



HAL
open science

PROPRIETES STATIQUES ET DYNAMIQUES D'UN CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN DANS UN POTENTIEL ALEATOIRE

David Clément

► **To cite this version:**

David Clément. PROPRIETES STATIQUES ET DYNAMIQUES D'UN CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN DANS UN POTENTIEL ALEATOIRE. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : . tel-00262463v1

HAL Id: tel-00262463

<https://theses.hal.science/tel-00262463v1>

Submitted on 11 Mar 2008 (v1), last revised 29 Apr 2008 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE CHARLES FABRY
INSTITUT D'OPTIQUE GRADUATE SCHOOL

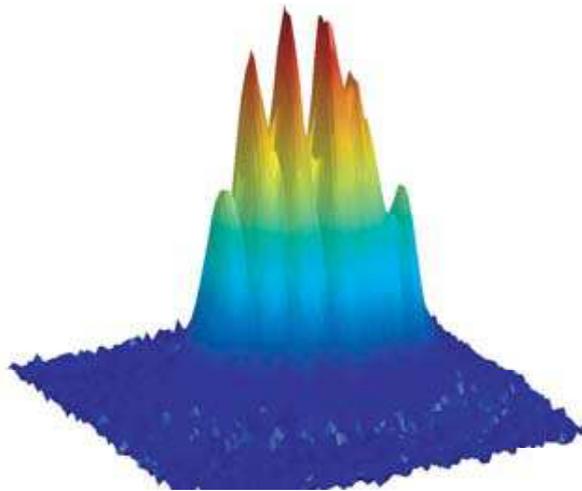
THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

présentée par
David Clément

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de la thèse :

PROPRIÉTÉS STATIQUES ET
DYNAMIQUES D'UN CONDENSAT
DE BOSE-EINSTEIN DANS
UN POTENTIEL ALÉATOIRE



Soutenue le 15 novembre 2007 devant le jury composé de :

M. A. ASPECT	Directeur de thèse
M. P. BOUYER	Membre invité
M. W. ERTMER	Examineur
M. C. FABRE	Président
M. M. INGUSCIO	Rapporteur
M. R. KAISER	Rapporteur
M. B. van TIGGELEN	Examineur

Remerciements

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit ont été effectués au Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique sur le désormais ancien site d'Orsay, le laboratoire s'étant déplacé à Palaiseau à la fin de mon doctorat. Je remercie son directeur, Pierre CHAVEL, de m'y avoir accueilli et, plus encore, de sa disponibilité pour me faire partager sa connaissance sur les champs de tavelures.

Je remercie Alain ASPECT de m'avoir accueilli dans son groupe, le groupe d'Optique Atomique, et de m'avoir toujours soutenu lors de ces trois années de thèse. Je pense notamment à ses venues dans ma salle de manip du "vieux" bâtiment 503, après le départ de la plupart des membres du groupe, pour discuter des problèmes expérimentaux que je rencontrais alors. Au cours de ces discussions et de bien d'autres, j'ai eu le plaisir d'apprécier la culture et les réflexions scientifiques d'Alain dont j'ai essayé m'enrichir. Je remercie Philippe BOUYER de m'avoir proposé ce sujet de thèse original sur le désordre, lançant le dispositif expérimental "BEC 1" dans une nouvelle direction lors de mon arrivée au labo. J'ai beaucoup apprécié cette capacité à "s'attaquer" à de nouveaux problèmes et à toujours faire preuve d'enthousiasme pour continuer à avancer, même après une inondation de la manip ou une remise à l'air de la cellule non contrôlée... Je me souviendrai des nombreux conseils de Philippe sur la manip comme sur les différentes activités d'un chercheur au quotidien. Je remercie Laurent SANCHEZ-PALENCIA qui a encadré les travaux théoriques menés en lien avec les expériences. Nos discussions quasi-quotidiennes m'ont permis de beaucoup progresser dans la compréhension de la physique des condensats de Bose-Einstein et sa lecture attentive de mon mémoire m'a permis de l'améliorer.

Je remercie Massimo INGUSCIO et Robin KAISER d'avoir rapporté mon travail de thèse et discuter de ce dernier à plusieurs occasions. Je remercie également Claude FABRE, Bart van TIGGELEN et Wolfgang ERTMER d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Malheureusement, suite à des difficultés dans les transports en commun ce dernier n'a pas pu quitter l'Allemagne et être présent le jour de ma soutenance à Palaiseau. Je sais gré à tous les membres du jury pour les remarques pertinentes qui m'ont été faites.

Les résultats scientifiques présentés dans ce mémoire sur les condensats gazeux désordonnés sont le fruit du travail d'une équipe et de collaborations. A mon arrivée dans le groupe d'Optique Atomique, l'équipe BEC1 était formée d'Andrès VARON, Mathilde HUGBART et Jocelyn RETTER, encadrés par Philippe Bouyer. Je leur suis très reconnaissant pour m'avoir initié à la création expérimentale de condensats gazeux et pour m'avoir donné toutes les astuces permettant de "dompter" la manip "BEC1". Je garde de très bons souvenirs des heures passées ensemble à batailler sur "BEC1" et de nos diverses discussions lors des pauses-café dont nous avions alors besoin. Les expériences sur l'expansion d'un condensat dans le désordre que nous avons réalisées sont issues de discussions avec Dima GANGARD et Gora SHLYAPNIKOV que je remercie chaleureusement pour nous avoir fait partagé leur intuition physique. Après les départs successifs de Mathilde, Andrès et Jocelyn, les journées de travail sur la manip

BEC1 sont devenues de plus en plus longues. Pierre LUGAN est ensuite arrivé dans le groupe mais l'attraction pour la physique théorique et le mauvais état de fonctionnement de "BEC1" l'ont détourné de la physique expérimentale. Il a cependant toujours fait preuve d'un vif intérêt pour mes déboires expérimentaux et nos nombreuses discussions, à la fois sur l'expérience et sur ses travaux théoriques, ont été très enrichissantes. A cette période, des travaux théoriques menés par Laurent Sanchez-Palencia m'ont amené à rencontrer et à collaborer avec Macjek LEWENSTEIN. Je garde en particulier un excellent souvenir de cette conférence à Cuenca où nos discussions de travail sur les bancs de l'université ont été pleines d'humour. A la fin de mon doctorat, j'ai participé aux premiers pas de la manip "Pince" dans le monde du désordre. Je remercie Juliette BILLY, Zangchu ZUO et Vincent JOSSE qui travaillent sur cette expérience pour m'avoir laissé toucher à leur manip et pour leur enthousiasme à entrer dans cette voie qui avait pour conséquence un déménagement retardé vers le nouveau bâtiment...

Le travail expérimental qui est présenté dans ce mémoire n'aurait pu être réalisé sans l'aide de plusieurs composantes du laboratoire. En premier lieu, je tiens à remercier nos électroniciens, André VILLING et Frédéric MORON. Frédéric a en particulier fait l'objet d'incessantes demandes de ma part pour réparer tout ce que je pouvais briser et a contribué à la réalisation de l'ouverture du piège magnétique longitudinal. Ensuite, je remercie les membres de l'ATELIER d'OPTIQUE qui m'ont prodigué de très bons conseils techniques et qui ont toujours été capables de réaliser les travaux optiques relatifs aux tavelures dont j'avais besoin, aussi bizarres soient-ils, les membres de l'ATELIER de MECANIQUE qui ont également fabriqué de nombreuses pièces et, enfin, Jean-Luc, Eric et Jacky du service technique du Laboratoire Charles Fabry qui ont toujours été disponibles pour répondre à nos attentes dans la bonne humeur.

Enfin, je remercie tous les membres du groupe d'Optique Atomique qui m'ont rendu chaleureuse l'atmosphère de travail et avec qui j'ai partagé de nombreuses pauses café à discuter sur nos difficultés respectives : Aurélien, JB, Pierre, Laurent, Philippe, William, Valentina, Isabelle, Denis, Juliette, Vincent, Gael, Rob, JF, JP, David, Karim, etc. Dans le cadre de mon monitorat j'ai eu l'opportunité d'enseigner à SupOptique et je remercie François, Pierre, Nicolas, Denis, Marc, François, Fabienne et Marc pour avoir partagé cette expérience riche... d'enseignements ! Je remercie également tous les membres du laboratoire Charles Fabry qui ont toujours été agréables à mon égard.

Table des matières

Introduction	9
1 Onde de matière et désordre : une combinaison prometteuse	13
1.1 Effets ondulatoires en présence de désordre	13
1.1.1 Interférences et désordre, toute une h(H)istoire...	14
1.1.2 Localisation d'onde dans le désordre	15
1.1.2.1 Diffusion d'onde dans un milieu désordonné	15
1.1.2.2 Expériences de diffusion lumineuse dans des milieux aléatoires .	19
1.1.2.3 Effets de localisation dans les conducteurs électroniques	20
1.1.3 Phases quantiques et transition métal-isolant induites par le désordre .	21
1.1.3.1 Une image schématique des différents régimes	21
1.1.3.2 Phases quantiques et phénomènes "exotiques"	23
1.2 Et les atomes froids dans tout ça ?	25
1.2.1 Un outil d'investigation formidable!!	25
1.2.2 Créer du désordre : différentes techniques disponibles ou à venir... .	26
1.2.3 Observations possibles d'effets induits par le désordre avec les atomes froids ?	28
1.3 Désordre, potentiel aléatoire : définitions et propriétés statistiques	30
1.3.1 Un processus statistique aléatoire	30
1.3.2 Propriétés statistiques et principe ergodique	31
1.3.3 Une caractérisation précise du désordre nécessaire	35
1.4 Conclusion	35
2 Les tavelures : un potentiel optique aléatoire pour les atomes	37
2.1 La lumière comme potentiel optique vu par les atomes	38
2.2 Les tavelures, un champ d'intensité lumineuse aléatoire	40
2.2.1 Interférences lumineuses et champ de tavelures	40
2.2.2 Amplitude des tavelures	43
2.2.3 Taille des grains de tavelures et fonction d'auto-corrélation	45
2.2.4 Champ de tavelures intégré	49
2.3 Moments d'un potentiel aléatoire et auto-moyennage	52
2.3.1 Ergodicité spatiale	52
2.3.2 Le cas des deux premiers moments, $m_1(d)$ et $m_2(d)$	53
2.3.3 Moments d'ordre supérieur	56
2.3.4 Condition pour un potentiel aléatoire auto-moyennant	59
2.4 Mise en place expérimentale et calibration du potentiel optique aléatoire	60
2.4.1 Un potentiel aléatoire contrôlable pour les atomes froids	60

2.4.2	Calibration de l'amplitude du potentiel par spectroscopie micro-onde . . .	64
2.4.3	Calibration des variations spatiales du potentiel aléatoire	71
2.5	Conclusion	73

3 Production et caractérisation d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire **75**

3.1	Diagramme d'états d'un gaz de Bose dans un potentiel aléatoire	76
3.2	Généralités sur les condensats de Bose-Einstein	78
3.2.1	Condensation de Bose-Einstein et équation de Gross-Pitaevskii	78
3.2.2	Le régime de Thomas-Fermi	79
3.2.3	BEC allongés et fluctuations de phase	81
3.3	Dispositif expérimental pour la réalisation de condensats d'atomes	82
3.3.1	Les étapes vers de la dégénérescence quantique	82
3.3.2	Notre piège magnétique	85
3.3.3	Observation et caractérisation des condensats après un temps de vol . . .	87
3.3.3.1	Lois d'échelles dans un piège dépendant du temps	87
3.3.3.2	Système d'imagerie par absorption	89
3.3.3.3	Analyse des images	90
3.3.4	Condensats de Bose-Einstein désordonnés	92
3.3.4.1	Production et observation de condensats désordonnés	92
3.3.4.2	Régime de Thomas-Fermi et potentiel aléatoire lissé	93
3.3.4.3	Tailles et potentiel chimique des condensats désordonnés	95
3.4	Développement de fluctuations de densité en temps de vol induit par le désordre	98
3.4.1	Fluctuations de densité dans un condensat allongé non désordonné	99
3.4.1.1	Définition de l'amplitude des fluctuations de densité	99
3.4.1.2	Mesure des fluctuations de densité sans désordre	100
3.4.2	Etude expérimentale des fluctuations de densité en présence de désordre .	103
3.4.2.1	Dépendance avec l'amplitude du potentiel aléatoire	104
3.4.2.2	Calculs numériques de l'expansion à 3D	105
3.4.2.3	Evolution temporelle des fluctuations de densité	110
3.4.2.4	Moyenne sur différentes réalisations du désordre	111
3.4.3	Description théorique de l'évolution des fluctuations de densité et de phase	113
3.4.3.1	Dynamique en temps de vol en représentation densité/phase . . .	113
3.4.3.2	Modèle physique de l'expansion libre en deux étapes	117
3.5	Conclusion	120

4 Transport et localisation d'un condensat avec interactions dans un potentiel aléatoire **123**

4.1	Induire le transport de l'onde de matière	124
4.1.1	Ouverture du piège magnétique : transport induit par les interactions . .	125
4.1.1.1	Réalisation d'un guide magnétique 1D	125
4.1.1.2	Observation de l'expansion en l'absence de potentiel aléatoire . .	127
4.1.1.3	Distribution d'impulsion d'un condensat en expansion	131
4.1.2	Déplacement du centre de masse dans le guide 1D	133
4.2	Suppression du transport par des modulations uniques du potentiel aléatoire . .	134
4.2.1	Observation de la localisation du condensat	134

4.2.1.1	Evolution de la taille RMS L_{rms}	136
4.2.1.2	Inhibition du mouvement du centre de masse	139
4.2.2	Un régime de piégeage par des barrières <i>uniques</i> du potentiel aléatoire	140
4.2.2.1	Scénario de piégeage induit par le désordre	140
4.2.2.2	Comparaison résultats expérimentaux/modèle	145
4.2.2.3	Expansion dans un potentiel quasi-1D	148
4.2.3	Piégeage dans le désordre et piégeage dans un réseau optique	151
4.3	Un autre régime de piégeage dans le désordre : la localisation d'Anderson	153
4.3.1	Localisation d'onde au sens d'Anderson et exposant de Lyapunov	154
4.3.2	Formalisme de phase pour le calcul de l'exposant de Lyapunov	157
4.3.3	Localisation d'un condensat 1D en expansion	161
4.3.3.1	Un modèle d'expansion en deux étapes	162
4.3.3.2	Fonction d'onde du condensat dans l'espace réel	163
4.3.3.3	Discussion sur la réalisation expérimentale	167
4.4	Conclusion	168
5	Modes collectifs de basse énergie dans un condensat désordonné	169
5.1	Modes d'oscillation collectifs dans un potentiel aléatoire	171
5.1.1	Modes dipolaire et quadrupolaire d'un condensat	171
5.1.1.1	Fréquences propres en l'absence de potentiel aléatoire	171
5.1.1.2	Création des modes collectifs sur notre expérience	172
5.1.2	Décalage des fréquences propres dans un potentiel aléatoire	175
5.1.2.1	Mesures expérimentales	175
5.1.2.2	Calcul des fréquences propres avec la règle des sommes	178
5.1.2.3	Décalage en fréquence et système auto-moyennant	180
5.1.3	Amortissement du mode dipolaire en présence de désordre	181
5.1.3.1	Observations expérimentales	183
5.1.3.2	Taux d'amortissement	184
5.1.3.3	Quelques pistes d'interprétations	185
5.2	Vitesse du son dans un condensat désordonné	188
5.2.1	Superfluidité et vitesse du son dans un condensat de Bose-Einstein	188
5.2.1.1	Equations hydrodynamiques et vitesse du son	188
5.2.1.2	Vitesse critique d'un condensat superfluide	189
5.2.2	Création d'un pic de densité	190
5.2.2.1	Un obstacle pour le condensat	190
5.2.2.2	Observation de la propagation du pic de densité	192
5.2.2.3	Spectroscopie de Bragg d'un condensat excité	193
5.2.3	Mesures de la vitesse du son dans un condensat de Bose-Einstein	196
5.2.3.1	Mesure expérimentale dans un condensat non-désordonné	196
5.2.3.2	Formation d'une onde de choc ?	198
5.2.3.3	Vitesse du son en présence d'un potentiel aléatoire	199
5.3	Conclusion	203

A	Atome de Rubidium et lasers	209
A.1	L'atome de rubidium 87	209
A.2	Les lasers de "BEC1"	210
	Bibliographie	213

Introduction

Dans la nature les systèmes parfaitement ordonnés et sans défauts n'existent pas. Lorsqu'un système physique est observé à une échelle suffisamment petite, il présente toujours un caractère désordonné (structures cristallines imparfaites, présence d'impuretés microscopiques, surfaces fractales, etc...). Cependant, dans de nombreuses situations, la description macroscopique d'un tel système sans prise en compte du désordre conduit à de bons résultats : dans ces situations, les effets induits par le désordre au niveau microscopique sont sans conséquence macroscopique. Ce n'est pourtant pas toujours le cas. Ainsi dans les systèmes présentant une cohérence à longue portée ("macroscopique"), des effets induit par la présence de désordre persistent après une moyenne d'ensemble [1]. Ils donnent lieu à des phénomènes intéressants et souvent non-intuitifs comme la localisation d'ondes [2] ou l'apparition de nouvelles phases quantiques [3]. Ce domaine de la physique, situé à l'interface entre la physique microscopique (détails du désordre) et la physique macroscopique (cohérence à longue portée), est celui de la physique mésoscopique.

Ces effets cohérents concernent, entre autres, la localisation d'onde électronique ou de spin dans les solides et la transition métal-isolant induite par le désordre. Ainsi, en physique de la matière condensée, de nombreux travaux (initiés notamment par P. W. Anderson [4]) ont abordés ces questions depuis plusieurs dizaines d'années. Cela étant, le désordre dans les conducteurs électroniques (impuretés, défauts de la maille cristalline, etc) est inhérent au système et ne peut être complètement contrôlé. De plus, la présence d'interactions fortes complique l'analyse théorique des phénomènes envisagés. Aujourd'hui encore, ces questions font l'objet de débats que les expériences, délicates dans ces systèmes fortement corrélés, ne peuvent trancher sans ambiguïté. En particulier, l'influence des interactions sur le phénomène de localisation d'Anderson ou la transition métal-isolant induite par le désordre sont des sujets encore ouverts.

Des phénomènes de localisation dans le désordre existent également pour les ondes sans interaction que sont les ondes électromagnétiques [5–11] et acoustiques [12]. Leur observation à partir des années 1980 a permis une meilleure compréhension des effets cohérents qui apparaissent lors de la diffusion multiple d'une onde dans un milieu aléatoire. Enfin, les propriétés de cohérence à longue portée de l'Hélium superfluide peuvent être altérées par la présence de désordre, conduisant éventuellement à une perte du caractère superfluide [13, 14].

La réalisation expérimentale de condensats de Bose-Einstein gazeux, systèmes quantiques "macroscopiques", en 1995 [15, 16] a ouvert une nouvelle voie de recherche expérimentale. Les condensats de Bose-Einstein gazeux possèdent une cohérence à longue portée (de l'ordre de la taille du nuage atomique). Celle-ci a été mise en évidence et mesurée dans de nombreuses expériences [17–19]. Par ailleurs, la présence d'interactions (faibles) dans les nuages atomiques dégénérés est responsable des propriétés superfluides des condensats atomiques [20]. Ces propriétés (cohérence à longue portée, spectre à basse énergie du aux interactions, existence d'une phase de condensation de Bose-Einstein) constituent l'un des points communs de ces systèmes gazeux dégénérés avec les systèmes de la matière condensée comme l'Hélium superfluide ou les

supraconducteurs. Ces liens entre les supraconducteurs et superfluides d'une part, et les condensats de Bose-Einstein d'autre part, ont été formalisés par les travaux de Bogoliubov [21, 22], qui réunissaient les approches de Tisza et London [23, 24] et de Landau [25].

Le comportement ondulatoire cohérent des gaz de bosons ultra-froids en fait ainsi un candidat pour l'étude de nombreux phénomènes quantiques (transitions de phase superfluide-isolant de Mott, transition de Kosterlitz-Thouless, vortex, etc) et en particulier celui de la localisation d'une onde matière dans le désordre. De plus, le caractère superfluide de ces systèmes peut permettre d'approfondir la connaissance de l'influence du désordre sur ce phénomène. Enfin, présentant des propriétés similaires aux systèmes de la matière condensée, les condensats de Bose-Einstein ont récemment été l'objet d'expériences tentant de reproduire des situations identiques à celles des systèmes solides fortement corrélés. Dans ce cadre, la réalisation la plus emblématique avec des atomes froids est l'observation de la transition de Mott induite par les interactions entre une phase superfluide et une phase isolante [26]. Dans cette expérience, le réseau optique dans lequel sont placés les atomes est parfaitement périodique (sans défaut ni phonon) et les interactions peuvent être identifiées comme étant responsable de la transition de phase sans ambiguïté. Ainsi, l'étude de la transition métal-isolant induite par le désordre est également envisageable avec un gaz de Bose.

L'intérêt d'utiliser les condensats gazeux pour étudier l'influence du désordre sur les ondes de matière et les systèmes corrélés tient à l'excellent contrôle de leurs paramètres, aux techniques expérimentales dont nous disposons pour les manipuler et les observer [27, 28]. Nous pouvons ainsi envisager nombre d'expériences pour mieux comprendre les effets du désordre dans les systèmes cohérents, et cela dans une situation où le désordre est très bien contrôlé. De plus, la versatilité de ces systèmes gazeux permet d'envisager différents types de désordre (spectre dense et continu, quasi-périodique, delta-corrélé) et d'analyser les effets des interactions grâce au contrôle de ces dernières permis par les résonances de Feshbach [29–31]. Enfin, et il ne s'agit pas là du moindre intérêt, les techniques d'imagerie sur les condensats gazeux permettent d'observer directement le module de l'onde de matière (dont le carré est la densité atomique) dans le désordre. La réalisation de la localisation d'Anderson dans un tel système conduirait à un profil de densité décroissant exponentiellement, signature emblématique s'il en est du phénomène prédit par Anderson.

Travail de thèse

Le travail de thèse qui est présenté dans ce manuscrit a été effectué dans le groupe d'Optique Atomique du laboratoire Charles Fabry dirigé par Alain Aspect. Les expériences qui sont décrites ont été réalisées sur la plus ancienne expérience du groupe (que nous appelons "BEC1" parce qu'elle était la première à obtenir la condensation de Bose-Einstein!) qui est supervisée par Philippe Bouyer. Ma thèse s'est par ailleurs achevée avec la destruction de "BEC1", après tant de bons et loyaux services... Laurent Sanchez-Palencia a rejoint notre groupe quelques semaines après le début de ma thèse et il m'a encadré dans nos travaux théoriques et de modélisation des expériences réalisées.

Pour les raisons que nous avons évoquées dans les quelques lignes d'introduction qui précèdent, notre équipe, composée de M. Hugbart, A. Varon, J. Retter et P. Bouyer à mon arrivée,

s'est lancée dans l'étude des effets du désordre sur les gaz de bosons dégénérés. Il faut souligner que j'ai eu la chance d'arriver sur une expérience déjà construite et bien connue des personnes y travaillant depuis plusieurs années.

Quelques semaines après mon arrivée, nous avons mis en place un potentiel aléatoire de tavelures sur les condensats et nous avons étudié les modes collectifs d'oscillation dans le désordre. Nous nous sommes alors tournés vers les propriétés de transport d'une onde de matière dans un milieu aléatoire. Notre collaboration avec G.V. Shlyapnikov et D.M. Gangardt autour de cette question a été fructueuse. Nous avons observé la suppression de l'expansion d'un condensat dans un guide magnétique en présence de désordre dont la compréhension (en particulier la question de savoir s'il s'agissait d'un phénomène de localisation au sens d'Anderson) nous a conduit dans deux directions. D'une part, nous avons conçu un nouveau dispositif de création de tavelures avec une longueur de corrélation plus petite (égale à 1 micron!) et nous avons développé une méthode spectroscopique permettant une calibration précise de l'amplitude du potentiel aléatoire vu par les atomes. D'autre part, ces travaux nous ont conduit à l'étude théorique d'un régime de désordre différent de celui des expériences et pouvant conduire à la localisation d'Anderson. P. Lugan a rejoint notre équipe au milieu de ma thèse et j'ai pu participer aux travaux théoriques qu'il a menés à bien avec L. Sanchez-Palencia. Nous nous sommes par la suite intéressés à l'expansion libre d'un condensat désordonné après avoir observé l'apparition de grandes fluctuations de densité dans le nuage atomique au cours d'un temps de vol. Enfin, après la mort officielle de "BEC1", les toutes dernières semaines de travail ont été consacrées à la mise en place d'un dispositif de tavelures sur une autre expérience du groupe, celle du laser à atome [32]. J. Billy et Z. Zuo, encadrées par V. Josse, vont donc poursuivre les travaux sur la localisation d'onde de matière dans le désordre.

Ainsi, les travaux qui sont présentés dans ce mémoire sont ceux d'une équipe. Ils n'auraient pas pu aboutir sans les différentes contributions expérimentales et théoriques des uns et des autres.

Plan du mémoire

Le mémoire débute par un chapitre introductif aux effets induits par la présence de désordre sur les systèmes cohérents. Nous décrivons la diffusion d'onde sans interaction dans un milieu aléatoire et introduisons les phénomènes de rétro-diffusion, de localisation faible et de localisation d'Anderson (ou localisation forte). Nous poursuivons par une brève description des transitions de phase induites par le désordre et de la complexité introduite par les interactions dans de tels systèmes. Nous montrons les intérêts pratiques à étudier les effets du désordre sur une onde de matière cohérente à l'aide de condensats de Bose-Einstein gazeux. Les différentes réalisations expérimentales de désordre envisageables et les phénomènes pouvant être observés avec ces systèmes sont présentés. Enfin, nous définissons précisément la notion de désordre ce qui nous permet d'en extraire les caractéristiques principales.

Le second chapitre présente le potentiel aléatoire que nous avons décidé d'utiliser dans nos expériences, à savoir un champ de tavelures optiques. Après avoir rappelé les grandes lignes de l'interaction lumière/atomes dans le cadre de l'approximation dipolaire, nous présentons en détail les propriétés d'un champ de tavelures. Nous discutons certaines des propriétés statistiques

d'un tel désordre en lien avec un principe ergodique spatial. Enfin, nous présentons la mise en place du dispositif de création de tavelures ainsi que les méthodes que nous avons développées pour caractériser précisément la longueur de corrélation et l'amplitude typique de tels potentiels aléatoires [33].

Au troisième chapitre, nous présentons le dispositif expérimental de création de condensats Bose-Einstein 3D (non-désordonnés) de Rubidium 87 et nous rappelons quelques unes de leurs caractéristiques principales. L'extension de ce dispositif à la réalisation des condensats désordonnés et à l'étude des paramètres de ces derniers dans le piège magnétique est détaillée. Enfin, nous présentons les résultats expérimentaux sur l'apparition de grandes fluctuations de densité au cours du temps de vol de tels condensats désordonnés [34]. Nous discutons également le modèle que nous avons développé permettant de comprendre l'origine de telles fluctuations de la densité atomique. Cette étude permet d'établir un lien entre les propriétés des condensats désordonnés à l'équilibre dans le piège magnétique et l'observation de ces derniers après un temps de vol.

Nous poursuivons au quatrième chapitre par un travail expérimental et théorique de l'expansion 1D d'une onde de matière dans un potentiel aléatoire 1D. Après avoir décrit la technique que nous avons développée pour engendrer le transport de l'onde de matière dans un guide magnétique, nous présentons les résultats sur la suppression du transport dans un régime de fort désordre [33, 35]. Dans ce régime, la réflexion sur une modulation unique du potentiel et la présence non-négligeable d'interaction conduit à un piégeage classique du condensat. Ce modèle que nous avons développé est corroboré par nos expériences [33]. Nous nous tournons ensuite vers l'analyse théorique d'un régime de faible désordre. Nous montrons en particulier qu'un phénomène de localisation d'Anderson peut avoir lieu et nous discutons la faisabilité expérimentale d'une telle proposition [36].

Enfin, dans le dernier chapitre nous abordons la question du caractère superfluide d'un condensat désordonné à travers les modes collectifs de basse énergie. Nous présentons des résultats expérimentaux sur les modes d'oscillation dipolaire et quadrupolaire et nous discutons leur interprétation. Nous avons également engendré une onde de densité sur le nuage atomique. En observant sa propagation, nous pouvons alors étudier les modifications de la vitesse du son en présence d'un potentiel aléatoire.

Onde de matière et désordre : une combinaison prometteuse

Dans ce chapitre, nous présentons quelques idées générales sur les liens entre cohérence et désordre. Nous discutons les différents effets de la présence de désordre sur les systèmes quantiques dans lesquels le caractère ondulatoire de la matière joue un rôle primordial : condensation de Bose, superfluides, supraconducteurs. Nous présentons dans un premier temps la diffusion d'ondes dans un milieu aléatoire, transport conduisant à des phénomènes de localisation. Nous abordons également la question des différentes phases quantiques qui peuvent exister en présence de désordre. Dans un second temps, nous discutons l'intérêt d'une étude du lien cohérence/désordre avec les systèmes d'atomes froids. Enfin, nous terminons ce chapitre par une définition du désordre et des principales propriétés le caractérisant, présentant ainsi le cadre de travail dans lequel nous nous inscrivons.

1.1 Effets ondulatoires en présence de désordre

Des effets spectaculaires (et souvent non-intuitifs) liés à la présence d'un potentiel aléatoire dans la matière se manifestent lorsque des phénomènes d'interférences survivent à une moyenne d'ensemble : rétro-diffusion, localisation faible, localisation d'Anderson, transition métal-isolant induite par le désordre, etc... Ils requièrent la manifestation quantique de la nature ondulatoire de la matière. Notons également que ces effets concernent également des ondes classiques comme la lumière ou les ondes acoustiques.

Afin d'appréhender le lien entre onde (cohérence) et désordre, il est éclairant de présenter le cas de la diffusion d'une onde scalaire sans interaction dans un milieu désordonné. Cette approche met en évidence un certain nombre de concepts liés à la thématique qui nous intéresse ici (paragraphe 1.1.2). Nous décrivons ensuite succinctement des observations expérimentales de ces effets sur la lumière et sur les ondes électroniques. Un autre sujet fait depuis plusieurs dizaines d'années l'objet de nombreux travaux de recherche : la transition de phase quantique induite par le désordre dans les systèmes fortement corrélés (*i.e.* où les interactions jouent un rôle central). Nous présenterons quelques idées sur la nature particulière des états d'un système physique en présence de désordre et d'interactions (paragraphe 1.1.3).

Auparavant nous allons dans un premier paragraphe (1.1.1) rappeler dans ses grandes lignes l'avènement du domaine de la physique qui consiste en l'étude de la propagation d'ondes dans les milieux aléatoires. Ce domaine, à l'interface entre cohérence macroscopique et détails microscopiques du désordre, peut être inclus dans la physique mésoscopique. Ce petit retour historique est de notre point de vue lui aussi éclairant. Nous nous sommes largement inspirés pour écrire ce paragraphe du livre de E. Akkermans et G. Montambaux, *Physique Mésoscopique des Electrons*

et des Photons [1]. Remarquons que nous parlons ici de milieux aléatoires dans lesquels la diffusion peut être considérée élastique dans une bonne approximation. La présence de diffusions inélastiques conduit généralement à une forte diminution (voir une absence) des phénomènes liés à la présence d'interférences.

1.1.1 Interférences et désordre, toute une h(H)istoire...

Comme nous l'avons mentionné en introduction, l'un des phénomènes induits par le désordre qui reste intéressant (sa compréhension n'étant pas encore aujourd'hui complète) est la transition de phase quantique métal-isolant induite par le désordre dans les systèmes fortement corrélés. L'étude de cette transition de phase quantique métal-isolant a été développée au cours de la seconde moitié du XXI^{ème} siècle suite aux travaux d'Anderson sur la localisation forte [4]. Nous reviendrons sur cet effet de localisation qui porte le nom de son auteur au paragraphe 1.1.2.3. Cette approche ne pouvait pas être discutée avant la description quantique de la matière puisque le caractère ondulatoire de cette dernière n'avait pas été envisagé avant l'avènement de la physique quantique. De nombreux travaux théoriques étudiant les effets de la cohérence dans un milieu désordonné ont alors vu le jour et ouvert un vaste champ de recherche. Cela étant, ces approches théoriques ont été beaucoup discutées et remises en cause avant les premières observations expérimentales dans les années 1980. De même, les connaissances liées à la nature ondulatoire de la lumière ont conduit pendant de nombreuses années à négliger les effets de cohérence lors de la diffusion dans un milieu aléatoire. Il apparaissait en effet que l'effet moyenné sur un grand nombre d'événements aléatoires devait être nul.

Prenons l'exemple de la diffraction. La figure de diffraction d'un trou (statique), interprétée comme un phénomène d'interférences avec le principe des sources secondaires de Huygens, est celle bien connue d'une série d'anneaux concentriques. Supposons maintenant que nous déplaçons le trou aléatoirement dans le plan transverse à la propagation lumineuse. Si la moyenne temporelle effectuée par le détecteur (par un exemple l'oeil, une caméra, etc...) a lieu sur un temps grand devant le temps de déplacement de l'objet, une tâche lumineuse uniforme est observée. Ainsi, la figure de diffraction disparaît avec la moyenne sur un grand nombre de diffusions aléatoires (chaque diffusion sur le trou diffractant a lieu en un point différent de l'espace dans notre exemple).

Cette idée a très certainement été confortée avec la réalisation des lasers et l'observation d'un champ de tavelures ("speckle" en anglais) au début des années 1960. L'interprétation de ce phénomène de réflexion sur une surface rugueuse en terme de diffusion sur un grand nombre de diffuseurs aléatoires a très rapidement été proposée [37]. Or, si *un* champ de tavelures se caractérise par une répartition aléatoire de grains lumineux créée par les interférences entre des ondes émises par différents diffuseurs (pour une définition et une caractérisation d'un champ de tavelures voir la partie 2), une *moyenne d'ensemble*, *i.e.* une moyenne sur un grand nombre de réalisations de champ de tavelures, donne une répartition uniforme d'intensité. Ainsi, dans cet exemple, une moyenne d'ensemble conduit également à une annulation de l'effet des interférences.

Par ailleurs, il faut mettre en avant les très bons résultats obtenus par une théorie de la diffusion "classique", ne prenant pas en compte les effets d'interférences, dans nombre d'observations

expérimentales. Citons pour exemples la théorie de Mie de la diffusion lumineuse (développée en 1908) qui décrit très bien la lumière réfléchiée par les particules des nuages dont la position et le mouvement sont aléatoires, la théorie de Drude (également du début du XXI^{ème} siècle) de la conduction électronique dans un métal (où les impuretés constituent les diffuseurs aléatoires) qui conduit à une valeur correcte de la conductivité moyennée sur le désordre (*i.e.* en pratique dans un échantillon métallique suffisamment long) ou encore celle du transfert radiatif [38]. A la suite de ces observations (entre autres), il était considéré que les effets cohérents liés à la présence d'interférences dans les phénomènes de diffusion multiple en présence de désordre ne devaient pas subsister à une moyenne d'ensemble.

Paradoxalement, l'expérience ondulatoire qui a remis en cause cet état de la pensée est venue d'une onde dont la description est délicate en raison de la présence d'interaction : l'onde électronique. A partir d'une expérience sur l'effet Aharonov-Bohm, D. Yu. Sharvin et Yu. V. Sharvin ont démontré expérimentalement la subsistance d'un effet cohérent (interférences électroniques) dans une situation où une moyenne d'ensemble sur le milieu aléatoire diffusant est effectuée [39]. Cette observation a marqué le début d'une série d'expériences qui ont indiscutablement remis en cause l'idée selon laquelle les effets de cohérence disparaissaient toujours après une moyenne d'ensemble. De nombreuses expériences avec des ondes lumineuses ou acoustiques ont par la suite confirmé cette persistance de la cohérence. Nous en citerons quelques une dans les paragraphes qui suivent.

1.1.2 Localisation d'onde dans le désordre

Nous allons maintenant esquisser une image de l'influence du désordre sur la propagation d'une onde. Pour illustrer notre propos nous discutons le cas d'une onde scalaire sans interaction. Dans les paragraphes suivants, nous donnerons des exemples de modifications, induites par le désordre, du transport d'une onde lumineuse puis d'une onde électronique.

1.1.2.1 Diffusion d'onde dans un milieu désordonné

La présence d'interférences constitue en quelque sorte la brique élémentaire vers une compréhension des modifications apportées par le désordre. Ainsi, nous commençons par écrire l'amplitude complexe d'une onde scalaire sans interaction diffusée dans un milieu aléatoire statique. Nous identifions deux termes dans l'expression de l'intensité diffusée : l'un de ces termes correspond à la diffusion "classique" et l'autre à la présence d'interférences. Nous allons dans un premier temps rappeler les caractéristiques principales du phénomène de diffusion "classique" (en l'absence de phénomènes interférentiels). Une telle approche permet de décrire très correctement la transmission ou la constante de diffusion de la lumière moyenne ou la conductance électronique moyenne dans les milieux aléatoires. Dans un second temps, nous prendrons en compte la présence des interférences et nous montrerons que leur présence conduit à des phénomènes de retro-diffusion et de localisation faible. Enfin, nous présenterons à partir de cette situation les effets d'un désordre plus fort qui conduit à un phénomène de localisation forte où la constante de diffusion s'annule. Ces phénomènes de diffusion d'ondes dans un milieu désordonné ont fait l'objet de nombreux travaux de revue [1, 40].

Différentes échelles spatiales interviennent dans la description du transport d'une onde dans un milieu diffuseur de taille finie : la longueur d'onde λ , le libre parcours moyen l , la taille du milieu diffuseur L , enfin (en anticipant un peu sur la suite) la longueur de localisation L_{loc} . La longueur L_{loc} correspond à l'échelle spatiale typique de variation d'une fonction d'onde localisée. Nous pouvons alors distinguer trois grands régimes de transport. Le *régime balistique* lorsque $L \ll l$ dans lequel il y a peu de diffusions, voir même éventuellement aucune. Le milieu est alors presque transparent en l'absence d'absorption. Le *régime diffusif* lorsque $l \ll L \ll L_{\text{loc}}$ dans lequel il y a des diffusions multiples mais pas d'effet de localisation forte de l'onde. Enfin, le *régime de localisation forte* lorsque $l \ll L_{\text{loc}} \ll L$ qui est lui aussi identifiable à un régime diffusif dont la constante de diffusion est nulle. Nous nous intéressons ici aux deux derniers régimes, c'est à dire à des régimes de diffusions multiples.

Considérons un milieu composé de diffuseurs ponctuels, élastiques, statiques¹, répartis aléatoirement (position \mathbf{r}_i) dans lequel une onde plane monochromatique de vecteur d'onde \mathbf{k} se propage. L'amplitude complexe $\mathbf{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ de l'onde diffusée avec le vecteur d'onde \mathbf{k}' se met sous la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2)} \quad (1.1)$$

où $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est l'amplitude complexe associée à la propagation sur un chemin de diffusions multiples entre les points \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 (voir figure 1.1). L'intensité associée s'écrit alors :

$$|\mathbf{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \sum_{\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4} f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2)} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_3 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_4)}. \quad (1.2)$$

Le produit des amplitudes $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) f^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ fait intervenir un terme de phase qui est égal à la différence de phase entre les deux chemins $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$ et $\mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_4$. Cette différence de phase varie aléatoirement suivant les chemins empruntés. Ainsi une moyenne de ce produit sur les différentes réalisations du désordre est nulle sauf dans les cas où les chemins correspondent à des trajectoires identiques (la différence de phase étant alors nulle quelque soit la réalisation du désordre). Il existe deux possibilités pour obtenir des trajectoires identiques : $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3$ et $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4$ ou $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_4$ et $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$. Ces deux chemins correspondent à une propagation de l'onde suivant un chemin donné selon le même sens de propagation ou en sens opposé comme l'illustre la figure 1.1.

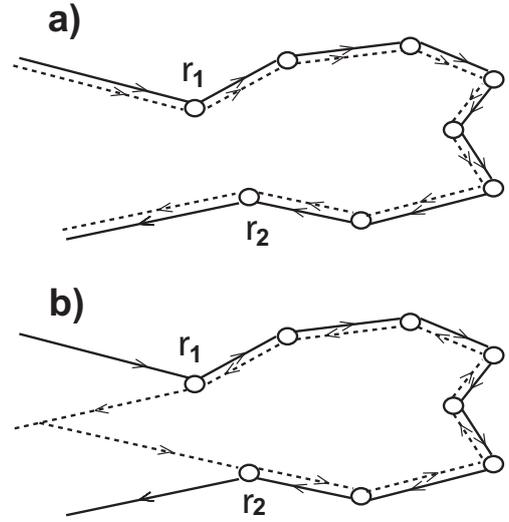
Il vient alors pour l'intensité diffusée moyennée sur les réalisations du désordre ($\langle \dots \rangle$ représente une moyenne sur les différentes réalisations du désordre) :

$$\langle |\mathbf{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} |f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 [1 + e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}] \right\rangle. \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) fait intervenir la somme de deux termes. Le premier terme de phase nulle correspond à la propagation en sens identique. Il s'agit du terme de diffusion "classique" égal à la somme des intensités diffusées sur chaque diffuseur ($\langle |\mathbf{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \rangle = \langle \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} |f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle$), terme qui existe en l'absence d'interférences. Le second terme a une phase non nulle qui s'écrit

¹Dans les nuages atmosphériques ou les poudres par exemple, milieux dans lesquelles les particules diffusant la lumière ne sont pas fixes, cette approximation est valide [1]. Dans un gaz d'atomes froids où la lumière diffusée est résonante, cette condition n'est respectée qu'à très basse température [11].

FIG. 1.1 – Représentation schématique des deux types de chemins de diffusion qui contribuent à l'intensité du champ lumineux diffusé : **a)** chemins parcourus en sens identiques qui correspondent à la diffusion classique ; **b)** chemins parcourus en sens opposés (terme interférentiel) qui sont à l'origine de la rétro-diffusion.



$(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Il correspond à la présence d'interférences et à des chemins parcourus en sens opposés (figure 1.1). C'est la prise en compte de ce second terme qui conduit à l'existence d'effets particuliers dus aux interférences lors de la diffusion dans un milieu désordonné.

Dans un premier temps nous rappelons quelques résultats liés à la seule prise en compte du terme classique dans la diffusion. Nous discutons ensuite les effets dus à la présence du second terme interférentiel.

Diffusion "classique"

La théorie de la diffusion "classique" de la lumière dans un milieu aléatoire a été établie au début du XXIème siècle [38]. Une approche analogue due à Blotzmann permet la description du transport électronique. Ces théories, ne prenant pas en compte les interférences, ont permis la description d'un grand nombre de phénomènes. Elles établissent notamment la variation de la transmission T en fonction du libre parcours moyen l et de la taille L du milieu diffusant, $\langle T \rangle \propto l/L$ connue sous le nom de loi d'Ohm. Les fluctuations de la transmission sont faibles autour de leur valeur moyenne, $\langle \delta T^2 \rangle / \langle T \rangle^2 \ll 1$. Une équation de diffusion peut également être dérivée dans ce cadre [1, 38], définissant ainsi en particulier une constante de diffusion D_0 finie qui est une constante importante de ces problèmes de transport.

Rétro-diffusion et localisation faible

Lorsque le terme d'interférence de l'équation 1.3 n'est pas négligé, un effet persiste après une moyenne d'ensemble sur le désordre dans deux cas particuliers : $\mathbf{k} + \mathbf{k}' \simeq \mathbf{0}$ et $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Le premier cas correspond à une observation de l'onde diffusée selon la direction opposée au vecteur d'onde incident : nous obtenons alors une intensité égale au double de l'intensité diffusée selon les autres directions de l'espace. Ce phénomène est appelé rétro-diffusion cohérente de l'onde. Cet effet, impossible à observer avec des ondes électroniques, a été mis en évidence expérimentalement avec les ondes électro-magnétiques (voir paragraphe 1.1.2.2). Le second cas ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$) correspond à l'existence de boucles fermées. Ce phénomène qualifié de localisation faible est à l'origine de modification du transport des électrons notamment (voir paragraphe 1.1.2.3). En particulier, il

est possible de définir et calculer un coefficient de diffusion D_{loc} du régime de localisation faible par analogie au cas classique. On montre alors que D_{loc} est fini et inférieur à la constante de diffusion du cas classique, $0 < D_{\text{loc}} < D_0$.

Notons que ces deux effets ont exactement la même origine et ont lieu en même temps. Ainsi, l'observation de la rétro-diffusion cohérente d'une onde est considérée comme une manifestation du phénomène de localisation faible. Comme nous l'avons évoqué en introduction, nous sommes en présence de phénomènes interférentiels dont l'existence persiste après une moyenne d'ensemble sur le désordre. Si leur interprétation est aujourd'hui très claire (et mise en évidence dans de nombreuses expériences parmi lesquelles : [9, 10, 39, 41, 42]), leur caractère n'est pas très intuitif ! Il n'est pas étonnant qu'ils aient vu le jour expérimentalement seulement au début des années 1980 après nombre de travaux théoriques...

Localisation d'Anderson ou localisation forte

Lorsque l'influence du milieu diffusant devient plus importante, la renormalisation de la constante de diffusion classique par le phénomène de localisation faible augmente : le coefficient de diffusion D_{loc} diminue. Il vient alors un régime de localisation de l'onde où la constante de diffusion devient nulle, $D_{\text{loc}} = 0$, sauf en dehors d'une zone d'étendue finie de l'espace. Les diffusions multiples engendrent des interférences destructives au delà d'une certaine distance typique, la longueur de localisation, et l'onde demeure alors localisée dans cette région spatiale : il s'agit du régime de localisation forte. Ce régime est donc très différent du régime de localisation faible où le coefficient de diffusion est réduit mais demeure fini dans tout l'espace. Dans le régime de localisation forte, il vient une nouvelle loi pour la transmission de l'onde. Cette transmission décroît exponentiellement avec la taille du milieu diffuseur, $\langle \log T \rangle \propto -L/L_{\text{loc}}$. De plus, les fluctuations de la transmission autour de sa valeur moyenne sont grandes, $\langle \delta T^2 \rangle / \langle T \rangle^2 > 1$. Il faut noter que dans un système 1D il n'y a pas de localisation faible (l'image des interférences entre chemins (figure 1.1) ne s'applique plus) et seul un phénomène de localisation forte existe.

Dans un milieu diffusant 3D, il existe un critère, dénommé critère de Ioffe-Regel, communément considéré comme nécessaire pour l'obtention d'effets interférentiels prépondérants. Ce critère, proposé par Ioffe et Regel [43], stipule que la longueur d'onde doit être supérieure au libre parcours moyen, $kl > 1/2\pi$ ($k = 2\pi/\lambda$). Lorsque ce critère est respecté, de nombreuses diffusions ont lieu sur une longueur d'onde et le phénomène de localisation forte a une grande probabilité d'avoir lieu. Remarquons, d'une part, que ce critère n'est pas strict, et, d'autre part, qu'il n'est aucunement nécessaire pour se trouver dans une situation de localisation faible où la seule prise en compte des interférences suffit.

Le régime de localisation forte d'une onde dans un potentiel aléatoire est un sujet originellement soulevé par P.W. Anderson en 1958 dans un article intitulé "Absence of Diffusion in Certain Random Lattices" [4]. Reprenant des questions autour de la diffusion de spin et la conduction électronique en présence d'impuretés, P. W. Anderson propose l'étude d'un modèle de diffusion sur un réseau dont l'énergie potentielle de chaque site est une variable aléatoire (qui suit une certaine loi de distribution). Nous appelons réseau aléatoire ce réseau particulier : il s'agit en effet d'un réseau au sens où les sites sont distribués spatialement de façon régulière, l'adjectif aléatoire faisant référence à l'énergie sur site qui, elle, est aléatoire. Il s'agit selon P. W. Anderson [4] du modèle le plus simple permettant de conduire à une image ayant un sens

physique. En particulier, il ne prend pas en compte l'effet des interactions qui existent pourtant dans les systèmes de la matière condensée qu'il décrit.

L'étude d'Anderson consiste à calculer le déplacement d'un spin (ou d'une particule) initialement fixé en un point du réseau aléatoire. Sous certaines conditions, en particulier au delà d'une valeur minimale de la largeur en énergie de la distribution aléatoire des énergies sur sites, le couplage d'un site du réseau à l'autre est supprimé. Le transport du spin initial ne peut plus alors avoir lieu et seules des transitions virtuelles sont possibles, transitions responsables de l'étalement du paquet d'onde initial dans une région finie de l'espace autour de la position initiale. De plus, Anderson montre que la décroissance de la fonction d'onde ainsi localisée dans une région finie décroît très rapidement avec la distance du point considéré à la position initiale. Le comportement de décroissance spatiale *exponentielle* de la fonction d'onde à partir de son centre de localisation est emblématique de la localisation d'Anderson. Nous appellerons longueur de localisation l'échelle spatiale de décroissance de la fonction d'onde localisée. Notons cependant que Gogolin a démontré qu'à 1D une correction à cette décroissance purement exponentielle de la fonction doit être prise en compte [44, 45]. La démonstration mathématique rigoureuse de l'existence de la localisation d'Anderson a été un peu plus tardive [46].

Nous tenterons de donner une image physique plus précise du phénomène de localisation au sens d'Anderson à 1D à l'aide du formalisme de phase au paragraphe 4.3 où nous aborderons ce concept dans le cadre des condensats de Bose-Einstein gazeux. Il est impossible de donner une liste exhaustive de la littérature sur le sujet de la localisation d'Anderson, aussi citons seulement quelques ouvrages de référence [47–49].

1.1.2.2 Expériences de diffusion lumineuse dans des milieux aléatoires

Comme nous l'avons rappelé au paragraphe 1.1.1, la recherche d'effets interférentiels lors de la diffusion en présence de désordre s'est développée relativement récemment, à la suite de l'expérience de Sharvin et Sharvin en 1981 [39]. Le phénomène de rétro-diffusion cohérente de la lumière a alors été étudié et sa première observation date de 1984 [9, 10]. Cela étant il a fallu attendre 1995 pour qu'une mesure expérimentale obtienne le facteur 2 sur l'intensité attendu pour la lumière rétro-diffusé [41] : cette observation nécessite une précision de 50 μrad sur l'angle du cône de lumière rétro-diffusé. La figure 1.2 présente la mesure de l'intensité en fonction de l'angle d'observation avec la direction de propagation de la lumière. La nécessaire précision angulaire pour l'étude du phénomène de rétro-diffusion explique que son observation n'est pas eu lieu "par hasard" avant 1984.

Le phénomène de rétro-diffusion a été observé dans de nombreuses situations de diffusions multiples de la lumière : dans des solutions liquides de diffuseurs en suspension [9, 10], sur des atomes froids [11], avec des champs de tavelures [50], et même avec une lumière incohérente comme celle du soleil [42, 51].

En parallèle à ces travaux sur la rétro-diffusion lumineuse, s'est développée une recherche visant à mettre en évidence les phénomènes de localisation forte de la lumière dans un milieu désordonné. Les premières mesures effectuées sur la transmission lumineuse à travers un milieu de taille finie [52] ont été beaucoup discutées, en particulier la présence possible d'absorption. Des mesures de fluctuations de la transmission ont alors été effectuée afin d'éviter l'écueil de l'absorption [53]. Très récemment, des expériences ont été menées sur la transmission d'impulsions courtes à travers des poudres [6, 7]. Un phénomène de localisation faible est

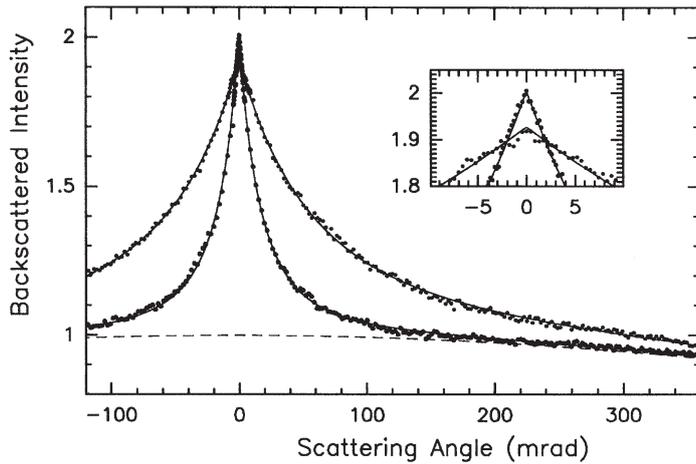


FIG. 1.2 – Image du papier *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4193 (1995). Mesure expérimentale de l'intensité lumineuse dans la direction de la rétro-diffusion (angle nul). Le facteur 2 sur l'intensité rétro-diffusée grâce à la présence d'interférence est mesuré. Notons la très bonne résolution angulaire nécessaire à cette observation.

indiscutablement mis en évidence et la convergence vers le régime de localisation d'Anderson y apparaît également. Enfin, au début de l'année 2007, le phénomène de localisation d'Anderson a été observé dans un cristal photonique [5]. Cette expérience consiste à mesurer la diffusion transverse (plan perpendiculaire à la direction de propagation) de la lumière, en l'absence et en présence de désordre. Un arrêt de la diffusion transverse est observé et le profil d'intensité transverse alors mesuré décroît exponentiellement. De plus, ce travail met également en évidence les modifications apportées par la présence de faibles non-linéarités : la localisation forte demeure et la longueur de localisation diminue.

1.1.2.3 Effets de localisation dans les conducteurs électroniques

La mise en évidence de l'effet de rétro-diffusion de la propagation d'ondes électroniques dans un conducteur désordonné est difficilement envisageable expérimentalement et cet effet n'a pas été observé. Cela étant, il existe un certain nombre de conséquences de la localisation faible sur la conductance et sur la magnéto-résistance des conducteurs électroniques [54,55]. Depuis le début des années 1980 nombre d'expériences ont été consacrées à ces différents effets [56].

L'étude des conséquences de la localisation faible peut être étendue à celles de la localisation forte. La transition entre ces deux régimes de localisation a été mis en évidence expérimentalement dans des conducteurs électroniques 1D en 1997 [57] et 2D dans les années 1980 [58]. D'ailleurs, c'est très certainement l'absence de confirmations expérimentales qui ont conduit P. W. Anderson à insister une nouvelle fois sur la véracité de son modèle lors la remise du Prix Nobel qui lui a été attribué en 1977, soit près de 20 ans après ses premiers travaux.

Cela étant il faut remarquer que la présence de l'interaction de Coulomb entre électrons complique l'image d'onde sans interaction localisée au sens d'Anderson et rend plus délicate l'interprétation des expériences. La compréhension de l'effet des interactions sur les phénomènes de localisation a progressé ces dernières années mais elle n'est cependant pas complète. L'approche expérimentale dans les conducteurs électroniques ne peut apporter qu'une réponse limitée à cette question : il n'est pas possible de s'affranchir de la présence de l'interaction de Coulomb afin de comparer une situation sans interaction avec celle de la présence d'interaction. Il nous semble que de ce point de vue, l'apport que peut apporter l'étude de la propagation d'un condensat de Bose-Einstein gazeux (dans lequel les interactions peuvent être contrôlées)

dans un milieu désordonné peut s'avérer important. Nous discuterons ce point au paragraphe 1.2.3.

En présence de localisation forte, la diffusion de l'onde est supprimée et l'état dans lequel se trouve le système est alors isolant. La transition de phase quantique métal-isolant induite ainsi par le désordre est abordée dans le paragraphe qui suit.

1.1.3 Phases quantiques et transition métal-isolant induites par le désordre

Nous avons décrit au paragraphe précédent les modifications du transport d'une onde apportées par la prise en compte des interférences lorsque la diffusion a lieu dans un milieu désordonné. Cette description nous conduit notamment à la question de l'existence d'états localisés d'une onde de matière. Par ailleurs, le comportement d'une onde de matière conduit à des phénomènes aujourd'hui bien connus où la cohérence joue également un rôle central : condensation de Bose-Einstein, supraconductivité et superfluidité. Ces comportements quantiques apparaissent lorsque la matière se trouve dans des phases quantiques très particulières caractérisées, entre autres, par le peuplement macroscopique d'un seul et même état quantique. Se pose alors la question de l'existence et de la persistance de telles phases en présence de désordre.

Dans ce paragraphe, nous essayons de donner une vue schématique de l'influence d'un potentiel aléatoire sur les états et les phases des ondes de matière. Il s'agit donc là encore d'envisager le lien entre cohérence et désordre.

1.1.3.1 Une image schématique des différents régimes

L'influence du désordre sur les phénomènes de supraconductivité et de superfluidité a fait l'objet de nombreux travaux au cours de la seconde moitié du XXI^{ème} siècle. Les travaux que nous mentionnons ici décrivent par exemple l'hélium II superfluide dans un milieu poreux (aérogel, Vycor) [14] et les supraconducteurs dits "sales" dans lesquels de nombreuses impuretés sont présentes. Ces études ayant des liens très forts avec la condensation de Bose-Einstein, elles ont également abordé l'existence de ce phénomène en présence de désordre [59].

A partir de ces travaux sur les superfluides et les supraconducteurs nous pouvons identifier trois grands régimes dont on peut se faire une image assez intuitive. Dans tous ces régimes, des interactions sont présentes entre les particules, interactions responsables des comportements quantiques superfluide et supraconducteur. Ces trois régimes sont :

Régime de faible nombre de particules et faible désordre : dans cette situation les particules peuplent des états à une particule. Les particules se localisent alors dans les minima du potentiel aléatoire (leur fonction d'onde pouvant éventuellement s'étendre sur quelques sites voisins). Les propriétés de ces états sont essentiellement déterminées par le spectre de l'état fondamental du système. Dans ce régime il n'y a ni condensation ni superfluidité.

Régime de grand nombre de particules et faible désordre : dans une image classique, les particules localisées dans les minima du potentiel aléatoire écrantent le potentiel pour les

autres particules. Bien entendu, la prise en compte de la statistique quantique ne permet pas de distinguer les différentes particules mais l'écrantage du potentiel par un terme de champ moyen existe bien. Ce phénomène d'écrantage a été mis en évidence dans l'hélium II où la superfluidité n'est pas présente dans tout le volume du milieu poreux [13]. La cohérence quantique à longue portée nécessaire à l'apparition de la superfluidité est alors possible. Dans ce régime, une approche théorique montre que le phénomène de condensation de Bose-Einstein existe et que la fonction d'onde macroscopique s'adapte aux modulations du potentiel aléatoire grâce aux interactions [60]. L'influence du potentiel aléatoire sur la fraction condensée et la fraction superfluide est faible [60] et le formalisme de Bogolyubov décrit correctement ces faibles modifications [61]. La superfluidité de l'hélium II dans un milieu poreux (pour une revue lire [14]) et la supraconductivité dans les supraconducteurs "sales" [62] ont été par ailleurs observés expérimentalement.

Régime de grand nombre de particules et fort désordre : en présence d'un désordre fort, la superfluidité comme la supraconductivité peuvent être détruites [60, 63]. Dans les systèmes 1D et 2D, il existe en effet à température nulle une amplitude finie du désordre au delà de laquelle la cohérence à longue portée est supprimée [64]. Une transition de phase quantique de l'état superfluide vers une nouvelle phase isolante appelée verre de Bose a été démontrée [3, 65]. Ce type de transition de phase induite par le désordre existe également dans les conducteurs électroniques (il s'agit de la transition métal-isolant) et est décrite par le modèle la transition d'Anderson.

Transitions métal-isolant

Une transition métal-isolant peut être de deux natures différentes : soit son origine vient d'un changement de la structure du cristal, impliquant une modification de la bande de conduction, soit la transition est de nature purement électronique. Ce second type de transition métal-isolant peut également avoir deux origines distinctes. Elle peut être induite par des corrélations électroniques dans un cristal (réseau) parfait. Elle est ainsi gouvernée par la présence d'interaction et elle est appelée transition de Mott (voir figure 1.3) [66]. La transition de nature électronique peut aussi être induite par la présence de désordre dans un système sans interaction. Elle est alors appelée transition d'Anderson [47, 66, 67]. Nous nous intéressons bien entendu ici à ce dernier cas. Ce type de transition induite par le désordre a été inspirée par le modèle de diffusion d'Anderson que nous avons mentionné précédemment [4]. L'absence de diffusion correspond dans ce modèle à l'existence d'une onde localisée, ce qui conduit naturellement à étudier la transition entre phase métallique et isolante.

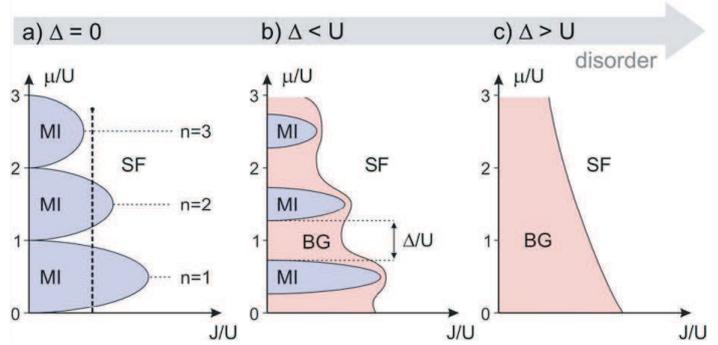
L'hamiltonien d'Anderson (du nom de son auteur) qui décrit une telle transition métal-isolant dans un réseau s'écrit en seconde quantification

$$\hat{H} = t \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \sum_i \epsilon_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (1.4)$$

où t est le couplage tunnel entre les sites du réseau et ϵ_i est une énergie sur site. Cet hamiltonien ne prend en compte que le terme cinétique et l'énergie potentielle aléatoire sur site caractérisée par une distribution aléatoire des énergies ϵ_i . En particulier, les interactions ne sont pas présentes. Les énergies ϵ_i sont supposées distribuées aléatoirement selon une distribution de largeur

en énergie W . Lorsque que le rapport W/t est suffisamment grand (pour une valeur finie à 3D et dès $W > 0$ à 1D et à 2D²) l'état fondamental du système est un isolant [66, 67] : au delà de cette limite (appelée "mobility edge" en anglais), les états propres du système sont localisés et il n'y a plus de diffusion.

FIG. 1.3 – Image du papier *Phys. Rev. Lett.* **98**, 130404 (2007) inspirée de [3]. Diagrammes de phase d'un gaz de bosons dans un réseau en l'absence **a)** et en présence d'un potentiel aléatoire **b)** et **c)**. μ est le potentiel chimique du gaz, U son énergie d'interaction, J la constante de couplage tunnel et Δ la largeur en énergie de la distribution aléatoire. Les phases d'isolant de Mott (MI), de verre de Bose (BG) et de superfluide (SF) y apparaissent.



De nombreuses revues traitent du problème de la transition d'Anderson et décrivent ses extensions à des situations plus complexes [47, 66, 67], en particulier la prise en compte des interactions. Cette extension aux systèmes avec interactions est délicate et, si des progrès ont été faits, l'existence de la transition d'Anderson en leur présence constitue encore aujourd'hui une thématique de recherche ouverte. Nous voulons simplement conclure en rappelant que ni l'image de Mott (sans désordre) ni celle d'Anderson (sans interaction) ne peut décrire les expériences avec les conducteurs électroniques. La difficulté expérimentale principale d'une étude systématique de ces deux effets vient du fait qu'ils ne peuvent être séparés l'un de l'autre dans les conducteurs. Au contraire, comme nous le rappellerons au paragraphe 1.2, cette séparation et cette étude systématique est possible avec un condensat de Bose-Einstein gazeux, ce qui en fait un candidat prometteur pour apporter de nouveaux éclairages expérimentaux à ces questions. Citons pour finir l'étude des phases quantiques dans lesquelles peuvent apparaître un gaz de Bose avec interactions en présence de désordre effectuée par M.P.A. Fisher *et al.* [3]. Ces travaux ont constitué une avancée majeure dans ce domaine de recherche et ont ouvert de nombreuses voies.

1.1.3.2 Phases quantiques et phénomènes "exotiques"

Un certain nombre d'états ou phases quantiques de la matière ont été identifiés dans les trois régimes que nous avons énumérés au paragraphe précédent. Dans les quelques lignes qui suivent nous présentons les différents états ou phases de systèmes quantiques (bosoniques ou fermioniques) en présence de désordre. Nous évoquons enfin quelques phénomènes très particuliers liés à la présence de désordre. Dans ce paragraphe, nous n'avons pas la prétention d'être exhaustif tant les travaux liés à la présence de désordre sont nombreux...

²A 2D, il n'existe pas de démonstration rigoureuse mais toutes les calculs numériques effectués jusqu'à présent vont en ce sens.

Système bosonique

Dans le régime de faible nombre de particules et faible désordre, les particules peuplent des états à une particule. Ces états ont une énergie faible et sont fortement modifiés par la présence du désordre. En effet, ces derniers sont déterminés essentiellement par le spectre du fondamental du système et celui-ci est fortement influencé par la présence de désordre. En présence d'un réseau désordonné, *i.e.* un réseau auquel se superpose un potentiel aléatoire, le système bosonique se trouve dans une phase appelée *verre d'Anderson* [68]. En l'absence de réseau sous-jacent au désordre, les états peuplés ont des énergies se trouvant dans la queue de Lifshits du potentiel, et cet état est alors appelé *verre de Lifshits*. Notons que les états des verre d'Anderson et des verres de Lifshits sont similaires [69].

Dans le régime de forte interaction et de faible désordre le gaz de Bose se trouve à l'état condensé en présence du potentiel aléatoire. Le profil de densité suit les modulations du potentiel aléatoire ou celles d'un potentiel écranté par les interactions [13, 59]. Cet état peut être appelé *condensat désordonné*.

Dans le régime de forte interactions et de fort désordre, la phase isolante dans laquelle se trouve le gaz de Bose est appelée *verre de Bose* [3]. Une image simple de cette phase quantique induite par le désordre consiste en différents îlots condensés (superfluides et compressibles) qui ne sont pas en contact les uns avec les autres. Ainsi, le verre de Bose est une phase isolante mais compressible, ce qui la distingue de la phase isolante de Mott qui n'est pas compressible.

Système fermionique

Comme dans un système bosonique, en présence d'un faible réseau désordonné et de faibles interactions, les fermions peuplent des états localisés au sens d'Anderson. Le principe d'exclusion de Pauli implique cependant une distribution des particules sur ces différents états localisés (selon la statistique de Fermi-Dirac) très différente de celle d'une assemblée de bosons. Cette phase quantique est appelée *verre de Fermi* [70]. Des simulations numériques montrent que lorsque l'énergie d'interactions devient de l'ordre de l'amplitude du désordre, la délocalisation l'emporte sur le phénomène de localisation et une mer de Fermi désordonnée apparaît [71].

La transition de phase induite par le désordre entre une phase métallique (liquide de Fermi) et une phase isolante fait également l'objet de nombreux travaux théoriques et les semi-conducteurs "sales" sont des systèmes expérimentaux permettant l'étude de cette transition et ses lois d'échelle [72, 73].

Quelques phénomènes de systèmes désordonnés

Il existe au moins deux phénomènes très connus et très étudiés que nous pouvons citer dans les systèmes désordonnés, à savoir le phénomène de *percolation* et les *verres de spin*.

Les théories de percolation (basées sur une théorie mathématique des graphes) sont utilisées, entre autres, pour décrire le transport d'un liquide à travers un milieu poreux, le comportement de certains appareils conducteurs désordonnés ou encore la migration d'épidémies [74]. Elles posent la question de l'existence d'un chemin de diffusion sur un réseau qui permettrait de traverser ce dernier sur une certaine distance. Cette question est abordée en fonction des probabilités de liens entre chaque point du réseau.

Les verres de spin représentent des systèmes discrets de spins dont chaque site est couplé à ses voisins par une amplitude aléatoire [75]. L'une des caractéristiques les plus emblématiques de tels systèmes est l'apparition d'un phénomène dit de frustration, situation dans laquelle de tels systèmes possèdent plusieurs états fondamentaux et, ainsi, ne restent pas à l'équilibre dans l'un d'eux mais évoluent de façon permanente au cours du temps.

1.2 Et les atomes froids dans tout ça ?

Si elle a confirmé expérimentalement le phénomène de condensation, la réalisation des premiers condensats de Bose-Einstein gazeux en 1995 [15, 16] a ouvert un nouveau champ d'investigation du monde quantique. Les possibilités expérimentales offertes (potentiels en tout genre, modification des interactions, techniques de mesure variées) par les gaz d'atomes ultra-froids combinées à un excellent degré de contrôle lors de leur manipulation en ont fait l'un des systèmes quantiques les plus étudiés ces dernières années. Après avoir détaillé le formidable outil d'investigation que représentent les condensats gazeux, nous discutons leur étude en présence de désordre : nous présentons tout d'abord les différentes techniques pour la réalisation de potentiels aléatoires vus par les gaz d'atomes, ensuite les investigations possibles en lien avec les effets mentionnés aux paragraphes précédents.

1.2.1 Un outil d'investigation formidable !!

Les condensats de Bose-Einstein gazeux représentent aujourd'hui un formidable outil d'investigation expérimentale de nombreuses questions soulevées au XXIème siècle (condensation de Bose, superfluidité, systèmes corrélés, phases quantiques "exotiques", etc). L'intérêt de ces gaz d'atomes ultra-froids est triple :

- *un outil très bien contrôlé.* La précision expérimentale sur les différents paramètres du gaz de Bose (nombre d'atomes, température, fréquences de piégeage, etc) est excellent. De plus, ces systèmes condensés peuvent être isolés d'un bain thermique (absence de relaxation et de décohérence) et ainsi être manipulés sur de longs temps d'interrogations (de l'ordre de la seconde).
- *un outil versatile.* Les condensats gazeux peuvent à peu près être placés dans n'importe quelle situation : ils peuvent être 3D, 2D ou 1D ; ils peuvent être placés dans des potentiels optiques, magnétiques ou radio-fréquence qu'il est possible de façonner à volonté (pièges harmoniques, réseaux, double puits, potentiels aléatoires, etc) ; les interactions inter-atomiques peuvent être contrôlées à l'aide de résonances de Feshbach (interactions répulsives, attractives ou quasi-nulles)
- *des techniques de mesure variées.* La possibilité est offerte d'observer les condensats gazeux à la fois dans l'espace réel (densité atomique) et dans l'espace des impulsions (après temps de vol) avec un dispositif d'imagerie par absorption, par fluorescence ou encore par contraste de phase. Des techniques de spectroscopie diverses (spectroscopie de Bragg et Raman) ainsi que des techniques d'excitation pour la mesure des réponses statique

et dynamique (modulations du confinement piégeant, modulation d'un potentiel optique, présence d'un laser focalisé, etc) ont été développées.

Ces trois aspects expérimentaux disponibles avec les condensats gazeux conduisent naturellement à vouloir étudier les effets du désordre sur ce système cohérent. Nous allons maintenant présenter les différentes techniques envisageables pour créer un potentiel aléatoire vu par les atomes, premier pas vers ces études.

1.2.2 Créer du désordre : différentes techniques disponibles ou à venir...

A partir des travaux menés depuis plusieurs années sur les condensats de Bose-Einstein, il est possible aujourd'hui d'envisager différentes techniques expérimentales pour créer un potentiel aléatoire vu par les atomes. Nous décrivons ci-dessous les différentes techniques disponibles ou envisageables pour créer du désordre sur un gaz d'atomes ultra-froids ³.

Les puces atomiques

Le refroidissement d'atomes dans le régime de dégénérescence quantique a été réalisé sur des puces conductrices [76]. Elles créent le champ magnétique dans lequel les atomes sont piégés et refroidis. Ce faisant, elles créent aussi un potentiel aléatoire magnétique pour les atomes piégés. En effet, la rugosité des fils conducteurs en surface de la puce engendre une rugosité du piège magnétique [77]. Ce potentiel aléatoire a néanmoins plusieurs désavantages pour une étude systématique de l'influence du désordre sur les atomes froids. Le principal désavantage est certainement le caractère intrinsèque de ce potentiel aléatoire à ce type de dispositif, ce qui implique en particulier qu'il est impossible de le faire disparaître complètement. Même si des études récentes ont montré qu'une modulation du courant dans les fils de la puce permet de diminuer l'amplitude de ce potentiel aléatoire de façon conséquente [78], il reste toujours présent. Un autre point négatif concernant ce type de désordre est l'impossibilité de changer les paramètres du potentiel aléatoire (comme l'amplitude ou l'échelle des variations spatiales) à volonté et indépendamment les uns des autres. Une possibilité pour faire varier l'amplitude de ce potentiel est d'éloigner ou de rapprocher le nuage d'atomes de la puce mais l'échelle des variations spatiales du potentiel change alors elle-aussi. Ainsi, la rugosité magnétique présente sur les puces atomiques ne se prête pas à l'étude qui nous intéresse.

Potentiers radio-fréquence

Un potentiel aléatoire de type magnétique peut être créé à l'aide d'antennes radio-fréquence (RF). Cette technique a fait l'objet d'une proposition récente [79]. Le champ RF induit des transitions entre les états hyperfins de l'atome et ce dernier est alors habillé par le champ RF. Dès lors, à l'aide d'un peigne de fréquences RF correctement choisi, il serait possible de créer un potentiel aléatoire pour un état hyperfin atomique. Notons que les paramètres du potentiel aléatoire pourraient être modifiés indépendamment et que ce potentiel aléatoire peut être coupé

³Nous n'avons pas prétention à être exhaustif à propos de chacune de ces techniques mais seulement à les présenter dans les grandes lignes

à volonté. Remarquons cependant qu'il est très délicat de calculer exactement le champ magnétique résultant d'un tel peigne de fréquence et donc de savoir précisément quelle configuration de potentiel est appliquée aux atomes. En effet, le champ RF ne résulte pas seulement de l'amplitude du champ magnétique local mais également de l'orientation vectorielle locale du champ RF [80], ce caractère vectoriel conduisant à un calcul difficile du champ effectif vu par les atomes.

Deux espèces atomiques dans un réseau

D'un point de vue théorique, il est souvent plus aisé de modéliser un potentiel aléatoire par un bruit blanc que de prendre en compte le support fini du spectre de ce potentiel. Une récente proposition va dans ce sens, à savoir la réalisation expérimentale d'un désordre ayant un spectre très proche de celui d'un bruit blanc [81]. Il s'agit dans ce cas d'utiliser deux espèces atomiques différentes ou deux niveaux différents de la même espèce qui interagissent l'un avec l'autre. Une condition supplémentaire tient à la possibilité de créer un réseau optique profond pour l'une des espèces d'atomes sans que la seconde espèce ne voit ce réseau⁴. Dès lors, il serait possible de faire un verre à partir de la première espèce avec un taux de remplissage par site inférieur à 1. Cela signifie que les atomes de la première espèce se comptent au nombre de zéro ou un par puits et qu'ils se trouvent distribués spatialement aléatoirement. Lorsque la seconde espèce (qui ne voit pas le réseau ou presque) se trouve dans cette même région de l'espace, elle interagit avec des atomes uniques, disposés aléatoirement et sous forme d'une interaction quasi-punctuelle : une telle réalisation est donc très proche d'un modèle de désordre constitué de pics de Dirac identiques répartis aléatoirement dans l'espace. La réalisation expérimentale de cette proposition est envisageable avec les techniques actuelles mais elle est délicate à mettre en oeuvre. Un pas dans ce sens a été franchi récemment [82, 83]. Remarquons enfin qu'un tel potentiel aléatoire, vu par la seconde espèce atomique, n'est pas strictement statique puisque la première espèce atomique peut diffuser sur le réseau optique (avec un temps typique inverse proportionnel au couplage tunnel entre les sites du réseau).

Potentiels optiques

Il est possible de créer un potentiel aléatoire pour les atomes froids optiquement. Il s'agit de créer un potentiel dipolaire pour les atomes en éclairant ces derniers avec une lumière suffisamment puissante et proche de résonance telle que les déplacements lumineux du niveau atomique des atomes soit importants [84, 85]. Nous reviendrons sur cette notion de potentiel optique dans le paragraphe 2.1 et nous allons donner ici les principes de création d'un potentiel lumineux aléatoire.

Masque de phase

Cette technique a pour but de faire l'image sur les atomes d'une surface désordonnée. Cela a été réalisé expérimentalement avec une surface de chrome dont la structure était aléatoire [86]. Il semble qu'un tel système doive être utilisé sans aberrations optiques afin de construire le potentiel optique désordonné comme il est défini par les interférences issues du masque de phase. Cet aspect requiert ainsi un très bon système d'imagerie optique qui peut difficilement être réa-

⁴Il est au moins nécessaire que ce réseau ait une amplitude très faible pour la seconde espèce

lisé avec une grande ouverture numérique. Or, comme nous le verrons par la suite, l'ouverture numérique est directement reliée (limite de diffraction) à la taille des modulations spatiales du potentiel aléatoire. Dès lors, cette technique du masque de phase ne semble pas optimale pour travailler avec une échelle de variations spatiales du potentiel aléatoire courte.

Potentiel optique de tavelures

Une répartition spatiale aléatoire de l'intensité lumineuse peut être obtenue en éclairant un diffuseur avec une lumière laser [87]. La répartition de grains de lumière ainsi réalisée est appelée champ de tavelures (ou "speckle" en anglais). Il s'agit de la technique que nous utilisons [33, 35] dans nos expériences et nous détaillerons ses propriétés et ses avantages dans les paragraphes qui suivent. Un tel potentiel de tavelures a été utilisé pour la première fois au LENS à Florence [88]. En particulier nous verrons qu'il s'agit là d'un potentiel bien contrôlé, facilement modifiable et dont les propriétés statistiques sont précisément connues.

Réseaux quasi-périodiques

Enfin, il est possible de créer un quasi-désordre, c'est-à-dire un désordre avec un ordre à longue portée, par exemple en utilisant des faisceaux laser contra-propageants dont les fréquences optiques sont incommensurables [89, 90]. Les propriétés statistiques de ces quasi-désordres sont complètement différentes de celle d'un "vrai" désordre, en particulier la densité spectrale de puissance est discrète (et non pas dense comme dans le cas de tavelures par exemple). Cette technique a récemment été utilisée dans des expériences au LENS à Florence [91].

1.2.3 Observations possibles d'effets induits par le désordre avec les atomes froids ?

La présence d'un potentiel aléatoire sur un condensat de Bose-Einstein gazeux permet l'étude de nombreux effets liés aux propriétés des ondes de matière dans le désordre. Nous citons ci-dessous un ensemble de propositions théoriques qui vont dans cette direction.

Condensats de Bose-Einstein désordonnés

L'existence d'un condensat gazeux avec interactions en présence d'un potentiel aléatoire faible est établie d'un point de vue théorique. La réalisation expérimentale de tels condensats désordonnés permettrait d'étudier, entre autres, les modification du profil de densité induite par le potentiel aléatoire en fonction des interactions [92], la température critique de condensation dans le désordre [93], la déplétion de la la fraction condensée et de la fraction superfluide induite par le désordre [94–96], la modification de la vitesse du son ainsi que le décalage en fréquence et l'amortissement des modes collectifs [95, 97, 98] ou encore les excitations de basses énergies en présence de désordre [99]. Rappelons que ces sujets ont un lien très fort avec de nombreuses questions abordées dans le cadre de l'étude des superfluides et des supraconducteurs (voir 1.1.3.1).

Localisation d'Anderson et interactions

Un condensat de Bose-Einstein gazeux est une onde de matière cohérente sur la taille du nuage atomique à suffisamment basse température. Cette taille du nuage est de l'ordre de quelques dizaines à quelques centaines de microns. Les potentiels aléatoires optiques (paragraphe 1.2.2) possèdent des variations spatiales, limitées par la diffraction, de l'ordre du micron. Il est donc tout à fait envisageable d'obtenir des effets interférentiels forts avec une onde de matière s'étalant sur un grand nombre de modulations du désordre. L'observation de sa diffusion peut donc conduire au phénomène de localisation d'Anderson [36]. Cette approche est certainement valide dans un condensat où les interactions ont été réduites le plus possible (à l'aide de résonances de Feshbach magnétiques [29, 30] ou optiques [31]) mais elle ne l'est plus strictement en présence d'interactions "fortes". Remarquons que si une telle onde de matière était localisée au sens d'Anderson, avec une enveloppe décroissant exponentiellement à partir du centre de localisation, ce profil exponentiel sur la densité du condensat pourrait être observé directement avec une technique d'imagerie par absorption ! Jusqu'à présent, la seule observation (à notre connaissance) d'un tel profil exponentiel lors de la diffusion d'une onde dans un milieu désordonné a été réalisée au début de l'année 2007 dans un cristal photonique [5].

En présence d'interactions "fortes" (celles usuellement présentes dans les condensats atomiques), la situation devient plus complexe... et donc également plus intéressante ! Le jeu subtil entre énergie d'interaction, énergie du potentiel aléatoire et énergie cinétique lors de la diffusion d'une telle onde de matière est un sujet ouvert aujourd'hui à la fois d'un point de vue théorique et expérimental. Pour ce qui est des travaux théoriques, citons l'étude du transport 1D d'un condensat à travers une région désordonnée [100], celle de l'expansion d'un condensat avec interactions dans un potentiel aléatoire 1D [36, 101] et son extension à 2D et 3D [102]. Des travaux théoriques ont également été menés en l'absence d'interaction sur la localisation d'un condensat dans un potentiel aléatoire créé avec deux espèces atomiques [81] et dans un champ de tavelures pour un système 2D [103].

Nouvelles phases quantiques en présence de désordre

L'observation de la transition de phase quantique superfluide-isolant de Mott dans un condensat de Bose-Einstein gazeux [26] a démontré l'intérêt de l'étude des transitions de phases dans de tels systèmes. De nombreuses propositions théoriques envisagent la réalisation de phases quantiques en présence de désordre dans un gaz d'atomes ultra-froids et l'étude des transitions de phase superfluide-isolante induite par le désordre.

Parmi ces propositions, nous trouvons celle de réaliser un verre de Bose et un verre d'Anderson dans réseau désordonné [89] ou dans un réseau quasi-périodique [104], celle de créer un verre de Fermi et un verre de spin dans des mélanges fermions-bosons [90, 105], celle d'observer un verre de Lifshits (phase similaire à celle du verre d'Anderson) dans un potentiel aléatoire sans réseau sous-jacent [106], etc...

1.3 Désordre, potentiel aléatoire : définitions et propriétés statistiques

La définition du mot *désordre* que nous trouvons dans tous les dictionnaires est très simple : l'absence d'ordre. Et le sens commun associe nombre de connotations négatives au mot désordre : capharnaüm, fatras, fouillis, pagaille, souk, confusion, etc... Dans ces différentes utilisations, la seule définition du désordre qui est finalement donnée se fait en opposition avec celle d'ordre. Cette approche lexicale n'est donc d'aucune aide pour donner un sens au désordre... Au contraire, avec tous les effets intéressants que peut engendrer le désordre dans des systèmes physiques cohérents nous voudrions plutôt lui associer une connotation positive ! En physique, le désordre se présente sous la forme d'un potentiel dont l'amplitude et/ou les variations spatiales sont aléatoires. Les exemples auxquels nous avons fait référence dans ce chapitre sont nombreux. Nous allons dans les lignes qui suivent définir précisément ce que nous entendons par *désordre* en utilisant pour cela une approche statistique. Nous allons également présenter quelques unes de ses propriétés principales.

1.3.1 Un processus statistique aléatoire

Nous voulons ici préciser la définition que nous donnons au mot désordre afin de déterminer les situations dans lesquelles nous travaillons. Nous n'allons pas aborder n'importe quel type de désordre et nous avons besoin de trouver un ensemble de caractéristiques qui permettent de cerner la notion recouverte par le mot désordre. Dans ce but, nous allons définir les propriétés statistiques associées au désordre.

Nous entendons le mot *désordre* comme un processus statistique avec des propriétés bien définies. Nous appelons *potentiel aléatoire* ou *potentiel désordonné* le type de potentiel vu par le système étudié, issu du désordre (en tant que processus statistique aléatoire) et dont les variations d'amplitude et/ou spatiales sont aléatoires. Enfin, une *réalisation du potentiel aléatoire* correspond à un tirage particulier (selon la statistique du désordre) du potentiel aléatoire. Ainsi, le désordre n'est pas caractérisé par une réalisation particulière du potentiel aléatoire mais par ses propriétés statistiques. En particulier, un phénomène observé ne peut être attribué à la présence de désordre seulement s'il existe au sens statistique, *i.e.* seulement s'il persiste après une moyenne sur les réalisations du potentiel aléatoire. Ce point fondamental a pour conséquence que, lorsque le travail porte sur l'influence du désordre, chaque quantité étudiée doit être moyennées sur un grand nombre de réalisations du potentiel aléatoire. Dans tout le manuscrit, nous noterons $\langle \dots \rangle$ la moyenne statistique sur le désordre.

Comme nous venons de le mentionner, nous n'allons pas travailler avec n'importe quel désordre. Il existe deux propriétés statistiques, définissant un type de désordre, que nous allons supposer vérifiées : l'homogénéité spatiale des moyennes et l'absence de corrélations à longue portée [69]. Remarquons que dans les situations expérimentales pour lesquelles nous avons mentionné la présence de désordre ces deux hypothèses statistiques sont valides.

Homogénéité spatiale

Nous considérons une réalisation $V(\mathbf{r})$ d'un potentiel aléatoire. L'hypothèse d'homogénéité spatiale des moyennes stipule que toute moyenne statistique du potentiel aléatoire est invariante

par translation, ce qui s'écrit

$$\langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2)\dots V(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle V(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a})V(\mathbf{r}_2 + \mathbf{a})\dots V(\mathbf{r}_n + \mathbf{a}) \rangle \quad (1.5)$$

avec \mathbf{a} un vecteur quelconque et n un entier positif. Cette propriété est valide dans un système désordonné de taille infinie ayant la statistique d'un champ de tavelures.

Absence de corrélation à longue portée

L'hypothèse de l'absence de corrélation à longue portée établit la disparition des corrélations statistiques entre les valeurs du potentiel aléatoire prises en deux points infiniment éloignés l'un de l'autre. Cette hypothèse se met sous la forme, à la limite $[\|\mathbf{a}\| \rightarrow \infty]$:

$$\begin{aligned} & \langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2)\dots V(\mathbf{r}_n)V(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{a})V(\mathbf{r}'_2 + \mathbf{a})\dots V(\mathbf{r}'_n + \mathbf{a}) \rangle = \\ & \langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2)\dots V(\mathbf{r}_n) \rangle \times \langle V(\mathbf{r}'_1 + \mathbf{a})V(\mathbf{r}'_2 + \mathbf{a})\dots V(\mathbf{r}'_n + \mathbf{a}) \rangle \end{aligned} \quad (1.6)$$

Nous pouvons maintenant présenter les caractéristiques principales d'un désordre, défini comme processus stochastique aléatoire, possédant les propriétés d'homogénéité spatiale et d'absence de corrélation à longue portée.

1.3.2 Propriétés statistiques et principe ergodique

Avec la définition du désordre en tant que processus stochastique aléatoire (homogène spatialement et sans corrélations à longue portée) que nous avons défini au paragraphe précédent, plusieurs modèles de désordre peuvent être envisagés. Ces différents modèles permettent de décrire différentes situations physiques : modèle de désordre discret non-corrélé, modèle discret avec une fonction de corrélation à deux points d'extension finie, modèle continu gaussien, etc... Nous n'allons pas présenter ces différents modèles mais nous rappelons leurs propriétés communes concernant leur caractérisation à travers les moments statistiques ainsi que le principe ergodique spatial.

Caractérisation statistique

Un potentiel aléatoire $V(\mathbf{r})$ est complètement déterminé par les propriétés statistiques du modèle de désordre dont il est issu, ces propriétés étant communes à toutes les réalisations du potentiel aléatoire associé. Il peut être caractérisé par une distribution de probabilité normalisée [1]

$$P[V(\mathbf{r})] \mathcal{D}V(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp \left[-a \int d\mathbf{r} F[V(\mathbf{r})] \mathcal{D}V(\mathbf{r}) \right] \quad (1.7)$$

où a est une constante et F une certaine fonction liée au modèle de désordre envisagé.

Une autre manière de caractériser le désordre qui engendre le potentiel V est de connaître toutes les fonctions de corrélation C_n de ce dernier définies par

$$C_n(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n) = \langle V(\mathbf{r}_1)V(\mathbf{r}_2)\dots V(\mathbf{r}_n) \rangle. \quad (1.8)$$

Cette information définit le processus aléatoire (*i.e.* le désordre) engendrant les différentes réalisations du potentiel aléatoire. Remarquons que très souvent, le calcul des différentes fonctions

de corrélation est effectué à partir d'un fonctionnelle génératrice associée à la distribution de probabilité (1.7). En effet, en définissant la fonctionnelle génératrice telle que

$$\Phi[g] = \langle \exp \left[\int d\mathbf{r} g(\mathbf{r})V(\mathbf{r}) \right] \rangle \quad (1.9)$$

il vient alors

$$C_n(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n) = \frac{\delta^n \Phi[g]}{\delta g(\mathbf{r}_1) \dots \delta g(\mathbf{r}_n)} \Big|_{g=0}. \quad (1.10)$$

Pour finir, nous définissons ce que nous appellerons par la suite les *moments statistiques* du potentiel aléatoire $V(\mathbf{r})$ comme les valeurs aux points $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \dots = \mathbf{r}_n = \mathbf{r}$ des fonctions de corrélation C_n . Ainsi le moment d'ordre n est défini par

$$m_n = \langle V^n(\mathbf{r}) \rangle \quad (1.11)$$

et il est invariant avec la position \mathbf{r} puisque le potentiel aléatoire est spatialement homogène.

Ergodicité spatiale

Un désordre spatialement homogène (*i.e.* infini) sans corrélation à longue distance possède la propriété d'être *auto-moyennant* pour toute quantité physique extensive [69]. Cette propriété d'auto-moyennage signifie que toute quantité physique extensive volumique F_{dV} tend vers une valeur déterministe lorsque le volume dV dans lequel elle est évaluée tend vers l'infini. Cette valeur déterministe correspond à la valeur moyennée statistiquement sur une réalisation du potentiel aléatoire, *i.e.* sur un volume de petite taille finie dV :

$$\lim_{dV \rightarrow \infty} dV^{-1} F_{dV} = \langle dV^{-1} F_{dV} \rangle. \quad (1.12)$$

Le caractère auto-moyennant d'un potentiel aléatoire peut être démontré en étudiant les moments statistiques m_n du potentiel. Lorsque tous les moments statistiques peuvent être obtenus en intégrant sur le volume du système le résultat donné par une seule réalisation, le potentiel est auto-moyennant :

$$m_n = \lim_{[dV \rightarrow \infty]} \frac{1}{dV} \int_{dV} d\mathbf{r} V^n(\mathbf{r}) \quad \text{for } n = 1 \dots \infty. \quad (1.13)$$

Dans une telle situation où le résultat sur une réalisation donne environ le même résultat que la moyenne statistique, il n'est pas nécessaire d'effectuer une moyenne d'ensemble pour obtenir un résultat statistiquement valide.

Le fait que la moyenne spatiale coïncide avec la moyenne statistique est équivalent au *principe ergodique* usuellement formulé en physique statistique qui suppose que la moyenne temporelle est égale à la moyenne statistique. Il s'agit ici d'un principe ergodique spatial.

La densité d'état d'un système, désordonné ou non, est une caractéristique importante dans sa description. Or, une propriété essentielle des désordres homogènes sans corrélation à longue portée est le caractère auto-moyennant de la densité d'état [69]. Ainsi, le spectre commun à toutes réalisations du potentiel aléatoire donne une information commune à celles-ci.

Désordre de volume fini

Dans un système de volume fini, le désordre n'est pas strictement homogène spatialement : l'invariance par translation peut toujours être brisée d'une façon ou d'une autre. Dans les expériences, nous travaillons avec des systèmes de taille finie pour lesquels le désordre n'est donc pas auto-moyennant au sens strict. Cela étant, plus le volume du système est grand et plus le désordre s'approche d'un désordre auto-moyennant. Nous allons préciser ce point dans le cas d'un système 1D dans les lignes qui suivent. Il est important de souligner que cette propriété, celle pour un système fini de s'approcher d'un système auto-moyennant, est définie seulement pour un certain nombre de quantités faisant apparaître une moyenne spatiale sur la taille du système considéré et pouvant s'exprimer en fonction des différents moments spatiaux. Cette propriété ne s'applique donc pas à toute mesure effectuée sur le système de taille finie.

Si pour un désordre spatialement homogène le principe ergodique spatial stipule que chaque moment spatial d'ordre n est égal au moment statistique d'ordre n , ce n'est plus le cas dans un système de taille finie. Dans un système de taille finie d , nous définissons les moments spatiaux $m_n(d)$ avec

$$m_n = d^{-1} \int_d dz V^n(z). \quad (1.14)$$

Si la taille finie d d'un système à 1D (selon l'axe noté Oz) est grande devant les variations spatiales, notées Δz , du potentiel aléatoire, le système approche la situation auto-moyennante pour les différents moments spatiaux. Ainsi, si la condition $d \gg \Delta z$ est remplie, le potentiel aléatoire doit pouvoir être considéré auto-moyennant pour les différents moments spatiaux $m_n(d)$ dans une bonne approximation.

Pour donner un peu plus de sens à cette idée, nous pouvons considérer la situation décrite sur la figure 1.4. Nous calculons le moment spatial d'ordre 2, $m_2(d)$, pour deux systèmes de tailles différentes. Nous présentons deux réalisations du désordre pour chacun des systèmes. Pour le premier système (figure 1.4a), le moment $m_2(d)$ est très différent d'une réalisation à l'autre. C'est un résultat intuitif que nous aurions pu prédire en regardant les deux réalisations du potentiel aléatoire. Dans le cas du second système (figure 1.4b), pour lequel le rapport $d/\Delta z$ est beaucoup plus grand, les moments sur deux réalisations différentes donnent des résultats très proches. Ce dernier système est donc plus proche d'être auto-moyennant que le premier pour le moment spatial $m_2(d)$.

En pratique il est utile de quantifier la précision de cette approximation d'un potentiel auto-moyennant. En effet, en supposant que la quantité physique mesurée peut s'écrire en fonction des différents moments spatiaux $m_n(d)$, cela permet d'identifier les conditions pour lesquelles il est nécessaire d'effectuer une moyenne d'ensemble des mesures expérimentales sur plusieurs réalisations du potentiel aléatoire, et celles pour lesquelles il est possible de considérer ce même potentiel auto-moyennant. Nous pouvons préciser cette situation en comparant la différence entre les moments statistiques m_n et les moments intégrés sur la taille d du système. Nous définissons la déviation standard $\sigma_{m_n}(d)$ du moment spatial d'ordre n par la relation usuelle suivante ($\langle \dots \rangle$ est la moyenne statistique sur les réalisations du désordre) :

$$\sigma_{m_n}^2(d) = \langle m_n(d)^2 \rangle - \langle m_n(d) \rangle^2. \quad (1.15)$$

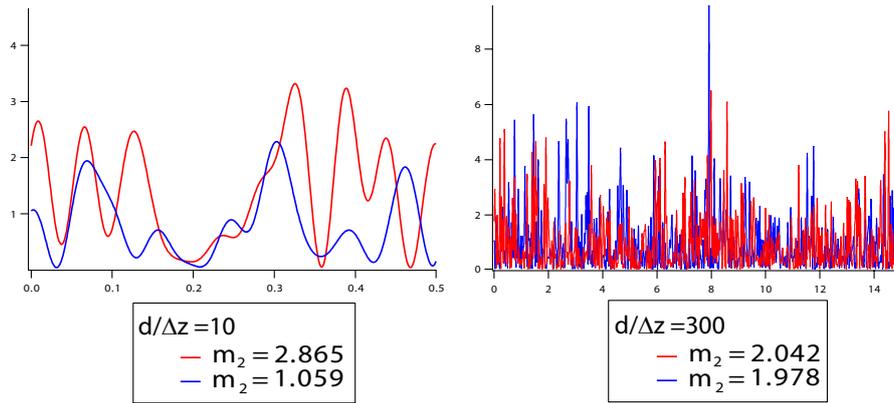


FIG. 1.4 – Illustration intuitive du fait que la taille d’un potentiel aléatoire par rapport à l’échelle typique de ses variations spatiales est liée au caractère auto-moyennant du potentiel pour les différents moments spatiaux $m_n(d)$. Le tirage de ces deux potentiels a été effectué à partir de la statistique d’un champ de tavelures.

Dans un système de taille infinie ($d = \infty$), la propriété d’auto-moyennage implique que cette déviation standard $\sigma_{m_n}(d = \infty)$ est nulle, i.e. la moyenne spatiale de n’importe quelle puissance du potentiel aléatoire est égale d’une réalisation à l’autre. Dès lors que le potentiel n’est pas auto-moyennant, cette déviation standard n’est pas nulle. Ainsi le calcul de la déviation standard $\sigma_{m_n}(d)$ du moment $m_n(d)$ donne une valeur non nulle pour un système de taille finie qui peut être utilisée pour quantifier la justesse de l’approximation d’auto-moyennage pour une quantité physique mesurée donnée.

Comme nous l’avons déjà mentionné, un désordre est caractérisé par la connaissance de *tous* ses moments statistiques. Dans le cas d’un système strictement auto-moyennant les déviations standards de *tous* les moments sont nulles. Pour un système de taille finie il faudrait donc aussi calculer *toutes* les moyennes statistiques afin de caractériser l’écart à un système auto-moyennant pour toute quantité physique s’écrivant en fonction des différents moments du potentiel. Dans la pratique, nous nous intéressons à la mesure d’une quantité physique particulière sur le système de taille finie. Nous pouvons alors restreindre l’étude sur l’auto-moyennage à la question de savoir si, pour la quantité physique mesurée, le potentiel aléatoire est auto-moyennant. Il faut donc alors exprimer cette quantité physique à partir de différents moments du potentiel aléatoire intégrés sur la taille du système et tester la validité de l’approximation d’auto-moyennage sur ces seules moyennes.

Enfin, rappelons que dans un système désordonné de taille fini proche d’être auto-moyennant le spectre des différentes réalisations du potentiel aléatoire sera identique pour chacune d’elle. Ce point s’avèrera important dans notre discussion du potentiel aléatoire optique de tavelures que nous utiliserons dans nos expériences.

1.3.3 Une caractérisation précise du désordre nécessaire

La modélisation et la compréhension de phénomènes liés à la présence de désordre nécessite l'utilisation d'un modèle de désordre qu'il s'agit de choisir en fonction de la situation à décrire. Ce choix du modèle implique très souvent un certain nombre d'approximations par rapport à la situation réelle qu'il est délicat de décrire dans toute sa complexité. Cela étant, il existe des potentiels aléatoires pour lesquels le modèle du désordre est connu exactement. C'est le cas pour le désordre issu d'un champ de tavelures que nous utiliserons dans nos expériences avec des atomes froids.

Une fois un modèle de désordre établi, l'analyse des résultats expérimentaux comme les calculs numériques requièrent une caractérisation des principaux paramètres du potentiel aléatoire. En particulier, pour un potentiel ayant une amplitude et une échelle de variations spatiales aléatoires, deux paramètres permettent de caractériser ce dernier, à savoir l'amplitude typique σ_V des modulations du potentiel V et l'échelle spatiale de variation Δz du potentiel selon un axe (l'axe Oz ici). A ces deux paramètres, il convient d'ajouter la connaissance du spectre du désordre qui sera commun à toutes les réalisations du potentiel aléatoire. Cet ensemble (spectre, amplitude typique et échelle spatiale) permet de décrire dans une bonne mesure les différentes réalisations du potentiel aléatoire.

L'amplitude σ_V sera définie comme la déviation standard des variations de l'amplitude du potentiel V , *i.e.*

$$\sigma_V^2 = \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2. \quad (1.16)$$

L'échelle de variation spatiale Δz du potentiel aléatoire sera définie comme la largeur de la fonction d'auto-corrélation du potentiel. Remarquons enfin que les deux paramètres σ_V et Δz sont reliés aux deux premiers moments du potentiel aléatoire. En toute rigueur, ils ne caractérisent donc pas complètement le potentiel aléatoire.

1.4 Conclusion

Depuis le milieu du 20^{ème} siècle, le jeu subtil des interférences en présence de désordre a donné lieu à de nombreux travaux expérimentaux et théoriques dans des domaines de la physique aussi variés que la propagation lumineuse, la conduction électronique ou encore la superfluidité de l'Hélium II. Les effets du désordre sur les ondes conduisent à des phénomènes de localisation (la localisation d'Anderson en étant certainement le plus emblématique) et à l'apparition de nouveaux états de la matière. En particulier, l'étude de la transition de phase quantique métal-isolant induite par le désordre dans les systèmes fortement corrélés constitue l'un des sujets de recherche les plus actifs aujourd'hui. Les condensats de Bose-Einstein gazeux représentent un outil d'investigation formidable de ces effets cohérents et permettent de revisiter un grand nombre de questions liées à la présence de désordre dans un système quantique cohérent et en présence d'interactions plus ou moins fortes.

A la fin de ce chapitre, nous avons décrit les propriétés générales de la notion de désordre et ses réalisations. Nous poursuivons notre propos au chapitre suivant par la réalisation et la caractérisation de potentiels aléatoires optiques issus d'un champ de tavelures pour les condensats de Bose-Einstein gazeux.

Les tavelures : un potentiel optique aléatoire pour les atomes

La compréhension de l'interaction entre un faisceau lumineux monochromatique (un laser) et la matière est relativement récente et a été développée en parallèle des premières réalisations expérimentales sur la lumière laser. La force optique dipolaire résultant de l'application d'un champ laser sur un atome neutre a été considérée pour la première fois par Askar'yan en 1962. La proposition de Askar'yan visait à créer un piège dipolaire pour des plasmas ou des atomes neutres [107]. Le piégeage unidimensionnel d'atomes dans un réseau optique très désaccordé [108], l'extension de ce piégeage à trois dimensions et la distinction entre la force de pression de radiation et la force dipolaire conservative [109, 110] ont été développés par la suite.

La première démonstration expérimentale de l'action de la force dipolaire sur des atomes neutres a été réalisée à la fin des années 1970 par Bjorkholm *et al.* en utilisant un laser focalisé [111]. Mais il a fallu attendre 1986 et la première réalisation expérimentale d'un piège optique par Chu *et al.* [112] pour que le champ d'expérimentation de l'interaction atome-lumière se développe véritablement. Les atomes ainsi piégés optiquement sont refroidis jusqu'à des températures de quelques micro-kelvin [27]. Cette voie du piégeage optique d'atomes neutres, prolongée à une phase d'évaporation radio-fréquence dans un piège magnétique a permis d'atteindre les régimes de la dégénérescence quantique et l'obtention de condensat de Bose-Einstein [15, 16] et de mer de Fermi dégénérée [113]. La force optique dipolaire est aujourd'hui quotidiennement utilisée dans les domaines des atomes froids et de l'optique atomique.

Outre l'aspect dissipatif de la force de pression de radiation utilisée pour le refroidissement laser d'une assemblée d'atomes, l'interaction de la lumière laser avec la matière permet de créer, dans certaines conditions (avec des grands désaccords par rapport à la fréquence de résonance de la transition atomique), des potentiels conservatifs. La réalisation d'un grand nombre de configurations est envisageable avec ces potentiels optiques. Des potentiels périodiques à une, deux et trois dimensions ont été réalisés [114] et des structures plus exotiques en nid d'abeille [115], en réseau de Kagamé [116] ou encore avec une géométrie adaptée à l'effet Kondo [117] envisagées. Ces potentiels ont permis de re-visiter des problèmes de la matière condensée (par exemple la transition superfluide-isolant de Mott [26]), d'étudier les effets des non-linéarités sur le transport d'onde de matière dans des réseaux en analogie avec l'optique non-linéaire [114], ou encore d'envisager des développements futurs de la cryptographie quantique à partir du piégeage d'atome unique [118]. La grande souplesse d'utilisation des potentiels optiques dipolaires conservatifs permet également d'envisager la réalisation de potentiels aléatoires.

A la fin des années 1990, des travaux sur l'effet Sysiphe ont débouchés sur la proposition d'utiliser un champ de tavelures dans une direction de l'espace pour le refroidissement

tri-dimensionnel d'atomes [87]. Comme le soulignent Horak *et al.* [87], le champ de tavelures engendre un potentiel stationnaire dont les variations spatiales d'intensité sont aléatoires. Un champ de tavelures est une figure d'interférences entre des ondes multiples issues d'un grand nombre de diffuseurs. Les variations spatiales de l'intensité des tavelures sont aléatoires et sont déterminées par les propriétés statistiques issues du phénomène de diffraction. Nous avons décidé d'utiliser une telle distribution spatiale aléatoire d'intensité afin de créer un potentiel optique aléatoire pour les atomes froids. Cela tient deux choses : d'une part à la flexibilité, sur le plan expérimental, de modifier les paramètres de tels potentiels aléatoires de tavelures, d'autre part à la connaissance exacte des propriétés statistiques de ces potentiels de tavelures. Nous verrons, dans ce chapitre en particulier et dans les suivants dans une moindre mesure, en quoi ces deux aspects ont été fondamentaux dans notre travail.

L'utilisation de champ de tavelures pour les condensats gazeux a également été développée au LENS à Florence donnant lieu à la première publication dans le domaine des condensats désordonnés [88].

Dans cette partie, nous présentons les caractéristiques et la réalisation expérimentale d'un champ de tavelures. Nous expliquons ensuite comment nous utilisons cette figure d'interférences pour créer un potentiel optique aléatoire pour les condensats de Bose-Einstein. Enfin, nous décrivons dans le détail la mise en place et la calibration d'un tel désordre pour les atomes froids [33].

2.1 La lumière comme potentiel optique vu par les atomes

Dans ce paragraphe nous rappelons les principes qui sont à la base de l'utilisation de la lumière laser pour créer un potentiel optique vu par les atomes.

La description de l'interaction entre la lumière laser et la matière fait intervenir trois systèmes : le système atomique (que l'on peut considérer comme un système à deux niveaux dans un premier temps), le champ laser $\vec{E}(\vec{r})$ et le champ du vide (afin de décrire les processus d'émission spontanée). L'origine de l'interaction atome/lumière est électromagnétique puisqu'il s'agit d'un couplage entre le dipole électrique de l'atome et le champ électrique de la lumière laser et du vide. Il est bien connu que, dans ce cadre, l'atome est soumis à une force qui s'écrit comme la somme d'une force dissipative (proportionnelle au gradient de la phase du champ laser) et d'une force conservative (proportionnelle au gradient du module du champ laser) [84]. La partie dissipative de cette interaction atome-champ laser est à l'origine du refroidissement d'atomes par la lumière laser. Nous nous intéressons ici à la partie conservative de cette force, appelée force dipolaire.

Potentiel optique dipolaire

L'origine physique des potentiels optiques vus par les atomes froids vient de la force dipolaire proportionnelle au gradient du module du champ électrique laser et se met sous la forme [85] :

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \text{Re}(\alpha(\omega_L)) \nabla(|\tilde{E}(\vec{r})|^2) \quad (2.1)$$

où $\alpha(\omega_L)$ est la polarisabilité de l'atome à la pulsation du champ laser ω_L et $\vec{E}(\vec{r})$ représente le champ électrique de la lumière laser. Le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ est indépendant du temps. En effet l'échelle de temps du mouvement du centre de masse des atomes \hbar/E_{recul} est grande devant l'inverse de la pulsation laser ω_L^{-1} , rendant possible la moyenne temporelle du carré du champ électrique laser instantané.

Pour une pulsation laser ω_L proche de la pulsation ω_0 d'une transition atomique entre deux niveaux atomiques $|g\rangle$ et $|e\rangle$, la partie réelle de la polarisabilité s'écrit

$$\text{Re}(\alpha(\omega_L)) \simeq \frac{|\langle e|\hat{d}_{\vec{E}}|g\rangle|^2}{\hbar(\omega_0 - \omega_L)} \quad (2.2)$$

où $\hat{d}_{\vec{E}}$ est l'opérateur dipolaire dans la direction du champ laser \vec{E} .

Notant $I(\vec{r}) = |\vec{E}(\vec{r})|^2$ l'intensité du champ laser, la force dipolaire subie par l'atome dans le champ laser est donc proportionnelle à $\nabla(I(\vec{r})/(\omega_0 - \omega_L))$. Ainsi, pour un désaccord vers le bleu de la transition atomique ($\omega_L > \omega_0$) les atomes sont attirés aux minima d'intensité alors que pour un désaccord vers le rouge ($\omega_L < \omega_0$) les atomes sont attirés par les maxima d'intensité. Un profil d'intensité modulé spatialement crée donc un profil de potentiel pour des atomes neutres.

Le calcul de la force dipolaire fait apparaître des termes oscillant aux fréquences $\omega_L + \omega_0$ et $\omega_L - \omega_0$. En supposant que le désaccord $\delta = \omega_L - \omega_0$ est faible devant la pulsation de la transition atomique, $|\delta| \ll \omega_0$, les termes oscillant à $\omega_L + \omega_0$ peuvent être négligés devant ceux oscillant à δ (approximation de l'onde tournante) [85]. Le potentiel auquel sont soumis les atomes se met alors sous la forme simplifiée :

$$V(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} \frac{I(\vec{r})}{\delta} = \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} \frac{I(\vec{r})}{\delta} \quad (2.3)$$

où $1/\Gamma$ est la durée de vie du niveau atomique excité $|e\rangle$, c est la vitesse de la lumière et I_{sat} est l'intensité de saturation de la transition atomique. Dans le cas d'un désaccord vers le rouge (respectivement vers le bleu), les maxima d'intensité correspondent à des maxima (respectivement des minima) du potentiel optique vu par les atomes.

Le calcul du potentiel dipolaire optique sur un atome à deux niveaux [Eq.(2.3)] ne prend pas en compte la structure complexe des niveaux atomiques dont le nombre ne se réduit pas à deux. Il est alors possible d'étendre cette formulation du potentiel dipolaire au cas des atomes à plusieurs niveaux [85]. En utilisant les coefficients de Clebsch-Gordan définis par

$$C_{(F', m_{F'}), (F, m_F)} = \langle F', m_{F'} | \vec{d} \cdot \vec{E} | F, m_F \rangle, \quad (2.4)$$

et les moments dipolaires $d_{F', F}$ réduits des transitions hyperfines $F \rightarrow F'$, le potentiel dipolaire d'un atome à plusieurs niveaux s'écrit alors [85, 119] :

$$V(\vec{r}) = \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} \left(\sum_{F'} \frac{d_{F', F}^2 |C_{(F', m_{F'}), (F, m_F)}|^2}{\delta_{F', F}} \right) I(\vec{r}). \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) précédente montre qu'un profil d'intensité modulé spatialement donne lieu à un potentiel dipolaire vu par les atomes ayant les mêmes modulations spatiales.

Force dissipative et chauffage des atomes

Comme nous l'avons mentionné, l'interaction atome/champ laser met en jeu une force dissipative, appelée force de pression de radiation, qui peut transférer de l'énergie aux atomes. Or nous travaillons avec des atomes condensés et cette pression de radiation peut conduire à une diminution du nombre d'atomes condensés, voire à la disparition du condensat de Bose-Einstein. Nous voulons donc travailler avec un potentiel seulement conservatif.

Dans le cas d'un atome à deux niveaux, l'énergie mise en jeu par la pression de radiation prend la forme [85]

$$\hbar\Gamma_{\text{sc}} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\delta^2} I(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{\delta} V(\vec{r}). \quad (2.6)$$

Le rapport entre cette énergie de dissipation et le potentiel conservatif dipolaire est inversement proportionnel au désaccord δ . Ainsi, l'utilisation de grands désaccords δ permet de s'affranchir du terme de pression de radiation et de ne considérer que la partie conservative $V(\vec{r})$ de l'interaction atome/champ laser. La contre-partie expérimentale à cette situation de grands désaccords réside dans la nécessité d'utiliser des intensités laser importantes afin que l'amplitude du potentiel dipolaire (Eq. 2.5) vu par les atomes ne soit pas ridiculement petite.

Dans toutes les expériences décrites dans ce mémoire, nous nous placerons dans cette situation où la pression de radiation est négligeable à l'échelle de temps de nos expériences. Le potentiel optique aléatoire créé à partir d'un réseau de tavelures pourra alors être considéré comme un potentiel conservatif.

2.2 Les tavelures, un champ d'intensité lumineuse aléatoire

Nous décrivons dans cette partie l'origine du phénomène de tavelures et décrivons ses principales propriétés. Nous discutons également l'observation d'un champ de tavelures avec un détecteur dont la limite de résolution influe sur cette observation, ainsi que la question du moyennage statistique dans un système de taille finie.

2.2.1 Interférences lumineuses et champ de tavelures

On désigne par le terme "tavelures" ou "champ de tavelure" la distribution spatiale aléatoire d'intensité qui résulte de la diffusion d'une lumière laser cohérente sur une surface rugueuse (figure 2.1). Cette diffusion de la lumière laser par une surface rugueuse peut se faire en réflexion ou en transmission selon le montage et, dans les deux cas, elle consiste en une modulation spatiale de la phase et de l'amplitude du champ électrique de la lumière incidente [120–122]. Dans notre expérience, ces modulations de la phase et de l'amplitude du champ électrique viennent des variations locales de l'épaisseur d'un verre dépoli. Remarquons que dans ce mémoire nous

limitons notre étude à celle d'une surface rugueuse qui est identique au cours du temps, nous obtenons ainsi une distribution de tavelures temporellement invariante.

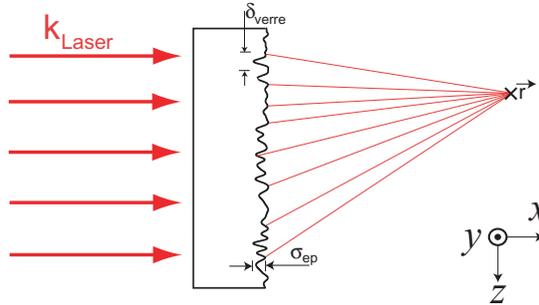


FIG. 2.1 – Diffusion d'une onde plane incidente cohérente par un verre diffuseur. Les aspérités du verre diffuseur engendrent des ondes partielles qui interfèrent au point \vec{r} et dont les différences relatives de marche en \vec{r} peuvent être grandes devant la longueur d'onde.

La distribution spatiale d'intensité aléatoire¹ ainsi engendrée possède un contraste élevé. Deux images de tavelures dont la forme des grains est différente sont présentées sur les figures 2.2a et 2.2b. Une coupe montrant les variations spatiales de l'intensité des tavelures selon une direction est présentée sur la figure 2.2c. Le caractère aléatoire des variations de l'intensité et l'échelle spatiale de modulation apparaissent sur ce profil unidimensionnel.

Notre verre dépoli

Dans notre expérience, le diffuseur est un verre dépoli. Il s'agit d'une lame de verre attaquée chimiquement. La lame de verre possède l'avantage d'avoir une transmission proche de l'unité. Le produit chimique placé sur le verre pour l'attaquer crée des variations aléatoires de l'épaisseur du verre d'un point à l'autre de ce dernier. Nous avons caractérisé le résultat de l'attaque chimique de la lame de verre en traçant le profil de la surface du verre à l'aide d'une pointe en contact avec le verre. L'amplitude typique des variations d'épaisseur du verre, définie comme la déviation standard de l'épaisseur du verre, est égale à $\sigma_{ep} \simeq 3.5 \mu\text{m}$. La fonction d'auto-corrélation de ces profils d'épaisseur permet d'évaluer l'échelle de variation spatiale sur le verre. Nous obtenons² $\delta_{\text{verre}} \simeq 0.3 \text{ mm}$.

Modélisation et propriétés statistiques des tavelures

Afin de comprendre et de décrire le phénomène de tavelures, la surface rugueuse du diffuseur peut être modélisée comme une assemblée de N centres diffuseurs ponctuels indépendants. Cette image est valide lorsque l'échelle spatiale δ_{verre} de variation de l'épaisseur du verre (dans le plan de la surface rugueuse, voir Fig. 2.1) est grande devant la longueur d'onde, chaque

¹Notons que l'on parle souvent de "taches de lumière", ou "grains de tavelure" pour décrire cette distribution spatiale de l'intensité.

²Ce qui correspond à un angle de diffusion du verre dépoli de 1 degré.

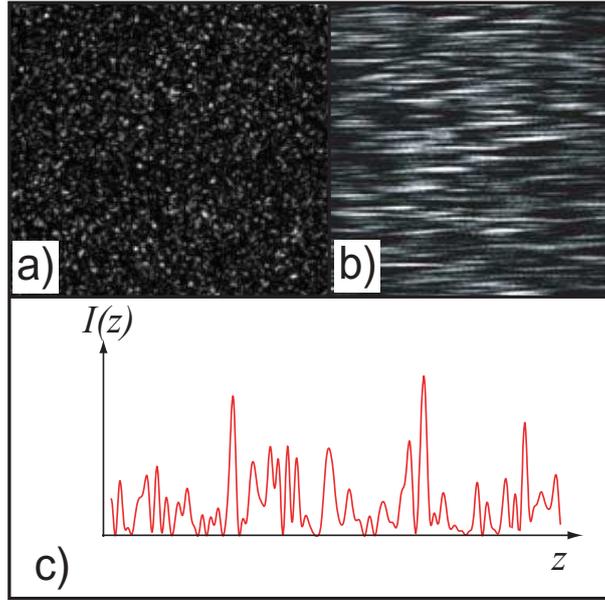


FIG. 2.2 – **a)** Image de tavelures avec des grains isotropes. **b)** Image de tavelures avec des grains anisotropes. **c)** Coupe d'une image de tavelures montrant les variations spatiales de l'intensité selon une direction de l'espace.

diffuseur ponctuel ayant pour taille typique la longueur de corrélation δ_{verre} de la surface du diffuseur. En effet, sur une taille inférieure à la longueur de corrélation δ_{verre} , les variations de l'épaisseur sont faibles et la diffusion de l'onde incidente peut être considérée uniforme en première approximation. Au contraire, deux points de la surface rugueuse séparés d'une distance plus grande que la longueur de corrélation δ_{verre} sont par définition décorrélés. Ils diffusent la lumière incidente indépendamment l'un de l'autre, en particulier les amplitudes et les phases diffusées par ces deux points seront indépendantes.

Les ondes partielles issues des différents centres diffuseurs de la surface rugueuse possèdent donc des amplitudes et des phases aléatoires et interfèrent constructivement ou destructivement lors de leur propagation en un point \mathbf{r} de l'espace (voir Fig. 2.1).

Considérant que la transmission de l'onde incidente polarisée linéairement selon Oy (voir Fig. 2.1) à travers le diffuseur n'affecte pas sa polarisation, nous ne considérerons dans la suite que son amplitude complexe $A(\vec{r})$. L'expression complète du champ électrique s'écrit alors

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{2} A(\vec{r}) e^{j\omega_{\text{laser}} t} + \text{c.c.} \right] \vec{e}_y. \quad (2.7)$$

L'amplitude complexe $A(\vec{r})$ du champ électrique résulte de la diffusion sur la surface rugueuse, c'est à dire de la diffusion par les N centres diffuseurs ponctuels. A chaque centre diffuseur k sont associées une amplitude a_k/\sqrt{N} et une phase ϕ_k du champ électrique partiel diffusé. L'amplitude complexe $A(\vec{r})$ s'écrit alors :

$$A(\vec{r}) = E e^{j\phi} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k e^{j\phi_k}. \quad (2.8)$$

Lorsque la rugosité de la surface du diffuseur est telle que les déphasages des ondes partielles diffusées sont uniformément distribués entre 0 et 2π , toute la lumière incidente est diffusée. Dans ce cas, les tavelures sont dites "pleinement développées". Dans notre cas, les variations de l'épaisseur du verre dépoli sont à l'origine de la modulation du champ électrique incident. Ainsi, la condition sur la rugosité de la surface du diffuseur s'exprime en comparant la variance de l'épaisseur du verre dépoli σ_{ep} (voir Fig. 2.1) avec la longueur d'onde de la lumière incidente λ_{laser} . En effet, lorsque $\sigma_{ep} \gg \lambda_{laser}$ les phases acquises localement par la lumière incidente lors de sa diffusion sur chaque point diffuseur de la surface sont uniformément distribuées dans $[0, 2\pi]$ et la composante de l'ordre zéro ne se distingue pas des autres composantes de la diffusion.

En supposant que les amplitudes a_k et les phases ϕ_k du champ électrique diffusé sont indépendantes³ et que les phases ϕ_k sont uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ ⁴, il est possible d'utiliser le Théorème de la Limite Centrale pour les parties réelles et imaginaires de l'amplitude complexe du champ $A(\vec{r})$ dès lors que le nombre de diffuseurs est grand, $N \gg 1$. L'amplitude complexe du champ électrique diffusé résulte alors d'une marche au hasard dans le plan complexe.

Avec les hypothèses précédentes, les parties réelle et imaginaire de $A(\vec{r})$ sont des variables gaussiennes aléatoires indépendantes et la distribution de probabilité au point \vec{r} de l'amplitude et de la phase du champ diffusé s'écrit [120] :

$$p(E, \phi) = \frac{1}{\pi E_0^2} e^{E^2/E_0}. \quad (2.9)$$

Il est alors possible d'établir les propriétés statistiques de l'intensité des tavelures $I = |E|^2$ à partir de celles de l'amplitude du champ électrique E [120]. En particulier, nous pouvons établir les propriétés statistiques "du premier ordre" (à un point) qui correspondent à la distribution d'intensité des tavelures et les propriétés statistiques du "second ordre" (à deux points) qui décrivent notamment la fonction de corrélation en intensité et donnent la taille typique des grains de tavelures.

Dans les paragraphes qui suivent nous décrivons ces propriétés statistiques des tavelures qui sont également les propriétés statistiques du désordre vu par les atomes (voir Eq. 2.5).

2.2.2 Amplitude des tavelures

Dans toutes nos expériences nous utilisons une image de tavelures créée par transmission à travers un verre dépoli, comme indiqué sur le montage de la figure 2.3. Pour la description des propriétés du désordre créé, nous nous plaçons dans le plan focal de la lentille qui sera notre plan d'observation des tavelures (figure 2.3).

L'image des tavelures de la figure 2.2 met en évidence les variations spatiales aléatoires de l'intensité lumineuse dans le plan d'observation des tavelures. Une réalisation de tavelures

³Cela vient de la définition de la taille des diffuseurs comme nous venons de l'expliquer.

⁴Il s'agit de la condition d'obtention de tavelures pleinement développées, condition valide dans notre expérience où $\sigma_{ep} \simeq 3.5 \mu\text{m} > \lambda \simeq 780 \text{ nm}$.

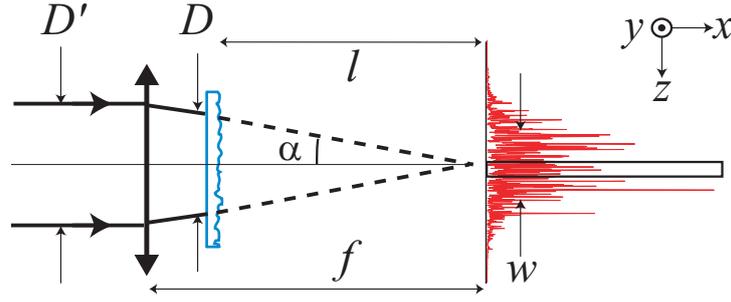


FIG. 2.3 – Réalisation expérimentale d'un champ de tavelures par transmission. Un faisceau laser incident de diamètre D' et de longueur d'onde λ converge au foyer d'une lentille de focale f . Un verre dépoli diffuse la lumière laser et nous observons les tavelures dans le plan focal de la lentille. La divergence à $1/e$ du faisceau laser dans le plan focal de la lentille vaut w .

correspond donc à une distribution spatiale aléatoire d'intensité dont les propriétés statistiques sont propres aux tavelures.

Avec les hypothèses de la partie 2.2.1 sur les amplitudes a_k et les phases ϕ_k du champ électrique diffusé par la surface rugueuse, il est élémentaire de montrer que la distribution d'intensité $I = |E|^2$ en un point du plan d'observation suit une loi exponentielle [120] :

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} e^{-\frac{I}{\langle I \rangle}}, \quad (2.10)$$

où les crochets $\langle \dots \rangle$ désignent une moyenne statistique sur les réalisations de tavelures et $\langle I \rangle$ est l'intensité moyenne au sens statistique.

La distribution d'intensité en un point (Eq. 2.10) nous donne une propriété importante des tavelures pleinement développées : la déviation standard de l'intensité des tavelures est égale à la valeur moyenne de l'intensité, *i.e.*

$$\sigma_I = \langle I \rangle \quad (2.11)$$

où la déviation standard σ_I est définie par

$$\sigma_I = \sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}. \quad (2.12)$$

Ces équations nous donnent également deux propriétés expérimentales intéressantes. Premièrement, le contraste, défini comme $C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$, est toujours égal à 1. Deuxièmement, la probabilité qu'un pic d'intensité d'un champ de tavelures ait une intensité supérieure ou égale à cinq fois l'intensité moyenne est inférieure à 1%. Cet ordre de grandeur donne une estimation raisonnable des pics d'intensité les plus grands d'un champ de tavelures (voir la figure 2.4). Tous ces résultats théoriques sur la distribution d'intensité ont été testés expérimentalement depuis plusieurs années. L'accord expérimental avec ces prédictions est excellent [123].

A partir de ces propriétés statistiques, il est possible de définir une amplitude des tavelures. Notons bien que par "amplitude" des tavelures nous désignons l'intensité typique observée, *i.e.* le module de l'amplitude du champ électrique. La déviation standard de l'intensité σ_I

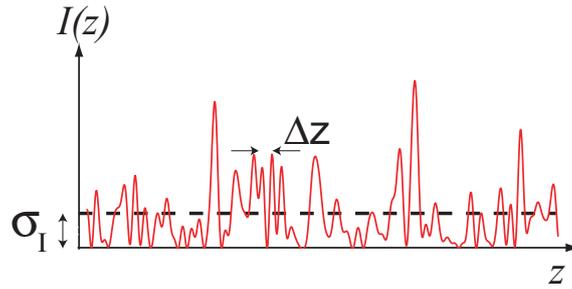


FIG. 2.4 – Variation spatiale de l'intensité d'une réalisation de tavelures selon une direction de l'espace. La déviation standard σ_I (pointillés noirs) caractérise l'amplitude typique des pics d'intensité. La longueur Δz caractérise l'échelle spatiale des modulations de l'intensité.

caractérise les variations de l'intensité du champ de tavelures. Sur le profil spatial d'intensité de la réalisation de tavelures de la figure 2.4, σ_I caractérise donc l'amplitude typique des pics d'intensité. Nous avons choisi de définir l'amplitude des tavelures comme la déviation standard de l'intensité σ_I . Nous définissons également l'amplitude σ_V du potentiel aléatoire V par la déviation standard du potentiel dipolaire associé à la distribution d'intensité des tavelures. Il vient donc :

$$\sigma_V = \frac{2}{3} \frac{\hbar \Gamma^2}{8 I_{\text{sat}}} \frac{\sigma_I}{\delta} \quad (2.13)$$

avec δ le désaccord du laser incident sur le verre dépoli.

L'intensité moyenne de l'image de tavelures $\langle I \rangle = \sigma_I$ est liée à l'intensité du laser incident sur le verre dépoli et à l'angle de diffusion de ce verre. Cet angle de diffusion θ est lié à la taille des "grains" δ_{verre} du verre dépoli par le phénomène de diffraction, $\theta \propto \lambda/\delta_{\text{verre}}$. Ainsi, cet angle de diffusion augmente lorsque la taille δ_{verre} des grains du verre diminue, accroissant la diffusion du faisceau laser incident et diminuant ainsi l'intensité moyenne du champ de tavelures (à intensité constante du laser incident).

Notons dès maintenant que, si les propriétés statistiques en un point – l'intensité moyenne – sont modifiées par un déplacement du verre dépoli dans la direction de propagation du faisceau⁵, les propriétés statistiques à deux points – la taille des grains de tavelures – sont inchangées par cette translation.

2.2.3 Taille des grains de tavelures et fonction d'auto-corrélation

Le paragraphe précédent nous a permis de connaître la statistique d'un champ de tavelures en un point. Ces données nous renseignent sur les fluctuations d'intensité du champ mais il nous manque une information majeure dans nos expériences, à savoir la taille caractéristique de sa structure spatiale. Pour caractériser le potentiel aléatoire issu d'une réalisation de tavelures, il nous faut donc caractériser l'échelle spatiale Δz des variations de l'intensité du champ de

⁵Lorsque la distance l du diffuseur au plan d'observation est diminuée (voir 2.3), le faisceau incident diverge sur une distance plus courte, augmentant ainsi l'intensité moyenne de l'image de tavelures.

tavelures (voir figure 2.4). Cette longueur Δz correspond à la taille typique des grains de tavelures.

L'échelle de variations spatiales Δz est définie comme la largeur de la fonction d'auto-corrélation C_I de la distribution d'intensité définie par

$$C_I(\delta\mathbf{r}) = \langle I(\mathbf{r})I(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \rangle \quad (2.14)$$

où $I(\mathbf{r})$ est l'intensité au point \mathbf{r} et les crochets désigne la moyenne statistique.

La fonction d'auto-corrélation de l'intensité est obtenue en appliquant la théorie de la diffraction de Fresnel/Kirchhoff au champ électrique diffusé, prenant en compte ses propriétés statistiques [120, 122]. En se plaçant dans l'approximation paraxiale, l'amplitude du champ électrique dans le plan focal de la lentille (voir la figure 2.3) est la transformée de Fourier du champ électrique transmis par le diffuseur. Ainsi, la fonction d'auto-corrélation dans le plan transverse de propagation ne dépend que des termes de phase linéaire du champ électrique. Cependant, dans la direction de propagation, les termes quadratiques de la phase doivent être pris en compte, conduisant à une expression différente de la fonction d'auto-corrélation [120].

Notre montage optique créant les tavelures est tel que le faisceau laser incident illumine une surface rectangulaire du verre dépoli. Dans toute la suite de notre discussion, nous nous placerons donc dans cette situation.

Lorsque le diffuseur est éclairé uniformément par un faisceau rectangulaire de largeur D_Y et de longueur $D_Z > D_Y$ (comme dans notre montage expérimental), les fonctions de corrélation en intensité dans le plan transverse et dans la direction de propagation s'écrivent respectivement [120, 124] :

$$C_I^\perp(\delta y, \delta z) = \langle I \rangle^2 \left[1 + f\left(\frac{D_Y}{\lambda l} \delta y\right) f\left(\frac{D_Z}{\lambda l} \delta z\right) \right], \quad (2.15)$$

$$C_I^\parallel(\delta x) = \langle I \rangle^2 \left[1 + g\left(\frac{D_Y^2}{\lambda l^2} \delta x\right) g\left(\frac{D_Z^2}{\lambda l^2} \delta x\right) \right]. \quad (2.16)$$

Nous avons noté $f(u) = [\sin(\pi u)/\pi u]^2$ la transformée de Fourier de l'ouverture rectangulaire et la fonction $g(u)$ est définie par

$$g(u) = \frac{2}{u} \left[C^2\left(\sqrt{\frac{u}{2}}\right) + S^2\left(\sqrt{\frac{u}{2}}\right) \right] \quad (2.17)$$

où $C(s)$ et $S(s)$ sont respectivement les fonctions cosinus et sinus intégrales. L'équation 2.15 est valide dans le régime de Fraunhofer, c'est à dire pour $(\delta x^2 + \delta y^2)/l^2 \ll 1$.

Remarquons que pour une ouverture rectangulaire, la densité spectrale du champ de tavelures $\langle |V(k)|^2 \rangle$ (liée à la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation par le théorème de Wiener-Kitchine) décroît linéairement avec la composante k [voir la figure 2.5b)]

Notons que la fonction d'auto-corrélation $C_A^\perp(\delta y, \delta z)$ de l'amplitude A du champ électrique dans le plan transverse est directement liée à celle de l'intensité du champ de tavelures,

$$C_I^\perp(\delta y, \delta z) = \langle I \rangle^2 \left[1 + \left| \frac{C_A^\perp(\delta y, \delta z)}{C_A^\perp(0, 0)} \right|^2 \right]. \quad (2.18)$$

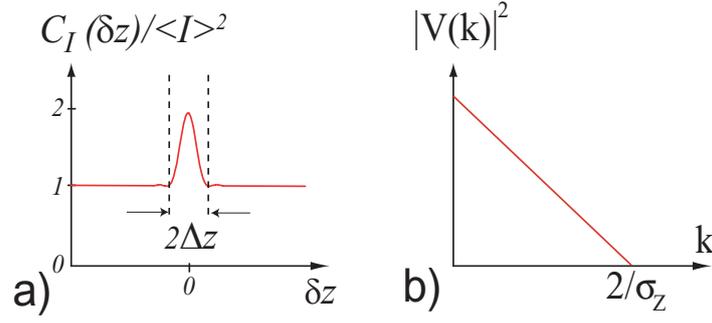


FIG. 2.5 – **a)** Fonction d'auto-corrélation du champ de tavelures pour une ouverture rectangulaire. **b)** Densité spectrale du champ de tavelures pour une ouverture rectangulaire.

Nous définissons alors les échelles spatiales Δx , Δy et Δz des modulations de l'intensité des tavelures selon les trois directions de l'espace, c'est à dire la taille des grains dans ces trois directions, comme le premier zéro de la fonction [voir la figure 2.5a]

$$\frac{C_I(\delta \mathbf{r})}{C_I(0)} = 1. \quad (2.19)$$

Cas des grains isotropes dans le plan transverse

Dans le cas où les optiques du montage décrit par la figure 2.3 sont circulaires et où l'ouverture rectangulaire est isotrope ou proche de l'être, c'est à dire $D_Y \approx D_Z$, nous obtenons les tailles de grains suivantes :

$$\Delta y = \lambda \frac{l}{D_Y}, \quad \Delta z = \lambda \frac{l}{D_Z}, \quad \Delta x \simeq 7.6 \lambda \frac{l^2}{D_Y D_Z} = \frac{7.6 \Delta y \Delta z}{\lambda}. \quad (2.20)$$

Les grains de tavelures ont dans cette configuration une taille comparable dans le plan transverse $\Delta y \approx \Delta z$ et la taille longitudinale Δx est beaucoup plus grande que ces dernières (car $\Delta y, \Delta z > \lambda$).

Il est intéressant de remarquer que les tailles transverses des grains de tavelures correspondent à la limite de diffraction, c'est à dire que les tailles transverses sont contrôlées par le demi-angle $\alpha = D'/2f$ qui est celui de la région éclairée du verre dépoli vu depuis le point d'observation (voir la figure 2.3). La relation de transformée de Fourier entre la lentille et le plan d'observation implique cette relation entre ouverture angulaire et taille de grain. De même, la transformée de Fourier inverse entre le plan d'observation et la lentille implique que la tâche d'éclaircissement du champ de tavelure est définie par la taille des grains sur le verre dépoli (voir figure 2.6).

La relation entre la taille des grains de tavelure Δz ou Δy et l'ouverture angulaire α montre qu'une translation du verre dépoli selon la direction Ox ne change pas la taille des grains de tavelures puisque l'angle α reste constant. De plus, les tailles de grains dans le plan focal de la lentille sont indépendantes de la taille des diffuseurs sur le verre dépoli.

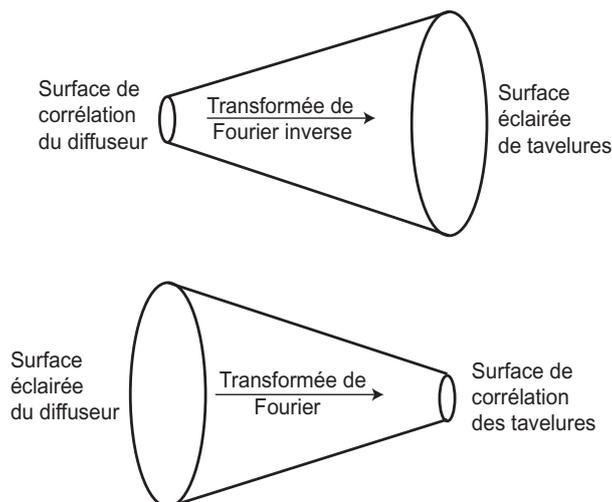


FIG. 2.6 – Relation de transformée de Fourier entre les surfaces éclairées et de corrélation sur le diffuseur et dans le plan focal de la lentille.

Remarquons enfin que dans le cas des grains isotropes la taille longitudinale des grains de tavelures Δx est reliée à l'aire transverse $\Delta y \Delta z$ comme l'est la longueur de Rayleigh d'un faisceau gaussien à la surface transverse au col du faisceau (à un facteur numérique près).

Cas des grains anisotropes dans le plan transverse

Dans le cas de grains très anisotropes $\Delta y \gg \Delta z$, la taille dans la direction de propagation prend une autre forme. Des grains anisotropes sont obtenus si les ouvertures angulaires $\alpha_Y = D'_Y/2l$ et $\alpha_Z = D'_Z/2l$ dans les deux directions transverses à la propagation sont différentes. Cela peut être réalisé avec une ouverture du diaphragme rectangulaire anisotrope ou dans le cas d'un montage avec des optiques cylindriques qui permettent d'éclairer le diffuseur avec un faisceau anisotrope.

Dans le cas des grains anisotropes, nous obtenons

$$\Delta y = \lambda/2\alpha_Y, \quad \Delta z = \lambda/2\alpha_Z, \quad \Delta x \simeq \frac{7.6\Delta z^2}{\lambda}. \quad (2.21)$$

Comme nous l'avons déjà évoqué pour le cas des grains isotropes, les tailles transverses déterminent la taille longitudinale dans la mesure où il s'agit de propager un champ électrique ayant une surface transverse fixée $\Delta y \Delta z$. Cela étant, dans le cas des grains anisotropes, il existe alors deux échelles de variations spatiales longitudinales de l'intensité, l'une étant proportionnelle à Δy et l'autre à Δz . Ces deux échelles étant très différentes, la taille des grains dans la direction longitudinale va être définie par le carré de la plus petite de ces deux échelles⁶, à savoir $(\min(\Delta y, \Delta z))^2 = \Delta z^2$. L'équation 2.20 donnant la taille des grains dans la direction Ox de propagation du faisceau laser correspond donc au cas particulier où $\Delta y \simeq \Delta z$ et $(\min(\Delta y, \Delta z))^2 \simeq \Delta y \Delta z$.

⁶Il est possible d'interpréter ces résultats sur la variation des tailles d'un grain de tavelure en terme de volume de cohérence constant

Dans un système anisotrope, la taille des grains de tavelures dans la direction de propagation Δx peut donc être inférieure à la taille la plus longue des grains dans le plan transverse (Δy dans notre cas).

La possibilité expérimentale qui nous est offerte grâce au contrôle de la forme des grains de tavelures, *i.e.* des variations spatiales du potentiel vu par les atomes, nous permet d'envisager la réalisation de potentiels de dimension quelconque. En effet, nous pouvons imaginer choisir des tailles de grains telles que le potentiel optique sur la taille du nuage atomique soit uniforme selon une direction spatiale (ou deux directions spatiales). Dans ce cas, le potentiel optique vu par le nuage atomique est bidimensionnel (ou unidimensionnel). Dans notre réalisation expérimentale nous tirerons avantage de cette possibilité pour réaliser un potentiel aléatoire unidimensionnel (paragraphe 2.4.1).

2.2.4 Champ de tavelures intégré

Nous avons décrit dans les paragraphes précédents les principales propriétés d'un champ de tavelures. La détection et la mesure de ces propriétés nécessitent l'utilisation d'un détecteur dont la résolution spatiale est très inférieure à l'échelle des modulations spatiales de l'intensité des tavelures. Cette condition n'est pas forcément réalisée expérimentalement, ce qui implique de prendre en compte les modifications des propriétés du champ de tavelures dues à la résolution finie du détecteur. Dans notre expérience nous calibrerons le champ de tavelures à l'aide d'une caméra CCD. Le champ de tavelures obtenu à l'aide d'une telle caméra correspond à la convolution du champ de tavelures réel décrit dans les paragraphes précédents avec la fonction de réponse de la caméra. Il s'agit donc du champ de tavelures réel moyenné spatialement sur la taille d'un pixel de la caméra (voir la figure 2.7). Nous donnons dans les quelques lignes qui suivent les modifications attendues sur l'amplitude et la taille des grains du champ de tavelures issues de cette intégration réalisée par la caméra.

Nous notons $D(y, z)$ la fonction de réponse du détecteur. Dans le cas de notre caméra CCD, la réponse du détecteur sur la taille d'un pixel carré (de côté L_{res}) est uniforme et $D(y, z) = 1$ sur un carré de surface L_{res}^2 centré en $(0, 0)$ et $D(y, z) = 0$ autrement. L'intensité mesurée par le détecteur sur le pixel en (y_0, z_0) s'écrit alors

$$I_D(y_0, z_0) = \frac{1}{L_{\text{res}}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(y, z) I(y + y_0, z + z_0) dydz \quad (2.22)$$

où $I(y, z)$ est l'intensité du champ de tavelures réel.

Le calcul de la moyenne et de la déviation standard du champ de tavelures intégré s'effectue simplement et nous obtenons [120] :

$$\begin{aligned} \langle I_D \rangle &= \langle I \rangle \\ \sigma_{I_D}^2 &= \frac{\langle I \rangle^2}{L_{\text{res}}^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_D(\delta y, \delta z) \left| \frac{C_A^\perp(\delta y, \delta z)}{C_A^\perp(0, 0)} \right|^2 d\delta y d\delta z, \end{aligned} \quad (2.23)$$

où K_D est la fonction d'auto-corrélation de la réponse du détecteur,

$$K_D(\delta y, \delta z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(y - \delta y, z - \delta z) D(y, z) dydz. \quad (2.24)$$

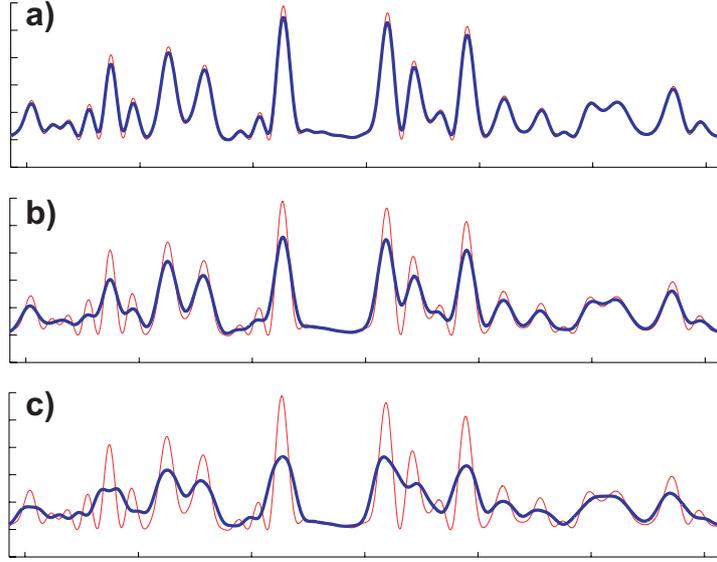


FIG. 2.7 – Profils d'intensité d'un champ de tavelure réel (trait plein rouge fin) et du même champ de tavelures intégrés (trait plein noir épais) sur trois tailles de pixel : **a)** $L_{\text{res}} = 0.5\Delta z$, **b)** $L_{\text{res}} = \Delta z$, **c)** $L_{\text{res}} = 1.5\Delta z$.

Comme le montre les profils d'intensité intégré de la figure 2.7, le contraste du champ de tavelures intégré chute lorsque la taille du pixel croît. Pour un champ de tavelures pleinement développé, le contraste $C = \sigma_I / \langle I \rangle$ est égal à 1, $C = 1$. Ainsi, le contraste du champ de tavelures intégré $C_D = \sigma_{I_D} / \langle I_D \rangle$ est inférieur ou égal à 1.

Goodman montre qu'il est pratique d'utiliser le paramètre \mathcal{M} [120] défini par

$$\mathcal{M} = \left[\frac{1}{L_{\text{res}}^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_D(\delta y, \delta z) \left| \frac{C_A^\perp(\delta y, \delta z)}{C_A^\perp(0, 0)} \right|^2 d\delta y d\delta z \right]^{-1}. \quad (2.25)$$

Notons que ce paramètre est directement relié au contraste du champ de tavelures intégré par la relation

$$C_D = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{M}}}. \quad (2.26)$$

Ce paramètre \mathcal{M} correspond approximativement au nombre de tavelures par unité de longueur sur laquelle intègre le détecteur L_{res} (avec la condition $\mathcal{M} \geq 1$). Il est d'ailleurs possible d'écrire le paramètre \mathcal{M} sous une forme intégrale ne faisant intervenir que le rapport $L_{\text{res}}/\Delta z$ en supposant une taille de grains de tavelures anisotrope telle que $\Delta y \gg L_{\text{res}}$. Avec la fonction d'auto-corrélation de nos tavelures C_I^\perp (voir 2.2.3), il vient :

$$\mathcal{M} = \left[2 \int_0^1 (1-u) \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi L_{\text{res}}}{2\Delta z} u \right) du \right]^{-1}. \quad (2.27)$$

Cette intégrale peut se résoudre numériquement et permet de relier le paramètre \mathcal{M} au rapport $\Delta z/L_{\text{res}}$. Nous présentons sur la figure 2.8a) la solution de cette équation intégrale.

L'intérêt de la définition du paramètre \mathcal{M} réside dans l'écriture qu'il permet de faire de la distribution d'intensité du champ de tavelures intégré. Dans l'ouvrage déjà cité [120], Goodman montre en effet que la distribution d'intensité du champ de tavelures intégré s'écrit :

$$P_{\mathcal{M}}(I_D) = \frac{1}{\Gamma(\mathcal{M})} \left(\frac{\mathcal{M}}{\langle I \rangle} \right)^{\mathcal{M}} I_D^{\mathcal{M}-1} \exp \left(-\mathcal{M} \frac{I_D}{\langle I \rangle} \right) \quad (2.28)$$

où $\Gamma(\mathcal{M})$ est la fonction Gamma définie par $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \exp(-t)$. Dans le cas où la limite de résolution L_{res} est très petite devant l'échelle des modulations d'intensité Δz , le contraste est égal à 1, $C_D \simeq 1$ et le facteur \mathcal{M} est lui aussi égal à 1. On constate alors que la distribution d'intensité $P_{\mathcal{M}}(I_D)$ mesurée avec le détecteur est égale à celle du champ de tavelures réel, comme nous nous y attendions. Nous présentons sur la figure 2.8b) la distribution d'intensité $P_{\mathcal{M}}(I_D)$ pour deux valeurs du paramètre \mathcal{M} .

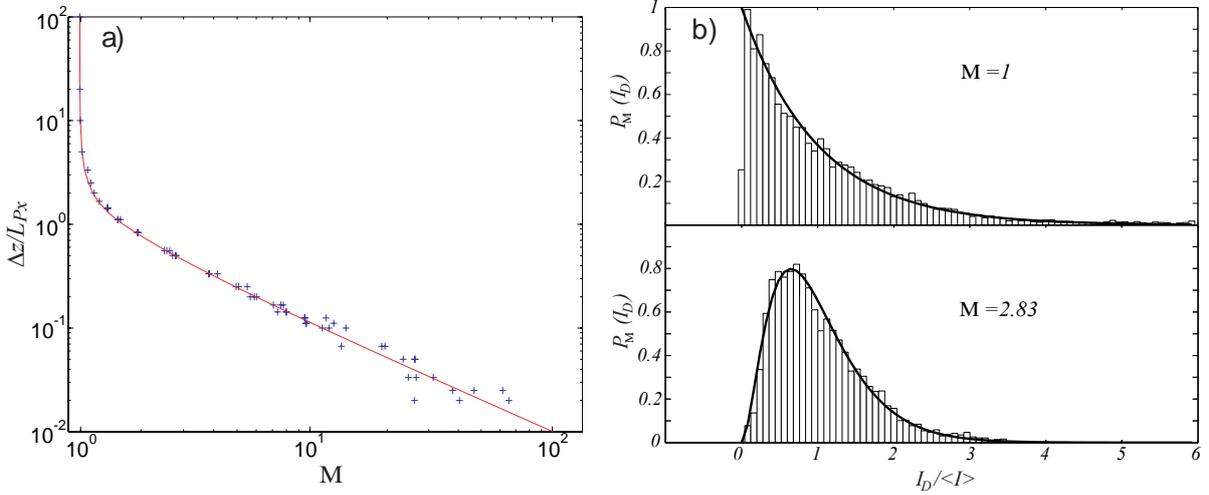


FIG. 2.8 – **a)** Rapport $\Delta z/L_{\text{res}}$ en fonction du paramètre \mathcal{M} pour un dispositif de grains anisotropes et une ouverture rectangulaire à l'origine du champ de tavelures : les croix bleues sont obtenues à partir de simulations numériques des champs de tavelures intégrés de la figure 2.7; la ligne en trait plein rouge correspond à l'équation (2.27). **b)** Distribution d'intensité $P_{\mathcal{M}}(I_D)$ pour deux valeurs du paramètre \mathcal{M} . La première distribution correspond à une limite de résolution L_{res} inférieure à l'échelle Δz des modulations d'intensité des tavelures, $L_{\text{res}} \ll \Delta z$ ($\mathcal{M} = 1$). La seconde distribution correspond à $L_{\text{res}} > \Delta z$ ($\mathcal{M} = 2.8$)

Dans le cas où la limite de résolution n'est pas négligeable devant la taille de la fonction d'auto-corrélation du champ de tavelures ($\mathcal{M} = 2.8$), la distribution d'intensité n'est plus exponentielle : elle est tronquée pour les faibles valeurs d'intensité. En observant les profils de la figure 2.7, nous observons effectivement que le moyennage effectué par les pixels de la caméra diminue la déviation standard de l'intensité (et donc le contraste C_D) et fait disparaître les points où l'intensité tombait à zéro.

Ajoutons deux remarques pour terminer cette discussion sur un champ de tavelures intégré. Premièrement, l'amplitude des tavelures intégrées σ_{I_D} est modifiée lorsque la limite de résolution

L_{res} est supérieure ou égale à Δz . Cette limite de résolution critique est attendue puisque la longueur Δz est la distance sur laquelle l'intensité du champ de tavelures passe d'un maximum à un minimum (et inversement). Deuxièmement, la limite de résolution critique pour ce qui est de la modification de la longueur de corrélation des tavelures intégrées n'est plus Δz mais $\sigma_z = \Delta z/\pi$. En effet, la densité spectrale du champ de tavelures est une fonction triangle dont le support est $2/\sigma_z$ [voir figure 2.5b)]. Ainsi, dès que l'intégration s'effectue sur une distance supérieure à $\sigma_z/2$ une partie de la densité spectrale du champ de tavelures est tronquée et l'échelle de variation spatiale des tavelures dans l'espace réel s'en trouve modifiée.

2.3 Moments d'un potentiel aléatoire et auto-moyennage

Nous allons maintenant nous intéresser aux moments statistiques d'un potentiel aléatoire de tavelures, en particulier afin de discuter la nécessité de moyennner les expériences sur un grand nombre de réalisations du désordre.

Nous avons vu qu'il est possible d'envisager la réalisation de potentiels aléatoires uni-, bi-, ou tridimensionnels pour le nuage d'atomes (paragraphe 2.2.3). Dans cette partie, nous nous restreignons à discuter le cas d'un potentiel aléatoire $v(x, y, z) = v(z)$ unidimensionnel.

En principe, les observations expérimentales d'atomes froids dans un potentiel aléatoire dépendent de la réalisation du potentiel, *i.e.* des détails microscopiques du potentiel (ce qui est le cas pour les variations de la densité du nuage d'atomes par exemple). Cela étant, lorsque l'étude porte sur l'influence du désordre, il ne s'agit pas d'observer les différences qui existent d'une réalisation à l'autre puisqu'il s'agit là de l'impact d'une "partie seulement" du désordre. Pour avoir accès à l'influence du désordre en tant que processus aléatoire il s'agit de s'affranchir des différences qui peuvent exister d'une réalisation à l'autre. Il ne faut donc conserver que l'information propre aux propriétés statistiques du désordre, communes à chaque réalisation de son potentiel aléatoire. Ainsi, les propriétés macroscopiques des condensats de Bose-Einstein sur lesquelles nous voulons étudier l'influence du désordre (et non d'une réalisation particulière) doivent être extraites en effectuant une *moyenne d'ensemble* sur un grand nombre de réalisations du potentiel aléatoire⁷.

2.3.1 Ergodicité spatiale

Comme nous l'avons mentionné au premier chapitre 1.3, la connaissance de tous les fonctions de corrélation d'un potentiel aléatoire caractérise complètement ce potentiel et est équivalente à la connaissance du processus aléatoire qui définit le désordre engendrant les différentes réalisations du potentiel aléatoire. Ainsi, une façon de caractériser le désordre qui engendre le potentiel v est de connaître les moments statistiques m_n

$$m_n = \langle v^n(z) \rangle \quad (2.29)$$

⁷Expérimentalement, différentes réalisations du potentiel aléatoire peuvent être obtenues en changeant le verre dépoli créant les tavelures ou en éclairant des régions du verre dépoli décorréélées.

du potentiel aléatoire $v(z)$ ⁸. Dans le cas d'un système de taille finie d , nous définissons le moment spatial d'ordre n du potentiel aléatoire par

$$m_n(d) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} dz v^n(z). \quad (2.30)$$

Rappelons que pour un désordre homogène (voir 1.3), le principe ergodique implique $\lim_{d \rightarrow \infty} m_n(d) = \langle v^n \rangle$. Par ailleurs, nous définissons la déviation standard $\sigma_{m_n}(d)$ du moment spatial d'ordre n par :

$$\sigma_{m_n}^2(d) = \langle m_n(d)^2 \rangle - \langle m_n(d) \rangle^2, \quad (2.31)$$

ce qui nous permet de discuter l'écart de notre système de taille finie à un système auto-moyennant pour la mesure de quantités physiques s'exprimant en fonction des différents moments spatiaux du potentiel aléatoire (voir 1.3).

Dans un premier temps nous allons explicitement calculer les déviations standards $\sigma_{m_1}(d)$ et $\sigma_{m_2}(d)$ des moments d'ordre 1 et 2 pour potentiel aléatoire de tavelures de taille d . Les paramètres mesurés expérimentalement dans les chapitres de ce mémoire peuvent être définis à partir de ces deux moments, c'est pourquoi ils nous intéressent plus particulièrement. Nous montrerons ensuite que dans le cas d'un potentiel aléatoire issu de tavelures nous pouvons réduire la question concernant la validité de l'approximation d'un potentiel auto-moyennant à celle du seul premier moment.

2.3.2 Le cas des deux premiers moments, $m_1(d)$ et $m_2(d)$

Dans ce paragraphe, nous développons le calcul des déviations standards $\sigma_{m_1}(d)$ et $\sigma_{m_2}(d)$ pour les deux premiers moments $m_1(d)$ et $m_2(d)$. Nous obtenons une formulation analytique de ces déviations standards dans le cadre d'une approximation gaussienne de la fonction de corrélation du champ de tavelures. Ces résultats nous permettent de discuter le caractère auto-moyennant d'un potentiel aléatoire de taille finie d .

Notons que le potentiel variant d'une réalisation à l'autre, le champ de tavelures $v(z)$ est aléatoire et donc que les moments $m_n(d)$ sont des variables aléatoires.

La moyenne statistique sur les réalisations du potentiel aléatoire $\langle \dots \rangle$ commute avec les intégrations spatiales sur une taille finie. Nous pouvons ainsi écrire :

$$\langle m_i(d) \rangle = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} dz \langle v^i(z) \rangle \quad (2.32)$$

$$\langle m_i(d)^2 \rangle = \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{-d/2}^{d/2} dz' \langle v^i(z) v^i(z') \rangle. \quad (2.33)$$

Ainsi le calcul de $\sigma_{m_2}^2(d)$ nécessite la connaissance de la fonction de corrélation du deuxième ordre $\langle v^2(z) v^2(z') \rangle$ du champ de tavelures. Nous nous attachons dans les lignes qui suivent à déterminer cette fonction de corrélation du champ de tavelures.

⁸Le désordre considéré ici est homogène [69], c'est à dire que ces propriétés statistiques moyennes sont indépendantes du point z d'observation.

Le potentiel unidimensionnel $v(z)$ est un potentiel normalisé tel que :

$$\begin{aligned}\langle v(z) \rangle &= 1 \\ \langle v^2(z) \rangle &= 2.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Nous appelons $A(z)$ l'amplitude normalisée du champ électrique de la lumière diffusée par le verre dépoli, *i.e.* $v(z) = A^*(z)A(z)$ ⁹, et nous notons $C_A(z_1 - z_2) = \langle A^*(z_1)A(z_2) \rangle$ la fonction de corrélation à deux points de l'amplitude du champ électrique $A(z)$. Les variables $A(z_1), A(z_2), \dots, A(z_{2k})$ étant des variables complexes gaussiennes (voir paragraphe 2.2.1), nous pouvons utiliser le théorème de Wick qui s'applique à ces variables,

$$\begin{aligned}\langle A^*(z_1)A^*(z_2)\dots A^*(z_k)A(z_{k+1})A(z_{k+2})\dots A(z_{2k}) \rangle = \\ \sum_{\Pi} \langle A^*(z_1)A(z_p) \rangle \langle A^*(z_2)A(z_q) \rangle \dots \langle A^*(z_k)A(z_r) \rangle,\end{aligned}\tag{2.35}$$

où \sum_{Π} représente une somme sur les $k!$ permutations possibles (p, \dots, r) de $(1, 2, \dots, k)$. Nous pouvons alors calculer la fonction de corrélation de premier et de second ordre à deux points du potentiel normalisé v et nous obtenons,

$$\langle v(z)v(z') \rangle = 1 + |C_A(z - z')|^2\tag{2.36}$$

$$\langle v^2(z)v^2(z') \rangle = 4(1 + 4|C_A(z - z')|^2 + |C_A(z - z')|^4).\tag{2.37}$$

Nous faisons l'approximation que la fonction d'auto-corrélation de l'amplitude du champ électrique est une gaussienne :

$$|\langle A^*(z)A(z') \rangle|^2 = |C_A(z - z')|^2 = \exp \left[- \left(\frac{\pi(z - z')}{\sqrt{3}\Delta z} \right)^2 \right].\tag{2.38}$$

Cette gaussienne a un développement de Taylor en $(z_1 - z_2) \rightarrow 0$ égal à celui de la véritable fonction d'auto-corrélation de nos images de tavelures $[\sin(\pi z)/\pi z]^2$ pour une ouverture rectangulaire (voir paragraphe 2.2.3). Cette approximation nous permet de mener les calculs des différents moments statistiques du désordre de manière simple et reproduit dans une très bonne approximation les résultats numériques utilisant la "vraie" fonction d'auto-corrélation, comme nous le discuterons par la suite (figure 2.9). Le calcul peut aussi être effectué avec la véritable fonction d'auto-corrélation mais ce calcul, plus complexe, n'apporte rien à la discussion.

Nous calculons dans un premier temps la déviation standard $\sigma_{m_1}(d)$. Par définition, nous avons

$$\sigma_{m_1}^2(d) = \langle m_1^2(d) \rangle - \langle m_1(d) \rangle^2,\tag{2.39}$$

avec

$$\langle m_1^2(d) \rangle = \frac{1}{d^2} \int_{d/2}^{d/2} dz \int_{d/2}^{d/2} dz' \langle v(z)v(z') \rangle\tag{2.40}$$

$$\langle m_1(d) \rangle = \frac{1}{d} \int_{d/2}^{d/2} dz \langle v(z) \rangle = 1.\tag{2.41}$$

⁹Avec cette définition, $v(z)$ n'est pas un potentiel mais une intensité. Cela étant, il suffit de multiplier $v(z)$ par $\hbar\Gamma^2/8I_{\text{sat}}\delta$ pour obtenir un potentiel. Ce facteur multiplicatif ne modifiant en rien la discussion, il a été volontairement omis.

Utilisant un changement de variable nous obtenons,

$$\int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{-d/2}^{d/2} dz' C(z - z') = 2 \int_0^d du [d - u] C(u), \quad (2.42)$$

qui conduit, avec une fonction d'auto-corrélation gaussienne $C(u) = 1 + \exp(-u^2/3)$, à l'équation suivante :

$$\sigma_{m_1}^2(u) = \frac{\sqrt{3\pi}}{u} \operatorname{Erf}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{u^2} \left(e^{-u^2/3} - 1\right). \quad (2.43)$$

Ici, $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt \exp(-t^2)$ représente la fonction Erreur et la variable adimensionnée $u = \frac{\pi d}{\Delta z}$ est reliée au nombre typique de grain de speckle sur une taille d du système, $d/\Delta z$.

Nous pouvons relier la déviation standard $\sigma_{m_2}^2(d)$ à $\sigma_{m_1}^2(d)$ en utilisant le théorème de Wick (Eq 2.36). Il vient :

$$\sigma_{m_2}^2(d) = 16\sigma_{m_1}^2(d) + 4\sigma_{m_1}^2(\sqrt{2}d). \quad (2.44)$$

En substituant (2.43) dans (2.44), nous obtenons une expression analytique pour $\sigma_{m_2}(u)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{m_2}^2(u) &= \frac{16\sqrt{3\pi}}{u} \operatorname{Erf}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + \frac{48}{u^2} \left(e^{-u^2/3} - 1\right) \\ &\quad + \frac{2\sqrt{6\pi}}{u} \operatorname{Erf}\left(\frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{3}}\right) + \frac{6}{u^2} \left(e^{-2u^2/3} - 1\right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Nous avons vérifié numériquement que cette expression analytique est une très bonne approximation, à quelques pour-cents, du résultat numérique utilisant la véritable fonction d'auto-corrélation [voir figure 2.9a)]. L'utilisation de la formule analytique dans le cas d'une corrélation gaussienne (2.45) peut donc définir avec une bonne approximation la valeur du moment d'ordre 2 pour un champ de tavelure d'ouverture rectangulaire. L'équation (2.45) nous permet de quantifier l'écart d'un système de taille finie d avec un système auto-moyennant pour le moment d'ordre 2.

A la limite asymptotique des grands systèmes, $d \gg \Delta z$, nous obtenons :

$$\sigma_{m_2}(d) \simeq \sigma_{m_2}^{\text{asympt}}(d) = \left(\frac{2\sqrt{3\pi}}{u}(8 + \sqrt{2})\right)^{1/2} \simeq 7.60 \frac{1}{\sqrt{u}}. \quad (2.46)$$

Dans la limite opposée $d \rightarrow 0$, nous trouvons

$$\sigma_{m_2}(d = 0) = \sqrt{20}. \quad (2.47)$$

La fonction asymptotique (2.46) est une très bonne approximation de la solution analytique même pour un nombre de pics $d/\Delta z$ faible. En effet, la différence $\delta^{\text{asympt}} = (\sigma_{m_2}^{\text{asympt}}(d) - \sigma_{m_2}(d))/\sigma_{m_2}(d)$ entre l'asymptote et la solution analytique est inférieure à 1% pour des systèmes plus grand que $d/\Delta z \simeq 15$ [voir la figure 2.9b)].

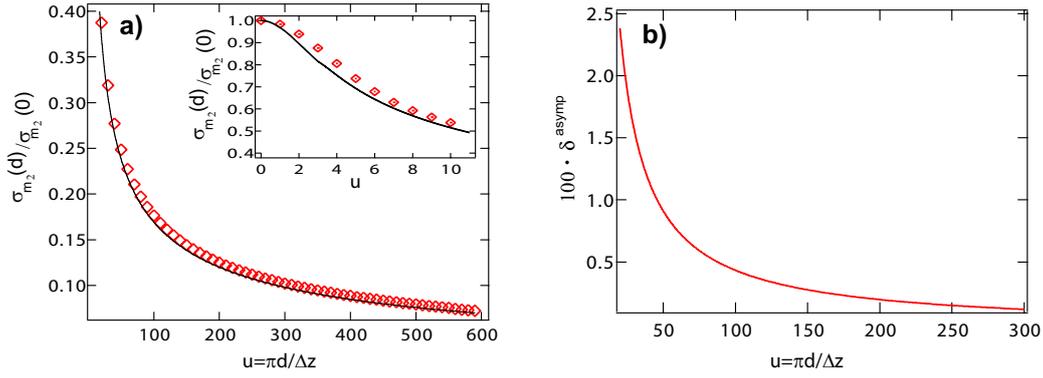


FIG. 2.9 – **a)** Déviation standard normalisée $\sigma_{m_2}(d)/\sigma_{m_2}(0)$ fonction de la longueur d du système. Les losanges \diamond correspondent au calcul numérique de $m_2(d)$ avec la véritable fonction d’auto-correlation $C_v(z) = 1 + \left(\frac{\sin[\pi z/\Delta z]}{\pi z/\Delta z}\right)^2$. La ligne en trait plein noir représente la solution analytique de l’équation 2.45. Image insérée : détail pour les faibles valeurs de d . **b)** Écart δ^{asympt} de la forme asymptotique de la déviation standard $\sigma_{m_2}^{\text{asympt}}(d)$ à la valeur analytique $\sigma_{m_2}(d)$ fonction de la longueur d du système.

Lorsque la taille d du système placé dans le potentiel aléatoire tend vers l’infini, le système devient auto-moyennant et $\sigma_{m_2}(d)$ tend vers zéro. La convergence asymptotique vers un désordre auto-moyennant est toutefois lente et proportionnelle à $\sqrt{\Delta z/d}$ où $d/\Delta z$ est le nombre typique de pics présents sur la taille d du système.

Cette loi d’échelle en $\sqrt{\Delta z/d}$ peut être interprétée en terme de variables discrètes. En effet, si nous considérons l’amplitude $v(z_k)$ du potentiel aléatoire sur un ensemble de points $z_k = k\Delta z$, nous obtenons un ensemble de variables indépendantes $(v(z_k))_{k=1..N}$ possédant la statistique de l’intensité des tavelures. Le moment normalisé $m_2(d)$ n’est autre qu’une valeur moyenne normalisée sur $N = d/\Delta z$ variables indépendantes. Or, il est bien connu qu’une telle moyenne sur N variables indépendantes a pour loi d’échelle $1/\sqrt{N}$, i.e. $\sqrt{\Delta z/d}$.

2.3.3 Moments d’ordre supérieur

Nous avons explicitement calculé les déviations standards des deux premiers moments dans le paragraphe précédent pour une fonction de corrélation gaussienne. Nous allons maintenant montrer qu’il existe une relation générale, toujours dans le cadre de l’approximation gaussienne du paragraphe précédent, qui permet de donner une borne supérieure à la déviation standard d’un moment d’ordre i quelconque en fonction du moment d’ordre 1.

Dans ce paragraphe nous notons $\alpha^2 = |C_A(z - z')|^2$ la fonction de corrélation du premier ordre en amplitude $A(z)$. Il existe une relation générale des moments joints de $v(z)$ et $v(z')$ d’un potentiel de tavelures [125] :

$$\langle v^n(z)v^m(z') \rangle = \langle v(z) \rangle^{n+m} n!m! {}_2F_1(-n, -m; 1; \alpha^2) \quad (2.48)$$

où n et m sont des entiers positifs et ${}_2F_1$ est une fonction hypergéométrique gaussienne.

Pour les cas $n = m = 1$ et $n = m = 2$, les moments joints sont les fonctions d'auto-corrélation de premier et de second ordre de $v(z)$, et ces expressions s'écrivent :

$$\langle v(z)v(z') \rangle = 1 + \alpha^2 \quad (2.49)$$

$$\langle v^2(z)v^2(z') \rangle = 4(1 + 4\alpha^2 + \alpha^4). \quad (2.50)$$

Notons que ces expressions sont identiques à celles obtenues au paragraphe précédent avec le théorème de Wick.

La fonction gaussienne hypergéométrique ${}_2F_1(-n, -m; 1; \alpha^2)$ est un polynôme de la variable α^2 . Nous notons ce polynôme

$${}_2F_1(-n, -n; 1; \alpha^2) = \sum_{k=0}^{N(n)} a_k \alpha^{2k} \quad (2.51)$$

où $N(n)$ est un entier. Par définition de ${}_2F_1$, $a_0 = 1$.

Nous avons donc

$$\langle v^n(z)v^n(z') \rangle = (n!)^2 {}_2F_1(-n, -n; 1; \alpha^2) \quad (2.52)$$

et obtenons

$$\langle m_i(d)^2 \rangle = \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{-d/2}^{d/2} dz' \langle v^i(z)v^i(z') \rangle \quad (2.53)$$

$$= \frac{(n!)^2}{d^2} \int_0^d du (d-u) \sum_{k=0}^{N(n)} a_k \alpha^{2k}. \quad (2.54)$$

La statistique des tavelures à un point conduit à $\langle v^n(z) \rangle = n!$ et il vient

$$\langle m_i(d) \rangle^2 = (n!)^2. \quad (2.55)$$

Ainsi, dans le calcul de $\sigma_{m_n}(d)$ le deuxième terme $\langle m_i(d) \rangle^2$ annule le premier terme du développement polynomial de $\langle m_i(d)^2 \rangle$ (le terme a_0). Cette caractéristique est attendue puisque la déviation $\sigma_{m_n}(d)$ doit tendre vers zéro quand d tend vers l'infini : la contribution du terme constant a_0 dans $\sigma_{m_n}(d)$ doit donc être nulle.

Nous pouvons alors écrire

$$\sigma_{m_n}^2(d) = (n!)^2 \sum_{k=1}^{N(n)} \frac{1}{d^2} \int_0^d du (d-u) a_k \alpha^{2k} \quad (2.56)$$

ce qui nous conduit, avec l'approximation gaussienne pour la fonction d'auto-corrélation $\langle v(z)v(z') \rangle$

à :

$$\begin{aligned}
\sigma_{m_n}^2(d) &= (n!)^2 \sum_{k=1}^{N(n)} \frac{a_k}{d^2} \int_0^d du (d-u) \exp \left[- \left(\frac{k\pi u}{\sqrt{3}\Delta z} \right)^2 \right] \\
&= (n!)^2 \sum_{k=1}^{N(n)} \frac{a_k}{(\sqrt{k}d)^2} \int_0^{\sqrt{k}d} dv (\sqrt{k}d - v) \exp \left[- \left(\frac{\pi v}{\sqrt{3}\Delta z} \right)^2 \right] \\
&= (n!)^2 \sum_{k=1}^{N(n)} a_k \sigma_{m_1}^2(\sqrt{k}d)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Pour $d = 0$ nous obtenons

$$\sigma_{m_n}^2(0) = (n!)^2 \sum_{k=1}^{N(n)} a_k. \tag{2.58}$$

Comme $\sigma_{m_1}^2(\sqrt{k}d) < \sigma_{m_1}^2(d)$ (la déviation standard de tous les moments tend vers 0 lorsque la taille du système croît vers un système auto-moyennant) nous pouvons écrire l'inégalité suivante :

$$\sigma_{m_n}^2(d)/\sigma_{m_n}^2(0) < \sigma_{m_1}^2(d). \tag{2.59}$$

Cette inégalité nous permet, dans le cas d'une fonction d'auto-corrélation gaussienne, de donner une limite supérieure à la déviation standard normalisée d'un moment d'ordre n quelconque. En effet, les déviations standards normalisées de tous les moments d'ordre $i > 1$ sont strictement inférieures à celle de l'ordre 1. Nous pouvons ainsi, à partir de cette inégalité, discuter du caractère auto-moyennant d'un potentiel aléatoire de taille d pour tous ces moments m_i en connaissant le seul moment d'ordre 1, $\sigma_{m_1}^2(d)$.

Sur la figure 2.10, nous traçons la différence entre les déviations standards des moments d'ordre 1 et 2 et des moments d'ordre 1 et 3.

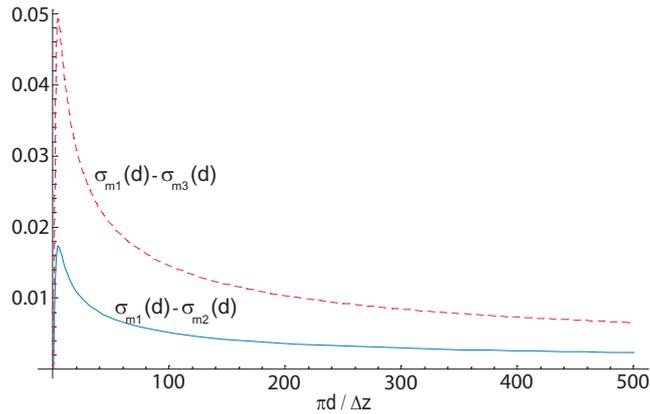


FIG. 2.10 – Différence entre les déviations standards normalisées $\sigma_{m_2}(d)/\sigma_{m_2}(0)$ et $\sigma_{m_1}(d)/\sigma_{m_1}(0)$ (trait plein bleu, et entre $\sigma_{m_3}(d)/\sigma_{m_3}(0)$ et $\sigma_{m_1}(d)/\sigma_{m_1}(0)$ (trait pointillé rouge), en fonction de la taille d du système.

2.3.4 Condition pour un potentiel aléatoire auto-moyennant

Nous avons maintenant les éléments pour discuter du caractère auto-moyennant d'un potentiel aléatoire dans lequel est placé un système de taille d finie pour la mesure de quantités physiques s'exprimant en fonction des différents moments spatiaux du potentiel. Bien entendu, un potentiel aléatoire est *strictement* auto-moyennant lorsqu'il est de taille infinie mais, comme nous l'avons discuté précédemment, ce qui nous intéresse ici est de quantifier dans quelle mesure un système de taille finie est proche d'être auto-moyennant.

Dans nos expériences, les quantités caractérisant le transport que nous mesurons s'expriment en fonction des moments d'ordre 1 et 2 du potentiel aléatoire $V(z)$. En particulier, nous nous intéresserons presque toujours à la déviation standard σ_V du potentiel aléatoire. Nous discutons donc ici sur ce moment d'ordre 2 le caractère auto-moyennant de notre potentiel aléatoire sur une taille finie d . Cela étant, nous avons montré au paragraphe précédent (paragraphe 2.3.3) que la discussion peut se généraliser très facilement aux moments de tout ordre dans le cas d'une fonction de corrélation d'amplitude gaussienne.

Dans la limite asymptotique $d \gg \Delta z$, nous avons montré que l'expression de $\sigma_{m_2}(d)$ se réduit à [voir (2.46-2.47)] :

$$\sigma_{m_2}(d)/\sigma_{m_2}(0) \simeq 0.959 \sqrt{\frac{\Delta z}{d}}, \quad (2.60)$$

où $\sigma_{m_2}^2(0) = \langle v(z)^4 \rangle - \langle v(z)^2 \rangle^2 = 20$. Sur la figure 2.9 nous traçons $\sigma_{m_2}(d)$ obtenu numériquement en utilisant la véritable fonction d'auto-corrélation d'ouverture rectangulaire $C_v(z) = 1 + \left(\frac{\sin[\pi z/\Delta z]}{\pi z/\Delta z}\right)^2$ (losanges \diamond) ainsi que la solution analytique du cas de la fonction d'auto-corrélation gaussienne (line trait plein noir).

Le calcul numérique et le calcul analytique avec la fonction d'auto-corrélation gaussienne donnent des valeurs similaires pour $\sigma_{m_2}(d)$. Remarquons une nouvelle fois que l'approximation asymptotique (2.60) est très bonne même pour de faibles valeurs $d/\Delta z$: la différence entre l'équation asymptotique (2.60) et la solution exacte de $\sigma_{m_2}(d)$ pour une fonction d'auto-corrélation gaussienne est inférieure à 1% dès que la taille du système dépasse quinze fois la taille des grains de tavelures. Notons également que la différence entre notre système de taille finie et un système auto-moyennant donnée par le moment d'ordre 1 $m_1(d)$ est très proche de celle du second ordre.

Lorsque le nombre de grains de tavelures $d/\Delta z$ est supérieur à 100, la différence entre le moment d'ordre 2 d'un système fini et celui d'un système auto-moyennant est inférieure à 10%. Comme nous allons le décrire dans la partie suivante en calibrant le potentiel aléatoire vu par les atomes, nous nous trouverons toujours dans nos expériences dans une situation où $d/\Delta z > 100$.

2.4 Mise en place expérimentale et calibration du potentiel optique aléatoire

2.4.1 Un potentiel aléatoire contrôlable pour les atomes froids

Le potentiel aléatoire optique créé à partir d'un champ de tavelures possède plusieurs avantages :

- il est *bien connu*. En effet, comme nous venons de le montrer dans les paragraphes précédents, les propriétés statistiques d'un tel désordre sont bien connues. Cela a au moins deux conséquences importantes. La première est expérimentale puisque la connaissance des propriétés des tavelures va être utilisée dans les paragraphes qui suivent pour calibrer précisément le potentiel aléatoire vu par les atomes. La seconde conséquence concerne les aspects théoriques puisqu'il est possible de simuler numériquement et de calculer un certain nombre de situations expérimentales grâce à la connaissance des propriétés statistiques du désordre.
- il est *pratique*. Nous avons vu que l'amplitude du potentiel aléatoire est directement contrôlée par l'intensité du laser incident sur le verre dépoli, intensité qu'il est extrêmement facile de changer à notre guise. De plus, comme nous l'indique les formules obtenues pour le calcul des grains de tavelures (paragraphe 2.2.3), nous pouvons modifier aisément ces tailles en jouant sur l'ouverture angulaire α du faisceau. D'ailleurs, nous pouvons créer un potentiel aléatoire anisotrope en utilisant des ouvertures angulaires différentes $\alpha_Y \neq \alpha_Z$. Ainsi, les paramètres décrivant le potentiel aléatoire vu par les atomes peuvent être modifiés à volonté. De plus, nous pouvons allumer ou éteindre le potentiel aléatoire en un temps très court (typiquement inférieur à 1 ms, temps de coupure d'un modulateur acousto-optique). Enfin, rappelons que ce potentiel aléatoire est statique pour les atomes froids.
- il est *performant*. Nous pouvons en effet faire varier l'amplitude du potentiel aléatoire à notre guise, d'un potentiel très perturbatif (très faible puissance du laser incident) à un potentiel élevé (forte puissance du laser incident). Par ailleurs, la taille des grains de tavelures qu'il est possible d'obtenir est limitée par la diffraction, ce qui correspond aux plus petites variations spatiales qu'il est possible d'obtenir pour un désordre optique vu par des atomes froids ($\Delta z \sim 1 \mu\text{m}$).

Nous disposons donc avec ce potentiel optique aléatoire d'un désordre contrôlable dont les propriétés statistiques sont connues précisément pour nos expériences avec des atomes froids. Dans la suite de cette partie, nous allons décrire la mise en place et la calibration ce potentiel.

Le dispositif expérimental

Dans nos expériences, le potentiel aléatoire est superposé au piège harmonique dans lequel se trouvent piégés les atomes de Rubidium en éclairant ces derniers avec un laser traversant un verre dépoli, comme indiqué par la figure 2.12. Les atomes sont situés dans le plan focal de la

dernière lentille (le plan d'observation de la figure 2.3), à une distance $l = 6$ cm du diffuseur. Ce faisceau laser, injecté dans une fibre optique jusqu'au montage de la figure 2.12, est issu d'un amplificateur optique (MOPA) qui est lui-même injecté par une diode libre à $\lambda \sim 780$ nm (le montage est décrit sur la figure 2.11).

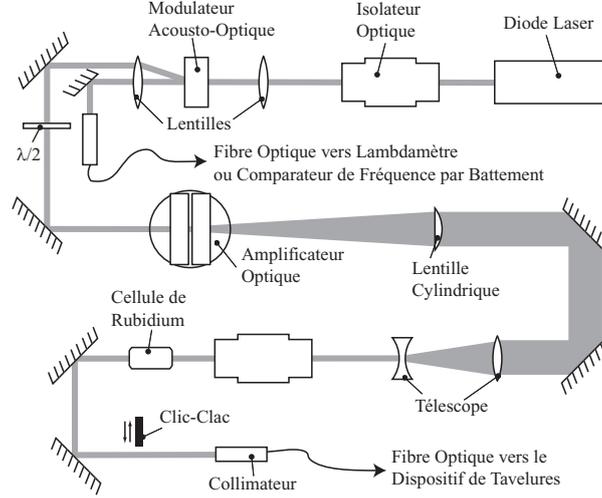


FIG. 2.11 – Schéma du banc optique du laser utilisé pour éclairer le verre dépoli. Un faisceau laser de 60mW est fourni par une diode asservie en courant et en température. La longueur d'onde de ce laser (proche de 780nm) est contrôlée par un signal de battement avec un laser verrouillé sur la raie de cross-over $F = 2 \rightarrow F' = 2 - 3$ du Rb^{87} . Lorsque le faisceau laser n'est pas coupé par le modulateur acousto-optique, sa puissance est amplifiée par l'amplificateur optique qui permet l'obtention de 550mW à sa sortie. Un système de d'optiques cylindriques met ensuite en forme le faisceau pour l'injecter dans la fibre optique qui arrive au montage de la figure 2.12.

Le montage décrit par la figure 2.12 focalise le faisceau laser en l'absence de verre dépoli sur les atomes et est aligné perpendiculairement à l'axe long Oz' du condensat. Remarquons que nous notons ici les axes du système optique de tavelures Ox' , Oy' et Oz' afin de laisser les notations Ox , Oy et Oz aux axes propres du condensat. L'axe Oz' se confond avec l'axe Oz du condensat et les axes Ox' , Oy' correspondent à une rotation autour de l'axe Oz des axes Ox et Oy (l'axe Oy étant défini par la direction du champ de gravitation). Notons également que le processus de diffusion aléatoire à l'origine du champ de tavelures n'est pas sensible aux aberrations optiques. Ainsi, nous n'avons pas à nous préoccuper des problèmes d'aberrations de notre système optique pour lequel l'ouverture numérique dans le plan $x'Oz'$ est grande ($O.N. \simeq 0.44$).

Les atomes de Rubidium du condensat piégé magnétiquement se trouvent dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$. Nous travaillons avec des désaccords ($\delta \sim 0.15$ nm) grands devant la structure hyperfine des niveaux excités (~ 200 MHz). Le potentiel dipolaire s'écrit alors à partir de l'équation (2.5) :

$$V(\vec{r}) = \frac{2 \hbar \Gamma^2}{3 8 I_{\text{sat}}} \frac{I(\vec{r})}{\delta}, \quad (2.61)$$

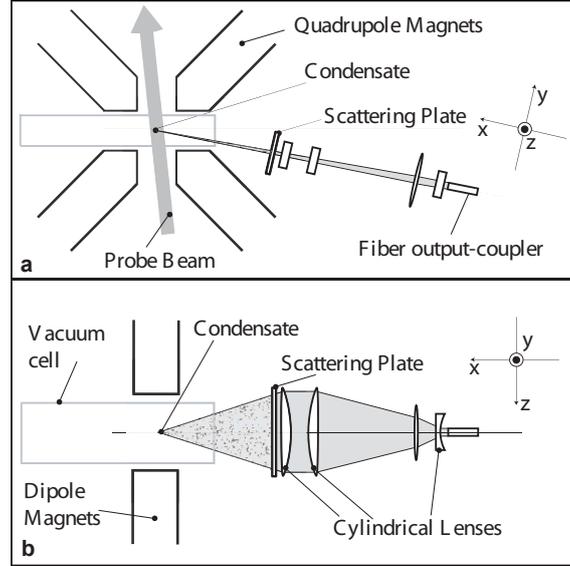


FIG. 2.12 – *Système optique utilisé pour créer le potentiel aléatoire avec des grains anisotropes. Le condensat de Bose-Einstein, allongé selon la direction Oz , se situe au point de focalisation du système de lentille selon les deux directions transverses Oy et Oz . Les deux images sont approximativement à la même échelle. La taille du faisceau laser éclairant le verre dépoli a des tailles différentes selon les deux directions transverses, permettant ainsi de créer des tavelures anisotropes. **a)** Vue de côté du système optique. **b)** Vue de dessus du système optique.*

où $I_{\text{sat}} = 16.56 \text{ W m}^{-2}$ est l'intensité de saturation de la raie D_2 du Rb^{87} , $\Gamma/2\pi = 6.06 \text{ MHz}$ la largeur de la transition atomique, et le facteur $2/3$ le coefficient pour une lumière polarisée π .

Dans toutes nos expériences sur les condensats désordonnés¹⁰, nous utilisons un désaccord δ vers le bleu (typiquement $\delta \simeq 0.15 \text{ nm}$), de telle sorte que le potentiel soit répulsif et que les pics d'intensité des tavelures correspondent à des barrières pour les atomes. Dans le cas opposé d'un désaccord vers le rouge ($\delta < 0$), les grains de tavelures correspondent à des puits de potentiel et les atomes pourraient également être piégés par l'enveloppe gaussienne de l'image de tavelures qui formerait elle aussi un puits de potentiel très évasé.

Dans le paragraphe suivant 2.4.2, nous présentons une méthode de calibration précise de l'amplitude σ_V du potentiel aléatoire V vu par les atomes. Dans nos expériences en présence de désordre, cette amplitude σ_V est toujours inférieure au potentiel chimique, noté μ_{TF} , du condensat d'atomes, évitant ainsi une situation initiale où les atomes seraient piégés par les barrières du potentiel. Nous définissons une amplitude normalisée γ du potentiel aléatoire par rapport au potentiel chimique μ_{TF} du condensat piégé,

$$\gamma = \frac{\sigma_V}{\mu_{\text{TF}}}. \quad (2.62)$$

Cette amplitude normalisée permet de quantifier l'amplitude du potentiel aléatoire par rapport à l'énergie typique disponible par atome, μ_{TF} . Cette amplitude normalisée γ est donc un nombre

¹⁰Ce qui n'est pas le cas pour la calibration de l'amplitude où le désaccord peut être vers le rouge.

compris entre 0 et 1 dans nos expériences.

La puissance en sortie de fibre du faisceau laser créant le potentiel aléatoire peut varier de 0 à 150 mW. L'image de tavelures sur les atomes diverge avec des tailles transverses typiques $w_{y'}$ et $w_{z'}$ qui sont deux ordres de grandeurs plus larges que les tailles du condensat R_{TF} et L_{TF} . Ainsi, l'intensité moyenne de l'enveloppe gaussienne du faisceau peut être considérée constante sur la région où se trouvent les atomes.

Un montage pour des grains anisotropes

Dans le paragraphe 2.2.3, nous définissons l'échelle typique de variation spatiale de l'intensité des tavelures, i.e. la taille des grains de tavelures. La taille de ces grains dans une direction transverse à la propagation (Oy et Oz dans notre piège) est inversement proportionnelle à l'ouverture du système optique selon cette direction. Nous pouvons ainsi créer une image de tavelures dont les grains sont anisotropes en contrôlant la taille du faisceau incident sur le verre dépoli. Nous utilisons des lentilles cylindriques pour mettre en forme le faisceau laser avant qu'il ne diffuse sur le verre dépoli [voir 2.12a)]. Avec ce système optique, le faisceau laser est focalisé sur les atomes en l'absence de verre dépoli.

Ainsi, la largeur du faisceau laser sur le verre dépoli dans la direction Oy' est petite, $D_{Y'} = 0.95$ mm. Selon la direction Oz' , le faisceau sortant de la fibre est d'abord étendu puis focalisé sur les atomes avec une longueur sur le verre dépoli grande, $D_{Z'} = 55$ mm. Nous obtenons alors un potentiel aléatoire pour les atomes dont l'échelle de variation spatiale est plus courte dans la direction Oz' que dans la direction Oy' , $\Delta z' < \Delta y'$. Le rapport entre ces deux échelles de variations spatiales étant $\Delta_{Z'}/\Delta_{Y'} \simeq \alpha_{Y'}/\alpha_{Z'} \simeq 58$.

Avec ce système anisotrope, l'échelle de variation spatiale dans la direction de propagation $\Delta x'$ est donc directement reliée à l'échelle transverse la plus courte, $\Delta z'$ (paragraphe 2.2.3).

Nous verrons par la suite (voir le chapitre 3) que nos condensats de Bose-Einstein ont une forme de cigare allongé selon la direction Oz (qui est confondue avec l'axe Oz'), avec un rapport d'aspect égal à 100 environ. Plus précisément, les demi-tailles de notre condensat valent $R_{\text{TF}} = 1.5 \mu\text{m}$ selon les deux directions transverses (Ox' et Oy') et $L_{\text{TF}} = 150 \mu\text{m}$ selon la direction longue Oz' . Cette anisotropie du nuage d'atomes combinée à celle de notre potentiel aléatoire optique nous permet de créer un potentiel véritablement unidimensionnel pour le BEC :

$$L_{\text{TF}} \gg \Delta z' \text{ and } R_{\text{TF}} \ll \Delta y', \Delta x'. \quad (2.63)$$

Comme nous l'avons discuté en introduction, l'intérêt de travailler avec un potentiel aléatoire unidimensionnel tient au fait que les effets du désordre doivent être plus marqués à 1D qu'à 2D ou 3D.

Un montage pour des grains isotropes

Nous avons également travaillé, à titre de comparaison, avec un autre montage optique pour créer un champ de tavelures avec des grains de taille isotrope dans le plan transverse. Les caractéristiques de ce montage sont les suivantes :

$$l = 140(5) \text{ mm}, D_{Z'} = 25.4(1) \text{ mm}. \quad (2.64)$$

Lors de la présentation des résultats expérimentaux, nous précisons explicitement l'utilisation de ce montage pour des grains isotropes. En l'absence de précision sur ce point, nos discussions porteront alors sur le montage pour des grains anisotropes avec lequel nous avons travaillé l'essentiel du temps.

2.4.2 Calibration de l'amplitude du potentiel par spectroscopie micro-onde

Le potentiel aléatoire $V(z)$ auquel sont soumis les atomes a pour origine la force dipolaire de l'interaction lumière-matière. La calibration de l'amplitude de $V(z)$ consiste à mesurer le déplacement lumineux des niveaux atomiques induit par le laser, $\Delta E \propto \frac{I}{\delta}$, où I est l'intensité du laser et δ le désaccord du laser avec la transition atomique. Le désaccord δ du laser peut être obtenu expérimentalement avec une très bonne précision par une technique de battement optique. Il est cependant bien connu que des mesures photométriques précises sont extrêmement délicates et ne conduisent pas à une calibration de l'intensité effective sur les atomes à mieux qu'un facteur 2 ou 3 près. Cela vient du fait, d'une part, que nous ne pouvons pas faire une telle mesure avec un appareil photométrique placé là où se trouvent les atomes, *i.e.* à l'intérieur de la cellule¹¹, d'autre part, parce que notre système optique dont l'ouverture numérique est grande implique des variations spatiales très rapides de l'intensité dans la direction de propagation (Ox) de part et d'autre du point de focalisation du faisceau.

Si les mesures photométriques ne se révèlent pas suffisamment précises, il existe néanmoins une technique beaucoup plus appropriée à la calibration de l'amplitude du potentiel aléatoire : il s'agit d'utiliser les atomes pour sonder ce potentiel. L'idée est la suivante. D'une part, nous cherchons à mesurer le déplacement lumineux $\Delta E_{F=1}$ des atomes dans le niveau $|S_{3/2} F=1, m_F=-1\rangle$ et, d'autre part, nous pouvons induire une transition de l'état hyperfin $|F=1\rangle$ vers l'état $|F=2\rangle$ en présence d'une onde micrométrique de fréquence environ 6.8 GHz en l'absence de potentiel optique. Le spectre de cette transition micro-onde est obtenu en observant le nombre d'atomes transférés $F=1$ à $F=2$ en fonction de la fréquence de l'onde micro-onde. Si nous effectuons une mesure du spectre micro-onde en présence d'un laser induisant un déplacement lumineux des niveaux $|F=1\rangle$ et $|F=2\rangle$, le spectre sera modifié par rapport au cas sans potentiel optique. Nous allons montrer dans la suite comment relier ces modifications spectrales aux déplacements lumineux $\Delta E_{F=1}$ et $\Delta E_{F=2}$ qui nous intéressent.

Spectre hyperfin et amplitude du potentiel aléatoire

Le condensat est piégé magnétiquement dans le sous-niveau Zeeman $|F=1, m_F=-1\rangle$ (figure 2.13). Nous utilisons un générateur de fréquences micro-onde et une antenne pour induire une transition σ^+ ¹² vers le sous-niveau $|F=2, m_F=0\rangle$. L'antenne consiste en un petit cylindre de longueur 1 cm et diamètre 0.4 mm que nous plaçons au dessus de la cellule, à une distance de l'ordre de 5 centimètres.

Les atomes qui effectuent la transition hyperfine vers l'état $|F=2, m_F=0\rangle$ ne sont plus

¹¹Afin de prendre en compte les transmissions et réflexions sur les optiques et la cellule.

¹²L'observation des résonances pour les polarisations σ^+ , π et σ^- (résonances séparées par un multiple du biais) permet de choisir la polarisation voulue.

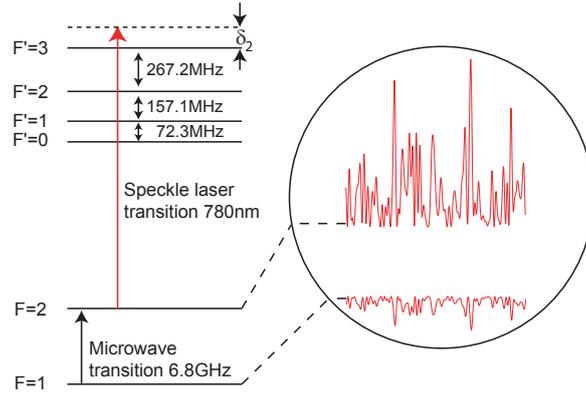


FIG. 2.13 – Schéma des niveaux de la raie $S_{1/2} \rightarrow S_{3/2}$ du Rubidium 87. Le potentiel aléatoire à 780 nm induit un déplacement lumineux des niveaux $F = 1$ et $F = 2$ (déplacements représentés à l'intérieur du cercle). La transition micro-onde utilisée pour la spectroscopie a lieu à 6.8 GHz.

piégés magnétiquement puisque leur moment magnétique est nul. Ils s'échappent du piège et il est alors facile de les distinguer de ceux qui sont encore piégés : ils se déplacent par rapport au centre du piège et, après un temps court (de quelques milli-secondes), ils sont spatialement séparés des atomes piégés. Notons qu'il est à strictement parler incorrect de dire que les atomes dans l'état $|F=2, m_F=0\rangle$ sont non piégés. En effet, ils sont soumis à l'effet Zeeman quadratique qui crée un potentiel de courbure non nulle (mais très faible). Cela étant, le déplacement des atomes en présence d'un potentiel de courbure très faible est suffisant pour permettre de distinguer les populations des deux sous-niveaux considérés. La mesure des populations respectives en fonction de la fréquence de l'onde micro-onde permet de tracer le spectre de la transition hyperfine étudiée. Dans la suite les spectres de la transition hyperfine $F = 1 \rightarrow F = 2$ sont tracés avec en ordonnée la fraction du nombre d'atomes restant dans l'état piégé $|F = 1, m_F = -1\rangle$, $N(f)/N_0$ (N_0 étant le nombre d'atomes total dans le condensat), en fonction de la différence $f = f_{mw} - 6.835$ GHz entre la fréquence de l'antenne micro-onde f_{mw} et la fréquence de la transition en l'absence de déplacement lumineux ($\simeq 6.835$ GHz).

Un exemple de spectre de la transition $F = 1 \rightarrow F = 2$ en l'absence de potentiel lumineux sur les atomes est tracé sur la figure 2.14.

Ce spectre est déplacé de $f_B = f_{mw} - 6.8\text{GHz} \simeq -2795$ kHz par rapport à la fréquence de la transition $F = 1 \rightarrow F = 2$ et a une largeur de $\simeq 10$ kHz. Ces deux observations, déplacement de la fréquence de résonance et largeur de la transition, viennent de l'effet Zeeman sur le sous-niveau magnétique $|F = 1, m_F = -1\rangle$. D'une part, le piège magnétique de Ioffe-Pritchard que nous utilisons pour piéger les atomes de Rubidium a un biais B_0 de l'ordre de 2800 kHz, déplaçant les atomes de l'état $F = 1$ par rapport aux atomes de l'état $F = 2$. Ce biais déplace donc la fréquence de résonance de la transition de $f_B = g_F \mu_B B_0 / h \sim 2800$ kHz. D'autre part, la courbure du champ magnétique sur la taille du nuage atomique induit une variation spatiale de la fréquence de résonance qui a pour conséquence d'élargir le spectre de la transition.

Lorsque le potentiel aléatoire optique est présent, les déplacements lumineux des deux états

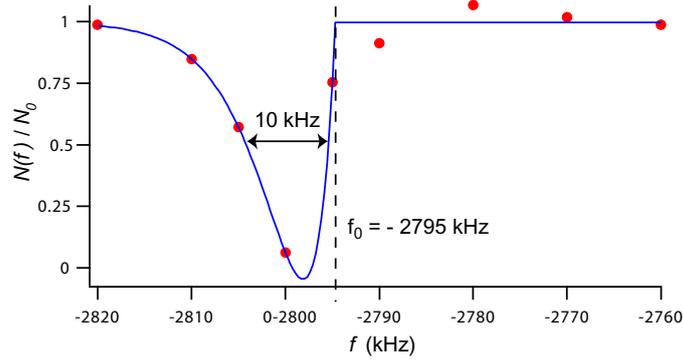


FIG. 2.14 – Fraction du nombre d’atomes restant piégés dans l’état $F = 1$ après l’application pendant 5 ms du couteau micro-onde autour de $f \simeq 6.835$ GHz en l’absence de potentiel aléatoire. Le piège magnétique déplace le spectre de la transition de -2795 kHz et l’élargit de 10 kHz (voir texte).

$F = 1$ et $F = 2$ modifient le spectre micro-onde. Les déplacements lumineux $\Delta E_{F=1}$ et $\Delta E_{F=2}$ sont inversement proportionnels aux désaccords δ_1 et δ_2 du laser du potentiel aléatoire avec les transitions atomiques, respectivement $F = 1 \rightarrow F'$ et $F = 2 \rightarrow F'$, F' représentant les différents niveaux excités de l’atome. Ainsi, afin d’obtenir une mesure accessible à nos expériences, il faut utiliser un laser dont la fréquence est proche de l’une des transitions atomiques, $F = 1 \rightarrow F'$ ou $F = 2 \rightarrow F'$, c’est-à-dire avec δ_1 ou δ_2 proche de zéro¹³.

Nous choisissons de placer la fréquence du laser proche de la fréquence de la transition de l’état $F = 2$ afin de minimiser l’émission spontanée sur les atomes présents dans notre piège à l’état $F = 1$. Ce choix pour le désaccord du laser implique la nécessité de calibrer très précisément le désaccord δ_2 par rapport à l’état $F = 2$ puisque celui est faible (typiquement $\delta_2 \sim 20$ MHz). Nous avons également utilisé les spectres micro-onde pour cela. Nous nous sommes placés alternativement avec des désaccords δ_2 positifs et négatifs en l’absence de potentiel aléatoire. Nous avons alors obtenus un spectre identique à celui de la figure 2.14 et un spectre symétrique à celui de la figure 2.14 par rapport à la fréquence micro-onde qui correspond au biais du piège magnétique. La comparaison d’un grand nombre de ces deux types de spectres permet alors de localiser très précisément le désaccord nul et donne une calibration du désaccord δ_2 à 1 MHz.

Le désaccord du laser du potentiel aléatoire à la transition atomique $F = 1 \rightarrow F'$ est de l’ordre de $\delta_1 \sim 6.8$ GHz. Ce désaccord est suffisamment grand devant la structure hyperfine des états excités (de l’ordre de 200 MHz, voir figure 2.13) pour ne pas prendre en compte cette dernière [119]. Le déplacement lumineux dans l’état Zeeman $|F=1, m_F=-1\rangle$ peut être alors calculé en utilisant la formule de l’équation (2.61) pour un faisceau laser polarisé π . Il vient

¹³Rappelons que pour les expériences sur les condensats en présence d’un potentiel aléatoire, le désaccord du laser créant ce potentiel avec la transition atomique $F = 1 \rightarrow F'$ est choisi d’une toute autre manière. Le choix que nous faisons dans cette partie est guidé par la seule mesure de spectroscopie micro-onde.

alors,

$$\Delta E_{F=1} = \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} \frac{2}{3} \frac{I}{\delta_1}, \quad (2.65)$$

avec δ_1 le désaccord entre le laser et la transition $F = 1 \rightarrow F' = 3$.

Le calcul du déplacement lumineux $\Delta E_{F=2}$ nécessite la prise en compte de la structure hyperfine des états excités puisque le laser est très proche de résonance pour la transition $F = 2 \rightarrow F'$ (typiquement $\sim 20\text{MHz}$). Le laser du potentiel aléatoire polarisé π couple l'état Zeeman $|F = 2, m_F = 0\rangle$ aux états $|F' = 1, m_F = 0\rangle$ et $|F' = 3, m_F = 0\rangle$. Les coefficients de Clebsch-Gordan pour ces transitions valent $C_{(1,0),(2,0)} = -\sqrt{4/10}$ et $C_{(3,0),(2,0)} = \sqrt{9/15}$, et les moments dipolaires réduits $d_{3,2} = 1$ et $d_{1,2} = \sqrt{1/6}$. Le déplacement lumineux du niveau $|F=2, m_F=0\rangle$ s'écrit alors [voir Eq. (2.5)] :

$$\begin{aligned} \Delta E_{F=2} &= \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} \left(\frac{d_{3,2}^2 |C_{(3,0),(2,0)}|^2}{\delta_{3,2}} + \frac{d_{1,2}^2 |C_{(1,0),(2,0)}|^2}{\delta_{1,2}} \right) I \\ &= \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} \left(\frac{3}{5} \frac{1}{\delta_{3,2}} + \frac{1}{15} \frac{1}{\delta_{1,2}} \right) I. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le laser étant choisi proche de résonance vers l'état excité $F' = 3$ (voir figure 2.13), la contribution au déplacement lumineux $\Delta E_{F=2}$ du terme correspondant à la transition vers $F' = 1$ est négligeable (contribution inférieure à 1%). Nous écrivons alors

$$\Delta E_{F=2} \simeq \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} \frac{3}{5} \frac{I}{\delta_{3,2}}, \quad (2.67)$$

où $\delta_{3,2} = \delta_2$ est le décalage du laser à la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ et vaut quelques dizaines de méga-hertz. Nous avons alors $\delta_1 = \delta_2 - 6.835 \text{ GHz} \sim -6.835 \text{ GHz}$. Le laser est ainsi toujours décalé vers le rouge pour l'état $F = 1$ d'environ 6.8 GHz, créant ainsi un potentiel attractif pour les atomes piégés¹⁴. Par rapport à la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$, le laser peut être décalé vers le bleu ou le rouge. Cela étant, précisons dès maintenant que ce dernier désaccord étant toujours faible lors des mesures de spectroscopie micro-onde, les atomes transférés par l'antenne micro-onde vers l'état $F = 2$ sont expulsés très rapidement de la zone où se trouve la lumière du potentiel aléatoire à cause de l'émission spontanée quasi-résonante.

Finalement, la modification de la transition micro-onde $F = 1 \rightarrow F = 2$ prenant en compte les déplacements lumineux des deux états hyperfins s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} I \left(\frac{3}{5} \frac{1}{\delta_2} - \frac{2}{3} \frac{1}{\delta_1} \right) \\ \Delta E &\simeq \frac{3}{5} \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_{\text{sat}}} \frac{I}{\delta_2} \quad \text{pour } \delta_2 \ll \delta_1 \end{aligned}$$

Des spectres micro-onde obtenus expérimentalement pour différentes intensités du laser du potentiel aléatoire sont présentés sur la figure 2.15. Lorsque le potentiel aléatoire éclaire les

¹⁴Dans toutes nos expériences dédiées à l'étude de l'influence d'un potentiel aléatoire sur un condensat de Bose, le décalage δ_1 est au contraire toujours choisi vers le bleu afin d'éviter une situation où un piégeage par l'enveloppe du faisceau gaussien puisse être possible.

atomes, des atomes séparés spatialement voient des déplacements lumineux différents à cause des variations spatiales de l'intensité du champ de tavelures. C'est pourquoi les spectres micro-ondes mesurés sont élargis comme nous pouvons le voir sur la figure 2.15.

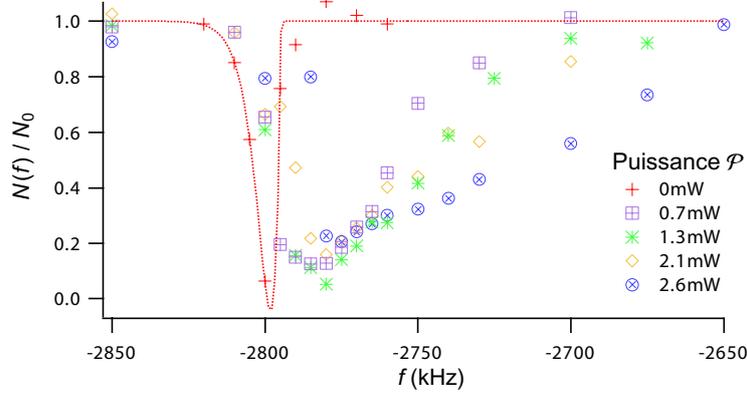


FIG. 2.15 – Fraction d'atomes restant dans l'état $F = 1$ après l'application pendant 5 ms du couteau micro-onde à la fréquence $f_{\text{mw}} = 6.8\text{GHz} + f$. Le désaccord du laser créant le potentiel aléatoire est fixe, $\delta = 15\text{MHz}$, et les différentes puissances utilisées \mathcal{P} sont indiquées sur la figure.

Nous avons décidé de calibrer l'amplitude du potentiel aléatoire σ_V sur les atomes à partir de la puissance optique mesurée en sortie de la fibre optique qui éclaire notre verre dépoli (voir figure 2.12). Il s'agit maintenant d'extraire de ces spectres l'amplitude du potentiel aléatoire σ_V et nous présentons dans le paragraphe suivant un modèle simple permettant de modéliser ces modifications du spectre micro-onde.

Modèle simple de l'efficacité de transition micro-onde

Dans ce paragraphe, nous voulons modéliser l'évaporation des atomes piégés de l'état $F = 1$ induite par le couteau micro-onde dans le potentiel aléatoire.

Remarquant tout d'abord que l'élargissement des spectres en présence de tavelures est beaucoup plus grand que l'élargissement de la transition dû à l'effet Zeeman en l'absence de potentiel aléatoire, nous négligeons par la suite cet élargissement Zeeman. Ensuite, nous supposons la densité atomique constante¹⁵, et la seule statistique de la distribution de tavelures permet d'extraire l'amplitude σ_V du potentiel aléatoire. Les valeurs du décalage laser δ_2 utilisées expérimentalement (quelques dizaines de Méga-Hertz) créent un potentiel optique dont l'amplitude typique est 100 fois plus grande que le potentiel chimique du condensat. Ainsi, nous supposons que les atomes sont essentiellement situés sur les maxima d'intensité de la figure de tavelures (i.e. au minima du potentiel aléatoire), comme le met en évidence la figure 2.16.

¹⁵Le profil de densité du condensat étant parabolique, il s'agit d'une bonne approximation mis à part pour les bords de la parabole.

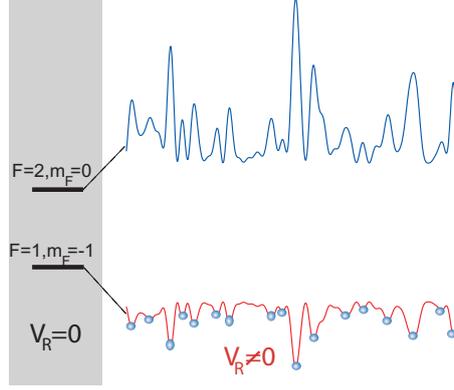


FIG. 2.16 – Image schématique des déplacements lumineux des niveaux atomiques en présence de tavelures avant application du couteau micro-onde. Pour les désaccords considérés dans cette partie, les atomes sont distribués spatialement aux maxima locaux d'intensité des tavelures en présence du potentiel aléatoire V_R .

Nous évaluons les maxima locaux de l'intensité à partir de simulations de tavelures comme l'indique la figure 2.17a en prenant les plus proches maxima. Nous pouvons alors simuler la distribution $P'(I_{max})$ des maxima locaux d'intensité pour différentes valeurs de l'intensité moyenne des tavelures. Nous obtenons l'histogramme de la figure 2.17b. Un ajustement de cet histogramme est obtenu à l'aide de l'équation

$$P'(I') = \frac{4I' \exp(-2I'/\bar{I}')}{\bar{I}'^2} \quad (2.68)$$

où $\bar{I}' = 1.89\sigma_I$ est la valeur moyenne de la distribution des maxima locaux d'intensité. Nous utiliserons dans la suite l'équation 2.68 comme distribution des maxima locaux d'intensité d'une figure de tavelures.

La fréquence micro-onde $f_{mw} = 6.8 \text{ GHz} + f$ induit une transition pour les atomes dont l'énergie est égale à l'intensité résonante $I(f)$ telle que [voir Eq.(2.68)]

$$h(f - f_B) = \frac{3\hbar\Gamma^2 I(f)}{40I_{\text{sat}}\delta_2}. \quad (2.69)$$

Le couteau micro-onde n'est pas infiniment fin et couple des atomes autour de la fréquence f_{mw} . De plus, dans les expériences, ce couteau n'est pas efficace à 100%. Aussi nous noterons α l'efficacité du couteau et Δf la largeur en fréquence couplée par l'onde micro-onde autour de sa fréquence centrale f_{mw} avec cette efficacité α .

Avec ces notations, le nombre d'atomes évaporés par le couteau micro-onde s'écrit

$$\alpha \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} dI P'(I) N_0.$$

En supposant une probabilité $P'(I) \simeq P'(I(f))$ constante sur l'intervalle Δf couplé par le

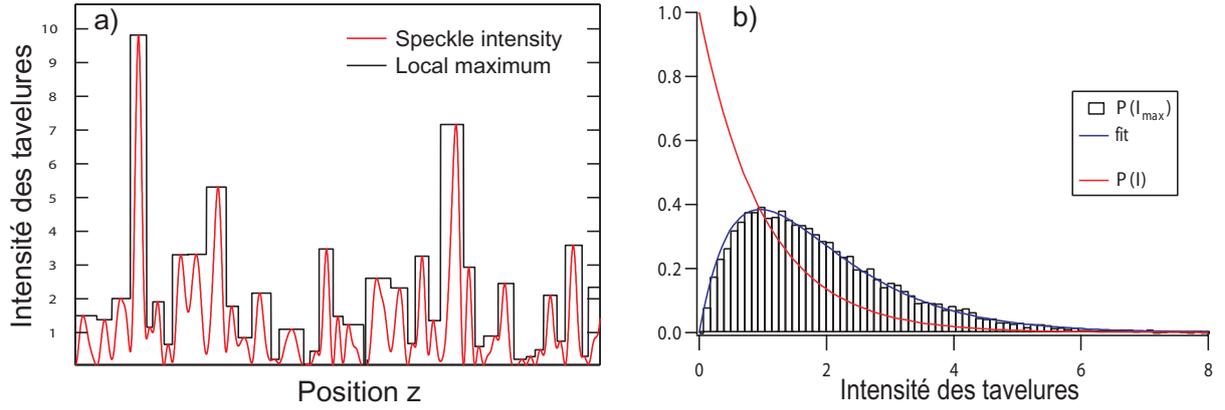


FIG. 2.17 – **a)** Tracé des maxima locaux d'intensité (noir) sur une image de tavelures (rouge). **b)** Distribution d'intensité des tavelures (rouge) et distribution des maxima locaux d'intensité (histogrammes noirs). La courbe d'ajustement de l'équation 2.68 est également tracée (bleu).

couteau, le nombre d'atomes restant dans l'état $F = 1$ après application du couteau micro-onde à la fréquence $f_{\text{mw}} = 6.8 \text{ GHz} + f$ s'écrit alors :

$$N(f) = N_0 \left[1 - \alpha \frac{\Delta f}{3\Gamma^2/80\pi I_{\text{sat}}\delta_2} P'(I(f)) \right] = N_0 [1 - \mathcal{A}P'(I(f))]. \quad (2.70)$$

Avec les équations 2.70-2.68, nous obtenons :

$$N(f) = N_0 \left[1 - \mathcal{B} \frac{(f - f_B)}{(1.89\sigma_I)^2} \exp\left(-2 \frac{f - f_B}{1.89(f_{\sigma_I} - f_B)}\right) \right] \quad (2.71)$$

où $\mathcal{B} = 320\pi \mathcal{A} I_{\text{sat}} \delta_2 / 3\Gamma^2$.

Dans l'expérience nous mesurons la puissance \mathcal{P} en sortie de la fibre optique qui crée les tavelures. Nous voulons donc relier cette puissance directement à l'amplitude σ_V du potentiel aléatoire vu par les atomes. Afin d'extraire l'amplitude σ_V des mesures expérimentales, nous ajustons les spectres micro-onde obtenus en présence de désordre avec la fonction suivante issue de l'équation (2.71) :

$$N(f) = N_0 \left[1 - \mathcal{C}(f - f_B) \exp\left(-2 \frac{f - f_B}{1.89(f_{\sigma_I} - f_B)}\right) \right] \quad (2.72)$$

où \mathcal{C} , f_B et f_{σ_I} sont les paramètres de l'ajustement.

Utilisant l'équation (2.69) nous obtenons l'amplitude du potentiel σ_V à partir de $f_{\sigma_I} - f_B$. L'amplitude des tavelures σ_I extraite de cet ajustement est tracée en fonction de la puissance \mathcal{P} sur la figure 2.18b. Un ajustement linéaire permet d'extraire la pente de la calibration de l'amplitude σ_V fonction de la puissance mesurée en sortie de fibre \mathcal{P} :

$$\sigma_I/\mathcal{P} = 1.0(1) \times 10^3 \text{ m}^{-2}. \quad (2.73)$$

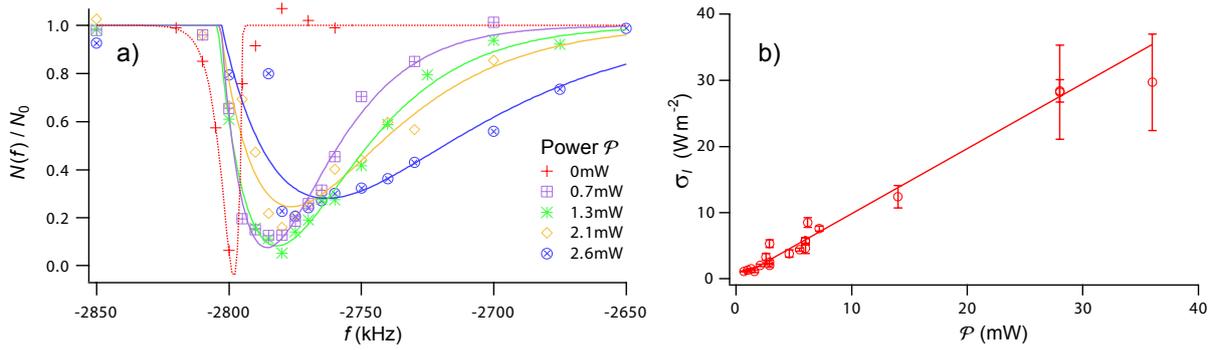


FIG. 2.18 – **a)** Fraction d’atomes restant dans l’état $F = 1$ après l’application pendant 5 ms du couteau micro-onde à la fréquence $f_{\text{mw}} = 6.8\text{GHz} + f$. Le désaccord du laser créant le potentiel aléatoire est fixe, $\delta = 15\text{MHz}$, et les différentes puissances utilisées \mathcal{P} sont indiquées sur la figure. Les lignes en trait plein sont un ajustement des données avec l’équation 2.72. **b)** σ_I en fonction de \mathcal{P} . L’ajustement linéaire donne $\sigma_I/\mathcal{P} = 1.0(1) \times 10^3\text{m}^{-2}$.

2.4.3 Calibration des variations spatiales du potentiel aléatoire

L’échelle typique des variations spatiales du potentiel aléatoire est définie par la fonction d’auto-corrélation de ce potentiel (paragraphe 2.2.3). Cette échelle spatiale est égale à la taille typique des grains de tavelures et elle peut être calculée à l’aide des formules (2.20) pour chacune des directions de l’espace. Cela étant, notre système d’imagerie a une grande ouverture numérique ($\text{O.N.} \simeq 0.44$) et n’est pas stigmatique. Nous avons donc mesuré expérimentalement la taille des grains dans le plan transverse ($\Delta y'$ et $\Delta z'$).

Une première méthode : mesure de la fonction d’auto-corrélation

Nous avons calibré la taille des grains de tavelures $\Delta z'$ à partir des images obtenues sur une caméra CCD en calculant la fonction d’auto-corrélation du champ de tavelures. Nous avons pris des images pour différentes valeurs de l’ouverture $D_{z'}/l$ en changeant la taille $D_{z'}$ d’éclairage du verre dépoli par le faisceau laser incident. Nous traçons la largeur $\Delta z'$ de la fonction d’auto-corrélation (définie par le premier zéro comme au paragraphe 2.2.3) en fonction de $1/D_{z'}$ sur la figure 2.19.

Lorsque la taille des pixels de la caméra CCD ne limite pas notre acquisition, nous pouvons ajuster nos données avec une droite $\alpha/D_{z'}$. Cet ajustement doit être comparé à la formule $\Delta z' = \lambda/D_{z'}$ de l’approximation paraxiale. Pour des tailles de grains de tavelures trop petites (typiquement inférieures à deux fois la taille du pixel de la caméra CCD) il est nécessaire de prendre en compte la taille finie du pixel. Sur la figure 2.19 nous avons tracé en pointillé la modification de la taille attendue mesurée prenant en compte cette résolution finie du détecteur. Nous pouvons alors obtenir le coefficient α de l’ajustement linéaire sur la taille des grains $\Delta z'$ sur toute la plage de mesure. Cela nous conduit à $\Delta z' = 1.11(9) \times \lambda/D_{z'}$. Nous extrapolons alors la taille des grains pour l’ouverture expérimentale $D_{z'} = 55\text{mm}$ avec laquelle nous travaillons. Nous obtenons

$$\Delta z' = 0.95(7) \mu\text{m}.$$

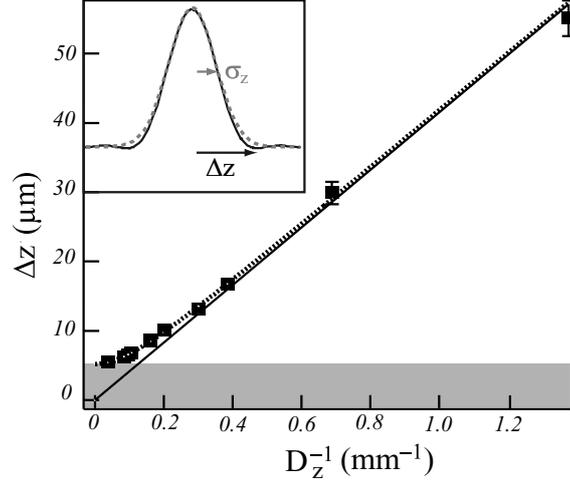


FIG. 2.19 – *Mesure de la taille des grains de tavelures selon l'axe long Oz du condensat à partir de la fonction d'auto-corrélation (représentée en image insérée). La courbe en trait plein correspond au calcul théorique du paragraphe 2.2.3 alors que la courbe en trait pointillé prend en compte la résolution finie du détecteur.*

La taille de la fonction d'auto-corrélation dans l'autre direction transverse (nullement limitée par la résolution de la caméra CCD) donne

$$\Delta y' = 54(1) \mu\text{m}. \quad (2.74)$$

Nous calculons alors dans la direction de propagation du faisceau laser la taille longitudinale des grains

$$\Delta x' \simeq \frac{7.6\Delta z'^2}{\lambda} = 8.8 \mu\text{m}. \quad (2.75)$$

Une seconde méthode pour les grains inférieurs à la résolution : mesure de la perte du contraste

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent, la mesure directe de la taille de la fonction d'auto-corrélation d'un champ de tavelures peut être limitée par la résolution finie du détecteur. Seule une extrapolation de l'ajustement linéaire attendu permet d'obtenir une taille de grains inférieure à celle du pixel de la caméra dans notre expérience.

Cela étant, il est possible de contourner cette limite de résolution en tirant profit des propriétés statistiques des tavelures [120, 124] et effectuant une mesure indirecte de la taille des grains de tavelures. En effet, la loi de distribution d'intensité du champ de tavelures (fonction exponentielle) est elle aussi modifiée par la limite de résolution du détecteur. Cette modification consiste en une perte du contraste des tavelures. Comme nous l'avons montré au paragraphe 2.2.4, cette perte de contraste peut être reliée au rapport entre la taille du pixel et la taille des grains de tavelures $\Delta z'$.

Nous avons mesuré la perte du contraste des tavelures en faisant un ajustement de la distribution d'intensité obtenue sur la caméra CCD afin d'extraire le paramètre M [voir paragraphe 2.2.4]. Nous avons alors obtenu

$$\Delta z' = 1.1(1) \mu\text{m}.$$

Nous avons pu ainsi confirmer la première mesure de la taille $\Delta z'$ des grains de tavelures dans la direction où l'ouverture numérique de notre système optique est la plus grande.

Calibration du montage de grains isotropes

Dans le cas du montage avec des grains isotropes, nous avons mesuré expérimentalement

$$\Delta z' = 5.2(2) \mu\text{m}, \quad \Delta y' = 5.2(2) \mu\text{m},$$

dont nous déduisons

$$\Delta x' = 265(4) \mu\text{m}.$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le potentiel aléatoire optique issu d'un champ de tavelures que nous utilisons dans toutes les expériences décrites dans ce mémoire. Une description détaillée du champ de tavelures a fait l'objet de la première partie de ce chapitre. Nous avons porté une attention particulière aux deux caractéristiques principales d'un tel potentiel aléatoire, à savoir son amplitude typique σ_V et son échelle de variation spatiale Δz , et aux modifications de ces dernières lors de l'observation avec un système d'imagerie de résolution finie. Nous avons ensuite discuté une façon de quantifier l'écart d'un potentiel aléatoire de taille finie à un potentiel auto-moyennant.

La mise en place expérimentale et la calibration précise du potentiel aléatoire issu du champ de tavelures a été décrite dans la dernière partie de ce chapitre. En particulier, une méthode spectroscopique pour mesurer l'amplitude du potentiel permet une calibration précise de cette dernière (typiquement à 10% près). Cette précision s'avèrera par la suite cruciale dans nos études (chapitres 4 et 5). Soulignons également que nous disposons de deux dispositifs créant des champs de tavelures avec des longueurs de corrélation différentes ($\sigma_R = 1.7$ et $0.33 \mu\text{m}$), nous permettant ainsi d'étudier des situations expérimentales en présence de potentiel 1D ou quasi-1D pour les condensats atomiques.

Nous allons maintenant mettre un gaz d'atomes froids en présence de ce potentiel aléatoire...

Production et caractérisation d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire

Ce chapitre est dévolu à l'étude des propriétés statiques et de l'expansion en temps de vol de condensats de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire 1D. En premier lieu se pose la question de l'existence d'un condensat à l'équilibre dans un potentiel aléatoire. Il n'est en effet a priori pas évident que pour tout jeu de paramètres (nombre d'atomes, force des interactions, amplitude du potentiel aléatoire) un phénomène de condensation de Bose puisse avoir lieu.

La question de l'influence d'un potentiel aléatoire sur l'existence du phénomène de condensation a des liens très forts avec de nombreux travaux concernant l'étude de la superfluidité et la supraconductivité en présence de désordre. Ces travaux décrivent la présence d'un milieu poreux (aérogel, Vycor) dans l'hélium II superfluide et les supraconducteurs dits "sales" dans lesquels de nombreuses impuretés sont présentes. Rappelons les trois grands régimes que nous avons identifiés au chapitre 1 à partir de ces travaux : un *régime de faible nombre de particules et faible désordre*, un *régime de grand nombre de particules et faible désordre* et un *régime de grand nombre de particules et fort désordre*. L'étude des différentes phases d'un gaz de Bose en présence de désordre [3] a poursuivi toutes ces études sur les phénomènes de superfluidité et supraconductivité en présence de désordre. Nous pouvons considérer aujourd'hui qu'elle a constitué une avancée majeure dans ce domaine et a ouvert de nombreuses voies. Nos propres travaux se concentrent uniquement sur la phase de condensat désordonné.

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous décrivons succinctement les différents états d'un gaz de Bose en présence de désordre et nous établissons les conditions d'observation d'un condensat de Bose-Einstein désordonné. Dans un second paragraphe, nous rappelons le processus expérimental d'obtention d'un condensat de Bose-Einstein non-désordonné et nous décrivons le dispositif qui permet d'obtenir un condensat gazeux d'atomes de Rubidium dans notre laboratoire. Nous poursuivons ce paragraphe par la description de la production de condensats désordonnés avec notre expérience. Nous étudions alors quelques propriétés de ces condensats désordonnés dans le piège magnétique. Enfin, le dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à une étude détaillée originale des fluctuations de densité qui se développent dans un condensat désordonné au cours d'un temps de vol [34]. A partir d'un travail analytique sur l'expansion, nous développons un scénario décrivant les expériences en temps de vol. En particulier, ce modèle met l'accent sur l'importance de l'expansion radiale au cours du temps de vol dans le phénomène d'amplification des modulations de densité.

3.1 Diagramme d'états d'un gaz de Bose dans un potentiel aléatoire

Après les travaux de M.P.A. Fisher *et al.* [3], de nombreuses papiers théoriques ont par la suite poursuivi cette étude avec pour point commun de traiter le cas d'un réseau désordonné. Par réseau désordonné, nous entendons la présence d'un potentiel périodique (créé par exemple optiquement avec une onde stationnaire) dans lequel se trouvent les atomes et auquel est ajouté un potentiel aléatoire. Ces travaux étaient notamment inspirés par les problèmes de la matière condensée (électrons, supraconducteurs) où un réseau sous-jacent au potentiel aléatoire est toujours présent. La présence du désordre se caractérise alors par une modification de l'énergie sur site du réseau. Il est souvent commode pour traiter ce problème d'utiliser un hamiltonien discret dont les points correspondent aux sites du réseau. Cet hamiltonien est appelé hamiltonien de Bose-Hubbard.

Les travaux qui ont suivi ceux M.P.A. Fisher *et al.* [3] auxquels nous avons fait référence incluent notamment des simulations Monte-Carlo pour étudier les phases de verre de Bose et de verre d'Anderson [68], des simulations Monte-Carlo pour étudier la phase supersolide [126], une théorie de champ moyen pour un gaz de bosons avec interactions [127], la proposition d'utiliser des atomes froids pour tester les différentes phases quantiques d'un système désordonné [89], l'établissement du diagramme de phase dans un réseau quasi-périodique (fréquence incommensurable) [104, 128], etc... Cette liste est très loin d'être exhaustive mais elle montre l'intérêt de la communauté scientifique aux travaux théoriques sur l'influence du désordre sur les états d'un gaz de Bose depuis la fin des années 1980.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la présence d'un gaz de Bose en présence d'un potentiel aléatoire 1D sans réseau sous-jacent. Il s'agit donc de connaître les différents états d'un gaz de bosons avec interactions en présence d'un potentiel aléatoire de tavelures, en particulier l'existence d'une phase de condensat. Cette question a fait l'objet d'un travail récent [106]. La figure 3.1 présente le diagramme d'état obtenu pour un gaz de Bose en présence d'un potentiel aléatoire 1D. Nous ne présenterons pas cette étude dans le détail. Il s'agit de décrire succinctement dans ce paragraphe les différents états existant dans ce système. Nous nous concentrerons ensuite sur la seule phase de condensat de Bose-Einstein désordonné.

Les différents états quantiques obtenues en présence d'un potentiel aléatoire sont le verre de Lifshits, le verre de Bose et la phase de condensat de Bose-Einstein désordonné.

En présence de faibles interactions le gaz de Bose se trouve dans l'état appelé verre de Lifshits. Dans cet état, les atomes se trouvent dans des états à une particule localisés au fond des puits du potentiel aléatoire (éventuellement leur fonction d'onde s'étend partiellement sur les sites adjacents). La forme exacte de ces états résulte de la compétition entre énergie cinétique et énergie potentielle. En l'absence d'interaction, seul l'état de plus basse énergie potentielle est peuplé et tous les bosons se trouvent dans le même état. Lorsque de faibles interactions répulsives sont présentes dans le gaz, le coût en énergie d'interaction devient trop important pour conserver tous les atomes dans le même état¹. Dès lors, les bosons se trouvent alors localisés

¹Dans un potentiel aléatoire auto-moyennant, il est possible de trouver deux puits dont la différence d'énergie potentielle est aussi faible que l'on veut.

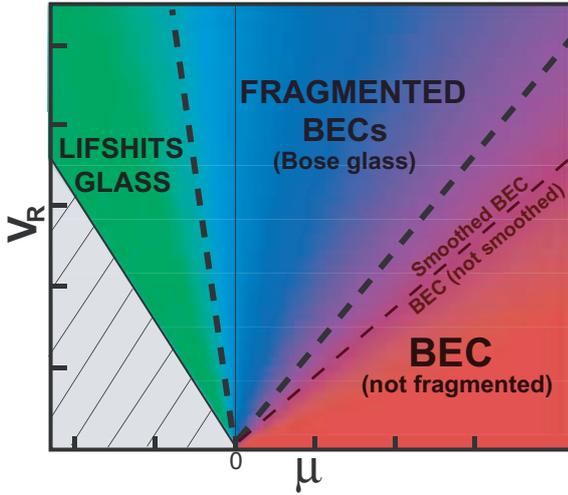


FIG. 3.1 – Diagramme des états d'un gaz de Bose avec interactions dans un potentiel aléatoire. L'amplitude du potentiel aléatoire est V_R , sa longueur de corrélation σ_R et le potentiel chimique du gaz de bosons μ . Le diagramme est tracé pour $\alpha_R = \hbar^2/2m\sigma_R^2V_R$ constant.

sur plusieurs sites du potentiel aléatoire. Cet état du gaz de bosons est appelée verre de Lifshits car les différents états peuplés par les bosons correspondent aux états d'énergie de la queue de Lifshits du potentiel aléatoire. Un nombre fini d'états est peuplé et le recouvrement des fonctions d'onde associé à chacun de ces états est négligeable. Le système peut alors être décrit par un état de Fock [106]. Le verre de Lifshits est donc une phase isolante et non compressible.

Lorsque les interactions sont plus importantes, le gaz de Bose entre dans une phase où plusieurs condensats peuvent co-exister. Localement, un certain nombre de bosons sont délocalisés sur plusieurs sites du potentiel aléatoire et constituent une partie superfluide. A l'échelle du système entier, les différents îlots superfluides ont un recouvrement négligeable et peuvent être considérés indépendants les uns des autres. Cette phase est communément appelée verre de Bose. Il s'agit d'une phase isolante et compressible.

Enfin, pour de larges interactions ($\mu \gg V_R$), le gaz de Bose est délocalisé sur tout le cylindre (*i.e.* sur l'ensemble du système de taille finie). Cet état est superfluide et correspond à un condensat de Bose-Einstein en présence d'un potentiel aléatoire. Dans la suite, nous désignerons cette phase par condensat de Bose-Einstein désordonné. Le potentiel aléatoire effectif vu par les atomes du condensat désordonné dépend également des interactions. Nous discuterons ce point plus en détail au paragraphe 3.3.4.2.

Notons que la figure 3.1 présente un diagramme d'état schématisé. Cependant, il est possible d'obtenir une expression analytique pour les frontières délimitant les différents états du diagramme. Dans l'hypothèse où $\alpha_R = \hbar^2/2m\sigma_RV_R$ est une constante, ces frontières qui ne sont pas de véritables transitions de phase au sens thermodynamique sont des droites. Enfin, il est également possible d'écrire les équations d'état des différentes parties du diagramme 3.1 [106].

La description que nous venons de faire des différents états d'un gaz de Bose en présence de désordre met en évidence les trois régimes que nous avons évoqués au premier chapitre à partir des travaux théoriques sur la superfluidité et la supraconductivité notamment : une phase de particules localisées (états de Lifshits), une phase de condensation et une phase isolante de verre de Bose. Cette étude théorique que nous venons de décrire succinctement démontre en

particulier l'existence d'une phase de condensation de Bose-Einstein d'un gaz de bosons en présence d'un potentiel aléatoire 1D. La première réalisation expérimentale publiée de condensats gazeux désordonnés date de l'année 2005, dans le groupe de M. Inguscio à Florence [88].

Après un rappel sur les condensats gazeux, nous allons dans les paragraphes suivants décrire la réalisation expérimentale et la caractérisation de cet état de condensat désordonné.

3.2 Généralités sur les condensats de Bose-Einstein

Dans ce paragraphe, nous présentons les idées directrices et les principaux résultats concernant les condensats de Bose-Einstein atomiques, en particulier ceux du régime (dit de Thomas-Fermi) dans lequel se trouvent les condensats de Rubidium avec lesquels nous travaillons expérimentalement. Nous présentons également brièvement le dispositif expérimental nous permettant d'obtenir la condensation du Rubidium 87. Ce dispositif a déjà fait l'objet d'une description détaillée dans les thèses de nos prédécesseurs [129–132]. Nous terminerons ce paragraphe par la description de la réalisation expérimentale de condensats désordonnés piégés ainsi que la caractérisation des principales propriétés de ces derniers.

3.2.1 Condensation de Bose-Einstein et équation de Gross-Pitaevskii

Le phénomène de condensation de Bose-Einstein [28, 133] tient aux propriétés statistiques d'un type de particules, les bosons, qui ne se manifestent que lorsque la nature ondulatoire (quantique) de la matière apparaît². La théorie de la dualité onde-corpuscule associe à une particule de quantité de mouvement \mathbf{p} une longueur d'onde, dite longueur de de Broglie, $\lambda_{\text{dB}} = \hbar/\mathbf{p}$. A un ensemble statistique de particules ayant une énergie thermique moyenne égale à $3k_{\text{B}}T/2$ on associe une longueur de de Broglie thermique :

$$\Lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\text{B}}T}}. \quad (3.1)$$

Le caractère ondulatoire d'un ensemble de bosons apparaît lorsque la distance moyenne entre particules est inférieure à l'extension spatiale Λ_{dB} de l'onde qui lui est associée. Nous obtenons alors le critère

$$n\Lambda_{\text{dB}}^3 \sim 1 \quad (3.2)$$

où n est la densité du gaz de bosons.

Le critère exact de condensation d'un gaz idéal de bosons à 3D [$n\Lambda_{\text{dB}}^3 \geq 2.612$] s'obtient en étudiant la statistique d'une assemblée de bosons où il apparaît une saturation des niveaux excités [28]. Tous les atomes ajoutés au système peuplent alors l'état fondamental et nous pouvons définir un condensat de Bose-Einstein comme un ensemble de particules dont un nombre macroscopique peuple un seul et même état quantique.

A la limite thermodynamique, il est possible de définir la température critique T_c^0 pour le gaz idéal en dessous de laquelle le phénomène de condensation a lieu³. Dans un piège harmonique

²Si la description corpusculaire (classique) des particules est valide, la statistique de Maxwell-Boltzmann décrit correctement ces dernières, qu'elles soient bosoniques ou fermioniques.

³Avec le critère de condensation, il vient $T_c^0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{2.612}\right)^{2/3}$

V_{ext} , cette température critique de condensation est égale à

$$k_{\text{B}}T_c^0 = \hbar\bar{\omega} \left(\frac{N}{1.202} \right)^{1/3} \quad (3.3)$$

avec $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ et N le nombre d'atomes du gaz. Le nombre d'atomes condensés N_0 , *i.e.* occupant macroscopiquement l'état fondamental du système, suit l'équation

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0} \right)^3. \quad (3.4)$$

La description d'une assemblée de bosons sans interaction permet une compréhension intuitive du phénomène de condensation mais ne permet pas de décrire la situation d'un gaz dégénéré où des interactions sont présentes. Même faibles, les interactions modifient profondément la fonction d'onde du condensat de Bose-Einstein [28, 133].

Dans les gaz d'atomes froids dilués avec lesquels nous travaillons [$na^3 \ll 1$ où a est la longueur de diffusion], les interactions sont très bien décrites par une diffusion en onde s . Il est possible d'écrire une équation d'évolution pour l'opérateur champ en seconde quantification [94], $\hat{\psi}$, où le terme d'interaction est décrit par la diffusion en onde s . Il vient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V_{\text{ext}} + g|\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad (3.5)$$

où $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage des interactions dans l'onde s .

En supposant alors l'existence d'un condensat de Bose-Einstein à $T = 0$, nous pouvons écrire $\hat{\psi} \simeq \psi_0 + \delta\hat{\psi}$ où ψ_0 est la fonction d'onde du condensat et $\delta\hat{\psi}$ l'opérateur qui décrit les états excités orthogonaux au mode du condensat. En remplaçant $\hat{\psi} \simeq \psi_0$ dans l'équation (3.5), nous obtenons l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps.

En régime stationnaire (*i.e.* à l'équilibre), l'équation de précédente (3.5) se réduit, en substituant $\psi_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r})e^{-i\mu t/\hbar}$, à l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi_0 + V_{\text{ext}} \phi_0 + g|\phi_0|^2 \phi_0 = \mu \phi_0 \quad (3.6)$$

et l'énergie μ s'identifie au potentiel chimique du condensat. Cette équation fait apparaître trois énergies : l'énergie cinétique proportionnelle à \hbar^2 ; l'énergie potentielle V_{ext} ; l'énergie d'interaction proportionnelle à g . Elle permet de décrire la plupart des propriétés des condensats atomiques à l'équilibre dont nous allons donner quelques exemples dans les paragraphes qui suivent. Notons que l'équation de gross-Pitaevskii est insuffisante lorsqu'il s'agit de prendre en compte la déplétion quantique ou les corrélations entre particules.

3.2.2 Le régime de Thomas-Fermi

Lorsque la densité $n(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})|^2$ du condensat varie lentement dans l'espace, le terme d'énergie cinétique proportionnel à \hbar^2 devient négligeable dans l'équation de Gross-Pitaevskii (3.6). Des trois énergies mises en jeu par l'équation de Gross-Pitaevskii [énergie d'interaction $\sim N_0 g |\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2$, énergie potentielle $\sim N_0 V_{\text{ext}}$ et énergie cinétique $\sim N_0 \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}$], seules les

énergies d'interaction et potentielle contribuent alors aux propriétés du condensat [28, 133]. Ce régime est appelé régime de Thomas-Fermi.

Pour un condensat dans un piège isotrope et d'extension spatiale R , le terme d'énergie cinétique est de l'ordre de $\hbar^2/2mR^2$ et le terme d'interaction de l'ordre de gn . Ainsi, si la taille du nuage R est grande devant la longueur de relaxation $\xi = \hbar/\sqrt{2mgn}$, $R \gg \xi$, le terme cinétique est négligeable devant le terme d'interaction. La condition du régime de Thomas-Fermi requiert donc un nombre d'atomes suffisant afin que la taille du nuage due aux interactions répulsives soit grande devant l'extension spatiale de l'état fondamental du piège $a_{\text{oh}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}}$ où $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$. Elle se met sous la forme

$$\frac{N_0 a}{a_{\text{oh}}} \gg 1. \quad (3.7)$$

Nous voulons mettre l'accent sur deux caractéristiques essentielles du régime de Thomas-Fermi pour un condensat à l'équilibre dans un piège magnétique. Nous considérons un piège anisotrope identique à celui de nos expériences, $\omega_x = \omega_y = \omega_{\perp} \gg \omega_z$.

D'une part, le profil de densité solution de l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps (3.6) devient évident. Il s'agit de la solution de l'équation $gn_0(\mathbf{r}) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \mu_{\text{TF}}$ où μ_{TF} est le potentiel chimique dans l'approximation de Thomas-Fermi. Le profil de densité reflète alors le confinement parabolique du piège magnétique :

$$n_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\mu_{\text{TF}}}{g}} \left[1 - \left(\frac{x}{R_{\text{TF}}} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_{\text{TF}}} \right)^2 - \left(\frac{z}{L_{\text{TF}}} \right)^2 \right] \times \Theta \left(1 - \left(\frac{x}{R_{\text{TF}}} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_{\text{TF}}} \right)^2 - \left(\frac{z}{L_{\text{TF}}} \right)^2 \right) \quad (3.8)$$

avec les longueurs de Thomas-Fermi du condensat $R_{\text{TF}} = \sqrt{2\mu_{\text{TF}}/m\omega_{\perp}^2}$ et $L_{\text{TF}} = \sqrt{2\mu_{\text{TF}}/m\omega_z^2}$. La fonction $\Theta(u)$ est la fonction de Heaviside. Un condensat dans le régime Thomas-Fermi possède une densité atomique qui suit les variations lentes (grandes devant ξ) du potentiel piégeant le condensat. Enfin, en normalisant $|\phi_0|^2$ au nombre d'atomes dans le condensat N_0 , il vient pour le potentiel chimique,

$$\mu_{\text{TF}} = \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left(\frac{15a_{\perp}aN_0}{a_z^2} \right)^{2/5} \quad (3.9)$$

où $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ et $a_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$.

Remarquons que la condition de validité du régime de Thomas-Fermi est locale. Ainsi, sur les bords du condensat où la densité atomique chute jusqu'à s'annuler, elle n'est plus satisfaite et le profil de densité n'est pas parabolique. Cela étant, la taille typique de la région où le condensat n'est pas dans le régime de Thomas-Fermi est donnée par la longueur de relaxation ξ qui est en pratique très petite devant la taille du nuage. Nous négligerons l'influence de cette zone dans toute la suite du mémoire.

D'autre part, les propriétés dynamiques du condensat dans le régime de Thomas-Fermi prennent une forme particulière. L'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps peut alors

être décrite par deux équations hydrodynamiques couplées sur la densité n et le champ de vitesse \mathbf{v}^4 [133],

$$\partial_t \bar{n} + \operatorname{div}(\mathbf{v}n) = 0 \quad (3.10)$$

$$m\partial_t \mathbf{v} + \nabla\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + V_{\text{ext}} + gn\right) = 0. \quad (3.11)$$

Les solutions des modes collectifs du condensat dans le régime hydrodynamique [Eq (3.10-3.11)] conduisent à une relation de dispersion qui fait intervenir les fréquences du piège magnétique [134]. En particulier, le mode d'oscillation du centre de masse selon l'axe $j = 1..3$, appelé également mode dipolaire, a pour pulsation ω_j et le mode de respiration, appelé également mode quadrupolaire, a pour pulsation $\sqrt{5/2} \omega_z$. Nous utiliserons ces résultats pour caractériser le confinement longitudinal ω_z auquel est soumis le condensat de Bose-Einstein dans nos expériences.

3.2.3 BEC allongés et fluctuations de phase

Nous voulons ici rappeler quelques résultats sur la condensation de Bose-Einstein dans des pièges très anisotropes. La configuration expérimentale du piège que nous utilisons correspond à cette situation.

Dans un piège harmonique très anisotrope à symétrie cylindrique [$\omega_x = \omega_y = \omega_\perp \gg \omega_z$], les états excités d'un gaz idéal peuvent être de deux natures différentes. Lorsque l'énergie de l'état excité s'écrit $\epsilon = (n_\perp^x + n_\perp^y + 1)\hbar\omega_\perp + (n_z + 1/2)\hbar\omega_z$ avec des nombres quantiques n_\perp et n_z différents de zéro, l'état a un caractère 3D et correspond à un mouvement tri-dimensionnel. Au contraire, lorsque l'énergie se met sous la forme $\epsilon = n_z\hbar\omega_z$ ($n_\perp = 0$), l'état excité est 1D et correspond à un mouvement uni-dimensionnel. Il est alors possible de définir deux températures de condensation, l'une correspondant à la saturation des états excités 1D, T_{1D} , et l'autre correspondant à la saturation des états 3D, T_c^0 .

Si $T_{1D} > T_c^0 > \hbar\omega_\perp$, les états excités 3D saturent à une température inférieure à celle des états 1D. En saturant en dernier lorsque la température est abaissée, les états 3D limitent le processus : il s'agit d'une condensation à 3D. Si $T_c^0 > T_{1D} > \hbar\omega_\perp$, les états 3D saturent en premier : un nombre macroscopique d'atomes va peupler l'état fondamental transverse. Par contre, la distribution axiale reste thermique lorsque la température est comprise entre T_c^0 et T_{1D} . Il faut alors continuer à baisser la température pour obtenir la saturation des états 1D. On parle alors de condensation en deux étapes [135].

La distinction entre états 1D et états 3D du gaz idéal piégé permet de comprendre l'existence d'un condensat de Bose-Einstein dans lequel des excitations thermiques 1D peuvent exister. Cela étant, la présence d'interactions dans notre système rend la réalité plus complexe. Nous ne voulons pas décrire dans le détail cette complexité et nous renvoyons le lecteur à la thèse de F. Gerbier par exemple [132].

Cette phase de condensat dans laquelle existent des excitations thermiques 1D est appelée "quasi-condensat" [136]. Elle est décrite par une fonction d'onde macroscopique sans fluctuation

⁴Nous avons écrit $\psi_0 = n \exp(i\theta)$ et $\mathbf{v} = \hbar\nabla\theta/m$.

de la densité atomique mais dont la phase varie spatialement et dans le temps. Ainsi, lors de la condensation d'un gaz thermique vers un quasi-condensat, les fluctuations de densité sont réduites mais des fluctuations de la phase qui sont la signature de la présence d'états 1D peuplés thermiquement persistent. La figure 3.2 présente la forme d'un quasi-condensat.

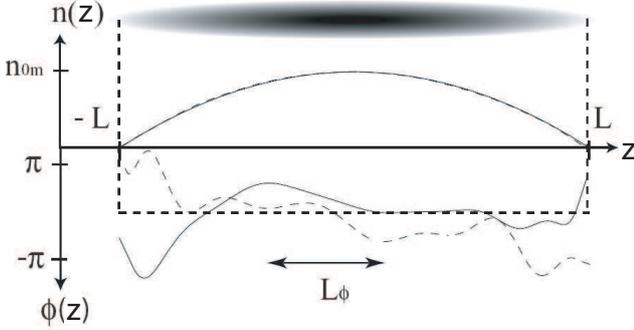


FIG. 3.2 – *Quasi-condensat dans un piège anisotrope. Les profils de densité $n(z)$ et de phase $\phi(z)$ sont tracés le long de l'axe long Oz . Les fluctuations de densité sur le profil parabolique sont très faibles (et pas visibles à cette échelle) alors que les fluctuations de la phase apparaissent très clairement (deux profils de phase ont été tracés).*

Les fluctuations de la phase du quasi-condensat permettent de définir une longueur de corrélation de la phase, L_ϕ , comme la distance moyenne sur laquelle la phase varie de 2π le long du système.

Il est alors possible de définir la température caractéristique T_ϕ en dessous de laquelle il y a des fluctuations de phase dans le nuage atomique par la relation

$$T_\phi = T \frac{L_\phi}{L} \quad (3.12)$$

où L est la longueur longitudinale du quasi-condensat dans le piège et T sa température. Ainsi, si $T \gg T_\phi$, le profil de phase varie beaucoup à l'échelle du système ($L_\phi \ll L$). Au contraire, si $T \ll T_\phi$, le profil de phase est homogène sur la taille du nuage : on a alors un "vrai" condensat. Dans un piège harmonique anisotrope, il vient [137]

$$k_B T_\phi = 15 N_0 \frac{(\hbar\omega_z)^2}{32\mu}. \quad (3.13)$$

De nombreuses études ont porté sur la caractérisation des fluctuations de phase dans un quasi-condensat, citons notamment les techniques de spectroscopie de Bragg [138], de corrélation de second ordre [139] ou d'interférométrie atomique [140]. Notons également que ces fluctuations de phase initiales sont en partie converties au cours d'une expansion en temps de vol du quasi-condensat en fluctuations de densité [141, 142]. Nous reviendrons sur ce dernier point plus en détail au paragraphe 3.4 où nous discuterons l'expansion en temps de vol d'un condensat allongé désordonné.

3.3 Dispositif expérimental pour la réalisation de condensats d'atomes

3.3.1 Les étapes vers de la dégénérescence quantique

L'obtention de la dégénérescence quantique dans un gaz de bosons nécessite la réalisation d'un nuage à très basse température dans lequel la densité atomique reste élevée : il s'agit de

réaliser un gaz atomique pour lequel la densité dans l'espace des phases est de l'ordre de l'unité [$n\Lambda_{\text{dB}} \sim 1$]. A titre de comparaison, la densité dans l'espace d'un gaz à température et pression ambiante est de l'ordre de $10^{-8} \text{ at.cm}^{-3}$. L'obtention expérimentale de la dégénérescence quantique s'avère capricieuse dans la mesure où de nombreuses étapes avec un cheminement quelque peu erratique dans l'espace des phases sont nécessaires. La figure 3.3 présente l'évolution dans l'espace des phases du nuage atomique au cours de ces différentes phases sur notre expérience.

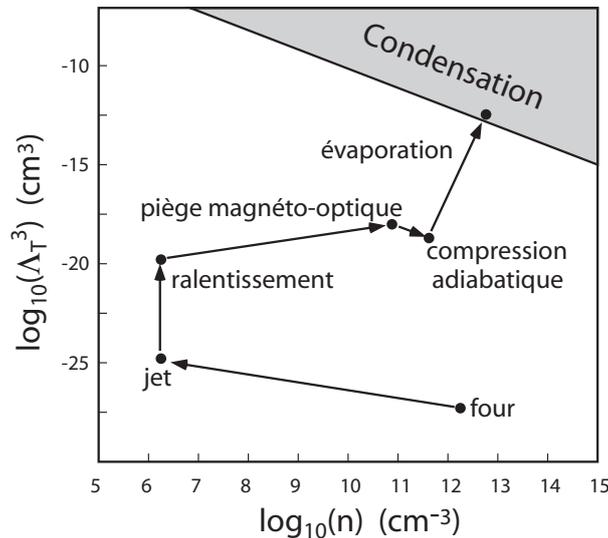


FIG. 3.3 – *L'odyssée dans l'espace des phases vers l'obtention d'un gaz de Bose dégénéré...*

Le dispositif expérimental de la "manip BEC1" ainsi que les différentes phases qui permettent la réalisation d'un condensat de Bose-Einstein de $^{87}\text{Rubidium}$ ont été décrits en détail dans les thèses de nos prédécesseurs [129–132]. Dans l'annexe A nous présentons quelques données sur l'atome de Rubidium. Nous allons ici très succinctement rappeler ces différentes étapes et décrire notre dispositif expérimental "BEC1".

La manipulation d'un gaz atomique à très basse température nécessite d'isoler ce gaz d'échanges thermiques éventuels. A l'intérieur d'une enceinte, la limitation principale vient des collisions avec le gaz résiduel. Un cycle expérimental pour la réalisation d'un condensat de Bose-Einstein dure environ 1 minute. Il faut donc que les collisions entre notre nuage atomique et le gaz résiduel dans l'enceinte à 300 K soit négligeable pendant la durée de ce cycle. La pression résiduelle qu'il faut atteindre pour cela est de l'ordre de quelques 10^{-11} mbars.

La figure 3.4 présente le dispositif expérimental de la "manip BEC1" permettant de travailler dans des conditions de pression suffisante à l'obtention d'un condensat dans l'enceinte secondaire.

Les différentes étapes expérimentales du refroidissement laser

Une vapeur d'atomes du Rubidium est extraite d'un four à 120°C et se répand dans l'enceinte primaire à travers un tube horizontal de faible section. Ce dernier permet une première sélection

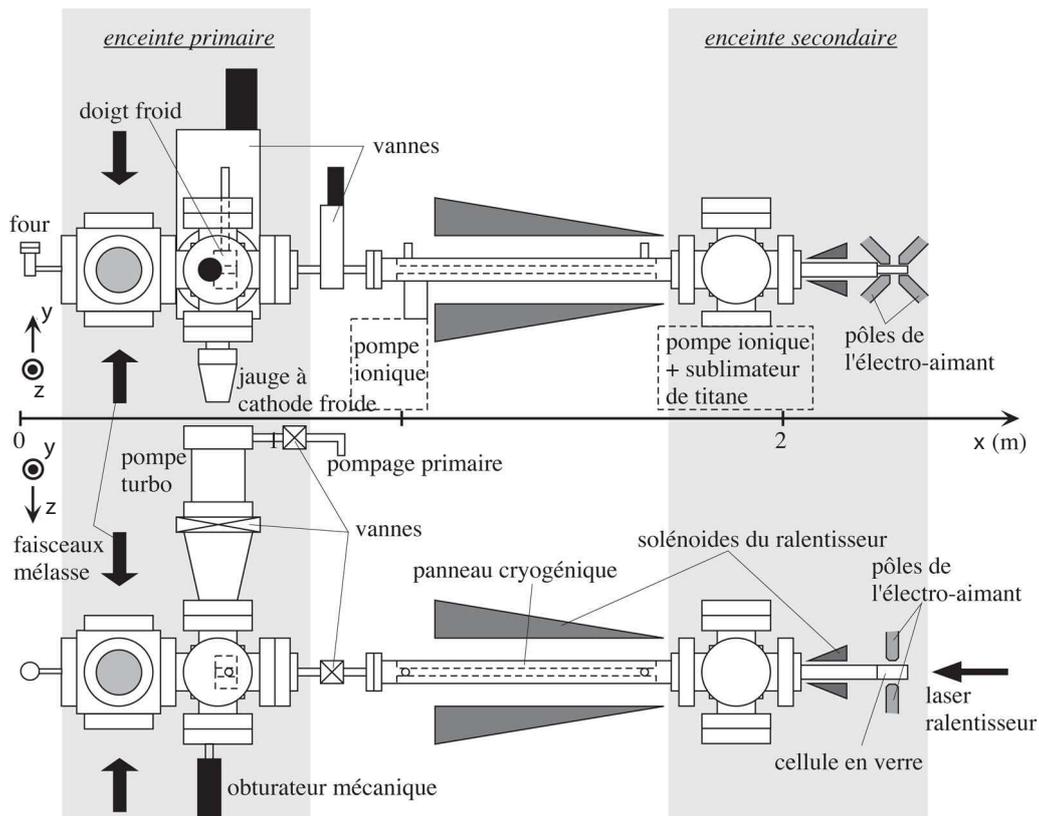


FIG. 3.4 – Dispositif expérimental de l'expérience "BEC1". Les atomes de Rubidium sont extraits du four à haute température ($\sim 140^\circ\text{C}$). Les faisceaux laser de la mélasse transverse collimatent le jet atomique qui entre ensuite dans le ralentisseur Zeeman. Lorsqu'ils parviennent dans la cellule de l'enceinte secondaire, les atomes sont suffisamment refroidis pour être capturés dans le piège magnéto-optique. Les atomes sont alors transférés dans le piège magnétique où l'évaporation RF conduit à l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein.

des seuls atomes dont la vitesse transverse n'est pas trop élevée. Nous utilisons également une mélasse transverse (sur la transition $|F = 2 \rangle \rightarrow |F' = 3 \rangle$) dans l'enceinte primaire afin de collimater le jet atomique.

Le jet atomique sortant de l'enceinte primaire rejoint la cellule de l'enceinte secondaire à travers un solénoïde de section inhomogène à l'intérieur duquel le jet atomique est ralenti (de 130 à 50 m/s environ) par l'action d'un faisceau laser contra-propageant désaccordé de 133 MHz vers le rouge de la transition cyclante $|F = 2 \rangle \rightarrow |F' = 3 \rangle$ (voir annexe 1). A l'intérieur de ce solénoïde, le champ magnétique inhomogène engendre un déplacement des états atomiques qui permet de compenser l'effet Doppler afin de rester proche de résonance (pression de radiation grande).

Les atomes ralentis du jet peuvent alors être capturés dans le piège magnéto-optique (PMO) de l'enceinte secondaire constitué, d'une part, par un champ magnétique quadrupolaire créé par deux bobines (configuration anti-Helmoltz) et, d'autre part, par six faisceaux lasers contra-

propageant désaccordés de 12 MHz de la transition cyclante $|F = 2 \rangle \rightarrow |F' = 3 \rangle$ [voir figure 3.5 b)]. Le mécanisme de refroidissement Doppler limite la température du nuage du PMO à $\hbar\Gamma/k_B \sim 100 \mu\text{K}$ et le mécanisme de refroidissement Sisyphe permet d'obtenir une température inférieure de l'ordre de $40 \mu\text{K}$. Nous chargeons typiquement 5×10^8 atomes dans le PMO. Pour compenser la désexcitation possible des atomes de $|F' = 2 \rangle$ vers $|F = 1 \rangle$, sortant ainsi de la transition cyclante du PMO nous utilisons un faisceau repompeur sur la transition $|F = 1 \rangle \rightarrow |F' = 2 \rangle$.

Afin de transférer un grand nombre d'atomes dans le piège magnétique, la densité du nuage avant le transfert doit être augmentée. Or, lorsque la densité atomique devient importante ($\sim 10^8 - 10^9 \text{ at/cm}^3$), les atomes du PMO ne peuvent plus être décrits comme des atomes indépendant subissant la force de friction lumineuse et la force de rappel magnétique. Les photons spontanés peuvent en effet être absorbés par le nuage atomique avec une probabilité élevée, conduisant à une augmentation de la température et une saturation de la densité atomique à $\sim 10^{10} \text{ at/cm}^3$. Afin de circonvenir cet effet, nous plaçons un cache au centre des faisceaux repompeurs latéraux⁵ afin de laisser les atomes dans l'état noir $|F = 1 \rangle$ pour les faisceaux du PMO. Cette technique appelée Dark Spot est moyennement efficace pour les atomes de Rubidium. Nous utilisons également un faisceau dépompeur dont la section est égale à celle du cache du Dark Spot pour augmenter le nombre d'atomes dans l'état noir : cette technique est appelée Ultra-Dark Spot. A la fin de ces deux phases la densité atomique a augmenté d'un ordre de grandeur ($\sim 10^{11} \text{ at/cm}^3$) mais la température du nuage atomique (quelques centaines de μK) est trop élevée pour un transfert efficace vers le piège magnétique. Une phase de mélasse optique permet de diminuer la température du nuage (au prix d'une perte de densité). Le nuage est alors transféré dans le piège magnétique où la phase suivante de refroidissement par évaporation radio-fréquence va avoir lieu.

Un schéma récapitulatif des différents lasers utilisés sur notre expérience est présenté dans l'annexe A.

Dans le paragraphe suivant nous décrivons notre piège magnétique et le transfert vers ce dernier où a lieu le processus d'évaporation conduisant à la dégénérescence quantique.

3.3.2 Notre piège magnétique

Le piège magnétique dans lequel nous obtenons les condensats de Bose-Einstein est de type Ioffe-Pritchard avec une géométrie cylindrique. La direction la moins confinante du piège (axe long du nuage) est l'axe Oz du champ dipolaire. Nous l'appellerons axe dipolaire ou direction longitudinale du piège. Le confinement le plus élevé se trouve dans le plan xOy du champ quadrupolaire que nous nommerons plan transverse ou plan quadrupolaire. Les champs dipolaire et quadrupolaire d'un tel piège de Ioffe-Pritchard s'écrivent respectivement (au second ordre) avec une bonne approximation,

$$\mathbf{B}_{dip} = \begin{pmatrix} -B''xz/2 \\ -B''yz/2 \\ B_0 + B''(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{quad} = B' \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⁵Faisceaux du repompeur dans le plan horizontal xOz .

La conception de notre piège de Ioffe-Pritchard est originale. Elle est basée sur l'utilisation de pôles ferro-magnétiques guidant le champ magnétique créé à l'aide de bobines jusqu'aux atomes. La figure 3.5a) montre l'électro-aimant dans son ensemble autour de la cellule en verre. Six bobines créent les champs magnétiques du piège de Ioffe-Pritchard. A l'intérieur de ces bobines se trouvent six pôles ferro-magnétiques dont les extrémités sont approximativement distantes de la cellule de 3 mm. L'ensemble est tenu par deux anneaux et constitue une seule pièce.

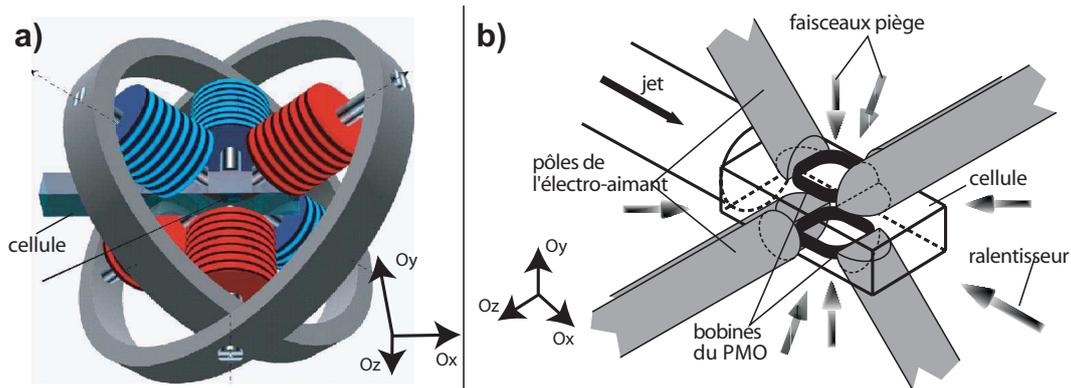


FIG. 3.5 – **a)** Image de l'électro-aimant créant notre piège de Ioffe-Pritchard. Les 6 bobines apparaissent en couleur autour des pôles ferro-magnétiques qui guident le champ magnétique jusqu'à la cellule. **b)** Schéma du dispositif expérimental autour la cellule rectangulaire. Les six pôles ferro-magnétiques du piège sont représentés en présence des lasers des différentes phases du refroidissement et des bobines du PMO.

Nous présentons sur la figure 3.5b) une vue schématique de la disposition des pôles ferro-magnétique autour de la cellule en présence des différents faisceaux laser et bobines nécessaires aux premières phases de refroidissement laser. Remarquons en particulier la forme biseautée des pôles du champ quadrupolaire (plan xOy) sur toute la largeur de la cellule selon la direction longitudinale Oz . Cette particularité permet de créer un champ de confinement transverse homogène sur la largeur de la cellule selon la direction Oz . Nous verrons au chapitre 4 l'importance de ce point lors de la réalisation expérimentale d'un guide magnétique 1D selon l'axe Oz .

Nous renvoyons le lecteur aux études détaillées réalisées par nos prédécesseurs de ce piège ferro-magnétique [129–131, 143]. Rappelons tout de même que la conception de notre piège utilisant des pôles guidant le champ magnétique jusqu'à la cellule permet de créer de forts confinements avec de faibles courants d'alimentation (typiquement 1.5 kG/cm avec 30 A). De plus, le champ magnétique transverse créé est homogène dans la direction longitudinale du piège. Cela étant, outre l'encombrement spatial autour de la cellule, le principal inconvénient de cet électro-aimant vient de la présence de champs rémanents créés par les pôles ferro-magnétiques. Une procédure de compensation fine de ces champs rémanents à l'aide de bobines dites de "compensation" a été développée lors de la mise en place de l'électro-aimant [129–131, 143]. Cette opération de compensation doit régulièrement faire l'objet de réglages nouveaux et s'avère délicate : seule une longue pratique du contrôle des courants dans les différentes bobines de

compensation permet d'y parvenir !

Les atomes sont transférés dans le piège magnétique dans l'état hyperfin magnétique $|F = 1, m_F = -1 \rangle$. Lors du transfert, les courants d'alimentation des bobines du piège en font un piège isotrope de fréquence $2\pi \times 17$ Hz. Le nuage piégé magnétiquement contient $\sim 1.5 \times 10^8$ atomes dans l'état $|F = 1, m_F = -1 \rangle$ à une température de l'ordre de $60 \mu\text{K}$. Une fois le piège isotrope chargé, un cycle de compression⁶ en présence d'une champ radio-fréquence conduit à la réalisation d'un piège anisotrope dont les valeurs expérimentales des gradient, courbure et biais magnétiques typiques sont

$$B' \simeq 1.5 \text{ kG.cm}^{-1} \quad B'' \simeq 30 \text{ G.cm}^{-2} \quad B_0 \simeq 3 \text{ G}.$$

Les dernières rampes d'évaporation radio-fréquence ont lieu dans cette configuration anisotrope du piège et conduisent à la réalisation d'un condensat de Bose-Einstein avec $N_0 \simeq 4 \times 10^5$ atomes. Les fréquences finales du piège magnétique, mesurées avec l'observation d'oscillations dipolaires du condensat dans les directions transverses et longitudinale [voir paragraphe 3.2.2], sont

$$\omega_{\perp} = 2\pi \times 660(4) \text{ Hz} \quad \omega_z = 2\pi \times 6.70(7) \text{ Hz}. \quad (3.14)$$

3.3.3 Observation et caractérisation des condensats après un temps de vol

L'observation des nuages d'atomes dans notre expérience est toujours réalisée après un temps de vol. La taille du condensat explosant selon les directions transverses (Ox et Oy) dans les toutes premières milli-secondes du temps de vol (le temps typique de l'expansion radiale est $1/\omega_{\perp} \simeq 0.25$ ms [144, 145]), cette technique d'imagerie nous permet d'obtenir une bonne résolution transverse⁷. Elle permet également de s'affranchir des modifications spatiales de résonance des états atomiques induites par la présence du piège magnétique : la coupure de ce dernier a lieu en $100 \mu\text{s}$ mais il faut quelques milli-secondes aux électro-aimants pour relaxer vers un état d'équilibre.

3.3.3.1 Lois d'échelles dans un piège dépendant du temps

L'évolution temporelle d'un condensat de Bose-Einstein dans le régime de Thomas-Fermi en présence d'un potentiel harmonique extérieur dépendant du temps est bien connue. Les lois régissant une telle évolution ont été établies théoriquement par Y. Kagan, E.L. Surkov et G.V. Shlyapnikov [144] et Y. Castin et R. Dum [145]. En particulier, ces lois sont bien adaptées au calcul de l'évolution d'un condensat lâché du piège initial dans lequel il se trouvait initialement.

Nous considérons un condensat à l'équilibre se trouvant dans le régime de Thomas-Fermi dans le piège initial. Sa fonction d'onde initiale $\phi_0(x_j)$ est telle que

$$g|\phi_0(x_j)|^2 = \mu_{TF} - \sum_j \frac{m\omega_j^2 x_j^2}{2} \quad (3.15)$$

⁶Ce cycle est décrit en détail dans la thèse de S. Richard [131].

⁷Initialement la taille $R_{TF} \simeq 1.5 \mu\text{m}$ du condensat est inférieure à la limite de résolution de notre système d'imagerie $\simeq 8.5 \mu\text{m}$.

où les indices $j = 1..3$ correspondent respectivement aux trois directions de l'espace Ox , Oy et Oz .

Dans le régime de Thomas-Fermi le condensat suit des lois d'échelle et le profil de densité demeure parabolique au cours de l'expansion. Les facteurs d'échelle seront notés $b_j(t)$, l'origine des temps $t = 0$ correspondant à l'instant où le condensat est lâché du piège initial. La fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ du condensat satisfaisant l'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit au cours du temps de vol

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\prod_j b_j(t)}} \phi\left(\frac{x_j}{b_j(t)}\right) e^{i\theta_0(\mathbf{r}, t)}. \quad (3.16)$$

L'évolution temporelle des facteurs d'échelle est donnée par l'équation [144, 145] :

$$\ddot{b}_j + \omega_j^2(t)b_j = \frac{\omega_j^2(0)}{(b_j \prod_k b_k)}. \quad (3.17)$$

La phase $\theta_0(\mathbf{r}, t)$ qui apparaît à l'instant $t = 0$ de l'ouverture du piège initial vaut

$$\theta_0(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2\hbar} \sum_j \frac{\dot{b}_j}{b_j} x_j^2 - \beta(t) \quad (3.18)$$

où la fonction $\beta(t)$ est telle que $\partial_t \beta = \mu / \prod_k b_k$. La présence de cette fonction $\beta(t)$ permet d'écrire des équations dynamiques sous une forme simple [145]. Nous utiliserons notamment cette transformation sur la phase θ au paragraphe 3.4.

L'apparition du profil de phase $\theta_0(\mathbf{r}, t)$ dans le condensat à l'instant $t = 0$ correspond physiquement au transfert de l'énergie de piégeage en énergie cinétique via les interactions. Les interactions répulsives présentes dans le nuage créent un champ de vitesse dont le gradient est proportionnel à la densité atomique locale. Ainsi, dans le régime de Thomas-Fermi, le champ de vitesse et le gradient de phase ont la forme parabolique du piège magnétique⁸.

Considérons le cas d'un piège de symétrie de révolution cylindrique dont les pulsations sont notées ω_\perp et ω_z respectivement dans les directions transverses (plan xOy) et longitudinale (Oz)⁹. Dans le cas où le piège est anisotrope, $\omega_\perp \gg \omega_z$, le condensat Thomas-Fermi possède une forme de cigar allongé selon l'axe Oz . Cette forme anisotrope du condensat engendre un gradient de vitesse transverse plus élevé que le gradient longitudinal : l'expansion du condensat va donc se faire essentiellement dans les directions radiales aux temps courts.

Cette caractéristique se retrouve dans les solutions des équations d'évolution des facteurs d'échelle,

$$b_\perp(t) = \sqrt{1 + \omega_\perp^2 t^2} \quad (3.19)$$

$$b_z(t) = 1 + \epsilon^2 \left[\omega_\perp t \arctan(\omega_\perp t) - \ln \left(\sqrt{1 + \omega_\perp^2 t^2} \right) \right] + 0(\epsilon^4) \quad (3.20)$$

où $\epsilon = \omega_z / \omega_\perp \ll 1$. En effet, le facteur d'échelle $b_z(t)$ n'évolue pratiquement pas sur des temps d'expansion typiques inférieurs à $1/\omega_z$. Les temps de vol t_{vol} que nous utilisons dans

⁸Rappelons que le champ de vitesse est relié au gradient de phase par $\mathbf{v} = (\hbar/m) \nabla \theta_0$

⁹Nous avons donc $b_1(t) = b_2(t) = b_\perp(t)$ et $b_3(t) = b_z(t)$.

nos expériences sont tels que $\omega_z t_{\text{vol}} \leq 1$. Nous pouvons donc considérer avec une très bonne approximation¹⁰ que l'évolution longitudinale est gelée et $b_z(t_{\text{vol}}) \simeq 1$.

3.3.3.2 Système d'imagerie par absorption

Nous utilisons la technique d'imagerie par absorption pour observer les nuages d'atomes de Rubidium [27]. L'absorption d'un faisceau laser quasi-résonant par un nuage d'atomes ultrafroids est correctement décrite par la loi de Beer-Lambert lorsque la transition atomique n'est pas saturée. Cela nous permet de connaître le profil de densité du nuage très simplement si nous nous trouvons dans ce régime où l'intensité de la sonde I_0 est faible devant l'intensité de saturation de la transition atomique $I_{\text{sat}} \simeq 1.6 \text{ mW/cm}^2$. En effet, nous pouvons alors écrire le rapport entre l'intensité du faisceau sonde transmise à travers le nuage et l'intensité incidente :

$$\log \left[\frac{I_{\text{transmise}}}{I_{\text{incidente}}} \right] = -\sigma_{\text{abs}} \int_y dy n_{3\text{D}}(x, y, z) = -\sigma_{\text{abs}} n_{2\text{D}}(x, z) \quad (3.21)$$

avec σ_{abs} est la section efficace d'absorption pour le désaccord δ_{sonde} et l'intensité I_{sonde} du laser sonde, $\sigma_{\text{abs}} = \sigma_0 / [1 + (2\delta_{\text{sonde}}/\Gamma)^2 + (2I_{\text{sonde}}/I_{\text{sat}})^2]$ avec $\sigma_0 = 3\lambda_L^2/2\pi$.

Nous obtenons alors des images à 2D dont chaque point de l'espace correspond à la densité atomique colonne intégrée selon l'axe Oy de notre expérience. Cette possibilité expérimentale donnée par les atomes froids d'observer directement la densité du nuage est l'une des forces de ces expériences.

Le montage optique pour l'imagerie est décrit sur la figure 3.6. Une présentation plus détaillée de ce dernier ainsi que du principe de l'imagerie par absorption peut être trouvée dans les thèses de S. Richard [131] ou F. Gerbier [132].

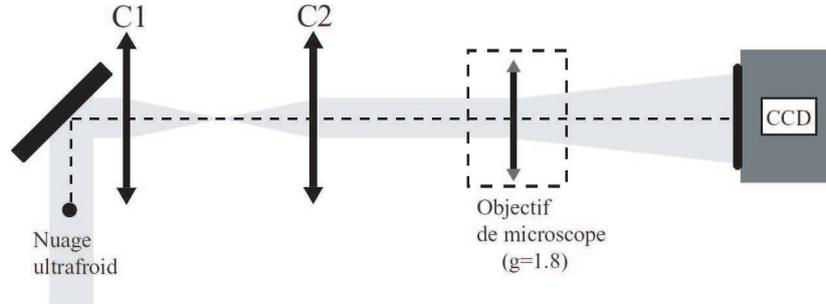


FIG. 3.6 – *Système d'imagerie : le nuage d'atomes est éclairé selon l'axe vertical du champ de gravitation par le faisceau laser "sonde". Nous utilisons ensuite un doublet (C1, C2) pour effectuer un transport d'image jusqu'à un objectif de microscope qui crée un grandissement 1.8 sur la caméra CCD.*

La figure 3.7 présente plusieurs images d'un nuage d'atome de Rubidium refroidi à une température supérieure puis inférieure à la température critique de condensation T_c . La transition de phase vers la phase condensée apparaît lorsqu'une partie centrale du nuage devient très dense. La dernière image correspond à celle d'un condensat de Bose presque pur ($T \simeq 0.2T_c$).

¹⁰La variation du facteur d'échelle est de l'ordre de 1%.

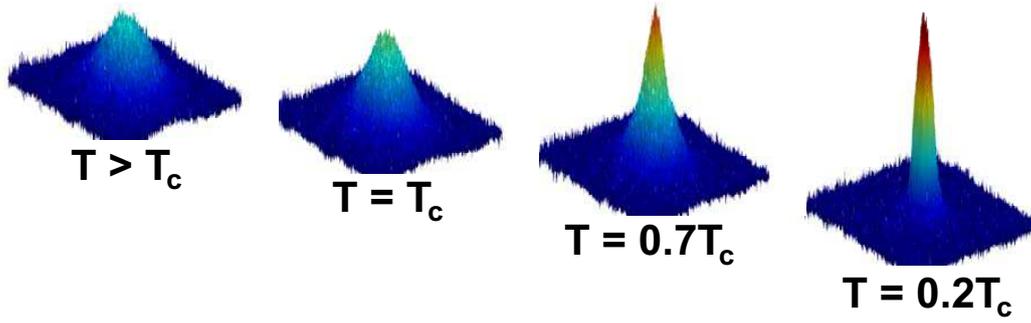


FIG. 3.7 – Images par absorption d’un gaz d’atomes de Rubidium lors de la transition de phase de condensation. L’échelle verticale en fausses couleurs correspond à la densité 2D. Au dessous de la température critique, $T > T_c$ le gaz est thermique. Lorsque la température descend sous la température critique, $T < T_c$, une partie condensée très dense apparaît au centre du nuage. Pour les plus basses températures, le condensat de Bose-Einstein est pur.

3.3.3.3 Analyse des images

Les images par absorption que nous obtenons après un temps de vol nous donnent accès à la densité 2D $n_{2D}(x, z, t_{\text{vol}})$ (l’intégration colonne du nuage par le faisceau sonde a lieu selon l’axe Oy). Nous pouvons alors tracer les profils de densité dans chacune des deux directions Ox et Oz . Nous présentons sur la figure 3.8 trois exemples de profils de nuage issus d’images par absorption après un temps de vol. Il s’agit des cas d’un nuage thermique [a) et b) : $T > T_c$], d’un nuage mixte [c) et d) : $T \simeq 0.7 T_c$] et d’un condensat de Bose-Einstein pur [e) et f) : $T \simeq 0.2 T_c$]. Pour ces trois exemples, l’ajustement de la densité 2D $n_{2D}(x, z)$ est réalisée avec trois fonctions différentes : une gaussienne, une double structure gaussienne + parabole et une parabole.

Nous pouvons alors extraire de l’ajustement à deux dimensions de ces images un grand nombre de paramètres expérimentaux : le nombre d’atomes total N ; la fraction condensée (et donc le nombre d’atomes condensés N_0) ; la température du nuage lorsque la fraction condensée est supérieure à 15 % (en dessous l’ajustement de la partie thermique n’est pas très bon) ; les tailles radiales et longitudinales du condensat R_{TF} et L_{TF} ; les tailles de la partie thermique ; etc... Afin de calculer ces paramètres dans le piège, c’est-à-dire avant le temps de vol, il faut connaître l’évolution des facteurs d’échelle. Dans notre piège anisotrope ($b_z \simeq 1$), il vient [voir paragraphe 3.3.3.1]

$$n_{2D}(x, z, t = t_{\text{vol}}) = \frac{1}{b_{\perp}(t_{\text{vol}})} n_{2D} \left[\frac{x}{b_{\perp}(t_{\text{vol}})}, z, t = 0 \right]. \quad (3.22)$$

Dans la partie 4, nous appellerons profil de densité longitudinal du condensat la quantité $n_{2D}(x = 0, z, \tau)$. Il s’agit d’un profil de densité selon la direction longue du condensat avant le temps de vol. Il faut noter que ce profil de densité n’est pas intégré selon la direction radiale Ox .

Potentiel chimique et densité 2D

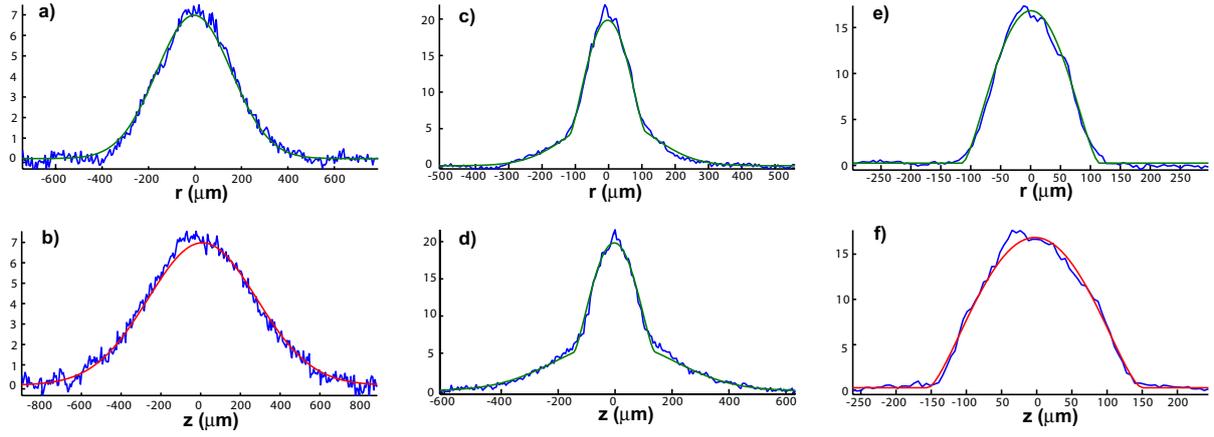


FIG. 3.8 – Profils de densité 2D $n_{2D}(x, z)$ dans les directions transverse [profils du haut : **a**), **c**), **e**] et longitudinale [profils du bas : **b**), **d**), **f**] pour différentes températures. **a**) et **b**) : $T > T_c$; ajustement avec une gaussienne. **c**) et **d**) : $T \simeq 0.7T_c$; ajustement avec une double structure (gaussienne + parabole). **e**) et **f**) : $T \simeq 0.2T_c$; ajustement avec une parabole.

Supposons la présence d'un potentiel extérieur V_{ext} ajouté au piège magnétique. Ce potentiel V_{ext} est appliqué sur le condensat piégé pendant un temps τ . Le confinement magnétique et le potentiel extérieur sont ensuite coupés en même temps et le condensat évolue pendant un temps de vol t_{vol} .

Dans le régime de Thomas-Fermi en présence du potentiel extérieur V_{ext} , la densité 3D dans le piège magnétique s'écrit

$$n_{3D}(x, y, z, \tau) = \frac{1}{g} \left[\mu(\tau) - m\omega_{\perp}^2 x^2/2 - m\omega_{\perp}^2 y^2/2 - m\omega_z^2 z^2/2 - V_{\text{ext}} \right], \quad (3.23)$$

où $\mu(\tau)$ est le potentiel chimique du condensat à l'instant τ passé dans le piège en présence du potentiel extérieur V_{ext} . La densité 2D avant le temps de vol s'écrit alors

$$n_{2D}(x, z, \tau) = \int dy n_{3D}(x, y, z, \tau) = \frac{4R_{\text{TF}}}{3g\sqrt{\mu_{\text{TF}}}} \left[\mu(\tau) - m\omega_{\perp}^2 x^2/2 - V(z) \right]^{3/2}. \quad (3.24)$$

En supposant que le potentiel extérieur V_{ext} est d'amplitude V_0 faible devant $\mu(\tau)$, $V_0 \ll \mu(\tau)$, nous pouvons alors écrire $n_{2D}(x = 0, z, \tau) \simeq \frac{4R_{\text{TF}}\mu(\tau)^{3/2}}{3g\sqrt{\mu_{\text{TF}}}}$ au premier ordre en $V_0/\mu(\tau)$. Après un temps τ de manipulation du condensat dans le piège magnétique, nous avons $n_{2D}(x, z, \tau) = b_{\perp}(t_{\text{vol}}) n_{2D}(b_{\perp}(t_{\text{vol}})x, z, \tau + t_{\text{vol}})$. Finalement, il vient

$$\mu(\tau) \simeq \left(\frac{3g\sqrt{\mu_{\text{TF}}} b_{\perp}(t_{\text{vol}})}{4R_{\text{TF}}} n_{2D}(b_{\perp}(t_{\text{vol}})x, z, \tau + t_{\text{vol}}) \right)^{2/3}. \quad (3.25)$$

Cette dernière équation relie le potentiel chimique $\mu(\tau)$ du condensat dans le piège magnétique en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif à la densité 2D mesurée après temps de vol. Ce résultat nous sera utile au chapitre 4.

3.3.4 Condensats de Bose-Einstein désordonnés

3.3.4.1 Production et observation de condensats désordonnés

La séquence expérimentale qui conduit à la production d'un condensat désordonné est pour l'essentiel identique à celle qui crée un condensat non-désordonné. En effet, la seule différence tient au fait que, une fois un condensat non-désordonné créé, nous appliquons sur ce dernier un potentiel aléatoire 1D issu d'un champ de tavelures. Le dispositif expérimental de création du champ de tavelures a été présenté en détail au chapitre 2. Le potentiel aléatoire 1D est appliqué sur le condensat pendant une durée typique de 300 ms afin que ce dernier soit à l'équilibre en présence du potentiel optique de tavelures. Il faut noter que nous laissons le couteau radio-fréquence responsable du processus d'évaporation allumé dans la position finale pendant ce temps de 300 ms. Sa présence permet d'obtenir un condensat désordonné à l'équilibre thermodynamique.

Une fois créés de cette façon, les condensats désordonnés sont observés avec le dispositif d'imagerie par absorption décrit au paragraphe 3.3.3.2. Une image typique obtenue d'un condensat désordonné de cette manière est présentée sur la figure 3.9.

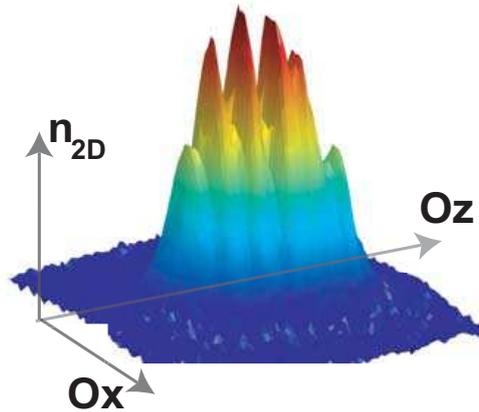


FIG. 3.9 – Image par absorption d'un condensat désordonné sur notre dispositif expérimental après un temps de vol de 15 ms. L'abscisse verticale (en fausses couleurs) représente la densité 2D $n_{2D}(x, z)$. L'amplitude du potentiel aléatoire pour cette image est $\gamma = 0.15$.

Il est important de noter les conditions expérimentales dans lesquelles nous obtenons un condensat désordonné. Premièrement, les condensats décrits dans ce mémoire sont formés en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif, *i.e.* dont l'amplitude V_R est inférieure au potentiel chimique μ_{TF} du nuage d'atome en l'absence du potentiel aléatoire, $\gamma = V_R/\mu_{TF} < 1$. Deuxièmement, la longueur de relaxation des condensats de Bose-Einstein sur notre expérience, $\xi \simeq 0.11$ nm, est plus petite que la longueur de corrélation du potentiel aléatoire 1D, $\sigma_R \simeq 0.33$ μm ou $\sigma_R \simeq 1.70$ μm suivant le dispositif utilisé.

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que le profil parabolique du condensat désordonné rappelle celui d'un condensat non-désordonné. Dans les deux paragraphes qui suivent nous

décrivons quelques propriétés des condensats désordonnés à l'équilibre dans le piège magnétique en présence du potentiel aléatoire. A ce profil parabolique s'ajoute des fluctuations de densité issues du potentiel aléatoire. La présence et le développement au cours du temps de vol de ces fluctuations de densité a fait l'objet d'une étude détaillée qui sera présentée dans la dernière partie de ce chapitre.

3.3.4.2 Régime de Thomas-Fermi et potentiel aléatoire lissé

En présence d'un potentiel aléatoire 1D, un condensat de Bose-Einstein peut se trouver dans le régime dit de Thomas-Fermi (paragraphe 3.2.2) où le terme d'énergie cinétique est négligeable devant l'énergie d'interaction. Cette condition est valide lorsque les variations de la densité atomique ont lieu sur une échelle spatiale grande devant la longueur de relaxation ξ . Ainsi, les fluctuations spatiales du potentiel aléatoire ayant pour plus petite échelle σ_R , la condition du régime de Thomas-Fermi en présence du potentiel aléatoire s'écrit :

$$\xi \ll \sigma_R. \quad (3.26)$$

Considérons la seule direction du condensat dans laquelle le potentiel aléatoire possède des fluctuations sur la taille du nuage, soit l'axe Oz . Le potentiel extérieur $V_{\text{ext}}(z)$ s'écrit comme la somme du piège harmonique magnétique et du potentiel aléatoire $V_{\text{ext}}(z) = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2 + V_R(z)$. Ainsi, si le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi, les modulations de son profil de densité selon l'axe Oz reflètent les fluctuations spatiales du potentiel aléatoire. En particulier, dans un tel régime les variations de la densité atomique auront pour échelle la corrélation du potentiel aléatoire σ_R .

Lorsque la corrélation σ_R est au contraire supérieure à la longueur de relaxation du condensat, le terme d'énergie cinétique n'est plus négligeable et le condensat sort du régime de Thomas-Fermi. Dans ce cas, les modulations de densité du condensat ne peuvent suivre les fluctuations du potentiel aléatoire.

Avec la définition de la constante α_R [paragraphe 3.1], la condition décrite par l'équation 3.26 s'écrit :

$$\mu_{\text{TF}} = \frac{\hbar^2}{2m\xi^2} \gg \frac{\hbar^2}{2m\sigma_R^2} \gg \alpha_R V_R. \quad (3.27)$$

Cette équation traduit la séparation rectiligne dans le diagramme 3.1 entre l'état de condensat désordonné dans un potentiel aléatoire lissé ($\mu_{\text{TF}} \ll \alpha_R V_R$) et l'état de condensat désordonné dans le potentiel aléatoire réel ($\mu_{\text{TF}} \gg \alpha_R V_R$).

Dans le régime de Thomas-Fermi en présence du potentiel aléatoire ($\xi \ll \sigma_R$), la densité atomique suit les fluctuations du potentiel aléatoire et s'écrit :

$$gn(\rho, z) = \mu - V_R(z) - \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 \rho^2 - \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2. \quad (3.28)$$

Dans un potentiel aléatoire de faible amplitude $V_R \ll \mu_{\text{TF}}$, le condensat de Bose-Einstein est donc délocalisé sur toute sa taille et son profil de densité reproduit les modulations du potentiel aléatoire.

Dans le régime opposé ($\xi > \sigma_R$), le terme d'énergie cinétique ne peut plus être négligé devant le terme d'interaction. Cette nouvelle situation soulève la question de l'existence d'un

condensat délocalisé dans un tel potentiel aléatoire. En effet, une utilisation naïve du critère de Ioffe-Regel [43] suggère que l'onde de matière qu'est le condensat pourrait être localisée lorsque $\xi > \sigma_R$. Cependant, des travaux récents effectués par L. Sanchez-Palencia [92] ont montrés que même dans une telle situation, si les interactions sont importantes et le potentiel aléatoire perturbatif (voir les conditions exactes de validité dans [92]), alors le condensat de Bose-Einstein demeure délocalisé. Cette étude démontre l'utilité de définir un potentiel aléatoire lissé $\tilde{V}_R(z)$ par le terme d'interaction en champ moyen présent dans le condensat.

Le potentiel aléatoire 1D lissé $\tilde{V}_R(z)$ est défini par [92]

$$\tilde{V}_R(z) = \int dz G(z)V_R(z) \quad (3.29)$$

où la fonction $G(z)$ est une fonction de Green dépendant de la longueur de relaxation ξ du condensat,

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\xi} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}z}{\xi}\right). \quad (3.30)$$

Avec ces définitions, la densité atomique du condensat de Bose-Einstein délocalisé s'écrit

$$gn(\rho, z) = \mu - \tilde{V}_R(z) - \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2\rho^2 - \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2, \quad (3.31)$$

ce qui s'identifie au cas d'un condensat dans le régime de Thomas-fermi en présence d'un potentiel aléatoire lissé $\tilde{V}_R(z)$.

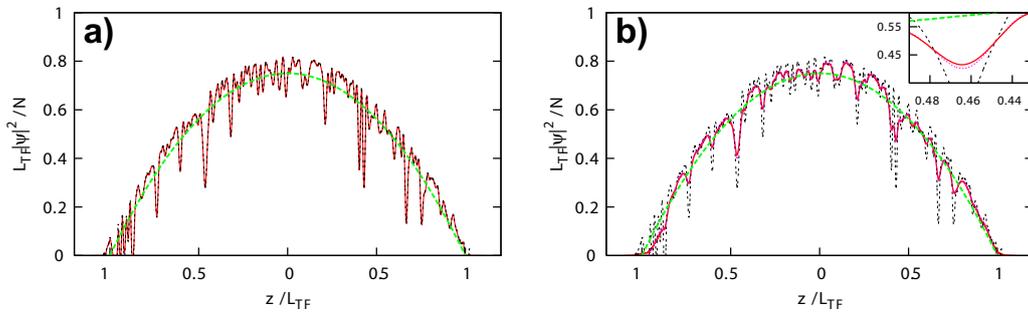


FIG. 3.10 – [Figure du papier PRA **74** 053625 (2006)] Profils de densité d'un condensat de Bose-Einstein désordonné ($\sigma_V = 0.1\mu_{\text{TF}}$ et $\sigma_R = 7.5 \times 10^{-3}L_{\text{TF}}$). La ligne continue (rouge) correspond au profil de densité obtenu numériquement, la ligne en trait tireté (verte) au profil parabolique en l'absence de potentiel aléatoire et la ligne pointillée (noire) au profil en l'absence de lissage du potentiel. **a)** Cas où la longueur de corrélation du potentiel σ_R est grande devant la longueur de relaxation ξ du condensat, $\sigma_R/\xi \simeq 10$. **b)** Cas opposé où $\sigma_R/\xi \simeq 0.5$.

L'image 3.10 montre deux profils de densité d'un condensat désordonné obtenus en l'absence ($\xi < \sigma_R$) et en présence ($\xi > \sigma_R$) de lissage du potentiel aléatoire. Dans les deux cas, les profils de densité correspondent à ceux d'un condensat en présence d'un potentiel de tavelures décalé vers le rouge (barrières de potentiel pour les atomes) [92]. Remarquons que la densité

au centre du condensat désordonné est égale à celle du condensat non-désordonné et que la présence du potentiel aléatoire se manifeste par l'apparition de modulations de la densité. Nous mettrons en évidence cette remarque à partir des images expérimentales au paragraphe suivant.

Dans toute la suite du mémoire (aux exceptions près clairement mentionnées), nous désignerons par "condensat désordonné" les condensats que nous créons expérimentalement, à savoir un condensat dans un potentiel aléatoire 1D perturbatif dans le régime de Thomas-Fermi.

3.3.4.3 Tailles et potentiel chimique des condensats désordonnés

Un condensat désordonné dans le régime de Thomas-Fermi possède un profil de densité parabolique auquel s'ajoutent des modulations reflétant de la présence du potentiel aléatoire (voir paragraphe 3.3.4.2). Le nuage atomique que nous créons en présence de désordre a donc une forme de cigare allongé donnée par le piège magnétique. Nous pouvons faire un ajustement des images du condensat désordonné avec une parabole inversée afin d'en extraire les tailles radiales et longitudinales. Dans le groupe d'Hannovre [86], la dépendance de la taille longitudinale avec le nombre d'atomes pour un temps de vol fixe a fait l'objet d'une étude expérimentale.

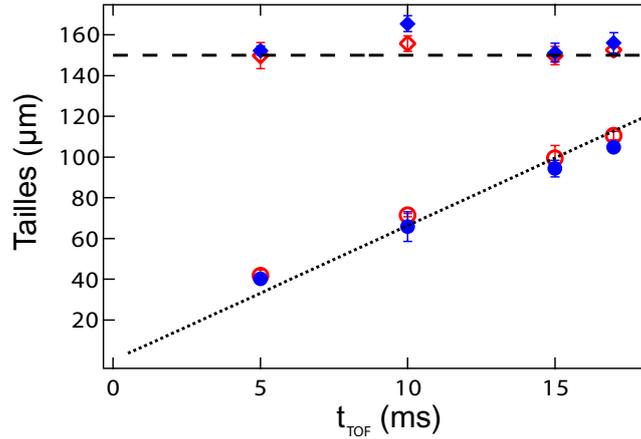


FIG. 3.11 – Evolution des tailles radiales R_{TF} [cercles rouges : condensat ; disques bleus : condensat désordonné ($\gamma = 0.1$)] et longitudinales L_{TF} [losanges rouges : condensat ; losanges pleins bleus : condensat désordonné ($\gamma = 0.1$)] d'un condensat en expansion après un temps de vol t_{vol} . Ces tailles sont extraites d'un ajustement à 2D du profil de densité du nuage. La ligne pointillée (resp. tiretée) correspond à l'évolution de la taille radiale R_{TF} (resp. de la taille longitudinale L_{TF}) d'après les lois d'échelles d'un condensat non désordonné.

Nous présentons sur la figure 3.11 l'évolution en temps de vol des tailles radiale et longitudinale du condensat désordonné mesurées sur notre expérience. Nous faisons également figurer des mesures similaires effectuées sur un condensat non-désordonné à titre de comparaison. Les résultats de la figure 3.11 démontrent expérimentalement que l'évolution au cours du temps de vol des tailles radiale et longitudinale d'un condensat désordonné dans le régime de Thomas-Fermi (en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif) est identique à celle d'un

condensat non-désordonné. En particulier, cette étude montre que les facteurs d'échelle du cas non-désordonné demeurent valables en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif.

Nous déduisons de la validité des facteurs d'échelle que la densité 3D au centre du condensat désordonné piégé est déterminée à partir de la densité 2D après un temps de vol comme dans le cas d'un condensat non-désordonné. Ainsi les variations du potentiel chimique initial en fonction de l'amplitude du potentiel aléatoire peuvent être étudiées à partir des images par absorption après temps de vol puisque, le condensat se trouvant dans le régime de Thomas-Fermi, la densité 3D au centre du nuage piégé est directement reliée au potentiel chimique.

Nous étudions les caractéristiques des profils de Thomas-Fermi du condensat désordonné. Ces derniers correspondent à un profil parabolique du condensat non-désordonné auquel sont soustraites des modulations dues du potentiel aléatoire. Dans ce but, nous mesurons le maximum $\max[n_{2D}(x, z)]$ du profil de densité 2D $n_{2D}(x, z)$ du condensat ainsi que le maximum $\max[n_{2D}^{\text{fit}}(x, z)]$ de l'ajustement du profil par une parabole inversée.

Dans le cas d'un condensat non-désordonné, le profil de densité étant une parabole inversée les deux maxima $\max[n_{2D}(x, z)]$ et $\max[n_{2D}^{\text{fit}}(x, z)]$ sont égaux. Dans le cas d'un condensat désordonné, $\max[n_{2D}(x, z)]$ doit à peu près être égal à celui d'un condensat non-désordonné (voir figure 3.10). Au contraire, en présence d'un potentiel aléatoire, $\max[n_{2D}^{\text{fit}}(x, z)]$ doit être inférieur à la valeur du condensat non-désordonné puisque l'ajustement du profil désordonné par une parabole passe par un profil "moyen" comme le montre la figure 3.12a).

Sur la figure 3.12b), nous traçons le rapport R_{profils} entre les maxima du profil de densité 2D, $\max[n_{2D}(x, z)]$, pour un condensat désordonné et un condensat non-désordonné en fonction de l'amplitude du potentiel aléatoire γ . Nous traçons également le rapport R_{ajust} entre les maxima des ajustements dans le cas désordonné et non-désordonné.

Il est important de souligner que les profils utilisés pour calculer les rapports R_{profils} et R_{ajust} sont les profils obtenus avec notre système d'imagerie. Ils n'ont pas été l'objet d'une correction permettant de prendre en compte la résolution finie du système d'imagerie. Ainsi, l'amplitude des modulations de densité des profils réels est plus grande que celle mesurée ici. Pour la discussion qualitative qui nous intéresse ici nous n'avons pas besoin de prendre en compte cette diminution du contraste due à l'imagerie. Au contraire, au paragraphe 3.4 nous prendrons en compte cet effet qui a une incidence sur la discussion quantitative que nous ferons.

Comme nous l'avons expliqué, nous observons que le maximum d'un condensat désordonné coïncide avec celui d'un condensat non-désordonné : le meilleur ajustement linéaire de leur rapport est une droite presque horizontale dont l'ordonnée à l'origine vaut 0.98 [courbe tiretée bleue sur la figure 3.12b)]. Par contre, l'ajustement linéaire du rapport des maxima des paraboles ajustant les profils de densité décroît avec l'amplitude γ du potentiel aléatoire : lorsque γ augmente, l'amplitude des modulations croît et le rapport des maxima entre les cas désordonné et non-désordonné décroît.

Potentiel chimique d'un condensat désordonné

Pour un condensat 1D désordonné, nous avons $gn(z) = \mu_{1D} - V_{\text{ext}}(z) - V_R(z)$. Supposons

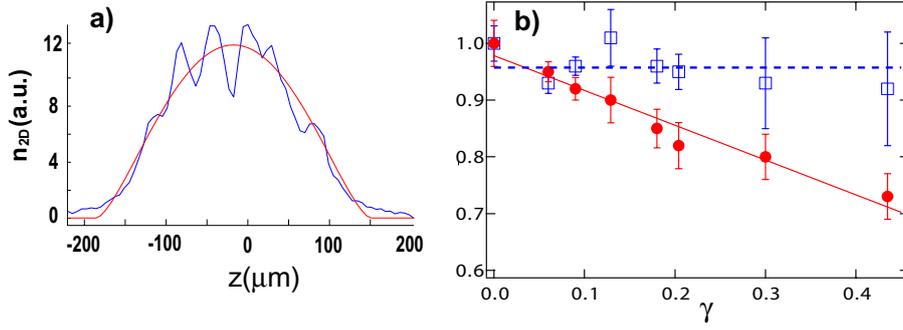


FIG. 3.12 – **a)** Exemple de profil longitudinal d'un condensat de Bose-Einstein désordonné après un temps de vol $t_{\text{vol}} = 20$ ms (courbe bleu). La courbe en trait plein rouge correspond à un ajustement de ce profil de densité $n_{2\text{D}}(x = 0, z)$ par une parabole inversée. Nous extrayions deux quantités de ces profils : le maximum de densité du profil $\max[n_{2\text{D}}(x = 0, z)]$ et le maximum de l'ajustement par la parabole. **b)** Evolution du rapport R_{profils} des maxima de densité $n_{2\text{D}}(x, z)$ d'un condensat désordonné et d'un condensat non-désordonné en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire [carrés bleus]. Evolution du rapport R_{ajust} des maxima des ajustements par une parabole (disques rouges). Les barres d'erreur correspondent à une déviation standard calculée à partir de l'analyse de 8 images.

que le potentiel aléatoire soit normalisé, *i.e.* $\langle V_R(z) \rangle = 0$, il vient alors,

$$gN = \int dz (\mu_{1\text{D}} - V_{\text{ext}}(z)) - \int dz V_R(z)$$

$$\langle gN \rangle = \int dz (\mu_{1\text{D}} - V_{\text{ext}}(z)).$$

Le potentiel chimique d'un condensat 1D désordonné $\mu_{1\text{D}}$ s'identifie au potentiel chimique du condensat non-désordonné créé dans les mêmes conditions expérimentales.

Pour un condensat 3D désordonné dans un piège harmonique anisotrope, et en supposant le potentiel aléatoire de moyenne nulle, nous avons

$$gN = \int 2\pi r dr \int dz (\mu_{3\text{D}} - V_{\text{ext}}(r, z) - V_R(z))$$

$$\langle gN \rangle \simeq \frac{\pi}{m\omega_{\perp}^2} \int dz \left(\left(\mu_{3\text{D}} - \frac{m\omega_z^2 z^2}{2} \right)^2 + \langle V_R(z)^2 \rangle \right)$$

$$\langle gN \rangle \simeq \frac{2\pi L}{m\omega_{\perp}^2} \left(\frac{8}{15} \mu_{3\text{D}}^2 + \sigma_V^2 \right) \quad (3.32)$$

où L est la demie-taille du condensat, $\mu_{3\text{D}} = m\omega_z^2 L^2/2$.

Avec l'expression du potentiel chimique μ_{TF} dans le régime de Thomas-Fermi en l'absence de potentiel aléatoire [Eq. (3.9)], il vient

$$\mu_{\text{TF}}^{5/2} = \mu_{3\text{D}}^{5/2} + \frac{15}{8} \sigma_V^2 \sqrt{\mu_{3\text{D}}}, \quad (3.33)$$

et un développement perturbatif au premier ordre en σ_V/μ_{TF} , il vient

$$\mu_{3\text{D}} = \mu_{\text{TF}} \left(1 - \frac{6\sigma_V^2}{8\mu_{\text{TF}}^2 + 3\sigma_V^2} \right). \quad (3.34)$$

Notons que pour une amplitude du potentiel aléatoire $\gamma = \sigma_V/\mu_{\text{TF}} = 0.3$ nous obtenons $\mu_{3\text{D}} = 0.93\mu_{\text{TF}}$. La correction qui doit être apportée au potentiel chimique pour un potentiel aléatoire perturbatif est faible (proportionnelle à au carré σ_V^2 de l'amplitude du potentiel aléatoire) et sera négligée dans l'analyse des expériences que nous ferons dans la suite de ce mémoire.

3.4 Développement de fluctuations de densité en temps de vol induit par le désordre

Nous avons décrit au paragraphe 3.3.4 la création et la caractérisation d'un condensat de Bose-Einstein désordonné dans un potentiel aléatoire de tavelure. L'observation de ces condensats désordonnés est réalisée via la technique d'imagerie par absorption après temps de vol [27] (voir également la présentation de notre système d'imagerie au paragraphe 3.3.3.2). Ainsi, les condensats désordonnés sont observés après un temps d'expansion libre t_{vol} (typiquement $5 < t_{\text{vol}} < 25$ ms) et non pas directement dans le piège magnétique. L'image 3.9 du paragraphe 3.3.4 d'un tel condensat désordonné après un temps de vol $t_{\text{vol}} = 15$ ms présente un profil de densité qui fluctue fortement spatialement selon la direction du potentiel aléatoire (Oz). L'amplitude de ces fluctuations de densité après temps de vol est bien supérieure à celle attendue pour un condensat désordonné piégé (dans le régime de Thomas-Fermi). Il existe donc un mécanisme au cours du temps de vol responsable du développement de larges fluctuations de densité dans un condensat désordonné. L'étude expérimentale et la compréhension de ce phénomène font l'objet de ce chapitre [34].

La présence de fluctuations de densité lors de l'expansion d'un condensat désordonné allongé a également été observée dans le groupe de M. Inguscio à Florence [88], celui de W. Ertmer à Hanovre [86] et dans le groupes de R. Hulet à Rice University [146]. Ces observations n'ont cependant pas fait l'objet d'une étude systématique et détaillée. Une interprétation possible de ces observations expérimentales est l'amplification des fluctuations de phase dans le condensat allongé piégé par le potentiel aléatoire [88, 147]. En effet, ces fluctuations de densité après un temps de vol sont similaires à celles observées dans un condensat allongé non-désordonné au cours d'une expansion libre [141, 142]. Une autre interprétation possible du phénomène observé dans un condensat désordonné est le développement dynamique de larges fluctuations de densité au cours du temps de vol à partir des modulations initiales de faible amplitude présentes dans le condensat désordonné piégé.

Il faut souligner ici que la question de l'existence de fluctuations de phase induites par le désordre dépasse le cadre des condensats de Bose-Einstein gazeux désordonnés. En effet, cette étude partage un certain nombre de lien avec celles menées dans les supraconducteurs désordonnés et dans les systèmes électroniques granulaires. Dans les supraconducteurs désordonnés l'existence de paires de Cooper a été observée alors que le système se trouve dans l'état isolant [65, 148, 149]. L'origine de cette phase isolante alors que le paramètre d'ordre supraconducteur n'est pas nulle pourrait tenir dans la présence de grandes fluctuations de phase entre

les différents îlots supraconducteurs induites par le désordre [148, 150]. La présence de fortes fluctuations de phase dans les supraconducteurs désordonnés a par ailleurs été mise en évidence expérimentalement [151]. Enfin, mentionnons les études menées dans les systèmes électroniques granulaires autour de cette question des fluctuations de phase induites par le désordre [152].

Dans ce chapitre, nous étudions expérimentalement en détail les fluctuations de densité qui se développent au cours du temps de vol dans un condensat désordonné. Nous débutons par décrire les observations expérimentales sur un condensat allongé non-désordonné. Nous étudions ensuite la dépendance des fluctuations de densité dans un condensat désordonné avec l'amplitude du potentiel aléatoire et la dynamique de ces dernières au cours du temps de vol. Un calcul analytique de l'évolution des fluctuations de phase et de densité au cours du temps de vol nous permet de développer un modèle décrivant les observations expérimentales. En particulier, nous pouvons écarter l'idée d'un accroissement des fluctuations de phase dans le condensat piégé induit par le potentiel aléatoire. Nous montrons au contraire en quoi l'expansion du nuage dans la direction transverse joue un rôle primordial dans le développement de larges fluctuations de densité après temps de vol à partir des faibles modulations de densité dans le condensat désordonné piégé.

3.4.1 Fluctuations de densité dans un condensat allongé non désordonné

Dans ce paragraphe, nous allons caractériser les fluctuations de densité qui apparaissent au cours du temps de vol dans les condensats de Bose-Einstein allongés en l'absence de désordre. Nous définissons l'amplitude des fluctuations de densité et nous présentons une mesure des fluctuations dans un condensat non-désordonné. Nous analysons quantitativement leur amplitude et nous discutons l'influence du système d'imagerie sur le contraste observé des franges de densité.

3.4.1.1 Définition de l'amplitude des fluctuations de densité

Afin de faire une étude quantitative des fluctuations de densité présentes dans un condensat, nous définissons l'amplitude de ces fluctuations à partir des profils de densité 1D obtenus après intégration dans les deux directions transverses du nuage atomique¹¹. Pour cela, nous ajustons les profils de densité $n_{1D}(z)$ avec une fonction parabolique qui correspond au profil de Thomas-Fermi $n_{1D}^0(z)$ qui ajuste le mieux le profil modulé [voir la figure 3.13a)]. Ainsi, à partir des profils de densité 1D $n_{1D}(z)$, nous définissons les modulations (normalisées) de densité $\eta(z)$ autour du profil de Thomas-Fermi parabolique $n_{1D}^0(z)$:

$$n_{1D}(z) = n_{1D}^0(z)[1 + \eta(z)]. \quad (3.35)$$

Nous présentons sur la figure 3.13b) les modulations de densité $\eta(z)$ du profil de densité de la figure 3.13a).

Nous pouvons alors calculer la déviation standard des fluctuations de densité $\eta(z)$ afin de quantifier le développement des fluctuations de densité au cours du temps de vol. La déviation

¹¹Rappelons que l'imagerie par absorption intègre la densité atomique selon la direction Oy et que nous effectuons ensuite numériquement l'intégration des profils expérimentaux 2D selon l'axe Ox .

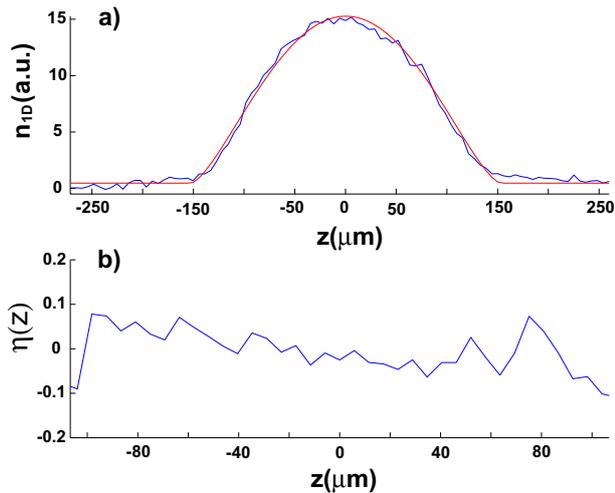


FIG. 3.13 – **a)** Profil de densité $n_{1D}(z)$ d'un condensat non-désordonné après un temps de vol de 15 ms selon l'axe Oz (courbe bleue) et ajustement parabolique $n_{1D}^0(z)$ de ce profil de densité (courbe rouge). **b)** Amplitude $\eta(z)$ des fluctuations de densité normalisées ($n_{1D}(z) = n_{1D}^0(z)[1 + \eta(z)]$).

standard $\Delta\eta$ est évaluée sur une longueur L , soit

$$(\Delta\eta)^2 = \frac{1}{L} \int_L dz \eta^2(z) - \left(\frac{1}{L} \int_L dz \eta(z) \right)^2. \quad (3.36)$$

Dans nos expériences, nous obtenons des condensats dont la fraction condensée est supérieure à 85%. Nous ne pouvons cependant pas être certains de la valeur réelle de la fraction condensée pour des valeurs supérieures à 85%¹². L'incertitude sur la fraction condensée se traduit par une incertitude sur les bords du profil de densité du condensat. De plus, l'erreur induite par le bruit de l'imagerie devient d'autant plus importante que la densité atomique est faible. Afin d'éviter de prendre en compte des fluctuations de densité associées à ces limitations expérimentales, le calcul de $\Delta\eta$ est restreint à 70% de la taille totale du condensat, *i.e.* $L = 1.4L_{\text{TF}}$.

3.4.1.2 Mesure des fluctuations de densité sans désordre

En l'absence de potentiel aléatoire, les modulations de densité que nous mesurons sont celles d'un quasi-condensat non-désordonné après un temps de vol. La déviation standard de ces fluctuations $\Delta\eta$ est faible (de l'ordre de 4%) et n'évolue pratiquement pas au cours du temps de vol comme le présente la figure 3.14.

Nous pouvons évaluer le bruit induit par notre système d'imagerie à partir d'images sans atomes. La valeur du bruit mesuré se traduit par des fluctuations de densité de l'ordre de 1.5%, soit $\Delta\eta_b \simeq 0.015$. Cette valeur est donc la plus petite valeur que nous puissions mesurer avec notre système expérimental. Les valeurs que nous mesurons (voir figure 3.14) sont supérieures à cette valeur liée au bruit de l'imagerie par absorption.

Les fluctuations de densité qui apparaissent dans un condensat allongé non-désordonné ont une origine thermique. Elles sont la conséquence du peuplement d'excitations thermiques 1D de basses énergies dans les condensats allongés (voir 3.2.3). Il existe en effet dans les condensats allongés piégés des fluctuations de phase qui se transforment en fluctuations de densité au cours d'une expansion libre [137, 141]. Nous avons rappelé l'origine thermique des modulations de phase initialement présentes dans le condensat allongé piégé au paragraphe 3.2.3.

¹²Un ajustement avec une double structure ne fonctionnant plus correctement.

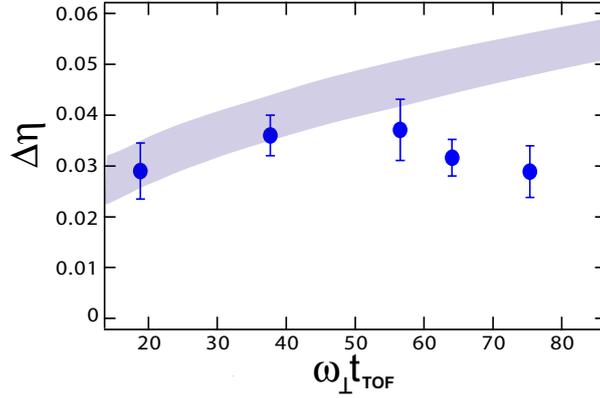


FIG. 3.14 – Evolution des fluctuations de densité $\Delta\eta$ au cours du temps de vol dans un condensat allongé non-désordonné. La zone grisée correspond aux valeurs calculées à partir de l'équation (3.37) ne prenant pas en compte la diminution du contraste liée à l'angle du faisceau sonde. L'extension de la zone grisée reflète l'incertitude de mesure sur la température du nuage atomique.

La contribution des modulations de phase initialement présentes dans le condensat allongé à la déviation standard $\Delta\eta$ du profil de densité après un temps de vol s'écrit [141]

$$(\Delta\eta)^2 = \frac{T}{\lambda T_{\phi}} \sqrt{\frac{\ln(\tau)}{\pi}} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar\omega_{\perp}\tau}{\mu \ln(\tau)}\right)^2}} - \sqrt{2} \right), \quad (3.37)$$

où $\tau = \omega_{\perp} t_{\text{vol}}$, $\lambda = \omega_{\perp}/\omega_z$ est le rapport d'aspect du piège magnétique et $T_{\phi} = 15(\hbar\omega_z)^2 N_0/32\mu$ est la température de phase (voir paragraphe 3.2.3). Cette équation est valide pour des temps de vol τ tels que $\mu/\hbar\omega_{\perp} \simeq 7 \ll \tau \ll \mu\omega_{\perp}/\hbar\omega_z^2 \simeq 7 \times 10^4$ [141] et s'applique donc à nos mesures. Avec nos paramètres expérimentaux, nous obtenons $T_{\phi} \simeq 105(5)$ nK. La température T du condensat peut être extrapolée des mesures de température des nuages mixtes pour lesquels la fraction condensée est inférieure à 80% [153]. Nous obtenons alors une température égale à $T \simeq 80(15)$ nK. Nous pouvons alors évaluer $\Delta\eta$ à partir de l'équation 3.37. En particulier, l'équation (3.37) montre que la déviation standard des fluctuations de densité induites par la présence de modulations de phase initiales croît avec le temps de vol.

L'incertitude sur la mesure de la température T du condensat induit une incertitude sur l'amplitude des modulations de densité dans le nuage en expansion [voir équation (3.37)]. Nous calculons la zone correspondant aux valeurs de $\Delta\eta$ que nous nous attendons à mesurer sur notre expérience à un temps de vol donné pour cette gamme de températures. Cette zone apparaît en grisé sur la figure 3.14.

Afin de comparer les prédictions de l'équation (3.37) avec nos mesures expérimentales, il est nécessaire de prendre en compte la réduction du contraste liée à notre système d'imagerie comme nous le décrivons dans les lignes qui suivent.

Images par absorption et limite de résolution

Le contraste des franges de densité observées après un temps d'expansion dans un condensat (désordonné ou non) est en pratique réduit par deux limitations du système d'imagerie. D'une part, la résolution spatiale finie du système d'imagerie réduit le contraste observé lorsque l'échelle de variation spatiale des fluctuations de densité est inférieure ou du même ordre que la limite de résolution L_{res} . D'autre part, un alignement du faisceau sonde imparfait par rapport à l'axe des franges de densité induit une diminution du contraste observé.

Notre système d'imagerie a une limite de résolution spatiale finie qui correspond à l'intégration effectuée des photons que reçoit chaque pixel de la caméra CCD. La fonction de réponse de notre système d'imagerie (Fonction de Transfert de Modulation, FTM) a été mesurée précisément au cours de la thèse de M. Hugbart-Fouché [153]. La FTM décroît linéairement avec la fréquence spatiale et la limite de résolution obtenue dans le plan du condensat (c'est-à-dire en prenant en compte le grandissement du système d'imagerie, voir 3.3.3.2) vaut $L_{res} = 8.5 \mu\text{m}$.

Si les fluctuations de densité que nous observons varient sur une échelle inférieure à L_{res} alors le contraste observé des franges de densité sera inférieur au contraste réel. La connaissance de la FTM de notre système d'imagerie nous permet ainsi d'évaluer la perte du contraste induite par la résolution spatiale finie de ce dernier. Nous utiliserons également la FTM pour comparer les résultats de calculs numériques aux observations expérimentales (voir paragraphe 3.4.2). Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir les fluctuations de densité induites par la présence de fluctuations de phase dans les condensats allongés piégés, l'échelle de variation spatiale des fluctuations de densité (de l'ordre de $20 \mu\text{m}$) est supérieure à L_{res} : la résolution de notre système d'imagerie ne réduit donc pas le contraste mesuré.

La seconde origine d'une réduction du contraste lors de notre mesure expérimentale vient de l'angle θ du faisceau sonde avec l'axe des franges de densité (l'axe long Oz du condensat dans le cas des fluctuations de densité induites par les fluctuations de phase initiales). Le contraste des fluctuations de densité va être diminué par le processus d'intégration de la technique d'imagerie par absorption. Cet effet a été discuté lors des premières observations de fluctuations de densité en temps de vol induites par des modulations de phase initialement présentes dans un condensat allongé piégé [141, 142].

Cette diminution du contraste dépend évidemment de l'angle θ mais aussi du rapport entre la taille transverse du condensat $R_{TF}(t_{vol})$ après temps de vol et l'échelle spatiale de variation des fluctuations de densité d . Plus exactement, il vient [153]

$$\frac{C_{mesure}}{C_{reel}} = \frac{\sin[\pi R_{TF}(t_{vol}) \tan(\theta)/d]}{\pi R_{TF}(t_{vol}) \tan(\theta)/d}. \quad (3.38)$$

D'après (3.38), l'augmentation de la taille transverse $R_{TF}(t_{vol})$ au cours du temps de vol engendre une diminution du contraste. Ainsi, l'écart croissant au cours de l'expansion de nos mesures avec la valeur attendue d'après l'équation (3.37) concorde avec cette diminution du contraste. Dans notre expérience, l'alignement du faisceau sonde avec l'axe vertical Oy fait un angle θ de quelques mrad (inférieur à 15 mrad). Il est cependant délicat de mesurer précisément ce dernier.

3.4.2 Etude expérimentale des fluctuations de densité en présence de désordre

Après avoir créé un condensat de Bose-Einstein avec la séquence expérimentale que nous avons décrit précédemment, les atomes sont éclairés avec un champ de tavelures durant 300 ms. Nous obtenons alors un condensat à l'équilibre en présence du potentiel aléatoire. Nous coupons alors simultanément le piège magnétique et le potentiel aléatoire. Le condensat évolue alors librement pendant un temps de vol t_{vol} à partir duquel nous prenons une image par absorption. Rappelons que dans ces expériences le potentiel aléatoire est uni-dimensionnel avec des variations spatiales selon la direction longue du condensat Oz .

La figure 3.15 présente des images par absorption de condensats désordonnés en expansion prises après différents temps de vol t_{vol} . La présence et le développement de fluctuations de densité selon la direction du potentiel aléatoire Oz apparaît clairement sur ces images à 3D dont la dimension verticale représente la densité 2D du condensat. En l'absence de potentiel aléatoire sur le condensat piégé avant expansion, nous n'observons pas de fluctuations de densité avec une amplitude si élevée.

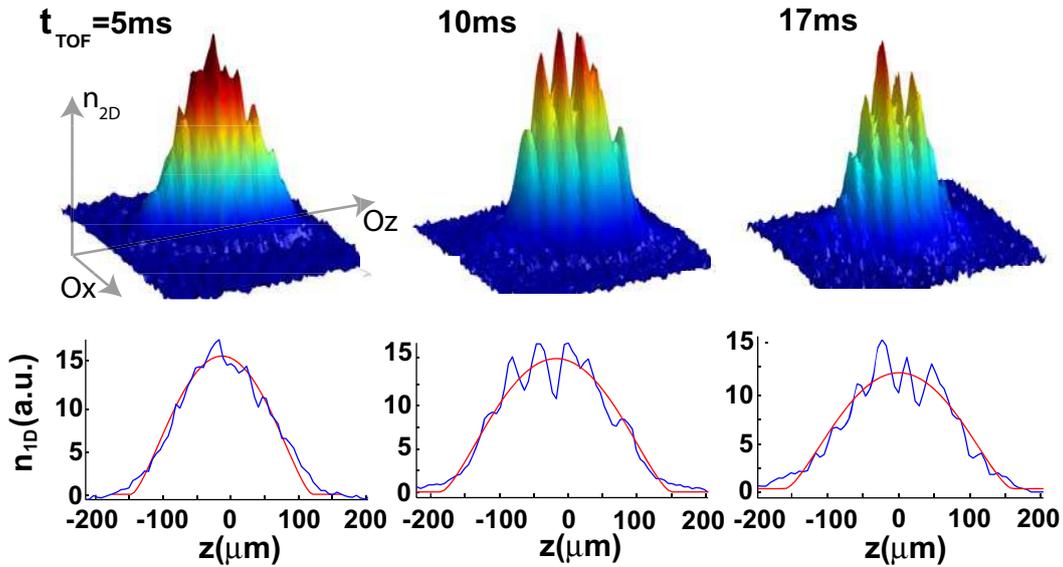


FIG. 3.15 – En haut : images par absorption de condensats désordonnés en expansion pour différents temps de vol. L'axe vertical représente la valeur de la densité 2D dans le plan spatial horizontal. En bas : tracés des profils longitudinaux de densité 1D $n_{1D}(z)$ (intégrés selon les deux directions transverses) des condensats désordonnés (bleu) et profils paraboliques du régime de Thomas-Fermi $n_{1D}^0(z)$ (rouge).

Les larges fluctuations de densité que nous observons (figure 3.15) sont clairement liées à la présence du potentiel aléatoire puisqu'elles ne sont pas visibles sur les images après temps de vol de condensats non-désordonnés. De plus, elles correspondent à une modulation de la densité dans la seule direction Oz du potentiel aléatoire.

Nous présentons dans ce paragraphe une étude expérimentale détaillée des fluctuations de

densité qui se développent au cours du temps de vol dans un condensat allongé désordonné. Nous étudions la dépendance de l'amplitude $\Delta\eta$ des fluctuations avec l'amplitude γ du potentiel aléatoire. Nous comparons ensuite ces mesures expérimentales à un calcul numérique utilisant l'équation de Gross-Pitaevskii, ce qui nous permet notamment de quantifier la réduction du contraste dû à l'alignement imparfait du faisceau sonde par rapport l'axe du potentiel aléatoire. Enfin l'évolution temporelle de ces fluctuations de densité est caractérisée au dernier paragraphe.

3.4.2.1 Dépendance avec l'amplitude du potentiel aléatoire

Dans les expériences que nous décrivons ici, nous avons utilisé un potentiel aléatoire quasi-1D avec une longueur de corrélation $\Delta z = 5.5 \mu\text{m}$ et une amplitude $\gamma = V_R/\mu_{\text{TF}}$ issu d'un champ de tavelures (voir 2). Le condensat désordonné est créé à l'équilibre en présence du potentiel aléatoire comme nous l'avons décrit au paragraphe 3.3.4. Nous coupons ensuite le piège magnétique et le potentiel aléatoire pour laisser le condensat s'étendre librement durant un temps de vol t_{vol} , durée après laquelle nous prenons une image par absorption. Nous extrayons de la densité 2D, $n_{2\text{D}}$, des images par absorption les profils de densité 1D et nous calculons les fluctuations de densité $\Delta\eta$.

Nous étudions l'évolution des fluctuations de densité $\Delta\eta$ en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire pour un temps de vol fixe. Sur la figure 3.16, nous traçons $\Delta\eta$ en fonction de γ pour un temps de vol égal à $t_{\text{vol}} = 15 \text{ ms}$.

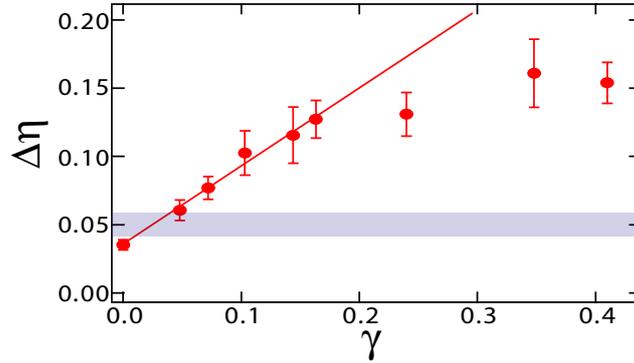


FIG. 3.16 – Déviation standard $\Delta\eta$ des fluctuations de densité normalisée en fonction de l'amplitude $\gamma = \sigma_V/\mu_{\text{TF}}$ du potentiel aléatoire pour un temps de vol fixe égal à $t_{\text{vol}} = 15 \text{ ms}$ ($\omega_{\perp}t_{\text{vol}} = 62.2$). La zone grisée correspond à la valeur attendue en l'absence de potentiel aléatoire ($\gamma = 0$).

La valeur de $\Delta\eta$ pour $\gamma = 0$ correspond à la valeur attendue en l'absence de potentiel aléatoire (paragraphe 3.4.1.2). Pour les faibles amplitudes γ du potentiel aléatoire, la déviation standard des fluctuations de densité augmente linéairement avec l'amplitude γ à partir de cette valeur initiale $\Delta\eta(\gamma = 0)$. Un ajustement de ces données expérimentales pour $\gamma < 0.2$ donne $\Delta\eta = 0.58(3) \gamma$.

Pour des amplitudes relativement grandes du potentiel aléatoire, $0.2 < \gamma < 0.5$, $\Delta\eta$ atteint un maximum à une valeur égale à 0.15 environ. Rappelons que l'amplitude maximum typique

des barrières est de l'ordre de $5 \times \gamma$ (voir le chapitre 2). Ainsi cette saturation est expliquée par le fait que pour $\gamma > 0.2$ le condensat a une forte probabilité d'être fragmenté dans le piège. L'évolution au cours du temps de vol des fluctuations de densité s'en trouve alors modifiée et l'amplitude des modulations attend un maximum. Notons que pour des amplitudes du potentiel aléatoire plus élevées que celles présentées sur la figure 3.16, une décroissance de l'amplitude $\Delta\eta$ peut être attendue et c'est pourquoi nous avons utilisé le terme de "maximum" dans les données qui sont présentées ici. En effet, pour de larges amplitudes du potentiel aléatoire ($\gamma > 0.5$), le condensat est fragmentés en de nombreuses parties dont les phases fluctuent aléatoirement, conduisant à une diminution du contraste observé sur la densité atomique après un temps de vol.

3.4.2.2 Calculs numériques de l'expansion à 3D

Nous avons effectué des calculs numériques de l'expansion 3D d'un condensat 3D désordonné avec l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps. Initialement le condensat se trouve dans le régime de Thomas-Fermi en présence d'un potentiel aléatoire ayant une longueur de corrélation $\Delta z = 5.5 \mu\text{m}$ identique à celle des expériences. Les paramètres du piège magnétique initial sont également identiques à ceux du piège utilisé dans nos expériences, en particulier son rapport d'aspect grand (environ égal à 100). Il faut cependant souligner que nous ne prenons pas en compte la présence de fluctuations de phase initiales dans le condensat allongé piégé. Nous reviendrons plus loin sur cette différence avec le cas expérimental.

Pour un condensat piégé désordonné ($\omega_z t_{\text{vol}} = 0$) dans le régime de Thomas-Fermi (voir 3.3.4), les modulations de densité induites par le potentiel aléatoire reproduisent les modulations du potentiel. Les fluctuations de densité du condensat piégé ont donc une amplitude égale à $2V_R^{13}$ et une échelle spatiale égale à la longueur de corrélation $\Delta z = 5.5 \mu\text{m}$. Afin de prendre en compte la résolution finie du système d'imagerie, nous avons simulé le profil du condensat désordonné dans le régime de Thomas-Fermi en présence d'un potentiel aléatoire (avec une longueur de corrélation égale à $\Delta z = 5.5 \mu\text{m}$) et effectué une convolution de ce dernier avec la FTM de notre système d'imagerie. La figure 3.17 présente un profil de densité obtenu numériquement et sa convolution avec la FTM de notre système d'imagerie expérimental.

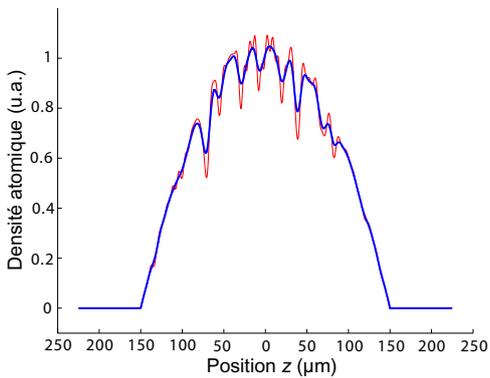


FIG. 3.17 – Profil longitudinal de densité d'un condensat de Bose désordonné dans le piège magnétique (trait fin rouge) et profil convolué (trait épais bleu) avec la fonction de réponse (FTM) du système d'imagerie ($L_{\text{res}} = 8.5 \mu\text{m}$). Le condensat de longueur $L_{\text{TF}} = 150 \mu\text{m}$ se trouve dans un potentiel aléatoire d'amplitude $\gamma = 0.1$ et de longueur de corrélation $\Delta z = 5.5 \mu\text{m}$.

En moyennant sur 50 réalisations du désordre, nous obtenons que le contraste du profil convolué C_{conv} est égal à 64% du contraste réel C , soit $C_{\text{conv}} = 0.64(3) C$. Notons que ce résultat

¹³Le facteur 2 ici vient de l'intégration selon les directions radiales [34].

tat concorde avec le calcul effectué au paragraphe 2.2.4 pour un champ de tavelure intégré¹⁴ : avec $\Delta z/L_{\text{pixel}} = 5.5/8.5 = 0.65$ il vient $\mathcal{M} = 2.2$ et $C_D = 0.67$.

A l'instant $\omega_z t_{\text{vol}} = 0$, le condensat désordonné s'étend alors sous l'effet des interactions en l'absence de piègeage magnétique et de potentiel aléatoire. Après un temps d'expansion t_{vol} , nous obtenons un nuage atomique 3D et nous intégrons la densité dans les deux directions transverses afin d'obtenir un profil de densité 1D, $n_{1D}(z)$, identique à celui calculés à partir des images par absorption expérimentales. Des profils de densité 1D d'un condensat désordonné en expansion obtenus numériquement sont présentés sur la figure 3.18. Nous présentons également sur cette figure le résultat de la convolution de ces profils obtenus numériquement avec la FTM de notre système d'imagerie. Une dynamique assez complexe fait apparaître des profils très modulés dont l'amplitude change au cours du temps de vol t_{vol} . Nous discuterons ce point en détail au paragraphe 3.4.3.

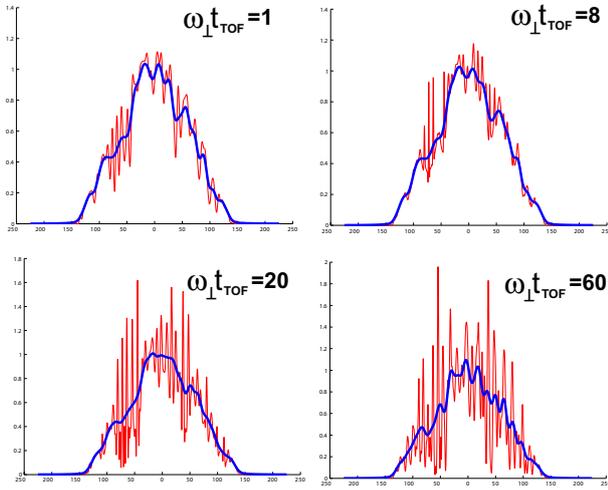


FIG. 3.18 – Profils de densité calculés à partir de l'expansion 3D d'un condensat désordonné (trait fin rouge) pour différents temps de vol t_{vol} . Le potentiel aléatoire dans lequel se trouve le condensat avant l'expansion est identique à celui des expériences : issu d'un champ de tavelures avec une longueur de corrélation $\Delta z = 5.5 \mu\text{m}$ et une amplitude $\gamma = 0.1$ ici. Les profils convolués avec la FTM du système d'imagerie expérimental sont également présentés (trait épais bleu).

A partir des profils de densité convolués avec la FTM du système d'imagerie expérimental, nous extrayons l'amplitude $\Delta\eta$ des modulations de densité. Nous étudions les fluctuations de densité $\Delta\eta$ des calculs numériques en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire pour les mêmes paramètres expérimentaux que ceux de la figure 3.16. Les résultats sont présentés sur la figure 3.19b). Nous avons également calculé, à partir des profils de densité non-convolués, l'amplitude $\Delta\eta$ des modulations de densité des condensats désordonnés dans le piège magnétique. Comme le montre la figure 3.19a), nous obtenons dans le piège magnétique $\Delta\eta = 2\gamma$. Nous retrouverons ce résultat par notre modèle (paragraphe 3.4.3).

Nous constatons que la dépendance de $\Delta\eta$ avec γ sur la figure 3.19b) est très similaire à celle obtenue dans nos expériences (figure 3.16). D'une part pour les faibles amplitudes $\gamma < 0.2$ cette dépendance est linéaire avec un coefficient $\Delta\eta = 1.25(2) \gamma$. D'autre part, pour des amplitudes supérieures, $\Delta\eta$ sature comme dans l'expérience.

¹⁴Il faut noter que au paragraphe 2.2.4, la convolution n'a pas été réalisé comme ici avec la FTM mesurée expérimentalement mais avec celle donnée par un ensemble de pixels rectangulaires.

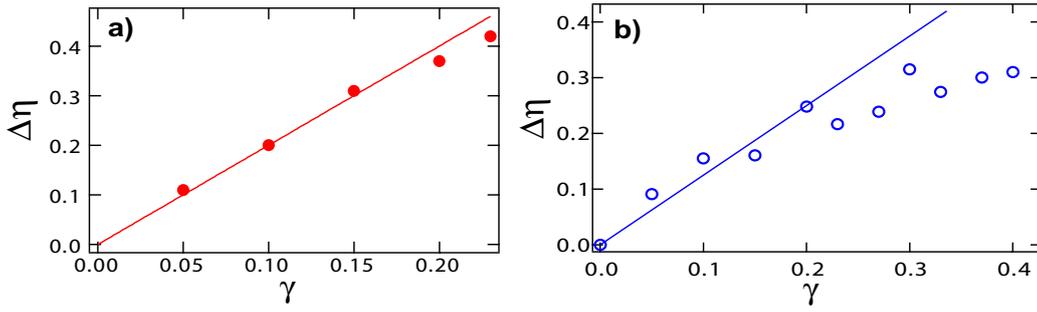


FIG. 3.19 – Amplitude $\Delta\eta$ des modulations de densité calculée en fonction de l’amplitude γ du potentiel aléatoire à partir des profils obtenus numériquement. **a)** Avec les profils numériques dans le piège magnétique, $\Delta\eta = 2\gamma$; **b)** Avec les profils numériques convolués avec la FTM du système d’imagerie pour un temps de vol de $t_{\text{vol}} = 15$ ms, $\Delta\eta = 1.22(1)\gamma$.

Réduction du contraste dans l’expérience

Nous discutons maintenant les origines possibles de la réduction du contraste des franges de densité dans notre expérience. A partir des résultats des calculs numériques, nous pouvons dans une bonne mesure évaluer les différentes contributions. Nous identifions trois sources possibles de réduction du contraste réel lors de notre mesure expérimentale : l’effet de la résolution finie du système d’imagerie ; le défaut d’alignement de la sonde avec l’axe radial Oy du condensat ; le défaut d’alignement des franges de densité avec l’axe Oy du nuage atomique.

Premièrement, nous avons déjà discuté l’effet de la résolution finie du système d’imagerie précédemment (paragraphe 3.4.1.2), la mesure de la FTM nous permettant de quantifier précisément cet effet. Nous pouvons calculer le facteur de diminution du contraste induite par l’imagerie sur les profils obtenus numériquement. La figure 3.20 présente l’évolution au cours du temps de vol de ce facteur.

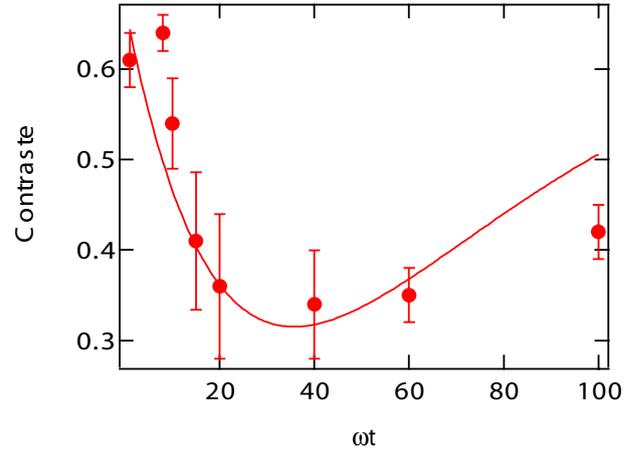
La diminution du contraste C_{res} induite par la résolution finie de l’imagerie va également nous permettre d’évaluer l’échelle spatiale typique des modulations de densité au cours du temps de vol. Nous décrivons un peu plus loin dans ce paragraphe ce qu’il en est. Dans ce but, nous utiliserons un ajustement des points de la figure 3.20 que nous avons effectué avec une fonction (arbitraire) du type

$$f(t) = A(1 - t \exp[-B(t - t_0)]) \quad (3.39)$$

où A , B et t_0 sont des paramètres ajustables. La ligne en trait plein sur la figure 3.20 correspond à cet ajustement.

Dans un deuxième temps, supposons que le faisceau sonde est bien aligné avec l’axe radial Oy d’expansion du condensat. Dans les expériences, le potentiel aléatoire est généré par un champ de tavelures dont l’alignement avec les axes propres du condensat Oy et Oz n’est pas parfait. Ce défaut d’alignement a pour conséquence une diminution du contraste mesuré des franges de densité. Un angle existe entre l’axe des franges défini par le potentiel aléatoire et l’axe Oz comme nous pouvons l’observer à partir des images par absorption (voir Fig. 3.21a) en comparant l’axe long du condensat à celui des franges. La figure 3.21a) met en évidence sur les

FIG. 3.20 – *Facteur de diminution du contraste C_{res} induit par la résolution finie $L_{\text{res}} = 8.5 \mu\text{m}$ du système d'imagerie calculé à partir des profils obtenus avec les calculs numériques. La courbe en trait plein correspond à un ajustement avec la fonction de l'équation (3.39).*



images expérimentales l'angle dont nous parlons avec l'axe Oz . Selon cet axe Oz , l'angle avec les franges est de 2 degrés environ.

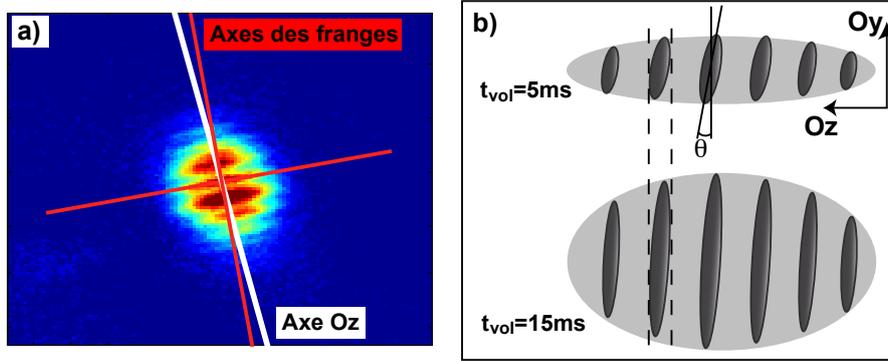


FIG. 3.21 – **a)** Image expérimentale d'un condensat désordonné après un temps de vol $t_{\text{vol}} = 17 \text{ ms}$. La ligne blanche correspond à l'axe Oz de l'anisotropie du nuage alors que les axes rouges correspondent aux axes des franges de densité. Nous observons un angle entre l'axe des franges et l'axe Oz . **b)** Schémas de l'orientation des franges de densité avec l'axe vertical Oy du faisceau sonde pour deux temps de vol différents. Il faut noter que le produit $R_{\text{TF}}(t_{\text{vol}}) \tan(\theta)$ est constant au cours du temps de vol (voir texte). Cette remarque implique que la diminution du contraste des franges de densité due à l'angle θ est constante au cours de l'expansion libre du nuage atomique.

De même, il existe un angle entre l'axe des franges et l'axe vertical Oy du faisceau sonde [voir figure 3.21b)]. Nous ne pouvons pas mesurer cet angle à partir des images par absorption puisque nous intégrons la densité atomique selon cet axe Oy . Comme nous l'avons discuté dans le cas d'un condensat non-désordonné, cet angle entre le faisceau sonde (supposé ici orienté selon l'axe Oy) et l'axe des franges induit une diminution du contraste de ces dernières lors de la mesure [Eq.(3.38)]. Il est important de noter que dans la situation que nous décrivons sur la figure 3.21b), la diminution du contraste est constante au cours du temps de vol bien que la taille radiale $R_{\text{TF}}(t_{\text{vol}})$ augmente. En effet, l'angle θ entre le faisceau sonde et les franges [voir la figure 3.21b)] évolue également au cours du temps de vol via la taille radiale $R_{\text{TF}}(t_{\text{vol}})$ du

nuage : $\tan(\theta) \propto 1/R_{\text{TF}}(t_{\text{vol}})$. Ainsi le produit $R_{\text{TF}}(t_{\text{vol}}) \tan(\theta)$ de l'équation (3.38) est constant au cours du temps de vol (la distance selon l'axe Oz entre les deux lignes pointillées verticales de la figure 3.21b) correspond à ce produit) et la diminution du contraste est également constante. Sur notre expérience, l'angle θ des franges avec l'axe Oy est inférieur à 2 degrés. La réduction du contraste correspondante, constante au cours du temps de vol, est inférieure à 1%. Cet effet est donc négligeable et nous ne le considérerons plus par la suite.

Enfin, la troisième origine d'une diminution du contraste que nous avons identifiée vient de l'angle qui existe entre le faisceau sonde et l'axe radial Oy de l'expansion du nuage atomique. Comme nous l'avons discuté dans le cas de l'expansion d'un condensat allongé présentant des fluctuations de phase initiales (paragraphe 3.4.1.2), la formule de l'équation (3.38) permet de calculer la réduction du contraste C_{angle} associée au défaut d'alignement du faisceau sonde. Ce calcul requiert la connaissance de l'échelle spatiale $d(t_{\text{vol}})$ de variation des fluctuations de densité au cours du temps de vol.

Pour cela, nous utilisons le résultat sur l'évolution du facteur de contraste dû à la résolution de l'imagerie (figure 3.20). L'évolution au cours du temps de vol de ce facteur C_{angle} est liée à celle du rapport $d(t_{\text{vol}})/L_{\text{res}}$ et elle est correctement décrite en considérant que les profils de densité convolués correspondent à des champs de tavelures intégrés avec un pixel carré de taille L_{res} ¹⁵. Initialement, nous avons $d(t_{\text{vol}} = 0) = 5.5 \mu\text{m}$ et avec les résultats du paragraphe 2.2.4 (*i.e.* un champ de tavelures intégrés par des pixels carrés), nous calculons un facteur de diminution du contraste égal à 0.64, valeur qui est en bon accord avec celle obtenue à partir des profils de densité numériques avec la FTM de l'imagerie (voir figure 3.20). A partir de la courbe décrivant l'évolution du facteur du contraste C_{angle} de la figure 3.20, nous pouvons calculer le facteur $\mathcal{M} = 1/\sqrt{C_{\text{angle}}}$ pour les différents de vol dont nous pouvons alors extraire le rapport $d(t_{\text{vol}})/L_{\text{res}}$ (voir Eq. 2.27) et, en particulier, l'échelle spatiale $d(t_{\text{vol}})$. En reportant $d(t_{\text{vol}})$ dans l'équation 3.38, nous pouvons alors calculer l'évolution temporelle du contraste pour un angle θ quelconque.

Comparaison expérience/calculs numériques

Comme nous l'avons souligné au début de ce paragraphe, nous n'avons pas pris en compte l'existence de fluctuations de phase dans notre condensat allongé initial pour les calculs numériques. Dès lors, pour une amplitude nulle du potentiel aléatoire, $\gamma = 0$, nous obtenons numériquement des fluctuations de densité nulles (voir figures 3.19). Cette situation correspond à l'expansion 3D d'un condensat à température nulle qui suit les lois d'échelle [144, 145]. Afin de comparer les résultats numériques à l'expérience, il faut donc ajouter une contribution constante à ces calculs numériques qui inclue les fluctuations de densité générées par des fluctuations initiales de la phase.

Pour prendre en compte les deux effets qui contribuent à la réduction du contraste dans l'expérience (résolution finie et angle du faisceau sonde), il faut multiplier les profils convolués avec la FTM du système d'imagerie par le facteur $C_{\text{angle}}(t_{\text{vol}})$ correspondant au temps de vol considéré. En prenant un angle du faisceau sonde avec les franges de densité $\theta = 0.33$ degré, nous obtenons un facteur $C_{\text{angle}}(\omega_{\perp} t_{\text{vol}} = 60) \simeq 0.4$. Nous comparons les mesures expérimentales

¹⁵voir paragraphe 2.2.4 pour la relation entre le facteur de diminution du contraste $1/\sqrt{\mathcal{M}}$ et le rapport $d(t_{\text{vol}})/L_{\text{res}}$.

avec les calculs numériques sur la figure 3.22. L'accord entre ces points sur toute la gamme des amplitudes γ testée est frappante. Nous en concluons que le facteur 0.4 utilisé pour prendre en compte la diminution du contraste liée au défaut d'alignement de la sonde donne un résultat cohérent. Il faut noter que l'angle $\theta = 0.33$ degré correspond à une valeur tout à fait plausible sur notre dispositif expérimental. Nous avons en effet une incertitude d'environ 1 degré sur l'alignement du faisceau sonde.

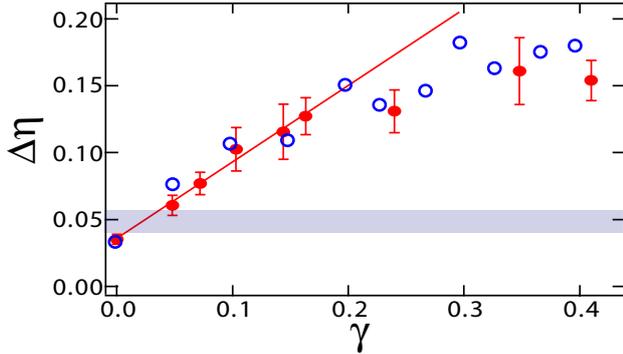


FIG. 3.22 – Comparaison des mesures expérimentales (disques rouges) avec les calculs numériques (cercles bleus) prenant en compte de la résolution finie du système d'imagerie et l'angle entre le faisceau sonde et l'axe des franges.

Sur la figure 3.15 trois profils de condensats désordonnés apparaissent pour trois temps de vol différents. Au delà de la présence des franges de densité, nous pouvons observer que l'amplitude de ces dernières évoluent avec le temps de vol, en particulier nous observons que les fluctuations de densité augmentent avec le temps de vol. L'objet du paragraphe suivant est l'étude de cette dynamique des franges de densité au cours de l'expansion de condensats allongés 3D désordonnés.

3.4.2.3 Evolution temporelle des fluctuations de densité

Nous étudions maintenant le développement des fluctuations de densité d'un condensat désordonné au cours du temps de vol. La figure 3.23 présente l'évolution dynamique de la déviation standard normalisée des fluctuations de densité $\Delta\eta$ pour un condensat désordonné initialement en présence d'un potentiel aléatoire d'amplitude $\gamma = 0.4$. Nous avons également reporté sur cette figure la mesure des fluctuations de densité pour un condensat non-désordonné.

Les fluctuations de densité qui apparaissent lors de l'expansion d'un condensat 3D désordonné sont de plus grande amplitude (typ. 15%) que celles qui existent (typ. 4%) dans un condensat non-désordonné créé dans des conditions expérimentales identiques (nombre d'atomes, anisotropie du piège). Par ailleurs, nos mesures mettent en évidence l'augmentation de l'amplitude $\Delta\eta$ des fluctuations de densité d'un condensat désordonné pour des temps de vol inférieurs à 15 ms ($\omega_z t_{\text{vol}} \simeq 62$). Pour des temps de vol supérieurs, l'amplitude $\Delta\eta$ des fluctuations de densité sature.

Les calculs numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps pour les paramètres de l'expérience figurent également sur la figure 3.23 (ligne en trait plein rouge). Les calculs numériques reportés sur la figure 3.23 prennent en compte la résolution finie du système d'imagerie (convolution avec la FTM) et le facteur $C_{\text{angle}}(t_{\text{vol}})$ dû à l'angle du faisceau sonde

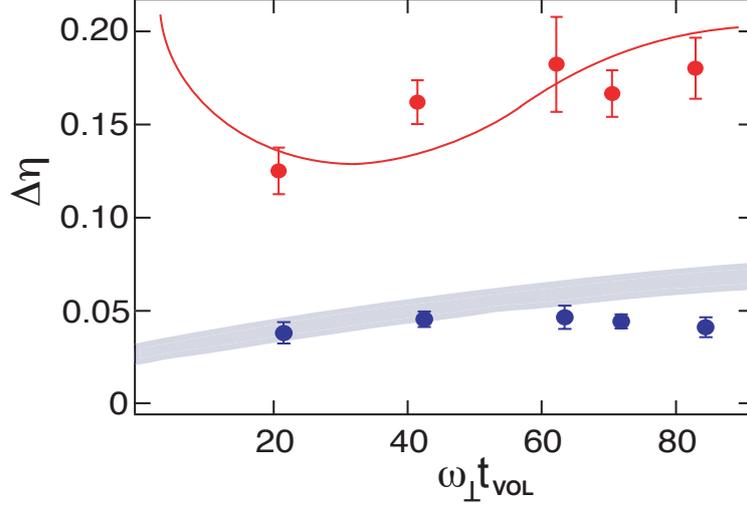


FIG. 3.23 – Evolution de la déviation standard $\Delta\eta$ des fluctuations de densité normalisées $\eta(z)$ en fonction du temps de vol t_{vol} pour un condensat non-désordonné (disques bleus) et pour un condensat désordonné (diamants rouges). La zone grisée correspond à la mesure attendue de la déviation $\Delta\eta$ (Eq. 3.37) d'un condensat non-désordonné en prenant en compte l'influence de notre système d'imagerie (voir paragraphe 3.4.1.2). La courbe en trait plein rouge correspond au résultat des calculs numériques effectués avec les paramètres expérimentaux (voir texte).

avec l'axe des franges que nous avons calibré au paragraphe précédent 3.4.2.2. L'accord entre les mesures expérimentales et les résultats de ces calculs numériques est bon. En particulier, la valeur de l'amplitude $\Delta\eta$ et sa dynamique obtenus numériquement reproduisent correctement les observations expérimentales.

Comme nous l'avons souligné au paragraphe 3.4.2.2 les calculs numériques que nous avons effectués ont pour état initial un condensat désordonné dans le régime de Thomas-Fermi dans le piège magnétique anisotrope avec une phase uniforme sur toute la taille du nuage. Or, dans un tel condensat anisotrope des fluctuations de phase d'origine thermique sont initialement présentes dans le piège ($\omega_z t_{\text{vol}} = 0$). La contribution de ces fluctuations de phase initiales dues à l'anisotropie du piège ont été prises en compte avec l'ajout d'une constante égale à la valeur mesurée dans les expériences *en l'absence de désordre*. Une fois cette constante ajoutée aux calculs numériques, ces derniers reproduisent les mesures expérimentales *en présence de désordre*. Ce point tend à montrer que les fluctuations de phase initiales ne sont pas modifiées significativement par la présence de désordre. Nous allons maintenant discuter de ce point (modulations de phase initiales à l'origine des fluctuations de densité observées en temps de vol) en lien avec l'expérience.

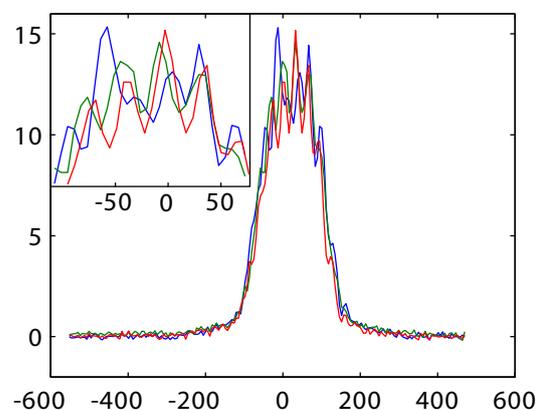
3.4.2.4 Moyenne sur différentes réalisations du désordre

Les fluctuations de densité induites en temps de vol par la présence de fluctuations de phase initiales dans un condensat allongé piégé se traduisent par un profil spatial qui change d'un cycle de l'expérience à l'autre. En effet, ces fluctuations de phase initiales ayant une origine thermique, leur profil est modifié lors de chaque réalisation expérimentale d'un nouveau condensat

de Bose-Einstein. Il en résulte alors un profil de fluctuations de densité en temps de vol qui diffère d'un condensat à l'autre réalisés dans les mêmes conditions expérimentales (même piègeage magnétique, même potentiel aléatoire éventuel). Les images de condensats allongés désordonnés présentées sur la figure 3.15 sont obtenues après un moyennage sur 6 condensats désordonnés créés dans des conditions expérimentales identiques (en particulier avec la même réalisation du potentiel aléatoire). Les franges de densité que nous observons subsistent après un tel moyennage. De plus, le profil des fluctuations de densité sur chaque condensat désordonné obtenu avec la même réalisation du potentiel aléatoire est identique. Cette observation expérimentale exclut une origine liée à des excitations *thermiques* initialement présentes dans les condensats désordonnés piégés. Nous en concluons que l'augmentation, engendrée par la présence d'un potentiel aléatoire, des franges de densité en temps de vol n'est pas liée à un accroissement des fluctuations de phase induit par le désordre dans les condensats piégés.

Par ailleurs, lorsque la réalisation du potentiel aléatoire change, le profil des fluctuations de densité après temps de vol est modifié. Ce point est illustré par la figure 3.24 pour trois réalisations différentes du potentiel aléatoire : les profils des fluctuations de densité pour ces 3 réalisations sont différents. Ce dernier point montre que les fluctuations de densité qui se développent au cours du temps de vol dépendent de la réalisation du potentiel aléatoire : elles doivent donc avoir un lien avec les modulations de densité initialement présentes dans le condensat désordonné piégé qui reproduisent les modulations de la réalisation du potentiel aléatoire (puisque le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi).

FIG. 3.24 – Profils de densité 1D de condensats désordonnés après un temps de vol fixe $\omega_z t_{\text{vol}} = 62.2$ pour trois réalisations différentes du potentiel aléatoire. Les profils de densité diffèrent d'une réalisation à l'autre du désordre.



Nous allons maintenant décrire la physique sous-jacente aux observations expérimentales sur les condensats désordonnés en temps de vol que nous venons de présenter. Comme nous venons de le montrer, l'origine de ces franges observées n'est pas liée aux fluctuations de phase initiales dans le piège magnétique. Au contraire, notre approche analytique met en évidence le rôle de l'expansion radiale dans le processus de développement des grandes fluctuations de densité dans les condensats désordonnés à partir des modulations de densité initialement présentes dans le piège magnétique ($t_{\text{vol}} = 0$ ms).

3.4.3 Description théorique de l'évolution des fluctuations de densité et de phase

L'hypothèse d'un accroissement, induit par le désordre, des fluctuations de phase initialement présentes dans les condensats allongés piégés pour expliquer l'apparition de grandes fluctuations de densité au cours du temps de vol a été réfutée au paragraphe 3.4.2. Nous présentons dans ce paragraphe l'origine et les caractéristiques du processus dynamique conduisant à l'apparition de grandes fluctuations de densité dans les condensats désordonnés allongés au cours du temps de vol. Ce processus dynamique subtil met en évidence le rôle joué par l'expansion radiale existant dans les condensats anisotropes. Nous voulons insister dès maintenant sur la nécessité d'une expansion *tri-dimensionnelle* du nuage atomique dans ce processus que nous allons détailler dans la suite. De plus, de grandes modulations de densité seront observées lorsque les condensats sont *allongés* selon une direction et le potentiel aléatoire est *uni-dimensionnel* selon cette direction longue des condensats. Notons que les expériences qui ont mis en évidence de telles fluctuations de densité (Florence [88], Orsay [34], Rice University [146] et Hanovre) remplissent ces trois conditions.

3.4.3.1 Dynamique en temps de vol en représentation densité/phase

Nous voulons étudier l'expansion d'un condensat désordonné au cours d'une expansion libre. Nous avons décrit au paragraphe 3.3.3.1 l'évolution en temps de vol de la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ d'un condensat initialement piégé et non-désordonné. La fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ a été écrite en fonction d'une fonction d'onde $\phi(\mathbf{r})$ stationnaire, seuls les facteurs d'échelle $b_j(t)$ et la phase dynamique $\theta_0(\mathbf{r}, t)$ variant dans le temps. Cette transformation avec une fonction d'onde ϕ stationnaire est valide en l'absence de modulations de densité et de phase initiales dans le condensat.

Afin de décrire analytiquement le développement de fluctuations de densité au cours du temps de vol que nous observons expérimentalement, la fonction d'onde ϕ doit dépendre du temps. Cela étant, la dynamique de l'expansion d'un condensat désordonné et délocalisé doit être dominée par les mêmes facteurs d'échelle $b_j(t)$ et la même phase $\theta(\mathbf{r}, t)$. L'évolution temporelle de ϕ correspond alors à de faibles fluctuations de densité et de phase autour de leurs valeurs obtenues pour un condensat non-désordonné. Nous utilisons ainsi la même transformation pour la fonction d'onde ψ mais cette fois la fonction d'onde ϕ peut varier au cours du temps :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\prod_j b_j(t)}} \phi\left(\frac{x_j}{b_j(t)}, t\right) e^{i\theta_0(\mathbf{r}, t)}. \quad (3.40)$$

Nous pouvons alors obtenir l'équation d'évolution de ϕ à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii pour ψ et il vient en présence d'un potentiel extérieur dépendant du temps $V_{\text{ext}}(t)$,

$$i\hbar \partial_t \phi - \sum_j \frac{m x_j^2 \ddot{b}_j}{2 b_j} \phi = \frac{g|\phi|^2 + V_{\text{ext}}(t) - \mu}{\prod_j b_j} \phi - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \partial_{x_j}^2 \phi. \quad (3.41)$$

Lors du temps de vol que nous décrivons, le potentiel aléatoire et le piège magnétique sont coupés à l'instant $t = 0$. Le potentiel extérieur $V_{\text{ext}}(t)$ est donc nul durant le temps de vol, $V_{\text{ext}}(t) = 0$. De plus, nous supposons que le piège magnétique est suffisamment anisotrope,

$\omega_{\perp} \gg \omega_z$, pour considérer le facteur d'échelle selon la direction longitudinale constant, $b_z \simeq 1$. Ce modèle décrit les expériences que nous avons réalisées avec des temps de vol typiques inférieurs à 25 ms¹⁶.

Dans l'espace renormalisé par les facteurs d'échelle, $X_j = x_j/b_j(t)$, il vient alors

$$i\hbar \partial_t \phi(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t) = \frac{m\rho^2 \ddot{b}_{\perp}}{2} \frac{\phi}{b_{\perp}} + \frac{g|\phi|^2 - \mu}{b_{\perp}^2} \phi - \frac{\hbar^2}{2mb_{\perp}^2} \partial_{\tilde{\rho}}^2 \phi - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_{\tilde{z}}^2 \phi \quad (3.42)$$

où $\tilde{\rho}^2 = X_1^2 + X_2^2 = \rho^2/b_{\perp}^2(t)$ et $\tilde{z} = X_3 = z/b_z(t)$ sont les coordonnées radiale et longitudinale de cet espace.

Nous nous intéressons dans cette partie à l'évolution des modulations de densité dans le condensat au cours du temps de vol. Nous allons donc décomposer l'équation précédente (3.42) en deux équations couplées faisant apparaître la densité et la phase du condensat.

Ecriture densité/phase

La description de l'évolution d'un condensat de Bose-Einstein au cours d'un temps de vol peut s'écrire avec les variables densité et phase de la fonction d'onde $\phi(X_j, t)$:

$$\phi(\mathbf{R}, t) = \sqrt{\tilde{n}(\mathbf{R}, t)} e^{i\tilde{\theta}(\mathbf{R}, t)}. \quad (3.43)$$

Nous notons la densité \tilde{n} et la phase $\tilde{\theta}$ de la fonction d'onde ϕ pour rappeler que cette densité et cette phase sont celles de l'espace renormalisé par les facteurs d'échelle. En particulier, dans le cas de notre piège anisotrope, la densité réelle n est reliée à la densité \tilde{n} par la relation $n(\rho, z, t) = \tilde{n}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t)/b_{\perp}^2$.

En utilisant cette transformation dans l'équation de Gross-Pitaevskii (3.42) et en identifiant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons les deux équations couplées suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{n} &= -\frac{\hbar}{mb_{\perp}^2} \nabla_{\tilde{\rho}} \left(\tilde{n} \nabla_{\tilde{\rho}} \tilde{\theta} \right) - \frac{\hbar}{m} \partial_{\tilde{z}} \left(\tilde{n} \partial_{\tilde{z}} \tilde{\theta} \right) \\ \hbar \partial_t \tilde{\theta} &= \frac{g\tilde{n} - \mu}{b_{\perp}^2} + \frac{m\omega_{\perp}^2 \tilde{\rho}^2}{2b_{\perp}^2} + \frac{m\omega_z^2 \tilde{z}^2}{2b_{\perp}^2} \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2mb_{\perp}^2} \left[\frac{\Delta_{\tilde{\rho}} \sqrt{\tilde{n}}}{\sqrt{\tilde{n}}} + |\nabla_{\tilde{\rho}} \tilde{\theta}|^2 \right] - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial_{\tilde{z}}^2 \sqrt{\tilde{n}}}{\sqrt{\tilde{n}}} + |\partial_{\tilde{z}} \tilde{\theta}|^2 \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\quad (3.45)$$

Ces deux équations (3.44-3.45) décrivent l'évolution temporelle de la densité \tilde{n} et de la phase $\tilde{\theta}$ du condensat en expansion. Remarquons que la présence d'un potentiel aléatoire dans le piège avant l'expansion n'apparaît pas dans ces équations. Ce point vient du fait que le potentiel aléatoire étant coupé en même temps que le piège magnétique (à l'instant $t = 0$), le potentiel extérieur $V_{\text{ext}}(t)$ a été pris égal à zéro. Cela étant, l'influence du potentiel aléatoire a pour effet de modifier les conditions initiales de ces équations couplées (3.44-3.45). Il est en

¹⁶Au delà de 25 ms de temps de vol, le condensat est détruit en touchant la partie inférieure de la cellule dans laquelle il est fabriqué.

effet nécessaire de donner les conditions initiales à l'instant $t = 0$ du début du temps de vol pour rendre complètes les équations précédentes sur la densité et la phase.

Avant le temps de vol, le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi en présence du potentiel aléatoire $V(z)$ comme nous l'avons justifié précédemment [paragraphe 3.3.4]. De plus, les fluctuations de phase initiales dues à l'anisotropie du piège étant faibles dans les expériences que nous décrivons, nous supposerons la phase initiale uniforme que nous pouvons prendre égale à zéro¹⁷. Les conditions initiales s'écrivent alors

$$\begin{aligned} g\tilde{n}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t = 0) &= \mu - \frac{m\omega_{\perp}^2 \tilde{\rho}^2}{2} - \frac{m\omega_z^2 \tilde{z}^2}{2} - V(\tilde{z}) = g\tilde{n}_0(\tilde{\rho}, \tilde{z}) - V(\tilde{z}) \\ \tilde{\theta}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t = 0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

En l'absence de potentiel aléatoire, $V(z) = 0$, les solutions des équations couplées (3.44-3.45) sont simplement

$$\begin{aligned} \tilde{n}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t) &= \tilde{n}_0(\tilde{\rho}, \tilde{z}) \\ \tilde{\theta}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Il est naturel de trouver la solution stationnaire $\tilde{n}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t) = \tilde{n}_0(\tilde{\rho}, \tilde{z})$ pour la densité \tilde{n} dans l'espace renormalisé par les facteurs d'échelle. Cette solution correspond en effet à la solution décrite par les lois d'échelles [144, 145], à savoir $n(\mathbf{r}, t) = n_0(\tilde{\rho}, \tilde{z})/b_{\perp}^2(t)$. Pour ce qui est de la phase $\tilde{\theta}$, le gradient de phase correspondant à l'expansion du condensat a été pris en compte dans la transformation définissant la fonction d'onde ϕ (c'est à dire dans l'expression $\theta_0(\mathbf{r}, t)$ définie au paragraphe 3.3.3.1). Nous obtenons ainsi une phase $\tilde{\theta}$ nulle en l'absence de potentiel aléatoire.

La présence du potentiel aléatoire 1D sur le condensat piégé induit des fluctuations de densité initiale dans la direction longitudinale Oz ¹⁸. Le nuage atomique possède ainsi un terme de champ moyen proportionnel aux modulations du potentiel aléatoire $V(z)$ dans le piège magnétique. Lors de l'ouverture du piège magnétique ($t_{\text{vol}} = 0$), ce terme de champ moyen qui fluctue spatialement imprime des modulations de phase sur le condensat dans la direction longitudinale Oz du potentiel aléatoire 1D. Ces dernières sont gelées par l'expansion radiale et elles se convertissent ensuite en fluctuations de densité aux temps de vol plus longs.

Nous définissons les fluctuations de densité δn et de phase θ respectivement par

$$\begin{aligned} \delta\tilde{n}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t) &= \tilde{n}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t) - n_0(\tilde{\rho}, \tilde{z}) \\ \tilde{\theta}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t) &. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ainsi, la quantité $\delta\tilde{n}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t)$ correspond aux fluctuations de densité autour du profil de densité parabolique $\tilde{n}_0(\tilde{\rho}, \tilde{z})$ et $\tilde{\theta}(\tilde{\rho}, \tilde{z}, t)$ aux fluctuations de la phase.

¹⁷Un calcul simple de la minimisation de l'énergie totale d'un condensat de Bose-Einstein désordonné à température nulle à l'équilibre conduit à l'absence de fluctuations de phase induite par le désordre.

¹⁸Comme nous l'avons déjà discuté, cela vient du fait que le condensat se trouve dans le régime de Thomas-Fermi en présence du potentiel aléatoire.

Le potentiel aléatoire étant uni-dimensionnel selon l'axe Oz , les fluctuations de densité et de phase induites par la présence de ce dernier existeront dans la seule direction longitudinale Oz . Nous supposons donc qu'aucune dépendance radiale n'apparaît dans l'expression des fluctuations de densité et de phase.

En négligeant les termes faisant apparaître une dérivée radiale et en utilisant une approximation de densité locale pour effectuer un traitement perturbatif au premier ordre en perturbation $\delta\tilde{n} \ll \tilde{n}_0$ and $\delta\tilde{\theta} \ll 2\pi$, il vient :

$$\partial_t \delta\tilde{n} = -\frac{\hbar}{m} \tilde{n}_0 \Delta_z \tilde{\theta} \quad (3.49)$$

$$-\hbar \partial_t \tilde{\theta} = \frac{g\delta\tilde{n}}{b_\perp^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[|\partial_z \tilde{\theta}|^2 - \frac{\Delta_z \delta\tilde{n}}{2\tilde{n}_0} \right]. \quad (3.50)$$

Trois termes contribuent aux fluctuations de phase [Eq.(3.50)] : le premier terme de droite est lié à la présence d'interaction et les deux autres termes à une énergie cinétique (un terme de gradient de phase et un terme de gradient de densité). En négligeant le second terme de droite de l'équation (3.50) (terme en $|\partial_z \tilde{\theta}|^2$), les fluctuations de densité sont solutions d'une équation du second ordre,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \delta\tilde{n} - \frac{\mu}{mb_\perp^2} \Delta_z \delta\tilde{n} + \frac{\hbar^2}{4m^2} \Delta_z^2 \delta\tilde{n} &= 0 \\ \delta\tilde{n}(z, 0) = V(z)/g, \quad \partial_t \delta\tilde{n}(z, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

La condition de validité de cette équation (3.51) correspond à une contribution négligeable du terme en $|\partial_z \tilde{\theta}|^2$ de l'équation (3.50) (terme $|\partial_z \tilde{\theta}|^2$). Aux temps courts, $\delta\tilde{n} \sim V_R/g$ et cette condition de validité s'écrit $\hbar^2 |\partial_z \tilde{\theta}|^2 / 2m \ll V_R/b_\perp^2$, ce qui conduit à

$$\omega_\perp t \ll \left(\frac{\sigma_R}{\xi} \right)^2 \frac{(\hbar\omega_\perp)^2}{\mu V_R}. \quad (3.52)$$

Dans la suite de notre discussion, nous supposons cette condition de validité respectée aux temps courts. Nous verrons par ailleurs que c'est bien le cas dans notre expérience.

La solution analytique de l'équation du second ordre en temps (3.51) pour les fluctuations de densité est difficilement soluble. Nous proposons comme alternative un scénario en deux temps. Dès l'ouverture du piège magnétique, le terme de champ moyen induit par le potentiel aléatoire $g\delta\tilde{n}(z) \sim V(z)$ imprime une phase qui fluctue selon la direction du potentiel aléatoire et qui est homogène transversalement : il s'agit de disques de phase homogènes dans la direction radiale. Lors la première phase de l'expansion 3D d'un condensat très allongé, le nuage atomique explose essentiellement radialement et les modulations longitudinales de phase imprimées par $V(z)$ sont gelées. Dans un second temps, les modulations de phase longitudinales se convertissent en de grandes fluctuations de densité, qui sont celles que nous observons dans les expériences.

Remarquons que l'expression des fluctuations de densité $\delta\tilde{n}$ utilisée dans ce paragraphe est celle des fluctuations de densité dans l'espace renormalisé par les facteurs d'échelle. Les fluctuations de densité réelles sont donc $\delta\tilde{n}/b_\perp^2(t_{\text{vol}})$. Dans les expériences, nous avons étudié les fluctuations de densité normalisées par le profil parabolique après temps de vol, c'est à dire $\tilde{n}_0/b_\perp^2(t_{\text{vol}})$. Ainsi le calcul analytique de $\delta\tilde{n}/\tilde{n}_0$ correspond bien à la quantité mesurée expérimentalement.

3.4.3.2 Modèle physique de l'expansion libre en deux étapes

Nous nous proposons d'établir un scénario pour le développement des larges fluctuations de densité observées au cours du temps de vol à partir des équations couplées (3.49)-(3.50). Ce scénario distingue deux étapes temporelles. Aux temps courts, l'expansion transverse du nuage domine et gèle la dynamique longitudinale : la phase se développe transversalement alors que les modulations de densité longitudinales en sont presque pas modifiées. Aux temps longs, les modulations de phase se convertissent en fluctuations de densité dans la direction longue du nuage.

Impression de modulations de phase et expansion radiale aux temps courts

Nous remarquons que dans le piège initial, le condensat désordonné se trouve dans le régime de Thomas-Fermi ($\xi \ll \sigma_R$). Ainsi, les deuxième et troisième termes de droite de l'équation sur la phase (3.50) (termes cinétiques) sont négligeables devant le premier terme de droite de cette même équation (terme d'interaction). Ainsi, lors des premiers instants de l'expansion libre du condensat désordonné, l'équation sur la phase est gouvernée par le seul terme d'interaction responsable de l'explosion radiale du nuage atomique. Cette équation sur la phase $\tilde{\theta}$ se réduit alors à

$$-\hbar \partial_t \tilde{\theta} = \frac{g \delta \tilde{n}}{b_{\perp}^2}. \quad (3.53)$$

Si, de plus, nous supposons que les modulations de densité évoluent peu durant la première phase de l'expansion (gel de la dynamique longitudinale par l'explosion radiale du nuage), *i.e.* $\delta \tilde{n}(z, t) \simeq \delta \tilde{n}(z, 0) = -V(z)/g$, la phase s'écrit

$$\tilde{\theta}(z, t) = \frac{V(z)}{\hbar \omega_{\perp}} \arctan(\omega_{\perp} t). \quad (3.54)$$

Dans le cadre de nos approximations, la phase $\tilde{\theta}$ croît au cours du temps de vol avec une constante de temps égale à $1/\omega_{\perp}$, temps qui gouverne l'expansion radiale. Cette phase sature rapidement (pour $\omega_{\perp} t = 10$, nous avons $2/\pi \arctan(\omega_{\perp} t = 10) = 0.94$).

En utilisant l'expression précédente (3.54) pour l'évolution temporelle de la phase $\tilde{\theta}$ aux temps courts, nous obtenons alors avec l'équation (3.49)

$$\delta \tilde{n} \simeq -\frac{V(z)}{g} - \frac{\tilde{n}_0 \partial_z^2 V(z)}{m \omega_{\perp}^2} F(\omega_{\perp} t) \quad (3.55)$$

avec $F(\tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \arctan(\tau') = \tau \arctan(\tau) - \ln \sqrt{1 + \tau^2}$.

A partir de (3.55) nous pouvons calculer l'amplitude $\Delta \eta$ des modulations de densité aux temps courts. Nous avons

$$\int_{\rho} 2\pi \rho d\rho \delta \tilde{n}(z) = \pi R_{\text{TF}}^2 \delta \tilde{n}(z) \quad (3.56)$$

et la densité 1D au centre vaut $\tilde{n}_0^{1D} = \pi \mu R_{\text{TF}}^2 / 2$. Le second terme de $\delta \tilde{n}$ [Eq.(3.55)] étant négligeable devant le premier, il vient alors avec un développement au premier ordre

$$\Delta \eta(t) \simeq 2 \left(\frac{V_R}{\mu} \right) \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\mu}{\hbar \omega_{\perp}} \right)^2 \left(\frac{\xi}{\sigma_R} \right)^2 F(\omega_{\perp} t) \right]. \quad (3.57)$$

Il faut faire ici deux commentaires. Premièrement, l'amplitude des modulations de densité $\Delta\eta$ dans le piège magnétique est égale à $2V_R/\mu$. Le facteur multiplicatif 2 devant le terme V_R/μ vient de l'intégration transverse ($\Delta\eta$ étant défini sur la densité 1D). Nous avons obtenu cette dépendance en analysant les profils de densité obtenus par le calcul de l'équation de Gross-Pitaevskii 3D [figure 3.19a)]. Deuxièmement, le second terme de la formule 3.57 correspond à une faible décroissance des modulations de densité aux temps courts : il s'agit de l'effet du champ moyen dans la direction longitudinale. Comme nous l'avons supposé pour obtenir l'expression de la phase $\tilde{\theta}$, ce terme doit être négligeable aux temps courts dans le cas d'un condensat très anisotrope (gel de la dynamique longitudinale lors de l'explosion transverse). Cependant sa contribution peut être observée sur les profils de densité calculés numériquement : la courbe numérique pour $\Delta\eta$ décroît en effet aux temps courts sur la figure 3.23.

Revenons maintenant sur les conditions de validité de nos différentes approximations.

Tout d'abord, nous avons négligé les termes "cinétiques" dans l'équation de la phase (3.50) devant le terme d'interaction. Il faut donc que la condition (3.52) soit respectée afin de pouvoir négliger le terme en $|\partial_z \tilde{\theta}|^2$ dans (3.50). De plus, la condition sur le second terme cinétique (proportionnel à $\Delta_z \delta \tilde{n}$) se met sous la forme

$$\omega_{\perp} t \ll \left(\frac{\sigma_R}{\xi} \right)^2. \quad (3.58)$$

Ces deux conditions de validité sont vérifiées aux temps courts.

A ces deux conditions, il faut ajouter l'hypothèse d'une faible modification des modulations de densité, *i.e.* $\delta \tilde{n}(z, t) \simeq \delta \tilde{n}(z, 0) = -V(z)/g$. A partir de l'équation (3.55), cette condition définit un temps typique t_0 pendant lequel la dynamique longitudinale est gelée par l'expansion transverse,

$$t_0 = \frac{1}{\omega_{\perp}} F^{-1} [(\sigma_R/\xi)^2 (\hbar \omega_{\perp}/\mu)^2 / 2]. \quad (3.59)$$

Ainsi, si ce temps typique t_0 est grand devant $1/\omega_{\perp}$, la phase $\tilde{\theta}$ atteint sa valeur asymptotique pendant la phase de gel de la dynamique longitudinale. Dans ce cas, la conversion des modulations de phase en fluctuations de densité longitudinales a lieu après l'établissement complet de $\tilde{\theta}$: nous pouvons clairement séparer les deux étapes que nous décrivons dans le temps. Au contraire (et c'est le cas dans nos expériences), si le temps t_0 est de l'ordre de $1/\omega_{\perp}$, la dynamique longitudinale de développement de fluctuations de densité débute avant la saturation de la phase $\tilde{\theta}$. Cela étant, ce recouvrement temporel des deux étapes ne remet pas en cause notre modèle.

Développement de grandes modulations de densité aux temps longs

Aux temps d'expansion longs devant $1/\omega_{\perp}$ (mais courts devant $1/\omega_z$ afin de négliger l'expansion longitudinale), la dynamique longitudinale n'est plus gelée et les modulations de phase $\tilde{\theta}(z)$ donnent lieu à un développement des fluctuations de densité $\delta \tilde{n}(z)$. Ce phénomène apparaît lorsque $t \gtrsim t_1$ où t_1 est un temps typique bien supérieur à $1/\omega_{\perp}$ pour lequel le terme de champ moyen (lié aux interactions) de l'équation (3.50) devient négligeable devant le terme d'énergie cinétique. Après un temps d'expansion suffisamment long, le facteur d'échelle $1/b_{\perp}(t)$ devient inférieur à 1 et le terme cinétique proportionnel à $\Delta_z \delta \tilde{n}$ domine le terme de champ moyen

$g\delta\tilde{n}/b_{\perp}(t)$.

En supposant que le gradient de phase ($|\partial_z\tilde{\theta}|^2$) reste négligeable, il vient alors l'équation aux dérivées secondes pour les fluctuations de densité $\delta\tilde{n}$

$$\partial_t^2\delta\tilde{n}_k + \hbar^2k^4\delta\tilde{n}_k/4m^2 = 0 \quad (3.60)$$

où $\delta\tilde{n}_k(\rho, t)$ est la transformée de Fourier 1D de $\delta\tilde{n}$ selon l'axe Oz . La solution de l'équation (3.60) se met sous la forme

$$\begin{aligned} \delta\tilde{n}_k(t) = & \delta\tilde{n}_k(t_1) \cos [(\hbar k^2/2m)(t - t_1)] \\ & + (2m\delta\dot{\tilde{n}}_k(t_1)/\hbar k^2) \sin [(\hbar k^2/2m)(t - t_1)]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dans le cas où les deux étapes du modèle sont séparées temporellement, $t_0 \gg 1/\omega_{\perp}$, nous pouvons choisir le temps t_1 tel que $1/\omega_{\perp} \ll t_1 \leq t_0$. Dès lors, l'équation Eq. (3.55) implique que $\delta\tilde{n}_k(t_1) \simeq -V(z)/g$ est déterminé par les fluctuations initiales de densité dans le piège magnétique. La valeur de la dérivée temporelle au temps t_1 des fluctuations de densité est donnée par l'équation (3.49) :

$$\partial_t\delta\tilde{n}_k(t_1) \simeq -\tilde{n}_0 \frac{\partial_z^2 V(z)}{m\omega_{\perp}} \arctan(\omega_{\perp}t_1). \quad (3.62)$$

L'origine de ce terme tient à l'effet des modulations de phase qui se sont créées lors de la première étape du modèle.

Chaque composante de Fourier des fluctuations de densité $\delta\tilde{n}$ [Eq.(3.61)] est donc la somme d'un terme issu des fluctuations de densité initialement présentes dans le piège magnétique ($\delta\tilde{n}_k(t_1)$) et d'un terme issu du développement de modulations de phase lors de la première étape du modèle. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'augmentation de $\Delta\eta$ au cours du temps de vol à partir de sa valeur initiale dans le piège magnétique vient de la présence de modulations de phase, donc du second terme de l'équation (3.61). Or, dans l'hypothèse où $\hbar\omega_{\perp} \ll \mu$, le terme en cosinus ($\propto V_R/g$) est négligeable et la contribution du seul second terme de (3.61) ($\propto \mu V_R/g\hbar\omega_{\perp}$) donne les fluctuations de densité aux temps longs. La condition $\hbar\omega_{\perp} \ll \mu$ est valide dans nos expériences.

Finalement nous obtenons

$$\Delta\eta(t) \simeq \sqrt{8} \left(\frac{V_R}{\hbar\omega_{\perp}} \right) \arctan(\omega_{\perp}t_1) I[\sigma_R, t - t_1] \quad (3.63)$$

avec pour un potentiel aléatoire issu d'un champ de tavelures

$$I(\sigma_R, t) = \sqrt{\int_0^1 d\kappa (1 - \kappa) \sin^2 [(2\hbar t/m\sigma_R^2)\kappa^2]}. \quad (3.64)$$

Il faut souligner que l'équation (3.63) met en évidence que les fluctuations de densité après temps de vol sont proportionnelles au rapport $V_R/\hbar\omega_{\perp}$, $\Delta\eta \propto V_R/\hbar\omega_{\perp}$. Ainsi, dans le cas où $\mu \gg \hbar\omega_{\perp}$, l'amplitude $\Delta\eta$ après temps de vol est plus grande que l'amplitude des fluctuations

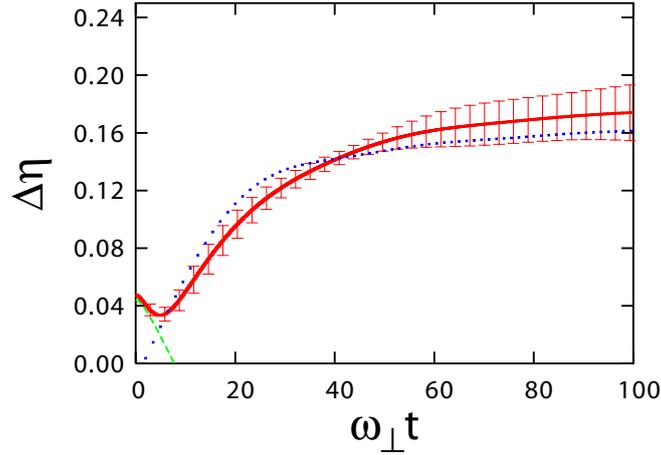


FIG. 3.25 – Comparaison des modulations de densité $\Delta\eta$ obtenues par intégration numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii (en rouge) avec les équations analytiques (3.57) (trait pointillé vert) et (3.63) (trait tireté bleu). Les barres d'erreur sur les résultats numériques correspondent à la déviation standard sur les différentes réalisations du potentiel aléatoire. Les paramètres sont identiques à ceux de l'expérience, en particulier $\sigma_R = 1.7 \mu m$ avec $V_R = 0.02\mu$.

initiales dans le piège magnétique : il s'agit dans ce cas d'un accroissement des fluctuations de densité pour les raisons que nous avons présentées dans notre modèle.

Par ailleurs, les fluctuations de densité $\eta(z)$ après un temps de vol sont déterminées par la réalisation $V(z)$ du potentiel aléatoire. Elles sont donc *déterministes* une fois la réalisation du potentiel aléatoire choisie, au contraire des fluctuations de densité issues de fluctuations de phase thermiques.

Enfin, l'équation (3.63) montre que l'amplitude $\Delta\eta$ des fluctuations de densité sature à très long temps de vol à la valeur $\Delta\eta(t) \simeq \sqrt{2}(V_R/\hbar\omega_\perp) \arctan(\omega_\perp t_1)$. Nous retrouvons ainsi également le phénomène observé dans nos expériences (figure 3.23).

Pour finir, nous comparons les résultats des calculs numériques avec les formules analytiques de notre modèle, en particulier les équations (3.57) et (3.63), sur la figure 3.25. Le bon accord que nous obtenons justifie notre modèle analytique en deux étapes.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le dispositif expérimental "BEC1" de création d'un condensat de Bose-Einstein de Rubidium. L'ajout d'un potentiel aléatoire de tavelures nous permet d'obtenir des condensats désordonnés dans le régime de Thomas-Fermi ($\xi \ll \sigma_R$) avec typiquement 3×10^5 atomes. Les propriétés statiques des condensats désordonnés ont été caractérisées à partir des images par absorption. Ce dernier point nous a conduit à étudier la dynamique des fluctuations de densité qui se développent au cours du temps de vol dans les condensats désordonnés. Nous avons montré que ce phénomène n'est pas lié à l'augmentation, induite par le désordre, des fluctuations de phase présentes dans les condensats allongés [34]. Le

scénario que nous avons proposé met en lumière le rôle crucial joué par l'expansion radiale dans l'accroissement des (faibles) fluctuations de densité présentes sur les condensats piégés ($t_{\text{vol}} = 0$ ms).

Après avoir analysé le processus dynamique d'un condensat désordonné en temps de vol, nous allons étudier au prochain chapitre un processus dynamique dans un guide magnétique uni-dimensionnel : l'expansion 1D et la localisation de condensats de Bose-Einstein en présence d'un potentiel aléatoire.

Transport et localisation d'un condensat avec interactions dans un potentiel aléatoire

La réalisation expérimentale d'un condensat de Bose-Einstein d'atomes de Rubidium 87 dans un potentiel aléatoire telle que nous l'avons décrite au chapitre 3 conduit à l'obtention d'un condensat désordonné à l'équilibre. La présence d'interactions conduit à une délocalisation de la fonction d'onde et à l'existence d'une phase condensée désordonnée (paragraphe 3.3.4). Un tel condensat désordonné constitue alors une source de matière cohérente pour étudier toute une variété de phénomènes liés au désordre : diffusion d'une onde de matière dans un milieu désordonné, effet des interactions sur les phénomènes de localisation induits par le désordre, modifications des propriétés superfluides ou encore nouvelles phases quantiques (chapitre 1). Dans ce chapitre, nous allons étudier le transport d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions en présence de désordre.

L'un des phénomènes intéressants induits par le désordre lors du transport d'une onde est la localisation de cette dernière, et notamment la localisation au sens d'Anderson [4]. Comme nous l'avons discuté en introduction (chapitre 1), ces phénomènes de localisation apparaissent avec tout type d'onde : ondes de matière, ondes acoustiques, ondes électro-magnétiques... En physique de la matière condensée, ces phénomènes de localisation sont cruciaux puisqu'ils sont à l'origine de modifications importantes de la conduction électronique et de la transition métal-isolant induite par le désordre. Cependant, le phénomène de localisation d'Anderson dans ces systèmes solides est délicat à mettre en évidence expérimentalement sans ambiguïté. D'une part, l'onde localisée ne peut être observée directement à l'intérieur du solide. D'autre part, les fortes interactions coulombiennes compliquent l'image développée par Anderson pour des ondes sans interaction. Ainsi, le profil de l'onde localisée sensé être exponentiellement décroissant à partir du centre de localisation (signature emblématique du phénomène prédit par Anderson) n'a pas été observé dans ces systèmes. Au contraire, son apparition dans un condensat de Bose-Einstein permettrait de mettre en évidence de façon directe l'existence de ce phénomène de localisation dans la matière (l'observation du profil de l'onde de matière dans nos systèmes gazeux étant possible). Rappelons que de tels phénomènes de localisation ont été observés de façon convaincante très récemment avec la lumière lors du transport de pulses [7] et dans un cristal photonique [5].

Par ailleurs, l'étude des phénomènes de localisation dans des condensats de Bose-Einstein ne se limite pas à une simple réalisation du modèle imaginé par Anderson en 1958. En effet, dans la plupart des expériences avec un gaz de bosons dégénérés, les interactions entre atomes ne peuvent pas être négligées. Alors que la théorie développée par Anderson considère un gaz idéal, les interactions peuvent complètement changer le scénario. Nous pouvons en effet intuiti-

vement nous attendre à un phénomène de dé-localisation en présence d'interactions répulsives ou à un effondrement du nuage atomique lorsque ces dernières sont attractives. Il faut d'ailleurs souligner que l'effet des interactions coulombiennes dans les solides sur le phénomène de localisation d'Anderson reste très ouvert. L'étude du transport d'un condensat de Bose-Einstein peut apporter des éléments de réponse à ces questions.

Ce chapitre décrit l'étude du transport 1D d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions en présence d'un potentiel aléatoire. Nous commençons par décrire le dispositif expérimental permettant d'engendrer le transport de l'onde de matière dans la seule direction du potentiel aléatoire 1D. Nous présentons ensuite les résultats expérimentaux sur la localisation du condensat en présence de désordre [33, 35]. La suppression du transport d'un condensat avec interactions a également été observée à la même époque dans le groupe de M. Inguscio à Florence [154]. Nous développons un modèle, corroboré par un travail expérimental détaillé, prenant en compte la présence des interactions entre atomes qui décrit ce phénomène de localisation comme un piégeage classique induit par le désordre. En particulier, nous montrons que le scénario de la suppression du transport en présence d'interaction est de nature différente de celui proposé par Anderson lorsque la réflexion sur une modulation *unique* du potentiel aléatoire est importante. Enfin, dans un dernier paragraphe, nous présentons une approche théorique (basée sur le formalisme de phase) de l'expansion d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions dans un *désordre faible*, *i.e.* un désordre pour lequel la transmission de l'onde de matière sur chaque modulation est proche de l'unité [36]. Dans cette situation de faible désordre, nous montrons que le phénomène de localisation d'Anderson existe après un temps de diffusion du condensat suffisamment long pour pouvoir négliger les interactions entre atomes. Nous calculons la longueur de localisation du condensat et nous discutons la réalisation expérimentale d'un tel scénario.

4.1 Induire le transport de l'onde de matière

L'influence du désordre est plus marquée dans les systèmes de basse dimension : à 1D la localisation d'Anderson existe pour tout le spectre d'énergie, à 2D c'est également le cas mais la longueur de localisation peut être très grande (en particulier plus grande que la taille du système) alors qu'à 3D la localisation forte n'apparaît qu'au delà d'une certaine amplitude du désordre (voir 1). Une façon simple de comprendre ces différences est la possibilité pour l'onde, à 2D et plus encore à 3D, de contourner les principales modulations ou impuretés du potentiel aléatoire. Sur notre dispositif expérimental, nous créons des condensats atomiques 3D. Cependant nous avons décidé de nous placer dans une situation où le transport des atomes est restreint à une seule direction selon laquelle ces derniers ne peuvent contourner les modulations du potentiel aléatoire de tavelures¹. Pour cela, nous devons, d'une part, disposer d'un potentiel aléatoire 1D pour le nuage d'atomes et, d'autre part, induire le transport de l'onde de matière dans la seule direction de ce potentiel aléatoire 1D. La réalisation de la première condition a été développée au chapitre 2. La seconde condition sur le transport 1D du condensat 3D est l'objet de ce premier paragraphe.

Nous décrivons ici la réalisation et la caractérisation d'un guide magnétique 1D selon la direction longitudinale Oz du condensat allongé (voir 3). Le transport du condensat (expansion

¹Nous utilisons le champ de tavelures présenté au chapitre 2 pour créer un potentiel aléatoire.

due aux interactions répulsives et mouvement du centre de masse) a lieu selon ce seul axe Oz qui correspond à l'axe du potentiel aléatoire 1D décrit au chapitre 2.

4.1.1 Ouverture du piège magnétique : transport induit par les interactions

4.1.1.1 Réalisation d'un guide magnétique 1D

Rappelons que le piège magnétique dans lequel sont créés des condensats de Bose-Einstein a une forme de cigare allongé selon l'axe Oz (pour plus de détails voir la partie ??). Comme nous l'avons mentionné en introduction à ce chapitre, nous avons décidé de réaliser un guide magnétique 1D pour observer l'expansion de l'onde de matière selon cette seule direction spatiale Oz . La réalisation expérimentale de ce guide magnétique est basée sur les avantages du piège électro-magnétique dont nous disposons.

Le dispositif expérimental créant le piège magnétique dans lequel a lieu l'évaporation RF vers l'obtention de la condensation, possède deux caractéristiques primordiales pour notre propos, à savoir l'indépendance des confinements transverses et longitudinal et l'homogénéité spatiale du piégeage transverse. Nous voulons créer un guide magnétique *unidimensionnel*, ce qui se traduit par la coupure du piège magnétique dans la direction longitudinale du condensat Oz tout en conservant le confinement transverse (dans le plan xOy). La possibilité qui est offerte par notre dispositif de contrôler de façon quasi-indépendante² les confinements transverses et longitudinaux nous permet de réaliser cette ouverture unidimensionnelle. Par ailleurs, la présence d'électro-aimants coupés en biseau sur une longueur de 2 cm permet d'obtenir une fréquence de piégeage transverse homogène sur cette longueur (voir figure 4.1). Cette homogénéité du piégeage transverse sur 2 cm est particulièrement grande par rapport aux dispositifs standards. Elle est cruciale dans les expériences que nous allons décrire ici puisque ainsi le piégeage transverse est spatialement homogène lors de l'expansion longitudinal du condensat (la taille du condensat, initialement égale à 300 μm , croît lors de l'expansion jusqu'à 1 mm environ, voir 4.1.1.2).

Notre piège magnétique est décrit en détail au chapitre 3 (paragraphe 3.3.2). Le contrôle des courants dans les bobines axiales (axe Oz) et radiales qui créent le confinement dans le plan transverse xOy permet de changer les fréquences du piège selon les trois directions de l'espace. En réduisant le courant dans les bobines axiales, nous ouvrons le piège longitudinal en modifiant partiellement le confinement transverse (la fréquence du confinement transverse varie de moins de 10%).

La courbure magnétique dans la direction longue Oz ne s'annule pas lorsque le courant d'alimentation des bobines dipolaires est nul. Ceci vient de la présence des électro-aimants et du couplage de ces derniers avec les champs magnétiques environnants. Pour un courant nul dans les bobines axiales, nous avons mesuré par des oscillations du centre de masse du condensat la courbure résiduelle du champ magnétique selon Oz . Nous avons obtenu une fréquence de piégeage $\omega_z \sim 2\pi \times 3 \text{ Hz}$. Nous avons mis en place une nouvelle alimentation de courant

²Il existe un faible couplage via les électro-aimants entre les différents axes du piège magnétique. Il est néanmoins empiriquement possible de limiter l'influence de l'ouverture longitudinal sur le confinement transverse en jouant sur les courants des différentes bobines qui créent le piège magnétique.

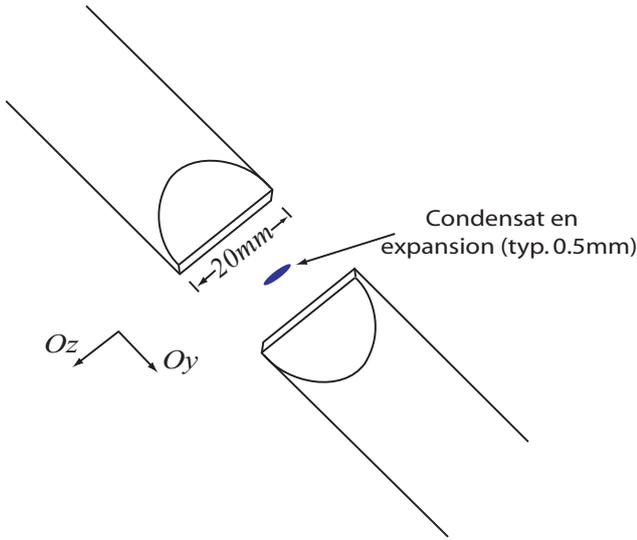


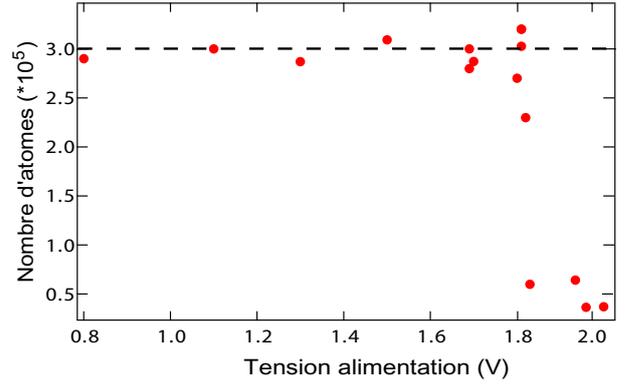
FIG. 4.1 – Image des électro-aimants guidant le champ magnétique à l'origine du confinement transverse. La coupe en biseau sur une longueur de 2 cm permet d'obtenir un champ magnétique et un confinement transverse homogènes sur cette longueur. L'intérêt de ce dispositif réside dans le fait que cette longueur est grande devant la taille maximale du nuage après expansion (de l'ordre de 1 mm) ce qui implique une fréquence de piégeage transverse spatialement homogène lors de l'expansion.

des bobines dipolaires qui nous permet, une fois le courant baissé à la valeur nulle avec la première alimentation, de faire circuler un courant en sens opposé à celui du cycle magnétique de création d'un condensat. Ce courant en sens opposé permet de réduire la courbure résiduelle dans le guide magnétique à 1.1 Hz (voir le paragraphe suivant). Remarquons que la mise en place et l'utilisation de cette nouvelle alimentation en courant s'est avérée délicate. En effet, la présence de faibles couplages transverse/longitudinal des électro-aimants rend difficile l'obtention d'un cycle magnétique stable où un condensat est d'abord fabriqué puis transféré (sans perte ni chauffage) au guide magnétique ouvert à l'aide de la seconde alimentation. Nous avons empiriquement trouvé une situation qui nous est favorable en modifiant les différents courants d'alimentation des bobines.

Le champ magnétique axial définit également le biais de notre piège de Ioffe-Prichard (voir 3.3.2). Lorsque le courant des bobines axiales est suffisamment diminué le biais magnétique devient égal à zéro. Dans cette situation les atomes subissent des pertes de Majorana qui les font passer de l'état piégé $|F = 1, m_F = -1\rangle$ vers un autre état hyperfin non-piégeant ($m_f = -1$ ou $m_F = 0$) : ils s'échappent alors du piège magnétique et sont perdus pour l'expérience. Il nous faut éviter ce phénomène. Ainsi, l'ouverture longitudinale est limitée expérimentalement par un biais minimal nécessaire à l'absence de pertes de Majorana. Nous avons mesuré le nombre d'atomes présents dans le guide après l'ouverture longitudinale en fonction du courant inverse circulant dans les bobines axiales à l'aide de la seconde alimentation. Lorsque ce courant correspond à un biais proche de zéro, le nombre d'atomes du condensat dans le guide magnétique chute brutalement d'un ordre de grandeur (figure 4.2). Cette apparition de pertes de Majorana définit une valeur de courant maximale qui correspond à notre ouverture maximale. Dans les expériences, le courant qui circule dans les bobines axiales est commandé par une alimentation contrôlée en tension. La tension d'alimentation correspondant à l'apparition des pertes de Majorana est 1.8 V (figure 4.2). Nous nous sommes donc placés à 1.75 V afin d'obtenir une ouverture maximale et un nombre d'atomes dans le guide magnétique égal à celui du condensat dans le piège initial (pas encore ouvert longitudinalement).

Par ailleurs, nous avons observé qu'une ouverture brutale du piège longitudinal induit des pertes et du chauffage dans le nuage atomique (la fraction condensée diminue). Afin d'éviter ces

FIG. 4.2 – Nombre d’atomes du condensat dans le guide magnétique ouvert en fonction de la limite tension de l’alimentation en courant inverse des bobines axiales. Les pertes de Majorana correspondant à un biais magnétique nul apparaissent pour une tension égale à 1.8 V.



problèmes nous ouvrons le piège longitudinal en quelques milli-secondes (27 ms exactement). Cela étant, cette ouverture "lente" du piège longitudinal demeure rapide par rapport à la dynamique du condensat et n'est donc pas adiabatique pour ce dernier. Si la condition d'adiabaticité était respectée, le condensat serait à l'équilibre à tout instant et la taille longitudinale s'écrirait $L_{\text{adiab}}(\tau) = \sqrt{\frac{2\mu_{\text{TF}}}{m\omega_z^2(\tau)}}$ où $\omega(\tau)$ est la fréquence longitudinal du piège à l'instant τ de l'ouverture. La vitesse d'expansion réelle du condensat $v(\tau)$ devrait donc être supérieure à celle de la condition d'adiabaticité, soit $v(\tau) > -L(\tau)/\omega_z(\tau) \partial_\tau \omega_z$. Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette condition n'est pas respectée. Pour le condensat, l'ouverture du piège longitudinal peut alors être considérée abrupte jusqu'à la situation finale où l'ouverture est maximale.

4.1.1.2 Observation de l'expansion en l'absence de potentiel aléatoire

Nous présentons dans ce paragraphe la caractérisation du guide magnétique 1D lors de l'expansion d'un condensat en l'absence de potentiel aléatoire.

Commençons par décrire la séquence expérimentale (présentée sur la figure 4.8) qui conduit à l'observation de l'expansion du condensat dans le guide magnétique. Dans nos expériences, nous effectuons l'ouverture longitudinale du piège après l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein (non-désordonné) avec la séquence habituelle (voir chapitre 3). Une fois le condensat obtenu, le piège est ouvert dans la direction longitudinale tout en maintenant le confinement transverse. L'instant où commence l'ouverture du piège longitudinal est prise comme origine des temps ($\tau = 0$ ms). A la fin de la séquence expérimentale que nous venons de décrire, nous prenons une image par absorption après un temps de vol de $t_{\text{tof}} = 15$ ms. Le temps d'expansion τ ne prend pas en compte le temps de vol (typiquement $t_{\text{tof}} = 15$ ms). Remarquons également que le temps d'ouverture du piège dans la direction du piège longitudinal est inclus dans le temps d'expansion. Ceci vient du fait que l'expansion du condensat étant plus lente que l'ouverture du piège, l'expansion a lieu comme si le piège était déjà ouvert même lors des toutes premières milli-secondes de l'ouverture (voir paragraphe 4.1.1.1).

A la fin de l'ouverture du piège longitudinal ($\tau = 27$ ms), nous obtenons des condensats purs avec un nombre $N \sim 2.5 \times 10^5 - 3 \times 10^5$ d'atomes dans le guide magnétique 1D. Notre séquence expérimentale d'ouverture du piège magnétique n'induit donc ni chauffage ni perte d'atomes.

Nous présentons sur la figure 4.4 trois images du condensat en expansion dans le guide ma-

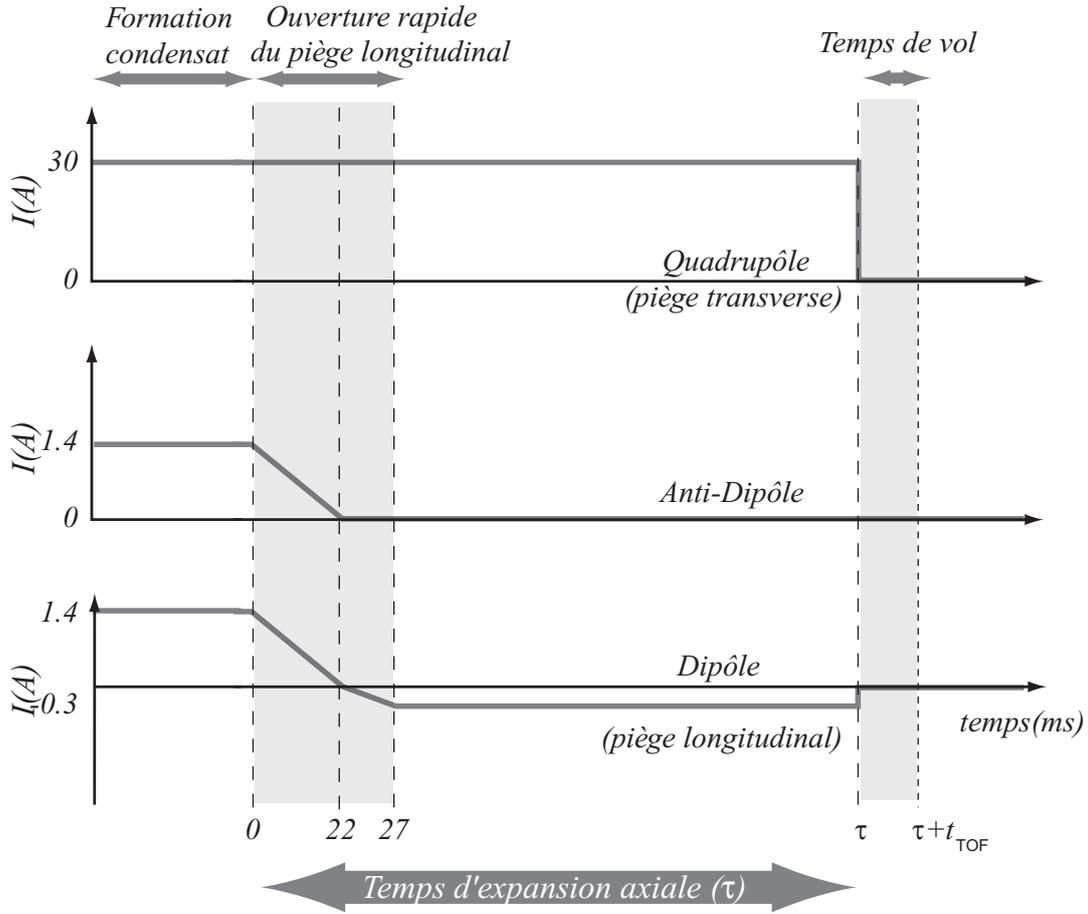


FIG. 4.3 – Schéma de la séquence expérimentale pour l'ouverture longitudinale du piège magnétique et l'expansion du condensat dans le guide magnétique 1D. Le temps $\tau = 0$ ms marque la fin du cycle habituel de création d'un condensat de Bose-Einstein et l'origine des temps ($\tau = 0$ ms) coïncide avec l'ouverture du piège axial. L'expansion dans le guide magnétique a lieu pendant une durée τ . Enfin, nous prenons une image par absorption après un temps de vol t_{tof} .

gnétique 1D. Nous observons l'expansion du nuage d'atomes condensé dans la direction axiale du piège magnétique ³. L'origine de cette expansion est la présence d'interactions répulsives au sein du nuage condensé : lors de l'ouverture du piège longitudinal, l'énergie de piégeage est transformée sous forme d'énergie cinétique par les interactions entre atomes.

Comme nous cherchons à observer le transport de l'onde de matière, il est important de réaliser une bonne ouverture du piège. Pour le vérifier, nous avons caractérisé ce guide magnétique et, en particulier, nous avons mesuré la fréquence de piégeage résiduelle longitudinale de ce guide. Afin de mesurer la fréquence de piégeage dans la direction dipolaire, nous effectuons des oscillations du centre de masse du condensat dans le guide 1D. Les oscillations dipolaires

³Remarquons que notre système d'imagerie permet justement d'observer le nuage d'atomes selon cette direction longitudinale.

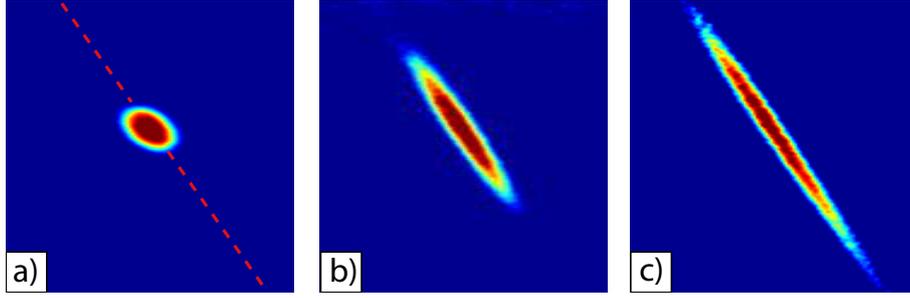


FIG. 4.4 – Images par absorption après un temps de vol de 15 ms du condensat de Bose-Einstein en expansion dans le guide magnétique unidimensionnel [images moyennées sur 3 réalisations de l'expérience]. Les trois images correspondent respectivement à des temps d'expansion dans le guide 1D de **a)** 5 ms, **b)** 72 ms, **c)** 172 ms. Le trait pointillé rouge sur la figure a) indique la direction longue du piège magnétique.

sont un très bon test car leur fréquence est égale à celle du guide ω_z^{guide} . De plus cette mesure est très robuste dans un potentiel harmonique puisqu'elle est indépendante de la statistique et des interactions (théorème de Kohn [28]). Les oscillations dipolaires du condensat dans le guide magnétique sont représentées sur la figure 4.5a). Elles nous permettent de mesurer la fréquence du guide magnétique selon l'axe long Oz . Nous avons également engendré des oscillations quadrupolaires dans le guide (voir figure 4.5b). La fréquence du mode quadrupolaire dans un piège allongé vaut $\sqrt{5/2} \omega_z^{\text{guide}}$ [155]. La fréquence longitudinale du piège ouvert obtenue avec ces deux mesures est en accord et sa valeur est

$$\omega_z^{\text{guide}} = 2\pi \times 1.10(5) \text{ Hz.} \quad (4.1)$$

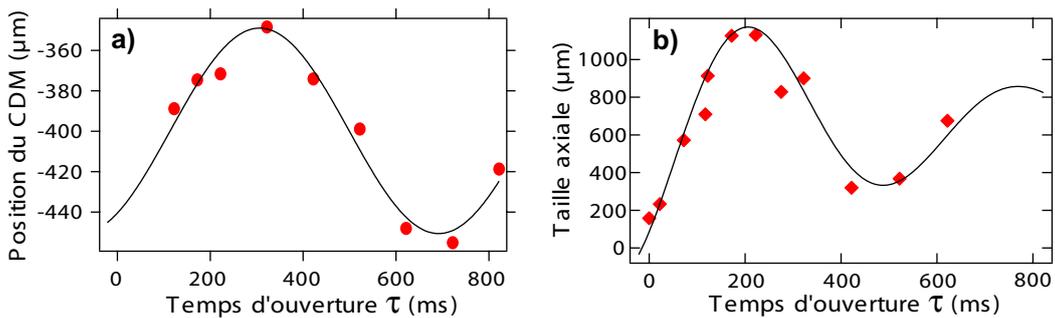


FIG. 4.5 – **a)** Position du centre de masse au cours des oscillations dans le guide magnétique ouvert. La fréquence des oscillations dipolaires est $\omega_{\text{dip}} = \omega_z^{\text{guide}}$. **b)** Taille axiale du condensat dans le guide magnétique 1D. La fréquence des oscillations quadrupolaires est $\omega_{\text{quad}} = \sqrt{5/2} \omega_z^{\text{guide}}$.

Nous pouvons extraire à partir des images après temps de vol (voir figure 4.4) la taille RMS longitudinale L_{rms} (selon l'axe Oz) du condensat en expansion. Nous traçons sur la figure 4.6a)

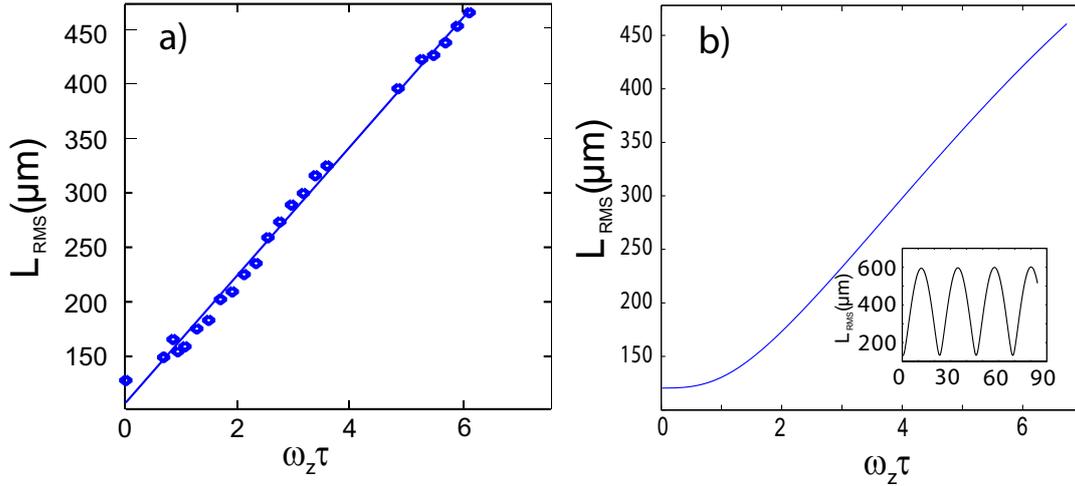


FIG. 4.6 – **a)** Evolution de la taille RMS L_{rms} longitudinale du condensat en expansion dans le guide magnétique 1D après un temps d'expansion τ . **b)** Calcul numérique de l'évolution de l'évolution de la taille RMS L_{rms} à partir des facteurs d'échelle $b_i(\tau)$ en prenant en compte l'ouverture finale à $\omega_z^{\text{guide}} = 1.1$ Hz et des facteurs d'échelle transverse constants ($b_x(\tau) = b_y(\tau) = 1$). L'image insérée montre l'évolution à temps τ plus longs : on observe les oscillations quadrupolaires dans le guide de fréquence ω_z^{guide}

l'évolution de la taille L_{rms} au cours de l'expansion dans le guide magnétique 1D en l'absence de désordre.

L'évolution de la taille RMS, L_{rms} , du condensat en expansion en l'absence de désordre est linéaire avec le temps d'expansion τ pour les temps $\omega_z \tau < 8$. Ce comportement est conforme à celui prédit par les lois d'échelle (voir la figure 4.6b) et la vitesse RMS mesurée expérimentalement, $v_{\text{rms}} = 2.47(3)$ mm/s, est très proche de la valeur obtenue à partir de calculs numériques de l'évolution temporelle des facteurs d'échelle [144, 145]⁴, $v_{\text{rms}}^{\text{num}} = 2.5$ mm/s. Pour des temps supérieurs à ceux utilisés dans nos expériences, l'évolution de la taille RMS fait apparaître des oscillations qui correspondent aux oscillations quadrupolaires dans le guide [voir l'image insérée sur la figure 4.6b)]. Ces oscillations quadrupolaires ont également été observées expérimentalement [figure 4.5b)].

Les calculs numériques de l'évolution temporelle des facteurs d'échelle montrent que, dans notre situation expérimentale, la vitesse dans le guide n'est pas sensible à une ouverture brutale ou à une ouverture lente du piège (moins de 1% de différence entre les vitesses obtenues). Au contraire, la courbure longitudinale finale obtenue dans le guide a une forte influence sur la vitesse RMS de la partie linéaire de l'expansion. En particulier, la solution asymptotique de l'équation des lois d'échelle dans le cas du piège ouvert totalement ($\omega_z^{\text{guide}} = 0$), $b(\tau) \simeq \sqrt{2}\omega_z \tau (\simeq 3.6$ mm/s), ne s'applique pas à notre situation expérimentale.

Il faut remarquer qu'après un temps τ d'expansion dans le guide magnétique 1D le nuage

⁴Le calcul de la vitesse d'expansion du condensat dans le guide magnétique (avec $\omega_z^{\text{guide}} \neq 0$) à partir des lois d'échelle est délicate. C'est la raison pour laquelle nous avons effectué un calcul numérique.

d'atomes se trouve toujours dans un régime Thomas-Fermi. La fréquence transverse du guide magnétique $\omega_{\perp}^{\text{guide}}$ est très grande devant la fréquence longitudinale ω_z^{guide} . Dès lors, l'évolution durant un temps de vol $t_{\text{vol}} \leq 1/\omega_z^{\text{guide}}$ du condensat étendu dans le guide 1D est dominée par la dynamique transverse : l'énergie d'interaction du condensat est transformée en énergie cinétique selon la direction transverse au cours du temps de vol. Bien entendu, à l'instant où débute le temps de vol le condensat n'est pas à l'équilibre dans le guide puisqu'il est en expansion et les lois d'échelle usuellement utilisées [144, 145] ne peuvent en toute rigueur pas s'appliquer. Cela étant, l'anisotropie du guide implique que le transfert de l'énergie d'interaction en énergie cinétique transverse est largement prépondérant et que la contribution des interactions au cours du temps de vol est négligeable selon l'axe longitudinal Oz . Ainsi, nous concluons que l'évolution du profil longitudinal au cours du temps de vol tient à la seule énergie cinétique longitudinale présente au début du temps de vol, *i.e.* à la fin de l'expansion dans le guide (le condensat étant en expansion selon cette direction longue Oz). Nous pouvons alors écrire la taille RMS longitudinale L_{rms} du condensat après une expansion et un temps de vol,

$$L_{\text{rms}}(\tau + t_{\text{vol}}) = L_{\text{rms}}(\tau) + v_{\text{rms}}(\tau)t_{\text{vol}}. \quad (4.2)$$

Pour un temps de vol fixe, la taille du condensat dans le guide $L(\tau)$ est obtenue en prenant en compte la contribution constante $v_{\text{rms}}t_{\text{vol}}$ à cette taille qui vient de l'énergie cinétique initialement disponible selon la direction longitudinale Oz . Après un temps d'expansion typique $\tau \geq 2/\omega_z$, cette contribution de l'énergie cinétique longitudinale à la taille L après un temps de vol est typiquement de l'ordre de 4% pour un temps de vol de 5 ms ($L(\tau) \sim 250 \mu\text{m}$ et $v_{\text{rms}}t_{\text{vol}} \sim 12 \mu\text{m}$) et de l'ordre de 12% pour un temps de vol de 15 ms. Cette contribution est constante pour les longs temps d'expansion et elle ne change pas la mesure de la vitesse d'expansion. Il suffit, pour la prendre en compte, de soustraire le terme $v_{\text{rms}}(\tau)t_{\text{vol}}$ à chaque mesure expérimentale de la taille RMS.

4.1.1.3 Distribution d'impulsion d'un condensat en expansion

Dans cette partie, nous calculons la distribution d'impulsion d'un condensat de Bose-Einstein unidimensionnel en expansion. Les interactions répulsives entre atomes sont responsables de l'expansion longitudinale du condensat dans le guide magnétique 1D. Elles donnent ainsi une vitesse longitudinale au nuage d'atomes dans le piège ouvert. Rappelons que la théorie des lois d'échelle [144, 145] montrent que la forme du condensat ne change pas (si ce dernier est dans le régime de Thomas-Fermi dans le piège magnétique non ouvert) et qu'une phase dynamique $\theta(\tau)$ se développe dans le nuage atomique (voir 3.3.3.1). Pour un condensat 1D en expansion selon Oz après une ouverture complète du piège ($\omega_z^{\text{guide}} = 0 \text{ Hz}$), la fonction d'onde du condensat se met sous la forme

$$\psi(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{b(\tau)}} \psi(z/b(\tau), 0) \exp[i\theta(z, \tau)]. \quad (4.3)$$

La phase dynamique θ s'écrit

$$\theta(z, \tau) = \frac{m}{2\hbar} \frac{\dot{b}(\tau)}{b(\tau)} z^2, \quad (4.4)$$

où, d'après les lois d'échelle à une dimension, le facteur d'échelle $b(\tau)$ est donné par la formule implicite [35]

$$\sqrt{b(\tau)(b(\tau) - 1)} + \log[\sqrt{b(\tau)} + \sqrt{(b(\tau) - 1)}] = \sqrt{2}\omega_z\tau. \quad (4.5)$$

Après un temps long d'expansion, $\omega_z \tau \gg 1$, il vient $b(\tau) \simeq \sqrt{2}\omega_z \tau$.

Pour les longs temps d'expansion dans le guide magnétique 1D, $\omega_z \tau \gg 1$, la densité du condensat devient très faible et les interactions peuvent être alors négligées. Dès lors, il est possible de décomposer l'onde du condensat en expansion comme une superposition d'ondes planes,

$$\psi(z, \tau) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{\psi}(k, \tau) \exp(ikz), \quad (4.6)$$

avec une distribution d'impulsion $\mathcal{D}(k)$. Cette distribution d'impulsion $\mathcal{D}(k)$ d'un condensat unidimensionnel en expansion s'écrit

$$\mathcal{D}(k) = |\hat{\psi}(k, \tau)|^2 \quad (4.7)$$

où $\hat{\psi}(k, \tau)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'onde du condensat en expansion $\psi(z, \tau)$.

Dans le piège magnétique parabolique (avant l'ouverture longitudinale), le condensat se trouve dans le régime de Thomas-Fermi. Sa fonction d'onde initiale s'écrit donc $\psi(z, 0) = \sqrt{\mu_{\text{TF}}(1 - z^2/L_{\text{TF}}^2)}$. Après un changement de variable, il vient

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k, \tau) = & \sqrt{\frac{\hbar\mu_{\text{TF}}}{\pi\dot{b}(\tau)}} \int dz \exp(iz^2) \left[1 - \frac{\hbar^2}{m^2\dot{b}(\tau)^2 L_{\text{TF}}^2} k^2 \right. \\ & \left. - \frac{2\hbar b(\tau)}{m\dot{b}(\tau)b^2(\tau)L_{\text{TF}}^2} z^2 - \left(\frac{2\hbar b(\tau)}{m\dot{b}(\tau)} \right)^{3/2} \frac{k}{b^2(\tau)L_{\text{TF}}^2} z \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dans l'expression précédente de $\hat{\psi}(k, \tau)$, les termes linéaire et quadratique en z varient respectivement proportionnellement à $1/\sqrt{\omega_z \tau}$ et à $1/\omega_z \tau$. Aux temps longs $\omega_z \tau \gg 1$, ces termes deviennent négligeables devant les deux premiers termes. Il vient alors aux temps longs, avec $b(\tau) \simeq \sqrt{2}\omega_z \tau$,

$$\hat{\psi}(k, \tau) \simeq A \sqrt{1 - k^2 \xi_{in}^2} \quad (4.9)$$

où A est un nombre complexe et $\mu_{\text{TF}} = \hbar^2/4m\xi_{in}^2$. Remarquons que nous venons de définir une nouvelle longueur de relaxation ξ_{in} , $\xi_{in} = \xi/\sqrt{2}$ où ξ est la longueur de relaxation que nous avons défini jusque là [$\mu_{\text{TF}} = \hbar^2/2m\xi^2$]. L'utilisation de cette longueur de relaxation ξ_{in} permet simplement d'écrire plus lisiblement un certain nombre d'équations.

En notant que la condition de normalisation s'écrit $\int dk \mathcal{D}(k) = N$, nous obtenons finalement la distribution en impulsion du condensat 1D en expansion aux temps longs ($\omega_z \tau \gg 1$)

$$\mathcal{D}(k) \simeq \frac{3N\xi_{in}}{4} (1 - k^2 \xi_{in}^2) \Theta(1 - k\xi_{in}) \quad (4.10)$$

où $\Theta(x)$ est la fonction Heaviside.

Ce calcul sur la distribution d'impulsion d'un condensat 1D en expansion nous sera utile lors de l'étude théorique de l'expansion d'un nuage atomique au paragraphe 4.3. Les condensats avec lesquels nous travaillons expérimentalement sont des condensats 3D et leur distribution

d'impulsion $\mathcal{D}(k)$ n'est pas donnée par l'expression (4.10). Cela étant, pour un condensat en expansion dans un guide magnétique 1D où le transfert d'énergie d'interaction en énergie cinétique ne peut se faire que dans la seule direction du guide 1D, la distribution d'impulsion peut raisonnablement être identifiée à celle de l'équation (4.10).

4.1.2 Déplacement du centre de masse dans le guide 1D

Nous n'avons pas évoqué une difficulté expérimentale sur le contrôle du gradient magnétique issue du couplage entre les électro-aimants transverses et longitudinal de notre piège magnétique. Des bobines de compensations sont placées sur les électro-aimants selon les trois directions de l'espace afin de pouvoir compenser les champs permanents générés par nos électro-aimants lorsque les bobines des quadrupoles et du dipole ne sont plus alimentées. Ces bobines de compensations sont normalement réglées sur le cycle habituel de création d'un condensat de Bose-Einstein. Seulement lorsque nous effectuons l'ouverture du piège longitudinal, le réglage de ces compensations n'est plus optimisé et doit être ajusté pour la configuration où le nuage d'atomes est chargé dans le guide magnétique 1D.

Le réglage de ces compensations nous donne la possibilité de modifier le mouvement du centre de masse du condensat dans le guide. En effet, nous avons utilisé les bobines du "trap tilt" qui compensent le gradient longitudinal pour donner une vitesse initiale au centre de masse du condensat. Lors de l'expansion ce gradient est coupé de telle sorte que le centre de masse du nuage se déplace à vitesse constante.

Nous avons observé le mouvement du centre de masse du nuage condensé dans le guide magnétique. La figure 4.7 présente le déplacement du nuage dans le guide magnétique 1D. La position du centre de masse varie linéairement avec le temps d'expansion τ dans le guide 1D (la vitesse mesurée du centre de masse (cdm) vaut $v_{\text{cdm}} = 4.4$ mm/s). Nous pourrions ainsi observer sur le mouvement du centre de masse la modification du transport induite par la présence d'un potentiel aléatoire.

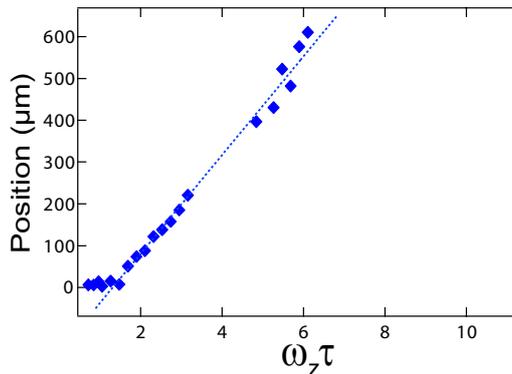


FIG. 4.7 – Position du centre de masse au cours du déplacement du condensat dans le guide magnétique 1D après application d'une accélération initiale.

Il est important de noter que lorsqu'un tel mouvement est donné au centre de masse du condensat, le nuage d'atomes est également en expansion longitudinale. En effet, le piège magnétique doit être ouvert afin d'observer le déplacement du centre de masse et les interactions répulsives entre atomes engendrent, comme précédemment, l'expansion du condensat.

4.2 Suppression du transport par des modulations uniques du potentiel aléatoire

Dans cette partie, nous présentons les résultats expérimentaux et le modèle théorique de piégeage d'une onde de matière en expansion dans un potentiel aléatoire pour lequel, comme nous le verrons, la présence des interactions et les réflexions sur une modulation *unique* jouent un rôle crucial. Insistons une nouvelle fois sur le fait que dans nos expériences le potentiel aléatoire est toujours non piégeant pour le condensat initial : $\gamma = \sigma_V/\mu_{TF} < 1$.

Nous discutons tout d'abord de l'observation expérimentale de la suppression du transport en présence du potentiel aléatoire (en mesurant la taille RMS du nuage et en repérant la position de son centre de masse). Nous présentons ensuite un scénario de piégeage induit par le désordre qui met en évidence le rôle des interactions. Enfin, nous montrons que les prédictions théoriques du modèle sont en accord qualitatif et quantitatif avec nos résultats expérimentaux.

4.2.1 Observation de la localisation du condensat

L'expansion du condensat dans le guide magnétique 1D en présence du potentiel aléatoire est observée avec des images d'absorption après la séquence décrite précédemment (voir la figure 4.8).

Nous présentons sur les figures d), e) et f) de la figure 4.9 l'image du nuage atomique pour différents temps d'expansion τ dans un potentiel aléatoire d'amplitude $\gamma = 0.4^5$. Il apparaît clairement que l'expansion du nuage est arrêtée contrairement au cas sans désordre [images a), b) et c)]. Dans une expérience similaire réalisée dans le groupe de Florence à la même époque, des résultats identiques ont été observés sur la suppression de l'expansion [154].

Les images d-f) de la figure 4.9 sont des images par absorption après temps de vol en présence d'un potentiel aléatoire. Les fluctuations de densité observées précédemment (voir paragraphe 3.4) ne sont pas visibles ici pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les images d-f) sont une moyenne sur les réalisations du potentiel aléatoire. Ensuite, la longueur de corrélation ($\Delta z = 0.95 \mu\text{m}$) du potentiel aléatoire est environ 5 fois plus faible que celle du paragraphe 3.4 ($\Delta z = 5.5 \mu\text{m}$) : la baisse du contraste due à l'intégration sur la taille du pixel effectif de la CCD est donc plus grande (diminution d'un facteur 3.0 au lieu d'un facteur 1.5). Enfin, lors de ces images une expansion longitudinale a déjà eu lieu et les fluctuations de densité initiales avant temps de vol sont donc diminuées par rapport au cas où le condensat est lâché sans ouverture longitudinale.

⁵Les images expérimentales sont moyennées sur 5 réalisations du potentiel aléatoire.

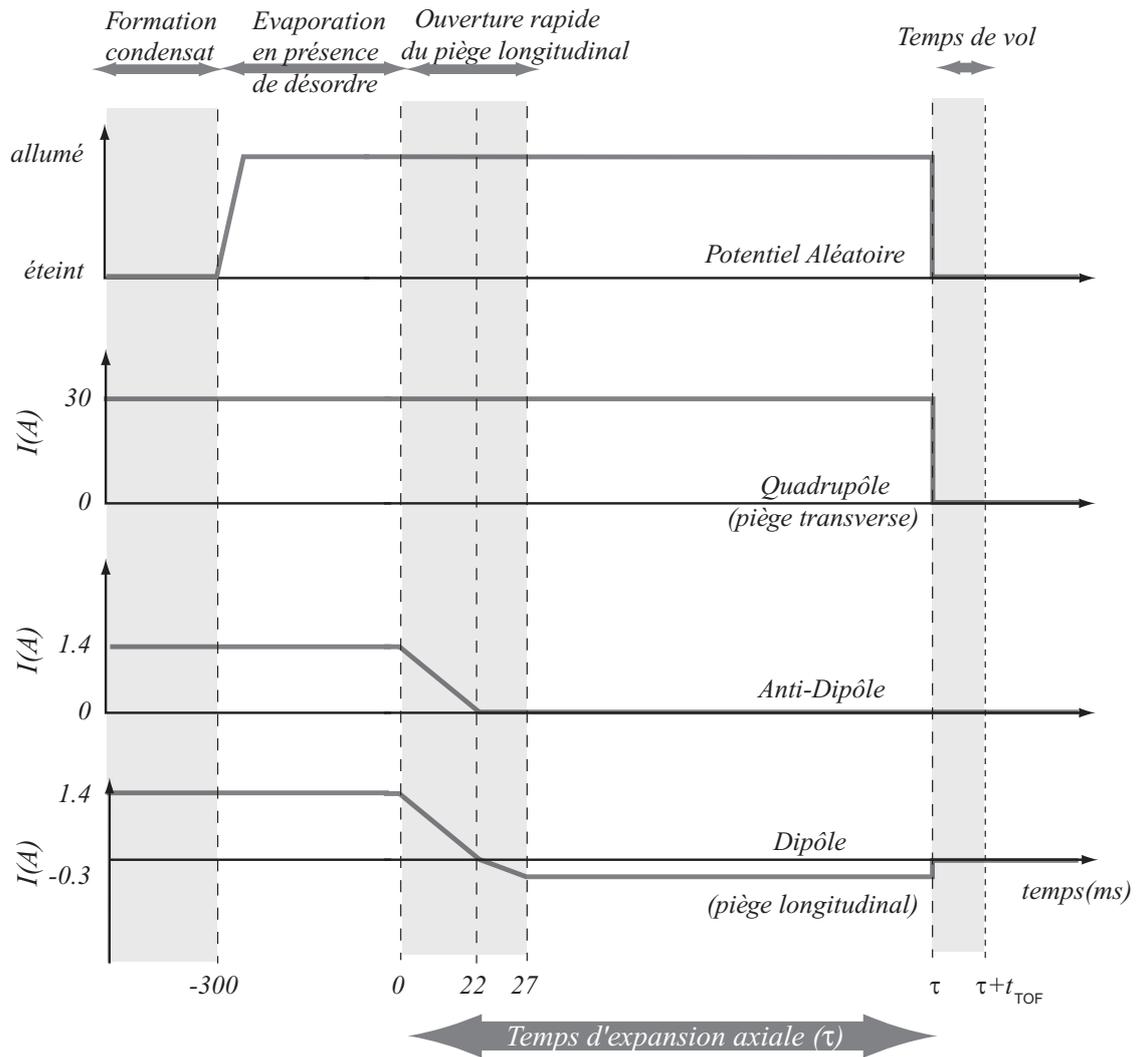


FIG. 4.8 – Séquence expérimentale pour l'ouverture longitudinale du piège magnétique et l'expansion du condensat dans le guide magnétique 1D créé. Le temps $\tau = -300$ ms marque la fin du cycle habituel de création d'un condensat de Bose-Einstein et l'origine des temps ($\tau = 0$ ms) coïncide avec l'ouverture du piège dipolaire (le condensat est alors à l'équilibre en présence du potentiel aléatoire).

La suppression manifeste de l'expansion du condensat a lieu dans un potentiel aléatoire perturbatif pour lequel $\gamma = 0.4$. Dans cette situation expérimentale, les atomes du nuage condensés ont une énergie typique de l'ordre de μ_{TF} supérieure à deux fois l'amplitude du potentiel σ_V . Dès lors, ils ne peuvent pas être piégés initialement dans le potentiel aléatoire et l'arrêt de l'expansion doit donc avoir lieu au cours de l'expansion. Nous allons donc étudier plus en détail ce phénomène de localisation en mesurant la longueur RMS du condensat en expansion.

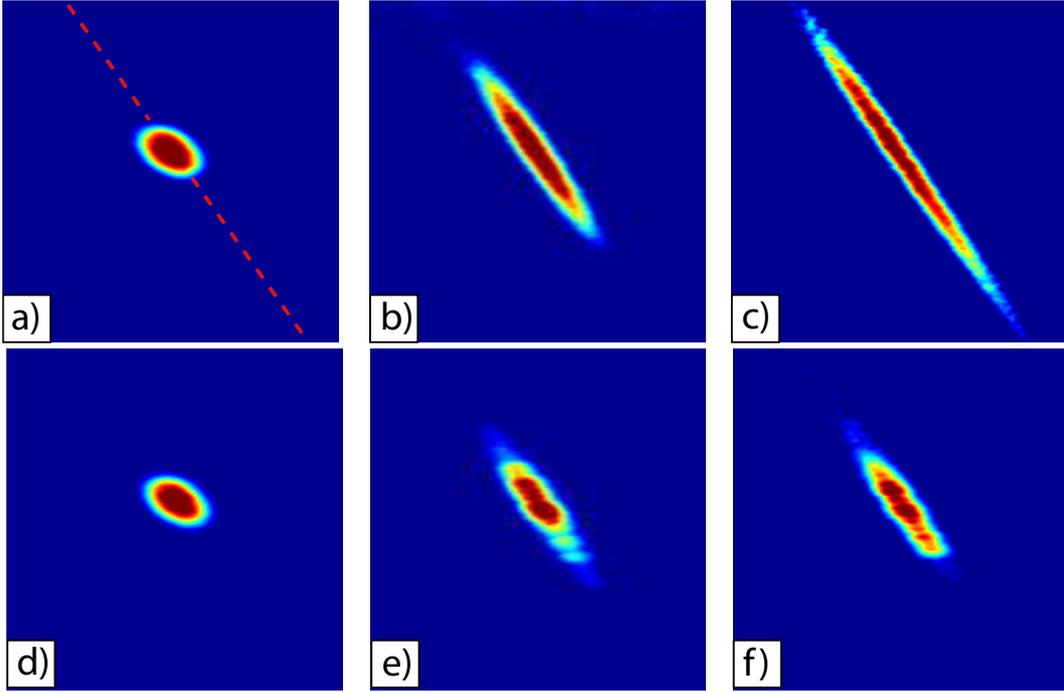


FIG. 4.9 – **a), b), c)** : Images par absorption après un temps de vol de 15 ms du condensat de Bose-Einstein en expansion dans le guide magnétique unidimensionnel en l'absence de désordre (images moyennées sur 5 réalisations de l'expérience). Les trois images correspondent respectivement à des temps d'expansion dans le guide 1D de 5, 72 et 172 ms. **d), e), f)** : Images par absorption après un temps de vol de 15 ms du condensat de Bose-Einstein en expansion dans le guide magnétique unidimensionnel en présence de désordre ($\gamma = 0.4$) et des temps d'expansion identiques aux images a-c) : 5, 72 et 172 ms (images moyennées sur 5 réalisations du potentiel aléatoire). La suppression de l'expansion du condensat en présence d'un potentiel désordonné apparaît très clairement sur les images d-f).

4.2.1.1 Evolution de la taille RMS L_{rms}

Nous mesurons la taille RMS longitudinale $L_{\text{rms}}(\tau)$ (selon l'axe Oz) du condensat en expansion en présence d'un potentiel aléatoire à partir des images par absorption [figure 4.9]. Nous traçons $L_{\text{rms}}(\tau)$ en fonction du temps d'expansion τ dans le guide magnétique 1D sur la figure 4.10.

Nous avons reporté la mesure effectuée en l'absence de potentiel aléatoire ($\gamma = 0$) et nous présentons l'expansion pour trois amplitude du potentiel ($\gamma=0.15, 0.23, 0.28$). Nous observons trois phases distinctes en présence de désordre. Initialement, le condensat s'étend comme en l'absence de potentiel aléatoire, ce qui confirme bien expérimentalement que nous nous sommes placés dans une situation où les atomes ne sont pas piégés à l'instant $\tau = 0$ de l'ouverture du guide magnétique. Ensuite, nous observons que la vitesse d'expansion ralentit en présence du potentiel aléatoire. Enfin, le condensat n'évolue plus à partir d'une certaine taille L_{rms}^f asymptotique : le nuage d'atomes est piégé dans le potentiel aléatoire. Les lignes en pointillés

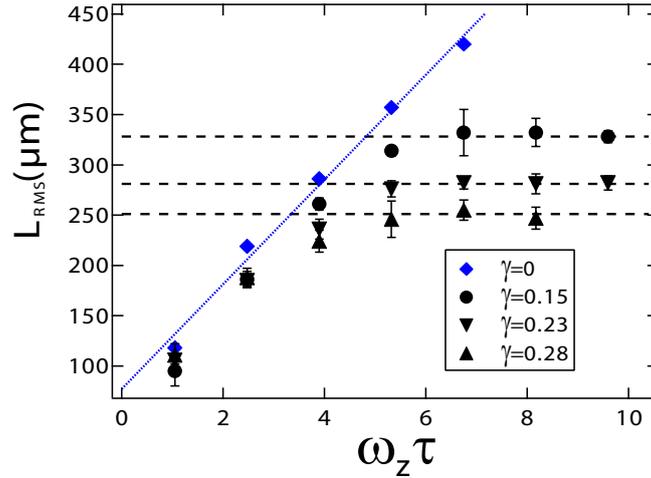


FIG. 4.10 – Evolution temporelle de la taille RMS L_{rms} du condensat en expansion dans un guide magnétique 1D en présence d'un potentiel aléatoire 1D d'amplitude $\gamma = \sigma_V / \mu_{\text{TF}}$. Les barres d'erreur représentent la déviation standard sur 5 réalisations du potentiel aléatoire.

présentes sur la figure 4.10 représentent les valeurs finales de la taille RMS L_{rms}^f du condensat lorsque ce dernier est piégé.

L'expansion non-perturbée aux temps très courts ($\omega_z \tau < 1.5$) suggère que le potentiel aléatoire n'a qu'un effet très faible au début de l'expansion, cette dernière étant alors dominée par les interactions. Cette remarque justifiera l'hypothèse aux courts temps d'expansion utilisée dans le modèle développé au paragraphe 4.3.

Chaque point de la figure 4.10 est obtenu en moyennant les résultats expérimentaux sur 5 réalisations du potentiel aléatoire. Les barres d'erreur représentent la déviation standard correspondante. Il faut noter que ces barres d'erreur statistiques ne sont pas plus grandes que les variations obtenues d'une expérience sur l'autre, sans changement de la réalisation du potentiel. Nous pouvons donc conclure que notre système expérimental est auto-moyennant dans la mesure où l'incertitude de mesure expérimentale dépasse la déviation standard statistique.

La taille RMS $L_{\text{rms}} = \sqrt{\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2}$ dépend de deux premiers moments du potentiel aléatoire (L_{rms} dépend de la déviation standard du potentiel σ_V). Avec notre dispositif expérimental, les déviations standard des deux moments du potentiel valent $\sigma_{m_1} \simeq 11\%$ $\sigma_{m_2} \simeq 8\%$. Elles sont inférieures à l'incertitude de mesure qui vaut 15 %. Cette propriété d'auto-moyennage nous permet d'observer la modification des propriétés de transport induite par le désordre (et non pas induite par une réalisation particulière) avec une seule expérience. C'est un avantage expérimental considérable qui nous évite de devoir effectuer une moyenne d'ensemble sur des expériences avec différentes réalisations du potentiel aléatoire.

Nous observons que la taille finale RMS L_{rms}^f dépend de l'amplitude du potentiel aléatoire. Plus l'amplitude γ du potentiel est grande et plus petite est la taille finale du condensat L_{rms}^f lorsqu'il est piégé. Nous avons mesuré la dépendance de la taille RMS finale L_{rms}^f avec l'amplitude γ du potentiel aléatoire. Nous présentons sur la figure 4.11 une mesure de la taille du

condensat après un temps d'expansion fixe $\omega_z\tau = 4.84$ pour différentes amplitudes γ du potentiel. Pour les amplitudes du potentiel aléatoire supérieures à $\gamma = 0.1$ le condensat est localisé à l'instant $\omega_z\tau = 4.84$ et la taille RMS du nuage correspond donc à la taille asymptotique (voir la figure 4.10).

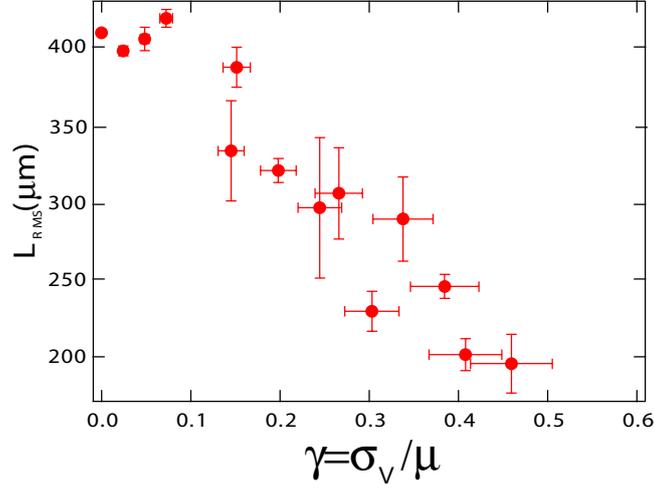


FIG. 4.11 – Longueur L_{rms} du condensat piégé dans un potentiel aléatoire d'amplitude γ après un temps fixe $\omega_z\tau = 4.84$ d'expansion dans le guide magnétique 1D.

Nous observons que la taille finale L_{rms}^f du condensat piégé dans le désordre décroît linéairement avec l'amplitude γ du potentiel aléatoire. Nous discuterons cette évolution avec le modèle de piégeage induit par le désordre au paragraphe 4.2.2.1.

Les images par absorption du condensat piégé en présence de désordre (figure 4.9) montrent que la densité au centre du condensat ne devient pas négligeable. Ce point est particulièrement important puisqu'il implique que les interactions, présentes dans le condensat initial, ne deviennent pas négligeables après l'expansion et le piégeage du nuage d'atomes. Les interactions pourraient donc jouer un rôle dans le piégeage du condensat (nous verrons que c'est bien le cas au paragraphe 4.2.2.1).

Afin de rendre plus quantitative cette constatation qualitative à partir des images d'absorption, nous traçons les profils longitudinaux $n_{2D}(x=0, z, \tau)$ du condensat en expansion⁶. La figure 4.12 permet de comparer l'évolution de ces profils longitudinaux en l'absence de potentiel aléatoire ($\gamma = 0$) à ceux de l'expansion en présence du désordre pour deux amplitudes différentes ($\gamma = 0.15$ et $\gamma = 0.3$). La courbe rouge en pointillés présente sur chaque graphe représente la densité du condensat initial avant l'expansion dans le guide magnétique 1D ($\tau = 0$). Il s'agit d'une parabole inversée puisque le condensat à $\tau = 0$ se trouve dans le régime de Thomas-Fermi dans un potentiel magnétique parabolique.

Au cours de l'expansion en l'absence de désordre ($\gamma = 0$), le profil du nuage demeure une parabole dont la taille $L_{\text{rms}}(\tau)$ s'accroît et la densité au centre $n_{2D}(x=0, z=0, \tau)$ décroît. Ce scénario est conforme, comme nous l'avons déjà souligné, aux théories de lois d'échelle [144, 145].

⁶La définition de ces profils longitudinaux a été discutée au paragraphe 3.3.3.3

En présence d'un potentiel aléatoire (4.12b et c), la forme du profil longitudinal change au cours de l'expansion et n'est plus une parabole inversée. Au bout d'un certain temps d'expansion, ce profil devient stationnaire : sa forme n'évolue plus. Le condensat est alors piégé et cela correspond au régime où la taille du nuage en expansion reste constante, égale à la taille finale L_{rms}^f . La forme du profil du condensat piégé possède deux caractéristiques particulières. Premièrement, les bords du nuage piégé où la densité reste non négligeable sont très abrupts. Deuxièmement, le densité de la région centrale définie par les deux bords abrupts que nous venons de mentionner est constante avec des modulations spatiales de faibles amplitudes. Le profil parabolique initial a complètement disparu.

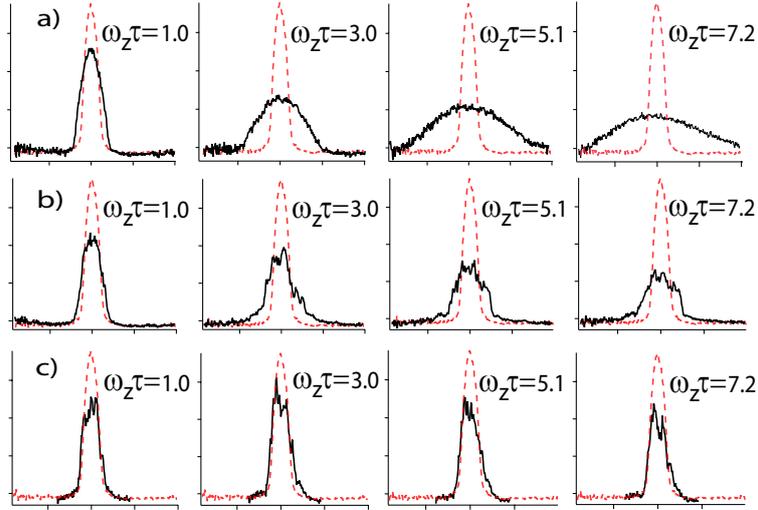


FIG. 4.12 – Profils longitudinaux du condensat en expansion après des temps d'expansion $\omega_z \tau = 1.0, 3.0, 5.1$ et 7.2 dans un potentiel aléatoire d'amplitude **a)** $\gamma=0$, **b)** $\gamma=0.15$ et **c)** $\gamma=0.3$. La ligne pointillée rouge correspond au profil du condensat dans le piège initial ($\tau = 0$) en l'absence de potentiel aléatoire.

La présence d'interaction est une caractéristique du phénomène de piégeage qui a lieu en présence du potentiel aléatoire dans les expériences que nous venons de décrire (voir 4.2.2.1). En particulier, la densité au centre du condensat localisé dans le désordre est du même ordre de grandeur que celle du condensat initial avant l'expansion. De plus, il apparaît clairement sur les profils longitudinaux de la figure 4.12 que la densité du nuage piégé n'a pas une forme exponentielle décroissante à partir de son maximum. Pour ces raisons, le phénomène de localisation en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif ne correspond pas à une localisation de l'onde de matière au sens d'Anderson [33, 35]. Il faut alors développer un modèle théorique prenant en compte l'effet des interactions pour décrire le phénomène de localisation observé dans ces expériences. C'est l'objet de la partie 4.2.2.1.

4.2.1.2 Inhibition du mouvement du centre de masse

La figure 4.13 montre l'évolution temporelle de la position du centre de masse du condensat en présence de désordre. Nous avons également reporté à titre de comparaison l'évolution

linéaire dans le guide magnétique en l'absence de potentiel aléatoire.

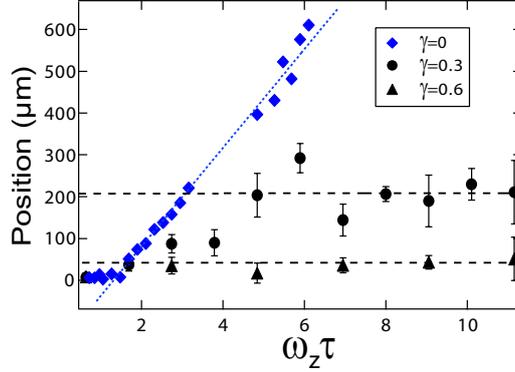


FIG. 4.13 – Evolution de la position du centre de masse du condensat dans le guide magnétique 1D pour différentes amplitudes γ du potentiel aléatoire. Les barres d'erreur représentent la déviation standard sur 5 réalisations du potentiel aléatoire.

Nous observons, de façon analogue à l'évolution de la taille RMS, une localisation du centre de masse de l'onde de matière après un certain temps passé dans le guide τ_{loc} similaire à celui de l'arrêt de l'expansion. La position finale du condensat lorsque le phénomène de localisation a lieu est d'autant plus proche de la position initiale que l'amplitude σ_V du potentiel aléatoire est grande. Le déplacement du condensat est donc d'autant plus faible que l'amplitude du potentiel aléatoire est grande.

4.2.2 Un régime de piégeage par des barrières *uniques* du potentiel aléatoire

Il s'agit de décrire le piégeage de l'onde de matière. Nous allons nous intéresser aux mécanismes qui peuvent conduire à la localisation d'un condensat de Bose-Einstein interagissant fortement dans un potentiel aléatoire.

4.2.2.1 Scénario de piégeage induit par le désordre

L'expansion d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire met en jeu trois énergies : l'énergie cinétique induite par les interactions lors de l'ouverture du piège longitudinal, l'énergie d'interaction dont nous avons vu à partir des images du nuage localisé qu'elle ne peut être négligé dans nos expériences, et enfin l'énergie potentielle associée au potentiel aléatoire. Le régime de piégeage du condensat va alors différer selon l'importance relative des énergies cinétique et d'interaction. En effet, comme nous allons le voir, dans les régions où l'énergie d'interaction est grande devant l'énergie cinétique (région centrale), le piégeage résulte de la compétition entre cette énergie d'interaction et l'énergie du potentiel aléatoire. Au contraire, dans les zones du nuage où l'énergie cinétique domine (ailes du condensat en expansion), le piégeage résulte de la compétition entre l'énergie cinétique et celle du potentiel aléatoire.

L'importance relative des contributions de l'énergie d'interaction et de l'énergie cinétique dépend de la densité atomique locale du nuage. Nous pouvons dès lors distinguer deux régions dans le condensat en expansion, la partie centrale où les interactions dominent et les ailes où ces dernières sont négligeables. Avant l'ouverture longitudinale du piège magnétique, l'énergie d'interaction est grande devant l'énergie cinétique : le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi. Lorsque l'ouverture est réalisée, l'énergie de piégeage est transférée sous forme d'énergie cinétique aux atomes⁷. Notons que ce transfert d'énergie est dû à la présence d'interaction répulsives dans le condensat. Au cours de l'expansion, les atomes ayant acquis une grande énergie cinétique se déplacent loin du centre initial du nuage. Ils peuplent alors ce que nous appellerons par la suite les "ailes" du condensat. La densité atomique dans les ailes est faible et l'énergie cinétique est grande devant l'énergie d'interaction dans cette zone du nuage.

Les atomes n'ayant pas acquis une grande énergie cinétique lors de l'ouverture se déplacent lentement par rapport à leur position initiale. Ils se déplacent alors dans la région initiale du condensat où la densité atomique est du même ordre de grandeur que celle du nuage initialement piégé. Ainsi, dans la partie centrale du condensat en expansion l'énergie d'interaction est grande devant l'énergie cinétique. En l'absence de potentiel aléatoire, nous observons en effet (voir figure 4.12a) par exemple) que la densité au centre du nuage chute lentement et que l'énergie d'interaction reste non négligeable.

Remarquons ici que nous ne pouvons pas expérimentalement observer de façon distincte les ailes du condensat en expansion car, d'une part, la densité atomique y est trop faible pour que notre système d'imagerie par absorption nous y donne accès et, d'autre part, parce que nous détectons dans cette zone extérieure au condensat initiale une (très) faible partie thermique.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous allons donc distinguer la partie centrale du condensat en expansion où le piégeage met en jeu l'énergie d'interaction et l'énergie du potentiel aléatoire, et les ailes du nuage où le piégeage résulte de la compétition entre l'énergie cinétique et celle du désordre.

Piégeage dans les ailes

Dans les ailes, l'énergie des atomes est essentiellement de nature cinétique et peut donc être mise sous la forme $E = \hbar^2 k^2 / 2m$. Le transport dans cette région du nuage correspond à celui d'un ensemble d'ondes planes dans un potentiel aléatoire. L'énergie typique de chaque atome étant égale au potentiel chimique initial $\mu = \hbar^2 / 2m\xi^2$ du condensat, le spectre d'impulsion dans les ailes est fin et centré autour de $k = 2/\xi$. Comme nous l'avons mentionné, nous n'avons expérimentalement pas accès à ces faibles densités atomiques. Cela étant, il est possible de vérifier l'assertion précédente à partir du calcul numérique du spectre d'impulsion des ailes d'un condensat en expansion. L'évolution temporelle d'un condensat en expansion a été déterminée à partir de la résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii 1D par L. Sanchez-Palencia [35]. La figure 4.14 montre que le spectre obtenu pour les ailes du condensat correspond bien à notre description. En particulier, l'ajustement de la longueur d'onde moyenne λ mesurée dans les ailes du condensat est tel que $\lambda/2\pi = \xi/2$.

⁷L'énergie cinétique $mv^2/2$ après l'ouverture se calcule à partir du gradient de phase $\theta = m\dot{b}(0)z^2/2\hbar b(0)$. Comme, $\dot{b}(0)/b(0) = \sqrt{2}\omega_z$ il vient $mv^2/2 = m\omega_z^2 z^2$.

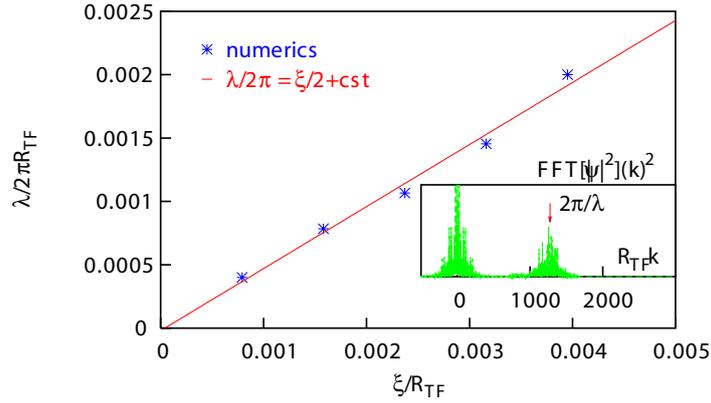


FIG. 4.14 – Longueur d’onde moyenne λ mesurée dans les ailes du condensat en expansion en fonction de la longueur de relaxation ξ . Les étoiles correspondent aux calculs numériques. Image insérée : exemple de spectre en impulsion obtenu sur le condensat.

Les atomes peuplant les ailes du condensat subissent des réflexions et transmissions multiples sur les modulations du potentiel aléatoire. Cela étant, le piégeage de ces particules sans interaction ne résulte pas d’une localisation au sens d’Anderson. En effet, le piégeage des ailes du condensat résulte d’une réflexion sur une *unique* grande et/ou large modulation du potentiel aléatoire. Cette analyse apparaît très clairement sur les simulations de l’expansion du condensat. Nous donnons un exemple du profil longitudinal obtenu lorsque le condensat est piégé dans le désordre sur la figure 4.15. Il y apparaît la présence d’une large modulation du potentiel aléatoire à l’abscisse où la densité dans les ailes chute brutalement.

Un potentiel optique de tavelures n’étant pas borné (voir le chapitre 2), il est possible de trouver de larges modulations dans une réalisation de ce potentiel⁸. Prenons une barrière d’amplitude $5V_R$. Pour $\gamma = 0.3$, l’amplitude de la barrière correspond à 1.5 fois l’énergie cinétique de l’onde sans interaction. De plus la taille typique de la barrière Δz est grande devant la longueur d’onde ξ . La barrière piège donc l’onde plane de vecteur d’onde $1/\xi$.

Nous exprimerons plus précisément la condition d’obtention d’un désordre ”faible” dans la partie 4.3.2, c’est-à-dire d’un potentiel pour lequel la transmission à travers une modulation est toujours proche de l’unité. Les réflexions sur une modulation *unique* du potentiel aléatoire masque également les effets de la localisation d’Anderson. Une condition nécessaire (mais pas forcément suffisante) est donc d’éviter de telles réflexions quasi-totales (voir 4.3).

Piégeage de la partie centrale du condensat

Pour être concrets, nous définissons arbitrairement la partie centrale du condensat comme une région de longueur égale à la demi-taille initiale du condensat et centrée en $z = 0$, soit $-L_{TF}/2 < z < L_{TF}/2$.

Au cours de l’expansion dans le guide magnétique 1D, la densité dans la partie centrale

⁸De grandes modulations d’amplitude typique $5V_R$ peuvent exister avec une probabilité non négligeable (voir le chapitre 2).

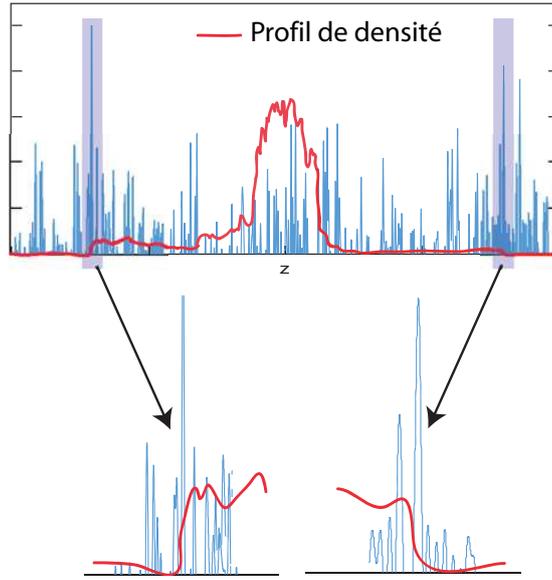


FIG. 4.15 – Profil d'un condensat piégé dans le potentiel aléatoire après un certain temps d'expansion. Ce profil est le résultat d'une résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii à une dimension. Il fait clairement apparaître la présence d'un grand pic du potentiel aléatoire là où la densité dans les ailes chute brutalement.

du condensat diminue lentement par rapport au temps d'ouverture du piège longitudinal (supposée instantanée). Il est donc possible de définir un potentiel chimique effectif quasi-statique $\mu_{\text{eff}}(\tau)$ pour cette partie centrale après un temps d'expansion τ . Le terme d'énergie cinétique est négligeable dans l'expression du potentiel chimique effectif $\mu_{\text{eff}}(\tau)$ de la partie centrale du condensat.

Remarquons qu'au cours de l'expansion l'énergie cinétique de la partie centrale est faible, l'évolution temporelle quasi-statique et la longueur de relaxation inférieure à la longueur de corrélation du potentiel aléatoire : l'approximation de Thomas-Fermi reste donc valide pour la partie centrale du condensat en expansion. Cela signifie en particulier que la densité de la partie centrale du condensat est modulée par le potentiel aléatoire. Nous définissons donc le potentiel chimique effectif $\mu_{\text{eff}}(\tau)$ en prenant la moyenne spatiale sur la partie centrale L_{TF} :

$$\mu_{\text{eff}}(\tau) = \frac{1}{L_{\text{TF}}} \int_{-L_{\text{TF}}/2}^{L_{\text{TF}}/2} dz [g n_{3\text{D}}(x=0, y=0, z, \tau) + V(z)] \quad (4.11)$$

Le terme de piégeage magnétique est négligé puisque l'ouverture est rapide devant le temps typique de l'expansion du nuage ($1/\omega_z$) et que le profil reste parabolique et suit les lois d'échelle.

Tout comme la densité atomique, le potentiel chimique effectif décroît lentement au cours de l'expansion. Ainsi, après un certain temps d'expansion, ce potentiel chimique $\mu_{\text{eff}}(\tau)$ devient inférieur à l'amplitude typique des modulations du potentiel aléatoire. La partie centrale du condensat est alors piégée classiquement dans le potentiel aléatoire, il s'agit d'une fragmentation du nuage atomique. Le critère pour le piégeage de la partie centrale de l'onde de matière est

l'existence de deux grandes modulations du potentiel aléatoire d'amplitude supérieure ou égale au potentiel chimique effectif μ_{eff} .

Afin d'alléger les notations et de simplifier la discussion, nous allons supposer que le potentiel aléatoire a une moyenne nulle : $\langle V \rangle = 0$. Le potentiel chimique effectif se réduit alors à $\mu(\tau) = \mu_{\text{eff}}(\tau) - \langle V \rangle$. Cette dernière égalité est exacte dans le cas d'un système auto-moyennant pour lequel $\frac{1}{L_{\text{TF}}} \int_{-L_{\text{TF}}/2}^{L_{\text{TF}}/2} dz V(z) = \langle V \rangle = 0$. Nous avons déjà discuté du très faible écart de notre système à un système auto-moyennant (paragraphe 2.3.4) et le potentiel effectif μ est donc une très bonne approximation dans le cas où nous supposons notre potentiel de moyenne nulle. Insistons sur le fait que cette renormalisation dans l'échelle d'énergie (telle que $\langle V \rangle = 0$) ne change rien à la physique de notre problème.

Dans notre potentiel aléatoire 1D, la condition de fragmentation du condensat 3D concerne la seule direction longitudinale Oz . Nous pouvons alors écrire cette condition de fragmentation à partir du potentiel chimique effectif $\mu(\tau)$, c'est-à-dire à partir de la densité atomique au centre ($r^2 = x^2 + y^2 = 0$). En effet, si le condensat fragmente en $r = 0$ selon l'axe longitudinal, il est fragmenté dans le plan xOy puisque la densité décroît selon la direction radiale lorsque r augmente. Et s'il n'est pas fragmenté au centre alors l'expansion continue et il n'y a pas de piégeage.

Le nombre de modulations du potentiel aléatoire supérieures au potentiel chimique sur la taille L_{TF} de la partie centrale du condensat s'écrit

$$N_{\text{pics}}(V \geq \mu(\tau)) = \sum_{L_{\text{TF}}} \left[1 - \int_0^{\mu(\tau)} dV P(V) \right] \quad (4.12)$$

où $P(V)$ est la probabilité d'avoir un pic d'amplitude V . Il vient alors avec une très bonne approximation

$$N_{\text{pics}}[V \geq \mu(\tau)] \simeq 0.94 \left(\frac{L_{\text{TF}}}{\Delta z} \right) \exp \left[-0.75 \frac{V}{\sigma_V} \right]. \quad (4.13)$$

La condition de fragmentation s'écrit alors simplement $N_{\text{pics}} = 2$. Elle permet de relier le potentiel chimique effectif final μ^f lorsque la partie centrale du condensat est piégé aux caractéristiques du potentiel aléatoire σ_V et Δz . Pour des faibles valeurs de l'amplitude du potentiel aléatoire $\gamma = \sigma_V/\mu_{\text{TF}}$ nous obtenons

$$\mu^f \simeq \frac{\mu_{\text{TF}}}{0.75} \gamma \ln \left(\frac{0.47 L_{\text{TF}}}{\Delta z} \right). \quad (4.14)$$

Cette condition de fragmentation reflète les propriétés statistiques des premier et second ordres puisque le logarithme vient de la distribution exponentielle d'intensité à un point d'un champ de tavelures et que la taille Δz est liée à l'auto-corrélation de ce champ de tavelures (voir le chapitre 2). Le potentiel chimique final μ^f est une fonction croissante de l'amplitude γ . La formule (4.14) est une caractéristique du scénario de localisation.

Cela étant, le potentiel chimique effectif $\mu(\tau)$ ne peut que décroître durant l'expansion. Par conséquent, il ne peut être supérieur à sa valeur initiale μ^i à l'instant $\tau = 0$ de l'ouverture,

$$\mu(\tau = 0) = \mu^i = \frac{g}{L_{\text{TF}}} \int_{-L_{\text{TF}}/2}^{L_{\text{TF}}/2} dz n_{3\text{D}}(0, 0, z) = \frac{11\mu_{\text{TF}}}{12} \simeq 0.92\mu_{\text{TF}}. \quad (4.15)$$

Nous pouvons également évaluer le temps typique d'expansion nécessaire pour obtenir la fragmentation du nuage dans le potentiel aléatoire. Après un temps d'expansion τ , le terme d'énergie potentielle associée au potentiel aléatoire est de l'ordre de $V_R \phi(\tau = 0) / \sqrt{b_z(\tau)}$ et le terme d'interaction de l'ordre de $g |\phi(\tau = 0)|^2 \phi(\tau = 0) / b_z^{3/2}(\tau)$ où $\phi(\tau = 0)$ est la fonction d'onde dans le piège initial. La fragmentation a lieu lorsque ces deux termes sont égaux, soit $b_z V_R \simeq g |\phi(\tau = 0)|^2$. Avec $b_z(\tau) \simeq \sqrt{2} \omega_z \tau$ et $g |\phi(\tau = 0)|^2 \simeq \mu_{TF}$, le temps d'expansion nécessaire à la fragmentation $\tau_{frag} \simeq \mu_{TF} / \sqrt{2} V_R \omega_z \simeq 300$ ms pour nos paramètres expérimentaux, temps qui correspond à nos mesures⁹.

Remarquons pour terminer que les simulations numériques de l'expansion à une dimension effectuées concordent parfaitement avec le scénario de localisation à la fois de la partie centrale du condensat et des ailes [35].

Le scénario de piégeage que nous venons de décrire met en évidence le rôle joué par de grandes modulations du potentiel aléatoire. En effet, la localisation des ailes du condensat en expansion a lieu lorsque la transmission à travers une barrière unique est très faible. La partie centrale de l'onde de matière est piégée lorsqu'une condition de fragmentation liée à l'énergie d'interaction est remplie. Ce modèle est donc très différent de celui à l'origine de la localisation d'Anderson où la transmission à travers les modulations du potentiel aléatoire est de l'ordre de l'unité et où les interactions ne sont pas présentes. Cette conclusion est également celles des groupes de Florence et de Hannovre. Le groupe de Florence a démontré expérimentalement que le piégeage du condensat en expansion a lieu en présence d'une barrière unique [154] et des simulations numériques menées dans le groupe de Hannovre ont mis en évidence la délocalisation du condensat due à la présence d'interactions [86].

Si le scénario du piégeage dans les ailes ne peut être vérifié dans nos expériences, nous pouvons au contraire comparer nos résultats expérimentaux au modèle que nous venons de décrire pour le piégeage de la partie centrale du condensat. C'est l'objet du paragraphe suivant.

4.2.2.2 Comparaison résultats expérimentaux/modèle

Afin de comparer nos résultats expérimentaux avec le modèle de piégeage dans le potentiel aléatoire du paragraphe précédent, nous devons extraire de nos données le potentiel chimique effectif $\mu(\tau)$ de la partie centrale du condensat. Rappelons que l'expérience donne accès à la densité 2D n_{2D} . Nous mesurons la densité moyenne sur les profils longitudinaux du condensat en moyennant spatialement la densité 2D sur la taille de la partie centrale :

$$\bar{n}_{2D}(\tau) = \frac{1}{L_{TF}} \int_{-L_{TF}/2}^{L_{TF}/2} dz n_{2D}(x = 0, z, \tau). \quad (4.16)$$

Le potentiel chimique effectif s'écrit alors (voir l'équation (3.24))

$$\mu(\tau) = \mu_{TF}^{1/3} \left(\frac{3g \bar{n}_{2D}(\tau)}{4R_{TF}} \right)^{2/3}, \quad (4.17)$$

et il peut être ainsi directement extrait des images par absorption qui nous donne la densité 2D, n_{2D} . Nous traçons sur la figure 4.16 l'évolution temporelle de la densité moyennée $\bar{n}_{2D}(\tau)$

⁹Il s'agit là seulement d'un ordre de grandeur du temps de piégeage et non d'une formulation analytique exacte.

au cours de l'expansion rapportée à la densité initiale $\bar{n}_{2D}^i = \bar{n}_{2D}(\tau = 0)$.

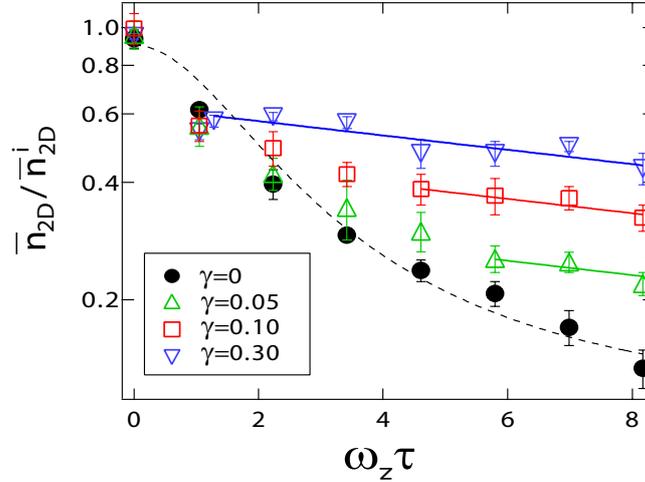


FIG. 4.16 – Evolution temporelle du rapport $\bar{n}_{2D}(\tau)/\bar{n}_{2D}^i$ entre la densité moyennée sur la partie centrale du condensat et sa valeur initiale lors de l'expansion dans le guide magnétique 1D pour différentes amplitudes du potentiel aléatoire $\gamma=0, 0.05, 0.10$ and 0.30 . La ligne en pointillés noirs correspond à l'évolution prédite par les lois d'échelle en l'absence de potentiel aléatoire ($\gamma = 0$). Lorsque le piégeage de la partie centrale du condensat a lieu, la décroissance de la densité moyenne est exponentielle et est ajustée par les droites en trait plein. L'apparition de cette décroissance exponentielle indique la densité finale \bar{n}_{2D}^f lorsque le piégeage induit par le désordre a lieu.

En l'absence de potentiel aléatoire, l'évolution est en très bon accord avec celle attendue d'après les lois d'échelle (ligne pointillée sur la figure 4.16). En présence du potentiel aléatoire, la densité moyenne $\bar{n}_{2D}(\tau)$ décroît plus lentement lors de l'expansion du nuage (cela vient de la présence de la rugosité sous le condensat). Lorsque la fragmentation du condensat a lieu, la densité moyenne de la partie centrale a atteint la valeur $\bar{n}_{2D}^f \sim \gamma \mu_{TF}/g$ [voir les équations (4.14-4.17)] où $\gamma = V_R/\mu_{TF}$ est l'amplitude du potentiel aléatoire. La densité \bar{n}_{2D} doit ensuite rester constante. Cependant, des processus conduisant à des pertes d'atomes comme des collisions ou de l'évaporation ont toujours lieu lors de nos expériences. Ainsi, la densité \bar{n}_{2D} continue de chuter au cours du temps avec une constante de temps liée à ces processus de perte. Nous observons expérimentalement (voir la figure 4.16) que l'évolution temporelle de la densité change à partir d'un certain temps τ_{frag} d'expansion dans le guide magnétique et sa décroissance devient exponentielle (l'échelle verticale est logarithmique). Ce changement dans la forme de l'évolution de $\bar{n}_{2D}(\tau)$ indique l'apparition du piégeage induit par le désordre. Le premier point des droites qui ajustent les données expérimentales avec une exponentielle sur la figure 4.16 définit alors le temps et la densité moyenne finale \bar{n}_{2D}^f lors de la fragmentation du nuage.

Pour une amplitude du potentiel aléatoire égale à $\gamma = 0.30$, la fragmentation a lieu à¹⁰ $\omega_z \tau = 0.5$. La décroissance temporelle observée à des temps plus long correspond donc à des

¹⁰Ce qui est confirmé par l'observation des profils longitudinaux (figure 4.12)

perles d'atomes et elle est ajustée avec une exponentielle $\exp(-\Gamma\tau)$. Nous obtenons $1/\Gamma \simeq 280$ ms. Nous avons utilisé la même constante de temps $1/\Gamma$ pour ajuster toutes les autres courbes de décroissance de la densité moyenne $\bar{n}_{2D}(\tau)$ et obtenir ainsi la densité finale \bar{n}_{2D}^f définie comme la densité à partir de laquelle l'ajustement exponentiel est correct. La différence entre la densité du premier point expérimental qui se trouve sur l'ajustement exponentiel et le point qui le précède dans le temps définit les barres d'erreur sur la densité finale \bar{n}_{2D}^f (voir la figure 4.17).

A partir de l'analyse précédente, nous extrayons le potentiel chimique final

$$\mu^f = \mu_{\text{TF}}^{1/3} \left(\frac{3g\bar{n}_{2D}^f}{4R_{\text{TF}}} \right)^{2/3}. \quad (4.18)$$

Nous traçons μ^f en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire sur la figure 4.17.

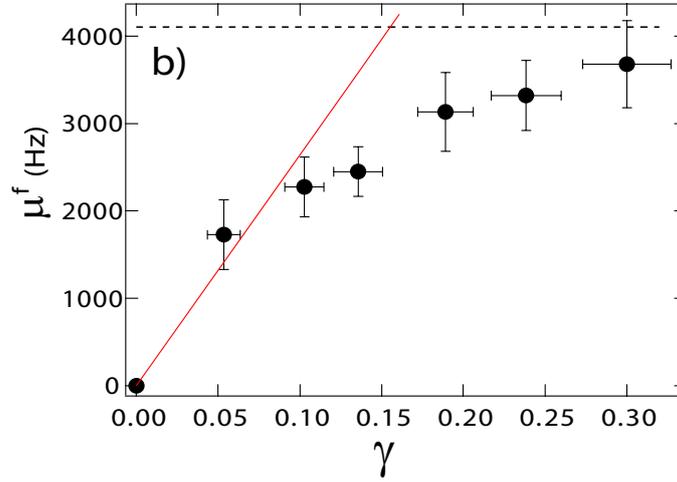


FIG. 4.17 – Potentiel chimique effectif final $\mu^f = \mu_{\text{TF}}^{1/3} \left(\frac{3g\bar{n}_{2D}^f}{4R_{\text{TF}}} \right)^{2/3}$ du condensat piégé en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire. Le trait en ligne plein rouge correspond à la pente prédite par l'équation (4.14). La ligne en traits pointillés noirs correspond à la valeur de saturation 0.92μ [Eq. (4.15)].

La comparaison du potentiel chimique effectif final μ^f lorsque le condensat est piégé avec l'amplitude γ du potentiel aléatoire permet de tester les équations (4.14-4.15). D'après l'équation (4.14), la pente de la fonction $\mu^f(\gamma)$ pour les faibles valeurs de γ reflète les statistiques à un point (distribution exponentielle d'intensité) et à deux points (longueur de corrélation Δz) et peut être calculée. Avec les paramètres de notre dispositif créant le champ de tavelures, nous obtenons $\mu^f \simeq 26.4(2) 10^3 \times \gamma$. Cette droite est tracée en trait rouge sur la figure 4.17. L'accord entre cette prédiction et nos données expérimentales est excellent.

Pour de larges amplitudes du potentiel aléatoire, le potentiel effectif final μ^f sature à une valeur qui correspond à celle prédite par l'équation (4.15) (cette prédiction apparaît en traits pointillés noirs sur la figure 4.17).

Enfin, nous aimerions insister ici sur la nécessité d'une calibration précise de l'amplitude γ du potentiel aléatoire réalisée à l'aide de la spectroscopie micro-onde (voir le paragraphe 2.4.2). En effet, sans cette calibration précise il nous serait impossible d'obtenir un tel accord entre les prédictions de notre modèle et nos résultats expérimentaux. Or, c'est précisément cet excellent accord qui permet de valider expérimentalement le modèle de piégeage induit par le désordre que nous avons décrit.

4.2.2.3 Expansion dans un potentiel quasi-1D

Le modèle de piégeage induit par un désordre 1D que nous venons de présenter dépend très fortement de la dimension du potentiel aléatoire. En effet, si le potentiel n'est pas strictement uni-dimensionnel, il est envisageable que des atomes puissent contourner les plus grandes modulations créées par les tavelures, modifiant ainsi le scénario précédent. Nous voulons dans cette partie présenter les résultats de l'expansion d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire quasi-1D et montrer dans quelle mesure le scénario du cas strictement uni-dimensionnel est modifié.

Dans la partie présentant le potentiel optique issu des tavelures, nous avons décrit deux dispositifs permettant de créer un champ de tavelures. Celui que nous avons utilisé (dispositif avec la plus grande ouverture numérique, voir 2.4.3) dans les expériences de localisation décrites jusqu'à présent a pour particularité d'engendrer un potentiel uni-dimensionnel pour le condensat ($\Delta x, \Delta y \gg R_{\text{TF}}$). Le second dispositif ayant une ouverture numérique plus petite crée un potentiel quasi-1D pour le condensat puisque nous avons une longueur de corrélation transverse $\Delta y \simeq 5.5 \mu\text{m}$ qui n'est pas significativement plus grande que la taille transverse du condensat $2 \times R_{\text{TF}} = 3 \mu\text{m}$.

L'observation des profils longitudinaux du condensat en expansion dans le potentiel quasi-1D met en évidence la formation d'ailes additionnelles au condensat. Ces ailes sont clairement visibles sur la figure 4.18a par comparaison à l'expansion dans le potentiel 1D sur la figure 4.18b. Ces ailes additionnelles que nous observons sont différentes des ailes dont nous parlons dans le scénario du piégeage induit par le désordre. En particulier, leur densité est grande (du même ordre de grandeur que la densité de la partie centrale du condensat) alors que celle des ailes du scénario est faible, rendant impossible l'observation expérimentale de ces dernières.

Afin de caractériser ces ailes additionnelles et d'exclure la possibilité qu'il s'agisse d'atomes thermiques, nous avons étudié l'expansion d'un nuage d'atomes mixte dont la fraction condensée est égale à 15%. Remarquons tout d'abord que la partie thermique d'un nuage mixte est présente dès les tous premiers temps d'expansion dans le guide magnétique alors que les ailes du condensat désordonné se forment au cours de l'expansion (voir la figure 4.18a).

Nous présentons sur la figure 4.19 une comparaison des ailes présentes avec un nuage mixte (a) et un condensat désordonné sans partie thermique (b). Nous effectuons un ajustement gaussien et parabolique dans ces deux cas. Il ressort de cette analyse que nous obtenons un très bon ajustement des ailes du nuage mixte (composées d'atomes thermiques) par une gaussienne. Dans le cas des ailes additionnelles présentes pour le condensat désordonné, l'ajustement est bien meilleur avec un parabole inversée.

Nous avons également comparé la vitesse d'expansion des ailes du nuage mixte avec celle

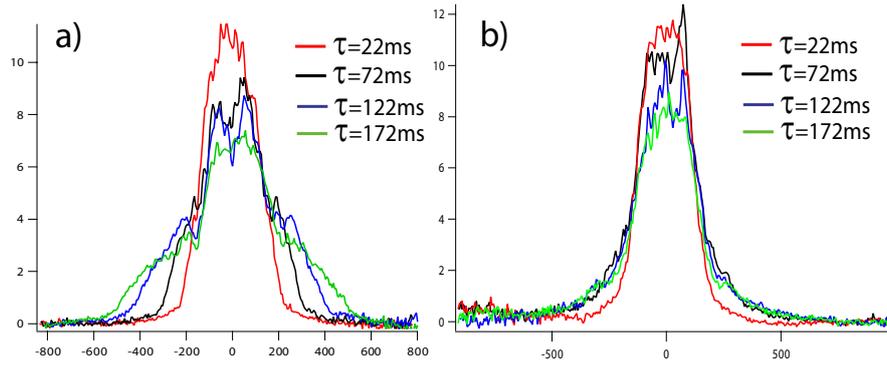


FIG. 4.18 – Profils de densité longitudinaux, moyennés sur 10 réalisations du potentiel aléatoire, après des temps d’expansion $\tau = 22, 72, 122$ et 172 ms en présence d’un potentiel aléatoire d’amplitude $\gamma = \sigma_V/\mu_{TF} = 0.3$ pour **a)** un potentiel quasi-1D ($\Delta y/R_{TF} \simeq 3.5$) et **b)** un potentiel 1D ($\Delta y/R_{TF} \simeq 36$). Sur la figure a), des “ailes” paraboliques sont clairement visible autour de la partie centrale et continuent de s’étendre après le piégeage de cette dernière.

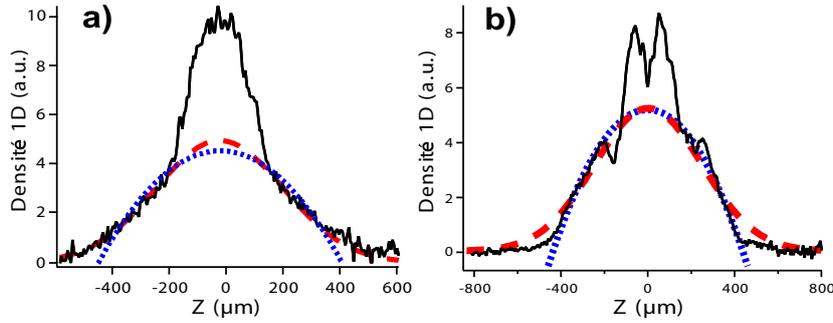


FIG. 4.19 – Ajustement de profils de densité 1D à partir d’une gaussienne (courbe en pointillés épais) et d’une parabole (courbe bleue en pointillés fins) : a) ailes lors de l’expansion d’un nuage mixte avec une fraction condensée de 15% ; b) ailes lors de l’expansion d’un condensat désordonné.

des ailes du condensat désordonné. Dans le cas de la partie thermique du nuage mixte, cette vitesse a été calculée en utilisant la demi-largeur à mi-hauteur de la gaussienne ajustant ces ailes à partir d’un ajustement double structure parabole+gaussienne du nuage mixte. La vitesse d’expansion dans le cas du condensat désordonné a été calculée en utilisant la demi-largeur à mi-hauteur de la parabole inversée qui ajuste au mieux les ailes additionnelles.

L’évolution de ces tailles est présentée sur la figure 4.20. La vitesse d’expansion des ailes thermiques du nuage mixte vaut $v_{th} = 11(2) \text{ mms}^{-1}$. Elle correspond bien à celle d’un nuage thermique à la température $T \simeq 600 \text{ mK}$ ¹¹ calculée en supposant l’équipartition de l’énergie $k_B T = mv^2/2$.

La vitesse d’expansion des ailes du condensat désordonné vaut $v_{Ailes\ BEC} = 3.6(1) \text{ mm.s}^{-1}$. Elle est donc très différente de celle des ailes thermiques du nuage mixte, même si leur com-

¹¹Cette température est mesurée à partir des tailles du nuage thermique après temps de vol.

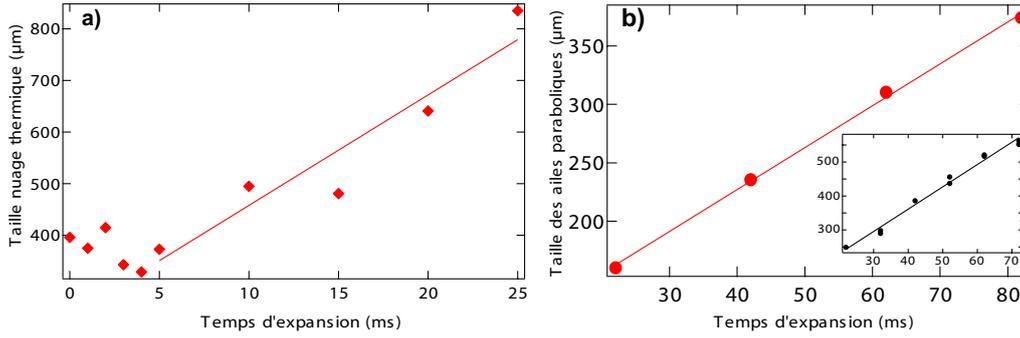


FIG. 4.20 – a) Evolution temporelle de la demi-largeur d'un nuage mixte. L'ajustement du profil des ailes se fait par une gaussienne. b) Evolution temporelle de la demi-largeur d'un condensat désordonné. L'ajustement du profil des ailes se fait par une parabole inversée. Image insérée : évolution temporelle de la demi-largeur d'un condensat pur en l'absence de potentiel aléatoire.

paraison directe est délicate puisqu'elles sont calculées à partir de deux tailles différentes (la demi-taille à mi-hauteur de la gaussienne et celle de la parabole inversée). Nous pouvons également comparer les facteurs d'échelle $L(\tau)/L(\tau = 0)$ dans les deux situations (ailes thermiques et ailes du condensat désordonné) puisque la forme des profils de densité est conservée. Nous obtenons un facteur d'échelle avec les ailes thermiques 1.5 plus grand que celui des ailes du condensat désordonné.

Remarquons que la vitesse des ailes paraboliques du condensat désordonné, $v_{Ailes\ BEC} = 3.6(1)\text{ mm.s}^{-1}$, correspond à une vitesse d'expansion de la base de la parabole égale à $v = 5.1(1)\text{ mm.s}^{-1}$. Elle est donc inférieure à celle d'un condensat en expansion dans le guide magnétique en l'absence de potentiel aléatoire, $v' = 6.4(2)\text{ mm.s}^{-1}$ (voir image insérée sur la figure 4.20b)¹². Ces ailes ressentent donc la rugosité du potentiel aléatoire.

Nous concluons ainsi, de la comparaison entre l'expansion d'un condensat pur et celle d'un nuage mixte dans un potentiel quasi-1D, que les ailes paraboliques qui se forment au cours de l'expansion du condensat pur ne correspondent pas à une partie thermique. Il s'agit donc bien d'atomes condensés qui peuvent "contourner" les modulations du potentiel puisque ce dernier n'est pas strictement uni-dimensionnel. Les atomes condensés qui continuent à s'étendre dans le potentiel quasi-1D ne sont pas décrit par notre scénario de piégeage dans un potentiel 1D puisqu'ils devraient être piégés au regard de leur potentiel chimique effectif.

La mesure de la taille RMS, L , de l'expansion d'un condensat dans un potentiel aléatoire quasi-1D fait apparaître la suppression du transport puisqu'elle sature après un certain temps d'expansion [35]. Cependant, les ailes paraboliques peuvent continuer à s'étendre après que la partie centrale du condensat soit piégée. Ainsi, la longueur finale du condensat ainsi que le temps à partir duquel apparaît le piégeage induit par le désordre peuvent être modifiés par rapport à ceux du phénomène de localisation dans un potentiel 1D.

¹²Cette vitesse du condensat en l'absence de désordre correspond également bien à celle que nous aurions pu calculer à partir de la vitesse RMS, $v' = \sqrt{6}v_{\text{rms}}$.

4.2.3 Piégeage dans le désordre et piégeage dans un réseau optique

Nous avons discuté jusqu'à présent le piégeage d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions induit par un potentiel aléatoire. Le caractère aléatoire du potentiel utilisé est reflété dans la seule équation qui donne le potentiel chimique effectif final [Eq. (4.14)] où les statistiques à un point et à deux points du potentiel aléatoire apparaissent. Cependant, le scénario de piégeage que nous avons proposé peut être également appliqué au cas d'un potentiel optique périodique¹³. Nous voulons ici comparer cette situation du potentiel périodique avec celle du potentiel aléatoire.

Nous allons considérer dans un premier temps un potentiel périodique dont l'amplitude est inférieure au potentiel chimique du condensat (situation similaire aux conditions expérimentales avec le désordre). Dans un deuxième temps, nous discuterons rapidement des résultats expérimentaux obtenus récemment dans le groupe de M. Oberthaler [156] où les profils de densité du condensat ainsi que le comportement de la taille du condensat en expansion montrent des similitudes apparentes avec nos résultats expérimentaux. Dans cette expérience réalisée à Heidelberg, le réseau optique est très profond (et non pas perturbatif). Nous verrons que la physique sous-jacente à l'arrêt de l'expansion du condensat avec interactions dans ce second cas est très différente de celle inhérente au scénario de piégeage induit par le désordre.

Réseau optique perturbatif

Une expérience d'expansion 1D d'un condensat dans un réseau optique d'amplitude V_0 inférieure au potentiel chimique initial du condensat ne doit pas conduire à une suppression du transport. Ou du moins, nous ne l'attendons pas. En effet, avec une image de transmission des atomes entre les différents sites du réseau, le couplage entre sites adjacents est constant sur tout le réseau et un phénomène de localisation n'est pas attendu. C'est ce qui se passe dans les ailes d'un condensat en expansion dans un réseau où l'énergie cinétique des atomes est supérieure à l'amplitude des modulations du potentiel.

Cela étant, cette image, vraie en l'absence d'interactions, est modifiée par la présence de ces dernières. En particulier, la partie centrale du nuage devient piégée après un certain temps d'expansion pour les mêmes raisons que celles qui conduisent au piégeage dans un potentiel aléatoire (voir 4.2.2.1) : lorsque le potentiel chimique effectif lié à la présence des interactions est égal à l'amplitude du réseau optique, l'expansion de la partie centrale est supprimée. Pour un réseau optique avec des condensats identiques à ceux de nos expériences, cette condition s'écrit $\mu^f = V_0 \simeq 4.6 \cdot 10^3 \times \gamma_0$ où $\gamma_0 = V/\mu_{TF}$. La pente de cette relation linéaire entre μ^f et γ_0 est très différente de celle obtenue pour un potentiel aléatoire [Eq. (4.14)]. En particulier, cette dépendance linéaire est indépendante de la périodicité spatiale du réseau (dans le régime où la longueur de relaxation est petite devant cette dernière), au contraire de l'équation (4.14) pour le potentiel aléatoire qui fait intervenir la longueur de corrélation Δz .

L'observation expérimentale de l'expansion dans un réseau perturbatif devraient cependant être similaire à celle de nos expériences dans un potentiel de tavelures. En effet, en supposant que la seule partie centrale du condensat est détectable, le nuage va apparaître piégé après un temps d'expansion dans le guide 1D. La différence entre le potentiel ordonné et le potentiel désordonné viendra alors des temps caractéristiques du piégeage et de la relation entre potentiel

¹³Il s'agit d'un réseau optique créé par deux ondes lumineuses contra-propageantes.

chimique effectif final (μ^f) et amplitude du potentiel (γ_0 ou γ).

Expériences de Heidelberg : "self-trapping"

Une expérience de transport d'une onde de matière dans un réseau optique profond a été réalisée dans le groupe de M. Oberthaler à Heidelberg [156]. L'observation de l'expansion d'un condensat dans ce réseau optique a conduit à l'observation d'une suppression du transport en présence d'un nombre d'atomes suffisant (5000 dans l'expérience). La figure 4.21 tirée du papier de Anker *et al.* [156] met en évidence la suppression du transport à partir de la mesure de la taille RMS du condensat en expansion (points expérimentaux ronds sur la figure 4.21). Sur cette figure apparaît également le profil de densité du condensat piégé. La forme du profil de densité du condensat piégé, la saturation de la l'évolution temporelle de la taille RMS du condensat en expansion et la nécessité de la présence d'interactions rappellent fortement les résultats expérimentaux que nous avons obtenus dans un potentiel aléatoire. Cependant, l'analogie s'arrête à ces quelques points de comparaison. Notons également que la même physique est prédite dans un potentiel quasi-périodique [157].

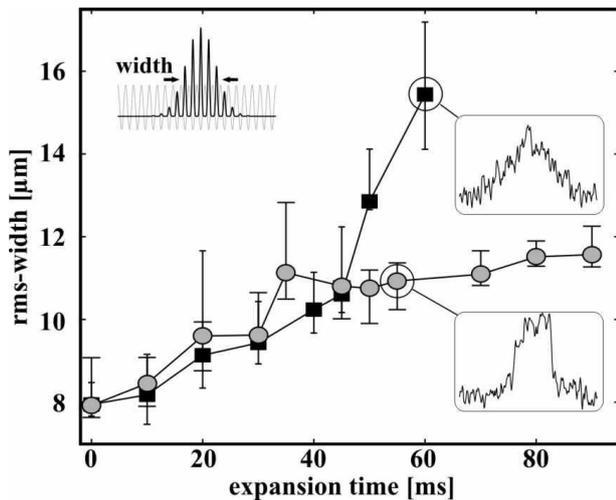


FIG. 4.21 – [Figure du papier *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 020403 (2005)] Evolution de la taille RMS d'un condensat dans un réseau optique profond pour deux nombres d'atomes initiaux dans le condensat (carrés : 2000 atomes; ronds : 5000 atomes). Images insérées : profils longitudinaux du condensat après un temps d'expansion d'environ 60 ms.

Dans un réseau profond¹⁴, un condensat de Bose-Einstein est formé d'ondes de matière localisées au fond de chaque puits et il peut être décrit par une série de jonctions de Josephson [158, 159]. L'état initial du condensat avant l'expansion relève donc d'une physique complètement différente de celle d'un condensat délocalisé sur un potentiel perturbatif.

Dans une série de jonctions Josephson, les transitions par effet tunnel d'un puits à l'autre du réseau dépend fortement des effets non-linéaires. En particulier, dans un gaz d'atomes avec des interactions répulsives, l'échange de particule entre deux sites adjacents du réseau est supprimé lorsque la différence du nombre d'atomes entre ces deux puits est suffisamment élevée. C'est le paradigme de la jonction Josephson : il existe un gradient de densité critique entre deux puits adjacents au-delà duquel les transitions par effet tunnel sont supprimées [160]. Lors de

¹⁴Dans le cas de l'expérience [156], l'amplitude du réseau optique est égale à 10 fois l'énergie de recul et chaque puits du réseau est peuplé d'une centaine d'atomes.

l'ouverture du piège confinant, le condensat commence par s'étendre, ce qui signifie que le gradient de densité provenant du profil initial du condensat n'est pas suffisant au bord du nuage pour bloquer les transitions par effet tunnel. Au cours de l'expansion, des atomes s'accumulent sur les bords du condensat et, si le nombre d'atomes est suffisant, le gradient de densité critique entre deux puits adjacents est atteint : la transition par effet tunnel est drastiquement réduite et les atomes sont piégés. L'arrêt de l'expansion d'une onde de matière dans un réseau profond n'a donc rien à voir avec le scénario de piégeage induit par le désordre que nous avons présenté.

4.3 Un autre régime de piégeage dans le désordre : la localisation d'Anderson

Les expériences que nous avons décrites au paragraphe précédent mettent en évidence une suppression du transport de l'onde de matière en présence de désordre. Cependant, comme nous l'avons expliqué, ce phénomène de localisation est tout à fait différent du phénomène de localisation d'Anderson. Cette différence tient au fait que la localisation de l'onde de matière dans ces expériences, à la fois dans la partie centrale et dans les ailes de l'onde, vient de réflexions sur une barrière *unique*. La présence d'interactions dans notre système qui demeurent non négligeables même lorsque l'onde de matière est localisée est responsable du piégeage de la partie centrale du condensat. Ce scénario est très différent de celui proposé par Anderson [4] qui traitait initialement le problème d'un gaz idéal. Ici, nous nous posons la question de l'observation d'un autre régime de localisation où les interactions deviendraient négligeables et le scénario proposé par Anderson possible.

Il existe deux techniques expérimentales permettant de réduire les interactions en champ moyen dans un condensat de Bose-Einstein. Le terme d'interaction s'écrit $gn(\vec{r})$ où g est la constante de couplage de l'interaction et $n(\vec{r})$ la densité atomique du condensat. Ces deux techniques dont nous parlons consistent à changer respectivement le premier terme, la constante de couplage g , ou le second terme, la densité $n(\vec{r})$, dans le terme d'interaction. La première technique est appelée résonance de Feshbach et consiste à utiliser un champ magnétique pour contrôler la longueur de diffusion a_0 dans le nuage. Changer cette longueur de diffusion change le terme de couplage de l'interaction $g = 4\pi\hbar a_0/m$ et par là même l'importance des interactions dans le condensat atomique. Nous ne disposons pas de résonance de Feshbach sur notre expérience et il faut noter que les atomes de Rubidium 87 ne sont pas de bons candidats sur lesquels effectuer de telles résonances¹⁵. La seconde technique consiste à diluer suffisamment le condensat de Bose-Einstein en le laissant s'étendre spatialement pour diminuer la densité et ainsi diminuer l'importance des interactions. Notons que, pour nous trouver dans une situation différente de celle décrite au paragraphe précédent, il faudra alors éviter le phénomène de piégeage par des modulations *uniques* du potentiel aléatoire, piégeage qui ne permet pas de réduire suffisamment les interactions pour les rendre négligeables.

Nous décrivons dans ce paragraphe une approche théorique envisageant une expérience d'expansion d'un condensat de Bose-Einstein où les interactions, initialement présentes dans le piège, deviennent par la suite négligeable au cours de l'expansion [36]. Nous montrons qu'un

¹⁵Les résonances dans le Rubidium 87 apparaissent à de forts champs magnétiques (typ. 1000 Gauss) et sont très étroites.

phénomène de localisation au sens d'Anderson peut alors apparaître et nous calculons le profil de densité du condensat localisé et la longueur de localisation. Enfin, nous décrivons les paramètres expérimentaux à mettre en oeuvre afin d'observer ce phénomène.

4.3.1 Localisation d'onde au sens d'Anderson et exposant de Lyapunov

Le phénomène de localisation d'une onde sans interactions dû à la présence de désordre a été proposé pour la première fois à la fin des années 50 par P.W. Anderson [4]. Dans ces tout premiers travaux, Anderson décrit la possible absence de diffusion d'électrons dans une région finie d'un cristal contenant des impuretés distribuées aléatoirement. Il montre en particulier que ce phénomène de localisation est dû à la présence de désordre dans le système¹⁶. La localisation au sens d'Anderson résulte d'interférences destructives entre les ondes multiples diffusées par la structure du désordre (ou, dit autrement, d'interférences entre les différents chemins que peut suivre l'électron qui diffuse sur un réseau désordonné). Il s'agit donc d'un phénomène ondulatoire qui apparaît dans la matière lorsque la nature quantique de cette dernière devient prépondérante. Cela étant, si le phénomène de la localisation d'Anderson a été initialement développé pour une onde électronique (quantique) [4] et ses conséquences observé [57, 58], des phénomènes de localisation dû à la présence de désordre ont également été observés avec des ondes électro-magnétiques (classiques) [5–8, 161] et des ondes acoustiques (classiques) [12].

Le phénomène de localisation d'Anderson peut avoir lieu dans une situation où l'amplitude du potentiel aléatoire est faible devant l'énergie typique de l'onde. Supposons que nous travaillons avec des particules classiques (c'est à dire de caractère corpusculaire) et que le potentiel aléatoire perturbatif soit conservatif et composé de barrières de potentiel. Dans cette situation de faible potentiel aléatoire, l'énergie de la particule classique est supérieure à l'amplitude des barrières : la particule passe au dessus du désordre sans que sa diffusion soit supprimée. Supposons maintenant que la particule soit quantique. Son caractère ondulatoire implique des réflexions multiples sur les barrières du potentiel aléatoire qui peuvent conduire à la localisation de la particule. La réalisation d'une expérience de localisation au sens d'Anderson devient alors particulièrement excitante lorsqu'elle est réalisée avec ce qu'il est classiquement considéré comme des corpuscules (des atomes de Rubidium par exemple). Cette situation est une manifestation "magique" du caractère ondulatoire (quantique) de la matière.

Dans un premier temps, nous allons décrire plus en détail que nous ne l'avons fait au chapitre 1 le phénomène de localisation d'Anderson. Il s'agit, pour le moment, de traiter le cas général d'une onde plane de vecteur d'onde k et nous ne faisons pas forcément référence à un condensat de Bose-Einstein gazeux. Nous ne discuterons pas l'existence d'états fondamentaux localisés au sens d'Anderson dans le potentiel aléatoire en étudiant les états propres d'un système fermé. Nous présentons cependant la forme d'un tel état localisé au sens d'Anderson sur la figure 4.22a). Cette image, qui fait notamment apparaître le profil exponentiel de l'onde localisée, nous permet de discuter le processus du transport d'une onde plane sans interaction à travers un milieu diffusant aléatoire.

¹⁶Rappelons que cette description a été élaborée afin prendre en compte l'effet du désordre dans la transition conducteur électrique-isolant.

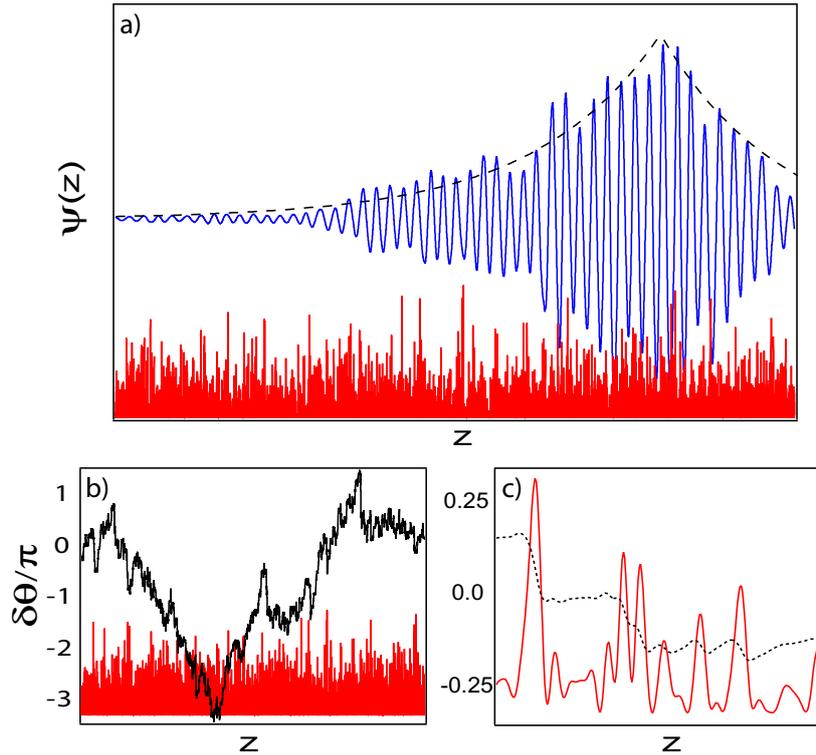


FIG. 4.22 – **a)** Onde plane de vecteur d'onde k localisée au sens d'Anderson (trait plein bleu) dans un potentiel aléatoire de faible longueur de corrélation (trait plein rouge). La décroissance de l'enveloppe est ajustée par une fonction exponentielle (traits noirs pointillés). **b)** Variation de la phase autour de la valeur moyenne de l'onde plane $\delta\theta(z) = \theta(z) - kz$ (trait plein noir) dans le potentiel aléatoire (trait plein rouge). **c)** Image agrandie de l'image b) : les modulations du potentiel aléatoire (trait plein rouge) induisent les variations spatiales de la phase $\theta(z) - kz$ (pointillés noirs).

Nous allons ainsi esquisser une image dynamique de la localisation d'Anderson : celle de la localisation d'une onde plane de vecteur d'onde k se propageant sur un potentiel aléatoire perturbatif¹⁷. Le potentiel aléatoire est supposé de très faible amplitude devant l'énergie de l'onde et de longueur de corrélation petite devant la longueur d'onde $2\pi/k$. La réflexion de l'onde plane sur chaque modulation du potentiel est alors faible et l'amplitude $\psi(z)$ de l'onde après chaque modulation est très légèrement inférieure à l'amplitude avant la modulation (autrement dit la transmission de l'onde est proche de l'unité). De même, la phase $\theta(z)$ de l'onde plane va être peu modifiée par les modulations du potentiel aléatoire : l'écart $\delta\theta$ de la phase à celle d'une onde plane dans l'espace libre, $\delta\theta(z) = \theta(z) - kz$, va subir des sauts de phase faibles devant 2π sur chacune des modulations du potentiel aléatoire (voir figure 4.22).

Les faibles réflexions multiples subie par l'onde par chacune des modulations du potentiel aléatoire peuvent interférer. Le caractère aléatoire de chacune de ses réflexions multiples engendre des interférences destructives qui induisent une diminution (faible) de l'amplitude de l'onde lors de la transmission à travers chacune des modulations du potentiel aléatoire. Dans

¹⁷Cette image dynamique est inspirée du formalisme de phase que nous appliquerons au paragraphe suivant.

cette image, l'état localisé de l'onde se "construit" donc en quelque sorte au cours de la diffusion sur les modulations du potentiel aléatoire et la fonction d'onde localisée est caractérisée par une enveloppe qui décroît spatialement à partir du centre de la localisation. Nous pouvons définir la longueur caractéristique de décroissance de l'enveloppe, $L_{\text{loc}}(k)$, que nous appellerons longueur de localisation. Notons que la construction de cette enveloppe décroissante à partir de nombreuses modulations du potentiel aléatoire implique que $L_{\text{loc}}(k) \gg \Delta z$. La variation de l'enveloppe $r(z)$ de l'onde sur une distance de l'ordre de la taille de corrélation Δz du potentiel est donc très faible. Or, en anticipant quelque peu sur le paragraphe suivant, le formalisme de phase permet alors d'écrire une équation sur l'enveloppe du type [voir Eq(4.26)]

$$\partial_z r(z) = f(z, k) r(z) \quad (4.19)$$

où la fonction f varie spatialement sur une échelle de l'ordre de la longueur d'onde λ . Nous pouvons alors remarquer que l'échelle spatiale $L_{\text{loc}}(k)$ sur laquelle varie l'enveloppe $r(z)$ de l'onde est très grande devant λ . La valeur prise par la fonction f aux différents points de l'espace est donc faible. De plus, comme, $\lambda \ll \Delta z$, nous pouvons supposer que la valeur moyenne de f sur une échelle spatiale égale à Δz est indépendante du point de l'espace z (nous supposons ainsi que la diminution de l'enveloppe est spatialement homogène). Nous pouvons alors écrire une variation linéaire de $r(z)$ sur cette échelle Δz ,

$$r(z + \Delta z) = r(z) - dr(z) = r(z) \left(1 - \frac{\Delta z}{L_{\text{loc}}} \right) \quad (4.20)$$

qui donne lieu à un profil d'enveloppe exponentiel. A une distance du centre de localisation grande devant la longueur de corrélation du potentiel aléatoire, il vient alors $r(z) \propto \exp[-z/L_{\text{loc}}(k)]$. Une fonction d'onde localisée au sens d'Anderson apparaît sur la figure 4.22a) : la phase de l'onde est à peu près égale à kz puisqu'on voit toujours des oscillations périodiques et l'enveloppe décroît exponentiellement comme le montre l'ajustement avec une fonction exponentielle. Les variations spatiales de la phase $\delta\theta$ sur chaque modulation apparaît clairement sur la figure 4.22c). Remarquons également que la variation de la phase $\delta\theta$ sur un grand nombre de modulation peut conduire à des variations importantes de cette dernière comme le montre la figure 4.22b). La localisation de l'onde au sens d'Anderson résulte ainsi des interférences multiples destructives engendrées par le désordre.

La décroissance exponentielle de la fonction d'onde localisée au sens d'Anderson [voir figure 4.22a)] est très certainement la caractéristique la plus connue de ce phénomène. Cela étant, si l'image de la localisation avec laquelle nous travaillons nous a conduit à ce type de décroissance pour l'enveloppe, nous verrons dans le paragraphe suivant qu'il faut apporter des corrections à ce comportement spatial de l'onde localisée [44, 45].

Pour une fonction d'onde étendue (non localisée), la longueur de localisation L_{loc} est infinie (c'est le cas pour une onde plane en l'absence de potentiel aléatoire). Il est alors plus commode de définir un coefficient $\gamma(k)$ égal à l'inverse de cette longueur de localisation $L_{\text{loc}}(k)$. Ce coefficient $\gamma(k)$ est appelé exposant de Lyapunov. Dans le cas d'une onde non localisée, le exposant de Lyapunov est nul, $\gamma(k) = 0$. Si la longueur de localisation est finie, $\gamma(k)$ est différent de zéro. $\gamma(k)$ est défini par le comportement asymptotique de l'enveloppe de la fonction d'onde localisée tel que [69],

$$\gamma(k) = -\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\log [r(z)]}{|z|} \right\rangle. \quad (4.21)$$

Remarquons que nous prenons la moyenne sur les réalisations du potentiel aléatoire afin que le exposant de Lyapunov ait un sens statistique et reflète les propriétés statistiques du potentiel aléatoire.

Nous allons maintenant décrire le formalisme de phase qui nous permet d'appréhender le phénomène de localisation d'Anderson de particules libres. En particulier, l'exposant de Lyapunov de la localisation d'Anderson est calculé et sa dépendance avec les différents paramètres du potentiel aléatoire est discutée.

4.3.2 Formalisme de phase pour le calcul de l'exposant de Lyapunov

L'utilisation du formalisme de phase dans le problème de la localisation d'Anderson est guidée par le résultat attendu sur la forme de la fonction d'onde localisée (figure 4.22). Il faut noter que nous traitons ici le cas d'ondes à 1D. Dans l'image que nous avons donné de la localisation d'Anderson, nous pouvons extraire deux caractéristiques particulières. D'une part, l'enveloppe de la fonction localisée décroît exponentiellement sur des distances de l'ordre de la longueur de localisation L_{loc} grandes devant la longueur de corrélation du potentiel aléatoire. D'autre part, sur chaque modulation du potentiel aléatoire la phase de l'onde varie peu autour de sa valeur $\theta_0 = kz$. Ainsi, la phase de l'onde plane non perturbée θ_0 varie spatialement sur une échelle égale à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et les faibles perturbations induites par le potentiel aléatoire $\delta\theta$ ajoutent des variations sur une échelle de l'ordre de Δz .

Ces deux comportements très différents pour l'enveloppe et la phase de l'onde qui doit localiser dans le désordre conduit naturellement à écrire les équations sur la fonction d'onde et sa dérivée comme une équation sur l'enveloppe et une équation sur la phase de l'onde. Nous introduisons donc deux nouvelles fonctions, $r(z)$ et $\theta(z)$, à partir de la fonction d'onde et de sa dérivée¹⁸, $\psi_k(z)$ et $\partial_z\psi_k(z)$:

$$\psi_k(z) = r(z) \sin[\theta(z)] \quad (4.22)$$

$$\partial_z\psi_k(z) = k r(z) \cos[\theta(z)]. \quad (4.23)$$

La fonction $r(z)$ décrit l'enveloppe de la fonction d'onde. La fonction $\theta(z)$ décrit la phase de l'onde. La présence du vecteur d'onde k dans l'équation sur la dérivée $\partial_z\psi_k(z)$ permet simplement un calcul plus facile par la suite.

On traite l'équation de Schrödinger à une dimension de particules sans interaction :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + V(z) \right) \psi(z) = E\psi(z). \quad (4.24)$$

où $E = \hbar^2 k^2 / 2m$.

Avec l'équation (4.23), il vient $\psi'(z)/\psi(z) = k \cotan[\theta(z)]$ et avec l'équation de Schrödinger précédente $\psi''(z)/\psi(z) = 2m/\hbar^2 (V(z)/E - 1)$. L'équation sur la phase $\theta(z)$ s'écrit

¹⁸Il s'agit ni plus ni moins d'une définition sans aucune approximation, ce changement de fonctions pouvant toujours être écrit.

$$\partial_z \theta(z) = k - \frac{kV(z)}{E} \sin^2[\theta(z)]. \quad (4.25)$$

Cette équation autonome sur la phase [indépendante de l'enveloppe $r(z)$] est le point central du formalisme de phase. En effet, cette équation rend possible l'écriture d'un développement perturbatif sur la phase sans faire d'approximation sur les variations de l'enveloppe. Il est également possible d'écrire une équation d'évolution de l'enveloppe $r(z)$ en remarquant que $r^2(z) = \psi^2(z) + \psi'^2/k^2$,

$$\partial_z r(z) = \left(\frac{kV(z)}{2E} \right) \sin[2\theta(z)] r(z). \quad (4.26)$$

L'exposant de Lyapunov défini à l'équation (4.21) s'écrit alors dans le formalisme de phase

$$\gamma(k) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left\langle \frac{k}{2zE} \int_0^z dz' V(z') \sin[2\theta(z')] \right\rangle \quad (4.27)$$

L'équation (4.25) permet de faire un développement perturbatif de la phase $\theta(z)$ autour de sa valeur en l'absence de potentiel aléatoire¹⁹ $V(z)$, $\theta_0(z) = kz$. Notons que ce développement perturbatif nous renvoie à l'image que nous avons donnée de la localisation d'Anderson : sur chaque modulation du potentiel, la phase $\theta(z) = \theta_0(z) + \delta\theta(z)$ est peu modifiée et $\delta\theta(z)$ est un petit paramètre. La validité de cette approche perturbative nécessite que la phase accumulée sur l'échelle spatiale de variation du désordre soit petite devant 2π . En utilisant l'équation sur la dérivée spatiale de la phase θ , la condition de validité de cette approche perturbative s'écrit

$$\int_{\Delta z} dz' V(z') \sin^2[kz'] \sim \int_{\Delta z} dz' V(z') \ll 2\pi \frac{\hbar^2 k}{2m}. \quad (4.28)$$

Dans notre mémoire, un potentiel aléatoire qui satisfait cette condition de validité de l'approche du formalisme de phase sera qualifié de *faible*. Dans ce régime de faible potentiel, une modulation de trop grande amplitude ou de trop large qui conduirait à une transmission petite devant l'unité ne peut exister. Un potentiel aléatoire satisfaisant ces conditions est donc très différent de celui de la partie 4.2.2 où une large barrière unique pouvait influencer fortement la propagation des ailes du condensat en expansion.

De plus, la décroissance exponentielle de l'enveloppe de la fonction d'onde résulte des multiples variations de la phase sur les modulations du potentiel aléatoire. Nous avons donc un régime où la localisation n'a pas lieu à cause de la présence d'une modulation unique du potentiel aléatoire mais grâce aux réflexions sur un grand nombre de modulations du potentiel. Ce régime de diffusion est donc différent du régime décrit dans la partie 4.2.2.

Il faut ajouter une seconde condition de validité, que nous avons déjà mentionnée, à savoir que la longueur de localisation trouvée soit plus grande que la longueur d'onde de l'onde plane qui doit localiser. Cette seconde condition peut se mettre sous la forme

$$\gamma(k) \ll k. \quad (4.29)$$

¹⁹ $\theta_0(z)$ est la phase d'une onde plane de vecteur d'onde k .

Un développement au premier ordre de la phase dans l'équation (4.23) de l'exposant de Lyapunov obtenue par le formalisme de phase permet d'explicitier $\gamma(k)$. Au premier ordre en $V(z)/k$, $\delta\theta(z)$ s'écrit

$$\delta\theta \simeq \frac{k}{E} \int_0^z dz' V(z') \sin^2[kz'] \quad (4.30)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{k}{2zE} \int_0^z dz' V(z') \sin[2\theta(z')] \right\rangle \\ & \simeq \left\langle \frac{k}{2zE} \int_0^z dz' V(z') \left(\sin[2\theta_0(z')] - 2 \cos[2\theta_0(z')] \frac{k}{E} \int_0^{z'} dz'' V(z'') \sin^2[\theta_0(z'')] \right) \right\rangle \\ & \simeq \frac{k^2}{zE^2} \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \langle V(z')V(z'') \rangle \cos[2\theta_0(z')] \sin^2[\theta_0(z'')] \end{aligned}$$

puis, avec un changement de variable $u = z' - z''$ et le passage à la limite $z \rightarrow +\infty$, nous obtenons

$$\gamma(k) \simeq \frac{\sqrt{2\pi}}{8\sigma_R} \left(\frac{V_R}{E} \right)^2 (k\sigma_R)^2 \hat{c}(2k\sigma_R) \quad (4.31)$$

où \hat{c} est la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation du potentiel aléatoire.

L'exposant de Lyapunov pour une onde de vecteur d'onde k est proportionnel $\hat{c}(2k)$. Cela traduit la nécessité de l'existence d'une relation de Bragg pour l'onde k dans le potentiel aléatoire afin que cette dernière puisse être localisée au sens d'Anderson. Si la composante de la densité spectrale du potentiel aléatoire²⁰ est non nulle en $k' = 2k$ alors une onde de vecteur k peut subir des réflexions multiples sur le potentiel $V(z)$ et devenir localisée. Dans le cas où la composante $k' = 2k$ du potentiel aléatoire est nulle, l'onde k ne peut pas être diffusée efficacement par le potentiel aléatoire et la localisation d'Anderson ne peut pas avoir lieu. L'exposant de Lyapunov est alors nul dans ce second cas.

La condition de Bragg nécessaire à l'obtention d'une localisation au sens d'Anderson est ainsi toujours satisfaite dans un potentiel aléatoire spatialement δ -corrélé. En effet, dans ce cas particulier où la longueur de corrélation du potentiel est nulle la densité spectrale comporte toutes les composantes du spectre avec la même amplitude.

Au contraire, dans le cas d'un potentiel aléatoire $V(z)$ créé par un champ de tavelures, le spectre du potentiel est à support fini (voir le chapitre 2). Nous pouvons considérer, sans altérer la généralité de notre propos, un potentiel normalisé tel que

$$\begin{aligned} \langle V(z) \rangle &= 0 \\ C(z) &= \langle V(z')V(z'+z) \rangle = V_R^2 c(z/\sigma_R) \end{aligned} \quad (4.32)$$

où $c(u)$ est la fonction de corrélation réduite du potentiel optique aléatoire. Dans le cas d'une ouverture rectangulaire, nous avons $c(u) = \sin^2(u)/u^2$. Les grandeurs V_R et σ_R caractérisent

²⁰Le théorème de Wiener-Kitchine établit $\hat{C}(k) = \langle |V(k)|^2 \rangle$ où $V(k)$ est la composante spectrale k du potentiel aléatoire.

le potentiel aléatoire et représentent respectivement la déviation standard de l'amplitude du potentiel, $V_R = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$, et la longueur de corrélation σ_R du potentiel $V(z)$.

Rappelons que la fonction de corrélation d'un potentiel créé à partir d'un champ de tavelures a un support spectral fini ???. Nous avons pour le potentiel normalisé considéré ici,

$$\begin{aligned}\hat{C}(k) &= V_R^2 \sigma_R \hat{c}(k\sigma_R) \\ \hat{c}(\kappa) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - \kappa/2) \Theta(1 - \kappa/2).\end{aligned}\tag{4.33}$$

La fonction $\Theta(u)$ est la fonction de Heaviside. Dès lors, dans le cadre de notre travail (approximation de Born, voir ci-dessous), les ondes de vecteurs d'onde supérieurs à $k_c = 1/\sigma_R$ ne peuvent pas localiser au sens d'Anderson. Le vecteur d'onde k_c correspond à une fréquence haute de coupure pour la localisation. Plus précisément nous obtenons pour l'exposant de Lyapunov dans un potentiel aléatoire de tavelures :

$$\gamma(k) = \gamma_0(k) (1 - k\sigma_R) \Theta(1 - k\sigma_R), \quad \gamma_0(k) = \frac{\pi m^2 V_R^2 \sigma_R}{2\hbar^4 k^2}\tag{4.34}$$

L'exposant de Lyapunov est d'autant plus grand que la composante spectrale du potentiel de tavelures est grande. Ainsi la longueur de localisation est d'autant plus faible que le vecteur d'onde est petit devant k_c .

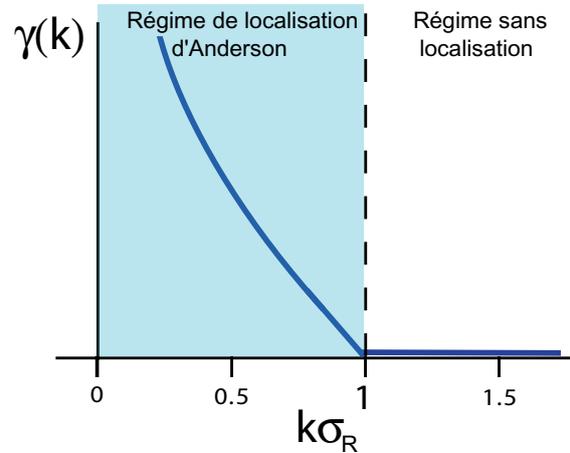


FIG. 4.23 – Exposant de Lyapunov $\gamma(k)$ en fonction du vecteur d'onde k de l'onde incidente dans un potentiel aléatoire issu d'un champ de tavelure. $\gamma(k)$ est donné par l'équation (4.34). Le domaine d'impulsion dans lequel la localisation d'Anderson apparaît est grisé.

L'existence d'une fréquence de coupure pour la localisation d'Anderson ne va pas de soi dans un système uni-dimensionnel. Des travaux théoriques ont montré que dans un potentiel 1D [162, 163] ou 2D [164] tous les états de particules sans interaction sont localisés. Cela étant, il a été établi que pour des potentiels possédant certaines fonctions de corrélation, il existe, dans l'approximation de Born, deux énergies de coupure ("mobility edge" en anglais) définissant un intervalle d'énergie en dehors duquel les états ne sont pas localisés [165]. De même, notre calcul au premier ordre de l'exposant de Lyapunov avec le formalisme de phase conduit à l'existence d'une impulsion de coupure $k_c = 1/\sigma_R$ au delà de laquelle la localisation n'a pas lieu (figure 4.23). Notons que nous nous sommes restreint au premier ordre de l'approximation de Born. Un calcul incluant les contributions d'ordres supérieurs montrerait peut-être que l'exposant de Lyapunov n'est pas strictement nul pour les vecteurs d'onde supérieurs à k_c . Cela étant, si

$\gamma(k)$ ne s'avère pas nul pour $k > k_c$, il est en tout cas très faible et la longueur de localisation associée est très grande. En particulier, pour la description en lien avec les expériences qui nous intéressent ici, cela signifie que la localisation des ondes de vecteurs d'onde supérieurs à k_c n'est pas possible sur un système réel de taille finie.

4.3.3 Localisation d'un condensat 1D en expansion

Nous considérons un condensat de Bose-Einstein uni-dimensionnel avec des interactions répulsives²¹. Ce condensat est initialement piégé dans un potentiel harmonique $V_{\text{piege}} = m\omega_z z^2/2$. La taille finie du gaz de Bose 1D permet l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein dans un régime de faible interaction [136]²². Nous ne considérerons pas le cas de forte interaction et d'un gaz de Bose dans le régime de Tonks-Girardeau [166, 167].

Le condensat de Bose-Einstein est placé en présence d'un potentiel aléatoire uni-dimensionnel $V(z)$ créé à partir d'un champ de tavelures (voir chapitre 2). Nous considérons un potentiel perturbatif tel que $V_R \ll \mu_{\text{TF}}$. La fonction d'onde $\psi(z, t)$ du condensat de Bose-Einstein est décrite par l'équation de Gross-Pitaveskii

$$i\hbar\partial_t\psi(z, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + V_{\text{piege}}(z) + V(z) + g_{1D}|\psi(z, t)|^2 - \mu \right] \psi(z, t). \quad (4.35)$$

Le condensat se trouve à l'équilibre dans le piège harmonique $V_{\text{piege}}(z)$ et le potentiel aléatoire $V(z)$. Nous supposons en outre que le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi et la densité 1D, $n_{1D}(z)$, s'écrit donc $n_{1D}(z) = \mu_{\text{TF}}/g_{1D}(1 - z^2/L_{\text{TF}}^2 - V(z))$ où $L_{\text{TF}} = \sqrt{2\mu_{\text{TF}}/m\omega_z^2}$ est la longueur de Thomas-Fermi²³. A l'instant $\tau = 0$ nous coupons brutalement le seul piègeage harmonique et nous voulons décrire l'expansion et la localisation de l'onde de matière dans le potentiel aléatoire. Lors de l'expansion uni-dimensionnelle, la densité 1D du condensat $n_{1D} = |\psi(z, t)|^2$ décroît lentement. Cette lente décroissance permet de considérer le gaz de Bose dans le régime de faibles interactions tout au long de l'expansion et de travailler avec l'équation de Gross-Pitaevskii précédente²⁴.

La situation que nous venons de décrire avec la présence du potentiel aléatoire dans le piège initial est proche de celle des expériences que nous avons décrites précédemment (voir 4.2) : dès l'ouverture du piège le désordre est présent. Cependant, pour le cas qui nous intéresse dans cette partie d'un potentiel aléatoire *faible*, l'influence initiale du potentiel aléatoire au moment de l'ouverture est faible. Ainsi, lors de l'ouverture du piège et de la phase initiale d'expansion, nous pouvons considérer que tout se passe de façon identique à la situation en l'absence de désordre et que seules les interactions sont à prendre en compte (elles sont responsables de l'expansion). Après un temps d'expansion suffisamment long, les interactions deviennent négligeables et il

²¹La constante de couplage des interactions réduite à une dimension s'écrit $g_{1D} = 2\hbar\omega_{\perp}a$.

²²La densité 1D, n_{1D} , du gaz doit être supérieure à mg_{1D}/\hbar^2 , $n_{1D} \gg mg_{1D}/\hbar^2$. Pour un potentiel chimique de l'ordre de la centaine de Hertz, $n \simeq 10^7 \text{ m}^{-1} \gg mg_{1D}/\hbar^2 \simeq 5.6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}$.

²³La condition pour être dans le régime Thomas-Fermi peut s'écrire sur le nombre d'atomes, N . Il faut alors typiquement $N \gg mg_{1D}a_{ho}/\hbar^2 \simeq 10$

²⁴Plus précisément, le comportement temporelle de la fonction d'onde est décrit par les lois d'échelle du paragraphe 4.1.1.3. La densité décroît en $1/b(\tau)$ avec un comportement asymptotique en $1/2\omega_z\tau$. Ainsi, pour des temps d'expansion de l'ordre $\omega_z\tau \leq 100$, la densité 1D n_{1D} calculée précédemment demeure supérieure à la constante mg_{1D}/\hbar^2 .

faut alors prendre en compte la présence du potentiel aléatoire. Ainsi dans le paragraphe qui suit nous allons utiliser un modèle en deux étapes pour l'expansion : une première phase d'expansion pilotée par les interactions en l'absence de désordre puis une seconde phase où le potentiel aléatoire est présent et les interactions négligeables.

4.3.3.1 Un modèle d'expansion en deux étapes

L'expansion d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel aléatoire faible peut être modélisée en deux étapes temporelles [36]. Lors d'une première étape, le condensat s'étend sous l'effet des interactions répulsives et l'influence du potentiel aléatoire faible est négligeable : nous considérerons que cette première étape se fait en l'absence de potentiel aléatoire. Après un temps d'expansion suffisamment long τ_0 , les interactions sont devenues négligeables et le potentiel aléatoire influe sur le transport de l'onde de matière. Nous considérerons alors dans cette seconde étape que nous avons un paquet d'ondes planes sans interaction se déplaçant dans un potentiel aléatoire.

Lors de la première étape, l'expansion du condensat 1D est principalement due à la présence initiale d'interactions répulsives dans le piège magnétique en l'absence de potentiel aléatoire. Cette expansion est décrite par les lois d'échelles que nous avons utilisées précédemment (paragraphe 4.1.1.3). Aux temps longs, $\tau \gg 1/\omega_z$, il en résulte la distribution d'impulsion $\mathcal{D}(k)$ [Eq. (4.10)] du condensat,

$$\mathcal{D}(k) \simeq \frac{3N\xi_{in}}{4}(1 - k^2\xi_{in}^2)\Theta(1 - k\xi_{in}). \quad (4.36)$$

La fin de la première phase du modèle a lieu lorsque la densité atomique a diminué de telle sorte que le terme d'interaction est devenu négligeable. Le condensat est alors peuplé d'ondes planes sans interaction avec la distribution $\mathcal{D}(k)$.

A l'instant $\tau_0 \gg 1/\omega_z$ nous allumons brutalement le potentiel aléatoire et cela marque le début de la seconde étape. Les ondes planes sans interaction peuplant le condensat vont donc être diffusées sur le potentiel aléatoire $V(z)$. D'après les travaux sur la propagation d'ondes planes dans le désordre [4], chacune d'elle va se localiser. Chaque onde plane $\exp(ikz)$ va donc être transformée en une onde localisée $\phi_k(z)$.

Le formalisme de phase que nous avons décrit dans le paragraphe précédent nous permet de calculer l'exposant de Lyapunov $\gamma(k)$ associé à la localisation que chacune de ces ondes planes [Eq. (4.34)]. Il nous faut maintenant calculer le comportement de la fonction d'onde du condensat qui est composée d'ondes planes de distribution d'impulsion $\mathcal{D}(k)$. Par ailleurs, nous pouvons écrire explicitement les conditions de validité [Eq. (??-??)] de l'approche du formalisme de phase pour le potentiel aléatoire qui nous intéresse ici, à savoir un potentiel optique de tavelures. Elles se mettent alors sous la forme

$$\int_{\Delta z} dz V(z) \ll 2\pi \frac{\hbar^2 k}{2m} \quad (4.37)$$

$$V_R \sigma_R \ll \frac{\hbar^2 k}{m} (k\sigma_R)^{1/2}. \quad (4.38)$$

Rappelons qu'un potentiel optique de tavelures respectant la première de ces conditions est appelé "faible".

4.3.3.2 Fonction d'onde du condensat dans l'espace réel

La fonction d'onde du condensat peut être écrite à partir des fonctions localisées $\phi_k(z)$:

$$\psi(z) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\mathcal{D}(k)} \phi_k(z). \quad (4.39)$$

Nous nous intéressons au profil de densité $n(z)$ du condensat, profil obtenu expérimentalement à partir des images par absorption. Nous prenons donc le carré de la fonction d'onde et nous effectuons une moyenne statistique de telle sorte que

$$n_{1D}(z) = \langle |\psi(z)|^2 \rangle. \quad (4.40)$$

La phase d'une fonction localisée $\phi_k(z)$ évolue dans le temps avec l'énergie de l'onde ϕ_k et elle subit localement des variations spatiales issues du potentiel aléatoire dépendant également de l'énergie de l'onde ϕ_k . Les énergies des différentes ondes localisées ϕ_k étant différentes, les phases des fonctions localisées peuvent être considérées décorréelées les unes des autres dans une bonne approximation. Dans notre modèle, nous supposons les phases θ_k des fonctions localisées ϕ_k décorréelées de telle sorte que $\langle \exp i(\theta_k - \theta_{k'}) \rangle \simeq 0$ pour $k \neq k'$. Avec cette hypothèse, il vient alors

$$n_{1D}(z) = \langle |\psi(z)|^2 \rangle = 2 \int_0^\infty dk \mathcal{D}(k) \langle |\phi_k(z)|^2 \rangle. \quad (4.41)$$

Un calcul exact de la décroissance asymptotique des fonctions d'onde électronique localisées dans un potentiel désordonné 1D a été effectué par Gogolin [44,45]. L'approche diagrammatique utilisée par Gogolin pour calculer la corrélation en densité électronique montre qu'il existe des corrections à la décroissance purement exponentielle de la fonction d'onde avec la distance. Dans cette approche, la diffusion est traitée dans l'approximation de Born²⁵ et le potentiel aléatoire est supposé tel que la longueur de localisation est supérieure à la longueur de corrélation du potentiel aléatoire. Le résultat obtenu pour la décroissance asymptotique de la fonction d'onde localisée ϕ_k se met sous la forme [44, 45] :

$$\langle |\phi_k(z)|^2 \rangle = \frac{\pi^2 \gamma(k)}{2} \int_0^\infty du u \sinh(\pi u) \left[\frac{1 + u^2}{1 + \cosh(\pi u)} \right]^2 \times \exp(-2(1 + u^2)\gamma(k)|z|) \quad (4.42)$$

où $\gamma(k)$ est l'exposant de Lyapunov calculé précédemment [Eq. (4.34)]²⁶.

Loin du centre de localisation de la fonction d'onde ϕ_k , $\gamma(k)|z| \gg 1$, seuls les termes proches de $u = 0$ vont contribuer à l'intégrale précédente. Ainsi l'intégrale (4.42) se réduit à

$$\exp[-2\gamma(k)|z|] \int_0^\infty du \frac{\pi u^2}{4} \exp(-2u^2\gamma(k)|z|) \quad (4.43)$$

²⁵Dans cette approximation, le champ diffusé par chaque diffuseur est supposé faible devant le champ incident. Ainsi le seul le champ incident est considéré dans le calcul de la diffusion : tous les diffuseurs voient le même champ incident. Il s'agit donc d'une méthode perturbative au premier ordre qui néglige les couplages issus des champs diffusés par chaque diffuseur. Cette approximation est valide pour de faibles potentiels ou pour des ondes de grande impulsion k .

²⁶Dans le papier de Gogolin [44], l'exposant de Lyapunov n'est pas utilisé explicitement mais une identification du comportement asymptotique de la fonction d'onde permet de relier la formule de Gogolin à l'exposant de Lyapunov

et il vient,

$$\langle |\phi_k(z)|^2 \rangle \simeq \frac{\pi^{7/2}}{64\sqrt{2}\gamma(k)} \frac{\exp(-2\gamma(k)|z|)}{|z|^{3/2}} \quad (4.44)$$

La décroissance exponentielle en $\gamma(k)z$ de la fonction d'onde localisée est présente dans l'expression précédente de $\phi_k(z)$ et une correction algébrique en $|z|^{3/4}$ est trouvée par l'approche diagrammatique de Gogolin.

A partir des expressions (4.10-4.44) nous pouvons calculer explicitement la densité du condensat lorsque les différentes ondes planes qui le composent sont localisées. Il faut alors distinguer deux régimes distincts de localisation de l'onde du condensat [36]. L'équation (4.10) détermine un vecteur d'onde $k_c = 1/\xi_{in}$ maximum dans le spectre en impulsion du condensat en expansion. Par ailleurs, l'équation (4.34) sur l'exposant de Lyapunov introduit une seconde coupure $k_c = 1/\sigma_R$ [Eq. 4.41]. L'intégrale donnant la densité $n_{1D}(z)$ du condensat doit donc être calculée sur l'intervalle $(0, k_c = \min 1/\xi_{in}, 1/\sigma_R)$. Nous allons considérer les deux limites possibles pour la borne supérieure de l'intégrale (4.41), à savoir $k_c = 1/\xi_{in}$ et $k_c = 1/\sigma_R$.

Cas $\xi_{in} > \sigma_R$: localisation du condensat

L'intégrale (4.41) dans l'hypothèse où le vecteur d'onde de coupure est donné par la distribution d'impulsion du condensat est

$$n(z) = 2 \int_0^{1/\xi_{in}} dk \frac{3\xi_{in}}{4\sqrt{2}} (1 - k^2\xi_{in}^2) \frac{\pi^{7/2}}{64\sqrt{2}} \frac{\exp(-2\gamma(k)|z|)}{\sqrt{\gamma(k)}|z|^{3/2}}. \quad (4.45)$$

Remarquant que les termes prépondérants seront ceux pour lesquels l'exposant de Lyapunov est le plus faible, *i.e.* $k \simeq 1/\xi_{in}$, nous effectuons un changement de variable $u = 1/\xi_{in} - k$. Nous poursuivons le calcul en effectuant un développement limité autour de $u \simeq 0$. Au premier ordre en u , l'exposant de Lyapunov peut être mis sous la forme $\gamma(k) = \gamma(1/\xi_{in}) (1 + Au)$ avec $A = (2\xi_{in} - \sigma_R)/(1 - \sigma_R\xi_{in})$.

La partie intégrale peut être également évaluée pour $u \simeq 0$ et il vient

$$\int_0^{\xi_{in}} dk (1 - k^2\xi_{in}^2) \frac{\exp(-2\gamma(k)|z|)}{\sqrt{\gamma(k)}} \simeq \frac{2\xi_{in}}{4A^2\gamma(1/\xi_{in})^{5/2}} \frac{\exp(-2\gamma(1/\xi_{in})|z|)}{|z|^2} \quad (4.46)$$

Finalement, le comportement asymptotique $\gamma(1/\xi_{in})|z| \gg 1$ de la densité du condensat s'écrit

$$n_{1D}(z) \propto \frac{\exp(-2\gamma(1/\xi_{in})|z|)}{|z|^{7/2}} \quad (4.47)$$

Toutes les ondes planes qui peuplent le condensat peuvent être diffusées efficacement par le potentiel aléatoire (condition de Bragg respectée puisque $\xi_{in} > \sigma_R$). Elles sont donc toutes localisées au sens d'Anderson avec différentes longueurs de localisation. Il en résulte que le profil de densité du condensat localisé reflète la décroissance exponentielle de l'onde dont la longueur de localisation est la plus grande, à savoir celle de vecteur d'onde $k = 1/\xi_{in}$.

Cas $\xi_{in} < \sigma_R$: absence de localisation du condensat

Dans la situation où le vecteur d'onde de coupure est donné par le support fini du spectre du potentiel aléatoire $k_c = 1/\sigma_R$, le résultat sur la densité $n_{1D}(z)$ du condensat localisé est quelque peu différent. Il vient en effet

$$n_{1D}(z) \propto \frac{1}{|z|^2}. \quad (4.48)$$

Dans cette situation, la localisation du condensat est donc algébrique. Ce caractère algébrique vient du fait qu'une partie des ondes qui composent du spectre du condensat ($k > k_c = 1/\sigma_R$) ne peuvent pas localiser au sens d'Anderson puisqu'il n'existe pas de condition de Bragg pour ces dernières.

Simulations numériques

Nous présentons ici succinctement les résultats de calculs numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii 1D [36]. Les calculs numériques effectués ne suivent pas exactement le modèle d'étude que nous avons proposé. En effet, dans ces calculs le potentiel aléatoire est présent avant l'ouverture longitudinale et le condensat s'étend toujours en présence du désordre. Par ailleurs, le terme d'interactions de l'équation de Gross-Pitaevskii est également toujours présent au cours de l'expansion. Le confinement magnétique est lui coupé à $\tau = 0$ comme dans notre modèle.

Lors de l'expansion en présence d'un potentiel aléatoire, le transport est supprimé. Cet effet est observé en comparant la taille RMS du condensat en expansion en présence et en absence de potentiel aléatoire. La figure insérée sur l'image 4.24 compare la taille RMS $L_{\text{rms}} = \sqrt{\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2}$ pour deux valeurs de l'amplitude du potentiel, $V_R = 0$ et $V_R = 0.1\mu$.

Après un temps d'expansion suffisamment long, typiquement $\tau\omega_z \geq 100$ le profil de densité du condensat devient presque stationnaire. Sur la figure 4.24, nous traçons le résultat des simulations numériques dans la situation où la localisation du condensat doit faire apparaître un profil exponentiel, $\xi_{in} > \sigma_R$. Nous observons en effet que le profil de densité stationnaire décroît exponentiellement à longues distances (échelle logarithmique sur la figure 4.24). Nous comparons le résultat de ces simulations numériques avec la formulation analytique issue de notre modèle [Eq. (4.10-4.44-4.41)] ainsi qu'avec le comportement asymptotique [Eq. (4.47)]. L'accord entre les résultats numériques et la formulation analytique est excellent²⁷, justifiant ainsi la validité de notre approche.

Remarquons que la formulation analytique a tendance à sur-évaluer la valeur de la densité du condensat localisé au centre (voir figure 4.24). Cette particularité tient au fait que dans notre approche la contribution des ondes planes localisées ϕ_k pour les faibles vecteurs d'onde k n'est pas négligeable. Or, le calcul du exposant de Lyapunov avec le formalisme de phase n'est pas correct pour ces faibles vecteurs d'onde k [voir les conditions de validité, équations (4.38)].

Nous avons également analysé le comportement asymptotique de la densité du condensat localisé dans les simulations numériques. Pour le cas où $\sigma_R/\xi_{in} > 1$ nous avons ajusté le profil obtenu avec les simulations par la fonction $|z|^{\beta_{eff}}$ où β_{eff} est un paramètre ajustable. Pour la

²⁷Il faut souligner que seul un facteur d'amplitude multiplicatif a été utilisé comme paramètre dans l'ajustement des simulations numériques par la formulation analytique.

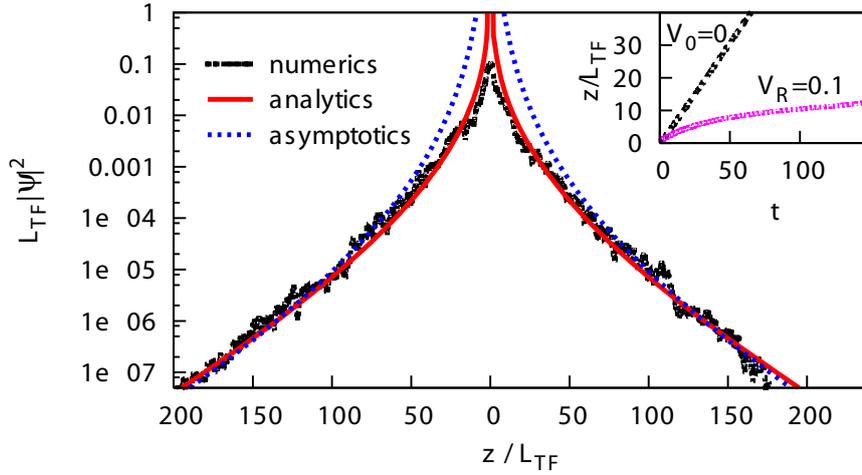


FIG. 4.24 – Profil de densité $n(z)$ du condensat localisé après un temps d'expansion $\tau\omega_z = 150$. Les paramètres utilisés dans cette simulation sont $V_R = 0.1\mu$, $\xi_{in} = 0.01L_{TF}$ et $\sigma_R = 0.78\xi_{in} < \xi_{in}$. Le résultat des simulations numériques apparaît en trait noir, celui de la formulation analytique [Eq. (4.10-4.44-4.41)] en trait plein rouge et celui de la formule asymptotique [Eq. (4.47)] en pointillés noirs. Image insérée : taille RMS L_{rms} du condensat en expansion en l'absence ($V_R = 0$) et en présence ($V_R = 0.1\mu$) du potentiel aléatoire.

situation où $\sigma_R/\xi_{in} < 1$, nous avons effectué un ajustement du profil de densité par la fonction $|z|^{-7/2} \exp(-2\gamma_{eff}|z|)$ où γ_{eff} est un paramètre ajustable.

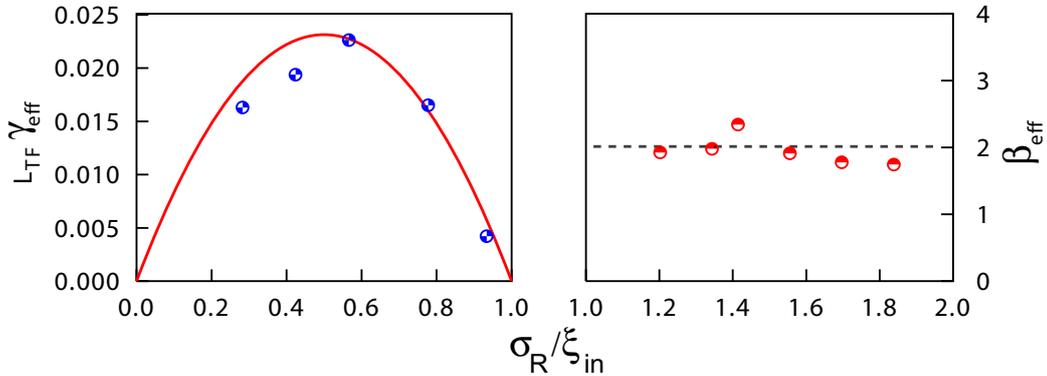


FIG. 4.25 – **a)** Exposant de Lyapunov γ_{eff} extrait de l'ajustement asymptotique de la densité du condensat localisé (points bleus) et formule analytique obtenue avec le formalisme de phase (trait plein rouge). **b)** Exposant β_{eff} extrait de l'ajustement asymptotique de la densité du condensat localisé algébriquement (points rouges) et valeur attendue (traits pointillés noirs).

Nous comparons alors le résultat de ces ajustements avec notre formulation asymptotique sur la figure 4.25. Pour $\sigma_R/\xi_{in} > 1$, nous attendons $\beta_{eff} \simeq 2$ d'après l'équation (4.48). Pour $\sigma_R/\xi_{in} < 1$, nous attendons $\gamma_{eff} \simeq \gamma(1/\xi_{in})$ [Eq. (4.47)]. L'accord entre le résultat de nos calculs

numériques et le comportement asymptotique attendu est là encore excellent [36].

Le transport d'un condensat de Bose-Einstein avec interactions dans un potentiel aléatoire faible peut conduire à une localisation au sens d'Anderson de toutes les ondes composant le condensat en expansion (cas $\sigma_R/\xi_{in} < 1$). Le profil du condensat localisé met alors en évidence la signature du phénomène de localisation d'Anderson, à savoir la décroissance exponentielle de la fonction d'onde à partir du centre de localisation. Remarquons que si la localisation d'Anderson est souvent invoquée dans différents domaines de la physique pour expliquer l'écart de propriétés de transport d'onde dans un milieu désordonné par rapport à une diffusion classique, l'observation de la décroissance de la fonction d'onde ne semble avoir été mise en évidence que très récemment dans un cristal photonique [5]. L'observation directe que nous pouvons faire du profil de densité du condensat et donc du profil de la fonction d'onde est extrêmement intéressant puisqu'il permettrait de révéler de façon directe cette décroissance exponentielle.

Remarquons enfin que les conditions de validité de ce modèle ne sont respectées ni dans différents travaux théoriques récents qui étudient la localisation d'un condensat avec interactions dans un potentiel aléatoire [35, 101, 168] ni dans les conditions des expériences qui ont été réalisées [33, 35, 154]. Une localisation au sens d'Anderson ne pouvait donc pas être obtenue dans ces études.

4.3.3.3 Discussion sur la réalisation expérimentale

Le scénario de localisation d'un condensat en expansion dans un potentiel faible requiert deux conditions de validité [Eq. (4.38)]. La réalisation expérimentale de ce modèle doit se faire dans ce cadre de validité, ce qui n'était pas le cas des premières expériences [33, 35, 154].

Lors de l'expansion, les atomes qui peuplent les ailes ont une énergie essentiellement cinétique. Les ondes planes qui correspondent à ces atomes ont donc une impulsion typique $k \simeq 1/\xi_{in}$. La première condition de validité des équations (4.38) dans les ailes du condensat en expansion s'écrit alors

$$\int_{\Delta z} dz' V(z') \ll 2\pi \frac{\hbar^2}{2m\xi_{in}}.$$

Elle n'était pas satisfaite dans les expériences de piégeage décrites dans la partie 4.2 [33, 35]. Dans les expériences similaires réalisées au LENS à Florence elle n'était également pas satisfaite [154]. Afin de satisfaire cette condition, il est nécessaire de travailler avec un potentiel aléatoire d'amplitude plus faible que celui utilisé dans les expériences mentionnées.

La seconde condition de validité qui permet d'obtenir une longueur de localisation inférieure à la taille du système s'écrit

$$V_R \ll \mu (\xi_{in}/\sigma_R)^{1/2}.$$

Cette condition n'était également pas respectée dans les expériences d'expansion réalisées [33, 35, 154]. Là encore, l'utilisation d'un potentiel d'amplitude inférieure à celui des expériences mentionnées doit permettre de respecter cette seconde condition.

Cela étant, l'obtention d'un condensat localisé au sens d'Anderson requiert une condition expérimentale supplémentaire : $\xi_{in} > \sigma_R$. La réalisation d'un condensat de Bose-Einstein dont la longueur de relaxation ξ_{in} est supérieure à la longueur de corrélation σ_R du potentiel aléatoire est la condition la plus délicate à réaliser.

Les plus petites longueurs de corrélation réalisées expérimentalement aujourd’hui l’ont été en utilisant le potentiel de tavelures que nous avons décrit au chapitre 2²⁸. Nous avons obtenu $\sigma_R \simeq 0.3 \mu\text{m}$. Il est possible d’obtenir une longueur de corrélation plus petite encore en générant le champ de tavelures avec un laser de plus courte longueur d’onde. Dans un laser à Argon par exemple, il est possible de travailler avec une longueur d’onde égale à $\lambda = 480 \text{ nm}$.

Dans les expériences que nous avons réalisées (paragraphe 4.2 et [33, 35])²⁹, la longueur de relaxation est $\xi_{in} \simeq 0.1 \mu\text{m}$. Il est donc nécessaire d’augmenter ξ_{in} . Il serait envisageable d’utiliser des résonances de Feshbach. Ne disposant pas de cette possibilité sur notre expérience, il est également envisageable de modifier les fréquences du piège harmonique et le nombre d’atomes du condensat. Avec les chiffres suivants, $V_R = 0.2\mu$, $\sigma_R = 0.27 \mu\text{m}$ et $\xi_{in} = 3\sigma_R/2$ nous obtenons une longueur de localisation égale à $L_{loc}(1/\xi_{in}) \simeq 460 \mu\text{m}$, inférieure à la taille observée expérimentalement du condensat en expansion dans le guide magnétique 1D [36].

Une expérience de localisation d’Anderson d’un condensat de Bose-Einstein avec interactions peut donc être réalisée expérimentalement. Affaire à suivre...

4.4 Conclusion

Notre étude (à la fois expérimentale et théorique) de l’expansion 1D d’un condensat de Bose avec interactions dans un potentiel aléatoire conduit à identifier deux régimes de localisation. Dans le premier régime, la réflexion sur une barrière *unique* du potentiel aléatoire peut être grande. Dès lors, les ailes du condensat en expansion se trouvent piégées par de grandes modulations uniques du potentiel aléatoire et les interactions entre atomes sont responsables d’un piégeage classique du centre de l’onde de matière. La suppression du transport du condensat que nous avons observée expérimentalement a lieu dans ce premier régime et nous avons pu corroborer notre modèle par des résultats expérimentaux détaillés [33, 35]. Il faut souligner que cette suppression du transport et son interprétation dans ce régime ont également été menées dans les groupes de Florence [154] et Hannover [86] à la même époque. Dans le second régime, celui dit de *désordre faible*, la transmission de l’onde de matière à travers une modulation unique du potentiel aléatoire est proche de l’unité. Après un temps d’expansion suffisamment long au bout duquel les interactions deviennent négligeables, notre travail théorique démontre l’existence d’un régime de localisation d’Anderson pour le condensat dans le désordre [36]. En lien avec l’expérience, nous identifions les paramètres permettant cette observation et nous calculons la longueur de localisation dans le cas d’un potentiel aléatoire de tavelures (des longueurs de localisation inférieures à $500 \mu\text{m}$ sont obtenues).

Au chapitre 5, nous poursuivons notre étude des propriétés dynamiques des condensats de Bose-Einstein désordonnés par l’étude des modes collectifs de basse énergie. En particulier, nous étudions expérimentalement les modifications, induites par la présence de désordre, sur les modes d’oscillation dipolaire et quadrupolaire et sur la vitesse du son du condensat.

²⁸La proposition d’utiliser des potentiels RF désordonnés avec une petite longueur de corrélation [79] n’a pas été réalisée expérimentalement.

²⁹La situation expérimentale dans [154] est similaire.

Modes collectifs de basse énergie dans un condensat désordonné

Au chapitre 3 nous avons présenté et étudié l'état fondamental d'un gaz de bosons ultra-froids dans un potentiel aléatoire : un condensat de Bose-Einstein désordonné. L'étude des modes collectifs de basse énergie d'un tel condensat de Bose-Einstein désordonné constitue l'objet du présent chapitre.

Les excitations dans un condensat de Bose-Einstein gazeux non-désordonné (faiblement) interagissant ont fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux et théoriques (voir par exemple [133]). L'intérêt porté à ces études réside principalement dans deux aspects liés à ces excitations. D'une part, il existe un lien très fort entre le caractère superfluide d'un liquide ou d'un gaz et son spectre d'excitations. D'autre part, les fréquences propres des excitations peuvent se révéler être un outil de mesure de précision.

Il est attendu qu'un condensat gazeux se comporte comme un superfluide de par la présence des interactions inter-atomiques (voir chapitre 1 et [133]). Or, un superfluide est caractérisé par son comportement dynamique [59]. Ainsi, l'étude des excitations dans un tel système constitue le premier pas vers une compréhension et une description de la superfluidité. Les fortes interactions présentes dans l'hélium superfluide et les supraconducteurs rendent difficile une étude expérimentale systématique des excitations et du lien de ces dernières avec la superfluidité. Avant la réalisation expérimentale de la condensation des gaz alcalins, la compréhension de la superfluidité est donc essentiellement venue de travaux théoriques. Ces derniers ont commencé par la théorie à deux fluides de Tisza et London (1938 ; [23, 24]) et l'approche hydrodynamique quantique de Landau (1941-1947 ; [25]). Ces approches ont été poursuivies et en quelque sorte réunies¹ par Bogolyubov dans une seule et même théorie qui permet de décrire le spectre des excitations d'un système condensé avec de faibles interactions [21, 22].

Dans ce contexte théorique, les condensats gazeux, sur lesquels nous disposons d'un contrôle et de techniques d'observation précis (chapitre 1), se sont avérés être un outil expérimental formidable d'investigation de cette question. Les travaux expérimentaux portant sur l'étude des excitations dans un condensat de Bose-Einstein gazeux ont débuté avec la réalisation en laboratoire de ces derniers [15, 16]. Les premières observations expérimentales des modes collectifs de basse énergie (modes dipolaire et quadrupolaire) après temps de vol [169] et in-situ [170] ont mis en évidence l'accord entre les fréquences propres mesurées et celles prédites par les travaux théoriques à température nulle (voir [28, 133] pour une revue des travaux théoriques sur ce sujet). L'influence de la température sur ces modes d'oscillation a fait également l'objet d'une étude [170, 171], en particulier la présence d'un amortissement interprété avec le mécanisme

¹Superfluidité et condensation de Bose-Einstein se trouvant alors réunis!

proposé par Landau [172, 173]. Des excitations d'ordre supérieur ont par ailleurs été réalisées sous la forme de propagation d'ondes de densité donnant lieu à une mesure de la vitesse du son au sens de Bogoliubov [20]. Les modes collectifs d'oscillations et les ondes de densité que nous venons de mentionner sont des solutions linéaires de la réponse d'un condensat à une perturbation extérieure. Des excitations non-linéaires peuvent également être créées dans un tel système, citons pour exemple les solitons [174, 175].

La présence de désordre (sous forme de porosité dans les aérogels) dans l'hélium liquide peut conduire à la destruction de la superfluidité d'un tel système [13, 14]. Le désordre a alors une influence sur les propriétés dynamiques des superfluides. Dans ce cadre, il est intéressant d'étudier la modification des propriétés des modes collectifs d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'un potentiel aléatoire. En particulier, l'influence du désordre sur les fréquences d'oscillations, sur l'amortissement des modes collectifs d'oscillation et sur la vitesse du son constituent des sujets d'investigation de première importance.

Par ailleurs, les mesures de précision font très souvent appel à une mesure de fréquence, laquelle devant être sensible à l'effet qui doit être détecté et mesuré. Ainsi, la mesure de fréquences propres des excitations d'un condensat atomique a ouvert une nouvelle voie expérimentale dans ce domaine des mesures de précision. Dans ce cadre, nous pouvons notamment citer l'utilisation d'oscillations de Bloch dans réseau périodique pouvant conduire à la mesure du rapport h/m [176], du champ local de gravitation [177] ou de forces diélectriques de surface [178].

L'influence du désordre (qui peut être présent de façon systématique dans un système d'atomes froids; citons les puces atomiques pour exemple [77]) sur les mesures de précision ainsi effectuées peut s'avérer cruciale. Récemment, les modifications du phénomène d'oscillation de Bloch en présence d'un potentiel aléatoire ont d'ailleurs fait l'objet d'un premier travail théorique [179].

Dans ce chapitre nous étudions les modes collectifs de basse énergie d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'un potentiel aléatoire. Pour cela, nous étudions deux types d'excitations de basse énergie qui peuvent être générées en régime linéaire dans un condensat de Bose-Einstein désordonné : les modes d'oscillation collectifs que sont les modes dipolaire et quadrupolaire dans une première partie; le déplacement d'un paquet d'ondes sonores la forme d'une modulation de densité (de taille inférieure à la longueur du condensat) dans une seconde partie. Les premières études des oscillations dipolaire et quadrupolaire en présence d'un potentiel aléatoire ont été réalisées dans le groupe de M. Inguscio à Florence [88].

Au delà de l'approche (expérimentale) que nous développons dans ce chapitre, un cadre théorique plus général d'étude des excitations serait celui du formalisme de Bogolyubov en présence d'un potentiel aléatoire, permettant de décrire tout le spectre d'excitation d'un condensat de Bose-Einstein désordonné. Nous n'aborderons pas cette question ici. Notons cependant que des travaux récents dans notre groupe ont traité ce problème sous cet angle théorique [99]. En particulier, ces travaux ont mis en lumière la localisation au sens d'Anderson des excitations de Bogolyubov d'un condensat désordonné ainsi que leur possible observation sur les dispositifs expérimentaux aujourd'hui disponibles.

5.1 Modes d'oscillation collectifs dans un potentiel aléatoire

Dans cette première partie du chapitre consacré aux excitations de basses énergies dans un condensat de Bose-Einstein désordonné nous étudions les modes d'oscillation collectifs dipolaire et quadrupolaire. Le mode dipolaire correspond à une oscillation de l'ensemble du nuage atomique (et donc de son centre de masse) sans déformation du nuage. Le mode quadrupolaire fait pour sa part référence à une déformation périodique dans le temps du condensat, sans déplacement de son centre de masse : il s'agit d'un mode de respiration du nuage atomique.

Dans un premier temps, nous rappelons brièvement les résultats de la théorie hydrodynamique à température nulle concernant ces différents modes collectifs, en particulier nous donnons l'expression de leur fréquence d'oscillation. Nous décrivons ensuite comment nous les créons sur notre expérience à l'aide d'un gradient magnétique ajouté au piège confinant le condensat.

Dans un second temps, nous présentons les mesures des fréquences d'oscillation des modes dipolaires (dans les directions longitudinale et transverse du piège magnétique) et du mode quadrupolaire en présence d'un potentiel aléatoire 1D. Nous discutons l'observation expérimentale qui en est faite en lien avec la statistique du désordre.

Enfin, nous présentons dans un dernier paragraphe quelques mesures préliminaires de l'amortissement du mode dipolaire selon la direction du potentiel aléatoire 1D. Les observations expérimentales concernant cet amortissement ont été effectuées dans des conditions expérimentales imparfaites (fraction condensée diminuant au cours du temps). Conservant à l'esprit la présence de ce défaut, nous discutons l'interprétation possible des résultats obtenus et la poursuite envisageable à ces travaux.

5.1.1 Modes dipolaire et quadrupolaire d'un condensat

5.1.1.1 Fréquences propres en l'absence de potentiel aléatoire

Comme nous l'avons introduit au chapitre 3 (paragraphe 3.2.2), l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps peut être décrite, dans le régime de Thomas-Fermi, par deux équations hydrodynamiques couplées sur la densité n et le champ de vitesse \mathbf{v} du condensat de Bose-Einstein [133]. En l'absence de potentiel aléatoire, il vient dans un piège extérieur V_{ext} :

$$\partial_t n + \text{div}(\mathbf{v}n) = 0 \quad (5.1)$$

$$m\partial_t \mathbf{v} + \nabla\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + V_{\text{ext}} + gn\right) = 0. \quad (5.2)$$

En cherchant une solution oscillante à la pulsation ω du type $n = n_0 + \delta n e^{i\omega t}$, il vient dans le cas d'un condensat allongé selon la direction Oz :

$$\omega^2 \delta n = -\frac{1}{2} \nabla \left[\omega_{\perp}^2 (R_{\text{TF}}^2 - r^2) + \omega_z^2 (L_{\text{TF}}^2 - z^2) \right] \nabla \delta n. \quad (5.3)$$

Les solutions des modes collectifs du condensat dans le régime hydrodynamique sont des combinaisons linéaires de polynômes de degré $2n$ et des harmoniques sphériques Y_l^m [134]. Le nombre quantique n quantifie l'excitation transverse et les nombres l et m le moment angulaire et sa

projection sur l'axe long Oz .

A partir de l'équation (5.3), il n'est pas possible d'écrire une relation de dispersion générale dans le cas d'un condensat en forme de cigare allongé. Cela étant il est possible d'écrire un certain nombre de relation dans des cas particuliers [134].

Le mode d'oscillation dipolaire correspond à une oscillation du centre de masse du condensat : il s'agit d'un mouvement d'oscillation de l'ensemble du nuage sans déformation. Cette oscillation du centre de masse peut être décomposée comme une oscillation dans une direction radiale (Ox ou Oy) et une oscillation dans la direction longitudinale du piège magnétique (Oz). Les modes dipolaires correspondent à la première excitation dont le moment angulaire l est non nul, *i.e.* $l = 1$. S. Stringari a montré que dans le cas d'un piège anisotrope, des solutions à l'équation (5.3) ont pour pulsation

$$\omega^2(m = \pm l) = l\omega_{\perp}^2 \quad \text{et} \quad \omega^2(m = \pm(l - 1)) = (l - 1)\omega_{\perp}^2 + \omega_z^2. \quad (5.4)$$

Ces modes permettent de calculer les pulsations des modes dipolaires dans la direction radiale ($m = \pm l = \pm 1$) et longitudinale ($m = l - 1 = 0$) qui valent respectivement

$$\omega_{D,x} = \omega_{\perp} \quad \text{et} \quad \omega_{D,z} = \omega_z. \quad (5.5)$$

Le mode quadrupole ($m = 0$) correspond à une oscillation des tailles radiales et longitudinale en opposition de phase : cette fois il n'y a pas de mouvement d'ensemble du nuage mais seulement une déformation qui évolue dans le temps. Ce mode est également appelé mode de respiration. Une relation de dispersion pour d'autres modes solutions de l'équation (5.3) se met sous la forme [134] :

$$\omega^2(m = 0) = \omega_{\perp}^2 \left(2 + \frac{3}{2}\lambda^2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 - 16\lambda^2 + 16} \right) \quad (5.6)$$

où $\lambda = \omega_z/\omega_{\perp}$. Avec cette relation de dispersion nous pouvons calculer la fréquence du mode $m = 0$ dans un condensat allongé ($\lambda = \omega_z/\omega_{\perp} \ll 1$). Il vient alors pour ce mode quadrupolaire la pulsation propre

$$\omega_Q = \sqrt{5/2} \omega_z. \quad (5.7)$$

L'accord entre les mesures expérimentales des fréquences de ces différents modes d'oscillation en l'absence de potentiel aléatoire avec les valeurs théoriques attendues que nous venons de rappeler est très bon [169, 170].

5.1.1.2 Création des modes collectifs sur notre expérience

Les excitations collectives que nous étudions expérimentalement (mouvement du centre de masse et mode de respiration) sont générées dans le condensat grâce à une modification du piège magnétique.

Pour engendrer un mouvement du centre de masse du nuage atomique (oscillations dipolaires), il suffit de déplacer le minimum du piège magnétique. Après une translation rapide du minimum du piège, le condensat ne se trouve plus au minimum du champ magnétique et il va se déplacer vers le nouveau centre du piège afin de diminuer son énergie potentielle de piégeage [voir la figure 5.1a)]. Il va ensuite osciller dans le piège déplacé si l'amortissement de son

mouvement d'oscillation est faible². Ce déplacement du minimum du piège magnétique dans les directions longitudinale ou transverse peut être induit par l'ajout d'un gradient de champ magnétique.

De même, engendrer des oscillations quadrupolaires (un mode de respiration) peut être réalisé en modifiant le champ magnétique, en changeant la fréquence du piège radial par exemple. En effet, si la fréquence transverse est brutalement augmentée, le nuage atomique va être comprimé dans la direction radiale et il va s'étendre dans la direction longitudinale. La présence de la courbure magnétique du piège longitudinale comprime ensuite le condensat dans la direction longue, le contraignant à s'étendre radialement : il connaît ainsi des oscillations quadrupolaires. La fréquence du piège transverse étant donnée par le gradient transverse du champ magnétique de l'électro-aimant (voir paragraphe 3.3.2), une modification du gradient transverse entraîne un changement de la fréquence radiale ω_{\perp} [voir la figure 5.1b)]. Ainsi, nous utilisons également un gradient magnétique pour créer des oscillations quadrupolaires dans nos condensats de Bose-Einstein.

Il faut remarquer que, dans nos expériences, nous ajustons la valeur du gradient magnétique en fonction de l'oscillation que nous voulons générer dans le condensat. Ce choix se fait *empiriquement* et nous ne sommes pas en mesure d'en donner une justification plus précise.

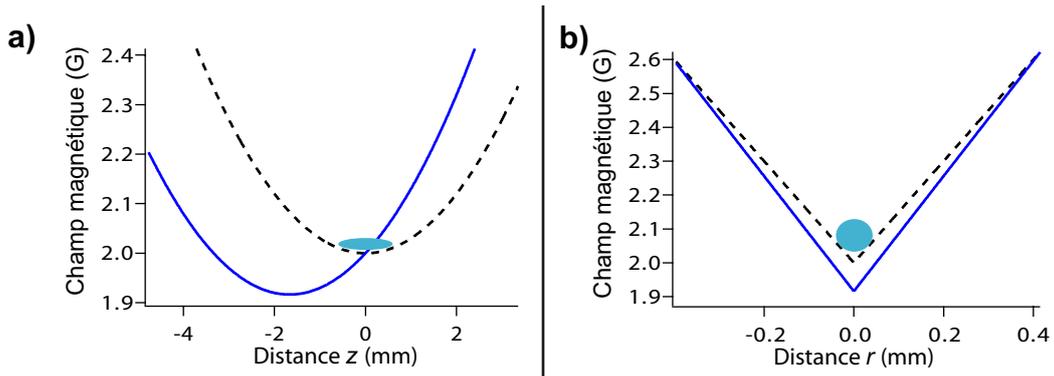


FIG. 5.1 – **a)** Profils longitudinaux (Oz) du champ magnétique initial (traits tiretés) et déplacé (trait plein) calculés pour nos paramètres expérimentaux : le déplacement du minimum du piège induit des oscillations dipolaires du nuage d'atome. **b)** Profils radiaux (Ox) du champ magnétique initial (traits tiretés) et final (trait plein) calculés pour nos paramètres expérimentaux : le changement de fréquence radiale induit des oscillations quadrupolaires du condensat.

Des excitations dipolaire et/ou quadrupolaire sont ainsi générées dans notre condensat de Bose-Einstein en ajoutant un gradient magnétique à la configuration issue de notre électro-aimant pendant un temps court (typiquement 3 ms). Ce gradient magnétique additionnel est produit en utilisant les bobines qui créent le champ magnétique de la phase du Piège Magnéto-Optique (PMO). Elles créent un gradient qui peut être varié de 0 à 10.5 G.cm^{-1} avec le courant qui les parcourt. Nous présentons maintenant plus en détail les modifications du champ magnétique apportées par la présence de ce gradient magnétique.

²Le théorème de Kohn appliqué à un condensat de Bose dans un piège harmonique stipule que les interactions inter-atomiques ne créent pas d'amortissement du mode dipolaire [28].

Modifications du piège magnétique

Le gradient magnétique créé par les bobines du PMO est proportionnel au courant qui les parcourt. Ce courant est contrôlé sur notre expérience par la tension de l'alimentation branchée sur les bobines. Ainsi, le contrôle de la tension d'alimentation des bobines du PMO permet de faire varier linéairement le gradient de champ magnétique de 0 à 10.5 G.cm^{-1} environ.

Plus précisément, le gradient créé par les deux bobines du PMO possède pour axe de révolution l'axe radial orienté selon la direction du champ de gravitation. Cet axe de révolution est selon une direction décalée de $\pi/4$ par rapport à l'orientation des champs dipolaire et quadrupolaire. Notons (O,X,Y,Z) le repère lié au champ du PMO, (O,x,y,z) étant toujours le repère lié aux champs dipolaire et quadrupolaire que nous avons utilisé jusqu'ici. Nous avons pour le champ du PMO :

$$\vec{B}_{\text{PMO}} = \begin{pmatrix} b'X \\ b'/2Y \\ b'/2Z \end{pmatrix} = \frac{b'}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -x + y \\ \frac{1}{2}(x + y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}z \end{pmatrix}.$$

Un gradient est donc ajouté selon les directions longitudinale et transverses du condensat. Cependant, le confinement magnétique dans la direction radiale est réalisé par un gradient dont la valeur (150 G.cm^{-1}) est bien supérieure à celle du gradient du PMO (au maximum 10.5 G.cm^{-1}). Ainsi, si le champ magnétique du PMO est correctement aligné avec le champ magnétique de piégeage, le déplacement dans la direction radiale est négligeable³ et seule la fréquence de piégeage radial varie légèrement puisque le gradient transverse passe de 150 à 160 G.cm^{-1} en présence des bobines du PMO. Les champs dipolaire et quadrupolaire créés par l'électro-aimant ont été présentés au paragraphe 3.3.2.

Le déplacement du centre du piège selon Oz lors de l'application du champ du PMO par rapport à sa position initiale peut être calculé en dérivant la composante longitudinale du champ total par rapport à z . Il vient alors

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{b'}{2} + 2B''z = 0.$$

Il est intéressant de remarquer que ce déplacement est proportionnel à la valeur b' du gradient appliqué. Cette dernière variant linéairement en fonction de la tension appliquée (en fait du courant) sur les bobines du PMO, nous obtenons un contrôle linéaire du déplacement en fonction de la tension appliquée sur les bobines. Pour une tension de 12 V le minimum du piège magnétique est déplacé de 1.67 mm et il l'est de $280 \mu\text{m}$ pour une tension de 2 V.

Contrôle de l'amplitude des modes d'oscillation

Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous appliquons le gradient magnétique pendant un temps court (3 ms). Cela signifie que nous modifions deux fois le piège magnétique : une

³Notons que le déplacement relatif dans le sens radial des deux minima des champs magnétiques du MOT et du piège peut être évalué en observant justement les oscillations dans la direction radiale que connaît le condensat.

première fois pour créer un piège dont le minimum est déplacé et/ou un piège comprimé dans la direction transverse ; une seconde fois pour revenir à la configuration initiale du piège magnétique en l'absence du gradient créé par les bobines du PMO.

Dès lors, le déplacement du centre de masse du condensat selon la direction longitudinale n'est pas égal à celui du déplacement du minimum de champ magnétique lors de l'application du gradient. En effet, si le gradient ajouté change (presque) immédiatement la position du minimum du piège, il faut au contraire un certain temps au condensat pour se déplacer vers le nouveau minimum. En 3 ms, le nuage d'atome n'a pas le temps d'atteindre le nouveau minimum de champ magnétique et son déplacement est inférieur à celui du minimum du piège. Le déplacement typique du condensat que nous avons utilisé pour engendrer des oscillations dipolaires est de l'ordre de 15 à 20 μm .

De même, il n'existe pas un parallèle exact entre la modification de la fréquence transverse du piège que nous pouvons calculer à partir de la connaissance du gradient magnétique ajouté et l'amplitude des oscillations dipolaires générées dans le condensat avec l'application durant 3 ms d'un gradient magnétique. Typiquement nous engendrons des oscillations quadrupolaires dont l'amplitude correspond à des anisotropies du nuage de 15 à 30%.

Cependant, les amplitudes du déplacement du centre de masse du condensat et l'amplitude de la déformation du nuage varient avec la valeur du gradient magnétique créé avec les bobines du PMO. Nous conservons donc bien ainsi un contrôle sur ces amplitudes.

5.1.2 Décalage des fréquences propres dans un potentiel aléatoire

Dans ce paragraphe, nous présentons les mesures de fréquence des modes d'oscillation dipolaire et quadrupolaire d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'un potentiel aléatoire 1D selon la direction longue du piège magnétique. Le potentiel aléatoire est créé avec le dispositif optique de tavelures décrit dans la partie 2. L'amplitude $\gamma = V_R/\mu_{\text{TF}}$ du potentiel aléatoire est faible, $\gamma \ll 1$, de façon à éviter tout effet de piégeage sur une modulation unique du potentiel aléatoire. La longueur de corrélation du potentiel aléatoire dans la direction longitudinale du condensat (axe $0z$) est égale à $\Delta z = 1.1(1) \mu\text{m}$ (voir paragraphe 2.4.3). La direction transverse selon laquelle nous observons des oscillations dipolaires (axe $0x$) n'est pas un axe propre du champ de tavelures. En effet, la direction de propagation de la lumière laser (axe $0x'$) créant les tavelures est orientée avec un angle de 20 degrés par rapport à l'horizontale (axe $0x$). Les grains de tavelures sont donc orientés avec un angle de 20 degrés par rapport à l'axe transverse $0x$ (voir la figure 5.2) et il faut tenir compte de cet angle pour calculer la taille des grains selon la direction $0x$. Nous obtenons selon l'axe transverse $0x$ des images par absorption $\Delta x \simeq 21 \mu\text{m}$. Rappelons que nous avons alors $\Delta x \simeq 21 \mu\text{m} \gg R_{\text{TF}} = 1.5 \mu\text{m}$ et $\Delta y \simeq 23 \mu\text{m} \gg R_{\text{TF}} = 1.5 \mu\text{m}$, de telle sorte que le potentiel aléatoire est bien uni-dimensionnel.

5.1.2.1 Mesures expérimentales

La séquence expérimentale est la suivante. Après avoir créé un condensat de Bose-Einstein désordonné à l'équilibre comme nous l'avons décrit précédemment (voir le paragraphe 3.3.4), nous appliquons le gradient magnétique issu des bobines du PMO pendant 3 ms. Une fois le gradient magnétique coupé, le piège magnétique est identique au piège initial. Nous prenons pour

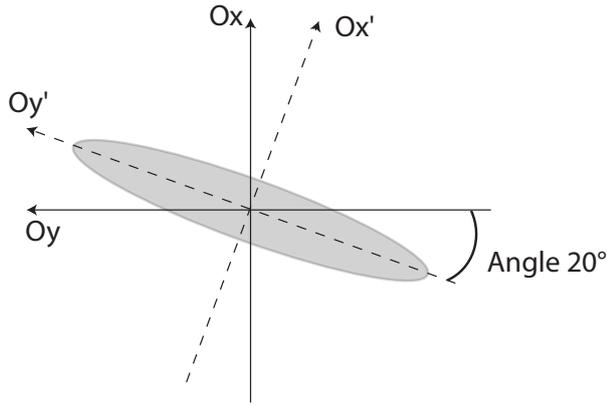


FIG. 5.2 – Image schématique d'un grain de tavelures sur notre dispositif expérimental : il est orienté avec un angle de 20 degrés par rapport à l'axe transverse Ox du système d'imagerie par absorption. Dans cette configuration, les longueurs de corrélation du potentiel aléatoire sont $\Delta y' = 54(1) \mu\text{m}$, $\Delta x' = 8.8(1) \mu\text{m}$ et $\Delta x = 21(1) \mu\text{m}$.

origine du temps τ d'oscillation, $\tau = 0$, l'instant de la coupure du gradient magnétique. Après un temps τ non nul pendant lequel le condensat oscille dans le piège magnétique, nous coupons brutalement ce dernier et prenons une image par absorption après un temps de vol (voir 3.3.3.2).

Oscillations dipolaires

Nous observons le mouvement du centre de masse du condensat dans le référentiel du laboratoire à partir des images par absorption après temps de vol. Le centre de masse du nuage est mesuré en prenant le centre de l'ajustement parabolique du profil de densité (régime de Thomas-Fermi, voir 3.3.3.3). Nous traçons alors l'évolution de la position de ce centre de masse en fonction du temps d'oscillation τ passé dans le piège magnétique. Nous avons répété des mesures d'oscillation au cours du temps τ pour différentes amplitudes du potentiel aléatoire. Dans ces expériences, le potentiel aléatoire est un potentiel optique de tavelures 1D selon la direction longue du condensat.

La figure 5.3 présente le résultat de ces mesures. Les images **a)-c)** montrent les oscillations dipolaires selon la direction longitudinale Oz du piège magnétique pour trois amplitudes du potentiel aléatoire 1D : $\gamma = 0$, $\gamma = 0.04$ et $\gamma = 0.15$. En l'absence de potentiel aléatoire, la fréquence du mode dipolaire est égale à celle du piège longitudinal, $\omega_{D,z} = \omega_z$ [133]. Nous mesurons la valeur expérimentale de ω_z de notre piège magnétique en utilisant de telles oscillations dipolaires. Nous mesurons $\nu_{D,z} = 6.75(7)$ Hz. En présence d'un potentiel aléatoire faible, la fréquence du mode dipolaire dans la direction longue ne varie pas aux incertitudes de mesures près. Les barres d'erreur sur la mesure de la fréquence du mode dipolaire longitudinal permettent d'affirmer que la fréquence de ce mode ne varie pas plus de 2.5% en présence du potentiel aléatoire.

Les images **d)-f)** présentent les oscillations du centre de masse dans la direction transverse du piège magnétique. En l'absence de potentiel aléatoire ($\gamma = 0$) nous obtenons une mesure la fréquence transverse ω_{\perp} du piège magnétique, $\nu_{D,x} = 665(5)$ Hz. Selon cette direction transverse (Ox) la longueur de corrélation du potentiel aléatoire est égale à $\Delta x = 21(1) \mu\text{m}$, soit bien supérieure à la taille transverse du condensat $2R_{\text{TF}} = 3 \mu\text{m}$. Nous pouvons donc considérer que le potentiel est homogène sur la taille transverse du condensat. Le nuage d'atomes se déplace néanmoins sur une distance de l'ordre de $40 \mu\text{m}$ égale à 2 fois la longueur de corrélation. En présence du potentiel aléatoire [images **e)-f)**], la fréquence du mode dipolaire transverse n'est

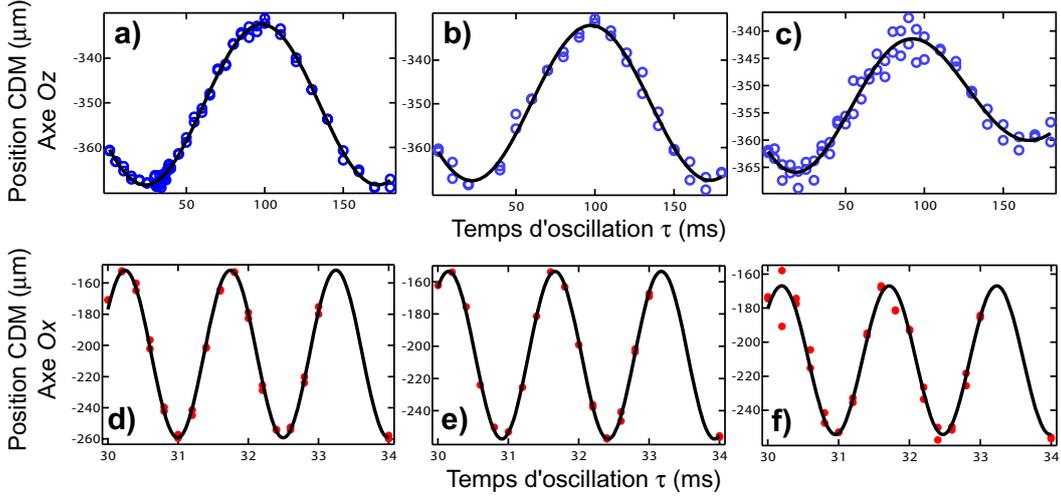


FIG. 5.3 – Oscillations dipolaires **a)-c)** Oscillations de la position du centre de masse selon la direction longitudinale Oz du condensat pour des amplitudes du potentiel aléatoire $\gamma = 0$, $\gamma = 0.04$ et $\gamma = 0.15$. Les fréquences du mode dipolaire des images **a)-c)** valent $\nu_{D,z} = 6.75(7)$ Hz, $6.67(18)$ Hz et $6.76(25)$ Hz respectivement. **d)-e)** Oscillations de la position du centre de masse selon la direction radiale Ox du condensat pour des amplitudes du potentiel aléatoire $\gamma = 0$, $\gamma = 0.04$ et $\gamma = 0.15$. Les fréquences du mode dipolaire des images **d)-f)** valent $\nu_{D,x} = 665(5)$ Hz, $662(6)$ Hz et $659(14)$ Hz.

pas modifiée aux incertitudes de mesures près. Dans cette direction, la précision du décalage en fréquence est de 1.5%. Si le potentiel aléatoire n'est pas strictement homogène sur toute la distance parcourue par le condensat (il l'est sur la taille du condensat), ce déplacement sur une distance $2 \times \Delta x$ ne perturbe pas l'oscillation dipolaire.

Il est intéressant de noter dès à présent l'apparition d'une relaxation du mode d'oscillation dipolaire dans la seule direction du potentiel aléatoire 1D [figure 5.3c)]. Nous reviendrons sur ce point au cours d'une étude systématique de cet amortissement au paragraphe 5.1.3. Nous observons que lorsqu'un amortissement apparaît [figure 5.3c)], la dispersion des points de mesure de la position du centre de masse du condensat est plus importante.

Oscillations quadrupolaires

Nous avons effectué une mesure des oscillations quadrupolaires générées dans le condensat de Bose en l'absence et en présence du même potentiel aléatoire 1D que celui utilisé pour les oscillations dipolaires. Sur la figure 5.4, nous traçons l'évolution temporelle du rapport d'aspect R_{TF}/L_{TF} des tailles du condensat au cours des oscillations dans le piège magnétique. Le mode de respiration du nuage apparaît très clairement sous la forme d'une oscillation de son rapport d'aspect.

En l'absence de potentiel aléatoire, la fréquence du mode quadrupolaire mesurée est $\nu_Q = 10.62(7)$ Hz. Sa valeur correspond donc bien à la fréquence attendue pour le mode dipolaire $\sqrt{5/2} \omega_z \simeq 2\pi \times 10.65$ Hz. En présence d'un potentiel aléatoire 1D d'amplitude $\gamma = 0.10$,

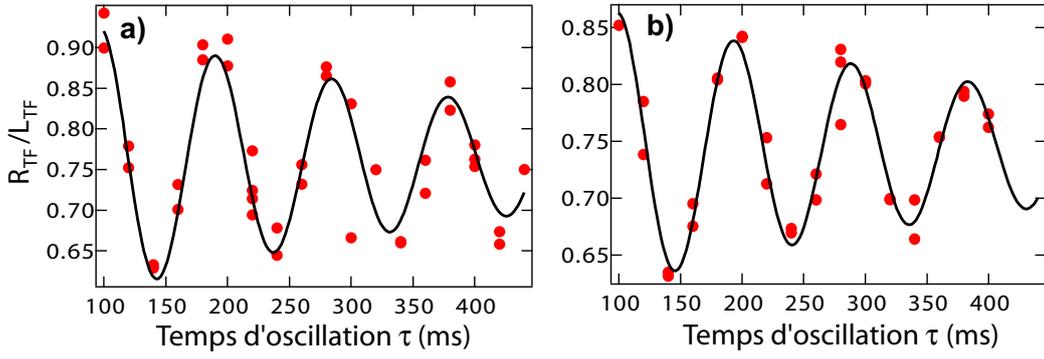


FIG. 5.4 – *Oscillations quadrupolaires* **a)** En l'absence de potentiel aléatoire : $\nu_Q = 10.62(7)$ Hz. **b)** En présence d'un potentiel aléatoire d'amplitude $\gamma = 0.10$: $\nu_Q = 10.53(8)$ Hz.

nous mesurons $\nu_Q = 10.53(8)$ Hz. Ainsi, nous n'observons pas de décalage en fréquence sur le mode quadrupolaire aux erreurs de mesures près. La précision expérimentale sur la mesure de la fréquence du mode quadrupolaire est de 0.7%. Elle est donc meilleure que celle sur la mesure de la fréquence du mode dipolaire mais nous n'observons pourtant pas de décalage en fréquence en présence du potentiel aléatoire.

Aux incertitudes de mesures près (seulement 0.7% sur la fréquence du mode quadrupolaire), nos observations expérimentales des modes dipolaires et quadrupolaire nous conduisent à conclure à l'absence d'un décalage de la fréquence propre de ces modes en présence d'un potentiel aléatoire 1D. Nous présentons dans le paragraphe suivant 5.1.2.2 le calcul du décalage induit par la présence d'un potentiel aléatoire proposé dans [88]. Ce calcul est basé sur la règle des sommes. Nous discuterons ensuite au paragraphe 5.1.2.3 nos résultats expérimentaux et les comparerons à ceux obtenus dans le groupe de M. Inguscio à Florence, où un décalage en fréquence dû à la présence d'un potentiel aléatoire a été observé [88].

5.1.2.2 Calcul des fréquences propres avec la règle des sommes

Le formalisme de la théorie de la réponse linéaire permet un calcul des fréquences propres des modes collectifs en présence d'un potentiel aléatoire par une approche différente de celle basée sur les équations hydrodynamiques (5.1-5.2). Cette méthode, appelée règle des sommes, permet également de retrouver la valeur des fréquences des modes d'oscillations en l'absence de potentiel aléatoire, dont nous avons donné la valeur au paragraphe 5.1.1.1 [28, 180].

La technique de la règle des sommes nécessite la définition des moments en énergie du facteur de forme dynamique S_F associé à un opérateur F quelconque :

$$m_p = \int_0^\infty dE S_F(E) E^p, \quad S_F(E) = \sum_j |\langle j|F|0 \rangle|^2 \delta(E - E_{j0}).$$

L'opérateur F décrit l'action effectuée sur le système dont on veut calculer la réponse dans le formalisme de la réponse linéaire. Le rapport des moments m_p permet de donner une limite supérieure à l'énergie des états excités par l'opérateur F . Par exemple, considérant les énergies

du fondamental E_0 et du premier état excité E_1 il est possible de montrer que l'inégalité suivante doit être respectée [180] :

$$(\hbar\omega = E_1 - E_0)^2 \leq m_3/m_1. \quad (5.8)$$

Cette valeur supérieure de l'énergie de l'excitation (m_3/m_1 dans notre cas) est très proche de l'énergie exacte du mode d'oscillation lorsque ce dernier est très collectif. Ainsi cette méthode de la règle des sommes s'applique bien au cas des oscillations dipolaires et quadrupolaires.

La méthode de la règle des sommes donne donc une information sur la réponse dynamique du système à une excitation. Son intérêt réside dans l'écriture simplifiée qu'il est possible de faire des différents moments m_p en terme de commutateurs. Les différents moments m_p s'écrivent en effet à partir de commutateurs entre l'hamiltonien H du système et l'opérateur d'excitation F^4 . Il vient pour les moments d'ordre 1 et 3 les relations [28] :

$$m_1 = \frac{1}{2} \langle [F^+, [H, F]] \rangle_0 \quad (5.9)$$

$$m_3 = \frac{1}{2} \langle [[F^+, H], [H, [H, F]]] \rangle_0 \quad (5.10)$$

où $\langle \dots \rangle_0$ signifie prendre la moyenne d'un opérateur sur l'état fondamental $|0\rangle$ du système. Il est important de souligner que cette moyenne n'a rien à voir avec la moyenne statistique sur les réalisations du potentiel aléatoire.

En l'absence de potentiel aléatoire, la règle des sommes permet de retrouver les pulsations propres des modes dipolaires et quadrupolaires avec des opérateurs F particuliers [180]. Pour l'oscillation dipolaire selon l'axe long du piège magnétique Oz , l'opérateur s'écrit $F_D = z$. Pour le mode quadrupolaire, il faut utiliser l'opérateur $F_Q = r^2 - \alpha z^2$.

En présence d'un potentiel aléatoire 1D, $V(z)$, nous calculons les différents moments pour l'hamiltonien H du système

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}} + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\psi|^2 + V(z). \quad (5.11)$$

Pour l'opérateur correspondant à l'oscillation dipolaire $F_D = z$, il vient $m_1 = \hbar^2/2m$ et $m_3 - m_3^0 = (\hbar^2/\sqrt{2}m)^2 \langle \partial^2 V(z)/\partial z^2 \rangle_0$ avec m_3^0 le moment d'ordre 3 en l'absence de potentiel aléatoire. Le décalage $\delta\omega_{D,z}^2 = \omega^2 - \omega_{D,z}^2$ sur la pulsation du mode dipolaire induit par la présence du potentiel aléatoire 1D s'exprime alors sous la forme

$$\delta\omega_{D,z}^2 \simeq \frac{1}{m} \langle \partial_z^2 V(z) \rangle_0. \quad (5.12)$$

Pour l'opérateur du mode quadrupolaire $F_Q = r^2 - \alpha z^2$, nous obtenons $m_1 = 2\hbar^2/m (\langle r^2 + \alpha^2 z^2 \rangle_0)$ et $m_3 - m_3^0 = (\sqrt{2}\hbar^2\alpha/m)^2 \langle z\partial_z V + z^2\partial_z^2 V \rangle_0$. Il vient alors :

$$\delta\omega_Q^2 \simeq \frac{1}{m} \frac{\langle z\partial_z V(z) + z^2\partial_z^2 V(z) \rangle_0}{\langle z^2 \rangle_0} \quad (5.13)$$

⁴Il faut noter que le moment -1 ne peut pas s'écrire avec des commutateurs faisant intervenir les opérateurs H et F [180].

avec $\delta\omega_Q^2 = \omega^2 - \omega_Q^2$

Ainsi, le calcul du décalage des fréquences des modes dipolaire et quadrupolaire effectué avec la règle des sommes sur une réalisation du potentiel aléatoire peut être positif ou négatif. Ce signe dépend de la réalisation particulière du potentiel aléatoire considérée. Cette propriété a été mise en évidence expérimentalement dans le groupe de M. Inguscio [88]. Dans cette expérience, le potentiel aléatoire quasi-1D est créé à partir d'un champ optique de tavelures décalé vers le rouge. Les atomes "voient" donc des puits de potentiel. La longueur de corrélation du potentiel aléatoire est $10 \mu\text{m}$ et le condensat s'étend sur 6 puits. Des décalages positifs et négatifs de la fréquence du mode quadrupolaire ont été observés suivant la réalisation du potentiel aléatoire qui est utilisée. L'ordre de grandeur de ces décalages en fréquence est de quelques pour-cents.

Dans notre expérience (voir 5.1.2.1), nous n'avons pas observé de tels décalages en fréquence bien que notre résolution expérimentale soit aussi bonne que celle de l'expérience de Florence [88]. La discussion de ce point particulier est l'objet du paragraphe suivant.

5.1.2.3 Décalage en fréquence et système auto-moyennant

Au paragraphe précédent, le calcul du décalage de la fréquence des modes propres collectifs induit par un potentiel aléatoire par la règle des sommes a été effectué en considérant une *unique* réalisation du désordre. Cela étant, les propriétés liées au caractère aléatoire du désordre acquièrent un sens statistique seulement après avoir été moyennées sur les réalisations du potentiel aléatoire (voir chapitre 1). Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux modifications apportées par le potentiel aléatoire sur la fréquence des modes dipolaire et quadrupolaire au sens statistique. Par là même, nous mettons ainsi en évidence l'effet des seules propriétés statistiques du désordre dans lequel peut se trouver un condensat de Bose-Einstein (et non pas celles qui peuvent être liées à une réalisation particulière du désordre).

Comme nous l'avons mentionné en introduction (voir chapitre 1), le principe ergodique nous offre deux possibilités pour effectuer une moyenne statistique sur le désordre : soit nous effectuons une moyenne sur les réalisations du désordre, soit nous effectuons une moyenne spatiale sur un système suffisamment long (et ainsi suffisamment proche d'un système auto-moyennant). Commençons pas discuter du moyennage sur un grand nombre de réalisation du désordre à partir de calculs numériques effectués par M. Modugno [168].

Un calcul numérique des décalages en fréquence des modes dipolaire et quadrupolaire en présence d'un potentiel aléatoire a été effectué par M. Modugno de deux manières différentes [168]. D'une part, il a appliqué la règle des sommes pour le potentiel aléatoire et le condensat simulés. D'autre part, il a résolu numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii en présence du même potentiel aléatoire. Le bon accord qui est trouvé entre les deux méthodes justifie l'emploi de la règle des sommes dans ce contexte. Les distributions de probabilité des décalages $\Delta\omega_{D,z} = \omega - \omega_{D,z}$ et $\Delta\omega_Q = \omega - \omega_Q$ calculés avec la règle des sommes à partir de 1000 réalisations du potentiel aléatoire dans les conditions expérimentales de [88] sont présentées sur la figure 5.5. Les distributions de probabilité du décalage des modes dipolaire et quadrupolaire sont centrées autour du décalage nul. Elles mettent ainsi clairement en évidence que les propriétés statistiques du potentiel aléatoire n'induisent pas de décalage en fréquence des modes d'oscillation dipolaire et quadrupolaire : une moyenne statistique sur les réalisations du potentiel aléatoire donne un décalage en fréquence nul.

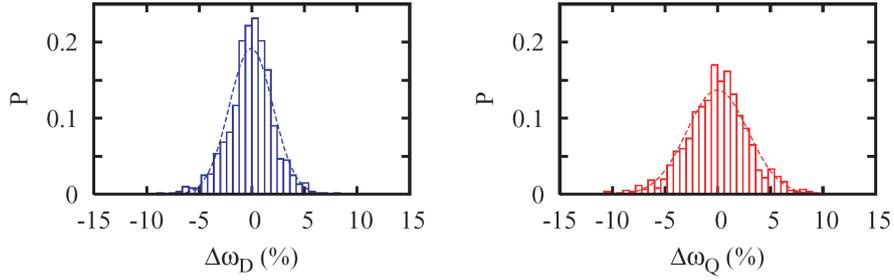


FIG. 5.5 – Images du papier PRA, **73**, 013606 (2006). Distribution de probabilité du décalage en fréquence des modes dipolaire (Δ_D) et quadrupolaire (Δ_Q) calculée avec la règle des sommes pour le dispositif expérimental de Florence [88].

Comme nous l’avons discuté au paragraphe 2.3.4, notre système expérimental peut être considéré auto-moyennant sur la taille du condensat⁵. Dès lors, l’observation que nous faisons sur le mouvement de notre condensat correspond à une moyenne spatiale sur un système auto-moyennant (avec les incertitudes expérimentales, voir 2.3.4). Le résultat obtenu sur l’absence de décalage en fréquence des modes d’oscillation collectifs après un moyennage sur les réalisations du désordre peut ainsi être confirmé par nos mesures expérimentales. En effet, une mesure sur une seule réalisation du désordre correspond, dans notre situation expérimentale, à une moyenne spatiale sur un système auto-moyennant. L’absence de décalage en fréquence des modes d’oscillation que nous avons obtenu expérimentalement s’interprète de cette manière et confirme ainsi le résultat obtenu par une moyenne statistique des résultats expérimentaux [88] et numériques [168] obtenus dans le groupe de Florence.

La présence d’un potentiel aléatoire 1D de faible amplitude (typiquement $\gamma < 0.2$) ne modifie pas la fréquence des modes collectifs d’oscillation d’un condensat de Bose-Einstein. Cependant, un amortissement important des oscillations dipolaires apparaît dans la direction du potentiel aléatoire [voir la figure 5.3c)]. Le paragraphe suivant est dévolu à une étude plus systématique de cet effet.

5.1.3 Amortissement du mode dipolaire en présence de désordre

Lors de notre étude du décalage en fréquence des modes d’oscillation dipolaire (voir 5.1.2) d’un condensat en présence d’un potentiel aléatoire, un amortissement est apparu dans la direction du potentiel aléatoire 1D (axe Oz , voir la figure 5.3)⁶. Nous nous intéressons dans ce paragraphe à cette observation en étudiant de façon plus systématique cet amortissement, en particulier sa dépendance avec l’amplitude du potentiel aléatoire.

Les oscillations dipolaires d’un condensat de Bose-Einstein non-désordonné dans un poten-

⁵Rappelons que nos condensats s’étendent sur près de 300 pics du potentiel aléatoire

⁶Un amortissement similaire a été observé dans le groupe de M. Inguscio à Florence [88]. A notre connaissance il n’a pas fait l’objet d’une étude systématique détaillée.

tiel harmonique (non dissipatif) ne sont pas amorties, et ce que le condensat soit 1D ou 3D. Ce résultat peut être vu comme une conséquence du théorème de Kohn appliqué à un condensat gazeux, théorème qui prédit que les interactions à deux corps ne doivent pas induire d'amortissement du mode dipolaire [28]. Ce résultat a été mis en évidence expérimentalement dans un condensat 3D [169, 170] et un condensat 1D [181] confinés dans des potentiels harmoniques. Il apparaît également dans nos mesures avec un condensat 3D [voir la figure 5.3 a]).

En présence d'un potentiel optique périodique, il a été démontré expérimentalement que les oscillations dipolaires d'un condensat 3D ne présentent pas non plus d'amortissement [158]. Cependant, un fort amortissement de l'oscillation du centre de masse a été observé dans un condensat 1D placé dans un réseau optique périodique [182]. Il est intéressant pour notre propos de rappeler une interprétation qui a été proposée à l'observation de cet amortissement. Dans [183], les auteurs interprètent l'amortissement du mode dipolaire d'un condensat 1D dans un réseau optique comme la signature de la présence d'un potentiel aléatoire. Ce potentiel aléatoire serait créé par la présence d'atomes déplétés (dont la fraction à 1D peut devenir relativement importante alors qu'elle est négligeable à 3D) répartis aléatoirement sur les sites du réseau optique. Ces atomes déplétés ne sont pas entraînés par le mouvement collectif du centre de masse de la partie condensée. Ils contribuent ainsi, via l'interaction inter-atomique, à une énergie potentielle sur site qui change d'un site à l'autre suivant le nombre d'atomes déplétés qui s'y trouvent. Le condensat 1D est alors soumis à un potentiel aléatoire dépendant du temps (*i.e.* du mouvement des atomes déplétés sur les sites du réseau). Ce potentiel aléatoire aurait alors pour effet de coupler le mode dipolaire à d'autres excitations, engendrant ainsi son amortissement. L'étude de l'amortissement du mode dipolaire d'un condensat 3D en présence d'un potentiel optique aléatoire peut peut-être permettre une meilleure compréhension de l'étude réalisée avec un condensat 1D dans un réseau [182]. Elle peut également apporter des éléments intéressants en ce qui concerne la perte de superfluidité en présence de désordre.

Dans un premier paragraphe, nous présentons nos résultats expérimentaux sur le mouvement du centre de masse du condensat de Bose-Einstein 3D dans un potentiel aléatoire 1D d'amplitude faible $\gamma < 1$. Le potentiel aléatoire est créé optiquement à partir d'un champ de tavelures (voir la partie 2) et le mouvement du centre de masse est initié avec l'ajout d'un gradient magnétique dipolaire comme nous l'avons expliqué au paragraphe 5.1.1.2. Nous extrayons ensuite le taux d'amortissement et étudions son comportement en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire. Nous proposons enfin quelques pistes permettant l'interprétation de cette observation. Un travail plus approfondi de l'interprétation de cet amortissement est nécessaire.

Il faut toute de suite préciser que les expériences que nous décrivons ici n'ont pas été réalisées dans des conditions expérimentales parfaites. Nous avons en effet été confrontés à une difficulté dont nous n'avons jusqu'à présent pas pu identifier l'origine, à savoir l'apparition rapide (sur une période $\simeq 1/\omega_z$) d'une fraction thermique lors de l'oscillation dipolaire d'un condensat non-désordonné. Le développement de cette fraction thermique étant identique pour un condensat non-désordonné et pour un condensat en présence d'un potentiel aléatoire, nous estimons que les résultats préliminaires sur l'amortissement du mode dipolaire dans le désordre conservent une signification physique pertinente. Nous discutons ce point plus en détail au paragraphe 5.1.3.3.

5.1.3.1 Observations expérimentales

Nous excitons des oscillations dipolaires selon l'axe long (Oz) et les directions transverses (plan xOy) du condensat désordonné 3D en appliquant un gradient magnétique qui déplace le minimum du piège magnétique et engendre des oscillations du centre de masse du nuage (voir 5.1.1.2). Comme précédemment, nous utilisons les bobines du PMO à cette fin.

Des oscillations dipolaires du condensat dans la direction longitudinale Oz , celle du potentiel aléatoire 1D, sont présentées sur la figure 5.6. Nous traçons la position du centre de masse (CDM) pour différentes amplitudes γ du potentiel aléatoire.

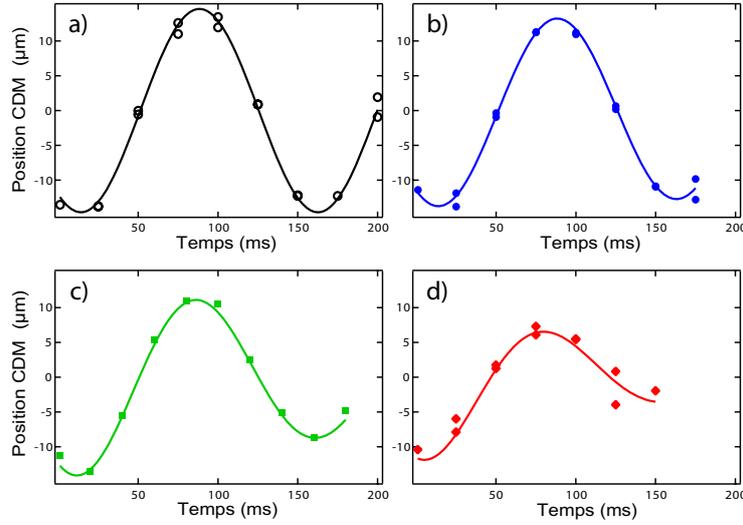


FIG. 5.6 – Oscillations dipolaires dans la direction longitudinale Oz en l'absence [a)] et en présence d'un potentiel aléatoire 1D d'amplitude γ : b) : $\gamma = 0.15$, c) : $\gamma = 0.23$, d) : $\gamma = 0.40$. Les courbes en trait plein correspondent à un ajustement des données expérimentales avec la fonction définie à l'équation 5.14.

Nous observons un fort amortissement de ces oscillations lorsque l'amplitude du potentiel aléatoire augmente. Pour des amplitudes assez faibles $\gamma \simeq 0.2$, l'amortissement est déjà important. Il s'agit bien d'un amortissement puisque la relaxation vers le centre du piège magnétique a bien lieu (voir la figure 5.6). Un effet de piégeage ("pinning" en anglais) est à exclure. Dans le cas d'un potentiel aléatoire d'amplitude plus grande, typiquement $\gamma \sim 1$, un tel effet de piégeage du condensat a été observé lors de mesures similaires sur le mode dipolaire [88]. Dans nos expériences, nous ne nous sommes pas placés dans cette situation où la relaxation des oscillations du centre de masse ne se fait pas vers le centre (minimum) du piège magnétique.

Il faut souligner le fait que la vitesse du centre de masse du condensat est inférieure à la vitesse critique de la perte de superfluidité au sens de Landau (voir le paragraphe 5.2.1.2). Cette vitesse critique est égale à la vitesse du son qui dans notre expérience est égale à $c_{\text{son}} \simeq 2.5 \text{ mm.s}^{-1}$. Or la vitesse maximum acquise par le condensat au cours des oscillations dipolaires (celle qui correspond au passage du condensat au minimum du piège magnétique) est égale à $v_{\text{max}} \simeq 0.5 \text{ mm.s}^{-1}$. Il ne semble donc pas qu'un simple argument concernant la perte de

superfluidité puisse expliquer notre observation. Nous discuterons cette question au paragraphe 5.1.3.3.

Selon la direction transverse du condensat (axe Ox), les oscillations dipolaires ne sont pas amorties. Dans cette direction, le potentiel aléatoire 1D vu par les atomes du condensat est uniforme sur la taille du nuage. Rappelons cependant que lors des oscillations, le condensat voit un potentiel qui varie lentement puisque l'amplitude de ces dernières est égale à deux fois la longueur de corrélation $\Delta x = 21 \mu\text{m}$ (voir 5.1.2). En présence d'un potentiel aléatoire de grande amplitude ($\gamma = 0.4$) pour lequel l'amortissement est très important dans la direction longitudinale (voir figure 5.6), nous n'observons pas d'amortissement dans la direction transverse (voir figure 5.7). Même après un temps d'oscillation supérieur à 100 ms qui correspond à plus de 65 oscillations dipolaires dans la direction transverse, aucun amortissement n'est détecté selon cette direction.

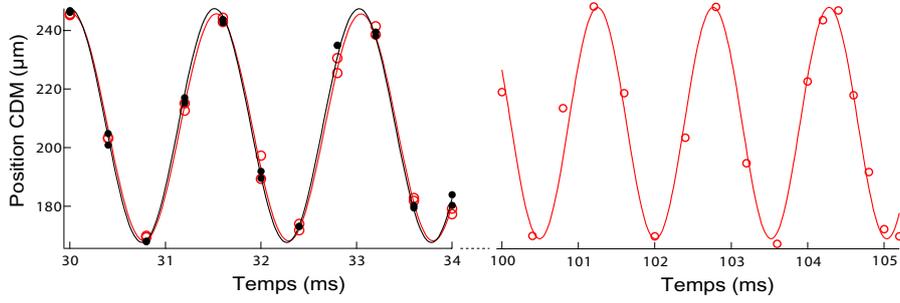


FIG. 5.7 – Oscillations dipolaires dans la direction transverse Ox en l'absence (ronds noirs \bullet) et en présence d'un potentiel aléatoire 1D d'amplitude $\gamma = 0.4$ (cercles rouges \circ). Les courbes en trait plein correspondent à un ajustement des données expérimentales avec une fonction sinusoïdale du temps.

Nous concluons de cette observation dans la direction transverse que le potentiel optique aléatoire 1D ne crée aucune forme de chauffage du nuage induisant un amortissement. L'amortissement observé dans la direction longitudinale vient donc de la présence des modulations du potentiel aléatoire. De plus, il semble bien que ce soit le caractère désordonné du potentiel qui entre en jeu puisque dans un réseau optique aucun amortissement dans un condensat 3D n'est observé [158]. Nous allons maintenant extraire des données expérimentales selon la direction longitudinale un taux d'amortissement.

5.1.3.2 Taux d'amortissement

A partir de l'évolution temporelle de la position du centre de masse du condensat (figure 5.6), nous extrayons un taux d'amortissement Γ . Pour cela nous effectuons un ajustement des données expérimentales avec la fonction

$$A \sin(\omega_z t + \phi) \exp(-\Gamma t) \quad (5.14)$$

où l'amplitude A , la phase ϕ et le taux d'amortissement Γ sont des paramètres ajustables. Les courbes en trait plein sur la figure 5.6 correspondent aux ajustements des différentes oscillations

dipolaires avec cette fonction. Nous traçons sur la figure 5.8 l'évolution du taux d'amortissement Γ en fonction du carré de l'amplitude du potentiel aléatoire.

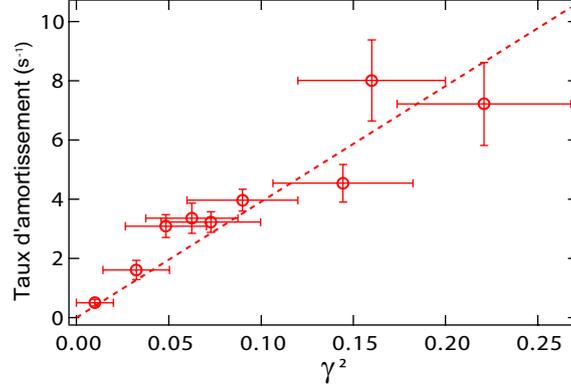


FIG. 5.8 – Taux d'amortissement Γ des oscillations dipolaires selon la direction du potentiel aléatoire 1D en fonction du carré de l'amplitude γ de ce dernier.

Le taux d'amortissement Γ du mode dipolaire selon la direction du potentiel aléatoire 1D croît linéairement avec le carré de l'amplitude γ . Γ est donc proportionnel à $\sigma_V^2 = \langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2$, ce qui n'est pas sans rappeler le théorème de fluctuation-dissipation qui relie la dissipation (l'amortissement) au carré de la déviation standard des fluctuations (soit σ_V^2 ici). Ce point est abordé au paragraphe suivant 5.1.3.3.

L'amortissement observé pour des amplitudes du potentiel relativement grandes, *i.e.* $0.2 < \gamma < 0.5$, peut avoir pour origine la fragmentation d'une partie du condensat. En effet, l'amplitude typique maximum des modulations du potentiel aléatoire étant de l'ordre de 5γ , il est possible que le condensat soit fragmenté lorsque $\gamma > 0.2$. Cela étant, l'apparition d'un amortissement a lieu pour des amplitudes plus faibles du potentiel aléatoire (typiquement $\gamma \simeq 0.05$). Pour de si faibles amplitudes, le condensat désordonné ne se trouve pas dans un régime de fragmentation et une autre explication au phénomène d'amortissement du mode dipolaire est nécessaire. Nous présentons dans le paragraphe suivant quelques pistes possibles d'investigation pour comprendre ce phénomène.

5.1.3.3 Quelques pistes d'interprétations

A notre connaissance, l'amortissement du mode dipolaire d'un condensat 3D dans un potentiel aléatoire 1D n'a pas encore fait l'objet d'une étude théorique détaillée. Nous essayons d'éclaircir quelques points et donner quelques pistes pour l'interprétation de ce phénomène dans les quelques lignes qui suivent.

Amortissement dû à l'apparition d'une partie thermique ?

En l'absence d'un potentiel aléatoire, les oscillations du centre de masse du condensat ne sont pas amorties. Nos mesures expérimentales confirment cette observation. Cela étant, comme

le montre la figure 5.3a) nous avons restreint l'étude de ces oscillations dipolaires à la seule première oscillation. La raison expérimentale tient à la modification de la forme du condensat lors de son oscillation. Nous avons observé que la densité atomique décroît et le nuage s'étale au cours de l'oscillation dipolaire. Il faut souligner qu'il n'est pas évident d'interpréter cette observation expérimentale sans ambiguïté. En effet, celle-ci pourrait être due aussi bien à l'apparition d'une partie thermique lors des oscillations qu'au peuplement de modes du condensat de fréquence plus élevée que celui du mode dipolaire. L'origine de cette déformation du condensat initial au cours de l'oscillation dipolaire pourrait être liée à la présence du couteau radio-fréquence à la valeur de la fréquence finale du processus d'évaporation puisque lors des oscillations dipolaires les atomes se déplacent dans une zone du piège magnétique où le couteau radio-fréquence (RF) peut alors coupler les atomes piégés vers un état non-piégeant. Si tel est le cas, nous aurions pu éviter cet effet en ajustant, pendant les oscillations dipolaires du condensat, la fréquence du couteau RF à une valeur supérieure à celle de la fin du cycle d'évaporation.

Pour caractériser cette déformation, nous avons effectué un ajustement de la densité atomique 2D avec une double structure condensat+nuage thermique (*i.e.* parabole inversée + gaussienne, voir 3.3.3.3). En l'absence de potentiel aléatoire, le nombre d'atomes présents dans la partie "thermique" de l'ajustement (la partie gaussienne) croît au cours du temps d'oscillation (voir la figure 5.9). Notons qu'en présence de cette effet de déformation du condensat, un ajustement avec une double structure condensat+nuage thermique a été effectué pour identifier le centre du condensat (*i.e.* le centre de la parabole inversée).

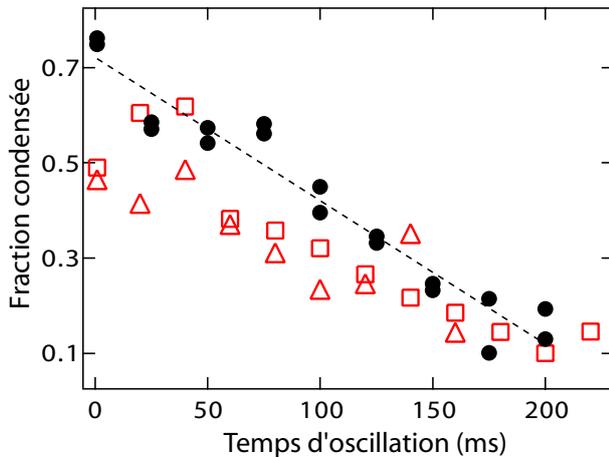


FIG. 5.9 – Evolution de la déformation du condensat au cours des oscillations dipolaires à travers la mesure de la fraction condensée obtenue en ajustant la densité 2D avec une double structure parabole+gaussienne. Les ronds noirs (lozenges et carrés rouges) correspondent respectivement à l'absence de potentiel aléatoire (à la présence d'un potentiel aléatoire 1D d'amplitude $\gamma = 0.22$ et $\gamma = 0.40$).

En présence d'un potentiel aléatoire, nous observons également une déformation du condensat identique à travers la mesure du nombre d'atomes peuplant la partie gaussienne de l'ajustement. La figure 5.9 montre l'évolution temporelle du nombre d'atomes peuplant la partie gaussienne de l'ajustement pour deux amplitudes du potentiel aléatoire. Cette "fraction non-condensée" en présence d'un potentiel aléatoire d'amplitude quelconque évolue de façon quasi identique à celle d'un condensat non-désordonné. Le potentiel aléatoire n'induit donc pas un accroissement de la déformation observée par rapport à celle qui est présente lors de l'oscillation d'un condensat non-désordonné (accroissement de l'ordre de 5%). Qui plus est, l'échelle de temps sur laquelle a lieu la décroissance de cette "fraction condensée" est identique en l'absence et en présence de potentiel aléatoire.

Les résultats que nous présentons sont donc à considérer sous l'angle de ce problème experi-

mental non résolu. Nous ne pouvons donc pas conclure formellement à l'absence d'un chauffage du condensat induit par la rugosité du potentiel aléatoire. Nous pensons cependant que l'amortissement du mode dipolaire d'un condensat oscillant dans un potentiel aléatoire que nous observons reste intéressant à discuter.

Des calculs numériques effectués par M. Modugno de l'équation de Gross-Pitaevskii en présence d'un potentiel aléatoire ont montré un amortissement des oscillations dipolaires [168]. En effet, dans le cas d'un déplacement important du condensat initial (50% de la taille L_{TF} du condensat piégé), un fort amortissement apparaît et dont l'origine est liée à la rugosité du potentiel selon l'auteur. En revanche, il faut noter que pour de faibles amplitudes des oscillations du centre de masse (11% de la taille L_{TF} du condensat piégé), ces mêmes calculs numériques ne mettent en évidence ni amortissement ni chauffage du condensat.

Dans nos expériences, le déplacement initial du condensat est de $15 \mu\text{m}$ (voir la figure 5.6) à comparer à la taille initiale du condensat égale à $L_{TF} = 150 \mu\text{m}$. Nous nous trouvons donc dans la situation des calculs numériques de M. Modugno où ni amortissement ni chauffage ne devraient apparaître. Or, si nous n'observons pas de chauffage supplémentaire induit par le potentiel aléatoire, nous observons un amortissement du mode dipolaire, et ce même pour de faibles amplitudes du potentiel aléatoire.

Il est probable que la différence entre les calculs numériques sus-cités [168] et notre situation expérimentale vienne de la longueur de corrélation du potentiel aléatoire. En effet, dans les calculs numériques la taille longitudinale L_{TF} du condensat est 5 plus grande que la longueur de corrélation Δz du potentiel aléatoire, $L_{TF} = 5\Delta z$, alors que dans notre expérience le rapport de ces deux longueurs est de l'ordre de 150, $L_{TF} = 150\Delta z$. La question (à laquelle nous ne pouvons pas répondre expérimentalement avec certitude à cause du problème lié à la déformation du condensat) consiste à savoir si l'amortissement que nous observons est lié ou non à l'apparition d'une fraction thermique importante dans le nuage oscillant.

Pour répondre à cette question, il est possible, d'une part, de résoudre numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii dans notre cas expérimental où la longueur de corrélation du potentiel aléatoire est très faible devant la taille du condensat, et, d'autre part, de réaliser de nouvelles expériences où il n'y a pas de déformation lors des oscillations dipolaires du condensat non-désordonné. Avec cette situation expérimentale, il serait possible de conclure sur l'apparition ou non d'une fraction thermique induite par la présence du potentiel aléatoire.

Couplage entre différents modes de basse énergie ?

Une autre piste pour l'analyse du phénomène d'amortissement en présence d'un potentiel aléatoire consiste à calculer le couplage induit par le désordre entre le mode dipolaire et d'autres excitations du condensat. Comme le suggère le travail théorique concernant l'oscillation d'un condensat 1D dans un réseau optique [183], le potentiel aléatoire pourrait induire un tel couplage et par là même engendrer un amortissement du mode dipolaire qui serait ainsi dépleulé. Une telle approche pourrait envisager de calculer avec la règle d'or de Fermi le couplage du mode dipolaire vers le continuum d'excitations du spectre d'un condensat désordonné. Une telle analyse recouvrerait certainement la dépendance linéaire de l'amortissement Γ avec le carré de la déviation standard σ_V^2 de l'amplitude du potentiel aléatoire.

Dans cette optique, il serait également intéressant de faire le lien avec des travaux théoriques qui ont traité de l'amortissement des phonons dans un potentiel aléatoire de faible amplitude [95, 97].

5.2 Vitesse du son dans un condensat désordonné

Nous présentons dans ce paragraphe une mesure de la vitesse du son dans un condensat de Bose-Einstein désordonné. Cette mesure est effectuée en observant la propagation d'un pic de densité sur le nuage atomique. Ce paragraphe poursuit donc l'étude précédente sur les modes collectifs dipolaire et quadrupolaire en élargissant le domaine d'investigation à une nouvelle forme d'excitations : la propagation d'ondes sonores dans un condensat désordonné.

Après avoir rappelé quelques résultats généraux sur la vitesse du son au sens de Landau et la vitesse critique associée au caractère superfluide d'un condensat, nous présentons la technique expérimentale utilisée pour engendrer la propagation d'une onde de densité et nous caractérisons cette dernière. Enfin, les résultats de nos mesures de la vitesse du son en l'absence et en présence d'un potentiel aléatoire sont présentés et discutés.

5.2.1 Superfluidité et vitesse du son dans un condensat de Bose-Einstein

Nous rappelons ici, d'une part, la valeur de la vitesse du son dans un condensat de Bose-Einstein gazeux à partir de la description hydrodynamique de celui-ci, et, d'autre part, la vitesse critique, au sens de Landau, du condensat superfluide.

5.2.1.1 Equations hydrodynamiques et vitesse du son

Au chapitre 3 (paragraphe 3.2.2), nous avons dérivé les équations hydrodynamiques pour un condensat dans le régime de Thomas-Fermi. Ces deux équations sont similaires à celles qui décrivent la dynamique d'un superfluide à température nulle [59] et le condensat acquiert dans ce régime un caractère superfluide. La combinaison de ces deux équations permet d'écrire (en linéarisant les équations) une équation du second ordre sur les modulations de densité $\delta n = n - n_0$, n_0 étant le profil de Thomas-Fermi dans le piège magnétique, [155] :

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = \nabla \cdot [c^2(\mathbf{r}) \nabla \delta n]. \quad (5.15)$$

La quantité $c(\mathbf{r})$, homogène à une vitesse, est telle que $mc^2(\mathbf{r}) = \mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$. L'équation précédente (5.15) est analogue à l'équation de propagation d'une onde sonore à la vitesse $c(\mathbf{r})$. Ainsi elle définit une vitesse du son locale, $c(\mathbf{r})$, dans le nuage atomique qui dépend de la position \mathbf{r} . Les solutions de l'équation (5.15) dans le cas d'un système homogène ($V_{\text{ext}} = 0$) sont des ondes sonores se propageant à la vitesse $c_{\text{son}} = \sqrt{\mu/m} = \sqrt{gn_0/m}$ [133]. Remarquons qu'il est nécessaire que la longueur d'onde des solutions de l'équation de propagation (5.15) soit grande devant la longueur de relaxation ξ du condensat (régime phonon du spectre de Bogoliubov). Dans le cas où cette condition n'est pas respectée l'équation de propagation linéarisée n'est pas valide. La présence d'interactions est ainsi nécessaire dans la description hydrodynamique du

fluide qu'est le condensat de Bose-Einstein⁷.

Dans un piège harmonique, des ondes sonores peuvent également se propager dans le cas où leur longueur d'onde est inférieure à la taille du système. Elles sont alors solution de l'équation (5.15) lorsque deux conditions de validité sur leur vecteur d'onde q sont remplies : $qL \gg 1$ et $q\xi \ll 1$ [L étant la taille longitudinale du système]. Si le piège a une forme de cigare anisotrope⁸, $\omega_{\perp} \gg \omega_z$, des ondes sonores unidimensionnelles peuvent se propager avec un vecteur d'onde q tel que $qL_{\text{TF}} \gg 1$ et $qR_{\text{TF}} \ll 1$. Dans une telle situation anisotrope, la vitesse du son d'une onde longitudinale est modifiée par rapport à celle du cas uniforme et il vient [184, 185] :

$$c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{gn_0(0)}{2m}}, \quad (5.16)$$

Le facteur 2 supplémentaire de l'équation (5.16) par rapport au cas homogène ($c_{\text{son}} = \sqrt{\mu/m} = \sqrt{gn_0/m}$) vient de la présence du confinement harmonique radial. En effet, la vitesse du son que nous avons définie dans le cas homogène, $c = \sqrt{g\bar{n}/m}$, fait en toute rigueur intervenir la densité \bar{n} moyennée dans la direction radiale. Avec le confinement harmonique, il vient alors $\bar{n} = n_0(0)/2$ où $n_0(0)$ est la valeur de la densité 3D du profil de Thomas-Fermi au centre du nuage.

5.2.1.2 Vitesse critique d'un condensat superfluide

Le caractère superfluide d'un gaz ou d'un fluide se caractérise par l'absence de dissipation lors de son écoulement. Les travaux de Landau sur les superfluides ont démontré l'existence d'une vitesse critique en dessous de laquelle l'écoulement autour d'un obstacle se fait sans dissipation [25]. Cette vitesse critique proposée par Landau est liée au spectre d'excitations dans le superfluide. Notant $E(q)$ l'énergie du mode d'impulsion q , la vitesse critique est définie par $c_0 = \min_q [E(q)/q]$: en dessous de cette vitesse c_0 , le fluide ne peut pas émettre d'excitations⁹ lors de son écoulement autour d'un obstacle et il s'écoule alors sans dissipation.

Il faut noter que la définition de la vitesse critique c_0 est obtenue dans le cadre d'une théorie perturbative. Dans le cas où des effets non-linéaires doivent être pris en compte dans le fluide, la vitesse critique peut être inférieure à celle définie par Landau. En effet, la formation de vortex (ou de solitons à 1D) dans de tels fluides induit une dissipation à une vitesse inférieure à c_0 . Des expériences menées dans l'Hélium II ont mis en évidence l'existence de cette vitesse critique [186] et son lien avec la formation de vortex [187].

Les condensats de Bose-Einstein gazeux ont également été utilisés pour tester la vitesse critique de Landau de la superfluidité. La démonstration de l'existence d'une vitesse critique [188, 189] ainsi que sa dépendance avec la présence de vortex [190] dans les gaz ultra-froids ont été vérifiés. Il faut noter que la vitesse critique au sens de Landau dans un condensat de

⁷Voir paragraphe 3.2.2

⁸Le calcul est effectué en considérant un cylindre, *i.e.* un confinement radial parabolique et un potentiel longitudinal homogène.

⁹Plus exactement, d'un point de vue énergétique, le superfluide a intérêt à ne pas créer d'excitations.

Bose-Einstein dépend du caractère attractif ou répulsif de l'obstacle autour duquel s'écoule le condensat [191].

Dans un condensat de Bose-Einstein, la vitesse critique de Landau s'identifie avec la vitesse du son. En effet, le spectre de Bogoliubov d'un condensat se met sous la forme $E(q) = q\sqrt{c_{\text{son}}^2 + q^2/4}$ où c_{son} est la vitesse de propagation des ondes sonores dans le nuage atomique condensé [133] : nous obtenons alors $c_0 = c_{\text{son}}$. Remarquons une nouvelle fois que le caractère superfluide d'un condensat vient de la présence des interactions inter-atomique responsables de la forme du spectre à basse énergie (de type phonon). En l'absence d'interactions, le spectre de particules libres étant quadratique ($\propto q^2$), la vitesse critique au sens de Landau est nulle et un tel fluide n'est superfluide qu'à l'état stationnaire lorsqu'un grand nombre de bosons en peuplent l'état fondamental. Au contraire, pour tout mouvement du fluide, aussi petite que soit sa vitesse, le comportement superfluide disparaît avec l'apparition d'une viscosité non nulle.

5.2.2 Création d'un pic de densité

L'étude de la vitesse du son qui a été réalisée dans le groupe de W. Ketterle [20] avait pour origine la création d'une perturbation de densité engendrant deux pics de densité contre-propageants. La perturbation induite sur le profil de densité du condensat à l'équilibre était engendrée par la présence d'un faisceau laser focalisé sur le nuage d'atomes. L'observation du déplacement de ces pics de densité a permis d'en mesurer la vitesse de propagation et de comparer cette dernière avec la vitesse du son attendue dans un condensat de Bose-Einstein atomique.

Dans notre expérience, nous utilisons une propriété liée au caractère superfluide d'un condensat de Bose pour engendrer un pic de densité. Comme nous l'avons rappelé au paragraphe précédent 5.2.1.2, l'écoulement d'un condensat autour d'un obstacle est superfluide seulement au dessous d'une certaine vitesse critique. Nous présentons dans ce paragraphe l'utilisation que nous avons faite de la présence d'un couteau radio-fréquence¹⁰ comme obstacle permettant de briser la superfluidité du condensat et d'engendrer un pic de densité se propageant sur le nuage atomique.

5.2.2.1 Un obstacle pour le condensat

L'obstacle que nous déplaçons dans le condensat, dans le but de modifier le profil de densité de ce dernier, est le point de l'espace où le couteau radio-fréquence de la phase de refroidissement évaporatif est résonant avec les atomes se trouvant dans le piège magnétique. Afin de déplacer le point de l'espace où le couteau évapore les atomes un gradient magnétique est appliqué alors que le condensat se trouve dans le piège magnétique allongé [voir la figure 5.10a)]. L'application du gradient magnétique déplace également le centre du piège harmonique. Nous nous plaçons dans une situation expérimentale où le condensat peut être considéré (presque) immobile¹¹ : le temps d'application du gradient magnétique ($\simeq 3$ ms) est court devant le temps de relaxation

¹⁰Il s'agit du couteau radio-fréquence permettant d'effectuer le processus d'évaporation conduisant à la condensation.

¹¹Le condensat n'est pas complètement immobile et son déplacement engendre des oscillations dipolaires de faible amplitude.

du condensat dans le piège harmonique ($\simeq 40 \text{ ms}^{12}$). Ainsi, si l'amplitude du déplacement du centre du piège est suffisamment grande, le point de résonance du couteau radio-fréquence traversera le condensat [voir figure 5.10a)]. Enfin, si la vitesse de déplacement du couteau sur le condensat est supérieure à la vitesse du son, la présence de cet obstacle induit une perturbation sur le profil de densité du nuage. En particulier, le couteau "emporte" dans son mouvement une partie des atomes, engendrant leur accumulation sur le bord du condensat. Nous avons alors créé un pic de densité situé sur le bord du condensat.

Il faut remarquer que, lors de la phase d'évaporation vers la dégénérescence quantique, le couteau radio-fréquence agit comme un "trou" pour les atomes en les faisant s'échapper du piège magnétique. Au contraire, lors du déplacement rapide du piège magnétique et du couteau radio-fréquence tel que nous l'envisageons dans cette partie, les atomes n'ont pas le temps de s'échapper du piège magnétique car le temps d'interaction avec le point de résonance du couteau est bien plus court que le temps typique des transitions induites par ce couteau radio-fréquence.

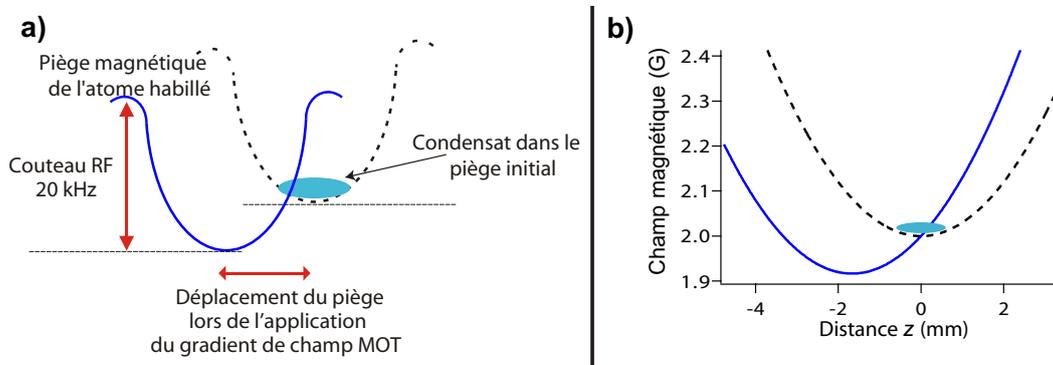


FIG. 5.10 – **a)** Déplacement d'un obstacle dans un condensat de Bose : le point de l'espace où les atomes sont résonants avec le couteau RF (point où la courbure du piège de l'atome habillé par le champ RF devient nulle) traverse le condensat lors de la phase d'application du gradient de champ MOT. **b)** Profils longitudinaux (Oz) du champ magnétique initial (traits tiretés) et déplacé (trait plein) calculés pour nos paramètres expérimentaux.

Comme dans le cas des excitations collectives du paragraphe précédent 5.1, le gradient magnétique est produit en utilisant les bobines qui créent le champ magnétique de la phase du PMO. Le minimum du piège magnétique connaît alors une translation lors de l'application de ce gradient dans la direction longue du condensat, translation dont l'amplitude dépend de la tension appliquée sur les bobines MOT. Pour une tension de 12 V le minimum du piège magnétique est déplacé de 1.67 mm et il l'est de 280 μm pour une tension de 2 V.

Enfin, il faut noter que l'application du gradient magnétique du PMO engendre des oscillations dipolaires de faible amplitude du nuage atomique dans le piège magnétique (voir paragraphe 5.1).

¹²Ce temps de relaxation est évalué à partir de la vitesse de déplacement du condensat mesurée lors de l'observation des oscillations dipolaires dans le piège magnétique

5.2.2.2 Observation de la propagation du pic de densité

Les expériences sont menées de la façon suivante. Une fois le condensat créé à l'équilibre dans le piège magnétique, nous appliquons le gradient magnétique en présence du couteau radio-fréquence pendant un temps de 3 milli-secondes puis ce gradient est éteint à nouveau. Ainsi le centre du piège magnétique subit deux translations de sens opposé, la seconde annulant le déplacement issu de la première. Ces deux déplacements rapides du piège magnétique ne sont pas tout à fait adiabatiques pour le mouvement du centre de masse du condensat et ce dernier acquiert ainsi un mouvement d'oscillation de faible amplitude. Nous laissons ensuite le condensat osciller dans le piège magnétique pendant une durée τ appelée par la suite temps d'oscillation. Enfin, nous coupons le couteau radio fréquence et le piège magnétique et laissons le condensat tomber sous l'effet de la gravité pendant un temps de vol de l'ordre de 20 ms. Nous prenons ensuite une image par absorption.

Lors de cette procédure expérimentale, la valeur du couteau radio-fréquence durant l'application du gradient magnétique est identique à la valeur finale du processus d'évaporation. Cette fréquence finale de la dernière rampe est 20 kHz au dessus du fond du piège magnétique. Ainsi, nous pouvons évaluer la distance D_{RF} entre le point de résonance du couteau radio-fréquence et le centre du piège. Nous avons $\mu_B B'' D_{RF}^2 = 2\pi\hbar\Delta\nu_{\text{evap}}$ avec $\Delta\nu_{\text{evap}} \simeq 20$ kHz. L'application numérique donne $D_{RF} \sim 210\mu m$.

Lorsque le gradient du PMO est appliqué avec une tension de 12 V, le point de résonance du couteau RF traverse le condensat de part en part. Au contraire, si la tension utilisée est égale à 2 V le point de résonance ne pénètre pratiquement pas dans le condensat. Nous avons vérifié cette assertion expérimentalement en observant le condensat piégé après application d'un gradient avec une tension de 12 V et une tension de 2 V. Dans le premier cas, l'amplitude du déplacement est telle qu'un pic de densité est généré dans le condensat. Dans le second cas, aucun pic de densité n'apparaît dans le nuage atomique.

Le déplacement du centre du piège magnétique se fait sur une échelle de temps de l'ordre de la milli-seconde et l'ordre de grandeur de la vitesse de ce déplacement est $1500 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette vitesse est trois ordres de grandeur au dessus des vitesses typiques du son dans un condensat avec nos paramètres expérimentaux (cette dernière étant de l'ordre de quelques milli-mètres par seconde). De cette manière nous déplaçons l'obstacle que constitue le couteau RF dans le condensat à une vitesse supérieure à la vitesse du son. L'écoulement du condensat autour de l'obstacle n'est pas superfluide et le profil de densité du nuage est fortement modifié : un pic de densité apparaît.

Une série d'images par absorption prises après application du gradient de champ magnétique pour un temps d'oscillation τ variant entre 5 et 55 ms et un temps de vol de 17.3 ms est présentée sur la figure 5.11. Nous y voyons très distinctement le pic de densité engendré dans le condensat ainsi que son déplacement sur le nuage au cours du temps d'oscillation τ .

La présence du pic de densité au dessus du profil parabolique du condensat est mise en évidence lorsque nous traçons la densité linéique $n_{1D}(z)$ intégrée selon les deux directions radiales. Nous avons pris pour origine spatiale de chaque image le centre du profil parabolique du condensat afin de s'affranchir du mouvement d'oscillation dipolaire de l'ensemble du nuage. Nous présentons les profils de densité 1D en présence du pic de densité sur la figure 5.12. Nous

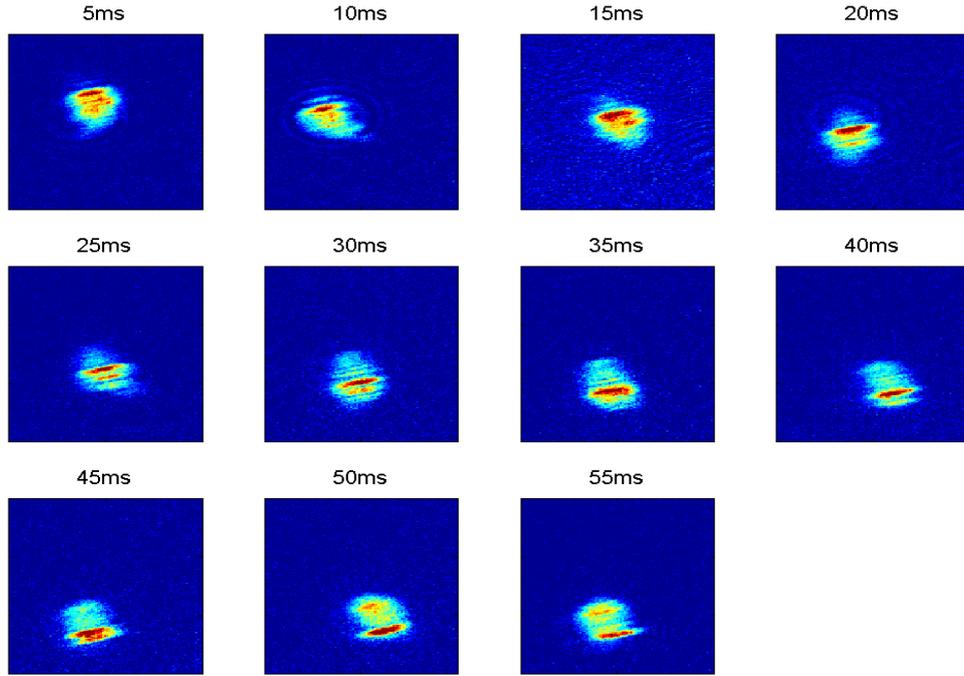


FIG. 5.11 – Images par absorption après un temps de vol de 17.3 ms pour différents temps d'oscillation τ (de 5 ms à 55 ms) après application du gradient magnétique. La propagation selon l'axe longitudinal Oz d'un pic de densité (zone marron/rouge en fausse couleur sur les images) a lieu d'un bord à l'autre du condensat.

observons très clairement son déplacement. Il faut préciser que nous n'avons pas observé de réflexion du pic de densité sur le bord du condensat. Pour un temps d'oscillation supérieur à $\tau = 60$ ms, le pic de densité disparaît.

Les prédictions théoriques sur la vitesse du son dans un condensat allongé [184,185] concernent la propagation d'une onde sonore 1D. Le caractère 1D d'une onde sonore peut être mis en évidence à partir des profils de densité 1D de la figure 5.12. Lorsque l'échelle de variation spatiale l du pic de densité est supérieure à la taille transverse du condensat R_{TF} , l'onde sonore a un caractère 1D. En effet, dans ce cas le profil de densité transverse est toujours à l'équilibre lors de la propagation du pic de densité puisque le temps typique pour l'adaptation du profil transverse est R_{TF}/c_{son} est court devant le temps de passage l/c_{son} du pic de densité. Dans notre expérience, la taille typique du pic de densité se propageant sur notre condensat est $15 \mu\text{m}$ et elle est donc supérieure à l'extension radiale $2R_{TF} = 3 \mu\text{m}$ du nuage condensé. Le pic de densité peut donc être considéré comme une excitation 1D selon la direction longue Oz du condensat.

5.2.2.3 Spectroscopie de Bragg d'un condensat excité

Afin de mieux caractériser l'excitation (notamment le pic de densité) que nous créons dans les condensats de Bose-Einstein par l'application du gradient magnétique, nous avons mesuré la distribution en impulsion du nuage atomique. Pour cela, nous avons utilisé une technique de spectroscopie de Bragg à 4 photons. Cette technique de spectroscopie a été développée sur notre

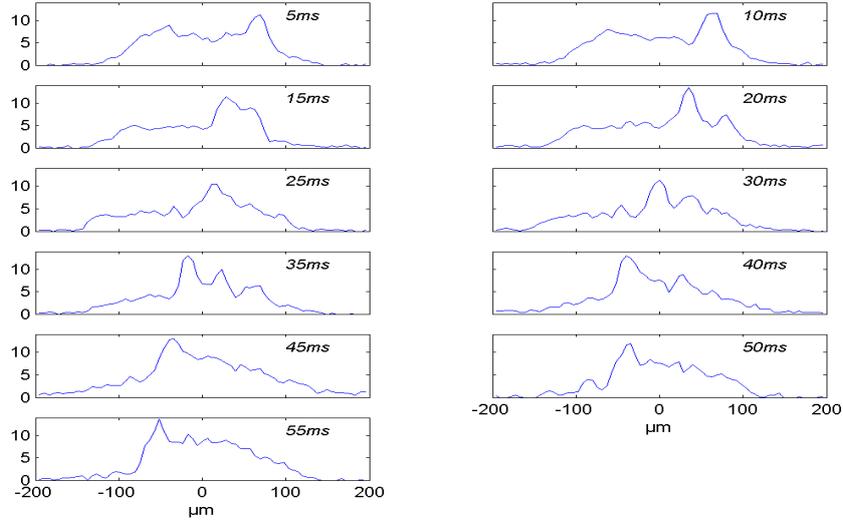


FIG. 5.12 – Profils de densité 1D $n_{1D}(z)$ du condensat au cours de la propagation d'un pic de densité pour les images de la figure 5.11 pour des temps d'oscillation τ variant de 5 ms à 55 ms.

expérience par S. Richard et F. Gerbier et sa description détaillée se trouve dans leurs thèses respectives [131, 192]. Nous rappelons très brièvement dans les lignes qui suivent le principe de cette méthode.

Spectroscopie de Bragg d'un condensat atomique

La spectroscopie de Bragg consiste à faire diffracter l'onde de matière que constitue le condensat de Bose-Einstein sur un réseau optique. Le réseau optique est constitué de deux ondes en phase contra-propageantes selon l'axe longitudinal Oz [voir la figure 5.13]. Ces deux ondes, créées dans notre expérience avec des faisceaux laser rétro-réfléchis, possèdent un vecteur d'onde $|\mathbf{k}_L| = 2\pi/\lambda_L$ et sont désaccordées de $\delta\omega$ l'une par rapport à l'autre. Le réseau optique sur lequel est diffractée l'onde de matière se déplace donc à la vitesse $\delta\omega/2k_L$.

L'obtention d'une diffraction efficace des atomes requiert la conservation de l'impulsion et de l'énergie au cours du processus. Pour un processus à 4 photons, la condition de résonance s'écrit :

$$2\delta\omega = 16\omega_L - \frac{4k_L p}{m} \quad (5.17)$$

où p est l'impulsion de l'atome sondé. Nous utilisons un processus à 4 photons afin de transférer une quantité de mouvement plus importante aux atomes que lors d'un processus à 2 photons. Cela nous permet de mieux distinguer au cours d'un temps de vol la partie diffractée du nuage.

La diffraction d'un seul ordre (nous ne voulons pas peupler les ordres supérieurs) se traduit par la nécessité de travailler avec un temps d'application des lasers suffisamment long¹³. Nous utilisons des pulses laser d'une durée de 2 ms qui permettent de travailler dans le régime de Bragg avec un seul ordre diffracté. Nous appliquons ces pulses laser 2 ms après la coupure du

¹³Il faut un temps supérieur à $2\pi/2\omega_{\text{recul}} \simeq 60 \mu\text{s}$ avec des atomes de Rubidium.

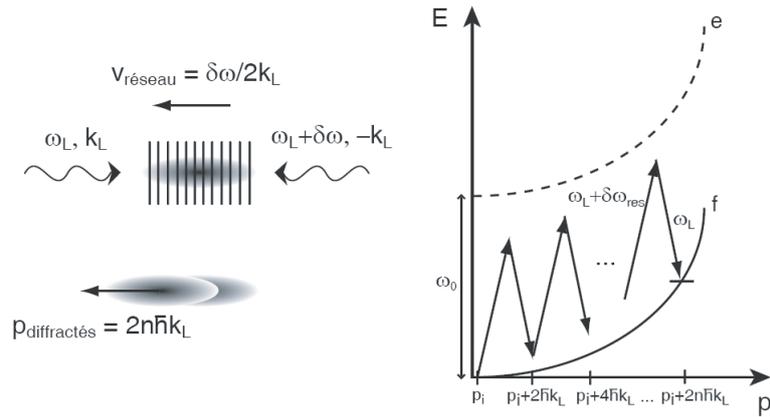


FIG. 5.13 – *Diffraction de Bragg à $2n$ photons. A gauche : deux faisceaux laser contre-propageants créent le réseau optique sur lequel est diffractée l’onde de matière. A droite : diagramme des états d’impulsion couplés par des processus à $2n$ photons.*

piège magnétique. Cela nous permet de nous affranchir des problèmes liés aux collisions présentes lors de la diffraction dans un nuage dense. Nous obtenons alors des spectres en impulsion des nuages atomiques en comptant le nombre d’atomes diffractés dans l’ordre $+1$ en fonction du désaccord des faisceaux lasers. L’exemple du spectre d’un condensat dans le piège magnétique (sans excitation avec le gradient magnétique) est présenté en image insérée sur la figure 5.14.

Mesures spectroscopiques

Le dispositif de spectroscopie est utilisé dans un premier temps pour mesurer le spectre d’un condensat au repos dans le piège magnétique. Nous obtenons un spectre fin dont la demi-largeur à mi-hauteur mesure 270 Hz. Cette largeur est supérieure à la limite de résolution en impulsion de notre système de spectroscopie. La durée d’application des pulses des lasers utilisés pour la spectroscopie est 2 milli-secondes et limite la résolution à 155 Hz¹⁴. La présence de fluctuations de phase dans les condensats allongés explique l’élargissement que nous mesurons expérimentalement [131].

L’application d’un gradient magnétique comme nous le proposons peut ne pas créer de pic de densité lorsque le déplacement du point de résonance du couteau est trop faible pour traverser le condensat. Cependant, un tel déplacement de faible amplitude engendre des oscillations dipolaires et quadrupolaires qui sont l’une des signatures de la présence d’excitations dans le condensat. Nous avons mesuré le spectre d’un condensat excité par un faible déplacement du centre du piège magnétique de tel sorte qu’aucun pic de densité n’est généré. Ce spectre apparaît sur la figure 5.14 en trait plein rouge. Il s’agit d’un spectre assez large par rapport au cas d’un condensat au repos. Un ajustement lorentzien donne une demi-largeur à mi-hauteur égale à 4.8 ± 0.8 kHz et un maximum en 18.1 ± 0.1 kHz.

¹⁴L’obtention d’un spectre avec une résolution meilleure nécessite l’application des lasers pendant un temps plus long. Nous n’utilisons pas des temps d’interrogation supérieurs à 2ms car nous sommes alors limités par la stabilité du montage.

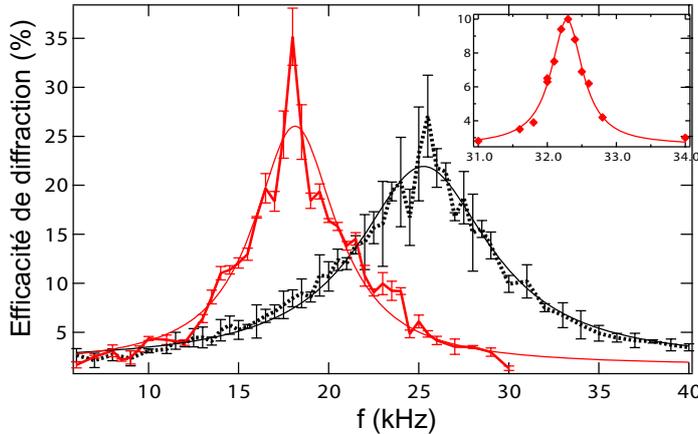


FIG. 5.14 – Spectres de Bragg (mesurés avec un processus à 2 photons) d’un condensat oscillant dans le piège magnétique sans pic de densité (trait plein rouge) et d’un condensat avec un pic de densité (trait pointillé noir). Les deux spectres sont ajustés avec une lorentzienne (traits fins). Image insérée : distribution en impulsion d’un condensat à l’équilibre dans le piège magnétique (mesuré avec un processus à 4 photons) .

Pour une plus grande amplitude du déplacement du centre du piège magnétique, un pic de densité apparaît dans le nuage d’atomes (voir la figure 5.11). Nous mesurons le spectre d’un tel condensat après un temps d’oscillation $\tau = 30$ ms. Ce spectre est présenté sur la figure 5.14. Nous observons d’une part que le spectre est décalé de quelques kilo-Hertz et, d’autre part, qu’il s’est seulement un petit peu élargi. Le maximum d’efficacité de diffraction avec la spectroscopie de Bragg qui correspond au nombre d’atomes maximum avec une même impulsion est déplacé de $\Delta\nu = 7.1 \pm 0.5$ kHz. Ce déplacement $\Delta\nu$ est relié à la différence de vitesse v des atomes du pic par rapport à ceux qui en sont en dehors par $2\pi\Delta\nu = 4k_L v$. Il vient alors $v \simeq 1.40 \pm 0.15$ mm/s. La densité au centre des condensats diffractés dans cette expérience est $n_0(0) \simeq 1.7(3) \times 10^{14}$ cm $^{-3}$. La vitesse obtenue correspond dans une bonne approximation à celle attendue à partir de l’équation (5.16) pour la propagation d’un pic sur de tels condensats. La demi-largeur à mi-hauteur du spectre en présence du pic de densité vaut 7.7 ± 1.3 kHz.

Après avoir engendré et caractérisé l’onde de densité que nous créons sur un condensat de Bose-Einstein, nous étudions son déplacement et en mesurons la vitesse de propagation. Les résultats sont présentés au paragraphe suivant.

5.2.3 Mesures de la vitesse du son dans un condensat de Bose-Einstein

5.2.3.1 Mesure expérimentale dans un condensat non-désordonné

Nous avons étudié la dépendance de la vitesse de propagation du pic de densité avec la densité $n_0(0)$ au centre du condensat piégé. Dans les expériences, la densité $n_0(0)$ est changée en diminuant le nombre d’atomes dans le condensat. Afin de diminuer le nombre d’atomes dans le condensat, nous conservons le nuage d’atomes condensés dans le piège magnétique en présence de l’évaporation radio-fréquence pendant un temps plus long. Nous appelons ”temps de bouclier” le temps supplémentaire pendant lequel est conservé le condensat dans le piège magnétique. La figure 5.15 présente la dépendance du nombre d’atomes et de la densité au centre du condensat avec le temps de bouclier.

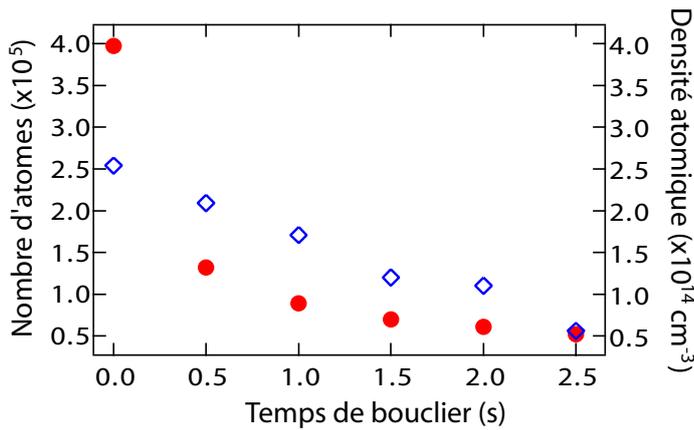


FIG. 5.15 – Evolution du nombre d'atomes (ronds rouges) et de la densité au centre (losanges vides bleus) en fonction du temps de bouclier pour un condensat excité avec le couteau radio-fréquence.

La mesure de la vitesse de propagation du pic de densité à partir des images par absorption (figure 5.11) est effectuée dans le référentiel où le condensat est au repos : nous analysons les images par absorption en effectuant un ajustement du profil de densité parabolique du condensat sous le pic de densité et l'origine de l'axe longitudinal Oz est choisie comme étant le centre de l'ajustement parabolique. Nous pouvons alors tracer l'évolution temporelle de la position du pic de densité selon l'axe Oz dans ce repère et nous effectuons un ajustement linéaire de cette évolution dont nous tirons la valeur de la vitesse de propagation du pic. Nous traçons sur la figure 5.16 ci-dessous le résultat de nos mesures. La courbe théorique de l'équation de la vitesse du son Eq.(5.16) en fonction de la densité $n_0(0)$ est également reportée sur la figure 5.16.

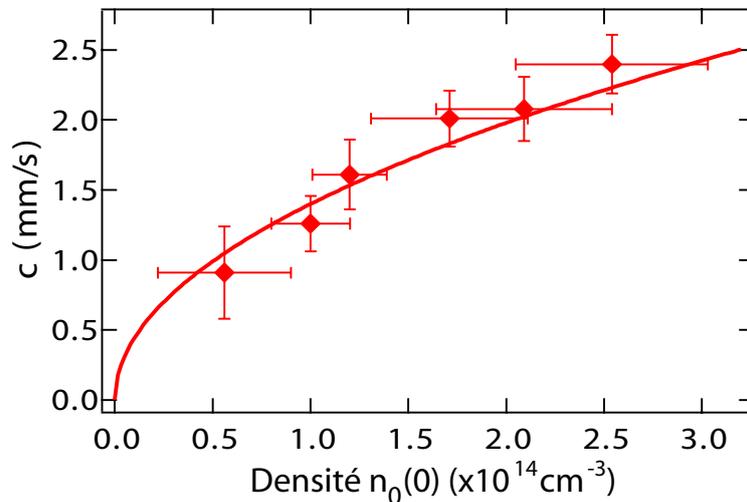


FIG. 5.16 – Vitesse de propagation d'un pic de densité en fonction de la densité au centre de ce pic. La courbe en trait plein, sans paramètre ajustable, correspond à l'équation 5.16 qui décrit la vitesse d'une onde sonore 1D dans un condensat allongé.

La courbe sans paramètre ajustable de l'équation (5.16) est en très bon accord avec nos résultats expérimentaux. La dépendance de la vitesse de propagation du pic de densité reflète ainsi très bien celle de la vitesse du son du condensat de Bose sous-jacent : l'onde de densité se

propageant sous la forme d'un pic de densité correspond à une excitation sonore du condensat. Il a été suggéré [185] que la vitesse de propagation d'une onde sonore sous forme d'un pic de densité dans un condensat avec interactions fortes soit plus rapide que la vitesse déterminée par l'équation (5.16). Les barres d'erreur sur nos mesures expérimentales ne permettent pas de mettre en évidence un écart à l'équation (5.16). Cette équation décrit très bien la propagation d'ondes sonores dans nos condensats allongés, et ce même lorsque l'amplitude du pic de densité est comparable avec la densité du condensat sous-jacent.

Dans l'étude précédente réalisée dans le groupe de W. Ketterle [20], une déviation entre les mesures et l'équation (5.16) a été observée aux faibles densités. Cet écart est attribué à la technique utilisée pour travailler avec de faibles densités atomiques qui consiste à ouvrir le piège radial. En effet, dans ce cas, le rapport d'aspect diminue lorsque la densité diminue et le caractère 1D du pic de densité se propageant dans le condensat devient moins prononcé. Au contraire, dans nos expériences nous conservons le même rapport d'aspect $\omega_{\perp}/\omega_z \simeq 100$ pour toutes les densités atomiques utilisées. Le caractère 1D du pic de densité se propageant sur notre condensat n'évolue donc pas avec la densité atomique. Nous n'attendons donc pas de déviation par rapport aux prédictions [184] pour toute la gamme de densité que nous avons testées et c'est bien en accord avec ce que nous obtenons.

Les travaux de Kavoulakis et Pethick [185] de propagation d'onde sonore dans un condensat 1D tendent à montrer que la dispersion dans le cas d'une forte perturbation du profil de densité devrait être importante à cause de la présence des interactions. Le pic de densité devrait ainsi se distordre ou s'étaler lors de sa propagation. Cependant, nous n'observons pas un tel phénomène apparaître clairement dans notre expérience¹⁵. Une étude plus précise de l'évolution de la forme du pic de densité au cours de sa propagation est certainement nécessaire. Une analyse des différents pics secondaires qui peuvent apparaître au cours de la propagation du pic principal (voir figure 5.12) irait également dans cette voie, à savoir celle de l'étude de la distortion du profil de densité induite par la propagation du pic principal.

5.2.3.2 Formation d'une onde de choc ?

La propagation d'une onde de densité sur un condensat de Bose-Einstein a été traitée dans les travaux théoriques que nous avons mentionnés jusqu'à présent [155, 184, 185] dans un cadre perturbatif. Dans ces études l'amplitude du pic de densité est supposé faible par rapport à la densité du condensat sous-jacent. Les profils de densité 1D observés dans notre expérience (figure 5.12) montrent que le pic de densité dont nous observons la propagation a une amplitude du même ordre de grandeur que la densité du condensat sous-jacent. Cette situation expérimentale est donc différente des approches théoriques sus-mentionnées, bien que le résultat sur la dépendance de la vitesse de propagation avec la densité du nuage atomique sous-jacente soit corroborée dans les expériences. Dans un papier sur la formation d'onde de choc [193], B. Damski propose une approche théorique de cette situation non-perturbative.

Dans [193], B. Damski effectue le calcul de la vitesse de propagation d'un pic de densité de forme gaussienne et d'amplitude quelconque dans un condensat 1D de densité uniforme. Il justifie également en quoi ce calcul reste correct dans le cas d'un condensat 1D piégé dans un

¹⁵Cette distortion n'a pas été observée dans de l'expérience déjà citée du groupe de W. Ketterle [20]

potentiel harmonique anisotrope¹⁶. Dans cette étude théorique, B. Damski montre que le pic se déforme au cours de sa propagation, le profil de ce dernier devenant de plus en plus raide. Finalement, la propagation du pic initial peut donner naissance à une onde de choc. L'un des résultats de cette approche est que la vitesse du son de l'équation perturbative (5.16) doit être multipliée par un facteur $\mathcal{A}(\eta)$ avec

$$\mathcal{A}(\eta) = 3\sqrt{1+\eta} - 2 \quad (5.18)$$

où le paramètre η est égal à l'amplitude du pic de densité rapporté à celle du condensat sous-jacent $n_0(0)$.

Dans notre situation expérimentale, $\eta \sim 1$ et nous obtenons pour le paramètre de Damski $\mathcal{A}(\eta) \simeq 2.24$. Avec ce facteur multiplicatif, la courbe théorique (5.18) ne correspond pas aux mesures expérimentales. De plus, comme nous l'avons mentionné au paragraphe précédent, si nous n'avons pas effectué une étude systématique et précise de l'évolution de la forme du pic de densité se propageant, nous ne voyons cependant pas l'apparition d'un profil du pic de densité plus raide qui pourrait être la signature de la formation d'une onde de choc. Il semble donc que l'approche théorique perturbative soit la mieux adaptée pour décrire la propagation de l'onde de densité que nous avons générée dans notre condensat, et ce en dépit de l'amplitude non perturbative du pic de densité.

5.2.3.3 Vitesse du son en présence d'un potentiel aléatoire

Nous présentons dans ce dernier paragraphe les mesures de la vitesse de propagation d'un pic de densité dans un condensat allongé en présence d'un potentiel aléatoire.

Modifications théoriques attendues...

Plusieurs travaux théoriques traitent la question de la vitesse du son dans un condensat désordonné [95, 97, 98]. L. Zhang a étudié l'hamiltonien d'un système de bosons désordonnés en effectuant une analogie entre ce dernier avec un système de spin 1/2. Dans ce cadre, le calcul d'un décalage de la vitesse du son conduit à une réduction de la vitesse du son en présence d'un potentiel aléatoire.

Giorgini *et al.* ont étudié les propriétés d'un condensat de Bose en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif [95]. Leur approche consiste à utiliser le formalisme de l'hydrodynamique quantique en y ajoutant un potentiel aléatoire perturbatif. En particulier, ils calculent la variation de la vitesse du son due à la présence du potentiel aléatoire dont la statistique est celle d'un bruit blanc. Ils obtiennent

$$c_{\text{son}} = c_{\text{son}}^0 \left(1 + \frac{5}{4} \frac{\rho_n}{n_0} \right) \quad (5.19)$$

où c_{son}^0 (respectivement n_0) est la vitesse du son (respectivement la densité) en l'absence de potentiel aléatoire et ρ_n la partie normale du gaz induite par la présence du désordre. Selon leurs travaux, la vitesse du son devrait donc augmenter en présence d'un potentiel aléatoire. Cela étant, il faut remarquer que cette correction peut être faible puisque la partie normale du gaz ρ_n est petite devant la densité du condensat n_0 dans un potentiel aléatoire perturbatif.

¹⁶Comme précédemment, il s'agit dans ce cas de diviser l'expression de la vitesse du son du cas uniforme par un facteur $\sqrt{2}$ pour prendre en compte le confinement radial.

Plus récemment, Yakulov et Graham ont également calculé les modifications attendues sur la vitesse du son en présence d'un potentiel aléatoire [98]. Leur approche est basée sur une théorie de champ moyen stochastique avec laquelle ils peuvent traiter le problème d'un potentiel aléatoire d'amplitude quelconque. Ils obtiennent une dépendance de la vitesse du son avec la partie normale ρ_n de signe opposée à celle obtenue par Giorgini *et al.* [95] (mais une réduction de la vitesse du son comme L. Zhang [97]). Ils montrent que la vitesse du son doit également dépendre de la partie anormale du gaz de Bose, et ce avec un signe opposé à la dépendance avec la partie normale ρ_n . Leur conclusion est que ces deux dépendances de la vitesse du son se compensent et que cette dernière doit peu varier en présence d'un potentiel aléatoire. Dans le cas d'un potentiel delta-corrélé, Yakulov et Graham obtiennent d'ailleurs la même formule pour la vitesse du son en présence d'un potentiel aléatoire que celle du cas sans désordre [Eq.(5.16)]. Enfin, les auteurs précisent que des simulations numériques qu'ils ont effectuées montrent que la vitesse du son décroît très lentement avec l'amplitude du potentiel aléatoire.

Lors de travaux récents dans notre groupe, le spectre des excitations de Bogolyubov en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif a été étudié [99]. Dans cette étude, il a été démontré que le potentiel aléatoire vu par les modes collectifs de basse énergie (quasi-particules dont le vecteur d'onde k est très inférieur à la longueur de relaxation ξ , $k \ll \xi$) est écranté par la présence des interactions entre atomes¹⁷. Une conséquence de cet écrantage du potentiel aléatoire pour les phonons ($k \ll \xi$) est la très faible localisation de ces modes dans le désordre [99]. Pour le propos concernant la vitesse du son qui nous intéresse ici, l'écrantage du potentiel aléatoire aux basses énergies a pour conséquence une modification très faible de la relation de dispersion d'un condensat désordonné par rapport au cas non-désordonné. L'influence du potentiel aléatoire étant faible puisque le potentiel est écranté, il est naturel d'obtenir une relation de dispersion peu modifiée par la présence de ce dernier. Dès lors, si la relation de dispersion n'est modifiée que marginalement la vitesse du son doit également l'être. Des premières simulations numériques effectuées par P. Lugan dans le cas d'un potentiel aléatoire de tavelures confirment que le spectre à basse énergie en présence du désordre est très proche du spectre du condensat non-désordonné. Cette analyse numérique renforce ainsi l'idée selon laquelle la vitesse du son doit être faiblement modifiée par la présence d'un potentiel aléatoire. Une étude plus détaillée de ce point est en cours dans notre groupe.

Mesure de la vitesse du son en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire

Afin d'effectuer une mesure de la vitesse du son dans un condensat désordonné, nous avons répété les expériences consistant à observer le déplacement d'un pic de densité en présence d'un potentiel aléatoire. Le potentiel aléatoire que nous utilisons consiste toujours en un champ de tavelures qui éclaire les atomes (voir partie 2). Dans ces expériences nous avons utilisé le dispositif expérimental dont l'ouverture numérique est la plus faible. Ainsi le potentiel aléatoire est quasi-1D et sa longueur de corrélation dans la direction longitudinale du piège (celle du déplacement du pic de densité) vaut $\Delta z = 5.5 \mu\text{m}$. L'amplitude normalisée du potentiel aléatoire est toujours notée $\gamma = \sigma_V/\mu$.

¹⁷Il n'existe pas d'interactions entre quasi-particules, les interactions auxquelles nous faisons référence ici sont celles qui existent entre atomes et qui se manifestent dans les équations sur les quasi-particules par un terme d'énergie de champ moyen gn_0 [99].

Pour ces mesures de la vitesse du son, nous avons utilisé un potentiel aléatoire très perturbatif : $\gamma < 0.05$. Cette situation nous permet de nous affranchir du cas où il pourrait y avoir une forme de piégeage d'une partie du nuage similaire au phénomène de localisation sur des barrières uniques du potentiel aléatoire (chapitre [?]). De plus, nous nous trouvons alors expérimentalement dans une situation proche des discussions théoriques que nous avons mentionnées [95, 98, 99, 194] dans lesquelles le potentiel aléatoire est (très) faible.

La séquence expérimentale consiste dans un premier temps en la création d'un condensat de Bose désordonné. Dans un deuxième temps, le gradient magnétique est appliqué de telle sorte à générer un pic de densité (avec une tension de 12 V appliquée aux bobines du PMO, voir 5.1.1.2). Nous prenons alors des images après différents temps d'oscillations τ pour observer le déplacement du pic de densité sur le condensat désordonné. Nous extrayons de ces observations la mesure de la vitesse du son comme précédemment (paragraphe 5.2.3.1). La figure 5.17 présente l'évolution de la vitesse du son en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire.

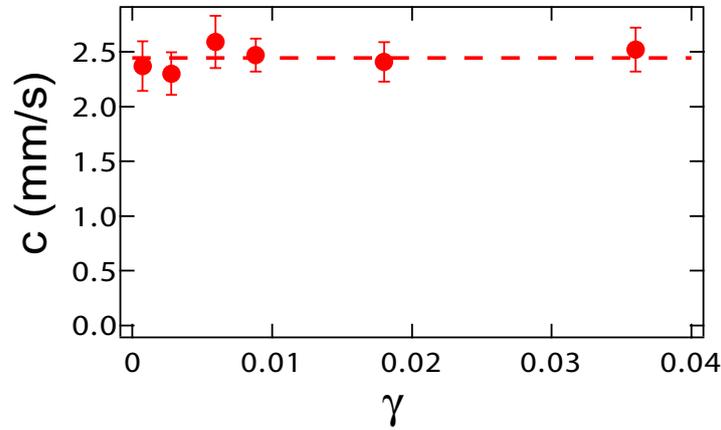


FIG. 5.17 – Vitesse de propagation du pic de densité c mesurée dans un condensat désordonné à partir de la propagation d'un pic de densité ($n_0 \simeq 2.5 \text{ cm}^{-3}$) en fonction de l'amplitude γ du potentiel aléatoire.

Nous n'observons pas de variation de la vitesse du son en fonction de l'amplitude du potentiel aléatoire pour $\gamma < 0.05$. Aux incertitudes de mesures expérimentales près, la vitesse du son en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif est égale à la vitesse du son mesurée dans un condensat non-désordonné.

Cette absence d'écart entre la vitesse du son d'un condensat non-désordonné et celle d'un condensat désordonné est un résultat expérimental intéressant. A notre connaissance, il s'agit d'ailleurs de la première mesure expérimentale effectuée dans un condensat gazeux désordonné. De plus, la modification de la vitesse du son induit par la présence d'un potentiel aléatoire reste un sujet théorique assez ouvert [95, 97, 98]. Notre étude permet donc d'apporter un élément de réponse expérimental à cette question en concluant, dans la limite donnée par les incertitudes de mesure, que la vitesse du son d'un condensat désordonné dans un potentiel aléatoire faible est identique à celle d'un condensat non-désordonné. Notre interprétation de ce résultat expérimental est liée à l'écrantage des excitations de basse énergie [99], cet écrantage étant à l'origine de la très faible influence du potentiel aléatoire sur la propagation d'onde sonore et sur la vitesse

du son . Une étude plus détaillée (en cours dans notre groupe) de la courbe de dispersion d'un condensat désordonné devrait permettre une justification plus étayée de l'argument que nous venons d'avancer.

Dépendance de la vitesse du son avec la densité atomique du condensat désordonné

La vitesse du son dans un potentiel aléatoire faible étant égale à la vitesse du son en l'absence de désordre et indépendante de l'amplitude du potentiel aléatoire se pose alors la question de sa dépendance avec la densité du nuage atomique. En particulier, la dépendance donnée par l'équation (5.16) s'applique t-elle également au cas désordonné ?

Nous avons ainsi complété l'étude de la vitesse du son dans un condensat désordonné en mesurant sa dépendance avec la densité $n_0(0)$ du condensat sous-jacent. Comme dans les expériences en l'absence de potentiel aléatoire, nous modifions la densité du condensat $n_0(0)$ en le conservant pendant un temps de bouclier plus ou moins long avant d'appliquer le gradient magnétique créant l'excitation.

La figure 5.18 présente les résultats de nos mesures dans un potentiel aléatoire d'amplitude faible $\gamma = 0.02$.

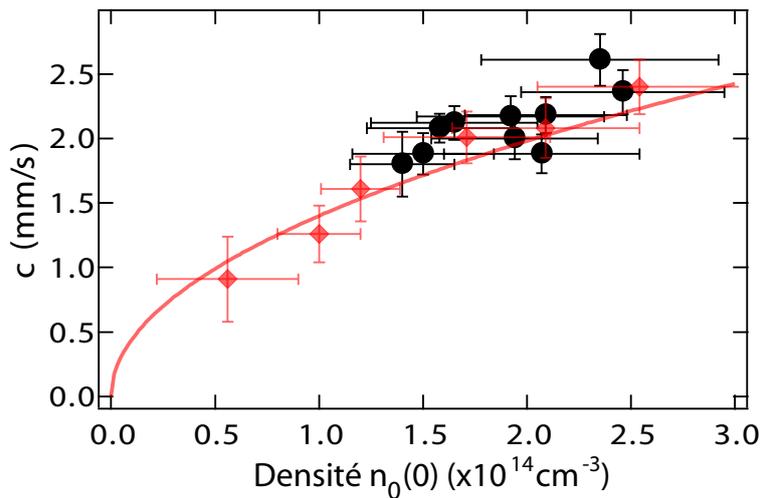


FIG. 5.18 – *Vitesse de propagation du pic de densité. Les losanges rouges correspondent aux vitesses mesurées en l'absence de potentiel aléatoire [figure 5.16]. Les cercles noirs correspondent aux vitesses mesurées en présence d'un potentiel aléatoire perturbatif d'amplitude $\gamma = 0.02$. La courbe en trait plein rouge est la prédiction théorique de l'équation (5.16).*

Les mesures effectuées en l'absence de potentiel aléatoire ont été reportées sur la figure 5.18. Les vitesses mesurées en présence du potentiel aléatoire perturbatif d'amplitude $\gamma = 0.02$ sont identiques à celles effectuées en l'absence de désordre. En particulier, nous observons que la vitesse du son sur un condensat désordonné a la même dépendance avec la densité que la vitesse du son en l'absence de potentiel aléatoire : elle suit correctement l'équation (5.16).

L'écrantage du potentiel aléatoire pour les excitations de basse énergie [99] est (presque) identique pour les valeurs de la densité $n_0(0)$ du condensat avec lesquelles nous avons travaillé. En effet, nous avons seulement varié $n_0(0)$ du simple au double. Ainsi, comme nous l'avons proposé au paragraphe précédent, l'écrantage du potentiel aléatoire pour les excitations sonores pourrait justifier cette observation expérimentale.

Cependant, il est important de remarquer que l'écrantage du potentiel aléatoire pour les excitations de basse énergie dépend de la densité du condensat [99]. Dans un condensat avec des interactions entre atomes plus faibles, l'écrantage du potentiel aléatoire pour les modes de basse énergie est réduit. Dès lors, il serait intéressant d'étudier ce régime où l'écrantage du potentiel aléatoire serait réduit et d'observer s'il est possible de mettre en évidence un écart entre la vitesse du son en l'absence et en présence de désordre. Une technique expérimentale permettant d'atteindre un tel régime pourrait être fournie par l'utilisation de résonances de Feshbach [29–31]. Nous n'aborderons cependant pas cette question (très ouverte) dans ce manuscrit.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude expérimentale des excitations de basse énergies dans un condensat de Bose-Einstein en présence d'un potentiel aléatoire faible.

Nous avons mesuré la fréquence des modes collectifs dipolaire et quadrupolaire dans un condensat désordonné et justifié l'absence de décalage en fréquence au regard du caractère auto-moyennant de notre système expérimental. Nous avons présenté une étude originale du fort amortissement du mode d'oscillation dipolaire selon la direction du potentiel aléatoire : le taux d'amortissement Γ croît linéairement avec le carré de l'amplitude du potentiel aléatoire, σ_V^2 . Nous avons discuté des interprétations possibles de cette observation en soulignant la difficulté qui est la notre d'apporter une réponse explicite d'un point de vue expérimental suite à la présence d'un problème non-résolu sur notre expérience (déformation du condensat non-désordonné lors de son oscillation dans le piège magnétique).

Nous avons étudié la propagation d'onde de densité dans un condensat désordonné. En l'absence de potentiel, nos mesures expérimentales sur la vitesse du son confirment les résultats expérimentaux précédents [20] et l'approche théorique perturbative [184], et ce même dans une situation expérimentale qui dépasse ce cadre théorique perturbatif. Nous avons mesuré la vitesse du son en présence d'un potentiel aléatoire de faible amplitude. Dans ce cas, nos mesures ne mettent pas en évidence de modification de la vitesse du son due à la présence du désordre (aux incertitudes expérimentales près) et la dépendance de cette vitesse du son avec la densité du condensat sous-jacent est identique à celle du cas d'un condensat non-désordonné. Enfin, nous avons interprété ces observations en lien avec l'écrantage du potentiel aléatoire pour les excitations de basse énergie induit par la présence des interactions [99]. Cette dernière piste doit être poursuivie afin d'étayer les arguments que nous avons avancés à la fin de ce chapitre.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les études que nous avons effectuées sur l'influence du désordre dans les systèmes cohérents que sont les condensats de Bose-Einstein de gaz dilués.

Les effets, non-intuitifs et forts, induits par la présence d'un désordre même faible dans les systèmes quantiques et les difficultés de la compréhension de ces phénomènes en présence d'interactions ont été rappelés au chapitre 1. Nous avons décrit au chapitre 2 la mise en place et la calibration d'un potentiel aléatoire optique 1D engendré par un champ de tavelures. Au contraire de nombreuses situations où le désordre est imposé, il faut souligner le contrôle dont nous disposons sur un tel potentiel aléatoire optique (modification des paramètres principaux σ_z et σ_V , coupure rapide possible). Une calibration par spectroscopie de l'amplitude du potentiel aléatoire et l'obtention de courtes longueurs de corrélation (jusqu'à $\sigma_z \simeq 0.33 \mu\text{m}$) ont fait l'objet d'une attention particulière [33]. Nous avons ensuite présenté au chapitre 3 le dispositif expérimental de création de condensats de Bose désordonnés. Leurs principales caractéristiques dans le piège magnétique et leur évolution au cours du temps de vol ont été étudiées. En particulier, nous avons mis en évidence expérimentalement le développement de grandes fluctuations de densité au cours de l'expansion libre d'un condensat désordonné [34]. Nos expériences démontrent que ce phénomène n'est pas lié à l'existence de fluctuations de phase dans le nuage piégé. Au contraire, le modèle théorique que nous avons proposé montre que l'origine de ces modulations est l'impression d'une modulation de phase déterministe par le potentiel aléatoire lors de l'ouverture du piège magnétique. Les résultats d'une intégration numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii à 3D sont en très bon accord à la fois avec nos mesures expérimentales et avec les prédictions analytiques de notre modèle.

Le mémoire se poursuit par la présentation de nos travaux sur l'expansion d'un condensat dans un potentiel aléatoire en présence d'interactions entre atomes (chapitre 4). Nous avons étudié deux régimes différents de suppression du transport de l'onde de matière en présence de désordre. Dans le premier régime où les interactions sont importantes et la réflexion sur une barrière peut être proche de l'unité, nous avons observé expérimentalement un piégeage du condensat avec une partie centrale où la densité atomique demeure élevée [33, 35]. Dans le modèle que nous avons proposé, la partie centrale du condensat où les interactions dominent est piégée classiquement suite à l'existence de grandes modulations du potentiel aléatoire (ici le désordre est relativement grand, $\sigma_V \sim 0.1 - 0.5\mu$). Dans les parties latérales, la réflexion sur une modulation unique du potentiel aléatoire peut être proche de l'unité et cette caractéristique engendre le piégeage des ailes du nuage. Il faut souligner le très bon accord qualitatif et quantitatif de nos mesures expérimentales avec notre modèle. Par la suite, nous avons considéré théoriquement un second régime d'expansion du condensat où le potentiel aléatoire est *faible*, qualificatif dont nous donnons une définition précise [36]. Pour un tel désordre, la partie centrale qui peut être piégée classiquement représente alors une faible partie du nuage atomique et la probabilité d'une réflexion importante (proche de l'unité) sur une modulation unique du

potentiel aléatoire est négligeable. Dès lors, nous montrons que le phénomène de localisation d'Anderson peut être responsable du piégeage de l'onde de matière et qu'il est envisageable de réaliser une telle observation avec les expériences actuelles [36].

Enfin, nous étudions au dernier chapitre (chapitre 5) les effets induits par le désordre sur les propriétés des modes collectifs des condensats. Cette étude a un lien très fort avec le caractère superfluide des gaz dégénérés. Dans un premier temps, nous avons montré que les fréquences propres des modes d'oscillation dipolaire et quadrupolaire ne sont pas modifiées significativement dans un désordre auto-moyennant. En revanche un amortissement important du mode dipolaire dans la seule direction du potentiel aléatoire 1D a été observée et nous avons proposé une piste d'interprétation de ce phénomène. Dans un second temps, nous avons mesuré la propagation d'une onde de densité sur le nuage atomique. Il est intéressant de souligner qu'en l'absence de désordre nous obtenons une mesure de la vitesse du son qui correspond aux prédictions théoriques perturbatives [155, 184, 185] alors même que l'amplitude de l'onde de densité qui se propage est grande. Dans le cas d'un condensat désordonné, nous n'observons pas de décalage de la vitesse du son pour les différentes amplitudes du potentiel aléatoire et les différentes densités atomiques avec lesquelles nous avons travaillées. Il nous semble que cette observation doit être mise en parallèle avec un travail théorique récent [99] qui montre l'écrantage du potentiel aléatoire pour les excitations de basses énergies.

Les expériences que notre équipe a menées sur les condensats atomiques en présence de potentiel aléatoire, en parallèle de travaux expérimentaux sur cette même thématique à Florence [88, 91, 154], à Hanovre [86] et à Rice University (dans le groupe de R. Hulet), constituent un premier pas vers nombre d'autres études des gaz ultra-froids dans le désordre. En plus d'une étude plus approfondie de l'amortissement du mode dipolaire, nous pouvons identifier trois axes de recherche pour prolonger ces travaux.

Premièrement, le phénomène de localisation d'Anderson d'une onde de matière (avec l'observation directe du profil de l'onde localisée) est une voie d'étude prometteuse. Il semble possible d'observer expérimentalement la localisation d'Anderson d'un condensat avec interactions dans un potentiel aléatoire 1D [36]. Un enjeu important serait ensuite de démontrer l'existence de ce phénomène de localisation dans des potentiels aléatoires 2D et 3D. De plus, l'utilisation de résonances de Feshbach sur les gaz d'atomes ultra-froids permettrait d'étudier directement dans les expériences l'influence des interactions sur ce phénomène prédit par Anderson dans le cas d'un gaz idéal [4]. Une autre piste de travail possible sur le transport d'ondes de matière consisterait en l'observation du phénomène de rétro-diffusion cohérente dans un potentiel aléatoire 2D ou 3D. Une telle étude serait envisageable avec un laser à atomes guidé [32].

Deuxièmement, à l'instar des travaux sur la transition de Mott dans un réseau optique [26], l'étude des phases quantiques d'un gaz de Bose dans le désordre constitue un autre axe de recherche intéressant. Récemment, une phase isolante désordonnée 1D a été obtenue dans un quasi-désordre [91], la caractérisation et l'identification de cette dernière avec un verre de Bose étant actuellement poursuivies. L'observation et la caractérisation de phases comme les verres d'Anderson et Lifshits [68, 106] ou de Bose [3] permettrait certainement de mieux cerner l'influence du désordre dans les systèmes fortement corrélés. L'étude de ces transitions de phase superfluide-isolant avec des désordres dont le spectre est dense (comme celui issu d'un champ turbulent par exemple) est également envisageable et pourrait apporter des phénomènes différents de ceux observés dans un désordre au spectre discret (comme celui du quasi-désordre).

Troisièmement, les études théoriques des excitations de Bogoliubov en présence de désordre ont démontré l'existence d'un phénomène de localisation d'Anderson dépendant du vecteur d'onde de l'excitation [99, 195]. Une technique de spectroscopie de Bragg [196, 197] permettrait de tester cette dépendance. Le phénomène de localisation des excitations dépend fortement du type de désordre, en particulier de la longueur de corrélation du potentiel aléatoire [106]. Ainsi, il serait intéressant de mener cette étude des excitations de Bogoliubov dans un potentiel aléatoire issu d'un champ de tavelures où il est possible expérimentalement de modifier assez facilement la longueur de corrélation.

Enfin, nous pouvons conclure en évoquant l'extension des études expérimentales qui ont été menées avec des condensats de Bose au cas de mer de Fermi dégénérées ou de mélanges fermion-boson [90, 105]. La statistique fermionique et l'absence d'interaction en onde s entre les atomes peuvent conduire à des différences dont l'étude peut s'avérer intéressante, en particulier en lien avec les systèmes de la matière condensée.

Atome de Rubidium et lasers

A.1 L'atome de rubidium 87

Nous présentons ci-dessous quelques chiffres utiles concernant l'atome de Rubidium 87. Le lecteur trouvera une présentation plus complète dans [198].

– Propriétés physiques

Nombre atomique	$Z = 37$
Abondance relative	27.8%
Masse	$m = 1.44 \times 10^{-25}$ kg
Liquéfaction	$T_L = 39.3^\circ\text{C}$
Vaporisation	$T_V = 688^\circ\text{C}$
Spin nucléaire	$I = 3/2$
Longueur de diffusion ¹	$a = 5.3$ nm
Constantes de recombinaison à 3 corps ²	$K_3 = 5.8 \times 10^{-30}$ cm ⁶ .s ⁻¹

– Propriétés de la raie D_2

Longueur d'onde (air)	$\lambda = 780.03$ nm
Largeur de raie	$\Gamma = 6.07$ MHz
Intensité de saturation	$I_{\text{sat}} = 1.67$ mW/cm ²
Température Doppler	$T_D = 146$ μK
Énergie de recul	$E_r/h = 3.77$ kHz
Vitesse de recul	$v_r = 5.88$ mm/s
Température de recul	$T_r = 362$ nK

– Raies $5^2S \rightarrow 5^2P$

Nous rappelons ici la relation entre le taux d'émission spontanée Γ et le dipôle $d = 2.53$ C.m,

¹La longueur de diffusion est pratiquement indépendante des sous-états considérés. Cette propriété n'est pas générale mais particulière au rubidium 87.

²Nous donnons la valeur de [199] mesurée pour un condensat dans l'état $|F=1, m_F=-1\rangle$. Pour des atomes thermiques, le taux donné doit être multiplié par 6.

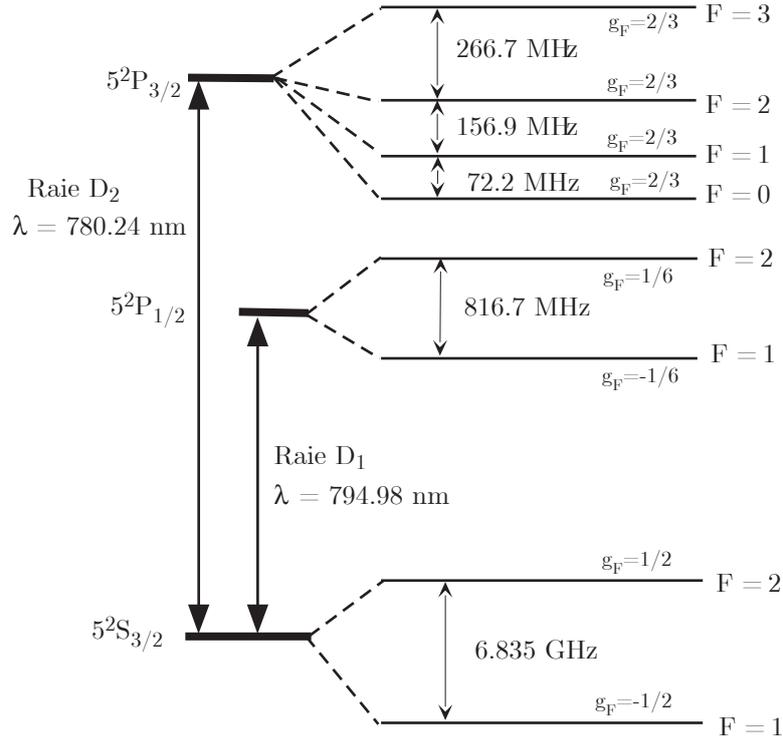


FIG. A.1 – Raies D_1 et D_2 du ^{87}Rb . Seule la raie D_2 intervient dans le processus de refroidissement laser (Chapitre 1). Les longueurs d’onde sont ici données dans le vide.

associé à la transition $S \rightarrow P$, indépendant de l’état fin ou hyperfin [200] :

$$\Gamma = \frac{8\pi^2 d^2}{3\varepsilon_0 \hbar \lambda^3} . \quad (\text{A.1})$$

A.2 Les lasers de ”BEC1”

Les sources laser utilisées sur notre expérience sont uniquement des lasers à semi-conducteur. Cette diodes laser semi-conductrices sont montées dans des cavités étendues à l’aide d’un réseau lorsque nous voulons les affiner et les accorder spectralement (à l’aide d’un dispositif de spectroscopie par absorption saturée). Nous appelons ces lasers fins et asservis sur une transition atomique laser ”maîtres”. Nous utilisons également des laser dits ”esclaves” qui sont injectés par un laser ”maître”. L’intérêt d’une telle injection tient seulement à l’obtention d’une puissance optique supérieure à celle qui sort d’un laser ”maître”. Chaque diode esclave débite donc 70 à 80 mW, avec une largeur de raie inférieure à 1 MHz. Enfin, des modulateurs acousto-optiques (MAO) servent à accorder les lasers dont la fréquence ne se trouvent pas exactement sur une raie du signal d’absorption. Nous renvoyons le lecteur intéressé au manuscrit de Y. Lecoq [201] pour de plus amples détails sur les sources laser et leur asservissement.

La figure A.2 résume ce qu’il faut savoir sur les transitions utilisées. Nous utilisons la transition fermée $F = 2 \rightarrow F' = 3$ pour le piège et l’imagerie. Nous l’utilisons aussi pour le ralentissement, mais le laser est désaccordé de 133 MHz car le champ magnétique est non nul

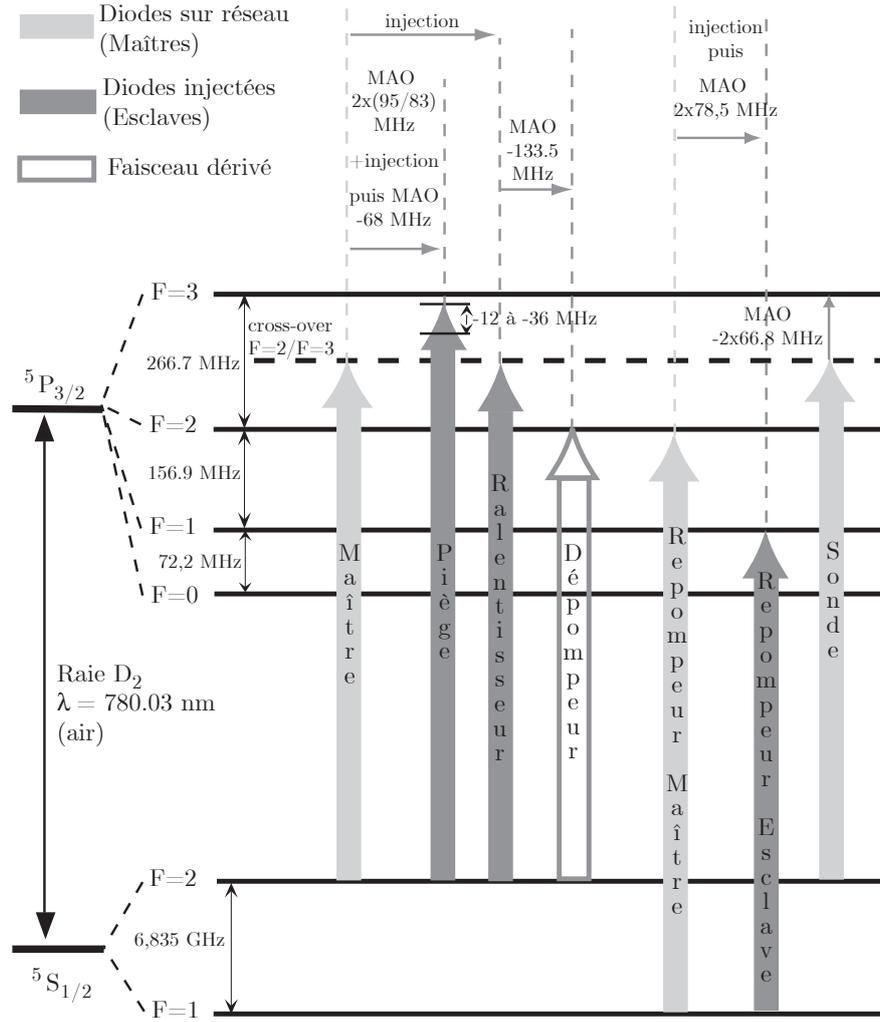


FIG. A.2 – *Synoptique des lasers utilisés pour le refroidissement et l'imagerie.*

à la sortie du ralentisseur Zeeman.

Malgré le désaccord utilisé, la probabilité d'exciter le niveau $F' = 2$ au cours d'un cycle avec un retour possible vers $F = 1$ est non nulle. Le temps caractéristique de ce dépompage est ~ 1 ms. Il est donc nécessaire de superposer au piège et au ralentisseur¹ un faisceau repompeur partant de $F = 1$ (et arrivant en l'occurrence sur $F' = 2$). En revanche, pour transférer les atomes dans le piège magnétique dans l'état $F = 1$, nous utilisons cette fois un dépompeur. Ce dépompeur est également utilisé pendant la phase dite d'Ultra Dark Spot (voir le paragraphe 3.3). Enfin, les atomes issus du piège magnétique sont repompés avant la prise d'image (pendant leur temps de vol) puisque la sonde est accordée sur $F = 2 \rightarrow F' = 3$. En revanche, le temps d'exposition est suffisamment court (typiquement $100 \mu\text{s}$) pour qu'il ne soit pas nécessaire de repomper *pendant* la prise d'image.

¹La dynamique de repompage/dépompage pendant le ralentissement est loin d'être triviale, voir [202] pour une discussion approfondie.

Bibliographie

- [1] E. AKKERMANS ET G. MONTAMBAUX, *Physique Mésoscopique des Electrons et des Photons* (EDP Sciences Ed., Paris, 2004).
- [2] B. VAN TIGGELEN, dans *Wave Diffusion in Complex Media*, ÉDITÉ PAR J. P. FOUQUE (NATO Science (Kluwer, Dordrecht), 1998), lectures notes at Les Houches.
- [3] M. P. A. FISHER, P. B. WEICHMAN, G. GRINSTEIN, ET D. S. FISHER, “Boson localization and the superfluid-insulator transition”, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
- [4] P. W. ANDERSON, “Absence of Diffusion in Certain Random Lattices”, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [5] T. SCHWARTZ, G. BARTAL, S. FISHMAN, ET M. SEGEV, “Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices”, *Nature* **446**, 52 (2007).
- [6] M. STÖRZER, P. GROSS, C. M. AEGERTER, ET G. MARET, “Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 063904 (2006).
- [7] C. M. AEGERTER, M. STORZER, ET G. MARET, “Experimental determination of critical exponents in Anderson localisation of light”, *Europhys. Lett.* **75**, 562 (2006).
- [8] J. A. SCALES, L. D. CARR, D. B. MCINTOSH, V. FREILIKHER, ET Y. P. BLOKH, “Millimeter Wave Localization : Slow Light and Enhanced Absorption”, *Phys. Rev. B* **in press**, (2007).
- [9] Y. KUGA ET A. ISHIMAU, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 831 (1984).
- [10] P. E. WOLF ET G. MARET, “Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media”, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2696 (1985).
- [11] G. LABEYRIE, F. DE TOMASI, J.-C. BERNARD, C. A. MÜLLER, C. MINIATURA, ET R. KAISER, “Coherent Backscattering of Light by Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5266 (1999).
- [12] S. HE ET J. D. MAYNARD, “Detailed measurements of inelastic scattering in Anderson localization”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 3171 (1986).
- [13] J. D. REPPY, *Physica B* **126**, 335 (1984).
- [14] J. D. REPPY, “Superfluid helium in porous media”, *J. Low Temp.* **87**, 205 (1992).
- [15] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”, *Science* **269**, 198 (1995).
- [16] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN, ET W. KETTERLE, “Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).

- [17] M. R. ANDREWS, C. G. TOWNSEND, H.-J. MIESNER, D. S. DURFEE, D. M. KURN, ET W. KETTERLE, “Observation of Interference Between Two Bose Condensates”, *Sciences* **275**, 637 (1997).
- [18] E. W. HAGLEY *et al.*, “Measurement of the Coherence of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3112 (1999).
- [19] I. BLOCH, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition”, *Nature* **403**, 166 (2000).
- [20] M. R. ANDREWS, D. M. KURN, H.-J. MIESNER, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND, S. INOUE, ET W. KETTERLE, “Propagation of Sound in a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 553 (1997).
- [21] N. N. BOGOLIUBOV, “On the theory of superfluidity”, *J. Phys. (Moscow)* **11**, 23 (1947).
- [22] N. N. BOGOLIUBOV, *Sov. Phys. JETP* **7**, 41 (1958).
- [23] L. TISZA, *Nature (London)* **141**, 913 (1938).
- [24] F. LONDON, *Superfluid Helium II* (Wiley, New York, 1954).
- [25] L. D. LANDAU, *J. Phys. (Moscow)* **5**, 71 (1941).
- [26] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH, ET I. BLOCH, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms”, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [27] W. KETTERLE, D. S. DURFEE, ET D. M. STAMPER-KURN, dans *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, S. STRINGARI, ET C. E. WIEMAN (IOS Press, 1999), “Making, probing and understanding Bose-Einstein Condensates”.
- [28] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [29] P. COURTEILLE, R. J. FREELAND, D. S. HEINZEN, F. A. VAN ABEELLEN, ET B. J. VERHAAR, “observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 69 (1998).
- [30] J. L. ROBERTS, N. R. CLAUSEN, J. P. BURK, C. H. GREENE, E. A. CORNELL, ET C. E. WIEMAN, “Resonant Magnetic Field Control of Elastic Scattering”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5109 (1998).
- [31] M. THEIS, G. THULHAMMER, K. WINKLER, M. HELLWIG, G. RUFF, ET R. GRIMM, “Tunning the Scattering Length with an Optically Induced Feshbach Resonance”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 123001 (2004).
- [32] W. GUERIN, J.-F. RIOU, J. P. GAEBLER, V. JOSSE, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Guided Quasicontinuous Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200402 (2006).
- [33] D. CLÉMENT, A. F. VARÓN, J. A. RETTER, L. SANCHEZ-PALENCIA, A. ASPECT, ET P. BOUYER, “Experimental study of the transport of coherent interacting matter-waves in a 1D random potential induced by laser speckle”, *New Journal of Physics* **8**, 165 (2006).
- [34] D. CLÉMENT, P. BOUYER, A. ASPECT, ET L. SANCHEZ-PALENCIA, “Density modulations in an elongated BEC released from a disordered potential”, *arXiv* **0710.1984**, (2007).

- [35] D. CLÉMENT, A. VARÓN, M. HUGBART, J. RETTER, P. BOUYER, L. SANCHEZ-PALENCIA, D. M. GANGARDT, G. V. SHLYAPNIKOV, ET A. ASPECT, “Suppression of Transport of an Interacting Elongated Bose-Einstein Condensate in a Random Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170409 (2005).
- [36] L. SANCHEZ-PALENCIA, D. CLÉMENT, P. LUGAN, P. BOUYER, G. SLYAPNIKOV, ET A. ASPECT, “Anderson Localization of Expanding Bose-Einstein Condensates in Random Potentials”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 21040 (2007).
- [37] J. RIGDEN ET E. GORDON, “The granularity of scattered optical maser light”, *Proc. I.R.E.* **50**, 2367 (1962).
- [38] S. CHANDRASEKHAR, *Radiative Transfer* (Dover, New York, 1960).
- [39] D. Y. SHARVIN ET Y. V. SHARVIN, “Magnetic-flux quantization in a cylindrical film of a normal metal”, *JETP Lett.* **34**, 272 (1981).
- [40] B. VAN TIGGELEN, dans *Wave Diffusion in Complex Media, Lectures notes at Les Houches 1998*, NATO Science, ÉDITÉ PAR J. FOUQUE (Kluwer, Dordrecht, 1999).
- [41] D. S. WIERSMA, M. P. VAN ALBADA, B. A. VAN TIGGELEN, ET A. LAGENDIJK, “Experimental Evidence for Recurrent Multiple Scattering Events of Light in Disordered Media”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4193 (1995).
- [42] T. OKAMOTO ET T. ASAKURA, “Enhanced backscattering of partially coherent light”, *Opt. Lett.* **21**, 369 (1996).
- [43] A. F. IOFFE ET A. R. REGEL, *Prog. Semicond.* **237**, 4 (1960).
- [44] A. A. GOGOLIN, V. I. MELNIKOV, ET E. I. RASHBA, “Conductivity in a disordered one-dimensional system induced by electron-phonon interaction”, *Sov. Phys. JETP* **69**, 327 (1976).
- [45] A. A. GOGOLIN, “Electron density distribution for localized states in one-dimensional disordered system”, *Sov. Phys. JETP* **71**, 1912 (1976).
- [46] J. FRÖHLICH ET T. SPENCER, “Absence of Diffusion in the Anderson Tight Binding Model for Large Disorder and Low Energy”, *Math. Phys.* **88**, 151 (1983).
- [47] P. A. LEE ET T. V. RAMAKRISHNAN, “Disordered electronic systems”, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985).
- [48] Y. NAGAOKA ET H. FUKUYAMA, *Anderson Localization*, springer series in solid state sciences **39** éd. (Springer, Berlin, 1982).
- [49] Y. NAGAOKA ET H. FUKUYAMA, *Anderson Localization*, springer series in solid state sciences **28** éd. (Springer, Berlin, 1988).
- [50] B. A. VAN TIGGELEN, A. LAGENDIJK, ET A. TIP, *J. Phys. Condens. Matter* **2**, 7653 (1990).
- [51] R. LENKE ET G. MARET, “Multiple scattering of light : coherent backscattering and transmission”, *Progr. Colloid Polym. Sci.* **104**, 126 (1997).
- [52] D. S. WIERSMA, P. BARTOLINI, A. LAGENDIJK, ET R. RIGHINI, “Localization of light in a disordered medium”, *Nature* **390**, 671 (1997).
- [53] A. A. CHABANOV, M. STOYTCHIEV, ET A. Z. GENACK, “Statistical signatures of photon localization”, *Nature* **404**, 850 (2000).

- [54] B. L. ALTSHULER, A. G. ARONOV, ET P. A. LEE, “Interaction Effects in Disordered Fermi Systems in Two Dimensions”, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1288 (1980).
- [55] B. L. ALTSHULER, D. KHMELNITZKII, A. I. LARKIN, ET P. A. LEE, “Magnetoresistance and Hall effect in a disordered two-dimensional electron gas”, *Phys. Rev. B* **22**, 5142 (1980).
- [56] G. BERGMAN, *Phys. Rep.* **1**, 107 (1984).
- [57] M. E. GERSHENSON, Y. B. KHAVIN, A. G. MIKHALCHUK, H. M. BOZLER, ET A. L. BOGDANOV, “Crossover from Weak Localization to Strong Localization in Quasi-One-Dimensional Conductors”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4 (1997).
- [58] Y. IMRY, *Introduction to Mesoscopic Physics* (Oxford University, New York, 2002).
- [59] P. NOZIÈRES ET D. PINES, *The theory of quantum liquids* (Perseus Books, Cambridge, MA, 1999).
- [60] K. G. SINGH ET D. S. ROKHSAR, “Disordered bosons : Condensate and excitations”, *Phys. Rev. B* **49**, 9013 (1994).
- [61] G. E. ASTRAKHARCHIK, J. BORONAT, J. CASULLERAS, ET S. GIORGINI, “Superfluidity versus Bose-Einstein condensation in a Bose gas with disorder”, *Phys. Rev. A* **66**, 023603 (2002).
- [62] D. B. HAVILAND, Y. LIU, ET A. M. GOLDMAN, “Onset of superconductivity in the two-dimensional limit”, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2180 (1989).
- [63] M. MA, B. I. HALPERIN, ET P. A. LEE, “Strongly disordered superfluids : Quantum fluctuations and critical behavior”, *Phys. Rev. B* **34**, 3136 (1986).
- [64] L. Z. P. NISAMANEAPHONG ET M. MA, “Gaussian theory of superfluid Bose-glass phase transition”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3830 (1993).
- [65] A. F. HEBARD ET M. A. PAALANEN, “Magnetic-field-tuned superconductor-insulator transition in two-dimensional films”, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 927 (1990).
- [66] N. F. MOTT, *Metal-Insulator Transitions* (Taylor and Francis, London, 1990).
- [67] D. BELITZ ET T. R. KIRKPATRICK, “The Anderson-Mott transition”, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 261 (1994).
- [68] R. T. SCALETTAR, G. G. BATROUNI, ET G. T. ZIMANYI, “Localization in Interacting, Disordered, Bose Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3144 (1991).
- [69] I. M. LIFSHITS, S. A. GREDESKUL, ET L. A. PASTUR, *Introduction to the theory of disordered systems* (Wiley-Interscience Publication, 1988).
- [70] R. FREEDMAN ET J. A. HERTZ, “Theory of a Fermi glass”, *Phys. Rev. B* **15**, 2384 (1977).
- [71] K. BYCZUK, W. HOFSTETTER, ET D. VOLLHARDT, “Mott-Hubbard Transition versus Anderson Localization in Correlated Electron Systems with Disorder”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 056404 (2005).
- [72] N. MARKOVIC, A. M. MACK, G. MARTINEZ-ARIZALA, C. CHRISTIANSEN, ET A. M. GOLDMAN, “Evidence of Vortices on the Insulating Side of the Superconductor-Insulator Transition”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 701 (1998).

- [73] S. BOGDANOVICH, M. P. SARACHIK, ET R. N. BHATT, “Scaling of the Conductivity with Temperature and Uniaxial Stress in Si :B at the Metal-Insulator Transition”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 137 (1999).
- [74] A. AHARONY ET D. STAUFFER, *Introduction to Percolation Theory* (Taylor and Francis, London, 1994).
- [75] M. MÉZARD, G. PARISI, ET M. A. VIRASORO, *Spin Glass Theory and Beyond* (World Scientific, Singapour, 1987).
- [76] R. FOLMAN, P. KRUGER, D. J. D. J. SCHMIEDMAYER A, ET C. HENKEL, “Microscopic atom optics : From wires to an atom chip”, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 263 (2002).
- [77] J. ESTÈVE, C. AUSSIBAL, T. SCHUMM, C. FIGL, D. MAILLY, I. BOUCHOULE, C. I. WESTBROOK, ET A. ASPECT, “Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms”, *Phys. Rev. A* **70**, 043629 (2004).
- [78] J.-B. TREBBIA, C. L. G. ALZAR, R. CORNELUSSEN, C. I. WESTBROOK, ET I. BOUCHOULE, “Roughness suppression in an AC atom chip”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 263201 (2007).
- [79] P. W. COURTEILLE, B. DEH, J. FORTÁGH, A. GÜNTHER, S. KRAFT, C. MARZOK, S. SLAMA, ET C. ZIMMERMANN, “Highly versatile atomic micro traps generated by multifrequency magnetic field modulation”, *J. Phys. B-Atomic Molecular and optical physics* **39**, 5 (2006).
- [80] I. LESANOVSKY, T. SCHUMM, S. HOFFERBERTH, L. M. ANDERSSON, P. KRÜGER, ET J. SCHMIEDMAYER, “Adiabatic radio-frequency potentials for the coherent manipulation of matter waves”, *Phys. Rev. A* **73**, 033619 (2006).
- [81] U. GAVISH ET Y. CASTIN, “Matter-Wave Localization in Disordered Cold Atom Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 020401 (2005).
- [82] S. OSPELKAUS, C. OSPELKAUS, O. WILLE, M. SUCCO, P. ERNST, K. SENGSTOCK, ET K. BONGS, “Localization of Bosonic Atoms by Fermionic Impurities in a Three-Dimensional Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 180403 (2006).
- [83] K. GÜNTER, T. STÖFERLE, H. MORITZ, M. KÖHL, ET T. ESSLINGER, “Bose-Fermi Mixtures in a Three-Dimensional Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 180402 (2006).
- [84] C. Cohen-Tannoudji, Forces exercées par des photons sur des atomes, Cours au Collège de France, 1982-1983, disponible sur <http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france>.
- [85] R. GRIMM, M. WEIDEMÜLLER, ET Y. OVCHINNIKOV, “Optical dipole traps for neutral atoms”, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 95 (2000).
- [86] T. SCHULTE, S. DRENKELFORTH, J. KRUSE, W. ERTMER, J. ARLT, K. SACHA, J. ZAKRZEWSKI, ET M. LEWENSTEIN, “Route towards Anderson-like localisation of Bose-Einstein condensate in disordered optical lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170411 (2005).
- [87] P. HORAK, J.-Y. COURTOIS, ET G. GRYNBERG, “Atom cooling and trapping by disorder”, *Phys. Rev. A* **58**, 3953 (1998).
- [88] J. E. LYE, L. FALLANI, M. MODUGNO, D. WIERSMA, C. FORT, ET M. INGUSCIO, “Bose-Einstein Condensate in a Random Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 070401 (2005).
- [89] B. DAMSKI, J. ZAKRZEWSKI, L. SANTOS, P. ZOLLER, ET M. LEWENSTEIN, “Atomic Bose and Anderson Glasses in Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080403 (2003).

- [90] A. SANPERA, A. KANTIAN, L. SANCHEZ-PALENCIA, J. ZAKREWSKI, ET M. LEWENSTEIN, “Atomic Fermi-Bose Mixtures in Inhomogeneous and Random Lattices : From Fermi Glass to Quantum Spin Glass and Quantum Percolation”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040401 (2004).
- [91] L. FALLANI, J. LYE, V. GUARRERA, C. FORT, ET M. INGUSCIO, “Ultracold Atoms in a Disordered Crystal of Light : Towards a Bose Glass”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 130404 (2007).
- [92] L. SANCHEZ-PALENCIA, “Smoothing effect and delocalization of interacting Bose-Einstein condensates in random potentials”, *Phys. Rev. A* **74**, 053625 (2006).
- [93] M. TIMMER, A. PELSTER, ET R. GRAHAM, “Disorder-induced shift of condensation temperature for dilute trapped Bose gases”, *Europhysics Lett.* **76**, 760 (2006).
- [94] K. HUANG, *Statistical mechanics*, 2ème éd. (Wiley, New York, 1987).
- [95] S. GIORGINI, L. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Effects of disorder in a dilute Bose gas”, *Phys. Rev. B* **49**, 12938 (1994).
- [96] R. GRAHAM ET A. PELSTER, “Mean-Field Theory of Disordered Bosons”, *arXiv cond* (2007).
- [97] L. ZHANG, “Disordered boson systems : A perturbative study”, *Phys. Rev. B* **47**, 14364 .
- [98] V. YUKALOV ET R. GRAHAM, “Bose-Einstein condensed systems in random potentials”, *Phys. Rev. A* **75**, 023619 (2007).
- [99] P. LUGAN, D. CLÉMENT, P. BOUYER, A. ASPECT, ET L. SANCHEZ-PALENCIA, “Localization of Bogolyubov Quasiparticles in Interacting Bose-Einstein Condensates Subjected to Correlated Random Potentials”, *Phys. Rev. Lett.* (2007).
- [100] T. PAUL, K. RICHTER, ET P. SCHLAGHECK, “Nonlinear Resonant Transport of Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 020404 (2005).
- [101] E. AKKERMANS, S. GHOSH, ET Z. MUSSLIMANI, “Numerical study of one-dimensional and interacting Bose-Einstein condensates in a random potential”, *arXiv condmat/*, 0610579 (2007).
- [102] B. SHAPIRO, “Expansion of a Bose-Einstein Condensate in the Presence of Disorder”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 060602 (2007).
- [103] R. C. KUHN, C. MINIATURA, D. DELANDE, O. SIGWARTH, ET C. A. MÜLLER, “Localization of Matter Waves in Two-Dimensional Disordered Optical Potentials”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 250403 (2005).
- [104] R. ROTH ET K. BURNETT, “Phase diagram of bosonic atoms in two-color superlattices”, *Phys. Rev. A* **68**, 023604 (2003).
- [105] V. AHUFINGER, L. SANCHEZ-PALENCIA, A. KANTIAN, A. SANPERA, ET M. LEWENSTEIN, “Disordered ultracold atomic gases in optical lattices : A case study of Fermi-Bose mixtures”, *Phys. Rev. A* **72**, 063616 (2005).
- [106] P. LUGAN, D. CLÉMENT, P. BOUYER, A. ASPECT, M. LEWENSTEIN, ET L. SANCHEZ-PALENCIA, “Ultracold Bose Gases in 1D Disorder : From Lifshits Glass to Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 170403 (2007).
- [107] G. ASKAR’YAN, *Sov. Phys. JETP* **15**, 1088 (1962).

- [108] V. LETOKHOV, *Sov. Phys. JETP* **7**, 272 (1968).
- [109] A. ASHKIN, “Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 156 (1970).
- [110] A. ASHKIN, “Trapping of Atoms by Resonance Radiation Pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 729 (1978).
- [111] J. BJORKHOLM, R. FREEMAN, A. ASHKIN, ET D. PEARSON, “Observation of Focusing of Neutral Atoms by the Dipole Forces of Resonance-Radiation Pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1361 (1978).
- [112] S. CHU, J. BJORKHOLM, A. ASHKIN, ET A. CABLE, “Experimental observation of optically trapped atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 314 (1986).
- [113] B. DEMARCO ET D. S. JIN, “Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas”, *Science* **285**, 1703 (1999).
- [114] O. MORSCH ET M. OBERTHALER, “Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices”, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [115] L.-M. DUAN, E. DEMLER, ET M. D. LUKIN, “Controlling Spin Exchange Interactions of Ultracold Atoms in Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 090402 (2003).
- [116] L. SANTOS, M. A. BARANOV, J. I. CIRAC, H.-U. EVERTS, H. FEHRMANN, ET M. LEWENSTEIN, “Atomic Quantum Gases in Kagomé Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 030601 (2004).
- [117] B. PAREDES, C. TEJEDOR, ET J. I. CIRAC, “Fermionic atoms in optical superlattices”, *Phys. Rev. A* **71**, 063608 (2005).
- [118] B. DARQUIE, M. JONES, J. DINGJAN, J. BEUGNON, S. BERGAMINI, Y. SORTAIS, G. MESSIN, A. BROWAEYS, ET P. GRANGIER, “Controlled single-photon emission from a single trapped two-level atom”, *Science* **309**, 5733 (2005).
- [119] L. COGNET, *Miroirs atomiques : diffraction en incidence rasante et rugosité d’un miroir magnétique*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, Université Paris XI, 1999.
- [120] J. W. GOODMAN, *Speckle Phenomena in Optics : Theory and Applications* (Roberts and Company Publishers, 2007).
- [121] J. W. GOODMAN, *Laser speckle and related phenomena* (J.-C. Dainty, Springer-Verlag, Berlin, 1975).
- [122] M. FRANÇON, *La Granularité Laser (speckle) et ses applications en optique* (Masson, Paris, 1978).
- [123] T. S. M. KECHNIE, “Measurement of some second order statistical properties of speckle”, *Optik* **39**, (1974).
- [124] A. VARÒN, *Croissance de la phase et propriétés de transport en présence de désordre d’un condensat de Bose-Einstein*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, Université Paris XI, 2007.
- [125] D. MIDDLETON, *An Introduction to Statistical Communication Theory*, iee press classic re-issue, p. 402 éd. (IEEE Press, Piscataway, NJ, 1996).

- [126] G. G. BATROUNI, R. T. SCALETTAR, G. T. ZIMANYI, ET A. P. KAMPF, “Supersolids in the Bose-Hubbard Hamiltonian”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2527 (1995).
- [127] F. PÁZMÁNDI, G. ZIMÁNYI, ET R. SCALETTAR, “Mean-Field Theory of the Localization Transition of Hard-Core Bosons”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1356 (1995).
- [128] R. ROTH ET K. BURNETT, “Ultracold bosonic atoms in two-colour superlattices”, *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.* **5**, S50 (2003).
- [129] B. DESRUELLE, *Évaporation par radio-fréquence et condensation de Bose-Einstein d’un gaz d’alcalins en régime de champ fort*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, Université Paris XI, 1999.
- [130] V. BOYER, *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans les champs magnétiques intenses*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, Université Paris XI, 2000.
- [131] S. RICHARD, *Spectroscopie de Bragg d’un quasi-condensat*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2003.
- [132] F. GERBIER, *Condensats de Bose-Einstein dans un piège anisotrope*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, Université Paris VI, 2003.
- [133] L. PITAEVSKII ET S. STRINGARI, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford Science Publication, 2003).
- [134] S. STRINGARI, “Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2360 (1996).
- [135] N. J. VAN DRUTEN ET W. KETTERLE, “Two-Step Condensation of the Ideal Bose Gas in Highly Anisotropic Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 549 (1997).
- [136] D. S. PETROV, G. V. SHLYAPNIKOV, ET J. T. M. WALRAVEN, “Regimes of quantum degeneracy in trapped 1D gases”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).
- [137] D. S. PETROV, G. V. SHLYAPNIKOV, ET J. T. M. WALRAVEN, “Phase-fluctuating 3D Bose-Einstein condensates in elongated traps”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 050404 (2001).
- [138] S. RICHARD, F. GERBIER, J. H. THYWISSEN, M. HUGBART, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Momentum spectroscopy of 1D phase fluctuations in Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010405 (2003).
- [139] D. HELLWEG, L. CACCIAPUOTI, M. KOTTKE, T. SCHULTE, K. SENGSTOCK, W. ERTMER, ET J. J. ARLT, “Measurement of the spatial correlation function of a phase-fluctuating Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010406 (2003).
- [140] M. HUGBART, J. RETTER, F. GERBIER, A. VARON, S. RICHARD, J. THYWISSEN, D. CLÉMENT, P. BOUYER, ET A. ASPETC, “Coherence length of an elongated condensate : a study by matter-wave interferometry”, *Euro. phys. J. D.* **35**, 155 (2005).
- [141] S. DETTMER *et al.*, “Observation of Phase Fluctuations in Elongated Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160406 (2001).
- [142] D. HELLWEG *et al.*, “Phase fluctuations in Bose-Einstein condensates”, *Applied Phys. B* **73**, 781 (2001).
- [143] G. DELANNOY, *Étude des techniques de production de condensats de Bose-Einstein : évaporation multi-fréquence et refroidissement sympathique*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2001.

- [144] Y. KAGAN, E. L. SURKOV, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential”, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
- [145] Y. CASTIN ET R. DUM, “Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [146] Y. P. CHEN, J. HITCHCOCK, D. DRIES, M. JUNKER, C. WELFORD, ET R. G. HULLET, “Phase Coherence and Superfluid-Insulator Transition in a Disordered Bose-Einstein Condensate”, *arXiv* 0710.5187 (2007).
- [147] M. LEWENSTEIN, A. SANPERA, V. AHUNFINGER, B. DAMSKI, A. SEN, ET U. SEN, “Ultracold atomic gases in optical lattices : Mimicking condensed matter physics and beyond”, *Adv. in Physics* **56**, 243 (2007).
- [148] M. P. A. FISHER, “Quantum phase transitions in disordered two-dimensional superconductors”, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 923 (1990).
- [149] M. A. PAALANEN, A. F. HEBARD, ET R. R. RUEL, “Low-temperature insulating phases of uniformly disordered two-dimensional superconductors”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1604 (1992).
- [150] Y. DUBI, Y. MEIR, ET Y. AVISHAI, “Nature of the superconductor-insulator transition in disordered superconductors”, *Nature* **449**, 876 (2007).
- [151] T. CREN, D. RODITCHEV, W. SACKS, ET J. KLEIN, “Nanometer scale mapping of the density of states in an inhomogeneous superconductor”, *Europhys. Lett.* **54**, 84 (2001).
- [152] I. S. BELOBORODOV, A. V. LOPATIN, V. M. VINOKUR, ET K. B. EFETOV, “Granular electronic systems”, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 469 (2007).
- [153] M. HUGBART-FOUCHÉ, *Étude des propriétés de cohérence d’un condensat de Bose-Einstein à l’équilibre et hors équilibre*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, Université Paris XI, 2005.
- [154] C. FORT, L. FALLANI, V. GUARRERA, J. LYE, M. MODUGNO, D. WIERSMA, ET M. INGUSCIO, “Effect of optical disorder and single defects on the expansion of a Bose-Einstein condensate in a one-dimensional waveguide”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170410 (2005).
- [155] S. STRINGARI, “Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps”, *Phys. Rev. A* **58**, 2385 (1998).
- [156] T. ANKER, M. ALBIEZ, R. GATI, S. HUNSMANN, B. EIERMANN, A. TROMBETTONI, ET M. K. OBERTHALER, “Nonlinear Self-Trapping of Matter Waves in Periodic Potentials”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 020403 (2005).
- [157] L. SANCHEZ-PALENCIA ET L. SANTOS, “Bose-Einstein condensates in optical quasicrystal lattices”, *Phys. Rev. A* **72**, 053607 (2005).
- [158] F. CATALIOTTI, S. BURGER, C. FORT, P. MADDALONI, F. MINARDI, A. TROMBETTONI, A. SMERZI, ET M. INGUSCIO, “Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates”, *Science* **293**, 843 (2001).
- [159] M. ALBIEZ, R. GATI, J. FÖLLING, S. HUNSMANN, M. CRISTIANI, ET M. K. OBERTHALER, “Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010402 (2005).
- [160] B. D. JOSEPHSON, “Possible new effects in superconductive tunnelling”, *Phys. Rev.* **1**, 251 (1962).

- [161] D. LAURENT, O. LEGRAND, ET F. MORTESSAGNE, “Direct Observation of Localized Modes in an Open Disordered Microwave Cavity”, *ArXiv* **0702657**, (2007).
- [162] N. F. MOTT ET W. D. TOWES, *Adv. Phys.* **10**, 107 (1961).
- [163] D. J. THOULESS, “Maximum Metallic Resistance in Thin Wires”, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1167 (1977).
- [164] E. ABRAHAMS, P. W. ANDERSON, D. C. LICCIARDELLO, ET T. V. RAMAKRISHNAN, “Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions”, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [165] F. M. IZRAILEV ET A. A. KROKHIN, “Localization and the Mobility Edge in One-Dimensional Potentials with Correlated Disorder”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4062 (1999).
- [166] M. D. GIRARDEAU, *J. Math. Phys.* **1**, 516 (1960).
- [167] E. H. LIEB ET W. LINIGER, “Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State”, *Phys. Rev.* **130**, 1605 (1963).
- [168] M. MODUGNO, “Collective dynamics and expansion of a Bose-Einstein condensate in a random potential”, *Phys. Rev. A* **73**, 013606 (2006).
- [169] D. JIN, J. ENSHER, M. MATTHEWS, C. WIEMAN, ET E. CORNELL, “Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4204 (1996).
- [170] D. M. STAMPER-KURN, H.-J. MIESNER, S. INOUE, M. R. ANDREWS, ET W. KETTERLE, “Collisionless and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 500 (1998).
- [171] D. S. JIN, M. R. MATTHEWS, J. R. ENSHER, C. E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL, “Temperature-Dependent Damping and Frequency Shifts in Collective Excitations of a Dilute Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 764 (2001).
- [172] W. V. LIU, “Theoretical Study of the Damping of Collective Excitations in a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4056 (1997).
- [173] P. O. FEDICHEV, G. V. SHLYAPNIKOV, ET J. T. M. WALRAVEN, “Damping of Low-Energy Excitations of a Trapped Bose-Einstein Condensate at Finite Temperatures”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2269 (1998).
- [174] S. A. MORGAN, R. J. BALLAGH, ET K. BURNETT, “Solitary-wave solutions to nonlinear Schrödinger equations”, *Phys. Rev. A* **55**, 4338 (1998).
- [175] K. S. STRECKER, G. B. PARTRIDGE, A. G. TRUSCOTT, ET R. G. HULET, *Nature* **417**, 150 (2002).
- [176] P. CLADÉ, E. DE MIRANDES, M. CADORET, S. GUELLATI-KHÉLIFA, C. SCHWOB, F. NEZ, L. JULIEN, ET F. BIRABEN, “A new determination of the fine structure constant based on Bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical optical lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 033001 (2006).
- [177] G. ROATI, E. D. MIRANDES, F. FERLAINO, H. OTT, G. MODUGNO, ET M. INGUSCIO, “Atom Interferometry with Trapped Fermi Gases”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 230402 (2004).
- [178] I. CARUSOTTO, L. PITAEVSKII, S. STRINGARI, G. MODUGNO, ET M. INGUSCIO, “Sensitive Measurement of Forces at the Micron Scale Using Bloch Oscillations of Ultracold Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 033202 (2005).

- [179] T. SCHULTE, S. DRENKELFORTH, G. K. BÜNING, W. ERTMER, J. ARLT, M. LEWENSTEIN, ET L. SANTOS, “Dynamics of Bloch Oscillations in Disordered Lattice Potentials”, *ArXiv* **0707.3131**, (2007).
- [180] T. KIMURA, H. SAITO, ET M. UEDA, “A Variational Sum-Rule Approach to Collective Excitations of a Trapped Bose-Einstein Condensate”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 1477 (1999).
- [181] H. MORITZ, T. STÖFERLE, M. KÖHL, ET T. ESSLINGER, “Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1D Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250402 (2003).
- [182] C. D. FERTIG ET AL., “Strongly Inhibited Transport of a Degenerate 1D Bose Gas in a Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 120403 (2005).
- [183] J. GEA-BANACLOCHE ET AL., “Meanfield treatment of the damping of the oscillations of a one-dimensional Bose gas in an optical lattice”, *Phys. Rev. A* **73**, 013605 (2006).
- [184] E. ZAREMBA, “Sound propagation in a cylindrical Bose-condensed gas”, *Phys. Rev. A* **57**, 1050 (1998).
- [185] G. M. KAVOULAKIS ET C. PETHICK, “Quasi-one dimensional character of sound propagation in elongated Bose-Einstein condensed clouds”, *Phys. Rev. A* **58**, 1563 (1998).
- [186] E. L. ANDRONIKASHVILI, *J. Phys. USSR* **10**, 201 (1946).
- [187] H. E. HALL ET W. F. VINEN, *Proc. Roy. Soc. A.* **238**, 204 (1956).
- [188] C. RAMAN, M. KÖHL, R. ONOFRIO, D. S. DURFEE, C. E. KUKLEWICZ, Z. HADZIBABIC, ET W. KETTERLE, “Evidence for a critical velocity in a Bose-Einstein condensed gas”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2502 (1999).
- [189] R. ONOFRIO, C. RAMAN, J. M. VOGELS, J. R. ABO-SHAER, A. P. CHIKKATUR, ET W. KETTERLE, “Observation of superfluid flow in a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2228 (2000).
- [190] S. INOUE, S. GUPTA, T. ROSEN BAND, A. P. CHIKKATUR, A. GÖRLITZ, T. L. GUSTAVSON, A. E. LEANHARDT, D. E. PRITCHARD, ET W. KETTERLE, “Observation of Vortex Phase Singularities in Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 080402 (2001).
- [191] N. PAVLOFF, “Breakdown of superfluidity of an atom laser past an obstacle”, *Phys. Rev. A* **66**, 013610 (2002).
- [192] F. GERBIER, *Condensats de Bose-Einstein dans un piège anisotrope*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2003.
- [193] B. DAMSKI, “Formation of shock waves in a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. A* **69**, 043610 (2004).
- [194] W. ZHANG ET D. F. WALLS, “Gravitational and collective effects in an output coupler for a Bose-Einstein condensate in an atomic trap”, *Phys. Rev. A* **57**, 1248 (1998).
- [195] N. BILAS ET N. PAVLOFF, “Anderson localization of elementary excitations in a one dimensional Bose-Einstein condensate”, *European Physical Journal D* **40**, 387 (2006).
- [196] J. STEINHAEUER, R. OZERI, N. KATZ, ET N. DAVIDSON, “Excitation spectrum of a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120407 (2002).
- [197] J. STEINHAEUER, N. KATZ, R. OZERI, N. DAVIDSON, C. TOZZO, ET F. DALFOVO, “Bragg spectroscopy of the multibranch spectrum of an elongated Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060404 (2002).

- [198] D. A. Steck, Rubidium 87 D Line data, disponible sur le site internet <http://steck.us/alkalidata>.
- [199] E. A. BURT, R. W. GHRIST, C. J. MYATT, M. J. HOLLAND, E. A. CORNELL, ET C. E. WIEMAN, “Coherence, correlations, and collisions : What one learns about Bose-Einstein condensates from their decay”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).
- [200] G. GRYNBERG, A. ASPECT, ET C. FABRE, *Introduction aux lasers et à l’optique quantique* (Ellipses, 1997).
- [201] Y. LE COQ, *Condensats de Bose-Einstein et lasers à atomes*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2002.
- [202] J.-F. RIOU, *Étude des propriétés de propagation d’un laser à atomes*, Thèse de Doctorat, Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique, Université Paris XI, 2006.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente différents aspects des condensats de Bose-Einstein atomiques placés dans un potentiel aléatoire 1D. Nous décrivons en détail les propriétés et la caractérisation du potentiel optique aléatoire utilisé, issu d'un champ de tavelures. Nous abordons alors trois aspects des condensats désordonnés. En premier lieu, quelques propriétés des condensats désordonnés piégés sont caractérisées. En particulier, nous étudions le développement de modulations de densité sur le condensat au cours d'un temps de vol et nous montrons que leur origine n'est pas liée à des fluctuations de phase initiales. Dans un deuxième temps, nous décrivons des propriétés de transport d'un condensat dans le désordre. Nous avons observé la suppression de l'expansion de l'onde de matière dans un potentiel aléatoire 1D et développé un scénario de piégeage, où les interactions jouent un rôle central, permettant de comprendre ces observations. Nous présentons ensuite un travail théorique sur l'expansion du condensat dans un régime dit de *faible* désordre et nous montrons que le phénomène de localisation d'Anderson peut alors être à l'origine du piégeage de l'onde de matière. Enfin, dans une dernière partie nous abordons l'étude des modes collectifs d'un condensat désordonné. Des mesures sur l'absence de décalage en fréquence des modes dipolaires et quadrupolaires et l'amortissement du mode dipolaire en présence de désordre sont présentées. Enfin, nous mesurons la vitesse de propagation d'un pic de densité et nous en concluons que la vitesse du son n'est pas modifiée par la présence d'un potentiel aléatoire de faible amplitude.

ABSTRACT

In this thesis, several aspects of atomic Bose-Einstein condensates in a random potential are discussed. The realization and characterization of a random optical potential induced by laser speckle is presented. First, we study some properties of the trapped, disordered condensates, in particular the enhancement of large density modulations during time-of-flight. We show that this effect is not related to initial phase fluctuations but originates from small initial density modulations in the trap. Secondly, we report on the suppression of the 1D expansion of an interacting matter-wave in the presence of disorder. A detailed experimental analysis supports the proposed scenario of trapping where interactions play a crucial role. A different regime of *weak* disorder is then investigated theoretically and we show that Anderson localization of the condensate can happen in this case. Thirdly, we report on collective modes of a disordered Bose-Einstein condensate. The absence of frequency shifts and the damping of the dipole mode in the presence of disorder are discussed. Finally, we measure the velocity of sound in a disordered condensate and we show the absence of shift compared to the non-disordered case.