



HAL
open science

Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectrale

Guillaume Ducrozet

► **To cite this version:**

Guillaume Ducrozet. Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectrale. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Nantes; Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2007. Français. NNT: . tel-00263596

HAL Id: tel-00263596

<https://theses.hal.science/tel-00263596>

Submitted on 12 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2007

N° B.U. :

Thèse de DOCTORAT

***Diplôme délivré conjointement par
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES TRANSFERTS

Présentée et soutenue publiquement par :

GUILLAUME DUCROZET

le 09 novembre 2007

à l'Ecole Centrale de Nantes

TITRE

**MODELISATION DES PROCESSUS NON-LINEAIRES DE GENERATION ET DE PROPAGATION
D'ETATS DE MER PAR UNE APPROCHE SPECTRALE**

JURY

Président du Jury et rapporteur :	M. Olivier THUAL	Professeur, Institut National Polytechnique de Toulouse (ENSEEIH)
Rapporteur :	M. Bernard MOLIN	Professeur associé (HDR), École Centrale Marseille
Examineurs :	M. Carlos GUEDES SOARES	Professeur, Technical University of Lisbon (Portugal)
	M. René HUIJSMANS	Professeur, Technical University of Delft (Pays-Bas)
	M. Pierre FERRANT	Maître de Conférences (HDR), École Centrale Nantes
	M. Alain H. CLEMENT	Ingénieur de Recherche (HDR), École Centrale Nantes

Remerciements

C'est avec une satisfaction non-dissimulée que je prends la plume (ou devrais-je dire le clavier) pour rédiger ces remerciements qui me permettront, non seulement de remercier tous les gens m'ayant aidé, accompagné, soutenu lors de cette thèse, mais également de mettre un point final à cette "aventure" commencé il y a un peu plus de 3 ans déjà.

En premier lieu, je tiens à remercier Olivier Thual, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse (ENSEEIH) d'avoir accepté de présider mon jury de thèse ainsi que de rapporter mon travail de thèse et Bernard Molin, Professeur associé à l'École Centrale Marseille pour avoir également accepté d'être rapporteur. Leurs commentaires m'ont permis de clarifier certains points pour les prochains lecteurs mais surtout de mettre en lumière différents axes de recherche intéressants n'ayant pas été abordés durant cette thèse. J'exprime également ma gratitude à Carlos Guedes Soares, Professeur à l'Université Technique de Lisbonne (Portugal) et René Huijsmans, Professeur à l'Université Technique de Delft (Pays Bas) d'avoir accepté de faire partie de mon jury lors de ma soutenance de thèse et également pour leur intérêt porté à mon travail. J'adresse un remerciement particulier à Michel Benoit, Ingénieur-chercheur au Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement d'EDF d'avoir également accepté d'assister à ma soutenance de thèse, sa présence en tant que jury n'ayant pas pu être officialisée à cause de problèmes administratifs. Ses commentaires ont cependant été du plus grand intérêt et m'ont permis d'envisager un certain nombre d'études à mener par la suite.

Ensuite, en se rapprochant de ce qu'a été mon lieu de travail pendant 3 ans, je tiens tout d'abord à remercier Gérard Delhommeau, directeur du Laboratoire de Mécanique des Fluides pendant ma thèse de m'avoir accueilli dans ce si sympathique bâtiment D et également Alain Clément, son tout nouveau successeur, pour avoir officiellement encadré ma thèse.

Au cours de mon petit séjour norvégien (je remercie au passage John Grue et Dorian Fructus pour leur initiation aux méthodes spectrales), Pierre Ferrant m'a confirmé mon retour à l'ECN et je me faisais donc une joie de revenir en terre nantaise après mon exil de 6 mois. Je ne savais pas trop à quoi m'attendre en passant la porte le premier jour mais, le moins que l'on puisse dire, c'est que je ne suis nullement déçu par mon choix. Ceci tient autant du fait de la sympathie de l'ensemble des membres du LMF que de l'intérêt du travail qui m'a été proposé.

Je veux donc commencer par remercier Pierre pour la confiance qu'il m'a apporté tout au long de ce travail. Malgré ses nombreuses casquettes, il a toujours su rester disponible quand cela était nécessaire afin d'orienter mon travail : sachez-le, il n'est jamais à court d'idées ! C'est également grâce à lui que j'ai pu participer à un certain nombre de conférences me menant du Svalbard jusqu'à San Francisco en passant par la Croatie. Il a également su m'apporter conseils et aide pour l'après-thèse et je tiens donc à t'adresser pour tout ça (et ce que j'ai oublié!) un grand et sincère "Merci" Pierre.

Il va falloir maintenant en venir à mes acolytes, les HOS-men, les plus beaux, les plus forts et je ne sais par où commencer ! Je parle bien évidemment de mes deux compères de travail pendant 3 ans et désormais (je l'espère) amis : David et Félicien. C'est grâce à eux si cette thèse c'est si bien déroulée. Commençons par David, notre tout nouveau maître de conférences : je citerai quelques unes des qualités qui font de lui un partenaire de travail irremplaçable : son enthousiasme, sa capacité impressionnante de travail (surtout lorsque l'on s'approche des deadlines), son foisonnement d'idées, ses relectures toujours très attentives et j'en oublie ! Je te remercie David pour ton aide, toujours précieuse, tes jeux de mots, ta maintenance CRAYenne, Pour ce qui est de Félicien, il est difficile de résumer son apport durant toute ma thèse. Ses larges connaissances sur une multitude de sujets ainsi que sa rigueur et son efficacité en font un collègue indispensable sur qui on peut toujours compter. Il prend le temps d'expliquer les choses en détail et ses idées se révèlent souvent des plus pertinentes. Je voudrais donc te remercier grandement pour tout mister Fébo. Un dernier grand merci à tous les deux pour la relecture attentive de ce manuscrit. Je sais que dorénavant David s'éloigne du côté HOS de la force, appelé par les sirènes de la SPH, mais j'espère sincèrement continuer à travailler avec vous . . .

Je ne peux poursuivre sans écrire quelques mots sur mon collocataire mais surtout ami Ouss alias Encul'Ouss, Uncle'Ouss, SexyBoy, ... Tu t'en vas maintenant sous d'autres cieux plus ensoleillés à Toulouse mais tu auras toujours une chaise libre dans mon bureau ! Je te remercie de ton soutien tout au long de cette épopée qu'est la thèse. C'est une période de ma vie qui se tourne et tu es pour beaucoup dans le bon déroulement de celle-ci. Tu sais tout ce que je te souhaite pour la suite et je ne m'étendrai donc pas plus ici. Une pensée également pour le j'ai nommé Pierre, Pierrot ou RdR. Une cohabitation de 3 ans déjà (sic !) agrémentée de Mylène Farmer, de Bohemian Rhapsody, de Joshua tree, de CS, de Travian et que sais-je encore. Merci pour la bonne ambiance en tout cas. Viens ensuite l'heure de remercier toute la bande de joyeux lurons composant le laboratoire et dont j'ai croisé la route : Nico le nîmois avec ses soirées plage (il y en a encore beaucoup de sacs à monter ?), ses concerts, ses Oger nights et surtout son indéfectible motivation ; Jean-Christophe alias Jimmy ou JSex, le néo-irlandais avec ses matchs de rugby, sa truffade (miam !), son mythique aligot et feu sa fiesta (tu nous manques vieux, toi et ta gentillesse !); Romain alias Romulus ou le gendarme qui s'est maintenant expatrié avec sa p'tite famille du côté du BEC, on regrette les débats plein de mauvaise foi (je l'entends d'ici me parler de commandant de bord), les déménagements mais surtout les bonnes et franches rigolades ; Aurélien alias Babar ou ambassadeur VéloCampus, son fameux SEAREV et ses non-moins fameuses synchros ; les SEAREV-men Mathieu et Hakim (on se fait un poker ?) ; Élise, notre HOS woman (à quand le retour du barbecue ?) ; Mikaël alias Micky ; Yannou (bientôt de retour parmi nous) ; Mathieu Doring, l'initiateur de la SPH mais surtout la personne avec qui il était plus qu'agréable de discuter ; ses successeurs Oger (prononcez : [o.gɜː]), JB et PM ; et enfin les jeunes qui, je l'espère, perpétueront la bonne ambiance du LMF : Charles, Chadi, Matthieu . . . Et à ceux que j'ai oublié . . . désolé !

Je veux également remercier l'ensemble des membres permanents de l'équipe pour leur accueil : je commence par Anne sans qui le labo ne pourrait fonctionner dans de si bonnes conditions : sa sympathie et sa disponibilité pour gérer nos incessants retards est précieuse ; Bertrand, toujours enthousiaste, et pour les quelques virées VTTistes auxquelles j'ai pris part (mes jambes s'en souviennent encore) ; Jean-Marc, le roi des expés ("Ne t'éloigne pas trop c'est toi qui a le fusil . . . Un ours blanc est si vite arrivé !") ; Lionel, de retour dans la sphère SWENSE ; Bruno ; Olivier ; Jean-Michel ; . . .

Je tiens également à remercier toute ma famille pour ces indispensables retours aux sources dans le Haut-Beaujolais, bien nécessaires pour recharger les batteries.

Enfin, je ferais une liste des gens ou autre m'ayant accompagné (de près ou de loin) pendant cette thèse et sans qui tout aurait été différent. Tout d'abord les artistes que j'ai le plus écouté : Björk ♡ (qui m'a permis d'aller visiter les arènes de Nîmes), Radiohead (un peu compressé à Rock en Seine mais inoubliable), CocoRosie (THE concert !), Georges Brassens, Led Zeppelin, The White Stripes, Massive Attack, Jacques Brel, Les Ogres de Barback, The Beatles, Les Têtes Raides, The Doors, Eels, The Cure, PJ Harvey, Air, Sigur Rós, La Rue Kétanou, The Arcade Fire, Devendra Banhart, Pink Floyd, The Dandy Warhols, Gorillaz, Archive, A Perfect Circle, Beck (géant ce concert !), Aimee Mann, Portishead, Renaud, Adam Green (la prochaine fois on le privera d'alcool avant de monter sur scène . . .), Craig Armstrong, Patrick Watson, Léo Ferré, Tom Waits, David Bowie, Emir Kusturica, Anouar Brahem, Noir Désir, Yann Tiersen, Antony & the Johnsons, Cat Power, Camille, Bat for Lashes, Beirut, Wax Tailor, Animal Collective, . . . Ensuite aléatoirement (ou pas) on a : Anne-Dominique (alias Sixtine), Magnolia, Terry Pratchett, Robert Jordan, The Lord of the Rings, Naruto, Alessandro Baricco, Beck (l'anime), la freebox, le Monop', le Perk (en particulier Mylène et Steph'), la Gargouille, Baudelaire, Enfer et Paradis, Guerre et Paix, Franz Kafka, le badminton (et par la même occasion tous les joueurs de l'ECN), ma 309, Gankutsuou, Norway of Life, les Utopiales, la FNAC, l'Olympic, VéloCampus, le Katorza, Michel Houellebecq, Céline, les souvenirs de Florence, les week-end, France Inter, Nova, FIP, last.fm, bitcomet, Death Note, Dostoïevsky, les Inrocks, le Counter-Strike du midi, Pierre Bordage, la Cafet', feu le Starcraft et Half-Life, la semaine de ski à Noël, Dancer in the Dark, Bleach, l'air pur, le jardin des plantes, la raclette, le monbazillac et je m'arrêterai sur cette note de dégustation . . . Et pour ceux qui ont lu ces fastidieux remerciements jusqu'au bout, vous avez droit au dernier "MERCI".

Guillaume Ducrozet,
Février 2008

Écrit et mis en page avec L^AT_EX 2_ε

Table des matières

Introduction générale	1
I Modélisation du problème physique	5
Introduction	9
I.1 Formulation	13
I.1.1 Hypothèses et équations générales	13
I.1.1.1 Modélisation d'un bassin de houle	15
I.1.1.2 Modélisation océanique	16
I.1.2 Résolution par méthode spectrale	17
I.1.2.1 Bassin de houle	17
I.1.2.2 Milieu ouvert	18
I.2 Modèle non-linéaire complet	21
I.2.1 Cœur de la méthode	21
I.2.1.1 Expression en quantités surfaciques	21
I.2.1.2 Calcul de la vitesse verticale	22
I.2.1.3 Algorithme de résolution	24
I.2.2 Rappels importants	25
I.2.2.1 Aspects théoriques & numériques	25
I.2.2.2 Validations	28
I.2.3 Temps de calcul	31
I.2.3.1 Influence de l'anti-repliement	31
I.2.3.2 Évolution avec le nombre de points	33
I.3 Améliorations apportées au modèle	35
I.3.1 Avance en temps	35
I.3.1.1 Principe	35
I.3.1.2 Mise en œuvre	37
I.3.1.3 Résultats	38
I.3.2 Calcul des vitesses dans le domaine fluide	40
I.3.2.1 Rappel	40
I.3.2.2 Solveur type Fenton & Rienecker	41
I.3.2.3 Adaptation du " H -operator"	42
I.3.2.4 Adaptation du " H_2 -operator"	44
I.3.2.5 Validations	45

II	Le bassin de houle numérique	53
	Introduction	57
II.1	Spécificités du problème	61
II.1.1	Problème de la génération de la houle	61
II.1.1.1	Modélisation du batteur	61
II.1.1.2	Le potentiel additionnel	62
II.1.2	Rappel des caractéristiques	65
II.1.2.1	Absorption	65
II.1.2.2	Rampe en temps	65
II.1.2.3	Validations	65
II.2	Amélioration de la génération	67
II.2.1	Principe de l'amélioration	67
II.2.1.1	Développement en ordres de la condition sur le batteur	68
II.2.1.2	Développement en ordre des CSL	69
II.2.2	Batteur 2 ^{ème} ordre: <i>HOST-wm2</i>	70
II.2.3	Batteur 3 ^{ème} ordre: <i>HOST-wm3</i>	72
II.2.4	Vers le batteur non-linéaire?	73
II.2.4.1	Résolution	73
II.2.4.2	Avance en temps de la condition batteur	75
II.3	Validations - Résultats	79
II.3.1	Houle régulière 2D	79
II.3.1.1	Élévation de surface libre	79
II.3.1.2	Conservation du volume	82
II.3.2	Vague focalisée 2D dans une houle irrégulière	86
II.3.2.1	Expériences	86
II.3.2.2	Élévation de surface libre	87
II.3.2.3	Influence des non-linéarités	90
II.3.2.4	Pression	91
II.3.2.5	Gradients de pression	94
III	Simulations Océaniques	97
	Introduction	101
III.1	Spécificités du problème	105
III.1.1	Problème de l'initialisation	106
III.1.1.1	Un état de mer réaliste?	106
III.1.1.2	Choix des paramètres	107
III.1.1.3	Du linéaire vers le non-linéaire	109
III.1.1.4	La reproduction	109
III.1.2	Méthodes d'analyse du champ de vagues	111
III.1.3	Probabilités des états de mer	113
III.1.3.1	Modèles linéaires	113

III.1.3.2	Modèles améliorés : modèles de Rayleigh-Stokes / Edgeworth-Rayleigh	115
III.1.3.3	Nombre de vagues	116
III.1.4	Validations	117
III.1.4.1	Propagation longue durée	117
III.1.4.2	Étude des échanges non-linéaires	122
III.1.5	Conclusion	125
III.2	Formation de vagues scélérates	127
III.2.1	Focalisation	127
III.2.1.1	Focalisation 2D	127
III.2.1.2	Focalisation directionnelle	129
III.2.2	Évolution longue	131
III.2.2.1	Domaine bidimensionnel	131
III.2.2.2	Domaine tridimensionnel	135
III.2.3	Influence de la directionnalité	138
III.2.3.1	Initialisation de la simulation	139
III.2.3.2	Évolution au cours du temps	144
III.2.3.3	Forme des vagues scélérates	153
III.2.3.4	Évolution temporelle du kurtosis et du spectre de l'élevation	156
III.2.4	Conclusion	162
IV	Couplage de méthodes	165
	Introduction	169
IV.1	Principe & Mise en œuvre	171
IV.1.1	Principe du couplage	171
IV.1.1.1	Méthodes existantes	171
IV.1.1.2	Principe et intérêt de cette nouvelle approche	173
IV.1.2	Mise en œuvre numérique	175
IV.1.2.1	Généralités	175
IV.1.2.2	Précision	175
IV.1.2.3	Efficacité	176
IV.2	Résultats	181
IV.2.1	Spectral-potentiel	181
IV.2.1.1	Intérêt	181
IV.2.1.2	Applications	182
IV.2.2	Spectral-RANS	184
IV.2.2.1	Intérêt	185
IV.2.2.2	Applications	185
IV.2.3	Spectral-SPH	187
IV.2.3.1	Intérêt	187
IV.2.3.2	Applications	187
	Conclusion générale	191

TABLE DES MATIÈRES

Annexes	197
A Sécularité pour le batteur 3^{ème} ordre?	197
Références Bibliographiques	200

Table des figures

I.1.1	Schéma du domaine de résolution avec système de coordonnées	13
I.1.2	Schéma du bassin de houle modélisé	15
I.2.1	Diagramme de la résolution temporelle des CSL	24
I.2.2	Convergence de l'évaluation de W pour une houle de cambrure $ka = 0.30$. . .	29
I.2.3	Surfaces de convergence du schéma HOS, fonction de N et M	29
I.2.4	Evolution du nombre d'opérations en fonction de l'ordre HOS M avec ou sans anti-repliement	33
I.2.5	Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de points en échelle log-log	34
I.3.1	Comparaison du pas de temps avec une erreur maximale fixée à $Tol = 10^{-7}$.	38
I.3.2	Comparaison de l'erreur avec un pas de temps fixé à $dt = 3.10^{-2}$	39
I.3.3	Surfaces de calcul successives avec l'opérateur H_2	44
I.3.4	Influence de la condition initiale dans le calcul de vitesse pour une houle régulière cambrée $ka = 0.30$	46
I.3.5	Profil vertical de la vitesse horizontale sous une crête, obtenu avec l'opérateur H comparé à la solution Rienecker & Fenton pour $ka = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40$.	47
I.3.6	Profil vertical de la vitesse horizontale sous une crête, obtenu avec l'opérateur H_2 comparé à la solution Rienecker & Fenton pour $ka = 0.30, 0.40$	48
I.3.7	Convergence de la reconstruction de la vitesse sur la surface libre pour le cas $ka = 0.30$	49
I.3.8	Convergence de la reconstruction de la vitesse sur la surface libre pour le cas $ka = 0.40$	50
I.3.9	Convergence avec des itérations non-linéaires de l'évaluation de la vitesse pour le cas $ka = 0.40$	51
II.1.1	Schéma de la forme verticale du batteur piston (à gauche) et volet (à droite)	62
II.1.2	Géométrie du domaine de résolution du problème additionnel	64
II.2.1	Algorithme de résolution pour $HOST-wm2$	71
II.2.2	Algorithme de résolution pour $HOST-wm3$	73
II.2.3	Algorithme de résolution itératif pour prise en compte non-linéaire du batteur	74
II.3.1	Comparaison entre génération 1 ^{er} , 2 ^{ème} et 3 ^{ème} ordre et les expériences pour une houle régulière, $ka = 0.13$	80
II.3.2	Comparaison entre génération 1 ^{er} , 2 ^{ème} et 3 ^{ème} ordre et les expériences pour une houle régulière, $ka = 0.2$	81
II.3.3	Différences entre génération 1 ^{er} et 2 ^{ème} ordre pour une houle régulière, $ka = 0.2$.	82
II.3.4	Convergence sur le volume en fonction du nombre de points $(N_x - 1) =$ $4(N_z - 1)$, $ka = 0.1$	84

TABLE DES FIGURES

II.3.5	Comparaison entre générations 1 ^{er} , 2 ^{ème} et 3 ^{ème} ordres sur l'évolution du volume, $ka = 0.1$	85
II.3.6	Comparaison entre génération 1 ^{er} , 2 ^{ème} et 3 ^{ème} ordre sur l'évolution du volume, $ka = 0.2$	85
II.3.7	Schéma du dispositif expérimental de mesure	87
II.3.8	Comparaison entre générations 1 ^{er} et 2 ^{ème} ordres et les expériences $\alpha = 1$. . .	88
II.3.9	Zoom de la comparaison entre générations 1 ^{er} et 2 ^{ème} ordres et les expériences $\alpha = 1$	89
II.3.10	Comparaison entre générations 1 ^{er} et 2 ^{ème} ordres et les expériences. $\alpha = 0.10$	89
II.3.11	Comparaison des pressions sous la surface libre entre les simulations <i>HOST-wm2</i> et les expériences.	92
II.3.12	Zoom de la comparaison de pression entre les simulations <i>HOST-wm2</i> et les expériences.	93
II.3.13	Gradient de pression horizontal en $z = -0.30m$	95
II.3.14	Zoom du gradient de pression horizontal $z = -0.30m$	95
III.1.1	Probabilités d'occurrence (scatter diagram) des états de mer en mer du Nord. Données sur la période 1973-2001 issues de Haver et al.	108
III.1.2	Influence du paramètre α sur le champ de vague focalisé	111
III.1.3	Définition d'une vague up-crossing : hauteur H et longueur d'onde λ_x	112
III.1.4	Fonction densité de probabilité et fonction de répartition Gaussienne	114
III.1.5	Fonction densité de probabilité et fonction de répartition selon loi de Rayleigh	115
III.1.6	Exemple d'un cas de simulation directe puis inverse sur 1000 périodes.	118
III.1.7	Évolution du déphasage lors de la propagation (directe puis inverse) d'une houle régulière $ka = 0.30$	119
III.1.8	Évolution du déphasage lors de la propagation (directe puis inverse) d'une houle régulière $ka = 0.30$	120
III.1.9	Évolution du skewness et du kurtosis au cours du temps pour 4 types de spectre	123
III.1.10	Reproduction des figures 5 et 6 de Tanaka	124
III.1.11	$T_1(\omega)$ pour un spectre de JONSWAP $E = 0.005$	124
III.1.12	$T_2(\omega, \theta)$ pour un spectre de JONSWAP $E = 0.005$	125
III.2.1	Evolution du champ de vagues lors de la focalisation. $T_f = 20.3 T_p$	128
III.2.2	Élévation de surface libre 3D initiale $E = 0.005$, $L_x = 21\lambda_p \times L_y = 21\lambda_p$, $N_x = 512 \times N_y = 256$, ordre HOS $M = 5$ et propagation linéaire inverse pendant $20T_p$	130
III.2.3	Élévation de surface libre 3D à la focalisation $t = 20.3 T_p$	130
III.2.4	Zoom de l'élévation de surface libre 3D à la focalisation $t = 20.3 T_p$	131
III.2.5	Champ de vagues 2D initial	132
III.2.6	Evolution du paramètre H_{max}/H_s pendant la simulation	133
III.2.7	Déformée de surface libre 2D de la vague scélérate à $t = 243T_p$	133
III.2.8	Zoom de la vague scélérate à $t = 243T_p$	134
III.2.9	Vue de la vague scélérate observée sur la plateforme pétrolière de Draupner .	134
III.2.10	Élévation de surface libre initiale, directionnalité $n = 2$	136
III.2.11	Evolution du paramètre H_{max}/H_s pendant la simulation, $n = 2$	136
III.2.12	Élévation de surface libre au moment de la vague scélérate, $t = 171T_p$, $n = 2$	137
III.2.13	Zoom de la vague scélérate à $t = 171T_p$	137

III.2.14	Élévation de surface libre initiale, directionnalité $n = 90$	139
III.2.15	Densité de probabilité de l'élévation de surface libre initiale, $n = 2$, $N_i = 500$ et $t = 0$	140
III.2.16	Densité de probabilité de l'élévation de surface libre initiale, $n = 2$, $N_i = 100$ et $t = 0$	141
III.2.17	Densité de probabilité de la hauteur crête à creux initiale, $n = 2$, $N_i = 100$ et $t = 0$	142
III.2.18	Densité de probabilité de l'élévation de surface libre : $n = 2$ et $t = 10 T_p$. . .	142
III.2.19	Densité de probabilité de la hauteur de vagues : $n = 2$ et $t = 10 T_p$	143
III.2.20	Évolution au cours du temps de la densité de probabilité de l'élévation de surface libre.	146
III.2.21	Évolution au cours du temps de la densité de probabilité de la hauteur de vague.	147
III.2.22	Évolution au cours du temps de la densité de probabilité de la hauteur de vague, moyennée sur $2T_p$	148
III.2.23	Densité de probabilité de la hauteur de vagues, $n = 30$, $t = 100T_p$	150
III.2.24	Évolution au cours du temps des paramètres : H_{max}/H_s et Kurtosis	151
III.2.25	Évolution au cours du temps du kurtosis pour les quatre directionnalités différentes	152
III.2.26	Position et forme des vagues scélérates dans le domaine de calcul pour les 4 directionnalités différentes	153
III.2.27	Forme moyenne des vagues scélérates en fonction de la directionnalité	155
III.2.28	Évolution du kurtosis au cours du temps sur les simulations de Socquet- Juglard et al.	158
III.2.29	Comparaison de l'évolution du kurtosis au cours du temps avec les simulations de Socquet-Juglard et al.	158
III.2.30	Évolution du spectre de l'élévation de surface libre au cours du temps, cas A de Krogstad et al.	160
III.2.31	Évolution du spectre de l'élévation de surface libre au cours du temps, cas B de Krogstad et al.	161
III.2.32	Évolution du spectre de l'élévation de surface libre au cours du temps, cas C de Socquet-Juglard et al.	162
IV.1.1	Décomposition fonctionnelle du problème de tenue à la mer = 1) génération- propagation de la houle sans corps + 2) interaction de la houle avec le corps	174
IV.1.2	Comportement pour un cas cambré de la vitesse verticale W reconstruite entre les nœuds de collocation	176
IV.1.3	Calcul couplé : premières étapes	178
IV.1.4	Calcul couplé : reconstruction du champ incident	179
IV.2.1	Efforts de pression de la houle incidente sur le système SEAREV	182
IV.2.2	Réponse en tangage des deux premières harmoniques	183
IV.2.3	Simulation du comportement du SEAREV avec ancrage. Vue en deux instants avec des mouvements de grande amplitude.	184
IV.2.4	Répartition statistique (scatter-diagram) des états de mer pour le site de l'île d'Yeu	184
IV.2.5	Élévation de surface libre autour de la TLP lors du passage d'une houle focalisée	186

TABLE DES FIGURES

IV.2.6	Champ de vitesse autour d'un carré immergé, couplage spectral/SPH.	188
IV.2.7	Composante horizontale du champ de vitesse, couplage spectral/SPH.	188
IV.2.8	Composante horizontale du champ de vitesse lors du déferlement, couplage spectral/SPH.	189

Liste des tableaux

I.2.1	Évolution du nombre d'opérations pour la résolution de W ($N = 1024$)	32
I.2.2	Évolution des ressources en mémoire nécessaires, $N = 1024 \times 512$	32
I.2.3	Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de points	33
I.3.1	Influence de la cambrure sur l'intégration temporelle. Pas de temps moyen dt .	40
II.3.1	Erreur sur la hauteur de la vague focalisée, ϵ_H , en fonction du facteur d'amplitude α	90
II.3.2	Erreur globale d'évaluation, ϵ en fonction du facteur d'amplitude α	90
III.1.1	Nombre de vagues étudiées suivant les cas d'analyse	117
III.1.2	Convergence selon l'ordre HOS M du déphasage après $1000 T_0$	120
III.1.3	Convergence selon le nombre de modes N_x utilisés du déphasage après $1000 T_0$	121
III.1.4	Influence du paramètre N_{der} sur le déphasage après $1000 T_0$	121
III.1.5	Influence du paramètre N_{filt} sur le déphasage après $1000 T_0$	122
III.1.6	Influence du traitement anti-repliement intermédiaire sur le déphasage après $1000 T_0$	122
III.2.1	Tailles λ_0 , λ_c et nombre de vagues N_{espace} , $N_{espace/temps}$ dans le domaine en fonction de la directionnalité	138
III.2.2	Nombre de vagues scélérates et taille de celles-ci en fonction du paramètre de directionnalité n	154
III.2.3	Paramètres des différents cas de calcul	157

Notations utilisées

Sigles et acronymes

CCSL	Condition Cinématique de Surface Libre
CDSL	Condition Dynamique de Surface Libre
CSL	Condition de Surface Libre
CPU	Central Processing Unit
BEM	Boundary Element Method : Méthode d'élément frontière
BMNLS	Broad Modified Non-Linear Schrödinger
DNO	Dirichlet to Neumann Operator : Modèle spectral utilisant un opérateur mathématique type Dirichlet-Neumann
ECN	École Centrale de Nantes
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
FFT	Fast Fourier Transform : Transformée de Fourier Rapide
FMA	Fast Multipole Algorithm : Algorithme rapide utilisant les multipôles
HOS	High-Order Spectral method : Modèle spectral à approximation d'ordre élevé
HOST-wm1	High-Order Spectral Tank wavemaker 1 st order
HOST-wm2	High-Order Spectral Tank wavemaker 2 nd order
HOST-wm3	High-Order Spectral Tank wavemaker 3 rd order
JONSWAP	JOint North Sea Wave Project
LMF	Laboratoire de Mécanique des Fluides
NWT	Numerical Wave Tank : Bassin de houle numérique
OPD	Ocean Power Delivery
P-M	Pierson-Moskowitz
RANSE	Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations
RK4	Runge-Kutta d'ordre 4
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics
SWEET	Spectral Wave Evolution in the ECN wave Tank : Bassin de houle numérique avec un modèle complètement 2 nd ordre
SWENSE	Spectral Wave Explicit Navier-Stokes Equations
VOF	Volume Of Fluid

Symboles mathématiques

ρ	Densité du fluide
g	accélération de la pesanteur
x, y, z	coordonnées d'espace
$\mathbf{x} = (x, y)$	vecteur dans le plan horizontal
D	domaine fluide étudié
\mathcal{V}	volume du domaine fluide
h	profondeur du bassin
L_x, L_y	longueur et largeur du bassin
\mathbf{n}	un vecteur normal extérieur aux parois du domaine (pas forcément normé)
O	origine du repère
t	temps
ϕ	Potentiel des vitesses du fluide
η	Position de la surface libre
ϕ^s	Potentiel de surface : $\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$
p	pression
\mathbf{U}	vecteur vitesse des parois du domaine
\mathbf{V}	vecteur vitesse du fluide
X	position du batteur en fonction du temps
Tol	Tolérance de l'avance en temps adaptative
λ_x	Longueur d'onde dans la direction de propagation
λ_y	Longueur d'onde dans la direction transverse
λ_c	Longueur d'onde de crête
H_s	Hauteur crête à creux significative
H_{max}	Hauteur crête à creux maximale
T_p	Période de pic
λ_p	Longueur d'onde de pic
n	Paramètre de directionnalité
T_f	Temps de focalisation

Introduction générale

Les océans ont toujours inspiré les artistes : peintres, poètes, . . . On citera pour commencer cette thèse ces quelques vers :

Oh! combien de marins, combien de capitaines
Qui sont partis joyeux pour des courses lointaines,
Dans ce morne horizon se sont évanouis!
Combien ont disparu, dure et triste fortune!
Dans une mer sans fond, par une nuit sans lune,
Sous l'aveugle océan à jamais enfouis!

Combien de patrons morts avec leurs équipages!
L'ouragan de leur vie a pris toutes les pages
Et d'un souffle il a tout dispersé sur les flots!
Nul ne saura leur fin dans l'abîme plongée.
Chaque vague en passant d'un butin s'est chargée;
L'une a saisi l'esquif, l'autre les matelots!

[...]

Victor Hugo, in *Les rayons et les ombres*.

Cette thèse se place dans le cadre de l'étude de la propagation des vagues à la surface des océans. Ces ondes de gravité, générées par le vent, se propagent sur de longues distances, interagissant entre elles jusqu'à former la houle que l'on peut observer sur les océans, les mers, les grands lacs. Leur étude constitue un axe de recherche majeur qui a pris de l'ampleur au cours des dernières décennies. Essayer de limiter les risques face à cet océan qui effraie et fascine est un enjeu primordial pour les personnes y étant confrontées. Ensuite, les enjeux économiques, liés à l'industrie offshore et aux compagnies maritimes ne sont pas non plus étrangers à l'intérêt porté à ce domaine. En effet, les pertes engendrées par exemple par l'arrêt d'une plate-forme d'extraction de pétrole peuvent s'élever à plusieurs millions de dollars par jour! D'autres domaines sont également intéressés par une meilleure compréhension des ondes de gravité: on pense par exemple à l'industrie touristique (plaisance, vagues sur la plage, . . .), aux systèmes de récupération de l'énergie de la mer, aux environnementalistes (impact des vagues sur l'écosystème, ...). L'intérêt des recherches menées est donc multiple de par le rôle majeur joué par les vagues dans nombre de domaines divers et variés.

L'intitulé de ce sujet de thèse, « *Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer avec une approche spectrale* » peut paraître complexe de prime

abord. Cependant, une lecture attentive peut nous renseigner sur un certain nombre d'attentes de cette thèse. On parle tout d'abord de « *modélisation* », mettant de façon sous-entendue l'accent sur le travail numérique à effectuer. Cette thèse se placera dans le cadre de la simulation d'un phénomène physique précis (i.e. la reproduction à l'aide d'un modèle mathématique et/ou physique adéquat).

L'objet de l'étude est ensuite indiqué: les « *processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer* ». On va donc s'intéresser, comme on l'a mentionné précédemment, aux états de mer mais on précise dès maintenant qu'on s'intéresse en particulier à la propagation et à la génération de ceux-ci. Il faut préciser que l'on s'inscrit ici dans les thèmes de recherche principaux du Laboratoire de Mécanique des Fluides (LMF) de l'École Centrale de Nantes (ECN). En effet, un bassin de houle de grande dimension ($50m \times 30m \times 5m$) fait partie des moyens expérimentaux récents disponibles au laboratoire. Ce bassin de houle permet d'étudier la génération (par un batteur situé sur un côté du bassin) et la propagation de houles complexes 3D. C'est donc ainsi qu'il faut comprendre le terme génération (et non pas par génération de la houle par le vent par exemple). La modélisation de ce bassin de houle a fait l'objet de deux thèses récentes, D. Le Touzé [80] en 2003 et F. Bonnefoy [13] en 2005 et on s'inscrit donc ici dans la continuité de celles-ci. Il faut cependant indiquer que le sujet reste ouvert et permet notamment de dissocier les deux processus pour étudier par exemple la propagation seule d'un état de mer donné.

Enfin, le terme « *non-linéaire* » que l'on peut rapprocher du complément « *par une méthode spectrale* » précise la classe de méthode qui sera utilisée. On se placera donc dans le cadre d'une méthode dite High-Order Spectral (HOS) complètement non-linéaire où la résolution est effectuée de manière spectrale. Cette méthode, initialement développée par West et al. [128] et Dommermuth & Yue [33] a été adaptée aux bassins de houle dans [80] & [13]. Pour résumer, le but de cette thèse va consister en le développement, sur la base des travaux de D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13], d'un modèle complètement non-linéaire pour résoudre le problème de la génération et de la propagation des vagues. Ces phénomènes, pouvant se révéler fortement non-linéaires, seront analysés sur un certain nombre de cas de calculs que l'on a jugé pertinents.

Dans la première partie, on abordera tout d'abord le problème général de la modélisation de la houle. On met en équation le problème de la propagation de la houle en théorie potentielle (i.e. fluide parfait en écoulement irrotationnel). Ensuite, la méthode de résolution choisie, la méthode HOS, est explicitée en mettant en avant les avantages de celle-ci: méthode complètement non-linéaire, résolution efficace grâce à la formulation spectrale et l'emploi de transformées de Fourier rapides (FFTs pour Fast Fourier Transforms), ... et en fournissant quelques cas de validation. Enfin, les améliorations apportées au cours de cette thèse au cœur du modèle initialement développé (c.f. Le Touzé [80] et Bonnefoy [13]) sont développées et discutées. Elles consistent principalement en: i) une accélération de la résolution grâce à un schéma d'avance en temps amélioré, ainsi qu'en ii) l'implémentation d'une méthode permettant le calcul efficace des vitesses dans le domaine fluide.

Dans une deuxième partie, on s'intéressera au cas plus particulier de la modélisation d'un bassin de houle. Ce travail, initié par D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13] au cours de leurs thèses respectives a été approfondi ici. L'intérêt de ce dispositif expérimental dans un laboratoire d'hydrodynamique comme le nôtre est essentiel. En effet, il peut permettre, entre autres, de réaliser des expériences sur maquettes afin d'étudier la tenue à la mer de navires, plates-formes offshore, ... ainsi que leur comportement sur houle extrême par exemple. Ceci peut se révéler

primordial dans le cadre des phases de conception de ces corps flottants. L'étude de houle seule est également plus facilement accessible avec un tel dispositif qui permet de générer des états de mer prédéfinis. Néanmoins, l'approche numérique revêt également toute son importance au vu du coût de mise en place de tels essais dans la pratique. Une modélisation précise et rapide permettrait de limiter assez aisément le nombre de ces essais à réaliser.

Ainsi, dans un premier temps, les spécificités de ce problème sont rappelées avec la modélisation du générateur de vagues ainsi que de la plage absorbante. Le travail original de cette thèse a résidé ici dans l'amélioration de la méthode de génération de la houle (modélisation du batteur). Celle-ci peut se révéler de grande importance lors de la génération de champs de vagues cambrées. La méthode linéaire initialement développée ([80] & [13]) est étendue aux ordres supérieurs. Enfin, différents cas de validation de ces nouveaux modèles sont proposés ainsi que des cas d'application avec des comparaisons expérimentales.

Dans une troisième partie, notre intérêt se portera à la simulation de l'évolution des vagues dans l'océan. La principale différence par rapport à la partie précédente réside dans le fait que le système considéré est ouvert et supposé infini par périodicité du domaine de calcul. Les simulations réalisées le sont sur de grandes échelles. Typiquement, les cas 3D que l'on présentera seront effectués sur des domaines d'une taille d'environ $100km^2$. On s'intéressera en particulier à un phénomène qui n'est pas encore complètement compris de nos jours : les vagues scélérates. Ce phénomène redouté, longtemps considéré comme une légende de marins, est désormais connu. C'est un processus fortement non-linéaire de par la formation de vagues de très grande amplitude mais qui peut être simulé à l'aide de notre modèle HOS, complètement non-linéaire. De plus, son efficacité permet des simulations 3D sur de longs temps. Il est alors possible d'essayer de simuler l'apparition de ces événements extrêmes en condition de mer réelle.

Tout d'abord, il est important de rappeler les spécificités du problème qui résident essentiellement dans la définition correcte de l'état de mer initial que l'on va laisser évoluer. Différentes validations seront proposées afin de s'assurer de la validité de notre modèle HOS. Puis, on s'intéressera à l'apparition des vagues scélérates au sein de différents champs de vagues, en commençant par leur apparition *forcée* par focalisation spatio-temporelle. Leur apparition *naturelle* (i.e. au sein d'un état de mer réel) est également étudiée en portant un intérêt particulier à l'influence de la directionnalité sur leur probabilité d'occurrence, ainsi que sur différentes caractéristiques de ces vagues extrêmes (hauteur, extension transverse, ...).

Enfin, la quatrième partie présentera le problème de l'interaction entre une houle et une structure marine. Ce travail fait l'objet de recherches depuis de nombreuses années au sein du LMF. Trois thèses en cours ou récemment finies (Gilloteaux [56], Guilcher [64] et Luquet [85]) ont porté sur le couplage entre différentes méthodes afin de résoudre ce problème de tenue à la mer. Cette problématique émane du fait que ce type de simulations est difficilement accessible aux méthodes de résolution classiques du problème de l'écoulement autour d'une structure. Ces dernières sont en général très mal adaptées au problème spécifique de la propagation de la houle (notamment en termes de ressources CPU nécessaires). L'attrait pour le développement d'une méthode très précise mais avec un temps de calcul raisonnable est en conséquence très important. L'approche adoptée est celle d'un couplage entre la méthode HOS et les codes de calcul résolvant l'écoulement autour d'une structure quelconque. En particulier, trois couplages différents seront proposés : i) dans un premier temps, un couplage entre notre méthode spectrale et un code potentiel résolvant le problème de diffraction-radiation d'un corps flottant soumis à de grandes amplitudes, ii) dans un deuxième temps, le couplage entre le code HOS et un code

de tenue à la mer visqueux type RANS et enfin iii) le couplage avec une méthode SPH.

On présentera donc tout d'abord le modèle de couplage à proprement parler en pointant l'intérêt de l'approche adoptée. Les aspects numériques représentant le travail effectué durant cette thèse sont clairement indiqués (le couplage en lui-même faisant l'objet de thèses à part entière). Ensuite, chacun des trois couplages est décrit avec des résultats représentatifs donnés en tant qu'illustration.

Première partie

Modélisation du problème physique

Table des matières

Introduction	9
I.1 Formulation	13
I.1.1 Hypothèses et équations générales	13
I.1.1.1 Modélisation d'un bassin de houle	15
I.1.1.2 Modélisation océanique	16
I.1.2 Résolution par méthode spectrale	17
I.1.2.1 Bassin de houle	17
I.1.2.2 Milieu ouvert	18
I.2 Modèle non-linéaire complet	21
I.2.1 Cœur de la méthode	21
I.2.1.1 Expression en quantités surfaciques	21
I.2.1.2 Calcul de la vitesse verticale	22
I.2.1.3 Algorithme de résolution	24
I.2.2 Rappels importants	25
I.2.2.1 Aspects théoriques & numériques	25
I.2.2.2 Validations	28
I.2.3 Temps de calcul	31
I.2.3.1 Influence de l'anti-repliement	31
I.2.3.2 Évolution avec le nombre de points	33
I.3 Améliorations apportées au modèle	35
I.3.1 Avance en temps	35
I.3.1.1 Principe	35
I.3.1.2 Mise en œuvre	37
I.3.1.3 Résultats	38
I.3.2 Calcul des vitesses dans le domaine fluide	40
I.3.2.1 Rappel	40
I.3.2.2 Solveur type Fenton & Rienecker	41
I.3.2.3 Adaptation du " <i>H</i> -operator"	42
I.3.2.4 Adaptation du " <i>H</i> ₂ -operator"	44
I.3.2.5 Validations	45

Introduction

Cette partie va présenter différents aspects relatifs à la modélisation du problème de la propagation d'ondes de gravité. On va s'intéresser tout d'abord aux différents travaux réalisés en théorie potentielle. Cette rapide revue bibliographique permettra de situer la méthode HOS qui sera utilisée par la suite.

Historiquement, les lois de Newton qui régissent la mécanique au sens large ont été introduites par Isaac Newton en 1687. Ce qu'on appelle la théorie potentielle est quant à elle apparue aux *XVIII*^{ème} et *XIX*^{ème} siècles dans le cadre de la formulation des problèmes gravitationnels dérivant de potentiels satisfaisant l'équation de Laplace. Les travaux de Lagrange (1773), Legendre (1784 à 1794) et Laplace (1782 à 1799) ont donc permis des avancées significatives. Lagrange sera le premier à employer le terme de champ potentiel, celui-ci étant décrit par une fonction que Green (1828) appellera la fonction potentielle et qu'enfin Gauss (1840) nommera simplement potentiel. Dans ces exemples, on utilise un potentiel lié à la force. Pour le cas des écoulements, on parlera de théorie potentielle avec un potentiel des vitesses (i.e. les vitesses dérivent d'un potentiel), utilisé dès le début du *XIX*^{ème} siècle dans les travaux de Poisson [105], Cauchy [21] ou Stokes [117].

La résolution de ce problème formulé en théorie potentielle se fera par une méthode spectrale. On entend par méthode spectrale les méthodes globales (à distinguer des méthodes locales telles que éléments finis, différences finies, volumes finis) exprimant le problème dans un espace de fonctions et qui vérifient des propriétés de convergence rapide. Une description plus détaillée de cette représentation est donnée dans la section I.1.2.

On essaiera de positionner ici la méthode utilisée au cours de cette thèse par rapport aux autres méthodes de résolution couramment utilisées pour modéliser le problème de la propagation de vagues. Historiquement, les méthodes de résolution numérique du problème de propagation de vagues ont commencé à être développées au cours des années 60.

On commence par rappeler ici les modèles spectraux existants tels que donnés par Le Touzé [80] auquel on se réfère pour une revue bibliographique détaillée de ces modèles :

- *Mode-coupling* : cette approche a été initialement proposée au début des années 60 par Phillips [103], Longuet-Higgins [83] et Hasselmann [69] pour la résolution de l'évolution de spectre d'états de mer faiblement non-linéaires et plus particulièrement les transferts d'énergie au cours de cette évolution. Les interactions mode à mode sont alors prises en compte permettant le calcul de ce transfert d'énergie. C'est en 1968 que Zakharov [133] établira sur ce même modèle les équations d'évolution des modes eux-mêmes, donnant ainsi accès à l'évolution temporelle de la surface libre par exemple. Un nombre limité de composantes est utilisé : interactions à 4 vagues dans l'article de Zakharov, l'extension aux interactions à 5 vagues ayant été réalisée par Stiassnie & Shemer [116] dont une application numérique peut être trouvée dans Annenkov & Shrira [4]. C'est avec ce formalisme

qu'apparaîtra l'équation cubique Non-Linéaire de Schödinger (NLS) pour l'hydrodynamique dans [133]. Le lien entre cette équation NLS, dans sa forme modifiée au quatrième ordre, et l'équation dite de Zakharov peut être trouvé dans Stiassnie [115]. On reviendra sur ce modèle couramment utilisé plus en détail dans la partie III. On indique ici le livre de Yuen & Lake [131] pour une revue de ces méthodes en 1982.

- *Méthode directe*: On entend ici par méthode directe une méthode sans développement en ordres ou en composantes comme précédemment. Les Conditions de Surface Libre (CSL) sont appliquées en la position exacte de celle-ci et résolues sur cette frontière mobile. L'inconvénient principal de ce genre de méthode est l'impossibilité d'utiliser les algorithmes de FFTs pour cette résolution (dû à la formulation non-linéaire du problème sur la surface libre) et donc un coût en temps de calcul beaucoup plus élevé que pour les autres méthodes citées ici. Cette méthode a été utilisée principalement par ses initiateurs, Fenton & Rienecker [43]. On indique également le travail récent de Johannessen & Swan [75] utilisant cette méthode dans une version améliorée permettant l'étude d'états de mer 3D.
- *High-Order Spectral*: Le modèle High-Order Spectral (HOS), qui fait l'objet de cette thèse sera détaillé au cours de cette partie. On évoque ici simplement que ce modèle, développé initialement par West et al. [128] et Dommermuth & Yue [33] résout, comme pour la méthode directe, le problème non-linéaire complet. Cependant, une technique particulière permettra d'obtenir un code très efficace grâce à l'emploi de FFTs pour la résolution. Ce modèle est basé sur les mêmes équations surfaciques que celles dérivées par Zakharov [133] mais sous leur forme complètement non-linéaire, i.e. avant l'expression sous forme d'interactions entre vagues. Il a été utilisé pour diverses applications: apparition de vagues scélérates en 2D dans Brandini [18], évolution de spectres de houle 3D dans Tanaka [118] & [119] ou génération de houles irrégulières 2D et de paquets de vagues focalisées 3D dans un bassin de houle dans Bonnefoy et al. [17].
- *Dirichlet-Neumann Operator*: Les modèles utilisant un Dirichlet-Neumann Operator (DNO) permettent, de même que la méthode HOS, de résoudre le problème surfacique complètement non-linéairement et grâce à leur opérateur d'utiliser des FFTs pour la résolution. On citera par exemple Craig & Sulem [29] pour l'article original et Bateman [8] & [9] pour les derniers développements et une version accélérée de la méthode. Il faut noter que Le Touzé [80] puis Schäffer [107] et [108] montreront que la méthode DNO dans sa version accélérée et la méthode HOS sont identiques.
- *σ -Transform*: Cette méthode, initiée par Ku & Hatzivramidis [79] en fluide visqueux et dans une version plus récente en théorie potentielle non-linéaire par Chern et al. [23] & [24] propose d'utiliser la transformation σ (Phillips [102]) pour ramener le problème étudié à une géométrie fixe permettant l'utilisation de méthodes pseudo-spectrales pour la résolution. L'inconvénient étant la nécessité de discrétiser volumiquement le domaine augmentant d'autant plus le temps de calcul (par rapport aux méthodes surfaciques précédentes). Ainsi, même si la stabilité et la précision semblent un peu améliorées (Nicholls & Reitich [96]) le temps de calcul peut devenir prohibitif pour des calculs 3D, bien que la flexibilité plus grande de la géométrie puisse être d'un attrait non-négligeable.
- *Méthode Mixte Pseudo-Spectrale/Intégrale*: Cette méthode, initiée par Clamond & Grue [27] en 2D propose une résolution originale du problème non-linéaire complet. A une résolution pseudo-spectrale classique (avec formulation surfacique type Zakharov [133]) est adjointe une résolution intégrale aux endroits les plus cambrés. Ceci permet le traitement

de fortes non-linéarités dans le champ de vagues avec une extension spatiale du noyau de résolution pouvant être modifiée à loisir. La version 3D a été développée récemment par Fructus et al. [52]. Les auteurs exhibent un comportement intéressant, notamment en terme de stabilité, par rapport aux méthodes pseudo-spectrales “classiques” type DNO ou HOS. Cependant, aucune application plus cambrée que celles qui peuvent être réalisées pratiquement avec ces méthodes n’a été présentée jusqu’à présent. On peut par ailleurs indiquer que les temps de calculs de cette méthode mixte se révèlent bien supérieurs à ceux des méthodes DNO ou HOS.

Il faut également indiquer que des méthodes de résolution, autres que spectrales, existent dans ce champ de modélisation de la houle. On pense en particulier à toutes les méthodes utilisant la formulation intégrale des équations (BIE pour Boundary Integral Equation). La résolution s’effectue alors par la méthode des éléments aux frontières (BEM pour Boundary Element Method) qui propose une résolution du potentiel à l’intérieur du domaine fluide grâce à l’expression du problème sur les frontières, en fonction des conditions aux limites. Les CSL sont en général résolues de manière lagrangienne donnant le nom de schéma Mixte Eulérien/Lagrangien (MEL) à ce type de résolution. De nombreuses études ont été réalisées dans le cadre de la propagation d’ondes de gravité avec ce genre de modèle. On se réfère aux modèles les plus aboutis, tels celui de Grilli et al. [59], amélioré dans Fochesato & Dias [48] qui ont introduit une accélération de la résolution à l’aide d’algorithmes de résolution rapide par multipôles (FMA pour Fast Multipole Algorithms). Des applications récentes ont été présentées dans Fochesato et al. [49]. L’intérêt principal de ce genre de méthode réside dans le fait que des géométries de domaines complexes peuvent être étudiées, incluant la présence de corps à l’intérieur du domaine (on se réfère par exemple au modèle développé par Ferrant [46]). Le déferlement peut également être étudié avec une telle méthode (même si la reconnexion de surface libre ne peut pas être traitée). En contrepartie, les temps de calcul restent élevés en comparaison des méthodes spectrales évoquées précédemment (même avec les versions améliorées avec FMA).

On peut noter également que l’approche Boussinesq a connu de nombreux développements permettant dorénavant une très grande précision de résolution grâce à cette méthode. Ces travaux récents ont abouti à une version d’ordre élevé décrite dans Fuhrman & Madsen [54]. Initialement, ces méthodes étaient très limitées au niveau des profondeurs pouvant être simulées (l’approximation Boussinesq impliquant une profondeur faible), mais les dernières avancées permettent de modéliser des hauteurs d’eau assez importantes (cf. Madsen et al. [90]).

Enfin, il convient de remarquer que des modèles n’étant pas basés sur la théorie potentielle, et permettant la résolution du problème de propagation de vagues, existent. On peut évoquer par exemple l’ensemble des méthodes résolvant les équations de Navier-Stokes complètes (i.e. incluant la viscosité) et plus communément utilisées pour la résolution des écoulements à surface libre autour d’objets flottants. La génération de la houle peut alors se faire typiquement par l’inclusion de frontières mobiles dans le domaine de calcul. On peut citer par exemple les méthodes basées sur les équations RANS, avec des schémas de résolution type VOF, voir par exemple Chen et al. [22]. D’autres méthodes ont été développées ponctuellement résolvant également les équations de Navier-Stokes de façon complète avec divers schémas type éléments finis ou différences finies. Dans ces méthodes, pas très adaptées à la propagation de la houle, celle-ci peut devenir un challenge. En effet, le caractère dissipatif de ces modèles ne permet en général la propagation de la houle qu’au prix d’un effort en nombre de points/temps de calcul prohibitif. On se réfère par exemple à la partie IV pour quelques détails concernant les

couplages entre méthodes.

La présente partie sera décomposée en 3 chapitres comme indiqué ci-après :

- La formulation associée à notre problème sera tout d'abord donnée en s'attardant sur les hypothèses utilisées ainsi que sur les équations générales régissant le problème. Les deux cas d'étude auxquels on s'intéresse au cours de cette thèse seront distingués, à savoir l'étude en milieu confiné (correspondant à la modélisation d'un bassin de houle) et l'étude en milieu ouvert (correspondant à la modélisation océanique).
- Ensuite, la méthode HOS initialement développée par West et al. [128] et Dommermuth & Yue [33] sera décrite en détails. Divers aspects numériques seront abordés : algorithmique de résolution, intégration en temps, et on portera un intérêt particulier au traitement anti-repliement. Différents cas de validation seront également présentés afin de s'assurer de la convergence et de l'efficacité de notre méthode.
- Enfin, le troisième chapitre présentera les différentes améliorations apportées à la méthode au cours de ce travail de thèse. En particulier, le travail effectué sur l'avance en temps ainsi que sur l'extrapolation dans tout le domaine fluide des valeurs connues au niveau de la surface libre sera détaillé.

Chapitre I.1

Formulation

Ce chapitre a pour objectif de présenter rapidement la formulation associée à notre problème. Le cadre général du problème sera tout d'abord fixé en définissant les hypothèses utilisées ainsi que les équations générales régissant notre problématique. Ensuite, les points essentiels de la résolution par méthode spectrale seront rappelés. Dans chacune de ces sections, le cas de la modélisation d'un bassin de houle et celui de la modélisation océanique seront distingués afin d'exposer clairement leurs similitudes et différences.

I.1.1 Hypothèses et équations générales

Dans cette section seront décrites les différentes hypothèses faites pour la mise en équation de notre problème. On considère un domaine D contenant un fluide (classiquement de l'eau), pouvant représenter un bassin de houle fermé ou bien un milieu ouvert représentant une partie de l'océan.

On choisit pour système de coordonnées un système cartésien dont l'origine O est positionnée à une extrémité du domaine. L'axe O_x est situé selon la longueur L_x du domaine, l'axe O_y selon la largeur L_y et l'axe O_z selon la verticale ascendante, le niveau $z = 0$ correspondant au niveau du fluide au repos (voir figure I.1.1). On note \mathbf{x} le vecteur horizontal (x,y) .

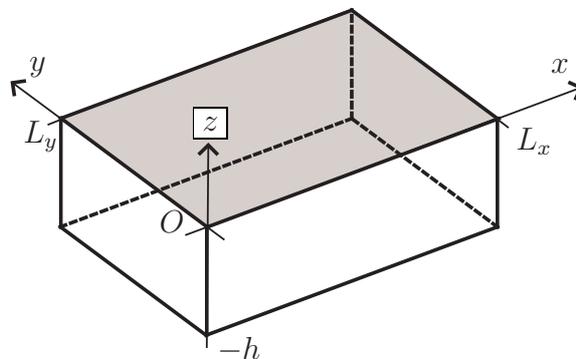


FIG. I.1.1 – Schéma du domaine de résolution avec système de coordonnées

Le fluide simulé sera toujours de l'eau que l'on va considérer incompressible. On fait de plus l'hypothèse d'un fluide parfait, i.e. non-visqueux, et celle d'un écoulement irrotationnel. Avec

ces hypothèses, il est possible de décrire un potentiel des vitesses $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ tel que $\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t) = \widetilde{\nabla}\phi(\mathbf{x}, z, t)$, avec $\widetilde{\nabla}$ représentant le gradient volumique. L'équation de continuité ($div\mathbf{V} = 0$) devient alors l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans } D$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut quant à elle être écrite sous la forme de l'équation de Bernoulli instationnaire comme suit :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial t} + gz + \frac{1}{2}|\widetilde{\nabla}\phi|^2 = c(t) \quad \text{dans } D \quad (\text{I.1.1})$$

avec $c(t)$ une constante dépendant seulement du temps, dite constante de Bernoulli. Classiquement, elle est prise égale à la pression atmosphérique (on néglige alors la tension superficielle).

On choisit alors, en supposant le non-déferlement, de définir la position de la surface libre par une grandeur univoque $\eta(\mathbf{x}, t)$. Dès lors, en écrivant l'équation précédente (I.1.1) en la position de la surface libre on obtient :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2}|\widetilde{\nabla}\phi|^2 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

Ce qui correspond à ce qu'on appelle la Condition Dynamique de Surface Libre, que l'on notera CDSL par la suite.

Le mouvement de la surface libre peut être décrit par l'équation suivante :

$$F(\mathbf{x}, z, t) = z - \eta(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{I.1.2})$$

En tout point de la surface décrite par l'équation précédente (I.1.2), les vitesses normales du fluide et de cette surface sont égales (*i.e.* la surface libre est imperméable). D'où :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{I.1.3})$$

avec \mathbf{U} représentant la vitesse de la surface libre. Cette dernière peut être calculée par la dérivée particulaire de la position de la surface libre :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \left| \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ U_z \end{array} \right| = \frac{D}{Dt} \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \eta(\mathbf{x}, t) \end{array} \right| = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \widetilde{\nabla} \right) \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \eta(\mathbf{x}, t) \end{array} \right| \\ \mathbf{U} &= \left| \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\eta \end{array} \right| \end{aligned}$$

On peut ensuite exprimer un vecteur normal à la surface libre, $\mathbf{n} = \left| \begin{array}{l} -\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ -\frac{\partial\eta}{\partial y} \\ 1 \end{array} \right|$. On en déduit :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi \cdot \nabla\eta$$

D'où l'expression de la Condition Cinématique de Surface Libre, notée CCSL par la suite :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi \cdot \nabla \eta \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

En résumé, le système d'équations pour les Conditions de Surface Libre, notées CSL, que nous avons à résoudre est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi \cdot \nabla \eta \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\widetilde{\nabla} \phi|^2 \end{cases} \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.1.4})$$

On a affaire à deux types de non-linéarités en suivant Ferrant [44]. Tout d'abord, on a des conditions devant être satisfaites sur des frontières en mouvement, dont la position fait elle-même partie des inconnues du problème, ce sont les non-linéarités de position. De plus, les CSL sont elles-mêmes des équations aux dérivées partielles non-linéaires : ce sont les non-linéarités de structure.

Une fois ces hypothèses et équations générales posées, nous pouvons nous intéresser aux spécificités de deux cas traités par la suite : i) la modélisation d'un bassin de houle (i.e. en milieu fermé) et ii) la modélisation océanique (i.e. en milieu ouvert)

I.1.1.1 Modélisation d'un bassin de houle

On a établi dans la section I.1.1 précédente les CSL. On va maintenant s'intéresser aux autres conditions aux limites sur les frontières de notre domaine. Dans le cas de la modélisation d'un bassin de houle on a un domaine fermé (voir figure I.1.2), donc des conditions de flux nul à travers les parois qui se traduisent (comme lors de l'établissement des CSL) par l'équation de glissement, eq. (I.1.3).

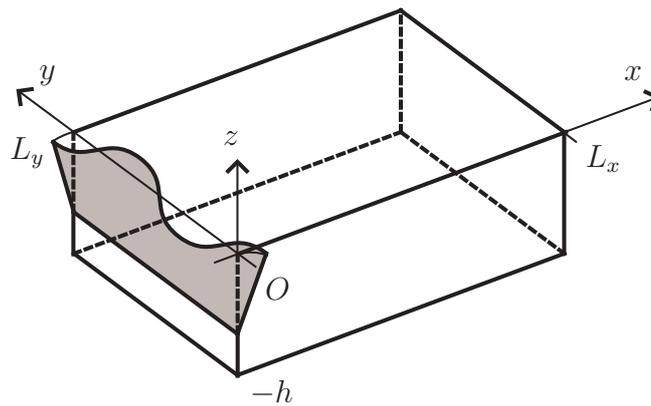


FIG. I.1.2 – Schéma du bassin de houle modélisé

On en déduit, sur les différentes frontières de notre domaine :

- sur les murs latéraux :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0, L_y$$

- sur le mur opposé au batteur :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = L_x$$

- au fond du bassin :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h$$

On doit également ajouter une dernière condition au niveau du batteur (près de la section $x = 0$) afin de le modéliser. Ceci sera traité en détail dans le paragraphe II.1.1.1, la condition étant également une condition de glissement mais appliquée cette fois-ci sur une paroi mobile. On arrive ainsi à un système d'équations à vérifier pour le potentiel des vitesses et l'élévation de surface libre :

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{dans } D \quad (\text{I.1.5a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = 0, L_y \quad (\text{I.1.5b})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = L_x \quad (\text{I.1.5c})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (\text{I.1.5d})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi \cdot \nabla \eta \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.1.5e})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\widetilde{\nabla} \phi|^2 \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.1.5f})$$

+ Condition sur le batteur

I.1.1.2 Modélisation océanique

On s'intéresse ici au cas de la modélisation d'une partie de l'océan. Cette fois-ci le domaine à prendre en compte est supposé périodique dans chacune des directions x et y . Le domaine simulé est donc supposé infini.

On en déduit les conditions aux limites suivantes :

- sur les parois latérales :

$$\phi(x, y = 0) = \phi(x, y = L_y)$$

$$\eta(x, y = 0) = \eta(x, y = L_y)$$

$$\phi(x = 0, y) = \phi(x = L_x, y)$$

$$\eta(x = 0, y) = \eta(x = L_x, y)$$

- au fond du bassin :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h$$

On arrive ainsi à un système d'équations à vérifier pour le potentiel des vitesses et l'élévation de surface libre :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 && \text{dans D} && \text{(I.1.6a)} \\ \phi(x,y=0) &= \phi(x,y=L_y) && && \text{(I.1.6b)} \\ \phi(x=0,y) &= \phi(x=L_x,y) && && \text{(I.1.6c)} \\ \eta(x,y=0) &= \eta(x,y=L_y) && && \text{(I.1.6d)} \\ \eta(x=0,y) &= \eta(x=L_x,y) && && \text{(I.1.6e)} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 && \text{en } z = -h && \text{(I.1.6f)} \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi \cdot \nabla\eta && \text{en } z = \eta(\mathbf{x},t) && \text{(I.1.6g)} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} &= -g\eta - \frac{1}{2}|\widetilde{\nabla}\phi|^2 && \text{en } z = \eta(\mathbf{x},t) && \text{(I.1.6h)} \end{aligned}$$

I.1.2 Résolution par méthode spectrale

On rappelle ici de manière rapide le fonctionnement d'une résolution par méthode spectrale. Pour de plus amples détails, voir la thèse de D. Le Touzé [80]. Le point de départ est qu'une fonction quelconque f peut *a priori* être décomposée sur une base de fonctions de telle manière que :

$$f(x) = \sum_i A_i \psi_i(x)$$

Ces fonctions $\psi_i(x)$ peuvent être des polynômes de Tchebyshev, Legendre, des fonctions trigonométriques ou autre, suivant la géométrie du domaine de définition de f . Dans notre cas d'un bassin rectangulaire (voir Fig. I.1.1), ce sera simplement des fonctions trigonométriques. Ces dernières seront différentes suivant les 2 cas traités par la suite dans cette thèse : i) la modélisation d'un bassin de houle et ii) la modélisation océanique.

Les conditions aux limites (bords du domaine et fond) détermineront alors la forme exacte des fonctions de base. Dès lors, on sera capable - grâce notamment dans notre cas à l'emploi de transformées de Fourier rapides (FFTs) - de déterminer de façon très efficace les inconnues de notre problème, les amplitudes modales A_i .

I.1.2.1 Bassin de houle

Dans le cas du bassin de houle, le système composé des conditions aux limites (équations (I.1.5b) à (I.1.5d)) auxquelles on ajoute une condition homogène de Neumann sur le mur $x = 0$ ainsi que l'équation de Laplace (I.1.5a) peut être résolu implicitement par un choix judicieux de fonctions de base. On peut en effet exprimer le potentiel des vitesses sous la forme suivante :

$$\phi(\mathbf{x},z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}^{\phi}(t) \cos(k_{x_i}x) \cos(k_{y_j}y) \frac{\cosh(k_{ij}[z+h])}{\cosh(k_{ij}h)} \quad \text{(I.1.7)}$$

avec $k_{x_i} = \frac{i\pi}{L_x}$, $k_{y_j} = \frac{j\pi}{L_y}$ et $k_{ij} = \sqrt{k_{x_i}^2 + k_{y_j}^2}$. Les fonctions de base utilisées sont donc : $\psi_{ij}(\mathbf{x}) = \cos(k_{x_i}x) \cos(k_{y_j}y)$. Et de la même manière l'élévation de surface libre peut être

exprimée comme :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij}^{\eta}(t) \cos(k_{x_i} x) \cos(k_{y_j} y)$$

La décomposition effectuée correspond à une décomposition selon les modes propres du bassin. Ces derniers forment une base orthogonale ayant de nombreux avantages :

- Convergence rapide suivant le nombre de modes (c.f. chapitre I.2). Ceci permet de tronquer les sommes décrites précédemment à des nombres de points de collocation N_x, N_y pas trop importants.
- Une décomposition en série de cosinus permet l'emploi de FFTs pour le passage entre l'espace physique ($\phi(\mathbf{x}, z, t)$) et l'espace modal ($A_{ij}(t)$). Ainsi, le temps de calcul évolue comme $N \log(N)$ avec $N = N_x N_y$ nombre de modes/points de collocation (N_x modes dans la direction x et N_y modes selon y). Ceci est à comparer avec une inversion directe avec un coût en N^2 .

L'inconvénient le plus important est ici que la géométrie du domaine est limitée à cette forme rectangulaire décrite précédemment. En effet, si on veut conserver la possibilité d'effectuer ce développement sur une base de fonctions cosinusoidales, le domaine doit être rectangulaire. Cependant, on verra dans le chapitre II.1 comment prendre en compte un batteur situé sur le mur $x = 0$ en conservant ces caractéristiques intéressantes.

I.1.2.2 Milieu ouvert

Dans le cas des simulations océaniques, le système cette fois composé des conditions de périodicité (équations (I.1.6b) & (I.1.6c)) ainsi que de la condition de fond (équation (I.1.6f)) et de l'équation de Laplace (I.1.5a) peut être résolu implicitement en exprimant le potentiel des vitesses sous la forme suivante :

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{\phi}(t) \exp(ik_{x_i} x) \exp(ik_{y_j} y) \frac{\cosh(k_{ij}[z+h])}{\cosh(k_{ij}h)} \quad (\text{I.1.8})$$

avec $k_{x_i} = \frac{i 2\pi}{L_x}$, $k_{y_j} = \frac{j 2\pi}{L_y}$ et $k_{ij} = \sqrt{k_{x_i}^2 + k_{y_j}^2}$. Les fonctions de base utilisées sont donc : $\psi_{ij}(\mathbf{x}) = \exp(ik_{x_i} x) \exp(ik_{y_j} y)$. L'élévation de surface libre peut quant à elle être exprimée comme suit :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij}^{\eta}(t) \exp(ik_{x_i} x) \exp(ik_{y_j} y)$$

On conserve les mêmes avantages que pour la décomposition en cosinus précédente. On est limité, comme précédemment, à des géométries rectangulaires. Cependant, ce facteur se retrouve moins limitant lorsque l'on veut modéliser un domaine supposé infini (i.e. l'océan) que l'on peut découper grâce à la périodicité du domaine effectif de calcul (qui sera dans notre cas un grand domaine rectangulaire, c.f. chapitre III.1).

En conclusion, on a rappelé dans ce chapitre les aspects essentiels de la formulation de notre problématique. La résolution par méthode spectrale qui est utilisée par la suite est également

brèvement décrite. Ainsi, on dispose maintenant des bases nous permettant d'expliquer plus en détail la méthode Higher-Order Spectral : HOS, que nous utilisons (voir chapitre suivant [I.2](#)).

Chapitre I.2

Modèle non-linéaire complet

Dans ce chapitre sera décrite la méthode High-Order Spectral (HOS) initialement développée par West et al. [128] et Dommermuth & Yue [33]. Le cœur de cette méthode sera tout d'abord présenté dans une première section. On détaille la reformulation en quantités surfaciques des CSL qui simplifie le problème et le ramène au seul calcul de la vitesse verticale au niveau de la surface libre. Ce calcul, effectué grâce à l'approximation HOS proprement dite, est expliqué en mettant en avant les différences entre les formulations de West et al. [128] et celle de Dommermuth & Yue [33]. L'algorithmique de résolution choisie sera également donnée. Dans la deuxième section, on fera des rappels importants concernant la méthode HOS et son implémentation : intégration en temps, traitement anti-repliement, validations. Enfin, la dernière section s'intéressera au temps de calcul et notamment à l'influence du traitement anti-repliement ainsi qu'à l'évolution de celui-ci avec le nombre de points.

I.2.1 Cœur de la méthode

I.2.1.1 Expression en quantités surfaciques

Le point de départ de ce modèle est de formuler en quantités surfaciques les CSL (I.1.4). Ces conditions, initialement formulées pour l'élévation de surface libre η et le potentiel des vitesses ϕ , sont réexprimées en fonction de η et du potentiel de surface défini par :

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{I.2.1})$$

On obtient ainsi les nouvelles CSL :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} = (1 + |\nabla \eta|^2) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi^s \cdot \nabla \eta \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \end{cases} \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2.2})$$

Ces dernières vont permettre d'avancer en temps les quantités nous intéressant, à savoir $\eta(\mathbf{x}, t)$ et $\phi^s(\mathbf{x}, t)$. En effet, en supposant connues ces quantités à l'instant t , il est possible de les évaluer à l'instant $t + \Delta t$ en utilisant (I.2.2). On s'aperçoit alors que la seule inconnue restant dans le système d'équations précédent est la vitesse verticale $W(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$. De plus, il est à noter qu'il s'agit de la seule quantité volumique restante. Cette inconnue ne

pouvant pas être obtenue de manière immédiate (due à la présence de la condition sur la surface libre), elle va être évaluée par un processus itératif d'ordre élevé correspondant au modèle HOS à proprement parler.

Ce développement en quantités surfaciques permet donc une simplification très importante du problème initial, exprimé dans le volume D de fluide. Tout est maintenant résolu au niveau de la surface libre, on a donc gagné une dimension (la composante verticale z). Le développement en quantités spectrales s'effectuera donc sur η et ϕ^s .

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^\eta(t) \psi_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2.3})$$

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^{\phi^s}(t) \psi_{ij}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2.4})$$

Avec, en notant $\mathbf{k}_{ij} = (k_{x_i}, k_{y_j})$ (voir section I.1.2 pour l'expression des nombres d'onde), on rappelle les fonctions de base utilisées :

$$\psi_{ij}(\mathbf{x}, t) = \cos(k_{x_i} x) \cos(k_{y_j} y) \quad \text{pour le bassin de houle, } (i, j) \in [0, +\infty] \quad (\text{I.2.5})$$

$$\psi_{ij}(\mathbf{x}, t) = \exp(i \mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}) \quad \text{pour le milieu ouvert, } (i, j) \in [-\infty, +\infty] \quad (\text{I.2.6})$$

Il sera utile par la suite de définir les vitesses au niveau de la surface libre, en fonction de ϕ^s ou de ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi^s}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{I.2.7a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi^s}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{en } z = \eta \quad (\text{I.2.7b})$$

I.2.1.2 Calcul de la vitesse verticale

La première étape du calcul de la vitesse verticale $W(\mathbf{x}, t)$ est de décomposer en série de puissance de η le potentiel ϕ :

$$\phi(\mathbf{x}, \eta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi^{(m)}(\mathbf{x}, \eta, t)$$

Pratiquement, cette somme est tronquée à une valeur finie, appelée ordre HOS et notée M par la suite. On effectue alors un développement de Taylor de chaque potentiel $\phi^{(m)}$ autour de $z = 0$:

$$\phi^{(m)}(\mathbf{x}, \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \phi^{(m)}}{\partial z^n}(\mathbf{x}, 0, t) \quad (\text{I.2.8})$$

On obtient ainsi en combinant ces deux développements :

$$\begin{aligned} \phi^s(\mathbf{x}, t) &= \phi(\mathbf{x}, \eta, t) \\ &= \phi^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \dots + \phi^{(2)}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \dots \end{aligned}$$

On regroupe alors chaque ordre comme suit :

$$\begin{aligned}
 \phi^{(1)}(\mathbf{x},0,t) &= \phi^s(\mathbf{x},t) \\
 \phi^{(2)}(\mathbf{x},0,t) &= -\eta(\mathbf{x},t) \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x},0,t) \\
 \phi^{(3)}(\mathbf{x},0,t) &= -\eta(\mathbf{x},t) \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x},0,t) - \frac{\eta^2}{2!}(\mathbf{x},t) \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x},0,t) \\
 &\vdots = \vdots \\
 \phi^{(m)}(\mathbf{x},0,t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!}(\mathbf{x},t) \frac{\partial^k \phi^{(m-k)}}{\partial z^k}(\mathbf{x},0,t) \quad \text{pour } m > 1
 \end{aligned} \tag{I.2.9}$$

On obtient ainsi un système triangulaire, chaque ligne représentant une itération menée dans le calcul. Celles-ci sont évaluées sur des surfaces simples (en $z = 0$) et peuvent donc être calculées facilement par méthode spectrale. Chaque ordre est décomposé sur des fonctions de base comme explicité précédemment dans I.1.2 :

$$\phi^{(m)}(\mathbf{x},z,t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^{(m)}(t) \psi_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\cosh(k_{ij}[z+h])}{\cosh(k_{ij}h)}$$

Les amplitudes modales sont obtenues pour chaque ordre ($A_{ij}^{(m)}(t)$) et, à partir du système précédent (I.2.9), on peut former un autre système à même de calculer la vitesse verticale recherchée W . Celle-ci est décomposée en série de puissance :

$$W(\mathbf{x},t) = \sum_{m=1}^{\infty} W^{(m)}(\mathbf{x},t) \tag{I.2.10}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned}
 W^{(1)}(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x},0,t) \\
 W^{(2)}(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x},0,t) + \eta(\mathbf{x},t) \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x},0,t) \\
 W^{(3)}(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial z}(\mathbf{x},0,t) + \eta(\mathbf{x},t) \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial z^2}(\mathbf{x},0,t) + \frac{\eta^2}{2!}(\mathbf{x},t) \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial z^3}(\mathbf{x},0,t) \\
 &\vdots = \vdots \\
 W^{(m)}(\mathbf{x},t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!}(\mathbf{x},t) \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x},0,t)
 \end{aligned} \tag{I.2.11}$$

Ayant obtenu, avec le système d'équations (I.2.9), les amplitudes modales $A_{ij}^{(m)}(t)$ on a accès aux différents ordres de la vitesse verticale $W^{(m)}$ et on peut ainsi la calculer à l'ordre M voulu :

$$W_M(\mathbf{x},\eta,t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}(\mathbf{x},\eta,t)$$

Les différences entre les articles de Dommermuth & Yue [33] et de West et al. [128] résident dans l'utilisation de cette vitesse verticale. En effet, nous suivons West et al. qui proposent un traitement homogène de W en ordre dans les CSL. Le terme faisant intervenir la vitesse

verticale dans la CCSL est $(1 + |\nabla\eta|^2)W$, et pour garder la consistance en ordre, il convient d'écrire :

$$(1 + |\nabla\eta|^2)W \simeq W_M + |\nabla\eta|^2W_{M-2} \quad (\text{I.2.12})$$

De la même manière dans la CDSL :

$$(1 + |\nabla\eta|^2)W^2 \simeq (W^2)_M + |\nabla\eta|^2(W^2)_{M-2} \quad (\text{I.2.13})$$

que l'on peut comparer avec la formulation de Dommermuth & Yue qui sera pour la CCSL par exemple : $(1 + |\nabla\eta|^2)W \simeq W_M + |\nabla\eta|^2W_M$. Le caractère non-homogène de leur méthode pourrait expliquer certaines différences observées entre nos résultats et les leurs (notamment au niveau de la détérioration de précision aux M élevés qu'ils observent).

I.2.1.3 Algorithme de résolution

Les CSL sont des équations d'évolution pour η et ϕ^s en chaque point de collocation. Ces variables vont être avancées en temps avec un schéma de type Runge-Kutta. Comme vu dans la section précédente, en supposant connues les quantités à l'instant t , on calcule $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ et $\frac{\partial\phi^s}{\partial t}$ (équation (I.2.2)) selon le diagramme I.2.1. Il est à noter que les gradients, $\nabla\eta$ et $\nabla\phi^s$ sont calculés dans l'espace transformé grâce à des FFTs (on rappelle ici que le domaine de calcul a été choisi de telle façon que l'usage de ces FFTs soit possible). La vitesse verticale est obtenue à l'aide du processus itératif décrit dans la section précédente. Les produits sont calculés dans l'espace physique avec tous les termes traités contre le repliement (voir section I.2.2.1). On obtient ainsi les seconds membres (traités également contre le repliement) nécessaires au calcul des CSL (système d'équations (I.2.2)).

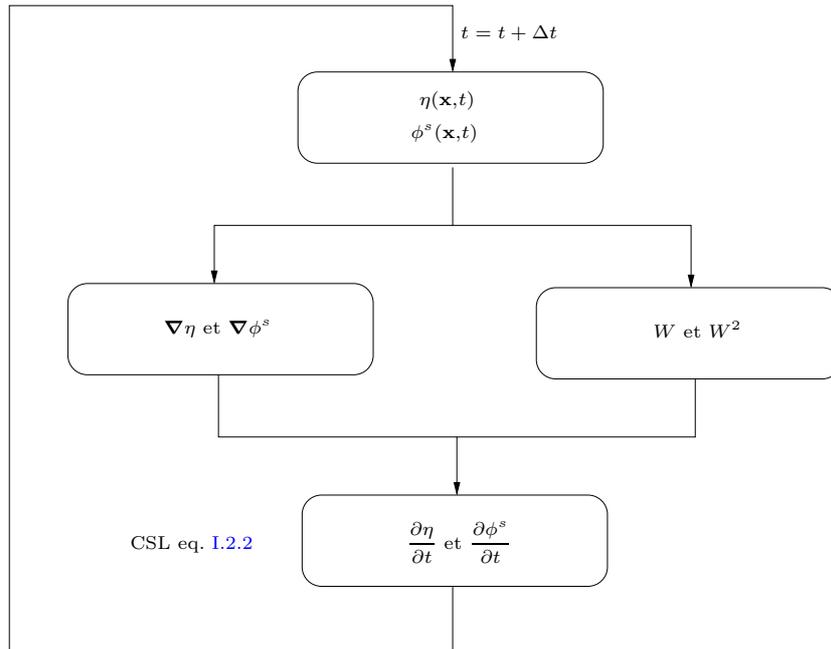


FIG. I.2.1 – Diagramme de la résolution temporelle des CSL

On peut évaluer le nombre de FFTs nécessaires au calcul en fonction de l'ordre HOS M choisi. Le premier triangle de résolution (équation (I.2.9)) nécessite $M \frac{M+1}{2}$ FFTs (directes ou inverses), afin d'obtenir les amplitudes modales $A_{ij}^{(m)}(t)$ et le triangle pour l'évaluation de W , équation (I.2.11), nécessite M FFTs. On arrive ainsi, sans anti-repliement, à un nombre de FFTs :

$$N_{\text{FFT}} = M \frac{M+3}{2} \quad (\text{I.2.14})$$

On retrouve alors les résultats obtenus par Schäffer [108]. Dans cet article, Schäffer compare les modèles DNO (Craid & Sulem [29] et Bateman et al. [8]) et les modèles HOS de West et al. [128] et Dommermuth & Yue [33]. Ces modèles sont identiques, seul le formalisme d'écriture change (voir également Le Touzé [80]). Il est à noter que ce comportement en $O(M^2)$ n'est pas confirmé par Yue dans le chapitre consacré au HOS dans le livre de C.C. Mei et al. [91]. En effet, une évolution *étrange* en $O(M)$ est donnée, sans justification et aucun temps CPU ne permettant de vérifier une telle évolution. On se propose de vérifier cette dépendance par la suite, voir section I.2.3.

I.2.2 Rappels importants

Dans cette section seront rappelés les résultats importants concernant la méthode HOS et son implémentation que l'on peut trouver dans F. Bonnefoy [13], [14].

I.2.2.1 Aspects théoriques & numériques

Intégration en temps

L'avance en temps est réalisée à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) avec choix de pas de temps adaptatif. En suivant Fornberg [50], la condition de stabilité sur le pas de temps Δt d'une équation aux dérivées partielles (EDP) du type $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ est, en notant k_N le nombre d'onde le plus grand (i.e. le mode le plus rapide) :

$$\Delta t \leq \frac{2\sqrt{2}}{k_N} = \alpha \frac{1}{N} \quad (\text{I.2.15})$$

Ce choix a été motivé suite à de nombreux tests numériques faisant apparaître ce choix comme le plus adapté à notre problématique. Le choix du pas de temps limite sera donc effectué selon cette équation (à un rapport près : en effet, l'EDP considérée étant différente dans notre cas, les valeurs ne sont pas exactement les mêmes mais la variation si : en fonction de la taille du domaine, du nombre de points, ...).

Le schéma d'avance en temps utilisé est un schéma RK4 avec choix du pas de temps adaptatif. On rappelle ici en quoi consiste cette avance temporelle. La méthode classique de Runge-Kutta est une méthode efficace de résolution des EDPs. Si on appelle $y(t)$ la fonction dont on veut calculer l'évolution et dont on connaît la dérivée temporelle : $\frac{\partial y}{\partial t} = f(y,t)$. Entre deux pas

de temps consécutifs t_i et t_{i+1} on définit, en notant $y_i = y(t_i)$:

$$\begin{cases} h_i = t_{i+1} - t_i \\ k_1 = f(y_i, t_i) \\ k_2 = f(y_i + \frac{1}{2}h_i k_1, t_i + \frac{1}{2}h_i) \\ k_3 = f(y_i + \frac{1}{2}h_i k_2, t_i + \frac{1}{2}h_i) \\ k_4 = f(y_i + \frac{1}{2}h_i k_3, t_{i+1}) \end{cases} \quad (\text{I.2.16})$$

Le schéma RK4 classique donne une évaluation directe de $y(t_{i+1}) = y_{i+1}$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{I.2.17})$$

Mais, ce schéma implique un pas de temps constant au cours de la simulation ce qui n'est pas réaliste dans la plupart des cas de calcul. En effet, la complexité de la résolution n'est pas la même au cours du temps et on peut avoir besoin de pas de temps plus faibles lors de certains évènements (par ex. lors de la focalisation d'une vague où plus généralement lors de la simulation d'une vague plus cambrée que les autres). L'idée est alors d'adapter le pas de temps utilisé au cours de la simulation. On évalue alors l'erreur entre l'approximation RK4 (y_{i+1}) et une approximation d'un autre ordre (typiquement issue d'un RK3 ou d'un RK5 qu'on appellera \widetilde{y}_{i+1}). C'est ce qu'on appelle le schéma de Runge-Kutta Fehlberg, noté RK4(3) ou RK4(5) suivant l'ordre utilisé pour le calcul de l'erreur. On rappelle qu'il s'agit ici d'une estimation de l'erreur du schéma d'intégration temporel. \widetilde{y}_{i+1} est calculé selon un RK3 ou RK5 classique et ensuite, l'erreur $|y_{i+1} - \widetilde{y}_{i+1}|$ est utilisée afin d'évaluer un pas de temps optimal pour la prochaine itération : h_{i+1} . Différentes formules peuvent être considérées pour ce calcul de pas de temps optimal, on utilisera dans notre cas :

$$h_{i+1} = 0.95 h_i \left(\frac{Tol}{|y_{i+1} - \widetilde{y}_{i+1}|} \right)^3 \quad (\text{I.2.18})$$

Le paramètre Tol est la tolérance de l'avance en temps, représentant l'erreur maximale acceptable. Le terme 0.95 représente un coefficient de "sécurité" appliqué sur le calcul du pas de temps optimal. On arrive ainsi à un schéma d'intégration temporel très efficace avec une adaptation du pas de temps au cours de la simulation.

Traitement anti-repliement

Le phénomène

La méthode HOS présentée ici est une méthode spectrale qui relie des points de collocation (i.e. l'espace physique) à des modes dans un espace transformé appelé de Fourier. Ainsi, une variable définie sur N points de collocation pourra être définie par N modes dans l'espace de Fourier. Cependant, un problème inhérent aux méthodes spectrales existe, il s'agit du phénomène de repliement. Il intervient à chaque fois que l'on veut effectuer un produit de grandeurs exprimées par une transformée de Fourier finie, i.e. lorsque la somme définissant notre grandeur équation (I.1.7) ou (I.1.8) est tronquée à un nombre fini de modes N . En effet, un produit de deux sommes $0 \dots N$ donne une somme définie sur $0 \dots 2N$. Or, si le produit est défini (comme chacun de ses membres) par N composantes, une erreur est créée. Les termes qui devraient être décrits par les composantes $N + 1 \dots 2N$ le seront (de manière erronée) par les composantes $0 \dots N$. On parle alors de repliement car la composante $N + 1$ aura une influence

sur la composante $N - 1$, $N + 2$ sur $N - 2$, ... jusqu'à la composante $2N$ qui aura une influence sur la composante 0. Ainsi, les produits apparaissant dans la formulation du modèle devront être traités avec attention afin d'éviter ce phénomène.

La solution

La technique la plus largement utilisée pour traiter ce problème du repliement est le *zero-padding* que l'on pourra traduire par remplissage de zéros, voir par exemple Canuto et al. [20]. L'idée peut être résumée par les étapes suivantes pour un produit de deux variables f et g :

- On opère une transformée de Fourier sur f et g donnant les N amplitudes modales,
- On augmente le nombre de modes jusqu'à $N_d \geq N$. Pour ce faire, les amplitudes modales correspondantes $N \dots N_d$ sont prises égales à zéro (remplissage de zéros),
- On effectue une transformée de Fourier inverse pour revenir sur les grandeurs dans l'espace physique f' et g' définies cette fois sur N_d points de collocation,
- On effectue le produit $f' \times g'$
- On réalise une transformée de Fourier donnant N_d amplitudes modales. On ne garde que les N premières amplitudes qui correspondront aux amplitudes du produit traité contre le repliement.

Il faut alors choisir le nombre N_d de points judicieux pour éliminer les termes repliés. Trois approches seront présentées : traitement anti-repliement complet, partiel et intermédiaire.

Complet : En considérant un produit d'ordre M i.e. M produits de différentes variables, on retrouve la règle communément admise des $(M + 1)$ moitiés (voir par exemple Canuto et al. [20]). C'est à dire, le nombre de points à prendre en considération est :

$$N_d = \frac{M + 1}{2} N$$

Par exemple, pour le produit simple précédent ($M = 2$), on a donc $N_d = \frac{3N}{2}$. Cette règle des $(M + 1)$ moitiés sera ce qu'on appelle après le traitement anti-repliement complet. Il correspond au traitement exact et rigoureux du problème du repliement. On se rend compte que dès lors que des produits d'ordres élevés apparaissent, le coût de ce genre de traitement peut devenir très important. C'est cette approche qui est adoptée par West et al. [128] par exemple.

Partiel : L'approche adoptée par Dommermuth & Yue [33] sera appelée traitement anti-repliement partiel. Cette approche consiste à traiter chaque produit multiple comme une succession de produits simples déaliasés par une règle des 4 moitiés (i.e. $N_d = 2N$). Donc, si on considère par exemple le produit η^3 , cette méthode consiste à décomposer ce produit en $\eta \times \eta$ traité contre le repliement (donnant un η_r^2). Puis, il faut effectuer $\eta_r^2 \times \eta$ déaliasé de la même manière (règle des 4 moitiés).

Intermédiaire : Une autre approche existe que l'on appellera anti-repliement intermédiaire par la suite. Elle consiste à considérer un produit d'ordre M comme une succession de produits d'ordre inférieurs p (avec : $1 < p < M$). Ainsi on aura :

$$N_d = \frac{p + 1}{2} N$$

On considèrera alors par exemple ($p = 2$) un produit d'ordre 4, η^4 comme un produit d'ordre 2 multiplié par un autre produit d'ordre 2 ($\eta^2 \times \eta^2$). Chacun de ces “sous-produits” est traité contre le repliement de manière complète (i.e. en utilisant ici $N_d = \frac{3}{2} N$). Le traitement intermédiaire est donc un processus de repliements successifs qui s'avère nécessaire pour les ordres de non-linéarités grands. En effet, le traitement complet peut s'avérer très coûteux en mémoire / temps CPU. Mais, il est à noter qu'effectuer un traitement anti-repliement complet, intermédiaire ou partiel n'est pas strictement équivalent : les traitement partiels et intermédiaires sont une approximation (qui peut être plus ou moins précise) du traitement complet. Ce traitement anti-repliement intermédiaire que l'on utilisera par la suite est par ailleurs plus flexible que le traitement partiel, il permet d'ajuster l'ordre inférieur p en fonction des besoins (précision/temps de calcul).

Il est intéressant d'indiquer que F. Bonnefoy [14] a mis en lumière la nécessité d'un traitement particulier de la dérivée. En particulier, lors d'une dérivation d'un produit, il convient de conserver tous les modes du produit traité contre le repliement. Cependant, une amplification des erreurs numériques peut apparaître lors de la dérivation des modes les plus élevés (multiplication par k_{mn}). L'idée est alors apparue d'effectuer un traitement particulier pour les dérivées consistant en un filtrage des modes les plus élevés. On utilise un filtre passe bas sur les N_{der} premiers modes avec $N < N_{der} < \frac{p+1}{2} N$.

De la même manière, on peut appliquer un filtrage sur les quantités avancées en temps η et ϕ^s . On entend par filtrage la mise à zéro de certains des modes les plus hauts pouvant poser problème dans certains cas. Ce filtrage est équivalent au lissage effectué par Dommermuth & Yue [33] ou Bateman et al. [8]. D'un point de vue pratique, le filtrage est appliqué dans notre méthode sur la condition initiale et sur les seconds membres des conditions de surface libre. Son utilisation reste cependant réservée aux simulations d'états de mer très cambrés (proches du déferlement) et non systématique.

I.2.2.2 Validations

De nombreuses validations et caractérisations des propriétés du modèle HOS peuvent être trouvées dans les thèses de mes prédécesseurs sur ce sujet, D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13]. L'approximation que l'on fait dans un modèle HOS est sur la vitesse verticale W . Les tests de précision et de convergence sont donc effectués sur cette variable et le plus simple sera de comparer notre vitesse verticale HOS à une vitesse verticale de référence, par exemple en utilisant la solution complètement non-linéaire de Rienecker & Fenton [106]. On utilisera ici la solution de Rienecker & Fenton améliorée par F. Bonnefoy au cours de sa thèse [13]. Cette dernière va nous donner l'élévation de surface libre $\eta(\mathbf{x}, t)$ et le potentiel de surface $\phi^s(\mathbf{x}, t)$ d'entrée de notre simulation HOS. On comparera alors la vitesse verticale au niveau de la surface libre donnée par notre simulation, notée W et la solution de référence de Rienecker & Fenton, notée W_{RF} . L'erreur absolue sera alors évaluée par :

$$\epsilon = \max_x |W - W_{RF}|$$

On rappelle ici les principaux résultats obtenus par F. Bonnefoy [14] sur la convergence en fonction de N & M et sur l'anti-repliement.

Convergence selon N & M

On va s'intéresser dans ce paragraphe à la convergence, en fonction du nombre de points N et de l'ordre HOS M , de l'évaluation de la vitesse verticale W . Pour cela, on étudiera cette convergence à cambrure assez importante, $ka = 0.30$. On utilisera un traitement anti-repliement complet ici, l'influence du traitement anti-repliement ayant été étudiée avec détails comme on le résumera dans paragraphe suivant.

On va s'intéresser ici au cas d'une houle régulière périodique que l'on résout sur une longueur d'onde. On évalue l'erreur de l'approximation de W (ϵ) par rapport au nombre de points N ainsi qu'à l'ordre HOS M utilisé. Dans ce cas-là, on utilise un dealiasing complet et un traitement de la dérivée avec $N_{der} = 2N$. Les résultats pour un cas de houle typique utilisé par la suite ($ka = 0.30$) sont présentés sur la figure I.2.2.

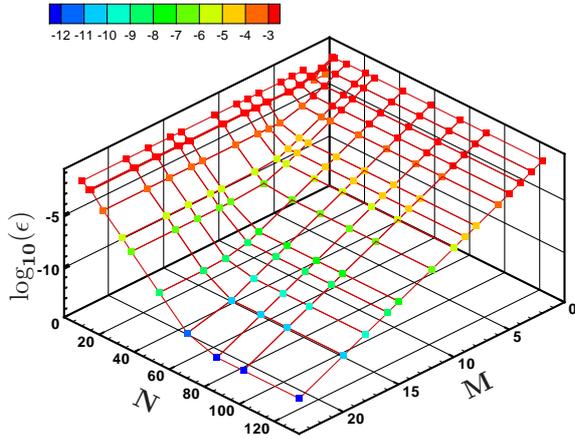


FIG. I.2.2 – Convergence de l'évaluation de W pour une houle de cambrure $ka = 0.30$.

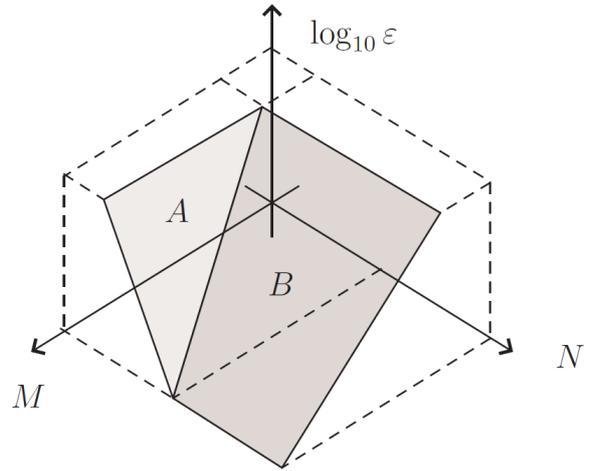


FIG. I.2.3 – Surfaces de convergence du schéma HOS, fonction de N et M

Sur cette figure est représenté $\log_{10}(\epsilon)$ en fonction de M et N . On observe très bien pour ce cas assez cambré ($ka = 0.30$) une convergence assez rapide que ce soit en fonction de l'ordre HOS ou du nombre de points utilisé. Ceci est une courbe typique de convergence obtenue avec une méthode HOS. On peut remarquer sur cette figure deux surfaces planes, confirmant la décroissance exponentielle de l'erreur à M élevé en fonction de N et à N élevé en fonction de M .

Chacune de ces surfaces désigne une convergence de l'un des paramètres (surface A , convergence sur M réalisée (si on fixe N , l'erreur stagne en augmentant M) et sur la surface B convergence sur N réalisée (si on fixe M , l'erreur stagne en augmentant N)). Ainsi, le choix optimal des valeurs de N et M se situe à l'intersection de ces deux surfaces planes (dans le cas présenté ici, $N \simeq 3.3M$).

Il faut indiquer ici que lorsque $M > 25$ et $N > 40$, le cumul d'erreur numérique devient problématique. En effet, à partir de ce point, si on fixe M ($M > 25$) et que l'on augmente N ($N > 40$), au lieu d'avoir une erreur constante (on est sur la surface de convergence B) celle-ci augmente lentement. Il s'agit d'un problème exclusivement numérique de cumul d'erreur. Cependant, il faut noter que de tels nombre de points et d'ordre HOS aussi élevés ne sont

pas réalistes quant à l'étude d'un état de mer complet. En effet, utiliser plus de 40 points par longueur d'onde dans une simulation océanique de houle irrégulière n'est pas envisageable tant au niveau du temps de calcul que de la mémoire nécessaire à une telle simulation.

Anti-repliement

- Des tests effectués avec une cambrure importante $ka = 0.35$ nous montrent que l'erreur avec un traitement anti-repliement intermédiaire est comparable à celle issue du dealiasing complet. Ainsi, ce dealiasing intermédiaire apparaît très intéressant car il permet un gain très important en temps de calcul avec une précision qui reste maximale.
- Une comparaison du traitement anti-repliement partiel et intermédiaire nous indique l'amélioration très importante apportée par le choix intermédiaire. En effet, il apparaît que pour le dealiasing partiel, quand le nombre de modes N devient trop important la convergence en fonction du nombre de modes sature avec même une augmentation de l'erreur quand $N > 20$. Au contraire, le dealiasing intermédiaire conserve une décroissance de l'erreur jusqu'à la convergence (et ce quel que soit le choix de p).
- Pour une cambrure plus forte $ka = 0.40$, on s'aperçoit que le choix de p est plus difficile à effectuer tout en remarquant qu'à p fixé, au dessus d'un certain seuil $N_c = 40$ indépendant de p , on obtient la même erreur qu'en dealiasing complet.
- Des tests sur l'influence du filtrage de la dérivée (N_{der}) ont également été réalisés sur ce même cas de houle fortement cambré $ka = 0.40$. Les conclusions sont que le filtrage de la dérivée améliore considérablement les résultats. La valeur $N_{der} = 2N$ donne les meilleurs résultats pour ce cas de calcul.

Comparaison aux résultats existants

- **Skandrani et al. [109]** Il s'agit de tests de l'approximation HOS, pour trois cambrures faibles à modérées, $ka = 0.1, 0.2$ et 0.3 . Trois nombres d'harmoniques sont utilisés, $N = 8, 16$ et 32 et 5 valeurs de M , de 2 à 10. Dans les deux modèles, un traitement anti-repliement partiel est employé. Les différences importantes que l'on observe est que le modèle de Skandrani et al. présente une saturation de l'erreur à M croissant pour les plus grands nombres de modes utilisés, ce qui n'est observé dans notre cas que pour $N = 8$ (où on se trouve sur la surface A du schéma de convergence I.2.3). De plus, on observe que l'erreur obtenue avec notre modèle est inférieure à celle obtenue par Skandrani et al. à M élevé. De plus, il faut noter que le comportement exponentiel de l'erreur qu'on met en évidence avec notre modèle HOS vient contredire le raisonnement de l'équipe de l'Université d'Oslo (Clamond et Grue [27] et Fructus et al.[52]), qui prend comme référence les résultats de Skandrani et al. pour dire que le HOS sature à forte cambrure.
- **Dommermuth & Yue [33]** Différents points importants ont été remarqués lors de la reproduction des cas-tests de Dommermuth & Yue (étude de l'erreur absolue sur W en fonction de N et M pour différentes cambrures). Tout d'abord, en utilisant un dealiasing partiel comme celui de Dommermuth & Yue, pour les ordres M les plus élevés, on n'observe pas de détérioration de la précision. Au contraire, l'erreur obtenue se comporte bien de manière exponentielle, comme attendu. On rappelle la différence de formulation utilisée, notre modèle HOS s'appuyant sur la formulation consistante de West et al. [128]. Ensuite, en utilisant un traitement anti-repliement complet ou intermédiaire on arrive à

diminuer sensiblement les erreurs observées dans Dommermuth & Yue [33] et en particulier pour les valeurs de M élevées.

I.2.3 Temps de calcul

I.2.3.1 Influence de l'anti-repliement

On va maintenant s'intéresser au coût que peut représenter le traitement anti-repliement présenté dans le paragraphe précédent. On ne va s'intéresser ici qu'à la partie correspondant au calcul de la vitesse verticale W (i.e. le processus itératif décrit dans la sous-section I.2.1.2). On rappelle tout d'abord que, sans anti-repliement, on a $M \frac{M+3}{2}$ FFTs réalisées sur N points donc un temps de calcul évoluant comme :

$$T_{\text{CPU}} = O\left(M \frac{M+3}{2} N \log(N)\right) \simeq O\left(M^2 N \log(N)\right)$$

On va évaluer pour l'anti-repliement complet et l'anti-repliement intermédiaire le temps de calcul en calculant le nombre de FFTs réalisées (directes ou inverses) avec le nombre de points sur lesquels elles sont réalisées.

Complet : Le nombre de transformées de Fourier (directes ou inverses) réalisées est le suivant :

$$N_{\text{FFTs}} = 2 \text{ sur } N \text{ points} + \left(M + 3 + M \frac{M+1}{2}\right) \text{ sur } N_d \text{ points} \quad (\text{I.2.19})$$

Soit, un coût en temps CPU ($N_d = \frac{M+1}{2} N$) :

$$\begin{aligned} T_{\text{CPU}_{\text{complet}}} &= O\left(2 N \log(N) + \left[\frac{M^3}{4} + M^2 + \frac{9M}{4} + \frac{3}{2}\right] N \log\left(\frac{M+1}{2} N\right)\right) \\ &\simeq O\left(M^3 N \log\left(\frac{M+1}{2} N\right)\right) \end{aligned}$$

Intermédiaire : Le nombre de transformées de Fourier (directes ou inverses) réalisées est le suivant, en notant $E(\cdot)$ la partie entière :

$$N_{\text{FFTs}} = 2 \text{ sur } N \text{ points} + \left(2E\left(\frac{M-1}{p}\right) + M + 1 + M \frac{M+1}{2}\right) \text{ sur } N_d \text{ points} \quad (\text{I.2.20})$$

Soit un coût en temps CPU ($N_d = \frac{p+1}{2} N$) :

$$\begin{aligned} T_{\text{CPU}_{\text{intermédiaire}}} &= O\left(2 N \log(N) + \left[\frac{M^2}{2} + \frac{3M}{2} + 2E\left(\frac{M-1}{p}\right) + 1\right] \frac{p+1}{2} N \log\left(\frac{p+1}{2} N\right)\right) \\ &\simeq O\left(pM^2 N \log\left(\frac{p+1}{2} N\right)\right) \end{aligned}$$

On peut facilement se rendre compte de l'augmentation du coût en temps de calcul représenté par le traitement anti-repliement. Pour résumer, le tableau suivant nous donne une

Ordre HOS	$M = 4$	$M = 5$	$M = 7$	$M = 10$	$M = 15$	$M = 25$	$M = 50$
Anti-repliement							
Aucun	1	1.43	2.5	4.64	9.64	25.0	94.6
Intermédiaire ($p = 4$)	3.48	4.79	8.03	14.4	29.1	73.5	273.2
Complet	3.48	5.85	13.2	33.4	102.7	449.2	3549.2

 TAB. I.2.1 – Évolution du nombre d’opérations pour la résolution de W ($N = 1024$)

évaluation du temps de calcul, à partir des équations (I.2.14), (I.2.19) et (I.2.20). On exprime ici le nombre d’opérations effectuées dans le calcul de W en prenant comme référence le calcul avec $M = 4$ sans traitement anti-repliement :

La figure I.2.4 présente l’évolution théorique du nombre d’opérations effectuées pour les cas présentés dans le tableau précédent I.2.1. On se rend bien compte de l’augmentation très importante du nombre d’opérations effectuées avec l’ordre HOS M . Ceci est d’autant plus vrai que l’on ajoute un traitement anti-repliement à notre calcul. En effet, on passe d’une évolution en approximativement $O(M^2)$ pour un calcul sans anti-repliement à une évolution en $O(M^3)$ pour un calcul avec anti-repliement complet. L’intérêt d’utiliser un traitement anti-repliement intermédiaire apparaît alors ici clairement. En effet, en fixant un ordre intermédiaire p convenablement choisi, on peut accélérer grandement le calcul (surtout à M élevé). On espère donc enlever la part repliée la plus importante tout en ayant un temps de calcul raisonnable.

On a donc vu le gain important en temps de calcul avec la mise en place d’un traitement anti-repliement intermédiaire. Il est à noter que cette approximation permet également un gain important au niveau de la mémoire requise lors du calcul. Cette dernière est répertoriée dans le tableau suivant I.2.2 :

Ordre HOS	$M = 4$	$M = 5$	$M = 7$	$M = 10$	$M = 15$	$M = 25$	$M = 50$
Anti-repliement							
Aucun	1	1.07	1.21	1.42	1.76	2.46	4.13
Intermédiaire ($p = 4$)	2.17	2.34	2.69	3.21	4.08	5.81	9.98
Complet	2.17	2.76	4.17	6.79	12.6	29.3	97.8

 TAB. I.2.2 – Évolution des ressources en mémoire nécessaires, $N = 1024 \times 512$

On observe ainsi, pour de grandes valeurs de M , un gain pouvant aller jusqu’à un rapport 10 ($M = 50$) entre le traitement anti-repliement intermédiaire et complet concernant la mémoire requise lors d’un calcul. Si on le combine pour cette même valeur de M à un rapport 13 sur le nombre d’opérations à effectuer, on se rend bien compte de l’intérêt d’une telle prise en compte du repliement. Si on prend un exemple typique employé dans nos simulations par la suite, par exemple $M = 7$, le gain est également important avec un rapport 1.7 en temps de calcul aussi bien qu’en taille de mémoire allouée. De tels gains peuvent être primordiaux lors de simulations de longue durée. Cependant, il faut rappeler que cette approche intermédiaire est une approximation dans le sens où les produits d’ordre supérieurs à p ne sont pas traités contre le repliement et vont donc avoir une influence sur le résultat (que l’on essaie de minimiser en choisissant un ordre p adéquat).

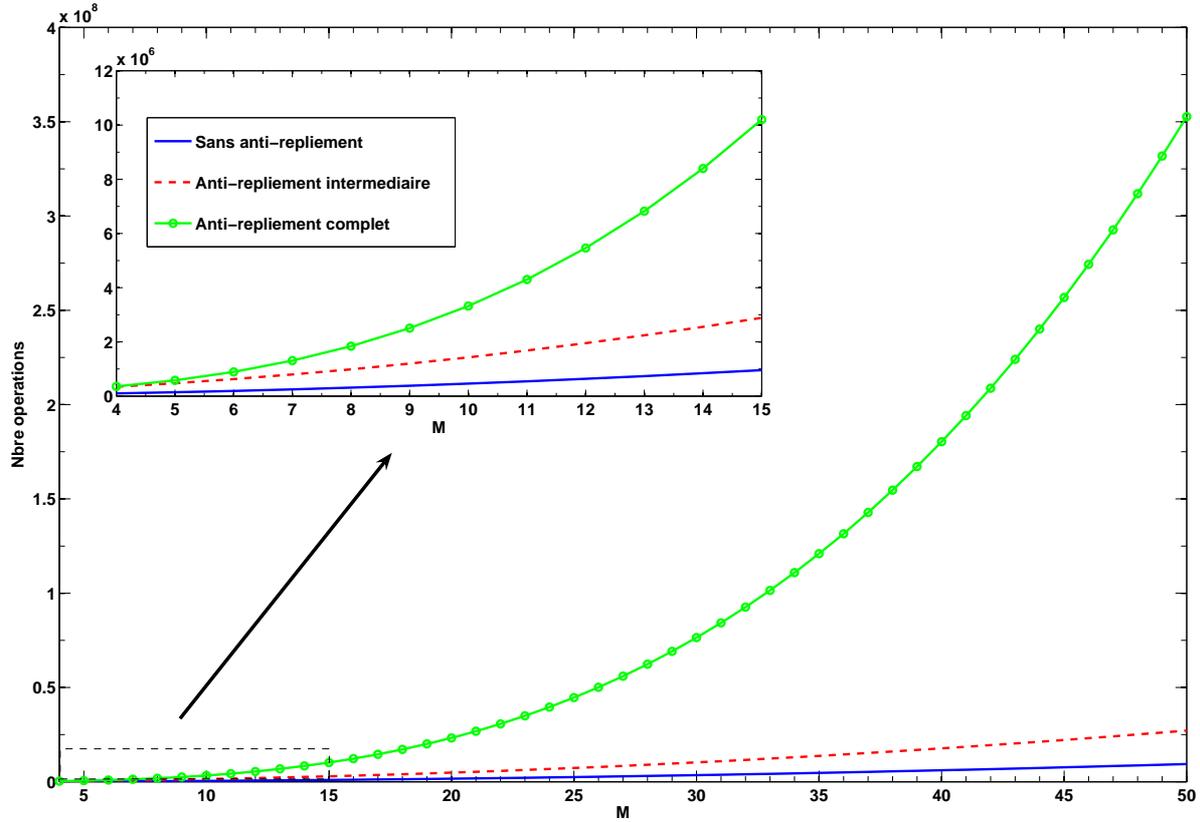


FIG. I.2.4 – Evolution du nombre d'opérations en fonction de l'ordre HOS M avec ou sans anti-repliement

I.2.3.2 Évolution avec le nombre de points

Dans ce paragraphe, on va donner quelques temps de calcul typiques des simulations que nous allons réaliser par la suite au cours de cette thèse. Ceci permettra notamment de vérifier le temps de calcul donné précédemment par l'équation (I.2.21) et donc l'évolution très intéressante en fonction du nombre de points que l'on a avec notre méthode (\simeq linéaire aux grands N). Le tableau suivant I.2.3 donne les différents temps de calcul par pas de temps en fonction du nombre de points utilisés, sur un processeur Opteron 2.4 GHz :

$n1 \times n2$	32×16	64×32	128×64	256×128	512×256	1024×512	2048×1024
Évaluation							
Pratique (code)	0.02	0.07	0.39	2.91	20.4	116.9	684.3
Théorique ($p = 3$)	0.07	0.36	1.69	7.7	34.9	155.5	684.3

TAB. I.2.3 – Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de points

L'évaluation la plus précise du nombre d'opérations étant réalisée avec le plus grand nombre de points (les opérations annexes devenant négligeable), on prend le calcul $n1 \times n2 = 2048 \times 1024$ comme référence pour le calcul théorique. On obtient alors (c.f. tableau I.2.3) l'évolution théorique et pratique du coût en temps CPU en fonction du nombre de points. On remarque

que celles-ci sont en bon accord malgré quelques différences notamment aux faibles nombres de points. On observe cependant le caractère très important du noyau de calcul qui est que le coût en temps de calcul évolue quasi linéairement pour les grands nombres de points. Les différences observées peuvent avoir plusieurs origines, on rappelle notamment que l'évaluation des FFTs sur N points qui est donnée par un coût en temps CPU en $O(N \log(N))$ est un ordre de grandeur ; d'autre part, on a évalué ici uniquement le coût des FFTs. Ainsi en raisonnant en ordre de grandeur, on se rend bien compte que la formule I.2.21 représente de façon convenable l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre de points. La pente de l'évolution linéaire du temps de calcul est un peu plus élevée du fait des opérations hors-FFTs réalisées (le rapport est d'environ 1.3 entre ces deux évaluations). L'efficacité de la méthode est cependant bien pointée avec cette évolution. La figure I.2.5 est une représentation en échelle log-log du tableau I.2.3.

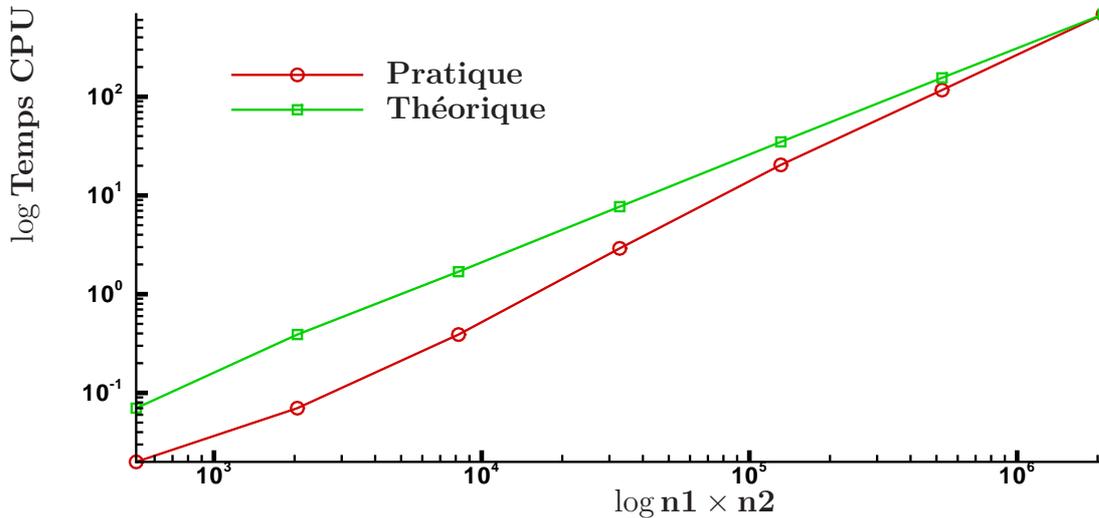


FIG. I.2.5 – Évolution du temps de calcul en fonction du nombre de points en échelle log-log

On peut donc en conclure que dans ce chapitre est tout d'abord décrit le noyau de la méthode HOS. La reformulation en quantités surfaciques permet de simplifier le problème, la seule inconnue restant à déterminer étant la vitesse verticale W . Cette dernière est alors évaluée par le processus HOS dont nous utiliserons la version consistante en ordre de West et al. [128]. L'algorithme de résolution est présenté. On a rappelé les résultats importants obtenus par F. Bonnefoy [14] et [13] en ce qui concerne: i) l'intégration en temps par un schéma de Runge Kutta du 4^{ème} ordre adaptatif, ii) le traitement anti-repliement sous différentes formes et iii) les différentes validations déjà effectuées sur les cas-tests que l'on peut trouver dans la littérature. Enfin, le temps de calcul est analysé en détails mettant en avant l'efficacité de la méthode HOS.

Chapitre I.3

Améliorations apportées au modèle

Ce chapitre a pour objectif de présenter les principales améliorations apportées au modèle lors de cette thèse (en excluant la génération qui sera traitée spécifiquement dans le chapitre II.2). On évoquera donc tout d'abord l'avance en temps qui a été améliorée grâce à la mise en place du schéma présenté par Fructus et al. [52]. Ce schéma, basé sur une intégration analytique de la partie linéaire des CSL, permet un gain important de temps CPU. Dans la seconde section, on s'intéressera au calcul des diverses quantités d'intérêt dans le domaine fluide à partir de leur connaissance sur la surface libre. Une méthode efficace est mise en place en adaptant le travail de Bateman [7] à notre méthode HOS.

I.3.1 Avance en temps

La méthode d'avance en temps proposée par Fructus *et al.* [52] (issue de Canuto et al. [20]) a été utilisée. Cette méthode permet une intégration analytique de la partie linéaire des conditions de surface libre grâce à un changement de variable adéquat. Dès lors, seule la partie non-linéaire des équations est résolue : elle n'est plus considérée comme un ajustement de la partie linéaire mais comme un problème en elle-même. Ceci permet un gain important de temps CPU grâce à des pas de temps beaucoup plus importants (à précision équivalente), ce qui équivaut à une meilleure précision de la résolution (à pas de temps constant) (cf. I.3.1.3).

I.3.1.1 Principe

On a vu dans la partie I.2 précédente que l'élévation et le potentiel de surface libre peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\eta(\mathbf{x},t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^\eta(t) \psi_{ij}^s(\mathbf{x}) \quad (\text{I.3.1})$$

$$\phi^s(\mathbf{x},t) = \sum_j \sum_j A_{ij}^{\phi^s}(t) \psi_{ij}^s(\mathbf{x}) \quad (\text{I.3.2})$$

On décompose la vitesse verticale W en une partie linéaire et une partie non-linéaire :

$$W_{lin} = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x},0,t) \quad (\text{I.3.3})$$

$$W_{nonlin} = \sum_{m=2}^M \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x},0,t) \quad (\text{I.3.4})$$

On effectue alors une double transformée de Fourier (notée $\mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}_{xy}$) sur les CSL et on obtient :

$$\frac{dA_{ij}^\eta}{dt} = A_{ij}^{W_{lin}} + \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}_{xy} \left(W_{nonlin} + |\nabla\eta|^2 W - \nabla\phi^s \cdot \nabla\eta \right) \quad (\text{I.3.5})$$

$$\frac{dA_{ij}^{\phi^s}}{dt} = -gA_{ij}^\eta + \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}_{xy} \left(-\frac{1}{2}|\nabla\phi^s|^2 + \frac{1}{2}(1 + |\nabla\eta|^2)W^2 \right) \quad (\text{I.3.6})$$

avec $A_{ij}^{W_{lin}}$ l'amplitude modale de la vitesse verticale linéaire. On peut l'exprimer sous la forme :

$$A_{ij}^{W_{lin}} = k_{ij} \tanh(k_{ij}h) A_{ij}^{\phi^s}$$

On réécrit alors le système précédent en décomposant les parties linéaires des parties non-linéaires :

$$\frac{dA_{ij}^\eta}{dt} - k_{ij} \tanh(k_{ij}h) A_{ij}^{\phi^s} = \mathcal{N}_1 \quad (\text{I.3.7})$$

$$\frac{dA_{ij}^{\phi^s}}{dt} + gA_{ij}^\eta = \mathcal{N}_2 \quad (\text{I.3.8})$$

avec,

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}_{xy} \left(W_{nonlin} + |\nabla\eta|^2 W - \nabla\phi^s \cdot \nabla\eta \right) \quad (\text{I.3.9})$$

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}_{xy} \left(-\frac{1}{2}|\nabla\phi^s|^2 + \frac{1}{2}(1 + |\nabla\eta|^2)W^2 \right) \quad (\text{I.3.10})$$

$$(\text{I.3.11})$$

On peut alors l'écrire sous forme matricielle, en se rappelant que $\omega_{ij}^2 = gk_{ij} \tanh(k_{ij}h)$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + A\mathcal{F} = \mathcal{N} \quad (\text{I.3.12})$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \begin{pmatrix} gA_{ij}^\eta \\ \omega_{ij}A_{ij}^{\phi^s} \end{pmatrix}, & A &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{ij} \\ \omega_{ij} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{N} &= \begin{pmatrix} g\mathcal{N}_1 \\ \omega_{ij}\mathcal{N}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.3.13})$$

Il apparaît alors très avantageux d'écrire l'équation matricielle précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} \exp \left[A(t - t_0) \right] \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \exp \left[A(t - t_0) \right] A\mathcal{F} &= \exp \left[A(t - t_0) \right] (\mathcal{N}) \\ \frac{\partial \exp \left[A(t - t_0) \mathcal{F} \right]}{\partial t} &= \exp \left[A(t - t_0) \right] (\mathcal{N}) \end{aligned} \quad (\text{I.3.14})$$

On obtient donc une équation d'avance en temps simplifiée, résolvant implicitement la partie linéaire de l'équation. Celle-ci peut donc être ensuite avancée en temps par un schéma classique (type Runge-Kutta comme utilisé initialement).

I.3.1.2 Mise en œuvre

Lors de la mise en œuvre de ce changement de variables, il est intéressant d'insister sur certains aspects que l'on juge importants. Tout d'abord, on définit une nouvelle variable \mathcal{G} telle que :

$$\mathcal{G}(t) = \exp \left[A(t - t_0) \right] \mathcal{F}(t) \quad (\text{I.3.15})$$

On peut exprimer également \mathcal{F} en fonction de \mathcal{G} :

$$\mathcal{F}(t) = \exp \left[A(t_0 - t) \right] \mathcal{G}(t) \quad (\text{I.3.16})$$

En introduisant cette nouvelle variable, le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = \exp \left[A(t - t_0) \right] (\mathcal{N}) \\ \mathcal{G}(t_0) = \mathcal{F}(t_0) \end{cases} \quad (\text{I.3.17})$$

La fonction exponentielle matricielle n'étant pas couramment utilisée, nous rappelons ici la forme de celle-ci :

$$\exp \left[A(t - t_0) \right] = \begin{bmatrix} \cos [\omega_{ij} (t - t_0)] & -\sin [\omega_{ij} (t - t_0)] \\ \sin [\omega_{ij} (t - t_0)] & \cos [\omega_{ij} (t - t_0)] \end{bmatrix}$$

L'inclusion de cette nouvelle avance en temps implique un certain nombre de changements dans l'algorithme de résolution, qui vont être indiqués ici :

- Avance en temps des représentations modales des quantités d'intérêt (A_{ij}^{η} et $A_{ij}^{\phi^s}$) plutôt que les quantités elles-mêmes.
- Les modes donnent, à un facteur près, $\mathcal{F}(t)$ et par conséquent $\mathcal{G}(t)$ par l'équation (I.3.15).
- Avance en temps de \mathcal{G} grâce à l'équation (I.3.17) par un schéma type Runge-Kutta du 4^{ème} ordre avec pas de temps adaptatif :
 - Calcul de \mathcal{N} , i.e. termes non-linéaires des CSL dans l'espace de Fourier.
 - Évaluation de l'erreur permettant le contrôle du pas de temps se fait sur les variables modifiées (i.e. \mathcal{G}).
 - Obtention de $\mathcal{G}(t + \Delta t)$.
- Calcul de $\mathcal{F}(t + \Delta t)$ et donc des modes $A_{ij}^{\eta}(t + \Delta t)$ et $A_{ij}^{\phi^s}(t + \Delta t)$.

Il faut remarquer tout d'abord qu'il serait possible d'avancer en temps la quantité \mathcal{G} mais on cherche à connaître les représentations modales et/ou physiques des quantités d'intérêt pour les analyses des résultats du calcul. Ceci est la raison pour laquelle on avance en temps les modes dans notre cas.

Il faut ensuite indiquer qu'un surcoût existe pour la mise en place de cette nouvelle formulation. Typiquement, il s'agit de 2 FFTs supplémentaires, sur N points, à réaliser à chaque

itération du schéma de Runge-Kutta. Il faut le comparer avec le coût d'évaluation du schéma HOS qui vaut (c.f. section I.2.2) $O(M^3)$ FFTs avec traitement anti-repliement complet ou $O(pM^2)$ FFTs avec traitement intermédiaire. On s'aperçoit donc que l'augmentation du temps CPU pour cette nouvelle intégration en temps est négligeable. Or, on verra dans la section suivante que le gain en temps de calcul global est significatif (de par une augmentation des pas de temps pouvant être utilisés).

I.3.1.3 Résultats

Afin de démontrer l'efficacité de cette nouvelle avance en temps, nous allons comparer le schéma initial où on avance en temps η et ϕ^s (courbe intitulée *Classique*) et ce nouveau schéma où l'avance en temps se fait sur les variables modifiées, intégrant analytiquement la partie linéaire de l'équation (courbe intitulée *Intégration partie linéaire*). Les 2 figures suivantes représentent, pour le cas-test de la propagation d'une houle régulière modérément cambrée, $ka = 0.2$, en milieu ouvert :

- Figure I.3.1: Les pas de temps utilisés dans l'avance en temps (RK4 adaptatif) avec l'erreur maximale fixée à $Tol = 10^{-7}$.
- Figure I.3.2: L'erreur évaluée pour un pas de temps fixé à $dt = 3.10^{-2}$.

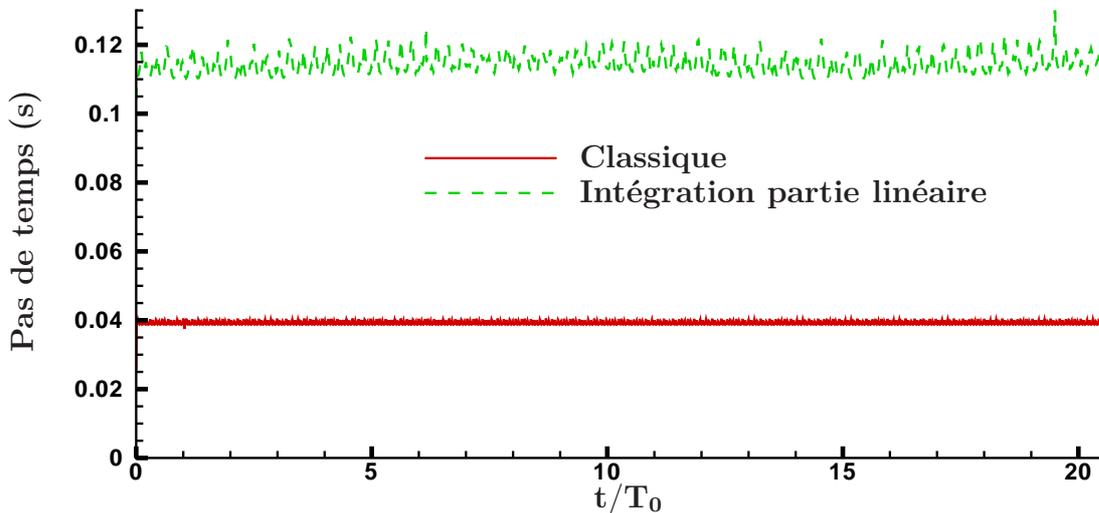


FIG. I.3.1 – Comparaison du pas de temps avec une erreur maximale fixée à $Tol = 10^{-7}$

On peut remarquer sur la figure I.3.1 que, pour une tolérance fixée (dans l'avance en temps du RK4 adaptatif, voir section I.2.2.1), le pas de temps correspondant varie sensiblement entre la formulation classique et la nouvelle formulation. En effet, le pas de temps qui peut être utilisé avec cette nouvelle formulation est environ 3 fois supérieur au pas de temps dit *classique*. On va donc avoir un gain de temps CPU très important en utilisant le processus décrit précédemment (le surcoût du processus en lui-même étant négligeable devant le gain observé, comme on l'a

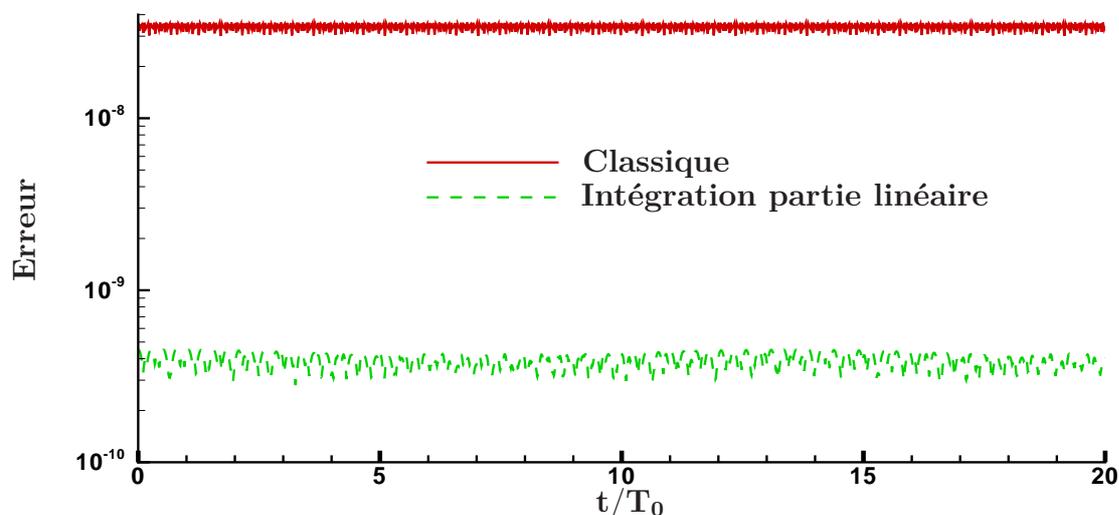


FIG. I.3.2 – Comparaison de l'erreur avec un pas de temps fixé à $dt = 3.10^{-2}$

remarqué précédemment).

La figure I.3.2 montre de la même manière que précédemment l'efficacité de la méthode utilisée. En effet, en fixant le pas de temps utilisé dans la simulation, on regarde l'erreur d'évaluation qui serait utilisée dans le calcul du pas de temps adaptatif du RK4 (c.f. section I.2.2.1). Cette erreur est, comme attendu au vu de la figure I.3.1, beaucoup plus importante dans le schéma d'avance en temps *classique* que dans le nouveau, où elle est réduite d'un facteur environ 85. Noter que sur cette figure, l'erreur est représentée avec une échelle logarithmique afin de faciliter la lecture.

Il semblait ensuite important d'évoquer l'influence de la cambrure sur l'efficacité de ce nouveau schéma d'intégration en temps. Le changement de variables mis en place, permettant l'intégration analytique de la partie linéaire des CSL, a peut-être un comportement particulier en fonction de la cambrure du champ de vagues résolu. En effet, il convient de rappeler que si cet état de mer est parfaitement linéaire, alors, la résolution de celui-ci sera implicite et exacte de par la construction même du changement de variables. On est donc en droit de se demander quel est le comportement de notre nouveau schéma d'intégration en temps lors de la résolution d'états de mer cambrés (i.e. fortement non-linéaires). On a donc effectué différents tests identiques à ceux présentés dans les figures précédentes (I.3.1 & I.3.2) pour des cambrures différentes. Les résultats obtenus à tolérance fixée ($Tol = 10^{-7}$) sont reportés dans le tableau suivant I.3.1. On s'intéresse ici au pas de temps moyen dt de chacun des modèles d'intégration temporelle.

On peut donc remarquer, comme attendu, que les pas de temps utilisés dans le schéma d'intégration en temps évoluent en suivant la complexité de la résolution : de plus en plus petits à mesure que l'on augmente la cambrure ka . Mais ce phénomène était également observé avec l'avance en temps utilisée initialement.

Cambrure ka	0.10	0.20	0.30	0.40
$dt(\text{Chgmt. var.})$	0.195	0.115	0.076	0.049
$\frac{dt(\text{Chgmt. var.})}{dt(\text{Classique})}$	3.40	2.91	2.81	2.94

 TAB. I.3.1 – Influence de la cambrure sur l'intégration temporelle. Pas de temps moyen dt

Le rapport $\frac{dt(\text{Chgmt. var.})}{dt(\text{Classique})}$ nous renseigne quant à lui sur l'efficacité comparée des deux schémas. On observe alors que l'intérêt du nouveau schéma choisi est toujours des plus grands, même aux cambrures les plus élevées. Un rapport voisin de 3 entre les pas de temps pouvant être utilisés à précision égale est conservé quel que soit la cambrure. Même si ce rapport tend idéalement vers l'infini pour les cambrures les plus faibles (cette influence apparaît faiblement pour le cas modérément cambré, $ka = 0.10$), le changement de variables est toujours très efficace pour la résolution des champs de vagues fortement non-linéaires.

Ainsi, on a bien montré l'efficacité de ce schéma d'avance en temps où la partie linéaire des CSL est intégrée analytiquement. A précision égale, le temps de calcul va pouvoir être réduit de façon très importante et à pas de temps fixé, la précision de la résolution est grandement améliorée. Ce comportement est d'ailleurs très faiblement dépendant de la cambrure du champ de vagues résolu.

I.3.2 Calcul des vitesses dans le domaine fluide

I.3.2.1 Rappel

On rappelle ici que, comme vu dans le chapitre I.1, on applique un développement spectral au potentiel des vitesses ϕ que l'on va décomposer sur les fonctions de base $\psi_{ij}(\mathbf{x}, z)$:

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^\phi(t) \psi_{ij}(\mathbf{x}, z) \quad \text{dans D} \quad (\text{I.3.18})$$

avec les fonctions de base décrites dans le chapitre I.1 (on remarquera que la dépendance verticale est ici incluse dans ces fonctions de base, ψ dépendant de z). On va s'intéresser par exemple au cas du milieu ouvert en profondeur infinie (les développements en milieu confiné et/ou en profondeur finie sont identiques, seules changent les fonctions ψ) :

$$\psi_{ij}(\mathbf{x}, z) = \exp(i\mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}) \exp[k_{ij}z] \quad \text{dans D}$$

avec $\mathbf{k}_{ij} = (k_{x_i}, k_{y_j})$ et $k_{ij} = \sqrt{k_{x_i}^2 + k_{y_j}^2}$.

On a vu dans le chapitre précédent, I.2 que les quantités surfaciques, en particulier $\phi^s(\mathbf{x}, t)$, sont également exprimées sous la forme d'un développement spectral :

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^{\phi^s}(t) \psi^s(\mathbf{x})$$

L'évolution au cours du temps de $\phi^s(\mathbf{x}, t)$ est donc connue et on cherche à connaître $\phi(\mathbf{x}, z, t)$

quel que soit z . Il est alors nécessaire d'exprimer les coefficients A_{ij}^ϕ (nécessaires pour la reconstruction de ϕ dans tout le domaine fluide D), ce qui revient à résoudre l'équation suivante :

$$\sum_i \sum_j A_{ij}^\phi(t) \psi_{ij}(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x}, t)) = \phi^s(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.3.19})$$

Il faut remarquer que cette équation ne peut pas être simplement résolue par l'utilisation de FFTs. En effet, si les fonctions ψ_{ij} avaient été évaluées en $z = 0$, le système aurait été linéaire et inversible par l'intermédiaire d'une FFT, puisque la dépendance en x est contenue simplement dans l'exponentielle complexe $\exp(i\mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x})$. Avec les ψ_{ij} évalués en $z = \eta$, on introduit une dépendance en x supplémentaire par le terme $\exp[k_{ij}\eta(\mathbf{x}, t)]$, qui empêche l'utilisation de FFTs. Cette remarque est valable aussi bien pour le potentiel que pour ses dérivées définissant les vitesses. On va étudier plusieurs méthodes dans la partie suivante afin de régler ce problème.

I.3.2.2 Solveur type Fenton & Rienecker

Cette méthode a été proposée initialement par Fenton & Rienecker [43] afin d'extraire ces coefficients $A_{ij}(t)$ en connaissant $\phi^s(\mathbf{x}, t)$. Si on met notre problème sous forme matricielle en ne considérant qu'une seule direction horizontale, il a la forme suivante dans le cas du domaine ouvert en profondeur infinie :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & \exp(ik_{x_i}x_m) \exp[k_{x_i}\eta(x_m)] & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots \\ A_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \phi^s(x_m) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

avec $i = -N_x \dots N_x$ et $m = -N_x \dots N_x$.

On va donc résoudre ce système matriciel (par inversion de la matrice) afin d'obtenir les coefficients A_i . Ceci peut être fait par plusieurs types de méthode : factorisation LU, méthode itérative type GMRES, ... Une fois que l'on a accès aux A_i , on peut reconstruire dans tout le domaine D le potentiel $\phi(x, z)$ par l'équation (I.3.18). Le désavantage le plus grand de cette méthode réside dans l'inversion très gourmande en temps CPU et en mémoire (en particulier pour des cas 3D). Typiquement, les inversions de systèmes linéaires ont un coût en $O((N_x N_y)^2)$ pour le cas 3D.

Un autre point qui a été mis en lumière par Bateman [7], d'après Vijfvinkel [125], est que cette méthode, appliquée au calcul de vitesse, peut être sujet à une amplification de petites erreurs numériques. En effet, si l'on s'intéresse à la vitesse horizontale définie par :

$$U(\mathbf{x}, z) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, z)}{\partial x} = \sum_i \sum_j A_{ij} \frac{\partial \psi_{ij}(\mathbf{x}, z)}{\partial x} \quad (\text{I.3.20})$$

la dérivation introduit un terme multiplicatif en $(i k_{x_i})$ qui peut amplifier les erreurs numériques pour les grands nombres d'onde et en particulier près de la surface libre (où les vitesses sont les plus importantes).

La solution proposée par Vijfvinkel [125] est de calculer tout d'abord la vitesse à la surface libre en utilisant les équations (I.2.7), donc dans le cas de la vitesse horizontale :

$$U(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x})) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x})) = \frac{\partial \phi^s}{\partial x}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \eta}{\partial x}(\mathbf{x}) W(\mathbf{x})$$

et ensuite de l'utiliser en variable d'entrée, c'est à dire en décomposant celle-ci sur les fonctions de bases ψ_{ij} :

$$U(\mathbf{x}, z) = \sum_i \sum_j B_{ij} \psi_{ij}(\mathbf{x}, z) \quad (\text{I.3.21})$$

La vitesse, connue en $z = \eta(\mathbf{x}, t)$, nous fournit par factorisation LU ou méthode GMRES les coefficients B_{ij} qui servent ensuite à calculer la vitesse en n'importe quel z suivant la méthode décrite précédemment (où celles qui seront décrites par la suite). Un exemple de ce phénomène est présenté dans la section I.3.2.5 sur la figure I.3.4 où est représenté l'évolution verticale de la vitesse horizontale sous une crête pour une houle régulière en utilisant comme variable de départ ϕ ou U .

I.3.2.3 Adaptation du “ H -operator”

On va s'appuyer ici sur les publications de Bateman [7], [8] & [9] où il développe un outil permettant le calcul des vitesses en tout point du fluide dans son modèle utilisant un “Dirichlet-Neumann Operator”, DNO, dans sa version accélérée. Il est à noter que, comme mentionné par Le Touzé [80] dans sa thèse ou d'une manière plus développée par Schäffer [107] et [108], cette méthode DNO accélérée est équivalente au modèle HOS qui est utilisé ici. Il paraissait donc intéressant de pouvoir reprendre les travaux de Bateman afin de les adapter au modèle HOS.

Cette méthode consiste en le remplacement de l'inversion matricielle décrite précédemment par une approximation pouvant être calculée beaucoup plus rapidement. Il est à noter que l'approximation est souvent plus précise que la factorisation LU (grâce à une réduction des arrondis numériques), même si formellement l'inversion matricielle est exacte (voir Bateman [7] pour plus de détails concernant ce point).

Comme on l'a rappelé en I.3.2.1, on cherche à exprimer une quantité ξ sous forme de modes pour avoir accès aux valeurs de cette quantité dans tout le volume d'étude. On cherche donc les $A_{ij}^\xi(t)$ tel que :

$$\xi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^\xi(t) \psi_{ij}(\mathbf{x}, z) \quad \text{partout dans D}$$

Pour déterminer ces coefficients, on va chercher à se placer en $z = 0$ pour obtenir :

$$\xi(\mathbf{x}, 0, t) = \sum_i \sum_j A_{ij}^\xi(t) \psi_{ij}(\mathbf{x}, 0) \quad (\text{I.3.22})$$

avec, en gardant l'exemple du domaine ouvert en profondeur infinie :

$$\psi_{ij}(\mathbf{x}, 0) = \exp(i\mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x})$$

Ceci permet une grande simplification de la résolution. En effet, en passant dans le domaine de Fourier, on obtient directement :

$$A_{ij}^\xi(t) = \mathcal{F}\mathcal{F}\mathcal{T}_{xy}(\xi(\mathbf{x}, 0, t))$$

ce qui permet l'utilisation des FFTs, très efficaces.

On va maintenant exposer la méthode d'obtention de $\xi(\mathbf{x}, z = 0, t)$, connaissant $\xi(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$. Tout d'abord, on reprend le développement en série de Taylor utilisé dans le noyau HOS, en notant ξ_r la quantité reconstruite (ξ étant la quantité initiale, connue) :

$$\xi_r(\mathbf{x}, \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \xi_r}{\partial z^n}(\mathbf{x}, 0, t)$$

On introduit ensuite, toujours en suivant un développement HOS classique le développement formel des quantités inconnues :

$$\xi_r(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_r^{(m)}(\mathbf{x}, z, t)$$

Ce qui va nous donner pour ξ_r pris en $z = \eta$:

$$\xi_r(\mathbf{x}, \eta, t) = \xi_r^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta \frac{\partial \xi_r^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \dots + \xi_r^{(2)}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta \frac{\partial \xi_r^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \dots \quad (\text{I.3.23})$$

On peut alors exprimer un processus itératif pour résoudre une telle equation avec la formulation triangulaire suivante :

$$\begin{aligned} \xi_r^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \xi(\mathbf{x}, \eta, t) \\ \xi_r^{(2)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \xi_r^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) \\ \xi_r^{(3)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \xi_r^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_r^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) \\ \xi_r^{(4)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \xi_r^{(3)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_r^{(2)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) - \frac{\eta^3}{3!} \frac{\partial^3 \xi_r^{(1)}}{\partial z^3}(\mathbf{x}, 0, t) \\ &\dots \\ \xi_r^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k \xi_r^{(m-k)}}{\partial z^k}(\mathbf{x}, 0, t) \end{aligned} \quad (\text{I.3.24})$$

On a alors accès à la quantité recherchée :

$$\xi_r(\mathbf{x}, 0, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_r^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t)$$

On a décrit ici la méthode générale permettant d'accéder itérativement à une quantité en $z = 0$, cette dernière étant connue en $z = \eta$. Le processus est très similaire à celui employé dans la méthode HOS pour obtenir la vitesse verticale W en $z = \eta$. On peut ainsi aisément reconstruire la quantité dans tout le domaine fluide D .

Cependant, Bateman [9] explique que cette méthode est très précise pour résoudre les problèmes "courants" mais que l'opérateur H peut devenir divergent lorsqu'il est appliqué à un problème faisant intervenir des échelles de longueur très différentes ou bien pour des champs de vagues fortement cambrés.

Pour palier à ce problème, il a été développé un autre opérateur, appelé H_2 . L'intuition de ce nouvel opérateur vient aisément : en effet, le processus précédent transforme en une seule étape les valeurs de $z = \eta$ en $z = 0$; il paraît donc judicieux d'effectuer cette transition en plusieurs étapes, ce qui sera fait avec l'opérateur H_2 .

I.3.2.4 Adaptation du “ H_2 -operator”

On va donc maintenant transformer la valeur d’une quantité connue en $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ vers sa valeur en $z = \eta_2(\mathbf{x}, t)$. Ce nouveau niveau est défini simplement en appliquant un facteur de réduction à la surface libre initiale, i.e. $\eta_2(\mathbf{x}, t) = \alpha \eta(\mathbf{x}, t)$ avec $\alpha \in [0, 1]$ (voir figure I.3.3)

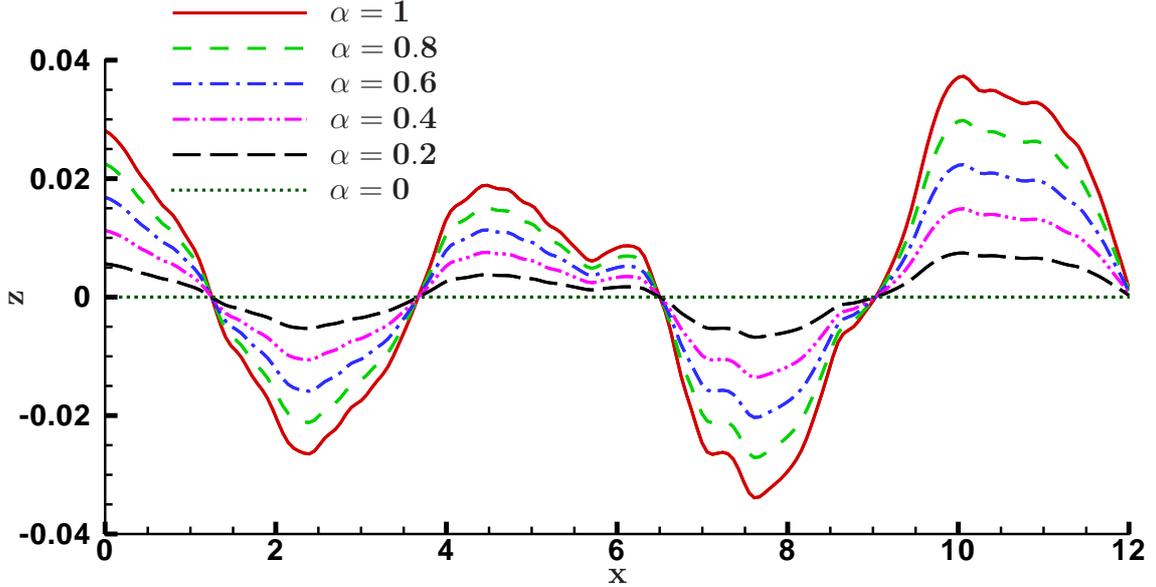


FIG. I.3.3 – Surfaces de calcul successives avec l’opérateur H_2

On écrit le développement en série de Taylor pour cette nouvelle valeur de z :

$$\xi_r(\mathbf{x}, \eta_2, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta_2^k}{k!} \frac{\partial^k \xi_r}{\partial z^k}(\mathbf{x}, 0, t)$$

On va donc toujours avoir la formulation triangulaire précédente, à savoir :

$$\begin{aligned} \xi_r^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \xi_r(\mathbf{x}, \eta, t) \\ \xi_r^{(2)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \xi_r^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) \\ \xi_r^{(3)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \xi_r^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_r^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) \\ \xi_r^{(4)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \xi_r^{(3)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) - \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_r^{(2)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) - \frac{\eta^3}{3!} \frac{\partial^3 \xi_r^{(1)}}{\partial z^3}(\mathbf{x}, 0, t) \\ &\dots \\ \xi_r^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k \xi_r^{(m-k)}}{\partial z^k}(\mathbf{x}, 0, t) \end{aligned} \quad (\text{I.3.25})$$

Et on construit un deuxième triangle pour obtenir la quantité $\xi_r(\mathbf{x}, \eta_2, t)$ recherchée :

$$\begin{aligned}
 \xi_r^{(1)}(\mathbf{x}, \eta_2, t) &= \xi_r^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) \\
 \xi_r^{(2)}(\mathbf{x}, \eta_2, t) &= \xi_r^{(2)}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta_2 \frac{\partial \xi_r^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) \\
 \xi_r^{(3)}(\mathbf{x}, \eta_2, t) &= \xi_r^{(3)}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta_2 \frac{\partial \xi_r^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \frac{\eta_2^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_r^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) \\
 \xi_r^{(4)}(\mathbf{x}, \eta_2, t) &= \xi_r^{(4)}(\mathbf{x}, 0, t) + \eta_2 \frac{\partial \xi_r^{(3)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) + \frac{\eta_2^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_r^{(2)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) + \frac{\eta_2^3}{3!} \frac{\partial^3 \xi_r^{(1)}}{\partial z^3}(\mathbf{x}, 0, t) \quad (\text{I.3.26}) \\
 &\dots \\
 \xi_r^{(m)}(\mathbf{x}, \eta_2, t) &= \xi_r^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta_2^{k+1}}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} \xi_r^{(m-1-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x}, 0, t)
 \end{aligned}$$

Et on va donc avoir :

$$\xi_r(\mathbf{x}, \eta_2, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_r^{(m)}(\mathbf{x}, \eta_2, t)$$

On va donc exécuter itérativement ce calcul pour transformer les valeur de $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ à $z = 0$ en un certain nombre de passes P (on verra dans la section suivante qu'en général, 10 niveaux sont suffisants pour atteindre une très bonne précision). La dernière itération entre $z = \eta_p(\mathbf{x}, t)$ et $z = 0$ sera effectuée par l'opérateur H et on aura alors la possibilité de calculer la dépendance en z de la quantité recherchée.

I.3.2.5 Validations

On présente dans cette section différentes validations des opérateurs proposés précédemment

Quantité à reconstruire ?

On va tout d'abord illustrer le phénomène d'amplification des erreurs numériques lors de la dérivation que l'on a évoqué précédemment et mis en évidence par Vijfvinkel [125]. La figure I.3.4 représente le profil vertical de la vitesse horizontale sous une crête pour une houle régulière en utilisant comme variable de départ $\phi(\mathbf{x}, \eta, t)$ ou $U(\mathbf{x}, \eta, t)$.

Le cas traité est une houle régulière assez cambrée ($ka = 0.30$) qui est propagée dans le domaine de calcul. On calcule ensuite à un instant t donné le profil de vitesse sous la crête en utilisant comme valeur de départ $\phi^s(\mathbf{x}, t)$ ou $U(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$. Pour le premier cas, on recalcule le potentiel dans le domaine fluide et la vitesse est évaluée par $U = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et dans le deuxième cas on évalue directement U dans tout le domaine fluide. Ces 2 calculs sont alors comparés à la solution complètement non-linéaire de référence qui est issue de Rienecker & Fenton [106]. Cette méthode nous permet d'obtenir le profil permanent de la houle régulière suivie dans son mouvement, à la cambrure choisie.

On observe alors clairement que le calcul utilisant le potentiel de surface libre en variable d'entrée va diverger dans une zone proche de la surface libre alors que le calcul utilisant directement la vitesse à la surface libre en entrée se comporte très bien. Il faut noter que ce problème n'apparaît que dans certains cas faisant intervenir des longueurs d'ondes différentes (typiquement en houle irrégulière) ou alors lorsque le champ de vague est fortement cambré comme ici. L'explication d'un tel phénomène est, comme mentionné dans la section précédente,

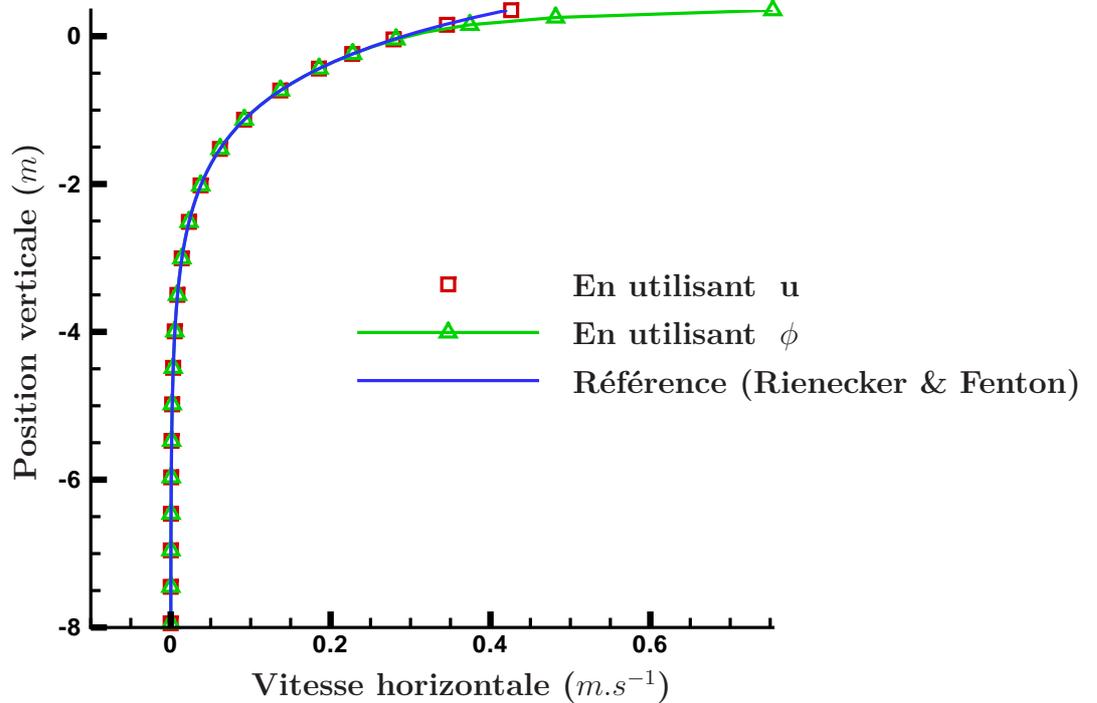


FIG. I.3.4 – Influence de la condition initiale dans le calcul de vitesse pour une houle régulière cambrée $ka = 0.30$.

que les petites erreurs numériques sur les hautes fréquences sont amplifiées par la dérivation. Les résultats présentés par la suite seront donc effectués en prenant la variable d'intérêt au niveau de la surface libre comme variable de départ pour les extrapolations à l'intérieur du domaine fluide D .

Opérateur H

On compare maintenant l'opérateur H et l'opérateur H_2 . Les différents tests sont, comme précédemment, effectués sur des houles régulières. En effet, on connaît alors une solution non-linéaire en régime établi, par Rienecker & Fenton [106] qui sera notre solution de référence. On effectue alors des premiers tests afin de valider notre opérateur H , sur des houles de différentes cambrures. La figure I.3.5 présente les résultats obtenus pour des cambrures $ka = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40$. Il faut noter qu'ici le processus itératif de H est stoppé à un ordre fixe qu'on prendra pour l'instant égal à l'ordre HOS M utilisé dans le calcul : $\xi(\mathbf{x}, 0, t) = \sum_{m=0}^M \xi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t)$. Mais, les deux ordres sont, à priori, complètement indépendants ce point étant traité par la suite.

On retrouve ici les conclusions formulées par Bateman [7] concernant l'opérateur H , à savoir que ce dernier fournit de très bon résultats pour des cambrures modérées. Les deux premiers résultats présentés sur la figure I.3.5, correspondant à des cambrures $ka = 0.10$ et $ka = 0.20$, sont en accord quasiment parfait avec la solution de référence. Si on regarde l'erreur d'évaluation de la vitesse horizontale en $z = \eta(\mathbf{x}, t)$, i.e. on compare la valeur originelle donnée en entrée

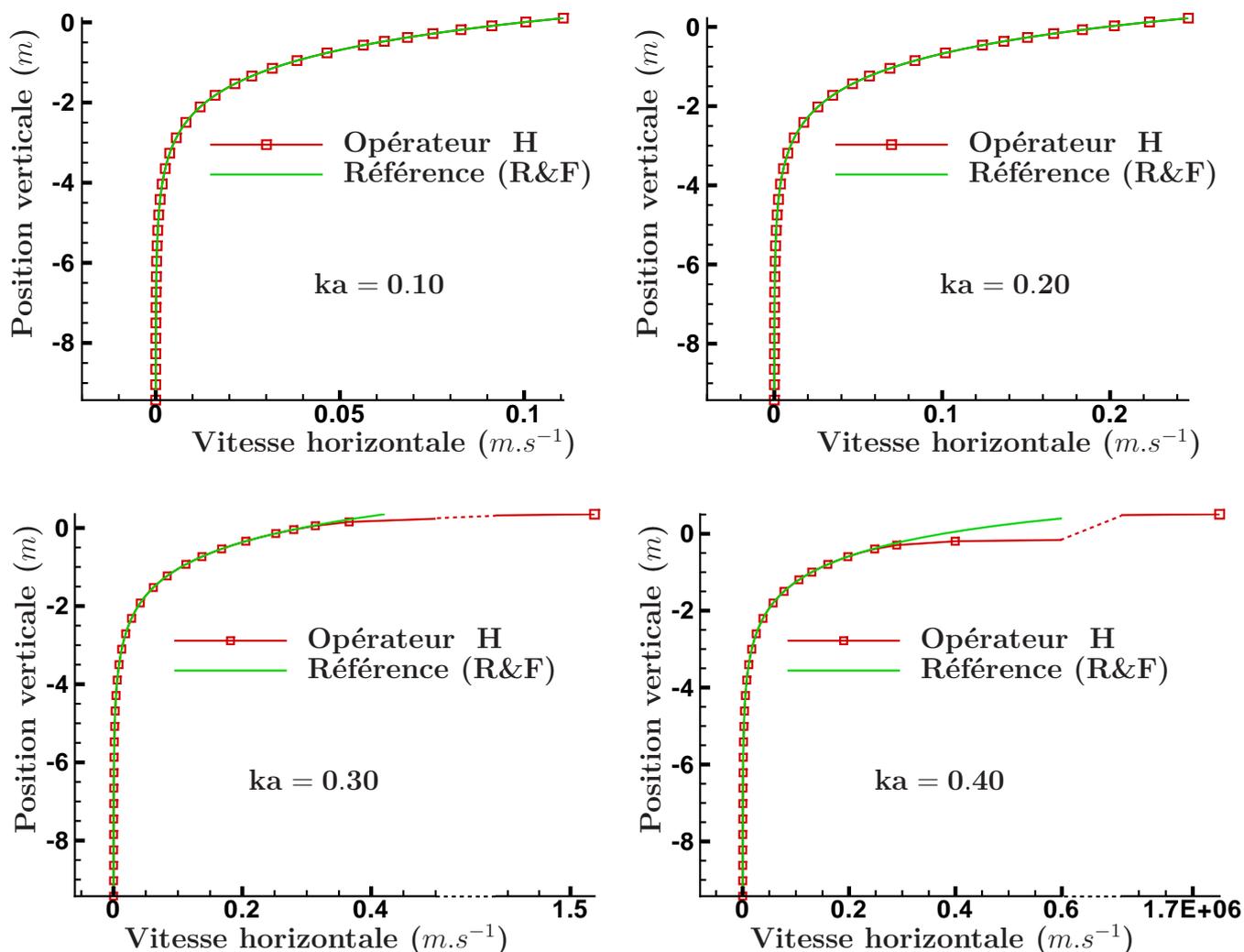


FIG. I.3.5 – Profil vertical de la vitesse horizontale sous une crête, obtenu avec l'opérateur H comparé à la solution Rienecker & Fenton pour $ka = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40$.

avec sa reconstruction en ce même point, on obtient une erreur relative: $\epsilon_{0.10} = 1.5 \cdot 10^{-8}$ et $\epsilon_{0.20} = 1.7 \cdot 10^{-4}$. Ces valeurs sont extrêmement faibles en se rappelant de plus que c'est en $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ que l'erreur maximale sera observée sur la variable reconstruite.

Cependant, lorsque les cambrures deviennent plus importantes (courbes $ka = 0.30$ et $ka = 0.40$), on s'aperçoit que l'opérateur H atteint sa limite de validité. Proche de la surface libre, la reconstruction de la vitesse horizontale devient inexacte (on notera que sur ces deux courbes, l'abscisse est découpée en deux parties, la scission étant matérialisée par les pointillés). Ce phénomène s'amplifie en même temps que la cambrure avec dans le cas d'une houle très fortement cambrée $ka = 0.4$ une divergence très rapide près de la surface libre.

Malgré tout, il est à noter que dans ces deux derniers cas où la vitesse proche de la surface libre est erronée, l'évolution verticale de celle-ci est correcte si on se place à une profondeur suffisante, typiquement de l'ordre de $\frac{\lambda}{4}$ avec λ la longueur d'onde. Ceci peut être très intéressant dans le cas où seules des informations à une certaine profondeur sont nécessaires. Dans ce cas

là, l'opérateur H est suffisant pour évaluer le profil de vitesse quelle que soit la cambrure rencontrée.

On va s'intéresser maintenant à l'opérateur H_2 pour voir si il améliore les résultats obtenus avec H , comme indiqué dans Bateman [7].

Opérateur H_2

On reprend les tests effectués précédemment, en se limitant aux cas fortement cambrés (les autres ne posant pas de difficulté), $ka = 0.30$, $ka = 0.40$. On choisit comme précédemment un ordre dans l'approximation égal à l'ordre HOS M utilisé dans le calcul. On choisit ensuite le nombre de passes P que l'on va faire (une passe signifie le passage de η_p à η_{p+1} avec $\eta_{p+1} = \alpha \eta_p$), ici $P = 25$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure I.3.6.

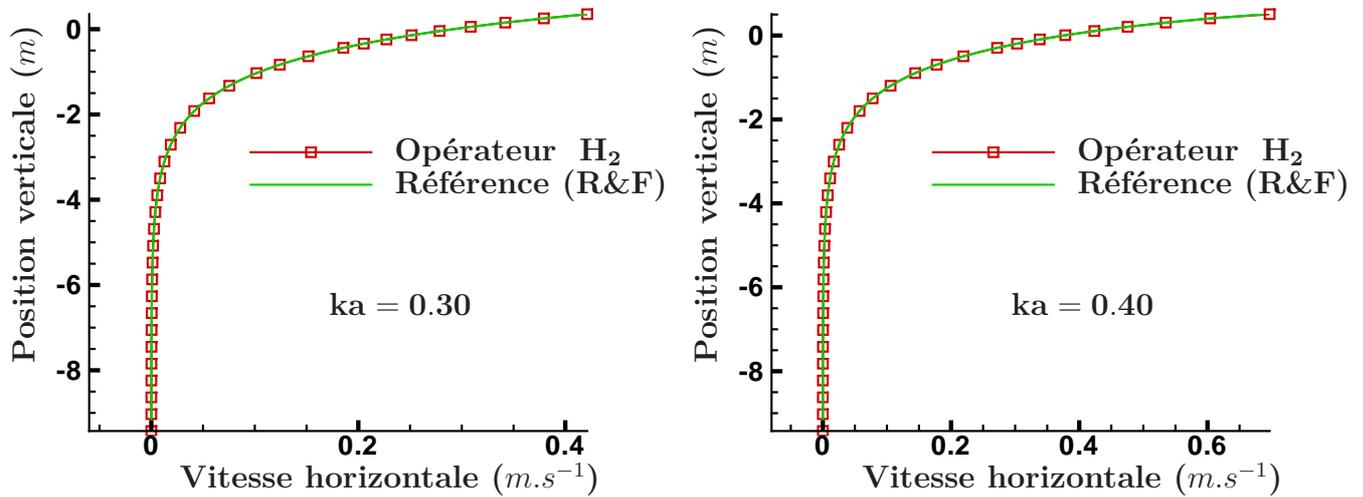


FIG. I.3.6 – Profil vertical de la vitesse horizontale sous une crête, obtenu avec l'opérateur H_2 comparé à la solution Rienecker & Fenton pour $ka = 0.30, 0.40$.

On remarque ainsi qu'avec ce nouvel opérateur H_2 , les problèmes rencontrés avec H sont résolus, à savoir que le calcul ne diverge pas pour les fortes cambrures. Ainsi, on a encore un accord presque parfait avec la solution de référence pour les 2 cas les plus cambrés. L'évaluation de l'erreur sur la vitesse horizontale au niveau de la surface libre nous donne cette fois-ci : $\epsilon_{0.30} = 6.9 \cdot 10^{-4}$ et $\epsilon_{0.40} = 2.8 \cdot 10^{-2}$. Ainsi, avec les choix spécifiés de l'ordre de la procédure H_2 (qu'on appellera M_{H_2}) ainsi que du nombre de passes effectuées P on obtient des résultats très satisfaisants.

Il semble maintenant intéressant de mesurer l'influence de ces deux paramètres M_{H_2} et P sur la qualité du résultat obtenu. La figure I.3.7 présente la convergence de l'évaluation de la vitesse en fonction de ces deux paramètres. On calcule comme précédemment cette erreur relative d'évaluation de la vitesse au niveau de la surface libre, ϵ_v , pour chacun des couples (M_{H_2}, P) . Le "maillage" en pointillés représente les calculs effectués (i.e. (M_{H_2}, P) entiers). Il faut indiquer que les niveaux représentent le logarithme de ϵ_v afin de faciliter la lecture de la figure.

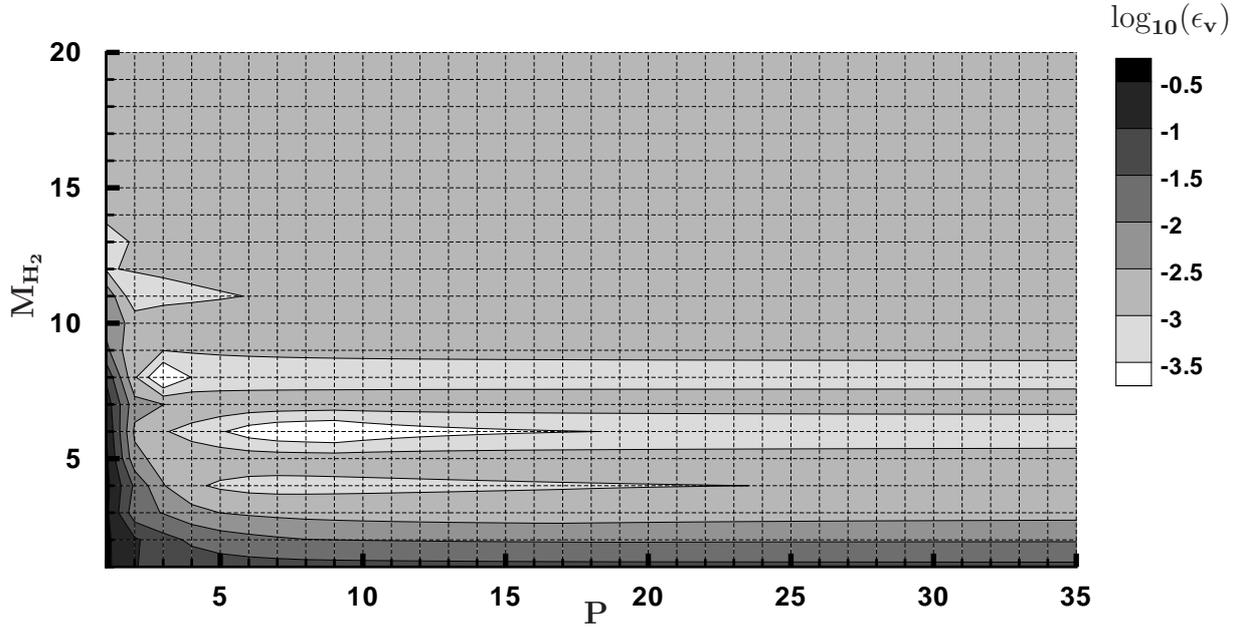


FIG. I.3.7 – Convergence de la reconstruction de la vitesse sur la surface libre pour le cas $ka = 0.30$.

On observe sur cette courbe la convergence très rapide du calcul de vitesse en fonction de chacun des paramètres M_{H_2} et P , les zones sombres correspondant à l'erreur la plus importante. La convergence optimale sur P est tout de même dépendante de M_{H_2} , celui-ci devant être au moins égal à 3 dans ce cas. Il est à noter que le cas $P = 1$ correspond en fait à l'opérateur H : le passage entre $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ et $z = 0$ se fait en 1 passe. On observe alors, que pour ce cas assez cambré ($ka = 0.30$), il est possible d'obtenir de très bons résultats, y compris avec l'opérateur H en augmentant l'ordre de la méthode M_{H_2} . On obtient également assez rapidement (dès $P = 5$, $M_{H_2} = 5$) des erreurs très faibles avec un minimum relevé en $P = 3$ et $M_{H_2} = 8$. Un comportement particulier semble être observé pour certains valeurs de M_{H_2} (4, 6, 8) où l'erreur est plus faible qu'ailleurs. Cependant, une fois ces valeurs dépassées, on atteint un palier au niveau duquel l'erreur n'évolue plus du tout, égale à $\simeq 10^{-3}$ (afin de faciliter la lecture tous les cas de calculs envisagés ne sont pas représentés mais des essais jusqu'à $P = 200$, $M_{H_2} = 50$ ont été menés). Le point important est qu'une fois le palier atteint (la grande zone uniformément grise sur la figure), cette erreur ne décroît plus. Une erreur résiduelle existe donc qui ne peut être éliminée avec cette méthode. On évoquera dans le paragraphe suivant un moyen d'éliminer ce résidu. Cependant, cette méthode reste très précise dès lors que l'on choisit les paramètres de façon adéquate (le résidu étant très faible).

On va maintenant s'intéresser au cas le plus cambré, $ka = 0.40$, dont les résultats sont présentés sur la figure I.3.8.

Il faut tout d'abord remarquer, afin de comparer les résultats avec la figure précédente, que les niveaux de contour ont été changés. En effet, les erreurs observées sont ici très supérieures à celles du cas $ka = 0.30$. En particulier, proche de $M_{H_2} = 1$ et $P = 1$ l'évaluation est

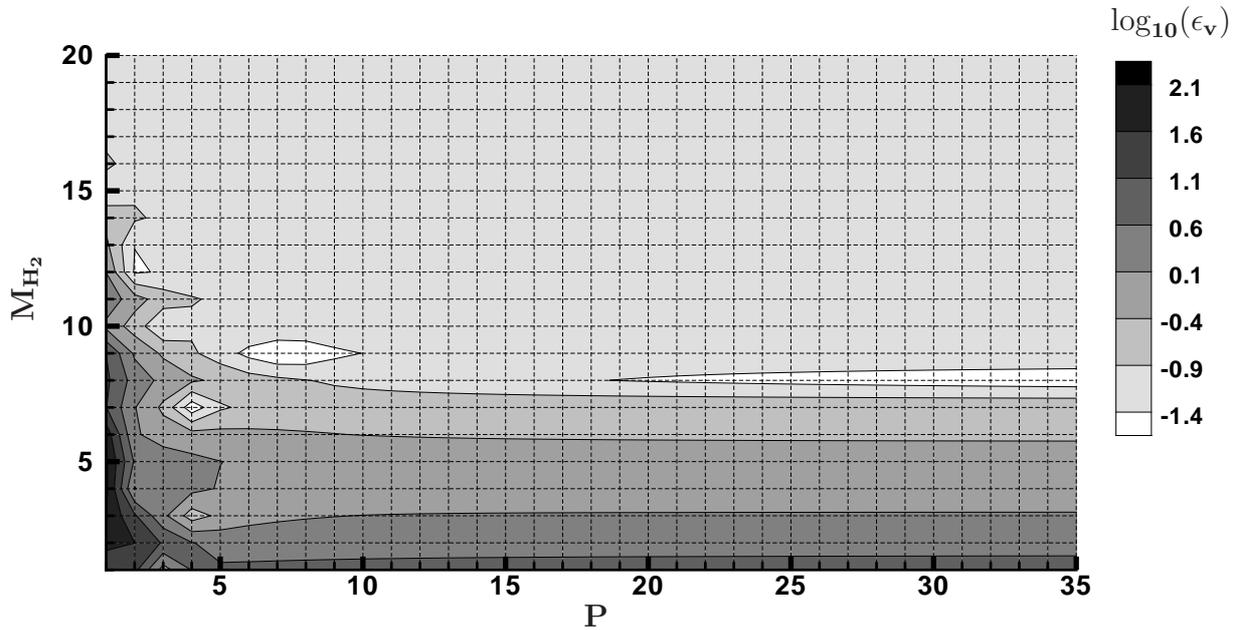


FIG. I.3.8 – Convergence de la reconstruction de la vitesse sur la surface libre pour le cas $ka = 0.40$.

très mauvaise avec un maximum $\epsilon_v \simeq 1.7 \cdot 10^2$ qui indique bien la difficulté que représente ce calcul. Cependant, on remarque, comme précédemment, une convergence assez rapide vers un nouveau palier où l’erreur d’évaluation de la vitesse au niveau de la surface libre est assez faible ($\epsilon_v \simeq 5.6 \cdot 10^{-2}$). Il est alors apparu un point assez important grâce à cette courbe de convergence : il existe une ligne dans cette figure (ici en prenant $P > 15$) où l’erreur est plus faible qu’ailleurs (qu’on repère aisément, c’est la partie la plus claire sur la courbe, à droite de la figure). Il est intéressant d’indiquer que les tests effectués en augmentant P jusqu’à 200 confirment le comportement particulier de cette ligne. En particulier, cette erreur est inférieure à la valeur du palier observé. Or, la particularité de cette ligne est que M_{H_2} est égal à la valeur de M prise lors du calcul HOS en lui-même. Différents tests effectués en modifiant la valeur de M dans le calcul HOS nous ont confirmé ce lien étroit entre la valeur de M_{H_2} “optimale” et la valeur de M dans le calcul. Il faut tout de même avoir une valeur de M convergée pour le calcul pour pouvoir l’utiliser en tant que M_{H_2} . On peut se rappeler que ce comportement particulier apparaissait également pour le cas précédent $ka = 0.30$ mais de façon moins explicite. Ainsi, ce paramètre que l’on pensait au départ indépendant du calcul HOS effectué ne l’est pas. En effet, même si les procédures utilisées pour le calcul de W dans la méthode HOS et celle du calcul des quantités dans tout le domaine (à partir de leur valeurs connues sur la surface libre) sont très semblables, le lien n’apparaissait pas de façon évidente.

Ainsi il existe une valeur optimale de M_{H_2} , qui est M , alors que celle de P est à prendre en fonction du cas de houle rencontré. Au vu du cas-test présenté avec une très forte cambrure $ka = 0.40$, on peut penser que $P = 20$ est suffisant pour la majorité des calculs à effectuer.

Itérations non-linéaires

En observant le fait que l'erreur sur le calcul des variables à l'intérieur du domaine D ne convergeait pas vers 0, l'idée d'effectuer des itérations non-linéaires sur l'évaluation de ces quantités a émergé afin d'améliorer éventuellement la précision si besoin est. On entend par itération non-linéaire un ajustement de la variable d'entrée ξ (i.e. la quantité au niveau de la surface libre $z = \eta(\mathbf{x}, t)$) avec l'erreur entre cette valeur connue et la valeur de la quantité reconstruite en ce point ξ_r . On évalue donc l'erreur absolue :

$$\epsilon_\xi = \xi(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t) - \xi_r(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$$

Dès lors, on effectue une correction dans la méthode de calcul type H_2 en utilisant en variable d'entrée cette fois-ci : $\xi + \epsilon_\xi$ au lieu de ξ .

On va présenter des résultats avec le cas-test précédent, $ka = 0.40$. On choisit $M_{H_2} = M = 8$ et $P = 15$ et on regarde la convergence en fonction du nombre d'itérations effectuées. Les résultats sont présentés sur la figure I.3.9.

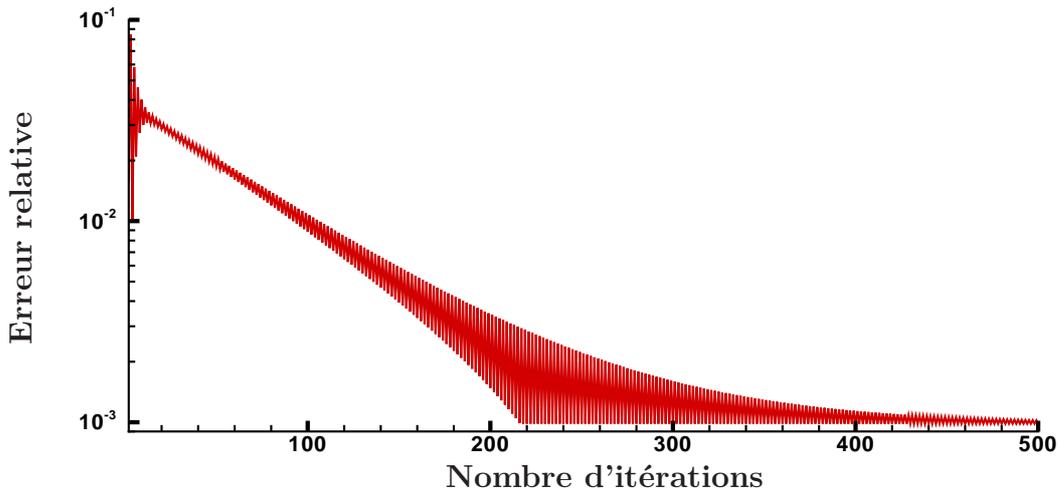


FIG. I.3.9 – Convergence avec des itérations non-linéaires de l'évaluation de la vitesse pour le cas $ka = 0.40$.

L'erreur est présentée ici en échelle logarithmique afin d'aider à la lecture de la figure. On remarque tout d'abord que le processus semble très bien converger dans une première phase (jusqu'à un nombre d'itérations $\simeq 220$). Mais ensuite, l'erreur ne décroît plus, on observe plus qu'une diminution de l'amplitude des oscillations de l'erreur. On a donc une saturation du processus (des essais menés jusqu'à 10000 itérations confirment ces conclusions) avec une erreur résiduelle valant ici $9.8 \cdot 10^{-4}$. L'erreur d'évaluation est donc réduite d'un rapport environ 40 mais n'est pas complètement éliminée. De plus, il est apparu que les grandes oscillations au départ peuvent devenir instables en fonction de la qualité de l'évaluation sans itération. C'est à dire que le processus peut diverger dans certains cas et donc ne pas apporter satisfaction. Ainsi, si on a besoin d'une précision donnée sur le résultat, il faut rester prudent sur ce processus qui peut poser problème dans certains cas très cambrés.

Ainsi, même si les résultats sont prometteurs, il faudra sans doute, si on veut utiliser de façon répétée ce processus d'itérations non-linéaires recourir à des méthodes plus évoluées qu'une simple correction au premier ordre de la variable d'entrée. Ensuite, tout dépend de la précision voulue dans la reconstruction de la variable considérée proche de la surface libre. En effet il faut rappeler qu'on s'intéresse ici à la vitesse au niveau de la surface libre pour former nos erreurs cibles. Or, c'est à cet endroit que la précision est la plus faible dans la reconstruction. Il suffit de s'éloigner un peu de la surface libre pour que les erreurs deviennent négligeables . . .

Pour conclure, on a présenté dans cette partie les principales améliorations apportées au modèle. Ces dernières ont d'abord consisté en une nouvelle approche pour l'avance en temps avec une intégration analytique de la partie linéaire des CSL. Ceci permet des gains importants en temps CPU à précision constante. Des cas de calcul classiques (propagation de houles régulières) montrent un temps de calcul divisé par 3 avec cette nouvelle formulation. De la même manière, à pas de temps fixe, cela permet une précision améliorée par rapport au schéma d'avance en temps initial. Ensuite, un moyen efficace de calcul des quantités dans le domaine fluide est proposé. Il se base sur le travail de Bateman [7] qui a développé ce genre d'outil pour un modèle DNO. L'adaptation au modèle HOS a été effectuée en remarquant que les approches DNO et HOS sont équivalentes (seul le formalisme est différent). La méthode de calcul a été validée avec succès sur différents cas de houle plus ou moins cambrés. Ces améliorations ont fait l'objet d'une présentation en congrès au *20th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Ducroz et al. [35]. Ceci ouvre une large gamme d'applications comme on le verra dans le chapitre II.3 et également dans la dernière partie IV.

Deuxième partie

Le bassin de houle numérique

Table des matières

Introduction	57
II.1 Spécificités du problème	61
II.1.1 Problème de la génération de la houle	61
II.1.1.1 Modélisation du batteur	61
II.1.1.2 Le potentiel additionnel	62
II.1.2 Rappel des caractéristiques	65
II.1.2.1 Absorption	65
II.1.2.2 Rampe en temps	65
II.1.2.3 Validations	65
II.2 Amélioration de la génération	67
II.2.1 Principe de l'amélioration	67
II.2.1.1 Développement en ordres de la condition sur le batteur	68
II.2.1.2 Développement en ordre des CSL	69
II.2.2 Batteur 2 ^{ème} ordre: <i>HOST-wm2</i>	70
II.2.3 Batteur 3 ^{ème} ordre: <i>HOST-wm3</i>	72
II.2.4 Vers le batteur non-linéaire?	73
II.2.4.1 Résolution	73
II.2.4.2 Avance en temps de la condition batteur	75
II.3 Validations - Résultats	79
II.3.1 Houle régulière 2D	79
II.3.1.1 Élévation de surface libre	79
II.3.1.2 Conservation du volume	82
II.3.2 Vague focalisée 2D dans une houle irrégulière	86
II.3.2.1 Expériences	86
II.3.2.2 Élévation de surface libre	87
II.3.2.3 Influence des non-linéarités	90
II.3.2.4 Pression	91
II.3.2.5 Gradients de pression	94

Introduction

Cette partie va s'intéresser à la simulation d'un bassin de houle complet, incluant le dispositif de génération ainsi que la zone d'absorption. L'objectif est de modéliser fidèlement les bassins de houle tels celui de l'ECN. Le modèle HOS a été initialement développé en ce sens lors des thèses de D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13]. Le bassin de houle est un outil très important dans le cadre d'études hydrodynamiques et constitue un élément essentiel au sein du LMF. En effet, un tel dispositif expérimental permet d'obtenir nombre d'informations lors d'études hydrodynamiques, notamment pour la conception de navires, de structures offshore ou autre. Des essais sur modèles réduits peuvent être réalisés afin d'étudier la tenue à la mer de tels systèmes ainsi que leur comportement sur houle extrême par exemple. Des études de dimensionnement peuvent aussi être menées si nécessaire avec l'instrumentation adéquate. De plus, la possibilité de contrôler totalement le champ de vagues utilisé dans ces essais présente des intérêts évidents (même si le fait d'être en milieu confiné ajoute en contrepartie certaines difficultés). Ceci permet d'étudier plus facilement et plus précisément la houle seule afin d'améliorer la compréhension de ses mécanismes par exemple. De la même manière pour les problèmes d'interaction houle-structure, si on compare à des essais en mer réelle, beaucoup plus difficiles (voire impossibles) à mettre en place, les coûts seront forcément plus élevés de par l'obligation de travailler à l'échelle 1.

Ainsi, l'objectif en vue dans le développement d'un bassin de houle numérique par méthode spectrale (NWT pour Numerical Wave Tank) est double :

- Améliorer la compréhension de tous les phénomènes mis en jeu grâce à des simulations numériques de qualité, permettant notamment de qualifier bon nombre de paramètres expérimentaux dans les essais. La thèse de F. Bonnefoy [13] a été menée en ce sens : «Pour cela, le développement d'outils d'aide à la compréhension et d'outils d'analyse des phénomènes dans le bassin a constitué un axe majeur du travail effectué, mettant en jeu à la fois des approches théoriques (analytiques), numériques (simulations) et expérimentales. Ainsi, l'utilisation initialement prévue de modèles numériques non-linéaires instationnaires, qui s'est transformée en participation à la mise au point, s'est révélée très riche d'enseignements à la fois pour l'appréhension des techniques de génération et pour celle des phénomènes physiques non-linéaires associés.»
- Avec un modèle numérique efficace permettant la mise en place de reproductions fidèles très rapidement, on peut imaginer de remplacer certaines expériences. Certains phénomènes ne sont bien sûr pas pris en compte (déferlement par exemple) et l'intérêt des dispositifs expérimentaux est loin d'être menacé par les simulations numériques mais on peut tout du moins limiter de façon importante le nombre d'essais à réaliser pour des cas de houle classiques (2D ou 3D), et donc par la même le coût de leur mise en œuvre.

Avant de poursuivre, il semble intéressant d'indiquer les autres NWT existants. Un certain

nombre ont été mentionnés dans l'introduction de la partie I précédente. On pense par exemple au modèle BEM amélioré de Fochesato et al. [49], qui permet, en imposant le mouvement du batteur sur une paroi du domaine, de générer la houle. On a présenté également le modèle pseudo-spectral utilisant la σ -transform, Turnbull et al. [124] ont proposé une application aux NWT en imposant sur une frontière la vitesse du fluide, issue de la théorie linéaire. Le modèle original mixte pseudo-spectral/intégrale de Fructus et al. [52], permet également la modélisation d'un bassin de houle : voir Clamond et al. [26] pour la prise en compte de la génération qui se fait par l'application d'un patch de pression adéquat sur la surface libre. Pour une revue des différents NWT formulés de façon intégrale existants, on se réfère à Kim et al. [77] par exemple.

On peut également mentionner quelques études récentes de bassins de houle numériques, par exemple Park et al. [101] présentent un NWT résolvant les équations de Navier-Stokes complètes par différences finies à l'aide d'une méthode Marker-And-Cell modifiée. Ceci permet donc d'avoir un NWT résolu en tenant compte de la viscosité du fluide et éventuellement du déferlement, qui, adjoint à une méthode de marker-density function permet de vérifier le caractère complètement non-linéaire des CSL. La génération est quant à elle réalisée par une condition de flux sur une frontière du domaine (flux calculé en théorie linéaire ou 2nd ordre). Des approches potentielles avec résolution en éléments finis ont également été développées. On se réfère par exemple à Wu et al. [129] et Ma et al. [88], [89] pour les versions 3D. On peut mettre en lumière également l'approche analytique de la modélisation instationnaire d'un bassin de houle développée par Lunéville [84]. Enfin, on indique dans ces bassins de houle numériques celui développé au LMF récemment par Bonnefoy et al. [15], [16]. Dans ce modèle, dénommé SWEET (Spectral Wave Evolution in the ECN wave Tank), la résolution complète s'effectue au second ordre (résolution spectrale avec conditions aux limites étendues à cet ordre : CSL et conditions sur le générateur de vagues).

Pour résumer, on s'aperçoit que la résolution du problème du bassin de houle de façon non-linéaire et rapide n'existe pas. Les méthodes existantes proposent une génération simplifiée ou exhibent des temps de calcul prohibitifs. Or, lorsque l'on a des objectifs précis de type génie océanique dans un bassin de houle, on a besoin d'une part de la résolution précise du problème de la génération, et d'autre part de la prise en compte de toutes les longueurs d'ondes générées (notamment les plus petites) grâce à une discrétisation spatiale fine. On cherche donc à répondre à cette attente en développant un NWT précis et efficace.

La présente partie sera divisée en 3 chapitres distincts comme suit :

- Tout d'abord, on va rappeler les spécificités du problème de la modélisation d'un bassin de houle. En particulier, on s'intéressera aux méthodes de génération de houle pouvant être employées dans un modèle comme le nôtre. En effet, la formulation spectrale impose une géométrie fixe ce qui n'est à priori pas compatible avec la modélisation d'un batteur physique. On se réfère ici en particulier à Bonnefoy [13] pour de plus amples détails sur le développement de ce bassin de houle numérique.
- Ensuite, dans le deuxième chapitre on s'attachera plus en détail à la description de l'amélioration du processus de génération dans ce modèle qui représente l'apport original de cette thèse au modèle HOST (High-Order Spectral Tank) initialement développé par D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13]. Deux nouveaux modèles sont proposés, respectivement *HOST-wm2* et *HOST-wm3* dans lesquels la résolution du problème de génération se verra étendu au 2^{ème} et au 3^{ème} ordre de non-linéarités (la surface libre demeurant, elle, complètement non-linéaire). Ensuite, des pistes vers la génération complètement non-linéaire

seront données.

- Enfin, le troisième chapitre présentera différents cas de validations sur des houles régulières en 2D. Le comportement des nouveaux modèles développés précédemment (i.e. *HOST-wm2* et *HOST-wm3*) sera étudié. Des résultats sur une houle focalisée en 2D seront également présentés avec des comparaisons avec des résultats expérimentaux obtenus dans le bassin de houle de l'ECN.

Chapitre II.1

Spécificités du problème

Dans cette section, on s'intéresse à la simulation de la propagation et de la génération de vagues dans un bassin de houle. Ces derniers sont majoritairement rectangulaires, comme l'est celui de l'ECN. On choisira donc cette géométrie, un domaine rectangulaire *fermé*, *i.e.* avec des murs étant parfaitement réfléchissants (imperméables). On présentera ici les spécificités de la modélisation d'un bassin de houle: on s'intéresse en particulier au batteur permettant la génération de la houle. Sa prise en compte, basée sur l'introduction d'un potentiel additionnel, sera introduite. Ensuite, des rappels concernant, entre autres, la modélisation de la plage absorbante seront donnés. En effet, en vue de reproductions précises, ces deux éléments doivent être correctement décrits dans notre modèle.

II.1.1 Problème de la génération de la houle

Dans cette partie sera détaillé le problème de la génération de la houle. On simule un bassin de houle où le fluide est initialement au repos et des vagues sont générées par un batteur. La méthode utilisée pour la description du batteur physique est donnée en introduisant le concept de potentiel additionnel. Il est intéressant d'indiquer que D. Le Touzé [80] a proposé une autre méthode de génération par des doublets tournants situés à l'intérieur du domaine fluide. Cette méthode permet une génération complètement non-linéaire, mais le contrôle de ces singularités afin de modéliser une condition batteur réelle telle qu'on l'a dans le bassin physique est très complexe et on lui a donc préféré la méthode présentée par la suite.

II.1.1.1 Modélisation du batteur

On souhaite modéliser un batteur physique qui, de par son mouvement, génère des vagues dans le bassin. On dispose de deux types de batteur différents (voir figure II.1.1). Le batteur est situé près de la section $x = 0$ sur toute la largeur du bassin, $y = [0, L_y]$ et la figure représente une coupe à y constant du batteur. Le batteur est défini par l'équation $x = X(y, z, t)$. La condition sur le batteur sera une condition de glissement, équation (I.1.3), au niveau de sa position $x = X(y, z, t)$.

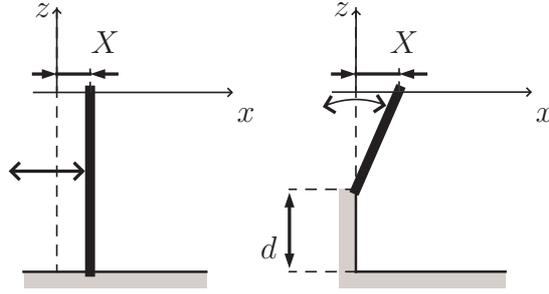


FIG. II.1.1 – Schéma de la forme verticale du batteur piston (à gauche) et volet (à droite)

La normale au batteur va être définie par $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial z} \end{pmatrix}$. La vitesse \mathbf{U} au niveau du batteur

est quant à elle définie par :

$$\mathbf{U} = \frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} X(y,z,t) \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \widetilde{\nabla}) \right) \begin{pmatrix} X(y,z,t) \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} + \mathbf{u}_v \cdot \nabla_v X \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix} \quad (\text{II.1.1})$$

avec ∇_v le gradient vertical défini par : $\nabla_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$.

On en déduit donc, avec $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial X}{\partial t}$ et $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \nabla_v X \cdot \nabla_v \phi$, que la condition sur le batteur s'écrit :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \nabla_v X \cdot \nabla_v \phi \quad \text{en } x = X(y,z,t) \quad (\text{II.1.2})$$

Le problème de la génération numérique de vagues va donc consister en la modélisation de cette équation non-linéaire (on observe comme dans le cas des CSL, des non-linéarités de position ainsi que des non-linéarités de structure). La prise en compte de cette condition aux limites supplémentaire n'est pas directe avec notre formulation spectrale et nécessite donc un traitement spécifique qui sera expliqué dans la section suivante qui introduit la notion de potentiel additionnel.

II.1.1.2 Le potentiel additionnel

Cette technique, proposée initialement par Agnon & Bingham [1], permet de générer de la houle en gardant une géométrie de domaine rectangulaire. En effet, comme vu auparavant (section I.1.2), la décomposition en série spectrale et l'efficacité de la résolution résident dans

la géométrie simple, parallélépipédique, du domaine de résolution. Or, typiquement, en génie océanique, on utilise un bassin de houle avec un batteur (volet dans le cas du bassin de l'ECN) permettant de générer les vagues. Or, comme on le voit sur la figure I.1.2, la géométrie du bassin réel change au cours du temps et n'est donc plus rectangulaire.

L'idée d'Agnon & Bingham [1] est alors séparer le problème complet pour ϕ (système d'équations (I.1.5)) en deux parties :

$$\phi = \phi_{spec} + \phi_{add}$$

Le potentiel qu'on appellera spectral ϕ_{spec} tiendra compte de l'évolution de la surface libre (équations (I.1.5a) à (I.1.5e)) et le potentiel dit additionnel ϕ_{add} du processus de génération (équations (I.1.5a) et (II.1.2)). Cette décomposition est rendue possible par le caractère linéaire de l'équation de Laplace (I.1.5a). Il faut préciser qu'Agnon & Bingham avaient développé cette méthode simplement dans le cas où ils pouvaient déterminer ϕ_{add} de façon analytique. L'extension proposée ici est donc de résoudre un problème propre à la génération de façon numérique (et non plus simplement analytiquement).

On va donc former un problème qu'on appellera additionnel traitant le problème de la génération de la houle (i.e. sans la propagation). Nous ne définissons pas, ni ne résolvons la surface libre dans ce problème là. Un second problème, traitant uniquement le problème de la propagation sera également écrit (avec, de ce fait, la condition homogène de Neumann sur la paroi $x = 0$). Les deux systèmes d'équations sont les suivants :

$$\phi_{add} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_{add} = 0 & \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi_{add}}{\partial y} = 0 & \text{en } y = 0, L_y \\ \frac{\partial \phi_{add}}{\partial x} = 0 & \text{en } x = L_x \\ \frac{\partial \phi_{add}}{\partial z} = 0 & \text{en } z = -h \\ \frac{\partial \phi_{add}}{\partial x} + \nabla_{\mathbf{v}} X \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \phi_{add} = \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial \phi_{spec}}{\partial x} - \nabla_{\mathbf{v}} X \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \phi_{spec} & \text{en } x = X(y, z, t) \end{array} \right.$$

$$\phi_{spec} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_{spec} = 0 & \text{dans } D \\ \frac{\partial \phi_{spec}}{\partial y} = 0 & \text{en } y = 0, L_y \\ \frac{\partial \phi_{spec}}{\partial x} = 0 & \text{en } x = L_x, 0 \\ \frac{\partial \phi_{spec}}{\partial z} = 0 & \text{en } z = -h \\ \text{CSL modifiées, cf. équation (II.1.4)} & \end{array} \right.$$

Le traitement de la condition sur le batteur va être effectuée de plusieurs manières. Tout d'abord celle-ci a été traitée de manière linéaire par D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13]. On appellera cette version *HOST-wm1* pour *HOS Tank wave maker 1^{er} ordre*. C'est à dire que cette

condition, équation (II.1.2), est développée en ordres (on suppose donc le déplacement batteur $X(y,z,t)$ faible devant la longueur d'onde). Dès lors, la condition batteur est exprimée sur la paroi fixe $x = 0$ et non plus en $x = X(y,z,t)$. Elle devient, si on note le déplacement au premier ordre $X^{(1)}$:

$$\frac{\partial \phi_{add}}{\partial x} = \frac{\partial X^{(1)}}{\partial t} \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{II.1.3})$$

D. Le Touzé [80] propose alors de définir une nouvelle géométrie de résolution pour ce problème additionnel afin de faciliter sa résolution. Dans ce nouveau domaine (voir figure II.1.2), dont la géométrie a été choisie pour une résolution efficace par méthode spectrale (cf.[80]), on détermine ϕ_{add} . Le domaine de résolution additionnel consiste en le bassin de houle initial, auquel est adjoint son antisymétrique par rapport au plan $z = z_b$ (z_b correspond au haut du volet), ce sont les deux parties noires sur la figures II.1.2. Ensuite, une surface de raccord est appliquée entre ces deux bassins. On arrive alors à un domaine auquel on a enlevé la surface libre comme on l'a vu précédemment et dans lequel on va résoudre une condition sur une paroi mobile, ici le batteur + son antisymétrique + la surface de raccord. Le problème additionnel devient donc très semblable à un problème de surface libre, mais renversé de 90° et où, de la même manière on résout des conditions limites sur une paroi mobile comme ici. Pour plus de détails on se réfère à D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13].

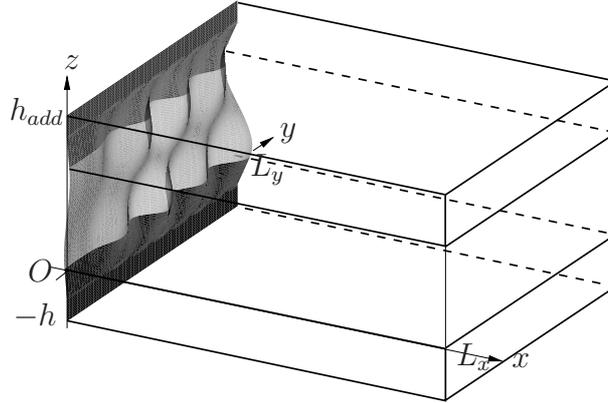


FIG. II.1.2 – Géométrie du domaine de résolution du problème additionnel

On réécrit nos CSL en prenant en compte la décomposition de ϕ . On note $W = \frac{\partial(\phi_{spec} + \phi_{add})}{\partial z}$ et $\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi_{spec}(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} = (1 + |\nabla \eta|^2) W - \nabla(\phi^s + \phi_{add}) \cdot \nabla \eta \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) W^2 \\ \quad - \nabla \phi^s \cdot \nabla \phi_{add} - \frac{1}{2} |\widetilde{\nabla} \phi_{add}|^2 - \frac{\partial \phi_{add}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (\text{II.1.4})$$

Les termes additionnels sont donc vus comme des termes de forçage dans ces CSL. Ils sont évalués indépendamment de la résolution HOS en elle-même comme vu précédemment. Cette première approche de prise en compte de la génération peut être améliorée comme on le verra dans le chapitre suivant II.2.

II.1.2 Rappel des caractéristiques du modèle *HOST-wm1*

II.1.2.1 Absorption

Il est intéressant de noter que la plage absorbante présente dans le bassin de l'ECN est également modélisée. Celle-ci est modélisée par l'ajout d'un terme dans la CDSL représentant une modification locale de la pression au niveau de la surface libre (appelé classiquement *patch de pression*): $P_a = \rho\nu(\mathbf{x})\widetilde{\nabla}\phi.\mathbf{n}$. La CDSL devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi^s}{\partial t} = & -g\eta - \frac{1}{2}|\nabla\phi^s|^2 + \frac{1}{2}(1 + |\nabla\eta|^2)W^2 \\ & - \nabla\phi^s.\nabla\phi_{add} - \frac{1}{2}|\widetilde{\nabla}\phi_{add}|^2 - \frac{\partial\phi_{add}}{\partial t} - \nu\frac{\partial\eta}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x},t) \quad (\text{II.1.5})$$

Le paramètre ν (géométrie, coefficients) a été calibré par rapport à des campagnes d'expériences par F. Bonnefoy, on se réfère donc à sa thèse [13] pour plus de détails concernant cette plage absorbante.

II.1.2.2 Rampe en temps

Au début du processus de génération une rampe en temps est mise en place. Elle a pour but de : i) limiter les discontinuités lors de la simulation numérique pour faciliter l'avance en temps, ii) limiter les contraintes mécaniques appliquées au batteur réel lors du démarrage (dans le cas d'accélération brutales) et iii) limiter l'excitation des modes propres du bassin qui sont difficilement absorbés par la plage (ce sont des modes très longs).

Des études numériques sur les types de rampes à employer (linéaire ou d'ordre supérieur) ainsi que leur durée optimale peuvent être trouvées dans la thèse de D. Le Touzé [80].

II.1.2.3 Validations

Le modèle *HOST-wm1* a été largement validé et appliqué à de nombreux cas. On rappelle ici deux cas présentés par F. Bonnefoy [13] :

- Houles irrégulières 2D : des comparaisons entre des expériences réalisées dans le bassin de houle de l'ECN et le modèle *HOST-wm1* ont été réalisées sur des houles irrégulières 2D, définies par un spectre de Bretschneider. Le champ de vagues a été étudié sur une longue durée afin d'effectuer des études statistiques sur celui-ci. Différentes cambrures ont été testées et ont permis de mettre en avant l'efficacité de la méthode par rapport au modèle complètement 2nd ordre *SWEET* développé auparavant au laboratoire (voir Bonnefoy et al. [15] & [16]). Les comparaisons simulations numériques/données expérimentales sont très bonnes, même après de longs temps de propagation (i.e. avec multiples réflexions sur la plage absorbante). Il a également été montré la supériorité de *HOST-wm1* (CSL complètement non-linéaires et batteur 1^{er} ordre) par rapport à *SWEET* (CSL et batteur 2nd ordre) dès qu'on atteint des cambrures moyennes, le caractère non-linéaire complet des CSL de *HOST* étant déterminant. Ainsi, la plage absorbante ainsi que la méthode de génération ont été validées par de tels essais.
- Reproduction déterministe 2D et 3D : F. Bonnefoy a également travaillé sur la reproduction déterministe qui consiste, à partir de la connaissance d'une élévation de surface libre en un point donné au cours du temps (typiquement un relevé de sondes), à reproduire

le champ de vagues ayant donné le relevé temporel en question. Ceci a été étudié sur des paquets de vagues focalisés en 2D et en 3D et les comparaisons se sont avérées très concluantes montrant une nouvelle fois les capacités du modèle *HOST-wm1*.

En conclusion, on a tout d'abord présenté le problème de la génération de houle en rappelant la méthode employée pour la modélisation du batteur. La résolution se fait par l'introduction d'un potentiel additionnel résolu dans un domaine étendu permettant de conserver l'approche spectrale pour ce problème et donc l'efficacité du calcul. Dans la seconde partie, on a également rappelé quelques résultats importants obtenus par D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13] concernant la rampe en temps utilisée, la modélisation de la plage absorbante et certains cas de validation sur des simulations de longues durées de houles irrégulières 2D, ainsi que la reproduction déterministe 2D et 3D de paquets de vagues focalisés.

Chapitre II.2

Amélioration de la génération

L'idée ici est d'améliorer le processus de génération tel qu'il est décrit dans le chapitre précédent II.1, à savoir une prise en compte au premier ordre de l'influence du batteur. Il est à noter cependant que cette approche de modélisation par un flux linéaire du batteur est très convaincante et a été validée sur de nombreux cas-tests comme on l'a vu précédemment. En effet, les mouvements batteur sont en général d'amplitude assez faible (par rapport à la longueur d'onde) et sont donc bien approchés par un développement en ordres limité au 1^{er} ordre. Cependant, il arrive dans certains cas que cette approximation ne soit pas suffisamment précise. Dans ce modèle, le batteur est modélisé par un flux de vitesse en $x = 0$ égal à la vitesse normale du batteur (cf. équation (II.1.3)). On néglige ainsi des termes d'ordre supérieurs liés notamment à la position réelle du batteur et à l'amplitude finie de la houle. En raison du traitement non-linéaire des CSL, des composantes non-linéaires seront tout de même générées mais qui diffèrent de celles attendues, i.e. qu'on peut mesurer en bassin par exemple. On y reviendra en détail dans le chapitre II.3.

On a donc envisagé une amélioration de la modélisation de la génération dans notre modèle. On présentera tout d'abord dans la section II.2.1 le principe de l'amélioration, basé sur un développement en ordres de la condition batteur. Ensuite, la section II.2.2 présentera le modèle avec un développement des conditions sur le batteur au 2^{ème} ordre *HOST-wm2*, alors que la section II.2.3 s'intéressera au 3^{ème} ordre *HOST-wm3*. Dans chacune de ces sections, l'algorithme de résolution sera détaillé. Enfin, la section II.2.4 présentera des pistes quant à l'éventualité de résoudre de manière complètement non-linéaire le problème de la génération de la houle.

II.2.1 Principe de l'amélioration

Dans cette section sera explicité le principe de l'amélioration de la prise en compte du batteur au sein du code de calcul *HOST*. Initialement, cette condition limite était prise en compte de façon linéaire, i.e. développement au premier ordre de la condition. L'idée ici va être de développer aux ordres supérieurs la condition non-linéaire sur le batteur. Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, celle-ci est prise en compte à l'aide d'un potentiel additionnel. On va donc chercher à obtenir un potentiel additionnel plus précis que celui initialement employé (issu du traitement linéaire de la condition sur le batteur). Ce potentiel, apparaissant en terme de forçage des CSL (cf. équation (II.1.4)), est décorrélé de la résolution complètement non-linéaire de ces CSL par la méthode *HOST*.

En ce sens, on présentera donc le développement en ordres de la condition sur le batteur. Celui-ci s'accompagne d'un développement en ordres des CSL. Il faut cependant garder à l'es-

prit que ce développement en ordres des CSL est utile **seulement** à l'obtention du potentiel additionnel ϕ_{add} amélioré. On va toujours garder la résolution complètement non-linéaire des CSL par *HOST*. Seule la prise en compte de la génération est modifiée.

II.2.1.1 Développement en ordres de la condition sur le batteur

On rappelle tout d'abord la condition non-linéaire sur le batteur :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial z} \quad \text{en} \quad x = X(y, z, t) \quad (\text{II.2.1})$$

On va chercher à développer en ordres de perturbation cette condition. Pour ce faire, on rappelle le développement en ordres de perturbation d'une fonction quelconque G . En supposant les déplacements faibles, on peut exprimer les grandeurs sur les surfaces en mouvement par un développement de Taylor autour de la position de repos. Soit, sur la surface libre :

$$G(x, y, z = \eta, t) = G(x, y, 0, t) + \eta \frac{\partial G}{\partial z}(x, y, 0, t) + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(x, y, 0, t) + \dots \quad (\text{II.2.2})$$

et sur le batteur :

$$G(x = X, y, z, t) = G(0, y, z, t) + X \frac{\partial G}{\partial x}(0, y, z, t) + \frac{X^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, y, z, t) + \dots \quad (\text{II.2.3})$$

En appliquant le développement à la condition sur le batteur (second membre de l'équation (II.2.1)) et en adoptant la notation compacte des dérivées $\phi_{,x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$:

$$X_{,t} = \phi_{,x}(x = X) - \phi_{,y}(x = X) X_{,y} - \phi_{,z}(x = X) X_{,z} \quad (\text{II.2.4})$$

$$= \phi_{,x}(x = 0) + X \phi_{,xx}(x = 0) + \frac{X^2}{2} \phi_{,xxx}(x = 0) + \dots \quad (\text{II.2.5})$$

$$- \phi_{,y}(x = 0) X_{,y} - X \phi_{,yx}(x = 0) X_{,y} - \frac{X^2}{2} \phi_{,yxx}(x = 0) X_{,y} + \dots \quad (\text{II.2.6})$$

$$- \phi_{,z}(x = 0) X_{,z} - X \phi_{,zx}(x = 0) X_{,z} - \frac{X^2}{2} \phi_{,zxx}(x = 0) X_{,z} + \dots \quad (\text{II.2.7})$$

Les deux quantités nous intéressant sont alors développées suivant un petit paramètre ϵ :

$$X = \epsilon X_{(1)} + \epsilon^2 X_{(2)} + \epsilon^3 X_{(3)} + O(\epsilon^4) \quad (\text{II.2.8})$$

$$\phi = \epsilon \phi_{(1)} + \epsilon^2 \phi_{(2)} + \epsilon^3 \phi_{(3)} + O(\epsilon^4) \quad (\text{II.2.9})$$

On obtient alors (en développant jusqu'au 3^{ème} ordre) :

$$\begin{aligned} X_{,t} &= \epsilon X_{(1),t} + \epsilon^2 X_{(2),t} + \epsilon^3 X_{(3),t} + O(\epsilon^4) \\ &= \epsilon \phi_{(1),x} + \epsilon^2 \phi_{(2),x} + \epsilon^3 \phi_{(3),x} + \epsilon^2 X_{(1)} \phi_{(1),xx} + \epsilon^3 X_{(2)} \phi_{(1),xx} + \epsilon^3 X_{(1)} \phi_{(2),xx} + \epsilon^3 \frac{X_{(1)}^2}{2} \phi_{(1),xxx} \\ &\quad - \epsilon^2 \phi_{(1),y} X_{(1),y} - \epsilon^3 \phi_{(2),y} X_{(1),y} - \epsilon^3 \phi_{(1),y} X_{(2),y} - \epsilon^3 X_{(1)} \phi_{(1),yx} X_{(1),y} \\ &\quad - \epsilon^2 \phi_{(1),z} X_{(1),z} - \epsilon^3 \phi_{(2),z} X_{(1),z} - \epsilon^3 \phi_{(1),z} X_{(2),z} - \epsilon^3 X_{(1)} \phi_{(1),zx} X_{(1),z} + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Donc en regroupant chaque ordre :

- 1^{er} ordre :

$$\phi_{(1),x} = X_{(1),t}$$

- 2^{ème} ordre :

$$\phi_{(2),x} = X_{(2),t} - X_{(1)} \phi_{(1),xx} + \phi_{(1),y} X_{(1),y} + \phi_{(1),z} X_{(1),z}$$

- 3^{ème} ordre :

$$\begin{aligned} \phi_{(3),x} = & X_{(3),t} - X_{(2)} \phi_{(1),xx} - X_{(1)} \phi_{(2),xx} - \frac{X_{(1)}^2}{2} \phi_{(1),xxx} \\ & + \phi_{(2),y} X_{(1),y} + \phi_{(1),y} X_{(2),y} + X_{(1)} \phi_{(1),yx} X_{(1),y} \\ & + \phi_{(2),z} X_{(1),z} + \phi_{(1),z} X_{(2),z} + X_{(1)} \phi_{(1),zx} X_{(1),z} \end{aligned}$$

On cherche alors à résoudre le problème à chacun des ordres successivement. On s'aperçoit que pour la résolution du problème additionnel à un ordre i , on a besoin de la connaissance de ce potentiel (additionnel et spectral) aux ordres inférieurs. Il va donc falloir développer en ordres le potentiel spectral ainsi que l'élévation de surface libre. On se réfère alors au code complètement second ordre développé au sein du LMF par D. Le Touzé et F. Bonnefoy (voir Bonnefoy et al. [15] & [16]), *SWEET*. Si on effectue un développement en ordres de la condition batteur comme indiqué, il faut également développer en ordres les autres quantités rentrant en jeu dans l'écriture des équations, de manière à rester consistant. Ceci va donc correspondre à un couplage entre le code de calcul *SWEET*, qui va permettre la résolution jusqu'au 2^{ème} ordre et l'obtention de la condition batteur 3^{ème} ordre, et le code *HOST* où on aura alors cette condition batteur 2^{ème} ou 3^{ème} ordre et les CSL toujours complètement non-linéaires.

II.2.1.2 Développement en ordre des CSL

On rappelle ici le développement en ordre des CSL et les équations résultantes, les inconnues étant les potentiels et élévations de surface libre à chacun des ordres $\phi_{(i)}$ et $\eta_{(i)}$ $i = [1,2]$ (les déplacements batteur $X_{(i)}$ sont quant à eux connus) :

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{(i)} &= 0 && \text{dans } D \\ \frac{\partial\phi_{(i)}}{\partial z} &= 0 && \text{en } z = -h \\ \frac{\partial\phi_{(i)}}{\partial y} &= 0 && \text{en } y = 0, L_y \\ \frac{\partial\phi_{(i)}}{\partial x} &= 0 && \text{en } x = L_x \\ \frac{\partial\eta_{(i)}}{\partial t} - \frac{\partial\phi_{(i)}}{\partial z} &= A_i && \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial\phi_{(i)}}{\partial t} + g\eta_{(i)} + \nu\frac{\partial\phi_{(i)}}{\partial z} &= B_i && \text{en } z = 0 \\ \frac{\partial\phi_{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial X_{(i)}}{\partial t} &= C_i && \text{en } x = 0 \end{aligned}$$

avec au premier ordre,

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0$$

et au second ordre :

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \eta_{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{(1)}}{\partial z^2} - \nabla \eta_{(1)} \cdot \nabla \phi_{(1)} \\
 B_2 &= -\eta_{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{(1)}}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} \left| \tilde{\nabla} \phi_{(1)} \right|^2 - \nu \left(\eta_{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{(1)}}{\partial z^2} - \nabla \eta_{(1)} \cdot \nabla \phi_{(1)} \right) \\
 C_2 &= -X_{(1)} \frac{\partial^2 \phi_{(1)}}{\partial x^2} + \nabla_v X_{(1)} \cdot \nabla_v \phi_{(1)}
 \end{aligned}$$

On a bien ici, comme attendu, les expressions de C_1 et C_2 qui correspondent au développement décrit précédemment. Il faut remarquer que les C_i ne dépendent que des η et ϕ aux ordres inférieurs. Il en est de même pour C_3 calculé dans le paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}
 C_3 &= -X_{(2)} \phi_{(1),xx} - X_{(1)} \phi_{(2),xx} - \frac{X_{(1)}^2}{2} \phi_{(1),xxx} \\
 &\quad + \phi_{(2),y} X_{(1),y} + \phi_{(1),y} X_{(2),y} + X_{(1)} \phi_{(1),yx} X_{(1),y} \\
 &\quad + \phi_{(2),z} X_{(1),z} + \phi_{(1),z} X_{(2),z} + X_{(1)} \phi_{(1),zx} X_{(1),z}
 \end{aligned}$$

L'amélioration en elle-même apportée sur cette base est présentée plus en détail dans les deux sections suivantes [II.2.3](#) & [II.2.2](#).

Il est intéressant de noter ici que le problème de la génération (i.e. le traitement des conditions au niveau du batteur C_1 , C_2 & C_3) est résolu par la méthode du potentiel additionnel présenté précédemment. Mais il est apparu lors de la mise en place du code *SWEET* (voir D. Le Touzé [80]) qu'il était nécessaire d'avancer en temps ces conditions sur le batteur. En effet, un problème de consistance de cette condition apparaît si elle est traitée telle quelle, l'idée est alors d'avancer plutôt en temps la condition, i.e. de ne résoudre que la dérivée par rapport au temps de celle-ci plutôt que la condition elle-même.

II.2.2 Batteur 2^{ème} ordre: *HOST-wm2*

Dans cette partie, on va décrire la première extension de la génération qui a été réalisée. On développe cette fois le batteur jusqu'au 2^{ème} ordre, i.e. on va résoudre le problème additionnel jusqu'au 2^{ème} ordre. On va donc avoir besoin de calculer les termes C_1 et C_2 qui vont être obtenus grâce à la connaissance de $X_{(1)}, \eta_{(1)}, \phi_{(1)}$. Plus précisément on va chercher à calculer $d \frac{\partial C_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial C_2}{\partial t}$ pour assurer la consistance de la solution, comme vu à la fin du paragraphe précédent.

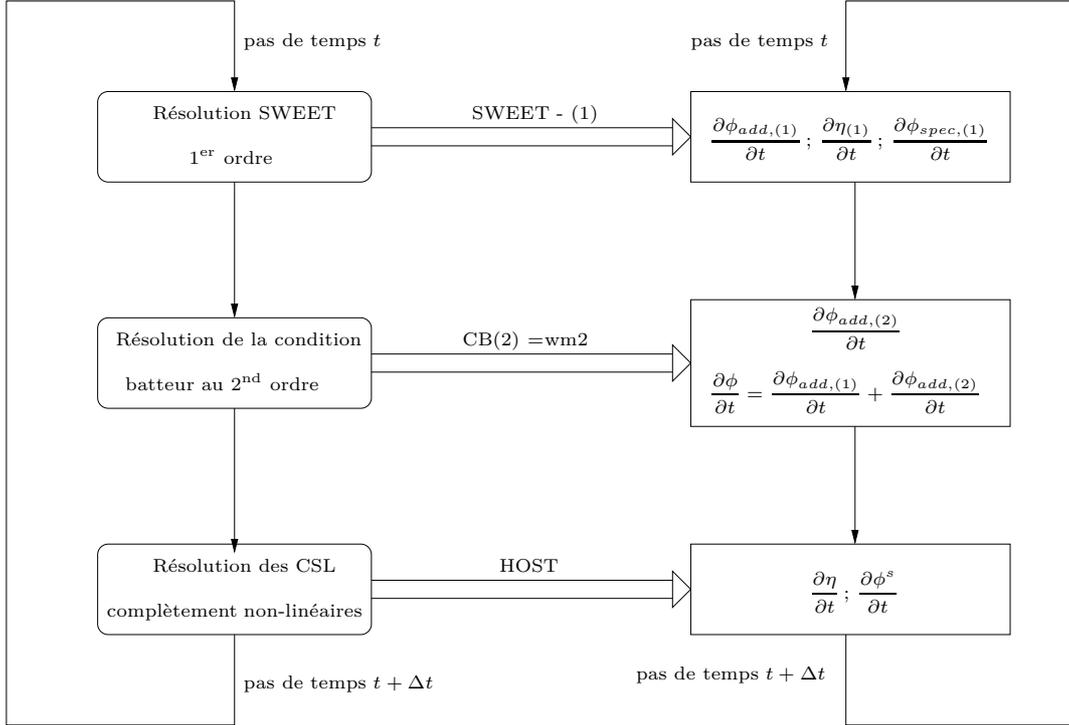
L'algorithme de résolution que l'on va employer cette fois va donc être le suivant (schématisé sur la figure [II.2.1](#)) :

- Résolution du problème de la génération : on détermine ϕ_{add} et $\frac{\partial \phi_{add}}{\partial t}$ grâce aux étapes suivantes :

- Avance en temps de $\phi_{add,(1)}$: $\frac{\partial^2 \phi_{add,(1)}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial C_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 X_{(1)}}{\partial t^2}$
- Avance en temps de $\eta_{(1)}$ et $\phi_{spec,(1)}$ avec les CSL développées en ordres :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} &= A_1 + \frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial z} \\
 \frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial t} &= B_1 - g \eta_{(1)} - \nu \frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial z}
 \end{aligned}$$

- Avance en temps de $\phi_{add,(2)}$: $\frac{\partial^2 \phi_{add,(2)}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial C_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 X_{(2)}}{\partial t^2}$
- $\frac{\partial \phi_{add}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{add,(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{add,(2)}}{\partial t}$
- $\phi_{add} = \phi_{add,(1)} + \phi_{add,(2)}$
- Résolution de la propagation complètement non-linéaire (*HOST*) : les CSL sont résolues avec les termes additionnels $\phi_{add,(1)} + \phi_{add,(2)}$ déterminés dans l'étape précédente en forçage : système d'équations (II.1.4).


 FIG. II.2.1 – *Algorithme de résolution pour HOST-wm2*

En ce qui concerne la complexité de la résolution, on peut essayer de comparer la version *HOST-wm2* et la version *HOST-wm1*. On va ici avancer en temps un certain nombre de variables : $\phi_{add,(2)}, \eta(1), \phi_{spec,(1)}$, qui sont à ajouter aux variables déjà avancées en temps dans *HOST-wm1* : $\phi_{add,(1)}, \eta, \phi^s$. Ainsi, le calcul sera bien évidemment plus demandeur en ressources CPU et mémoire. Cependant, l'augmentation de temps CPU reste très faible, la résolution complètement non-linéaire du problème représentant encore la part la plus importante.

Il est important d'indiquer également que la partie consistant en le calcul des termes additionnels ($\phi_{add} = \phi_{add,(1)} + \phi_{add,(2)}$) est totalement décorrélée de la résolution effective au niveau de la surface libre par la méthode HOS. Donc, le fait qu'apparaisse ici une décomposition en ordres autour de $z = 0$ pour η et ϕ n'est en aucun cas lié à la résolution des CSL. Ces termes sont simplement utiles pour la construction de la condition sur le batteur étendue au 2^{ème} ordre et du potentiel additionnel correspondant.

Ces développements ont fait l'objet d'une présentation au *16th International Offshore and Polar Engineering Conference*, Ducroz et al. [36] puis d'une publication dans le journal *IJOPE*, Ducroz et al. [38]

II.2.3 Batteur 3^{ème} ordre: *HOST-wm3*

Le principe utilisé pour obtenir le batteur 3^{ème} ordre est sensiblement identique à celui présenté précédemment, la seule différence étant que l'ordre de développement de la condition sur le batteur est étendue à un ordre supérieur.

L'algorithme de résolution que l'on va employer est donc proche de celui décrit plus haut et est représenté sur la figure II.2.2 :

- Résolution du problème de la génération : on détermine ϕ_{add} et $\frac{\partial \phi_{add}}{\partial t}$ grâce au processus suivant :

- Avance en temps de $\phi_{add,(1)}$: $\frac{\partial^2 \phi_{add,(1)}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial C_1}{\partial t}$
- Avance en temps de $\eta_{(1)}$ et $\phi_{spec,(1)}$ avec les CSL développées en ordres :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{(1)}}{\partial t} &= A_1 + \frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial t} &= B_1 - g\eta_{(1)} - \nu \frac{\partial \phi_{(1)}}{\partial z} \end{aligned}$$

- Avance en temps de $\phi_{add,(2)}$: $\frac{\partial^2 \phi_{add,(2)}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial C_2}{\partial t}$
- Avance en temps de $\eta_{(2)}$ et $\phi_{spec,(2)}$ avec les CSL développées en ordre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_{(2)}}{\partial t} &= A_2 + \frac{\partial \phi_{(2)}}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi_{(2)}}{\partial t} &= B_2 - g\eta_{(2)} - \nu \frac{\partial \phi_{(2)}}{\partial z} \end{aligned}$$

- Avance en temps de $\phi_{add,(3)}$: $d \frac{\partial^2 \phi_{add,(3)}}{\partial x \partial t} = \frac{\partial C_3}{\partial t} + \frac{\partial^2 X_{(3)}}{\partial t^2}$
- $\frac{\partial \phi_{add}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{add,(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{add,(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{add,(3)}}{\partial t}$
- $\phi_{add} = \phi_{add,(1)} + \phi_{add,(2)} + \phi_{add,(3)}$

- Résolution de la propagation complètement non-linéaire (*HOST*) : les CSL sont résolues avec les termes additionnels déterminés dans l'étape précédente en forçage : système d'équations (II.1.4).

En termes de complexité de résolution, on compare la prise en compte du batteur au 3^{ème} ordre *HOST-wm3* à la prise en compte au 2nd ordre. On va avancer en temps un certain nombre de variables $\phi_{add,(3)}, \eta_{(2)}, \phi_{spec,(2)}$ qui sont à ajouter aux variables déjà avancées en temps dans *HOST-wm2* (voir section précédente).

On rappelle également ici que, comme pour le code *HOST-wm2*, la partie consistant en le calcul des termes additionnels ($\phi_{add} = \phi_{add,(1)} + \phi_{add,(2)} + \phi_{add,(3)}$) est totalement décorrélée de la résolution effective au niveau de la surface libre. Le développement en ordres n'est utile que pour déterminer le potentiel additionnel adapté à notre problème.

Il est cependant intéressant de noter que le développement en ordres du batteur devient beaucoup plus compliqué si on veut augmenter encore d'un ordre la non-linéarité de celui-ci. En effet, le problème bien connu de la sécularité de la solution va apparaître. Ce dernier

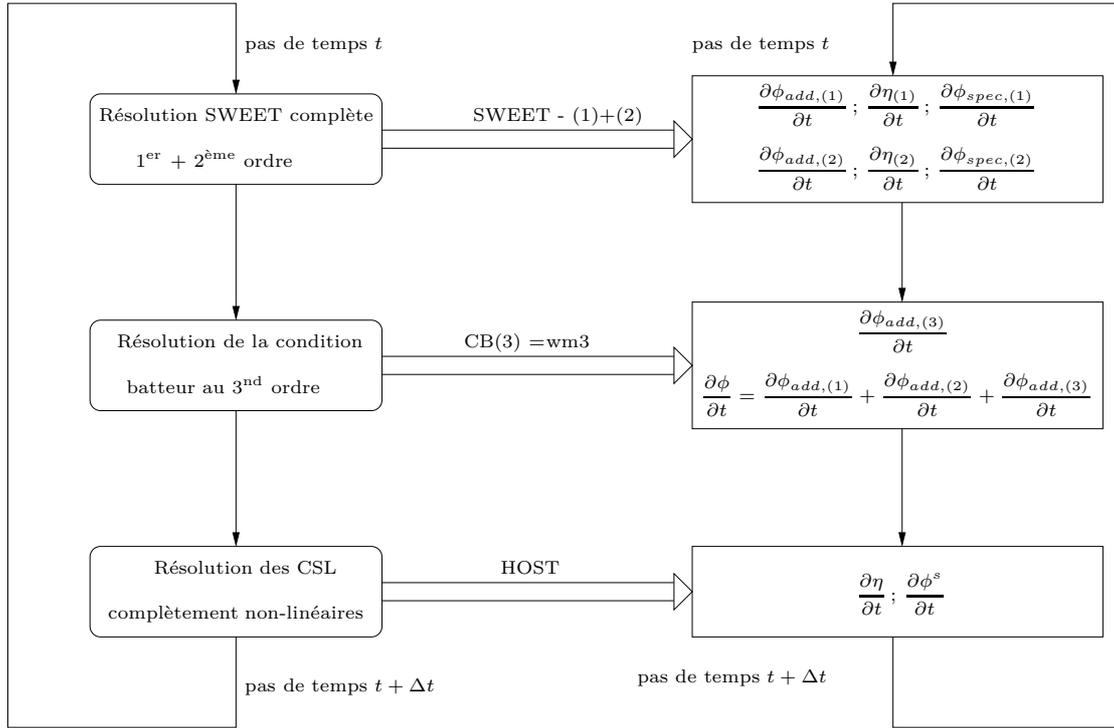


FIG. II.2.2 – Algorithme de résolution pour HOST-wm3

apparaît par exemple lors du développement au 3^{ème} ordre des CSL. Un terme dit séculaire (i.e. augmentant en fonction du temps ou en fonction de la position dans l'espace suivant l'écriture des équations) va apparaître lors d'une résolution telle quelle. C'est ce problème de sécularité qui est à l'origine par exemple de la modification de la vitesse de phase au 3^{ème} ordre. Cependant, il est à noter que ce problème n'apparaît pas lors du développement au 3^{ème} ordre de la condition batteur elle-même. Mais, si on veut une condition batteur au 4^{ème} ordre, on aura besoin des CSL développées au 3^{ème} ordre donc ce problème sera présent compliquant grandement la résolution. Pour plus de détails, voir Annexe A.

II.2.4 Vers le batteur non-linéaire?

II.2.4.1 Résolution

En deux dimensions, le système d'équations vérifié par le potentiel et l'élévation de surface libre dans le bassin de houle non-linéaire est le suivant :

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi &= 0 && \text{dans D} \\
 \frac{\partial\phi}{\partial t} &= -\eta - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi|^2 && \text{en } z = \eta(x,t) \\
 \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} && \text{en } z = \eta(x,t) \\
 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial z} && \text{en } x = X(z,t) \\
 \frac{\partial\phi}{\partial n} &= 0 && \text{en } z = -1; x = L_x
 \end{aligned} \tag{II.2.10}$$

On a donc ici trois équations non-linéaires affichées sur des surfaces *mobiles*, notamment à la surface du batteur. Notre méthode spectrale nous impose l'utilisation d'une géométrie parallélépipédique pour notre résolution, ce qui implique un problème pour la prise en compte de la condition non-linéaire du batteur (cette condition est à vérifier en $x = X(z,t)$ et non plus en $x = 0$).

L'idée adoptée ici est donc de conserver notre géométrie initiale (à savoir un parallélépipède) en appliquant toujours une condition en $x = 0$ de manière à essayer de satisfaire la condition non-linéaire. Pour ce faire, un processus itératif doit donc être mis en place comme présenté sur la figure II.2.3 :

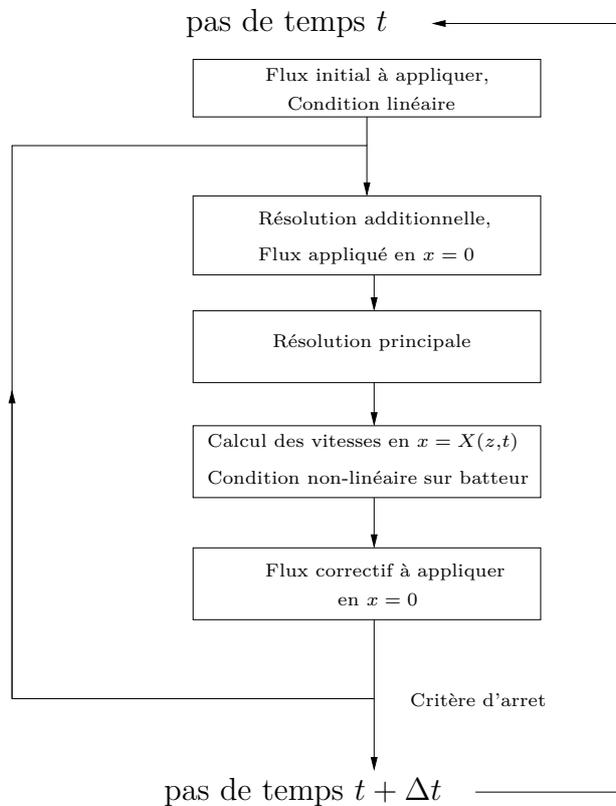


FIG. II.2.3 – *Algorithme de résolution itératif pour prise en compte non-linéaire du batteur*

A la première itération, on applique donc le flux linéaire en $x = 0$ pour le calcul de la partie additionnelle (i.e. si on se limite à une itération on aura notre condition linéaire pour le batteur, *HOST-wm1*). Ensuite, on calcule avec ce flux le potentiel total résultant ainsi que la condition non-linéaire sur la position exacte du batteur (II.2.10). De cela, on déduit un flux correctif à appliquer en $x = 0$ de manière à avoir notre condition non-linéaire sur le batteur satisfaite exactement. Ce processus doit converger rapidement afin de ne pas avoir un temps de calcul prohibitif.

Afin d'évaluer la condition non-linéaire sur le batteur, il est nécessaire de calculer les vitesses et les accélérations du fluide en la position de celui-ci, $x = X(y,z,t)$. Pour ce faire, on peut utiliser les techniques décrites dans la section I.3.2. On utilisera dans notre cas la méthode adaptée du travail de Bateman [7] (opérateurs H , H_2).

Il est alors apparu, lors de la mise en place du processus itératif précédent que la convergence n'était pas assurée dans tous les cas. En effet, dans la majorité des cas de calculs testés, le processus divergeait dès que le mouvement batteur devenait un tant soit peu important. Afin de vérifier le calcul effectué, il était intéressant de voir si en imposant une correction à la dérivée de la condition sur le batteur (en $x = X(z,t)$) à chaque pas de temps on imposait bien la condition voulue sur le batteur. En effet, les corrections sont effectuées au niveau de cette dérivée dans le processus décrit sur le schéma II.2.3. Or, il est apparu que même en ayant un calcul convergé sur la dérivée de la condition batteur, la condition batteur en elle-même n'était pas obligatoirement vérifiée.

Il semblait donc intéressant dans un deuxième temps de mettre en place le processus itératif à chaque sous-pas de temps RK4 (ce qui va augmenter d'autant plus le coût de ces itérations non-linéaires). On observe alors que le résultat au niveau de la condition sur le batteur est très largement amélioré. Toutefois, il arrive qu'à certains instants la convergence ne puisse se faire sur la dérivée de cette condition (comme précédemment) et dès lors, la condition batteur elle-même s'en trouve très largement dégradée avec une propagation de l'erreur par la suite du calcul (étant donné que l'on avance en temps celle-ci).

II.2.4.2 Avance en temps de la condition batteur

Dans le cadre du code *SWEET*, D. Le Touzé [80] a expliqué que la construction du batteur unifié impose d'avancer en temps le potentiel additionnel afin d'être consistant. On peut donc supposer connues les amplitudes modales de ce potentiel additionnel et chercher uniquement leurs dérivées temporelles. On travaillera donc sur la seule dérivée de la condition batteur, notée E^B , équation (II.2.10) et non sur cette condition elle-même. La dérivée de cette condition donne :

$$\frac{dE^B}{dt} = \frac{\partial E^B}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial E^B}{\partial x} \quad \text{en } x = X(z,t)$$

D'où,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad \text{en } x = X(z,t) \quad (\text{II.2.11})$$

Dans un premier temps, il faut vérifier le changement fait dans la résolution de la condition batteur, à savoir avancer en temps cette condition plutôt que de l'appliquer de façon connue. Pour ce faire, il convient de réécrire ces deux conditions (sans processus itératif tout d'abord) :

- Condition non-linéaire à appliquer initialement :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial z} \quad \text{en } x = X(z,t)$$

- Soit, la condition linéaire appliquée :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{en } x = 0$$

- Avance en temps de la condition non-linéaire :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad \text{en } x = X(z,t)$$

- Avance en temps de la condition linéaire :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{en } x = 0$$

où, par integration en temps on retrouve bien :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial X}{\partial z} \quad \text{en } x = X(z,t)$$

et,

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{en } x = 0$$

Mais, un problème est tout de même apparu dû à la présence de la rampe en temps sur la position du batteur. En effet, si on reprend la construction de cette rampe comme expliqué par Le Touzé [80], elle est définie par l'équation suivante, en supposant la position du batteur donnée par $x = \alpha(t)X(y,z,t)$:

$$\alpha(t=0) = 0; \alpha(t=T_{rampe}) = 1; \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t=0) = 0; \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t=T_{rampe}) = 0 \quad (\text{II.2.12})$$

Ainsi, si on reprend la condition batteur appliquée initialement dans le code HOS, il vient la condition suivante quel que soit t :

$$\alpha \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} X = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{en } x = 0$$

Donc pour $t > T_{rampe}$:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{en } x = 0$$

Si on reprend notre changement de variable, la condition appliquée est :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} = \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} X - \left(\alpha \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} X \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{en } x = 0$$

Si on intègre cette équation en prenant en compte la formulation de la rampe (II.2.12) on obtient :

- Pour $0 \leq t \leq T_{rampe}$

$$\alpha \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} X = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{en } x = 0$$

- Pour $t > T_{rampe}$

$$\frac{\partial X}{\partial t} + \int_0^{T_{rampe}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} X dt \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{II.2.13})$$

A la fin de la rampe en temps, il faudra donc enlever cette intégrale résiduelle de (II.2.13) qui n'apparaît pas dans la formulation originelle.

Ceci fait, la nouvelle formulation avec avance en temps de la condition sur le batteur est mise en place et les résultats obtenus sur différents cas-tests sont exactement les mêmes qu'avec la formulation originelle. Notre nouvelle formulation est donc validée et nous permet d'envisager l'utilisation du processus itératif qui nécessitait la mise en place de cette avance temporelle.

Pour conclure ce chapitre, nous avons présenté la méthode permettant d'améliorer le processus de génération tel qu'il est décrit dans le chapitre précédent II.1. La prise en compte au 1^{er} ordre de l'influence du batteur est améliorée grâce à un développement en ordres de la condition sur le batteur. Le travail effectué dans le cadre du code complètement 2nd ordre *SWEET* a été adapté à notre modèle complètement non-linéaire sur la surface libre *HOST* et étendu jusqu'au 3^{ème} ordre. On arrive ainsi à deux modèles améliorés, *HOST-wm2* et *HOST-wm3* correspondant au développement des conditions batteur respectivement au 2^{ème} et au 3^{ème} ordre, tout en restant complètement non-linéaire sur la surface libre. Les algorithmes de résolution de chacun de ces modèles sont présentés. Le chapitre suivant II.3 présentera les validations et des résultats concernant cette amélioration du processus de génération. Enfin, la section II.2.4 présente des pistes quant à l'éventualité de résoudre de manière complètement non-linéaire le problème de la génération de la houle et évoque un processus basé sur des itérations non-linéaires qui ne donne pas pour le moment satisfaction.

Chapitre II.3

Validations - Résultats

Dans ce chapitre seront présentés des cas de validation ainsi que des résultats obtenus avec les modèles améliorés *HOST-wm2* et *HOST-wm3* présentés dans le chapitre précédent. La première section II.3.1 s'intéressera à une validation sur différents cas de houles régulières 2D (plus ou moins cambrées). Des comparaisons avec des expériences réalisées dans le bassin de houle de l'ECN sont présentées. On s'intéresse en particulier à des comparaisons à des relevés de sondes dans le bassin mais également au problème numérique de conservation du volume. La section II.3.2 présentera quant à elle des résultats sur une vague focalisée 2D. Les expériences, réalisées par Ocean Power Delivery (OPD) dans le bassin de houle de l'ECN, sont comparées aux simulations numériques. Les comparaisons sont réalisées sur des élévations de surface libre ainsi que sur la pression à l'intérieur du domaine fluide.

II.3.1 Houle régulière 2D

On va s'intéresser à la simulation de houles régulières 2D générées dans le bassin de l'ECN ($50m \times 30m \times 5m$). Nous allons donc étudier le comportement des différents modèles de génération *HOST-wm1*, *HOST-wm2* et *HOST-wm3* pour différentes cambrures de houle. Les cas présentés ici sont $ka = 0.13$ et 0.2 avec une longueur d'onde $\lambda = 3m$. On rappelle que l'on utilise les mêmes lois de commande pour le batteur numérique que celles employées pour le batteur réel, permettant des comparaisons très aisées avec les expériences.

II.3.1.1 Élévation de surface libre

Nous allons tout d'abord nous intéresser aux élévations de surface libre fournies par les trois modèles de génération *HOST-wm(i)* et les comparer avec les expériences. Les résultats sont présentés dans la figure suivante II.3.1 où sont représentées des élévations en un point du bassin à $x_s = 16.5m$ du batteur. Les expériences sont réalisées avec des sondes à houles résistives donnant l'élévation de la houle en un endroit du bassin de houle. On s'intéresse à un cas de houle régulière de cambrure $ka = 0.13$ (i.e. faiblement cambré).

On remarque sur la vue générale (en haut) que toutes les courbes sont quasiment confondues confirmant la très bonne aptitude de notre modèle à résoudre ce genre de cas. Un zoom sur la fin du calcul (en bas de la figure) indique même que si des différences minimales semblent exister entre les modèles améliorés *HOST-wm2*/*HOST-wm3* et le modèle initial *HOST-wm1*, les trois modèles sont en très bon accord avec les expériences. Donc, pour ce cas faiblement cambré

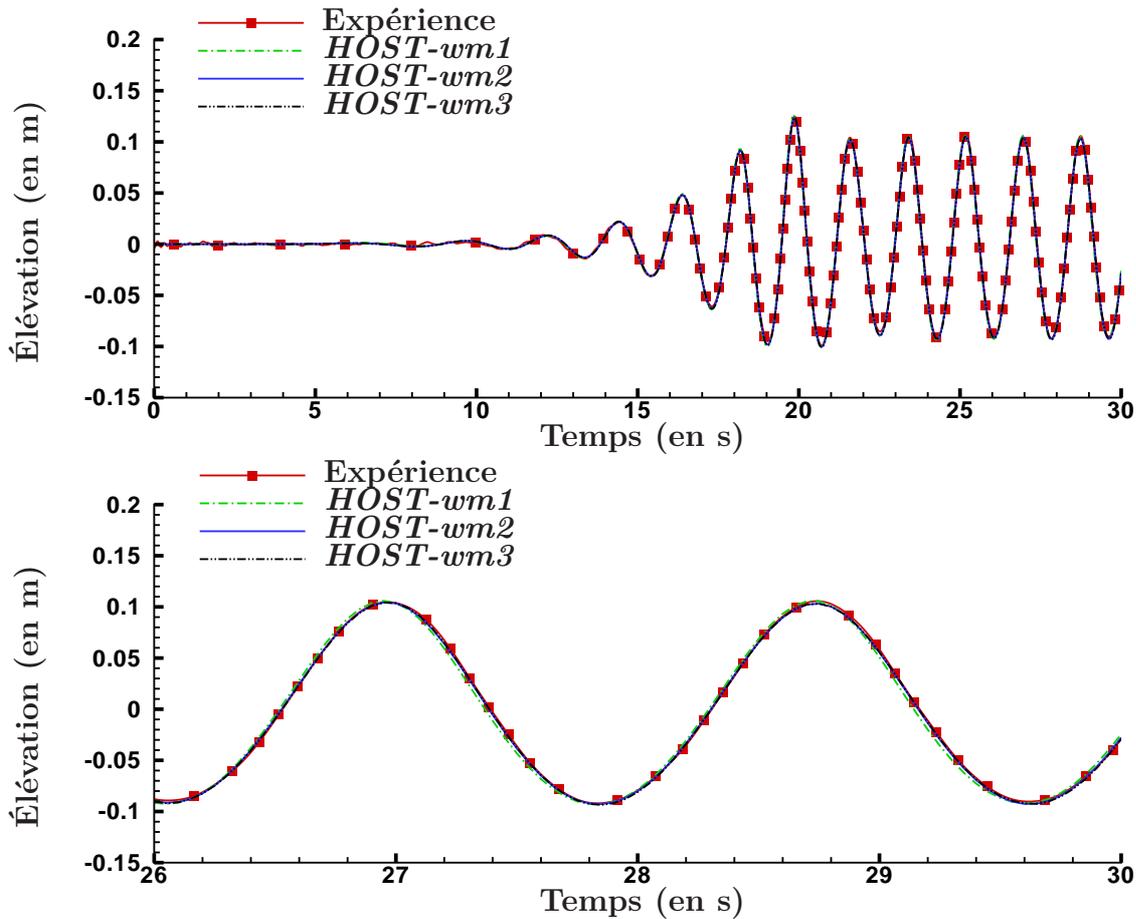


FIG. II.3.1 – Comparaison entre génération 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} ordre et les expériences pour une houle régulière, $ka = 0.13$.

(i.e. avec des amplitudes batteur assez réduites), les non-linéarités du mouvement batteur ne semblent pas avoir d'influence nette sur le résultat présenté ici.

La figure II.3.2 présente un cas de houle plus cambré, $ka = 0.2$. On compare de la même manière que précédemment, sur des signaux de sondes, les différentes méthodes de génération.

On observe dans ce cas-là des différences un peu plus importantes que celles observées pour $ka = 0.13$. On peut noter cependant que l'accord général obtenu avec les trois modèles de génération est très bon, comme on le voit sur le haut de la figure II.3.2. Dans la partie basse de la figure où un zoom sur la fin de la simulation est présenté, on remarque que des écarts plus importants entre les différentes méthodes de génération apparaissent. Notamment, au niveau des crêtes, le modèle *HOST-wm1* semble résoudre ce cas de calcul de manière moins précise que les 2 autres modèles qui sont en très bon accord avec les expériences.

Il paraît alors intéressant de comparer les différents modèles et en particulier les modèles *HOST-wm1* et *HOST-wm2*. En effet, la description au 2nd ordre de la génération a été largement étudiée dans le cadre du code de calcul *SWEET*. On s'attend donc, si on visualise $\eta_{\text{HOST-wm2}} - \eta_{\text{HOST-wm1}}$ à observer la correction sur les ondes libres qu'implique une génération au

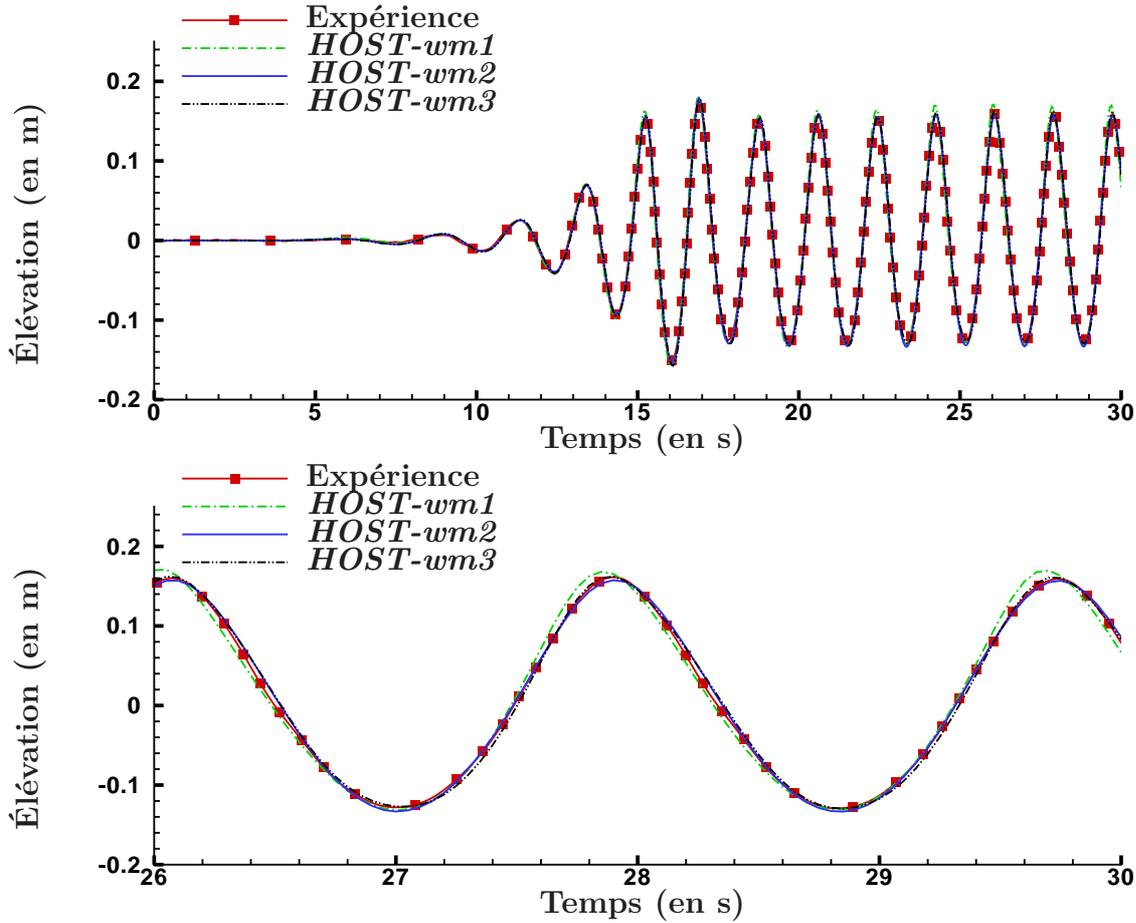


FIG. II.3.2 – Comparaison entre génération 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} ordre et les expériences pour une houle régulière, $ka = 0.2$.

second ordre. En effet, on rappelle que les ondes libres sont des ondes parasites de fréquence 2ω (ou de longueur d'onde $\lambda/4$) en houle régulière et qui perturbent le champ de vagues que l'on veut générer. Ces ondes apparaissent lors de la génération de houle par un batteur quelconque. Le profil de vitesse vertical imposé par ce dernier est différent du profil de la houle seule. En conséquence, des modes évanescents (correction 1^{er} ordre) ainsi que des ondes libres (correction 2nd ordre) sont générées pour corriger ce “défaut” de profil de vitesse. La génération au 2nd ordre, *HOST-wm2*, doit donc permettre une correction de ces ondes libres. On s'attend à ce qu'elle se traduise sur la différence $\eta_{\text{HOST-wm2}} - \eta_{\text{HOST-wm1}}$ par des ondes à la fréquence 2ω se propageant 2 fois moins vite que la houle générée. La figure suivante II.3.3 présente le résultat obtenu dans le cas de la houle régulière, $ka = 0.2$.

La différence n'est donc pas celle escomptée au départ. En effet, il apparaît clairement que celle-ci est composée d'ondes de fréquence ω superposées à celles de fréquence 2ω que l'on

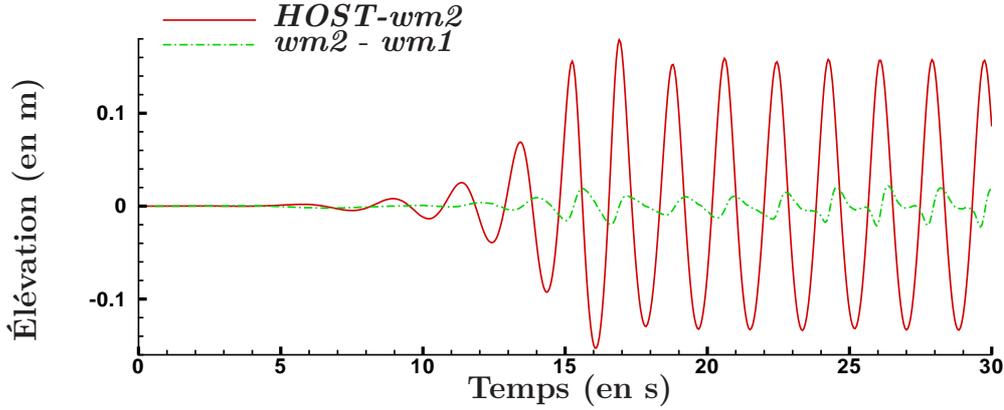


FIG. II.3.3 – Différences entre génération 1^{er} et 2^{ème} ordre pour une houle régulière, $ka = 0.2$.

attendait. Afin de comprendre ce phénomène, il convient de rappeler les CSL :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} = (1 + |\nabla \eta|^2) W - \nabla (\phi^s + \phi_{add}) \cdot \nabla \eta \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) W^2 \\ \quad - \nabla \phi^s \cdot \nabla \phi_{add} - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi_{add}|^2 - \frac{\partial \phi_{add}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)$$

Dans le cas du développement au 2^{ème} ordre, le potentiel additionnel est décrit par $\phi_{add} = \phi_{add}^{(1)} + \phi_{add}^{(2)}$. Si on s'intéresse en particulier à la CDSL, l'influence du 2^{ème} ordre sera :

- $\frac{\partial \phi_{add}^{(2)}}{\partial t}$, d'amplitude ϵ^2 et de fréquence 2ω . Sa vitesse de propagation est 2 fois plus faible que les ondes liées générées et c'est ce terme auquel on s'attendait. On peut noter que ce terme est bien présent sur la figure II.3.3 où ces vagues progressives de fréquence double commencent à arriver après $\simeq 23s$.
- $|\tilde{\nabla} \phi_{add}^{(1+2)}|^2$: fait apparaître un terme en $|\tilde{\nabla} \phi_{add}^{(1)} \cdot \tilde{\nabla} \phi_{add}^{(2)}|$ qui présentera des termes en ω et en ω^3 , d'amplitude ϵ^3 . Ce sont ces termes en ω qui apparaissent donc comme prépondérants ici, notamment au début du relevé, où les ondes libres ne se sont pas propagées jusqu'à la sonde. Ces derniers n'étaient pas apparus clairement au départ, étant négligés dans le code complètement 2nd ordre *SWEET* (ce sont des termes du 3^{ème} ordre).
- $\nabla \phi^s \cdot \nabla \phi_{add}^{(1+2)}$ fera également apparaître des termes en ω et en ω^3 , d'amplitude ϵ^3 .

C'est donc le caractère complètement non-linéaire de la résolution des CSL qui fait apparaître cette évolution différente de celle observée avec le code de calcul *SWEET*. On a donc mis en lumière les différences observées entre la génération 1^{er} et 2^{ème} ordre, le même type d'étude pouvant être mené pour étudier les différences avec la génération au 3^{ème} ordre.

II.3.1.2 Conservation du volume

On a alors choisi de s'intéresser au volume durant la simulation. En effet, il est apparu qu'avec la génération au premier ordre une petite dérive du volume apparaissait. Cette dérive,

due au caractère linéaire de la condition de flux appliqué, devrait être améliorée en même temps que la génération. On rappelle ici la méthode utilisée pour calculer le volume \mathcal{V} à l'intérieur du domaine, supposé ici $2D$ (on rappelle que la profondeur est adimensionnée, $H = 1$) :

$$\mathcal{V}(t) = \int_D d\mathcal{V} = \int_{X(z,t)}^L \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz \quad (\text{II.3.1})$$

On va séparer le volume en différentes parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t) &= \int_{X(z,t)}^0 \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz + \int_0^L \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz \\ &= \int_{X(z,t)}^0 \int_{-1}^0 dx dz + \int_{X(z,t)}^0 \int_0^{\eta(x,t)} dx dz + \int_0^L \int_{-1}^0 dx dz + \int_0^L \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz \\ &= \int_{-1}^0 X(z,t) dz + \int_{X(z,t)}^0 \int_0^{\eta(x,t)} dx dz + L + \int_0^L \eta(x,t) dx \\ &= L + \int_0^L \eta(x,t) dx + \int_{-1}^0 X(z,t) dz + \int_{X(z,t)}^0 \int_0^{\eta(x,t)} dx dz \\ &= \mathcal{V}_{repos} + \mathcal{V}_{SL} + \mathcal{V}_{bat.} + \mathcal{V}_{int} \end{aligned} \quad (\text{II.3.2})$$

avec, $\mathcal{V}_{repos} = L$ le volume du bassin au repos, $\mathcal{V}_{SL} = \int_0^L \eta(x,t) dx$ le volume dû à la présence de la surface libre (sans batteur), $\mathcal{V}_{bat.} = \int_{-1}^0 X(z,t) dz$ celui dû à la présence du batteur (sans déformée de surface libre) et enfin $\mathcal{V}_{int.} = \int_{X(z,t)}^0 \int_0^{\eta(x,t)} dx dz$ la correction due à la présence simultanée du batteur et de la déformée de surface libre.

Le calcul de \mathcal{V}_{repos} , \mathcal{V}_{SL} et $\mathcal{V}_{bat.}$ est direct, seul le calcul de $\mathcal{V}_{int.}$ peut poser problème. On choisira de le calculer en l'approximant comme suit :

$$\mathcal{V}_{int.} \simeq X(0,t) \eta(0,t) \quad (\text{II.3.3})$$

on se réfère à la thèse de F. Bonnefoy [13] pour plus de détail sur les calculs de volume et pour confirmer que l'approximation faite sur $\mathcal{V}_{int.}$ permet d'avoir un volume précis au 2^{nd} ordre.

Il faut indiquer que l'on s'est assuré ici que le choix adopté dans les simulations suivantes, $N_x = 513, N_z = 129$ correspond à un calcul convergé en nombre de modes comme le montre la figure II.3.4.

La partie haute de la courbe représente la vue globale de l'évolution du volume au cours du temps en fonction du nombre de points utilisés pour le calcul. La partie basse de la figure présente un zoom de l'évolution de l'erreur sur le volume proche de $t = 30s$. On remarque très bien la convergence vers une certaine valeur de dérive, non-nulle. C'est ce fait de non-convergence vers 0 du volume qui peut poser problème par la suite avec ce modèle *HOST-wm1*, même si on remarque ici que les dérivées sont très faibles.

La figure II.3.5 représente l'évolution de l'erreur numérique effectuée sur le volume au cours du temps quand on augmente l'ordre de prise en compte de la condition batteur. Cette erreur est aisément calculée par $\mathcal{V}_{SL} + \mathcal{V}_{bat.} + \mathcal{V}_{int.}$. On parle ici d'erreur car idéalement ce volume doit être nul, le mouvement du batteur étant compensé par la déformation de la surface libre. On a choisi ici un cas faiblement cambré $ka = 0.1$, les conclusions étant sensiblement identiques avec

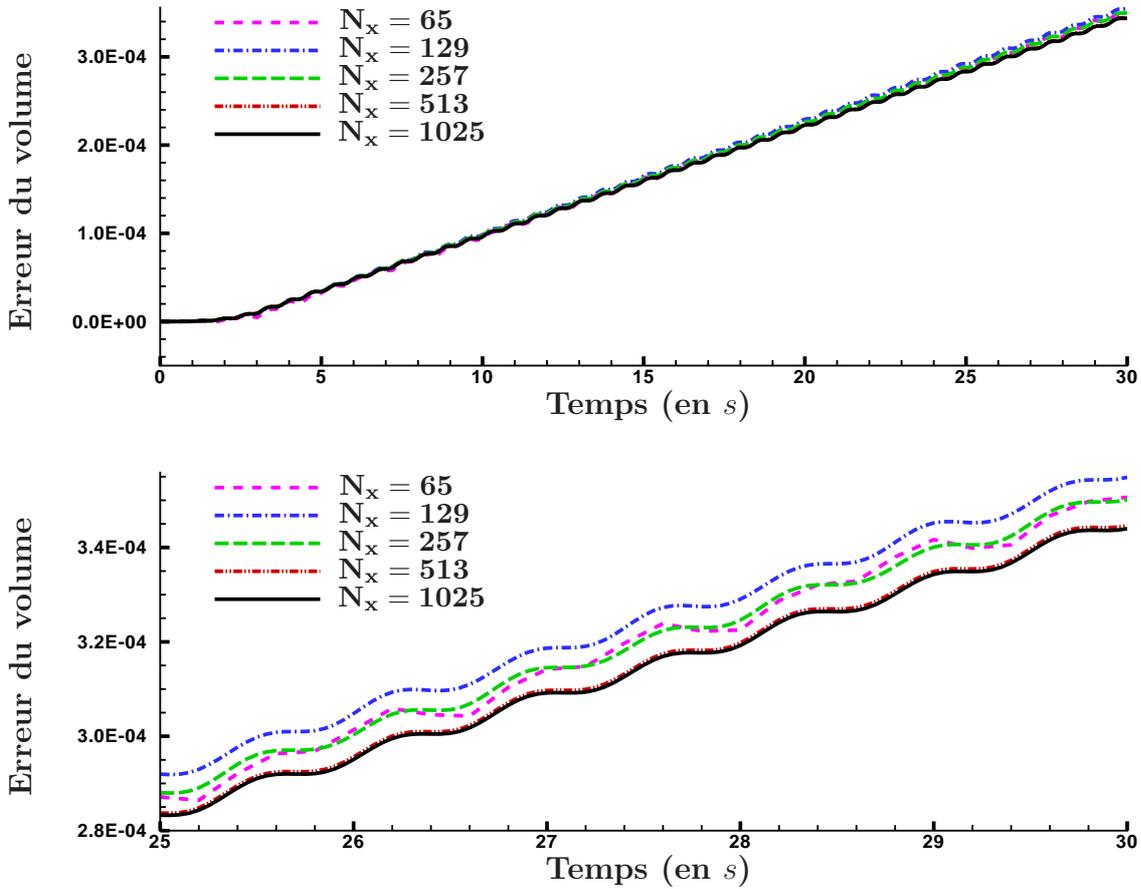


FIG. II.3.4 – Convergence sur le volume en fonction du nombre de points $(N_x - 1) = 4(N_z - 1)$, $ka = 0.1$.

des cambrures différentes.

On observe donc tout d'abord que l'erreur sur le volume se traduit par une dérive à peu près constante au cours du temps. Cette dérive reste cependant faible avec, pour la génération au premier ordre *HOST-wm1*, une erreur absolue inférieure à 5.10^{-4} après 30 s réelles de génération. Ensuite, on remarque très bien l'apport sur la précision de nos différents modèles améliorés de génération. En effet, l'erreur sur le volume est grandement diminuée avec le modèle de génération 2nd ordre *HOST-wm2* et de même avec le modèle de génération 3^{ème} ordre *HOST-wm3* où la dérive de volume est très proche de 0 après 30 secondes de propagation. Ainsi, même avec ce champ de vagues faiblement cambré $ka = 0.1$, la génération a une influence (même si celle-ci n'apparaît que peu sur les élévations de surface libre comme on l'a vu précédemment sur la figure II.3.1). Cependant, les différences observées entre ces trois courbes vont être d'autant plus importantes que les non-linéarités du mouvement batteur vont être importantes, comme on le voit sur la figure II.3.6 suivante où l'on a étudié la génération d'une houle régulière avec $ka = 0.2$.

Il est ensuite apparu que lorsque l'on augmente encore la cambrure ($ka \geq 0.30$) du champ de vague (et donc les non-linéarités du mouvement batteur) des problèmes apparaissent dans

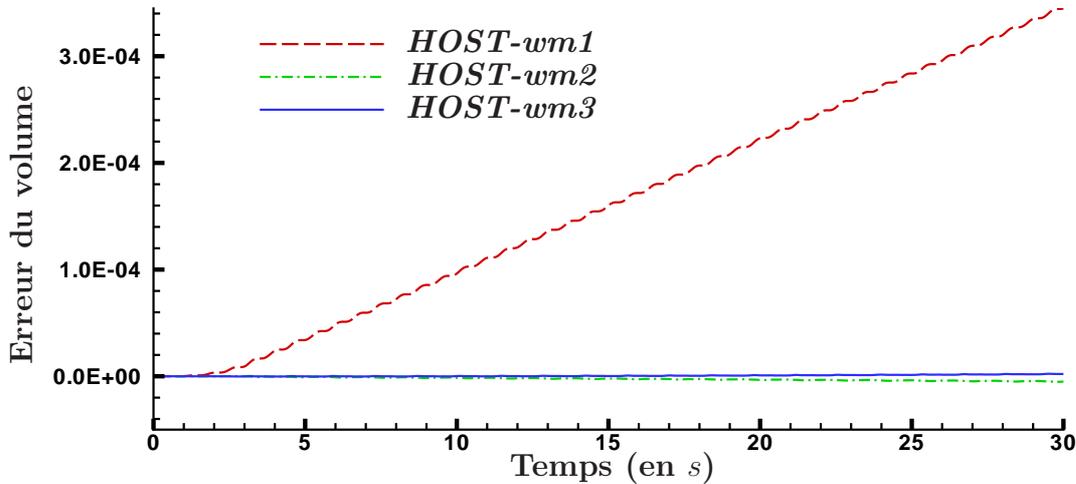


FIG. II.3.5 – Comparaison entre générations 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} ordres sur l'évolution du volume, $ka = 0.1$.

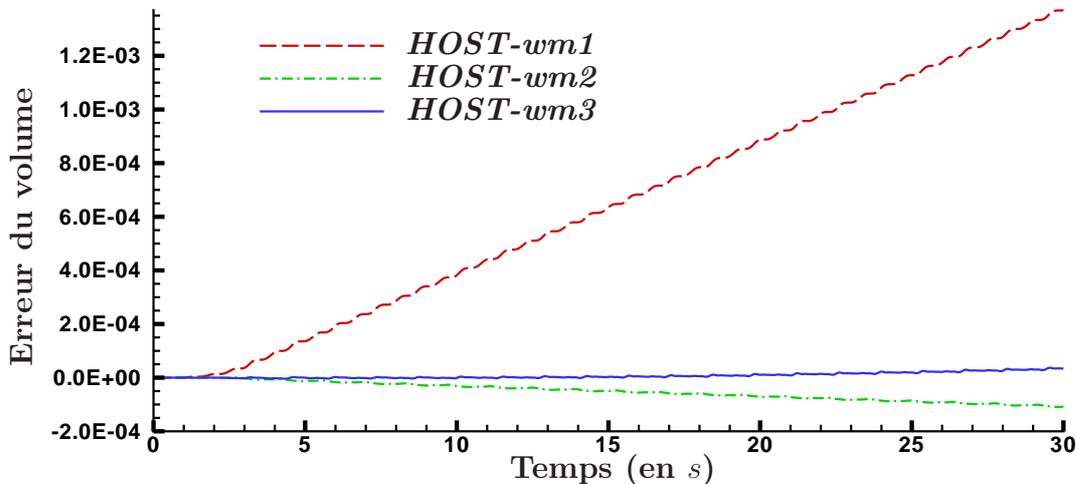


FIG. II.3.6 – Comparaison entre génération 1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} ordre sur l'évolution du volume, $ka = 0.2$.

la résolution avec le modèle *HOST-wm3*. De fortes instabilités du potentiel additionnel utilisé entrent en jeu et ne permettent pas de poursuivre la résolution. Ceci est explicable par le fait que, comme on l'a vu dans la section II.2.3 où l'on présente le développement jusqu'au 3^{ème} ordre de la condition batteur, des dérivées d'ordre 3 du potentiel des vitesses apparaissent. En se rappelant qu'une dérivation correspond à une multiplication par le nombre d'onde k dans l'espace de Fourier, les hauts modes peuvent être excités lors de dérivations successives, ceci du fait d'une amplification des erreurs numériques. On évoque ici différentes pistes qui peuvent être suivies en vue d'améliorer encore la génération (et notamment sa stabilité) : i) instaurer une méthode de filtrage des dérivées d'ordre élevé suivant N_z ou ii) pour le calcul de ces dérivées,

utiliser un schéma de dérivation type différences finies n'impliquant pas les mêmes problèmes que ceux évoqués avec notre méthode spectrale.

L'instabilité du modèle *HOST-wm3* n'étant pas encore complètement résolue nous allons étudier par la suite seulement le modèle *HOST-wm2* qui semble représenter un gain important en précision comme on a pu le voir précédemment, sans perte de stabilité notable.

II.3.2 Vague focalisée 2D dans une houle irrégulière

Afin de valider les améliorations présentées dans le chapitre précédent II.2, il convient d'étudier un cas où la génération est fortement non-linéaire. La génération d'un paquet de vagues focalisé nécessite l'utilisation de longueurs d'onde (et donc de mouvements du batteur) très différentes. Ainsi, des non-linéarités importantes peuvent apparaître dans le mouvement du batteur. Des essais ont été réalisés dans le bassin de houle de l'ECN sur des vagues focalisées et vont donc permettre une validation de la génération améliorée. On présentera tout d'abord les expériences avec les différents cas de houle puis ensuite, les résultats obtenus en comparant les élévations de surface libre ainsi que les pressions mesurées sous la surface libre.

II.3.2.1 Expériences

Les expériences réalisées correspondent à un paquet de vagues focalisé au sein d'une houle irrégulière. Ces expériences ont été conduites par Ocean Power Delivery (OPD) dans le bassin de l'ECN ($50\text{ m} \times 30\text{ m} \times 5\text{ m}$). L'état de mer 2D considéré est la superposition de deux champs de vagues :

- Un champ de vagues irrégulier défini par un spectre de Bretschneider : $H_s = \alpha \times 0.5\text{m}; T_p = 3.13\text{s}$
- Un paquet de vagues focalisé défini aussi par un spectre de Bretschneider : $H_s = \alpha \times 0.5\text{m}; T_p = 3.13\text{s}$ mais avec un ajustement des phases afin de manière à produire une vague focalisée au niveau d'une sonde dans le bassin, placée à $x_f = 16.1\text{ m}$.

avec H_s la hauteur significative de l'état de mer et T_p sa période de pic. Le paramètre α est un facteur d'amplitude permettant de faire varier les non-linéarités de l'état de mer. Le choix de ces paramètres a été effectué expérimentalement, OPD désirant effectuer des essais de houle extrême proche du déferlement. Avec le choix $\alpha = 1$, les paramètres H_s et T_p donnés plus haut décrivent ainsi un état de mer où un déferlement a lieu au moment où la vague focalisée dépasse la position du dispositif expérimental. Ensuite, d'autres essais ont été réalisés avec $\alpha = 0.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ afin d'étudier une large gamme d'amplitudes.

L'instrumentation mise en place a été choisie de manière à pouvoir obtenir des informations sur l'élévation de surface libre ainsi que sur le champ de pression sous cette surface libre. La figure II.3.7 représente schématiquement l'instrumentation utilisée lors de ces expériences. Les sondes de pression sont montées sur une plaque plane alignée avec le mouvement des particules fluides (le champ de vagues généré étant 2D). L'orifice de chaque sonde est quant à lui inséré dans un trou de la plaque de façon à minimiser les erreurs locales dues à sa présence. Le capteur en lui même affleure donc la surface de la plaque afin d'avoir une mesure précise de la pression.

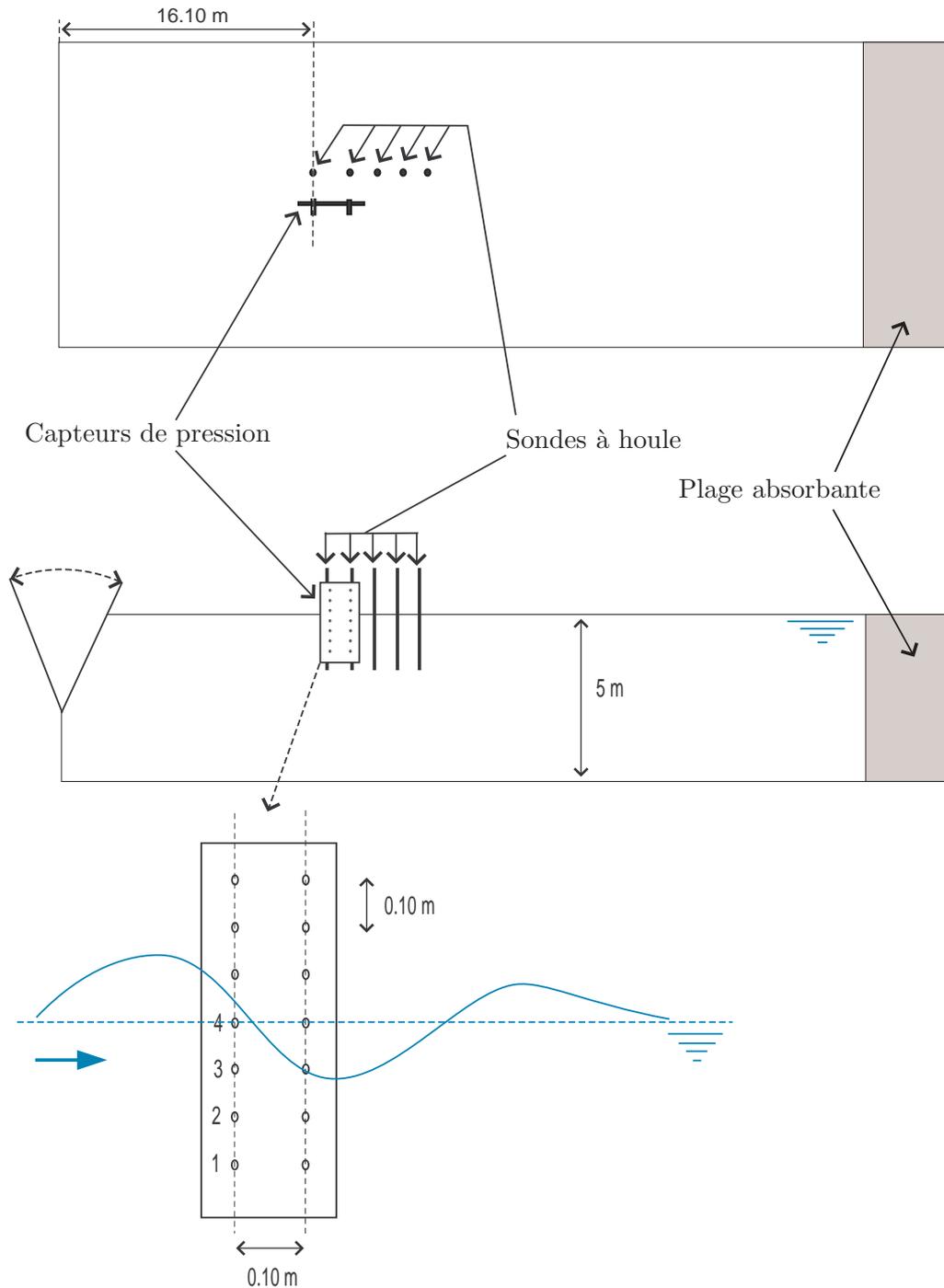


FIG. II.3.7 – Schéma du dispositif expérimental de mesure

II.3.2.2 Élévation de surface libre

Nous allons tout d'abord nous intéresser à l'élévation de surface libre au cours du temps au point de focalisation : $x_f = 16.1\text{ m}$ pour le cas $\alpha = 1$. Il est intéressant d'indiquer que la simulation numérique réalisée s'arrête lorsque l'on arrive au moment du déferlement (i.e. $t \simeq 20\text{ s}$). Les simulations numériques sont réalisées avec $N_x = 513$ modes sur la surface libre

et $N_z = 65$ modes au niveau du batteur. L'ordre HOS est fixé à $M = 8$ et on simule une durée $t = 20$ s pour un coût en temps CPU d'environ 300s sur un mono-processeur Opteron 2.4 GHz (on remarquera ici l'efficacité du modèle permettant la simulation d'états de mer extrêmes en si peu de temps).

La figure II.3.8 représente l'élévation de la surface libre en un point du bassin en fonction du temps. On compare les expériences (relevés des sondes à houle) et les simulations avec une génération 1^{er} et 2^{ème} ordre (courbes respectivement *HOST-wm1* et *HOST-wm2*).

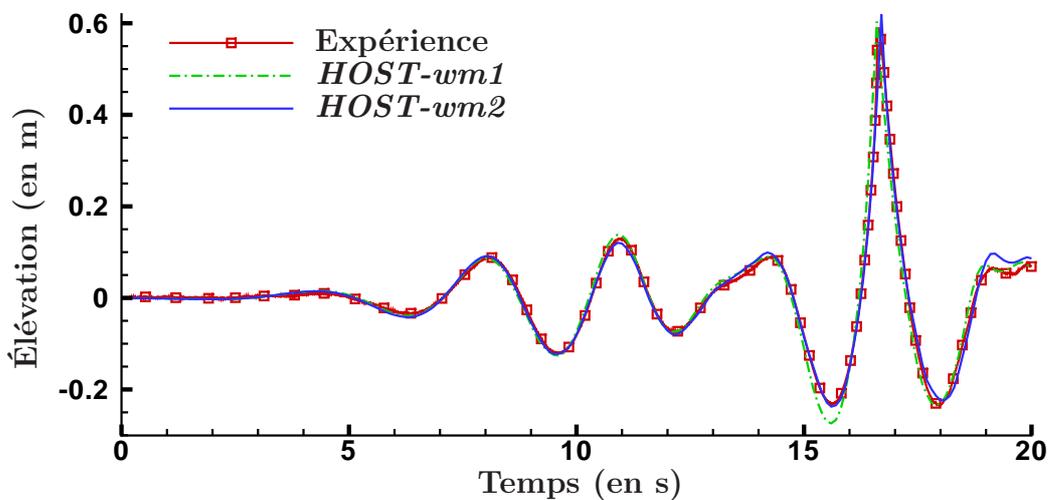


FIG. II.3.8 – Comparaison entre générations 1^{er} et 2^{ème} ordres et les expériences $\alpha = 1$.

Tout d'abord, on observe sur cette courbe que l'accord entre les simulations numériques et les expériences est globalement très bon. La vague focalisée, qui est un évènement fortement non-linéaire est bien simulé par les deux modèles qui se révèlent très précis et capables de modéliser de tels évènements extrêmes. On rappelle ici que l'on est assez proche du déferlement lors de cette focalisation (ce dernier ayant lieu à $t \simeq 20$ s). Cependant, il semble que le creux avant la focalisation soit mieux capté par le modèle *HOST-wm2*. On peut indiquer que pour t proche de la fin du calcul ($\simeq 20$ s), les comparaisons ne sont plus très bonnes du fait de la proximité du déferlement physique ne pouvant pas être modélisé par notre méthode qui devient défailante. Un zoom sur la partie intéressante du relevé temporel est fait sur la figure II.3.9.

On peut alors noter qu'effectivement, le modèle de génération au premier ordre *HOST-wm1* atteint ses limites dans le cas présenté ici. En effet, le creux avant la vague focalisée ainsi que la forme temporelle de cet évènement extrême ne sont pas captés précisément par ce modèle. Par contre, le modèle avec génération de la houle au second ordre, *HOST-wm2*, est très performant dans le cas présenté. Le creux ainsi que la forme de la vague focalisée sont très bien représentés par ce modèle et les erreurs observées avec le modèle linéaire de génération sont donc corrigées par le développement 2nd ordre dont l'intérêt est bien pointé ici.

On propose également une validation sur un cas où la génération est très faiblement non-linéaire. Dans ce cas là, on s'attend à avoir des résultats identiques avec les deux méthodes

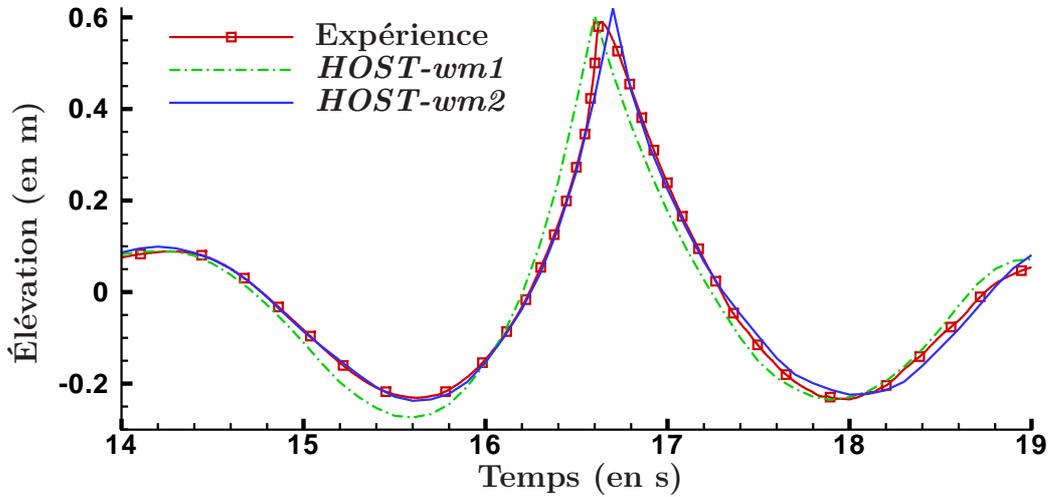


FIG. II.3.9 – Zoom de la figure II.3.8, comparaison entre génération 1^{er} et 2^{ème} ordre et les expériences $\alpha = 1$.

de génération. On choisit donc de comparer les expériences et les simulations numériques pour $\alpha = 0.10$. La figure II.3.10 présente cette comparaison.

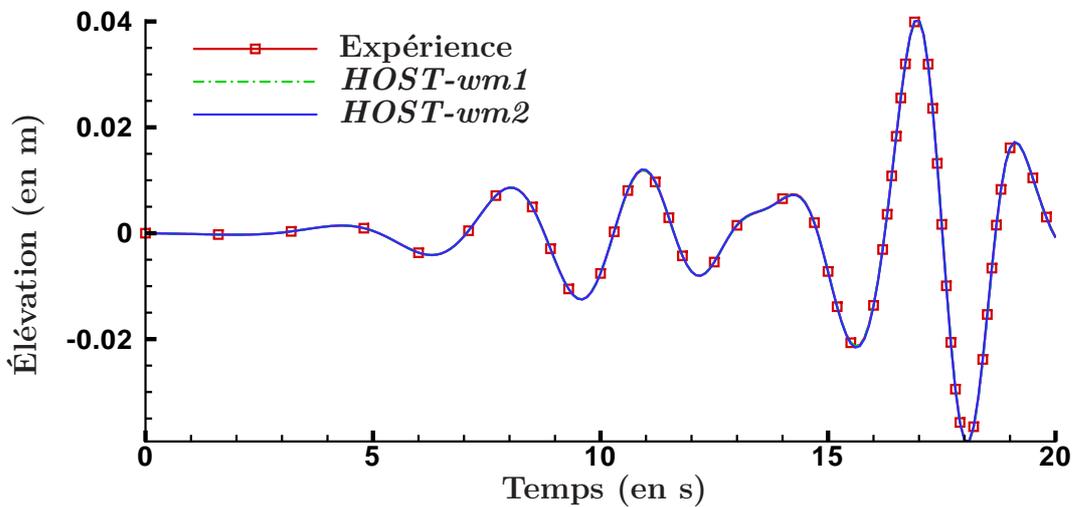


FIG. II.3.10 – Comparaison entre générations 1^{er} et 2^{ème} ordres et les expériences. $\alpha = 0.10$

On observe, comme attendu, que les trois courbes sont confondues. Pour un cas faiblement non-linéaire, il apparaît ainsi que la génération linéaire est suffisante. En fonction des cas de calcul et de la précision souhaitée, on pourra choisir d'utiliser l'une des deux méthodes de génération, *HOST-wm1* ou *HOST-wm2*, ce choix représentant une simple option du code de calcul global que l'on utilise.

Il semble alors intéressant d'étudier l'influence des non-linéarités plus en détail, afin de

discerner les cas où l'utilisation de *HOST-wm2* se révèle primordiale et de mieux cerner les domaines de validité respectifs des deux modèles.

II.3.2.3 Influence des non-linéarités

Dans cette section, on va s'intéresser aux différents cas étudiés expérimentalement (i.e. avec les différentes valeurs de α). Tout d'abord, le tableau II.3.1 présente l'erreur observée sur la hauteur H de la vague focalisée: $\epsilon_H = \frac{H}{H_{exp}}$.

α	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.0
<i>HOST-wm1</i>	6.3%	7.7%	10.0%	11.0%	8.8%	10.7%
<i>HOST-wm2</i>	2.0%	2.4%	2.8%	4.1%	2.1%	4.6%

TAB. II.3.1 – Erreur sur la hauteur de la vague focalisée, ϵ_H , en fonction du facteur d'amplitude α

Dans ce tableau, on peut remarquer la mise en lumière des non-linéarités du mouvement batteur. En effet, avec les mêmes paramètres numériques pour chacun des modèles, on remarque des différences notables dans la résolution du problème. Ainsi, la génération apparaît comme un phénomène non-linéaire comme l'est la propagation de la houle. Son influence sur la qualité des simulations n'est donc pas à négliger. D'une part, avec la génération traitée de manière linéaire, l'erreur sur la hauteur de la vague focalisée peut atteindre 10% malgré la résolution très précise de la propagation de vagues avec la méthode HOS. D'autre part, avec le modèle *HOST-wm2*, l'accord entre les expériences et les simulations numériques est très bon et grandement amélioré par rapport aux calculs réalisés avec *HOST-wm1*. Les erreurs sont cette fois ci toujours inférieures à 5%, même avec les cas les plus cambrés.

Cependant, l'erreur sur la hauteur de la vague focalisée est une mesure ponctuelle ne mettant pas forcément en lumière toutes les erreurs que l'on peut avoir entre une expérience et une simulation numérique. On a donc choisi de s'intéresser ensuite à l'erreur globale sur le relevé temporel dans le tableau II.3.2. Celle-ci peut être évaluée par :

$$\epsilon = \frac{\int_t |\eta_{probe}^{exp} - \eta_{probe}^{num}|}{\int_t |\eta_{probe}^{exp}|}$$

α	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.0
<i>HOST-wm1</i>	10.8%	12.1%	14.0%	17.8%	21.3%	21.8%
<i>HOST-wm2</i>	7.4%	8.1%	9.1%	11.9%	11.8%	11.0%

TAB. II.3.2 – Erreur globale d'évaluation, ϵ en fonction du facteur d'amplitude α

Ce tableau nous indique, comme précédemment, l'importance des non-linéarités du mouvement batteur. De plus, on se rend bien compte avec cette erreur globale sur l'ensemble du relevé temporel de l'augmentation de ces non-linéarités avec le facteur d'amplitude α . On peut remarquer dans les deux tableaux précédents le comportement singulier des cas $\alpha = 0.80$ et $\alpha = 0.90$. Dans ces deux cas de calcul, les erreurs observées ne confirment pas la tendance

observée auparavant, on pense donc peut-être à des imprécisions lors des mesures, même si les résultats sont probants y compris avec ce comportement différent que l'on a pas élucidé.

On observe donc pour conclure que la résolution avec une génération au 2^{ème} ordre permet un gain très important en précision, allant de 30% pour les cas modérément cambrés à 50% pour les cas les plus fortement non-linéaires.

II.3.2.4 Pression

Dans cette section, on va s'intéresser au calcul de la pression sous la surface libre, l'instrumentation expérimentale permettant en effet de telles mesures. On a validé dans les sections précédentes notre nouvelle méthode de génération avec les conditions sur le batteur résolues jusqu'au 2nd ordre, on va donc s'intéresser désormais à un cas d'application pratique du calcul des quantités sous la surface libre par la méthode développée dans la section I.3.2. Cette méthode permet de calculer toutes les quantités voulues sous la surface libre, à partir des informations connues sur celle-ci, et donc à fortiori la pression qui nous intéresse ici.

On va donc comparer les relevés temporels des sondes de pression avec les calculs en ces mêmes points. On s'intéresse aux sondes numérotées de 1 à 4 sur le schéma II.3.7. Ces sondes sont à des profondeurs respectives $z = -0.30m, z = -0.20m, z = -0.10m$ et $z = 0.00m$ (i.e. à la position de la surface libre au repos). Les conditions de houle sont les mêmes que précédemment avec $\alpha = 0.90$, permettant une simulation un peu plus longue, le déferlement ayant lieu à $t \simeq 33s$ pour ce cas-là. Les résultats sont présentés sur la figure II.3.11. L'ordonnée intitulée pression correspond à la pression dynamique de l'écoulement.

Il faut tout d'abord indiquer que les périodes où les capteurs sortent de l'eau correspondent aux parties plates sur les relevés temporels. Pour une meilleure comparaison, il a simplement été spécifié pour les calculs numériques que la pression ait une valeur constante durant ces excursions hors du fluide. En effet, les sondes utilisées présentent cette particularité. Une fois cela indiqué, on peut remarquer l'accord excellent que l'on a entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux. Pour chacune des sondes, qu'elle soit proche de la surface libre ou plus profonde le comportement est très bien représenté par notre modèle *HOST-wm2*. Un zoom sur la focalisation de la vague est donné sur la figure II.3.12.

Le très bon accord observé dans la figure II.3.11 est bien confirmé dans cette figure. On observe cependant que l'accord semble d'autant meilleur que la profondeur est importante. On peut expliquer ce phénomène en se rappelant que la précision de l'opérateur H_2 est la plus faible proche de la surface libre, de par la construction même de cet opérateur. Les quantités reconstruites dans le domaine fluide D sont approximées et peuvent être quelque peu erronées près de la surface libre comme on l'a vu dans la section I.3.2. Les petites erreurs numériques se voient donc amplifiées dans cette zone mais tout en gardant, comme on le voit ici, une précision tout à fait acceptable par rapport aux résultats expérimentaux.

Ces comparaisons démontrent une nouvelle fois les capacités de notre modèle à correctement simuler des événements fortement non-linéaires. De plus, on est également capable d'être très précis sur les dynamiques à l'intérieur du domaine fluide. Ainsi, on verra dans la section suivante que notre modèle, permettant par exemple de calculer des grandeurs comme le gradient de pression en n'importe quel point du domaine, peut s'avérer très intéressant pour calculer les

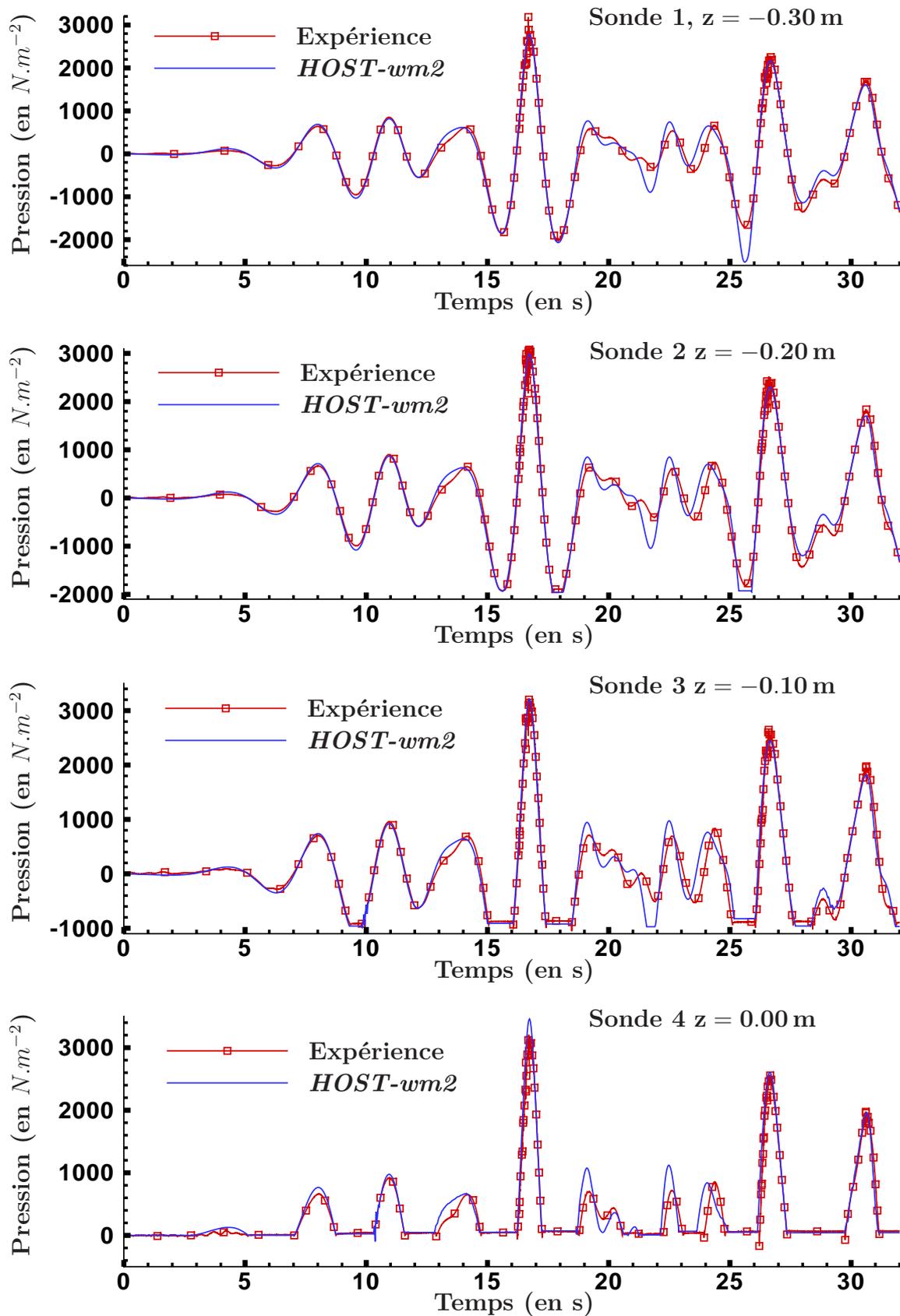


FIG. II.3.11 – Comparaison des pressions sous la surface libre entre les simulations HOST-wm2 et les expériences.

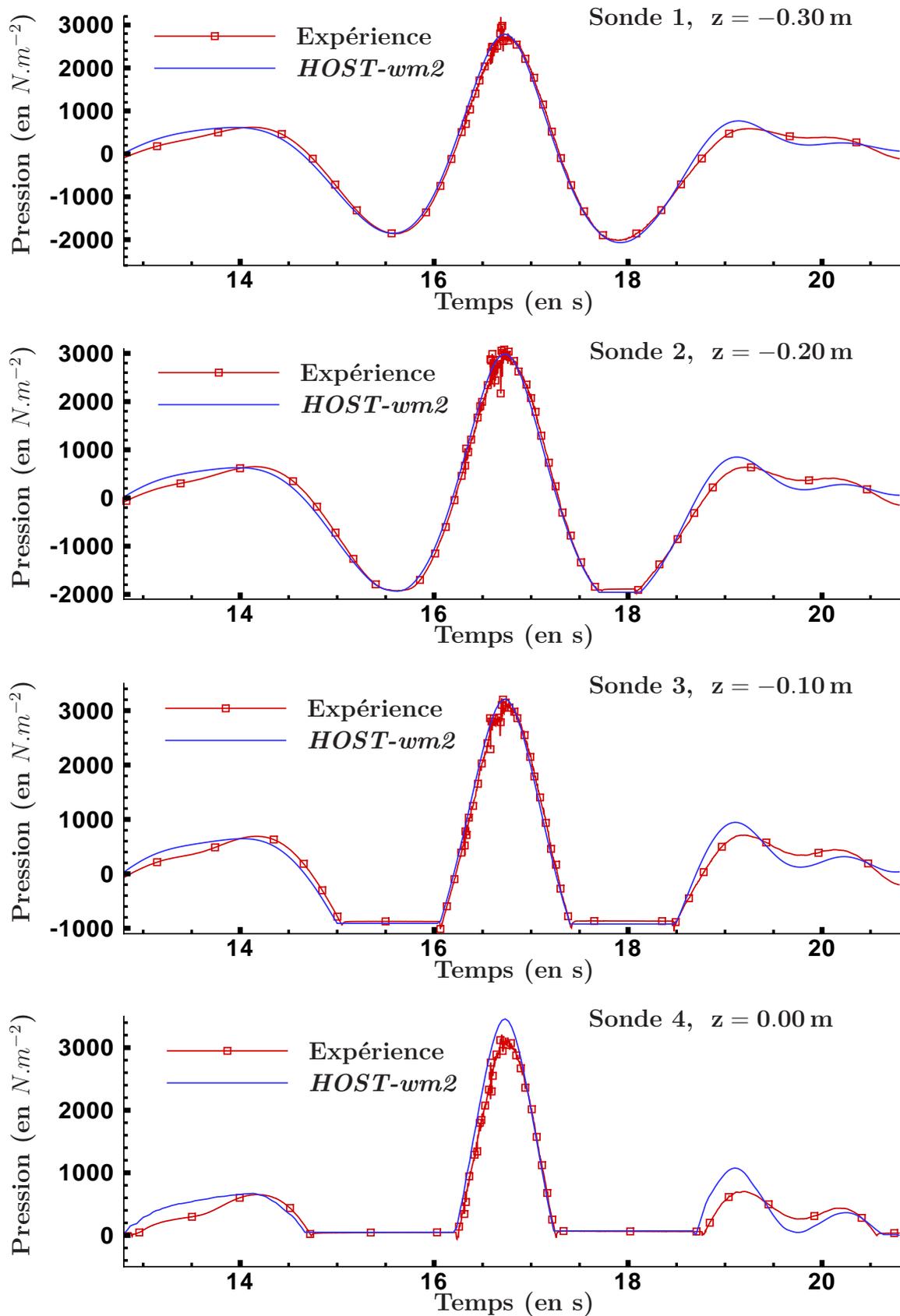


FIG. II.3.12 – Zoom de la figure II.3.11. Comparaison de pression entre les simulations HOST-wm2 et les expériences.

efforts sur une surface immergée par exemple.

II.3.2.5 Gradients de pression

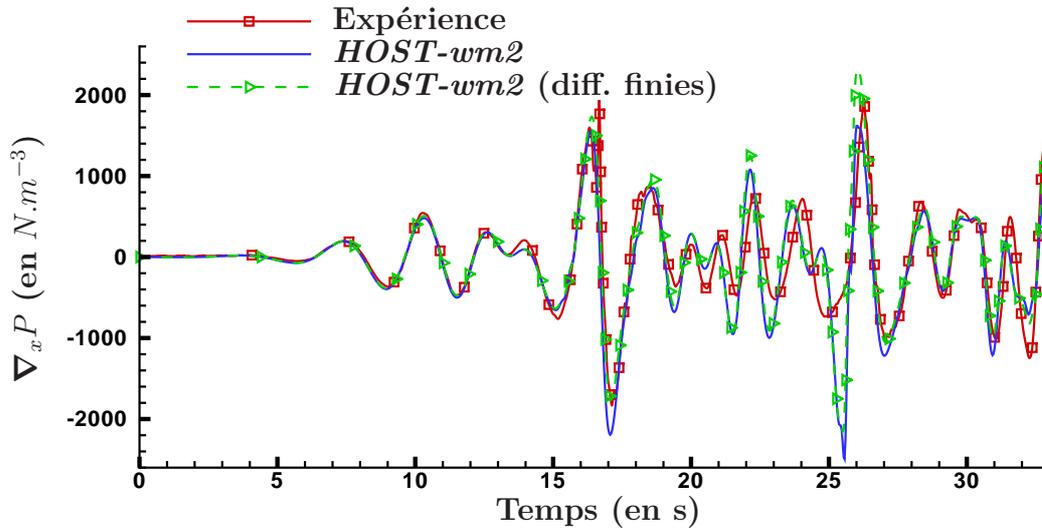
Il convient ici d'évoquer la motivation première des expériences réalisées par OPD. Ils disposent d'un code numérique permettant à partir de la connaissance de l'élévation de surface libre en un point de reconstruire le champ de vagues en un autre point en utilisant la relation de dispersion. Ceci est réalisé de trois manières différentes : théorie linéaire, théorie non-linéaire second ordre et enfin une approche lagrangienne (Grestner). Ces différentes théories sont efficaces pour des houles d'amplitudes faibles à modérées mais manquent de précision pour les vagues assez cambrées où, on l'a vu, notre modèle *HOST-wm2* est quant à lui très précis.

OPD a donc réalisé des mesures de pressions afin d'évaluer l'efficacité de chacune de leurs théories à prédire la cinématique des vagues. Les quantités les plus intéressantes dans le cas de calculs d'interaction houle/structure étant les accélérations, ils ont disposé des rangées de sondes comme indiqué sur le schéma du dispositif expérimental II.3.7. Ainsi, ils espéraient calculer l'accélération expérimentalement dans le fluide à partir des données issues de ces rangées de sondes (par un schéma de différences finies), dans le but d'effectuer ainsi leurs calculs hydrodynamiques sur leur dispositif de récupération d'énergie des vagues, Pelamis.

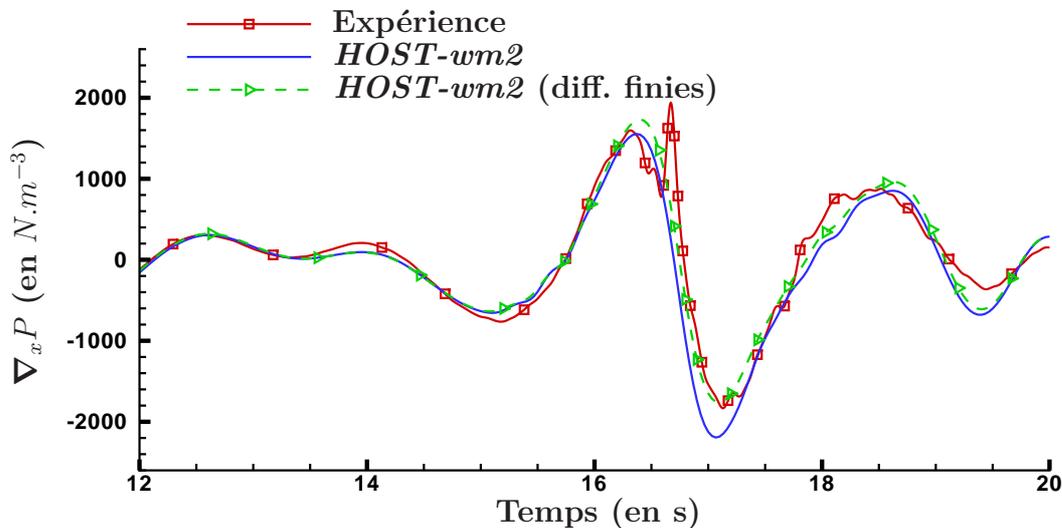
Le dispositif expérimental est composé de deux rangées de capteurs de pression contenant chacune sept capteurs également espacés de 10 cm chacun (de 30 cm au-dessus de la surface libre à 30 cm en dessous). Ceci permet donc une évaluation des gradients de pression (verticaux et horizontaux) quand les capteurs sont sous la surface libre. Pour le gradient de pression horizontal, on utilise simplement une différence finie sur les deux capteurs étant à la même profondeur. Pour le gradient vertical, on va détecter le nombre de capteurs étant sous la surface libre à un temps t donné et effectuer le calcul du gradient avec des formules de différences finies d'ordre élevé.

L'objectif est donc ici d'étudier la validité de l'approximation faite expérimentalement. En effet, on dispose d'une valeur très bien approchée par *HOST-wm2* de ce gradient de pression en n'importe quel point du domaine fluide. La courbe "HOST-wm2" sera donc considérée comme la référence, la courbe "Expérience" étant le résultat obtenu par différences finies. Afin d'améliorer la comparaison, il semble intéressant d'ajouter à ces deux courbes le résultat obtenu avec *HOST-wm2* mais en utilisant le schéma de différences finies pour le calcul du gradient (courbe intitulée "HOST-wm2 (diff. finies)"). Les résultats sont présentés sur la figure II.3.13 pour le gradient de pression horizontal ($\nabla_x P$) obtenu au niveau $z = -0.30m$. Il faut indiquer que la courbe issue des données expérimentales est filtrée afin d'éliminer les hautes fréquences qui n'ont pas lieu d'apparaître.

On peut remarquer que la forme globale de la référence numérique (courbe "*HOST-wm2*") est retrouvée avec les données expérimentales (courbe "Expérience"). Cependant, il apparaît clairement que la comparaison entre ces deux courbes n'est pas aussi bonne que celle de la pression. Ceci est essentiellement dû aux erreurs faites lors du calcul du gradient par différences finies. Pour le confirmer, on peut s'intéresser à la courbe "*HOST-wm2* diff. finies". Les écarts observés entre cette dernière et la courbe "*HOST-wm2*" sont uniquement dûs aux erreurs de l'approximation par différences finies. On observe que ces erreurs peuvent devenir assez importantes (notamment lors des dynamiques importantes). Un zoom sur l'arrivée de la vague


 FIG. II.3.13 – Gradient de pression horizontale en $z = -0.30m$

focalisée est fait sur la figure II.3.14.


 FIG. II.3.14 – Zoom de la figure II.3.13. Gradient de pression horizontale en $z = -0.30m$

On se rend encore mieux compte sur cette figure des carences du schéma de différences finies utilisé (ne s'appuyant que sur 2 points). En effet, on observe très bien que le gradient calculé juste après le passage de la vague focalisée ($t \simeq 17s$) est déficient avec l'approximation de différences finies (aussi bien avec les données expérimentales que numériques). De plus, il faut remarquer que ces comparaisons ont été faites à la profondeur $z = -0.30m$ qui est le cas le moins critique car, comme on l'a évoqué précédemment, la précision de l'opérateur H_2 est maximale en cette profondeur. Ainsi, ces effets seront amplifiés au fur et à mesure que l'on se rapprochera de la surface libre.

Ainsi, au niveau de la sonde $z = -0.30m$, le gradient de pression obtenu expérimentalement semble fiable si on n'en déduit qu'un ordre de grandeur de la quantité considérée. Mais, il a été conclu qu'OPD devait être très vigilant dans l'exploitation des mesures expérimentales car elles ne permettraient sans doute pas d'avoir la précision qu'ils escomptaient au départ. En effet, si de la précision est nécessaire pour, par exemple, évaluer une accélération maximale, on devra réfléchir à un autre dispositif expérimental ou bien à effectuer des simulations numériques précises. Une première approche pourrait être d'augmenter le nombre de sondes (notamment dans la direction x afin d'améliorer sensiblement le schéma de différences finies).

En conclusion, on a tout d'abord présenté dans la première section les validations effectuées sur les modèles améliorés *HOST-wm2* et *HOST-wm3* développés dans le chapitre précédent. Les validations ont montré les améliorations importantes obtenues avec ces modèles où la génération est prise en compte de manière non-linéaire (respectivement aux 2^{ème} et 3^{ème} ordres) par rapport au modèle initialement développé *HOST-wm1* où la génération est traitée de manière linéaire. Les validations ont été réalisées sur des cas de houles régulières plus ou moins cambrées pour lesquelles des données expérimentales étaient disponibles provenant d'expériences menées au bassin de houle de l'ECN. Des comparaisons sur des relevés temporels de sondes à houle ainsi que des études numériques de conservation du volume sont proposées. Ces validations se sont révélées très concluantes mais elles ont fait également apparaître le caractère instable du modèle *HOST-wm3*. Cette instabilité numérique est due au fait que, comme on l'a vu dans la section [II.2.3](#) où l'on présente le développement jusqu'au 3^{ème} ordre de la condition batteur, des dérivées d'ordre 3 du potentiel des vitesses apparaissent. Ainsi, des problèmes surviennent lors de ces dérivation successives. Des traitements particuliers auront à être étudiés pour une utilisation systématique de ce modèle *HOST-wm3*. Néanmoins, dans les tests menés, le fait de prendre en compte la génération au 2nd ordre réduit déjà la plus grande partie de l'erreur liée à la génération de la houle par rapport à *HOST-wm1*, ce même pour les cas les plus cambrés simulés où l'on était proche du déferlement.

Enfin, la section [II.3.2](#) présente les résultats obtenus sur les expériences réalisées par OPD dans le bassin de houle de l'ECN. Le cas de houle considéré est une vague focalisée 2D au sein d'une houle irrégulière. Des comparaisons entre les simulations numériques et les expériences sont présentées sur des élévations de surface libre ainsi que sur la pression à l'intérieur du domaine fluide. Ces expériences ont confirmé les aptitudes de la méthode et également l'amélioration apportée par le modèle *HOST-wm2*. Ces comparaisons ont été présentées au *25th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Ducrozet et al. [[37](#)].

Troisième partie
Simulations Océaniques

Table des matières

Introduction	101
III.1 Spécificités du problème	105
III.1.1 Problème de l'initialisation	106
III.1.1.1 Un état de mer réaliste?	106
III.1.1.2 Choix des paramètres	107
III.1.1.3 Du linéaire vers le non-linéaire	109
III.1.1.4 La reproduction	109
III.1.2 Méthodes d'analyse du champ de vagues	111
III.1.3 Probabilités des états de mer	113
III.1.3.1 Modèles linéaires	113
III.1.3.2 Modèles améliorés: modèles de Rayleigh-Stokes / Edgeworth-Rayleigh	115
III.1.3.3 Nombre de vagues	116
III.1.4 Validations	117
III.1.4.1 Propagation longue durée	117
III.1.4.2 Étude des échanges non-linéaires	122
III.1.5 Conclusion	125
III.2 Formation de vagues scélérates	127
III.2.1 Focalisation	127
III.2.1.1 Focalisation 2D	127
III.2.1.2 Focalisation directionnelle	129
III.2.2 Évolution longue	131
III.2.2.1 Domaine bidimensionnel	131
III.2.2.2 Domaine tridimensionnel	135
III.2.3 Influence de la directionnalité	138
III.2.3.1 Initialisation de la simulation	139
III.2.3.2 Évolution au cours du temps	144
III.2.3.3 Forme des vagues scélérates	153
III.2.3.4 Évolution temporelle du kurtosis et du spectre de l'élévation	156
III.2.4 Conclusion	162

Introduction

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la simulation d'états de mer dans un milieu ouvert, périodique, représentant l'océan. La connaissance précise des phénomènes pouvant prendre place lors de la propagation d'ondes de gravité au sein des océans représente un challenge pour les chercheurs depuis quelques décennies. Par exemple, les premiers modèles de type mode-coupling tels qu'on les a décrits dans l'introduction de la partie I (Phillips [103], Longuet-Higgins [83] et Hasselmann [69]) ont été développés en vue de résoudre les transferts d'énergie lors de l'évolution de spectres d'états de mer faiblement non-linéaires. La stabilité des trains de vagues a ensuite eu un attrait particulier à commencer par Lighthill [81] qui a démontré qu'un train de vagues stationnaire faiblement non-linéaire était instable face aux perturbations modales de grande longueur d'onde. L'article plus détaillé de Benjamin & Feir [10] fera acte par la suite, on parle dorénavant d'instabilités de Benjamin-Feir.

Ensuite, l'intérêt s'est porté sur l'évolution en temps de ces champs de vagues. C'est dans ce cadre que Zakharov [133] développe un modèle spectral résolvant dans le domaine temporel les interactions mode à mode. Les interactions entre 4 vagues sont développées dans cet article, l'extension aux interactions à 5 vagues ayant été réalisée par Stiassnie & Shemer [116] dont une application numérique peut être trouvée dans Annenkov & Shira [4]. Dans ce même article [133], Zakharov montrera que l'équation Non-Linéaire de Schrödinger (NLS) régit l'évolution temporelle des champs de vagues faiblement non-linéaires en ajoutant l'hypothèse de spectre à bande étroite à son équation précédente. Il est intéressant de noter que diverses méthodes ont permis d'arriver à l'équation NLS (Yuen & Lake [132] par la théorie de Whitham et Chu & Mei [25] par l'approche multi-échelle). Cette équation Non-Linéaire de Schrödinger régit de nombreux phénomènes de la physique non-linéaire : l'hydrodynamique qui nous intéresse ici mais également l'optique, l'acoustique, les condensats quantiques et de nombreux autres phénomènes non-linéaires instables.

Cette équation sert encore aujourd'hui de référence en ce qui concerne l'étude de la propagation de vagues faiblement non-linéaires. Entre autres (on se réfère à Kharif & Pelinovsky [76] pour une revue plus détaillée), diverses équations ont étendu le champ d'application de cette équation NLS. On pense au système Davey-Stewartson permettant une formulation en profondeur finie, à l'équation de Dysthe [41] qui inclut le quatrième ordre de non-linéarité ainsi qu'à ses versions modifiées permettant la prise en compte de spectre avec une largeur de bande plus importante (modèle Broad Modified Non-Linear Schrödinger, BMNLS : voir Trulsen & Dysthe [122] et Trulsen et al. [123]).

Cette méthode est encore très utilisée aujourd'hui pour les simulations grandes échelles telles que celles réalisées ici de par son efficacité et sa bonne précision dans la simulation de champs de vagues de cambrure modérée. Dans ce cadre, des simulations de vagues extrêmes, les vagues scélérates (ou *freak waves* en anglais), ont été réalisées par focalisation géométrique

ou spatio-temporelle de vagues ou avec l'étude d'instabilités de Benjamin-Feir. On pense par exemple aux études menées par Socquet-Juglard [111]. Cependant, compte tenu de leur amplitude importante, de leur cambrure élevée et de leur faible temps de vie, Kharif & Pelinovsky [76] indiquent que les hypothèses de faible non-linéarité et de spectre à bande étroite ne sont plus complètement vérifiées. Ainsi, l'utilisation de modèles complètement non-linéaires pour ce genre de simulation semble être intéressant. Mais, au vu des tailles de domaines simulés, ceci reste encore aujourd'hui un challenge. En prenant l'exemple d'un modèle classique BEM (voir Grilli et al. [59] par ex.), ce dernier sera trop lent pour étudier l'évolution d'états de mer sur des domaines de plusieurs km^2 et sur de longues durées, même dans la version accélérée par FMA (c.f. Fochesato & Dias [48]). Notre modèle HOS, très efficace, semble en revanche être assez adapté à ce genre de problèmes. Il faut indiquer que diverses études utilisant le modèle HOS ont déjà été réalisées : par exemple dans Brandini [18] et Brandini & Grilli [19] on trouve des études sur l'apparition naturelle de vagues scélérates en 2D. Dans Tanaka [118], [119] sont présentés des résultats sur l'évolution non-linéaire de spectre 3D. On peut indiquer également les travaux de Fuhrman & Madsen [54] ayant développé une méthode complètement non-linéaire en formulation Boussinesq, mais avec possibilité de simuler des profondeurs importantes. Cependant, dans Fuhrman & Bingham [53] l'étude numérique du modèle fait apparaître des temps de calcul nettement supérieurs à ceux que l'on peut obtenir avec le modèle HOS que l'on utilise ici (typiquement un rapport au moins 5 existe entre les deux modèles pour les cas de calcul classiques présentés dans cet article).

Les vagues scélérates sont un phénomène suscitant de plus en plus d'intérêt auprès de la communauté scientifique. En effet, comme indiqué plus haut, la compréhension complète de ce phénomène fortement non-linéaire ainsi que sa simulation sont un défi qui reste à relever. De nombreuses équipes de recherche étudient ce sujet comme l'indique l'intérêt porté aux récents workshops sur cette thématique (Rogue waves [98], [99], ICMS workshop on rogue waves [73]).

Ce qui était à l'origine considéré comme des mythes de marins, s'est progressivement transformé en domaine de recherche à proprement parler lorsque des mesures en mer réelle ont confirmé leur existence. On pense par exemple à la très connue vague du nouvel an ou vague de Draupner observée le 1^{er} janvier 1995 sur la plate-forme pétrolière Draupner en mer du Nord : voir figure III.2.9 issue de Haver [71]. Le caractère extrême apparaît dans le fait que lors de cette tempête, la hauteur significative (crête à creux) H_s était d'environ 11 m et la vague mesurée atteint quant à elle environ 26 m. On arrive alors à un rapport $H_{max}/H_s \simeq 2.3$. Ce paramètre sera typiquement celui utilisé pour désigner le caractère "scélérat" ou non d'une vague, la limite inférieure étant fixée à $H_{max}/H_s \geq 2.2$ (on se réfère par exemple aux récents articles de Rogue waves [99], même si d'autres auteurs requièrent l'utilisation d'un rapport 2.0 : voir par exemple Clauss [28]). Dès lors, de nombreux efforts ont été effectués pour essayer de comprendre la formation de telles vagues dans le but de les prévoir : les dégâts occasionnés (tant humains que matériels) par de telles vagues ne sont pas négligeables.

Ainsi, la compréhension du phénomène est nécessaire pour le dimensionnement des navires ou des plates-formes offshore par exemple, qui plus est en sachant que les modèles classiques utilisés encore de nos jours ne prennent pas en compte de tels événements alors qu'ils sont bel et bien réels (un listing des vagues scélérates observées en 2005 est par exemple donné par Didenkulova et al. [31]). De nombreux phénomènes peuvent être à l'origine de la formation de ces vagues extrêmes, voir Kharif & Pelinovsky [76] pour une revue récente les concernant. Et donc leur étude, que nous proposons ici, est très intéressante dans le sens où les simulations complètement non-linéaires 3D sur de larges domaines et durant de longs temps n'ont

été qu'abordées jusqu'à présent. Le développement d'un modèle efficace et précis permettant ce type de simulation est donc d'un intérêt de premier plan.

Cette partie se présente sous forme de deux chapitres :

- Tout d'abord, les spécificités du problème de la propagation de la houle en milieu ouvert et plus particulièrement de la simulation de l'océan de façon réaliste sont abordées. L'initialisation du calcul constitue un point primordial qui est détaillé, le code de calcul dans ce cas-là ne résolvant que la propagation des vagues et non leur génération. Il est donc essentiel de définir précisément la condition initiale du calcul afin de simuler un état de mer ayant un intérêt (de par sa similitude avec un état de mer réel ou de par une caractéristique intéressante à étudier). Les différentes méthodes d'analyse du champ de vagues seront données ainsi que les modèles théoriques utilisés par la suite. Différents cas de validation du modèle proposé sont également donnés.
- Dans le second chapitre, on va s'intéresser au problème spécifique des vagues scélérates. Deux types de simulation vont être réalisés. Tout d'abord, on étudiera la focalisation spatio-temporelle d'un champ de vagues 2D puis 3D. On laisse évoluer un état de mer directionnel dont les phases ont été ajustées "artificiellement" afin de produire un événement extrême *forcé*. Ensuite dans un deuxième temps un spectre de houle classique avec un choix initial de phases aléatoire est simulé sur une longue période et l'occurrence des vagues scélérates *naturelles* est étudiée. Enfin, l'influence de la directionnalité du champ de vagues est discutée: une étude paramétrique sur l'étalement directionnel est fournie sur divers paramètres tels que la hauteur des vagues scélérates, leur extension transverse et leur probabilité d'occurrence.

Chapitre III.1

Spécificités du problème

Dans ce chapitre seront détaillés les différentes spécificités du problème auquel on porte notre intérêt ici, à savoir la simulation d'états de mer en milieu ouvert. Le modèle HOS dans sa version périodique sera utilisé. On s'intéressera tout d'abord à un des éléments primordiaux lors de telles simulations qui est la définition d'une condition initiale qui représente un état de mer réaliste et qui soit également adaptée à notre modèle complètement non-linéaire. Lors de ce genre de simulations dites océaniques, un état de mer initial est spécifié et on étudie son évolution au cours du temps qui est calculée à l'aide d'un modèle de propagation des vagues, ici la méthode HOS. L'initialisation en vue de la reproduction d'états de mer donnés est également envisagée. On présentera ensuite les différentes méthodes d'analyse des champs de vagues nécessaires par la suite afin de qualifier l'état de mer simulé. Une attention particulière sera portée aux probabilités des états de mer avec une description des différents modèles (linéaires et non-linéaires) utilisés en tant que références dans le chapitre suivant. Enfin, une dernière section présentera des cas de calculs réalisés sur ce modèle périodique afin de valider son utilisation dans les conditions du chapitre suivant, à savoir des simulations sur de très longues durées d'états de mer assez cambrés.

On rappelle ici que dans le paragraphe I.1.1 a été présentée la mise en équation du problème avec des conditions aux limites de périodicité. Cela nous a amenés au système d'équations I.1.6 à résoudre. Le chapitre I.2 nous renseigne ensuite sur la méthode de résolution HOS impliquant une reformulation des CSL. Le système d'équations à résoudre devient donc :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0 && \text{dans D} \\ \phi(x,y=0) &= \phi(x,y=L_y) \\ \phi(x=0,y) &= \phi(x=L_x,y) \\ \eta(x,y=0) &= \eta(x,y=L_y) \\ \eta(x=0,y) &= \eta(x=L_x,y) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 && \text{en } z = -h \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} &= \left(1 + |\nabla\eta|^2\right) \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi^s \cdot \nabla\eta && \text{en } z = \eta(\mathbf{x},t) \\ \frac{\partial\phi^s}{\partial t} &= -g\eta - \frac{1}{2}|\nabla\phi^s|^2 + \frac{1}{2}\left(1 + |\nabla\eta|^2\right) \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 && \text{en } z = \eta(\mathbf{x},t) \end{aligned}$$

III.1.1 Problème de l'initialisation

On va détailler dans cette partie la méthode utilisée pour l'initialisation du champ de vagues. Tout d'abord, on présentera une approche classique consistant en une superposition linéaire de composantes et ensuite on s'intéressera à la pertinence d'un tel choix en sachant que l'on dispose d'un code de propagation complètement non-linéaire.

III.1.1.1 Un état de mer réaliste?

On choisit ici la condition initiale utilisée par Tanaka [118] lors de ses simulations. Le champ de vagues est défini par un spectre directionnel, typiquement un spectre de JONSWAP ou Pierson-Moskowitz (P-M). Ce sont des spectres typiquement utilisés lors de calculs offshore, pour le dimensionnement des structures par exemple. Dans cet article, Tanaka présente une relation entre l'amplitude complexe notée $b(\mathbf{k}, t)$ (grandeur initialement introduite par Zakharov [133]) et le spectre directionnel noté $\Phi(\omega, \theta)$. L'amplitude complexe est définie comme suit :

$$b(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2k}} \hat{\eta}(\mathbf{k}, t) + i \sqrt{\frac{k}{2\omega(\mathbf{k})}} \hat{\phi}^s(\mathbf{k}, t) \quad (\text{III.1.2})$$

avec le chapeau représentant la transformée de Fourier de la variable et :

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{gk} \quad \text{et } k = |\mathbf{k}|$$

On rappelle ici la relation inverse entre η et ϕ^s et b :

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\frac{k}{2\omega(\mathbf{k})}} [b(\mathbf{k}, t) + b^*(-\mathbf{k}, t)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (\text{III.1.3})$$

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2k}} [b(\mathbf{k}, t) - b^*(-\mathbf{k}, t)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (\text{III.1.4})$$

Si on note b_k les valeurs discrètes de $b(\mathbf{k}, t)$, on a la relation suivante avec le spectre :

$$|b_k|^2 = \frac{g^2}{2\omega_k^4} \Phi(\omega, \theta) \Delta k_x \Delta k_y \quad (\text{III.1.5})$$

avec $\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x}$ et $\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$ les discrétisations de l'espace modal.

On commence par calculer la norme $|b_k(t=0)|$ avec l'équation précédente (III.1.5) pour le spectre directionnel $\Phi(\omega, \theta)$ choisi. Ensuite, la phase de chaque mode $b_k(t=0)$ est déterminée de façon aléatoire dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ afin de construire notre champ de vagues irrégulier initial.

On définit le spectre directionnel $\Phi(\omega, \theta)$:

$$\Phi(\omega, \theta) = \psi(\omega) \times G(\theta)$$

Avec un spectre en fréquence, $\psi(\omega)$ qui est typiquement :

$$\psi(\omega) = \alpha_P g^2 \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}\right) \gamma^{\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_p)^2}{2\sigma^2\omega_p^2}\right]}$$

avec α_P la constante de Phillips et ω_p fréquence angulaire au pic du spectre. La directionnalité, $G(\theta)$ est quant à elle définie par la fonction suivante, avec n le paramètre de directionnalité :

$$G(\theta) = \begin{cases} A_n \cos^n \theta, & |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |\theta| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{III.1.6})$$

avec,

$$A_n = \begin{cases} \frac{(2^p p!)^2}{\pi(2p)!}, & \text{si } n = 2p \\ \frac{(2p+1)!}{2(2^p p!)^2}, & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

Il est important de remarquer que, par la suite, l'espace et le temps sont adimensionnalisés de telle manière que ω_p et g sont tous deux égaux à 1. On aura ainsi, un spectre de JONSWAP directionnel avec les paramètres suivants :

$$\alpha_P = 3.279 E, \quad \gamma = 3.3, \quad \sigma = \begin{cases} 0.07 (\omega < 1), \\ 0.09 (\omega \geq 1) \end{cases} \quad (\text{III.1.7})$$

où E représente la densité d'énergie adimensionnelle du champ de vagues et peut être reliée à la hauteur significative (adimensionnelle) par : $H_s \simeq 4\sqrt{E}$ (cf. Tanaka [119]). Le choix des paramètres sera traité dans le paragraphe suivant.

On indique ici que l'on peut également définir un spectre de Pierson-Moskowitz (P-M) directionnel en choisissant les paramètres suivants :

$$\alpha_P = 5 E, \quad \gamma = 1.0 \quad (\text{III.1.8})$$

La relation entre α_P et E dans les équations (III.1.7) & (III.1.8) vient du fait que :

$$\int_0^\infty \omega^{-5} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}\right) \gamma \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_p)^2}{2\sigma^2\omega_p^2}\right] d\omega = \begin{cases} \frac{1}{3.279} & \text{si } \gamma = 3.3, \\ \frac{1}{5} & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (\text{III.1.9})$$

D'autre part, il est essentiel de remarquer que chaque composante du spectre est superposée linéairement aux autres, aucune interaction non-linéaire n'est prise en compte dans une telle approche. Il convient donc de se demander ce qui se passe dans un code complètement non-linéaire lorsque l'initialisation est faite de manière linéaire. Ceci sera traité dans le paragraphe III.1.1.3.

III.1.1.2 Choix des paramètres

Afin de déduire la densité d'énergie adimensionnelle du champ de vagues, E , qui est l'inconnue déterminant le type d'état de mer que l'on va considérer dans nos simulations, on va utiliser les mesures en mer reportées dans la note technique de Haver et al. [72] ou dans Haver

[70]. Ces données sont extraites de relevés sur quatre différentes plates-formes pétrolières en mer du Nord. Ceux-ci sont réalisés avec en général un enregistrement de 20 minutes toutes les 3 heures. Les données ont été mesurées sur la période 1973-2001 et représentent donc une base très intéressante pour les spécifications de paramètres dont nous avons besoin. En effet, environ 70000 enregistrements sont répertoriés et donc leur fiabilité, statistiquement parlant, est très bonne. Un diagramme de probabilité d'occurrence (*scatter-diagram* en anglais) est fourni dans cet article : il donne les probabilités d'occurrence de chaque état de mer défini par la période de pic T_p et la hauteur significative H_s . Ce diagramme est reproduit dans la figure III.1.1.

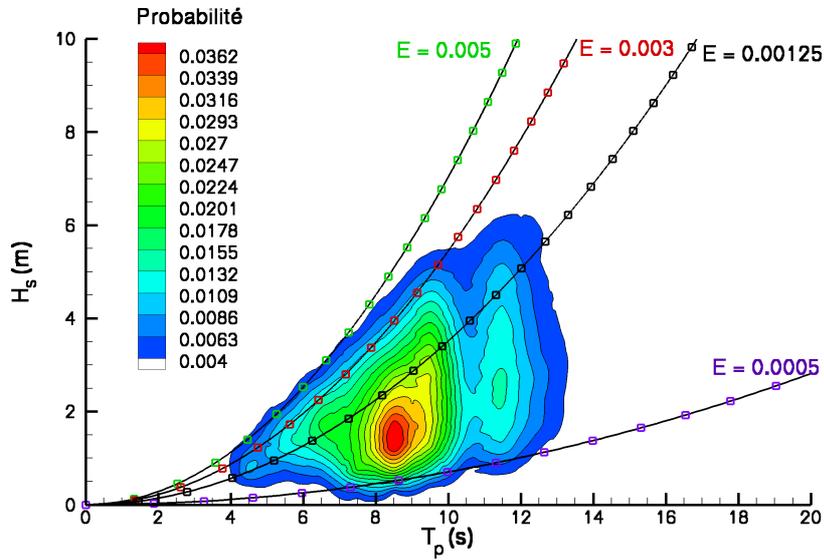


FIG. III.1.1 – Probabilités d'occurrence (*scatter-diagram*) des états de mer en mer du Nord. Données sur la période 1973-2001 issues de Haver et al. [72]

On fait le lien ensuite entre ce diagramme (i.e. H_s et T_p) et la grandeur d'intérêt dans la formulation du spectre précédente, à savoir E . Il faut noter que ce diagramme fait intervenir les quantités dimensionnelles H_s et T_p . Le lien vu précédemment : $H_s \simeq 4\sqrt{E}$ faisait intervenir la hauteur significative adimensionnelle. Donc, sur le diagramme, nous avons reporté différentes valeurs de l'énergie adimensionnelle E (représentées chacune par une courbe dans ce diagramme dimensionnel). On peut remarquer que la courbe $E = 0.005$ définit très bien la limite supérieure du diagramme. Cette limite indique approximativement les hauteurs significatives les plus grandes pouvant être atteintes (typiquement lors de tempêtes). Ainsi, nous choisissons ce paramètre comme étant très représentatif des états de mer les plus extrêmes que l'on peut rencontrer en mer du Nord (i.e. les fortes tempêtes).

Il faut indiquer ici que cette approche est décrite par Socquet-Juglard [111] sous une autre forme, faisant apparaître la cambrure moyenne d'un état de mer définie par :

$$s = k_p \bar{a} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 H_s}{g T_p^2} \quad (\text{III.1.10})$$

Ainsi,

$$E = \frac{s^2 g^2 T_p^4}{2 (2\pi)^4} = \frac{s^2 g^2}{2\omega_p^4} \quad (\text{III.1.11})$$

On retrouve ainsi le résultat donné par Socquet-Juglard [111] qui est que la courbe $s = 0.1$ représente très bien la majorité des états de mer qu'il est possible de rencontrer par tempête en mer du Nord.

III.1.1.3 Du linéaire vers le non-linéaire

Il a été démontré par Dommermuth [32] que la définition d'un champ de vagues initial adéquat n'est pas chose aisée et qu'elle peut conduire à des instabilités numériques importantes si elle n'est pas réalisée de façon correcte. Cependant, Dommermuth indique que des simulations complètement non-linéaires peuvent être initialisées de façon linéaire en sachant que dans ce cas-là, une période de transition existe lors de laquelle le champ de vagues va "devenir" complètement non-linéaire.

Cette période de transition est prise en compte grâce à l'utilisation d'un schéma de relaxation permettant l'utilisation de ces conditions initiales linéaires. Les CSL peuvent être écrites sous la forme suivante où les composantes non-linéaires sont extraites (F et G) :

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + g\eta = F, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - W^{(1)} = G$$

Dommermuth [32] propose d'ajuster ces termes non-linéaires comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^s}{\partial t} + g\eta &= F \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{T_a} \right)^n \right] \right) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - W^{(1)} &= G \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{T_a} \right)^n \right] \right) \end{aligned}$$

Différents choix de paramètres ont été envisagés par Dommermuth [32]. Conformément aux conclusions données dans cet article, on choisira $T_a = 10 T_p$ et $n = 4$.

III.1.1.4 La reproduction

Pour certaines applications, il peut être nécessaire de reproduire une élévation observée à un point donné, ou bien avoir certaines caractéristiques pour les vagues en un certain endroit du domaine. Ceci n'est pas aisément obtenu avec l'approche décrite précédemment pour l'initialisation. En effet, on ne spécifie que des valeurs globales (période de pic T_p , hauteur significative H_s ou autre). La dispersion des phases (prises aléatoirement dans l'intervalle $[0, 2\pi]$) implique que l'on ne connaît pas explicitement, avant la résolution, des grandeurs locales en un point du domaine par exemple.

Ainsi, il apparaît intéressant d'être capable de déterminer une condition initiale à même de reproduire une déformée de surface libre donnée par exemple. Ce travail est en cours de réalisation par E. Blondel [12] dans le cadre de sa thèse. L'idée est d'utiliser un processus de reconstruction itératif à partir d'un signal de sonde à houle avec une solution analytique pour

la reconstruction premier et deuxième ordre et les ordres supérieurs évalués par méthode HOS.

On peut également s'intéresser à une focalisation partielle des composantes de l'état de mer. Dans ce cas, le champ de vagues initial est décrit par un spectre de JONSWAP directionnel comme expliqué précédemment (c.f. section III.1.1), mais les composantes du spectre ont leurs phases ajustées afin qu'une grande quantité d'énergie soit localisée en un point du domaine de calcul (on choisira le milieu du domaine) à un temps donné : on parle de focalisation spatio-temporelle.

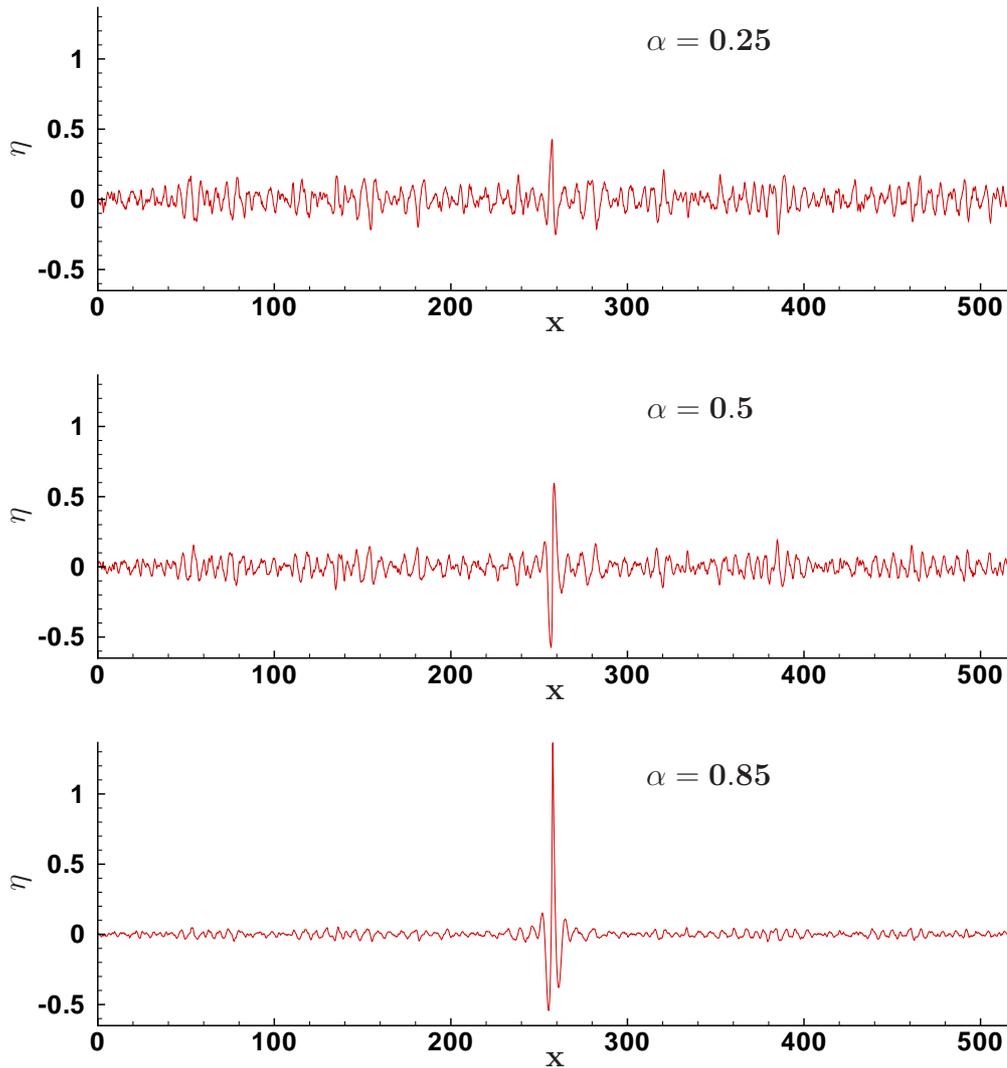
Ceci est réalisé par un choix judicieux de la distribution initiale de phases des composantes $b_k(t=0)$. Pour un champ de vagues classique, uniformément réparti sur le domaine de calcul, on a vu que l'on choisissait une répartition aléatoire dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. En réduisant cet intervalle à un intervalle de la forme $[0, 2\pi(1-\alpha)]$, une partie de l'énergie contenue dans le spectre s'accumule en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On choisit alors, par un petit maniement des phases, de translater le point de focalisation au centre du domaine $\mathbf{x} = (L_x/2, L_y/2)$. La quantité d'énergie accumulée en ce point, donc l'amplitude de l'évènement extrême, peut être ajustée en réglant le paramètre α . Plus celui-ci est proche de 1 plus l'accumulation d'énergie est importante avec à la limite, si $\alpha = 1$, la totalité de l'énergie du spectre concentrée en le centre du domaine. Il est à noter que cette méthode, basée sur une répartition artificielle des phases, peut mener à des champs de vagues très peu réalistes (notamment quand α est très proche de 1). En effet, si la totalité de l'énergie est accumulée en un seul point, on se rend bien compte que les amplitudes atteintes seront irréelles. On utilisera ici typiquement $\alpha = 0.15$ pour les simulations en 3D et $\alpha = 0.25$ pour les simulations en 2D. On considère deux choix différents de paramètres car pour le cas 3D, l'énergie contenue dans tout le champ de vagues (plan $x-y$) tend à se concentrer en le point milieu du domaine $\mathbf{x} = (L_x/2, L_y/2)$, alors que pour le cas 2D, l'énergie est focalisé sur la ligne $\mathbf{x} = (L_x/2, y)$. Donc on se rend bien compte que α doit être inférieur pour le cas 3D que pour le cas 2D pour une amplitude similaire de l'évènement extrême. La figure III.1.2 indique l'influence du paramètre α sur l'évènement extrême formé dans le cas 2D.

On remarque sur cette figure que plus α est grand et proche de 1, plus la vague focalisée va être de grande amplitude. Comme dit précédemment, la vague obtenue avec $\alpha = 0.85$ par exemple n'est pas réaliste : on obtient $\frac{H_{max}}{H_s} > 10$. Le choix du paramètre α reste empirique, tout en prenant en compte la limitation précédente. On peut par exemple choisir α tel que les résultats soient compatibles avec des observations (voir eg Guedes Soares et al. [62] & [63]).

Une fois que l'on a défini l'évènement à l'instant de la focalisation, on réalise une propagation linéaire inverse pendant un temps T_i . On entend par propagation linéaire inverse, une propagation d'un état de mer de manière linéaire vers les temps négatifs. C'est-à-dire que chaque composante du champ de vagues (i, j) est propagée à sa propre fréquence angulaire : $\omega_{ij} = \sqrt{gk_{ij}}$ pendant une durée dite de propagation inverse T_i . En reprenant la décomposition sur la base modale (I.1.8) :

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t - T_i) = & \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij}^{\phi}(t) \exp [i(k_{x_i}x - \omega_{ij}T_i)] \exp [i(k_{y_j}y - \omega_{ij}T_i)] \\ & \times \frac{\cosh(k_{ij}[z + h])}{\cosh(k_{ij}h)} \end{aligned}$$

On va ainsi obtenir une condition initiale pour notre champ de vagues que nous allons laisser


 FIG. III.1.2 – Influence du paramètre α sur le champ de vague focalisé

évoluer jusqu'à $t \simeq T_i$ pour obtenir l'évènement nous intéressant. Ceci est une première approche en vue de la reproduction. En effet l'évènement simulé réellement (i.e. lorsque $t \simeq T_i$) sera un peu différent de l'original "cible" et ceci dû aux effets non-linéaires lors de la propagation. En particulier, on peut noter que l'instant de focalisation n'est pas exactement T_i car la vitesse non-linéaire de propagation est différente de celle linéaire (la focalisation aura lieu typiquement pour $t > T_i$).

III.1.2 Méthodes d'analyse du champ de vagues

Il existe différentes méthodes pour analyser un champ de vagues afin de récupérer les informations importantes le concernant. Les grandeurs nous intéressant par la suite sont la hauteur significative, H_s , l'élévation et la hauteur crête à creux maximale η_{max} , H_{max} ainsi que la taille des vagues dans chacune des directions: L_x dans la direction moyenne de propagation et L_y

dans la direction transverse.

La méthode utilisée pour l'analyse d'un champ de vagues 2D est une méthode classique d'analyse vague par vague. Chaque vague est isolée par une méthode repérant les passages à zéro (zero-crossing, voir schéma III.1.3) : on définit ensuite une vague comme étant l'élévation de surface libre comprise entre deux passages à zéro montants (zero up-crossing) ou entre deux passages à zéro descendants (zero down-crossing). Chacune de ces vagues est détectée et on obtient ses caractéristiques propres : hauteur crête à creux H et longueur d'onde λ_x .

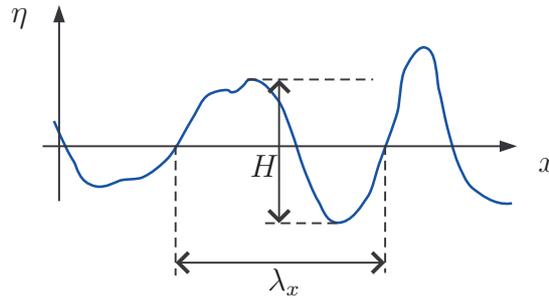


FIG. III.1.3 – Définition d'une vague up-crossing : hauteur H et longueur d'onde λ_x

On effectue des sorties de l'élévation de surface libre (typiquement 10 sorties par période de pic) qui sont analysées par cette technique. La totalité des vagues présentes dans le domaine sont extraites et ce à chaque sortie désirée (i.e. à un pas de temps fixé). Ceci permettra d'obtenir des informations globales nous intéressant sur le champ de vagues : la hauteur significative H_s (définie comme la moyenne du tiers supérieur des hauteurs de vagues observées), η_{max} , H_{max} (les maxima) et λ_0 la longueur d'onde moyenne.

En ce qui concerne l'approche utilisée pour l'analyse de champs de vagues 3D, elle reste identique. À savoir, on choisit de définir la hauteur de vague comme étant la hauteur crête à creux dans la direction moyenne de propagation (cette approche atteindra bien sûr ses limites lorsque l'étalement directionnel de l'état de mer sera très important). En utilisant cette approche, il est apparu convenable d'effectuer l'analyse vague par vague précédente (zero-crossing dans la direction x qui est la direction moyenne de propagation) successivement sur chacune des lignes de maillages parallèles à (Ox) . Ceci va donc nous permettre d'obtenir pour le champ de vagues 3D des informations selon la direction moyenne de propagation : H_s , η_{max} , H_{max} et λ_0 .

Il semblait enfin intéressant d'analyser, non seulement dans la direction moyenne de propagation le champ de vagues, mais également dans la direction transverse. Cette approche, plus rarement utilisée dans la littérature est tout à fait pertinente lorsque l'on prend en compte la directionnalité de la houle. En effet, l'étalement dans la direction transverse est une donnée importante en ce qui concerne l'impact qu'aura telle ou telle vague (en terme de vagues extrêmes notamment). Ainsi, on a mis en place une analyse par passage à zéros des vagues dans la direction transverse y afin de déterminer leurs caractéristiques, à savoir leur hauteur H et leur longueur d'onde λ_y . On peut également s'intéresser à la longueur des crêtes dans cette direction transverse, notée λ_c et qui sera utilisée par la suite.

III.1.3 Probabilités des états de mer

On va décrire ici différentes théories statistiques permettant de décrire les états de mer. Tout d'abord seront présentés les modèles basés sur la théorie linéaire et ensuite on envisagera des modèles tenant compte d'une certaine non-linéarité dans les champs de vagues analysés. Ce sont ces modèles qui seront utilisés comme comparaison dans les simulations faites par la suite (chapitre III.2). Enfin, une méthode permettant l'approximation du nombre de vagues dans un état de mer est présentée.

III.1.3.1 Modèles linéaires

Il a été postulé par Longuet-Higgins [82] que la loi de répartition de l'élévation de surface libre linéaire est une gaussienne. Il convient d'expliquer ce qu'est une telle répartition.

On considère l'élévation de surface libre $\eta(\mathbf{x},t)$ comme une variable aléatoire. La moyenne est définie par :

$$\mu = E[\eta] \quad (\text{III.1.12})$$

avec $E[.]$ qui est l'espérance mathématique. La variance est quant à elle définie par :

$$V = \sigma^2 = E[(\eta - \mu)^2] \quad (\text{III.1.13})$$

σ représentant l'écart-type du signal. On définit deux types de fonctions de probabilité : la fonction de répartition notée $F(z)$ et la fonction densité de probabilité que l'on notera $f(z)$. La fonction de répartition correspond à la probabilité que le signal (ici $\eta(\mathbf{x},t)$) prenne une valeur supérieure à la variable z :

$$F(z) = P[\eta(\mathbf{x},t) < z] \quad (\text{III.1.14})$$

avec $P[\text{condition}]$ la probabilité que "condition" soit vérifiée. Le fonction densité de probabilité f est définie par :

$$f(z) = \frac{dF}{dz} \quad (\text{III.1.15})$$

Ces deux fonctions vont alors s'exprimer comme tel pour le cas d'une répartition gaussienne :

$$F_G(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left[-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \quad (\text{III.1.16})$$

$$f_G(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{III.1.17})$$

La figure III.1.4 représente ces deux fonctions avec $\mu = 0$ et $\sigma = 0.5$.

La loi de répartition de la hauteur crête à creux H peut quant à elle être approchée par une répartition de Rayleigh en première approximation (i.e. champ de vagues linéaire défini par un

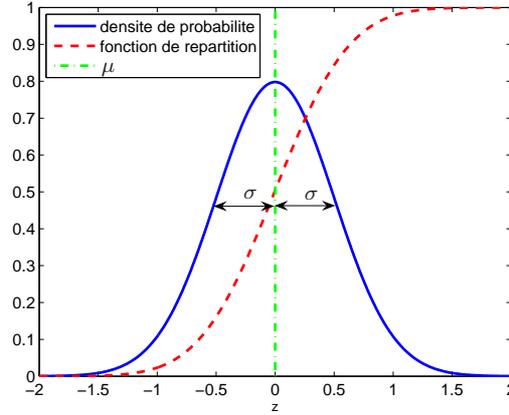


FIG. III.1.4 – Fonction densité de probabilité et fonction de répartition Gaussienne

spectre supposé à bande étroite, c.f. Longuet-Higgins [82]). Cette loi de répartition peut être exprimée par :

$$F_R(z) = 1 - \exp\left[-\frac{z^2}{\sigma_H^2}\right] \quad (\text{III.1.18})$$

$$f_R(z) = \frac{2z}{\sigma_H^2} \exp\left[-\frac{z^2}{\sigma_H^2}\right] \quad (\text{III.1.19})$$

qui peut être réécrit sous la forme (c.f. Nerzic & Prevosto [95]) :

$$F_R(z) = 1 - \exp\left[-\frac{\bar{z}^2}{\theta^2}\right] \quad (\text{III.1.20})$$

$$f_R(z) = \frac{2z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\bar{z}^2}{\theta^2}\right] \quad (\text{III.1.21})$$

avec $\bar{z} = z/H_s$, la variable adimensionnée par la hauteur significative et θ est un paramètre d'échelle qui prend les valeurs $(1/2)^{1/2}$ pour des hauteurs de vagues, ou $(1/8)^{1/2}$ pour des hauteurs de crêtes. La figure III.1.5 représente ces deux fonctions avec $\sigma = 0.5$.

On va définir également quelques fonctions qui seront utilisées par la suite :

- Le skewness (ou coefficient d'asymétrie) qui est une mesure de l'asymétrie verticale de la surface libre (i.e. en particulier les crêtes plus hautes que les creux avec des houles cambrées) notée μ_3) est exprimée par :

$$\mu_3 = \frac{E[(z - \mu)^3]}{\sigma^3} \quad (\text{III.1.22})$$

Il est égal à 0 pour une variable aléatoire à distribution normale.

- Le kurtosis (ou coefficient d'aplatissement) qui quantifie le caractère "pointu" (> 0) ou "aplati" (< 0) de la distribution par rapport à la distribution normale prise comme référence. Il est noté μ_4 et est exprimé par :

$$\mu_4 = \frac{E[(z - \mu)^4]}{\sigma^4} \quad (\text{III.1.23})$$

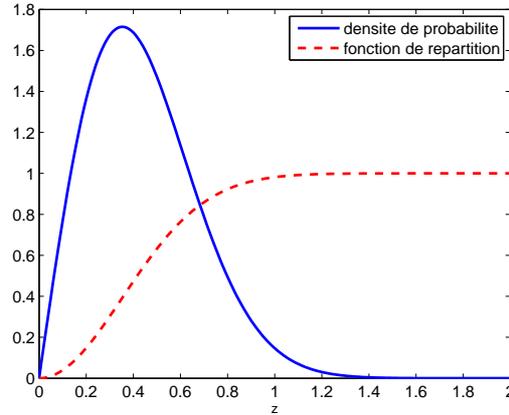


FIG. III.1.5 – Fonction densité de probabilité et fonction de répartition selon loi de Rayleigh

Il est égal à 3 pour une variable aléatoire à distribution normale.

III.1.3.2 Modèles améliorés : modèles de Rayleigh-Stokes / Edgeworth-Rayleigh

Les modèles dit de Rayleigh-Stokes sont des modèles où la surface libre n'est plus considérée comme un processus gaussien à bande étroite au premier ordre d'approximation. On va prendre en compte les non-linéarités en utilisant l'expansion de Stokes au second ordre (c.f. Tayfun [120]) ou au troisième ordre (c.f. Vinje [126]), et ce associé à la répartition gaussienne décrite dans la section précédente. On se limitera ici à l'approche au second ordre en conservant l'hypothèse de spectre à bande étroite dont on va donner les principaux résultats tels que reportés par Socquet-Juglard dans sa thèse [111] :

- Répartition de l'élévation de surface libre η (adimensionnalisée par H_s) : La loi de répartition a pour forme :

$$F(\eta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \int_{\eta \leq x + \sigma/2(x^2 - y^2)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy \quad (\text{III.1.24})$$

Le terme dominant de la fonction densité de probabilité est :

$$f(\eta) \simeq \frac{1 - 7\sigma^2/8}{\sqrt{2\pi(1 + 3G + 2G^2)}} \exp\left(-\frac{G^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{III.1.25})$$

avec $G = \sqrt{1 + 2\sigma\eta} - 1$.

- Répartition des hauteurs de vague H (adimensionnalisées par H_s) : Il a été montré par Forristall [51] que la distribution théorique linéaire de Rayleigh ne parvenait pas à correctement reproduire les données accumulées lors d'une tempête dans le Golfe du Mexique. Il montre alors qu'une distribution de Weibull peut être trouvée comme modélisant très bien le phénomène. Celle-ci peut être mise sous la forme :

$$f_W(H) = \frac{\alpha_W H^{\alpha_W - 1}}{\theta_W^{\alpha_W}} \exp\left(-\frac{H^{\alpha_W}}{\theta_W}\right) \quad (\text{III.1.26})$$

les paramètres choisis par Forristall dans son cas sont : $\alpha_W = 2.126$ et $\theta_W = 2.724$. Les paramètres peuvent être ajustés afin de correctement reproduire une houle donnée. Typiquement si on se fixe une zone de mesure par exemple, les paramètres α_W et θ_W sont choisis à l'aide d'une campagne expérimentale permettant de calibrer le modèle.

D'autre part, Mori & Yasuda [94] ont développé un modèle amélioré prenant en compte le caractère non-gaussien des vagues. En gardant l'approximation d'un spectre à bande étroite ainsi que des non-linéarités faibles, ils arrivent à une expression de la densité de probabilité des hauteurs de vagues en fonction du skewness(μ_3)/kurtosis(μ_4) du champ de vagues considéré. Cette densité, qu'ils considèrent comme une extension de la loi linéaire de Rayleigh est appelée distribution d'Edgeworth-Rayleigh :

$$f_{ER}(H) = \frac{H}{4} \exp\left(-\frac{H^2}{8}\right) \left[1 + \sum_{ij} \beta_{ij} B_{ij}(H) \right] \quad (\text{III.1.27})$$

avec,

$$\begin{aligned} \beta(4,1) &= \frac{1}{2^9}(\mu_4 - 3) \\ \beta(4,2) &= \frac{1}{3 \times 2^{21}}(\mu_4 - 3)^2 \\ \beta(6,1) &= \frac{5}{3^2 \times 2^{12}}\mu_3^2 \\ \beta(6,2) &= \frac{1}{3^2 \times 2^{23}}\mu_3^2(\mu_4 - 3) \\ \beta(6,3) &= \frac{5}{3^4 \times 2^{28}}\mu_3^4 \\ B(4,1) &= H^4 - 32H^2 + 128 \\ B(4,2) &= H^8 - 128H^6 + 4608H^4 - 49152H^2 + 98304 \\ B(6,1) &= H^6 - 72H^4 + 115H^2 - 48 \\ B(6,2) &= H^{10} - 200H^8 + 12800H^6 - 307200H^4 + 2457600H^2 - 3932160 \\ B(6,3) &= H^{12} - 288H^{10} + 28800H^8 - 1228800H^6 + 2211840H^4 - 141557760H^2 + 188743680 \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur ces différents modèles améliorés, on se réfère à l'article original de Tayfun[120] ainsi qu'à Mori & Yasuda [93] & [94] et Socquet-Juglard [111].

III.1.3.3 Nombre de vagues

Une information importante lorsque l'on étudie un champ de vagues 3D est le nombre de vagues à l'intérieur de ce domaine. Il peut être évalué par différentes formules et notamment en se référant à Krogstad et al. [78] (repris dans Dysthe et al. [40]), dans un domaine de taille $N_x\lambda_p \times N_y\lambda_p$ il est donné par :

$$N_{space} = \sqrt{2\pi} \frac{N_x N_y \lambda_p^2}{\lambda_0 \lambda_c} \quad (\text{III.1.28})$$

avec λ_p la longueur d'onde de pic, λ_0 la longueur d'onde moyenne et λ_c la longueur (dans la direction transverse) de crête moyenne (i.e. dans la direction transverse à la propagation).

Il est intéressant de comparer ce nombre de vagues au nombre de vagues donné par un relevé en mer par exemple. En effet, les relevés en mer sont des mesures ponctuelles de l'élévation de surface libre en fonction du temps. En appelant T la durée de l'enregistrement et T_z la période moyenne de passage à zéros, le nombre de vagues dans un enregistrement est donné par :

$$N_{temps} = \frac{T}{T_z} \quad (\text{III.1.29})$$

Enfin, dans notre cas, nous allons étudier l'évolution d'un grand domaine au cours du temps. Il faut donc trouver une évaluation espace-temps du nombre de vagues. La relation n'est pas aussi simple que dans les deux cas précédents à cause de la corrélation que l'on a entre l'espace et le temps. Krogstad et al. [78] donnent une première approximation grossière de ce nombre de vagues :

$$N_{espace/temps} \sim 2\pi \frac{N_x N_y \lambda_p^2 T}{6\lambda_0 \lambda_c T_z} \quad (\text{III.1.30})$$

On rappelle que pour un spectre de JONSWAP (c.f. Molin [92]) que :

$$\frac{T_z}{T_p} = 0.6063 + 0.1164\gamma^{\frac{1}{2}} - 0.01224\gamma$$

Pour les cas étudiés par la suite (en général, $N_x = N_y = 42$ et $T = 1000T_p$) et avec une directionnalité $n = 2$ on va obtenir (l'influence de la directionnalité sera traitée par la suite) :

	N_{temps}	N_{espace}	$N_{espace/temps}$
Nombre de vagues	1.010^3	5.810^3	2.410^6

TAB. III.1.1 – Nombre de vagues étudiées suivant les cas d'analyse

Ainsi, les analyses faites en espace/temps (dernière colonne du tableau) permettent d'avoir un très grand nombre vagues et de fournir des statistiques fines. Pour avoir par exemple les mêmes informations à partir d'un relevé temporel, il faudrait une analyse sur un temps $\simeq 2000$ fois plus long. De même, l'analyse d'un domaine spatial à un seul instant nécessiterait une surface $\simeq 420$ fois plus grande pour contenir le même nombre de vagues.

III.1.4 Validations

III.1.4.1 Propagation longue durée

On verra dans le chapitre suivant III.2 que les simulations océaniques réalisées le sont sur des temps très longs. Afin de valider la capacité de notre modèle à résoudre précisément un problème sur une longue durée nous effectuons ici une validation de notre méthode. Cette dernière s'effectue sur la propagation d'une houle régulière de cambrure assez importante ($ka = 0.30$) typiquement observée localement dans les champs de vagues étudiées dans ce chapitre III.2. La condition initiale est, comme précédemment, donnée par la solution complètement non-linéaire de Rienecker & Fenton [106] (dans sa version améliorée par F. Bonnefoy [13]). On va donc étudier la propagation de cette houle sur une longue durée (1000 périodes de la houle, notée T_0). Il faut noter que le déphasage, auquel on va s'intéresser, sur de tels temps de simulation

est un très bon indicateur aussi bien de la qualité de la résolution des CSL que de leur avance en temps correcte. Ce cas de validation nous permettra également d'étudier l'influence de certains paramètres sur les résultats des simulations et donc d'en choisir quelques-uns pour la suite.

On va tout d'abord valider notre avance en temps ainsi que la précision de la solution en réalisant une propagation directe puis inverse de la solution. On entend par propagation inverse une propagation en diminuant le temps t courant de la simulation. La propagation directe s'effectue entre $t = 0$ et $t = 1000 T_0$ et ensuite on effectue la propagation dite inverse entre $t = 1000 T_0$ et $t = 0$. Nous allons donc pouvoir vérifier la réversibilité de la résolution effectuée, ce qui validera l'avance en temps réalisée ainsi que la précision de la résolution. On s'intéresse au déphasage de notre champ de vague lors de sa propagation (à toutes les périodes, on le calcule par rapport à la condition initiale), ainsi qu'à son énergie totale. La figure III.1.6 présente un exemple de ce type de simulation où sont représentées les élévations de surface libre initiale, puis après 1000 périodes de propagation et enfin après la propagation inverse.

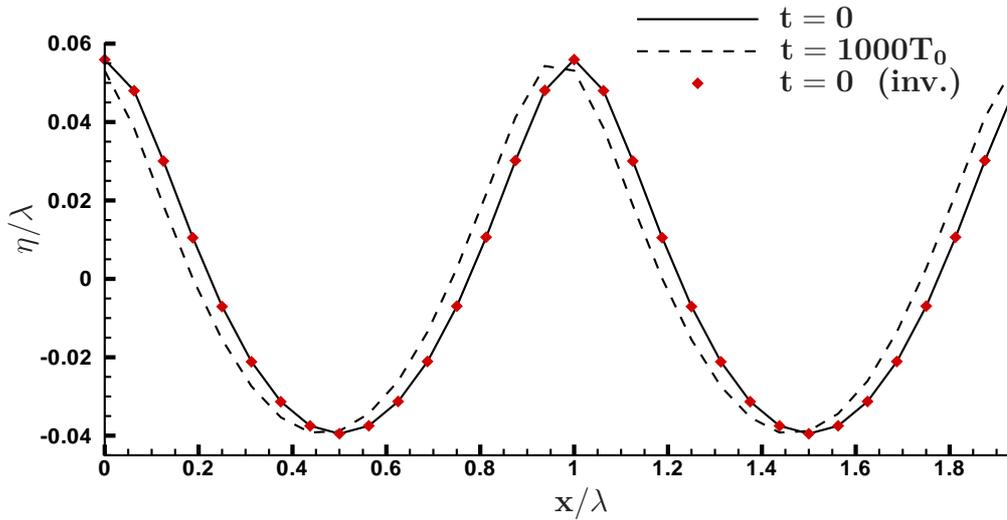


FIG. III.1.6 – Exemple d'un cas de simulation directe puis inverse sur 1000 périodes.

On observe un faible déphasage résiduel (ici $\simeq 10^\circ$) au bout de 1000 périodes. L'élévation à $t = 0$ après un aller-retour en temps est bien superposée à l'élévation initiale à $t = 0$, ce qui atteste de la réversibilité correcte de la résolution.

La figure III.1.7 présente l'évolution du déphasage lors des 1000 périodes de propagation pour différentes valeurs du paramètre de tolérance de l'avance en temps Tol ($Tol = 10^{-5}$ à 10^{-9}). Pour ce cas de calcul on a pris un nombre de modes $N = 16$, ce qui permet la résolution des sept premières harmoniques. L'ordre HOS est fixé à $M = 8$ avec un traitement anti-repliement complet. Le filtrage de la dérivée est pris avec $N_{der} = 2N$ et on réalise un filtrage dans l'espace des modes sur la dernière harmonique.

On remarque sur cette figure de grandes différences de comportement en fonction du paramètre de tolérance pris pour l'avance en temps. En effet, lorsque l'on n'est pas convergé sur ce paramètre (courbe $Tol = 10^{-5}$ et $Tol = 10^{-6}$), le déphasage observé après 1000 T_0 reste faible dans le cas présenté ici (inférieur à 15° pour le cas $Tol = 10^{-5}$, la résolution des CSL se

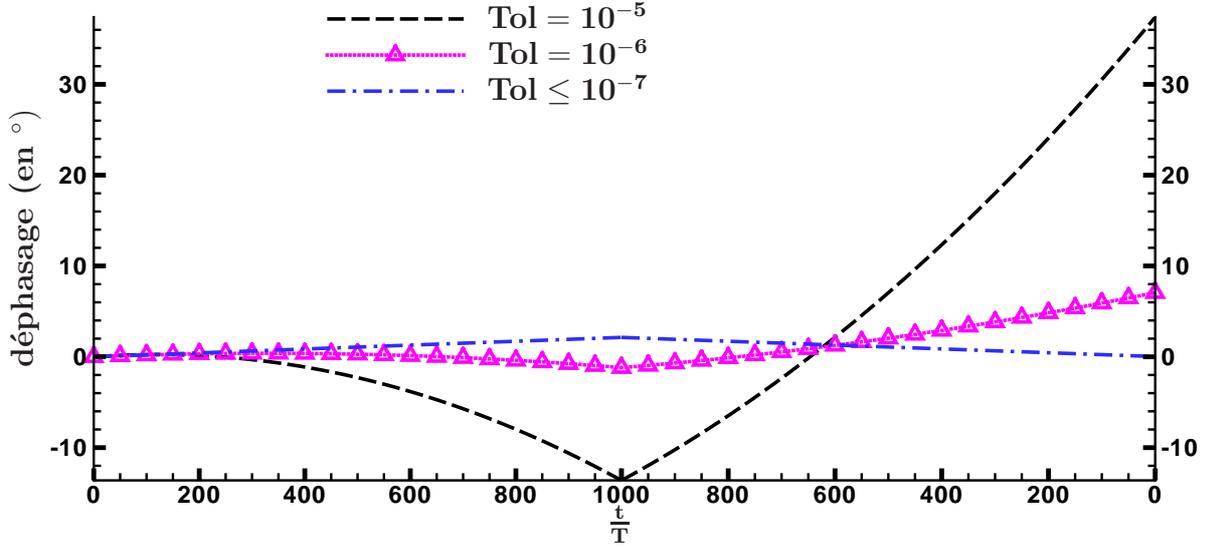


FIG. III.1.7 – Évolution du déphasage lors de la propagation (directe puis inverse) d'une houle régulière $ka = 0.30$

fait correctement), mais la propagation inverse révèle les défaillances de l'avance en temps. En effet, pour les deux cas avec la tolérance la plus grande, on observe que la résolution n'est pas réversible, i.e. on ne revient pas à l'état initial après la propagation inverse. Ceci indique que la résolution en temps n'est pas effectuée correctement. Cependant, en diminuant la tolérance (courbe $Tol \leq 10^{-7}$) on observe que la réversibilité de la résolution devient effective. Cette courbe représente trois cas tests différents réalisés ($Tol = 10^{-7}, 10^{-8}, 10^{-9}$). Ces courbes étant superposées, on a choisi de n'en représenter qu'une seule par souci de clarté. Ainsi, à partir d'une tolérance de 10^{-7} , notre avance en temps est convergée : on atteint la même valeur de déphasage après les 1000 périodes de propagation et la propagation inverse est parfaitement réalisée (solution initiale et finale parfaitement confondues). Par la suite, on choisira donc pour paramètre de tolérance, $Tol = 10^{-7}$.

On s'intéresse maintenant à l'influence de l'ordre HOS M sur le déphasage observé. On utilise les mêmes paramètres de simulation que donnés pour le cas précédent avec $Tol = 10^{-7}$ et en faisant varier M . Les résultats sont présentés sur la figure III.1.8.

La courbe intitulée $M \geq 7$ représente tous les résultats obtenus pour $M \in [7, 15]$ qui ne sont pas discernable sur cette figure, les résultats étant pratiquement confondus avec un très faible déphasage, inférieur à 3° justifiant le caractère convergé du résultat pour ces valeurs de M . La courbe $M = 5$ présente un déphasage maximum d'environ 38° après 1000 périodes de propagation, ce qui reste une valeur assez faible compte-tenu de l'exigence de ce cas de calcul. Enfin, avec $M = 3$, on s'aperçoit que le déphasage atteint -509° après 1000 périodes de propagation. Ceci est un déphasage très important mettant en lumière les carences de la résolution pour un ordre HOS si petit. Dès lors que l'on veut réaliser des simulations sur de longs temps, il semble nécessaire de prendre M au moins égale à 5 et si possible égal à 7. Il faut remarquer le lien étroit entre cet ordre HOS et le nombre d'harmoniques prises pour le calcul (i.e. nombre

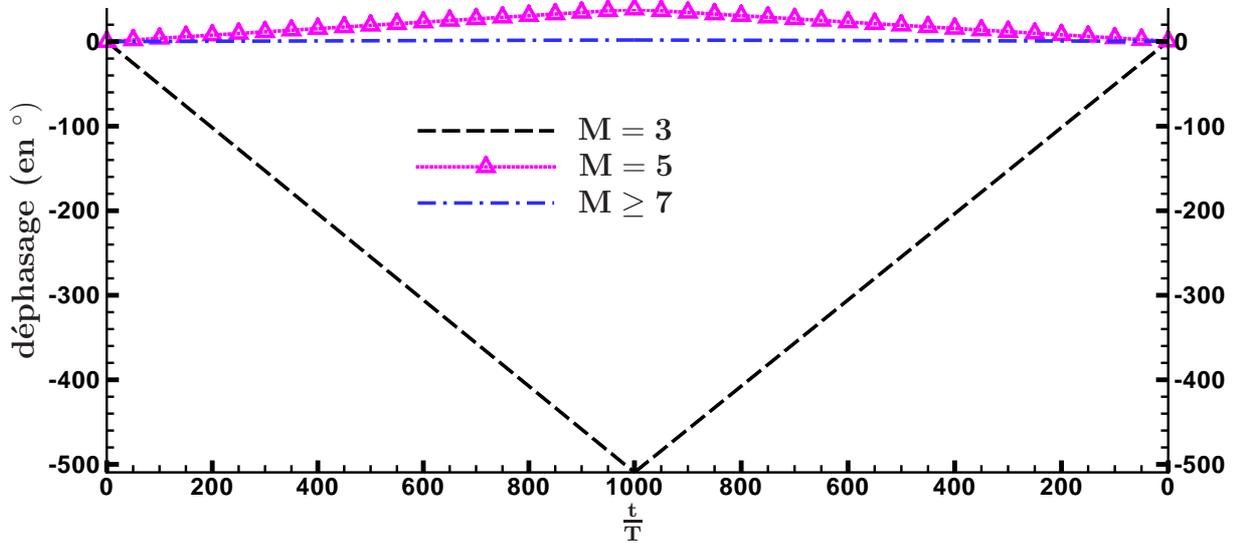


FIG. III.1.8 – Évolution du déphasage lors de la propagation (directe puis inverse) d'une houle régulière $ka = 0.30$

de points). En effet, grâce au choix $M = 7$, on va correctement résoudre les sept premières harmoniques qui sont toutes les harmoniques accessibles avec le choix du nombre de modes $N = 16$.

D'autre part, il faut noter que dès lors que l'on utilise une tolérance sur l'avance en temps correcte, celle-ci se fait convenablement, ce que l'on peut vérifier par le déphasage final après la propagation inverse qui est nulle. Ainsi, ici même avec le choix $M = 3$ n'étant pas satisfaisant du point de vue de la qualité de la résolution des conditions de surface libre, l'avance en temps est correcte. On va donc s'intéresser dorénavant uniquement au déphasage observé après 1000 périodes de propagation, ce paramètre étant suffisant pour évaluer la qualité de la résolution.

Le tableau III.1.2 présente donc l'influence plus en détail de l'ordre HOS M sur le déphasage observé après les 1000 périodes de propagation. On est toujours dans le cas, $N = 16$, i.e. les sept premières harmoniques sont résolues.

M	3	4	5	7	8	9	11	14	15	17	19	23	29
Déphasage (en °)	510	209	38	-0.2	1.9	2.8	2.6	2.5	2.9	3.1	3.1	2.7	2.6

TAB. III.1.2 – Convergence selon l'ordre HOS M du déphasage après $1000 T_0$

On observe donc, comme indiqué par la figure III.1.8, que l'influence de l'ordre HOS M est très importante et nous montre la nécessité d'utiliser lors de calculs comportant de fortes non-linéarités sur de longues durées des ordres HOS élevés. Dans ce cas là, un ordre HOS M au moins égal à 7 est nécessaire pour être parfaitement convergé et conserver une bonne résolution, le choix $M = 5$ présentant un résultat tout de même acceptable. On retrouve la remarque énoncée précédemment qui est que le choix du nombre d'harmoniques résolues influence le choix de l'ordre HOS M . En effet, il apparaît clairement que plus aucun gain n'est observée une fois

que celles-ci sont résolues correctement. On choisira donc par la suite pour ordre HOS, $M = 8$ ou $M = N_h$ (si $N_h < 8$) sauf indication contraire (principalement pour des exigences de temps de calcul on sera parfois amené à utiliser $M = 5$).

Le tableau III.1.3 présente l'influence du nombre de modes N (donc du nombre d'harmoniques $N = 2(N_h + 1)$) utilisés sur le déphasage observé après les 1000 périodes de propagation. L'ordre HOS est tout d'abord choisi égal à $M = 8$ et ensuite des résultats avec $M = N_h$ sont présentés.

N	4	8	16	20	24	32	64
N_h	1	3	7	9	11	15	31
Déphasage (en $^\circ$): $M = 8$	8.810^3	4.910^2	1.9	1.0	1.1	53	Arrêt après $12T_0$
Déphasage (en $^\circ$): $M = N_h$	1.610^4	1.910^2	-0.2	-0.01	-0.41	-0.4	Arrêt après $12T_0$

TAB. III.1.3 – Convergence selon le nombre de modes N_x utilisés du déphasage après $1000T_0$

On peut noter que comme attendu, on a une convergence en fonction du nombre de modes utilisés, convergence qui semble atteinte aux environs de $N = 16$. D'autre part, il apparaît que le calcul diverge pour le plus grand nombre de modes $N = 64$ après un certain temps de propagation. De la même manière le calcul pour $N = 32$ avec l'ordre HOS $M = 8$ voit apparaître des petits problèmes liés aux plus haut modes étant anormalement excités. Il reste cependant possible d'exécuter le calcul en filtrant davantage les quantités d'intérêt et/ou en changeant le filtrage effectué sur la dérivée N_{der} . Le choix de N était donc judicieux ici (compromis précision / temps de calcul). Et, si on compare les résultats obtenus suivant le choix de M , ils confirment le lien entre cet ordre HOS M et le nombre d'harmoniques résolues N_h . En effet, le gain en utilisant $M = N_h$ est important et on essaiera de le conserver, tout en gardant des temps de calcul raisonnables.

Le tableau III.1.4 présente l'influence du filtrage de la dérivée N_{der} sur le déphasage observé après les 1000 périodes de propagation. On a choisi ici, $M = 8$ et $N = 16$.

N_{der}	$0.8N$	$1.0N$	$1.2N$	$1.4N$	$1.6N$	$1.8N$	$2.0N$
Déphasage (en $^\circ$)	17	7.0	1.3	1.9	1.9	1.9	1.9

TAB. III.1.4 – Influence du paramètre N_{der} sur le déphasage après $1000T_0$

On peut remarquer dans ce tableau que le paramètre N_{der} a une influence limitée. Le filtrage de la dérivée, permettant une stabilisation du calcul dans certains cas fortement cambrés ne dégrade pas la résolution. Cette dégradation commence cependant à apparaître pour de forts filtrages $N_{der} = 0.8N$. Ainsi, le choix de N_{der} semble assez flexible au vu de ses résultats et sera donc à ajuster si des problèmes de stabilité apparaissent.

Le tableau III.1.5 présente l'influence du filtrage des quantités avancées en temps, N_{filt} , sur le déphasage observé après les 1000 périodes de propagation. Comme précédemment, $M = 8$, $N = 16$ et $N_{der} = 2N$.

Dans le cas présenté, le filtrage des quantités d'intérêt (η, ϕ^s) n'apparaît pas nécessaire, le calcul sans aucun filtrage se déroulant sans problème. Il semble même inutile, la solution s'en trouvant dégradée. Ce tableau nous indique simplement que ce filtrage est à réaliser avec prudence. En effet, en rappelant que l'on résout ici sur 7 harmoniques, on remarque que dès que

N_{filt}	Sans filtrage	1 harmonique	2 harmoniques	3 harmoniques	4 harmoniques
Déphasage (en °)	0.5	1.9	12.8	63.7	304

 TAB. III.1.5 – Influence du paramètre N_{filt} sur le déphasage après $1000 T_0$

l'on filtre sur plus de 2 harmoniques, la qualité du résultat s'en fait ressentir. Il faut cependant noter que ce filtrage n'est appliqué que dans des cas extrêmes où l'on est très proche du déferlement et que dans le cas général, aucun filtrage n'est appliqué. Ainsi par la suite, si un filtrage est nécessaire il faudra toujours veiller à son utilisation de façon correcte.

Le tableau III.1.6 présente l'influence du traitement anti-repliement intermédiaire (et notamment son ordre p) sur le déphasage observé après les 1000 périodes de propagation. On a une nouvelle fois pour paramètres $M = 8$, $N = 16$ et $N_{der} = 2N$.

p	1	2	3	4	5	6	7
Déphasage (en °)	0.3	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9

 TAB. III.1.6 – Influence du traitement anti-repliement intermédiaire sur le déphasage après $1000 T_0$

On s'aperçoit que, dès $p = 2$, l'influence d'une augmentation de p n'est plus visible dans ce tableau. Pour $p = 1$, il faut noter que ce très faible déphasage est observé par hasard, la résolution étant moins précise (le cas $p = 1$ correspond en fait au cas où aucun traitement anti-repliement n'est appliqué). Ceci a été vérifié en changeant un paramètre et dans ce cas là, l'erreur pour $p = 1$ devient plus importante que pour les valeurs de p supérieures. Ainsi, comme pour le choix de N_{der} , celui de p semble assez flexible, tout en sachant que par souci de temps de calcul, on choisira toujours le p le plus petit possible. Mais il est intéressant que dans ce cas assez cambré $ka = 0.30$, on observe ici une erreur semblable entre un dealiasing complet $p = 7$ et un dealiasing intermédiaire, montrant bien l'intérêt de ce dernier. Ce cas-test ne permet donc pas de donner une valeur à utiliser dans toutes les configurations mais montre bien l'intérêt d'effectuer un traitement anti-repliement intermédiaire, avec le paramètre p à ajuster si besoin est.

III.1.4.2 Étude des échanges non-linéaires

Dans cette section, on s'intéresse aux échanges d'énergie entre les composantes de houle au moyen de l'approche développée par Tanaka [118] & [119] à l'aide d'une méthode HOS. Dans ces deux articles, Tanaka s'intéresse à l'évolution d'états de mer directionnels définis par des spectres de JONSWAP et de Pierson-Moskowitz. En particulier, Tanaka vérifie avec ses simulations la théorie d'Hasselmann [69] concernant les transferts d'énergie non-linéaires prenant place dans les propagations d'ondes de gravité. Ces transferts sont évalués à l'aide de taux d'échange de différents spectres et sont typiquement les résultats que nous donnerons ici. On se réfère cependant à Tanaka [118] & [119] pour plus de détails concernant l'interprétation à donner à de tels résultats.

On se propose de vérifier que l'implémentation faite du modèle HOS permet bien de retrouver les résultats publiés par Tanaka. Dans un premier temps, Tanaka compare les évolutions temporelles du skewness et du kurtosis (moment d'ordre 3 et 4 de l'élévation de surface libre).

On compare les comportements des simulations réalisées avec un spectre de JONSWAP d'énergie $E = 0.0025$ et $E = 0.005$ et avec un spectre de type Pierson-Moskowitz pour les mêmes énergies (cf. figures 5 et 6 de [118]). On se place dans les mêmes conditions de calcul, à savoir une directionnalité définie par $n = 2$, $N_x = 1024$, $N_y = 512$, $M = 3$ et traitement anti-repliement partiel.

L'évolution du skewness et du kurtosis obtenue avec notre modèle est reportée sur la figure III.1.9, alors que les résultats présentés par Tanaka sont rappelés sur la figure III.1.10.

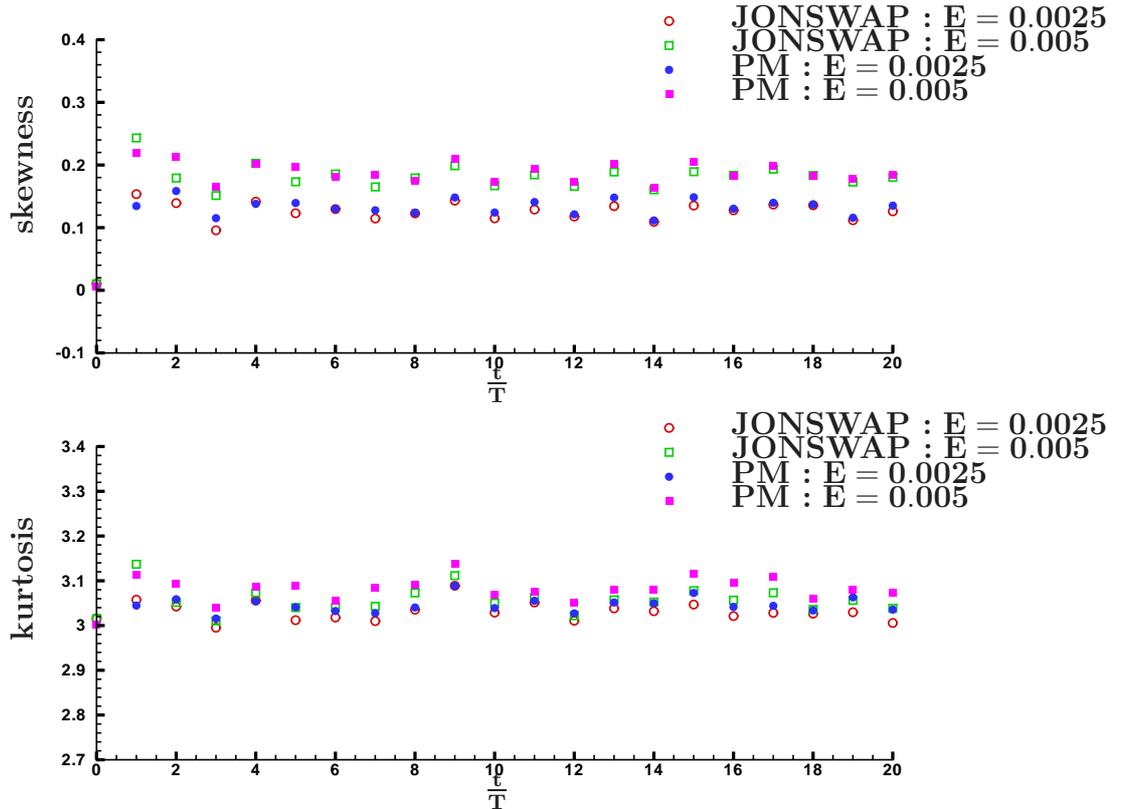
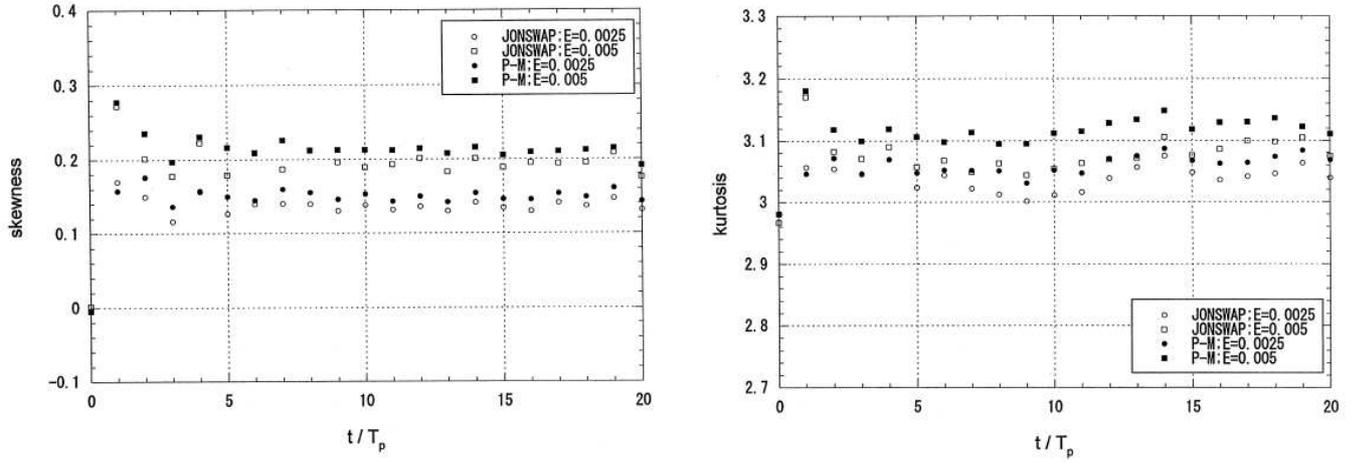


FIG. III.1.9 – Évolution du skewness et du kurtosis au cours du temps pour 4 types de spectre

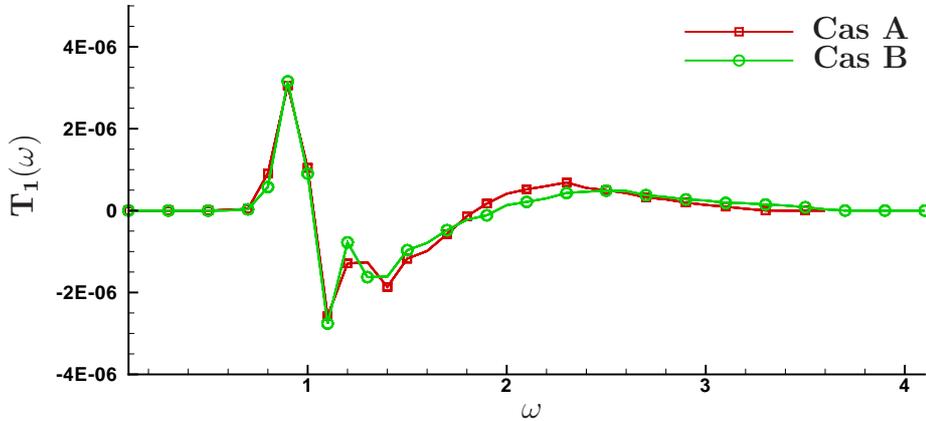
On observe donc sur cette figure le très bon accord avec les résultats de Tanaka [118]. En particulier, les différences de comportement entre les spectres de JONSWAP et de P-M sont identiques : déviation plus importante pour le spectre de P-M et augmentation de cette déviation avec l'énergie. On observe, plus particulièrement sur la courbe supérieure représentant le skewness, deux groupes distincts, correspondant à chacune des énergies, au sein desquels le spectre de P-M présente une déviation plus importante (par rapport à la répartition gaussienne (i.e. skewness = 0, kurtosis = 3)). On peut cependant remarquer quelques différences avec les résultats de [118], que l'on attribue aux tirages de phases aléatoires qui sont différents et impliquent donc un résultat différent. Ces 2 figures mettent en avant le caractère non-linéaire du champ de vagues de par la déviation observée par rapport à la répartition gaussienne .

Dans un deuxième temps, Tanaka définit deux taux de transferts respectivement fréquentiels et directionnels $T_1(\omega)$ et $T_2(\omega, \theta)$ (en se rappelant que le spectre directionnel est défini par


 FIG. III.1.10 – *Reproduction des figures 5 et 6 de Tanaka [118]*

$\Phi(\omega, \theta, t) = \psi(\omega, t) \times G(\theta, t)$:

$$T_1(\omega) = \frac{\psi(\omega, t_2) - \psi(\omega, t_1)}{t_2 - t_1}, \quad T_2(\omega, \theta) = \frac{\Phi(\omega, \theta, t_2) - \Phi(\omega, \theta, t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{III.1.31})$$


 FIG. III.1.11 – $T_1(\omega)$ pour un spectre de JONSWAP $E = 0.005$

Sur la figure III.1.11 est représenté pour deux cas (A et B) le taux de transfert fréquentiel $T_1(\omega)$ entre les instants $t_1 = 10T_p$ et $t_2 = 25T_p$. Cette figure est à comparer avec la figure 8 de Tanaka [118]. La différence entre ces deux cas est la fréquence de coupure utilisée dans le calcul qui ne semble pas avoir d'effet très important ici (le tirage de phase aléatoire pouvant avoir une certaine influence sur les résultats: de l'ordre des différences observées entre les courbes ici). Les caractéristiques principales du transfert d'énergie mis en lumière par Hasselmann [69] se retrouvent ici, les résultats que l'on obtient étant similaires de ceux de Tanaka.

Pour le cas A, on représente sur la figure III.1.12 la fonction de transfert directionnelle $T_2(\omega, \theta)$ avec une nouvelle fois des résultats très similaires à ceux obtenus par Tanaka (voir figure 11

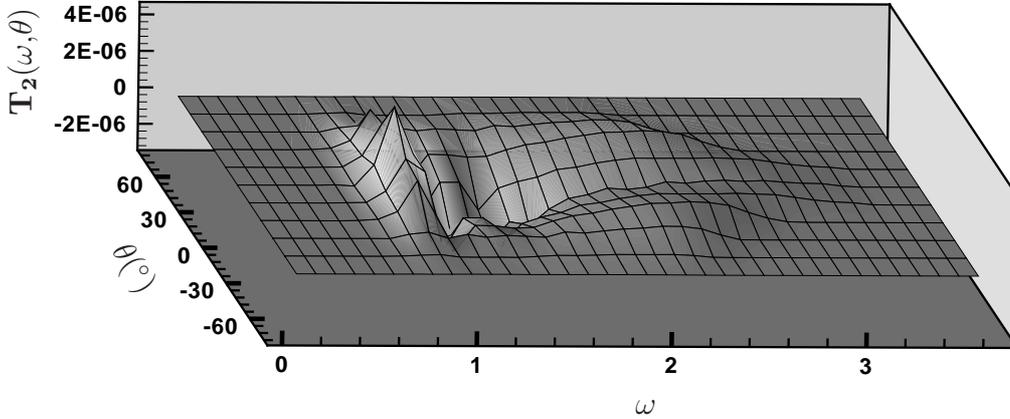


FIG. III.1.12 – $T_2(\omega, \theta)$ pour un spectre de JONSWAP $E = 0.005$

de [118]), résultats en accord général avec la théorie de Hasselmann [69]. Le but principal était ici de vérifier notre implémentation avec des calculs déjà réalisés avec la méthode HOS. On rappelle que pour plus de détails concernant l’analyse fine des phénomènes mis en évidence avec ces calculs, on se réfère à Tanaka [118] & [119].

III.1.5 Conclusion

En conclusion, on a détaillé dans un premier temps le travail effectué sur l’initialisation du calcul. On cherche à reproduire des champs de vagues réalistes grâce à notre modèle. On a donc choisi d’utiliser une initialisation selon un spectre de houle classique de type JONSWAP à laquelle est ajoutée une directionnalité caractérisée par le paramètre n . Différents paramètres permettent d’ajuster ce type de spectre, notamment son énergie. Cette dernière a été choisie ici par rapport à des données au réel de la Mer du Nord ($\simeq 70000$ enregistrements sur la période 1973 – 2001) afin de simuler les mers les plus extrêmes rencontrées. On détaille également un processus de relaxation sur l’initialisation précédente (linéaire) afin d’avoir un champ de vagues adéquat à notre modèle HOS complètement non-linéaire. L’initialisation en vue de la reproduction d’états de mer donnés est également envisagée, dans le cadre de vagues focalisées notamment.

La méthode d’analyse des champs de vagues est ensuite exposée. Il s’agit d’une analyse vague par vague par zéro-crossing dans la direction de propagation ainsi que dans la direction transverse afin d’avoir des informations précises sur la directionnalité de l’état de mer en question.

Différentes théories statistiques permettant de décrire un état de mer sont présentées, linéaires et partiellement non-linéaires. Ces approches serviront de référence lors de l’étude des résultats des simulations numériques réalisées à l’aide du modèle HOS. On s’intéresse en particulier à l’élévation de surface libre mais également à la hauteur de vagues (crête à creux).

Enfin, des validations effectuées sur des propagations longue durée de houles régulières permettent de justifier les capacités de notre modèle à simuler précisément l'évolution d'états de mer cambrés sur de très longues durées. Les résultats obtenus par Tanaka [118] & [119] sont également reproduits avec succès, validant la procédure d'initialisation ainsi que l'implémentation effectuée.

Chapitre III.2

Formation de vagues scélérates

Nous allons étudier la formation de vagues scélérates sous deux approches différentes. Tout d'abord, l'étude portera sur la focalisation spatio-temporelle bi-dimensionnelle ou tri-dimensionnelle (directionnelle) d'un champ de vagues. Cette approche est couramment utilisée, notamment lors d'expériences, pour étudier l'influence des vagues extrêmes sur des bateaux ou des structures marines. Cette méthode est utilisée en sachant que le processus de focalisation peut être un des phénomènes expliquant la formation des vagues extrêmes (voir par exemple Kharif & Pelinovsky [76] pour une revue des phénomènes à l'origine des vagues scélérates) et également de par sa simplicité de mise en place. Dans un deuxième temps, nous étudierons l'apparition *naturelle* de vagues scélérates au sein d'un champ de vagues lors de simulations à grande échelle et sur de longs temps de simulation (en 2D ou 3D). On entend par *naturelle* le fait qu'aucune condition n'est spécifiée pour produire ces événements extrêmes : un spectre représentant un état de mer classique est donné initialement et on étudie l'évolution du champ de vagues correspondant. Ensuite, l'influence de la directionnalité sur les probabilités d'occurrence d'évènements extrêmes est étudiée. Enfin, une comparaison avec des résultats proposés par Socquet-Juglard et al. [112] avec une méthode BMNLS est effectuée. Une extension de leur travail est mise en avant avec des perspectives intéressantes.

III.2.1 Focalisation

Dans cette partie, nous allons détailler les différents résultats obtenus au niveau de la focalisation spatio-temporelle en 2D puis en 3D. La condition initiale employée est détaillée sous sa forme générale tridimensionnelle dans la section III.1.1.4.

III.2.1.1 Focalisation 2D

Les conditions numériques utilisées pour ce calcul sont :

- État de mer défini par un spectre de JONSWAP caractérisé par $E=0.005$ i.e. $\alpha_P = 0.016$, $H_s = 0.28$ en quantités adimensionnelles (par rapport à g et ω_p),
- Taille du domaine: $L_x = 82\lambda_p$,
- Nombre de modes utilisés : $N_x = 4096$, ordre HOS $M = 5$,
- En quantités dimensionnelles, si on fixe $T_p = 12.5$ s (typique en mer du Nord par tempête): $\lambda_p = 244$ m, Taille du domaine simulé : 20 km.
- Initialisation avec un temps de propagation linéaire inverse : $T_i = 20T_p$ et $\alpha = 0.25$

La figure III.2.1 représente l'évolution du champ de vagues lors de la focalisation jusqu'à $t = 35 T_p$, celle-ci ayant lieu à $t = 20.3 T_p$. On repère la focalisation par le moment où l'élévation maximale est relevée, qu'on appellera temps de focalisation T_f . Elle se produit en un point de focalisation d'abscisse x_f .

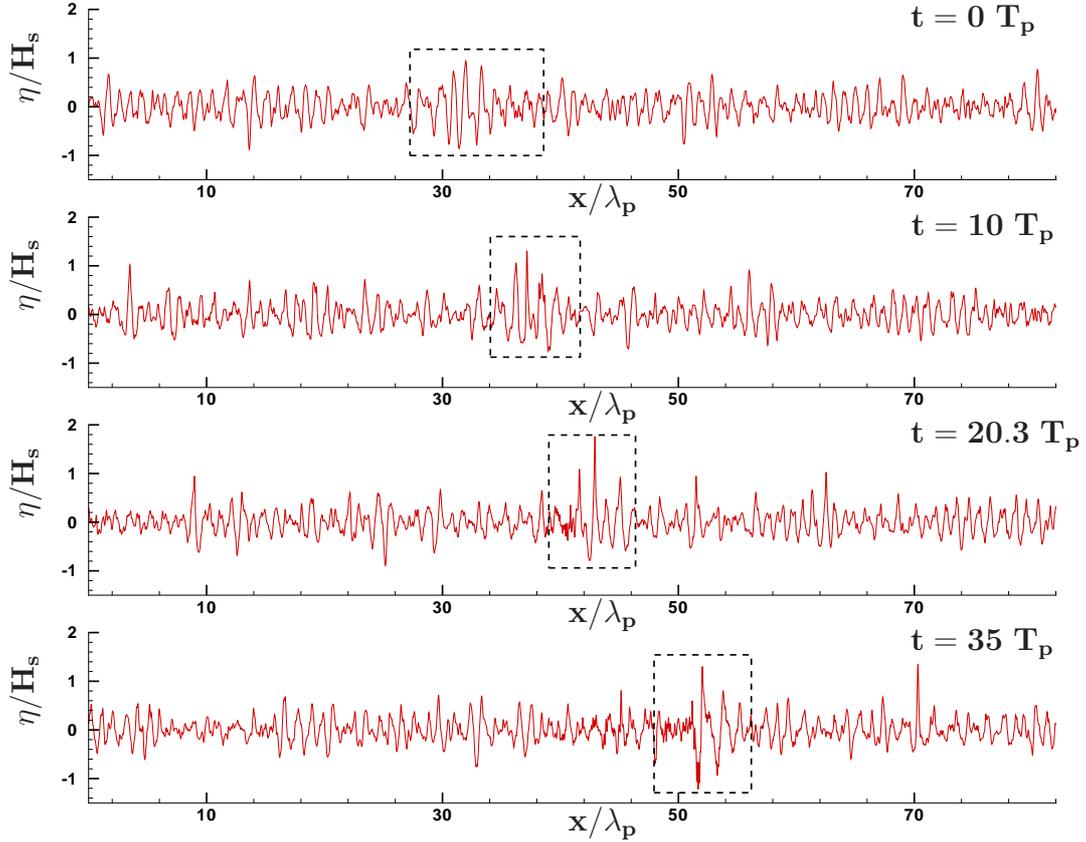


FIG. III.2.1 – Evolution du champ de vagues lors de la focalisation. $T_f = 20.3 T_p$

On constate tout d'abord qu'au point de focalisation spécifié en linéaire ($x = L_x/2$), l'élévation maximale réelle se produit avant le temps de focalisation linéaire, $T_i = 20 T_p$. Ensuite, ailleurs dans le bassin ($x_f > L_x/2$), l'élévation maximale (la focalisation) se produit à $t = T_f > T_i$. Ceci est facilement explicable par la dispersion en amplitude et est souvent observé lors d'expériences menées en bassin de houle. Ainsi, la focalisation, repérée par l'élévation maximale dans le domaine, prend place après le point de focalisation linéaire, aussi bien en temps ($T_f = 20.3 T_p$) qu'en espace ($x_f > L_x/2$).

Au départ du calcul, $t = 0 T_p$, le champ de vagues semble complètement aléatoire. Les composantes qui vont se superposer pour produire la focalisation sont comprises dans le champ irrégulier. Les pointillés représentent cependant approximativement la position de ces différentes composantes dans le domaine. Une analyse plus fine de cette partie du domaine nous indique que l'on peut observer les longueurs d'ondes les plus longues qui se situent le plus loin du point de focalisation (le milieu du domaine), alors que les longueurs d'ondes les plus courtes semblent être proche de ce point de focalisation comme attendu. En effet, la vitesse de propagation croît avec la longueur d'onde donc, vu que lors de la propagation linéaire inverse chaque composante est propagée avec sa vitesse propre, cet étalement spatial des diverses longueurs d'ondes est observé. En avançant en temps à $t = 10 T_p$, chacune des composantes de la future

focalisation s'est propagée à sa vitesse propre et s'est donc rapprochée du point de focalisation. Elles sont cette fois assez difficilement discernables de l'état de mer irrégulier environnant. Ensuite, à $t = 20.3T_p$ la focalisation apparaît. Une analyse de l'état de mer et de la focalisation nous indique que $\frac{H_{max}}{H_s} > 2.5$ ce qui révèle bien le caractère extrême de cette vague focalisée. Cependant, il faut remarquer que toutes les composantes de la vague focalisée initiale (avant la propagation inverse) ne sont pas contenues dans cet évènement. En effet, on peut par exemple observer les petites longueurs d'ondes situées en $x < x_f$ qui n'ont pas participé à la focalisation. Ceci est dû au caractère complètement non-linéaire de la propagation lors de cette simulation, alors que la propagation inverse réalisée pour l'initialisation n'était que linéaire. Enfin, après la focalisation, à $t = 35T_p$, on observe que chacune des composantes continue à évoluer à sa propre vitesse avec maintenant les plus grandes longueurs d'ondes ayant "dépassé" les plus petites. On revient assez rapidement, après ce processus de *dé-focalisation*, à un état de mer complètement aléatoire.

Nous avons ici démontré la capacité de notre modèle à générer et propager des houles extrêmes par focalisation 2D. Il semble maintenant intéressant de s'attarder sur un cas plus complexe, la focalisation directionnelle.

III.2.1.2 Focalisation directionnelle

On s'intéresse donc ici à un problème purement tridimensionnel qui est la focalisation directionnelle. Les conditions numériques utilisées dans ce calcul sont :

- État de mer défini par un spectre de JONSWAP caractérisé par $E=0.005$ i.e. $\alpha_P = 0.016$, $H_s = 0.28$ en quantités adimensionnelles (par rapport à g et ω_p),
- Taille du domaine: $L_x = 21\lambda_p \times L_y = 21\lambda_p$,
- Nombre de modes utilisés: $N_x = 512 \times N_y = 256$, ordre HOS $M = 5$,
- En quantités dimensionnelles, si on fixe $T_p = 12.5s$ (typique en mer du Nord par tempête): $\lambda_p = 244m$, Taille du domaine simulé: $5124m \times 5124m \simeq 25 km^2$.
- Initialisation avec un temps de propagation linéaire inverse: $T_i = 20T_p$ et $\alpha = 0.15$

La figure III.2.2 représente le champ de vagues initial de la simulation. Les composantes de focalisation créent un champ concentrique typique que l'on peut observer au centre du domaine.

La figure III.2.3 représente l'élévation de surface libre 3D après un temps $t = 20.3T_p$ de propagation correspondant au moment où l'élévation maximale est relevée, donc au temps de focalisation. On peut remarquer que la plus grande partie du domaine consiste en un champ de vagues aléatoires (composantes non-focalisées), alors qu'au centre du domaine, différentes composantes se sont superposées afin de former l'évènement extrême se situant, comme attendu, proche du centre du domaine de calcul.

La figure III.2.4 est un zoom sur la partie intéressante du champ de vagues décrit précédemment. Le centre de la vue présentée correspond à la position de la focalisation linéaire (i.e. avant la propagation linéaire inverse). Les niveaux de contour ont été ajustés par rapport aux figures précédentes afin de faciliter l'appréhension de la forme de la vague. Dans notre cas, la vague focalisée se compose d'une crête avec une forme en V suivie d'un creux très profond (on peut se rappeler ici les observations de marins faisant état de *trous dans la mer* lorsqu'ils

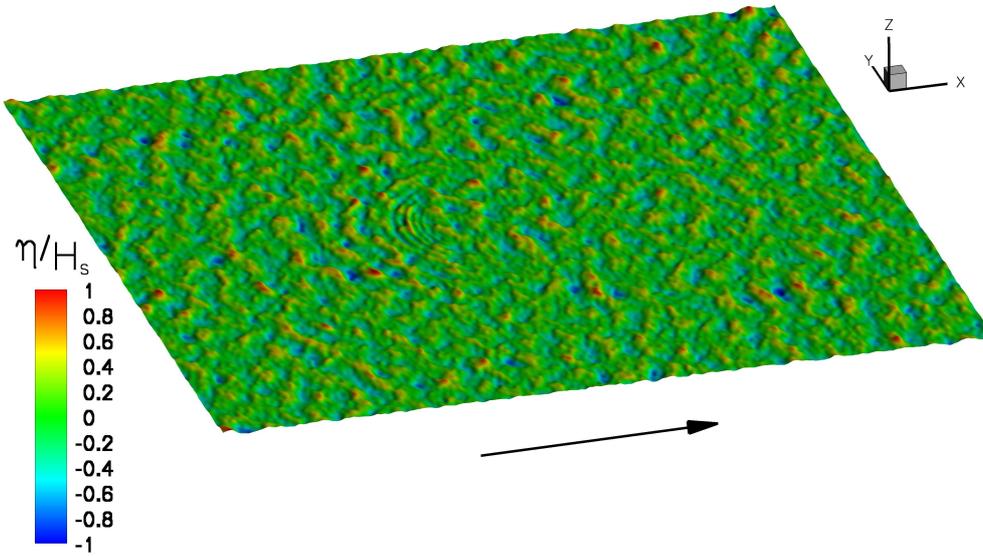


FIG. III.2.2 – Élévation de surface libre 3D initiale $E = 0.005$, $L_x = 21\lambda_p \times L_y = 21\lambda_p$, $N_x = 512 \times N_y = 256$, ordre HOS $M = 5$ et propagation linéaire inverse pendant $20T_p$.

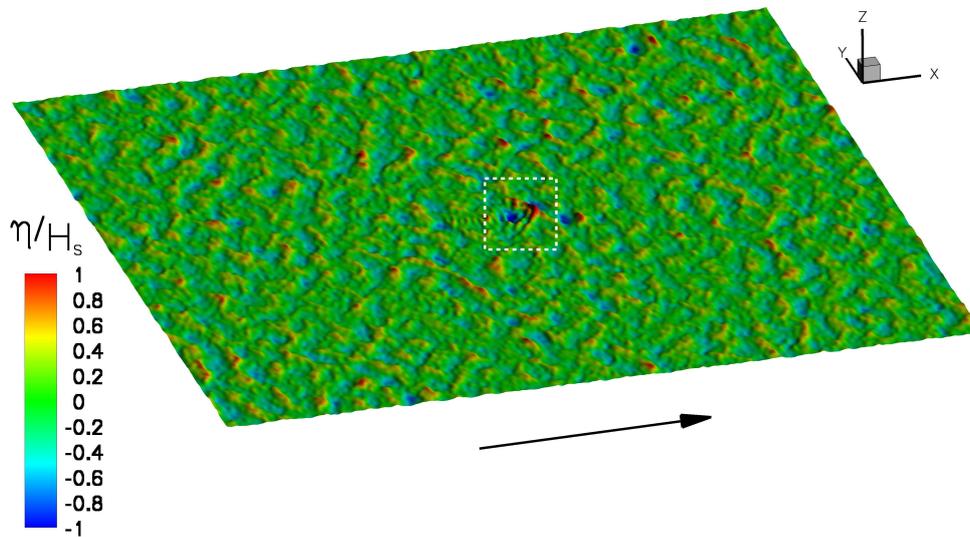


FIG. III.2.3 – Élévation de surface libre 3D à la focalisation $t = 20.3T_p$.

évoquaient ces vagues extrêmes).

Ainsi, comme lors de l'étude en 2D, la focalisation prend place après le point de focalisation linéaire, aussi bien en temps ($t = 20.3T_p$) qu'en espace. Une analyse du champ de vagues nous renseigne sur le caractère extrême de l'état de mer généré. En effet, on atteint $H_{max}/H_s > 3.5$ ce qui ne semble pas très réaliste vis à vis des différentes mesures auxquelles on a pu avoir accès sur des relevés en mer. Ainsi, les paramètres d'entrée de la vague focalisée doivent être ajustés

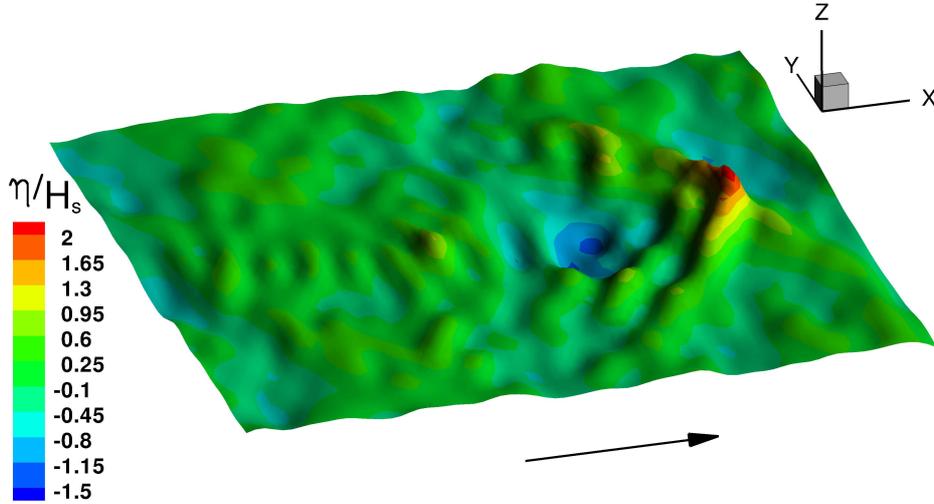


FIG. III.2.4 – Zoom de la figure III.2.3 : élévation de surface libre 3D à la focalisation $t = 20.3 T_p$.

de manière à essayer de reproduire des évènements plus réalistes.

Cependant, cette étude de focalisation tri-dimensionnelle a permis de mettre en avant les capacités de la méthode quant à la large gamme d'états de mer pouvant être simulés. Même les vagues extrêmes (ici $H_{max}/H_s > 3.5$) peuvent être modélisées sans problème et nous allons par la suite nous intéresser à la simulation d'états de mer réels (i.e. sans artifice menant à une possible formation de vague extrême) sur de longues durées et une analyse de ce champ de vagues nous permettra d'examiner l'apparition *naturelle* de ces vagues scélérates.

III.2.2 Évolution longue

L'évolution d'états de mer bi et tri-dimensionnels est maintenant considérée. On définit un champ de vagues initial à l'aide d'un spectre décrivant un état de mer typique en mer du Nord par tempête. Les phases seront cette fois-ci choisies de manière complètement aléatoire afin d'étudier l'apparition *naturelle* de vagues scélérates. Une étude paramétrique est présentée pointant notamment l'influence de la directionnalité de l'état de mer considéré.

III.2.2.1 Domaine bidimensionnel

Les premières simulations sont réalisées en 2D, on ne tient donc pas compte de la directionnalité. Les conditions de cette simulation sont les suivantes :

- État de mer défini par un spectre de JONSWAP caractérisé par $E=0.005$ i.e. $\alpha_P = 0.016$, $H_s = 0.28$ en quantités adimensionnelles (par rapport à g et ω_p),
- Taille du domaine: $L_x = 82\lambda_p$,
- Nombre de modes utilisés : $N_x = 2048$, ordre HOS $M = 8$,
- En quantités dimensionnelles, si on fixe $T_p = 12.5 s$ (typique en mer du Nord par tempête): $\lambda_p = 244 m$, Taille du domaine simulé : $20 km$.

Sur la figure III.2.5 est représenté le champ de vagues initial qui sera propagé non-linéairement et analysé. Les vagues se propagent dans le sens des x positifs (de la gauche vers la droite). Une analyse de la surface libre par zero-crossing (voir paragraphe III.1.2) nous confirme le lien entre l'énergie contenue initialement dans le spectre et la hauteur significative, ici $H_s = 0.28$. Nous avons ainsi notre état de mer 2D irrégulier initial dont le spectre est de type JONSWAP et représentant bien ce qui peut être observé par tempête en mer du Nord ($E = 0.005$). Cet état de mer va alors être propagé durant 1000 périodes de pic, ce qui représente environ 3 heures et 30 minutes de simulation d'un grand domaine de 20 km de long à l'échelle réelle.

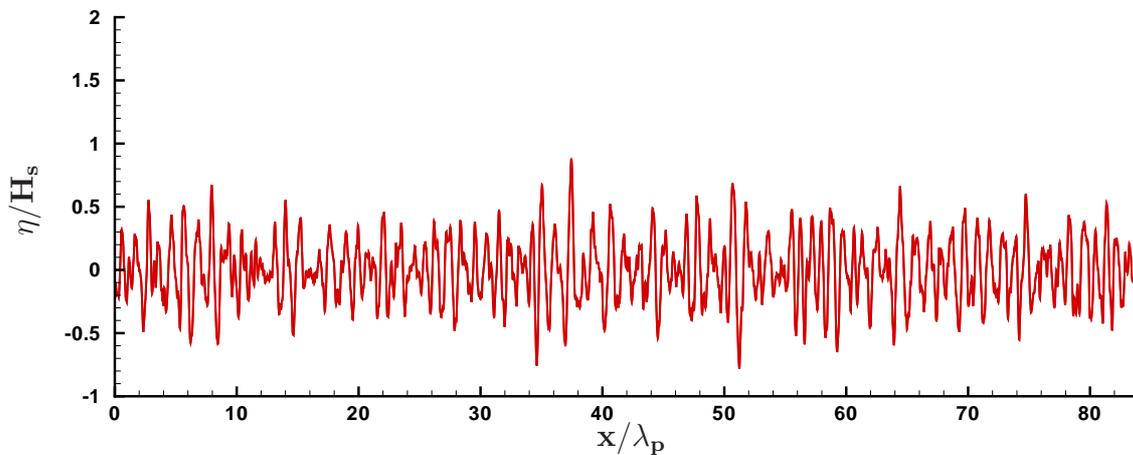
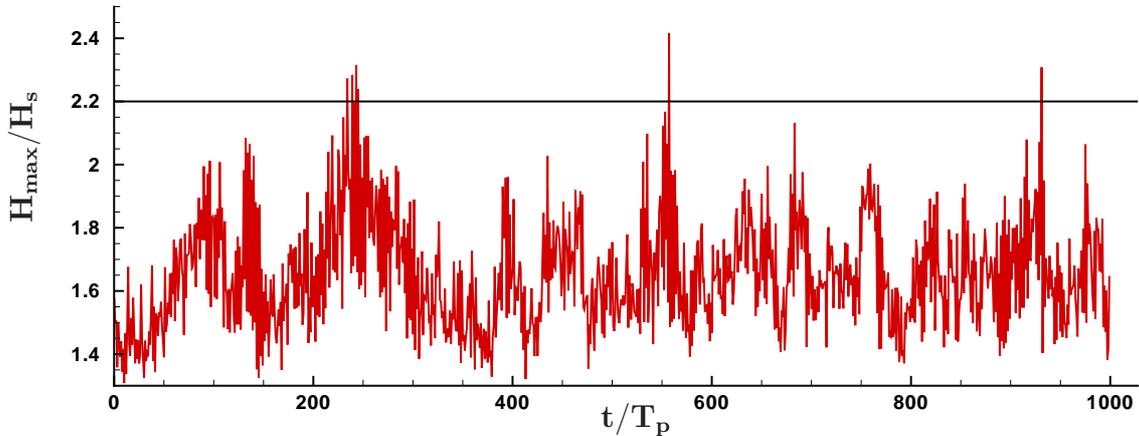


FIG. III.2.5 – *Champ de vagues 2D initial*

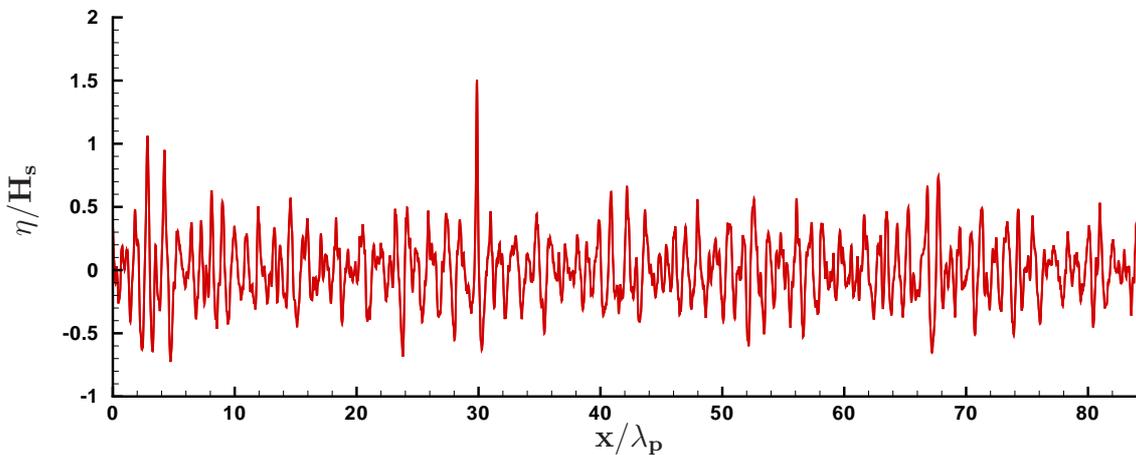
Pendant cette simulation, nous allons nous intéresser tout d'abord à l'évolution au cours du temps du paramètre H_{max}/H_s qui permet de caractériser l'apparition de vagues scélérates (selon le critère connu $H_{max}/H_s > 2.2$). La figure III.2.6 représente l'évolution de ce paramètre avec le temps.

On peut noter que des événements très brefs sont détectés, par exemple en $t/T_p = 560$ et $t/T_p = 930$. Ces événements représentent des vagues scélérates avec une durée de vie très courte et apparaissant très rapidement. En effet, en regardant l'évolution temporelle, on s'aperçoit que la hauteur maximale observée dans le champ de vagues croît à ce moment de façon très rapide et décroît également de la même manière. Des vagues extrêmes avec une durée de vie plus longues sont également observées par exemple en $t/T_p \simeq 240$. Dans ce cas-là, un groupe de vagues de grande amplitude reste cohérent durant quelques périodes de pic (environ $20T_p$) et produit des événements extrêmes successifs. Ce type d'évolution d'états de mer est le même que celui décrit par Trulsen [121] lorsqu'il a essayé de reproduire la vague de Draupner. Il faut également noter que tant que des structures marines et des bateaux sont considérés, la probabilité de rencontrer de telles séries de vagues scélérates est plus grande que celle de rencontrer des événements isolés, de part la durée de vie beaucoup plus longue des premiers.

En vue d'une meilleure illustration du phénomène observé, la figure III.2.7 représente le moment où la vague la plus extrême (i.e. avec la hauteur la plus grande) est relevée dans le groupe de vagues cohérent sur plusieurs périodes apparaissant au cours de la simulation. Cet


 FIG. III.2.6 – Evolution du paramètre H_{max}/H_s pendant la simulation

évènement consiste en une vague isolée de très forte amplitude ($H_{max} = 2.3H_s$ et $\eta_{max} = 1.5H_s$). Le caractère exceptionnel d'une telle vague peut aisément être mis en avant lorsque l'on observe le champ de vagues environnant ne présentant aucune autre vague de telle amplitude. En se ramenant à un état de mer réel : $T_p = 12.5s$, la vague scélérate détectée atteint une hauteur crête à creux $\mathbf{H} = 25\mathbf{m}$ pour un $H_s = 10.9m$.


 FIG. III.2.7 – Déformée de surface libre 2D de la vague scélérate à $t = 243T_p$

La figure III.2.8 est une vue zoomée de la figure précédente sur la vague scélérate qui nous intéresse.

On peut observer sur cette figure qu'un creux assez important précède l'évènement extrême. Ceci nous rappelle les récits de marins ayant probablement rencontré des vagues scélérates et qui ont observé des "trous" dans la mer avant un "mur d'eau" arrivant sur eux. L'analyse par passage à zéro nous donne une longueur d'onde $\lambda_{zc} = 1.1\lambda_p$. Une cambrure globale $\epsilon = H_{max}/\lambda_{zc}$ de 9.3% est mesurée sur cet évènement et confirme le caractère extrême de celui-ci avec une

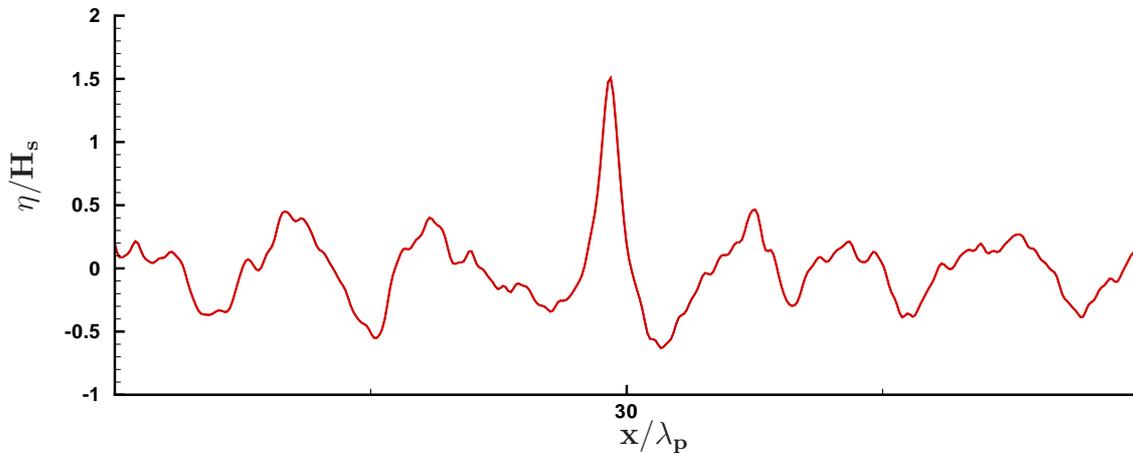


FIG. III.2.8 – Zoom de la figure III.2.7: vague scélérate à $t = 243T_p$

cambrure assez importante. La forme obtenue est donc en bon accord avec les quelques observations que l'on a de ces *murs d'eau* cambrés. De plus, on rappelle ici la forme très connue de la vague du nouvel an (ou vague de Draupner) observée lors d'une tempête le 1^{er} janvier 1995 sur la plateforme pétrolière de Draupner en mer du Nord : voir figure III.2.9 issue de Haver [71]. Les formes sont bien semblables dans les deux cas (en notant que la figure III.2.8 est une vue spatiale alors que la figure III.2.9 est un signal temporel, une vue temporelle de notre simulation donne un signal présentant la même forme).

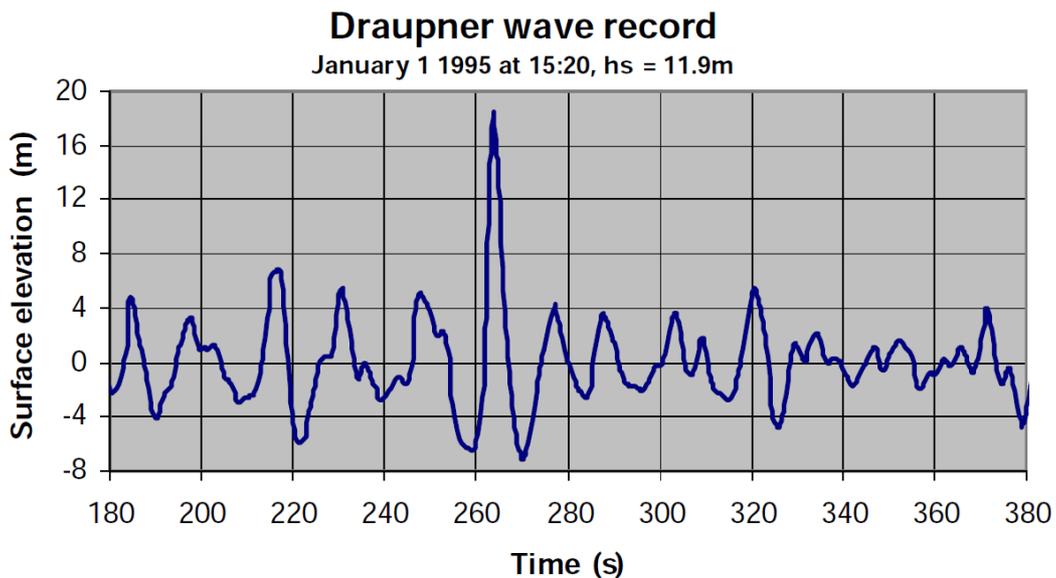


FIG. III.2.9 – Vue de la vague scélérate observée sur la plateforme pétrolière de Draupner

On a donc présenté ici des simulations complètement non-linéaires sur un très grand domaine (20 km) et durant un temps très important (3 heures et 30 minutes). Des vagues scélérates

apparaissant naturellement dans le domaine ont été simulées, la plus importante atteignant $H = 25$ m. La robustesse ainsi que les capacités du modèle ont ainsi pu être mises en avant sur ce cas bi-dimensionnel. Il est à noter que ce genre d'étude a déjà été abordé avec la méthode HOS dans Brandini [18] où divers résultats concernant l'analyse statistique de l'occurrence de ces vagues scélérates sont proposés. Ses simulations, limitées à des études en 2D, étaient réalisées sur $200 T_p$ avec un domaine de longueur $32 \lambda_p$ et un ordre HOS $M = 4$. Les résultats présentés ici sur un temps plus long dans un domaine plus grand et avec une augmentation non-négligeable de l'ordre HOS, jusqu'à $M = 8$, constituent une avancée importante. De plus, nous allons maintenant nous intéresser au cas 3D.

III.2.2.2 Domaine tridimensionnel

Nous étudions dans ce paragraphe l'évolution d'un état de mer directionnel. Ce dernier est défini avec les paramètres suivant :

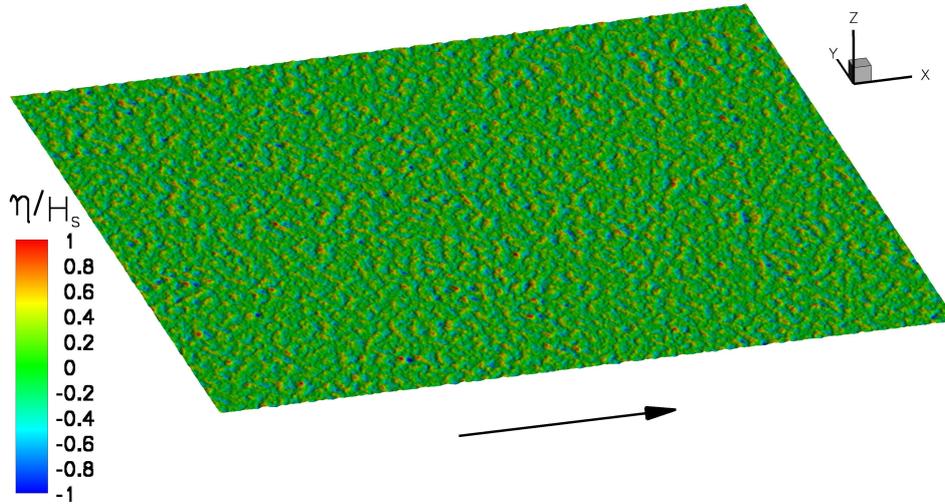
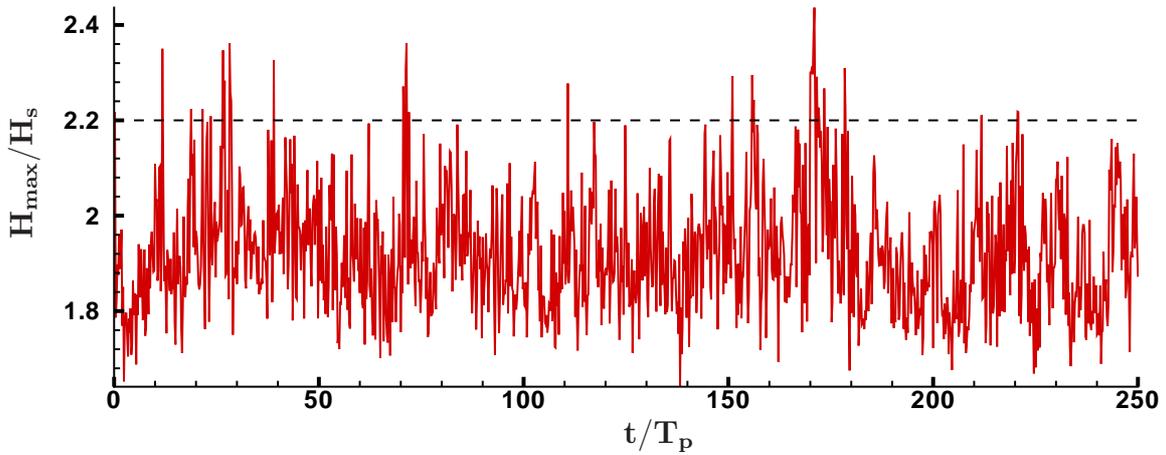
- État de mer défini par un spectre de JONSWAP caractérisé par $E=0.005$ i.e. $\alpha_P = 0.016$, $H_s = 0.28$ en quantités adimensionnelles (par rapport à g et ω_p),
- Taille du domaine: $L_x = 42\lambda_p \times L_y = 42\lambda_p$,
- Nombre de modes utilisés: $N_x = 1024 \times N_y = 512$, ordre HOS $M = 5$,
- En quantités dimensionnelles, si on fixe $T_p = 12.5$ s (typique en mer du Nord par tempête): $\lambda_p = 244$ m, Taille du domaine simulé: 10250 m \times 10250 m (i.e. $\simeq 105$ km²).

La taille du domaine est réduite dans la direction x par rapport au cas 2D présenté dans le paragraphe précédent afin de conserver un temps de calcul raisonnable. En ce qui concerne le temps de calcul, les simulations présentées ici (avec les conditions numériques ci-dessus) requièrent environ 10 jours de temps CPU sur un ordinateur avec un processeur unique 3Ghz Xeon, pour 250 périodes de pic de simulation.

La figure III.2.10 présente la déformée de surface libre initiale avec le paramètre de directionnalité $n = 2$. Ceci correspond à un champ de vagues fortement étalé en direction. Ce choix de paramètre pour la directionnalité utilisée ici ($n = 2$) n'est pas réaliste mais permet de mettre en évidence les capacités de simulation du modèle HOS ainsi que les méthodes d'analyse mises en œuvre. Un exemple avec une dispersion de l'état de mer beaucoup plus faible (mais plus réaliste) est présenté dans la section suivante sur la figure III.2.14 où le paramètre de directionnalité est $n = 90$.

Cet état de mer est donc propagé durant un temps $t = 250 T_p$, l'élévation de surface libre étant enregistrée 10 fois par période de pic. Ensuite, une analyse par passages à zéro est réalisée sur ces 2500 instants différents et permet d'obtenir l'évolution de la hauteur de vague en fonction du temps (à la même fréquence que l'élévation de surface libre). Ainsi, il est désormais possible de détecter les événements extrêmes en étudiant le paramètre H_{max}/H_s . L'évolution temporelle de ce paramètre de détection est représentée sur la figure suivante III.2.11.

La première observation que l'on peut faire en comparant cette figure à la même figure obtenue précédemment sur le champ de vagues 2D (Fig. III.2.6) est que le niveau moyen du paramètre H_{max}/H_s est beaucoup plus important dans ce cas 3D et également que les vagues scélérates (i.e. $H_{max}/H_s > 2.2$) sont plus nombreuses. Ceci est aisément explicable par le fait que le domaine simulé est de très grande taille et que le cas de houle présenté est très dispersé ce


 FIG. III.2.10 – Élévation de surface libre initiale, directionnalité $n = 2$

 FIG. III.2.11 – Evolution du paramètre H_{max}/H_s pendant la simulation, $n = 2$

qui implique un très grand nombre de vagues à l'intérieur du domaine. Le nombre de vagues est évalué comme présenté précédemment dans III.1.3.3 et l'équation (III.1.28) nous donne pour le paramètre de directionnalité $n = 2$, un nombre de vagues $N_{n=2} \sim 6 \cdot 10^3$ alors que pour le cas 2D on avait $N_{2D} \sim 10^2$. On peut indiquer ici que H_s est calculé comme étant égal à $H_{1/3}$, ce qui n'est pas exact : voir par exemple Guedes Soares et al. [62]. Les amplitudes atteintes par le rapport H_{max}/H_s avec $H_s = 4\sigma$ seront un peu différentes.

A $t = 0$, on peut remarquer qu'un évènement extrême artificiel est formé par l'initialisation linéaire de la simulation. On peut également observer, comme en 2D, des groupes de vagues de grande amplitude qui produisent plusieurs vagues scélérates à la suite ($t = 26T_p$ ou $t = 171T_p$). Des vagues isolées apparaissent également au cours de la simulation (par exemple à $t = 120T_p$).

On réalise maintenant des simulations tri-dimensionnelles et il semble donc intéressant de regarder la forme des vagues scélérates obtenues. On s'intéresse à l'évènement le plus extrême relevé à $t = 171T_p$. La figure III.2.12 montre l'élévation de surface libre à ce moment-là. Le carré blanc indique la position de l'évènement extrême dont une vue plus proche est présentée en figure III.2.13.

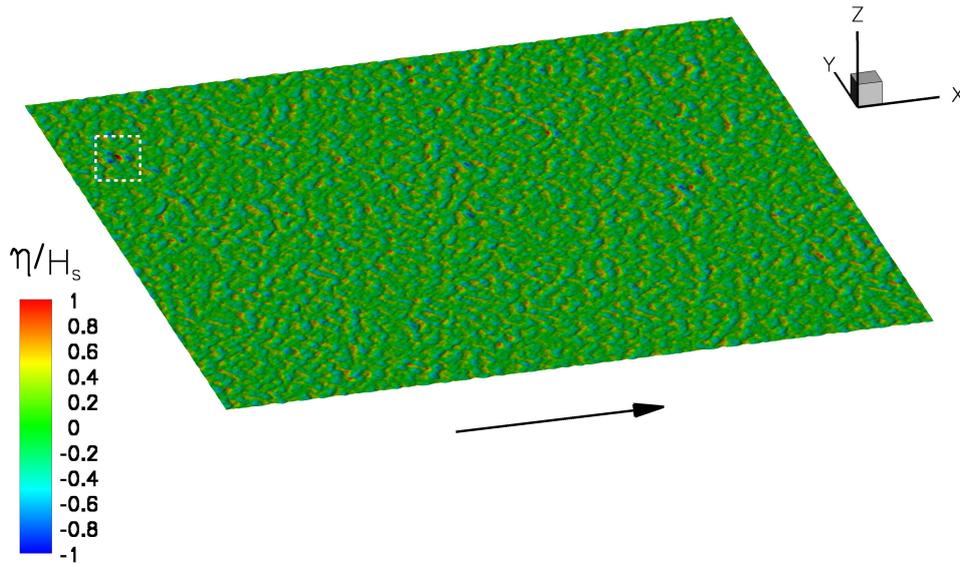


FIG. III.2.12 – *Élévation de surface libre au moment de la vague scélérate, $t = 171T_p$, $n = 2$*

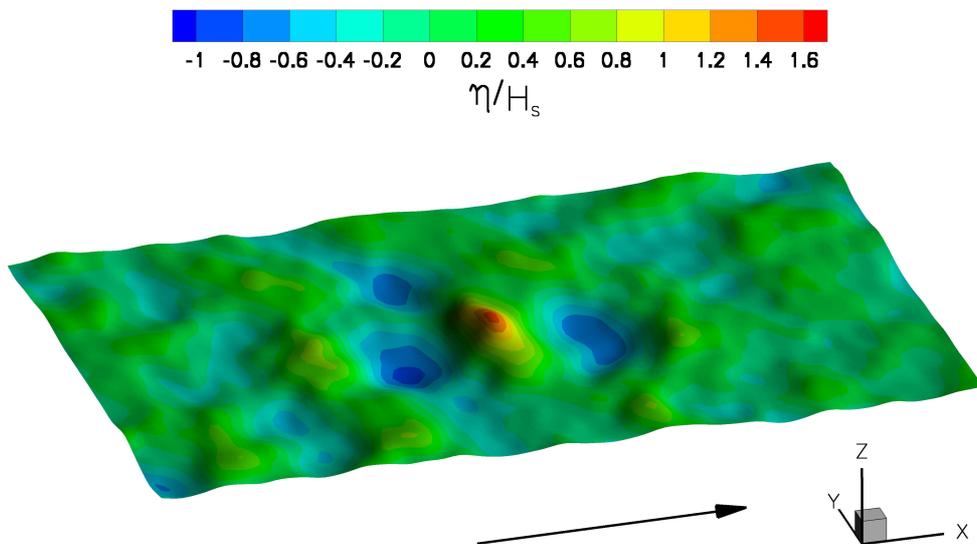


FIG. III.2.13 – *Zoom de la figure III.2.12: vague scélérate à $t = 171T_p$, $n = 2$*

On retrouve sur la vue globale du champ de vagues que l'évènement extrême est isolé mais on s'aperçoit en suivant temporellement le groupe de vagues composant cette vague scélérate que son temps de vie est assez long ($\simeq 20T_p$) durant lequel la vague extrême se propage dans le domaine. D'autre part, concernant la forme de cet évènement, on s'aperçoit que sa longueur d'onde dans la direction de propagation λ_x vaut $1.2\lambda_p$ et que l'étalement dans la direction transverse est très faible. La longueur transverse de crête introduite précédemment λ_c vaut moins d'une longueur d'onde de pic. Ainsi, il s'agit plus d'une vague en forme de pic qu'une vague qu'on pourrait qualifier de "mur d'eau". Cependant, on s'attend à ce que cette forme pyramidale de la vague soit très influencée par la directionnalité de l'état de mer considéré.

La section qui se termine ici avait pour objectif de montrer la faisabilité de l'étude de la formation de freak waves grâce au modèle HOS périodique. La section suivante s'attache à décrire plus en détail l'influence de la directionnalité sur l'apparition de ces vagues scélérates, au travers d'approches statistiques et déterministes jugées complémentaires.

III.2.3 Influence de la directionnalité

Nous allons présenter ici une étude paramétrique de l'influence de la directionnalité de l'état de mer sur la formation des vagues scélérates. On va donc faire varier le paramètre n définissant l'étalement directionnel du spectre de houle considéré. Les premiers essais ont été réalisés avec $n = 2$ qui est la valeur utilisée par Tanaka [118] & [119]. Cependant, cette valeur représente un état de mer très dispersé (cf. Fig. III.2.10) qui n'est pas très réaliste de ce que l'on peut trouver en mer. En effet, les champs des vagues observés sont moins étalés et on choisira donc des valeurs plus élevées du paramètre de directionnalité, à savoir : $n = 15$, $n = 30$ et $n = 90$. La figure III.2.14 représente l'état de mer initial défini par $n = 90$. Ce dernier est, comme attendu, beaucoup moins étalé directionnellement et correspond plus à ce que l'on peut rencontrer dans la nature. En augmentant encore le paramètre n , on va tendre vers un champ de vagues unidirectionnel.

En anticipant sur l'analyse vague par vague qui va suivre, il est intéressant de noter que le nombre de vagues présentes dans le domaine varie grandement en fonction de la directionnalité. En utilisant l'équation (III.1.30), avec λ_0 et λ_c déterminés par une analyse du champ de vagues initial, on arrive au tableau suivant III.2.1 :

	$n = 2$	$n = 15$	$n = 30$	$n = 90$
λ_0	$1.1\lambda_p$	$1.07\lambda_p$	$1.05\lambda_p$	$0.97\lambda_p$
λ_c	$0.69\lambda_p$	$0.91\lambda_p$	$1.10\lambda_p$	$3.34\lambda_p$
N_{espace}	5.8110^3	4.7010^3	3.8310^3	1.3610^2
$N_{espace/temps}$	2.410^6	2.010^6	1.610^6	5.810^4

TAB. III.2.1 – Tailles λ_0 , λ_c et nombre de vagues N_{espace} , $N_{espace/temps}$ dans le domaine en fonction de la directionnalité

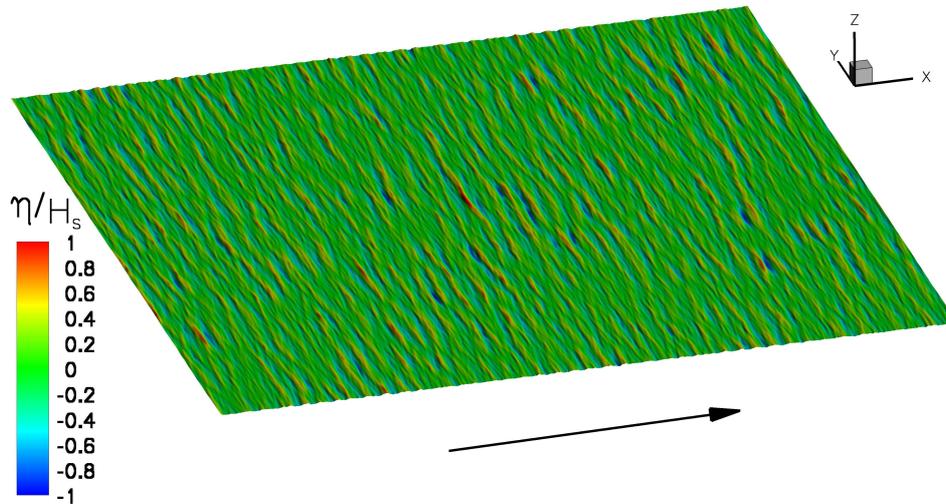


FIG. III.2.14 – Élévation de surface libre initiale, directionnalité $n = 90$

On remarque que le nombre de vagues tend à diminuer à mesure que l'étalement directionnel diminue. Cette évolution ne doit pas être oubliée lorsqu'on étudie l'influence de la directionnalité sur un paramètre, surtout lorsque l'on arrive à des états de mer très peu directionnels (cf. par exemple $n = 90$) où les analyses statistiques seront plus difficiles à mener au vu du nombre de vagues pouvant s'avérer assez faible.

III.2.3.1 Initialisation de la simulation

On va s'intéresser dans un premier temps aux distributions de probabilité de l'élévation de surface libre et de la hauteur de vague. On cherche à savoir si l'initialisation de la simulation est correcte. On rappelle (cf. section III.1.1) qu'elle est constituée d'une condition initiale linéaire puis d'une période de relaxation vers le non-linéaire.

Condition Initiale, $t = 0$

On présente tout d'abord dans la figure III.2.15 la densité de probabilité f de l'élévation de surface libre du champ de vagues initial. Le cas présenté est pour une directionnalité $n = 2$, les résultats étant identiques quelle que soit la directionnalité utilisée.

On peut remarquer sur cette figure que la densité de probabilité de l'élévation de surface libre initiale suit une loi gaussienne décrite dans la partie III.1.3. Ceci est bien le résultat attendu étant donné que cette condition initiale est définie comme une superposition de composantes linéaires issues d'un spectre de JONSWAP. La partie basse de la courbe, qui présente cette même densité de probabilité en échelle logarithmique, permet une meilleure lecture des différences observées. On utilisera donc par la suite les densités de probabilités en échelle logarithmique.

Les densités de probabilité sont calculées à partir de la discrétisation, en un certain nombre d'intervalles N_i , de la gamme de valeurs pouvant être prises par la variable à laquelle on s'intéresse (typiquement son minimum et son maximum courants). Ensuite, le nombre de valeurs

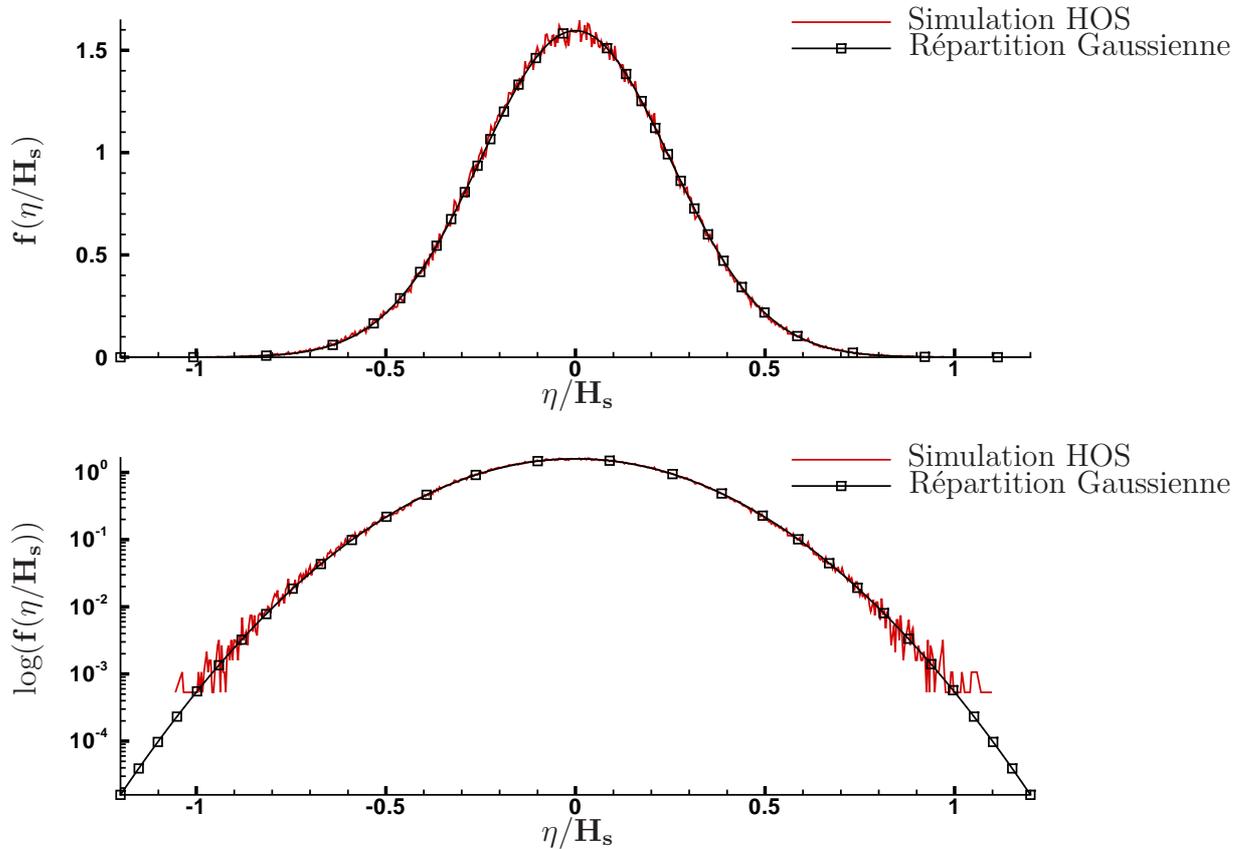


FIG. III.2.15 – Densité de probabilité de l'élévation de surface libre initiale, $n = 2$, $N_i = 500$ et $t = 0$

prises dans chaque intervalle par la quantité d'intérêt nous donne sa densité de probabilité. Il est à noter que le nombre de ces intervalles utilisés influe sur la régularité de cette solution. En effet, si un nombre trop important d'intervalles est utilisé, on observera une densité de probabilité bruitée comme dans la figure III.2.15, où $N_i = 500$. On utilisera par la suite un nombre d'intervalles fixé à $N_i = 100$ dont un cas identique à la figure précédente est reproduite sur la figure III.2.16.

On observe alors bien un lissage de la solution par rapport à la figure III.2.15. La répartition gaussienne définit donc de façon très précise la densité de probabilité de l'élévation du surface libre initiale (linéaire).

Nous allons effectuer la même analyse que précédemment pour la densité de probabilité de la hauteur de vague crête à creux. On a vu dans la section III.1.3 que celle-ci devrait initialement suivre une distribution de Rayleigh. La figure III.2.17 présente cette densité de probabilité comparée à la loi de Rayleigh. Comme précédemment, on a vérifié que la directionnalité n'avait pas d'influence sur ce résultat.

On remarque alors très bien que, comme on s'y attendait, la densité de probabilité de la hauteur de vagues est parfaitement représentée par une distribution de Rayleigh. Il apparaît cependant que la densité de probabilité obtenue à partir des simulations HOS ne présente pas

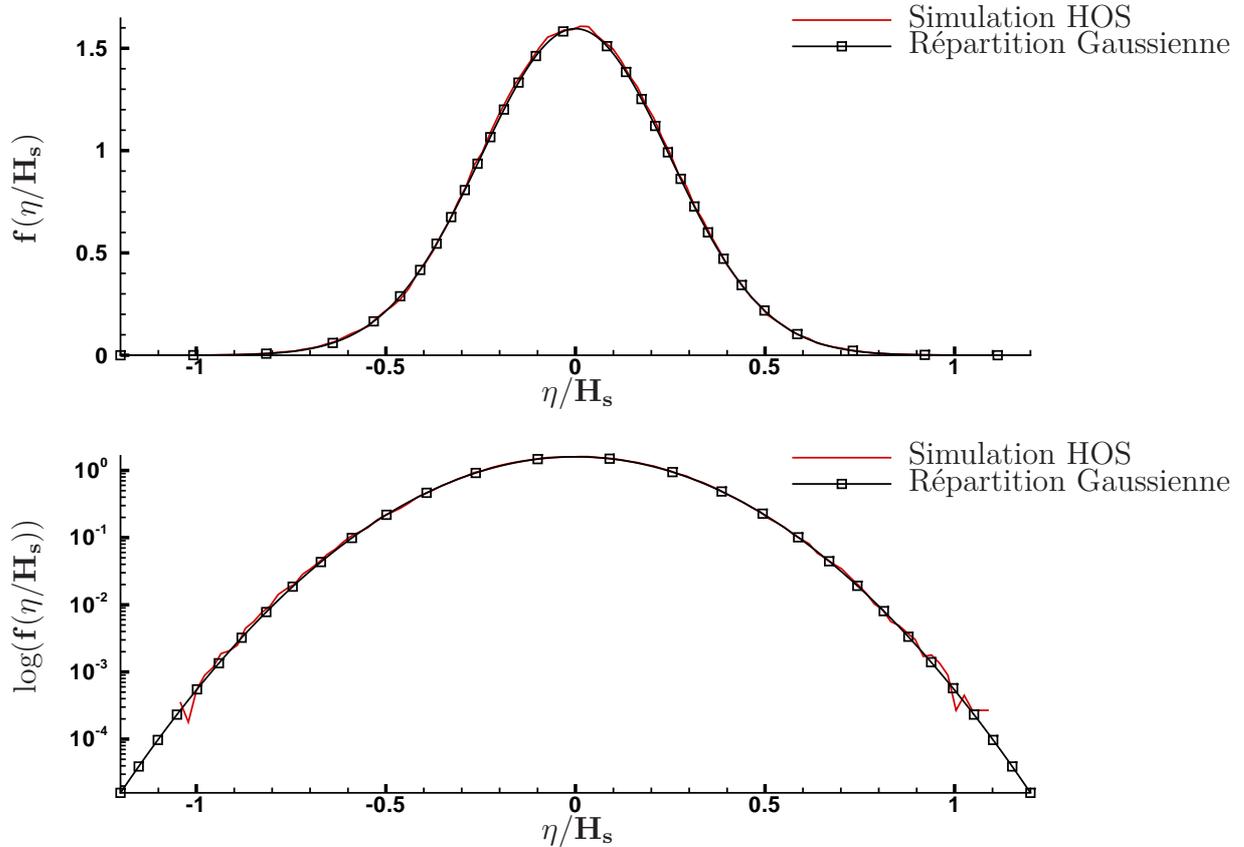


FIG. III.2.16 – Densité de probabilité de l'élévation de surface libre initiale, $n = 2$, $N_i = 100$ et $t = 0$

la régularité des résultats obtenus avec l'élévation de surface libre. Ceci est dû au nombre d'évènements étudiés. En effet, la densité de probabilité de l'élévation de surface libre est calculée sur les points de calcul spatiaux, i.e. typiquement $N = 1024 \times 512 \simeq 520000$, alors que pour les hauteurs de vagues on travaille sur le nombre de vagues qui typiquement va être pour $n = 2$ (voir tableau III.2.1), $N_{espace} \simeq 6000$. Ainsi, le nombre d'évènements est très différent entre l'étude de l'élévation de surface libre et celle de la hauteur de vague. Enfin, comme pour l'élévation, on présentera dans la suite les résultats en échelle logarithmique.

Nous avons vérifié dans ce paragraphe les répartitions théoriques linéaires données précédemment, ainsi que les analyses réalisées sur le champ de vagues (calcul des hauteurs crête à creux en particulier). Ces répartitions concordent effectivement avec une distribution linéaire de l'élévation de surface libre. On va maintenant s'intéresser à l'évolution de ces répartitions au cours du temps avec notamment l'influence du caractère non-linéaire de notre résolution par méthode HOS.

Après la relaxation, $t = 10 T_p$

On va s'intéresser dans ce paragraphe aux densités de probabilité concernant l'état de mer après la période de relaxation (à $t = 10 T_p$) préconisée par Dommermuth [32] (voir la section III.1.1.3). La figure III.2.18 représente la densité de probabilité de l'élévation de surface libre η

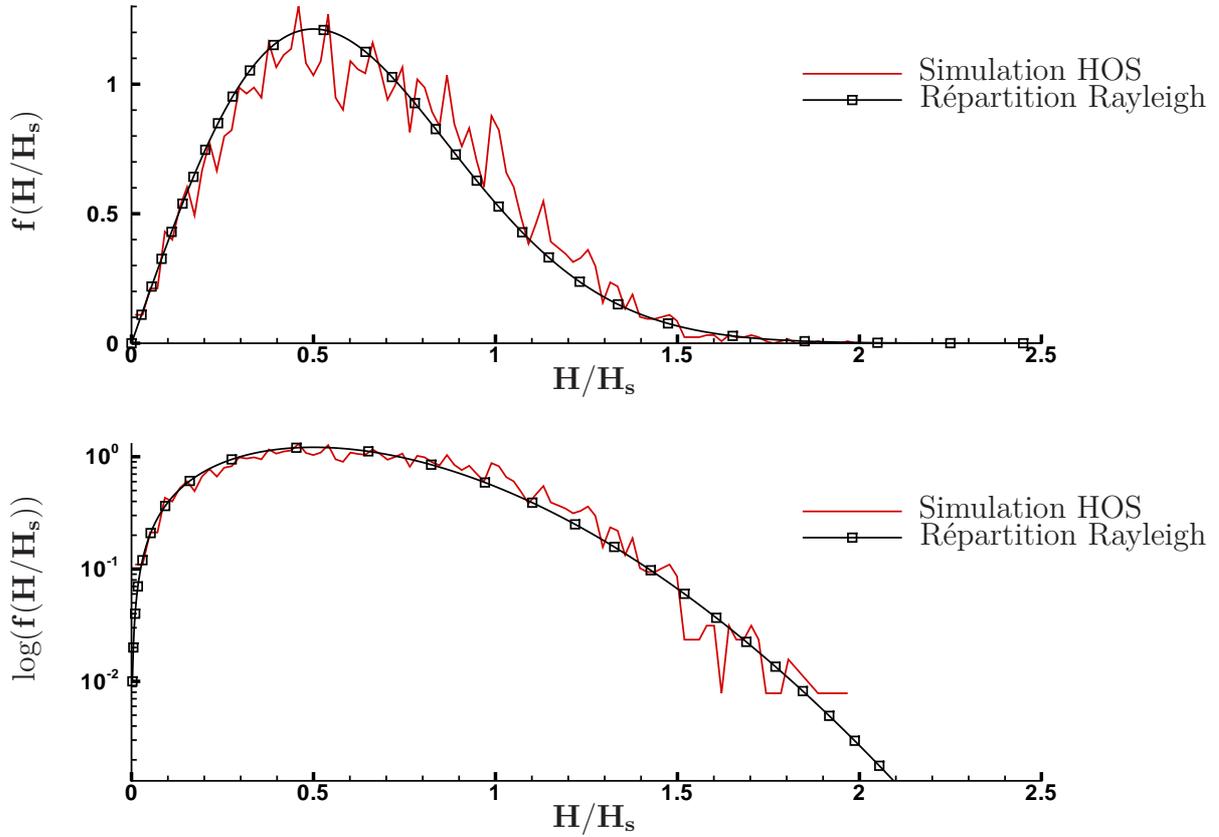


FIG. III.2.17 – Densité de probabilité de la hauteur crête à creux initiale, $n = 2$, $N_i = 100$ et $t = 0$

comparée à la répartition théorique linéaire (gaussienne) et au modèle 2nd ordre de Tayfun que l'on a présenté dans la section III.1.3.

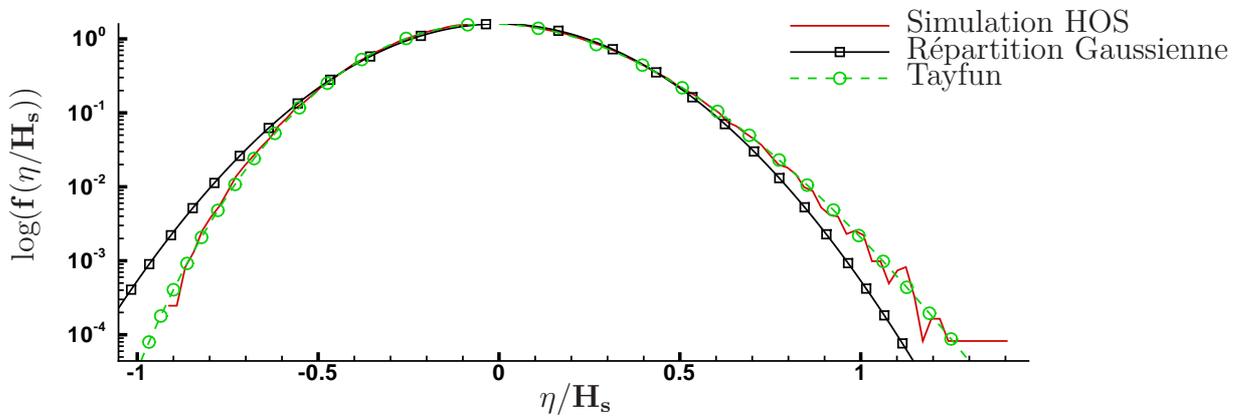


FIG. III.2.18 – Densité de probabilité de l'élévation de surface libre : $n = 2$ et $t = 10T_p$

On remarque alors qu'une fois le champ de vagues correctement initialisé (i.e. après la

période de transition), la densité de probabilité des élévations de surface libre ne suit plus la répartition linéaire gaussienne. En effet, on a désormais un état de mer non-linéaire dont on observe les caractéristiques classiques : à savoir, les creux moins marqués qu'en théorie linéaire et les crêtes plus élevées. D'autre part, la répartition issue de la théorie 2nd ordre de Tayfun [120] représente de façon très précise la répartition des élévations de surface libre de notre champ de vagues. Il est intéressant de noter que la directionnalité n'a pas d'influence sur ce résultat. Pour plus de clarté, les courbes pour les différentes valeurs de la directionnalité ne sont pas représentées, étant quasiment confondues entre elles.

En ce qui concerne les hauteurs crêtes à creux, la figure III.2.19 présente la densité de probabilité des hauteurs de vagues après la période de relaxation permettant au champ de vagues d'avoir son caractère non-linéaire. On a superposé les modèles prenant en compte une partie des non-linéarités décrits dans la partie III.1.3, sachant qu'il a été montré sur de nombreuses mesures en mer que la distribution de Rayleigh surestimait les probabilités d'occurrence.

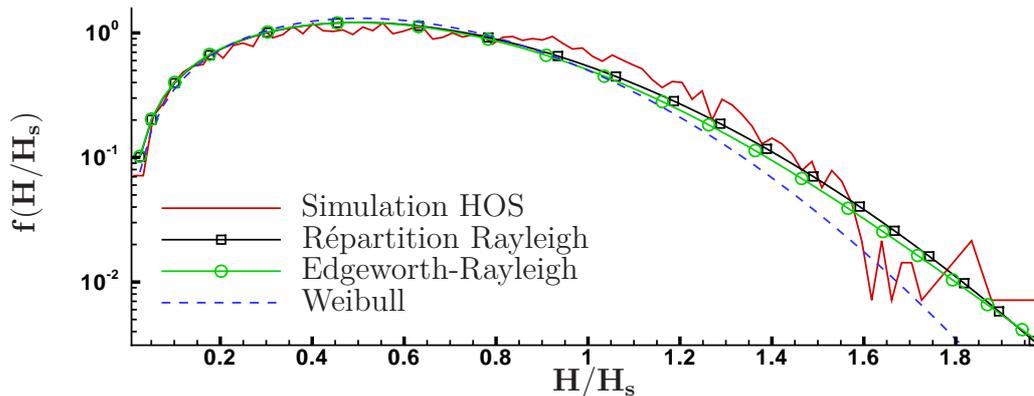


FIG. III.2.19 – Densité de probabilité de la hauteur de vagues : $n = 2$ et $t = 10 T_p$

On peut noter sur cette figure, en la comparant à la figure avant la période de relaxation, (figure III.2.17) que la densité de probabilité est beaucoup moins modifiée que celle de l'élévation de surface libre. La répartition de Rayleigh approxime toujours de façon assez fiable la densité de probabilité complètement non-linéaire obtenue par les simulations HOS. On observe que les paramètres choisis par Forristall pour la répartition dite de Weibull ne conviennent pas totalement à nos simulations. Cependant, il faut se rappeler que ces paramètres peuvent être ajustés afin d'approximer plus finement la solution (par exemple le choix $\alpha_W = 2$, $\theta_W = 8$ correspond à la répartition de Rayleigh). Le choix de Forristall avait été fait sur des données prises dans le Golfe de Mexico ce qui ne correspond pas exactement à nos conditions de houle. Le modèle dit Edgeworth-Rayleigh quant à lui approxime assez précisément cette répartition. Le caractère bruité de la densité mesurée à partir des données HOS gêne cependant une conclusion nette sur la validité de tel ou tel modèle.

Il est donc apparu dans cette section que l'initialisation linéaire initiale utilisant un spectre de JONSWAP nécessite une période de relaxation vers le champ de vagues complètement non-linéaire comme indiqué par Dommermuth [32]. Une fois cette période de transition passée, les différentes densités de probabilité des quantités d'intérêt (élévation de surface libre, hauteur

crête à creux) sont bien représentées par les modèles améliorés présentés précédemment dans la section III.1.3. Il apparaît lorsque l'on étudie ces quantités que la directionnalité n'a pas d'influence sur les densités de probabilité initiales. Il semble intéressant de voir si l'évolution au cours du temps de ces densités de probabilité est influencée par la directionnalité comme semble l'indiquer les articles de Socquet-Juglard et al. [112] ou Onorato et al. [100].

III.2.3.2 Évolution au cours du temps

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'évolution au cours du temps de différents paramètres permettant de mettre en avant l'influence de la directionnalité. Tout d'abord, on étudie l'évolution temporelle des densités de probabilités présentées précédemment. On en présente des vues à différents instants ($t = 50 T_p$, $100 T_p$ et $200 T_p$) et ce pour chacune des 4 directionnalités traitées: $n = 2, 15, 30, 90$. La figure III.2.20 traite de l'élévation de surface libre, la figure III.2.21 de la hauteur de vagues et la figure III.2.22 d'une hauteur de vague moyennée sur un court laps de temps.

Il convient de rappeler qu'à $t = 10 T_p$, après la période de relaxation, les densités de probabilités étaient identiques quelle que soit la directionnalité de l'état de mer simulé. On observe alors que l'évolution au cours du temps est modifiée avec la directionnalité. En effet, en comparant à un instant donné (une colonne de figures), on constate que les répartitions ne sont pas identiques entre elles. On observe par exemple à $t = 200 T_p$ sur la figure III.2.20 que la densité de probabilité des élévations de surface libre les plus grandes semble largement augmentée lorsque l'on passe de $n = 2$ à $n = 90$. Mais, ceci ne semble pas vérifié quel que soit le temps d'analyse. Il convient donc d'analyser de façon autre notre champ de vagues afin d'extraire de façon plus fine les différences existant entre les simulations.

On s'intéresse auparavant aux densités de probabilité des hauteurs de vague sur la figure III.2.21. On représente, comme dans la figure précédente III.2.20, pour les différents cas de directionnalité traités et à différents instants t la densité de probabilité cette fois-ci des hauteurs crêtes à creux H .

On peut remarquer sur cette figure, comme on l'avait noté sur la figure III.2.17 représentant les densités de probabilité des hauteur de vagues à l'état initial, que le nombre de vagues étant très faible (comparé au nombre de points dans le calcul des probabilité de η), les signaux extraits des simulations HOS sont "bruités". La comparaison ne devient alors pas aisée, les oscillations étant d'amplitude très importante. On a essayé par la suite de lisser ce signal en le moyennant sur une durée fixe. Afin de ne pas perdre d'informations, il convient de réaliser cette moyenne sur une durée assez courte, on choisira ici $2T_p$. La figure suivante III.2.22 représente les mêmes densités de probabilité que précédemment, moyennées sur ce laps de temps.

Comme attendu, les densités de probabilité oscillent moins mais il apparaît cependant que pour les hauteurs de vagues élevées, le signal reste "bruité". En effet, pour $H/H_s > 1.5$ le nombre de vagues entrant en jeu ne semble pas assez grand pour avoir des probabilités satisfaisantes, même en moyennant en temps ces hauteurs. Il semble donc difficile de donner des conclusions précises sur le comportement du champ de vagues avec de tels signaux. Cependant, on peut étudier la forme générale du signal nous donnant quelques informations, mais il faudra rester prudent quant à la comparaison des différents cas de simulation.

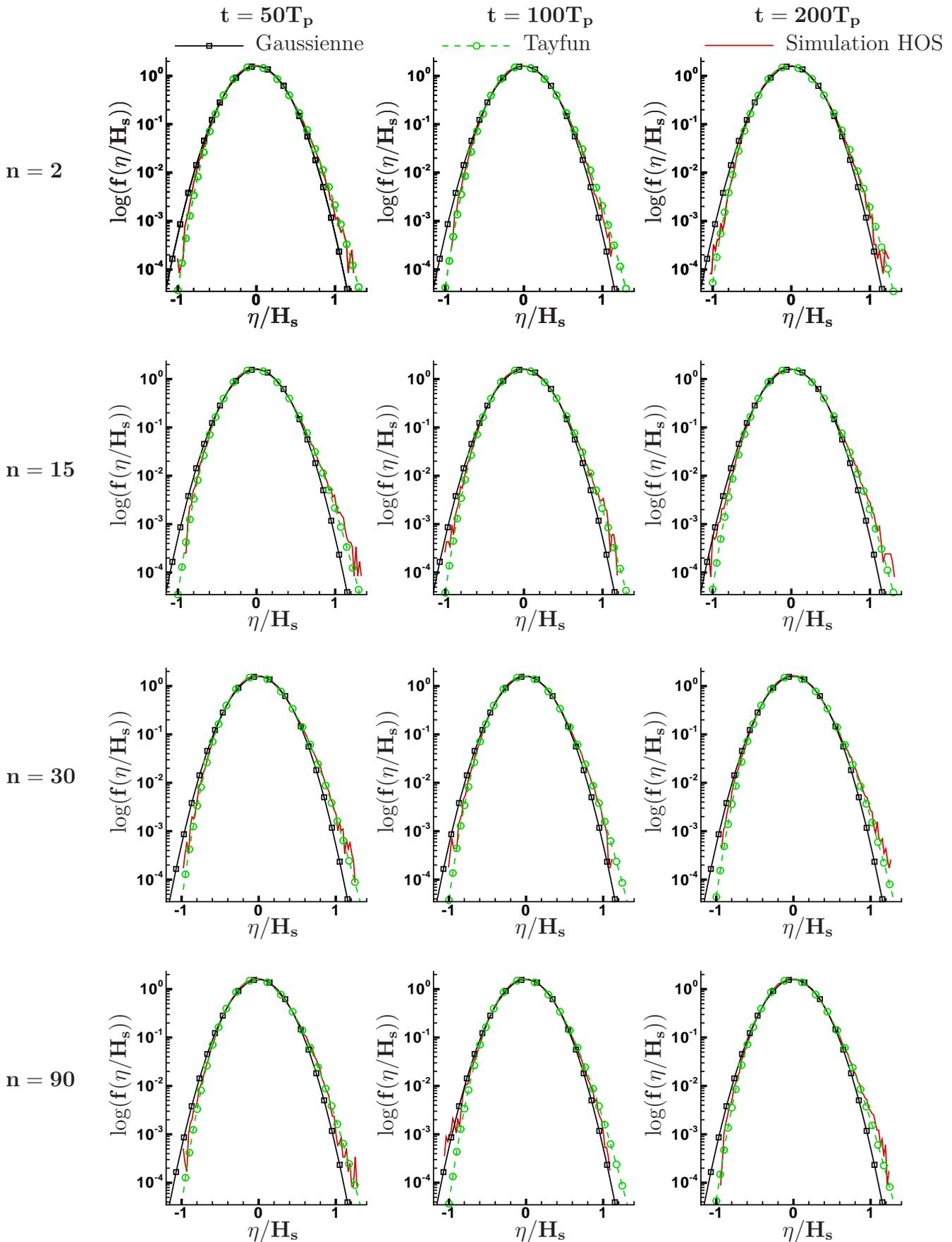


FIG. III.2.20 – Évolution au cours du temps de la densité de probabilité de l'élévation de surface libre.

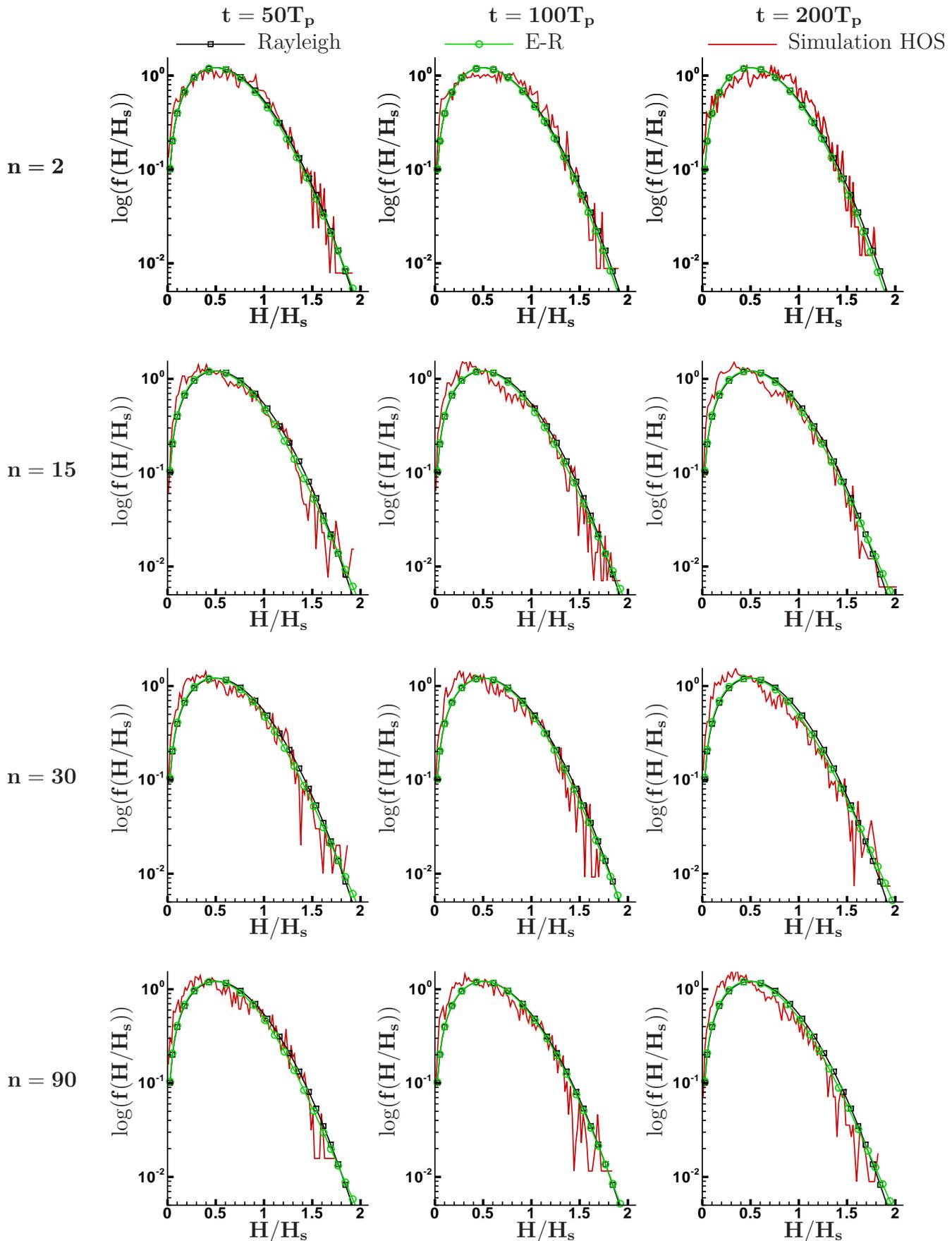


FIG. III.2.21 – Évolution au cours du temps de la densité de probabilité de la hauteur de vague.

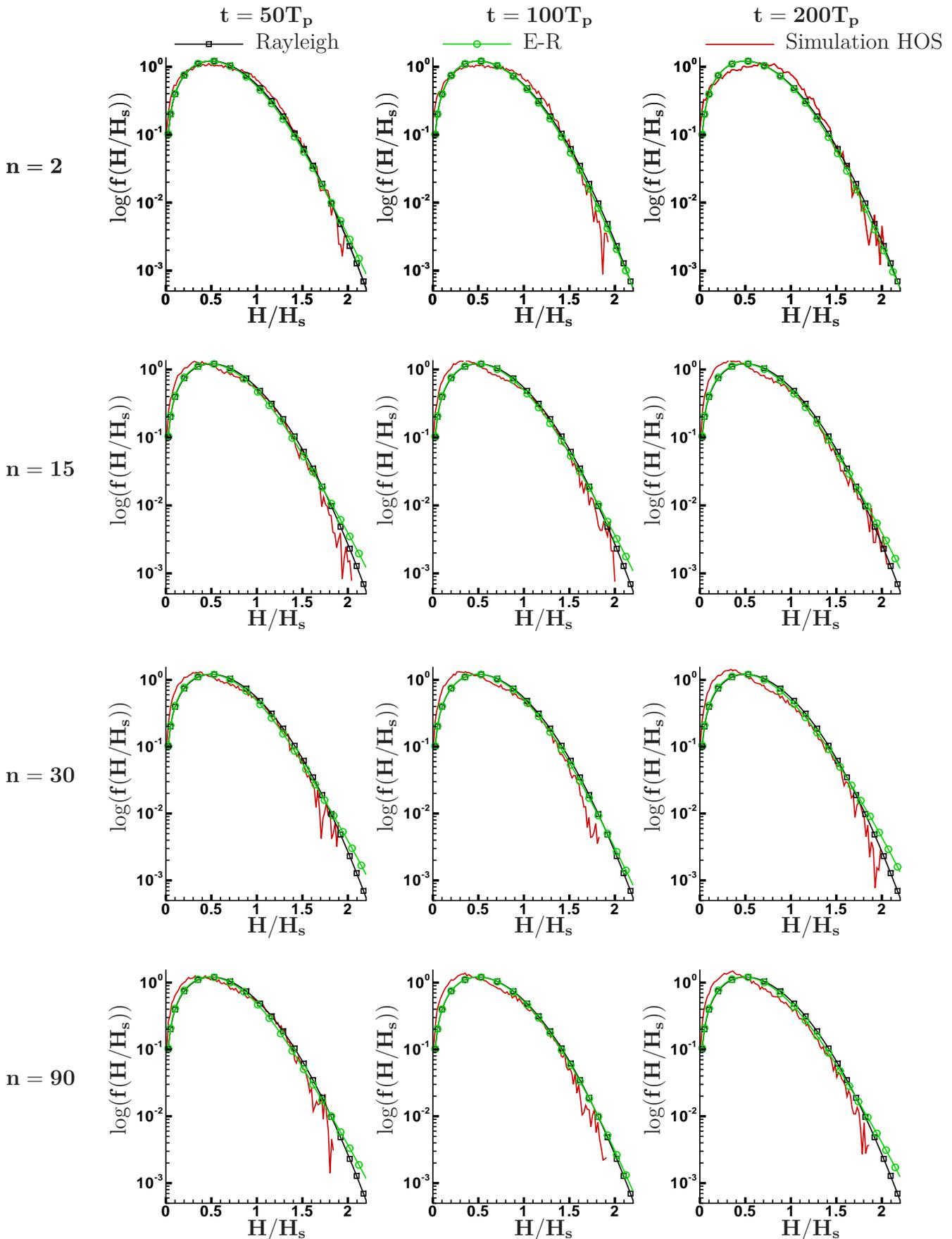


FIG. III.2.22 – Évolution au cours du temps de la densité de probabilité de la hauteur de vague, moyennée sur $2T_p$.

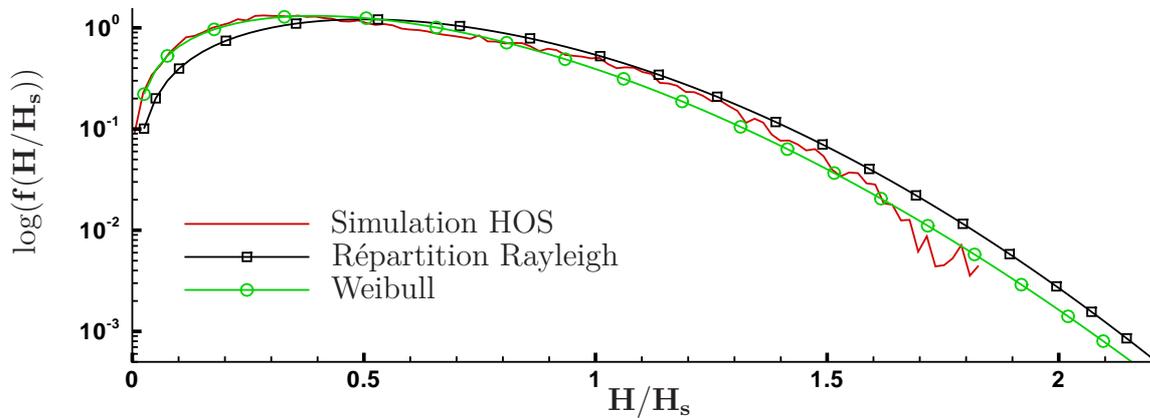
En observant pour une directionnalité donnée les densités de probabilité au cours du temps, on se rend bien compte d’une évolution temporelle de celle-ci. En effet, des changements apparaissent clairement :

- Pour le cas $n = 2$, on peut remarquer que la densité de probabilité semble s’étaler autour de son maximum avec un décalage de celui-ci vers les hauteurs de vagues plus grandes. Le comportement aux hauteurs crêtes à creux élevées semble être très proche de la théorie linéaire (répartition de Rayleigh). Hauteur max atteinte : $H \simeq 2H_s$
- Pour le cas $n = 15$, la densité de probabilité s’est ajustée, dès $t = 50T_p$, avec un maximum pour une hauteur de vagues H/H_s plus faible que la répartition linéaire ne le prévoit. En ce qui concerne le comportement aux hauteurs élevées, il semble assez modifié au cours du temps avec notamment pour $t = 50T_p$ et $100T_p$ une densité de probabilité plus faible que la théorie linéaire. En $t = 200T_p$ par contre, la théorie de Rayleigh semble bien approximer le champ de vagues simulé. Hauteur “max.” atteinte : $H \simeq 2.1H_s$
- Pour le cas $n = 30$, de même que pour le cas $n = 15$, la densité de probabilité admet un maximum pour un H/H_s plus faible que la répartition linéaire. En $t = 100T_p$ et $200T_p$, la répartition des hauteurs de vagues s’écarte très clairement de la répartition linéaire qui devient défailante pour les grandes hauteurs crêtes à creux qu’elles surestiment. Hauteur “max.” atteinte : $H \simeq 1.8H_s$
- Pour le cas $n = 90$, les conclusions sont identiques que pour le cas $n = 30$. Hauteur “max.” atteinte : $H \simeq 1.8H_s$

On a comparé ici les résultats avec le modèle amélioré de Edgeworth-Rayleigh. Ce modèle ne semble pas capable de prendre en compte toute la complexité du champ de vagues que l’on simule. En effet, ce modèle reste assez proche de la répartition de Rayleigh, qui peut s’avérer très défailante dans certains cas. Cependant il est à noter que l’hypothèse de bande étroite est appliquée et que les erreurs observées peuvent être sans doute expliquées par cette approximation. Mori & Yasuda [94] ont comparé ce modèle à des mesures en mer où le spectre, comme dans nos simulations, est assez étalé en fréquence. Ils observent également des erreurs dans la prédiction des densités de probabilité. D’autre part, il est intéressant d’indiquer que pour chacune de ces simulations, la répartition aux faibles hauteurs est plus importante que celle escomptée au vu de la théorie linéaire ou de par les théories améliorées. Ce point a déjà été indiqué par Podgórski et al. [104] et Stansell et al. [113], imputant ce phénomène à la mesure des données et au caractère étalé en fréquence du champ de vagues. Il est intéressant de noter, que le modèle de Weibull peut être ajusté à l’aide de ses paramètres afin de représenter au mieux cette densité. On prend par exemple le cas $n = 30$, $t = 100T_p$ on peut alors ajuster les paramètres, en prenant $\alpha_W = 1.81$ et $\theta_W = 5.1$ on obtient le résultat présenté sur la figure III.2.23.

On observe alors un très bon accord entre la répartition dite de Weibull avec les paramètres donnés ci-dessus et les résultats extraits des simulations HOS. Mais, il faut noter que ces paramètres sont assez éloignés d’une répartition classique de Rayleigh $\alpha_{W_{Rayleigh}} = 2$ et $\theta_{W_{Rayleigh}} = 8.0$. L’inconvénient est donc qu’une telle répartition doit être ajustée de manière empirique par rapport à des mesures ou ici des résultats obtenus. Les coefficients α_W et θ_W ne peuvent pas être déduits d’observations ou autre comme c’est le cas du modèle Edgeworth-Rayleigh utilisant le skewness et le kurtosis du champ de vagues.

En ce qui concerne l’étude de l’influence de la directionnalité sur la densité de probabilité

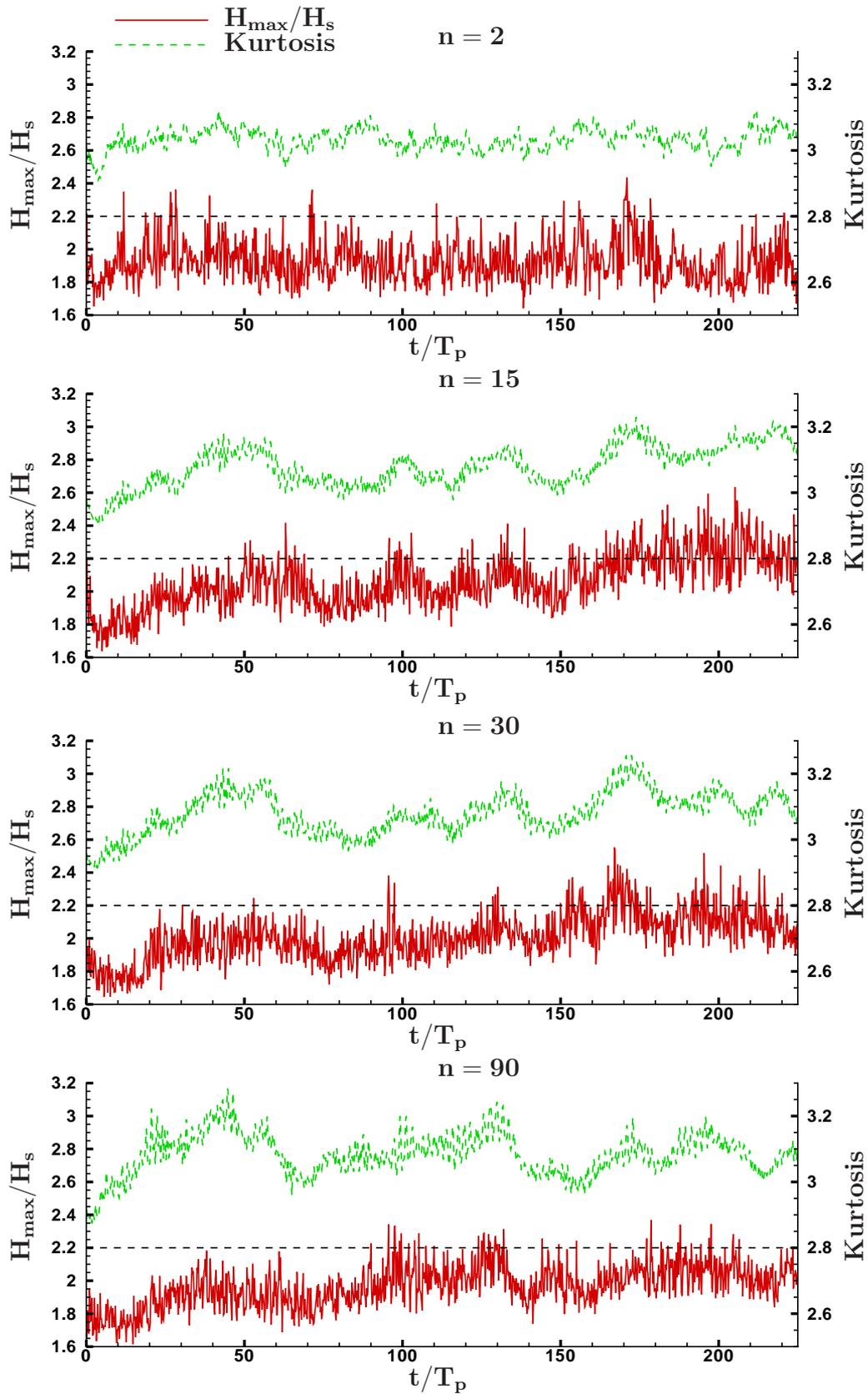

 FIG. III.2.23 – Densité de probabilité de la hauteur de vagues, $n = 30$, $t = 100T_p$

des hauteurs de vague il faut rappeler que le nombre de vagues est différent suivant le cas étudié, ce qui pose bien évidemment un problème dans notre étude, expliquant sans doute par exemple les valeurs maximales observées ici qui ne sont pas identiques.

On cherche alors à étudier l'influence de la directionnalité de façon plus précise. On a analysé précédemment en des moments précis les densités de probabilité des hauteurs de vague ainsi que des élévations de surface libre. On va maintenant s'intéresser à l'étude au cours du temps de paramètres permettant de qualifier le champ de vagues et notamment les vagues extrêmes apparaissant au cours du temps dans ce champ de vagues. En se référant à la littérature, il semble que l'étude de deux paramètres présente un intérêt particulier, le kurtosis et le rapport H_{max}/H_s : le premier, qui traduit le caractère pointu d'une distribution (i.e. dans notre cas la propension à avoir de grandes vagues cambrées) et le second, qui demande un traitement particulier des données avec une analyse du champ de vagues à chaque instant plus lourde mais qui renseigne sur de nombreux points intéressants par exemple pour une étude de dimensionnement dans un état de mer fixé.

La figure III.2.24 présente l'évolution des deux paramètres : H_{max}/H_s et kurtosis au cours du temps. Les différentes simulations avec les quatre directionnalités traitées $n = 2, 15, 30, 90$ sont analysées.

On étudie dans un premier temps le rapport H_{max}/H_s . La ligne en pointillés noirs représente le seuil de détection des vagues scélérates. On peut observer des comportements différents suivant la directionnalité du champ de vagues, en particulier dans les valeurs maximales atteintes. On peut observer par exemple pour le cas $n = 15$, à partir de $t = 175T_p$ et jusqu'à la fin de la simulation (ici $t = 225T_p$) des vagues extrêmes en série apparaissant, avec un niveau moyen de H_{max}/H_s très élevé ($\simeq 2.3$). Il a été montré sur des simulations de petite taille par Onorato et al. [100] qu'une augmentation de l'étalement directionnel diminuait l'occurrence des vagues extrêmes. Cette tendance n'apparaît pas clairement dans nos simulations même si il semble que en comparant les cas $n = 30$, $n = 15$ et $n = 2$, le cas le plus étalé ($n = 2$) semble comporter moins de vagues extrêmes, tout du moins avec des temps de vie plus courts. Ensuite, le cas $n = 90$ ne semble pas spécialement corroborer nos dires même si il faut se rappeler comme


 FIG. III.2.24 – Évolution au cours du temps des paramètres : H_{\max}/H_s et Kurtosis

on l'a vu précédemment que le nombre de vagues mises en jeu diminue fortement lorsque l'on diminue l'étalement.

Enfin, cette figure a également pour but de mettre en avant le rapport existant entre kurtosis et vagues extrêmes. En comparant les 2 courbes sur la figure III.2.24 on s'aperçoit du lien étroit entre les deux paramètres (kurtosis et H_{max}/H_s). On remarque dans notre figure une déviation pouvant être assez importante par rapport à la distribution gaussienne ($kurtosis = 3$). La corrélation entre ces deux paramètres est très forte et permet donc de qualifier le kurtosis comme une mesure assez fiable du caractère extrême d'un champ de vagues (résultat largement utilisé, voir par exemple Onorato et al. [100] ou Socquet et al. [112]). Cependant, il faut noter que l'analyse réalisée avec ce paramètre ne sera jamais aussi précise que l'étude à l'aide du rapport H_{max}/H_s par exemple. En effet, des vagues extrêmes avec des durées de vie assez courtes ne peuvent pas être décelées par une étude du kurtosis seul (on pense par exemple au cas $n = 30$ à $t = 95T_p$). Cependant, le calcul du moment d'ordre 4 de l'élévation de surface libre (le kurtosis) est beaucoup plus aisé à réaliser que l'analyse des hauteurs de vagues, tout en fournissant les tendances de manière très précises. Il faut donc en fonction de la précision nécessaire utiliser l'un ou l'autre des paramètres.

Afin de comparer plus précisément l'influence de la directionnalité on trace dans la figure suivante III.2.25, l'évolution temporelle du kurtosis pour chacun des quatre cas étudiés.

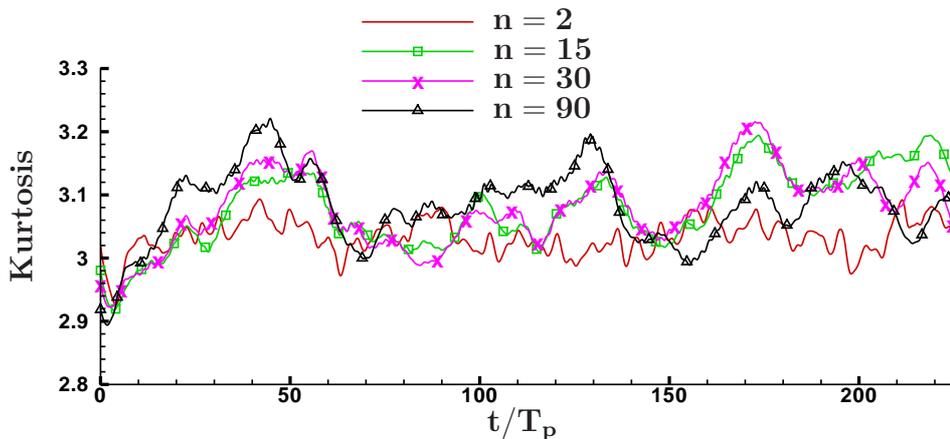


FIG. III.2.25 – Évolution au cours du temps du kurtosis pour les quatre directionnalités différentes

On observe plus nettement les différences entre les différents essais. On se rend bien compte ici que le cas le plus étalé directionnellement $n = 2$ est celui présentant une déviation par rapport à la répartition gaussienne ($kurtosis = 3$) la plus faible. Ensuite, il apparaît que le cas très peu étalé, $n = 90$ présente les déviations les plus importantes. Cependant comme on l'a vu précédemment la corrélation avec des hauteurs de vagues extrêmes plus importantes que pour les autres essais n'est pas directe. Il faut donc sans doute être prudent lors de l'utilisation du paramètre kurtosis comme mesure du caractère extrême d'un champ de vagues.

Il faut garder à l'esprit que les deux approches présentées sont un peu différentes. En effet, le kurtosis, qui est le moment d'ordre quatre de l'élévation de surface libre, s'appuie sur cette dernière pour son calcul. Le paramètre H_{max}/H_s s'appuie quant à lui sur la hauteur de vagues crête à creux. Ainsi, l'influence de la directionnalité va être vue différemment : avec l'analyse sur H chaque vague isolée est traitée de la même manière alors que leurs tailles transverses

peuvent être très différentes comme on le verra dans le paragraphe suivant III.2.3.3; avec le kurtosis, la taille transverse n'est pas un paramètre rentrant en jeu.

III.2.3.3 Forme des vagues scélérates

Il semble également intéressant d'étudier la forme moyenne des vagues scélérates. Ceci est rendu possible par l'analyse vague par vague utilisée dans les deux directions principale et transverse. La figure III.2.26 représente les différentes vagues scélérates observées lors des simulations. Chaque rectangle représente une vague extrême observée (i.e. une vague avec $H/H_s > 2.2$) avec ses dimensions propres (i.e. λ_x sa longueur dans la direction de propagation et λ_y sa longueur dans la direction transverse). Les quatre cas de directionnalité sont présentés sur cette figure.

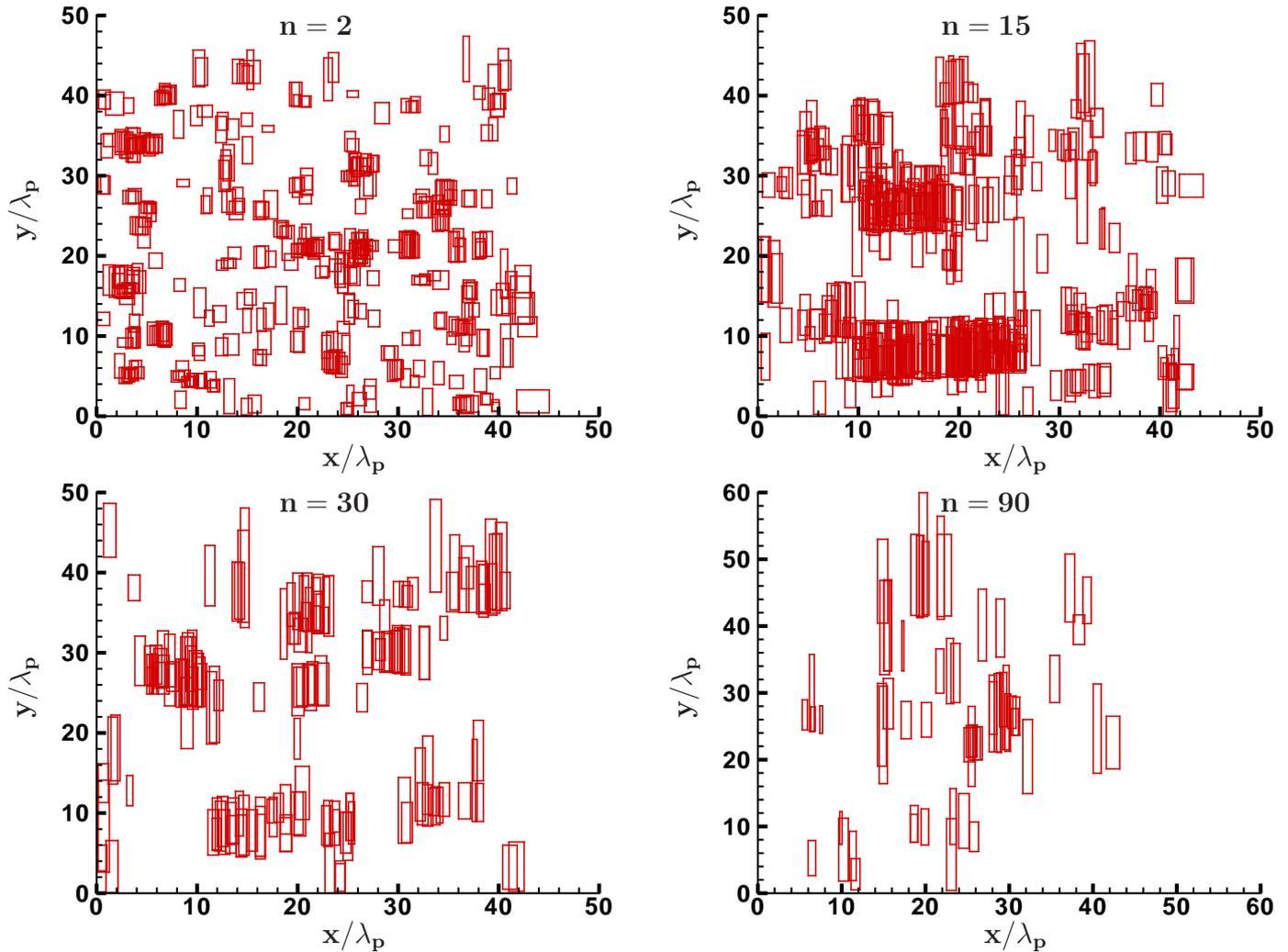


FIG. III.2.26 – Position et forme des vagues scélérates dans le domaine de calcul pour les 4 directionnalités différentes

La comparaison des quatre cas amène de nombreux commentaires. Par exemple, la dimension transverse de la vague, λ_y , tend à augmenter à mesure que l'étalement directionnel diminue, comme attendu. Les valeurs moyennes et leur évolution en fonction de la directionnalité sont

reportées dans le tableau III.2.2. On remarque dans cette figure également une grande variation du nombre de vagues scélérates observées N_{freaks} en fonction de la directionnalité. Les cas les plus étalés, $n = 2$ et $n = 15$ semblent contenir un grand nombre de ces évènements extrêmes.

En observant la figure III.2.26, on remarque sur le cas $n = 2$ que les vagues extrêmes présentent une forme très peu étendue dans la direction transverse. Dans ce cas de calcul, fortement étalé en direction, les vagues vont présenter une forme plutôt trapézoïdale comme on l'a remarqué sur la figure III.2.13. Lorsque n augmente, donc que l'étalement directionnel diminue, on se rend bien compte de l'allongement transversal des vagues extrêmes observées (cf. λ_y dans tableau III.2.2).

D'autre part, ces figures sont intéressantes car elles peuvent nous renseigner sur le comportement des vagues scélérates observées. En effet, deux types distincts semblent apparaître lors de notre analyse, comme l'étude du rapport H_{max}/H_s (figure III.2.24) nous l'avait suggéré. On a d'une part des vagues extrêmes apparaissant de manière isolée dans le domaine simulé et on a d'autre part des vagues scélérates apparaissant en groupe. Par exemple, pour le cas $n = 2$ en $(x/\lambda_p, y/\lambda_p) = (6,10)$ un groupe de vagues de grande amplitude apparaît et reste cohérent pendant quelques périodes. Ce genre d'évènements est à comparer aux évènements dits isolés où une vague scélérate n'est décelée qu'à un instant précis et à un endroit donné. Leur temps de vie est beaucoup plus court et est lié au critère H_{max}/H_s de détection. En effet, si une vague dépasse légèrement et sur un temps très court ce critère de détection, on la repèrera comme isolée car suivie d'aucune autre vague ne satisfaisant le critère décrivant comme scélérate une vague. Ainsi le critère de détection dont la valeur seuil est définie de façon quelque peu arbitraire, conduira à une durée de vie plus ou moins longue des évènements détectés. Des groupes de vagues extrêmes peuvent être décelés également pour le cas $n = 15$ en $(x/\lambda_p, y/\lambda_p) = (11,8)$, pour le cas $n = 30$ en $(x/\lambda_p, y/\lambda_p) = (6,28)$ ou pour $n = 90$ en $(x/\lambda_p, y/\lambda_p) = (29,28)$.

Il est intéressant de noter que la simulation réalisée avec $n = 90$, qui correspond à un spectre peu étalé directionnellement et donc assez proche d'un état de mer réaliste, fait apparaître des vagues très longues dans la direction transverse. On se remémore alors les récits de marins faisant état de murs d'eau arrivant sur eux lorsqu'ils décrivent les vagues que l'on qualifie dorénavant de scélérates. Ici on est bien en présence réellement de murs d'eau, la dimension transversale de la crête de la vague sera, si on fixe un état de mer avec $T_p = 12.5s$, $\lambda_c \simeq 1000m$!

	$n = 2$	$n = 15$	$n = 30$	$n = 90$
N_{freaks}	376	475	152	62
$N_{freaks}/N_{espace/temps}$	1.610^{-4}	2.410^{-4}	1.010^{-4}	1.110^{-3}
λ_x	$1.10\lambda_p$	$1.05\lambda_p$	$1.08\lambda_p$	$1.02\lambda_p$
λ_y	$1.59\lambda_p$	$3.98\lambda_p$	$4.77\lambda_p$	$8.75\lambda_p$

TAB. III.2.2 – Nombre de vagues scélérates et taille de celles-ci en fonction du paramètre de directionnalité n

Il apparaît clairement sur la figure III.2.26 que le nombre de vagues observées N_{freaks} tend à diminuer lorsque le paramètre de directionnalité n augmente (exception faite du cas $n = 15$ où deux groupes de vagues scélérates restent cohérents pendant une très grande durée, expliquant le grand nombre observé). Cependant, il est intéressant de comparer ce nombre de vagues scélérates observées au nombre de vagues totales détectées au cours de la simulation $N_{espace/temps}$. On s'aperçoit alors, en étudiant le rapport $N_{freaks}/N_{espace/temps}$ que les probabilités d'apparition ne sont pas si différentes que ce que l'on pourrait penser au premier abord. En

effet, pour le cas $n = 90$ où le nombre de vagues sclérates observées est le plus faible, mais en même temps le nombre de vagues est beaucoup moins important que dans les autres (c.f. Tableau III.2.1) et par conséquent la probabilité d'occurrence d'évènements extrêmes est en fait la plus forte des quatre cas simulés.

En ce qui concerne les dimensions moyennes des vagues, la dimension dans l'axe de propagation reste sensiblement identique en fonction de la directionnalité alors que la taille transverse λ_y augmente de façon assez importante. De plus, il est à noter que si l'on compare les valeurs initiales des tailles de crêtes λ_c dans le tableau III.2.1 aux valeurs dans le tableau précédent, il apparaît que les vagues sclérates semblent avoir une extension transverse plus importante que la moyenne des vagues observées dans le champ de vagues.

Enfin, on va s'intéresser à la forme moyenne des vagues extrêmes observées afin de déterminer une forme typique de celles-ci. La figure suivante III.2.27 représente pour chacune des directionnalités ($n = 2, 15, 30, 90$) la forme moyenne des vagues sclérates détectées au cours de la simulation.

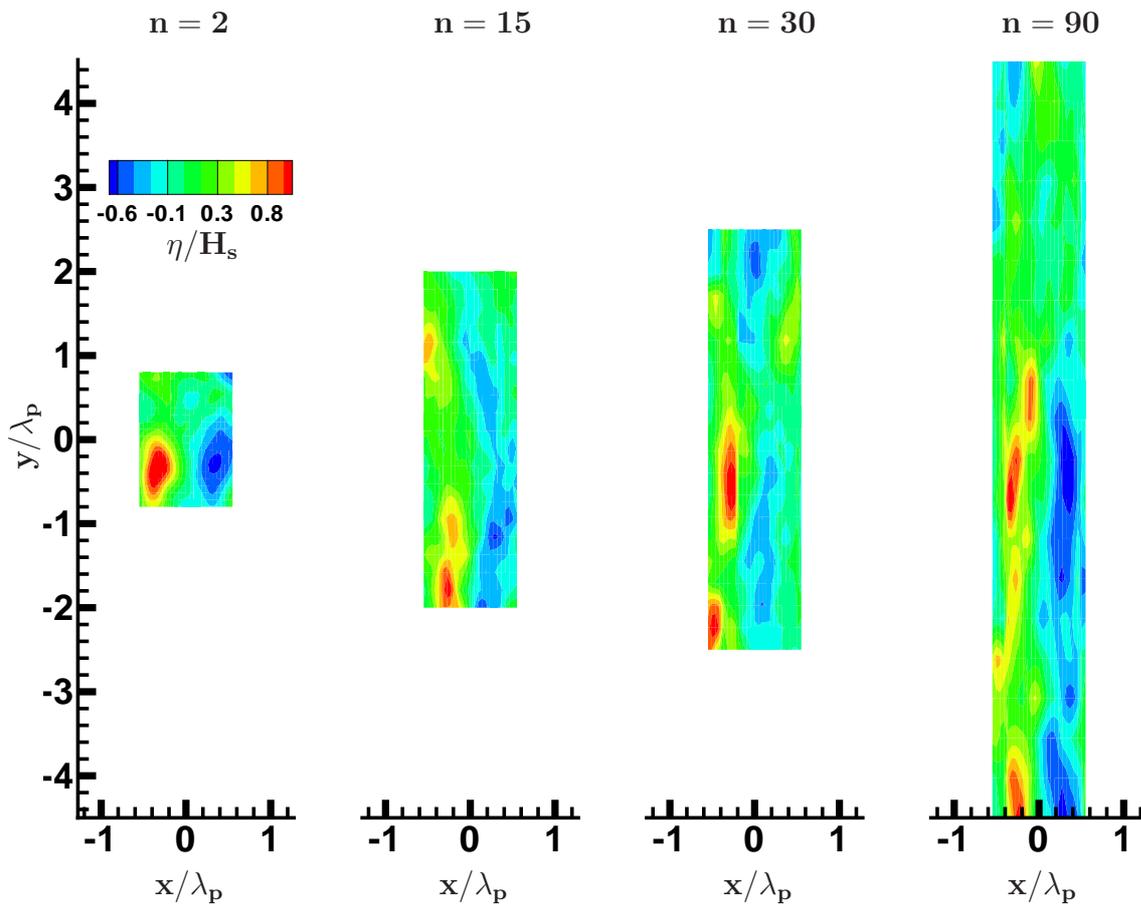


FIG. III.2.27 – *Forme moyenne des vagues sclérates en fonction de la directionnalité*

Ces formes moyennes ont été obtenues à partir des analyses vague par vague successives, dans la direction principale, puis transverse. Il en résulte que le coin en bas à gauche correspond à un passage à zéro en montant dans les deux directions. Par conséquent, la crête de la vague extrême détectée se trouve dans le quart inférieur gauche et le creux la précédant dans le quart

inférieur droit.

On peut tout d’abord retrouver sur cette figure les différences de taille transversale notées précédemment. Ensuite, il est intéressant de remarquer que les amplitudes sont très semblables d’une simulation à l’autre. Comme le montrait la figure III.2.24, les valeurs de H_{max}/H_s correspondant aux événements obtenus ne changent pas fondamentalement suivant la directionnalité (contrairement à la probabilité d’occurrence qui elle en dépend fortement comme on l’a vu). Concernant la forme de la vague en elle-même, le cas $n = 2$ présente une forme moyenne trapézoïdale très peu étalée dans la direction transverse comme dans l’exemple donné dans la figure III.2.13. Plus le paramètre n augmente, plus cet étalement transverse augmente (cf. λ_y dans le tableau III.2.2), jusqu’à arriver pour le cas $n = 90$ à un véritable mur d’eau précédé d’un creux profond. Il faut indiquer que les cas $n = 30$ et $n = 90$ ont été obtenus avec respectivement 152 et 62 vagues, expliquant l’aspect beaucoup moins “lissé” que pour le cas $n = 2$. Le cas $n = 15$ est assez particulier car composé, comme on l’a vu sur la figure III.2.26, de 2 groupes principaux de vagues scélérates se propageant sur des durées assez longues et avec chacun des caractéristiques un peu différentes au niveau de la position de la crête, . . . Ainsi, le résultat obtenu pour cette forme moyenne ne présente pas une vague bien distincte comme on peut l’avoir pour le cas $n = 2$. Il est intéressant d’indiquer ici les travaux de Podgórski et al. [104] qui présente des densités de probabilités de la position des crêtes, formulées à partir d’un spectre directionnel de JONSWAP. Il est montré en particulier que cette position varie grandement avec la longueur d’onde de la vague considérée. Ces résultats seront donc à approfondir afin de voir si nos simulations peuvent confirmer ou non ces résultats.

III.2.3.4 Évolution temporelle du kurtosis et du spectre de l’élévation

On s’intéresse ici aux travaux réalisés par Socquet-Juglard et al. [112]. Dans cet article sont présentées diverses simulations réalisées à l’aide d’un modèle de propagation d’ondes de gravité à spectre de bande étroite. Le modèle utilisé est celui développé par les équipes de Dysthe et Trulsen (voir Dysthe [41], Trulsen & Dysthe [122] et Trulsen et al. [123] et basé sur l’équation non-linéaire de Schrödinger dans sa forme modifiée (BMNLS - Broad Modified Non-Linear Schrödinger)). Diverses simulations d’états de mer définis par des spectres de JONSWAP avec différentes distributions angulaires sont présentées et analysées. L’influence de cet étalement directionnel est discutée et fait apparaître que les vagues avec faible dispersion angulaire présentent des densités de probabilité de vagues extrêmes plus importantes. Récemment, Gramstad & Trulsen [60] ont approfondi les études menées par Socquet-Juglard avec un modèle BMNLS également. L’étude porte son intérêt à l’influence de la longueur de crête (i.e. de la directionnalité) ainsi que de la longueur d’un groupe de vagues (caractérisé par le Benjamin-Feir Index BFI, introduit par Janssen [74]) sur les probabilités d’occurrence des vagues scélérates.

On a voulu reproduire ces simulations afin de voir, d’une part si notre modèle complètement non-linéaire donnait des résultats semblables et d’autre part quel était le comportement du champ de vagues pour des temps très longs. En effet, les simulations à l’aide du modèle BMNLS sont limitées en temps de propagation (ceci est dû aux approximations faites sur la largeur de bande et la cambrure moyenne). Typiquement, la limite de validité en temps est $\tau = 10(\omega_p \epsilon^2)^{-1}$, à comparer avec l’échelle de temps dite de Benjamin-Feir : $\tau_{BF} = (\omega_p \epsilon^2)^{-1}$ (durant lesquels les changements principaux dans le spectre ont lieu) ce qui dans les cas présentés ici donne $\tau \simeq 150T_p$. Les simulations réalisées avec le modèle HOS seront menées jusqu’à $t = 580T_p$.

La formulation adoptée par Socquet-Juglard pour la définition du spectre directionnel de JONSWAP est un peu différente de celle décrite précédemment dans la section III.1.1. Le spectre directionnel $\Phi(k, \theta)$ est défini par :

$$\Phi(k, \theta) = \psi(k) \times G(\theta)$$

Avec un spectre qui est typiquement :

$$\psi(k) = \alpha_P k^{-4} \exp\left(-\frac{5}{4}k^{-2}\right) \gamma^{\exp\left[-\frac{-(\sqrt{k}-1)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

avec α_P la constante de Phillips et k le nombre d'onde adimensionné par le nombre d'onde de pic k_p . La directionnalité est quant à elle définie par :

$$G(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cos^2\left(\frac{\pi\theta}{2\beta}\right), & |\theta| \leq \beta \\ 0, & |\theta| > \beta \end{cases} \quad (\text{III.2.1})$$

avec, β une mesure de l'étalement directionnel.

Les différents cas étudiés sont donnés dans le tableau suivant III.2.3.

Cas	β	γ
A	0.7	3.3
B	0.35	5
C	0.14	5

TAB. III.2.3 – Paramètres des différents cas de calcul

Le paramètre de directionnalité ainsi que le paramètre γ (déterminant l'étalement fréquentiel du spectre de JONSWAP) sont modifiés. Différents résultats peuvent être étudiés sur ces simulations, on s'intéressera ici à l'évolution temporelle du kurtosis. Cette dernière est représentée sur la figure III.2.28 pour les trois cas de houle spécifiés. La figure III.2.29 présente la comparaison entre la figure 18 issue de Socquet-Juglard et al. [112] et les simulations HOS.

En comparant cette figure aux résultats obtenus par Socquet-Juglard et al. [112], on peut tout d'abord remarquer que les évolutions des cas A et C semblent assez proches des résultats obtenus par la méthode BMNLS. L'évolution pour le cas A semble avoir lieu sur une échelle de temps un peu plus grande que celle obtenue dans [112]. En ce qui concerne le cas B, des différences notables semblent exister, l'évolution du kurtosis du cas B se situant sous la courbe du cas A dans l'article de Socquet-Juglard. Aucune explication n'a été trouvée, ce point restant en suspens. Divers tirages aléatoires doivent être testés afin de vérifier qu'il ne s'agit pas d'un tirage particulier de phase qui mène à ce résultat. On peut cependant noter que le cas B présente des étalements directionnels et fréquentiels plus faibles que le cas A, ce qui selon Socquet-Juglard et al. [112] peut conduire éventuellement à une évolution du kurtosis plus éloignée de la répartition Gaussienne ($kurtosis = 3$), ce qui est le résultat obtenu ici.

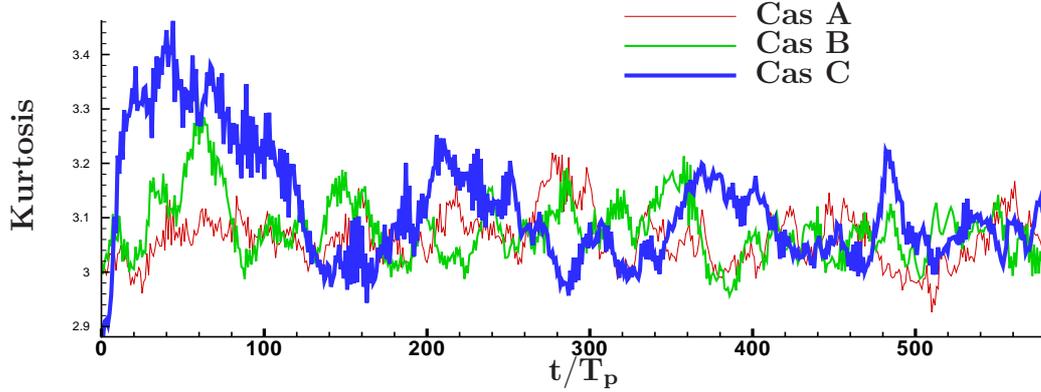


FIG. III.2.28 – Évolution du kurtosis au cours du temps sur les simulations de Socquet-Juglard et al. [112]

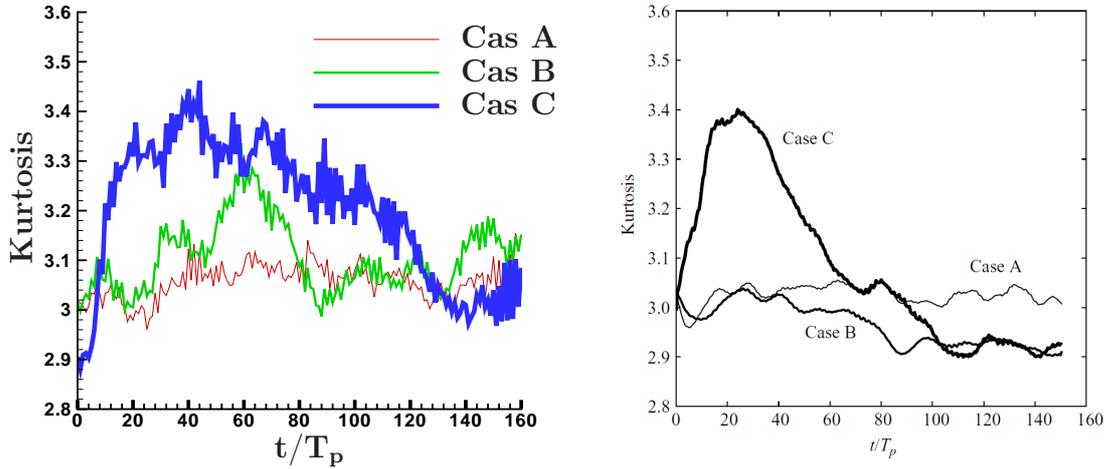


FIG. III.2.29 – Comparaison de l'évolution du kurtosis au cours du temps avec les simulations de Socquet-Juglard et al. [112]

Il est tout de même possible de formuler quelques remarques avec l'observation de la figure III.2.28. En effet, on rappelle que les simulations réalisées avec le modèle BMNLS étaient limitées à $t < 150T_p$. Les conclusions formulées par Socquet-Juglard et al. font état du lien existant entre le kurtosis et la probabilité d'occurrence des vagues scélérates; ainsi que du lien entre le changement de spectre (dû aux instabilités de type Benjamin-Feir) et l'apparition de tels événements. Le premier point a été vérifié précédemment dans la section III.2.3.2 et la concordance des évolutions du kurtosis pour les cas A et C confirme également cette remarque. En ce qui concerne le lien entre les changements dans le spectre et l'apparition des vagues scélérates il apparaît également dans nos simulations (cf. figures III.2.30, III.2.31 et III.2.32, on abordera ces évolutions de spectre à la fin de cette section). On peut noter que ces changements se font sur des durées supérieures à celles observées par Socquet-Juglard et al. : en effet, on observe dans nos simulations une évolution du kurtosis importante au cours des 100 premières périodes de propagation alors que les simulations BMNLS font apparaître des modifications principalement au cours des 50 premières périodes. On s'éloigne alors un peu de l'échelle de temps caractéristique de l'instabilité de Benjamin-Feir $\tau = (\omega_p \epsilon^2)^{-1} \simeq 16T_p$. Différentes analyses doivent être

réalisées afin d'étudier l'origine de telles différences (hypothèse de spectre à bande assez étroite du BMNLS? Initialisation non-linéaire influence le résultat? ...).

Le point important est d'étudier ce qu'il se passe pour $t > 150T_p$ après que les changements majeurs (type Benjamin-Feir) ont eu lieu dans le spectre. Il apparaît alors que le kurtosis continue d'évoluer et pouvant présenter en certains instants des valeurs assez importantes: on remarque par exemple pour le cas A, proche de $t = 280T_p$ la déviation maximale est atteinte avec $kurtosis \simeq 3.2$. De la même manière, pour le cas B, on peut remarquer que les amplitudes maximales du kurtosis sont atteintes à $t = 60T_p$ mais qu'on a des événements semblables au bout de $350T_p$. Enfin, pour le cas C qui présente les déviations les plus importantes, elles semblent bien apparaître lors des changements dans le spectre dus aux instabilités de Benjamin-Feir. Cependant, le champ de vagues présente des probabilités d'états de mer extrêmes importantes en divers instants $t = 210T_p$, $t = 380T_p$ et $t = 490T_p$. Ainsi, même après que les changements dans le spectre les plus importants aient eu lieu (i.e. durant les 100 premières périodes de propagation), des événements extrêmes peuvent apparaître dans le champ de vagues.

On se propose maintenant de présenter les évolutions temporelles du spectre de l'élévation de surface libre. On reproduit tout d'abord les calculs de Krogstad et al. [78] obtenus également avec le modèle BMNLS. La figure III.2.30 correspond à la figure 3 de [78] où est représentée l'évolution du spectre du cas avec $\beta = 0.70$ et $\gamma = 3.3$ (cas A) et la figure III.2.31 celle du cas $\beta = 0.35$ et $\gamma = 3.3$ (cas B de [78]). Le pic du spectre initial est $\mathbf{k}_0 = (1,0)$ et les niveaux de contours sont représentés avec un intervalle logarithmique de 1.5 dB . À noter que l'on représente ici le spectre de η alors que dans Krogstad et al. [78] (ou de même après dans Socquet-Juglard et al. [112]) est donné le spectre de l'enveloppe A . Cependant, il est possible de comparer ces spectres qui vont avoir les mêmes formes, le premier étant centré en \mathbf{k}_0 alors que le second est centré sur l'origine. On indique également sur cette figure les droites d'équation $k_y = \pm 2^{-1/2} k_x$ représentées en pointillés. Ces droites correspondent aux lignes où les instabilités de Benjamin-Feir sont les plus importantes.

On peut remarquer le très bon accord entre les résultats de Krogstad et al. [78] et ceux obtenus avec notre modèle HOS. L'évolution des spectres est très semblable. On observe l'étalement en direction au cours du temps, ainsi qu'un déplacement du pic du spectre vers les basses fréquences (downshifting). Les différences notables observées sont :

- La régularité dans le spectre n'est pas identique. Elle dépend grandement de l'interpolation utilisée pour sa représentation. En effet, tous les modes de calcul ne sont pas donnés dans notre cas afin de lisser un peu le résultat. Le choix de la grille de "représentation" est donc arbitraire et influe sur l'apparence du spectre. On a tout de même essayé d'ajuster cette interpolation afin d'avoir des résultats comparables avec ceux présentés dans l'article auquel on se réfère.
- Le spectre proche de la frontière $k_x = 2$ est assez différent. Les figures de Krogstad et al. [78] font apparaître une frontière nette proche de cette frontière. Ceci est dû aux approximations faites dans le cadre du code de calcul BMNLS qui limitent la résolution au nombre d'onde $k_x = 2$. On résout dans notre cas l'espace modal jusqu'à $k_{x_{max}} = 12$ et $k_{y_{max}} = 6$, ce qui explique les différences observées en "bout de spectre".

Ensuite on peut remarquer, comme indiqué initialement par Dysthe et al. [42], que les

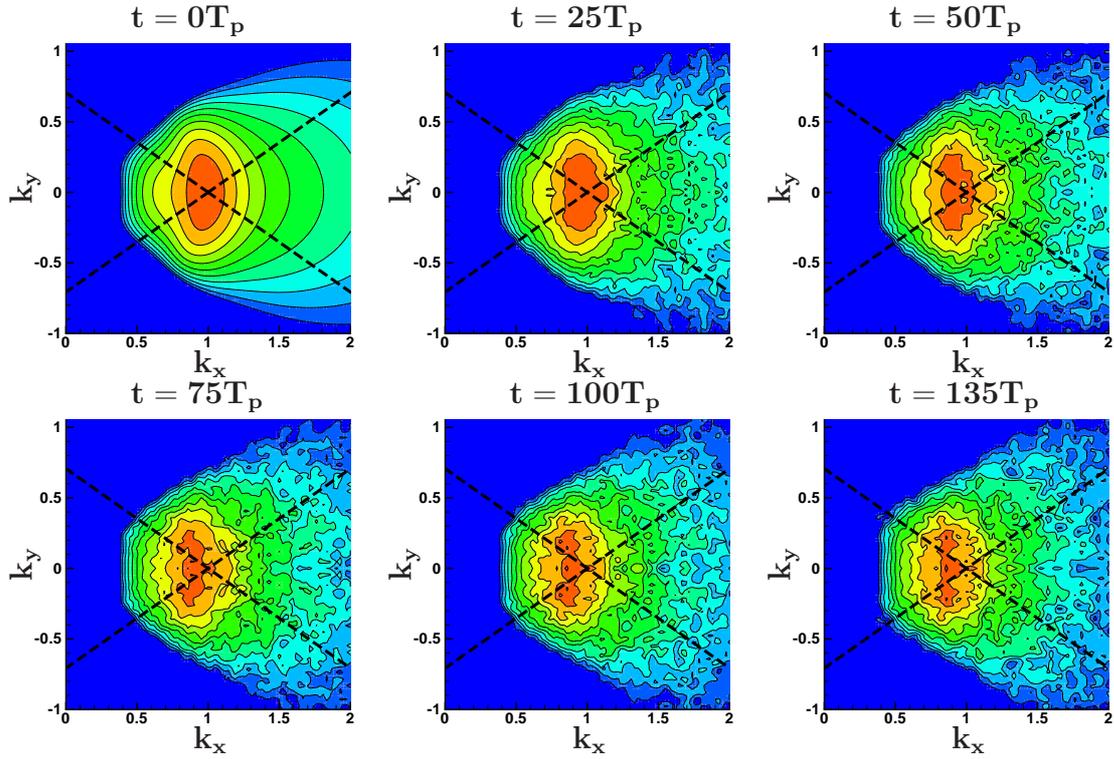


FIG. III.2.30 – Évolution du spectre de l'élevation de surface libre au cours du temps, cas A de Krogstad et al. [78]

changements dans le spectre se font principalement selon les lignes $k_y = \pm 2^{-1/2}k_x$ indiquées sur les figures III.2.30 et III.2.31. Ce fait indique et confirme le rôle principal joué par les instabilités de Benjamin-Feir dans les changements du spectre au début de la simulation avec le lien sur les probabilités d'occurrence mis en lumière précédemment. On rappelle que l'échelle de temps de Benjamin-Feir est de l'ordre de $\tau = (\epsilon^2\omega_p)^{-1} \simeq 16T_p$.

Enfin, on note également que les changements dans le spectre sont plus importants pour le spectre peu étalé en direction. On retrouve donc ici bien les conclusions principales de Krogstad et al. [78] et de Dysthe et al. [42], obtenues avec un modèle BMNLS.

Dans un dernier temps, on présente sur la figure III.2.32 l'évolution du spectre pour le cas $\beta = 0.14$ et $\gamma = 5$ présenté sur la figure 5 de Socquet-Juglard et al. [112]. De même que dans les cas précédents, le pic du spectre initial est $\mathbf{k}_0 = (1,0)$ et les niveaux de contours sont représentés à intervalle logarithmique de 1.5 dB. Les droites d'équation $k_y = \pm 2^{-1/2}k_x$ sont aussi représentées en pointillés.

Les conclusions sont identiques à celles faites précédemment. Le spectre évolue principalement selon les lignes où les instabilités de Benjamin-Feir sont les plus importantes. Pour ce spectre encore plus faiblement étalé en direction, les changements sont plus importants que ceux observés dans les figures III.2.30 et III.2.31.

On choisit alors de présenter ce que peuvent apporter les simulations HOS par rapport au modèle BMNLS. La simulation est donc poursuivie en temps et on présente une vue du spectre en $t = 260T_p$. On peut observer qu'entre les instants $t = 149T_p$ et $t = 260T_p$ des changements

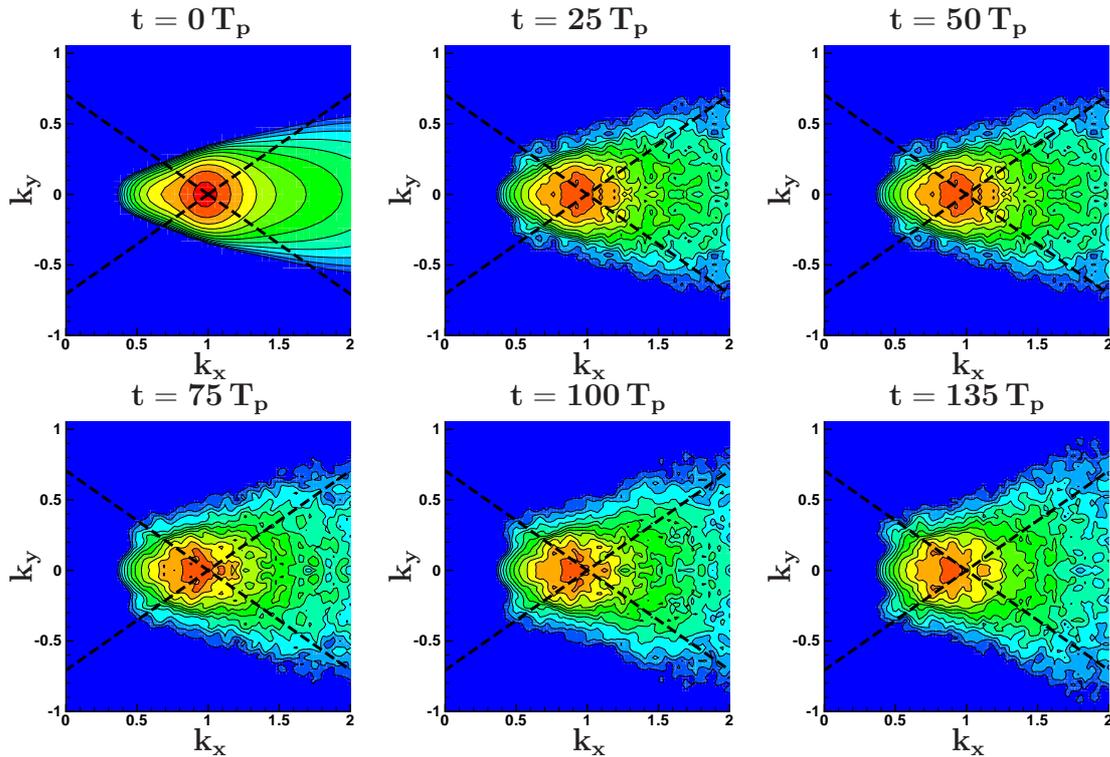


FIG. III.2.31 – Évolution du spectre de l'élévation de surface libre au cours du temps, cas B de Krogstad et al. [78]

ont lieu dans le spectre mais que ceux-ci semblent beaucoup moins importants que ceux observés auparavant. Des analyses plus fines sur les évolutions et les phénomènes se produisant après les changements dus aux instabilités de Benjamin-Feir (typiquement après $100 - 150 T_p$) permettront peut-être de comprendre les phénomènes amenant la formation des événements extrêmes que l'on observe après les changements dans le spectre dus à ces instabilités.

Ceci est très intéressant dans le sens où ce genre d'étude n'a été réalisée jusqu'à présent qu'avec des modèles de propagation de houle approchés de type BMNLS étant limités tout d'abord dans le temps maximal de propagation, ainsi que dans la précision (spectre à largeur de bande étroite, interactions limitées à 4 vagues, ...). Ainsi, notre modèle permet des études plus précises que les modèles cités précédemment (le modèle est complètement nonlinéaire) sans aucune restriction sur la durée pouvant être simulée. Il apparaît également que la conclusion sous jacente à l'étude de Socquet-Juglard et al. [112] qui est que les instabilités de Benjamin-Feir sont à l'origine des vagues scélérates observées (ce qui est comme on l'a vu en partie vrai) mais qu'après cette période de relaxation du spectre, ils ne semblent pas prédire une possibilité d'avoir une déviation par rapport à la normale gaussienne des probabilités de mers extrêmes. En effet, il apparaît clairement dans nos résultats que d'autres phénomènes sont en jeu et des études plus approfondies seront à réaliser dans le futur afin de les comprendre plus précisément (des modifications dans le spectre apparaissant suivant une autre échelle de temps, un phénomène tout autre?).

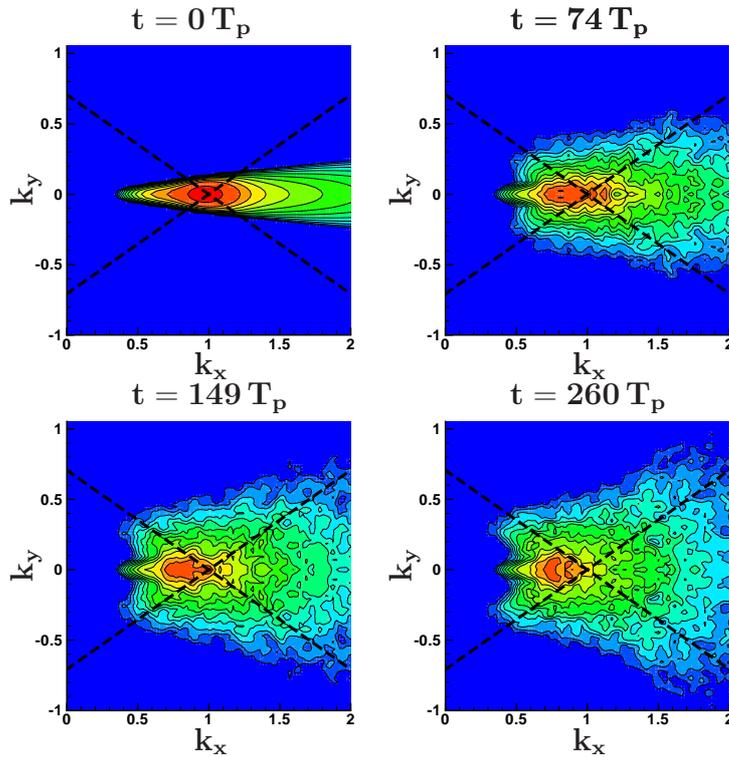


FIG. III.2.32 – Évolution du spectre de l'élévation de surface libre au cours du temps, cas C de Socquet-Juglard et al. [112]

III.2.4 Conclusion

En conclusion, on a dans un premier temps démontré les capacités de notre modèle à générer et propager des houles extrêmes par focalisation en 2D et en 3D. La condition initiale est déterminée de telle manière qu'à un temps donné, différentes composantes arrivent à un endroit donné, créant une vague de grande amplitude (condition initiale déterminée par propagation inverse). Des vagues de hauteur très importantes peuvent alors apparaître avec ce processus qui peut mener à des événements *artificiels* dans le sens où leur apparition n'émane que d'un choix particulier de phases. Cependant, cela reste un cas d'application intéressant indiquant les capacités de notre modèle HOS à produire des événements de telle taille (on a par exemple formé une vague telle que $H_{max}/H_s > 3.5$).

Ensuite, on s'est intéressé à l'apparition *naturelle* de vagues scélérates dans un état de mer simulé sur de grandes périodes en 2D et en 3D. Ces simulations sont effectuées sur de grands domaines de fluide, typiquement les simulations 3D sont réalisées sur une partie d'océan d'environ $100km^2$ avec $T_p = 12.5 s$. Dans ces simulations, aucune spécification n'est faite sur les phases ou autre, on laisse juste évoluer le champ de vagues initié par un spectre de JONSWAP classique et on effectue une analyse vague par vague de l'état de mer ce qui nous fournit les caractéristiques de celui-ci au cours du temps. On arrive alors à étudier l'apparition de vagues scélérates dans notre domaine et leurs caractéristiques.

Une étude paramétrique sur la directionnalité est proposée par la suite, permettant une analyse de l'influence de ce paramètre sur les probabilités d'occurrence. On observe dans notre cas que les différences observées entre un cas fortement étalé et un cas faiblement étalé sont

assez faibles, mais tendant cependant à montrer que le cas faiblement étalé est plus propice à la formation d'évènements extrêmes (notamment grâce à l'étude du kurtosis). Une analyse originale de la forme des vagues scélérates est également proposée mettant en avant l'importance de la directionnalité de la houle.

En ce sens, dans une dernière partie sont comparés les résultats obtenus à l'aide d'un modèle BMNLS (cf. Socquet-Juglard [112], Krogstad et al. [78]) sur le même genre d'analyse. Notre modèle permet d'étendre, avec des perspectives intéressantes, les conclusions formulées dans Socquet-Juglard et al., de par la non-limitation en temps de simulation du modèle HOS. Par exemple, il sera intéressant de comprendre quelle est l'origine des vagues scélérates apparaissant après le processus de relaxation du spectre (instabilités de Benjamin-Feir).

Ce travail sur les simulations océaniques et notamment la simulation de l'apparition de vagues scélérates a fait l'objet d'une publication dans le journal NHESS, Ducrozet et al. [39]

Quatrième partie
Couplage de méthodes

Table des matières

Introduction	169
IV.1 Principe & Mise en œuvre	171
IV.1.1 Principe du couplage	171
IV.1.1.1 Méthodes existantes	171
IV.1.1.2 Principe et intérêt de cette nouvelle approche	173
IV.1.2 Mise en œuvre numérique	175
IV.1.2.1 Généralités	175
IV.1.2.2 Précision	175
IV.1.2.3 Efficacité	176
IV.2 Résultats	181
IV.2.1 Spectral-potentiel	181
IV.2.1.1 Intérêt	181
IV.2.1.2 Applications	182
IV.2.2 Spectral-RANS	184
IV.2.2.1 Intérêt	185
IV.2.2.2 Applications	185
IV.2.3 Spectral-SPH	187
IV.2.3.1 Intérêt	187
IV.2.3.2 Applications	187
Conclusion générale	191

Introduction

Le problème étudié dans cette partie est le problème instationnaire de l'interaction entre une houle et une structure marine. C'est un thème de recherche devenu majeur au vu des enjeux économiques y étant liés. La conception de navires ou de structures offshore correctement dimensionnés n'est pas facilement réalisable. Les méthodes numériques permettant de résoudre ce problème complexe sont assez diverses (on effectuera une revue de celles-ci rapidement dans le chapitre IV.1) et demandent souvent d'importantes ressources informatiques. L'attrait pour le développement d'une méthode très précise, mais avec un temps de calcul raisonnable, est en conséquence très important.

Les études faites auparavant dans cette thèse, aussi bien dans la partie II que dans la partie III, se sont intéressées au problème de la houle seule (i.e. de sa propagation, avec ou sans génération). On a réussi à étudier, à l'aide de notre modèle complètement non-linéaire, des phénomènes importants de la dynamique des vagues (modélisation d'un bassin de houle complet, étude de la focalisation directionnelle, simulations d'apparitions de vagues scélérates, ...). On a par ailleurs pointé l'efficacité ainsi que la précision de notre modèle, faisant apparaître son caractère très intéressant pour bon nombre d'applications en hydrodynamique. Il a donc semblé avantageux d'envisager d'utiliser notre modèle HOS comme description de la houle lors de l'étude de l'interaction houle-structure. L'approche du couplage entre la méthode HOS et une autre méthode pouvant traiter l'interaction de notre houle avec une structure est donc envisagée. La présentation de ce travail sera décomposée en deux chapitres :

- Dans un premier chapitre, nous aborderons de façon globale le problème du couplage entre différentes méthodes numériques. L'intérêt par rapport aux autres méthodes numériques "globales" qui sont rappelées brièvement est également pointé. Le choix du type de couplage est également réalisé avec soin. Ensuite, certains aspects numériques sont explicités afin d'indiquer clairement le travail effectué dans ce cadre, la méthode de couplage ayant fait l'objet de thèses spécifiques. La contribution de cette thèse se limite à la modélisation et à la mise à disposition de la partie "houle incidente". Un intérêt particulier est porté à la précision ainsi qu'à l'efficacité du couplage.
- Au cours du second chapitre, on s'intéressera aux différents couplages réalisés au sein du LMF. Chacune des méthodes utilisées sera explicitée : i) couplage spectral/potentiel, ii) couplage spectral/RANS et iii) couplage spectral/SPH. Pour chacune d'elles, l'intérêt de son développement est rappelé et différents résultats seront présentés afin d'illustrer le travail effectué.

Chapitre IV.1

Principe & Mise en œuvre

On va étudier dans ce chapitre le principe du couplage en mettant en avant l'intérêt de la méthode adoptée pour le couplage. Ensuite, des détails sur la mise en œuvre numérique seront donnés, mettant en lumière les efforts apportés au niveau de la précision et de l'efficacité du couplage mis en place. On se réfère, pour plus de détails sur ces couplages, aux thèses dédiées à ce sujet précis réalisées au LMF et auxquelles on s'est intéressé par la suite: J.C. Gilloteaux [56], P.M. Guilcher [64] et R. Luquet [85].

IV.1.1 Principe du couplage

La résolution du problème de la tenue à la mer a évolué ces dernières années grâce au développement des ressources informatiques. Différentes approches permettant de résoudre un tel problème ont été développées. On rappellera tout d'abord rapidement ces différentes approches et on pointera ensuite l'intérêt de l'approche adoptée.

IV.1.1.1 Méthodes existantes

On rappelle ici l'analyse de l'existant en terme de méthodes de tenue à la mer issue de R. Luquet [85] avec quelques compléments. Différentes méthodes permettent la résolution du problème de l'écoulement autour d'un corps flottant (navire, plate-forme offshore, ...). Historiquement, les méthodes potentielles qui négligent la viscosité et le caractère rotationnel de l'écoulement ont été les premières développées. Un résumé complet peut être trouvé dans Wehausen [127]. Ces méthodes sont encore largement utilisées et développées notamment de par leur rapidité. Ensuite, la résolution des équations de Navier-Stokes complètes a permis la prise en compte de la viscosité du fluide, phénomène pouvant se révéler très important dans certaines configurations. Une large revue bibliographique de ces méthodes peut être trouvée dans la thèse de Berton [11]. Enfin, il est intéressant d'évoquer une gamme de méthodes récentes basées sur les équations d'Euler (i.e. sans viscosité) mais avec un formalisme original permettant de s'affranchir de maillages et autorisant donc une grande liberté dans la complexité simulée (déferlements, géométries complexes, ...). Cette méthode, appelée méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), est en développement récent au LMF, voir les thèses de Doring [34] ou Oger [97].

La prise en compte de l'environnement réel de ce corps flottant, l'océan, est un point primordial. Comme on l'a vu, la théorie potentielle est très adaptée au problème de la propagation de

la houle seule qui est un processus où la viscosité est négligeable. Diverses méthodes potentielles existent pour le traitement de ce problème. Il apparaît par contre que les méthodes permettant le traitement du problème de l'écoulement autour d'un corps flottant ne sont pas très adaptées à la propagation en elle-même (dissipation numérique et/ou temps de calcul prohibitif).

La propagation ainsi que la génération de la houle peuvent en effet être traitées de différentes manières dans les codes classiques de résolution du problème de l'écoulement autour d'un corps :

- Méthode directe: cette méthode est la plus naturelle et consiste à utiliser un code de calcul résolvant l'écoulement autour d'un corps flottant et de générer la houle sur une des frontières (modélisation d'un batteur par exemple, ou utilisation de conditions aux limites adaptées). Lors d'études expérimentales, c'est typiquement ce qui est réalisé: une maquette est mise dans un bassin de houle et une houle est générée sur laquelle on étudie le comportement de la structure flottante. L'avantage principal est sa facilité de mise en œuvre, mais cette technique présente quelques inconvénients.

Pour le cas de conditions aux limites fixées, une description analytique précise de celles-ci est difficilement accessible (typiquement ce qui est réalisé se base sur une théorie potentielle linéarisée c.f. Xing-Kaeding [130]). Afin d'éliminer le problème des réflexions, il conviendrait d'appliquer des conditions de type "mer ouverte" sur les frontières du domaine, ce qui est impossible à réaliser pratiquement, ne connaissant pas le champ diffracté à l'avance. On peut cependant imposer des conditions aux limites de type "domaine ouvert" pour la houle seule (non-perturbée). Mais, dans ce cas-là, on limite la durée du calcul ou moment jusqu'où le champ diffracté vient se réfléchir sur la frontière du domaine. C'est-à-dire, soit on prend un grand domaine, ce qui est pénalisant en temps de calcul, soit on a une durée très limitée de calcul.

Pour ce qui est du cas avec modélisation du batteur, le même type de problème de temps de calcul apparaît. En effet, la présence d'ondes libres oblige à se placer à une distance suffisante du générateur et augmente donc d'autant plus la taille du domaine simulé.

De plus, il faut rappeler que dans ces deux cas avec les méthodes classiques de discrétisation pour les codes de calcul visqueux (type RANS) ou avec la méthode SPH, la discrétisation doit être très fine afin d'assurer un minimum de dissipation numérique lors de la propagation de la houle, augmentant d'autant plus le temps de calcul.

- Méthode couplée: l'idée de cette méthode est de coupler plusieurs codes de calcul. En particulier, de coupler un code de calcul résolvant l'écoulement autour de corps flottants à un autre résolvant la propagation et éventuellement la génération de la houle. Plusieurs méthodes de couplage existent :
 - Décomposition temporelle: l'idée ici est de séparer de façon temporelle les phénomènes rencontrés. En prenant l'exemple d'un paquet de vagues impactant une structure fixe, la génération et la propagation de la houle au début du calcul peuvent être résolues par une méthode potentielle et ensuite, lorsque le paquet de vagues atteint la structure, on résout les interactions avec une méthode traitant l'interaction houle/structure de manière plus fine. Ce type de couplage peut même être appliqué pour de la propagation de houle seule: c.f. Grilli et al. [58] où la transition potentiel - VOF est effectuée lors du déferlement qui peut ainsi être traité. L'avantage principal est alors une réduction du temps de calcul grâce à l'utilisation de la méthode

potentielle au début du calcul. Cependant, il faut noter que les cas d'application de ce genre de couplage sont très limités. En effet, il faut avoir un cas où les événements sont bien distincts où il est possible de bien séparer les moments où les phénomènes sont dissociés et également que les phénomènes non-potentiels soient assez courts afin d'avoir un intérêt dans le couplage. Il sera par exemple impossible de résoudre le problème d'un navire avançant sur une houle, la propagation ayant lieu en même temps que la diffraction sur toute la durée du calcul.

- Décomposition spatiale: cette deuxième approche semble alors plus efficace, elle consiste en une décomposition spatiale du problème. On identifie alors les zones où tel ou tel phénomène doit être résolu. Pour le cas d'une interaction houle-structure, il convient alors de distinguer le champ loin du corps qui est résolu par méthode potentielle, du champ proche (autour du corps) où sera résolu complètement le problème de diffraction-radiation avec la houle. On se rend bien compte dès lors du grand intérêt au niveau temps de calcul d'une telle décomposition. Cependant, il est apparu, notamment dans le cadre de couplages RANS-potentiels, que des instabilités numériques au niveau de la zone de raccord entre les domaines apparaissaient et aucune solution satisfaisante n'a été trouvée pour le moment (voir par exemple Hamilton & Yeung [68]). On indiquera que ce type de couplage a par contre déjà été réalisé pour le cas potentiel-potentiels où ce genre de problème n'apparaît pas (cf. Grue [61] par exemple).
- Décomposition fonctionnelle: l'idée est cette fois-ci de décomposer dans l'espace fonctionnel le problème (i.e. effectuer un changement de variables cohérent). Cette approche, plus mathématique, permet un couplage réalisé de façon intrinsèque lors de la formulation des équations. Le problème total peut alors être séparé en deux parties distinctes mais complémentaires, chacune ayant une résolution lui étant propre. Le choix de la décomposition est libre mais elle doit être judicieusement choisie afin d'apporter un gain. Ensuite, suivant la décomposition effectuée les sous-problèmes seront résolus successivement ou conjointement. Cette méthode présente de grandes qualités tant au niveau du temps de calcul amélioré que de sa flexibilité, à condition d'effectuer la décomposition de manière astucieuse. C'est cette approche qui sera utilisée lors des couplages réalisés ici. Elle est expliquée un peu plus en détail dans le paragraphe suivant.

IV.1.1.2 Principe et intérêt de cette nouvelle approche

Comme on l'a dit précédemment, l'approche utilisée ici sera une décomposition de l'espace fonctionnel. On choisit de séparer le problème complexe initial en un premier sous-problème simple qui est ensuite complété par un deuxième sous-problème afin d'arriver à la solution finale. Le problème de tenue à la mer nous intéressant ici est donc séparé en deux sous-problèmes: 1) la génération et la propagation de la houle dans un domaine sans présence du corps et 2) l'interaction de l'écoulement connu avec le corps. La somme (1+2) est alors solution du problème complet comme schématisé sur la figure suivante IV.1.1. Cette méthode, initiée par P. Ferrant dans le code XWAVE [45], résolvait avec le même genre de décomposition ce problème en théorie potentielle. Un modèle pour la houle (type Rienecker & Fenton [106]) déterminait le champ incident par une méthode spectrale alors que le problème de diffraction-radiation était résolu par une méthode d'éléments frontières (BEM). L'extension avec un code de propagation

(non-stationnaire) de houle a été proposée dans Le Touzé [80], où des premiers résultats sur des lâchers de surface libre sont proposés.

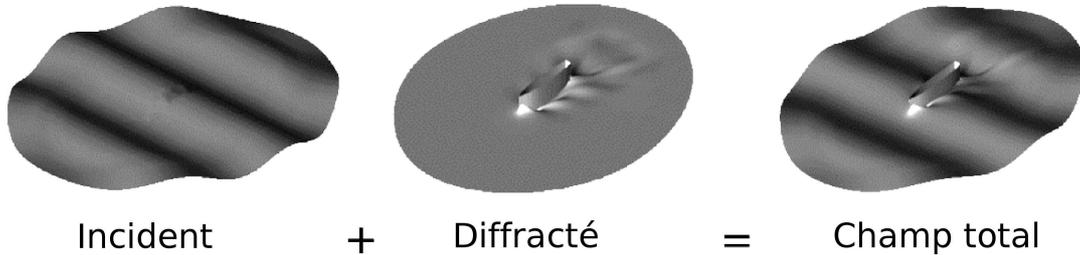


FIG. IV.1.1 – *Décomposition fonctionnelle du problème de tenue à la mer = 1) génération-propagation de la houle sans corps + 2) interaction de la houle avec le corps*

Cette méthode de décomposition fonctionnelle a ensuite été appliquée à différents codes de calcul du laboratoire dont on verra des exemples dans le chapitre suivant IV.2 :

- un code de calcul résolvant en théorie potentielle le problème des mouvements de grande amplitude d'un corps flottant, thèse de J.C. Gilloteaux [56] ;
- un code de calcul résolvant le problème de tenue à la mer avec un couplage RANS/Spectral, méthode SWENS (Spectral Wave Explicit Navier-Stokes), thèse de R. Luquet [85] ;
- un code de calcul résolvant le problème de tenue à la mer avec un couplage SPH/Spectral, thèse de P.M. Guilcher [64].

On arrive ainsi à éliminer tous les inconvénients des méthodes couplées directes. On obtient des méthodes robustes et très efficaces :

- aucune nécessité de remaillage pour avoir une propagation sans dissipation numérique (codes RANS & SPH).
- La houle étant séparée du champ diffracté, il est possible d'atténuer uniquement celui-ci avec un choix de conditions aux limites adéquat. Plus de problème de durée de simulation dû à d'éventuelles réflexions.
- Possibilité de générer des houles complexes assez aisément avec des méthodes spectrales bien adaptées à ce genre de problèmes.

Les avantages spécifiques de chacun de ces couplages seront détaillés dans le chapitre suivant IV.2.

Il faut indiquer qu'initialement, cette méthode a été développée avec une approche explicite pour la houle en utilisant la formulation de Rienecker & Fenton [106]. Cette approche permettait de façon très rapide et très précise d'obtenir les informations sur la houle, cette dernière restant limitée à une houle régulière. L'idée, au vu des développements sur le calcul efficace des vitesses/pressions à l'intérieur du domaine fluide comme vu dans la partie I.3, est d'utiliser la méthode HOS afin de déterminer les caractéristiques d'un champ de vagues cette fois-ci quelconque et qui reste complètement non-linéaire.

IV.1.2 Mise en œuvre numérique

Dans cette section, on présentera la mise en œuvre numérique du couplage présenté précédemment. Différents détails concernant la précision et l’efficacité du calcul seront abordés afin d’optimiser le calcul du champ incident, résolu par la méthode HOS. On ne s’intéressera ici qu’à la partie dépendante de la résolution HOS, c’est-à-dire l’exploitation des données HOS au sein des codes de calcul utilisant le couplage. Ce travail a été réalisé en collaboration principalement avec R. Luquet et également avec J.C. Gilloteaux et P.M. Guilcher.

IV.1.2.1 Généralités

La méthode choisie dans le déroulement de ces couplages a été de bien dissocier le calcul de la houle incidente en lui-même, du calcul de l’interaction avec le corps. En effet, on a vu dans cette thèse que la simulation de la houle peut devenir complexe dans certains cas et il convenait donc de ne pas inclure dans un premier temps la génération et la propagation de la houle dans les codes de calcul de tenue à la mer. En amont seront donc calculées les houles incidentes par la méthode HOS. Des spécifications précises sont fournies (simulations en milieu ouvert ou fermé, dimensions du domaine, durée de la simulation, type de houle désirée, ...) et une simulation HOS est réalisée avec un calcul des vitesses/pressions à l’intérieur du domaine fluide. L’ensemble des informations nécessaires est alors transmis à l’utilisateur du code couplé sous la forme d’un fichier contenant l’ensemble des informations dont il a besoin. On évoquera le contenu à envoyer dans la section suivante.

IV.1.2.2 Précision

Le besoin de précision est assez important pour toutes les méthodes de couplage, au risque de détériorer le calcul du champ diffracté dans le cas contraire. En effet, ce champ diffracté va avoir tendance à essayer de “rattraper” les erreurs commises par le champ incident, si erreur il y a. En effet, si on prend l’exemple des CSL, celles-ci sont vérifiées implicitement par la formulation des équations (cf. R. Luquet [85] pour plus de détails) et donc une erreur d’approximation de celles-ci conduit à une création de champ diffracté corrigeant ces erreurs où il n’a pas lieu de le faire.

Afin d’assurer la précision de la solution, divers tests ont été réalisés et ont fait apparaître des erreurs assez importantes lors des premiers cas de calcul lorsque les amplitudes de houle devenaient importantes. Dans cette première version, les inconnues nécessaires au calcul d’interaction houle/structure étaient calculées sur une grille donnée, différente de la grille de calcul HOS. Il est alors apparu que le comportement reconstruit entre les nœuds de collocation pouvait avoir la forme décrite schématiquement sur la figure IV.1.2.

Dès lors, lorsque la grille de calcul des quantités est dissociée de celle du calcul HOS, des erreurs peuvent se produire. On indique que ce genre de comportement n’apparaît que pour les plus hautes cambrures. Il a donc été fait le choix de calculer les inconnues sur la grille de calcul HOS afin d’annuler ces erreurs purement numériques. Cette erreur n’était jamais apparue précédemment, le comportement des quantités d’intérêt (η, ϕ^s) et de leurs dérivées n’ayant jamais été étudié entre les points de collocation. Cependant, il apparaît naturellement que la méthode spectrale résout de manière exacte au niveau des points de collocation, mais n’impose

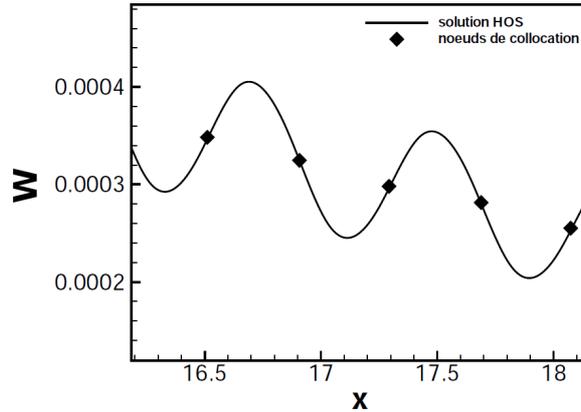


FIG. IV.1.2 – Comportement pour un cas cambré de la vitesse verticale W reconstruite entre les nœuds de collocation

rien entre ces mêmes nœuds. Ainsi, pour des évènements importants (cambrure élevée), les plus hauts modes permettent la résolution de manière exacte du problème mais au détriment de la régularité entre ces points. On observe d'ailleurs que cette oscillation que l'on peut remarquer sur la figure IV.1.2 correspond bien au mode le plus haut qui est excité. Cependant, il faut noter que ce phénomène n'apparaît qu'aux plus hautes cambrures, i.e. en limite de validité du code HOS. En effet, si ce dernier mode est excité de la sorte, c'est essentiellement dû à la non-convergence parfaite de la série de modes (une telle amplitude est également sans doute liée à du repliement). Même si le résultat est très bon au niveau des noeuds, le dernier mode n'est pas parfaitement estimé, d'où la présence de ces oscillations (d'autant plus amplifiées que l'on calcule des dérivées des quantités d'intérêt, ici W).

Ainsi, les informations transmises devront être des quantités au niveau des points de collocation HOS, une interpolation entre ces points par diverses techniques (linéaire, cubique, splines, ...) étant mise en place ensuite afin d'obtenir les quantités aux endroits nécessaires au code de calcul. De la même manière, une interpolation temporelle sera mise en place dans le code couplé. En effet, les pas de temps HOS peuvent se révéler très différents du pas de temps d'un calcul de diffraction-radiation. Des dynamiques très différentes peuvent entrer en jeu, on pense par exemple au couplage spectral/SPH où la méthode calculant l'interaction est une méthode compressible nécessitant de par sa définition même des pas de temps extrêmement faibles. Or, une telle description temporelle n'est pas nécessaire lors de calculs HOS et donc un pas de temps de sortie des données HOS cohérent est déterminé, permettant de limiter la taille des fichiers transmis, surtout lors de simulations sur de longues durées.

IV.1.2.3 Efficacité

On va s'intéresser dans cette section plus particulièrement à l'efficacité dans le calcul du champ incident. Comme on l'a vu précédemment, la mise en place d'une interpolation temporelle permet de limiter la taille des fichiers de donnée transmis. Cependant, il faut noter que de nombreuses informations sur le champ incident sont nécessaires, augmentant d'autant la quantité d'informations à transmettre (η et ses dérivées, les vitesses, les accélérations, ...). De plus, les codes de calcul résolvant l'écoulement autour d'un objet sont des méthodes volumiques

nécessitant donc une représentation volumique du champ incident. Notre formulation HOS qui était surfacique va nous donner des informations dans tout le domaine de calcul D . Ainsi, une discrétisation verticale adaptée doit être donnée, qui doit être suffisante afin de conserver la précision du calcul, on se rend bien compte qu'en 3D, les volumes des fichiers peuvent vite devenir prohibitifs si la simulation dure plus de quelques secondes. Une alternative a donc du être trouvée afin de faciliter cette transmission d'informations et la rendre réalisable dans l'ensemble des cas de calcul pouvant être rencontrés.

On rappelle tout d'abord que la formulation spectrale des quantités volumiques a la forme suivante (c.f. chapitre I.1) dans le cas périodique en profondeur finie :

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij}^{\phi}(t) \exp(ik_{x_i}x) \exp(ik_{y_j}y) \frac{\cosh(k_{ij}[z+h])}{\cosh(k_{ij}h)}$$

Il est donc apparu naturel, afin de tirer parti de la formulation spectrale, de ne passer comme information que les modes des quantités d'intérêt, ici $A_{ij}^{\phi}(t)$. Le calcul de ces modes est effectué comme décrit dans le chapitre I.3 à l'aide de l'équivalent de l'opérateur H_2 . Le calcul dans tout le domaine sera donc réalisé au sein du code de calcul couplé. Ce choix a plusieurs avantages :

- Gain très important de la quantité de données transmises, permettant sans problème le passage à des cas de houle 3D sur des temps longs ;
- Flexibilité au niveau du choix de la discrétisation verticale. Cette dernière peut être choisie et également évoluer si nécessaire au cours du calcul suivant les effets dus à la présence du corps dans la houle. De plus, en général, la discrétisation verticale doit être très fine proche de la surface libre (où la dynamique est la plus rapide) et peut être plus lâche loin de celle-ci, et donc suivant la précision nécessaire la grille verticale peut être adaptée sans problème. Ceci est plus difficilement réalisable si le calcul complet est effectué en amont dans le code HOS.

Il faut indiquer, comme on l'a vu dans la section I.3.2 sur le calcul des quantités à l'intérieur du domaine fluide, le calcul est beaucoup plus précis lorsque c'est la quantité recherchée qui est décomposée en modes (par exemple la vitesse) plutôt que le potentiel des vitesses ϕ . Il en est de même pour l'ensemble des quantités nécessaires au calcul de l'écoulement autour du corps flottant (à savoir, $\eta_x, \eta_y, U, V, W, \dots$). Dans le fichier seront donc donnés les modes de toutes les quantités et non pas seulement les modes de η, η_t, ϕ et ϕ_t .

Les deux figures suivantes (IV.1.3 & IV.1.4) vont illustrer les différentes étapes du calcul et notamment permettre d'identifier plus facilement les différents domaines de résolution/reconstruction. On se place ici dans le cas de la méthode SWENS, les autres méthodes étant semblables.

La figure IV.1.3 présente donc tout d'abord un cas typique de résolution. Le domaine de résolution SWENS est inclus dans le domaine HOS. On présente ici le cas de la reproduction d'un essai de tenue à la mer mené en bassin de houle. Ce dernier, sans corps, est simulé à l'aide de la méthode HOS dans lequel va être inclus le domaine de résolution RANS, indiqué par le maillage volumique sur une demi-sphère, sur la partie supérieure de la figure IV.1.3. La "boîte" correspond à la zone de reconstruction du calcul HOS.

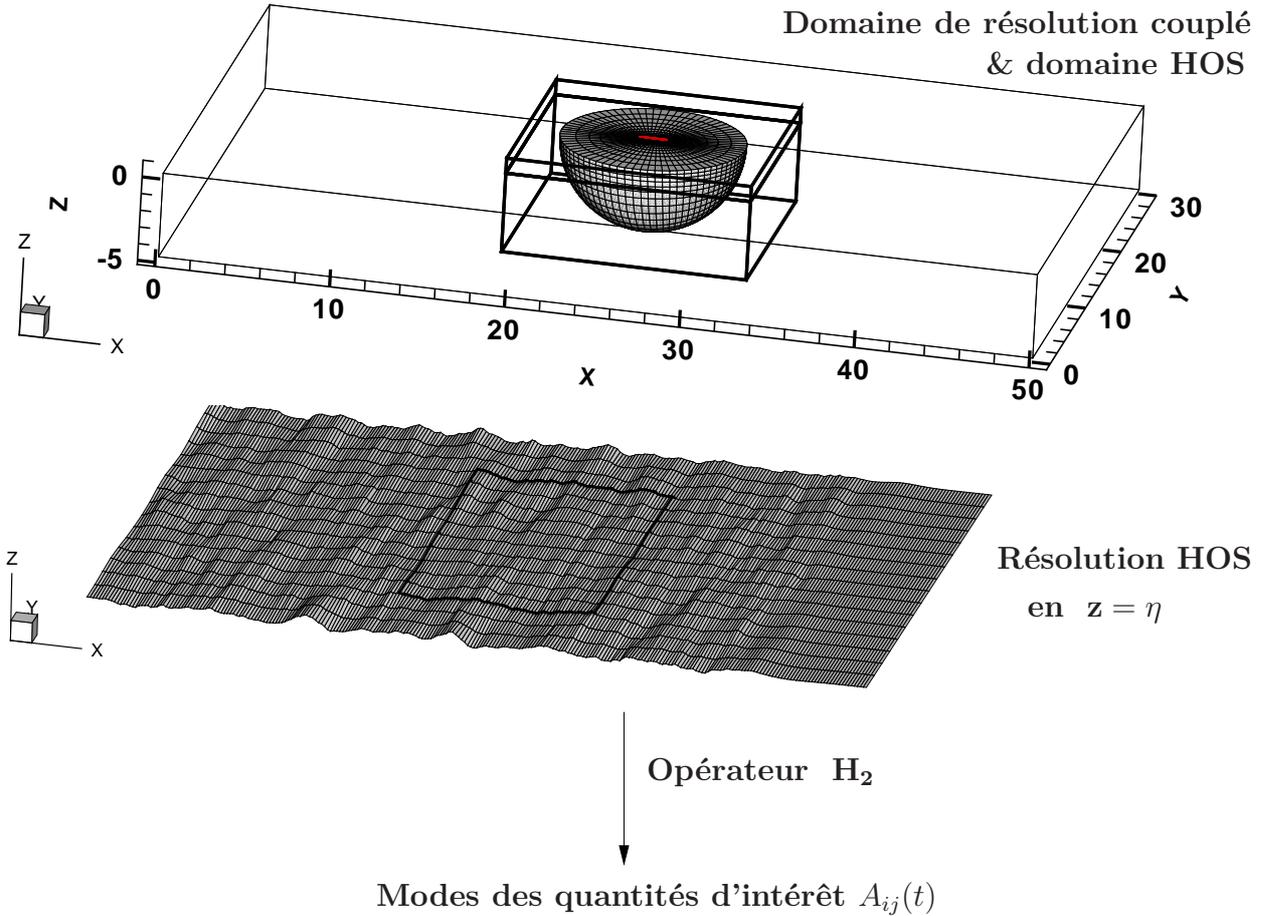
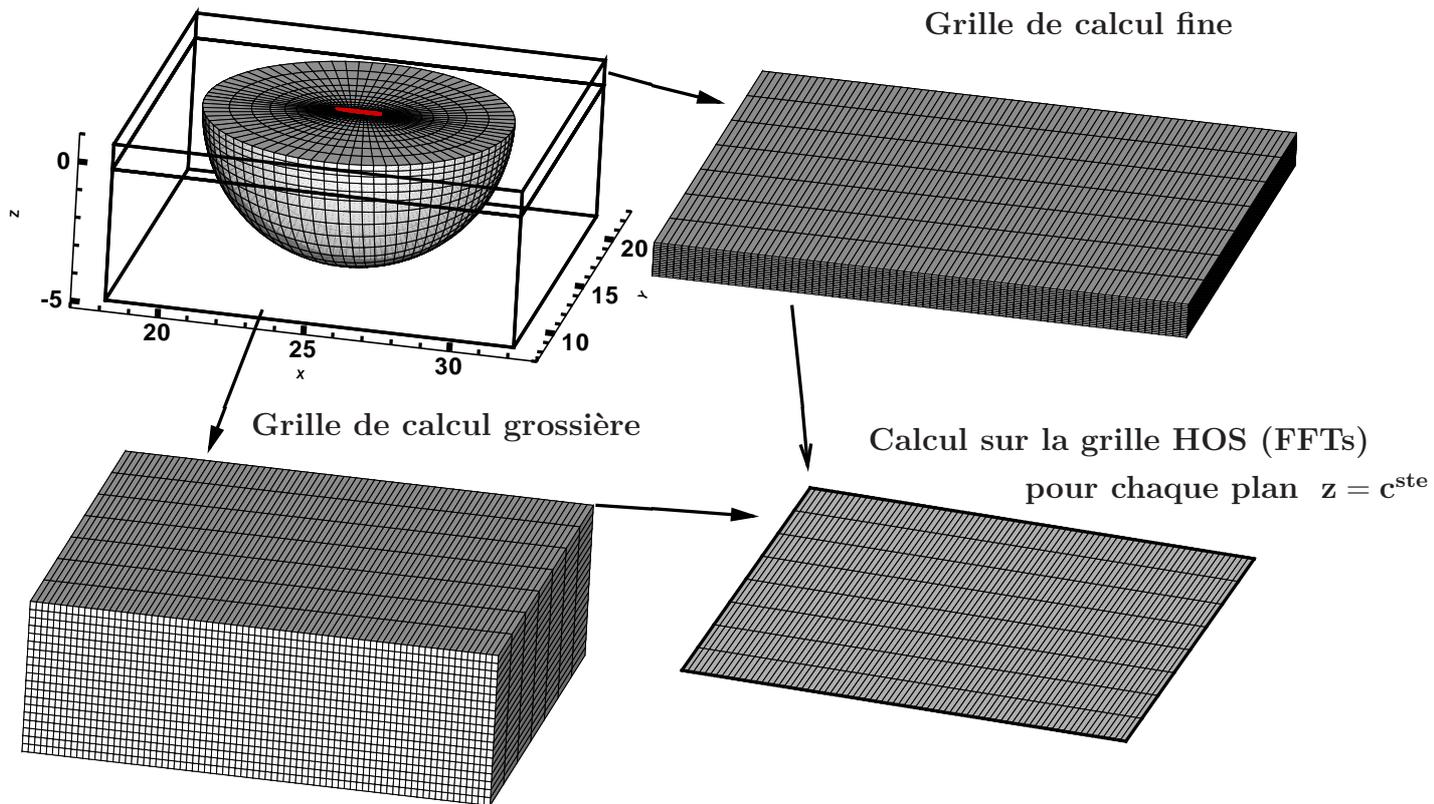


FIG. IV.1.3 – Calcul couplé : premières étapes

La première étape du couplage va consister en la résolution du problème de houle seule, formulé de façon surfacique en $z = \eta$, par la méthode HOS. Ensuite, grâce à l'opérateur H_2 décrit dans la section I.3.2, on évalue les descriptions modales des quantités d'intérêt. Une fois que l'on a accès à ces modes $A_{ij}(t)$, on peut effectuer la reconstruction comme présenté sur la figure IV.1.4.

La distribution verticale des plans horizontaux résolus pouvant être choisie de façon aléatoire, typiquement, on utilisera deux grilles de calcul comme indiqué sur la figure IV.1.4. Une grille fine près de la surface libre alors que la distribution verticale peut être un peu plus grossière en dessous, les dynamiques étant beaucoup plus faibles. Ceci permet, à précision équivalente, un gain pouvant devenir important au niveau du temps de reconstruction. Sur chacune de ces grilles, composée d'une superposition de plans horizontaux (à z fixé = c^{ste}), est déterminé l'ensemble des quantités nécessaires au calcul RANS. Celles-ci sont obtenues efficacement par FFTs (d'où l'intérêt de la décomposition en plans horizontaux). Ainsi, le maillage des données issues du HOS est composé de mailles rectangulaires, équiréparties sur le plan $x - y$ (points de collocation du calcul HOS) et avec une distribution quelconque selon l'axe z . Une fois le champ incident déterminé comme on vient de le décrire, il est interpolé sur le maillage de résolution SWENS (topologie O-O ou H-H).

FIG. IV.1.4 – *Calcul couplé : reconstruction du champ incident*

Pour conclure, on a donc présenté le principe du couplage entre la méthode HOS et les différents codes de tenue à la mer développés au laboratoire. Les différentes méthodes de couplage existantes ont été évoquées avec leurs avantages et leurs inconvénients faisant apparaître que la méthode adoptée, basée sur une décomposition fonctionnelle du problème, semble la plus convaincante. Ensuite, des détails concernant la mise en œuvre du couplage sont donnés. On s'intéresse ici seulement à la houle incidente et à sa reconstruction au sein du code de calcul couplé. Les différents choix effectués sur la méthode de transmission des données entre les deux codes de calcul sont donnés, notamment le passage des données sur la grille de calcul HOS, évitant certaines erreurs numériques. Afin de limiter les données échangées, il a été choisi de transmettre les descriptions modales des quantités seulement. La reconstruction complète est donc effectuée au sein du code de calcul couplé sur des grilles déterminées permettant de conserver précision et efficacité.

Chapitre IV.2

Résultats

On présentera ici les diverses méthodes dans lesquelles le couplage décrit précédemment a été utilisé. Pour chacune des méthodes, on expliquera l'intérêt de ladite méthode ainsi que du couplage avec la méthode HOS. Différents cas d'application seront également proposés afin d'illustrer ce couplage.

IV.2.1 Spectral-potentiel

Le couplage entre la méthode HOS et une méthode potentielle a été effectuée par J.C. Gilloteaux [56]. Cette thèse, intitulée «*Simulation de grands mouvements d'un corps flottant en fluide parfait. Application à la récupération de l'énergie des vagues*», met en avant les capacités des méthodes potentielles à résoudre le problème des grands mouvements. L'application principale ici était les simulations d'un système de récupération d'énergie des vagues développé au LMF ces dernières années : SEAREV (Système Électrique Autonome de Récupération de l'Énergie des Vagues). La phase de développement touche à son terme avec des essais réalisés au bassin de houle de l'ECN en 2006 avec un prototype à l'échelle 1/12^{ème}. Le SEAREV utilise le principe du pendule pour récupérer l'énergie des vagues. Ces dernières font bouger un flotteur à l'intérieur duquel se trouve une masse mobile. Le mouvement relatif de la masse par rapport au flotteur est utilisé : il remplit ou vide des pompes hydrauliques chargeant des accumulateurs à haute pression. Ces derniers livrent leur énergie à des moteurs hydrauliques, qui à leur tour entraînent des générateurs d'électricité. Pour plus de détails voir les thèses réalisées à ce sujet : A. Babarit [5] et J.C. Gilloteaux [56].

IV.2.1.1 Intérêt

L'approche adoptée pour ce code de calcul résolvant le problème de tenue à la mer avec un corps flottant ayant des mouvements de grande amplitude est une méthode 3D non-linéaire : i) du point de vue hydrodynamique : efforts de Froude-Krylov sur la surface mouillée incidente non perturbée, efforts de diffraction-radiation pris en compte jusqu'au 2nd ordre et ii) dynamique du système mécanique résolue de manière non-linéaire (angles de cardan).

L'approche initiale pour la résolution de la houle incidente était d'utiliser la méthode de Rienecker et Fenton [106] permettant d'obtenir une houle complètement non-linéaire de manière très aisée et très rapide. La limitation principale était alors de ne pouvoir effectuer que des simulations sur houle régulière. Cette approche permet des premières analyses, mais si l'on veut effectuer de manière plus poussée des analyses de comportement du système SEAREV ou

autre, des calculs sur houle irrégulière sont nécessaires. En ce sens, l'apport de la méthode HOS est très intéressant. Différents avantages peuvent être évoqués :

- On a accès à n'importe quel type de houle : régulière, irrégulière de façon très précise par notre code HOS complètement non-linéaire ;
- Reproduction facilitée d'essais en bassin de houle car ce dernier est modélisé très précisément par la méthode *HOST* comme on l'a vu dans la partie II. De la même manière, possibilité de faire des calculs précis en mer ouverte ;

IV.2.1.2 Applications

On va présenter ici des cas d'application mettant en avant les capacités de la méthode couplée décrite dans le paragraphe précédent. Il faut indiquer qu'aucune analyse physique ou numérique n'est réalisée ici, cette section a juste valeur d'illustration des capacités du modèle. Pour plus de détails on se réfèrera aux différentes publications relatives à la méthode.

On présente sur la figure IV.2.1 une vue au cours d'un calcul type Spectral/Potentiel. Sur cette figure sont représentés les efforts de pression de la houle incidente sur le SEAREV. On est ici dans le cas de la simulation de grands mouvements avec le modèle 3D non-linéaire. Un travail important a été mené lors de cette thèse en vue de la prise en compte correcte des intersections entre la surface libre et la surface du flotteur qui peut être complexe, comme on le voit sur la figure IV.2.1.

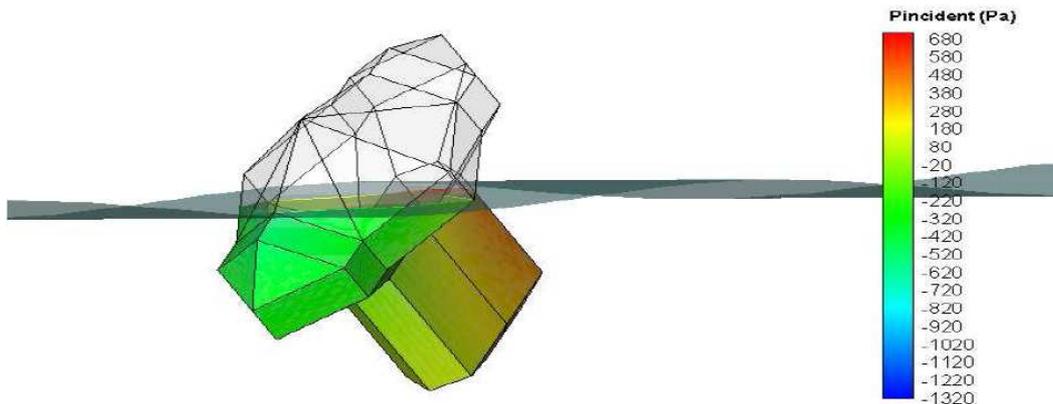


FIG. IV.2.1 – Efforts de pression de la houle incidente sur le système SEAREV

Cette approche présente l'avantage principal d'une résolution très rapide si on la compare aux codes présentés par la suite tout en gardant une très grande précision de résolution. La

figure IV.2.2 présente des comparaisons, sur la réponse en tangage du SEAREV, avec des expériences menées dans le bassin de houle de l'ECN.

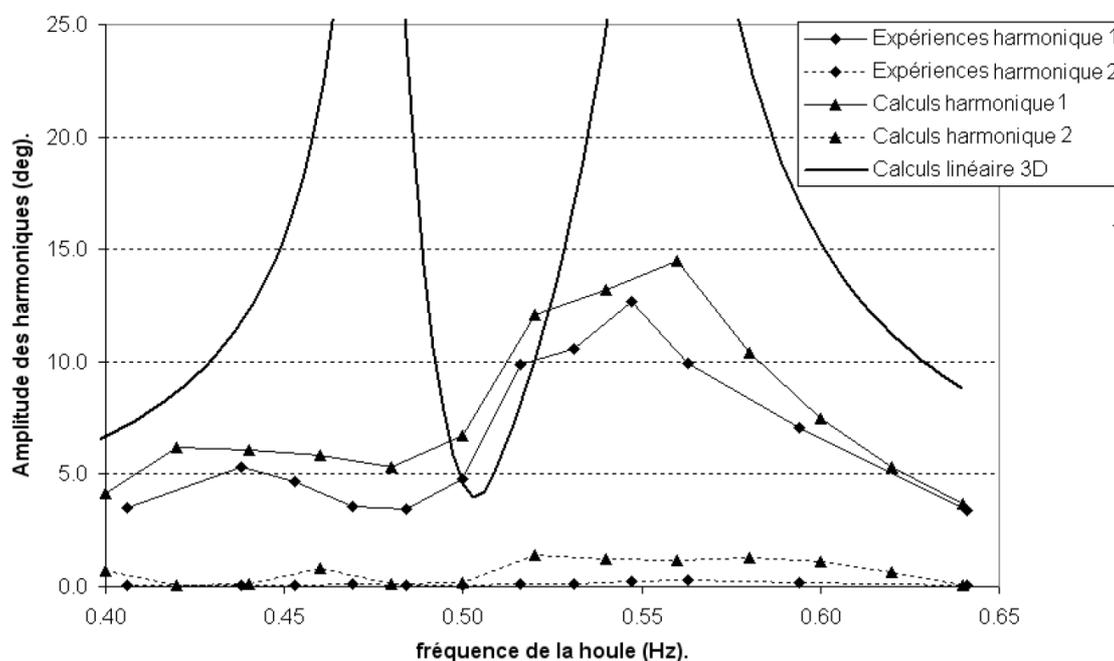


FIG. IV.2.2 – Réponse en tangage des deux premières harmoniques

On s'aperçoit ici de la grande amélioration des résultats par rapport au cas linéaire où la réponse en tangage n'était pas bien simulée. Les résultats numériques sont très proches des résultats expérimentaux et ce pour des temps de calcul très courts. On indique ici que les écarts observés peuvent être expliqués par des effets de la viscosité et/ou du slamming apparaissant expérimentalement.

Les développements les plus récents ont permis de réaliser des simulations avec ancrage en houle irrégulière et des expériences réalisées récemment (juillet 2007) vont permettre le dimensionnement de celui-ci. La figure suivante IV.2.3 présente un exemple de comportement extrême du SEAREV avec amarrage sous une forte houle simulée en HOS. On a donc ici des mouvements de grande amplitude simulés avec la prise en compte de l'amarrage.

Le travail réalisé au cours de la thèse de J.C. Gilloteaux [56] (voir également Gilloteaux et al. [57] par exemple) est donc très prometteur en vue de simulations très efficaces tout en gardant une précision importante avec un modèle 3D non-linéaire. On peut en particulier simuler de grands mouvements, ce qui est très difficile dans le cadre de méthodes maillées classiques lorsqu'aucun remaillage n'est spécifié. De plus, cette thèse a porté un intérêt particulier au remaillage en lui-même, qui n'est pas aisé à réaliser.

On peut enfin indiquer que, dans le cas précis de l'étude du comportement du SEAREV, des calculs récents sur houles irrégulières ont été effectués pour déterminer la matrice de production complète d'un site donné. C'est à dire, on fixe un site susceptible d'accueillir le dispositif de

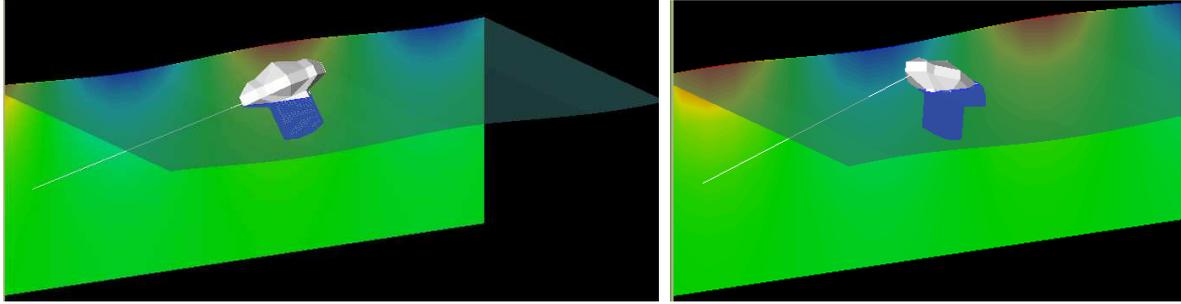


FIG. IV.2.3 – Simulation du comportement du SEAREV avec ancrage. Vue en deux instants avec des mouvements de grande amplitude.

récupération d'énergie des vagues et on récupère les histogrammes et corrélogrammes caractérisant la climatologie locales des états de mer (voir par exemple la figure IV.2.4). On effectue alors un calcul de houle pour chacun des couples H_s / T_p et de même pour la tenue à la mer, ce qui permet d'évaluer la production annuelle d'un site donné et fournir des informations très intéressantes en terme de rentabilité d'emplacement, de caractéristiques optimales du flotteur, ...

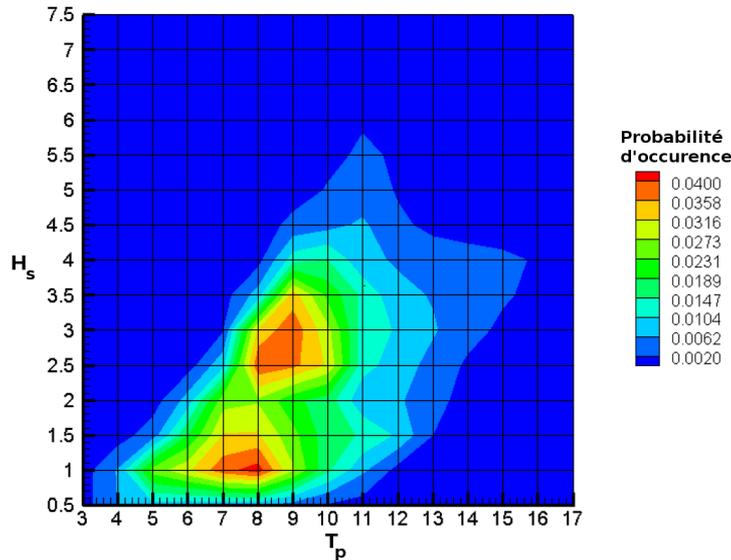


FIG. IV.2.4 – Répartition statistique (scatter-diagram) des états de mer pour le site de l'île d'Yeu

IV.2.2 Spectral-RANS

Le couplage entre une méthode spectrale pour la génération/propagation de la houle et un code de calcul résolvant le problème de l'écoulement en fluide visqueux a été initié par Ferrant et al. [47] sur des cas 2D, le cas 3D ayant été le cadre de la thèse de R. Luquet [85].

IV.2.2.1 Intérêt

Le code de calcul permettant la simulation d'un écoulement visqueux est le code ICARE développé à l'ECN depuis 1993. Ce dernier résout les équations de Navier-Stokes prises en moyenne de Reynolds pour un écoulement à surface libre incompressible et turbulent (modèle RANSE, Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations). Pour plus de détails sur ce code de calcul, on se réfère aux thèses à ce sujet Alessandrini [2], Gentaz [55] ainsi qu'à Alessandrini & Delhommeau [3]. L'intérêt principal du code ICARE réside dans son efficacité de résolution grâce à une formulation complètement couplée (vitesse, pression, élévation de surface libre) mettant en avant une convergence ainsi qu'une précision bien meilleures qu'avec une formulation faiblement couplée classique type SIMPLER (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) ou PISO (Pressure Implicit Splitting of Operators).

L'approche SWENS a tout d'abord été développée, comme dans la section précédente avec une houle incidente décrite par la méthode de Rienecker et Fenton [106] permettant d'obtenir une houle régulière complètement non-linéaire de manière quasi-analytique. L'intérêt d'utiliser la modélisation HOS de la houle est donc comme précédemment : i) accès à n'importe quel type de houle ; régulière ou irrégulière, de façon très précise par notre modèle complètement non-linéaire, ii) reproduction aisée d'essais menés en bassin de houle grâce à sa modélisation précise par la méthode *HOST* comme on l'a vu dans la partie II et iii) possibilité de faire des calculs précis en mer ouverte, éventuellement sur de grands domaines.

IV.2.2.2 Applications

Dans ce paragraphe, différents cas d'application illustrant les capacités de la méthode vont être présentés. Ils ont juste valeur à illustrer nos propos dans le sens où aucune analyse physique des phénomènes mis en jeu n'est réalisée. Pour plus de détails, il convient de se référer aux différentes publications relatives à la méthode (voir par exemple Luquet et al. [86], [87]).

L'étude que l'on présente est celle d'une TLP (Tension Leg Platform) dans une houle irrégulière 2D. La houle utilisée dans ce calcul est la superposition d'un champ de vagues irrégulier à une houle focalisée en la position de la TLP (c'est le cas identique à celui présenté dans la section II.3.2, voir par exemple figure II.3.8). La géométrie d'une TLP est représentée en bas à droite de la figure IV.2.5, i.e. une plate-forme semi-submersible fixe avec 4 colonnes et 4 pontons. On présente également dans cette figure l'élévation de surface libre à différents instants proches du temps de focalisation.

On se rend bien compte ici des capacités du modèle à traiter des problèmes de tenue à la mer en fluide visqueux avec des houles complexes (houle focalisée au sein d'une houle irrégulière) avec également des géométries complexes pouvant être traitées.

Enfin, on indique que l'implémentation des cas de houle 3D arrive à son terme et les premiers exemples d'application sont en cours d'étude. Si on s'intéresse aux perspectives, on peut par exemple imaginer des calculs mettant en relation les simulations longues durées réalisées dans la partie III précédente avec ce calcul de tenue à la mer. Le comportement du navire en houle extrême ou même face à une vague scélérate peut sans doute être une étude intéressante à mener par la suite.

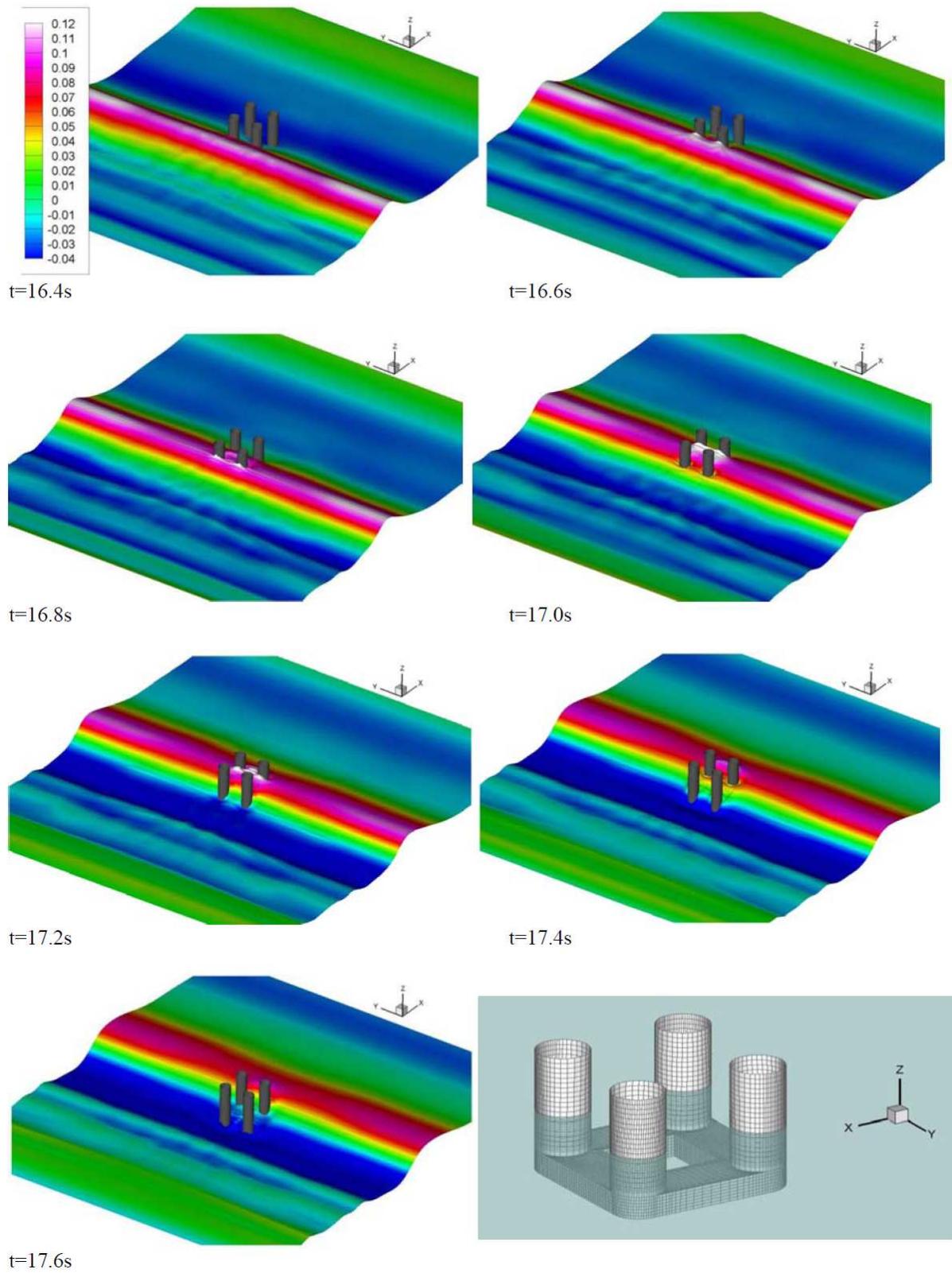


FIG. IV.2.5 – Élévation de surface libre autour de la TLP lors du passage d'une houle focalisée

IV.2.3 Spectral-SPH

Le couplage entre des méthodes spectrales pour la génération/propagation de la houle et la méthode SPH fait l'objet d'une thèse menée par P.M. Guilcher [64].

IV.2.3.1 Intérêt

La méthode SPH est une méthode récente dans l'hydrodynamique et qui présente un certain nombre d'avantages. C'est une méthode particulière compressible, lagrangienne appliquée aux équations d'Euler (i.e. la viscosité n'est pas prise en compte). C'est un type de méthode dit sans maillage qui permet la simulation d'écoulements très complexes avec une relative simplicité de mise en œuvre. Elle sera très adaptée dans un certain nombre de cas, notamment lors de résolution de problèmes de dynamique rapide. On peut penser au cas de sloshing dans une cuve, d'impact d'un corps sur une surface libre, . . .

Ainsi, après le travail sur la formulation SWENS de R. Luquet, il est apparu très intéressant d'appliquer le même type de couplage à la méthode SPH. En effet, les mêmes problèmes numériques qu'avec un code RANS apparaissent si on veut propager de la houle et la solution semblait très prometteuse afin de simuler des problèmes complets de tenue à la mer. On pense par exemple à des cas de slamming ou de greenwater de bateaux en mer réelle ou le déferlement d'une vague sur une plage.

Il est important d'indiquer que, contrairement aux deux couplages précédents, la méthode de Rienecker & Fenton [106] ne peut pas être utilisée ici en tant que champ incident. En effet, on rappelle que la méthode SPH est une méthode lagrangienne et que l'approche de Rienecker & Fenton ne peut simuler que des houles régulières. Dans les approches précédentes, il était possible d'initialiser le calcul avec une augmentation progressive de l'amplitude de la houle incidente jusqu'à l'amplitude cible fixée. Cette méthode n'est bien évidemment pas "physique", mais à condition d'adapter une période de relaxation lors de cette initialisation, il est possible de l'effectuer de la sorte. Or, pour une méthode lagrangienne, ceci n'est pas possible : on doit garder une consistance dans la simulation du début à la fin de celle-ci. Ainsi, seule une méthode décrivant le champ incident de façon temporelle peut être utilisée ; une autre solution serait d'utiliser en condition initiale la solution établie ce qui implique de connaître en chacun des points de calcul toutes les informations nécessaires (ce qui n'est pas aisé dans un code de calcul, compressible qui plus est). Ainsi, la méthode HOS est apparue très bien adaptée aux difficultés rencontrées et ouvre de bonnes perspectives quant à son utilisation.

IV.2.3.2 Applications

On présente ici certains résultats obtenus avec cette méthode couplée spectral-SPH. Les développements sont très récents et des cas d'application simples ont pour le moment été traités. On présentera ici le cas d'un carré immergé soumis à une houle incidente. Les résultats ont été publiés dans Guilcher et al. [65]. On présente donc dans la figure IV.2.6 les champs de vitesse autour d'un carré immergé à différents instants permettant de s'assurer du comportement correct autour du corps des particules simulées en SPH.

Ensuite, la figure IV.2.7 présente pour ce même cas, une vue globale présentant le domaine de calcul ainsi que la composante horizontale du champ de vitesse. On se rend compte de la

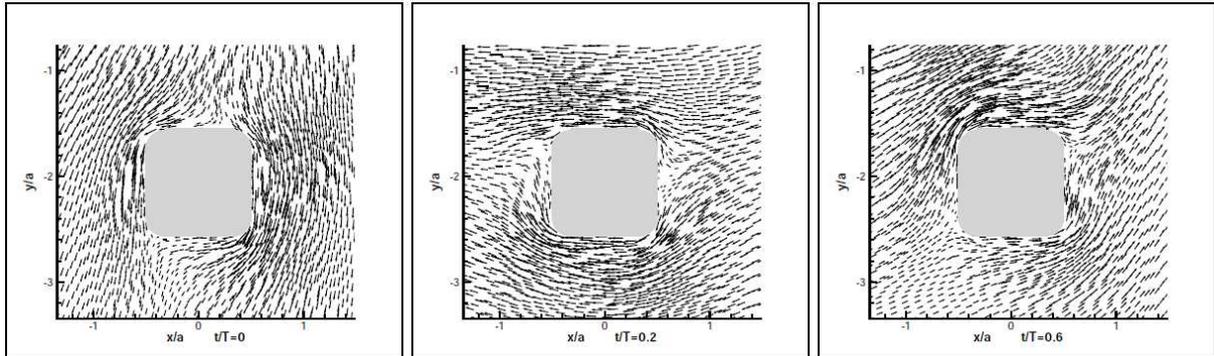


FIG. IV.2.6 – *Champ de vitesse autour d'un carré immergé, couplage spectral/SPH.*

résolution correcte du champ diffracté, on se réfère à l'article original pour les validations diverses, notamment sur les efforts exercés sur le carré.

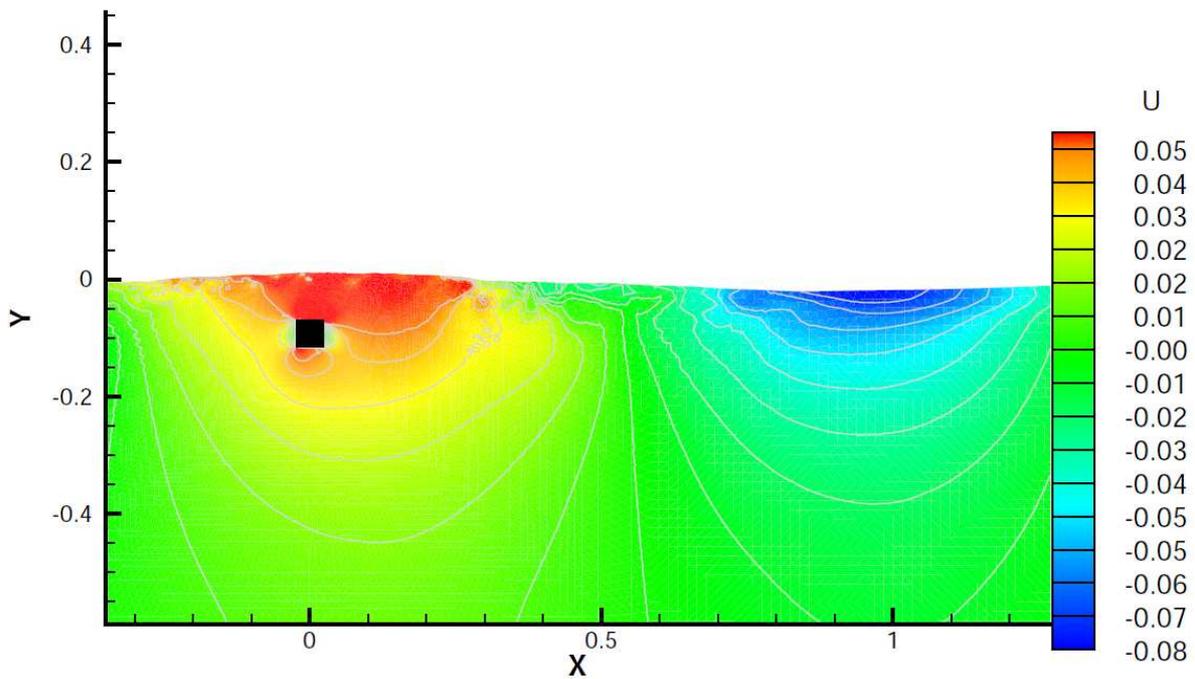


FIG. IV.2.7 – *Composante horizontale du champ de vitesse, couplage spectral/SPH.*

Ce couplage ouvre donc différentes perspectives et notamment l'ensemble des calculs faisant intervenir du déferlement (pouvant être pris en compte avec ce modèle) : slamming, déferlement sur pont (green water) ... La figure IV.2.8 présente les premiers résultats obtenus avec ce phénomène de déferlement sur pont. Une houle est générée et propagée jusqu'au FPSO qui, de par sa présence, induit un déferlement. Des validations sur ce cas de calcul sont en cours (efforts de pression sur le coin du pont).

On évoque également une version encore plus aboutie qui pourrait voir le jour. En effet, le travail de thèse de J.B. Deuff [30] au LMF a consisté en le développement d'un code trai-

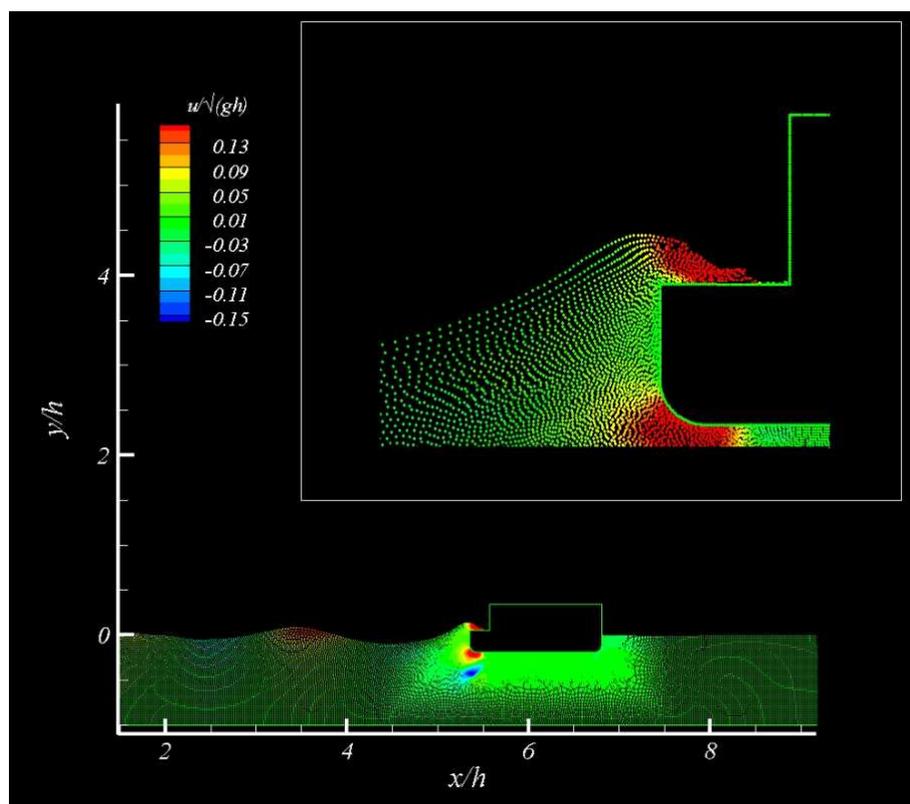


FIG. IV.2.8 – Composante horizontale du champ de vitesse lors du déferlement, couplage spectral/SPH.

tant l'interaction fluide-structure en théorie SPH. Ainsi, coupler ce code permettant d'avoir le traitement précis des déformations de structure ainsi que du problème de diffraction/radiation avec la méthode HOS, permettrait d'avoir un modèle global permettant de traiter le problème extrêmement complexe de la tenue à la mer avec résolution du problème "structure".

En conclusion, on a présenté dans ce chapitre différents résultats obtenus avec l'approche de couplage de la méthode HOS avec des codes de calcul résolvant le problème de l'écoulement autour de corps flottants. Chacune des méthodes a été abordée: spectral/potentiel, spectral/RANS, spectral/SPH. Les attraits spécifiques de ces méthodes ont été brièvement rappelés et des exemples d'application ont été présentés afin de mettre en avant les perspectives intéressantes résultant du développement du code HOS et du couplage entre méthodes en particulier.

Conclusion générale

On rappelle le but initial de cette thèse de doctorat qui consistait en le développement, sur la base des travaux de D. Le Touzé [80] et F. Bonnefoy [13], d'un modèle complètement non-linéaire pour résoudre le problème de la génération¹ et de la propagation des vagues. En ce sens ont été développés les nouveaux modèles *HOST-wm2* et *HOST-wm3* pour une prise en compte améliorée de la génération dans le modèle de bassin de houle *HOST*. Des études complexes sur la propagation de houle dans de grands domaines en milieu ouvert ont également été réalisées mettant en lumière l'importance des effets non-linéaires. Enfin, le couplage original de ces techniques avec différents modèles pour simuler des interactions houle-structure complexes a été réalisé.

Bilan

Dans la première partie, qui s'articule autour de trois chapitres, on présente la formulation associée à notre problème de propagation de vagues (avec ou sans génération). Le premier chapitre présente le cadre général de l'étude en donnant les hypothèses et la mise en équations du problème. On rappelle également dans ce chapitre les fondements des méthodes spectrales, classe de méthode à laquelle appartient la méthode High-Order Spectral (HOS) que l'on va utiliser par la suite.

Le deuxième chapitre présente en détails le modèle non-linéaire complet qui est utilisé dans toute la suite de cette thèse. Le noyau de la méthode HOS, initié par West et al. [128] et Dommermuth & Yue [33], est explicité. Nous avons utilisé, en le justifiant, la version consistante en ordre de West et al. [128]. Ensuite, des rappels importants (cf. Bonnefoy [14]) concernant le cœur de méthode sont donnés : i) intégration temporelle par un schéma de type Runge-Kutta du 4^{ème} ordre avec adaptation du pas de temps, ii) importance du traitement anti-repliement tel qu'utilisé par la suite (précision, coût CPU) et iii) validations diverses sur la convergence en nombre de modes et en ordre HOS, et reproduction des cas-tests de la littérature. Enfin, une analyse des temps de calcul est proposée, mettant en avant l'efficacité du modèle avec une augmentation linéaire du coût CPU en fonction du nombre de modes utilisés pour la résolution.

Le troisième chapitre détaille les contributions principales au cœur du modèle lors de ce travail de thèse. Dans un premier temps, une amélioration du schéma d'intégration en temps est proposée. Elle est basée sur un changement de variables adéquat permettant l'intégration analytique de la partie linéaire des CSL. Différents tests effectués sur des cas de calculs typiques ont fait apparaître un gain en temps CPU de l'ordre de 3 par rapport au schéma initial. Dans un second temps, on a présenté une méthode efficace du calcul des quantités à l'intérieur du domaine fluide de calcul. Notre formulation HOS est surfacique et on cherche à calculer des

1. On rappelle qu'on entend par génération, la génération des vagues par un batteur à houle. La génération "naturelle" de la houle par le vent n'est pas étudiée ici

quantités, connues sur la surface libre, dans tout le domaine fluide. Ceci a été effectué en se basant sur le travail de Bateman [7] qui a développé une telle méthode dans le cadre d'un code DNO. Différentes validations sur des cas de houles plus ou moins cambrées sont proposées permettant de s'assurer de la précision du schéma adopté. Ces développements ouvrent par ailleurs une large gamme d'applications (cf. chapitre II.3 et partie IV).

Au cours de la deuxième partie, on s'est intéressé au cas particulier de la modélisation d'un bassin de houle rectangulaire, comprenant certaines particularités (présence d'un générateur, d'une plage absorbante) nécessitant des traitements spécifiques pour leur prise en compte. Dans le premier chapitre, ces spécificités, ainsi que les moyens utilisés pour les modéliser sont détaillés. En particulier, la méthode de génération utilisant le concept de potentiel additionnel introduit par Agnon & Bingham [1] est présentée. Des cas de validation sont également rappelés, cet ensemble constituant l'existant au début de cette thèse.

Le deuxième chapitre présente les améliorations apportées au modèle de génération initialement implémenté. La prise en compte, jusqu'alors linéaire, de l'influence du batteur est améliorée grâce à un développement en ordres de cette condition aux limites non-linéaire. Le travail effectué dans le cadre du code complètement 2nd ordre *SWEET* a été adapté à notre modèle non-linéaire pour la propagation *HOST*, et étendu jusqu'au 3^{ème} ordre. L'idée sous-jacente est d'améliorer la prise en compte de la génération, celle-ci pouvant être décorrélée de la résolution complètement non-linéaire du problème de propagation. On est arrivé ainsi à deux nouveaux modèles améliorés, *HOST-wm2* et *HOST-wm3* au sein desquels la prise en compte de la condition non-linéaire sur le batteur se fait respectivement au 2^{ème} et 3^{ème} ordre. Enfin, on a introduit des pistes quant à l'éventualité de résoudre de manière complètement non-linéaire le problème de la génération de la houle.

Le troisième chapitre présente quant à lui différents cas de validation des nouveaux modèles évoqués précédemment. Ces validations sont réalisées sur des cas de houle régulière de différentes cambrures grâce à des comparaisons avec des essais expérimentaux réalisés au bassin de houle de l'ECN. Les résultats concluants ont cependant mis en lumière des problèmes de stabilité récurrents pour le modèle *HOST-wm3*. Des comparaisons sur une vague focalisée 2D au sein d'une houle irrégulière ont été effectuées confirmant les aptitudes de la méthode et également la nette amélioration apportée par le modèle *HOST-wm2* par rapport au modèle initial *HOST-wm1*. Les erreurs d'évaluation globales du champ de vagues peuvent être réduites de plus de 50% pour les cas où les non-linéarités du mouvement batteur sont les plus importantes.

Dans la troisième partie, on a étudié la simulation océanique, i.e. la modélisation d'états de mer en milieu ouvert et en profondeur supposée infinie. Au cours du premier chapitre, l'initialisation du calcul, qui est un élément important en vue de simulations précises, est détaillée. En effet, on étudie ici simplement la propagation des vagues, et non leur génération. L'étude porte sur des états de mer définis par un spectre de JONSWAP dont les caractéristiques sont déterminées par rapport à des relevés effectués en mer du Nord (cf. Haver [72]). Les méthodes d'analyse utilisées sont détaillées, ainsi que les théories statistiques d'états de mer employées par la suite. Des cas de validation du modèle HOS en milieu ouvert sont également proposés : i) des simulations longue durée confirment les capacités du modèle HOS à simuler précisément l'évolution, sur de très longues périodes, d'états de mer cambrés et ii) les résultats obtenus par Tanaka [118] & [119] sur l'évolution de spectres d'états de mer 3D sont reproduits avec succès.

Dans le second chapitre, l'intérêt s'est porté plus particulièrement sur la formation des vagues scélérates. L'approche couramment utilisée qui consiste en l'étude de vagues extrêmes

forcées, obtenues par focalisation spatio-temporelle, est étudiée. Les résultats concluants indiquent les capacités de notre modèle HOS à produire des événements de telle taille (on a par exemple formé une vague avec $H_{max}/H_s > 3.5$). Ensuite, l'apparition *naturelle* de vagues scélérates dans un état de mer est étudiée. On simule des domaines de grande dimension sur de longues durées en 2D et en 3D. Une analyse du champ de vagues par passages à zéro (zero-crossing) est proposée, permettant de renseigner sur la présence éventuelle de tels événements. L'analyse originale des passages à zéro dans la direction transverse, associée à celle classique dans la direction de propagation a permis de décrire un certain nombre de caractéristiques du champ de vagues que l'on a jugé pertinentes : tailles des vagues dans chacune des directions λ_x, λ_y ; taille des crêtes dans la direction transverse λ_c ; hauteur crête à creux de chacune de ces vagues H . Des informations globales sur le champ de vagues peuvent alors être extraites : hauteur significative H_s , valeurs maximales $H_{max}, \eta_{max}, \dots$. Ceci va permettre d'étudier l'apparition de ces vagues scélérates ainsi que leurs caractéristiques propres. En particulier, une étude paramétrique sur la directionnalité est proposée, permettant une analyse de l'influence de ce paramètre sur les probabilités d'occurrence de ces événements extrêmes. On a étudié également les densités de probabilité de l'élévation de surface libre η ainsi que celles de la hauteur de vagues crête à creux H . On a pu remarquer qu'à partir de densités identiques initialement, celles-ci évoluent différemment au cours du temps suivant la directionnalité considérée. On a observé que les différences entre un cas fortement étalé en direction et un cas faiblement étalé sont assez faibles, mais tendant à montrer que le cas faiblement étalé est plus propice à la formation d'événements extrêmes (comme trouvé expérimentalement par Onorato et al. [100] ou avec un modèle BMNLS par Socquet-Juglard et al. [112]). Ceci a été obtenu de façon plus nette avec l'étude du kurtosis, paramètre largement utilisé pour caractériser le champ de vagues comme étant extrême ou non. Mais, on pointe tout de même en comparant le kurtosis à l'analyse fine proposée ici du paramètre H_{max}/H_s que le kurtosis est à utiliser avec attention et parcimonie car pouvant omettre un certain nombre de phénomènes. Une analyse originale de la forme des vagues scélérates est ensuite proposée, mettant en avant l'importance de la directionnalité de la houle, notamment sur l'extension transverse de celles-ci. Des comparaisons avec la méthode BMNLS sont présentées. Cette méthode est très largement utilisée dans ce cadre d'étude : la propagation d'états de mer sur de larges domaines. L'évolution temporelle du kurtosis ainsi que l'évolution du spectre de l'état de mer au cours du temps nous donnent des résultats similaires de ceux de Socquet-Juglard et al. [112] et Krogstad et al. [78], à savoir que l'occurrence des événements extrêmes est plus importante pour les spectres peu étalés en fréquence et en direction. L'importance jouée par les instabilités de Benjamin-Feir est également pointée. De plus, ces comparaisons ont permis de montrer l'apport très important que constitue l'emploi de notre méthode complètement non-linéaire : i) pas de limitation des temps de simulations accessibles, ii) modèle complètement non-linéaire, iii) efficacité du modèle donnant accès à des simulations 3D, ...

Enfin, dans la quatrième et dernière partie, on a abordé le problème de l'interaction houle-structure. L'approche du couplage de méthodes adoptée au laboratoire depuis quelques années pour modéliser ce problème est poursuivie dans le cadre de trois thèses déjà ou en passe d'être soutenues. Dans ce cadre, les développements apportés au modèle HOS ont permis la mise en place du couplage entre notre méthode et trois autres codes du laboratoire. Le premier chapitre présente donc le principe du couplage en mettant en avant l'intérêt de l'approche utilisée : la décomposition fonctionnelle. On s'est intéressé seulement à la houle incidente et à sa reconstruction au sein du code de calcul couplé, ce qui a représenté l'apport effectif au cours

de cette thèse. Un intérêt particulier est porté à la précision et à l'efficacité du couplage.

Enfin, le deuxième chapitre présente les intérêts de chacun des trois codes de calcul couplés : spectral/potentiel, spectral/RANSE, spectral/SPH. Différents résultats d'application sont rapportés afin de mettre en avant les capacités intéressantes de chacun des modèles développés (qui ont fait l'objet de thèses séparées).

Perspectives

On peut maintenant s'intéresser aux perspectives à plus ou moins long terme de ce travail de thèse. De nombreux aspects que l'on aurait aimé aborder au cours de ce travail de thèse restent en suspens, toutes les pistes ne pouvant pas être menées jusqu'à leur terme au cours de ce seul travail.

Le premier point qu'on pourrait peut-être essayer d'approfondir est la prise en compte du batteur de façon complètement non-linéaire. Le processus itératif mis en place ne donnant pas satisfaction, il conviendrait peut-être de chercher d'autres pistes. On peut évoquer l'idée d'utiliser ce processus itératif en prenant comme condition initiale le batteur 2^{ème} ou 3^{ème} ordre. En effet, les tests effectués l'ont été avec la condition linéaire sur le batteur en condition initiale. Ainsi, ceci permettrait peut-être d'améliorer la précision initiale et la convergence. Cependant, ceci ne résoudrait pas le problème principal apparaissant dans ce choix de méthode, à savoir, comment définit-on la condition sur le batteur lorsque celui-ci est en dehors du domaine ($X(y,z,t) < 0$)? D'autres approches *naturelles* n'ont pas donné satisfaction comme évoqué par D. Le Touzé [80]. La technique de potentiel additionnel, combiné avec le bassin renversé fait apparaître la condition batteur comme étant la surface libre de ce bassin renversé. Le développement d'une approche spécifique de ce problème par une méthode de résolution des conditions de surface libre est peut-être à envisager, même si cela demande sans doute beaucoup de travail.

Des extensions diverses pourraient également être étudiées afin d'augmenter les domaines d'application de la méthode HOS. On pense par exemple à l'inclusion d'un fond qui ne soit pas uniforme. Les développements présentés ici s'appuyaient sur l'hypothèse d'une profondeur infinie ou finie identique dans tout le domaine de calcul. Or, il est intéressant dans certaines applications d'étudier l'influence d'un fond variable en espace (et éventuellement en temps). Des travaux ont été réalisés en ce sens avec une méthode type Dirichlet-Neumann Operator (DNO) (cf. Guyenne & Nicholls [67] ou [66] ou Smith [110]) et on rappelle que ces méthodes (HOS et DNO) sont équivalentes laissant entrevoir de bonnes chances d'être capable d'effectuer les mêmes développements.

On peut également penser à incorporer au sein des simulations différents modèles prenant en compte certains phénomènes : i) ajout de l'influence du vent (par une modification locale de la pression sur la surface libre par exemple) ou ii) inclusion d'un modèle de déferlement (par une dissipation localisée lorsqu'il se produit) afin de pouvoir simuler n'importe quel type d'état de mer. On peut également envisager de formuler la méthode HOS afin d'être capable de modéliser un courant ambiant, autre phénomène capable de contribuer à former des vagues extrêmes.

Un élément très important qui fera l'objet des développements dans un futur proche de la méthode est sa parallélisation qui ouvre des nouvelles voies dans le travail pouvant être effectué. En effet, malgré sa très grande efficacité, les simulations peuvent devenir assez lourdes en temps de calcul pour les cas 3D de grande ampleur. De plus, l'investissement récent du

LMF dans une machine de calcul parallèle de type CRAY avec 48 processeurs nous fournit les ressources informatiques nécessaires à son utilisation. Il semble donc intéressant d'indiquer l'intérêt de cette parallélisation en termes de simulations accessibles, principalement dans le cadre des simulations océaniques :

- Des simulations sur des domaines encore plus étendus seront accessibles, permettant des analyses plus fines de différents phénomènes. On pense notamment aux densités de probabilité présentées dans la partie III qui, pour le cas des hauteurs de vagues étaient assez bruitées du fait du nombre encore trop faible de vagues à l'intérieur du domaine simulé. De plus, les ressources en mémoire vives nécessaires commençaient également à être limitantes sur un calcul mono-processeur.
- La modélisation sur des temps encore plus importants que ceux présentés dans ce manuscrit. En effet, on commençait à être limité dans nos études menées lors de cette thèse par le temps de calcul. Les simulations de longues durées sur de larges domaines pouvant atteindre des temps de calcul de plusieurs semaines, elles devaient être effectuées en connaissance de cause. Notre modèle permet d'étendre quelque peu, avec des perspectives intéressantes, les conclusions de Socquet-Juglard et al. [112] (modèle BMNLS), de par la non-limitation en temps de simulation du modèle HOS. Par exemple, il sera intéressant de comprendre quelle est l'origine des vagues scélérates apparaissant après le processus de relaxation du spectre (instabilités de Benjamin-Feir).
- La précision des calculs pourrait également être améliorée en augmentant par exemple l'ordre HOS utilisé dans les simulations 3D de grande échelle, ou bien en augmentant l'ordre intermédiaire du traitement anti-repliement utilisé.
- Enfin, on indique la possibilité, une fois la parallélisation en place, d'effectuer des études paramétriques, sur les probabilités d'occurrence par exemple, beaucoup plus aisément. On pense par exemple à étudier l'influence de la directionalité encore plus précisément sur d'autres cas de calcul. On pourrait également s'intéresser au rôle joué par la cambrure moyenne du champ de vagues, à l'influence des non-linéarités prises en compte (en changeant l'ordre HOS par exemple), à utiliser des spectres d'états de mer autres que JONSWAP, ...

Il est intéressant d'indiquer ici les travaux de Podgórski et al. [104] qui présentent des densités de probabilité de la position des crêtes, formulées à partir d'un spectre directionnel de JONSWAP. Il est montré en particulier que cette position varie grandement avec la longueur d'onde de la vague considérée. Les études menées seront donc à approfondir afin de voir si nos simulations peuvent confirmer ou non ces résultats.

On évoque aussi un autre aspect du problème de la simulation d'états de mer : la prédiction de la houle. Ce sujet fait l'objet d'une thèse qui est en cours au sein du LMF par E. Blondel [12]. Le but de ce travail est d'essayer de reconstruire, puis de prédire les états de mer en une zone donnée à partir de données mesurées à un autre endroit. Les besoins pour ce genre de simulations émanent de l'ensemble des opérations menées en mer nécessitant une certaine stabilité de l'objet flottant à un moment donné. On pense par exemple au pont d'atterrissage d'un porte avion qui doit être assez stable pour assurer la sécurité du pilote. Ainsi, à partir de relevés effectués en amont du bateau, il sera possible de prédire la houle rencontrée (et éventuellement modifier la route pour limiter l'amplitude des mouvements du navire). Une autre

application qui vient à l'esprit est l'ensemble des dispositifs de récupération de l'énergie des vagues, comme le SEAREV évoqué précédemment et développé au laboratoire, qui, pour un fonctionnement optimal, peut prendre en compte la connaissance du champ de vagues pour le réglage de certains paramètres (cf. contrôle du latching par exemple dans Babarit & Clément [6]).

Ainsi, les objectifs fixés par ce travail de thèse ont été atteints, à savoir : le développement d'un modèle complètement non-linéaire pour résoudre le problème de la génération et de la propagation des vagues. Son intérêt a été mis en lumière par une utilisation en vue de l'amélioration de la compréhension des phénomènes non-linéaires entrant en jeu dans ces deux processus. On a donc pu évaluer l'efficacité ainsi que la précision de la méthode développée qui apparaît, dans le cadre de la modélisation d'un bassin de houle ou de simulations océaniques, comme plus efficace que la majorité des méthodes existantes aujourd'hui. Son utilisation dans nombre d'applications se révélera donc des plus intéressantes. Au vu également des perspectives de grand intérêt mises en lumière, on espère faire de cette thèse le point de départ de nombreux travaux concernant la propagation et la génération de la houle.

Annexe A

Un problème de sécularité pour le batteur 3^{ème} ordre ?

Lors du passage au troisième ordre de la condition batteur, il semblait intéressant de vérifier le caractère séculaire ou non de la solution. En effet, on rappelle brièvement ici l'origine de ce problème de sécularité. Ce dernier apparaît, entre autres, lors du développement en série de perturbations des CSL. Ceci induit, à partir du troisième ordre, une correction à apporter à la pulsation (ou au nombre d'onde) dans toute la résolution (i.e. y compris au premier et deuxième ordres déjà calculés).

Il est important de se remémorer ce qu'il se passe pour la résolution du problème de surface libre seul. On développe en ordres (suivant un petit paramètre ϵ , correspondant à la cambrure ici) le potentiel de vitesse ϕ et l'élévation de surface libre η :

$$\begin{aligned}\phi &= \epsilon \phi_{(1)} + \epsilon^2 \phi_{(2)} + \epsilon^3 \phi_{(3)} + O(\epsilon^4) \\ \eta &= \epsilon \eta_{(1)} + \epsilon^2 \eta_{(2)} + \epsilon^3 \eta_{(3)} + O(\epsilon^4)\end{aligned}$$

Le système d'équations devient donc, en regroupant tout d'abord le premier ordre :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{(1)} &= 0 && \text{dans } D \\ \phi_{(1),z} &= 0 && \text{en } z = -h \\ \phi_{(1),tt} + g\phi_{(1),z} &= 0 && \text{en } z = 0 \\ \eta_{(1),t} - \phi_{(1),z} &= 0 && \text{en } z = 0\end{aligned}$$

L'équation de Laplace avec la condition sur le fond nous donne une forme pour la solution :

$$\phi_{(1)}(x,y,z,t) = A \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \sin(kx) F(t)$$

L'équation de surface libre pour $\phi_{(1)}$ nous impose que la fonction temporelle soit solution de l'équation suivante :

$$F_{,tt}(t) + gk \tanh(kh) F(t) = 0$$

On en déduit donc la forme générale $F_1(t) = B_1 \sin(\omega t + \psi_1)$, d'où :

$$\begin{aligned}\phi_{(1)} &= \frac{\omega}{gk} \sin(kx - \omega t) \\ \eta_{(1)} &= \frac{1}{k} \cos(kx - \omega t)\end{aligned}$$

avec $\omega^2 = gk \tanh(kh)$.

Au deuxième ordre on a :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{(2)} &= 0 && \text{dans } D \\ \phi_{(2),z} &= 0 && \text{en } z = -h \\ \phi_{(2),tt} + g\phi_{(2),z} &= -(\phi_{(1),x}^2 + \phi_{(1),z}^2)_t - \eta_{(1)}\phi_{(1),ztt} - g\eta_{(1)}\phi_{(1),zz} && \text{en } z = 0 \\ \eta_{(2),t} - \phi_{(2),z} &= -\eta_{(1)}\phi_{(1),zt} - \frac{1}{2}(\phi_{(1),x}^2 + \phi_{(1),z}^2) && \text{en } z = 0\end{aligned}$$

L'équation de Laplace avec la condition sur le fond nous donne la même forme pour la solution que précédemment :

$$\phi_{(2)}(x,y,z,t) = A \frac{\cosh(k_2(z+h))}{\cosh(k_2h)} \sin(k_2x) F(t)$$

Mais l'équation de surface libre pour $\phi_{(2)}$ est cette fois :

$$F_{,tt}(t) + gk \tanh(kh) F(t) = \alpha_2(x,z) \sin[2(kx - \omega t)]$$

D'ou, après résolution, la forme suivante de la solution (car $F_2(t) = B_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2)$ après simplification) :

$$\begin{aligned}\phi_{(2)} &= A_{\phi_2} \frac{\cosh[2k(z+h)]}{\cosh(2kh)} \sin[2(kx - \omega t)] \\ \eta_{(2)} &= A_{\eta_2} \cos[2(kx - \omega t)]\end{aligned}$$

Au troisième ordre on a :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{(3)} &= 0 && \text{dans } D \\ \phi_{(3),z} &= 0 && \text{en } z = -h \\ \phi_{(3),tt} + g\phi_{(3),z} &= F_{(3)} && \text{en } z = 0 \\ \eta_{(3),t} - \phi_{(3),z} &= G_{(3)} && \text{en } z = 0\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}F_{(3)} &= -\left(\eta_{(1)}\phi_{(2),zt} + \eta_{(2)}\phi_{(1),zt} + \frac{\eta_{(1)}^2}{2}\phi_{(1),zzt}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(2\phi_{(1),x}\phi_{(2),x} + 2\eta_{(1)}\phi_{(1),x}\phi_{(1),xz} + 2\phi_{(1),z}\phi_{(2),z} + 2\eta_{(1)}\phi_{(1),z}\phi_{(1),zz}\right) - G_{(3),t} \\ G_{(3)} &= \left(\eta_{(1)}\phi_{(2),zz} + \eta_{(2)}\phi_{(1),zz} + \frac{\eta_{(1)}^2}{2}\phi_{(1),zzz}\right) - \left(\phi_{(1),x}\eta_{(2),x} + \phi_{(2),x}\eta_{(1),x}\right)\end{aligned}$$

L'équation de Laplace avec la condition sur le fond nous donne la même forme pour la solution que précédemment :

$$\phi_{(3)}(x,y,z,t) = A \frac{\cosh(k_3(z+h))}{\cosh(k_3h)} \sin(k_3x) F(t)$$

Mais l'équation de surface libre pour $\phi_{(3)}$ est cette fois :

$$F_{,tt}(t) + gk \tanh(kh) F(t) = \alpha_3(x,z) \sin[3(kx - \omega t)] + \beta_3(x,z) \sin[2(kx - \omega t)] + \gamma_3(x,z) \sin(kx - \omega t)$$

C'est alors ici qu'apparaît une solution séculaire pour $F(t)$ qui va être de la forme :

$$F(t) = A_3 \cos[3(kx - \omega t)] + B_3 \cos[2(kx - \omega t)] + C_3 \cos(kx - \omega t) + \mathbf{D}_3 \mathbf{t} \sin(\mathbf{kx} - \omega \mathbf{t}) \quad (\text{A.1})$$

Le terme en gras représentant le terme dit séculaire (augmentant suivant t). Ce terme ne correspond pas à la solution physique du problème. En effet, en prenant un temps très grand, on aurait notre solution du 3^{ème} ordre pouvant avoir une importance plus grande que celle du 1^{er} ordre, voir par exemple la thèse Stassen [114]. Cependant, il est possible d'éliminer ce terme non-physique par un changement de variables adéquat sur la pulsation ω . Mais cette prise en compte des effets du 3^{ème} ordre nécessite de modifier les solutions obtenues aux ordres 1 et 2, compliquant la résolution.

Il semble donc intéressant de savoir si ce phénomène apparaît lors de la prise en compte de la condition batteur 3^{ème} ordre. En reprenant les résultats obtenus dans II.2.3 on a :

$$\begin{aligned} \Delta \phi_{(i)}^{\text{add}} &= 0 && \text{dans } D_{\text{add}} \\ \phi_{(i),x}^{\text{add}} &= 0 && \text{en } x = L_x \end{aligned}$$

Ces deux équations nous renseignent sur la forme de la solution :

$$\phi_{(i)}^{\text{add}}(x,y,z,t) = A_{\text{add}} \frac{\cosh[k_{\text{add}}(-x + L_x)]}{\cosh(k_{\text{add}}L_x)} \cos(k_{\text{add}}z + \psi) \quad (\text{A.2})$$

Ensuite, on a la condition sur le batteur :

$$\phi_{(i),x}^{\text{add}} = X_{(i),t} + f(X_{(i)}, \phi_{(i-j)}^{\text{add}}, \phi_{(i-j)}^{\text{add}}) \{j = [1 : i - 1], i = [1 : 3]\}$$

On s'aperçoit alors que la formulation de cette condition est complètement différente de la condition de surface libre précédemment étudiée ($\phi_{(i),tt} + g\phi_{(i),z} = F_{(i)} \{i = [1 : 3]\}$). Dans le cas de la génération de houle, on n'a aucune raison d'avoir ce caractère séculaire de la solution au 3^{ème} ordre. Par contre, il est à noter que si on poursuit le développement à un ordre supplémentaire, on aurait alors besoin de $\phi_{(3)}^{\text{spec}}$, $\eta_{(3)}$ où apparaîtrait le problème décrit.

Bibliographie

- [1] Y. AGNON et H. B. BINGHAM. A non-periodic spectral method with applications to non linear water waves. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 18:527–534, 1999.
- [2] B. ALESSANDRINI. *Étude numérique de l'écoulement visqueux autour d'une carène de navire en présence d'une surface libre: résolution des équations de couche limite et de Navier-Stokes*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 1993.
- [3] B. ALESSANDRINI et G. DELHOMMEAU. A Fully Coupled Navier-Stokes Solver for Calculation of Turbulent Incompressible Free Surface Flow Past a Ship Hull. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 29:125–142, 1999.
- [4] S.Y. ANNENKOV et V.I. SHRIRA. Numerical modelling of water-wave evolution based on the Zakharov equation. *J. Fluid Mech.*, 449:341–371, 2001.
- [5] A. BABARIT. *Optimisation Hydrodynamique et Contrôle Optimal d'un Récupérateur de l'Énergie des Vagues*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.
- [6] A. BABARIT et A. H. CLÉMENT. Optimal latching control of a wave energy device in regular and irregular waves. *Appl. Ocean Res.*, 28(2):77–91, 2006.
- [7] W.J.D. BATEMAN. *A numerical investigation of three dimensional extreme water waves*. Thèse de doctorat, Imperial College, 2000.
- [8] W.J.D. BATEMAN, C. SWAN et P.H. TAYLOR. On the efficient numerical simulation of directionnally-spread surface water waves. *J. Comp. Phys.*, 174:277–305, 2001.
- [9] W.J.D. BATEMAN, C. SWAN et P.H. TAYLOR. On the calculation of the water particle kinematics arising in a directionnally-spread wavefield. *J. Comp. Phys.*, 186:70–92, 2003.
- [10] T.B. BENJAMIN et J.E. FEIR. The disintegration of wavetrains on deep water. Part I: Theory. *J. Fluid Mech.*, 27:417–430, 1967.
- [11] M. BERTON. *Analyse et Optimisation Numériques des performances de carènes élancées en mouvement instationnaire. Application aux bateaux d'aviron*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.
- [12] É. BLONDEL. *Reconstruction et prévision déterministe d'états de mer à partir de données mesurées*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2009. (en cours).
- [13] F. BONNEFOY. *Modélisation expérimentale et numérique des états de mer complexes*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2005.
- [14] F. BONNEFOY. Validation et étude du noyau HOS. Rapport interne ECN, 2006.
- [15] F. BONNEFOY, D. LE TOUZÉ et P. FERRANT. A fully-spectral time-domain model for second-order simulation of wavetank experiments. Part A: Formulation, implementation and numerical properties. *Appl. Ocean Res.*, 28(1):33–43, février 2006.
- [16] F. BONNEFOY, D. LE TOUZÉ et P. FERRANT. A fully-spectral time-domain model for second-order simulation of wavetank experiments. Part B: Validation, calibration versus experiments and sample applications. *Appl. Ocean Res.*, 28(2):121–132, avril 2006.

-
- [17] F. BONNEFOY, P. ROUX DE REILHAC, D. LE TOUZÉ et P. FERRANT. High-Order Spectral numerical modeling of a 3D wave basin compared to experiments. Dans *Proc. 5th Int. Symp. on Ocean Wave Measurement and Analysis*, Madrid, Spain, juillet 2005.
- [18] C. BRANDINI. *Nonlinear Interaction Processes in Extreme Waves Dynamics*. Thèse de doctorat, Univ. of Firenze, 2001.
- [19] C. BRANDINI et S. T. GRILLI. Modeling of freak wave generation in a 3D-NWT. Dans *Proc. 11th Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, volume III, pages 124–131, Stavanger, Norway, 2001.
- [20] C. CANUTO, M.Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI et T.A. ZANG. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer, springer series in comp. phys. édition, 1986.
- [21] A.-L. CAUCHY. Mémoire sur la théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. *Mém. Présentés Divers Savans Acad. R. Sci. Inst. France*, I:3–312, 1827. Prix Acad. R. Sci., concours de 1815 et de 1816.
- [22] G. CHEN, C. KHARIF, S. ZALESKI et J. LI. Two-dimensional Navier-Stokes simulation of breaking waves. *Physics and Fluids*, 111:121–133, 1999.
- [23] M.J. CHERN, A.G.L. BORTHWICK et R. Eatock TAYLOR. A pseudospectral σ transformation model of 2D nonlinear waves. *J. Fluids and Struct.*, 13:607–630, 1999.
- [24] M.J. CHERN, A.G.L. BORTHWICK et R. Eatock TAYLOR. Simulation of non-linear free surface motions in a cylindrical domain using a Chebyshev-Fourier spectral collocation method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 36(4):465–496, 2001.
- [25] V.H. CHU et C.C. MEI. On slowly-varying Stokes waves. *J. Fluid Mech.*, 41:873–887, 1970.
- [26] D. CLAMOND, D. FRUCTUS, J. GRUE et Ø. KRISTIANSEN. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part II: Generation and absorption. *J. Comp. Phys.*, 205:686–705, 2005.
- [27] D. CLAMOND et J. GRUE. A fast method for fully nonlinear water-wave computations. *J. Fluid Mech.*, 447:337–355, 2001.
- [28] G.F. CLAUSS. Dramas of the sea: episodic waves and their impact on offshore structures. *Appl. Ocean Res.*, 24:147–161, 2002.
- [29] W. CRAIG et C. SULEM. Numerical simulation of gravity waves. *J. Comp. Phys.*, 108:73–83, 1993.
- [30] J.-B. DEUFF. *Extrapolation au réel des mesures de pression obtenues sur des cuves modèle réduit*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.
- [31] I. I. DIDENKULOVA, A. V. SLUNYAEV, E. N. PELINOVSKY et C. KHARIF. Freak waves in 2005. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 6:1007–1015, 2006.
- [32] D.G. DOMMERMUTH. The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme. *Wave Motion*, 32:307–317, 2000.
- [33] D.G. DOMMERMUTH et D.K.P. YUE. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 184:267 – 288, 1987.
- [34] M. DORING. *Développement d'une méthode SPH pour les applications en hydrodynamique à surface libre*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2005.
- [35] G. DUCROZET, F. BONNEFOY, D. LE TOUZÉ et P. FERRANT. Development of a fully nonlinear water wave simulator based on Higher Order Spectral theory. Dans *Proc. 20th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Longyearbøen, Norway, juin 2005.

-
- [36] G. DUCROZET, F. BONNEFOY, D. LE TOUZÉ et P. FERRANT. Implementation and Validation of Nonlinear Wave Maker Models in a HOS Numerical Wave Tank. Dans *Proc. 16th Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, San Francisco, USA, juin 2006.
- [37] G. DUCROZET, F. BONNEFOY, D. LE TOUZÉ, P. ROUX DE REILHAC, C. RETZLER, J.M. ROUSSET et P. FERRANT. Experimental and Numerical Comparative Investigation of Pressure Fields Under Steep 2D Waves. Dans *Proc. 25th Int. Conf. on Offshore Mech. and Arctic Engng.*, Hamburg, Allemagne, 2006.
- [38] G. DUCROZET, F. BONNEFOY, D. LE TOUZÉ et P. FERRANT. Implementation and Validation of Nonlinear Wave Maker Models in a HOS Numerical Wave Tank. *Int. J. Offshore and Polar Engng.*, 16:161–167.
- [39] G. DUCROZET, F. BONNEFOY, D. LE TOUZÉ et P. FERRANT. 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 7:109–122, 2007.
- [40] K. DYSTHE, H. SOCQUET-JUGLARD, K. TRULSEN, H. E. KROGSTAD et J. LIU. “Freak” waves and large-scale simulations of surface gravity waves. Dans *Proc. 14th ‘Aha Huli’ a Hawaiian Winter Workshop*, Honolulu, Hawaii, Janvier 2005. Disponible à <http://www.soest.hawaii.edu/PubServices/2005pdfs/TOC2005.html>.
- [41] K. B. DYSTHE. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves. *Proc. R. Soc. Lond.*, 369:105–114, 1979.
- [42] K.B. DYSTHE, K. TRULSEN, H.E. KROGSTAD et H. SOCQUET-JUGLARD. Evolution of a narrow-band spectrum of random surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 478:1–10, 2003.
- [43] J.D. FENTON et M.M. RIENECKER. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: application to solitary-wave interactions. *J. Fluid Mech.*, 118:411–443, 1982.
- [44] P. FERRANT. « Tenue à la mer ». Cours ECN, option Hydrodynamique et Génie Océanique.
- [45] P. FERRANT. Simulation of strongly-nonlinear wave generation and wave-body interaction using a 3D MEL model. Dans *Proc. 21st ONR Symp on Naval Hydrodynamics*, pages 93–109, Trondheim, Norvège, 1996.
- [46] P. FERRANT. Fully non-linear interactions of long-crested wave packets with a three-dimensional body. Dans *Proc. 22nd ONR Symposium on Naval Hydrodynamics*, pages 403–415, Washington, USA, 1998.
- [47] P. FERRANT, L. GENTAZ, B. ALESSANDRINI et D. LE TOUZÉ. A potential/RANSE approach for regular water wave diffraction about 2D structures. *Ship Technology Research*, 50(4), 2003.
- [48] C. FOCESATO et F. DIAS. A fast method for nonlinear three-dimensional free-surface waves. *Proc. R. Soc. Lond.*, 462:2715–2735, 2006.
- [49] C. FOCESATO, S. GRILLI et F. DIAS. Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing. *Wave Motion*, 44:395–416, 2007.
- [50] B. FORNBERG. *A practical guide to pseudospectral methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press,, 1995.
- [51] G.Z. FORRISTALL. On the statistical distribution of wave heights in a storm. *J. Geophysical Res.*, 85(C5):2353–2358, 1978.
- [52] D. FRUCTUS, D. CLAMOND, J. GRUE et Ø. KRISTIANSEN. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part I: Free space problems. *J. Comp. Phys.*, 205:665–685, 2005.

- [53] D. R. FUHRMAN et H. B. BINGHAM. Numerical solutions of fully non-linear and highly dispersive Boussinesq equations in two horizontal dimensions. *Int. J. Num. Methods Fluids*, 44:231–255, 2004.
- [54] D.R. FUHRMAN et P.A. MADSEN. Numerical simulation of extreme events from focused directionally spread wavefields. Dans *Proc. 30th Intl. Conf. Coastal Engng.*, San Diego, California, septembre 2006. (in press).
- [55] L. GENTAZ. *Une approche de la diffraction-radiation bidimensionnelle en fluide visqueux : résolution des équations de Navier-Stokes en présence d'une surface libre*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 1995.
- [56] J.-C. GILLOTEAUX. *Simulation de grands mouvements d'un corps flottant en fluide parfait. Application à la récupération de l'énergie des vagues*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.
- [57] J.C. GILLOTEAUX, A. BABARIT, G. DUCROZET, M. DURAND et A.H. CLÉMENT. A Non-Linear Potential Model to Predict Large-Amplitudes Motions: Application to the SEAREV Wave Energy Converter. Dans *Proc. 26th Int. Conf. on Offshore Mech. and Arctic Engng.*, San Diego, USA, 2007.
- [58] S. GRILLI, G. GILBERT, P. LUBIN, S. VINCENT, D. ASTRUC, D. LEGENDRE, M. DUVAL, O. KIMMOUN, H. BRANGER, D. DEVRARD, P. FRAUNNIÉ et S. ABADIE. Numerical Modelling and Experiments for Solitary Wave Shoaling and Breaking over a Sloping Beach. Dans *Proc. 14th Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, Toulon, France, May 2004.
- [59] S. GRILLI, P. GUYENNE et F. DIAS. A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom. *Int. J. Num. Methods Fluids*, 35:829–867, 2001.
- [60] O. GROMSTAD et K. TRULSEN. Influence of crest and group length on the occurrence of freak waves. *J. Fluid Mech.*, 582:463–472, 2007.
- [61] J. GRUE. Nonlinear wave-body interaction by a formulation in spectral space. Dans *Proc. 22nd Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Plitvice, Croatie, 2007.
- [62] C. GUEDES SOARES, Z. CHERNEVA et E.M. Ant AO. Characteristics of Abnormal Waves in North Sea Storm Sea States. *Appl. Ocean Res.*, 25:337–344, 2003.
- [63] C. GUEDES SOARES, Z. CHERNEVA et E.M. Ant AO. Abnormal Waves during Hurricane Camille. *J. Geophys. Res.*, 109(C08008):1–7, 2004.
- [64] P.-M. GUILCHER. *Simulation des interactions houle - structure par une méthode de couplage Spectral/SPH*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007. en cours.
- [65] P.-M. GUILCHER, G. DUCROZET, M. DORING, B. ALESSANDRINI et P. FERRANT. Numerical Simulation of Wave-Body Interactions Using a Modified SPH Solver. Dans *Proc. 16th Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, San Francisco, USA, juin 2006.
- [66] P. GUYENNE et D. P. NICHOLLS. Numerical simulation of solitary waves on plane slopes. *Math. and Comp. in Simulation*, 69:269–281, 2005.
- [67] P. GUYENNE et D. P. NICHOLLS. A High-Order Spectral Method For Nonlinear Water Waves Over Moving Bottom Topography. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2007. à paraître.
- [68] J.A. HAMILTON et R.W. YEUNG. Viscous-Inviscid Matching for Surface-Piercing Wave-Body Interactions Problems. Dans *Proc. 18th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, France, 2003.
- [69] K. HASSELMANN. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.*, 12:481–500, 1962.

-
- [70] S. HAVER. On the prediction of extreme wave crest heights. Dans *7th Int. Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting*, Banff, Canada, octobre 2002.
- [71] S. HAVER. A possible freak wave event measured at the Draupner Jacket January 1 1995. Dans *Proc. of Rogue Waves 2004*, Brest, France, 2004. disponible à <http://www.ifremer.fr/web-com/stw2004/rw/>.
- [72] S. HAVER, K.J. EIK et T.S. MELING. On the prediction of wave crest height extremes. Rapport Technique, Statoil, 2002.
- [73] ICMS. *Workshop on Rogue Waves*, Edinburgh, Scotland, 2005. articles disponible sur : <http://www.icms.org.uk/archive/meetings/2005/roguewaves/index.html>.
- [74] P.A.E.M. JANSSEN. Nonlinear four-wave interactions and freak waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 33:863–884, 2003.
- [75] T. B. JOHANNESSEN et C. SWAN. On the Nonlinear Dynamics of Wave Groups Produced by the Focusing of Surface-Water Waves. Dans *Proc. Math., Phys. and Engng. Sciences*, volume 459, pages 1021–1052, 2003.
- [76] C. KHARIF et E. PELINOVSKY. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon. *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 22:603–634, 2003.
- [77] C.H. KIM, A.H. CLÉMENT et K. TANIZAWA. Recent research and development of Numerical Wave Tanks - A Review. *Int. J. Offshore Polar Engng.*, 9(4):241–256, décembre 1999.
- [78] H.E. KROGSTAD, J. LIU, H. SOCQUET-JUGLARD, K.B. DYSTHE et K. TRULSEN. Spatial extreme value analysis of nonlinear simulations of random surface waves. Dans *Proc. 23rd Int. Conf. on Offshore Mech. and Arctic Engng.*, 2004.
- [79] H.C. KU et D. HATZIAVRAMIDIS. Solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equations by Chebishev expansion methods. *Computer & Fluids*, 13:99–113, 1985.
- [80] D. LE TOUZÉ. *Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d'écoulements à surface libre instationnaires*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2003.
- [81] M.J. LIGHTHILL. Contributions to the theory of waves in non-linear dispersive system. *J. Inst. Math. Appl.*, 1:269–306, 1965.
- [82] M.S. LONGUET-HIGGINS. On the statistical distribution of the Heights of Sea Waves. *J. Marine Res.*, 11(3):245–266, 1952.
- [83] M.S. LONGUET-HIGGINS. Resonant interactions between two trains of gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 12:321–332, 1962.
- [84] É. LUNÉVILLE. Simulation de la houle par méthode de décomposition modale. Dans *Compte-Rendu des Quatrièmes Journées de l'Hydrodynamique*, pages 417–430, Nantes, France, mars 1993.
- [85] R. LUQUET. *Simulation numérique de l'écoulement visqueux autour d'un navire soumis à une houle quelconque*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2007.
- [86] R. LUQUET, G. DUCROZET, L. GENTAZ, P. FERRANT et B. ALESSANDRINI. Applications of the SWENSE Method to seakeeping simulations in irregular waves. Dans *Proc of the 9th Int. Conf. on Num. Ship Hydro.*, Ann Arbor, Michigan, 2007.
- [87] R. LUQUET, P. FERRANT, L. GENTAZ, B. ALESSANDRINI et G. DUCROZET. Naval and offshore applications of an efficient potential / RANSE solution scheme for wave / body interactions. Dans *Proc of the 7th Int. Conf. on Hydro.*, Ile d'Ischia, Italie, 2006.

- [88] Q.W. MA, G.X. WU et R. Eatock TAYLOR. Finite element simulation of fully non-linear interaction between vertical cylinders and steep waves - part 1: methodology and numerical procedure. *Int. J. Num. Methods Fluids*, 36:265–285, 2001.
- [89] Q.W. MA, G.X. WU et R. Eatock TAYLOR. Finite element simulation of fully non-linear interaction between vertical cylinders and steep waves, Part 2: numerical results and validation. *Int. J. Num. Methods Fluids*, 36:287–308, 2001.
- [90] P. A. MADSEN, H. B. BINGHAM et H. LIU. A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water. *J. Fluid Mech.*, 462:1–30, 2002.
- [91] C.C. MEI, M. STIASSNIE et D. K.-P. YUE. *Theory and applications of ocean surface waves, Part 2: Nonlinear aspects*, Chapitre Numerical Simulation of Nonlinear Wave Dynamics. World Scientific, 2005.
- [92] B. MOLIN. *Hydrodynamique des structures offshore*. Editions Technip, 2002.
- [93] N. MORI et T. YASUDA. Maximum Wave Height Distributions of Nonlinear Narrow Banded Random Waves. Dans *Proc. 10th Int. Symp. on Offshore and Polar Engng.*, Seattle, USA, juin 2000.
- [94] N. MORI et T. YASUDA. A weakly non-gaussian model of wave-height distribution for random wave train. *Ocean Engng.*, 29:1219–1231, 2002.
- [95] R. NERZIC et M. PREVOSTO. A Weibull-Stokes Model for the Distribution of Maximum Wave and Crest Heights. *Int. J. Offshore and Polar Engng.*, 8(2), juin 1998.
- [96] D.P. NICHOLLS et F. REITICH. Stability of high-order perturbative methods for the computation of Dirichlet-Neumann Operators. *J. Comp. Phys.*, 170:276–298, 2001.
- [97] G. OGER. *Aspects théoriques de la méthode SPH et applications à l'hydrodynamique à surface libre*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2006.
- [98] M. OLAGNON et G.A. ATHANASSOULIS, éditeurs. *Rogue Waves*, Brest, France, 2000. IFREMER. articles disponible sur : <http://www.ifremer.fr/metocean/conferences/wk.htm>.
- [99] M. OLAGNON et M. PREVOSTO, éditeurs. *Rogue Waves*, Brest, France, 2004. IFREMER. articles disponible sur : <http://www.ifremer.fr/web-com/stw2004/rw/>.
- [100] M. ONORATO, A. R. OSBORNE et M. SERIO. Extreme wave events in directional, random oceanic sea states. *Physics of Fluids*, 14:L25–L28, 2002.
- [101] J. C. PARK, M. H. KIM, H. MIYATA et H. H. CHUN. Fully nonlinear numerical wave tank (NWT) simulations and wave run-up prediction around 3-D structures. *Ocean Engng.*, 30(15):1969–1996, 2003.
- [102] N.A. PHILLIPS. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteorology*, 14:184–185, 1957.
- [103] O.M. PHILLIPS. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions. *J. Fluid Mech.*, 9:193–217, 1960.
- [104] K. PODGÓRSKI, I. RYCHLIK et U.E.B. MACHADO. Exact distributions for apparent waves in irregular seas. *Ocean Engng.*, 2000.
- [105] S.D. POISSON. Mémoire sur la théorie des ondes. *Mém. Acad. R. Sci. Inst. France*, 1:70–186, 1818. 2nd Ser.
- [106] M.M. RIENECKER et J.D. FENTON. A Fourier approximation method for steady water waves. *J. Fluid Mech.*, 104:119–137, 1981.

-
- [107] H. A. SCHÄFFER. On the Dirichlet-Neumann Operator for Nonlinear Water Waves. Dans *Proc. 20th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Longyearbøen, Norway, juin 2005.
- [108] H. A. SCHÄFFER. Comparison of Dirichlet-Neumann operator expansions for nonlinear surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 2007.
- [109] C. SKANDRANI, C. KHARIF et J. POITEVIN. Nonlinear evolution of water surface waves: the frequency down-shift phenomenon. *Contemporary Mathematics*, 200:157–171, 1996.
- [110] R.A. SMITH. An operator expansion formalism for nonlinear surface waves over variable depth. *J. Fluid Mech.*, 363:333–347, 1998.
- [111] H. SOCQUET-JUGLARD. *Spectral evolution and probability distributions of surface ocean gravity waves and extreme waves*. Thèse de doctorat, University of Bergen, 2005. available at <https://bora.uib.no/handle/1956/1103>.
- [112] H. SOCQUET-JUGLARD, K. DYSTHE, K. TRULSEN, H. E. KROGSTAD et J. LIU. Probability distributions of surface gravity waves during spectral changes. *J. Fluid Mech.*, 542:195–216, 2005.
- [113] P. STANSELL, J. WOLFRAMB et S. ZACHARY. Horizontal asymmetry and steepness distributions for wind-driven ocean waves from severe storms. *Appl. Ocean Res.*, 25:137–155, 2003.
- [114] Y. STASSEN. *Simulation numérique d'un canal à houle bidimensionnel au troisième ordre d'approximation par une méthode intégrale*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 1999.
- [115] M. STIASSNIE. Note on the modified nonlinear Schrödinger equation for deep water waves. *Wave Motion*, 6:431–433, 1984.
- [116] M. STIASSNIE et L. SHEMER. On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 143:47–67, 1984.
- [117] G.G. STOKES. On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 8:441–455, 1849. Math. Phys. Pap. 1: 197-229.
- [118] M. TANAKA. A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation. *Fluid Dyn. Res.*, 28:41–60, 2001.
- [119] M. TANAKA. Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations. *J. Fluid Mech.*, 444:199–221, 2001.
- [120] M. Aziz TAYFUN. Narrow-band nonlinear sea waves. *J. Geophysical Res.*, pages 1548–1552, 1980.
- [121] K. TRULSEN. Simulating the spatial evolution of a measured time series of a freak wave. Dans *Proc. of Rogue Waves 2000*, pages 265–273, Brest, France, 2000.
- [122] K. TRULSEN et K. B. DYSTHE. A modified nonlinear Schrödinger equation for broader bandwidth gravity waves on deep water. *Wave Motion*, 24:281–289, 1996.
- [123] K. TRULSEN, I. KLIAKHANDLER, K.B. DYSTHE et M. G. VELARDE. On weakly nonlinear modulation of waves on deep water. *Phys. Fluids*, 10:2432–2437, 2000.
- [124] M. S. TURNBULL, A. G. L. BORTHWICK et R. EATOCK TAYLOR. Numerical wave tank based on a σ -transformed finite element inviscid flow solver. *Int. J. Num. Methods Fluids*, 42:641–663, 2003.
- [125] E.M. VIJFVINKEL. Focused wave groups on deep and shallow water. Master's thesis, University of Groningen, The Netherlands, 1996.

- [126] T. VINJE. The Statistical Distribution of Wave Heights in a Random Seaway. *Appl. Ocean Res.*, 11(3), 1989.
- [127] J.V. WEHAUSEN. The wave resistance of ships. *Advances in Applied Mechanics*, 13:93–245, 1973.
- [128] B.J. WEST, K.A. BRUECKNER, R.S. JANDA, M. MILDER et R.L. MILTON. A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.*, 92:11803 – 11824, 1987.
- [129] G.X. WU, Q.W. MA et R. Eatock TAYLOR. Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method. *Appl. Ocean Res.*, 20:337–355, 1998.
- [130] Y. XING-KAEDING. *Unified Approach to Ship Seakeeping and Maneuvering by a RANSE method*. Thèse de doctorat, Université d’Hamburg, 2006.
- [131] H. C. YUEN et B. M. LAKE. Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves. *Advances in App. Mech.*, 22, 1982.
- [132] H.C. YUEN et B.M. LAKE. Nonlinear deep water waves: Theory and experiment. *Phys. Fluids*, 18:956–960, 1975.
- [133] V. ZAKHAROV. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, pages 190–194, 1968.

Résumé

L'analyse des processus non-linéaires de génération et de propagation de la houle a constitué le cadre de cette thèse. Afin d'améliorer la compréhension de ces phénomènes, une méthode numérique dite High-Order Spectral (HOS), résolvant le problème de façon non-linéaire, a été développée. Cette méthode, avec une formulation surfacique et résolue de manière spectrale, associe précision et efficacité.

Un traitement original de la génération de houle non-linéaire est proposé. Il permet l'accès à des simulations de champs de vagues tridimensionnels complexes, fortement cambrés, dans un bassin de houle. Diverses comparaisons avec des expériences menées dans le bassin du Laboratoire de *Mécanique des Fluides* de l'ECN sont présentées.

Des simulations océaniques, en milieu ouvert, sont également proposées. Un intérêt particulier est porté à l'étude de l'apparition des vagues scélérates au sein de l'océan. L'importance des effets non-linéaires est pointée ainsi que l'aptitude de la méthode à modéliser de tels phénomènes. Des comparaisons avec les méthodes classiquement employées dans ce genre de problématique indiquent l'intérêt de l'approche utilisée ici.

La résolution du problème de tenue à la mer est également envisagée. L'utilisation de la méthode HOS dans les codes couplés, développés au *Laboratoire de Mécanique des Fluides* (potentiel, RANS, SPH), est envisagée. Elle permettra la description précise de la houle incidente ; le couplage est mis en place et validé sur un certain nombre de cas d'application.

Mots-clés : Mécanique des fluides, Hydrodynamique, Ondes de gravité, Houle, Méthode spectrale, High-Order Spectral, Non-linéaire, Génération, Propagation, Bassin de houle, Vagues scélérates, Couplage

MODELISATION OF NONLINEAR PROCESSES IN GENERATION AND PROPAGATION OF SEA STATES WITH A SPECTRAL APPROACH

Abstract

This thesis deals with the analysis of the nonlinear process of generation and propagation of gravity waves. A fully non-linear High-Order Spectral (HOS) model has been developed to improve understanding of these phenomena. This is an accurate and efficient method thanks to the surfacic formulation coupled with the spectral resolution.

An original treatment of the wave generation is introduced. It allows the simulation in a wave basin of complex 3D wave fields, which could be very steep. Several comparisons with experiments conducted in the ECN wave tank are presented.

Then, oceanic simulations in an open domain are proposed. A particular interest is put on the occurrence of freak waves in real seas. The significance of nonlinear effects as well as the abilities of the model to correctly describe these phenomena are pointed out. Comparisons with methods which are typically employed for this kind of simulation denote the relevance of the HOS method used here.

Finally, the problem of behaviour at sea is discussed. The use of HOS method in coupled models developed in *Laboratoire de Mécanique des Fluides* is proposed. This will describe the incident wave field in a precise and efficient way. This coupling is validated on different test-cases.

Keywords : Fluid mechanics, Hydrodynamic, Gravity waves, Spectral method, High-Order Spectral, Nonlinear, Generation, Propagation, Numerical Wave Tank, Freak waves, Rogue waves, Coupling