :

$$U_t - U_{\xi\xi} + cU_\xi = Y_p(\xi - ct)(f_M(\tilde{u}_M) - p_{\lambda_c}),$$

avec  $f_M(\tilde{u}_M) - p_{\lambda_c} = (f_M(\tilde{u}_M) - \tilde{u}_M) + U \leq U$  car  $f_M(\tilde{u}_M) \leq f(\tilde{u}_M) \leq \tilde{u}_M$ , d'où

$$U_t - U_{\xi\xi} + cU_\xi - Y_p(\xi - ct)U \leq 0.$$

On pose alors  $U(t, \xi) = p_{\lambda_c + \delta}(t, \xi)V(t, \xi)$  avec  $\delta$  tel que  $q_\delta := k(\lambda_c + \delta) - c(\lambda_c + \delta) > 0$ . On veut montrer que  $V(t, \xi) \leq 0$ . On obtient l'équation suivante sur  $V$  :

$$QV := V_t - V_{\xi\xi} + \left( c - 2 \frac{\partial_\xi p_{\lambda_c + \delta}}{p_{\lambda_c + \delta}} \right) V_\xi + q_\delta V \leq 0.$$

De plus, par construction, il existe une constante  $C_M$  telle que

$$V(0, \xi) = \frac{\tilde{u}_M(0, \xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi)}{p_{\lambda_c + \delta}(0, \xi)} \leq C_M.$$

On pose ensuite  $W(t, \xi) = C_M e^{-q_\delta t}$  qui vérifie  $QW = 0$ , d'où

$$\begin{cases} Q(V - W) = QV - QW \leq 0, \\ (V - W)(0, \xi) \leq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum faible parabolique nous assure alors que

$$V(t, \xi) \leq W(t, \xi) = C_M e^{-q_\delta t}.$$

Or,  $V(t, \xi)$  est  $1/c$ -périodique en  $t$  donc en évaluant l'inégalité en  $t = t + N/c$  puis en passant à la limite  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient  $V \leq 0$ . Ceci donne finalement  $\tilde{u}_M(t, \xi) \leq p(t, \xi)$ .  $\square$

On a ainsi une borne supérieure des  $\tilde{u}_M$  indépendante de  $M$ . Les estimations paraboliques de type Schauder donnent pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\|\tilde{u}_M\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([1/c, 2/c] \times [-N, N])} \leq C_N,$$

$C_N$  étant indépendant de  $M$ . Par périodicité de  $\tilde{u}_M$ , on a alors

$$\|\tilde{u}_M\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\mathbb{R} \times [-N, N])} \leq C_N.$$

D'après le théorème d'Ascoli, pour tout compact  $[-m, m]$  de  $\mathbb{R}$ , il existe une suite  $M_{m,n} \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  telle que  $\tilde{u}_{M_{m,n}}$  converge dans  $C_{loc}^{1,2}([0, 1/c] \times [-m, m])$ . Par le procédé d'extraction diagonale, on peut alors extraire de  $\tilde{u}_{M_{m,n}}$  une sous suite, notée de la même façon, qui converge dans  $C_{loc}^{1,2}([0, 1/c] \times \mathbb{R})$  vers une fonction  $\tilde{u}$ ,  $1/c$  périodique en  $t$  et qui vérifie l'équation

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - ct)f(\tilde{u}).$$

De plus, puisque pour tout  $M_{m,n}$ ,  $\tilde{u}_{M_{m,n}}(t, \xi) \leq p_{\lambda_c}(t, \xi)$ , on obtient à la limite

$$\tilde{u}(t, \xi) \leq p_{\lambda_c}(t, \xi) = e^{\lambda_c \xi} \psi_{\lambda_c}(\xi - ct),$$

d'où  $\tilde{u}(t, -\infty) = 0$ .

Il nous reste donc à montrer que  $\tilde{u}(t, +\infty) = +\infty$ . Pour cela, on utilise le résultat suivant :

**Lemme 4.6.2.** *La suite  $\tilde{u}_M$  est croissante.*

*Démonstration.* On suit le même raisonnement que précédemment. On veut montrer que  $\tilde{u}_{M+1} - \tilde{u}_M \geq 0$ . On a l'équation suivante sur  $U = \tilde{u}_{M+1} - \tilde{u}_M$  :

$$U_t - U_{\xi\xi} + cU_\xi = Y_p(\xi - ct)(f_{M+1}(\tilde{u}_{M+1}) - f_M(\tilde{u}_M)).$$

Or,

$$\begin{aligned} f_{M+1}(\tilde{u}_{M+1}) - f_M(\tilde{u}_M) &= (f_{M+1}(\tilde{u}_{M+1}) - f_M(\tilde{u}_{M+1})) + (f_M(\tilde{u}_{M+1}) - f_M(\tilde{u}_M)), \\ &\geq f_M(\tilde{u}_{M+1}) - f_M(\tilde{u}_M), \\ &= f'_M(a(t, \xi))U \end{aligned}$$

avec  $a(t, \xi)$  une fonction comprise entre  $\tilde{u}_M(t, \xi)$  et  $\tilde{u}_{M+1}(t, \xi)$ . On obtient ainsi

$$U_t - U_{\xi\xi} + cU_\xi - Y_p(\xi - ct)f'_M(a(t, \xi))U \geq 0.$$

On pose alors  $U(t, \xi) = p_{\lambda_c + \delta}(t, \xi)V(t, \xi)$  avec comme précédemment  $\delta$  tel que  $q_\delta := k(\lambda_c + \delta) - c(\lambda_c + \delta) > 0$ . On veut montrer que  $V(t, \xi) \geq 0$ . On a l'équation suivante sur  $V$  :

$$QV := V_t - V_{\xi\xi} + \left( c - 2 \frac{\partial_\xi p_{\lambda_c + \delta}}{p_{\lambda_c + \delta}} \right) V_\xi + (Y_p(\xi - ct)(1 - f'_M(a(t, \xi))) + q_\delta)V \geq 0.$$

De plus, il existe des constantes positives  $C_M$  et  $C_{M+1}$  et des constantes négative  $C'_M$  et  $C'_{M+1}$  telles que

$$C'_M \leq \frac{\tilde{u}_M(0, \xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi)}{p_{\lambda_c + \delta}(0, \xi)} \leq C_M \quad \text{et} \quad C'_{M+1} \leq \frac{\tilde{u}_{M+1}(0, \xi) - p_{\lambda_c}(0, \xi)}{p_{\lambda_c + \delta}(0, \xi)} \leq C_{M+1}.$$

On a alors

$$V(0, \xi) = \frac{\tilde{u}_{M+1}(0, \xi) - \tilde{u}_M(0, \xi)}{p_{\lambda+\delta}(0, \xi)} \geq C'_{M+1} - C_M :=: -A_M \quad \text{avec} \quad A_M > 0.$$

Soit  $W(t, \xi) = -A_M e^{-q\delta t}$ , alors  $QW = -Y_p(\xi - ct)(1 - f'_M(a(t, \xi)))A_M e^{-q\delta t} \leq 0$ . Ainsi,

$$\begin{cases} Q(V - W) = QV - QW \geq 0, \\ (V - W)(0, \xi) \geq 0. \end{cases}$$

Du principe du maximum, on en déduit que

$$V(t, \xi) \geq W(t, \xi) = -A_M e^{-q\delta t}.$$

Or,  $V(t, \xi)$  est  $1/c$ -périodique en  $t$  donc en évaluant l'inégalité ci-dessous en  $t = t + N/c$  puis en prenant  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient  $V \geq 0$ . Ceci donne la croissance de la suite  $\tilde{u}_M$ .  $\square$

Comme  $\tilde{u}_M(t, +\infty) = M$ , on en déduit finalement que

$$\tilde{u}(t, +\infty) = +\infty.$$

En effet, soient  $t \in [0, 1/c]$  et  $M > 0$ , alors il existe  $\xi_M$  tel que  $\tilde{u}_{M+1}(t, \xi) \geq M$  pour  $\xi \geq \xi_M$  et donc par croissance de  $\tilde{u}_M$  on obtient à la limite que  $\tilde{u}(t, \xi) \geq M$  pour  $\xi \geq \xi_M$ .

Il reste à noter que pour  $\xi \rightarrow -\infty$ , on a le comportement souhaité :

$$\tilde{u}(t, \xi) = p_{\lambda_c}(t, \xi) + O(p_{\lambda_c+\delta}(t, \xi)).$$

En effet, d'une part  $\tilde{u}(t, \xi) \leq p_{\lambda_c}(t, \xi)$ . D'autre part, pour un  $M_0$  fixé, il existe par construction une constante  $C_0 > 0$  telle que  $\tilde{u}_{M_0}(t, \xi) \geq p_{\lambda_c}(t, \xi) - C_0 p_{\lambda_c+\delta}(t, \xi)$ . Puisque la suite  $\tilde{u}_M$  est croissante, on a la même estimation pour la limite  $u$ .

#### 4.6.2 Existence d'ondes pulsatoires pour $c = c^*$

Nous allons construire une onde de vitesse minimale en passant à la limite  $c_n \rightarrow c^*$  sur la suite de solutions  $(c_n, \tilde{u}_n)$  de (4.9) que nous venons de construire. Soit donc  $c_n$  une suite décroissant vers  $c^*$  et  $\tilde{u}_n$  la solution associée. On a l'estimation suivante

$$\tilde{u}_n(t, \xi) \leq e^{\lambda_{c_n} \xi} \psi_{\lambda_{c_n}}(\xi - c_n t).$$

Si impose la normalisation  $\phi_{\lambda_c} \leq 1$ , alors, puisque  $\lambda_{c^*} \leq \lambda_{c_n} \leq \lambda_{c_1}$ , on la majoration suivante indépendante de  $n$ ,

$$\tilde{u}_n(t, \xi) \leq e^{\lambda_{c^*} \xi} \quad \text{pour} \quad \xi \leq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}_n(t, \xi) \leq e^{\lambda_{c_1} \xi} \quad \text{pour} \quad \xi \geq 0.$$

Cette borne permet d'extraire une sous-suite convergente mais elle n'assure pas que la fonction limite obtenue n'est pas identiquement nulle.

On doit donc procéder différemment en imposant une condition de normalisation. Pour cela, on joue sur le fait qu'une solution est définie à translation près, c'est à dire que si  $\tilde{u}_n(t, \xi)$  est solution alors

$$\tilde{U}_n(t, \xi) = \tilde{u}_n(t + \tau_n, \xi + c_n \tau_n)$$

l'est aussi. Nous allons normaliser de sorte qu'il existe  $t_n \in [0, 1/c_n]$  tel que

$$\max_{t \in \mathbb{R}, \xi \leq 0} \tilde{U}_n(t, \xi) = 1 = \tilde{U}(t_n, 0).$$

Ceci est possible grâce au résultat suivant

**Lemme 4.6.3.** *Il existe  $t'_n \in [0, 1/c]$  et  $\xi_n \in \mathbb{R}$  tels que*

$$\max_{t \in \mathbb{R}, \xi \leq \xi_n} \tilde{u}_n(t, \xi) = 1 = \tilde{u}(t'_n, \xi_n).$$

*Démonstration.* Puisque  $\tilde{u}_n(1/c, -\infty) = 0$ , pour tout  $\varepsilon$  il existe  $A_n$  tel que pour  $\xi \leq A_n$ ,  $u_n(1/c, \xi) \leq \varepsilon$ . Par périodicité en  $t$  et par Harnack il existe ainsi  $C$  tel que

$$\max_{t \in \mathbb{R}, \xi \leq A_n} \tilde{u}_n(t, \xi) = C\varepsilon \leq \frac{1}{2}$$

en choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit. Puisque  $\tilde{u}_n(1/c, +\infty) = +\infty$ , on montre de même qu'il existe  $B_n$  tel que

$$\inf_{t \in \mathbb{R}, \xi \geq B_n} \tilde{u}_n(t, \xi) \geq 2.$$

Par continuité, la fonction  $\tilde{u}_n$  prend la valeur 1 sur  $[0, 1/c] \times [A_n, B_n]$  et par compacité on peut poser

$$\xi_n := \min\{\xi \in [A_n, B_n], \exists t \in [0, 1/c], u(t, \xi) = 1\}.$$

Il existe ainsi  $t'_n \in (0, 1/c]$  tel que

$$\max_{t \in \mathbb{R}, \xi \leq \xi_n} \tilde{u}_n(t, \xi) = 1 = \tilde{u}(t'_n, \xi_n).$$

□

On choisit alors  $\tau_n := \xi_n/c$  de sorte que  $\tilde{U}(t, \xi) = \tilde{u}(t + \xi_n/c, \xi + \xi_n)$  vérifie

$$\tilde{U}_n(t_n - \xi_n/c, 0) = \tilde{u}_n(t_n, \xi_n) = 1,$$

et

$$\max_{t \in \mathbb{R}, \xi \leq 0} \tilde{U}_n(t, \xi) = 1 = \tilde{U}(t'_n, 0).$$

Nous allons montrer qu'on peut alors extraire de cette suite une sous-suite convergeant vers une fonction  $\tilde{u}_*$  non identiquement nulle,  $1/c^*$ -périodique en  $t$  et solution de

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c^*\tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - c^*t)f(\tilde{u}).$$

Nous montrerons ensuite que cette fonction vérifie bien les conditions aux limites  $\tilde{u}_*(t, -\infty) = 0$  et  $\tilde{u}_*(t, +\infty) = +\infty$ .

**1) Extraction d'une sous-suite.** Considérons d'abord  $T$  un majorant des périodes  $1/c_n$  et  $\varepsilon$  un minorant. Vu la condition de normalisation et le fait que la suite  $(c_n)_n$  est bornée, l'inégalité de Harnack donne l'existence pour tout  $N$  d'une constante  $C_N$  indépendante de  $n$  telle que  $\tilde{U}_n(t, \xi) \leq C_N$  pour  $t \in [0, 2T]$ ,  $\xi \in [-N, N]$ . Les estimations paraboliques donnent alors l'existence pour tout  $N \in \mathbb{N}$  d'une constante  $C_N$  (indépendante de  $n$ ) telle que

$$\|\tilde{U}_n\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}([0, 2T] \times [-N, N])} \leq C_N.$$

La périodicité de  $\tilde{u}_n$  en temps implique que  $\|\tilde{U}_n\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\mathbb{R} \times [-N, N])} \leq C_N$ . Par le théorème d'Ascoli et le procédé d'extraction diagonale, on peut extraire de  $(\tilde{U}_n)_n$  une sous-suite, notée encore  $(\tilde{U}_n)_n$ , qui converge dans  $C_{loc}^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  vers  $\tilde{u}_*$ . Cette fonction  $\tilde{u}_*$  est

non identiquement nulle puisque  $\max_{t \in \mathbb{R}, \xi \leq 0} \tilde{u}_*(t, \xi) = 1$ ,  $1/c^*$ -périodique en  $t$ , et solution de l'équation

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c^* \tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - c^*t) f(\tilde{u}).$$

Il reste à montrer que  $\tilde{u}_*$  vérifie bonnes conditions aux limites  $\tilde{u}_*(t, -\infty) = 0$  et  $\tilde{u}_*(t, +\infty) = +\infty$ .

**2) La limite en  $-\infty$ .** Nous revenons aux variables initiales  $(t, x)$  en posant  $u_*(t, x) = \tilde{u}_*(t, x + ct)$ . Puisque  $\partial_t u_n > 0$ , on a à la limite  $\partial_t u_* \geq 0$ . On peut ainsi considérer la fonction

$$\underline{u}(x) := \lim_{t \rightarrow -\infty} u_*(t, x)$$

définie pour tout  $x \in [0, 1]$ . La relation d'onde pulsatoire  $u(t + 1/c, x) = u(t, x + 1)$  donne à la limite  $\underline{u}(x + 1) = \underline{u}(x)$ . De plus  $\underline{u}$  est solution de l'équation différentielle

$$-\underline{u}'' = Y_p(x)(1 - e^{-\underline{u}}).$$

En intégrant cette équation sur  $[0, 1]$ , on obtient

$$0 = - \int_0^1 \underline{u}''(x) dx = \int_0^1 Y_p(x)(1 - e^{-\underline{u}(x)}) dx.$$

Puisque  $Y_p > 0$ , on en déduit que  $\underline{u} = 0$ . Ainsi, pour tout  $x$ ,  $\tilde{u}_*(t, x + ct) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow -\infty$ . La limite  $\tilde{u}_*(t, -\infty) = 0$  s'obtient par périodicité (cf preuve du lemme 1.5.4).

**3) La limite en  $+\infty$ .** On travaille encore dans les variables ici  $(t, x)$  de sorte que  $\partial_t u_* \geq 0$ . On va montrer qu'il existe  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $u_*(t, x_0) \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $u(t, x)$  est borné en  $t$ . Dans ce cas, la limite

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u_*(t, x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{u}_*(t, x + ct)$$

existe pour tout  $x \in [0, 1]$ . De plus, puisque  $u(t + 1/c, x) = u(t, x + 1)$ , on obtient à la limite  $t \rightarrow +\infty$  que  $\bar{u}(x + 1) = \bar{u}(x)$ . Enfin,  $\bar{u}$  est solution de l'équation

$$-\bar{u}'' = Y_p(x)(1 - e^{-\bar{u}}).$$

En intégrant cette équation sur  $[0, 1]$ , on obtient par périodicité et le fait que  $\bar{u}$  est positive et non nulle que

$$0 = \int_0^1 -\bar{u}''(x) dx = \int_0^1 Y_p(x)(1 - e^{-\bar{u}(x)}) dx > 0,$$

d'où la contradiction.

Par conséquent, il existe  $x_0$  tel que  $u_*(t, x_0) \rightarrow +\infty$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . En revenant aux variables  $(t, \xi)$ , cela veut dire que pour  $t \rightarrow +\infty$

$$\tilde{u}_*(t, x_0 + ct) \rightarrow +\infty.$$

Montrons qu'alors que pour tout  $t$ ,  $\tilde{u}_*(t, \xi) \rightarrow +\infty$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ , on a

$$\tilde{u}_*(t_0, x_0 + ct + N) = \tilde{u}_*(t_0 + \frac{N}{c}, x_0 + c(t_0 + \frac{N}{c})) = \tilde{u}_*(t_0 + \frac{N}{c}, x_0) \rightarrow +\infty$$

quand  $N \rightarrow +\infty$ . Soit alors  $M > 0$ , il existe  $N$  assez grand tel que

$$\tilde{u}_*(t_0, x_0 + ct_0 + N) \geq M, \quad \tilde{u}_*(t_0, x_0 + ct_0 + N + 1) \geq M.$$

L'inégalité de Harnack dit alors qu'il existe une constante  $C$  indépendante de  $N$  telle que si on note  $D_0 = [x_0 + ct + N, x_0 + ct + N + 1]$ , on a

$$\sup_{[t_0-1, t_0+1] \times D_0} \tilde{u}_*(t, \xi) \leq C \inf_{[t_0, t_0+1] \times D_0} \tilde{u}_*(t, \xi).$$

Ainsi, si  $\xi \in D_0$ ,

$$\tilde{u}_*(t_0, \xi) \geq \inf_{[t_0, t_0+1] \times D_0} \tilde{u}_*(t, \xi) \geq 1/C \sup_{[t_0-1, t_0+1] \times D_0} \tilde{u}_*(t, \xi) \geq M/C,$$

d'où le résultat.

### 4.6.3 Comportement linéaire des ondes en $+\infty$

On cherche ici à montrer que pour  $c \geq c^*$ , l'onde construite vérifie

$$\tilde{u}(t, \xi) = \alpha + \frac{\langle Y_p \rangle}{c} \xi + Z_p(\xi - ct) + O(e^{-\beta\xi}) \quad \text{quand } \xi \rightarrow +\infty.$$

D'après la proposition 4.5.3, il suffit de montrer que  $\tilde{u}(t, \xi)$  est à croissance sous-exponentielle. Nous allons montrer pour cela que  $\tilde{u}$  est à croissance au plus linéaire.

**Lemme 4.6.4.** *Si  $c > c^*$ , alors pour tout  $t$  et  $\xi \geq 0$ ,*

$$\tilde{u}(t, \xi) \leq \|\psi_{\lambda_c}\|_\infty + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c} \xi.$$

*Si  $c = c^*$ , alors il existe  $M$  tel que pour tout  $t$  et  $\xi \geq 0$ ,*

$$\tilde{u}_*(t, \xi) \leq M + 2 \frac{\|Y_p\|_\infty}{c^*} \xi.$$

*Démonstration.* Nous traitons d'abord les ondes de vitesse  $c > c^*$  puis l'onde de vitesse minimale.

1) *Les ondes de vitesses supérieures.* On fixe ici une vitesse  $c > c^*$  et on note  $A_c := \max_{\mathbb{R}} \psi_{\lambda_c}$ . Rappelons d'abord que  $\tilde{u}$  est construite comme limite de solutions  $\tilde{u}_M$  du problème approché  $(PB)_M$  qui vérifient l'inégalité suivante pour  $\xi \leq 0$

$$\tilde{u}_M(t, \xi) \leq p_{\lambda_c}(t, \xi) \leq A_c.$$

De plus, puisque  $0 \leq \tilde{u}_M \leq M$ , on a en particulier l'estimation

$$\tilde{u}_M(t, \xi) \leq M + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c} \xi$$

pour  $\xi \geq 0$ . On veut obtenir une majoration linéaire indépendante de  $M$  pour pouvoir passer à la limite  $M \rightarrow +\infty$  et récupérer une majoration linéaire pour  $\tilde{u}$ . Par la suite,  $M$  est fixé et on considère

$$\gamma_M = \inf\{\gamma > 0 \text{ tel que } \tilde{u}_M(t, \xi) \leq \gamma + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c}\xi, \forall \xi \geq 0\}.$$

Notons que  $\gamma_M < +\infty$  puisque  $\gamma_M \leq M$ . On veut montrer que  $\gamma_M \leq A_c$ . Supposons par l'absurde que  $\gamma_M > A_c$ . On a tout d'abord par définition que pour tout  $\xi \geq 0$

$$\tilde{u}_M(t, \xi) \leq \gamma_M + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c}\xi.$$

Nous allons montrer qu'il y a égalité quelque part du fait que  $\tilde{u}_M$  est bornée. On considère pour cela la suite  $\gamma_n = \gamma_M - 1/n$  pour laquelle il existe pour tout  $n$  un couple  $(t_n, \xi_n)$ , avec  $t_n \in [0, 1/c[$  et  $\xi_n \geq 0$  vérifiant

$$\tilde{u}_M(t_n, \xi_n) \geq \gamma_n + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c}\xi_n.$$

Les suites  $t_n$  et  $\xi_n$  sont bornées puisque  $0 \leq \gamma_n + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c}\xi_n \leq \tilde{u}_M(t_n, \xi_n) \leq M$ . On peut donc en extraire une sous suite qui converge vers  $(t_M, \xi_M)$ , avec :

$$\tilde{u}_M(t_M, \xi_M) \geq \gamma_M + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c}\xi_M.$$

On a ainsi égalité au point  $(t_M, \xi_M)$ . Notons que  $\xi_M > 0$  puisque en  $\xi = 0$  on a  $\tilde{u}_M(t, 0) \leq A_c < \gamma_M$ . On considère alors la fonction

$$U(t, \xi) = \gamma_M + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c}\xi.$$

Si on pose  $L\tilde{u} := \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi$ , on a alors pour tout  $t$  et  $\xi \geq 0$

$$\begin{cases} L(U - \tilde{u}_M) = \|Y_p\|_\infty - Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}_M}) \geq 0, \\ U - \tilde{u}_M \geq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum fort parabolique dit alors que soit  $\tilde{u}_M < U$ , ce qui est impossible vu qu'il y a un point d'égalité à l'intérieur du domaine  $[0, 1/c[ \times \mathbb{R}_+^*$  (qu'on peut étendre à  $[-1/c, 2/c[ \times \mathbb{R}_+^*$  par périodicité si  $t_M = 0$ ), soit  $\tilde{u}_M = U$ , ce qui est contradictoire avec le fait que  $\tilde{u}_M(t, 0) \leq A_c < \gamma_M = U(t, 0)$ . Par conséquent,  $\gamma_M \leq A_c$  et à la limite  $M \rightarrow +\infty$  on récupère bien  $\tilde{u}(t, \xi) \leq A_c + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c}\xi$ .

2) *L'onde de vitesse minimale.* Par construction l'onde de vitesse minimale  $\tilde{u}_*$  est la limite quand  $c_n \rightarrow c^*$  de la suite  $\tilde{U}_n$  normalisée par  $\tilde{U}_n(t, \xi) = \tilde{u}_n(t + \xi_n/c, \xi + \xi_n)$  de sorte que

$$\max_{t \in \mathbb{R}, \xi \leq 0} \tilde{U}_n(t, \xi) = 1 = \tilde{U}_n(t'_n, 0).$$

En appliquant l'estimation linéaire à la suite initiale  $\tilde{u}_n$ , on obtient que pour  $\xi \geq 0$ ,

$$\tilde{u}_n(t, \xi) \leq \|\psi_{\lambda_{c_n}}\|_\infty + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi.$$

Ainsi, pour tout  $\xi \geq -\xi_n$ , on a

$$\tilde{U}_n(t\xi) \leq \|\psi_{\lambda_{c_n}}\|_\infty + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}(\xi + \xi_n) \leq C_n + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi.$$

On en déduit qu'il existe  $C'_n$  tel que pour tout  $t$  et  $\xi \geq 0$ , on a

$$\tilde{U}_n(t\xi) \leq C'_n + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi.$$

On définit alors

$$\underline{C}_n := \inf\{C \text{ tel que } \tilde{U}_n(t, \xi) \leq C + 2\frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi \text{ pour } \xi \geq 0\}.$$

Par définition de  $\underline{C}_n$ , pour tout  $p \geq 0$ , il existe  $(t_p, \xi_p)$  tel que

$$\tilde{u}_n(t_p, \xi_p) \geq \underline{C}_n - \frac{1}{p} + 2\frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi_p.$$

Puisque  $\tilde{u}_n(t_p, \xi_p) \leq \underline{C}_n + \frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi_p$ , la suite  $(\xi_p)_p$  est bornée, de même pour  $(t_p)_p$  qui est choisie dans  $[0, 1/c]$  par périodicité. On peut donc extraire une sous suite telle que  $t_{p'} \rightarrow t_\infty$  et  $\xi_{p'} \rightarrow \xi_\infty$  avec

$$\tilde{U}_n(t_\infty, \xi_\infty) \geq \underline{C}_n + 2\frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi_\infty.$$

Notons qu'on a ainsi l'inégalité

$$\tilde{U}_n(t, \xi) \leq \underline{C}_n + 2\frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi,$$

pour tout  $\xi \geq 0$  avec égalité au point  $(t_\infty, \xi_\infty)$ . On considère alors la fonction

$$V_n(\xi) := \underline{C}_n + 2\frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi$$

ainsi que l'opérateur  $L$  comme précédemment. On a alors pour tout  $t$  et  $\xi \geq 0$

$$\begin{cases} L(V_n - \tilde{U}_n) = 2\|Y_p\|_\infty - Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}_n}) > 0, \\ V_n - \tilde{U}_n \geq 0. \end{cases}$$

Le principe du maximum fort parabolique dit alors que sur  $\xi > 0$ , on a soit  $V_n - \tilde{U}_n > 0$ , soit  $V_n - \tilde{U}_n = 0$ . L'égalité est impossible puisque  $LV_n > L\tilde{U}_n$ . On a donc  $V_n > \tilde{U}_n$  pour tout  $\xi > 0$  et par conséquent  $\xi_\infty = 0$ . On en déduit que

$$\underline{C}_n = \tilde{U}_n(t_\infty, 0).$$

La condition de normalisation et l'inégalité de Harnack impliquent qu'il existe  $M$  indépendant de  $n$  tel que

$$\tilde{U}_n(t_\infty, 0) \leq M.$$

On déduit que pour  $\xi \geq 0$ , on a

$$\tilde{U}_n(t, \xi) \leq \underline{C}_n + 2\frac{\|Y_p\|_\infty}{c_n}\xi \leq M + 2\frac{\|Y_p\|_\infty}{c_*}\xi.$$

Cette estimation étant indépendante de  $n$ , elle est valable pour la limite  $\tilde{u}_*$ .  $\square$

## 4.7 Relation entre les ondes du système et de l'équation

Nous terminons ce chapitre par la démonstration de la proposition 4.2.4 établissant des relations algébriques entre les ondes pulsatoires du système (4.4) et celles de l'équation (4.9). Nous commençons par le point (ii) pour expliquer comment apparaissent ces relations.

(ii) *Passage du système à l'équation.* Considérons une solution  $(c, \tilde{T}, \tilde{Y})$  du système (4.4). La deuxième équation du système s'intègre en

$$\tilde{Y}(t, \xi) = Y_0(\xi - ct) \exp \left( - \int_0^t \tilde{T}(s, \xi - ct + cs) ds \right).$$

En effet, il suffit d'intégrer l'équation  $Y_t = -TY$  (dans le repère initial en  $(t, x)$ ) en

$$Y(t, x) = Y_0(x) \exp \left( - \int_0^t T(s, x) ds \right),$$

puis d'effectuer le changement  $\tilde{Y}(t, \xi) = Y(t, \xi - ct)$ . On effectue ensuite le changement de variables  $s' = \xi - ct + cs$  qui donne

$$\tilde{Y}(t, \xi) = Y_0(\xi - ct) \exp \left( - \frac{1}{c} \int_{\xi-ct}^{\xi} \tilde{T} \left( t + \frac{s' - \xi}{c}, s' \right) ds' \right).$$

Montrons ensuite que  $c > 0$  et  $\tilde{Y} > 0$ . Puisque  $Y_0(x) \sim Y_p(x) > 0$  quand  $x \rightarrow -\infty$ , il existe  $x_0$  tel que  $Y_0(x_0) > 0$ . Ainsi,

$$\tilde{Y}(t, x_0 + ct) = Y_0(x_0) \exp \left( - \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_0+ct} \tilde{T} \left( \frac{s' - x_0}{c}, s' \right) ds' \right).$$

Si on suppose par l'absurde que  $c < 0$  alors puisque  $\tilde{T} > 0$ , on a  $\tilde{Y}(t, x_0 + ct) \geq Y_0(x_0) > 0$  pour tout  $t \geq 0$ , ce qui est par périodicité en contradiction avec la limite  $\tilde{Y}(t, +\infty) = 0$  et ainsi  $c > 0$ . Pour montrer que  $\tilde{Y} > 0$ , il suffit de montrer que  $Y_0 > 0$ . On suppose alors par l'absurde qu'il existe  $x'$  tel que  $Y_0(x') = 0$ . On en déduit que pour tout  $t$

$$\tilde{Y}(t, x' + ct) = Y_0(x') \exp \left( - \frac{1}{c} \int_{x'}^{x'+ct} \tilde{T} \left( \frac{s' - x'}{c}, s' \right) ds' \right) = 0,$$

ce qui contredit que  $\tilde{Y}(t, \xi) \sim Y_p(\xi - ct) > 0$  quand  $\xi \rightarrow -\infty$ . Ainsi,  $\tilde{Y} > 0$ .

Puisque  $\tilde{Y}(t, \xi)$  est  $1/c$ -périodique en temps, on a alors, pour tout  $N$  :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(t, \xi) = \tilde{Y} \left( t + \frac{N}{c}, \xi \right) &= Y_0(\xi - ct - N) \exp \left( - \frac{1}{c} \int_{\xi-ct-N}^{\xi} \tilde{T} \left( t + \frac{N}{c} + \frac{s - \xi}{c}, s \right) ds \right), \\ &= Y_0(\xi - ct - N) \exp \left( - \frac{1}{c} \int_{\xi-ct-N}^{\xi} \tilde{T} \left( t + \frac{s - \xi}{c}, s \right) ds \right), \end{aligned}$$

Il s'agit ensuite de passer à la limite  $N \rightarrow +\infty$ . Pour cela, il faut montrer que l'intégrale précédente est convergente. On écrit pour cela que

$$\int_{\xi-ct-N}^{\xi} \tilde{T} \left( t + \frac{s - \xi}{c}, s \right) ds = -c \ln \left( \frac{\tilde{Y}(t, \xi)}{Y_0(\xi - ct - N)} \right) \leq -c \ln \left( \frac{\tilde{Y}(t, \xi)}{2 \|Y_p\|_{\infty}} \right) =: M > 0,$$

pour  $N$  assez grand puisque alors

$$0 \leq \frac{\tilde{Y}(t, \xi)}{2\|Y_p\|_\infty} \leq \frac{\tilde{Y}(t, \xi)}{Y_0(\xi - ct - N)} \leq 1.$$

Puisque  $\tilde{T} > 0$  et que  $M$  est un majorant pour tout  $N$ , on peut passer à la limite pour obtenir

$$\tilde{Y}(t, \xi) = Y_p(\xi - ct) \exp\left(-\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{T}\left(t + \frac{s - \xi}{c}, s\right) ds\right).$$

On pose alors

$$\tilde{u}(t, \xi) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{T}\left(t + \frac{s - \xi}{c}, s\right) ds = \int_{-\infty}^0 \tilde{T}(t + \sigma, \xi + c\sigma) d\sigma,$$

par le changement de variables  $s = \xi + c\sigma$ . C'est bien une fonction  $1/c$ -périodique en temps.

Afin de dériver par rapport à  $t$  et  $\xi$  sous le signe intégrale, on a besoin de l'estimation suivante :

**Lemme 4.7.1.** *il existe  $C > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $t$  et  $\xi \leq 0$ ,*

$$\tilde{T}(t, \xi) \leq Ce^{\alpha\xi}.$$

*Démonstration.* On procède comme dans la sous-section 4.5.3 en prouvant tout d'abord que si  $T(t, x) = \tilde{T}(t, x + ct)$ , alors

$$\Lambda := \liminf_{t \rightarrow -\infty, x \in [0, 1]} \frac{T_t(t, x)}{T(t, x)}$$

vérifie  $0 < \Lambda < +\infty$ . La preuve de ce résultat est identique à celle du lemme 4.5.5 et repose sur le fait que  $T > 0$  est une onde pulsatoire solution de l'équation

$$T_t - T_{xx} - YT = 0,$$

où  $Y(t, x)$  est bornée avec  $|Y| \leq \|Y_p\|_\infty$  et converge vers  $Y_p(x)$  pour  $t \rightarrow -\infty$ . On en déduit ensuite la décroissance exponentielle en  $\xi$ .  $\square$

La même estimation exponentielle étant valable sur les dérivées de  $\tilde{T}$  par les estimations paraboliques, on peut dériver par rapport à  $t$  et  $\xi$  sous le signe intégrale dans la définition de  $\tilde{u}$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi &= \int_{-\infty}^0 (\tilde{T}_t - \tilde{T}_{\xi\xi} + c\tilde{T}_\xi)(t + \sigma, \xi + c\sigma) d\sigma, \\ &= \int_{-\infty}^0 \tilde{T}(t + \sigma, \xi + c\sigma) \tilde{Y}(t + \sigma, \xi + c\sigma) d\sigma, \\ &= Y_p(\xi - ct) \int_{-\infty}^0 \tilde{T}(t + \sigma, \xi + c\sigma) e^{-\tilde{u}(t + \sigma, \xi + c\sigma)} d\sigma. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Notons que  $\tilde{T} = \tilde{u}_t + c\tilde{u}_\xi$ . En effet, si on pose

$$cV(\xi) := c\tilde{u}(t + \xi/c, \xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{T}(t + s/c, s) ds,$$

on a

$$cV'(\xi) = \tilde{T}(t + \xi/c, \xi) = \tilde{u}_t(t + \xi/c, \xi) + c\tilde{u}_\xi(t + \xi/c, \xi).$$

Nous avons alors

$$\frac{d}{d\sigma}(-e^{-\tilde{u}(t+\sigma, \xi+c\sigma)}) = -(\tilde{u}_t + c\tilde{u}_\xi)(t+\sigma, \xi+c\sigma)e^{-\tilde{u}(t+\sigma, \xi+c\sigma)} = -\tilde{T}(t+\sigma, \xi+c\sigma)e^{-\tilde{u}(t+\sigma, \xi+c\sigma)}.$$

On retrouve finalement l'équation (4.8)

$$\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi = Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}}).$$

Notons que la limite  $\tilde{u}(t, -\infty) = 0$  découle de l'intégrabilité sur  $\mathbb{R}^-$  de l'application

$$s \mapsto \tilde{T}(t + \frac{s - \xi}{c}, s).$$

Pour la limite en  $+\infty$ , on utilise le fait que  $\tilde{T}(0, +\infty) = \langle Y_p \rangle$  d'où  $\tilde{T}(0, +\infty) \geq \langle Y_p \rangle/2$  pour  $\xi \geq M$ . D'après les inégalités de Harnack et la périodicité en temps de  $\tilde{T}$ , il existe  $C > 0$  tel que  $\tilde{T}(t, \xi) \geq \langle Y_p \rangle/2C$  pour tout  $t$  et  $\xi \geq M$ . On a donc pour  $\xi \geq M$ ,

$$\tilde{u}(t, \xi) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\xi} \tilde{T}(t + \frac{s - \xi}{c}, s) ds = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^M \tilde{T}(t + \frac{s - \xi}{c}, s) ds + \frac{1}{c} \int_M^{\xi} \tilde{T}(t + \frac{s - \xi}{c}, s) ds.$$

Puisque la première intégrale est 1-périodique en  $\xi$ , elle est bornée et on en déduit que

$$\tilde{u}(t, \xi) \geq C' + \frac{\langle Y_p \rangle}{2Cc}(\xi - M),$$

d'où

$$\tilde{u}(t, \xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Montrons qu'en fait  $\tilde{u}$  a exactement le comportement linéaire  $\tilde{u}(t, \xi) \sim \frac{\langle Y_p \rangle}{c}\xi$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . D'après la proposition 4.5.3, il suffit de montrer que  $\tilde{u}$  a une croissance sous exponentielle. On utilise cette fois qu'il existe  $M$  tel que  $\tilde{T}(0, \xi) \leq 2\langle Y_p \rangle$  pour  $\xi \geq M$ . Puisque  $\tilde{T}$  est périodique en  $t$ , l'inégalité de Harnack donne l'existence d'une constante  $C$  telle que  $\tilde{T}(t, \xi) \leq C\langle Y_p \rangle$  pour tout  $t$  et  $\xi \geq M$ . Ainsi,

$$\tilde{u}(t, \xi) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^M \tilde{T}(t + \frac{s - \xi}{c}, s) ds + \frac{1}{c} \int_M^{\xi} \tilde{T}(t + \frac{s - \xi}{c}, s) ds \leq C' + \frac{C\langle Y_p \rangle}{c}(\xi - M),$$

et  $\tilde{u}$  a une croissance sous exponentielle et donc linéaire.

(i) *Passage de l'équation au système.* Considérons la solution  $\tilde{u}$  de (4.9) construite au théorème 4.2.3 et montrons que le couple

$$\tilde{T} = \tilde{u}_t + c\tilde{u}_\xi, \quad \tilde{Y}(t, \xi) = Y_p(\xi - ct)e^{-\tilde{u}(t, \xi)}$$

forme une solution  $(\tilde{T}, \tilde{Y})$  du système (4.4). Notons tout d'abord que  $\tilde{T}$  et  $\tilde{Y}$  sont  $1/c$ -périodique en  $t$  puisque  $\tilde{u}$  l'est et que  $\tilde{T}$  et  $\tilde{Y}$  sont strictement positives par construction. Ensuite, si on applique l'opérateur  $\partial_t + c\partial_\xi$  à l'équation (4.9), on obtient

$$(\partial_t + c\partial_\xi)(\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\xi\xi} + c\tilde{u}_\xi) = (\partial_t + c\partial_\xi)(Y_p(\xi - ct)(1 - e^{-\tilde{u}})),$$

ce qui donne

$$\tilde{T}_t - \tilde{T}_{\xi\xi} + c\tilde{T}_\xi = -(\tilde{u}_t + c\tilde{u}_\xi)Y_p e^{-\tilde{u}} = \tilde{T}\tilde{Y}.$$

On obtient également la seconde équation

$$\tilde{Y}_t + c\tilde{Y}_\xi = -(\tilde{u}_t + c\tilde{u}_\xi)Y_p e^{-\tilde{u}} = -\tilde{T}\tilde{Y}.$$

Il reste à vérifier les conditions aux limites. Pour  $\tilde{Y}$ , on a d'une part

$$|\tilde{Y}(t, \xi)| \leq \|Y_p\|_\infty e^{-\tilde{u}(t, \xi)} \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} 0$$

puisque  $\tilde{u}(t, +\infty) = +\infty$  et d'autre part

$$\tilde{Y}(t, \xi) - Y_p(\xi - ct) = Y_p(\xi - ct)(e^{-\tilde{u}(t, \xi)} - 1) \leq \|Y_p\|_\infty (e^{-\tilde{u}(t, \xi)} - 1) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} 0$$

car  $\tilde{u}(t, -\infty) = 0$ . Concernant  $\tilde{T}$ , on a tout d'abord  $\tilde{T}(t, -\infty) = 0$ . En effet,  $\tilde{u}(t, -\infty) = 0$  donc d'après les estimations paraboliques  $|\tilde{u}_t(t, \xi)|, |\tilde{u}_\xi(t, \xi)| \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow -\infty$ . Il reste à montrer que pour tout  $t$ ,  $\tilde{T}(t, \xi) = (\tilde{u}_t + c\tilde{u}_\xi)(t, \xi) \rightarrow \langle Y_p \rangle$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . On écrit pour cela  $\tilde{u}$  sous la forme

$$\tilde{u}(t, \xi) = \alpha + \frac{\langle Y_p \rangle}{c}\xi + Z_p(\xi - ct) + v(t, \xi).$$

La fonction  $v(t, \xi)$  vérifie alors l'équation

$$v_t - v_{\xi\xi} + cv_\xi = -Y_p(\xi - ct)e^{-\tilde{u}},$$

ainsi que l'estimation  $v(t, \xi) = O(e^{-\beta\xi})$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$  (cf proposition 4.5.3). Par les estimations paraboliques, on en déduit que  $|v_t(t, \xi)|, |v_\xi(t, \xi)| \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t + c\tilde{u}_\xi &= (-cZ'_p(\xi - ct) + v_t) + c(\langle Y_p \rangle + Z'_p(\xi - ct) + v_\xi), \\ &= \langle Y_p \rangle + v_t + cv_\xi \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} \langle Y_p \rangle. \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration de la proposition 4.2.4.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] D. G. ARONSON AND H. F. WEINBERGER, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, in Nonlinear Partial Differential Equations and Related Topics, vol. 446 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1975.
- [2] ———, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. in Math., 30 (1978), pp. 33–76.
- [3] H. BERESTYCKI, *The influence of advection on the propagation of fronts in reaction-diffusion equations*, in Nonlinear PDE's in Condensed Matter and Reactive Flows, vol. 569 of NATO Science series C, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [4] H. BERESTYCKI, P. CONSTANTIN, AND L. RYZHIK, *Non-planar fronts in Boussinesq reactive flows*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 23 (2006), pp. 407–437.
- [5] H. BERESTYCKI AND F. HAMEL, *Generalized travelling waves for reaction-diffusion equations*, in Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations. In honor of H. Brezis., Contemp. Math., Amer. Math. Soc., à paraître.
- [6] ———, *Front propagation in periodic excitable media*, Comm. Pure Appl. Math., 55 (2002), pp. 949–1032.
- [7] H. BERESTYCKI AND F. HAMEL, *Gradient estimates for elliptic regularizations of semilinear parabolic and degenerate elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations, 30 (2005), pp. 139–156.
- [8] H. BERESTYCKI, F. HAMEL, A. KISELEV, AND L. RYZHIK, *Quenching and propagation in KPP reaction-diffusion equations with a heat loss*, Arch. Ration. Mech. Anal., 178 (2005), pp. 57–80.
- [9] H. BERESTYCKI, F. HAMEL, AND N. NADIRASHVILI, *The speed of propagation for KPP type problems. I. Periodic framework*, J. Eur. Math. Soc., 7 (2005), pp. 173–213.
- [10] H. BERESTYCKI, F. HAMEL, AND L. ROQUES, *Analysis of the periodically fragmented environment model. I. Species persistence*, J. Math. Biol., 51 (2005), pp. 75–113.
- [11] H. BERESTYCKI, F. HAMEL, AND L. ROQUES, *Analysis of the periodically fragmented environment model. II. Biological invasions and pulsating travelling fronts*, J. Math. Pures Appl. (9), 84 (2005), pp. 1101–1146.
- [12] H. BERESTYCKI AND B. LARROUTUROU, *Quelques aspects mathématiques de la propagation des flammes prémélangées*, in Nonlinear partial differential equations

- and their applications, Collège de France Seminar, 10, Pitman-Longman, Harlow, 1991.
- [13] H. BERESTYCKI, B. LARROUTUROU, AND P.-L. LIONS, *Multi-dimensional travelling-wave solutions of a flame propagation model*, Arch. Rational Mech. Anal., 111 (1990), pp. 33–49.
- [14] H. BERESTYCKI, B. LARROUTUROU, AND J.-M. ROQUEJOFFRE, *Stability of travelling fronts in a model for flame propagation. I. Linear analysis*, Arch. Rational Mech. Anal., 117 (1992), pp. 97–117.
- [15] H. BERESTYCKI, B. NICOLAENKO, AND B. SCHEURER, *Traveling wave solutions to combustion models and their singular limits*, SIAM J. Math. Anal., 16 (1985), pp. 1207–1242.
- [16] H. BERESTYCKI AND L. NIRENBERG, *Travelling fronts in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 9 (1992), pp. 497–572.
- [17] M. BRAMSON, *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves*, Mem. Amer. Math. Soc., 44 (1983).
- [18] E. A. CODDINGTON AND N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [19] P. COLLET AND J.-P. ECKMANN, *Space-time behaviour in problems of hydrodynamic type : a case study*, Nonlinearity, 5 (1992), pp. 1265–1302.
- [20] C. CONCA AND M. VANNINATHAN, *Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition*, SIAM J. Appl. Math., 57 (1997), pp. 1639–1659.
- [21] P. CONSTANTIN, K. DOMELEVO, J.-M. ROQUEJOFFRE, AND L. RYZHIK, *Existence of pulsating waves in a model of flames in sprays*, J. Eur. Math. Soc., 8 (2006), pp. 555–584.
- [22] P. CONSTANTIN, A. KISELEV, AND L. RYZHIK, *Fronts in reactive convection : bounds, stability, and instability*, Comm. Pure Appl. Math., 56 (2003), pp. 1781–1804.
- [23] P. CONSTANTIN, J.-M. ROQUEJOFFRE, L. RYZHIK, AND N. VLADIMIROVA, *Propagation and quenching in a reactive burgers-boussinesq system*, preprint, (2007).
- [24] A. DOELMAN, B. SANDSTEDTE, A. SCHEEL, AND G. SCHNEIDER, *Propagation of hexagonal patterns near onset*, European J. Appl. Math., 14 (2003), pp. 85–110.
- [25] U. EBERT AND W. VAN SAARLOOS, *Front propagation into unstable states : universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts*, Phys. D, 146 (2000), pp. 1–99.
- [26] M. EL SMAILY, *Pulsating travelling fronts : Asymptotics and homogenization regimes*, preprint.
- [27] P. C. FIFE AND J. B. MCLEOD, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Ration. Mech. Anal., 65 (1977), pp. 335–361.
- [28] R. FISHER, *The advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics, 7 (1937), pp. 335–369.

- [29] M. FREIDLIN, *On wavefront propagation in periodic media*, in Stochastic analysis and applications, Adv. Probab. Related Topics, 7, Dekker, New York, 1984, pp. 147–166.
- [30] ———, *Reaction-diffusion in incompressible fluid : asymptotic problems*, J. Differential Equations, 179 (2002), pp. 44–96.
- [31] ———, *Reaction-convection in incompressible 3D-fluid : a homogenization problem*, J. Stat. Phys., 122 (2006), pp. 333–349.
- [32] G. FRÉJACQUES, *Ondes progressives pour des équations de réaction-diffusion avec des coefficients périodiques en temps*, PhD thesis, Université Aix-Marseille 3, 2005.
- [33] T. GALLAY, *Local stability of critical fronts in nonlinear parabolic partial differential equations*, Nonlinearity, 7 (1994), pp. 741–764.
- [34] T. GALLAY AND E. RISLER, *A variational proof of global stability for bistable travelling waves*, Differential and Integral Equations, 20 (2007), pp. 901–926.
- [35] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1983.
- [36] M. D. GROVES AND G. SCHNEIDER, *Modulating pulse solutions to quadratic quasilinear wave equations over exponentially long length scales*, Comm. Math. Phys., (à paraître).
- [37] ———, *Modulating pulse solutions for quasilinear wave equations*, J. Differential Equations, 219 (2005), pp. 221–258.
- [38] J. GÄRTNER AND M. FREIDLIN, *On the propagation of concentration waves in periodic and random media*, Sov. Math. Dokl., 20 (1979), pp. 1282–1286.
- [39] F. HAMEL, *Qualitative properties of monostable pulsating fronts : exponential decay and monotonicity*, J. Math. Pures Appl., à paraître.
- [40] F. HAMEL AND N. NADIRASHVILI, *Travelling fronts and entire solutions of the Fisher-KPP equation in  $\mathbb{R}^N$* , Arch. Ration. Mech. Anal., 157 (2001), pp. 91–163.
- [41] M. HARAGUS AND A. SCHEEL, *Almost planar waves in anisotropic media*, Comm. Partial Differential Equations, 31 (2006), pp. 791–815.
- [42] ———, *Corner defects in almost planar interface propagation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 23 (2006), pp. 283–329.
- [43] ———, *A bifurcation approach to non-planar traveling waves in reaction-diffusion systems*, GAMM-Mitt., 30 (2007), pp. 75–95.
- [44] M. HARAGUS AND G. SCHNEIDER, *Bifurcating fronts for the Taylor-Couette problem in infinite cylinders*, Z. angew. Math. Phys., 50 (1999), pp. 120–151.
- [45] D. HENRY, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, vol. 840 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [46] P. HOWARD, *Pointwise estimates on the Green's function for a scalar linear convection-diffusion equation*, J. Differential Equations, 155 (1999), pp. 327–367.
- [47] J. H. HUBBARD AND B. H. WEST, *Differential equations : a dynamical systems approach. Part I : ordinary differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [48] W. HUDSON AND B. ZINNER, *Existence of traveling waves for reaction diffusion equations of Fisher type in periodic media*, in Boundary value problems for functional-differential equations, World Scientific, 1995, pp. 187–199.

- [49] W. E. JOHNSON AND W. NACHBAR, *Laminar flame theory and the steady, linear burning of a monopropellant*, Arch. Rational Mech. Anal., 12 (1963), pp. 58–92.
- [50] J. I. KANEL', *Stabilization of solutions of the Cauchy problem for equations encountered in combustion theory*, Mat. Sb. (N.S.), 59 (101) (1962), pp. 245–288.
- [51] ———, *Stabilization of the solutions of the equations of combustion theory with finite initial functions*, Mat. Sb. (N.S.), 65 (107) (1964), pp. 398–413.
- [52] K. KIRCHGÄSSNER, *On the nonlinear dynamics of travelling fronts*, J. Differential Equations, 96 (1992), pp. 256–278.
- [53] A. KOLMOGOROV, I. PETROVSKY, AND N. PISKUNOV, *A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem*, Bjul. Moskovskogo Gos. Univ., 17 (1937), pp. 1–26.
- [54] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, AND N. N. URALČEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [55] K.-S. LAU, *On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov, Petrovsky, and Piskunov*, J. Differential Equations, 59 (1985), pp. 44–70.
- [56] E. LOGAK, *Mathematical analysis of a condensed phase combustion model without ignition temperature*, Nonlinear Anal., 28 (1997), pp. 1–38.
- [57] A. LUNARDI, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 16, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [58] J.-F. MALLORDY AND J.-M. ROQUEJOFFRE, *A parabolic equation of the KPP type in higher dimensions*, SIAM J. Math. Anal., 26 (1995), pp. 1–20.
- [59] B. J. MATKOWSKY AND G. I. SIVASHINSKY, *Propagation of a pulsating reaction front in solid fuel combustion*, SIAM J. Appl. Math., 35 (1978), pp. 465–478.
- [60] R. MONNEAU AND G. S. WEISS, *Pulsating traveling waves in the singular limit of a reaction-diffusion system in solid combustion*, soumis, (2007).
- [61] J. D. MURRAY, *Mathematical biology*, Springer-Verlag, 1989.
- [62] J. NOLEN AND J. XIN, *Existence of KPP type fronts in space-time periodic shear flows and a study of minimal speeds based on variational principle*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 13 (2005), pp. 1217–1234.
- [63] ———, *A variational principle for KPP front speeds in temporally random shear flows*, Comm. Math. Phys., 269 (2007), pp. 493–532.
- [64] J. R. NORRIS, *Long-time behaviour of heat flow : global estimates and exact asymptotics*, Arch. Rational Mech. Anal., 140 (1997), pp. 161–195.
- [65] M. H. PROTTER AND H. F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [66] M. REED AND B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1978.
- [67] ———, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York, 1978.

- [68] E. RISLER, *Global convergence towards travelling fronts in nonlinear parabolic systems with a gradient structure*, preprint.
- [69] J.-M. ROQUEJOFFRE, *Stability of travelling fronts in a model for flame propagation. II. Nonlinear stability*, Arch. Rational Mech. Anal., 117 (1992), pp. 119–153.
- [70] —, *Eventual monotonicity and convergence to travelling fronts for the solutions of parabolic equations in cylinders*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 14 (1997), pp. 499–552.
- [71] J.-M. ROQUEJOFFRE AND V. ROUSSIER, *Nontrivial large-time behaviour in bistable reaction-diffusion equations*, preprint.
- [72] B. SANDSTEDTE AND A. SCHEEL, *On the structure of spectra of modulated travelling waves*, Math. Nachr., 232 (2001), pp. 39–93.
- [73] —, *Defects in oscillatory media : toward a classification*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 3 (2004), pp. 1–68.
- [74] —, *Period-doubling of spiral waves and defects*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 6 (2007), pp. 494–547.
- [75] D.H. SATTINGER, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., 21 (1972), pp. 979–1000.
- [76] —, *On the stability of waves of nonlinear parabolic systems*, Advances in Math., 22 (1976), pp. 312–355.
- [77] —, *Weighted norms for the stability of traveling waves*, J. Differential Equations, 25 (1977), pp. 130–144.
- [78] A. SCHEEL, *Coarsening fronts*, Arch. Ration. Mech. Anal., 181 (2006), pp. 505–534.
- [79] N. SHIGESADA AND K. KAWASAKI, *Biological Invasions : Theory and Practice*, Oxford Series in Ecology and Evolution, Oxford : Oxford UP, Providence, RI, 1997.
- [80] N. SHIGESADA, K. KAWASAKI, AND E. TERAMOTO, *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*, Theoret. Population Biol., 30 (1986), pp. 143–160.
- [81] J. SMOLLER, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, New York, second ed., 1994.
- [82] H. B. STEWART, *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., 259 (1980), pp. 299–310.
- [83] R. TEXIER-PICARD AND V. A. VOLPERT, *Reaction-diffusion-convection problems in unbounded cylinders*, Rev. Mat. Complut., 16 (2003), pp. 233–276.
- [84] K. UCHIYAMA, *The behavior of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time*, J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978), pp. 453–508.
- [85] S. VAKULENKO AND V. VOLPERT, *New effects in propagation of waves for reaction-diffusion systems*, Asymptot. Anal., 38 (2004), pp. 11–33.
- [86] W. VAN SAARLOOS, *Front propagation into unstable states : marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection*, Phys. Rev. A (3), 37 (1988), pp. 211–229.
- [87] —, *Front propagation into unstable states. II. Linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence*, Phys. Rev. A (3), 39 (1989), pp. 6367–6390.

- [88] ———, *Front propagation into unstable states*, Physics Reports, 386 (2003), pp. 29–222.
- [89] J. L. VÁZQUEZ AND E. ZUAZUA, *Complexity of large time behaviour of evolution equations with bounded data*, Chinese Ann. Math. Ser. B, 23 (2002), pp. 293–310. Dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions.
- [90] A. I. VOLPERT, V. A. VOLPERT, AND V. A. VOLPERT, *Traveling wave solutions of parabolic systems*, vol. 140 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [91] H. F. WEINBERGER, *On spreading speeds and traveling waves for growth and migration models in a periodic habitat*, J. Math. Biol., 45 (2002), pp. 511–548.
- [92] F. WILLIAMS, *Combustion Theory*, Addison-Wesley, Reading MA, Providence, RI, 1983.
- [93] J. X. XIN, *Existence and stability of traveling waves in periodic media governed by a bistable nonlinearity*, J. Dynam. Differential Equations, 3 (1991), pp. 541–573.
- [94] ———, *Existence and uniqueness of travelling waves in a reaction-diffusion equation with combustion nonlinearity*, Indiana Univ. Math. J., 40 (1991), pp. 985–1008.
- [95] ———, *Existence of planar flame fronts in convective-diffusive periodic media*, Arch. Rational Mech. Anal., 121 (1992), pp. 205–233.
- [96] ———, *Front propagation in heterogeneous media*, SIAM Rev., 42 (2000), pp. 161–230 (electronic).
- [97] J. ZELDOVICH AND D. FRANK-KAMENETSKII, *A theory of thermal propagation of flame*, Acta Physicochimica URSS, 9 (1938), pp. 341–350.
- [98] K. ZUMBRUN AND P. HOWARD, *Pointwise semigroup methods and stability of viscous shock waves*, Indiana Univ. Math. J., 47 (1998), pp. 741–871.