HAL
open science

Quasi-morphismes et difféomorphismes hamiltoniens

Pierre Py

To cite this version:

Pierre Py. Quasi-morphismes et difféomorphismes hamiltoniens. Mathématiques [math]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2008. Français. NNT : . tel-00263607

HAL Id: tel-00263607

https://theses.hal.science/tel-00263607

Submitted on 12 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École normale supérieure de Lyon
Unité de mathématiques pures et appliquées

THÈSE

en vue d'obtenir le grade de docteur de l'Université de Lyon – École Normale Supérieure de Lyon spécialité mathématiques, École doctorale de mathématiques et informatique fondamentales ; présentée et soutenue publiquement par

Pierre PY

le 4 février 2008

Quasi-morphismes et difféomorphismes hamiltoniens

Thèse encadrée par	M. Étienne Ghys
soutenue après avis de	M. Pierre Pansu
	M. Leonid Polterovich
	M. Claude Viterbo

devant la commission d'examen formée de

M. Étienne Ghys	*directeur*
M. Patrice Le Calvez	*membre*
M. Nicolas Monod	*membre*
M. Pierre Pansu	*membre, rapporteur*
M. Leonid Polterovich	*membre, rapporteur*
M. Claude Viterbo	*membre, rapporteur*

Numéro d'ordre : 452 *Numéro attribué par la bibliothèque : 07ENSL0 452*

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ici chaleureusement Étienne Ghys. Depuis mon arrivée à l'ENS Lyon en 2002, et jusqu'à la fin de ma thèse, j'ai eu la chance de pouvoir discuter avec lui de sujets mathématiques variés. Il a encadré mes recherches avec enthousiasme, m'a encouragé à m'intéresser à des thèmes multiples et m'a permis de (commencer à) apprendre de belles mathématiques. Je le remercie pour tout cela.

J'aimerais également remercier vivement Leonid Polterovich, qui s'est intéressé très tôt à mes travaux. J'ai beaucoup apprécié toutes les conversations mathématiques que nous avons eues, de Rio de Janeiro en 2005 à Chicago en 2007. Je tiens également à le remercier pour son accueil à Tel-Aviv au printemps 2007, et enfin pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail.

Je voudrais aussi remercier Pierre Pansu et Claude Viterbo qui m'ont tous les deux fait un grand honneur en acceptant d'écrire un rapport sur mon travail.

Au cours de ma thèse j'ai pu discuter à de nombreuses reprises avec Patrice Le Calvez et Nicolas Monod, de vecteurs de rotation comme de cohomologie bornée. J'apprécie leur présence dans mon jury.

J'aimerais remercier également toutes les personnes avec qui j'ai pu discuter de mathématiques durant ma thèse, notamment Emmanuel Giroux, qui m'a patiemment écouté depuis mon arrivée à l'ENS Lyon en 2002, Bruno Sévennec, pour sa patience infinie et toutes ses connaissances, Jean-Claude Sikorav pour son enthousiasme inimitable, et également Maxime Bourrigan, François Béguin, Bertrand Deroin, Albert Fathi, Vincent Humilière, Victor Kleptsyn, Benoît Kloeckner, Frédéric Le Roux, Patrick Massot, Emmanuel Opshtein, Ana Rechtman et Jean-Yves Welschinger.

Je remercie aussi tous les membres, passés ou présents, de l'UMPA, où l'ambiance est si agréable : Nalini Anantharaman, Aurélien Alvarez, Thierry Barbot, François Bolley, Pierre Bousquet, Claude Danthony, Olivier Druet, Hélène Eynard, Damien Gaboriau, Antonin Guilloux, Alice Guionnet, Paul Laurain, Edouard Maurel-Ségala, Julien Michel, Tomasz Miernowski, Mikael Pichot, Sylvain Porret-Blanc, Cédric Villani, Maxime Zavidovique.

Un grand merci également à Maxime Bourrigan, Hélène Eynard et Ana Rechtman qui ont chacun relu attentivement cette thèse.

Je souhaite encore remercier Yann Ollivier, pour toutes les discussions animées que nous avons eues ensemble (et aussi pour celles que nous n'avons pas eues), Marcelo Viana pour

son accueil chaleureux à Rio de Janeiro et pour ses explications mathématiques limpides, et Abdelghani Zeghib pour ses encouragements décisifs dans des périodes difficiles.

Pour leur aide administrative et informatique, merci à Hélène Schoch, Magalie Le Borgne, Virginia Goncalves, Hervé Gilquin et Gérard Lasseur.

Je remercie l'Agence Nationale de la Recherche pour son soutien à travers le projet "Symplexe".

Merci aux machines à café de l'UMPA pour leur présence quotidienne.

Enfin, merci à tous ceux qui ont supporté les débordements de mon humeur au quotidien : mes parents, Ana, Aurélien, Benoît Le Fou, Emilie, Glen Gould, Isabelle, Jérémie, Jibé, Lep, Nicolas, Marcos, Mélanie, Nelly, Thomas Bernhard, la table du 59 rue Sébastien Gryphe et les escrimeurs de la rue Crillon.

Table des matières

Introduction **vii**

1 Quasi-morphismes de Calabi **1**

1.1 Préliminaires 4

1.1.1 Diverses définitions de l'invariant de Calabi 4

1.1.2 Extension du groupe des difféomorphismes hamiltoniens 5

1.1.3 Classe d'Euler bornée 7

1.2 Cas des surfaces hyperboliques 13

1.2.1 Construction du quasi-morphisme 13

1.2.2 Graphe de Reeb 20

1.2.3 Calcul sur des hamiltoniens autonomes 23

1.3 Cas du tore 30

1.3.1 Interprétation topologique de l'invariant de Calabi 31

1.3.2 Quasi-morphismes de Gambaudo et Ghys 33

1.3.3 Hamiltoniens autonomes et graphe de Reeb 37

2 Un quasi-morphisme pour les variétés symplectiques monotones **45**

2.1 Nombre de rotation symplectique 47

2.1.1 Indice de Maslov 47

2.1.2 Quasi-morphisme pour les difféomorphismes de la boule 50

2.2 Construction du quasi-morphisme $\mathfrak{S}$ 52

2.3 Invariant de Polterovich 56

2.3.1 Construction 56

2.3.2 Un exemple 59

2.4 Hamiltoniens autonomes sur la sphère 63

3 Remarques autour de la conjecture de Zimmer 69

3.1 Préliminaires 70

3.1.1 Le programme de Zimmer 70

3.1.2 Actions sur les surfaces : les résultats connus 71

3.2 Théorèmes d'annulation et conséquences 76

3.2.1 Cohomologie à valeurs dans une représentation unitaire 76

3.2.2 Conséquences dynamiques 82

3.3 Cas des flots autonomes 87

3.3.1 Sur la sphère 88

3.3.2 Sur le tore 94

3.3.3 Sur les surfaces de genre supérieur 96

4 Quelques plats pour la métrique de Hofer 103

4.1 Distance de Hofer 104

4.2 Inégalité entre énergie et capacité 106

4.3 Cas des surfaces : les résultats de Polterovich 108

4.4 Construction des plats 110

Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons à la construction de différents invariants, de nature algébrique et dynamique, définis sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface compacte orientée. Ces invariants sont des *quasi-morphismes* et sont reliés à la théorie de la cohomologie bornée, largement étudiée par Gromov [61]. Occasionnellement, nous évoquerons également les groupes de difféomorphismes hamiltoniens de certaines variétés symplectiques de dimension supérieure. Avant d'exposer nos résultats, nous consacrons la première partie de cette introduction à rappeler les définitions des différentes notions que nous venons d'évoquer, le contexte dans lequel elles apparaissent, et à établir quelques résultats élémentaires classiques.

Quasi-morphismes, longueur stable et cohomologie bornée.

Les textes [8, 10, 21, 54, 61, 85] constituent de bonnes références pour ce paragraphe.

Un *quasi-morphisme* sur un groupe Γ est une application $\phi : \Gamma \to \mathbf{R}$ telle qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant :

$$|\phi(xy) - \phi(x) - \phi(y)| \leq C,$$

pour tous x, y de Γ. Nous dirons que ϕ est homogène s'il vérifie en outre $\phi(x^n) = n\phi(x)$ ($x \in \Gamma$, $n \in \mathbf{Z}$). Bien sûr les homomorphismes de Γ dans $\mathbf{R}$ ainsi que les fonctions bornées sur Γ fournissent des exemples (triviaux) de quasi-morphismes. Nous verrons d'ailleurs que pour certaines classes de groupes (les groupes moyennables par exemple), les sommes de fonctions bornées et d'homomorphismes sont les seuls exemples de quasi-morphismes. Au contraire, d'autres classes de groupes (les groupes libres par exemple) admettent de nombreux quasi-morphismes non triviaux.

Si $\phi : \Gamma \to \mathbf{R}$ est un quasi-morphisme quelconque et $x \in \Gamma$, la suite $a_n = \phi(x^n)$ vérifie :

$$|a_{n+m} - a_n - a_m| \leq C.$$

Ceci implique, d'après un lemme classique, que la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

existe. Nous noterons $\phi_h(x)$ cette limite. Nous avons bien sûr l'inégalité :

$$|a_n - a_1| \leq (n-1)C,$$

d'où l'on déduit : $|\frac{a_n}{n} - a_1| \leq C$. En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, nous obtenons que l'application $\phi - \phi_h$ est bornée par C. Ceci implique que ϕ_h est également un quasi-morphisme. De plus, ϕ_h est homogène. Ecrivant $\phi = (\phi - \phi_h) + \phi_h$, on constate que tout quasi-morphisme s'écrit comme somme d'un quasi-morphisme homogène et d'une fonction bornée. Puisqu'une fonction homogène et bornée est identiquement nulle, cette écriture est unique.

Nous noterons $QM(\Gamma, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des quasi-morphismes sur Γ et $QM_h(\Gamma, \mathbf{R})$ le sous-espace formé des quasi-morphismes homogènes. Les remarques qui précèdent assurent que l'espace quotient

$$QM(\Gamma, \mathbf{R}) / \left(\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R}) \oplus \ell^\infty(\Gamma, \mathbf{R})\right)$$

s'identifie à l'espace $QM_h(\Gamma, \mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R})$. Ici $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R})$ désigne l'espace des homomorphismes de Γ dans $\mathbf{R}$ et $\ell^\infty(\Gamma, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions bornées de Γ dans $\mathbf{R}$. Si $\phi : \Gamma \to \mathbf{R}$ est un quasi-morphisme, nous appellerons *défaut* de ϕ, noté $\delta(\phi)$, la quantité :

$$\sup_{x,y \in \Gamma} |\phi(xy) - \phi(x) - \phi(y)|.$$

Avant de donner des exemples de quasi-morphismes, nous mentionnons la notion de *longueur stable* et les liens entre quasi-morphismes et *cohomologie bornée*. Ces liens sont apparus dans le travail de Matsumoto et Morita [85] et ont été précisés par Bavard [8].

Considérons un groupe Γ. Si $\gamma \in [\Gamma, \Gamma]$ est un élément du premier groupe dérivé de Γ nous pouvons définir sa "longueur" $|\gamma|$ de la manière suivante : l'entier $|\gamma|$ est le plus petit entier n tel que γ s'écrive comme un produit de n commutateurs :

$$\gamma = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i],$$

où a_i, b_i sont dans Γ et $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ est le commutateur des éléments a_i et b_i.

Proposition 1 ([8, 87]) *Si $\phi : \Gamma \to \mathbf{R}$ est un quasi-morphisme homogène, nous avons :*

$$|\gamma| \geq \frac{|\phi(\gamma)|}{2\delta(\phi)}.$$

Preuve : nous commençons par observer que l'homogénéité de ϕ implique que ϕ est constant sur les classes de conjugaison de Γ. En effet, si x et y sont dans Γ, on peut écrire, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} \phi(xyx^{-1}) &= \tfrac{1}{n}\phi(xy^n x^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{n}\left(\phi(x) + \phi(y^n) + \phi(x^{-1}) + O(2\delta(\phi))\right). \end{aligned}$$

Pour cela nous avons appliqué deux fois l'inégalité apparaissant dans la définition d'un quasi-morphisme. Puisque ϕ est homogène, $\phi(x) + \phi(x^{-1}) = 0$ et nous avons :

$$\begin{aligned} \phi(xyx^{-1}) &= \tfrac{1}{n}\phi(y^n) + O(\tfrac{2\delta(\phi)}{n}) \\ &= \phi(y) + O(\tfrac{2\delta(\phi)}{n}). \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, on obtient bien $\phi(xyx^{-1}) = \phi(y)$. Le quasi-morphisme ϕ est donc constant sur les classes de conjugaison de Γ.

Maintenant, si $\gamma = [a, b]$ est un commutateur, on peut écrire : $\gamma = a \cdot ba^{-1}b^{-1}$, on a donc $\phi(\gamma) = \phi(a) + \phi(ba^{-1}b^{-1}) + O(\delta(\phi)) = O(\delta(\phi))$. Autrement dit :

$$|\phi(\gamma)| \leq \delta(\phi).$$

Si $\gamma = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$ est un produit de n commutateurs, nous avons :

$$|\phi(\gamma)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\phi([a_j, b_j])| + (n-1)\delta(\phi),$$

et donc, puisque chacun des termes apparaissant dans la somme ci-dessus est borné par $\delta(\phi)$:

$$|\phi(\gamma)| \leq (2n-1)\delta(\phi) \leq 2n\delta(\phi).$$

En prenant la borne inférieure de tous les entiers n tels que γ s'écrive comme un produit de n commutateurs, nous obtenons :

$$|\gamma| \geq \frac{|\phi(\gamma)|}{2\delta(\phi)}.$$

C'est le résultat souhaité. □

Puisque ϕ est homogène, la même proposition assure également que $|\gamma|_\infty \geq \frac{|\phi(\gamma)|}{2\delta(\phi)}$, où $|\gamma|_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{|\gamma^n|}{n}$ est la *norme stable* de γ. L'existence d'un quasi-morphisme homogène non trivial sur Γ assure donc que la norme stable

$$|\cdot|_\infty : [\Gamma, \Gamma] \to \mathbf{N}$$

n'est pas identiquement nulle. En particulier la fonction "longueur" $|\cdot| : [\Gamma, \Gamma] \to \mathbf{N}$ est non-bornée. Mentionnons que Bavard [8] a montré que la borne inférieure que nous venons d'établir est en quelque sorte optimale : la norme stable $|\gamma|_\infty$ d'un élément $\gamma \in [\Gamma, \Gamma]$ est égale à la quantité :

$$\sup_\phi \frac{|\phi(\gamma)|}{2\delta(\phi)}$$

où ϕ parcourt l'ensemble des quasi-morphismes homogènes non-triviaux (c'est-à-dire qui ne sont pas des homomorphismes) sur Γ.

Nous rappelons maintenant très brièvement le lien entre quasi-morphismes et cohomologie bornée. Le lecteur pourra se reporter au chapitre 3 pour plus de détails. Notons

que les racines de la théorie de la cohomologie bornée sont anciennes et présentes dans de nombreux travaux (voir [87, 112, 117] par exemple). Mais c'est l'article *Volume and bounded cohomology* [61] de Gromov qui a permis de placer ces travaux dans un cadre unifié et de donner son essor à la cohomologie bornée.

Considérons l'espace $Z^2(\Gamma, \mathbf{R})$ des 2-cocycles sur Γ à valeurs réelles, c'est-à-dire des applications

$$c : \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{R}$$

telles que

$$c(\gamma_1, \gamma_2) + c(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) = c(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3) + c(\gamma_2, \gamma_3).$$

Notons $Z_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ le sous-espace de $Z^2(\Gamma, \mathbf{R})$ formé par les applications qui sont bornées : $c \in Z_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ si et seulement si c est un cocycle et $\sup_{x,y\in\Gamma}|c(x, y)| < \infty$. Si $f : \Gamma \to \mathbf{R}$ est une fonction, nous noterons $\mathfrak{d}f$ son *cobord*. C'est la fonction sur $\Gamma \times \Gamma$ définie par l'équation suivante :

$$\mathfrak{d}f(x, y) = f(xy) - f(x) - f(y).$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que le cobord d'une fonction sur Γ est un cocycle. Nous noterons $B^2(\Gamma, \mathbf{R})$ l'espace des cobords d'applications de Γ dans $\mathbf{R}$ et $B_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ le sous-espace formé par les cobords d'applications bornées de Γ dans $\mathbf{R}$. Puisque le cobord d'une application bornée est lui-même borné, l'espace $B_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est contenu dans $Z_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. Le second groupe de cohomologie bornée de Γ, noté $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$, est le quotient de $Z_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ par $B_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$. Le second groupe de cohomologie usuelle de Γ, noté $H^2(\Gamma, \mathbf{R})$, est le quotient de $Z^2(\Gamma, \mathbf{R})$ par $B^2(\Gamma, \mathbf{R})$. On dispose bien sûr d'une application naturelle de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ dans $H^2(\Gamma, \mathbf{R})$, induite par l'inclusion de $Z_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ dans $Z^2(\Gamma, \mathbf{R})$. Elle consiste à "oublier" qu'un cocycle est borné.

Proposition 2 ([8, 13]) *Le noyau de l'application naturelle $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ s'identifie à l'espace $QM_h(\Gamma, \mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R})$ des quasi-morphismes homogènes sur Γ modulo les homomorphismes.*

Preuve : si ϕ est un quasi-morphisme homogène sur Γ, le 2-cocycle c_ϕ défini par

$$c_\phi(x, y) = \phi(xy) - \phi(x) - \phi(y)$$

est borné. Il définit une classe de cohomologie bornée $[c_\phi]$, invariante par l'ajout d'un homomorphisme à ϕ, et qui est triviale en cohomologie usuelle : c_ϕ est le cobord de l'application ϕ ! Nous avons donc construit une application

$$QM_h(\Gamma, \mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R}) \to \mathrm{Ker}\left(H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})\right),$$

qui associe à un quasi-morphisme homogène (défini modulo un homomorphisme) la classe de cohomologie représentée par son cobord. La classe $[c_\phi]$ est triviale précisément lorsqu'il existe une application **bornée** $u : \Gamma \to \mathbf{R}$ telle que

$$\phi(xy) - \phi(x) - \phi(y) = u(xy) - u(x) - u(y) \quad (x, y \in \Gamma).$$

La fonction u est alors la somme du quasi-morphisme homogène ϕ et de l'homomorphisme $u-\phi$, elle est donc homogène. Puisqu'elle est bornée, elle doit être identiquement nulle. Le quasi-morphisme ϕ est donc un homomorphisme et l'application ci-dessus est injective. Il n'est pas diffcile de s'assurer qu'elle est également surjective : une classe e est contenue dans le noyau $\mathrm{Ker}\left(H_b^2(\Gamma,\mathbf{R}) \to H^2(\Gamma,\mathbf{R})\right)$ exactement si elle est représentable par le cobord d'un quasi-morphisme quelconque $\phi : \Gamma \to \mathbf{R}$. Dans ce cas, le cobord de la partie homogène ϕ_h de ϕ représente également la classe e, qui se trouve donc dans l'image de l'application ci-dessus. □

Il est maintenant temps de donner quelques exemples de quasi-morphismes homogènes : nous commençons par rappeler la construction des quasi-morphismes de Brooks [21], qui furent parmi les premiers exemples de quasi-morphismes. Ils sont définis sur les groupes libres. Considérons par exemple le groupe libre $F(a,b)$ engendré par les deux lettres a et b. Choisissons un mot $w \in F(a,b)$. Nous allons lui associer un quasi-morphisme

$$\varphi_w : F(a,b) \to \mathbf{Z}.$$

Si $\gamma \in F(a,b)$ notons $\ell_w(\gamma)$ le plus grand entier n tel que l'on puisse écrire γ sous la forme :

$$\gamma = c_1 \cdot w \cdot c_2 \cdots c_n \cdot w \cdot c_{n+1}$$

où les c_i sont des éléments (éventuellement réduits à l'identité) de $F(a,b)$ et où l'écriture ci-dessus est réduite. On pose alors $\varphi_w(\gamma) = \ell_w(\gamma) - \ell_{w^{-1}}(\gamma)$. Bien sûr, si $w = a$ ou $w = b$, φ_w est un homomorphisme. L'application

$$\varphi_a \oplus \varphi_b : F(a,b) \to \mathbf{Z}^2$$

induit un isomorphisme entre le groupe $F(a,b)/[F(a,b),F(a,b)]$ et $\mathbf{Z}^2$. En considérant des mots w de longueur supérieure ou égale à 2, on construit beaucoup d'autres quasi-morphismes. Brooks a montré que la famille $(\varphi_w)_{w\in F(a,b)}$ engendre un espace de dimension infinie dans l'espace

$$QM_h(F(a,b),\mathbf{R})/\mathrm{Hom}(F(a,b),\mathbf{R}).$$

Ces constructions ont depuis été généralisées pour construire des quasi-morphismes sur les groupes de surfaces [22], les groupes hyperboliques [39], ainsi que les groupes modulaires des surfaces [14]. Dans ces trois cas l'espace $QM_h(\Gamma,\mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{R})$ est de dimension infinie.

Nous décrivons maintenant un second exemple de quasi-morphisme, défini non-plus sur un groupe discret, mais sur un groupe d'homéomorphismes. Considérons le groupe $\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ des homéomorphismes du cercle $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ préservant l'orientation. Son revêtement universel s'identifie au groupe $\widetilde{\mathrm{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1)$ des homéomorphismes croissants $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui commutent aux translations entières. Le *nombre de translation* est, à multiplication par une constante près, l'unique quasi-morphisme homogène défini sur le groupe $\widetilde{\mathrm{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1)$ (voir [10]). Rappelons sa construction. Fixons un point $x \in \mathbf{R}$ et considérons l'application $T_x : \widetilde{\mathrm{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1) \to \mathbf{R}$ définie par :

$$T_x(f) = f(x) - x.$$

Remarquons que l'on a $T_x(f \circ g) - T_x(f) - T_x(g) = T_{g(x)}(f) - T_x(f)$. Ainsi le lemme suivant assure que l'application T_x est un quasi-morphisme.

Lemme 1 *Pour tous réels x, y, et tout $f \in \widetilde{\text{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1)$, nous avons :*

$$|T_x(f) - T_y(f)| \leq 1.$$

Preuve : nous fixons donc deux réels x et y et un homéomorphisme $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, élément de $\widetilde{\text{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1)$. Il existe un entier relatif k tel que l'on ait :

$$x + k \leq y \leq x + k + 1.$$

Appliquons f à cette inégalité. Puisque f est croissante et commute aux translations entières, nous obtenons :

$$f(x) + k \leq f(y) \leq f(x) + k + 1.$$

Nous pouvons récrire les deux inégalités précédentes sous la forme :

$$\begin{array}{rcl} k \leq & y - x & \leq k + 1, \\ -k - 1 \leq & f(x) - f(y) & \leq -k. \end{array}$$

En sommant, nous obtenons :

$$-1 \leq (f(x) - x) - (f(y) - y) \leq 1.$$

C'est le résultat souhaité. □

Le lemme assure donc que T_x est un quasi-morphisme et que son homogénéisé ne dépend pas de $x \in \mathbf{R}$: toutes les applications $(T_y)_{y \in \mathbf{R}}$ sont à une distance uniformément bornée les unes des autres. Notons donc $\tau : \widetilde{\text{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1) \to \mathbf{R}$ le quasi-morphisme homogène associé. Nous avons, pour tout x de $\mathbf{R}$, pour tout $f \in \widetilde{\text{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1)$:

$$\tau(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^n(x) - x}{n}.$$

Nous retrouvons la définition classique du nombre de translation. Le nombre de rotation $r(f) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ d'un homéomorphisme $f \in \text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ est le nombre de translation, défini modulo 1, d'un relevé quelconque de f à $\mathbf{R}$. Il a été introduit par Poincaré.

Partant de la définition du nombre de rotation en termes de cohomologie bornée, Ghys [54] a construit un invariant (cohomologique) associé à tout groupe discret Γ agissant sur le cercle : la *classe d'Euler bornée*. Si $\rho : \Gamma \to \text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ est un homomorphisme, la classe d'Euler bornée $eu_b(\rho)$ associée à ρ est un élément du groupe $H_b^2(\Gamma, \mathbf{Z})$. Nous rappellerons sa définition au chapitre 1. Il a établi que cette classe de cohomologie bornée classifie à semi-conjugaison près les actions de Γ sur le cercle. L'annulation de la classe $eu_b(\rho)$ est par exemple équivalente à l'existence d'un point fixe pour l'action du groupe $\rho(\Gamma)$ sur le cercle (voir [54, 57]).

Nous allons maintenant voir que dans le cas où le groupe $\widetilde{\text{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1)$ est remplacé par le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface compacte Σ, on peut construire beaucoup de quasi-morphismes homogènes définis sur $\mathscr{G}_\Sigma$. Ces constructions sont dues notamment à Barge et Ghys [10], Entov et Polterovich [36], Gambaudo et Ghys [52] (voir également [12, 97]). Elles peuvent être vues comme de possibles généralisations du nombre de translation. Maintenant, si Γ est un groupe discret agissant sur Σ, nous pouvons tirer en arrière tous les quasi-morphismes définis sur le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ pour obtenir des quasi-morphismes sur Γ. On peut alors espérer, comme dans le cas des actions sur le cercle, que ces classes de cohomologie bornées "retiennent" une information dynamique concernant l'action de Γ sur la surface Σ. Cependant la situation est beaucoup plus complexe en dimension 2...

Difféomorphismes hamiltoniens des surfaces.

Pour plus de détails concernant les notions introduites dans ce paragraphe, le lecteur pourra consulter [5, 26, 45, 46, 52, 81, 86, 110].

Considérons une surface compacte Σ munie d'une forme d'aire ω. Nous commençons par rappeler la définition du groupe des *difféomorphismes hamiltoniens* de Σ, que nous noterons $\mathscr{G}_\Sigma$. C'est un sous-groupe distingué du groupe de tous les difféomorphismes de Σ préservant ω. De plus, il est contenu dans le groupe $\mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$ des difféomorphismes de Σ préservant l'aire et isotopes à l'identité.

Remarque. Il est équivalent de dire qu'un difféomorphisme préservant l'aire $f : \Sigma \to \Sigma$ est isotope à l'identité parmi les difféomorphismes préservant l'aire, ou bien est isotope à l'identité dans le groupe de tous les difféomorphismes de Σ. En effet l'inclusion du groupe des difféomorphismes de Σ préservant l'aire dans le groupe de tous les difféomorphismes préservant l'orientation est une équivalence d'homotopie. Ceci est une conséquence d'un théorème classique de Moser [90].

Une grande partie des concepts et des résultats que nous présentons maintenant se généralise au cas où la surface Σ est remplacée par une variété symplectique de dimension quelconque (V, ω) (voir [86]). Cependant, dans cette introduction, nous ne décrirons que le cas des surfaces.

Considérons une fonction $H : [0,1] \times \Sigma \to \mathbf{R}$. Nous noterons souvent $H_t(x) = H(t,x)$. La différentielle de la fonction H_t fournit une 1-forme (dépendant du temps)

$$-dH_t$$

sur la surface Σ. Puisque ω est une forme d'aire, il existe un champ de vecteurs dépendant du temps X_{H_t} sur Σ, tel que :

$$-dH_t = \iota_{X_{H_t}}\omega,$$

où le produit intérieur $\iota_{X_{H_t}}\omega$ est défini par $\iota_{X_{H_t}}\omega(u) = \omega(X_{H_t}, u)$, pour tout vecteur u tangent à Σ. Nous pouvons alors intégrer le champ de vecteurs dépendant du temps X_{H_t} en un chemin de difféomorphismes $(\varphi_H^t)_{t\in[0,1]}$ avec $\varphi_H^0 = \mathbb{1}$. Si $x \in \Sigma$, la courbe $(\varphi_H^t(x))$

est la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \varphi_H^0(x) = x \\ \frac{d}{dt}\varphi_H^t(x) = X_{H_t}(\varphi_H^t(x)). \end{cases}$$

L'isotopie (φ_H^t) est *l'isotopie hamiltonienne* engendrée par la fonction H. Un difféomorphisme de Σ est hamiltonien s'il est le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne :

$$\mathscr{G}_\Sigma = \{\varphi_H^1, (\varphi_H^t) \text{ est une isotopie hamiltonienne}\}.$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que $\mathscr{G}_\Sigma$ est un groupe : si (H_t) et (F_t) sont deux hamiltoniens sur Σ, l'isotopie

$$\varphi_H^t \circ \varphi_F^t$$

est engendrée par le hamiltonien $H_t + F_t \circ (\varphi_H^t)^{-1}$. De plus ce groupe est distingué dans le groupe de tous les difféomorphismes de Σ préservant l'aire. En effet, on vérifie aisément que si f est un difféomorphisme de Σ préservant l'aire, l'isotopie

$$f \circ \varphi_H^t \circ f^{-1}$$

est hamiltonienne, engendrée par le hamiltonien $(H_t \circ f^{-1})$.

Lorsque Σ est la sphère $\mathbf{S}^2$, le groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{S}^2}$ coïncide avec le groupe de tous les difféomorphismes préservant l'aire de $\mathbf{S}^2$. Lorsque le genre de Σ est non-nul, il existe un homomorphisme du groupe $\mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$ vers un groupe abélien, dont le noyau est le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$. Nous rappelons d'abord comment construire cet homomorphisme lorsque le genre de Σ est supérieur ou égal à 2. Dans ce cas on obtient un morphisme à valeurs dans le groupe $H^1(\Sigma, \mathbf{R})$.

Considérons une isotopie $(f_t)_{t\in[0,1]}$ issue de l'identité et préservant l'aire. Notons X_t le champ de vecteurs dépendant du temps qui engendre f_t. Il satisfait :

$$\frac{d}{dt} f_t(x) = X_t(f_t(x)).$$

L'identité $f_t^*\omega = \omega$ est équivalente au fait que la dérivée de Lie de ω par rapport au champ de vecteurs X_t est nulle :

$$L_{X_t}\omega = 0.$$

Puisque ω est fermée, ceci équivaut à dire que la 1-forme $\iota_{X_t}\omega$ est fermée. Nous pouvons alors associer à l'isotopie (f_t) la classe de cohomologie

$$\int_0^1 [\iota_{X_t}\omega] dt \in H^1(\Sigma, \mathbf{R}).$$

Lemme 2 *La classe de cohomologie $\int_0^1 [\iota_{X_t}\omega] dt$ ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de l'isotopie (f_t) dans le groupe* $\mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$.

Preuve : nous allons montrer que le morphisme de $\pi_1(\Sigma)$ vers $\mathbf{R}$ induit par la classe $\int_0^1 [\iota_{X_t}\omega]dt$ ne dépend que de la classe d'homotopie de (f_t). Puisque ce morphisme détermine la classe $\int_0^1 [\iota_{X_t}\omega]dt$, cela suffit à établir le lemme. Fixons donc une application $\gamma : \mathbf{S}^1 \to \Sigma$. Notons $\beta(s,t) = f_t(\gamma(s))$ $(t \in [0,1],\ s \in \mathbf{S}^1)$. Il n'est pas difficile de vérifier que l'on a :

$$\langle \int_0^1 [\iota_{X_t}\omega]dt, [\gamma]\rangle = \int_{\mathbf{S}^1\times[0,1]} \beta^*\omega.$$

Puisque la classe d'homotopie du cylindre $\beta : \mathbf{S}^1 \times [0,1] \to \Sigma$ ne dépend que de celle de (f_t), nous obtenons le résultat voulu. □

Lorsque le genre de Σ est supérieur ou égal à 2, le groupe $\mathrm{Diff}_0(\Sigma,\omega)$ est simplement connexe [34]. Ainsi la classe de cohomologie $\int_0^1 [\iota_{X_t}\omega]dt$ ne dépend que du difféomorphisme $f_1 \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma,\omega)$, et pas de l'isotopie choisie pour le relier à l'identité. On note $\mathrm{Flux}(f_1)$ cette classe. Nous avons donc défini une application

$$\mathrm{Flux} : \mathrm{Diff}_0(\Sigma,\omega) \to H^1(\Sigma,\mathbf{R}).$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que cette application est un homomorphisme. Bien entendu, si $\varphi_H^t : \Sigma \to \Sigma$ est une isotopie hamiltonienne, la classe de cohomologie $\mathrm{Flux}(\varphi_H^1)$ est nulle : pour chaque instant t on a en effet $[\iota_{X_{H_t}}\omega] = [-dH_t] = 0$. Le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ des difféomorphismes hamiltoniens de Σ est donc contenu dans le noyau de l'homomorphisme Flux. En fait il n'est pas difficile de s'assurer que ces deux groupes coïncident :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Flux}) = \mathscr{G}_\Sigma.$$

Autrement dit, si la classe $\mathrm{Flux}(f)$ est nulle, il existe une isotopie **hamiltonienne** reliant l'identité à f [5, 86]. Ce résultat est dû à Banyaga.

Nous allons donner maintenant une description plus géométrique de l'homomorphisme Flux. Plus précisément, nous allons construire un homomorphisme

$$\mathrm{Sch} : \mathrm{Diff}_0(\Sigma,\omega) \to H_1(\Sigma,\mathbf{R})$$

dans l'esprit du cycle asymptotique de Schwartzman associé à une mesure invariante d'un champ de vecteurs [110]. Il est dual du morphisme Flux dans le sens suivant. Pour toute 1-forme fermée α sur Σ, nous avons :

$$\int_\Sigma [\alpha] \wedge \mathrm{Flux}(f) = [\alpha]\left(\mathrm{Sch}(f)\right).$$

Considérons donc un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma,\omega)$ et une isotopie (f_t) reliant l'identité à f. Si $x \in \Sigma$, nous noterons γ_x le courant d'intégration sur la courbe $(f_t(x))$. Considérons le courant $\mathscr{C}(f)$ obtenu en prenant la moyenne des différents courants γ_x $(x \in \Sigma)$ par rapport à la mesure μ_ω associée à la forme d'aire ω :

$$\mathscr{C}(f) = \int_\Sigma \gamma_x \, d\mu_\omega(x).$$

Par définition la valeur du courant $\mathscr{C}(f)$ évalué contre une 1-forme α définie sur Σ est :

$$\mathscr{C}(f)(\alpha) = \int_\Sigma \left(\int_{(f_t(x))_{t\in[0,1]}} \alpha \right) d\mu_\omega(x).$$

Si α est la différentielle d'une fonction $F : \Sigma \to \mathbf{R}$, on a :

$$\mathscr{C}(f)(dF) = \int_\Sigma (F(f(x)) - F(x)) d\mu_\omega(x).$$

Puisque f préserve l'aire, cette quantité est nulle. Le courant $\mathscr{C}(f)$ est **fermé**. Il définit donc une classe $[\mathscr{C}(f)] \in H_1(\Sigma, \mathbf{R})$. Bien que nous l'ayons omis dans la notation, le courant $\mathscr{C}(f)$ **dépend** du choix de l'isotopie reliant l'identité à f. Cependant, puisque le groupe $\mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$ est simplement connexe, sa classe d'homologie ne dépend que de f. Nous noterons donc $\mathrm{Sch}(f) = [\mathscr{C}(f)] \in H_1(\Sigma, \mathbf{R})$. Nous pouvons alors établir la relation annoncée entre les classes $\mathrm{Sch}(f)$ et $\mathrm{Flux}(f)$.

Puisque la 3-forme $\alpha \wedge \omega$ est nulle sur Σ nous avons :

$$0 = \iota_{X_t} (\alpha \wedge \omega) = \alpha(X_t)\omega - \alpha \wedge \iota_{X_t}\omega.$$

Nous avons donc $\alpha(X_t)\omega = \alpha \wedge \iota_{X_t}\omega$. En intégrant cette 2-forme sur Σ, puis en intégrant par rapport au temps, nous obtenons :

$$\int_0^1 \int_\Sigma \alpha(X_t)\omega dt = \int_\Sigma [\alpha] \wedge \mathrm{Flux}(f).$$

C'est la relation voulue.

En fait, si $f \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$, on peut définir (exactement comme ci-dessus) une classe d'homologie $\mathrm{Sch}_\mu(f)$ associée à toute mesure de probabilité borélienne μ invariante par f. La classe $\mathrm{Sch}(f)$ ci-dessus est (à une normalisation près) la classe correspondant à la mesure de probabilité définie par la forme d'aire. Ces classes d'homologie associées aux mesures invariantes de f sont largement utilisées dans l'étude des difféomorphismes des surfaces, par exemple, pour la recherche d'orbites périodiques (voir [46, 81] par exemple).

Dans le cas où la surface Σ est le tore $\mathbf{T}^2$, on peut construire de manière similaire les morphismes Flux et Sch. Cependant, le groupe $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{T}^2, \omega)$ n'étant pas simplement connexe, ces morphismes sont à valeurs dans les groupes $H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})/H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$ et $H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})/H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$ respectivement [34, 86].

Exemples de quasi-morphismes et conjecture de Zimmer.

Concernant ce paragraphe, le lecteur pourra consulter les textes [7, 25, 52, 58, 88, 118, 120].

Nouc commençons par rappeler le résultat suivant de Banyaga [5]. Ici, Σ est une surface compacte orientée quelconque, munie d'une forme d'aire ω.

Le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ des difféomorphismes hamiltoniens de Σ est simple.

La preuve de Banyaga généralise les travaux de Herman, Mather et Thurston sur la simplicité du groupe de tous les difféomorphismes (isotopes à l'identité) d'une variété fermée. Nous renvoyons le lecteur au livre [7] pour un panorama de ces travaux. Là encore, l'énoncé ci-dessus admet une généralisation lorsque la surface Σ est remplacée par une variété symplectique de dimension supérieure.

D'après ce résultat, tout homomorphisme à valeurs réelles défini sur le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ est trivial, et tout homomorphisme défini sur le groupe $\mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$ (lorsque le genre g de Σ est supérieur ou égal à 1) est obtenu en composant l'homomorphisme Flux avec un homomorphisme de $H^1(\Sigma, \mathbf{R})$ (ou $H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})/H^1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$ lorsque $\Sigma = \mathbf{T}^2$) vers $\mathbf{R}$. On peut alors chercher à construire des quasi-morphismes définis sur les groupes $\mathscr{G}_\Sigma$ ou $\mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$, qui soient non-triviaux sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens. Il s'avère qu'il existe de nombreux exemples. Mentionnons d'abord le résultat suivant de Gambaudo et Ghys [52] :

L'espace des quasi-morphismes homogènes sur le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ est de dimension infinie.

Avant de décrire quelques exemples, expliquons l'idée générale des constructions de Gambaudo et Ghys. Plutôt que de construire des classes d'homologie associées aux trajectoires des points pendant une isotopie (f_t) préservant l'aire (ces classes d'homologie sont les classes $Sch_\mu(f)$ où μ est une mesure invariante de f), on peut considérer les classes d'**homotopie** des trajectoires. On peut également considérer non plus la trajectoire d'un point $x \in \Sigma$, mais la trajectoire de plusieurs points distincts de Σ simultanément. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n points distincts de Σ on peut considérer la courbe

$$(f_t(x_1), \ldots, f_t(x_n)) \in \Sigma^n$$

comme étant "presque une tresse" lorsque t tend vers l'infini. En fait, presque tous les points $x_1, \ldots, x_n$ sont récurrents pour f. Ainsi si $t_i \in \mathbf{R}$ est une suite de réels tendant vers l'infini telle que

$$f_{t_i}(x_j) \underset{i \to \infty}{\to} x_j,$$

pour tout j, on peut penser à la courbe $\gamma(x_1, \ldots, x_n, t_i) = (f_t(x_1), \ldots, f_t(x_n))_{0 \le t \le t_i}$ comme à une tresse. En choisissant un invariant numérique χ des tresses, nous pouvons considérer la fonction $\chi(\gamma(x_1, \ldots, x_n, t_i))$ sur Σ^n. En la moyennant sur l'espace des n-uplets de points, puis par rapport au temps, on construit alors un invariant du difféomorphisme f_1.

Mentionnons que ces constructions sont dans l'esprit de constructions précédentes de Schwartzman [110] comme nous l'avons déjà indiqué, mais également d'Arnold [3] et Ruelle [108]. Notons également que les tresses formées non pas à partir de points seulement récurrents, mais à partir d'orbites périodiques des difféomorphismes des surfaces ont été très étudiées, voir [20] pour un panorama et quelques références. Outre les constructions qui utilisent des tresses, nous utiliserons aussi les espaces suivants pour construire des quasi-morphismes : le cercle à l'infini $\mathbf{S}^1_\infty$ du revêtement universel d'une surface hyperbolique,

l'espace $X_2(\mathbf{D})$ des paires de points distincts d'un disque $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$, la variété Λ_n des sous-espaces lagrangiens de $\mathbf{R}^{2n}$, muni de sa structure symplectique standard. Le point commun à ces espaces est bien sûr qu'ils ont tous les trois un groupe fondamental infini cyclique.

Dans toutes ces constructions, une grande différence avec la dimension 1 est bien sûr qu'on ne peut associer un nombre de rotation qu'à presque tout point de la surface (pour une mesure invariante fixée du difféomorphisme), et non pas à tout point comme sur le cercle.

Nous passons maintenant à la description de quelques exemples.

Exemple 1. ([52, 58]) Considérons une surface fermée Σ de genre $g \geq 2$. On suppose Σ munie d'une forme d'aire ω et d'une métrique hyperbolique. Nous allons voir que la classe d'homologie du courant $\mathscr{C}(f)$ ($f \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$) défini plus haut peut être représentée par un cycle $\mathscr{C}_{géo}(f)$ canonique (une fois la métrique hyperbolique fixée). Contrairement au cycle $\mathscr{C}(f)$ qui dépend du choix d'une isotopie reliant l'identité à f, $\mathscr{C}_{géo}(f)$ ne dépend que de f et de la métrique hyperbolique. De plus, pour toute 1-forme η sur Σ l'application

$$f \mapsto \phi_\eta(f) := \mathscr{C}_{géo}(f)(\eta)$$

est un quasi-morphisme. Ceci donne une grande famille de quasi-morphismes sur Σ. L'idée sous-jacente dans cette construction est bien sûr la "rectification" des simplexes, introduite par Gromov et Thurston [61, 113].

Considérons donc une isotopie (f_t) reliant l'identité à un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$. Notons $\delta(x, f)$ l'unique géodésique de Σ reliant x à $f(x)$ dans la classe d'homotopie de l'arc $(f_t(x))$. On pose alors :

$$\mathscr{C}_{géo}(f) = \int_\Sigma \delta(x, f)\, d\mu_\omega,$$

où $\delta(x, f)$ est considéré comme un courant d'intégration. Par définition, la classe d'homologie du courant $\mathscr{C}_{géo}(f)$ est égale à $\mathrm{Sch}(f)$. Expliquons maintenant pourquoi ϕ_η est un quasi-morphisme. Nous allons montrer l'inégalité suivante :

$$\left| \int_{\delta(x,fg)} \eta - \int_{\delta(x,g)} \eta - \int_{\delta(g(x),f)} \eta \right| \leq \pi \cdot |d\eta|_\infty,$$

où $f, g \in \mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$ et $x \in \Sigma$. En intégrant cette inégalité, on obtient ensuite (puisque g préserve l'aire) :

$$|\phi_\eta(fg) - \phi_\eta(g) - \phi_\eta(f)| \leq \pi \cdot |d\eta|_\infty \cdot \int_\Sigma \omega.$$

Fixons deux isotopies (f_t) et (g_t) reliant l'identité à f et g respectivement et relevons les en des isotopies $\widetilde{f}_t$ et $\widetilde{g}_t$ du revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ de Σ, que l'on identifie au disque de Poincaré. Fixons un point $\widetilde{x} \in \widetilde{\Sigma}$ au-dessus de $x \in \Sigma$ et notons $\widetilde{\eta}$ le relevé de la forme η à $\widetilde{\Sigma}$. L'unique géodésique reliant $\widetilde{x}$ à $\widetilde{f}_1(\widetilde{x})$ se projette sur l'arc $\delta(x, f)$. La différence

$$\int_{\delta(x,fg)} \eta - \int_{\delta(x,g)} \eta - \int_{\delta(g(x),f)} \eta$$

est donc égale à l'intégrale de $\widetilde{\eta}$ sur le bord du triangle géodésique Δ de $\widetilde{\Sigma}$ de sommets $\widetilde{x}$, $\widetilde{g}_1(\widetilde{x})$, et $\widetilde{f}_1\widetilde{g}_1(\widetilde{x})$. D'après le théorème de Stokes, cette quantité est égale à l'intégrale de $d\widetilde{\eta}$ sur le triangle Δ. Mais cette dernière intégrale est bornée par la norme de $d\widetilde{\eta}$ multipliée par l'aire d'un triangle hyperbolique, qui est elle-même bornée par π. Nous obtenons donc l'inégalité souhaitée. Dans la suite du texte, nous noterons Φ_η le quasi-morphisme homogène associé à ϕ_η.

Remarquons que cette construction s'étend à tout le groupe des homéomorphismes de Σ préservant l'aire et isotopes à l'identité.

Exemple 2. ([52]) Choisissons n points deux-à-deux distincts $x_1^0, \ldots, x_n^0$ dans le disque $\mathbf{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, |x|^2 + |y|^2 \leq 1\}$ et notons $P_n(\mathbf{D})$ le groupe des tresses pures du disque : c'est le groupe fondamental (basé en $x_1^0, \ldots, x_n^0$) de l'espace $X_n(\mathbf{D})$ des n-uplets de points deux-à-deux distincts du disque $\mathbf{D}$. La signature (voir [53, 91]) est une application

$$sign_n : P_n(\mathbf{D}) \to \mathbf{Z}$$

qui est un quasi-morphisme. Lorsque $n = 2$, la signature d'une tresse est simplement (à une constante multiplicative près) l'enlacement entre ses deux brins. En utilisant les idées expliquées plus haut, nous pouvons construire une suite

$$Sign_n : \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega) \to \mathbf{R}$$

de quasi-morphismes homogènes sur le groupe $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$ des difféomorphismes du disque préservant l'aire et qui coïncident avec l'identité au voisinage du bord. Pour tout point $(x_1, \ldots, x_n) \in X_n(\mathbf{D})$, nous choisissons un arc $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ de $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ à $(x_1, \ldots, x_n)$ dans l'espace $X_n(\mathbf{D})$. Si (f_t) est une isotopie reliant l'identité à un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$, on peut considérer le lacet :

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) * (f(x_1), \ldots, f(x_n)) * \overline{\alpha(f(x_1), \ldots, f(x_n))}$$

dans $X_n(\mathbf{D})$. Il définit un élément $\gamma(f, x_1, \cdots, x_n) \in P_n(\mathbf{D})$ qui ne dépend que de f et des points x_i. Nous avons bien sûr la relation :

$$\gamma(fg, x_1, \ldots, x_n) = \gamma(g, x_1, \ldots, x_n) * \gamma(f, g(x_1), \ldots, g(x_n)).$$

On en déduit :

$$|sign_n(\gamma(fg, x_1, \ldots, x_n)) - sign_n(\gamma(g, x_1, \ldots, x_n)) - sign_n(\gamma(f, g(x_1), \ldots, g(x_n)))| \leq \delta(sign_n).$$

Si l'on choisit les arcs $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ de manière convenable, l'application

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto sign_n(\gamma(f, x_1, \ldots, x_n))$$

est intégrable pour la mesure μ_ω^n (pour tout $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$). Notant $s(f, x_1, \ldots, x_n) = sign_n(\gamma(f, x_1, \ldots, x_n))$, nous obtenons que la différence :

$$\int_{X_n(\mathbf{D})} s(fg, x_1, \ldots, x_n) d\mu_\omega^n - \int_{X_n(\mathbf{D})} s(g, x_1, \ldots, x_n) d\mu_\omega^n - \int_{X_n(\mathbf{D})} s(f, g(x_1), \ldots, g(x_n)) d\mu_\omega^n$$

est bornée par le défaut du quasi-morphisme $sign_n$ multiplié par l'aire de Σ à la puissance n. Autrement dit l'application qui à f associe l'intégrale $\int_{X_n(\mathbf{D})} sign_n(\gamma(f, x_1, \ldots, x_n)) d\mu_\omega^n$ est un quasi-morphisme que nous pouvons homogénéiser pour définir :

$$Sign_n(f) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \int_{X_n(\mathbf{D})} sign_n(\gamma(f^p, x_1, \ldots, x_n)) d\mu_\omega^n.$$

Notons également que la limite $\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} sign_n(\gamma(f^p, x_1, \ldots, x_n))$ existe pour presque tout n-uplet de points $(x_1, \ldots, x_n)$ et peut être vue comme la signature asymptotique de la tresse définie par les points $(x_1, \ldots, x_n)$.

Mentionnons maintenant une de nos motivations pour la construction de quasi-morphismes sur les groupes de difféomorphismes hamiltoniens de surfaces. Cette motivation apparaît déjà dans [58]. Les idées suivantes seront décrites avec beaucoup plus de détails dans le chapitre 3, nous nous contentons ici d'une description rapide. Considérons le groupe de Lie $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ avec $n \geq 3$, ainsi qu'un réseau

$$\Gamma \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}).$$

On peut par exemple penser à $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$. D'après une conjecture de Zimmer [118, 120], tout morphisme

$$\rho : \Gamma \to \mathscr{G}_\Sigma$$

(où Σ est une surface compacte orientée quelconque) devrait être d'**image finie**. Il s'avère que les constructions précédentes de quasi-morphismes pourraient être utiles pour l'étude de ce problème. En effet, Burger et Monod [24, 25] ont démontré le résultat suivant. Tout quasi-morphisme homogène $\phi : \Gamma \to \mathbf{R}$ est identiquement nul. Ceci peut être vu comme une généralisation du résultat de Kazhdan [74] qui affirme que tout homomorphisme de Γ dans $\mathbf{R}$ est identiquement nul.

Si ρ est un hypothétique morphisme d'un réseau Γ comme ci-dessus dans le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$, pour tout quasi-morphisme homogène $\phi : \mathscr{G}_\Sigma \to \mathbf{R}$, le quasi-morphisme $\phi \circ \rho : \Gamma \to \mathbf{R}$ est identiquement nul. Ainsi, si nous sommes capables de construire beaucoup de quasi-morphismes de nature dynamique sur le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$, leur annulation en restriction au sous-groupe $\rho(\Gamma)$ pourrait fournir des contraintes sur l'homomorphisme ρ.

De même que le résultat de Kazhdan mentionné plus haut est en fait plus général que la simple annulation du groupe $H^1(\Gamma, \mathbf{R})$ (il affirme que Γ a la propriété (T)), le résultat de Burger et Monod que nous avons cité est valable dans un contexte plus général. C'est un résultat d'annulation pour des groupes de cohomologie bornée à valeurs dans des représentations unitaires quelconques de Γ, et non pas seulement des groupes de cohomologie bornée à coefficients triviaux. Nous verrons au chapitre 3 que ceci donne encore plus de contraintes sur d'éventuels homomorphismes $\rho : \Gamma \to \mathscr{G}_\Sigma$.

Présentation des résultats.

Nous passons maintenant à la présentation de nos résultats. Nous ne donnons ici qu'une partie de ceux-ci, ou énonçons parfois certains d'entre eux de manière incomplète. Le lecteur se reportera aux chapitres correspondants pour des énoncés précis et complets.

Le premier chapitre est consacré à la construction de certains quasi-morphismes qui sont reliés à *l'invariant de Calabi*, et qui répondent à une question formulée par Entov et Polterovich [36]. Nous décrivons succinctement le contexte de ce travail dans le cas particulier des surfaces. Le chapitre 1 contient un exposé plus complet. D'après un théorème de Banyaga que nous avons déjà mentionné, le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface compacte Σ est **simple**. Il n'admet donc pas d'homomorphisme non-trivial vers $\mathbf{R}$. Considérons maintenant un ouvert $U \subset \Sigma$, difféomorphe à un disque. On peut alors considérer le groupe $\mathscr{G}_U$ constitué de tous les difféomorphismes hamiltoniens engendrés par des fonctions $H : [0,1] \times U \to \mathbf{R}$ à support compact. Une autre manière de le décrire est la suivante. C'est le groupe de tous les difféomorphismes de Σ préservant l'aire dont le support est contenu dans U. Il existe un homomorphisme canonique de $\mathscr{G}_U$ dans $\mathbf{R}$. C'est l'invariant de Calabi

$$\mathfrak{Cal}_U : \mathscr{G}_U \to \mathbf{R},$$

introduit dans [26]. Une manière de le décrire est la suivante. Si $H : [0,1] \times U \to \mathbf{R}$ est un hamiltonien à support compact qui engendre un difféomorphisme $f \in \mathscr{G}_U$, nous avons :

$$\mathfrak{Cal}_U(f) = \int_0^1 \int_U H_t \, \omega \, dt,$$

(où l'on a noté $H_t(x) = H(t,x)$). Cette quantité ne dépend que de f (nous expliquerons ce fait dans le chapitre 1). Banyaga [5] a démontré que le noyau de cet homomorphisme est un groupe simple. Ceci assure que tout homomorphisme à valeurs réelles défini sur le groupe $\mathscr{G}_U$ est obtenu en composant l'invariant $\mathfrak{Cal}_U$ avec un homomorphisme de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Nous nous trouvons donc dans la situation suivante : sur le (grand) groupe $\mathscr{G}_\Sigma$, il n'existe pas d'homomorphisme non-trivial vers $\mathbf{R}$. Par contre il existe une collection de (petits) sous-groupes de $\mathscr{G}_\Sigma$, les sous-groupes de la forme $\mathscr{G}_U$ où U est un ouvert difféomorphe à un disque, sur lesquels existe un morphisme canoniquement défini. Dans [36], Entov et Polterovich demandent si l'on peut construire un invariant défini sur le groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ tout entier, qui, en restriction au sous-groupe $\mathscr{G}_U$, coïncide avec l'invariant $\mathfrak{Cal}_U$, dès que l'ouvert U est "assez petit". Plus précisément, ils posent la question suivante. Notons $\mathcal{D}$ la famille constituée de tous les ouverts U de Σ, difféomorphes à un disque, et ayant la propriété suivante : il existe un difféomorphisme hamiltonien $g : \Sigma \to \Sigma$ tel que $g(U) \cap U$ soit vide (nous dirons que g *disjoint* U de lui-même).

Peut-on construire un quasi-morphisme homogène $\phi : \mathscr{G}_\Sigma \to \mathbf{R}$ dont les restrictions aux sous-groupes $(\mathscr{G}_U)_{U \in \mathcal{D}}$ coïncident avec les homomorphismes $(\mathfrak{Cal}_U)_{U \in \mathcal{D}}$.

Notons (voir le chapitre 1 pour plus de détails) que l'on peut formuler une question similaire sur toute variété symplectique compacte. Dans [36], Entov et Polterovich répondent

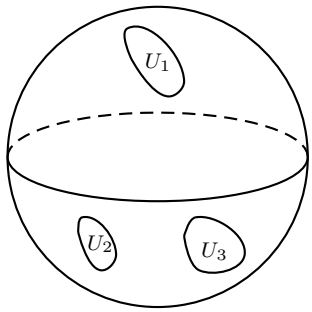

FIG. 1 –

positivement à cette question lorsque Σ est la sphère $\mathbf{S}^2$ (ainsi que pour d'autres variétés symplectiques de dimension supérieure). Nous prouvons ici le résultat suivant :

Théorème A *Soit Σ une surface compacte orientée de genre supérieur ou égal à 1. Il existe un quasi-morphisme homogène $\mathfrak{Cal}_\Sigma : \mathscr{G}_\Sigma \to \mathbf{R}$ dont la restriction au sous-groupe $\mathscr{G}_U$ coïncide avec l'invariant de Calabi $\mathfrak{Cal}_U$ pour* **tout** *ouvert U difféomorphe à un disque.*

Contrairement à l'énoncé de Entov et Polterovich, notre résultat ne fait pas apparaître la condition "U peut être disjoint de lui-même par un difféomorphisme hamiltonien de Σ". Nous verrons que dans le cas de la sphère, cette condition est nécessaire à l'existence d'un quasi-morphisme répondant positivement à la question de Entov et Polterovich. En fait les constructions de quasi-morphismes de [36] sont de nature très différente de celles qui apparaissent dans ce travail. Elles reposent sur l'*homologie de Floer* et la notion d'*invariants spectraux*. Le lecteur pourra consulter la fin du paragraphe 1.2 ainsi que [104] pour un aperçu de ces techniques.

Considérons maintenant une fonction de Morse $F : \Sigma \to \mathbf{R}$ sur une surface compacte orientée Σ. Notons $x_1, \ldots, x_l$ ses points critiques et $\lambda_i = F(x_i)$ ses valeurs critiques. Nous ferons l'hypothèse que ses valeurs critiques sont toutes distinctes : $\lambda_i \neq \lambda_j$ si i est différent de j. On peut alors associer à F son *graphe de Reeb* [106]. C'est l'espace des composantes connexes des niveaux de F. Rappelons sa construction. Considérons un réel t et choisissons une composante connexe $\mathcal{C}$ du niveau $F^{-1}(t)$. Trois possibilités se présentent :

1. $\mathcal{C}$ est réduit à un point, qui est un extremum local de F,
2. $\mathcal{C}$ est un cercle plongé dans Σ,
3. $\mathcal{C}$ est une courbe fermée immergée dans Σ ayant un unique point double.

On définit alors un graphe $\mathcal{G}$ de la manière suivante. A chaque composante du type 1 ou 3 on associe un sommet de $\mathcal{G}$. Notons K la réunion (finie) des composantes de type 1 ou 3. L'ouvert $\Sigma \setminus K$ est une réunion finie de cylindres difféomorphes à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. A chacun de ces cylindres nous associons une arête de $\mathcal{G}$ dont les sommets correspondent aux composantes

de niveau de F qui contiennent le bord de $\overline{\mathcal{C}}$. On dispose alors d'une projection naturelle $p_{\mathcal{G}} : \Sigma \to \mathcal{G}$ et la fonction F s'écrit

$$F = F_{\mathcal{G}} \circ p_{\mathcal{G}}$$

où $F_{\mathcal{G}}$ est une fonction définie sur $\mathcal{G}$. Plus généralement, considérons l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions sur Σ qui commutent avec F au sens de Poisson :

$$\mathcal{F} = \{H : \Sigma \to \mathbf{R}, C^\infty, \omega(X_H, X_F) = 0\}.$$

Si $H \in \mathcal{F}$, H s'écrit également sous la forme $H_{\mathcal{G}} \circ p_{\mathcal{G}}$ où $H_{\mathcal{G}}$ est une fonction définie sur $\mathcal{G}$. L'ensemble

$$\Gamma = \{\varphi_H^1, H \in \mathcal{F}\}$$

est alors un sous-groupe abélien du groupe des difféomorphismes hamiltoniens de Σ. Comme cela a été fait dans [36] pour certains quasi-morphismes définis sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de $\mathbf{S}^2$, nous calculerons dans le chapitre 1 les valeurs prises par les quasi-morphismes construits dans le théorème 1 sur le groupe Γ. L'expression de $\mathfrak{Cal}_\Sigma(\varphi_H^1)$ $(H \in \mathcal{F})$ fait alors intervenir les valeurs de la fonction $H_{\mathcal{G}}$ sur certains ensembles définis à partir de la combinatoire du graphe de Reeb $\mathcal{G}$.

Dans le second chapitre, nous considérons une variété symplectique fermée (V, ω) qui est *monotone*. Nous rappellerons la définition de cette notion dans l'introduction du chapitre 2. Cette classe de variétés symplectiques inclut par exemple tous les espaces projectifs complexes munis de leur structure symplectique standard (de Fubini-Study). Notons également que pour toutes ces variétés, la première classe de Chern du fibré tangent, muni d'une structure presque-complexe compatible avec ω, n'est pas triviale. Nous construisons alors un quasi-morphisme $\mathfrak{S}$ sur le revêtement universel $\widetilde{\mathscr{G}_V}$ du groupe $\mathscr{G}_V$ des difféomorphismes hamiltoniens de V. L'invariant $\mathfrak{S}(\{f_t\})$ associé à une isotopie hamiltonienne $f_t : V \to V$ peut être vu comme un moyen de mesurer la manière dont la différentielle $df_t : TV \to TV$ fait tourner les sous-espaces lagrangiens de TV. Bien que le fibré tangent TV ne soit pas trivial, nous parvenons à définir un nombre de rotation associé à l'action de la différentielle df_t sur le fibré en grassmanniennes lagrangiennes associé à V. Il s'avère que cet invariant étend un homomorphisme défini sur le groupe fondamental $\pi_1(\mathscr{G}_V) \subset \widetilde{\mathscr{G}_V}$ du groupe des difféomorphismes hamiltoniens de V, qui a été introduit par Polterovich [100].

Lorsque V est la sphère $\mathbf{S}^2$, le groupe fondamental du groupe des difféomorphismes hamiltoniens est fini [111] et le quasi-morphisme $\mathfrak{S}$ descend en un quasi-morphisme sur le groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{S}^2}$, que nous notons toujours $\mathfrak{S}$. Nous pouvons, comme dans le chapitre 1, considérer le groupe Γ_F formé des flots hamiltoniens qui commutent avec le flot hamiltonien engendré par une fonction de Morse fixée $F : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$. Nous supposons toujours que les valeurs critiques de F sont deux-à-deux distinctes et notons encore $x_1, \ldots, x_l$ ses points critiques. Soit $\mathscr{V}_0$ l'ensemble des points critiques de F d'indice 0 ou 2, et $\mathscr{V}_1$ l'ensemble des points critiques d'indice 1. Nous pouvons alors récrire la formule classique

$$2 = \sum_{j=1}^{l} (-1)^{\operatorname{ind} x_j}$$

sous la forme

$$2 = \mathrm{card}\mathscr{V}_0 - \mathrm{card}\mathscr{V}_1.$$

Fixons une forme d'aire Ω sur $\mathbf{S}^2$ d'aire totale égale à 2 et notons μ_Ω la mesure sur $\mathbf{S}^2$ associée à Ω. Notons δ_x la mesure de Dirac associée à un point x de la sphère. La formule précédente peut s'interpréter de la manière suivante : la mesure signée

$$\zeta = \sum_{v\in\mathscr{V}_0} \delta_v - \sum_{v\in\mathscr{V}_1} \delta_v - \mu_\Omega$$

est de masse totale nulle. Nous avons alors le :

Théorème B *Si $H \in \mathcal{F}$, on a :*

$$\mathfrak{S}(\varphi_H^1) = \int_{\mathbf{S}^2} H d\zeta = \sum_{v\in\mathscr{V}_0} H(v) - \sum_{v\in\mathscr{V}_1} H(v) - \int_{\mathbf{S}^2} H\Omega.$$

Le fait que ζ soit de masse totale nulle traduit bien sûr le fait que le flot φ_H^t, et donc la quantité $\mathfrak{S}(\varphi_H^1)$, sont inchangés lorsque l'on ajoute une constante à H.

Dans le troisième chapitre nous commençons par effectuer un rapide survol des motivations et des résultats existant dans le cadre du "programme de Zimmer". Nous rappelons comment l'étude des actions préservant l'aire sur une surface d'un réseau Γ dans un groupe de Lie simple G (connexe, à centre fini) de rang réel supérieur ou égal à 2 se ramène à l'étude des actions hamiltoniennes de Γ. Nous rappelons alors les résultats de Polterovich [103] d'une part et de Franks et Handel [47, 48] d'autre part qui traitent le cas où le réseau est non-uniforme et la surface de genre positif. Nous décrivons ensuite quelques idées qui pourraient être utiles pour étudier le cas des réseaux cocompacts.

Supposons que $\rho : \Gamma \to \mathscr{G}_\Sigma$ soit un morphisme d'un réseau Γ comme ci-dessus dans le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface fermée. Nous montrons comment les théorèmes d'annulation de Burger et Monod en cohomologie bornée, combinés avec le fait que Γ a la propriété (T), fournissent des contraintes sur la dynamique individuelle de chacun des difféomorphismes $\rho(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$). Une manière rapide de décrire ces contraintes est la suivante. Tous les nombres de rotation, ou enlacements asymptotiques, ou encore les "signatures asymptotiques" que l'on peut associer à presque tout point de Σ (ou presque tout n-uplet de points) sous l'action de $\rho(\gamma)$ s'annulent (presque partout). Une question difficile est alors de savoir si un difféomorphisme vérifiant toutes ces contraintes doit être égal à l'identité. Nous montrons que c'est effectivement le cas dans une situation particulière très simple : lorsque l'on suppose que le difféomorphisme considéré est le temps 1 d'un flot hamiltonien autonome (du moins lorsque la surface Σ est de genre strictement positif). Plus précisément, nous montrons le :

Théorème C *Soit $\varphi_H^1 : \Sigma \to \Sigma$ le temps 1 d'un flot hamiltonien (autonome). Si φ_H^1 apparaît dans l'image d'un homomorphisme ρ comme ci-dessus, alors :*

- *si le genre de Σ est non-nul, φ_H^1 est l'identité,*
- *si $\Sigma = \mathbf{S}^2$, alors le flot φ_H^t est topologiquement conjugué à un sous-groupe à un paramètre de rotations.*

Bien sûr, ce résultat n'est pas représentatif de la difficulté de la question pour un difféomorphisme hamiltonien général.

Le dernier chapitre aborde une problématique légèrement différente de celles des chapitres précédents. Si (V, ω) est une variété symplectique compacte quelconque, le groupe $\mathscr{G}_V$ des difféomorphismes hamiltoniens de V peut être muni d'une distance *biinvariante* : la *distance de Hofer* introduite dans [68]. Rappelons-en brièvement la définition. L'algèbre de Lie du groupe $\mathscr{G}_V$ s'identifie à l'espace des fonctions lisses sur V modulo l'espace des fonctions constantes. En effet cet espace s'identifie naturellement à l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens sur V. L'application qui à une fonction lisse $H : V \to \mathbf{R}$ associe son *oscillation*

$$\mathrm{osc}(H) = \max(H) - \min(H)$$

définit donc une norme sur l'espace des fonctions lisses modulo les constantes. Pour résumer, la distance de Hofer est alors la distance finslerienne associée à la norme "oscillation" sur l'algèbre de Lie de $\mathscr{G}_V$. Si $f \in \mathscr{G}_V$ et si (f_t) est une isotopie hamiltonienne reliant l'identité à f, engendrée par une fonction (H_t), on définit la longueur de l'isotopie (f_t) par :

$$\ell(\{f_t\}) = \int_0^1 \mathrm{osc}(H_t)dt,$$

puis l'*énergie* de f par :

$$||f|| = \inf \ell(\{f_t\})$$

où la borne inférieure porte sur toutes les isotopies hamiltoniennes reliant l'identité à f. La distance de Hofer entre deux difféomorphismes f et g est alors $\rho(f, g) = ||fg^{-1}||$. Le fait que ρ soit biinvariante traduit le fait que l'action adjointe d'un difféomorphisme hamiltonien $f : V \to V$ sur l'espace $C^\infty(V, \mathbf{R})$ des fonctions lisses sur V s'écrit :

$$Ad_f(H) = H \circ f^{-1}.$$

La transformation $Ad_f : C^\infty(V, \mathbf{R}) \to C^\infty(V, \mathbf{R})$ préserve donc la norme osc. Signalons également qu'il est très difficile de montrer que ρ est une distance. Le point délicat est de s'assurer que ρ est non-dégénérée : si $f \in \mathscr{G}_V$ est un difféomorphisme différent de l'identité, $||f|| > 0$. Ceci a été établi par Hofer dans $\mathbf{R}^{2n}$ [68], par Polterovich pour les variétés rationnelles [99], puis par Lalonde et McDuff en toute généralité [77].

Une fois acquis le fait que ρ est une distance, il est tout aussi difficile d'obtenir des bornes inférieures arbitrairement grandes sur ρ et notamment de montrer que l'espace métrique $(\mathscr{G}_V, \rho)$ est de diamètre infini. Cependant il est maintenant connu que ce diamètre est infini dans un certains nombre de situations : pour toutes les surfaces fermées [78, 101], pour les variétés asphériques [109] (c'est-à-dire celles pour lesquelles le groupe $\pi_2(V)$ est trivial), pour les espaces projectifs complexes [36]... On peut alors s'intéresser à la géométrie *à grande échelle* de l'espace métrique $(\mathscr{G}_V, \rho)$. Dans cet esprit, nous avons montré le résultat suivant, que l'on obtient sans difficultés à partir des estimations connues de la distance de Hofer.

Théorème D *Supposons qu'il existe une sous-variété lagrangienne fermée L plongée dans V, vérifiant les deux conditions suivantes :*

• *l'application induite* $\pi_1(L) \to \pi_1(V)$ *entre les groupes fondamentaux de* L *et* V *est injective,*

• *il existe sur* L *une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle.*

Alors, pour tout entier naturel N*, il existe un morphisme* $\phi : \mathbf{R}^N \to \mathscr{G}_V$ *ayant la propriété suivante. Si* $|\cdot|$*est une norme fixée sur* $\mathbf{R}^N$*, il existe une constante strictement positive* C_N *telle que :*

$$C_N^{-1}|x-y| \leq \rho(\phi(x), \phi(y)) \leq C_N|x-y|,$$

pour tous x, y *de* $\mathbf{R}^N$*.*

Des exemples de variétés symplectiques vérifiant les hypothèses du théorème sont donnés par les surfaces de genre strictement positif et leurs produits. Une autre série d'exemples est obtenue de la manière suivante. Si M^3 est une variété de dimension 3 qui fibre sur le cercle de sorte que le genre de la fibre soit strictement positif, alors $M^3 \times \mathbf{S}^1$ possède une structure symplectique pour laquelle elle contient un tore lagrangien $\mathbf{T}^2$ incompressible.

Les résultats des chapitres 1 et 2 sont pour l'essentiel tirés des articles *Quasi-morphismes et invariant de Calabi* (Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39**, No. 1, 2006) et *Quasi-morphismes de Calabi et graphe de Reeb sur le tore* (C. R. Math. Acad. Sci. Paris **343**, No. 5, 2006). Le théorème B ci-dessus a été établi après la publication de ces articles. Le résultat du chapitre 4 est quant à lui tiré de l'article *Quelques plats pour la métrique de Hofer* (arXiv :0704.2524, accepté au Journal de Crelle).

⋆⋆⋆

Tout au long de ce texte, nous adopterons les notations suivantes. Si (V, ω) est une variété symplectique et $H : V \times [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction à support compact, le *gradient symplectique* de H est le champ de vecteurs dépendant du temps X_{H_t} défini par l'équation $\iota_{X_{H_t}}\omega = -dH_t$ (où $H_t(x) = H(x,t)$). L'*isotopie hamiltonienne* engendrée par H est le chemin de difféomorphismes (f_t) défini par l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ \frac{d}{dt}(f_t(x)) = X_{H_t}(f_t(x)). \end{cases}$$

Nous noterons $\mathscr{G}$ le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de V, ou parfois $\mathscr{G}_V$ s'il y a un risque de confusion. C'est le groupe formé par tous les difféomorphismes qui sont le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne. Par exemple, si V est fermée et U est un ouvert de V, nous désignerons souvent par $\mathscr{G}$ le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de V et par $\mathscr{G}_U$ le sous-groupe de $\mathscr{G}$ formé des difféomorphismes engendrés par des fonctions à support compact dans U. Les fonctions, les difféomorphismes, ou les champs de vecteurs que nous considérons sont de classe C^∞. Cependant, beaucoup de résultats ou de constructions que nous présentons restent vrais avec une régularité plus faible.

Chapitre 1

Quasi-morphismes de Calabi

Nous considérons une variété symplectique (V, ω). Rappelons tout d'abord quelques résultats classiques sur la structure algébrique du groupe $\mathscr{G}$ des difféomorphismes hamiltoniens de V. Lorsque V est fermée, Banyaga a démontré en 1978 [5] que le groupe $\mathscr{G}$ est un groupe simple. Lorsque V est ouverte et exacte (c'est-à-dire que ω est exacte sur V), Calabi a introduit en 1970 [26] un homomorphisme $\mathfrak{Cal}_V : \mathscr{G} \to \mathbf{R}$. Une manière de le définir est la suivante (nous reviendrons plus en détails sur cette définition au paragraphe suivant). Si $H : V \times [0,1] \to \mathbf{R}$ est un hamiltonien à support compact qui engendre le difféomorphisme f, l'invariant de Calabi de f est (à une constante multiplicative près)

$$\mathfrak{Cal}_V(f) = \int_V \int_0^1 H(x,t) dt\, \omega^n,$$

(où $n = \frac{1}{2}\mathrm{dim}V$). Cette quantité ne dépend que de f et pas du choix du hamiltonien qui l'engendre. Banyaga a démontré que le noyau de l'homomorphisme $\mathfrak{Cal}_V$ est simple. Tout homomorphisme de $\mathscr{G}$ vers un groupe abélien A est donc obtenu en composant l'homomorphisme $\mathfrak{Cal}_V$ avec un homomorphisme de $\mathbf{R}$ dans A.

Rappelons que, dans les années 70, les travaux de Herman, Mather et Thurston ont permis de montrer que le groupe $\mathrm{Diff}_0^r(M)$ des difféomorphismes isotopes à l'identité d'une variété connexe fermée M, est simple (dès que $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ est différent de $\dim(M)+1$). Il y a bien sûr un résultat similaire lorsque M est ouverte, en considérant des difféomorphismes à support compact. Les travaux de Banyaga sont une adaptation au cas symplectique de la méthode de Thurston pour prouver la simplicité du groupe $\mathrm{Diff}_0^\infty(M)$. Nous renvoyons le lecteur au livre [7] pour un survol de ces travaux.

Revenant au cadre symplectique, notons que si $U_1 \subset U_2$ sont deux ouverts d'une même variété symplectique (sur lesquels ω est exacte), la restriction de l'invariant $\mathfrak{Cal}_{U_2}$ au groupe $\mathscr{G}_{U_1}$ coïncide avec $\mathfrak{Cal}_{U_1}$.

Plaçons nous maintenant dans le cas où V est fermée. Si U est un ouvert de V sur lequel ω est exacte, nous disposons donc d'un homomorphisme $\mathfrak{Cal}_U : \mathscr{G}_U \to \mathbf{R}$. Il existe toujours de tels ouverts : dès que U est contenu dans une carte de Darboux, la forme symplectique y est exacte. Le groupe $\mathscr{G}$ possède donc une large collection de sous-groupes sur lesquels un morphisme **canonique** est défini. Dans [36], Entov et Polterovich suggèrent de rechercher un invariant sur $\mathscr{G}$ qui étend les invariants de Calabi $\mathfrak{Cal}_U : \mathscr{G}_U \to \mathbf{R}$ pour tous les ouverts U *assez petits*. Bien sûr, d'après le théorème de Banyaga déjà cité, un tel invariant ne peut être un homomorphisme : puisque le groupe $\mathscr{G}$ est simple, tout homomorphisme $\mathscr{G} \to \mathbf{R}$ est identiquement nul. Nous noterons plus précisément $\mathscr{D}$ la famille des ouverts U de V ayant les deux propriétés suivantes : la forme symplectique est exacte sur U et l'ouvert U peut être disjoint de lui-même par un difféomorphisme hamiltonien de V : il existe $f \in \mathscr{G}$ avec $f(U) \cap U = \emptyset$. Entov et Polterovich formulent alors la question suivante :

Peut-on construire un quasi-morphisme homogène $\phi : \mathscr{G} \to \mathbf{R}$ dont les restricitions aux sous-groupes $(\mathscr{G}_U)_{U \in \mathscr{D}}$ coïncident avec les homomorphismes $(\mathfrak{Cal}_U)_{U \in \mathscr{D}}$?

Nous appelerons *quasi-morphisme de Calabi* un quasi-morphisme sur le groupe $\mathscr{G}$ ayant cette propriété. Dans [36], ils construisent un tel invariant pour une certaine classe de

variétés symplectiques qui inclut notamment les espaces projectifs complexes, munis de leur structure symplectique standard, et en particulier la sphère $\mathbf{S}^2$. Leur construction a ensuite été étendue à d'autres variétés symplectiques [16, 38, 97]. Dans le cas de la sphère $\mathbf{S}^2$ (et plus généralement, des espaces projectifs complexes), une autre construction d'un "quasi-morphisme de Calabi" a été proposée par Ben Simon [12].

Dans ce chapitre, nous allons voir comment répondre à cette question dans le cas où la variété symplectique est une surface de genre supérieur ou égal à 1. Cependant, les quasi-morphismes que nous construisons ici ont des propriétés très différentes de ceux construits dans [36]. En dimension 2, une forme symplectique est toujours exacte sur une surface ouverte, ainsi, la première condition définissant la famille d'ouvert $\mathscr{D}$ est vide dans ce cas. Par contre, nous verrons que la seconde condition n'apparaît pas du tout dans notre travail. Les invariants que nous construisons sont de nature **topologique**. Si S est une surface fermée de genre supérieur ou égal à 2, nous allons par exemple construire un quasi-morphisme homogène $\mathfrak{Cal}_S : \mathscr{G}_S \to \mathbf{R}$ dont la restriction aux sous-groupes $\mathscr{G}_U$ sera égale à l'invariant de Calabi pour tout ouvert U difféomorphe à un disque ou à un anneau. On peut par exemple choisir U d'aire arbitrairement proche de l'aire totale de la surface. Nous rappelerons au paragraphe 1.2.1 pourquoi ceci n'est pas possible sur la sphère $\mathbf{S}^2$. La condition définissant la famille d'ouverts $\mathscr{D}$ est donc optimale dans le cas de la sphère.

Comme cela a été fait dans [36] pour le cas de la sphère, nous calculerons (dans le cas des surfaces hyperboliques, puis dans le cas du tore) la valeur des quasi-morphismes que nous construisons sur les flots autonomes associés à des fonctions de Morse sur la surface considérée. Nous obtenons alors de jolies formules qui font intervenir la combinatoire du graphe de Reeb associé à la fonction de Morse (dont nous rappelons la construction au paragraphe 1.2.2). On trouve également des calculs similaires (pour d'autres quasi-morphismes) dans [17, 51, 52].

Nous concluons l'introduction de ce chapitre par une remarque supplémentaire, destinée à souligner la différence entre d'une part, tous les quasi-morphismes construits dans ce texte ou encore dans [52] par Gambaudo et Ghys, et d'autre part les quasi-morphismes construits par Entov et Polterovich.

Considérons un groupe Γ agissant sur un espace de probabilité (X, μ) en préservant la mesure. Supposons donnée une application $u : \Gamma \to \mathrm{L}^2(X, \mu)$ vérifiant la condition suivante. Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|u(\gamma_1\gamma_2)(x) - u(\gamma_2)(x) - u(\gamma_1)(\gamma_2(x))| \leq C,$$

pour μ-presque tout $x \in X$ ($\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$). Nous dirons dans ce cas que u est un *quasi-cocycle*. Puisque l'action de Γ sur X préserve la mesure, l'application $\gamma \mapsto \int_X u(\gamma) d\mu$ est un quasi-morphisme. En fait, dans cette situation, u définit également une classe de cohomologie bornée à valeurs dans l'espace $\mathrm{L}^2(X, \mu)$ (nous reviendrons sur ce point au chapitre 3). Tous les quasi-morphismes construits dans ce texte, ou dans [52], sont obtenus par ce procédé : Γ est le groupe de tous les difféomorphismes hamiltoniens d'une surface compacte par exemple, et X est, la surface elle-même, ou bien l'espace des paires de points distincts sur la surface, ou bien l'espace des n-uplets de points distincts sur la surface.

Les quasi-morphismes construits par Entov et Polterovich (ainsi que tous les quasi-

morphismes construits dans [16, 97]) ne sont pas obtenus de cette manière là. C'est d'ailleurs un problème ouvert de savoir si l'on peut, ou non, interpréter ces quasi-morphismes (au moins en dimension 2) comme intégrale d'un quasi-cocycle.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Diverses définitions de l'invariant de Calabi

Nous rappelons ici les diverses définitions possibles de l'invariant de Calabi sur la variété symplectique exacte $(V, \omega = d\lambda)$ (nous noterons $2n$ la dimension de V).

Considérons donc un difféomorphisme $f \in \mathscr{G}$. Soit $H : V \times [0,1] \to \mathbf{R}$ un hamiltonien (à support compact) qui engendre une isotopie (f_t) dont le temps 1 est f. Le gradient symplectique X_{H_t} de H vérifie la relation :

$$X_{H_{t_0}}(f_{t_0}(x)) := \frac{d}{dt}|_{t=t_0} f_t(x).$$

Suivant [26], nous définissons :

$$\mathfrak{Cal}_V(f) = -n \int_V \int_0^1 H(x,t) dt\, \omega^n$$

(la constante $-n$ ne sert que pour la commodité de nos calculs). Nous allons donner deux autres descriptions de cet invariant. Puisque V est de dimension $2n$, la $(2n+1)$-forme différentielle $\lambda \wedge \omega^n$ est nulle. En prenant le produit intérieur de cette forme avec le champ de vecteurs X_{H_t}, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} \lambda(X_{H_t})\omega^n & = & \lambda \wedge n\iota_{X_{H_t}}\omega \wedge \omega^{n-1} \\ & = & n\lambda \wedge (-dH_t) \wedge \omega^{n-1} \\ & = & n(d(H_t\lambda) - H_t d\lambda) \wedge \omega^{n-1} \\ & = & -nH_t\omega^n + nd(H_t\lambda \wedge \omega^{n-1}). \end{array}$$

L'intégrale $\int_V d(H_t\lambda \wedge \omega^{n-1})$ est nulle car la $(2n-1)$-forme $H_t\lambda \wedge \omega^{n-1}$ est à support compact. Nous avons donc : $\mathfrak{Cal}_V(f) = \int_V \int_0^1 \lambda(X_{H_t}) dt\, \omega^n$. C'est en fait cette seconde description de l'invariant de Calabi que nous allons utiliser dans la section 1.2.1, c'est pourquoi nous avons introduit le coefficient $-n$ dans la définition initiale de l'invariant. Une troisième définition possible serait la suivante. Considérons la 1-forme $f^*\lambda - \lambda$. Elle est fermée, car f préserve la forme symplectique ω. Le fait que l'isotopie (f_t) soit hamiltonienne assure qu'elle est exacte. En effet nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{rcl} f^*\lambda - \lambda & = & \int_0^1 (f_t^*\lambda)' dt \\ & = & \int_0^1 f_t^*(L_{X_{H_t}}\lambda) dt \\ & = & d(\int_0^1 (-H_t \circ f_t) + \lambda(X_{H_t}) dt). \end{array}$$

En définissant $F(f,\lambda)$ comme étant l'unique primitive à support compact de la 1-forme $f^*\lambda - \lambda$, nous avons l'expression $F(f,\lambda) = \int_0^1 (-H_t \circ f_t + \lambda(X_{H_t}))dt$, et donc :

$$\mathfrak{Cal}_V(f) = \frac{n}{n+1}\int_M F(f,\lambda)\,\omega^n.$$

Notons que l'égalité des trois descriptions de l'invariant de Calabi assure, d'une part que la première ne dépend pas du choix de l'isotopie hamiltonienne reliant l'identité au difféomorphisme donné ; d'autre part que la seconde et la troisième sont en fait indépendantes du choix de la primitive de la forme symplectique. Il n'est pas difficile de vérifier que l'application $\mathfrak{Cal}_V : \mathscr{G} \to \mathbf{R}$ est un homomorphisme. Cela se déduit par exemple de la relation :

$$F(f \circ g, \lambda) = F(f,\lambda) \circ g + F(g,\lambda).$$

1.1.2 Extension du groupe des difféomorphismes hamiltoniens

Les résultats de ce paragraphe sont très classiques, voir par exemple [6, 18] ; nous les rappelons succinctement.

Considérons une variété (que nous supposerons fermée et connexe) M, munie d'une forme de contact α dont le champ de Reeb X est induit par une action libre du cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Notons V la variété obtenue en prenant le quotient de M par l'action du cercle, et $\pi : M \to V$ la projection associée. La 2-forme $d\alpha$ sur M est invariante par l'action du cercle et vérifie $\iota_X d\alpha = 0$. Il existe donc une 2-forme ω sur V telle que $\pi^*\omega = d\alpha$. La forme ω est une forme symplectique sur V.

Réciproquement, considérons une variété symplectique (V,ω) (que nous supposons connexe et fermée) *entière*, c'est-à-dire, pour laquelle la classe de cohomologie de la forme symplectique est entière. Soit $\pi : M \to V$ le fibré en cercles au-dessus de V dont la classe d'Euler est $[\omega] \in H^2(V,\mathbf{Z})$. Il existe alors une action libre du cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et une forme de contact α sur M tels que $\pi^*\omega = d\alpha$ et $\alpha(X) = 1$ (où X désigne le champ de vecteurs engendré par l'action de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ sur M).

Dans cette situation, nous avons une extension centrale par $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ du groupe des difféomorphismes hamiltoniens de V. Décrivons d'abord cette extension au niveau des algèbres de Lie.

Un élément Y de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}_\alpha(M)$ des champs de vecteurs sur M qui préservent α est invariant par l'action du cercle. Il définit donc un champ de vecteurs $\pi_*(Y)$ sur V. De l'équation

$$L_Y\alpha = 0,$$

nous tirons

$$-d(\alpha(Y)) = \pi^*(\iota_{\pi_*(Y)}\omega).$$

La fonction $\alpha(Y) : M \to \mathbf{R}$ descend en une fonction sur V. Le champ $\pi_*(Y)$ est donc hamiltonien, de hamiltonien $\alpha(Y)$. Nous avons donc construit un morphisme d'algèbres

de Lie de $\mathscr{L}_\alpha(M)$ dans l'algèbre $\mathrm{ham}(V,\omega)$ des champs de vecteurs hamiltoniens sur V, dont le noyau est engendré par le champ X. Nous avons donc une extension :

$$0 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow \mathscr{L}_\alpha(M) \longrightarrow \mathrm{ham}(V,\omega) \longrightarrow 0.$$

Proposition 1.1.1 *L'extension ci-dessus est (canoniquement) scindée.*

Preuve : soit Z un champ de vecteurs hamiltonien sur V, de hamiltonien $H_Z : V \to \mathbf{R}$, avec $\iota_Z\omega = -dH_Z$ et $\int_V H_Z\omega^n = 0$. Notons $\theta(Z) = \widehat{Z} + (H_Z \circ \pi)X$, où $\widehat{Z}$ est le relevé horizontal de Z à M, défini par l'équation $\alpha(\widehat{Z}) = 0$. Nous avons :

$$L_{\theta(Z)}\alpha = (\iota_{\theta(Z)}d + d\iota_{\theta(Z)})(\alpha) = d(H_Z \circ \pi) + \pi^*\iota_Z\omega = 0.$$

Le champ de vecteurs $\theta(Z)$ est donc dans l'algèbre $\mathscr{L}_\alpha(M)$. On vérifie aisément que l'application $Z \mapsto \theta(Z)$ est un morphisme d'algèbres de Lie. □

Passons maintenant à l'extension du groupe $\mathscr{G}$ des difféomorphismes hamiltoniens de V. Nous noterons $G_{\alpha,0}(M)$ le groupe des difféomorphismes de M qui préservent α, isotopes à l'identité via une isotopie qui préserve α.

Tout difféomorphisme de M qui préserve α préserve son champ de Reeb. Il commute donc avec l'action du cercle sur M et induit un difféomorphisme de V. Soit (F_t) une isotopie sur M, engendrée par le champ de vecteurs dépendant du temps Y_t, et telle que $F_t^*\alpha = \alpha$ ($t \in [0,1]$). Alors l'isotopie (f_t) de V induite par (F_t) est l'isotopie hamiltonienne associée au champ $\pi_*(Y_t)$. Les éléments de $G_{\alpha,0}(M)$ induisent donc des difféomorphismes hamiltoniens de V et ceci définit un morphisme $G_{\alpha,0}(M) \to \mathscr{G}$.

Inversement, nous pouvons "intégrer" l'application θ précédemment construite : si (f_t) est une isotopie hamiltonienne sur V engendrée par le champ de vecteurs hamiltonien Z_t, l'isotopie $\Theta(f_t)$ engendrée par le champ de vecteurs $\theta(Z_t)$ relève (f_t) ; le morphisme ci-dessus est donc surjectif. Étudions son noyau. Soit $\varphi : M \to M$ un difféomorphisme dans $G_{\alpha,0}(M)$ qui induit l'identité sur V. Puisque φ commute avec l'action du cercle sur M, φ est une rotation dans chaque fibre de M. Il existe donc une application $u : V \to \mathbf{S}^1$ telle que $\varphi(x) = u(\pi(x)) \cdot x$. On vérifie aisément que φ ne préserve la forme de contact α que si l'application u est constante. Le noyau du morphisme $G_{\alpha,0}(M) \to \mathscr{G}$ est donc isomorphe au cercle $\mathbf{S}^1$. Nous avons une extension centrale :

$$0 \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow G_{\alpha,0}(M) \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0.$$

Lemme 1.1.2 *La classe d'homotopie (à extrémités fixées) de l'isotopie $\Theta(f_t)$ ne dépend que de celle de (f_t).*

Preuve : si $F_t : M \to M$ est une isotopie qui préserve la forme de contact α, engendrée par le champ de vecteurs Y_t, notons $A(F_t) = \int_0^1 \int_M \alpha(Y_t)\alpha \wedge (d\alpha)^n dt$. Il n'est pas difficile de s'assurer que ce nombre ne dépend que de la classe d'homotopie (à extrémités fixes) de (F_t) (voir [5, 6]).

Considérons maintenant un chemin d'isotopies hamiltoniennes $(f_{t,s})$ avec $f_{0,s} = \mathbb{1}$ et $f_{1,s} = f$ fixé, pour tout s. Notons $H_{t,s}$ la famille de hamiltoniens correspondante (normalisée par $\int_V H_{t,s}\,\omega^n = 0$ pour tous (t,s)) et $F_{t,s} = \Theta(f_{t,s})$. Puisque A ne dépend que de la

classe d'homotopie d'une isotopie, nous avons :

$$A((F_{1,s})_{0\leq s\leq s_0}) = A((F_{t,s_0})_{0\leq t\leq 1}) - A((F_{t,0})_{0\leq t\leq 1}).$$

Mais $A((F_{t,0})_{0\leq t\leq 1}) = \int_0^1 \int_V H_{s,t}\,\omega^n dt = 0$ et de même, $A((F_{t,s_0})_{0\leq t\leq 1}) = 0$. Nous avons donc, pour tout s_0 :

$$A((F_{1,s_0})_{0\leq s\leq s_0}) = 0.$$

Ceci implique que $\int_M \alpha(X_s)\alpha\wedge(d\alpha)^n = 0$, pour tout s, où le champ de vecteurs X_s est défini par :

$$X_s(f_{1,s}(x)) = \frac{d}{ds} f_{1,s}(x).$$

Mais ce champ de vecteurs préserve α, et est en tout point proportionnel au champ de Reeb X de α. Il doit donc être un multiple constant de X : $X_s = a(s)X$. Puisque la fonction (constante !) $\alpha(X_s) = a(s)$ est de moyenne nulle sur M, nous avons $a(s) = 0$. Le chemin de difféomorphismes $(F_{1,s})$ est constant. □

Ainsi, si le groupe $\mathscr{G}$ est simplement connexe, l'extension précédente est scindée : si $f \in \mathscr{G}$, nous pouvons choisir une isotopie (f_t) reliant l'identité à f. Le difféomorphisme $\Theta(f) : M \to M$ qui est le temps 1 de l'isotopie $\Theta(f_t)$ ne dépend que du difféomorphisme f et définit une section de l'homomorphisme $G_{\alpha,0}(M) \to \mathscr{G}$. Grâce au théorème de Banyaga qui assure que le groupe $\mathscr{G}$ est simple [5], la section qui scinde l'extension est unique.

Si V est une surface fermée orientée de genre supérieur ou égal à 2, le groupe $\mathscr{G}$ est simplement connexe, pour les raisons suivantes. D'une part, la composante neutre $\mathrm{Diff}_0(V,\omega)$ du groupe des difféomorphismes de V qui préservent l'aire est contractile : d'après une version forte d'un théorème de Moser [90], elle a le type d'homotopie de la composante neutre du groupe de tous les difféomorphismes de V, et ce dernier groupe est contractile [34]. D'autre part l'application $\mathscr{G} \to \mathrm{Diff}_0(V,\omega)$ induit une injection au niveau des groupes fondamentaux (voir [86]). Le groupe $\mathscr{G}$ est donc simplement connexe. Ainsi, pour une surface de genre supérieur, l'extension ci-dessus est canoniquement scindée.

1.1.3 Classe d'Euler bornée

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats classiques concernant la cohomologie bornée des groupes discrets (voir par exemple [10, 21, 54, 61] pour une introduction plus détaillée). Nous utiliserons notamment le fait suivant, déjà mentionné dans l'introduction : pour tout groupe discret Γ, le noyau de l'application $H_b^2(\Gamma,\mathbf{R}) \to H^2(\Gamma,\mathbf{R})$ est isomorphe à l'espace

$$QM_h(\Gamma,\mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{R}).$$

Rappelons-en la preuve : si $\phi : \Gamma \to \mathbf{R}$ est un quasi-morphisme homogène, notons $c_\phi(x,y) = \mathfrak{d}\phi(x,y) = \phi(xy) - \phi(x) - \phi(y)$ le cobord de ϕ. L'application c_ϕ vérifie la relation de cocycle :

$$c_\phi(x,y) + c_\phi(xy,z) = c_\phi(x,yz) + c_\phi(y,z),$$

et est bornée (par le défaut de ϕ). Elle définit donc une classe de cohomologie bornée $[c_\phi] \in H_b^2(\Gamma,\mathbf{R})$, qui est triviale en cohomologie usuelle (car c_ϕ est le cobord de ϕ). Nous

avons bien construit une application

$$\kappa : QM_h(\Gamma, \mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{R}) \to Ker(H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})).$$

Supposons la classe $[c_\phi]$ triviale. Dans ce cas, il existe une application **bornée** $\varphi : \Gamma \to \mathbf{R}$ telle que les cobords de ϕ et φ soient égaux. Autrement dit, l'application $\psi := \phi - \varphi$ est un homorphisme de Γ dans $\mathbf{R}$. Le quasi-morphisme homogène

$$\psi - \phi = \varphi$$

est borné. Il est donc identiquement nul. Finalement, $\phi = \psi$ est un homorphisme. L'application κ est injective. Pour prouver que κ est surjective, considérons une classe de cohomologie bornée $[c]$, triviale en cohomologie usuelle. Il existe donc une application $\varphi : \Gamma \to \mathbf{R}$ telle que c soit le cobord de φ : $c(x, y) = \varphi(xy) - \varphi(x) - \varphi(y)$. Puisque c est bornée, φ est un quasi-morphisme que l'on peut écrire $\varphi = \varphi_h + \varphi_b$ où φ_b est bornée et φ_h est homogène. Les cocycles c et c_{φ_h} sont cohomologues (via la fonction bornée φ_b) et $[c] = \kappa([\varphi_h])$.

Continuons avec quelques rappels sur la *classe d'Euler bornée* d'un groupe d'homéomorphismes du cercle, suivant [54, 57]. Nous noterons $\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ le groupe des homéomorphismes du cercle $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui préservent l'orientation et $\widetilde{\mathrm{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1)$ le groupe des homéomorphismes croissants de $\mathbf{R}$ qui commutent aux translations entières. Nous avons une extension centrale :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1) \longrightarrow \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1) \longrightarrow 0.$$

On associe classiquement à cette extension une classe de cohomologie

$$eu \in H^2(\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1), \mathbf{Z})$$

de la manière suivante. Considérons une section *ensembliste*

$$s : \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1) \to \widetilde{\mathrm{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1),$$

c'est-à-dire, pour tout homéomorphisme $f \in \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$, choisissons un relevé $s(f)$ de f à $\mathbf{R}$. Si f_1 et f_2 sont deux homéomorphismes du cercle, les homéomorphismes $s(f_1) \circ s(f_2)$ et $s(f_1 \circ f_2)$ de $\mathbf{R}$ relèvent tous deux l'homéomorphisme $f_1 \circ f_2$. Ils diffèrent donc par une translation entière. Notant $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la translation d'amplitude 1, nous pouvons écrire :

$$s(f_1) \circ s(f_2) = s(f_1 \circ f_2) \circ T^{c(f_1, f_2)} = T^{c(f_1, f_2)} \circ s(f_1 \circ f_2),$$

où $c(f_1, f_2) \in \mathbf{Z}$. L'application c vérife la relation de cocycle :

$$c(f_1, f_2) + c(f_1 f_2, f_3) = c(f_1, f_2 f_3) + c(f_2, f_3).$$

La classe de cohomologie définie par c est la classe d'Euler eu de l'extension. Elle ne dépend pas du choix de la section s.

Nous pouvons désormais faire un choix particulier pour la section s : pour tout homéomorphisme $f \in \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$, appelons $s_b(f)$ l'homéomorphisme de $\mathbf{R}$ qui relève f et tel que $s_b(f)(0) \in [0, 1[$. Notons c_b le cocycle associé à cette section particulière.

Lemme 1.1.3 ([54, 57]) *Le cocycle c_b est à valeurs dans $\{0,1\}$.*

Preuve : Fixons deux éléments f_1 et f_2 de $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$. Puisque $s_b(f_1)$ est croissant et commute aux translations entières, et que $s_b(f_2)(0) \in [0,1[$, nous avons :

$$0 \leq s_b(f_1) \circ s_b(f_2)(0) < 2.$$

Par ailleurs $s_b(f_1 \circ f_2)(0) \in [0,1[$ et

$$s_b(f_1) \circ s_b(f_2)(0) = s_b(f_1 \circ f_2)(0) + c(f_1, f_2).$$

On en déduit sans peine que $c(f_1, f_2) \in \{0,1\}$. □

Le cocycle c_b associé à cette section particulière détermine donc une classe de cohomologie bornée $eu_b \in H_b^2(\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1), \mathbf{Z})$ dont l'image par l'application naturelle

$$\zeta : H_b^2(\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1), \mathbf{Z}) \to H^2(\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1), \mathbf{Z})$$

est la classe d'Euler eu. On peut montrer aisément que l'application ζ est injective. La classe eu_b est donc bien définie, elle ne dépend pas du choix de la section s telle que c soit borné. C'est la *classe d'Euler bornée*, introduite par Ghys dans [54].

Ainsi, à toute action d'un groupe discret Γ sur le cercle (par homéomorphismes préservant l'orientation), donnée par un morphisme $\rho : \Gamma \to \text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$, nous pouvons associer une classe $eu_b(\rho) \in H_b^2(\Gamma, \mathbf{Z})$. C'est le "pull-back" de la classe eu_b par ρ. C'est bien sûr un invariant de conjugaison topologique. Sa classe de cohomologie usuelle $eu(\rho)$ est la classe de l'extension

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0,$$

où $\widetilde{\Gamma}$ est défini comme suit :

$$\widetilde{\Gamma} = \{(\gamma, f) \in \Gamma \times \widetilde{\text{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1), f \, relève \, \rho(\gamma)\}.$$

Nous noterons $\tau : \widetilde{\text{Homéo}}_+(\mathbf{S}^1) \to \mathbf{R}$ l'application nombre de translation : pour tout x de $\mathbf{R}$, nous avons $\tau(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(x)-x}{n}$, ainsi que l'inégalité :

$$|\tau(f) - (f(x) - x)| \leq 1.$$

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, l'application τ est un quasi-morphisme homogène (voir [10, 57, 85] à ce sujet) qui est bien sûr intiment relié à la classe d'Euler bornée, comme le montre la propositon suivante. Nous supposons ci-dessous que ρ est un homomorphisme d'un groupe discret Γ dans le groupe $\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$, $\widetilde{\Gamma}$ est l'extension de Γ associée, comme ci-dessus.

Proposition 1.1.4 ([10]) *Le cobord de la fonction nombre de translation $\tau : \widetilde{\Gamma} \to \mathbf{R}$ descend en un 2-cocycle borné à valeurs réelles sur Γ qui représente l'image dans $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ de la classe $eu_b(\rho)$.*

Preuve : il suffit de prouver le résultat lorsque le groupe Γ est $\widetilde{\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)}$ tout entier. Puisque le nombre de translation τ vérifie $\tau(\mathbf{f} \circ T^k) = \tau(\mathbf{f}) + k$ ($\mathbf{f} \in \widetilde{\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)}$, $k \in \mathbf{Z}$), il est clair que la quantité

$$\tau(\mathbf{f}_1 \circ \mathbf{f}_2) - \tau(\mathbf{f}_1) - \tau(\mathbf{f}_2)$$

($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \widetilde{\text{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)}$), ne dépend que des homéomorphismes du cercle f_1, f_2 induits par $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$. On note $m(f_1, f_2)$ cette quantité. Considérons la section s_b définie plus haut, et réécrivons l'équation

$$s_b(f_1) \circ s_b(f_2) = s_b(f_1 \circ f_2) \circ T^{c_b(f_1, f_2)}.$$

Appliquons τ à cette égalité, nous obtenons :

$$\tau(s_b(f_1) \circ s_b(f_2)) = \tau(s_b(f_1 \circ f_2)) + c_b(f_1, f_2),$$

puis, retranchant $\tau(s_b(f_1)) + \tau(s_b(f_2))$ à chaque membre :

$$\tau(s_b(f_1) \circ s_b(f_2)) - \tau(s_b(f_1)) - \tau(s_b(f_2)) = \mathfrak{d}(\tau \circ s_b)(f_1, f_2) + c_b(f_1, f_2).$$

Puisque le membre de gauche est égal à $m(f_1, f_2)$, nous obtenons bien que les cocycles m et c_b sont cohomologues, via la fonction (bornée) à valeurs réelles $\tau \circ s_b$. □

Nous supposons désormais que S est une surface fermée orientée de genre g supérieur ou égal à 2. Nous noterons M la variété formée par les droites orientées tangentes à S, $\widetilde{S}$ le revêtement universel de S, et $\widetilde{M}$ la variété des droites orientées tangentes à $\widetilde{S}$. Le choix d'une métrique à courbure constante sur S permet d'identifier M et $\widetilde{M}$ aux fibrés unitaires tangents à S et $\widetilde{S}$ respectivement, ils héritent alors d'une structure de $\mathbf{S}^1$-fibrés principaux. Nous noterons X le champ de vecteurs sur M tangent aux fibres de l'application $\pi : M \to S$ engendré par cette action du cercle. On note également S^1_∞ le cercle à l'infini de $\widetilde{S}$ déterminé par cette métrique, et $p_\infty : \widetilde{M} \to S^1_\infty$ la projection naturelle. La variété $\widetilde{M}$ est difféomorphe à $\widetilde{S} \times S^1_\infty$ et le feuilletage $(\widetilde{S} \times \{*\})_{*\in S^1_\infty}$ descend en un feuilletage $\mathscr{F}$ sur M. C'est le feuilletage stable du flot géodésique sur M. Enfin, si $\gamma : [0,1] \to S^1_\infty$ est un chemin continu, nous noterons $n(\gamma)$ l'entier défini comme suit. Si un paramétrage de S^1_∞ par $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est donné, notons $\widetilde{\gamma}$ un relevé de γ à $\mathbf{R}$. On pose :

$$n(\gamma) = [\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)],$$

où $[t]$ désigne la partie entière d'un réel t. Cet entier ne dépend pas du choix du paramétrage. Pour tout homéomorphisme $h : S^1_\infty \to S^1_\infty$, les chemins γ et $h(\gamma)$ vérifient $n(\gamma) = n(h(\gamma))$. Si γ et β sont deux chemins dans S^1_∞ avec $\gamma(1) = \beta(0)$ nous avons :

$$(*) \quad |n(\gamma * \beta) - n(\gamma) - n(\beta)| \leq 2.$$

Notons enfin que l'extension

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \pi_1(S) \longrightarrow 0$$

du groupe fondamental de S déterminée comme ci-dessus par son action sur le cercle S^1_∞, est isomorphe à l'extension centrale donnée par le groupe fondamental du fibré unitaire tangent à S :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(S) \longrightarrow 0.$$

C'est un résultat très classique que nous rappelons brièvement. Fixons un point base $(\widetilde{x}, v)$ dans le fibré unitaire tangent à $\widetilde{S}$, au-dessus du point $(x, v) \in M$. Nous allons expliquer comment construire un morphisme :

$$u : \pi_1(M, (x, v)) \to \widetilde{\Gamma}.$$

On vérifie sans peine que c'est un isomorphisme. Pour cela nous pensons au revêtement universel de S^1_∞ comme à l'espace des classes d'homotopie de chemin basés en $p_\infty(\widetilde{x}, v)$ dans S^1_∞. Considérons donc un lacet $\alpha(t)$ dans M, basé en (x, v) et notons $\widetilde{\alpha(t)}$ son relevé issu de $(\widetilde{x}, v)$. La projection de α dans S détermine un élément $\gamma \in \pi_1(S, x)$ et donc un homéomorphisme de S^1_∞ (encore noté γ). L'homéomorphisme $u([\alpha])$ est l'unique relevé de γ qui envoie la classe du chemin constant $p_\infty(\widetilde{x}, v)$ sur la classe du chemin $p_\infty(\widetilde{\alpha(t)})$. Le nombre de translation de l'homéomorphisme $u([\alpha])$ peut être approximativement calculé, en effet, on a :

$$(**) \quad |\tau(u([\alpha])) - n(p_\infty(\widetilde{\alpha(t)}))| \leq 2.$$

Nous omettrons parfois d'indiquer l'isomorphisme u. Ainsi, si $[\alpha] \in \pi_1(M, (x, v))$, nous noterons $\tau([\alpha])$ le nombre de translation de l'homéomorphisme $u([\alpha])$.

À chaque ouvert connexe $U \subset S$, distinct de S, nous allons maintenant associer un élément canonique e_U de l'espace

$$QM_h(\pi_1(U), \mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\pi_1(U), \mathbf{R}).$$

Puisqu'un quasi-morphisme homogène est invariant par conjugaison, nous oublierons parfois de choisir un point base pour le groupe $\pi_1(U)$. La représentation $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R}) \subset \mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ associée à la métrique à courbure constante choisie sur S fournit, d'après ce qui précède, une classe $eu_b(S) \in H^2_b(\pi_1(S), \mathbf{Z})$. Cette classe ne dépend pas du choix de la métrique hyperbolique sur S. En effet, si deux métriques hyperboliques sur S sont données, les deux représentations $\pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ associées sont conjuguées à l'intérieur du groupe $\mathrm{Homéo}_+(\mathbf{S}^1)$ (voir, par exemple, [63] à ce sujet). Notons $i_U : \pi_1(U) \to \pi_1(S)$ le morphisme naturel. Puisque le groupe $H^2(\pi_1(U), \mathbf{R})$ est trivial, la classe $i_U^* eu_b(S)$ (que nous considérons ici comme une classe réelle) est dans le noyau

$$\mathrm{Ker}(H^2_b(\pi_1(U), \mathbf{R}) \to H^2(\pi_1(U), \mathbf{R})).$$

C'est la classe e_U. Nous allons maintenant donner une description "concrète" de cette classe, c'est-à-dire, nous allons construire un quasi-morphisme homogène qui la représente. Soit $\psi : U \times \mathbf{S}^1 \to \pi^{-1}(U)$ une trivialisation du fibré $\pi : M \to S$ au-dessus de U. Si z_0 est un point sur $\mathbf{S}^1$ et si γ est un lacet dans U basé en x_0, nous pouvons considérer le lacet $\psi(\gamma(t), z_0)$ dans $\pi^{-1}(U)$ et en choisir un relevé $\widetilde{\psi(\gamma(t), z_0)}$ à $\widetilde{M}$. On pose : $\phi_{z_0}([\gamma]) = n(p_\infty(\widetilde{\psi(\gamma(t), z_0)}))$. Si $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ sont deux éléments du groupe $\pi_1(U)$, nous pouvons

choisir deux relevés à $\widetilde{M}$, $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ des lacets $\psi(\gamma_1(t), z_0)$ et $\psi(\gamma_2(t), z_0)$, tels que $\alpha_2(0) = \alpha_1(1)$. Nous avons alors $\phi_{z_0}([\gamma_2 * \gamma_1]) = n(p_\infty(\alpha_2 * \alpha_1))$, et la propriété $(*)$ donne :

$$|\phi_{z_0}([\gamma_2 * \gamma_1]) - \phi_{z_0}([\gamma_2]) - \phi_{z_0}([\gamma_1])| \leq 2.$$

Autrement dit, ϕ_{z_0} est un quasi-morphisme. Son homogénéisé ϕ ne dépend pas du point z_0. A l'addition d'un homomorphisme près, le quasi-morphisme ϕ ne dépend pas de la trivialisation ψ, la classe

$$[\phi] \in QM_h(\pi_1(U), \mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\pi_1(U), \mathbf{R})$$

est donc canonique. Expliquons pourquoi elle est égale à la classe e_U précédemment décrite. Le morphisme $\pi_1(U) \to \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ définit une action de $\pi_1(U)$ sur le cercle, donc une extension :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \widetilde{\pi_1(U)} \longrightarrow \pi_1(U) \longrightarrow 0.$$

Ici $\widetilde{\pi_1(U)}$ s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(U) \times \pi_1(M)$. L'application $[\gamma] \mapsto ([\gamma], [\psi(\gamma, z_0)])$ est une section de cette extension. D'après la proposition 1.1.4, le cobord de l'application

$$[\gamma] \to \tau([\psi(\gamma, z_0)])$$

représente la classe de cohomologie bornée e_U. La fonction $A([\gamma]) = \tau([\psi(\gamma, z_0)]) - \phi([\gamma])$ est bornée : en effet, $A([\gamma]) = \tau([\psi(\gamma, z_0)]) - \phi_{z_0}([\gamma]) + \phi_{z_0}([\gamma]) - \phi([\gamma])$. Le premier terme est borné d'après l'inégalité $(**)$, le second l'est aussi car ϕ est l'homogénéisé de ϕ_{z_0}. Les cobords de ϕ et τ sont donc cohomologues via la fonction bornée A. Le cobord de ϕ représente également la classe e_U. C'est exactement dire que $[\phi]$ s'identifie à e_U lorsque l'on plonge $\mathrm{QM}_h(\pi_1(U), \mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\pi_1(U), \mathbf{R})$ dans $H_b^2(\pi_1(U), \mathbf{R})$.

Nous donnons enfin une dernière manière de décrire le quasi-morphisme ϕ. On fixe un point $\widetilde{x_0} \in M$ au-dessus de x_0. Si $[\gamma] \in \pi_1(U, x_0)$, on note $\widetilde{\gamma}$ son relevé issu de $\widetilde{x_0}$ tangent au feuilletage $\mathscr{F}$. On peut écrire $\widetilde{\gamma}(t) = \psi(\gamma(t), z(t))$. Notons $f([\gamma])$ la variation de l'argument de $z(t)$ comptée en tours. Alors f est un quasi-morphisme dont l'homogénéisé est égal à $-\phi$. On peut en quelque sorte penser à un feuilletage transverse aux fibres du fibré $M \to S$ comme à une "quasi-trivialisation" du fibré. Alors que la comparaison de deux trivialisations du fibré au-dessus de l'ouvert U fournit un homomorphisme $\pi_1(U) \to \mathbf{Z}$, la comparaison du feuilletage avec une trivialisation fournit un quasi-morphisme homogène sur le groupe $\pi_1(U)$.

Si le groupe $\pi_1(U)$ est abélien, il n'admet pas de quasi-morphisme homogène non-trivial (c'est-à-dire autre que les homomorphismes). En revanche si le groupe $\pi_1(U)$ est libre non-abélien, la classe $[\phi]$ va apparaître comme une obstruction à ce que le quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S : \mathscr{G}_S \to \mathbf{R}$ que nous allons définir se restreigne en le morphisme de Calabi sur le groupe $\mathscr{G}_U$.

1.2 Cas des surfaces hyperboliques

1.2.1 Construction du quasi-morphisme

Nous supposons désormais que la surface S est munie d'une forme d'aire ω, d'aire totale égale à $2g-2$, et considérons le groupe $\mathscr{G}_S$ de ses difféomorphismes hamiltoniens. Nous sommes fin prêts pour démontrer le :

Théorème 1 *Il existe un quasi-morphisme homogène*

$$\mathfrak{Cal}_S : \mathscr{G}_S \to \mathbf{R},$$

dont la restriction aux sous-groupes $\mathscr{G}_U$ est égale au morphisme de Calabi, dès que U est difféomorphe à un disque ou à un anneau, et qui est invariant par conjugaison par tout difféomorphisme symplectique.

D'après un théorème de Moser [90], sur une surface fermée deux formes d'aire ayant la même aire totale sont images l'une de l'autre par un difféomorphisme isotope à l'identité. Nous pouvons donc supposer que la forme d'aire ω est la forme associée à une métrique à courbure constante (égale à -2π) sur S. Le choix de cette métrique définit une action du cercle sur le fibré M, engendrée par un champ de vecteurs X. Si ϕ_X^t désigne le flot de X et si $v \in M$, la direction $\phi_X^t(v)$ est obtenue à partir de v par une rotation d'angle $2\pi t$. Nous noterons α une 1-forme sur M telle que $\alpha(X) = 1$ et $\pi^*\omega = d\alpha$. La forme α est une forme de contact de champ de Reeb égal à X (nous noterons encore X le relevé à $\widetilde{M}$ de ce champ). Nous sommes dans la situation du paragraphe 1.1.2.

Soit (f_t) une isotopie hamiltonienne sur S. Notons $\Theta(f_t) : M \to M$ l'isotopie qui relève (f_t), construite au paragraphe 1.1.2, et (F_t) l'isotopie de $\widetilde{M}$ qui relève $\Theta(f_t)$. Si v et w sont deux points de $\widetilde{M}$ tels que $\widetilde{\pi}(v) = \widetilde{\pi}(w)$ (où $\widetilde{\pi}$ est la projection $\widetilde{M} \to \widetilde{S}$), on peut écrire $w = \phi_X^{u_0}(v)$ avec $u_0 \in [0,1[$. Notons $G(u,t) = p_\infty(F_t\phi_X^{uu_0}(v))$ $((t,u) \in [0,1]^2)$. Le lacet lu sur le "bord" de G a un indice n égal à 0. Puisque F_t commute au flot de X, nous avons

$$\begin{aligned} G(u,0) &= p_\infty(\phi_X^{uu_0}(v)), \\ G(u,1) &= p_\infty(\phi_X^{uu_0}(F_1(v))). \end{aligned}$$

Les courbes $(\phi_X^{uu_0}(v))_{u\in[0,1]}$ et $(\phi_X^{uu_0}(F_1(v)))_{u\in[0,1]}$ sont chacune contenues dans une fibre de la projection $\widetilde{M} \to \widetilde{S}$ et tournent d'au plus un tour. Puisque l'application p_∞ restreinte à une fibre de $\widetilde{M} \to \widetilde{S}$ est un homéomorphisme sur S^1_∞, nous avons :

$$\begin{aligned} n(G(-,0)) &= 0, \\ n(G(-,1)) &= 0 \end{aligned}$$

(la partie entière d'un réel $t \in [0,1[$ est nulle). On en déduit aisément $|n(p_\infty(F_t(v))) - n(p_\infty(F_t(w)))| \leq 2$. On définit alors, pour $\widetilde{x} \in \widetilde{S}$, $\widetilde{\mathrm{angle}}(\widetilde{x}, f_1) = -\inf_{\widetilde{\pi}(v)=\widetilde{x}} n(p_\infty(F_t(v)))$. Pour tout $v \in \widetilde{M}$ avec $\widetilde{\pi}(v) = \widetilde{x}$ on a $|\widetilde{\mathrm{angle}}(\widetilde{x}, f_1) + n(p_\infty(F_t(v)))| \leq 2$. Notons que,

comme la notation le suggère, le nombre $\widetilde{\text{angle}}(\widetilde{x}, f_1)$ ne dépend pas du choix de l'isotopie hamiltonienne qui relie l'identité à f_1. En effet, la classe d'homotopie de (f_t) est unique puisque le groupe $\mathscr{G}$ est simplement connexe. D'après le lemme 1.1.2 les classes d'homotopie de $(\Theta(f_t))$ et (F_t) sont également uniques.

La fonction $\widetilde{\text{angle}}(-, f_1)$ est invariante sous l'action du groupe fondamental de S et définit une fonction mesurable bornée, notée $\text{angle}(-, f_1)$, sur S.

Lemme 1.2.1 *Pour tous difféomorphismes $f, g \in \mathscr{G}$ nous avons :*

$$|\text{angle}(-, fg) - \text{angle}(-, g) - \text{angle}(g(-), f)| \leq 8.$$

Preuve : fixons un point $\widetilde{x}$ dans $\widetilde{S}$. Nous voulons prouver que

$$|\widetilde{\text{angle}}(\widetilde{x}, fg) - \widetilde{\text{angle}}(\widetilde{x}, g) - \widetilde{\text{angle}}(g(\widetilde{x}), f)| \leq 8.$$

On fixe des isotopies (f_t) et (g_t) reliant l'identité à f et g respectivement, et on note (F_t) et (G_t) les isotopies de $\widetilde{M}$ qui les relèvent, construites comme précédemment. Choisissons une direction v au-dessus de $\widetilde{x}$. Il suffit d'établir l'inégalité :

$$|n(p_\infty(G_t(v))) + n(p_\infty(F_t(G_1(v)))) - n(p_\infty((F_t) * (G_t)(v)))| \leq 2$$

(en effet chacun des 3 termes ci-dessus diffère d'au plus 2 du terme correspondant dans l'inégalité que nous souhaitons prouver). Mais ceci résulte de l'inégalité $(*)$ vérifiée par l'indice n. □

Avec la terminologie introduite dans l'introduction de ce chapitre, le lemme précédent assure que l'application $f \mapsto \text{angle}(-, f)$ est un quasi-cocycle. L'application qui, au difféomorphisme hamiltonien f associe l'intégrale $\int_S \text{angle}(-, f)\omega$ est donc un quasi-morphisme. Nous pouvons l'homogénéiser pour définir

$$\mathfrak{Cal}_S(f) := \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_S \text{angle}(-, f^p)\omega.$$

Le lemme précédent donne également :

$$|\text{angle}(-, f^{p+n}) - \text{angle}(-, f^n) - \text{angle}(f^n(-), f^p)| \leq 8.$$

D'après le théorème ergodique sous-additif [75, 96], la suite de fonctions $\frac{1}{p}\text{angle}(-, f^p)$ converge ω-presque partout quand p tend vers l'infini vers une fonction mesurable bornée $\widehat{\text{angle}}(-, f)$. À partir de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons par récurrence

$$|\text{angle}(-, f^{pk}) - \sum_{i=0}^{k-1} \text{angle}(f^{ip}(-), f^p)| \leq 8(k-1);$$

puis en divisant par kp, en faisant tendre k vers l'infini et en intégrant sur S :

$$|\int_S \widehat{\text{angle}}(-, f) - \frac{1}{p} \int_S \mathfrak{M}(\text{angle}(-, f^p))| \leq \frac{8}{p}.$$

Ici la fonction $\mathfrak{M}(\text{angle}(-, f^p))$ est la limite des moyennes de Birkhoff relatives à la transformation f^p pour la fonction mesurable $\text{angle}(-, f^p)$. Puisque les fonctions $\mathfrak{M}(\text{angle}(-, f^p))$ et $\text{angle}(-, f^p)$ ont même intégrale, nous obtenons :

$$|\int_S \widehat{\text{angle}}(-, f) - \frac{1}{p}\int_S \text{angle}(-, f^p)| \leq \frac{8}{p}.$$

En passant à la limite lorsque p tend vers l'infini, nous avons : $\mathfrak{Cal}_S(f) = \int_S \widehat{\text{angle}}(-, f)\omega$.

Discutons maintenant des différents choix effectués pour notre construction. L'indice n d'une courbe ne dépend pas du choix de la métrique. Si deux métriques (à courbure constante) g_1 et g_2 sont données, notons $S^1_{\infty,1}$ et $S^1_{\infty,2}$ les deux cercles à l'infini abstraits associés, et $p_{\infty,i} : \widetilde{M} \to S^1_{\infty,i}$ les projections associées. Il existe alors un homéomorphisme $h : S^1_{\infty,1} \to S^1_{\infty,2}$, équivariant pour l'action de $\pi_1(S)$, tel que $p_{\infty,2} = h \circ p_{\infty,1}$ (voir [63], par exemple). Ceci assure que l'indice n est indépendant de la métrique. Par ailleurs :

- Si l'on change de métrique, l'action du cercle sur M (i.e. le champ X) change, mais la classe d'Euler du fibré n'étant pas modifiée, on peut trouver un difféomorphisme de M, induisant l'identité sur S, qui entrelace les deux actions. On en déduit aisément l'invariance du quasi-morphisme.
- Lorsque la métrique est fixée, le choix de la forme α est sans importance. Une autre primitive de $\pi^*\omega$ valant 1 sur X serait de la forme $\alpha + \pi^*\beta$, où β est une 1-forme fermée sur la surface. En utilisant la nullité du flux d'une isotopie hamiltonienne, on voit que le quasi-morphisme final est inchangé.
- Une fois acquise l'indépendance de $\mathfrak{Cal}_S$ vis-à-vis de la métrique, l'invariance par conjugaison dans le groupe $\text{Symp}(S, \omega)$ des difféomorphismes de S qui préservent l'aire est claire. Il suffit de considérer une métrique (à courbure constante, de forme d'aire ω) et de la transporter par le difféomorphisme symplectique considéré.

Supposons que $U \subset S$ soit un ouvert connexe distinct de S, et (f_t) une isotopie hamiltonienne dans U. Nous entendons par là une isotopie engendrée par un hamiltonien $H : [0, 1] \times U \to \mathbf{R}$ à support compact. On note $f = f_1$. Nous allons calculer $\mathfrak{Cal}_S(f)$.

Choisissons une trivialisation $\psi : U \times \mathbf{S}^1 \to \pi^{-1}(U)$ du fibré $M \to S$ au-dessus de U, telle que $X = \frac{\partial}{\partial s}$ (où $s \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} = \mathbf{S}^1$ désigne la coordonnée angulaire sur le cercle). La 1-forme $\alpha - ds$ sur $\pi^{-1}(U)$ est alors nulle dans la direction du champ X, et invariante par son flot. Elle est donc de la forme $\pi^*\lambda$, où λ est une primitive de ω sur U. Notons également ϕ le quasi-morphisme homogène sur $\pi_1(U)$ associé à cette trivialisation, qui représente la classe e_U. Enfin, on note Z_t le champ de vecteurs qui engendre l'isotopie (f_t), H_t un hamiltonien pour Z_t avec $\text{supp}(H_t) \subset U$ et $\widetilde{H}_t$ la fonction de moyenne nulle sur S qui diffère de H_t par une constante. Remarquons que l'isotopie $\Theta(f_t)$ a une expression très simple "lue" dans la trivialisation ψ : dans les coordonnées $(x, s) \in U \times \mathbf{S}^1$ le champ horizontal $\widehat{Z}_t$ est

$$Z_t - \lambda(Z_t)\frac{\partial}{\partial s},$$

et le champ $\theta(Z_t)$ s'écrit :

$$Z_t + (\widetilde{H}_t - \lambda(Z_t))\frac{\partial}{\partial s}.$$

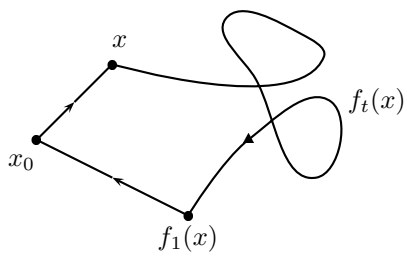

FIG. 1.1 – Le lacet $\gamma_{x,f}$

On obtient donc aisément :

$$\Theta(f_t)(\psi(x,s)) = \psi(f_t(x), \exp(2i\pi \int_0^t (\widetilde{H}_{t'} - \lambda(Z_{t'}))(f_{t'}(x))dt') \cdot z).$$

Fixons un point x_0 dans U et un compact K de U tel que $\mathrm{supp}(f_t) \subset K$. Pour tout point x de K, on peut choisir un chemin de classe C^1 par morceaux $\alpha_{x_0x} : [0,1] \to U$ de dérivée bornée indépendamment de x (la norme de la dérivée étant mesurée par rapport à une métrique riemannienne fixée sur S). On note γ_{x,f^p} le lacet $\alpha_{x_0x} * h_{p,t}(x) * \overline{\alpha_{x_0f^p(x)}}$. Ici, $\overline{\alpha_{x_0f^p(x)}}$ désigne le chemin $t \mapsto \alpha_{x_0f^p(x)}(1-t)$ et $(h_{p,t})$ désigne l'isotopie

$$(f_t) * (f_t \circ f) * \cdots * (f_t \circ f^{p-1});$$

$Z_{p,t}$ est le champ de vecteurs associé à $(h_{p,t})$ et $\widetilde{H}_{p,t}$ un hamiltonien pour $Z_{p,t}$, de moyenne nulle sur S. Enfin nous noterons $\langle \phi, f \rangle(x)$ la limite de la suite $(\frac{1}{p}\phi([\gamma_{x,f^p}]))_{p\geq 0}$.

Proposition 1.2.2 *Pour presque tout x de U nous avons :*

$$\widehat{\mathrm{angle}}(x,f) = -\langle \phi, f \rangle(x) + \mathfrak{M}(y \mapsto \int_0^1 (\lambda(Z_t) - \widetilde{H}_t)(f_t(y))dt)(x).$$

Dans cette proposition, et dans la suite, $\mathfrak{M}(\varphi)$ désignera la limite des moyennes de Birkhoff d'une fonction (intégrable) φ, relativement à la transformation f cette fois-ci.

Preuve : si x est dans U et z dans $\mathbf{S}^1$ nous avons :

$$\Theta(h_{p,t})(\psi(x,z)) = \psi(h_{p,t}(x), \exp(2i\pi \int_0^t (\widetilde{H}_{p,t'} - \lambda(Z_{p,t'}))(h_{p,t'}(x))dt') \cdot z).$$

Notons $v(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ les courbes

$$\Theta(h_{p,t})(\psi(x,z)),$$

$$\psi(h_{p,t}(x), z),$$

$$\psi(f^p(x), \exp(2i\pi \int_0^t (\widetilde{H}_{p,t'} - \lambda(Z_{p,t'}))(h_{p,t'}(x))dt')),$$

respectivement. On choisit deux relevés $\widetilde{v}_1$ et $\widetilde{v}_2$ à $\widetilde{M}$ tels que $\widetilde{v}_1(1) = \widetilde{v}_2(0)$, et l'on note $\widetilde{v} = \widetilde{v}_1 * \widetilde{v}_2$. Dans la suite d'égalités ci-dessous, le symbole $\simeq$ voudra dire que les deux membres de l'égalité diffèrent d'une quantité bornée, la valeur exacte de la borne important peu (mais pouvant cependant aisément être déterminée).

$$\begin{array}{rcl} \text{angle}(x, f^p) & \simeq & -n(p_\infty(\widetilde{v}(t))) \\ & \simeq & -n(p_\infty(\widetilde{v}_1(t))) - n(p_\infty(\widetilde{v}_2(t))), \\ -n(p_\infty(\widetilde{v}_2(t))) & \simeq & \int_0^1 (\lambda(Z_{p,t'}) - \widetilde{H}_{p,t'})(h_{p,t'}(x))dt', \\ -n(p_\infty(\widetilde{v}_1(t))) & \simeq & -\phi([\gamma_{x,f^p}]). \end{array}$$

Nous obtenons au total l'existence d'une constante C telle que :

$$|\text{angle}(x, f^p) - \int_0^1 (\lambda(Z_{p,t'}) - \widetilde{H}_{p,t'})(h_{p,t'}(x))dt' + \phi([\gamma_{x,f^p}])| \leq C.$$

Le résultat suit. □

Une fois la proposition précédente acquise, nous pouvons terminer la preuve du théorème 1. Hors de U la fonction $\widehat{\text{angle}}(x, f)$ est égale à $-\int_0^1 \widetilde{H}_t(x)dt$. En notant $A(y) = \int_0^1 (\lambda(Z_t) - \widetilde{H}_t)(f_t(y))dt$, nous obtenons donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{Cal}_S(f) & = & \int_S \widehat{\text{angle}}(x, f)\omega \\ & = & -\int_U \langle \phi, f \rangle(x)\omega - \int_{S \setminus U} \int_0^1 \widetilde{H}_t(x)dt\,\omega + \int_U A(x)\,\omega \\ & = & -\int_U \langle \phi, f \rangle \omega + \int_U \int_0^1 \lambda(Z_t)dt\,\omega \\ & = & -\int_U \langle \phi, f \rangle \omega + \mathfrak{Cal}_U(f). \end{array}$$

Nous noterons $\langle [\phi], f \rangle = \int_U \langle \phi, f \rangle \omega$. La fonction $\langle \phi, f \rangle$ dépend du choix de la trivialisation ψ, mais son intégrale ne dépend (comme l'indique notre notation) que de la classe $[\phi]$. En effet si l'on change de trivialisation, le quasi-morphisme ϕ est modifié par l'addition d'un homomorphisme $\pi_1(U) \to \mathbf{R}$ qui se représente par une 1-forme fermée β sur U. Nous devons alors ajouter à la fonction $\langle \phi, f \rangle$ le terme :

$$\langle \phi, f \rangle(x) = \mathfrak{M}(y \mapsto \int_0^1 \beta(Z_t)(f_t(y))dt)(x).$$

L'intégrale de ce terme supplémentaire vaut $\int_U \int_0^1 \beta(Z_t)dt\,\omega$. Mais cette dernière intégrale est nulle pour une isotopie hamiltonienne dans U. Cela traduit simplement le fait que le cycle asymptotique de Schwartzmann pour la mesure ω est nul (ou encore que le flux de l'isotopie est nul). La classe $[\phi]$ représente donc une obstruction à ce que le quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S$ coïncide avec l'invariant $\mathfrak{Cal}_U$ sur le groupe $\mathscr{G}_U$.

Si U est simplement connexe, la fonction $\langle \phi, f \rangle$ est identiquement nulle. Si U est un anneau, le groupe

$$QM_h(\pi_1(U), \mathbf{R})/\text{Hom}(\pi_1(U), \mathbf{R})$$

est trivial : tout quasi-morphisme homogène sur le groupe infini cyclique $\pi_1(U)$ est un homomorphisme. Le quasi-morphisme ϕ est donc un homomorphisme qui se représente par une 1-forme fermée β sur U. Nous avons donc :

$$\int_U \langle \phi, f \rangle \omega = \int_U \int_0^1 \beta(Z_t) dt \omega,$$

et cette dernière intégrale s'annule, comme précédemment. On a donc bien $\mathfrak{Cal}_S(f) = \mathfrak{Cal}_U(f)$ dans ces deux cas. Si le groupe $\pi_1(U)$ est libre non-abélien, l'espace

$$QM_h(\pi_1(U), \mathbf{R})/\mathrm{Hom}(\pi_1(U), \mathbf{R})$$

n'est pas trivial [8, 21], et le terme $\langle [\phi], f \rangle$ peut ne pas s'annuler. Nous avons achevé la preuve du théorème 1.

Nous rappelons maintenant des constructions de Gambaudo et Ghys, déjà évoquées dans l'introduction, qui permettent de prouver le fait suivant :

L'espace $\mathscr{E}$ des quasi-morphismes homogènes sur le groupe $\mathscr{G}_S$, nuls en restriction aux sous-groupes $\mathscr{G}_U$, où U est un disque ou un anneau, est de dimension infinie.

Maintenant, pour tout quasi-morphisme Φ dans $\mathscr{E}$, le quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S + \Phi$ coïncide avec l'invariant de Calabi sur le groupe $\mathscr{G}_U$ lorsque U est un disque ou un anneau. Nous obtenons donc un espace affine de dimension infinie de "quasi-morphismes de Calabi". Cependant, l'invariant $\mathfrak{Cal}_S$ est en quelque sorte plus "naturel" que les quasi-morphismes de $\mathscr{E}$ que nous allons construire. Il est invariant par conjugaison par tout difféomorphisme symplectique et ne dépend d'aucun choix. Au contraire, les invariants que nous allons construire maintenant dépendent du choix d'une métrique hyperbolique sur S.

Nous supposons donc fixée une métrique hyperbolique. À chaque 1-forme différentielle η sur S, nous allons associer un quasi-morphisme homogène Φ_η défini sur le groupe

$$\mathrm{Homéo}_0(S, \omega)$$

des homéomorphismes de S, isotopes à l'identité et qui préservent l'aire, qui contient bien sûr le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de S. Nous noterons $\widetilde{\eta}$ le relevé à $\widetilde{S}$ de la 1-forme η. Un homéomorphisme f de S isotope à l'identité admet un relevé canonique à $\widetilde{S}$. C'est l'unique homéomorphisme $\widetilde{f} : \widetilde{S} \to \widetilde{S}$ qui relève f et commute avec l'action du groupe fondamental de S sur $\widetilde{S}$. Si x est dans $\widetilde{S}$, nous noterons $\delta(x, \widetilde{f})$ l'unique géodésique de $\widetilde{S}$ qui relie x à $\widetilde{f}(x)$. La fonction

$$x \mapsto \int_{\delta(x, \widetilde{f})} \widetilde{\eta}$$

est invariante sous l'action du groupe fondamental de S et définit une fonction continue $v(\eta, f)$ sur la surface S. En utilisant le fait que la 2-forme $d\widetilde{\eta}$ vérifie une inégalité de la forme $||d\widetilde{\eta}|| \leq C||\widetilde{\omega}||$ et le fait que les triangles géodésiques de $\widetilde{S}$ sont d'aire bornée par π, nous obtenons aisément :

$$|v(\eta, fg) - v(\eta, g) - v(\eta, f) \circ g| \leq \pi C.$$

Ainsi $f \mapsto \int_S v(\eta, f)\omega$ définit un quasi-morphisme sur le groupe $\text{Homéo}_0(S, \omega)$, son homogénéisé sera noté Φ_η (contrairement à $\mathfrak{Cal}_S$, il dépend de la métrique). Dans [52], il est montré que la famille $(\Phi_\eta)_\eta$, restreinte au groupe $\mathscr{G}_S$, engendre un espace de dimension infinie dans l'espace $QM_h(\mathscr{G}_S, \mathbf{R})$. Les auteurs utilisent pour cela des "twists" supportés au voisinage d'une géodésique fermée simple. Notons que, pour que ceux-ci soient hamiltoniens, cette géodésique doit être homologue à 0.

Supposons que (f_t) soit une isotopie *symplectique* supportée dans le compact K contenu dans l'ouvert simplement connexe U de S. Notons $\widetilde{K} \subset \widetilde{U}$ des relevés à $\widetilde{S}$. Le compact $\widetilde{K}$ est stable par $\widetilde{f}$ et de diamètre fini. On a donc $|v(\eta, f^p)| \leq |\eta| \cdot \text{diam}(\widetilde{K})$ pour tout p. Ceci assure que $\Phi_\eta(f_1) = 0$. Soit maintenant (f_t) une isotopie *hamiltonienne* (engendrée par le champ Z_t) supportée dans l'anneau $A =]0, 1[\times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \hookrightarrow S$. On suppose bien sûr ce plongement injectif au niveau du groupe fondamental, sans quoi on serait ramené au cas précédent. On vérifie alors que la fonction

$$\widehat{v}(\eta, f) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} v(\eta, f^p)$$

est égale à $l \cdot \mathfrak{M}(\int_0^1 \beta(Z_t) \circ f_t dt)$, où la classe de la 1-forme fermée β sur A engendre $H^1(A, \mathbf{Z})$ et l est l'intégrale de la 1-forme η sur la géodésique fermée librement homotope dans S au générateur de $\pi_1(A)$. On en déduit $\Phi_\eta(f_1) = 0$. Nous avons bien établi que les quasi-morphismes Φ_η sont nuls en restriction aux sous-groupes de la forme $\mathscr{G}_U$, lorsque U est difféomorphe à un disque ou un anneau.

Comme annoncé dans l'introduction, nous allons maintenant expliquer pourquoi, sur la sphère, la condition "l'ouvert U peut être disjoint de lui-même par un difféomorphisme hamiltonien" est nécessaire pour qu'il existe un quasi-morphisme $\phi : \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2} \to \mathbf{R}$ qui coïncide avec le morphisme $\mathfrak{Cal}_U$ sur le groupe $\mathscr{G}_U$. Pour cela, nous allons montrer la :

Proposition 1.2.3 *On suppose la sphère $\mathbf{S}^2$ munie d'une forme symplectique d'aire totale 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il n'existe pas de quasi-morphisme homogène $\phi : \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2} \to \mathbf{R}$ ayant la propriété suivante.*

Pour tout ouvert $U \subset \mathbf{S}^2$, difféomorphe à un disque et vérifiant $\text{aire}(U) < \frac{1}{2} + \varepsilon$ *:*

$$\phi|_{\mathscr{G}_U} = \mathfrak{Cal}_U.$$

Preuve : on identifie la sphère $\mathbf{S}^2$ à la sphère unité de $\mathbf{R}^3$ munie de sa forme d'aire standard (normalisée). Fixons $\varepsilon > 0$ et supposons qu'il existe un quasi-morphisme $\phi : \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2} \to \mathbf{R}$ ayant la propriété ci-dessus. Considérons les deux disques suivant :

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2, z > -\alpha\},$$

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2, z < \alpha\}.$$

Si α est suffisamment petit, ces deux disques sont d'aire inférieure à $\frac{1}{2} + \varepsilon$. Considérons une fonction $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, lisse, vérifiant : $\varphi = 1$ au voisinage du fermé $\{z \geq \alpha\}$, $\varphi = 0$

au voisinage du fermé $\{z \leq -\alpha\}$, et $\varphi' \geq 0$. Soit $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ le difféomorphisme qui est le temps 1 du flot associé au hamiltonien $H(x, y, z) = \varphi(z)$. Calculons la valeur du quasi-morphisme ϕ sur f. Puisque $f \in \mathscr{G}_{U_1} \cap \mathscr{G}_{U_2}$, on devrait avoir à la fois $\phi(f) = \mathfrak{Cal}_{U_1}(f)$ et $\phi(f) = \mathfrak{Cal}_{U_2}(f)$. Mais pour calculer l'invariant $\mathfrak{Cal}_{U_i}(f)$ nous devons intégrer sur $\mathbf{S}^2$ un hamiltonien engendrant f et à support dans U_i. On obtient :

$$\mathfrak{Cal}_{U_1}(f) - \mathfrak{Cal}_{U_2}(f) = \int_{\mathbf{S}^2} H\omega - \int_{\mathbf{S}^2} (H-1)\omega = 1.$$

C'est absurde. Bien sûr, le fait que les invariants $\mathfrak{Cal}_{U_1}(f)$ et $\mathfrak{Cal}_{U_2}(f)$ soient distincts n'est possible que parce que le flux de f dans l'anneau $U_1 \cap U_2$ est non-nul. □

Pour conclure ce paragraphe, nous esquissons la preuve d'une généralisation de la construction du quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S$ en dimension supérieure.

Supposons que (V, ω) soit une variété symplectique entière. Comme expliqué au paragraphe 1.1.2, on peut alors construire un fibré en cercles $\mathbf{S}^1 \to M \to V$ au-dessus de V, muni d'une forme de contact α dont la différentielle est égale au "pull-back" de ω sur M. En fait, l'existence d'un quasi-morphisme homogène $q : \pi_1(M) \to \mathbf{R}$ qui prenne la valeur 1 sur l'élément de $\pi_1(M)$ représenté par la fibre du fibré $M \to V$ suffit à construire un quasi-morphisme du type $\mathfrak{Cal}_S$ sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de V (dans le cas où V était une surface hyperbolique, le quasi-morphisme q était le nombre de translation associé à l'action de $\pi_1(M)$ sur la droite réelle).

Expliquons pourquoi. Pour tout point x de M, choisissons un chemin $(\alpha_x(t))_{0 \leq t \leq 1}$ d'un point base x_0 fixé à x, et supposons la longueur de α_x uniformément bornée lorsque x parcourt M. Si (f_t) est une isotopie hamiltonienne sur V, et $\Theta(f_t)$ l'isotopie de M qui la relève, on peut considérer, pour $x \in M$, le lacet

$$\gamma_{x,f} = \alpha_x * (\Theta(f_t(x)) * \overline{\alpha_{\Theta(f)(x)}}.$$

L'application $f \mapsto \int_M q([\gamma_{x,f}])\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est alors un quasi-morphisme. Notons $\mathscr{C}$ son homogénéisé. On peut alors vérifier que, pour tout ouvert U difféomorphe à une boule, $\mathscr{C}(f) = \mathfrak{Cal}_U(f)$ $(f \in \mathscr{G}_U)$. La preuve est identique à celle du théorème que nous venons d'établir.

Il existe effectivement des variétés symplectiques entières, de dimension supérieure à 2, pour lesquelles on peut construire un tel quasi-morphisme q. Supposons que le revêtement universel de V soit contractile, ce qui permet d'identifier la cohomologie de V à celle de son groupe fondamental. D'après Barge et Ghys [10], l'existence d'un quasi-morphisme q comme ci-dessus est équivalente au fait que la classe $[\omega]$, considérée comme une classe réelle, soit *bornée*, c'est-à-dire, dans l'image de l'application naturelle $H_b^2(V, \mathbf{R}) \to H^2(V, \mathbf{R})$. Les variétés symplectiques obtenues comme quotient d'un espace symétrique hermitien de type non-compact (comme $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})/\mathrm{U}(n)$ par exemple) vérifient cette propriété (voir [32]).

1.2.2 Graphe de Reeb

Nous rappelons ici la construction du *graphe de Reeb* associé à une fonction de Morse sur une surface (voir [106]). Considérons donc une fonction de Morse $F : S \to \mathbf{R}$, nous

allons lui associer un graphe $\mathcal{G}$. Les points de $\mathcal{G}$ vont représenter les composantes connexes des niveaux de F. Nous ferons l'hypothèse que les valeurs critiques de F sont toutes distinctes. Notons $x_1, \ldots, x_l$, ses points critiques, $\lambda_j = F(x_j)$ ses valeurs critiques, avec $\lambda_1 < \cdots < \lambda_l$. Parmi les composantes connexes des niveaux de F, on trouve :

1. les points critiques de F d'indice 0 ou 2,
2. des courbes simples plongées,
3. des courbes immergées ayant un unique point double (correspondant à un point critique d'indice 1 de F).

A chaque composante de type 1 ou 3 on associe un sommet de $\mathcal{G}$. Notons K la réunion des composantes de type 1 ou 3. L'ouvert $S \backslash K$ est une réunion finie de cylindres difféomorphes à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. À chaque cylindre C on associe une arête dont les extrémités sont les sommets associés aux composantes de niveaux de F qui contiennent ∂C. Nous avons une application naturelle $p_{\mathcal{G}} : S \to \mathcal{G}$. Si x est un point de $\mathcal{G}$ qui n'est pas un sommet, nous noterons $[x]$ la classe d'homotopie libre du cercle $p_{\mathcal{G}}^{-1}(x)$ dans S, orienté par le champ de vecteur X_F, et si e est une arête de $\mathcal{G}$, nous noterons $[e]$ la valeur commune des classes $[x]$ lorsque x parcourt e.

Puisque l'application $p_{\mathcal{G}}$ est à fibres connexes, elle induit une surjection entre les groupes fondamentaux. Ainsi le graphe associé à une fonction de Morse sur la sphère $\mathbf{S}^2$ est simplement connexe : c'est un *arbre*.

Supposons maintenant que la surface soit de genre g supérieur ou égal à 2. Nous définissons alors un sous-ensemble $\mathscr{V}$ de l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$, de cardinal 2g-2, formé uniquement de sommets associés à des points critiques d'indice 1.

Nous pouvons *élaguer* le graphe $\mathcal{G}$ pour obtenir un graphe $\mathcal{G}'$, de la manière suivante. Le graphe $\mathcal{G}$ possède des sommets de degré 1 ou 3. Si v est un sommet de degré 1 de $\mathcal{G}$, nous retirons v ainsi que l'arête à laquelle il était relié, pour obtenir un nouveau graphe. Ce faisant, nous créons un sommet de degré 2 (ou de degré 1, à partir de la seconde itération de ce procédé). Répétons ce procédé jusqu'à obtenir un graphe $\mathcal{G}'$ qui ne possède plus que des sommets de degré 2 ou 3. Les sommets de degré 3 de $\mathcal{G}'$ sont en nombre $2g-2$. En effet, comme me l'a appris Bruno Sévennec, la quantité

$$\sum_v 2 - degré(v),$$

où la somme porte sur tous les sommets de $\mathcal{G}$, est égale à la caractéristique d'Euler de la surface. Si v est un sommet correspondant à la composante de niveau de F contenant le point critique x_i, on a

$$2 - degré(v) = (-1)^{\mathrm{ind} x_i},$$

et donc

$$\sum_v 2 - degré(v) = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{\mathrm{ind} x_i} = \chi(S).$$

La quantité $\sum_v 2 - degré(v)$ reste constante au cours de l'élagage. Nous obtenons donc :

$$2 - 2g = \sum_v 2 - degré(v)$$

où la somme porte cette fois sur les sommets de $\mathcal{G}'$. Chacun des termes $2 - degré(v)$ vaut 0 ou -1 et le nombre de termes non-nuls est égal au nombre de sommets de degré 3 de $\mathcal{G}'$. Les éléments de $\mathscr{V}$ sont les sommets de degré 3 de $\mathcal{G}'$.

Si v est un sommet de $\mathcal{G}$ associé à un point critique x_j d'indice 1 de F, pour ε assez petit, la composante connexe de x_j dans

$$F^{-1}([\lambda_j - \varepsilon, \lambda_j + \varepsilon])$$

est un pantalon que nous noterons P_v (nous omettrons de mentionner le paramètre ε, qui ne jouera aucun rôle par la suite). L'ensemble $F^{-1}([\lambda_j - \varepsilon, \lambda_j + \varepsilon])$ peut bien sûr avoir également des composantes connexes qui sont des cylindres.

Proposition 1.2.4 *Le sommet v associé à un point critique d'indice 1 est dans $\mathscr{V}$ si et seuleement si les trois composantes de bord de P_v sont essentielles dans S.*

Preuve : remarquons d'abord que pour toute arête e de $\mathcal{G}$ qui n'est pas dans $\mathcal{G}'$, la classe $[e]$ est triviale.

Nous commençons par montrer que l'ensemble des sommets v pour lesquels les trois composantes de bord de P_v sont essentielles est contenu dans $\mathscr{V}$. Ceci équivaut à dire que pour tous les sommets v correspondant aux points critiques d'indice 1 qui, soit ont été "élagués", soit apparaissent avec un degré 2 dans $\mathcal{G}'$, il existe une arête e adjacente à v pour laquelle la classe $[e]$ est triviale. Mais ceci est clair, puisque si v est un tel sommet, au moins une arête e qui lui est adjacente a été élaguée et vérifie donc $[e] = 0$.

Réciproquement, soit v un sommet (correspondant à un point critique d'indice 1) et e une arête adjacente à v qui est contractile. Nous allons prouver que $v \notin \mathscr{V}$. Soit

$$u : \mathbf{D}^2 \to S$$

un plongement du disque tel que $u(\partial \mathbf{D}^2) = p_{\mathcal{G}}^{-1}(x)$ pour un point x de e. À la fonction de Morse

$$F|_{u(\mathbf{D}^2)}$$

on peut associer un graphe de Reeb, comme dans le cas d'une surface fermée (la seule différence étant que l'arête associée aux composantes de niveau proches de $\partial \mathbf{D}^2$ n'est connectée qu'à un seul sommet). Ce graphe est un arbre et sera donc élagué lors du passage de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{G}'$. L'arête e sera donc élaguée ce qui assure que $v \notin \mathscr{V}$. □

Nous décrirons la structure du graphe $\mathcal{G}$ lorsque la surface est un tore au paragraphe 1.3.3.

1.2.3 Calcul sur des hamiltoniens autonomes

Nous supposons de nouveau que S est une surface de genre supérieur ou égal à 2 ici. Considérons l'espace

$$\mathcal{F} = \{H : S \to \mathbf{R}, C^\infty, \omega(X_H, X_F) = 0\},$$

des fonctions sur la surface S qui commutent avec F au sens de Poisson. Si la fonction $H : S \to \mathbf{R}$ est dans $\mathcal{F}$, elle descend en une fonction sur le graphe $\mathcal{G}$, nous pouvons donc écrire : $H = H_{\mathcal{G}} \circ p_{\mathcal{G}}$, où $H_{\mathcal{G}}$ est définie sur $\mathcal{G}$. L'ensemble

$$\Gamma = \{\varphi_H^1, H \in \mathcal{F}\}$$

est un sous-groupe abélien de $\mathscr{G}_S$ (où φ_H^t désigne le flot de X_H). Le lemme suivant est très classique.

Lemme 1.2.5 *Tout quasi-morphisme homogène sur un groupe abélien est un homomorphisme.*

Preuve : considérons un quasi-morphisme homogène $\phi : \Lambda \to \mathbf{R}$ où Λ est un groupe quelconque. Nous allons montrer que si x et y sont deux éléments de Λ qui commutent, alors $\phi(x \cdot y) = \phi(x) + \phi(y)$. Pour cela nous écrivons ($\delta(\phi)$ désignant toujours le défaut de ϕ)) :

$$\begin{array}{rcl} \phi(x \cdot y) & = & \frac{1}{p}\phi((x \cdot y)^p) \\ & = & \frac{1}{p}\phi(x^p \cdot y^p) \\ & = & \frac{1}{p}(\phi(x^p) + \phi(y^p) + O(\delta(\phi)) \\ & = & \phi(x) + \phi(y) + O(\frac{\delta(\phi)}{p}). \end{array}$$

Nous obtenons le résultat en faisant tendre p vers l'infini. □

D'après ce lemme, la restriction du quasi-morphisme homogène $\mathfrak{Cal}_S$ à Γ est un homomorphisme, que nous calculons dans le théorème suivant. Nous supposons toujours que l'aire totale de la forme ω est égale à $2g - 2$.

Théorème 2 *Si H est dans $\mathcal{F}$, nous avons :*

$$\mathfrak{Cal}_S(\varphi_H^1) = \sum_{v \in \mathscr{V}} H_{\mathcal{G}}(v) - \int_S H\,\omega$$

Nous noterons U l'ouvert $S \setminus \{x_l\}$ et nous fixons, encore une fois, une trivialisation du fibré $\pi : M \to S$ au-dessus de U. Celle-ci fournit une primitive λ de ω sur U et un quasi-morphisme homogène ϕ sur le groupe $\pi_1(U)$, comme précédemment. Pour un domaine $D \subset U$ à bord lisse, nous noterons $\langle[\phi], \partial D\rangle$ la somme des valeurs de ϕ sur les classes de conjugaison déterminées par chacune des composantes de bord de D. Concrètement, si $\gamma_1, \ldots, \gamma_k : \mathbf{S}^1 \to S$ sont k plongements du cercle dans S qui paramètrent les k composantes de bord de D (et qui sont orientés en tant que tels), on pose :

$$\langle[\phi], \partial D\rangle = \sum_{j=1}^{k} \phi([\gamma_j]).$$

Ce nombre ne dépend que de la classe $[\phi]$ car $\gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ borde dans U.

Proposition 1.2.6 *Si $D \subset U$ est à bord géodésique, pour une métrique à courbure constante (normalisée pour être de volume $2g-2$) quelconque* **définie sur** *S, on a $\langle [\phi], \partial D \rangle = -\chi(D)$.*

Pour démontrer la proposition, nous aurons besoin du :

Lemme 1.2.7 *On suppose fixée une métrique à courbure constante -2π sur S, de forme d'aire associée ω. Identifions le fibré M au fibré unitaire tangent de S. Alors la forme α telle que $\alpha(X) = 1$ et $d\alpha = \pi^*\omega$ peut être choisie nulle dans la direction du flot géodésique.*

Preuve du lemme : identifions M au quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\Gamma$ où Γ est isomorphe au groupe fondamental de S, plongé comme réseau cocompact dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de l'algèbre de Lie de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ et vérifient les relations :

$$[A, B] = -2B, \;\; [A, C] = 2C, \;\; [B, C] = -A.$$

Chacune de ces matrices induit un champ de vecteurs sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\Gamma$ que nous désignerons par la même lettre. Par exemple, si $x \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\Gamma$,

$$A(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(e^{tA} \cdot x).$$

Le champ de vecteurs $\pi(B - C)$ s'identifie au champ X précédemment décrit (la matrice $e^{\pi(B-C)}$ est égale à $-\mathrm{Id}$, qui est égale à Id dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$; le flot de $\pi(B - C)$ sur M est donc bien, comme celui de X, périodique de période 1). Cherchons maintenant une 1-forme α sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$, invariante à droite, telle que

$$\alpha(\pi(B - C)) = 1 \text{ et } d\alpha(\pi(B - C), \cdot) = 0.$$

Rappelons que si α est une 1-forme invariante et U et V sont deux champs de vecteurs invariants, nous avons :

$$d\alpha(U, V) = \alpha([U, V]).$$

La seconde condition ci-dessus est donc équivalente à la suivante :

$$\alpha \circ \mathrm{ad}(B - C) = 0,$$

où ad désigne la représentation adjointe de l'algèbre de Lie de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. Ces deux conditions permettent de déterminer uniquement α. Nous obtenons : $\alpha(A) = 0$, $\alpha(B) = \frac{1}{2\pi}$ et $\alpha(C) = \frac{-1}{2\pi}$. Il n'est pas difficile de vérifier que $d\alpha$ coïncide avec le relevé à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ de la forme d'aire hyperbolique sur le demi-plan de Poincaré (après une normalisation

convenable pour que la courbure soit -2π). Puisque le champ de vecteurs A engendre la direction du flot géodésique, nous obtenons le résultat souhaité. □

Preuve de la proposition : on peut supposer ici que ω est la forme d'aire associée à la métrique à courbure constante donnée sur S (car la classe $[\phi]$ est indépendante de la forme d'aire). On fixe une 1-forme α comme dans le lemme précédent. Au-dessus de U, dans une trivialisation dans laquelle $X = \frac{\partial}{\partial s}$, on a $\alpha = ds + \pi^*\lambda$ (où λ est une primitive de ω sur U). Soit γ une orbite périodique du flot géodésique telle que $\pi(\gamma)$ est une composante du bord de D. Puisque γ est fermée nous avons $\phi([\pi(\gamma)]) = -\int_\gamma ds$ (ceci est une conséquence de la dernière description que nous avons donnée du quasi-morphisme ϕ). Puisque α est nulle sur la direction tangente à γ, on obtient $\phi([\pi(\gamma)]) = \int_{\pi(\gamma)} \lambda$. En sommant sur les différentes composantes du bord de D, on obtient : $\langle [\phi], \partial D\rangle = \int_D \omega$, d'après le théorème de Stokes. Puisque la courbure de la métrique est -2π, nous avonc bien, par le théorème de Gauss-Bonnet : $\langle [\phi], \partial D\rangle = -\chi(D)$. □

Proposition 1.2.8 *Soit D un petit disque centré autour du point x_l dans S. Alors :*

$$\phi([\partial D]) = 2 - 2g.$$

Preuve : le lacet γ qui paramètre le bord de D (orienté en tant que tel) admet un relevé $\hat{\gamma}$ tangent au feuilletage $\mathscr{F}$ qui est fermé. Notant $\alpha = ds + \pi^*\lambda$ (dans la trivialisation fixée du fibré M au-dessus de U), nous avons : $\phi([\gamma]) = -\int_{\hat{\gamma}} ds = \int_\gamma \lambda - \int_{\hat{\gamma}} \alpha$. Lorsque le disque D est choisi de plus en plus petit, le terme $\int_\gamma \lambda$ tend vers $2-2g$ (par le théorème de Stokes), et le second terme tend vers 0. □

Si x est dans U et $p_{\mathcal{G}}(x)$ n'est pas un sommet de $\mathcal{G}$, nous noterons cette fois $[x]_U$ la classe d'homotopie libre dans U du cercle $p_{\mathcal{G}}^{-1}(p_{\mathcal{G}}(x))$, orienté par X_F. Comme précédemment, pour chaque arête e de $\mathcal{G}$, $[e]_U$ désignera la valeur commune des classes $[x]_U$ pour $x \in p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$. Nous noterons également e^+ et e^- les sommets aux extrémités de e (avec la convention $F_{\mathcal{G}}(e^-) < F_{\mathcal{G}}(e^+)$). Enfin nous fixons un paramétrage de $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$ par $(\theta, s) \in \mathbf{S}^1 \times]s_e^-, s_e^+[$ de sorte que $\omega = ds \wedge d\theta$ et $X_F(\theta, s) = \vartheta_F(s)\frac{\partial}{\partial\theta}$ (avec $\vartheta_F > 0$). Supposons que $H : S \to \mathbf{R}$ soit un hamiltonien commutant avec F. Alors, sur l'ouvert $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$, H ne dépend que de la coordonnée s et $X_H(\theta, s) = \vartheta_H(s)\frac{\partial}{\partial\theta}$ où $\vartheta_H(s)$ est la dérivée de H par rapport à s. Nous avons donc la relation suivante, qui sera utilisée à plusieurs reprises par la suite :

$$H_{\mathcal{G}}(s_e^+) - H_{\mathcal{G}}(s_e^-) = \int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)} d(Hd\theta) = \int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)} \vartheta_H(s) ds \wedge d\theta.$$

Si H est dans $\mathcal{F}$, bien que l'isotopie (φ_H^t) ne soit pas nécessairement à support dans U, on peut répéter le raisonnement qui a servi à établir la proposition 1.2.2. Notant $\widetilde{H}$ la fonction d'intégrale nulle sur S qui diffère de H par une constante, on a, presque partout sur U :

$$\widehat{\text{angle}}(x, \varphi_H^1) = \mathfrak{M}(y \mapsto \lambda(X_H)(y) - \widetilde{H}(y))(x) - \vartheta_H(x)\phi([x]_U).$$

Dans le lemme ci-dessous, le membre de gauche de l'égalité ne fait pas intervenir le hamiltonien (et en particulier ne dépend pas du choix d'une normalisation). Par contre, le choix d'une normalisation apparaît dans le membre de droite.

Lemme 1.2.9

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{F\leq\lambda_l-\varepsilon\}}\lambda(X_H)\omega=(2g-2)\widetilde{H}(x_l)$$

Preuve : c'est une simple application de la formule de Stokes. La 3-forme $\lambda\wedge\omega$ étant nulle, nous avons : $\lambda(X_H)\omega=\lambda\wedge(-d\widetilde{H})=d(\widetilde{H}\lambda)-\widetilde{H}\omega$. Donc

$$\int_{\{F\leq\lambda_l-\varepsilon\}}\lambda(X_H)\omega=\int_{\{F=\lambda_l-\varepsilon\}}\widetilde{H}\lambda-\int_{\{F\leq\lambda_l-\varepsilon\}}\widetilde{H}\omega.$$

Le second terme tend vers 0, et le premier est égal à $\widetilde{H}(\{F=\lambda_l-\varepsilon\})\cdot\text{aire}(\{F\leq\lambda_l-\varepsilon\})$, qui tend vers $(2g-2)\widetilde{H}(x_l)$. □

La somme des intégrales de $\vartheta_H(x)\phi([x]_U)$ sur les différentes arêtes vaut :

$$\sum_e\phi([e]_U)(H_{\mathcal{G}}(e^+)-H_{\mathcal{G}}(e^-)).$$

On peut bien sûr transformer cette somme en une somme portant sur les sommets de $\mathcal{G}$:

$$\sum_v C(v)H_{\mathcal{G}}(v).$$

Il nous faut calculer les constantes $C(v)$. Au préalable, notons le fait suivant :

Observation. Si x et y sont deux lacets dans $\pi^{-1}(U)$, tangents au feuilletage $\mathscr{F}$ de M, ayant même point base, alors $\phi([\pi(x*y)])=\phi([\pi(x)])+\phi([\pi(y)])$. Ceci est une conséquence facile de la dernière description du quasi-morphisme ϕ.

On peut alors commencer le calcul des constantes $C(v)$:

- Si v correspond à un extremum local autre que le maximum global, la constante $C(v)$ est nulle. En effet, elle est égale à la valeur de ϕ sur un petit lacet qui entoure l'extremum. Comme celui-ci est dans U le lacet est trivial dans $\pi_1(U)$.
- Si $v=p_{\mathcal{G}}(x_l)$, la constante $C(v)$ est égale à la valeur de ϕ sur la classe d'homotopie dans U d'un petit lacet γ qui entoure x_l (avec l'orientation du bord de $\{F\leq\lambda_l-\epsilon\}$). D'après la proposition 1.2.8, nous avons $\phi([\gamma])=2g-2$.

Il reste alors à calculer les constantes $C(v)$ pour les sommets v correspondant à des points critiques d'indice 1. Il n'est pas difficile de vérifier que

$$C(v)=-\langle[\phi],\partial P_v\rangle$$

dans ce cas, où P_v est le pantalon associé au sommet v introduit au paragraphe 1.2.2 (qui dépend d'un paramètre ε).

- Si l'une des composantes du bord de P_v est homotope à 0 dans U, ϕ est nul évalué contre celle-ci. Les deux autres composantes sont alors librement homotopes dans U, et les deux valeurs de ϕ correspondantes sont opposées. On peut donc supposer les trois composantes de ∂P_v essentielles dans U, sans quoi $C(v)=0$.

– Si en outre ces trois composantes sont essentielles dans S, on peut trouver une métrique à courbure constante (de forme d'aire égale à ω) qui rend le bord de P_v géodésique (ou seulement deux composantes sur trois de ∂P_v si deux d'entre elles sont librement homotopes). Une généralisation immédiate de la proposition 2.2 permet alors de montrer que la constante $C(v)$ vaut -1.
– Il reste à traiter le cas où l'une des composantes, disons α_1, de ∂P_v est contractile dans S. Dans ce cas elle borde un disque plongé qui contient le point x_l (puisque l'on a supposé cette même courbe essentielle dans U). Les deux autres composantes α_2 et α_3 de ∂P_v sont alors essentielles dans S. Modifions le pantalon P en un pantalon P' de composantes de bord $(\alpha'_i)_{1\leq i\leq 3}$ telles que α'_i est homotope à α_i, et α'_1 et α'_2 ont même point base. Le lacet α'_1 peut être choisi contenu dans un disque arbitrairement petit au voisinage de x_l. On peut alors trouver une métrique à courbure constante qui rend α'_2 géodésique. Notant β_2 l'orbite périodique du flot géodésique telle que $\pi(\beta_2) = \alpha'_2$, on peut trouver un relevé, tangent au feuilletage horocyclique et fermé, β_1 de α'_1, issu du même point que l'orbite β_2. Dans ce cas l'observation ci-dessus assure que $\phi([\alpha'_1 * \alpha'_2]) = \phi([\alpha'_1]) + \phi([\alpha'_2])$. Puisque la dernière composante de bord de P' définit la classe de conjugaison de $[\alpha'_1 * \alpha'_2]^{-1}$, on a $\langle[\phi], \partial P'\rangle = 0$.

En résumé, nous avons prouvé que la constante $C(p_{\mathcal{G}}(x_l))$ vaut $(2g-2)$, les autres constantes sont égales à -1 pour les éléments de $\mathscr{V}$ et 0 sinon. Finalement, la somme initiale $-\sum_v C(v)H_{\mathcal{G}}(v)$ est égale à :

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} H_{\mathcal{G}}(v) - (2g-2)H(x_l).$$

En lui ajoutant le terme

$$(2g-2)\widetilde{H}(x_l) = (2g-2)H(x_l) - \int_S H\,\omega$$

(qui venait de l'intégration du terme $\mathfrak{M}(y \mapsto \lambda(X_H)(y) - \widetilde{H}(y))(x)$), nous obtenons :

$$\mathfrak{Cal}_S(\varphi_H^1) = \int_S \widehat{\mathrm{angle}}(-, \varphi_H^1)\omega = \sum_{v\in\mathcal{V}} H_{\mathcal{G}}(v) - \int_S H\,\omega.$$

Nous avons achevé la preuve du théorème 2.

Les quasi-morphismes construits par Entov et Polterovich dans [36] ont la propriété supplémentaire suivante : ils sont continus par rapport à la *distance de Hofer* sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens (voir le chapitre 4 pour un rappel de la définition de cette distance). Nous ignorons si le quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S$ construit ici possède également cette propriété.

Nous décrivons maintenant de manière très succincte la construction du quasi-morphisme de Calabi $\mathscr{C}_{EP} : \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2} \to \mathbf{R}$ de Entov et Polterovich [36].

La notion clé pour cette construction est celle d'*invariant spectral* associé à un difféomorphisme hamiltonien d'une variété symplectique V. Elle a été introduite par Viterbo [115] pour les difféomorphismes hamiltoniens à support compact de $\mathbf{R}^{2n}$, puis a été étendue

aux cas des difféomorphismes hamiltoniens de certaines variétés symplectiques fermées par Schwarz [109] puis Oh [95]. Nous nous contentons ici d'exposer le cas où V est la sphère $\mathbf{S}^2$.

Considérons donc une isotopie hamiltonienne (f_t) sur $\mathbf{S}^2$, engendrée par un hamiltonien normalisé (H_t). Nous supposerons le hamiltonien périodique en temps, autrement dit, nous supposons que $H(t,x) = H_t(x)$ définit une fonction lisse sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$. Si $\gamma : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^2$ est un lacet et $u : \mathbf{D} \to \mathbf{S}^2$ (où $\mathbf{D}$ est le disque unité de $\mathbf{R}^2$) une application lisse telle que $u(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$, on définit l'*action* de (γ, u) par :

$$\mathscr{A}_H((\gamma,u)) = \int_{\mathbf{D}} u^*\omega - \int_0^1 H_t(\gamma(t))dt.$$

Cette quantité ne dépend que de γ et de la classe d'homotopie de l'application u relativement au bord de $\mathbf{D}$. Nous obtenons donc une fonction définie sur le revêtement universel $\widetilde{\Lambda}$ de l'espace des lacets Λ de la sphère $\mathbf{S}^2$. C'est la *fonctionnelle d'action* associée à (H_t) :

$$\mathscr{A}_H : \widetilde{\Lambda} \to \mathbf{R}.$$

Un élément de $\widetilde{\Lambda}$ consiste en la donnée d'une application (lisse) $\gamma : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^2$ et d'une classe d'homotopie d'application $u : \mathbf{D} \to \mathbf{S}^2$ qui coïncide avec γ sur le bord du disque. On peut montrer que les points critiques de $\mathscr{A}_H$ sont les paires (γ, u), où γ est un lacet de la forme :

$$\gamma(t) = f_t(x)$$

pour un point fixe x du difféomorphisme f_1.

Suivant Floer, on définit alors un complexe différentiel $(C_*(H), \partial)$ à partir des points critiques de la fonctionnelle $\mathscr{A}_H$, dont l'homologie est canoniquement isomorphe à l'homologie (quantique) de la sphère. C'est cette méthode qui a permis, sur une variété symplectique fermée quelconque, d'établir la conjecture d'Arnold : le nombre de points fixes d'un difféomorphisme hamiltonien est minoré par la somme des nombres de Betti de la variété ambiante. Concernant l'homologie de Floer, nous renvoyons, par exemple à [43, 44, 70, 80].

Dans le cas de la sphère $\mathbf{S}^2$ l'existence d'au moins deux points fixes distincts pour un difféomorphisme préservant l'aire s'établit bien sûr par des moyens beaucoup plus simples que l'homologie de Floer... Cependant, même dans ce cas, nous allons voir que l'on peut extraire des informations intéressantes et non-triviales du complexe $C_*(H)$ associé à une isotopie hamiltonienne.

Ce complexe est constitué des sommes formelles

$$v = \sum_{z \in \mathrm{Crit}(\mathscr{A}_H)} a_z z \quad (a_z \in \mathbf{C})$$

vérifiant la condition de finitude suivante : pour tout réel δ l'ensemble

$$\{z \in \mathrm{Crit}(\mathscr{A}_H) | a_z \neq 0, \mathscr{A}_H(z) \geq \delta\}$$

est fini. Nous noterons $C_*^\alpha(H)$ le sous-espace de $C_*(H)$ formé des éléments v pour lesquels $\mathscr{A}_H(z) \leq \alpha$ dès que $a_z \neq 0$. Un point crucial est que l'opérateur de bord

$$\partial : C_*(H) \to C_*(H)$$

préserve le sous-espace $C_*^\alpha(H)$, pour tout α. Ceci est dû au fait que l'opérateur ∂ est défini en comptant des trajectoires du flot de gradient négatif de la fonctionnelle d'action $\mathscr{A}_H$ dans l'espace $\widetilde{\Lambda}$.

Ainsi, bien que l'homologie du complexe $C_*(H)$ ne nous apprenne rien sur le difféomorphisme f_1, le complexe lui-même contient des informations qui dépendent du difféomorphisme à travers la filtration $(C_*^\alpha(H))_\alpha$. Fixons un isomorphisme $u : H_*(\mathbf{S}^2) \to H_*(C_*(H))$. Pour tout réel α, notons

$$i_\alpha : H_*(C_*^\alpha(H)) \to H_*(C_*(H))$$

l'application naturelle induite par l'inclusion de $C_*^\alpha(H)$ dans $C_*(H)$. Si $e \in H_*(\mathbf{S}^2)$ est une classe fixée, on peut définir l'*invariant spectral associé à e et à f_1*, noté $\rho(f_1, e)$, de la manière suivante. C'est la borne inférieure des nombres réels α tels que la classe $u(e) \in H_*(C_*(H))$ soit représentée par un cycle

$$v = \sum_{z \in \mathrm{Crit}(\mathscr{A}_\mathrm{H})} a_z z$$

tel que $\mathscr{A}_H(z) \leq \alpha$ pour tout z tel que $a_z \neq 0$. Autrement dit :

$$\rho(f_1, e) = \inf\{\alpha, u(e) \in \mathrm{Image}(i_\alpha)\}.$$

On peut montrer que le nombre $\rho(f_1, e)$ ne dépend bel et bien que du difféomorphisme f_1 et pas du choix de l'isotopie hamiltonienne (f_t). Si H est indépendant du temps et C^2-petit, on a $\rho(f_1, [\mathbf{S}^2]) = \max H$ et $\rho(f_1, [*]) = \min H$ (où $[*]$ désigne la classe d'homologie d'un point). Cependant, il est assez difficile de calculer ces invariants en général. De manière remarquable, Entov et Polterovich ont établi le résultat suivant [36].

L'application $f \mapsto \rho(f, [\mathbf{S}^2])$ est un quasi-morphisme sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de la sphère $\mathbf{S}^2$.

Le quasi-morphisme $\mathscr{C}_{EP}$ est alors obtenu par homogénéisation :

$$\mathscr{C}_{EP}(f) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \rho(f^p, [\mathbf{S}^2]).$$

Nous expliquons maintenant comment calculer la valeur du quasi-morphisme $\mathscr{C}_{EP}$ sur les temps 1 de certains flots autonomes. Soit $F : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de Morse dont toutes les valeurs critiques sont deux-à-deux distinctes. Soit $\mathcal{G}$ l'arbre de Reeb associé. Entov et Polterovich montrent qu'il existe un unique point $v \in \mathcal{G}$ tel que chaque composante connexe de l'ouvert

$$\mathbf{S}^2 \setminus p_{\mathcal{G}}^{-1}(v)$$

soit d'aire inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$ (en supposant l'aire totale de la sphère égale à 1). Le sommet v est appelé *médiane* de l'arbre $\mathcal{G}$. On a alors le résultat suivant :

Pour tout hamiltonien $H : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$ commutant avec F, nous avons :
$\mathscr{C}_{EP}(\varphi_H^1) = \int_{\mathbf{S}^2} H\omega - H_{\mathcal{G}}(v)$.

Ici, φ_H^t désigne toujours le flot de X_H. Autrement dit, la valeur $\mathscr{C}_{EP}(\varphi_H^1)$ est la différence entre la valeur moyenne et la valeur médiane de H. Comme nous l'avons déjà indiqué, il serait intéressant de donner une description alternative du quasi-morphisme $\mathscr{C}_{EP}$ et plus généralement de comprendre les propriétés des invariants spectraux associées à un difféomorphisme hamiltonien.

Nous évoquons maintenant très brièvement quelques liens entre les quasi-morphismes sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique compacte, et les *quasi-mesures* (voir [1]). Ces liens ont été découverts par Entov et Polterovich en 2004 [37]. Commençons par rappeler la définition suivante (ce que nous appelons quasi-mesure porte également le nom de "quasi-state" en anglais).

Définition 1 *Soit X un espace topologique compact. Notons $C^0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X. Pour chaque fonction $f \in C^0(X)$, nous noterons $A(f)$ la plus petite sous-algèbre fermée de $C^0(X)$ qui contient f. Une application $\mu : C^0(X) \to \mathbf{R}$ est une quasi-mesure si elle vérifie :*

1. $\mu(1) = 1$,
2. $\mu(f) \geq \mu(g)$ *si* $f \geq g$,
3. μ *est linéaire en restriction à* $A(f)$, *pour toute fonction* f.

Si f est une fonction continue sur X, l'algèbre $A(f)$ n'est autre que l'algèbre des fonctions de la forme $u(f)$, où $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue.

Bien sûr, toute mesure de probabilité borélienne sur X fournit un exemple de telle quasi-mesure. Mais il s'avère qu'il existe de telles fonctionnelles qui ne sont pas linéaires [1, 76]. Entov et Polterovich ont découvert le fait suivant. L'application

$$\begin{array}{rcl} H & \mapsto & \mu_{EP}(H) = \int_{\mathbf{S}^2} H\,\omega - \mathscr{C}_{EP}(\varphi_H^1) \\ C^\infty(\mathbf{S}^2) & \to & \mathbf{R} \end{array}$$

s'étend à l'espace des fonctions continues et définit une quasi-mesure. Pour comprendre pourquoi l'application μ_{EP} satisfait la condition 3 de la définition d'une quasi-mesure, le lecteur doit bien sûr avoir en tête le fait suivant. Si $H : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$ et $u_1, u_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont des fonctions lisses, les flots hamiltoniens associés à $u_1(H)$ et $u_2(H)$ commutent. Puisqu'un quasi-morphisme homogène est un homomorphisme sur les groupes abéliens, nous avons $\mu_{EP}(u_1(H) + u_2(H)) = \mu_{EP}(u_1(H)) + \mu_{EP}(u_2(H))$.

Dans le cas où S est une surface hyperbolique, M. Rosenberg [107] a prouvé, à partir de la formule du théorème 2, que l'application qui à une fonction C^∞ H sur S associe la valeur $\frac{1}{2g-2}(\mathfrak{Cal}_S(\varphi_H^1) + \int_S H\,\omega)$ est continue pour la topologie C^0, et que son extension à l'espace des fonctions continues sur S définit une quasi-mesure.

1.3 Cas du tore

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer comment donner une réponse à la question de Entov et Polterovich, dans le cas où la variété symplectique V est le tore $\mathbf{T}^2$. Dans

le cas des surfaces hyperboliques, comme nous l'avons expliqué plus haut, on peut dire que l'existence du quasi-morphisme $\mathfrak{Cal}_S$ est due aux deux raisons suivantes : la classe de cohomologie de la forme d'aire est (après une normalisation) *entière* et *bornée* au sens de Gromov [61]. Dans le cas du tore, nous allons voir qu'il existe une grande famille de quasi-morphismes qui répondent à la question d'Entov et Polterovich, sans pour autant que l'un de ces invariants se distingue des autres.

1.3.1 Interprétation topologique de l'invariant de Calabi

Nous noterons $\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ |x|^2 + |y|^2 \leq 1\}$ le disque unité de $\mathbf{R}^2$ et $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$ le groupe des difféomorphismes de $\mathbf{D}$ qui préservent la forme d'aire $\omega = dx \wedge dy$ et coïncident avec l'identité au voisinage du bord. Tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$ est le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne issue de l'identité. Le groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{D}}$ des difféomorphismes hamiltoniens de $\mathbf{D}$ coïncide donc avec le groupe $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$. Nous noterons également $X_2(\mathbf{D})$ l'espace des paires de points distincts du disque ; c'est-à-dire, l'espace $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ privé de la diagonale.

Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ un difféomorphisme égal à l'identité au voisinage du bord et préservant l'aire. Fixons une isotopie (f_t) reliant l'identité à $f_1 = f$. Si $(x, y) \in X_2(\mathbf{D})$, nous noterons $v_t \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$ le vecteur $f_t(x) - f_t(y)$. La variation de l'argument du vecteur v_t lorsque t varie de 0 à 1 ne dépend que de f et pas du choix de l'isotopie (f_t). En effet le groupe $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$ est contractile, deux isotopies quelconques reliant l'identité à f sont donc homotopes. Nous noterons $\mathrm{angle}_f(x, y)$ ce nombre réel. Ceci définit une fonction continue $\mathrm{angle}_f(\cdot, \cdot) : X_2(\mathbf{D}^2) \to \mathbf{R}$ qui vérifie la relation :

$$(*) \quad \mathrm{angle}_{fg}(x, y) = \mathrm{angle}_g(x, y) + \mathrm{angle}_f(g(x), g(y)),$$

pour tous difféomorphismes $f, g \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}^2, \mathrm{aire})$. La fonction angle_f peut bien entendu être définie lorsque f est un *homéomorphisme*, cependant, dans le cas des homéomorphismes, le lemme suivant n'est plus vrai.

Lemme 1.3.1 ([51]) *Si $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}^2, \mathrm{aire})$, la fonction angle_f est bornée.*

Preuve : nous reproduisons ici la preuve donnée dans [51]. Nous noterons $\mathbf{P}^1_+$ l'espace des droites orientées de $\mathbf{R}^2$. Dans $\mathbf{D} \times \mathbf{D} \times \mathbf{P}^1_+$, soit K le sous-ensemble *compact* formé des triplets (x, y, v) vérifiant la condition suivante : si x et y sont distincts, v est la droite de $\mathbf{R}^2$ engendrée par le vecteur $x - y$, si $x = y$, v est quelconque. Tout difféomorphisme f du disque définit un homéomorphisme $\hat{f}$ de K défini comme suit : $\hat{f}(x, y, [x - y]) = (f(x), f(y), [f(x) - f(y)])$ si x et y sont distincts ; et $\hat{f}(x, x, v) = (f(x), f(x), df_x(v))$. Si (f_t) est une isotopie reliant l'identité à f, nous considérons l'isotopie correspondante

$$\hat{f}_t : K \to K.$$

Ecrivant $\hat{f}_t(x, y, v) = (x_t, y_t, v_t)$ $((x, y, v) \in K)$, nous pouvons définir $\mathrm{angle}_f(x, y, v)$ comme étant la variation de l'argument de la droite v_t lorsque t varie de 0 à 1. La fonction $\mathrm{angle}_f : K \to \mathbf{R}$ ainsi définie étend la fonction angle_f initialement définie sur $X_2(\mathbf{D}) \subset K$ et est continue. Elle est donc bornée. $\square$

Dans la suite nous noterons $\overline{X_2(\mathbf{D})}$ le compact K décrit dans ce lemme. Bien sûr, la compactification de $X_2(\mathbf{D})$ ainsi obtenue a un sens intrinsèque et ne dépend pas du plongement du disque dans $\mathbf{R}^2$.

Si $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \text{aire})$, la fonction angle_f est donc intégrable sur $X_2(\mathbf{D})$. Notons

$$\mathscr{C}(f) = \int_{X_2(\mathbf{D})} \text{angle}_f(x,y)dxdy.$$

Nous avons utilisé ici le symbole $dxdy$ pour écrire l'intégrale par rapport à la mesure $\mu_\omega \otimes \mu_\omega$, où μ_ω est la mesure sur $\mathbf{D}$ associée à la forme d'aire ω. D'après la relation $(*)$ l'application $\mathscr{C}$ est un homomorphisme du groupe $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$ dans $\mathbf{R}$. Nous allons voir qu'il coïncide (à une constante près) avec l'invariant de Calabi.

Proposition 1.3.2 ([42, 51]) *Si $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$, nous avons : $\mathscr{C}(f) = 2\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}(f)$.*

Cette interprétation topologique de l'invariant de Calabi pour les difféomorphismes du disque a été découverte par A. Fathi dans sa thèse [42]. Elle a été ensuite utilisée par Gambaudo et Ghys [51] pour prouver l'invariance topologique de l'invariant de Calabi. Nous expliquons maintenant brièvement comment prouver cette proposition (le lecteur pourra consulter [51] pour plus de détails).

Une première manière d'établir la proposition (peut-être la moins satisfaisante) est d'utiliser le théorème de Banyaga [5] affirmant que le noyau de l'homomorphisme $\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}$ est simple. Comme conséquence de ce théorème, la restriction du morphisme $\mathscr{C}$ au groupe $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}$ est identiquement nulle (sinon $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}$ s'injecterait dans $\mathbf{R}$). Il existe donc un homorphisme $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tel que $\mathscr{C}(f) = \theta(\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}(f))$. Il n'est pas difficile de s'assurer que l'homomorphisme θ est continu. Il est donc de la forme $\theta(t) = \lambda t$, et l'on peut calculer la constante λ en choisissant un exemple simple de difféomorphisme f.

Une seconde manière d'établir la proposition est la suivante. Tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$ est limite (pour la topologie C^∞) d'une suite $(f_n) \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$ de difféomorphismes ayant la propriété suivante : chaque difféomorphisme f_n est un produit de difféomorphismes qui sont temps 1 d'un flot autonome. Puisque $\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}$ et $\mathscr{C}$ sont des homomorphismes et sont continus pour la topologie C^∞, il suffit de vérifier la relation pour les difféomorphismes de la forme φ_H^1 où $H : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ parcourt une famille dense dans l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur le disque. On peut considérer par exemple les fonctions sur le disque qui sont des fonctions de Morse en dehors d'un voisinage du bord, et qui coïncident avec une fonction du rayon au voisinage du bord. Si H est de cette forme on peut calculer explicitement la valeur de l'invariant $\mathscr{C}(\varphi_H^1)$ (et vérifier qu'il coïncide avec $2\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}(\varphi_H^1)$). Ce calcul peut être vu comme un cas particulier des calculs que nous allons faire dans la suite de ce chapitre pour établir le théorème 4. Nous ne le reproduisons donc pas ici.

Remarque. Dans la seconde (esquisse de) preuve, nous avons approché tout difféomorphisme du disque par un produit de difféomorphismes contenus dans des sous-groupes à 1-paramètre. En utilisant encore une fois le théorème de Banyaga déjà cité, on peut en fait prouver le résultat suivant : tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_c(\mathbf{D}, \omega)$ est le produit d'un

nombre fini de difféomorphismes qui sont temps 1 d'un flot autonome. En effet, notons Γ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{D},\omega)$ engendré par tous les difféomorphismes qui sont temps 1 d'un flot autonome. C'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{D},\omega)$, qui se surjecte sur $\mathbf{R}$ via l'invariant de Calabi $\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}$ et dont l'intersection avec $\mathrm{Ker}\,\mathfrak{Cal}_{\mathbf{D}}$ est non-triviale. Il est donc égal à $\mathrm{Diff}_c(\mathbf{D},\omega)$.

1.3.2 Quasi-morphismes de Gambaudo et Ghys

Il est implicite dans les constructions de Gambaudo et Ghys dans [52], qu'à tout quasi-morphisme homogène ϕ défini sur le groupe fondamental du tore privé d'un point, on peut associer un quasi-morphisme $\mathscr{C}_\phi$ défini sur le groupe $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{T}^2,\omega)$. Nous rappelons ici cette construction.

Nous noterons $X_2(\mathbf{T}^2)$ l'espace des paires de points distincts du tore $\mathbf{T}^2$. Comme c'était le cas pour l'espace des paires de points du disque au paragraphe précédent, nous aurons besoin de compactifier l'espace $X_2(\mathbf{T}^2)$. Il suffit pour cela de lui ajouter le fibré unitaire tangent au tore. Notons

$$\overline{X_2(\mathbf{T}^2)} = X_2(\mathbf{T}^2) \sqcup \left(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^1\right).$$

L'espace $\overline{X_2(\mathbf{T}^2)}$ a bien sûr une topologie naturelle qui en fait une variété à bord. Cette topologie est complètement déterminée en imposant que $X_2(\mathbf{T}^2) \subset \overline{X_2(\mathbf{T}^2)}$ soit un ouvert et que pour chaque disque $D \subset \mathbf{T}^2$ l'inclusion de $\overline{X_2(D)}$ dans $\overline{X_2(\mathbf{T}^2)}$ soit un homéomorphisme sur son image.

On notera également Σ la surface compacte à bord obtenue en éclatant l'origine dans le tore $\mathbf{T}^2$. on pense alors à $\mathbf{T}^2 - \{0\}$ comme à l'intérieur de Σ. Fixons un point base x_* dans $\mathbf{T}^2 - \{0\}$. Pour tout point v de $\mathbf{T}^2 - \{0\}$, choisissons un chemin $(\alpha_v(t))_{t\in[0,1]}$ de x_* à v dans $\mathbf{T}^2 - \{0\}$ de longueur bornée pour une métrique riemannienne définie sur Σ. Soit $f \in \mathrm{Diff}_0(\mathbf{T}^2,\omega)$ et (f_t) une isotopie reliant l'identité à f. Rappelons que si x et y sont deux points distincts de $\mathbf{T}^2$, la classe d'homotopie, à extrémités fixes, de la courbe

$$(f_t(x) - f_t(y))$$

dans $\mathbf{T}^2 - \{0\}$ ne dépend que de f (et de x et y), mais pas du choix de l'isotopie reliant f à l'identité. Ceci est une conséquence du fait suivant : tout lacet de difféomorphismes du tore est homotope à un lacet constituté de translations (voir [34]). On note alors $\alpha(f,x,y)$ l'élément du groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$ représenté par le lacet

$$\alpha_{x-y} * (f_t(x) - f_t(y)) * \overline{\alpha_{f(x)-f(y)}},$$

et $V_f(x,y) = \phi(\alpha(f,x,y))$. La fonction V_f dépend bien entendu du quasi-morphisme ϕ mais nous l'omettrons dans la notation. Il n'est pas difficile de s'assurer que l'on peut choisir les chemins (α_v) de telle sorte que la fonction V_f soit localement constante sur un ouvert de mesure pleine de $X_2(\mathbf{T}^2)$. Elle est donc mesurable.

Lemme 1.3.3 *La fonction V_f est bornée.*

Preuve : Choisissons un relevé $\widetilde{x_*}$ de x_* dans le revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ de Σ. Nous allons établir que la famille $\alpha(f,x,y)$ est contenue dans une partie bornée du groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$ lorsque (x,y) décrit $X_2(\mathbf{T}^2)$. Pour cela, il suffit de vérifier que les relevés (à $\widetilde{\Sigma}$) issus de $\widetilde{x_*}$ des lacets $\alpha_{x-y} * (f_t(x) - f_t(y)) * \overline{\alpha_{f(x)-f(y)}}$ ont une extrémité contenue dans un compact de $\widetilde{\Sigma}$. Mais ceci est une conséquence du fait que l'application continue

$$\begin{array}{rcl} X_2(\mathbf{T}^2) \times [0,1] & \to & \Sigma \\ (x,y,t) & \mapsto & f_t(x) - f_t(y) \end{array}$$

s'étend en une application continue définie sur l'espace compact $\overline{X_2(\mathbf{T}^2)} \times [0,1]$ et que les chemins $(\alpha_v)_{v \in \mathbf{T}^2 - \{0\}}$ ont une longueur bornée pour une métrique riemannienne définie sur Σ. □

Nous avons, une fois encore, la relation :

$$\alpha(fg,x,y) = \alpha(g,x,y) * \alpha(f,g(x),g(y)),$$

de laquelle nous déduisons :

$$|V_{f\circ g}(x,y) - V_g(x,y) - V_f(g(x),g(y))| \leq \delta(\phi)$$

($\delta(\phi)$ étant le défaut de ϕ). L'application

$$f \mapsto \int_{X_2(\mathbf{T}^2)} V_f(x,y)dxdy$$

est donc un quasi-morphisme sur le groupe $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{T}^2,\omega)$. On définit alors :

$$\mathscr{C}_\phi(f) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_{X_2(\mathbf{T}^2)} V_{f^p}(x,y)dxdy = \int_{X_2(\mathbf{T}^2)} \widetilde{V}_f(x,y)dxdy,$$

où $\widetilde{V}_f(x,y) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} V_{f^p}(x,y)$ est défini presque partout (par application, une fois encore, du théorème ergodique sous-additif).

Rappelons que l'espace des quasi-morphismes homogènes sur le groupe libre à deux générateurs (que nous identifions au groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$), et plus généralement sur tout groupe hyperbolique non-élémentaire, est de dimension infinie [21, 39]. Grâce à la construction que nous venons de présenter, nous obtenons donc une vaste collection de quasi-morphismes sur le groupe $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{T}^2,\omega)$. Pour illustrer ce propos, rappelons quelques constructions classiques de quasi-morphismes définis sur le groupe libre.

Nous présentons d'abord une construction tirée des articles [9, 52]. Choisissons une métrique hyperbolique complète et de volume fini sur $\mathbf{T}^2 - \{0\}$, et identifions son revêtement universel au disque de Poincaré :

$$\pi : \mathbb{D}^2 \to \mathbf{T}^2 - \{0\}.$$

Soit η une 1-forme à support compact sur $\mathbf{T}^2 - \{0\}$, et $\widetilde{\eta}$ son relevé à $\mathbb{D}^2$. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{T}^2 - \{0\}$ une courbe vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1) = x_*$, et $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{D}^2$ un relevé de γ. Désignons par $(\widetilde{\gamma})_{géo}$ l'unique géodésique de $\mathbb{D}^2$ reliant $\widetilde{\gamma}(0)$ à $\widetilde{\gamma}(1)$. La quantité :

$$\int_{(\widetilde{\gamma})_{géo}} \widetilde{\eta}$$

ne dépend pas du choix du relevé $\widetilde{\gamma}$. On la note $\varphi([\gamma])$. L'application φ est un quasi-morphisme de défaut majoré par $\pi|d\eta|_\infty$ (où la norme de $d\eta$ est mesurée par rapport à la métrique hyperbolique sur $\mathbf{T}^2 - \{0\}$). Nous pouvons donc l'homogénéiser pour définir :

$$\phi_{\eta,\mathbf{T}^2}([\gamma]) = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\varphi([\gamma]^p).$$

En utilisant la construction de Gambaudo et Ghys précédemment décrite, nous obtenons ainsi une grande famille de quasi-morphismes $(\mathscr{C}_{\phi_{\eta,\mathbf{T}^2}})_{\eta\in\Omega^1_c(\mathbf{T}^2-\{0\})}$ définis sur le groupe $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{T}^2,\omega)$. Dans [52], il est montré que l'espace vectoriel engendré par cette famille est de dimension infinie.

Remarque. Notons a et b les deux générateurs standard du groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$. Observons que la valeur de tous les quasi-morphismes $\phi_{\eta,\mathbf{T}^2}$ sur le commutateur $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ est nulle. En effet, supposons que $\gamma : [0,1] \to \mathbf{T}^2 - \{0\}$ (avec $\gamma(0) = \gamma(1) = x_*$) représente la classe $[a,b]$. Nous noterons $*^p\gamma$ le lacet γ concaténé p fois. On voit aisément que les projections dans $\mathbf{T}^2 - \{0\}$ des courbes

$$\left(\widetilde{*^p\gamma}\right)_{géo}$$

spiralent vers le cusp de $\mathbf{T}^2 - \{0\}$, seule une partie uniformément bornée de ces courbes reste dans le support de η. Ceci assure que $\phi_{\eta,\mathbf{T}^2}([\gamma]) = 0$.

Nous rappelons maintenant la construction des quasi-morphismes de Brooks [21], déjà évoquée dans l'introduction. Cette fois-ci, nous pensons au groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2-\{0\}, x_*)$ comme au groupe libre "abstrait" $F(a,b)$ engendré par a et b. Fixons un mot w en les générateurs a et b (et leurs inverses). Nous allons lui associer un quasi-morphisme $\varphi_w : F(a,b) \to \mathbf{R}$. Si $x \in F(a,b)$, définissons $\ell_w(x)$ comme le plus grand entier n tel que l'on puisse écrire x sous la forme :

$$x = c_1 \cdot w \cdot c_2 \cdots c_n \cdot w \cdot c_{n+1}$$

où les c_i sont des éléments (éventuellement réduits à l'identité) de $F(a,b)$ et où l'écriture ci-dessus est réduite. On pose alors : $\varphi_w(x) = \ell_w(x) - \ell_{w^{-1}}(x)$. On peut montrer (voir [21]) que l'application φ_w est un quasi-morphisme. Bien sûr, si w est égal à a ou b, φ_w est un homomorphisme. Notons ϕ_w le quasi-morphisme homogène associé à φ_w. Contrairement aux quasi-morphismes $\phi_{\eta,\mathbf{T}^2}$ précédemment décrits, l'application $\phi_{[a,b]}$ fournit un exemple de quasi-morphisme homogène prenant une valeur non-nulle sur le commutateur $[a,b]$: on a bien sûr $\phi_{[a,b]}([a,b]) = 1$.

Soit $D \subset \mathbf{T}^2$ un disque plongé dans le tore $\mathbf{T}^2$. Nous notons toujours $\mathscr{G}_D$ le groupe des difféomorphismes hamiltoniens à support dans D. Nous allons voir maintenant que les quasi-morphismes $\mathscr{C}_\phi$ permettent de répondre à la question de Entov et Polterovich. Notre contribution se borne à remarquer que la valeur du quasi-morphisme $\mathscr{C}_\phi$ sur un difféomorphisme à support dans un disque, ne dépend que de la valeur de ϕ sur le commutateur $[a,b]$:

Théorème 3 *Si $f \in \mathscr{G}_D$, nous avons : $\mathscr{C}_\phi(f) = 2\phi([a,b])\mathfrak{Cal}_D(f)$.*

Pour prouver le théorème, considérons une isotopie hamiltonienne (f_t) à support dans le disque D, et notons $f = f_1$. Nous voulons calculer $\widetilde{V}_f(x,y)$. Bien sûr, si x ou y n'est pas dans D, $\widetilde{V}_f(x,y) = 0$. On a donc :

$$\mathscr{C}_\phi(f) = \int_{X_2(D)} \widetilde{V}_f(x,y)dxdy.$$

Fixons un difféomorphisme du disque $D \subset \mathbf{T}^2$ sur le disque unité de $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$, qui soit conformément symplectique : $\varphi : D \subset \mathbf{T}^2 \to \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$ avec $\mathrm{aire}(D)\varphi^*(dx \wedge dy) = \pi\omega$. En conjuguant l'isotopie (f_t) par φ nous pouvons définir naturellement la fonction $\mathrm{angle}_f(x,y)$.

Lemme 1.3.4 *Il existe des éléments α_n et β_n dans le groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$, bornés dans $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$ indépendamment de n, tels que :*

$$\alpha(f^n, x, y) = \alpha_n * [a,b]^{m(x,y,n)} * \beta_n,$$

où $m(x,y,n)$ est la partie entière du réel $\mathrm{angle}_{f^n}(x,y)$.

Commençons par résumer la preuve de ce lemme en quelques mots. Le groupe fondamental de l'espace $X_2(D)$ est infini cyclique, engendré par l'élément ξ représenté par le lacet suivant :

$$\gamma(t) = (x, y(t)),$$

où x est un point quelconque de D et $y(t)$ est un lacet simple contenu dans $D - \{x\}$ dont le degré par rapport à x est 1. Notons $u_* : \pi_1(X_2(D)) \to \pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$ l'homomorphisme induit par l'application continue u obtenue en composant l'inclusion de $X_2(D)$ dans $X_2(\mathbf{T}^2)$ avec l'application $(x,y) \mapsto x - y$. Alors l'élément $u_*(\xi)$ est conjugué au commutateur $[a,b]$. Puisque les trajectoires des points x et y restent confinées dans le disque D, les lacets $\alpha(f^n, x, y)$ sont contenus, à une erreur bornée près, dans l'image de l'homomorphisme u_*. Plus précisément, ils coïncident (à une erreur bornée près) avec une puissance de $u_*(\xi)$ donnée par la partie entière du réel $\mathrm{angle}_f(x,y)$.

Preuve : choisissons un point base (x_0, y_0) dans $X_2(D)$, tel que $x_0 - y_0 = x_*$ (ceci est toujours possible quitte à changer le point x_*). Pour tout $(x,y) \in X_2(D)$, nous choisissons un chemin $\beta_{x,y}$ de (x_0, y_0) à (x,y) dans $X_2(D)$, de longueur bornée (pour une métrique riemannienne définie sur $\overline{X_2(\mathbf{T}^2)}$). Nous pouvons alors écrire le lacet $\alpha(f^n, x, y)$ sous la forme :

$$[\alpha_{x-y} * u(\overline{\beta_{x,y}})] * u_*([\beta_{x,y} * (f_{t,n}(x), f_{t,n}(y) * \overline{\beta_{f^n(x),f^n(y)}}]) * [u(\beta_{f^n(x),f^n(y)}) * \overline{\alpha_{f^n(x)-f^n(y)}}]$$

($(f_{t,n})$ désigne l'isotopie $(f_t) * (f_t \circ f) * \cdots * (f_t \circ f^{p-1})$). Les éléments $[\alpha_{x-y} * u(\overline{\beta_{x,y}})]$ et $[u(\beta_{f^n(x),f^n(y)}) * \overline{\alpha_{f^n(x)-f^n(y)}}]$ sont bornés indépendamment de n. Notons γ_n le lacet :

$$\beta_{x,y} * (f_{t,n}(x), f_{t,n}(y) * \overline{\beta_{f^n(x),f^n(y)}}.$$

Maintenant, pour tout entier n, l'élément $[\gamma_n] \in \pi_1(X_2(D))$ est égal à $\xi^{a(x,y,n)}$ pour un certain entier $a(x,y,n)$. Identifiant D au disque unité via le difféomorphisme $\varphi : D \to \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2$ fixé précédemment, nous pouvons définir une application

$$\begin{array}{rcl} A : X_2(D) & \to & \mathbf{S}^1 \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x-y}{|x-y|} \end{array}$$

Pour voir que $a(x,y,n) - \mathrm{angle}_{f^n}(,y)$ est borné (indépendamment de n) nous constatons que l'on peut exprimer ces quantités à l'aide de la 1-forme $A^* d\theta$ (θ désignant la coordonnée sur le cercle $\mathbf{S}^1$, paramétré par $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$) :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{angle}_{f^n}(x,y) & = & \int_{(f_{t,n}(x), f_{t,n}(y))_{t\in[0,1]}} A^* d\theta \\ a(x,y,n) & = & \int_{\gamma_n} A^* d\theta. \end{array}$$

On conclut en se souvenant que les chemins $\beta_{x,y}$ sont de longueur bornée. □

La fin de la preuve du théorème est maintenant aisée : le lemme précédent assure que

$$|V_{f^n}(x,y) - \phi([a,b]^{m(x,y,n)})| \leq 2\delta(\phi) + 2C,$$

où $C = \sup_n \max\{|\phi(\alpha_n)|, |\phi(\beta_n)|\}$. Nous avons donc :

$$|V_{f^n}(x,y) - \mathrm{angle}_{f^n}(x,y)\phi([a,b])| \leq 2\delta(\phi) + 2C + |\phi([a,b])|.$$

En divisant par n puis en passant à la limite, nous obtenons :

$$\widetilde{V}_f(x,y) = \mathfrak{M}(\mathrm{angle}_f)(x,y)\phi([a,b]),$$

où $\mathfrak{M}(\mathrm{angle}_f)$ désigne la limite des moyennes de Birkhoff de la fonction angle_f pour la transformation $f \times f : X_2(D) \to X_2(D)$. Finalement :

$$\int_{X_2(\mathbf{T}^2)} \widetilde{V}_f(x,y)dxdy = \phi([a,b]) \int_{X_2(D)} \mathrm{angle}_f(x,y)dxdy = 2\phi([a,b])\mathfrak{Cal}_D(f).$$

Nous avons achevé la preuve du théorème 3.

1.3.3 Hamiltoniens autonomes et graphe de Reeb

Dans ce paragraphe, nous calculons la valeur du quasi-morphisme $\mathscr{C}_\phi$ sur les temps 1 des flots hamiltoniens associés à des fonctions de Morse sur $\mathbf{T}^2$. De manière remarquable, nous obtenons là encore une formule qui fait intervenir la combinatoire du graphe de Reeb $\mathcal{G}$ associé à F. Le quasi-morphisme ϕ n'apparaît lui qu'à travers la valeur $\phi([a,b])$.

Dans le cas du tore, le graphe $\mathcal{G}$ a la structure suivante. Il contient un graphe circulaire $\mathcal{G}'$ de sommets $s_1, \ldots, s_k$ et d'arêtes $e_1, \ldots, e_k$ où e_i relie s_i à s_{i+1} ($1 \leq i \leq k-1$) et e_k relie s_k à s_1 ; et des arbres $T_1, \ldots, T_k$, tels que

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' \cup \left(\cup_{i=1}^k T_i\right).$$

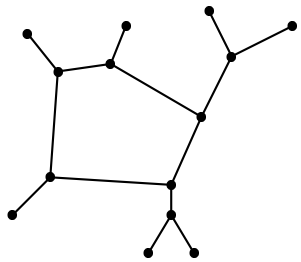

FIG. 1.2 – Le graphe de Reeb d'une fonction de Morse sur le tore

Les arbres T_i sont disjoints et l'intersection de T_i avec $\mathcal{G}'$ est égale à s_i.

Comme au paragraphe 1.2.3, nous noterons $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions (lisses) $H : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}$ qui commutent avec F, et, pour chaque arête e de $\mathcal{G}$, nous fixerons un système de coordonnées (θ, s) sur $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$ ayant les même propriétés que précédemment ($\omega = ds \wedge d\theta$, $X_F(\theta, s) = \vartheta_F(s)\frac{\partial}{\partial\theta}$ avec $\vartheta_F > 0$, et $X_H(\theta, s) = \vartheta_H(s)\frac{\partial}{\partial\theta}$ pour $H \in \mathcal{F}$).

Théorème 4 *Si H est dans $\mathcal{F}$, nous avons :*

$$\mathscr{C}_\phi(\varphi_H^1) = 2\phi([a,b]) \sum_{i=1}^{k} \int_{p^{-1}(T_i)} (H_{\mathcal{G}}(s_i) - H)\omega.$$

Si e est une arête de $\mathcal{G}'$, notons c_e la classe de conjugaison du groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\})$ représentée par le lacet $(\gamma(u) - x)_{u\in[0,1]}$ où x est un point quelconque du tore en dehors de $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$ et où la courbe simple γ fait un tour du cylindre $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$ avec l'orientation prescrite par $\frac{\partial}{\partial\theta}$. Quitte à inverser l'ordre cyclique dans la numérotation des sommets s_i, nous supposons une fois pour toute que $s_1 = e_1^-$ et $s_2 = e_1^+$; c'est-à-dire que F croit le long de l'arête e_1 orientée de s_1 à s_2.

Lemme 1.3.5 *Si H est dans $\mathcal{F}$, nous avons : $\sum_{i=1}^{k}(H_{\mathcal{G}}(e_i^+) - H_{\mathcal{G}}(e_i^-))\phi(c_{e_i}) = 0$.*

Preuve : nous allons montrer que

$$(H_{\mathcal{G}}(e_i^+) - H_{\mathcal{G}}(e_i^-))\phi(c_{e_i}) = (H_{\mathcal{G}}(s_{i+1}) - H_{\mathcal{G}}(s_i)))\phi(c_{e_1}),$$

pour tout $1 \leq i \leq k$ (en convenant que $s_{k+1} = s_1$). Le résultat sera alors clair, la somme initiale se transformant en la somme

$$\phi(c_{e_1}) \left(\sum_{i=1}^{k} H_{\mathcal{G}}(s_{i+1}) - H_{\mathcal{G}}(s_i) \right),$$

qui est bien sûr nulle. Il n'est pas difficile de s'assurer que toutes les classes c_e (lorsque e décrit l'ensemble des arêtes de $\mathcal{G}'$) sont égales, **à l'orientation près**. Pour conclure la preuve, il suffit de s'assurer que $c_{e_i} = c_{e_1}$ si et seulement si la fonction F croit lorsque l'arête e_i est parcourue de s_i à s_{i+1} (ce qui équivaut à dire que $e_i^+ = s_{i+1}$ et $e_i^- = s_i$).

Chaque arête e de $\mathcal{G}'$ définit une classe d'homologie $[e]$: c'est la classe du cercle $p_{\mathcal{G}}^{-1}(x)$ (où x est un point de e) orienté par le champ de vecteurs X_F. Les classes d'homotopie c_{e_i} et c_{e_1} sont égales si et seulement si les classes d'homologie $[e_i]$ et $[e_1]$ sont égales dans $H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$. Fixons une classe d'homologie $u \in H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$, qui se projette via $p_{\mathcal{G}}$ sur un générateur du groupe $H_1(\mathcal{G}, \mathbf{Z})$ dont l'orientation est celle donnée par l'ordre cyclique des sommets $s_1, \ldots, s_k$. Puisque nous savons que les classes $[e_i]$ et $[e_1]$ sont égales ou opposées, nous calculons leur intersection avec la classe u pour les distinguer. Nous avons bien sûr $u \cdot [e_1] = 1$. Par ailleurs l'intersection $u \cdot [e_i]$ est égale à 1 si et seulement F croît de s_i à s_{i+1}. C'est bien le résultat voulu. □

Pour prouver le théorème 4, nous devons calculer les intégrales

$$\int_{p^{-1}(e)\times p^{-1}(e')} \widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)dxdy$$

où e et e' parcourent l'ensemble des arêtes du graphe $\mathcal{G}$. En effet, on peut écrire $\mathscr{C}_\phi(\varphi_H^1) = \sum_{e,e'} \int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)\times p_{\mathcal{G}}^{-1}(e')} \widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)dxdy$. Nous distinguons pour cela quatre cas :

- e et e' sont contenues dans $\mathcal{G}'$.
- e est contenue dans $\mathcal{G}'$ et e' est contenue dans un arbre T_i.
- e est contenue dans un arbre T_i et e' est contenue dans $\mathcal{G}'$.
- e et e' sont contenues dans la réunion des arbres T_i.

Pour calculer $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}$, nous supposerons toujours $p_{\mathcal{G}}(x)$ et $p_{\mathcal{G}}(y)$ distincts. En effet l'ensemble

$$\{(x,y); p_{\mathcal{G}}(x) = p_{\mathcal{G}}(y)\}$$

est de mesure nulle. Plaçons nous dans le premier cas : $(x,y) \in p^{-1}(e) \times p^{-1}(e')$ (où e et e' sont des arêtes de $\mathcal{G}'$). Puisque x et y ont des orbites contenues dans des cercles disjoints, on peut écrire le lacet $\alpha(\varphi_H^n, x, y)$ comme le produit des deux lacets suivants :

$$\gamma_{1,n} = \alpha_{x-y} * (\varphi_H^t(x) - y)_{t\in[0,n]} * \overline{\alpha_{\varphi_H^n(x)-y}}$$
$$\gamma_{2,n} = \alpha_{\varphi_H^n(x)-y} * (\varphi_H^n(x) - \varphi_H^t(y))_{t\in[0,n]} * \overline{\alpha_{\varphi_H^n(x)-\varphi_H^n(y)}}$$

Nous noterons $S_* : \pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*) \to \pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$ l'automorphisme induit par l'application $x \mapsto -x$ de $\mathbf{T}^2 - \{0\}$ dans lui-même (on peut, au choix, choisir le point base x_* fixe sous l'application $x \mapsto -x$, ou bien considérer que l'automorphisme S_* n'est défini qu'à un automorphisme intérieur près, ce qui importera peu dans la suite).

Lemme 1.3.6 *Il existe des éléments $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ de $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$, bornés indépendamment de n dans $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$, tels que :*

$$\gamma_{1,n} = \alpha_n * c_e^{[n\vartheta_H(x)]} * \beta_n,$$

$$\gamma_{2,n} = \gamma_n * \left(S_*(c_{e'})^{[n\vartheta_H(y)]} \right) * \delta_n.$$

Remarque. Nous avons défini précédemment c_e comme étant une classe d'homotopie libre. Dans ce lemme nous supposons fixé une fois pour toutes un lacet représentant c_e (pour toute arête e de $\mathcal{G}'$).

Preuve : notons $x = (\theta, s)$, dans les coordonnées précédemment introduites. Écrivons $\gamma_{1,n}$ comme produit des deux lacets suivants :

$$\alpha_{x-y} * ((\theta + t, s) - y)_{t \in [0, [n\vartheta_H(x)]]} * \overline{\alpha_{x-y}}$$

$$\alpha_{x-y} * ((\theta + t, s) - y)_{t \in [[n\vartheta_H(x)], n\vartheta_H(x)]} * \overline{\alpha_{\varphi_H^n(x)-y}}.$$

Le premier est de la forme $\alpha_n * c_e^{[n\vartheta_H(x)]} \alpha'_n$, où α_n et α'_n sont des éléments de $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$ bornés indépendamment de n. Le second est borné. La preuve de la seconde égalité est bien sûr identique à la première. □

On déduit immédiatement de ce lemme la valeur de la fonction $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}$:

$$\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x, y) = \vartheta_H(x)\phi(c_e) + \vartheta_H(y)\phi(S_*(c_{e'})).$$

Après intégration, nous obtenons :

$$\int_{p^{-1}(e) \times p^{-1}(e')} \widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x, y)\, dxdy = (H_{\mathcal{G}}(e^+) - H_{\mathcal{G}}(e^-))\phi(c_e)\text{aire}(p_{\mathcal{G}}^{-1}(e'))$$

$$+(H_{\mathcal{G}}(e'^+) - H_{\mathcal{G}}(e'^-))\phi(S_*(c_{e'}))\text{aire}(p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)).$$

En utilisant le lemme 1.3.5 appliqué aux quasi-morphismes ϕ et $\phi \circ S_*$, on constate que la somme des expressions ci-dessus sur les arêtes de $\mathcal{G}'$ est nulle. La somme des contributions venant du premier cas ci-dessus est donc nulle.

Le second et le troisième cas sont identiques, et d'ailleurs très similaires au premier. Nous ne traiterons donc que le second. On suppose donc que $(x, y) \in p^{-1}(e) \times p^{-1}(e')$ (où e est une arête de $\mathcal{G}'$ et e' une arête d'un arbre T_i). Le lacet $\alpha(f^n, x, y)$ s'écrit, exactement comme dans le cas précédent, comme le produit des deux lacets suivants :

$$\alpha_{x-y} * (\varphi_H^t(x) - y)_{t \in [0,n]} * \overline{\alpha_{\varphi_H^n(x)-y}}$$

$$\alpha_{\varphi_H^n(x)-y} * (\varphi_H^n(x) - \varphi_H^t(y))_{t \in [0,n]} * \overline{\alpha_{\varphi_H^n(x)-\varphi_H^n(y)}}.$$

Cette fois, puisque la courbe $(\varphi_H^n(x) - \varphi_H^t(y))_{t \in [0,n]}$ reste confinée dans un disque de $\mathbf{T}^2 - \{0\}$, le second lacet ci-dessus reste dans une partie bornée du groupe fondamental lorsque n varie. La limite $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x, y)$ est donc égale à :

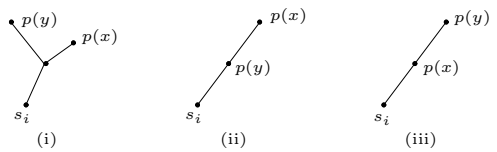

FIG. 1.3 –

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\phi([\alpha_{x-y} * (\varphi_H^t(x)-y)_{t\in[0,n]} * \overline{\alpha_{\varphi_H^n(x)-y}}]).$$

On constate, comme dans le lemme 1.3.6 que la limite ci-dessus est égale à $\vartheta_H(x)\phi(c_e)$. Nous avons alors :

$$\int_{p^{-1}(e)\times p^{-1}(e')} \widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)\,dxdy = (H_{\mathcal{G}}(e^+)-H_{\mathcal{G}}(e^-))\phi(c_e)\mathrm{aire}(p_{\mathcal{G}}^{-1}(e')).$$

En utilisant une fois encore le lemme 1.3.5, on constate que la somme sur les arêtes e de $\mathcal{G}'$ des intégrales

$$\int_{p^{-1}(e)\times p^{-1}(e')} \widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)\,dxdy$$

(lorsque e' est une arête fixée de l'un des arbres T_i) est nulle. La somme des contributions venant du second cas ci-dessus est donc nulle. Il en est de même pour le troisième cas.

Il nous reste à examiner le quatrième cas : $(x,y)\in p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)\times p_{\mathcal{G}}^{-1}(e')$, où les arêtes e et e' sont contenues dans la réunion des arbres T_i. Dans ce cas, si les arêtes e et e' sont contenues dans des arbres T_i et T_j distincts, les trajectoires de x et y sont contenues dans des composantes connexes de niveaux de F qui bordent des disques D_i et D_j disjoints (contenus dans $p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i)$ et $p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_j)$ respectivement). Ceci implique que $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)=0$. Il nous faut donc établir l'égalité suivante :

$$\int_{(p^{-1}(T_i))^2} \widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)\,dxdy = 2\phi([a,b])\int_{p^{-1}(T_i)}(H_{\mathcal{G}}(s_i)-H)\,\omega.$$

Notons que les données de notre problème permettent d'associer de manière naturelle deux orientations à chaque arête de l'arbre T_i. L'une est donnée par le gradient de la fonction F, la seconde consiste à dire qu'une arête est orientée positivement "lorsqu'elle pointe dans la direction du sommet s_i" (qui est une *feuille* de l'arbre T_i, c'est-à-dire un sommet de valence 1). Ainsi, si e est une arête de T_i, nous noterons $\epsilon(e)$ l'entier égal à 1 si F croît lorsque l'on s'approche de s_i et égal à -1 si F décroît lorsque l'on s'approche de s_i.

D'autre part, si $u\in T_i$ n'est pas un sommet, nous pouvons lui associer un domaine $D(u)$ de $\mathbf{T}^2$ de la manière suivante. On considère la composante connexe de $T_i-\{u\}$ qui ne contient pas s_i. L'ouvert $D(u)$ est l'image inverse dans $\mathbf{T}^2$ de cette composante connexe (c'est, topologiquement, un disque). On note $\chi(u)=\mathrm{aire}(D(u))$ et, si e est une arête de

T_i d'extrémités e^+ et e^-,

$$\chi(e^+) = \lim_{u\in e,\, u\to e^+}\chi(u)$$
$$\chi(e^-) = \lim_{u\in e,\, u\to e^-}\chi(u).$$

Le nombre $\chi(e^\pm)$ dépend du sommet $e^\pm$ et de l'arête e, pas seulement du sommet.

Pour calculer $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)$, on distingue trois cas, selon la position relative des points s_i, $p(x)$ et $p(y)$ dans l'arbre T_i, comme sur la figure 1.3. Dans le premier cas, les composantes connexes des niveaux de F contenant x et y bordent des disques (contenus dans l'arbre T_i) D_x et D_y disjoints. Une fois de plus, nous pouvons écrire le lacet $\alpha(\varphi_H^n, x, y)$ comme produit des deux lacets suivants :

$$\gamma_{1,n} = \alpha_{x-y} * (\varphi_H^t(x) - y)_{t\in[0,n]} * \overline{\alpha_{\varphi_H^n(x)-y}}$$

$$\gamma_{2,n} = \alpha_{\varphi_H^n(x)-y} * (\varphi_H^n(x) - \varphi_H^t(y))_{t\in[0,n]} * \overline{\alpha_{\varphi_H^n(x)-\varphi_H^n(y)}}.$$

Chacun de ces deux lacets reste dans une partie bornée du groupe fondamental, et l'on obtient donc $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y) = 0$.

Remarque. En utilisant les domaines $D(u)$ introduits plus haut, le couple de points (x,y) est dans le second cas de la figure si et seulement si $x \in D(p_{\mathcal{G}}(y))$; dans le troisième cas si et seulement si $y \in D(p_{\mathcal{G}}(x))$.

Considérons maintenant le second cas de la figure. Nous allons voir que la quantité $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)$ est alors proprotionnelle à la vitesse de rotation du point y, et ne dépend pas de celle de x : le point y "tourne autour de x". Écrivons encore $\alpha(\varphi_H^n, x, y) = \gamma_{1,n} * \gamma_{2,n}$, où $\gamma_{1,n}$ et $\gamma_{2,n}$ ont la même expression que ci-dessus. Le lacet $\gamma_{1,n}$ reste dans une partie bornée du groupe fondamental. Utilisons les coordonnées précédemment introduite sur $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e')$ et notons $y = (\theta, s)$. On peut alors considérer le lacet : $\gamma(u) = (\theta + u, s)_{u\in[0,1]}$.

Observation. la classe de $(\gamma(u) - x)$ dans $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$ est égale à $[a,b]^{\epsilon(e')}$.

En notant que les classes $S_*([a,b])$ et $[a,b]$ sont conjuguées, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\phi(\gamma_{2,n})\\ &= \epsilon(e')\phi(S_*([a,b]))\vartheta_H(y)\\ &= \epsilon(e')\phi([a,b])\vartheta_H(y).\end{aligned}$$

Puis :

$$\int_{y\in p_{\mathcal{G}}^{-1}(e'),x\in D(p_{\mathcal{G}(y)})} \widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)dxdy = \epsilon(e')\phi([a,b])\int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(e')} \vartheta_H(y)\mathrm{aire}D(p_{\mathcal{G}}(y))\,\omega.$$

Puisque $\frac{\partial}{\partial s}\text{aire}D(p_{\mathcal{G}}(y=(\theta,s)))=\epsilon(e')$, une intégration par partie nous donne que l'expression ci-dessus est égale à :

$$\begin{aligned}&\epsilon(e')\phi([a,b])\left([H(s)\text{aire}D(p_{\mathcal{G}}(\theta,s)]_{s_{e'}^-}^{s_{e'}^+}-\epsilon(e')\int_{s_{e'}^-}^{s_{e'}^+}H(s)ds\right)\\ =\ &\epsilon(e')\phi([a,b])\left(H_{\mathcal{G}}(e'^+)\chi(e'^+)-H_{\mathcal{G}}(e'^-)\chi(e'^-)\right)-\phi([a,b])\int_{s_{e'}^-}^{s_{e'}^+}H(s)ds.\end{aligned}$$

En sommant ces termes sur les arêtes de T_i, nous obtenons une expression de la forme :

$$-\phi([a,b])\int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i)}H\omega+\phi([a,b])\left(\sum_v C(v)H_{\mathcal{G}}(v)\right),$$

où la seconde somme porte sur les sommets de T_i. On vérifie aisément que toutes les constantes $C(v)$ s'annulent à l'exception de $C(s_i)$ qui est égale à l'aire du domaine $p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i)$. Finalement :

$$\sum_{e'}\int_{y\in p_{\mathcal{G}}^{-1}(e'),\,x\in D(p_{\mathcal{G}}(y))}\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)dxdy=\phi([a,b])\int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i)}(H_{\mathcal{G}}(s_i)-H)\,\omega.$$

Par symétrie, la somme des contributions correspondant au trosième cas de la figure vaut également $\phi([a,b])\int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i)}(H_{\mathcal{G}}(s_i)-H)\,\omega$. Nous obtenons bien :

$$\int_{(p^{-1}(T_i))^2}\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(x,y)\,dxdy=2\phi([a,b])\int_{p^{-1}(T_i)}(H_{\mathcal{G}}(s_i)-H)\,\omega,$$

et donc $\mathscr{C}_\phi(\varphi_H^1)=2\phi([a,b])\sum_{i=1}^k\int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i)}(H_{\mathcal{G}}(s_i)-H)\omega$, ce qui achève la preuve du théorème 4.

Chapitre 2

Un quasi-morphisme pour les variétés symplectiques monotones

Dans ce chapitre, nous allons construire un quasi-morphisme homogène

$$\mathfrak{S} : \widetilde{\mathscr{G}_V} \to \mathbf{R}$$

défini sur le revêtement universel du groupe $\mathscr{G}_V$ des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique fermée V qui est *monotone*. Nous commençons par rappeler la définition de cette notion.

Considérons l'espace $\mathscr{J}$ des structures presque-complexes sur V compatibles avec ω. Un élément de $\mathscr{J}$ est un champ (lisse)

$$\{J_x : T_xV \to T_xV\}_{x\in V}$$

d'endomorphismes du fibré tangent de V vérifiant les conditions suivantes : $J^2 = -\mathbb{1}$, J préserve ω, $\omega(u, J(u)) > 0$ pour tout vecteur u tangent à V et non-nul. L'espace $\mathscr{J}_x$ des structures presque-complexes sur l'espace tangent T_xV en un point x de V, qui sont compatibles avec ω_x, est un espace contractile (voir [86]) : c'est naturellement une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle. Ceci assure que l'espace $\mathscr{J}$ est non-vide et lui-même **contractile**. Ainsi, la première classe de Chern du fibré vectoriel complexe (TV, J) ne dépend pas de la structure presque complexe $J \in \mathscr{J}$. C'est la première classe de Chern de la variété symplectique (V, ω), notée $c_1(V, \omega)$ (nous la noterons parfois simplement $c_1(V)$).

Nous dirons que (V, ω) est monotone, si la classe $[\omega]$ est proportionnelle à la classe $c_1(V, \omega)$:

$$\exists\, t \in \mathbf{R}^*,\ [\omega] = tc_1(V, \omega).$$

Notons que ceci force la classe $c_1(V, \omega)$ a être non-nulle. La définition usuelle de variété symplectique monotone demande généralement que t soit positif, mais nous n'aurons pas besoin de faire cette hypothèse. Notons également que certains auteurs demandent que l'égalité $[\omega] = tc_1(V)$ ait lieu uniquement sur l'image de l'application naturelle $\pi_2(V) \to H_2(V, \mathbf{R})$. Nous écrirons plutôt la relation entre $[\omega]$ et $c_1(V, \omega)$ sous la forme

$$\varsigma[\omega] = 2c_1(V, \omega)$$

(nous avons bien sûr $\varsigma = \frac{2}{t}$) ; en effet pour construire l'invariant $\mathfrak{S}$, nous allons faire usage du fibré en cercles au-dessus de V dont la classe d'Euler est $2c_1(V)$.

Des exemples de variétés symplectiques monotones sont fournis par les espaces projectifs complexes, munis de leur forme symplectique standard (de Fubini-Study). En effet, leur classe de Chern est non-nulle ; le groupe $H^2(\mathbf{CP}^n, \mathbf{R})$ étant de dimension 1, la classe de cohomologie de la forme de Fubini-Study est nécessairement proportionnelle à $c_1(\mathbf{CP}^n)$. Une autre famille d'exemples est fournie par les surfaces compactes (orientées) de genre supérieur ou égal à 2 : si Σ est une telle surface, munie d'une forme d'aire ω, les deux classes $[\omega]$ et $c_1(\Sigma, \omega)$ sont non-nulles. Puisque l'espace vectoriel $H^2(\Sigma, \mathbf{R})$ est de dimension 1, elles sont là encore proportionnelles. La surface Σ, munie de la forme ω est donc une variété symplectique monotone. Notons que dans ce cas la constante ς est négative. On pourra consulter [35] pour la construction d'un quasi-morphisme sur le groupe $\widetilde{\mathscr{G}_V}$ pour les variétés de première classe de Chern nulle.

La première partie de ce chapitre est consacrée à des rappels de constructions classiques. Dans la seconde partie, nous construisons le quasi-morphisme $\mathfrak{S}$. Pour des isotopies hamiltoniennes engendrées par des fonctions à support compact, contenu dans une boule, nous relions la valeur de $\mathfrak{S}$ à des invariants déjà connus. Dans la troisième partie, nous montrons, d'après une suggestion de Polterovich, que la restriction de $\mathfrak{S}$ au groupe fondamental du groupe des difféomorphismes hamiltoniens $\pi_1(\mathscr{G}_V) \subset \widetilde{\mathscr{G}_V}$ coïncide avec un homomorphisme $I : \pi_1(\mathscr{G}_V) \to \mathbf{R}$, introduit par Polterovich dans [100]. Nous décrivons ensuite un exemple de variété symplectique, tiré de [100], pour laquelle l'homomorphisme I n'est pas trivial. Enfin, dans la dernière partie, nous nous plaçons dans le cas où V est la sphère $\mathbf{S}^2$, munie d'une forme d'aire. Dans ce cas, le groupe $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathbf{S}^2})$ est égal à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, d'après un théorème de Smale [111]. Le quasi-morphisme $\mathfrak{S}$ descend donc en un quasi-morphisme défini sur le groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{S}^2}$, que nous désignons toujours par $\mathfrak{S}$. Nous calculons sa valeur sur les temps 1 des flots hamiltoniens engendrés par des fonctions de Morse sur la sphère (ou, plus généralement, par des fonctions qui commutent avec une fonction de Morse). Nous obtenons, encore une fois, une formule faisant intervenir la combinatoire du graphe de Reeb associé à la fonction de Morse.

2.1 Nombre de rotation symplectique

Dans ce paragraphe, nous exposons la construction, maintenant très classique, d'un quasi-morphisme homogène défini sur le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$ du groupe symplectique $\mathrm{Sp(E,\omega)}$ d'un espace vectoriel symplectique (E,ω) (voir [10, 33, 66] pour plus de détails). Puis, nous rappelons la construction par Barge et Ghys [10], d'un quasi-morphisme défini sur le groupe des difféomorphismes symplectiques (à support compact) d'une boule de $\mathbf{R}^{2n}$.

2.1.1 Indice de Maslov

Considérons une structure presque-complexe J sur E compatible avec ω : J est un endomorphisme de E, de carré $-\mathbb{1}$, qui préserve ω, avec $\omega(u, Ju) > 0$ pour tout vecteur non-nul u de E. Muni de la forme $(u,v)_J = \omega(u, Jv) - i\omega(u,v)$ l'espace E devient un espace vectoriel hermitien. Nous noterons $\Lambda(E)$ la grassmannienne lagrangienne de E : c'est la variété formée par les sous-espaces de E qui sont isotropes pour E et de dimension maximale pour cette propriété.

Lemme 2.1.1 *Si L_0 et L_1 sont deux lagrangiens de E, il existe un endomorphisme unitaire u de E tel que $u(L_0) = L_1$.*

Preuve : si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un lagrangien L, orthonormée pour le produit scalaire $\mathrm{Re}(\cdot,\cdot)_J$, alors e est également une base de E, considéré comme espace vectoriel complexe. Choisissons alors (pour $i = 0, 1$) une base $e^i = (e^i_1, \ldots, e^i_n)$ de L_i, orthonormée pour $\mathrm{Re}(\cdot,\cdot)_J$. L'application $\mathbf{C}$-linéaire $u : E \to E$ telle que $u(e^0_j) = e^1_j$ convient. □

Soient u_1 et u_2 deux endomorphismes unitaires de E tels que $u_k(L_0) = L_1$ ($k = 1, 2$). L'endomorphisme unitaire $u_2^{-1} \circ u_1$ préserve L_0. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de

L_0 orthonormée pour le produit scalaire $\mathrm{Re}(\cdot,\cdot)_J$. La matrice de l'application $\mathbf{C}$-linéaire $u_2^{-1} \circ u_1 : E \to E$ dans la base e (considérée comme base complexe de E) est également la matrice de l'isométrie $u_2^{-1} \circ u_1|_{L_0}$ de l'espace euclidien $(L_0, \mathrm{Re}(\cdot,\cdot)_J)$. Nous avons donc

$$det_{\mathbf{C}}(u_2^{-1} \circ u_1) \in \{\pm 1\}.$$

Nous obtenons donc que si u est endomorphisme unitaire de E tel que $u(L_0) = L_1$, le nombre complexe (de module 1) $det^2_{\mathbf{C}}(u)$ ne dépend que de L_0 et de L_1. On le note $det^2_{L_0} L_1$. Il vérifie, par construction, la relation de cocycle :

$$det^2_{L_0} L_2 = det^2_{L_0} L_1 \cdot det^2_{L_1} L_2.$$

En particulier, si (L_t) est une courbe continue dans $\Lambda(E)$, la variation de l'argument du nombre complexe $det^2_W L_t$ (comptée en tours), ne dépend pas du choix de $W \in \Lambda(E)$. On note $\Delta(det^2 L_t)$ ce nombre.

Proposition 2.1.2 *Si (L_t) est une courbe dans $\Lambda(E)$ qui reste toujours transverse à un lagrangien donné W, on a : $|\Delta(det^2 L_t)| \leq n$.*

Il est classique que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Lambda(E) & \to & \mathbf{S}^1 \\ L & \mapsto & det^2_{L_0} L \end{array}$$

induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux (voir [2, 10]). Par ailleurs, il est également bien connu que, pour tout lagrangien W, l'intersection avec l'hypersurface (singulière)

$$\{L, \dim L \cap W > 0\},$$

engendre le groupe $H^1(\Lambda(E), \mathbf{Z})$. Il n'est donc pas surprenant que le fait de rester transverse à un lagrangien donné, empêche une courbe de $\Lambda(E)$ de "trop tourner" (voir [2]). Prouvons maintenant la proposition.

Preuve : notons O_W l'ouvert des lagrangiens transverses à W. Puisque W et JW sont orthogonaux pour le produit scalaire $\mathrm{Re}(\cdot,\cdot)_J$, nous avons la décomposition en somme directe : $E = W \oplus JW$. Notons p la projection orthogonale sur JW. Si $L \in O_W$, l'application $J \circ p|_L : L \to W$ est un isomorphisme. Il existe donc un endomorphisme f de W tel que $L = L_f := \{f(x) + Jx, x \in W\}$. Notons que le fait que le sous-espace L_f soit lagrangien est équivalent au fait que l'endomorphisme $f : W \to W$ soit symétrique pour le produit scalaire $\mathrm{Re}(\cdot,\cdot)_J$. L'application $f \mapsto L_f$ est donc un difféomorphisme de l'espace des endomorphismes symétriques de W sur O_W. On a :

$$det^2_W L_f = \prod_{k=1}^{n} \frac{(\lambda_k + i)^2}{1 + \lambda_k^2},$$

où les λ_k sont les valeurs propres de f. Maintenant, si (f_t) est un chemin d'endomorphismes symétriques de W, de valeurs propres $\lambda_1(t) \leq \cdots \leq \lambda_n(t)$, la variation de l'argument du nombre complexe

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(\lambda_k(t) + i)^2}{1 + \lambda_k(t)^2}$$

est inférieure ou égale à n. En effet chacun des nombres $\lambda_k(t)+i$ reste confiné sur la droite $\mathbf{R}+i$ et a un argument qui varie d'au plus un demi-tour. □

Nous sommes maintenant prêts à construire le quasi-morphisme $\Phi : \widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega) \to \mathbf{R}$. Rappelons que nous identifions l'espace $\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$ à l'espace des classes d'homotopie (à extrémités fixes) de chemins issus de l'identité dans $\mathrm{Sp(E},\omega)$. Si $[\gamma] \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$ et $L_0 \in \Lambda(E)$, notons $\varphi_{L_0}([\gamma]) = \Delta(det^2(\gamma_t \cdot L_0))$.

Lemme 2.1.3 *Si L_0 et L_1 sont deux lagrangiens, on a :*

$$|\varphi_{L_0}([\gamma]) - \varphi_{L_1}([\gamma])| \leq 2n.$$

Preuve : fixons un lagrangien W, transverse à L_0 et L_1. On fixe un chemin $(L_s)_{s\in[0,1]}$, contenu dans l'ouvert des lagrangiens transverses à W. Notons alors $u(t,s) = det^2_W(\gamma_t \cdot L_s)$. Puisque le lacet $u|_{\partial[0,1]^2}$ est contractile, et que $\Delta(u(0,s))$ et $\Delta(u(1,s))$ sont tous deux bornés par n, nous obtenons :

$$|\Delta(u(t,0)) - \Delta(u(t,1))| \leq 2n.$$

C'est le résultat voulu. □

Remarquons maintenant que nous avons l'égalité

$$\varphi_{L_0}([\gamma]\cdot[\eta]) - \varphi_{L_0}([\gamma]) - \varphi_{L_0}([\eta]) = \varphi_{\gamma_1 \cdot L_0}([\eta]) - \varphi_{L_0}([\eta]).$$

Le membre de droite est borné par $2n$. L'application φ_{L_0} est donc un quasi-morphisme sur le groupe $\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$, dont l'homogénéisé Φ ne dépend pas de L_0, d'après le lemme 2.1.3. Pour tout lagrangien L on a :

$$\Phi([\gamma]) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Delta(det^2(\gamma_t^p \cdot L)).$$

Proposition 2.1.4 *Le quasi-morphisme Φ est continu.*

Preuve : si $x \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$, on montre par récurrence sur k l'inégalité :

$$|\varphi_{L_0}(x^{kp}) - k\varphi_{L_0}(x^p)| \leq 2nk.$$

En divisant par kp et en faisant tendre k vers l'infini, nous obtenons :

$$|\Phi(x) - \frac{1}{p}\varphi_{L_0}(x^p)| \leq \frac{2n}{p}.$$

La continuité de φ_{L_0} implique alors celle de Φ. □

Remarquons que les groupes infinis cycliques $\pi_1(\mathrm{Sp(E},\omega),\mathrm{Id})$ et $\pi_1(\Lambda(E))$ possèdent chacun un générateur canonique. Pour cela identifions E muni de la structure presque-complexe J et du produit hermitien $(\cdot,\cdot)_J$ à $\mathbf{C}^n$. Notons $A_t(z_1,\ldots,z_n) = (e^{2i\pi t}\cdot z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Nous identifions donc A_t à un élément de $\mathrm{Sp(E},\omega)$. Le lacet $(A_t)_{0\leq t\leq 1}$ représente alors un générateur du groupe $\pi_1(\mathrm{Sp(E},\omega),\mathrm{Id})$ et le lacet $(A_t(\mathbf{R}^n))_{0\leq t\leq \frac{1}{2}}$ représente un générateur

du groupe $\pi_1(\Lambda(E))$ (voir [2, 10]). Ces deux générateurs ne dépendent pas du choix de la structure presque complexe J.

Nous avons vu que le quasi-morphisme $\Phi : \widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega) \to \mathbf{R}$ ne dépend d'aucun choix de point base dans la grassmannienne lagrangienne. Il est également indépendant du choix de la structure presque-complexe. En effet, si T est le générateur (défini ci-dessus) du groupe infini cyclique

$$\pi_1(\mathrm{Sp(E,\omega)}, \mathrm{Id}) \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega),$$

on vérifie aisément que $\Phi(T) = 2$. Ainsi les deux quasi-morphismes homogènes Φ et Φ' construits à partir de deux structures presque-complexes J et J' distinctes, prennent la même valeur sur l'élément T. D'après un argument de Barge et Ghys [10], que nous rappelons maintenant, cela entraîne qu'ils sont égaux. En effet le quasi-morphisme homogène $\Psi = \Phi - \Phi' : \widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega) \to \mathbf{R}$ s'annule sur le groupe cyclique $\pi_1(\mathrm{Sp(E,\omega)}) \subset \widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$. Puisque ce groupe est contenu dans le centre de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(E,\omega)$, Ψ descend en un quasi-morphisme homogène $\psi : \mathrm{Sp(E,\omega)} \to \mathbf{R}$. Nous appliquons alors le :

Lemme 2.1.5 ([10]) *Tout quasi-morphisme homogène $\psi : \mathrm{Sp(E,\omega)} \to \mathbf{R}$ est identiquement nul.*

Preuve : le fait qui permet d'établir ce lemme est que le groupe $\mathrm{Sp(E,\omega)}$ est *uniformément parfait* : tout élément de $\mathrm{Sp(E,\omega)}$ est le produit d'un nombre uniformément borné de commutateurs.

Rappelons que si a et b sont dans $\mathrm{Sp(E,\omega)}$, nous avons l'inégalité

$$|\psi([a,b])| \leq \delta(\psi),$$

où $\delta(\psi)$ est le défaut de ψ. En effet puisque ψ est homogène et invariant par conjugaison, $\psi(a) + \psi(ba^{-1}b^{-1}) = 0$ et donc $\psi([a,b]) = \psi(a \cdot ba^{-1}b^{-1}) - \psi(a) - \psi(ba^{-1}b^{-1})$. La valeur $\psi([a,b])$ est donc bornée par le défaut de ψ. On déduit aisément de cette inégalité que si $\gamma \in \mathrm{Sp(E,\omega)}$ est le produit de k commutateurs, on a : $|\psi(\gamma)| \leq (2k-1)\delta(\psi)$. Si $a \in E$, nous noterons $t_a : E \to E$ la transvection symplectique définie par :

$$t_a(x) = x + \omega(x,a)a.$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que t_a est un commutateur (voir [10]), et, d'après [31], tout élément de $\mathrm{Sp(E,\omega)}$ est produit d'au plus $\dim(E)$ éléments de la forme $t_a^{\pm}$. Nous en déduisons que ψ est borné (en valeur absolue) par $(2\dim(E)-1)\delta(\psi)$. Pusique ψ est homogène, il est identiquement nul. □

Indiquons finalement que l'on peut donner d'autres descriptions du quasi-morphisme Φ, qui permettent de le calculer effectivement [10].

2.1.2 Quasi-morphisme pour les difféomorphismes de la boule

Nous supposons maintenant que B est une boule de $\mathbf{R}^{2n}$ munie d'une forme symplectique de volume fini ν :

$$\int_B \nu^n < \infty.$$

Suivant [10], nous allons construire un quasi-morphisme homogène $\tau_{B,\nu} : \Gamma_{B,\nu} \to \mathbf{R}$, où $\Gamma_{B,\nu}$ désigne le groupe des difféomorphismes symplectiques de (B, ν) à support compact.

Nous choisissons une trivialisation symplectique du fibré tangent à B. La différentielle d'un difféomorphisme $f \in \Gamma_{B,\nu}$ "lue" dans cette trivialisation est une application

$$\begin{array}{rcl} B & \to & \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & df(x). \end{array}$$

Un changement de trivialisation est donné par une application $\theta : B \to \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. La différentielle de f est alors changée en $x \mapsto \theta(f(x))^{-1} \cdot df(x) \cdot \theta(x)$. Notons $\widetilde{\theta} : B \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ un relevé quelconque de θ, et $\widetilde{df} : B \to \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ l'unique relevé de df qui vaut $\widetilde{\mathrm{Id}}$ hors d'un compact. Si f et g sont dans le groupe $\Gamma_{B,\nu}$, nous avons :

$$\widetilde{d(fg)}(x) = \widetilde{df}(g(x)) \cdot \widetilde{dg}(x),$$

et donc

$$|\Phi(\widetilde{d(fg)}(x)) - \Phi(\widetilde{dg}(x)) - \Phi(\widetilde{df}(g(x)))| \leq \delta(\Phi).$$

L'application $f \mapsto \int_B \Phi(\widetilde{df})\nu^n$ est donc un quasi-morphisme sur le groupe $\Gamma_{B,\nu}$. Nous allons vérifier que son homogénéisé ne dépend pas de la trivialisation symplectique choisie. Si l'on change de trivialisation, l'application $\widetilde{df}$ est changée en $\widetilde{\theta}^{-1} \circ f \cdot \widetilde{df} \cdot \widetilde{\theta}$. Nous pouvons donc écrire :

$$\widetilde{\theta}^{-1}(f^p(x)) \cdot \widetilde{df^p}(x) \cdot \widetilde{\theta}(x) = \left(\widetilde{\theta}^{-1}(f^p(x)) \cdot \widetilde{\theta}(x)\right) \cdot \left(\widetilde{\theta}^{-1}(x) \cdot \widetilde{df^p}(x) \cdot \widetilde{\theta}(x)\right).$$

Nous avons donc, puisque Φ est homogène :

$$|\Phi(\widetilde{df^p}(x)) - \Phi(\widetilde{\theta}^{-1}(f^p(x)) \cdot \widetilde{df^p}(x) \cdot \widetilde{\theta}(x))| \leq \delta(\Phi) + |\Phi(\widetilde{\theta}^{-1}(f^p(x))\widetilde{\theta}(x))|.$$

Si le support de f est contenu dans le compact K de B, nous avons pour x dans K, $|\Phi(\widetilde{\theta}^{-1}(f^p(x))\widetilde{\theta}(x))| \leq \delta(\Phi) + 2\sup_K |\Phi \circ \widetilde{\theta}|$; si x n'est pas dans K, la quantité

$$\Phi(\widetilde{\theta}^{-1}(f^p(x))\widetilde{\theta}(x))$$

est nulle. Ainsi :

$$|\Phi(\widetilde{df^p}(x)) - \Phi(\widetilde{\theta}^{-1}(f^p(x))\widetilde{df^p}(x)\widetilde{\theta}(x))| \leq 2\delta(\Phi) + 2\sup_K|\Phi \circ \widetilde{\theta}|,$$

pour tout x de B et tout entier p. En divisant par p, en intégrant, et en passant à la limite, nous obtenons bien le résultat voulu : la quantité

$$\tau_{B,\nu}(f) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_B \Phi(\widetilde{df^p})\nu^n$$

ne dépend pas de la trivialisation choisie. L'application $\tau_{B,\nu} : \Gamma_{B,\nu} \to \mathbf{R}$ est le quasi-morphisme homogène annoncé.

2.2 Construction du quasi-morphisme $\mathfrak{S}$

Fixons un $\mathbf{S}^1$-fibré principal $\pi : M \to V$ de classe d'Euler égale à $2c_1(V)$. Nous noterons

$$(e^{2i\pi t}, y) \mapsto e^{2i\pi t} \cdot y \ \ (y \in M)$$

l'action de $\mathbf{S}^1$ sur M. Notant X le champ de vecteurs sur M engendré par l'action du cercle, on peut trouver une 1-forme α sur M telle que $\alpha(X) = 1$ et $d\alpha = \pi^*(\varsigma\omega)$: nous sommes dans la situation du paragraphe 1.1.2. Nous fixons également une structure presque-complexe J sur V, compatible avec ω. Le fibré vectoriel TV, muni de la forme bilinéaire

$$(u, v)_J = \omega(u, Jv) - i\omega(u, v)$$

devient alors un fibré vectoriel hermitien, dont on peut choisir une trivialisation au-dessus d'un recouvrement $\{U_\beta\}$ avec des applications de transition $g_{\beta\gamma} : U_\beta \cap U_\gamma \to U(n)$ à valeurs dans le groupe des matrices unitaires de taille n. La famille d'applications $(det^2(g_{\beta\gamma}))$, à valeurs dans le cercle, détermine un fibré en cercles N au-dessus de V, qui est isomorphe à M (la classe $c_1(V)$ pouvant par exemple être définie comme étant la classe du fibré défini par le cocycle $(det(g_{\beta\gamma})))$.

Notons $\Lambda(V)$ le fibré en grassmannienne lagrangienne au-dessus de V, et $\pi_\Lambda : \Lambda(V) \to V$ la projection associée. La fibre $\Lambda(V)_x := \pi_\Lambda^{-1}(x)$ est formée des sous-espaces lagrangiens de l'espace tangent T_xV. D'après la description précédente du fibré N, nous avons une application naturelle $det^2 : \Lambda(V) \to N$; qui n'est autre qu'une application fibrée de l'application

$$det^2_W : \Lambda(E) \to \mathbf{S}^1,$$

déjà rencontrée dans le cas où E est un espace vectoriel symplectique et W un lagrangien de E. Dans une trivialisation $U_\gamma \times \mathbf{C}^n$, un lagrangien L, élément de $\Lambda(V)$, "s'écrit" $(x, u_\gamma(\mathbf{R}^n))$, pour une matrice unitaire u_γ. On lui associe l'élément $(x, det^2(u_\gamma))$ dans la trivialisation correspondante de N. En choisissant un isomorphisme entre N et M, nous obtenons une application $\varphi : \Lambda(V) \to M$. Cette application n'est bien sûr pas unique ! Le choix de J et l'isomorphisme entre N et M interviennent. Cependant, elle a la vertu suivante : en restriction à chaque fibre $\Lambda(V)_x$, elle induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux. Une autre application $\varphi' : \Lambda(V) \to M$, construite par le même procédé serait donc de la forme :

$$\varphi'(L) = \chi(\pi_\Lambda(L)) \cdot e^{2i\pi\kappa(L)} \cdot \varphi(L),$$

pour des applications $\chi : V \to \mathbf{S}^1$ et $\kappa : \Lambda(V) \to \mathbf{R}$.

Remarque. Puisque l'application φ restreinte à une fibre $\Lambda(V)_x \to \pi^{-1}(x) \subset M$ induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux, le générateur canonique du groupe fondamental de $\Lambda(V)_x$ fournit un générateur du groupe fondamental de la fibre $\pi^{-1}(x) \subset M$, et donc une **orientation** du cercle $\pi^{-1}(x)$. Il sera utile de remarquer que cette orientation est l'orientation opposée de celle définie par le champ de vecteurs X (qui est le champ

de Reeb de α). Par exemple, lorsque $V = \mathbf{S}^2$, munie d'une forme d'aire, $\Lambda(V)$ coïncide avec M, c'est le projectifié du fibré tangent à $\mathbf{S}^2$. Dans ce cas, cela correspond au fait que l'orientation induite par la forme $\alpha \wedge d\alpha$ est l'opposée de l'orientation canonique de $\Lambda(\mathbf{S}^2) \simeq \mathbb{P}(T\mathbf{S}^2)$.

Nous pouvons maintenant passer à la construction du quasi-morphisme $\mathfrak{S}$.

On considère une isotopie hamiltonienne (f_t) engendrée par le champ de vecteurs Z_t (avec $\iota_{Z_t}\omega = -dH_t$, $\int_V H_t\,\omega^n = 0$ pour tout t, pour une fonction $H : [0,1] \times V \to \mathbf{R}$). Comme au paragraphe 1.1.2, nous noterons $\Theta(f_t)$ l'isotopie de M engendrée par le champ de vecteurs

$$\widehat{Z_t} + \varsigma(H_t \circ \pi)X$$

(la présence du coefficient ς est simplement due au fait que le hamiltonien associé au champ de vecteurs Z_t pour la forme symplectique $\varsigma\omega$ est ςH_t). Soit $L \in \Lambda(V)$ un lagrangien avec $\pi_\Lambda(L) = x$. Nous pouvons considérer la courbe $df_t(x)(L)$ dans $\Lambda(V)$ obtenue en appliquant la différentielle de l'isotopie (f_t) à L. *Comment lui associer un nombre de rotation ?* Pour cela, considérons les deux courbes

$$\varphi(df_t(x)(L)) \quad \text{et} \quad \Theta(f_t)(\varphi(L))$$

dans M. Elles sont toutes deux issues du point $\varphi(L)$ et relèvent la même courbe dans V : $(f_t(x))$. Bien que le fibré en cercles M ne soit pas trivial, on peut se servir de la courbe $\Theta(f_t)(\varphi(L))$ comme d'une horizontale "le long du chemin $f_t(x)$" pour mesurer le nombre de rotation de la courbe $\varphi(df_t(x)(L))$. On peut écrire

$$\varphi(df_t(x)(L)) = e^{2i\pi\vartheta(t)} \cdot \Theta(f_t)(\varphi(L)),$$

où $\vartheta : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une application continue. On définit alors une fonction continue sur $\Lambda(V)$ par $\mathrm{angle}(L, \{f_t\}) = \vartheta(1) - \vartheta(0)$. Elle satisfait la relation :

$$\mathrm{angle}(L, \{f_t * g_t f_1\}) = \mathrm{angle}(L, \{f_t\}) + \mathrm{angle}(df_1 \cdot L, \{g_t\}).$$

Proposition 2.2.1 *Pour toute paire de lagrangiens (L_0, L_1) contenus dans la même fibre de $\Lambda(V) \to V$, et toute isotopie hamiltonienne $\{f_t\}$, nous avons :*

$$|\mathrm{angle}(L_0, \{f_t\}) - \mathrm{angle}(L_1, \{f_t\})| \leq 2n.$$

Preuve : c'est une version fibrée de la preuve du lemme 2.1.3. Nous fixons $L_0, L_1 \in \pi_\Lambda^{-1}(x)$. Choisissons un lagrangien $W \in \pi_\Lambda^{-1}(x)$ transverse à L_0 et L_1, et un chemin L_s de L_0 à L_1 dans $\pi_\Lambda^{-1}(x)$, tel que L_s soit transverse à W pour tout s. Nous pouvons alors écrire :

$$\varphi(df_t \cdot L_s) = e^{2i\pi\vartheta(t,s)} \cdot \Theta(f_t)(\varphi(L_s)),$$

où $\vartheta : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ est continue et $\vartheta(0,s) = 0$. Nous avons :

$$\mathrm{angle}(L_0, \{f_t\}) - \mathrm{angle}(L_1, \{f_t\}) = \vartheta(1,0) - \vartheta(1,1).$$

Ecrivons $\varphi(L_s) = e^{2i\pi v(s)} \cdot \varphi(L_0)$ où $v : [0,1] \to \mathbf{R}$ est continue. La quantité $v(1) - v(0)$ est égale à $-\Delta(det^2(L_s))$ et est bornée par n d'après la proposition 2.1.2. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(df_1(L_s)) &= e^{2i\pi\vartheta(1,s)} \cdot \Theta(f_1)(e^{2i\pi v(s)} \cdot \varphi(L_0)) \\ &= e^{2i\pi(\vartheta(1,s)-\vartheta(1,0)+v(s))} \cdot \varphi(df_1(L_0)). \end{aligned}$$

Ainsi $\vartheta(1,0) - \vartheta(1,1) = \Delta(det^2(df_1 \cdot L_s)) - \Delta(det^2(L_s))$ est borné par $2n$ d'après la proposition 2.1.2. □

Nous définissons alors une fonction mesurable bornée sur V par :

$$\text{angle}(x, \{f_t\}) = \inf_{L \in \Lambda(V)_x} \text{angle}(L, \{f_t\}).$$

Elle satisfait :

$$|\text{angle}(x, \{f_t * g_t f_1\}) - \text{angle}(x, \{f_t\}) - \text{angle}(f_1(x), \{g_t\})| \leq 6n.$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathscr{G}_V} & \to & \mathbf{R} \\ \{f_t\} & \mapsto & \int_V \text{angle}(-, \{f_t\})\omega^n \end{array}$$

est donc un quasi-morphisme. Si l'application φ est modifiée en une application φ', comme expliqué ci-dessus, la fonction angle se trouve changée en la fonction $\text{angle}'(L, \{f_t\})$ égale à :

$$\text{angle}(L, \{f_t\}) + \kappa(df_1 \cdot L) - \kappa(L) + \int_0^1 \beta(X_t)(f_t(x))dt,$$

où β désigne la 1-forme fermée $d(\frac{log\chi}{2i\pi})$. Nous avons donc :

$$\left|\text{angle}'(x, \{f_t\}) - \text{angle}(x, \{f_t\}) - \int_0^1 \beta(X_t)(f_t(x))dt\right| \leq 4n + 2\sup_{\Lambda(V)}|\kappa|.$$

L'intégrale $\int_V \int_0^1 \beta(X_t)dt\,\omega^n$ étant nulle, on a :

$$\left|\int_V \text{angle}'(-, \{f_t\})\omega^n - \int_V \text{angle}(-, \{f_t\})\omega^n\right| \leq (4n + 2\sup_{\Lambda(V)}|\kappa|)\text{vol}(V).$$

L'homogénéisé

$$\mathfrak{S}(\{f_t\}) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_V \text{angle}(-, \{f_t\}^p)\,\omega^n$$

de notre quasi-morphisme ne dépend donc pas du choix de l'application φ, et donc pas de J. Il ne dépend pas non plus du choix de la 1-forme α (vérifiant $\alpha(X) = 1$ et $d\alpha = \pi^*(\varsigma\omega)$). De plus, là encore nous pouvons écrire

$$\mathfrak{S}(\{f_t\}) = \int_V \widehat{\text{angle}}(-, \{f_t\})\,\omega^n$$

où la fonction $\widehat{\text{angle}}(-,\{f_t\})$ est définie presque partout par

$$\widehat{\text{angle}}(x,\{f_t\}) = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\text{angle}(x,\{f_t\}^p).$$

Nous calculons maintenant la restriction de $\mathfrak{S}$ sur les isotopies à support dans une boule $i : B \hookrightarrow V$.

Théorème 5 *Si l'isotopie $\{f_t\}$ est à support dans B, nous avons*

$$\mathfrak{S}(\{f_t\}) = -\tau_{B,\omega}(f_1) + \varsigma\mathfrak{Cal}_B(f_1).$$

Preuve : on fixe une trivialisation unitaire du fibré tangent au-dessus de B, et une trivialisation du fibré en cercles M au-dessus de B. On note λ la primitive de ω sur B telle que $\alpha = d(\frac{logz}{2i\pi}) + \varsigma\lambda$ dans cette trivialisation (z désigne la coordonnée sur le cercle). L'application φ lue dans cette trivialisation est de la forme :

$$\begin{array}{rcl} B\times\Lambda(\mathbf{R}^{2n}) & \to & B\times\mathbf{S}^1 \\ (x,L) & \mapsto & (x, e^{2i\pi\kappa(x,L)}\cdot det^2_{\mathbf{R}^n}(L)^{-1}) \end{array}$$

pour une application $\kappa : B\times\Lambda(\mathbf{R}^{2n}) \to \mathbf{R}$. La présence du terme $det^2_{\mathbf{R}^n}$ affecté de l'exposant -1 est due au fait que nous avons expliqué plus haut : l'orientation du cercle $\mathbf{S}^1$ induite par le générateur canonique de $\pi_1(\Lambda(\mathbf{R}^{2n}))$ est l'opposée de celle induite par le champ de Reeb de α.

On considère alors une isotopie hamiltonienne (f_t) à support contenu dans un compact K de B, engendrée par le champ de vecteurs Z_t (avec $\iota_{Z_t}\omega = -d\widetilde{H}_t$, où $\widetilde{H}_t$ est d'intégrale nulle sur V, constante hors de B). Nous avons d'une part :

$$\varphi(f_t(x), df_t\cdot L) = (f_t(x), e^{2i\pi\kappa(f_t(x),df_t\cdot L)}\cdot det^2_{\mathbf{R}^n}(df_t\cdot L)^{-1})$$

et d'autre part :

$$\Theta(f_t)(\varphi(x,L)) = (f_t(x), e^{2i\pi\int_0^t(-\varsigma\lambda(Z_u)+\varsigma\widetilde{H}_u)(f_u(x))du}\cdot e^{2i\pi\kappa(x,L)}\cdot det^2_{\mathbf{R}^n}(L)^{-1}).$$

La valeur de $\text{angle}(L,\{f_t\})$ est donc :

$$-\Delta(det^2_{\mathbf{R}^n}(df_t(x)\cdot L)) + \int_0^1(\varsigma\lambda(Z_t)-\varsigma\widetilde{H}_t)(f_t(x))dt + \kappa(f_1(x), df_1(x)\cdot L) - \kappa(x,L).$$

En notant C le maximum de $|\kappa|$ sur $\text{supp}(f)\times\Lambda(\mathbf{R}^{2n})$, on a alors :

$$\left|\text{angle}(x,\{f_t\}) + \Delta(det^2_{\mathbf{R}^n}(df_t(x)\cdot L)) - \varsigma\int_0^1(\lambda(Z_t)-\widetilde{H}_t)(f_t(x))dt\right| \le 2C+2n.$$

Hors de la boule B la fonction $\text{angle}(x,\{f_t\})$ est égale à $-\varsigma\int_0^1\widetilde{H}_t(f_t(x))dt$. En tenant compte de l'inégalité $|\Delta(det^2_{\mathbf{R}^n}(df_t(x)\cdot L)) - \Phi(\{df_t(x)\})| \le 2n$, nous obtenons :

$$\left|\int_V \mathrm{angle}(-,\{f_t\})\omega^n - \varsigma\int_0^1\int_B \lambda(Z_t)dt\omega^n + \int_B \Phi(\{df_t(x)\})\nu^n\right| \leq (2C+4n)\mathrm{vol}(B).$$

La même estimation reste vraie pour les itérés de f car leur support est contenu dans celui de f. Nous obtenons donc : $\mathfrak{S}(\{f_t\}) = \varsigma\int_0^1\int_B \lambda(Z_t)dt\,\omega^n - \tau_{B,\omega}(f_1) = \varsigma\mathfrak{Cal}(f_1) - \tau_{B,\omega}(f_1)$. □

2.3 Invariant de Polterovich

2.3.1 Construction

Dans [100], Polterovich a introduit un homomorphisme I défini sur le **groupe fondamental** du groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique monotone. Nous allons voir maintenant que le quasi-morphisme $\mathfrak{S}$ étend l'homomorphisme I (à une constante multiplicative près) :

Proposition 2.3.1 *Soit $f_t : V \to V$ $(0 \leq t \leq 1)$ un lacet de difféomorphismes hamiltoniens. Alors : $\mathfrak{S}(\{f_t\}) = \mathrm{vol}(V)\cdot I(\{f_t\})$ (où $\mathrm{vol}(V)$ désigne le volume de V pour la forme volume ω^n).*

Notons qu'il n'est pas surprenant que la restriction du quasi-morphisme homogène $\mathfrak{S}$ au groupe $\pi_1(\mathscr{G}_V)$ soit un *homomorphisme* : le groupe fondamental d'un groupe topologique est toujours abélien, et un quasi-morphisme homogène sur un groupe abélien est un homomorphisme, comme nous l'avons vu avec le lemme 1.2.5. Avant de prouver cette proposition, nous commençons par rappeler la définition de l'invariant I, telle qu'elle est donnée dans [100].

Choisissons un point x de V et considérons le lacet $\gamma_x(t) = f_t(x)$. Expliquons d'abord pourquoi ce lacet est toujours contractile. Puisque tous les lacets γ_x lorsque x parcourt V, sont librement homotopes, il suffit d'établir que l'un d'entre eux est contractile. Fixons $T \in [0,1]$ suffisamment proche de 1, pour que chacun des chemins $(f_t(x))_{T\leq t\leq 1}$ $(x \in V)$ soit contenu dans une partie géodésiquement convexe de V (pour une métrique riemannienne fixée). D'après la preuve de la conjecture d'Arnold, on peut trouver un point fixe contractile x_0 pour l'isotopie hamiltonienne $(f_t)_{0\leq t\leq T}$. Le lacet

$$\gamma_{x_0} = (f_t(x_0))_{0\leq t\leq T} * (f_t(x_0))_{T\leq t\leq 1}$$

est donc contractile. Remarquons que l'usage de la preuve de la conjecture d'Arnold est le seul point non-élémentaire sur lequel repose la définition de cet invariant. Le reste de la construction est très simple. Bien sûr, dans le cas où la variété V est simplement connexe, il n'est pas nécessaire d'invoquer l'argument ci-dessus.

Si x est dans V, choisissons maintenant une application lisse

$$u : \mathbf{D} := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, |x|^2 + |y|^2 \leq 1\} \to V$$

dont la restriction au bord du disque coïncide avec le lacet γ_x, c'est-à-dire :

$$u(e^{2i\pi t}) = f_t(x).$$

Cette application nous permet d'une part de définir l'*action* de x :

$$\mathscr{A}(x,u) = \int_{\mathbf{D}} u^*\omega - \int_0^1 H_t(f_t(x))dt,$$

où $H_t : V \to \mathbf{R}$ est le hamiltonien normalisé qui engendre l'isotopie hamiltonienne f_t. D'autre part elle nous permet de définir *l'indice de Maslov* du flot linéarisé le long de l'orbite de x :

$$df_t(x) : T_xV \to T_{f_t(x)}V.$$

Fixons une trivialisation symplectique du fibré $u^*TV \to \mathbf{D}$. Dans cette trivialisation, la courbe $df_t(x)$ devient un lacet de matrices symplectiques $\alpha_u(t) \in \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. On définit l'indice de Maslov de cette orbite périodique (dans cette trivialisation) comme $\mu(x,u) = \Phi([\alpha_u])$.

Suivant [100], nous définissons alors :

$$I(\{f_t\}) = \varsigma\mathscr{A}(x,u) - \mu(x,u).$$

Nous allons maintenant vérifier successivement les trois faits suivants :
- le nombre $I(\{f_t\})$ ne dépend ni du choix du disque $u : \mathbf{D} \to V$, ni du point $x \in V$,
- le nombre $I(\{f_t\})$ ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet de difféomorphismes $\{f_t\}$,
- l'application $I : \pi_1(\mathscr{G}_V) \to \mathbf{R}$ est un homomorphisme.

Supposons que $u_1, u_2 : \mathbf{D} \to V$ soient deux applications lisses qui étendent l'application $e^{2i\pi t} \mapsto f_t(x)$. Nous avons alors :

$$\mathscr{A}(x,u_1) - \mathscr{A}(x,u_2) = \int_{\mathbf{D}} u_1^*\omega - \int_{\mathbf{D}} u_2^*\omega = \langle[\omega], A\rangle,$$

où A est la classe d'homologie de la sphère obtenue en recollant u_1 et u_2 sur leur bord (et en inversant l'orientation du second disque). Maintenant, supposons données deux trivialisations des fibrés u_1^*TV et u_2^*TV respectivement :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{D} & \to & u_1^*TV \\ \varphi_2 : \mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{D} & \to & u_2^*TV. \end{array}$$

Il existe alors une application $K : \mathbf{S}^1 \to \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(e^{2i\pi t}, v) = (e^{2i\pi t}, K(e^{2i\pi t})(v))$$

($v \in \mathbf{R}^{2n}$). On en déduit l'égalité $\mu(x,u_1) - \mu(x,u_2) = -\Phi([K])$. Nous avons donc :

$$(\varsigma\mathscr{A}(x,u_1) - \mu(x,u_1)) - (\varsigma\mathscr{A}(x,u_2) - \mu(x,u_2)) = \langle\varsigma[\omega], A\rangle + \Phi([K]).$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que l'entier $\Phi([K])$ est égal à $-\langle 2c_1(V), A\rangle$. Nous avons donc $\langle \varsigma[\omega], A\rangle + \Phi([K]) = 0$, et la quantité $\varsigma\mathscr{A}(x, u_i) - \mu(x, u_i)$ ne dépend pas du disque u_i.

Choisissons maintenant deux points x_1, x_2 dans V, et un chemin $\gamma : [0,1] \to V$ telle que $\gamma(0) = x_1$ et $\gamma(1) = x_2$ (nous noterons $\gamma(s) = \gamma_s$). Soit $u_1 : \mathbf{D} \to V$ une application telle que $u_1(e^{2i\pi t}) = f_t(x_1)$. Nous définissons une application :

$$u_2 : \mathbf{D} \cup \{z \in \mathbf{C}, 1 \leq |z| \leq 2\} \to V$$

par : $u_2(z) = u_1(z)$ si $z \in \mathbf{D}$, et $u_2(se^{2i\pi t}) = f_t(\gamma_{s-1})$ $(1 \leq s \leq 2)$. Il est alors clair que $\mu(x_1, u_1) = \mu(x_2, u_2)$. Nous devons donc nous assurer que $\mathscr{A}(x_1, u_1) = \mathscr{A}(x_2, u_2)$. Mais ceci résulte du lemme suivant :

Lemme 2.3.2

$$\int_{1\leq|z|\leq 2} u_2^*\,\omega = \int_0^1 (H_t(f_t(x_2)) - H_t(f_t(x_1)))\,dt$$

Preuve : il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned} u_2^*\,\omega &= \omega(df_t(\gamma'_{s-1}), X_{H_t}(f_t(\gamma_{s-1})))ds \wedge dt \\ &= d(H_t(f_t(\gamma_{s-1}))dt), \end{aligned}$$

et d'appliquer le théorème de Stokes. □

Nous avons maintenant achevé de prouver le premier fait ci-dessus. La preuve du second fait est très similaire : supposons donnée une famille à deux paramètres de difféomorphismes hamiltoniens $(f_{t,s})_{t\in\mathbf{S}^1, s\in[0,1]}$, avec $f_{0,s} = \mathbb{1}$ pour tout s. Nous allons montrer que

$$I(\{f_{t,0}\}_{t\in\mathbf{S}^1}) = I(\{f_{t,1}\}_{t\in\mathbf{S}^1}).$$

Choisissons $x \in V$ et une application $u_0 : \mathbf{D} \to V$ telle que $u_0(e^{2i\pi t}) = f_{t,0}(x)$. Pour calculer l'action et l'indice de Maslov de l'orbite de x pour le lacet de difféomorphismes $(f_{t,1})$ nous choisissons alors l'application $u_1 : \mathbf{D} \cup \{z \in \mathbf{C}, 1 \leq |z| \leq 2\} \to V$ qui coïncide avec u_0 sur $\mathbf{D}$ et telle que $u_1(se^{2i\pi t}) = f_{t,s-1}(x)$. On vérifie alors comme précédemment que l'action de x pour le lacet $(f_{t,0})$, calculée avec le disque u_0 est égale à l'action de x pour le lacet $(f_{t,1})$, calculée avec le disque u_1. Ceci assure que $I(\{f_{t,0}\}_{t\in\mathbf{S}^1}) = I(\{f_{t,1}\}_{t\in\mathbf{S}^1})$.

Il n'est pas difficile de s'assurer que I est effectivement un homomorphisme. Lorsque V est la sphère $\mathbf{S}^2$, le groupe $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathbf{S}^2})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ [111] et l'homomorphisme I est donc identiquement nul. A titre d'exemple, nous allons vérifier explicitement que cet invariant s'annule pour un lacet de rotations sur $\mathbf{S}^2$.

Exemple. Considérons la sphère $\mathbf{S}^2$, identifiée à $\mathbf{CP}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, munie de la forme d'aire $\Omega = \frac{2}{\pi}\frac{dx\wedge dy}{(1+|z|^2)^2}$, dont l'aire totale est 2. On a alors $[\Omega] = c_1(\mathbf{CP}^1)$ et $\varsigma = 2$. Notons $f_t(z) = e^{2i\pi t} \cdot z$. Le hamiltonien normalisé qui engendre (f_t) s'écrit

$$H(z) = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Notons $x_* = 0 \in \mathbf{C}$ et u_* le disque constant égal à x_*. L'indice de Maslov $\mu(x_*, u_*)$ est égal à 2, et l'action $\mathscr{A}(x_*, u_*)$ vaut $-H(0) = 1$. Nous avons donc bien :

$$I(\{f_t\}) = 2\mathscr{A}(x_*, u_*) - 2 = 0.$$

Nous prouvons maintenant la proposition 2.3.1. Fixons un point $x \in V$. Choisissons une application $u : \mathbf{D} \to V$ telle que $u(e^{2i\pi t}) = f_t(x)$. Nous pouvons alors considérer les fibrés $u^*\Lambda(V) \to \mathbf{D}$ et $u^*M \to \mathbf{D}$. Nous noterons α_u la 1-forme différentielle induite par α sur u^*M, et $\varphi_u : u^*\Lambda(V) \to u^*M$ l'application induite par l'application $\varphi : \Lambda(V) \to M$. Nous fixons une trivialisation :

$$\psi : u^*M \quad \to \quad \mathbf{D} \times \mathbf{S}^1.$$

On peut alors écrire, dans cette trivialisation : $\alpha_u = ds + \lambda$ (où s désigne la coordonnée sur le cercle $\mathbf{S}^1$ identifié à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et λ est une primitive de $u^*(\varsigma\omega)$ sur le disque $\mathbf{D}$).

Choisissons un lagrangien $L \in \pi_\Lambda^{-1}(x)$ au-dessus de x. Nous identifions les courbes $df_t(x)(L)$ et $\Theta(f_t)(x)$ à des courbes contenues respectivement dans les fibrés $u^*\Lambda(V) \to \mathbf{D}$ et $u^*M \to \mathbf{D}$. Écrivons :

$$\begin{array}{rcl} \Theta(f_t)(\varphi_u(L)) & = & \psi(f_t(x), e^{2i\pi\vartheta_1(t)}) \\ \varphi_u(df_t(x)(L)) & = & \psi(f_t(x), e^{2i\pi\vartheta_2(t)}). \end{array}$$

Nous allons vérifier que la quantité $(\vartheta_2(1) - \vartheta_2(0)) - (\vartheta_1(1) - \vartheta_1(0))$ ne dépend que de x et pas du choix du lagrangien $L \in \pi_\Lambda^{-1}(x)$, ce qui assurera que

$$\mathrm{angle}(x, \{f_t\}) = (\vartheta_2(1) - \vartheta_2(0)) - (\vartheta_1(1) - \vartheta_1(0)).$$

La quantité $\vartheta_2(1) - \vartheta_2(0)$ est égale à $-\mu(x, u)$. Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_1(1) - \vartheta_1(0) & = & \int_{(\Theta(f_t)(x))} \alpha_u - \lambda \\ & = & \int_0^1 \varsigma H_t(f_t(x)) - \int_{\mathbf{D}} u^*(\varsigma\omega) \\ & = & -\varsigma\mathscr{A}(x, u). \end{array}$$

Nous obtenons bien $\mathrm{angle}(x, \{f_t\}) = I(\{f_t\})$. Finalement :

$$\mathfrak{S}(\{f_t\}) = \int_V \mathrm{angle}(-, \{f_t\})\, \omega^n = \mathrm{vol}(V) \cdot I(\{f_t\})$$

(l'intégrale de la fonction $\mathrm{angle}(-, \{f_t\})$ est déjà égale à la valeur du quasi-morphisme homogénéisé dans ce cas).

2.3.2 Un exemple

Pour conclure ce paragraphe, nous allons maintenant décrire en détails un exemple de variété symplectique pour laquelle l'homomorphisme I n'est pas trivial. Cet exemple est tiré de [100].

Nous noterons $\mathbf{C}_{\mathbf{CP}^1} \to \mathbf{CP}^1$ le fibré trivial $\mathbf{C} \times \mathbf{CP}^1$ et $T \to \mathbf{CP}^1$ le fibré tautologique :

$$T = \{(d, v) \in \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{C}^2, v \in d\}.$$

Considérons alors le fibré $\mathbf{C}_{\mathbf{CP}^1} \oplus T$. Un élément de $\mathbf{C}_{\mathbf{CP}^1} \oplus T$ sera noté (d, z, v), où $d \in \mathbf{CP}^1$, $z \in \mathbf{C}$, et $v \in d \subset \mathbf{C}^2$. Nous allons considérer la variété $X = \mathbf{P}(\mathbf{C}_{\mathbf{CP}^1} \oplus T)$.

Il n'est pas difficile de vérifier que X est biholomorphiquement équivalente au plan projectif $\mathbf{CP}^2$ éclaté en un point : notons (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{C}^3$ (on identifie alors $\mathbf{C}^2$ au sous-espace engendré par e_2 et e_3) et $[z_0 e_0 + z_1 e_1 + z_2 e_2]$ les points de $\mathbf{CP}^2$. L'éclaté de $\mathbf{CP}^2$ au point $[e_0]$ sera noté $\mathbf{CP}^2_{[e_0]}$, et $E \subset \mathbf{CP}^2_{[e_0]}$ désignera le diviseur exceptionnel. Dans la carte affine $\{z_0 \neq 0\}$, l'espace tangent au point $[e_0] \in \mathbf{CP}^2$ s'identifie à $\mathbf{C}^2$, nous pouvons donc identifier le diviseur exceptionnel E à $\mathbf{CP}^1$.

L'application :

$$\phi : [(d, z, v)] \mapsto \begin{cases} [z e_0 + v] \in \mathbf{CP}^2 & \text{si } v \neq 0 \\ d \in E & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

est un difféomorphisme holomorphe entre X et $\mathbf{CP}^2_{[e_0]}$. Nous noterons $p_1 : X \to \mathbf{CP}^1$ la projection $(d, z, v) \mapsto d$ et $p_2 : X \to \mathbf{CP}^2$ l'application obtenue en composant ϕ avec la projection naturelle $\mathbf{CP}^2_{[e_0]} \to \mathbf{CP}^2$. Enfin, nous noterons $\omega_{FS,n}$ la forme symplectique de Fubini-Study sur $\mathbf{CP}^n$ (normalisée pour être d'intégrale π sur une droite). Rappelons sa définition. Nous considérons la forme symplectique standard ω_0 de $\mathbf{C}^{n+1}$. Si $p : \mathbf{S}^{2n+1} \to \mathbf{CP}^n$ est la projection canonique de la sphère unité de $\mathbf{C}^{n+1}$ vers $\mathbf{CP}^n$, la forme $\omega_{FS,n}$ est l'unique 2-forme telle que $\omega_0 = p^* \omega_{FS,n}$ sur la sphère $\mathbf{S}^{2n+1}$.

Nous munissons alors X de la 2-forme suivante :

$$\Omega = \frac{1}{3} p_1^* \omega_{FS,1} + \frac{2}{3} p_2^* \omega_{FS,2}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que Ω est une forme symplectique et que $[\Omega] = \frac{\pi}{3} c_1(X)$ (voir [59]). Nous avons donc $\varsigma = \frac{6}{\pi}$ dans cet exemple. Considérons alors l'action du cercle sur X définie par :

$$f_t([(d, z, v)]) = [(d, e^{2i\pi t} \cdot z, v)].$$

Cette action préserve bien sûr la forme symplectique Ω, elle est donc hamiltonienne. Nous noterons Z le champ de vecteurs qui l'engendre. Nous allons maintenant établir la :

Proposition 2.3.3 $I(\{f_t\}) = \frac{-1}{3}$.

Considérons le plongement *symplectique* suivant :

$$\begin{array}{rcl} \psi : (B^4(1), \omega_0) & \to & (\mathbf{CP}^2, \omega_{FS,2}) \\ (z_0, z_1) & \mapsto & [z_0 e_0 + z_1 e_1 + \sqrt{1 - |z_0|^2 - |z_1|^2} e_2], \end{array}$$

où $B^4(1)$ est la boule unité euclidienne de $\mathbf{R}^4$. L'image de ψ coïncide bien sûr avec l'image d'une carte affine standard : c'est l'ouvert $\{z_2 \neq 0\}$. Mais le paramétrage par la boule

unité de $\mathbf{C}^2$ permet d'exprimer plus simplement la forme symplectique de Fubini-Study dans ces coordonnées. Puisque

$$(z_0, z_1, \sqrt{1-|z_0|^2-|z_1|^2}) \in \mathbf{S}^5 \subset \mathbf{C}^3,$$

il est immédiat que $\psi^*\omega_{FS,2}$ coïncide avec la forme symplectique standard $\omega_0 = dx_0 \wedge dy_0 + dx_1 \wedge dy_1$. Notons également que, puisque l'image de ψ évite $[e_0]$, nous identifierons $B^4(1)$ à un ouvert de X (plus précisément, à son image par $p_2^{-1} \circ \psi$). Dans ces coordonnées, nous avons

$$f_t(z_0, z_1) = (e^{2i\pi t} \cdot z_0, z_1)$$

et $\Omega = \frac{2}{3}\omega_0 + \frac{1}{3}p_1^*\omega_{FS,1}$. La projection $p_1 : B^4(1) \to \mathbf{CP}^1$ s'écrit $p_1(z_0, z_1) = \frac{z_1}{\sqrt{1-|z_0|^2-|z_1|^2}}$.

Puisque chaque orbite de l'isotopie f_t que nous considérons est contenue dans une fibre de p_1, le calcul du hamiltonien H qui engendre cette action ne présente pas de difficulté. Nous avons :

$$-dH = \iota_Z\Omega = \frac{2}{3}\iota_Z p_2^*\omega_{FS,2}$$

(le terme $\iota_Z p_1^*\omega_{FS,1}$ est nul). Nous obtenons aisément que, dans la boule $B^4(1)$, $H(z_0, z_1) = \frac{2\pi}{3}|z_0|^2$. Le point $x_* = (0, 0) \in B^4(1)$ est fixe sous l'action de f_t, nous allons donc l'utiliser pour calculer la quantité $I(\{f_t\})$. L'application $u : \mathbf{D} \to X$ qui apparaît dans la définition de l'invariant I peut bien entendu être choisie constante égale à x_*.

Lemme 2.3.4 *Si $u_{x_*} : \mathbf{D} \to X$ désigne l'application constante égale à x_*, l'indice de Maslov $\mu(x_*, u_{x_*})$ est égal à 2.*

Preuve : la différentielle de f_t en x_*, lue dans les coordonnées (z_0, z_1) ci-dessus est l'application $\mathbf{C}$-linéaire dont la matrice (complexe) est :

$$A_t = \begin{pmatrix} e^{2i\pi t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'indice de maslov $\mu(x_*, u_*)$ est le degré de l'application du cercle dans lui-même définie par $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} \mapsto \det^2_{\mathbf{C}}(A_t)$. On a donc bien $\mu(x_*, u_*) = 2$. □

Notant $\widetilde{H} : X \to \mathbf{R}$ la fonction qui diffère de H par une constante et est de moyenne nulle sur X :

$$\int_X \widetilde{H}\Omega \wedge \Omega = 0.$$

L'action du point fixe x_* calculée par rapport au disque constant u_{x_*} est $-\widetilde{H}(x_*)$. Nous avons donc l'expression :

$$I(\{f_t\}) = -\frac{6}{\pi}\widetilde{H}(x_*) - 2.$$

La seule chose qu'il nous reste à calculer est donc la valeur moyenne de H. Il n'est pas difficile de vérifier que sur $B^4(1)$, la 2-forme $p_1^*\omega_{FS,1}$ s'écrit (en notant $z_0 = x_0 + iy_0$ et $z_1 = x_1 + iy_1$) :

$$\frac{dx_1 \wedge dy_1}{1-|z_0|^2} + Adx_0 \wedge dy_1 + Bdx_0 \wedge dx_1 + Cdy_0 \wedge dx_1 + Ddy_0 \wedge dy_1.$$

Les quatre derniers termes ont un produit extérieur nul avec ω_0, nous obtenons par conséquent :

$$\begin{aligned}
\Omega \wedge \Omega &= \frac{4}{9}\omega_0 \wedge \omega_0 + \frac{4}{9}p_1^*\omega_{FS,1} \wedge \omega_0 \\
&= \frac{4}{9}(\omega_0 \wedge \omega_0 + \frac{1}{2(1-|z_0|^2)}\omega_0 \wedge \omega_0) \\
&= \frac{4}{9}\left(1 + \frac{1}{2(1-|z_0|^2)}\right)\omega_0 \wedge \omega_0.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer l'intégrale de H (dans les calculs qui suivent, nous noterons $u_i = |z_i|^2$) :

$$\begin{aligned}
\int_X H\Omega \wedge \Omega &= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{4}{9} \int_{B^4(1)} |z_0|^2 \left(1 + \frac{1}{2(1-|z_0|^2)}\right) 2 \cdot dx_0 \wedge dy_0 \wedge dx_1 \wedge dy_1 \\
&= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{4}{9} \int_{u_0+u_1 \leq 1} u_0 \left(1 + \frac{1}{2(1-u_0)}\right) 2\pi^2 du_0 \wedge du_1 \\
&= \frac{4\pi^3}{3} \cdot \frac{4}{9} \int_0^1 (u_0(1-u_0)) + \frac{u_0}{2})du_0 \\
&= \frac{4\pi^3}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{12} \\
&= \frac{5\pi}{18} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2\pi^2.
\end{aligned}$$

Nous calculons de la même manière le volume total de X :

$$\begin{aligned}
\int_X \Omega \wedge \Omega &= \frac{4}{9} \cdot 2\pi^2 \int_{u_0+u_1 \leq 1} \left(1 + \frac{1}{2(1-u_0)}\right) du_0 \wedge du_1 \\
&= \frac{4}{9} \cdot 2\pi^2 \int_0^1 (1 - u_0 + \frac{1}{2})du_0 \\
&= \frac{4}{9} \cdot 2\pi^2
\end{aligned}$$

La moyenne de H est donc $\frac{5\pi}{18}$. Dans les coordonnées (z_0, z_1) précédemment introduites, le hamiltonien normalisé $\widetilde{H}$ qui engendre l'action du cercle considérée s'écrit alors :

$$\widetilde{H}(z_0, z_1) = \frac{2\pi}{3}|z_0|^2 - \frac{5\pi}{18}.$$

Nous obtenons bien $I(\{f_t\}) = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{18} - 2 = \frac{-1}{3}$, ce qui achève la preuve de la proposition 2.3.3.

Remarque. Dans [100], Polterovich obtient la valeur $\frac{-\pi}{18}$. Ceci est dû au fait que dans cet article, l'invariant $I(\{f_t\})$ est défini comme le nombre

$$\mathscr{A}(x,u) - \frac{1}{\varsigma}\mu(x,u),$$

(pour un point x et un disque u quelconques), qui est égal à $\frac{1}{\varsigma}$ fois l'invariant I tel que nous l'avons défini. Puisque $\varsigma = \frac{6}{\pi}$ dans notre exemple, nous obtenons bien un résultat cohérent avec [100].

2.4 Hamiltoniens autonomes sur la sphère

Nous avons vu, avec les théorèmes 2 et 4, que la valeur de certains quasi-morphismes sur les temps 1 des flots hamiltoniens associés à des fonctions de Morse sur une surface S (ou plus généralement, à des fonctions commutant avec une fonction de Morse) peut être exprimée sous la forme

$$\int_S H d\zeta,$$

où H est le hamiltonien et ζ est une *mesure signée* sur S, de masse totale **nulle** (ceci est bien sûr nécessaire puisque l'ajout d'une constante à H ne doit pas modifier la valeur du quasi-morphisme). Cette mesure est déterminée par la donnée de la fonction de Morse d'une part, et de la forme d'aire d'autre part. Dans le cas du théorème 2, la mesure ζ était de la forme :

$$\sum_{v\in\mathscr{V}} \delta_{x_v} - \mu_\omega,$$

où les x_v sont les $2g-2$ points critiques d'indice 1 correspondant aux sommets de l'ensemble $\mathscr{V}$ contenu dans le graphe de Reeb (défini précédemment), et où μ_ω est la mesure associée à une forme d'aire ω sur S (de volume total $2g-2$). Dans le cas du tore, dans l'énoncé du théorème 4, la mesure ζ était de la forme :

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\text{aire}(p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i))\delta_{x_i} - \mathbb{1}_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i)}\mu_\omega\right)$$

où les points x_i sont les points critiques d'indice 1 correspondant aux sommets s_i du graphe de Reeb et $\mathbb{1}_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i)}$ est la fonction indicatrice du domaine $p_{\mathcal{G}}^{-1}(T_i) \subset \mathbf{T}^2$.

Nous allons maintenant calculer la valeur du quasi-morphisme $\mathfrak{S} : \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2} \to \mathbf{R}$ sur les flots associés à des fonctions de Morse sur la sphère, et découvrir que, là encore, nous obtenons une expression de la forme $\mathfrak{S}(\varphi_H^1) = \int_{\mathbf{S}^2} H d\zeta$, pour une mesure signée ζ sur $\mathbf{S}^2$ vérifiant $\int_{\mathbf{S}^2} 1 d\zeta = 0$. Nous commençons par décrire la mesure dans ce cas.

Nous considérons donc, une dernière fois, une fonction de Morse $F : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$, dont nous noterons $x_1, \ldots, x_l$ les points critiques et $\lambda_j = F(x_j)$ les valeurs critiques. Nous supposerons celles-ci distinctes et ordonnées : $\lambda_1 < \cdots < \lambda_l$. Comme précédemment, nous disposons du graphe de Reeb $\mathcal{G}$ associé à F, et d'une projection $p_{\mathcal{G}} : \mathbf{S}^2 \to \mathcal{G}$. Comme nous

l'avons déjà évoqué au paragraphe 1.2.2, nous pouvons alors calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de la sphère, à partir du graphe $\mathcal{G}$:

$$2 = \chi(\mathbf{S}^2) = \sum_v 2 - degré(v),$$

où la somme porte sur les sommets de $\mathcal{G}$. Considérons alors une forme d'aire Ω sur $\mathbf{S}^2$, d'aire totale égale à 2. Nous pouvons alors reformuler l'égalité ci-dessus de la manière suivante : la mesure signée

$$\zeta_{\mathbf{S}^2} = \left(\sum_{v\in\mathscr{V}_0} \delta_v\right) - \left(\sum_{v\in\mathscr{V}_1} \delta_v\right) - \mu_\Omega$$

est de masse totale nulle. Ici, $\mathscr{V}_0$ désigne l'ensemble des sommets de degré 1 de $\mathcal{G}$, et $\mathscr{V}_1$ l'ensemble des sommets de degré 3. Nous notons toujours $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions H sur $\mathbf{S}^2$ qui commutent avec F : $\Omega(X_F, X_H) = 0$.

Théorème 6 *Si H est dans $\mathcal{F}$, nous avons :*

$$\mathfrak{S}(\varphi_H^1) = 2\int_{\mathbf{S}^2} H d\zeta_{\mathbf{S}^2}.$$

Dans le cas de la sphère $\mathbf{S}^2$, le fibré $\Lambda(\mathbf{S}^2)$ considéré pour construire le quasi-morphisme $\mathfrak{S}$ n'est autre que le quotient du fibré unitaire tangent par la relation d'équivalence $(x, v) \simeq (x, -v)$ (en effet, en général, le fibré $\Lambda(V) \to V$ est formé par les lagrangiens non-orientés, tangents à V). Sa classe d'Euler est égale à $2c_1(\mathbf{S}^2) = 4$. Nous avons donc $2[\Omega] = 2c_1(\mathbf{S}^2)$: le paramètre ς qui intervenait au paragraphe 2.2 est égal à 2. Ainsi, dans le cas de la sphère, l'application φ considérée pour construire $\mathfrak{S}$, qui allait du fibré en grassmanniennes lagrangiennes vers le fibré en cercles M de classe d'Euler $2c_1(V)$ n'est autre que l'identité. Ceci nous permet de décrire plus "concrètement" le quasi-morphisme $\mathfrak{S}$ dans ce cas.

Si (f_t) est une isotopie hamiltonienne sur la sphère, nous disposons de deux isotopies de $\Lambda(\mathbf{S}^2)$ qui la relèvent : l'isotopie induite par la différentielle df_t et l'isotopie $\Theta(f_t)$.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(\mathbf{S}^2) \arrow[r, "df_t,\Theta(f_t)"] \arrow[d] & \Lambda(\mathbf{S}^2) \arrow[d] \\
\mathbf{S}^2 \arrow[r, "f_t"] & \mathbf{S}^2
\end{tikzcd}$$

Si $d \in \Lambda(\mathbf{S}^2)$, les deux courbes $df_t(d)$ et $\Theta(f_t)(d)$ sont toujours contenues dans une même fibre de l'application $\pi_\Lambda : \Lambda(\mathbf{S}^2) \to \mathbf{S}^2$. On peut donc écrire $df_t(d) = e^{2i\pi\vartheta(d,t)} \cdot \Theta(f_t)(d)$. La quantité $\vartheta(d, 1) - \vartheta(d, 0)$ est, à une erreur bornée près, constante sur chaque fibre de π_Λ. La fonction angle$(-, f) : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}$ définie au paragraphe 2.2 vérifie :

$$|\text{angle}(x, f) - (\vartheta(d, 1) - \vartheta(d, 0))| \leq 2,$$

pour toute droite $d \subset T_x\mathbf{S}^2$. Nous avons alors $\mathfrak{S}(f) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \int_{\mathbf{S}^2} \text{angle}(-, f^p)\Omega$.

La preuve du théorème 6 suit la même ligne que la preuve du théorème 2 : nous commençons par calculer la valeur de la fonction $\widehat{\text{angle}}(-,\varphi_H^1)$ presque partout sur $\mathbf{S}^2$, puis nous l'intégrons sur chacun des domaines $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$ (ou e est une arête de $\mathcal{G}$), enfin nous sommons les différentes contributions obtenues sur les arêtes de $\mathcal{G}$.

Nous commençons par introduire quelques notations, qui sont similaires à celles utilisées dans les paragraphes précédents. Si H est dans $\mathcal{F}$, nous noterons $\widetilde{H}$ la fonction qui diffère de H par une constante et est de moyenne nulle sur $\mathbf{S}^2$, pour la forme Ω. Comme précédemment, nous fixons, pour chaque arête e de $\mathcal{G}$, un difféomorphisme du cylindre $\mathbf{S}^1\times]s_e^-,s_e^+[$ sur l'ouvert $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$ tel que $\Omega = ds\wedge d\theta$ et $X_F(\theta,s)=\vartheta_F(s)\frac{\partial}{\partial\theta}$ (avec $\vartheta_F>0$). Si $H\in\mathcal{F}$, le champ de vecteurs X_H s'écrit, sur $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$, $X_H(\theta,s)=\vartheta_H(s)\frac{\partial}{\partial\theta}$. Nous noterons s_l le sommet de $\mathcal{G}$ associé au point x_l. A chaque arête e nous associons également un signe $\epsilon(e)=\pm 1$ de la manière suivante. Le nombre $\epsilon(e)$ vaut 1 si la fonction F croît lorsque l'arête e est parcourue en direction du sommet s_l, et -1 dans le cas contraire.

Proposition 2.4.1 *On a, presque partout sur $p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)$:*

$$\widehat{\text{angle}}(x,\varphi_H^1) = -2\epsilon(e)\vartheta_H(x) + \mathfrak{M}\left(y\mapsto \int_0^1 \lambda(X_H)(\varphi_H^t(y))dt\right)(x) - 2\widetilde{H}(x).$$

Preuve : notons U l'ouvert $\mathbf{S}^2\setminus\{x_l\}$ et choisissons une trivialisation $\psi : U\times\mathbf{S}^1\to\pi_\Lambda^{-1}(U)$ du fibré $\Lambda(\mathbf{S}^2)\to\mathbf{S}^2$ au-dessus de U. Nous pouvons identifier la sphère à $\mathbf{CP}^1$ et l'ouvert U à $\mathbf{C}\subset\mathbf{CP}^1$, et supposer que la section $x\mapsto\psi(x,1)$ est égale à la section définie par le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$ sur $\mathbf{C}$. Dans la trivialisation ψ, la 1-forme α s'écrit $\alpha = ds+\lambda$, où λ vérifie $d\lambda = 2\Omega$. On peut écrire :

$$\begin{array}{rcl}\Theta(\varphi_H^t)(\psi(x,d)) & = & \psi(\varphi_H^t(x), e^{-2i\pi\int_0^t\lambda(X_H)(\varphi_H^{t'}(x))dt'}\cdot e^{2i\pi\cdot 2\cdot t\widetilde{H}(x)}\cdot d)\\ d\varphi_H^t(\psi(x,d)) & = & \psi(\varphi_H^t(x), e^{2i\pi\vartheta_d(t)}\cdot z).\end{array}$$

Nous avons alors :

$$|\text{angle}(x,\varphi_H^t) - (\vartheta_d(t) + \int_0^t \lambda(X_H)(\varphi_H^{t'}(x))dt' - 2t\widetilde{H}(x))| \le 2,$$

d'où l'on déduit :

$$\widehat{\text{angle}}(x,\varphi_H^1(x)) = \lim_{p\to\infty}\frac{\vartheta_d(p)}{p} + \mathfrak{M}\left(y\mapsto\int_0^1\lambda(X_H(\varphi_H^{t'}(y))dt'\right)(x) - 2\widetilde{H}(x).$$

La limite $\lim_{p\to\infty}\frac{\vartheta_d(p)}{p}$ ne dépend pas du point $d\in\mathbf{S}^1$. Nous pouvons donc choisir cette direction en fonction du point x. Si l'on choisit d égale à la direction du vecteur $X_F(x)$ (notée $[X_F(x)]$), puisque l'on a

$$d\varphi_H^t(x)(X_F(x)) = X_F(\varphi_H^t(x)),$$

le nombre $\vartheta_{[X_F(x)]}(p)$ est l'opposé du nombre de tours effectués par la droite $[X_F(\varphi_H^t(x))]$ lorsque t varie de 0 à p. Comme nous l'avons expliqué plus haut, ceci est dû au fait que

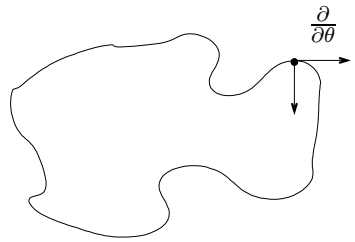

FIG. 2.1 –

l'orientation de la fibre $\pi_\Lambda^{-1}(x)$ du fibré $\Lambda(\mathbf{S}^2)$ par le champ de Reeb de α, qui s'écrit $\frac{\partial}{\partial s}$ dans notre trivialisation, est l'opposé de l'orientation canonique de $\pi_\Lambda^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}(T_x\mathbf{S}^2)$. Dans les coordonnées (s,θ) précédemment introduites, le flot φ_H^t s'écrit :

$$\varphi_H^t(s,\theta) = (s, \theta + t\vartheta_H(s)).$$

Puisque $X_F(\varphi_H^t(x))$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$ sont positivement proportionnels, le nombre $\vartheta_{[X_F(x)]}(p)$ est égal au signe près, à $2p\vartheta_H(s)$. Le facteur 2 vient du fait que nous comptons le nombre de rotation de la **direction** du vecteur $X_F(\varphi_H^t(x))$ qui est le double du nombre de rotation du vecteur $X_F(\varphi_H^t(x))$.

Pour obtenir $\vartheta_{[X_F(x)]}(p)$ nous devons multiplier $2p\vartheta_H(s)$ par un signe adéquat. Si $\epsilon(e) = 1$, le vecteur $\frac{\partial}{\partial s}$ est orienté dans la direction du point x_l, donc lorsque l'on identifie U à $\mathbf{C}$, il "pointe vers l'infini" (ou encore à l'extérieur de la courbe $p_{\mathcal{G}}^{-1}(p_{\mathcal{G}}(x)) \subset \mathbf{C}$) et $\vartheta_{[X_F(x)]}(p) = -2p\vartheta_H(s)$ dans ce cas. Le cas où $\epsilon(e) = -1$ est représenté sur la figure 2-1. Dans ce cas le vecteur $\frac{\partial}{\partial s}$ pointe à l'intérieur de la courbe $p_{\mathcal{G}}^{-1}(p_{\mathcal{G}}(x))$ et l'on a : $\vartheta_{[X_F(x)]}(p) = 2p\vartheta_H(s)$. Nous obtenons donc bien dans tous les cas que la limite $\lim_{p\to\infty}\frac{\vartheta_{[X_F(x)]}(p)}{p}$ est égale à $-2\epsilon(e)\vartheta_H(s)$. □

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale de la fonction $\widehat{\text{angle}}(-,\varphi_H^1)$ sur la sphère. Puisque la fonction $\widetilde{H}$ est d'intégrale nulle sur la sphère, nous considérons en fait l'intégrale de la fonction $\widehat{\text{angle}}(-,\varphi_H^1) + 2\widetilde{H}$. Nous calculons alors séparément l'intégrale du terme $-2\epsilon(e)\vartheta_H$ et celle du terme $\mathfrak{M}\left(y \mapsto \int_0^1 \lambda(X_H)(\varphi_H^t(y))dt\right)$.

Considérons l'ensemble $\{F \leq \lambda_l - \epsilon\}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{\{F\leq\lambda_l-\epsilon\}} \mathfrak{M}(y \mapsto \int_0^1 \lambda(X_H)(\varphi_H^t(y))dt)\Omega &= \int_{\{F\leq\lambda_l-\epsilon\}} \lambda(X_H)\Omega \\
&= \int_{\{F=\lambda_l-\epsilon\}} H\lambda - 2\int_{\{F\leq\lambda_l-\epsilon\}} H\Omega \\
&= 2H(\lambda_l-\epsilon)\int_{\{F\leq\lambda_l-\epsilon\}} \Omega - 2\int_{\{F\leq\lambda_l-\epsilon\}} H\Omega,
\end{aligned}$$

(nous avons utilisé, encore une fois, la formule suivante : $\lambda(X_H)\Omega = d(H\lambda) - 2H\Omega$ et noté

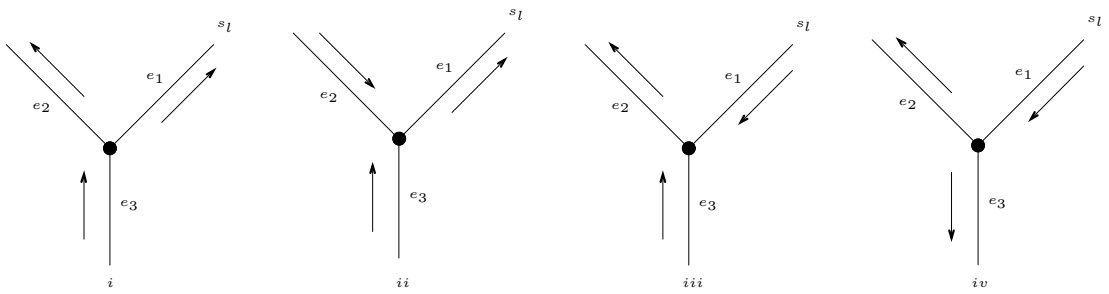

FIG. 2.2 –

$H(\lambda_l - \epsilon)$ la valeur de H sur le niveau $F = \lambda_l - \epsilon$). Nous avons donc :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{F \leq \lambda_l - \epsilon\}} \lambda(X_H)\Omega = 4H(x_l) - 2\int_{\mathbf{S}^2} H\Omega.$$

Par ailleurs, exactement comme au chapitre précédent, on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \sum_e \int_{p_{\mathcal{G}}^{-1}(e)} -2\epsilon(e)\vartheta_H\Omega & = & -\sum_e 2\epsilon(e)(H_{\mathcal{G}}(e^+) - H_{\mathcal{G}}(e^-)) \\ & = & \sum_v C(v)H_{\mathcal{G}}(v). \end{array}$$

Les sommes sur la première ligne de cette équation portent sur l'ensemble des arêtes du graphe $\mathcal{G}$, et la somme sur la seconde ligne porte sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$. Nous avons alors :

$$\mathfrak{S}(\varphi_H^1) = \sum_v C(v)H_{\mathcal{G}}(v) + 4H(x_l) - 2\int_{\mathbf{S}^2} H\Omega.$$

Il nous reste donc à calculer les constantes $C(v)$.

- Commençons par le cas où v est un extremum local de F. Si v est le sommet correspondant au point x_l, l'arête e correspondante vérifie $\epsilon(e) = 1$ et nous obtenons $C(v) = -2$. Si v correspond à un minimum local, $C(v) = 2\epsilon(e)$. Puisque F décroît lorsque l'on s'approche de v, on a $\epsilon(e) = 1$ dans ce cas et donc $C(v) = 2$. On vérifie de même que pour un maximum local autre que le point x_l la constante $C(v)$ est égale à 2.
- Si v correspond à un point critique d'indice 1 de F, notons e_1, e_2 et e_3 les trois arêtes de $\mathcal{G}$ adjacentes à v. On peut naturellement écrire $C(v) = C_1 + C_2 + C_3$ où le terme C_i est égal à $-2\delta_i \cdot \epsilon(e_i)H_{\mathcal{G}}(e_i^{\delta_i})$ (où $\delta_i = \pm 1$ et $v = e_i^{\delta_i}$). Nous pouvons supposer que l'arête e_1 relie v au sommet $s_l = p_{\mathcal{G}}(x_l)$ dans $\mathcal{G}$. Les deux arêtes e_2 et e_3 jouent alors des rôles symétriques. Nous devons alors distinguer 4 cas, selon que F croît ou non le long de l'arête e_1 orientée de v à s_l et selon que F est croissante le long de une ou deux arêtes parmi les e_i, lorsque l'on s'approche du sommet v (voir la figure). Par exemple dans le premier cas de la figure, nous avons : $\epsilon(e_1) = 1$, $\epsilon(e_2) = -1$, $\epsilon(e_3) = 1$ et $C_1 = 2$, $C_2 = -2$, $C_3 = -2$. Nous obtenons donc $C(v) = -2$. On vérifie de même que dans les trois cas restant on a $C(v) = -2$.

Finalement, nous obtenons bien :

$$\mathfrak{S}(\varphi_H^1) = 2\left(\sum_{v\in\mathscr{V}_0} H_{\mathcal{G}}(v) - \sum_{v\in\mathscr{V}_1} H_{\mathcal{G}}(v) - \int_{\mathbf{S}^2} H\Omega\right),$$

ce qui termine la preuve du théorème 6.

Chapitre 3

Remarques autour de la conjecture de Zimmer

3.1 Préliminaires

3.1.1 Le programme de Zimmer

Nous commençons par une présentation assez grossière du *programme de Zimmer*. Nous renvoyons le lecteur aux textes [84, 118, 120] pour une exposition plus détaillée.

Considérons un groupe de Lie G, simple (c'est-à-dire dont l'algèbre de Lie est simple), connexe, et à centre fini. Un exemple est donné par le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels, dont le déterminant est 1. La plupart des faits que nous allons évoquer se généralisent au cas où le groupe est semi-simple, mais nous nous contenterons du cas simple, pour simplifier...

Un *réseau* de G est un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ tel que le quotient G/Γ soit de mesure de Haar finie. Un exemple très classique est le suivant. Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ est un réseau dans le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$. Dans ce cas le quotient $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ est non-compact. Le rang réel de G est la dimension maximale d'une sous-algèbre abélienne de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, dont l'image par la représentation adjointe est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Notons que le rang de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est $n-1$: dans l'algèbre $\mathfrak{sl}_n$ des matrices réelles $n \times n$ de trace nulle, le sous-espace de dimension $n-1$ formé des matrices diagonales est une sous-algèbre abélienne maximale dont l'action adjointe est diagonalisable. Concernant l'existence de réseaux *cocompacts*, c'est-à-dire pour lesquels le quotient G/Γ est compact, le lecteur pourra consulter [19].

Dans les années 70, les travaux de Margulis (voir [84]) ont mis en évidence de remarquables propriétés des réseaux de G, lorsque le rang réel de G est supérieur ou égal à 2. Ce sont les fameux résultats de *super-rigidité* et d'*arithméticité*, qui ont donné naissance à une intense activité dans ce domaine et à de nombreuses généralisations. Rappelons-en brièvement la teneur. Nous supposons donc que Γ est un réseau de G. Les résultats de super-rigidité affirment que, sous certaines conditions, les homomorphismes de Γ dans un groupe de Lie H, s'étendent continûment à G. Par exemple, si $\phi : \Gamma \to H$ est un homomorphisme de Γ dans un groupe de Lie simple connexe H, si $\phi(\Gamma)$ est Zariski-dense dans H, alors l'homomorphisme ϕ s'étend en un homomorphisme continu $\widetilde{\phi} : G \to H$. Ce résultat de super-rigidité permet ensuite d'établir une classification des réseaux en rang supérieur : ils sont tous obtenus par des constructions arithmétiques (comme, par exemple, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ qui est le groupe des points entiers du groupe algébrique $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, qui est défini sur $\mathbf{Q}$). Nous ne donnerons pas plus de détails sur le théorème d'arithméticité de Margulis ici, mais renvoyons à [84] pour un énoncé précis. Enfin, citons également un autre théorème de Margulis, sur lequel nous reviendrons plus loin. Il affirme que le groupe Γ est *presque simple*, c'est-à-dire que tout sous-groupe distingué de Γ est ou bien fini (et contenu dans le centre de G) ou bien d'indice fini dans Γ.

Dans les années 80, Zimmer a proposé de généraliser les résultats de super-rigidité de Margulis à un cadre *non-linéaire*. Il se place dans le cas où le groupe H n'est plus un groupe de Lie de dimension finie, mais est remplacé par le groupe $\mathrm{Diff}(V)$ des difféomorphismes d'une variété compacte V. L'idée générale est que les homorphismes $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}(V)$ qui sont non-triviaux (nous entendons par là, d'image infinie) devraient (comme dans le cas où H était un groupe de Lie de dimension finie) s'étendre en des actions du groupe G tout

entier sur la variété V (mais ce n'est pas toujours le cas), ou devraient du moins être de nature *algébrique*. Citons deux exemples très classiques qui illustrent cette idée :

- Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, qui est un réseau dans le groupe de rang $(n-1)$ $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, agit sur la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$, par projectivisation de son action usuelle sur $\mathbf{R}^n$.
- Le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ agit également, en préservant le volume, sur le tore $\mathbf{T}^n$ (dans ce cas, l'action ne s'étend pas à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$).

Zimmer conjecture par exemple que, si le réseau Γ agit de manière non-triviale sur une variété V, la dimension de V devrait être assez grande, comparée au rang de G. Plus précisément, on a les questions suivantes :

$$\text{Si } \Gamma \text{ agit fidèlement sur la variété } V\text{, a-t-on } \dim V \geq \operatorname{rang} G\,?$$

$$\text{Si } \Gamma \text{ agit fidèlement sur la variété } V \text{ en préservant le volume, a-t-on } \dim V \geq \operatorname{rang} G + 1\,?$$

Dans le cas où ces inégalités ne sont pas respectées, on s'attend à ce que toute action de Γ sur V transite par un quotient fini de Γ. Les deux exemples précédents sont des cas d'égalité dans les deux inégalités ci-dessus.

Le cas où la variété V est le cercle est maintenant relativement bien compris, grâce aux travaux de Burger et Monod [24], Ghys [56], Navas [92] et Witte [116]. Nous n'entrerons pas dans le détail des résultats connus, mais renvoyons par exemple à [57, 93] pour un survol des résultats connus et des problèmes ouverts concernant les actions de groupes sur les variétés unidimensionnelles.

3.1.2 Actions sur les surfaces : les résultats connus

Nous rappelons ici quels sont les résultats connus concernant les actions de réseaux de rang supérieur sur les surfaces (pour l'essentiel, nous parlerons d'actions qui préservent l'aire, mais pas uniquement). Nous supposons donc toujours que Γ est un réseau dans un groupe de Lie simple (connexe, à centre fini) de rang réel supérieur ou égal à 2.

Supposons donnée une action $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}(\Sigma)$ du groupe Γ sur une surface compacte. Si Σ est de genre g supérieur ou égal à 1, nous pouvons composer ρ avec la projection de $\mathrm{Diff}(\Sigma)$ sur $\mathrm{Diff}(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ (où $\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$ désigne le groupe des difféomorphismes de Σ qui sont isotopes à l'identité). Nous obtenons un morphisme $\hat{\rho} : \Gamma \to \mathrm{MCG}(g)$, où $\mathrm{MCG}(g)$ désigne le groupe modulaire de la surface Σ, c'est-à-dire le quotient $\mathrm{Diff}(\Sigma)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma)$. Lorsque $g = 1$, ce groupe n'est autre que le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$, et on peut montrer, en utilisant le fait Γ a la propriété (T) (voir le paragraphe 3.2.1 pour des rappels concernant cette propriété) que tout morphisme de Γ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ est d'image finie. Farb et Masur [40], en utilisant les résultats de Kaimanovich et Masur [72], ont prouvé qu'un tel homomorphisme est encore d'image finie lorsque $g \geq 2$. Une preuve alternative de ce fait (basée sur la construction de quasi-morphismes) a été ensuite découverte par Bestvina et Fujiwara [14]. Notant Γ_0 le noyau de l'homomorphisme $\hat{\rho}$, nous obtenons un homomorphisme $\rho : \Gamma_0 \to \mathrm{Diff}_0(\Sigma)$. Puisque Γ_0 est d'indice fini dans Γ c'est encore un réseau dans le groupe G.

Nous sommes donc ramenés à étudier les actions de réseaux (de rang supérieur) par difféomorphismes isotopes à l'identité.

Dans [55], Ghys étudie les actions analytiques réelles de certains réseaux sur les surfaces (sans supposer que l'action préserve une forme d'aire). Il montre par exemple qu'un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$, avec $n \geq 4$, n'admet pas d'action analytique réelle non-triviale sur une surface compacte orientée différente du tore. Ce résultat a été étendu au cas des actions sur le tore par Rebelo [105]. Remarquons que, là encore, les résultats obtenus corroborent les inégalités conjecturées par Zimmer entre le rang du groupe et la dimension de la variété, pour l'existence d'une action fidèle d'un réseau : lorsque $n \geq 4$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ est un réseau dans un groupe dont le rang est strictement supérieur à 2. Pour d'autres résultats concernant les actions analytiques réelles, voir [41].

Passons maintenant au cas des actions préservant l'aire. On suppose donc donné un morphisme ρ d'un réseau Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega)$ des difféomorphismes de Σ, isotopes à l'identité et qui préservent l'aire. Si le genre g de Σ est non-nul, nous pouvons considérer l'homomorphisme $\mathrm{Flux} : \mathrm{Diff}_0(\Sigma, \omega) \to A_g$. Ici, A_g est isomorphe à $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ si $g = 1$, et au groupe $H^1(\Sigma, \mathbf{R})$ si $g \geq 2$. En le composant avec ρ, nous obtenons un morphisme

$$\mathrm{Flux} \circ \rho : \Gamma \to A_g$$

vers un groupe abélien. Rappelons ici que le groupe Γ a la propriété que le quotient

$$\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$$

est fini. Ceci est une conséquence du fait que Γ a la propriété (T) de Kazhdan (nous rappellerons au paragraphe suivant la définition et les principales conséquences de cette propriété). En particulier, tout morphisme de Γ vers un groupe abélien a une image finie. Le noyau Γ_0 de l'homomorphisme $\mathrm{Flux} \circ \rho$ est donc d'indice fini dans Γ, et agit par difféomorphismes hamiltoniens sur Σ. Nous sommes donc ramenés à étudier les actions de réseaux par difféomorphismes hamiltoniens sur Σ : c'est là le cœur du problème.

Les résultats existant dans ce cas, dus à Polterovich d'une part [103], et à Franks et Handel d'autre part [47, 48], concernent tous les réseaux *non-uniformes*, c'est-à-dire, ceux pour lesquels le quotient G/Γ n'est pas compact. Les preuves reposent alors sur deux propriétés du groupe Γ que nous rappelons maintenant.

• La première est le résultat de Margulis déjà mentionné plus haut, qui est vrai pour tous les réseaux de G (uniformes comme non-uniformes) : le groupe Γ est presque simple. Ainsi pour établir qu'une action de Γ est triviale, il suffit, par exemple, d'exhiber un élément d'ordre infini dans le noyau de l'action. Le noyau doit alors être d'indice fini, autrement dit, l'action transite par un quotient fini de Γ.

• La seconde propriété utilisée est particulière aux réseaux non-uniformes. Elle est reliée à la géométrie de Γ. Avant de la présenter, nous rappelons quelques faits classiques de théorie géométrique des groupes.

Si Λ est un groupe de type fini quelconque, et S un système générateur fini et symétrique de Λ, on définit classiquement une "norme" $|\cdot|$ sur Λ en posant pour $\gamma \in \Lambda$:

$$|\gamma| = \inf\{n, \gamma \in S^n\},$$

(en convenant que $S^0 = \{1\}$). On a bien sûr les propriétés suivantes :

- $|\gamma| = |\gamma^{-1}|$,
- $|\gamma_1\gamma_2| \leq |\gamma_1| + |\gamma_2|$,
- $|\gamma| = 0$ si et seulement si $\gamma = 1$.

Il n'est pas difficile de s'assurer que si $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ sont deux normes associées à deux systèmes générateurs finis quelconques S_1 et S_2 de Λ, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait :

$$\frac{1}{C}|\gamma|_1 \leq |\gamma|_2 \leq C|\gamma|_1,$$

pour tout γ de Λ. Nous appellerons *métrique des mots* sur Λ une norme associée comme ci-dessus à un système générateur fini quelconque de Λ.

Rappelons que si $|\cdot|$ est une métrique des mots sur Λ et γ un élément quelconque de Λ, la suite $(|\gamma^p|)_{p\geq 0}$ est *sous-additive*, c'est-à-dire vérifie :

$$|\gamma^{n+p}| \leq |\gamma^n| + |\gamma^p|.$$

Ceci implique que la suite $(\frac{1}{p}|\gamma^p|)_{p\geq 0}$ converge lorsque p tend vers l'infini vers la quantité $\inf_{p\geq 0}\frac{|\gamma^p|}{p}$.

Définition 2 *Un élément γ de Λ est distordu, s'il est d'ordre infini et si*

$$\lim_{p\to\infty}\frac{|\gamma^p|}{p} = 0,$$

où $|\cdot|$ est une métrique des mots quelconque sur Λ.

Notons que, d'après la remarque qui précède la définition, cette notion ne dépend pas du choix de la métrique des mots sur Λ. On peut bien sûr définir une notion analogue si Λ_0 est un sous-groupe de type fini de Λ. Si $|\cdot|_{\Lambda_0}$ et $|\cdot|_\Lambda$ sont les métriques associées à des systèmes générateurs finis de Λ_0 et Λ respectivement, on dit que Λ_0 est *non-distordu* dans Λ ("straight" en anglais) s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\gamma|_\Lambda \geq C \cdot |\gamma|_{\Lambda_0},$$

pour tout $\gamma \in \Lambda_0$. Dans le cas contraire on dit que Λ_0 est distordu dans Λ. Notons que l'inégalité $|\gamma|_\Lambda \leq D|\gamma|_{\Lambda_0}$ ($\gamma \in \Lambda_0$), pour une constante D, est toujours vérifiée. Cette notion a été introduite par Gromov dans [60]. Dans le cas où Λ_0 est le sous-groupe cyclique engendré par un élément d'ordre infini γ_0, il n'est pas difficile de s'assurer que le sous-groupe Λ_0 est distordu si et seulement si l'élément γ_0 est distordu au sens de la définition ci-dessus.

Exemple. Nous mentionnons maintenant un exemple typique d'élément distordu dans un groupe de type fini. Considérons le groupe de Heisenberg $H_3(\mathbf{Z})$. C'est le groupe formé

des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où x, y, z sont dans $\mathbf{Z}$. Il est engendré par les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le commutateur $C = [A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$ est égal à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui engendre le centre du groupe $H_3(\mathbf{Z})$. Il n'est pas difficile d'établir par récurrence l'égalité suivante :

$$[A^k, B^l] = C^{kl},$$

où $k, l \in \mathbf{N}$. En particulier, si l'on considère le groupe $H_3(\mathbf{Z})$ muni du système générateur $S = \{A, B\}$ et de la métrique des mots associée, nous avons :

$$|C^{k^2}| \leq 4k,$$

et donc :

$$\frac{|C^{k^2}|}{k^2} \leq \frac{4}{k}.$$

L'élément C est donc distordu dans le groupe $H_3(\mathbf{Z})$ (il n'est pas difficile de s'assurer que le même phénomène se reproduit dans tout groupe nilpotent de type fini qui n'est pas abélien). Puisque $H_3(\mathbf{Z}) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$, ceci assure également que C est distordu dans le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$: en effet partant d'un système générateur quelconque S de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$, nous pouvons lui ajouter les éléments A et B pour obtenir un nouveau système générateur S'. Pour la métrique des mots associée à S', nous avons bien sûr :

$$\frac{|C^{k^2}|}{k^2} \leq \frac{4}{k}.$$

Le même argument assure que l'image d'un élément distordu par un homomorphisme entre deux groupes de type fini est encore un élément distordu. Ainsi, pour tout $n \geq 3$, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ contient un tel élément (puisque $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ pour $n \geq 3$).

Remarque. On peut montrer que dans le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$, l'élément C est distordu de manière exponentielle, c'est-à-dire que l'on a : $|C^n| = O(log(n))$, où $|\cdot|$ est une métrique des mots sur $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$.

En fait, Lubotzky, Mozes et Raghunathan [83] ont prouvé que le même phénomène se produisait dans tous les réseaux non-uniformes, en rang supérieur : si Γ est un réseau

non-uniforme du groupe de Lie simple, connexe et à centre fini G, de rang réel supérieur ou égal à 2, alors Γ contient un élément distordu. Notons que là encore, on a un résultat analogue pour les groupes semi-simples. Le résultat de [83] est en fait beaucoup plus précis et affirme notamment que Γ contient un élément γ_0 tel que :

$$|\gamma_0^n| = O(log(n)),$$

où $|\cdot|$ est une métrique des mots fixée sur Γ.

Revenons maintenant aux actions hamiltoniennes sur les surfaces.

Considérons donc un morphisme $\rho : \Gamma \to \mathscr{G}_\Sigma$ où Γ est un réseau comme ci-dessus et $\mathscr{G}_\Sigma$ est le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface fermée de genre $g \geq 1$. Dans ce cas Polterovich [103] d'abord, puis Franks et Handel [47, 48] par une méthode différente, ont prouvé que le morphisme ρ est nécessairement d'image finie. La stratégie générale est commune à leurs deux preuves. Il s'agit de montrer qu'un difféomorphisme $f \in \mathscr{G}_\Sigma$ distinct de l'identité, a une dynamique qui "croît au moins linéairement". Plus précisément, dans [103], cela se traduit par la construction d'une fonction $w : \mathscr{G}_\Sigma \to \mathbf{R}_+$ telle que, pour tout $f \in G_\Sigma$, $f \neq \mathbb{1}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $w(f^n) \geq \epsilon n$, et, si $\Lambda \subset \mathscr{G}_\Sigma$ est un groupe de type fini muni d'une métrique des mots $|\cdot|$, il existe une constante C telle que :

$$w(f) \leq C|f|, \quad (f \in \Lambda).$$

Nous décrivons brièvement , suivant [103], comment construire une telle fonction lorsque la surface Σ est de genre $g \geq 2$. Considérons donc un difféomorphisme $f \in \mathscr{G}_\Sigma$, $f \neq \mathbb{1}$. Soit (H_t) un hamiltonien engendrant une isotopie (f_t) de l'identité à f. On lui associe classiquement la *fonctionnelle d'action* $\mathcal{A}$ définie sur l'espace Ω des lacets contractiles de Σ par :

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_{\mathbf{D}} u^*\omega - \int_0^1 H_t(\gamma(t))dt,$$

où $u : \mathbf{D} \to \Sigma$ est une application telle que $u(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$. On montre alors qu'un lacet contractile γ est un point critique de $\mathcal{A}$ si et seulement si γ est de la forme $\gamma(t) = f_t(x)$ où x est un point fixe du difféomorphisme $f_1 = f$. L'ensemble $\mathrm{Crit}(\mathcal{A})$ des valeurs critiques de $\mathcal{A}$ est un compact de $\mathbf{R}$ qui ne dépend que du difféomorphisme f et pas du choix de l'isotopie reliant l'identité à f (voir [71, 109]). On définit alors, suivant [103] :

$$w(f) = \text{diamètre}\,(\mathrm{Crit}(\mathcal{A}))\,.$$

Notons que si $\gamma(t) = f_t(x)$ est un lacet contractile qui est un point critique de $\mathcal{A}$, l'action pour l'isotopie $f_t * f_t \circ f * \cdots * f_t \circ f^{n-1}$ du lacet γ parcouru n fois est égale à $n\mathcal{A}(\gamma)$. On en déduit immédiatement :

$$w(f^n) \geq nw(f).$$

Le point difficile est alors d'établir que $w(f) > 0$ lorsque f est différent de l'identité. Mais ceci est une conséquence d'un résultat de Schwarz [109]. La suite $w(f^n)$ croît donc linéairement. Le fait que la restriction de w à un groupe de type fini soit controlée par une métrique des mots sur le groupe se prouve de manière élémentaire (voir [103]).

Bien sûr les propriétés d'une telle fonction interdisent l'existence d'un sous-groupe de type fini de $\mathscr{G}_\Sigma$ contenant un élément distordu. Ainsi, une fois l'existence d'une telle fonction acquise, nous obtenons que le morphisme $\rho : \Gamma \to \mathscr{G}_\Sigma$ considéré, envoie nécessairement l'élément distordu $\gamma_0 \in \Gamma$ fourni par le théorème de Lubotzky, Mozes et Raghunathan, sur l'identité. Le noyau de ρ est donc infini (il contient γ_0). Il est donc d'indice fini par le théorème de Margulis déjà mentionné. Autrement dit, le groupe $\rho(\Gamma)$ est fini. Une autre conséquence de l'existence de la fonction w est que tout sous-groupe nilpotent, de type fini, du groupe $\mathscr{G}_\Sigma$ est abélien.

Mentionnons que la méthode de Franks et Handel s'applique encore lorsque la surface Σ est la sphère $\mathbf{S}^2$, dans le cas particulier où Γ contient un sous-groupe isomorphe au groupe $H_3(\mathbf{Z})$ (c'est par exemple le cas si Γ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ avec $n \geq 3$).

Le cas des actions de réseaux *cocompacts* reste ouvert à ce jour. Dans ce cas, il n'existe pas d'élément distordu dans le groupe, et on ne peut appliquer l'approche précédente. Dans la suite de ce chapitre, nous présentons quelques remarques autour de ce problème. Dans le paragraphe 3.2, nous introduisons certaines propriétés cohomologiques satisfaites par un réseau de rang supérieur Γ. Nous discutons ensuite comment ces propriétés de Γ imposent des contraintes sur la dynamique individuelle de chaque difféomorphisme dans le groupe $\rho(\Gamma)$, si $\rho : \Gamma \to \mathscr{G}_\Sigma$ est une hypothétique action hamiltonienne de Γ sur une surface fermée Σ.

3.2 Théorèmes d'annulation et conséquences

3.2.1 Cohomologie à valeurs dans une représentation unitaire

Considérons un groupe discret Γ agissant par isométries (linéaires) sur un espace de Hilbert réel $\mathscr{H}$. Autrement dit nous considérons un homomorphisme $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$, où $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ désigne le groupe des opérateurs unitaires de $\mathscr{H}$. Un tel homomorphisme est appelé *représentation unitaire* de Γ.

Exemple. Supposons que Γ agisse sur un espace de probabilité (X, μ) en préservant la mesure μ. Si $f \in \mathrm{L}^2(X, \mu)$ est une fonction mesurable de carré intégrable sur X, notons $\pi(\gamma)(f) = f \circ \gamma^{-1}$. La fonction $f \circ \gamma^{-1}$ est également de carré intégrable, et l'application linéaire

$$\pi(\gamma) : \mathrm{L}^2(X, \mu) \to \mathrm{L}^2(X, \mu)$$

ainsi définie est une isométrie. Nous obtenons donc une représentation unitaire de Γ à valeurs dans l'espace $\mathrm{L}^2(X, \mu)$. Cette construction est la principale source d'exemples que nous allons considérer par la suite.

Nous allons maintenant effectuer des rappels sur les différents groupes de cohomologie associés à une représentation unitaire de Γ. Nous renvoyons le lecteur à [23, 64] pour une introduction plus détaillée à la cohomologie des groupes en général, et à [61, 88] pour ce qui touche à la cohomologie bornée.

Nous noterons $\mathscr{C}(\Gamma^n, \mathscr{H})$ l'espace des applications de Γ^n dans $\mathscr{H}$. Soit $c : \Gamma \times \Gamma \to \mathscr{H}$ une application. Le *cobord* de c est l'application $\mathfrak{d}^2 c : \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \to \mathscr{H}$ définie par :

$$\mathfrak{d}^2 c(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \pi(\gamma_1)(c(\gamma_2, \gamma_3)) - c(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) + c(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3) - c(\gamma_1, \gamma_2).$$

On définit de même le cobord d'une application $c : \Gamma \to \mathscr{H}$ comme étant l'application $\mathfrak{d}^1 c \in \mathscr{C}(\Gamma^2, \mathscr{H})$ définie par :

$$\mathfrak{d}^1 c(\gamma_1, \gamma_2) = \pi(\gamma_1)(c(\gamma_2)) + c(\gamma_1) - c(\gamma_1\gamma_2),$$

et le cobord d'un élément $v \in \mathscr{H}$ comme étant l'application $\mathfrak{d}^0 v \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathscr{H})$ définie par :

$$\mathfrak{d}^0 v(\gamma) = \pi(\gamma)(v) - v.$$

Un calcul facile permet de vérifier que $\mathfrak{d}^2 \circ \mathfrak{d}^1 = 0$ et $\mathfrak{d}^1 \circ \mathfrak{d}^0 = 0$. On peut bien sûr définir par une formule analogue un opérateur de cobord $\mathfrak{d}^n : \mathscr{C}(\Gamma^n, \mathscr{H}) \to \mathscr{C}(\Gamma^{n+1}, \mathscr{H})$, pour tout entier n, de sorte que $\mathfrak{d}^{n+1} \circ \mathfrak{d}^n = 0$. On obtient alors un complexe différentiel gradué $(\mathscr{C}(\Gamma^n, \mathscr{H}), \mathfrak{d}^n)_{n \geq 0}$ dont on peut considérer la cohomologie. Cependant, nous n'aurons besoin que des groupes de cohomologie de degré 1 et 2.

Classiquement, nous dirons qu'une application $c \in \mathscr{C}(\Gamma^n, \mathscr{H})$ est un cocycle (ou n-cocycle), si $\mathfrak{d}^n c = 0$ et noterons $Z^n(\Gamma, \pi) \subset \mathscr{C}(\Gamma^n, \mathscr{H})$ l'espace des n-cocycles. Nous noterons également $B^n(\Gamma, \pi) \subset Z^n(\Gamma, \pi)$ l'espace des cobords d'applications de Γ^{n-1} dans $\mathscr{H}$:

$$B^n(\Gamma, \pi) = \{\mathfrak{d}^{n-1} c, c \in \mathscr{C}(\Gamma^{n-1}, \mathscr{H})\}.$$

Nous avons ainsi :

- Un vecteur $v \in \mathscr{H}$ (considéré comme une application de Γ^0 dans $\mathscr{H}$) est un cocycle si et seulement si c'est un point fixe pour l'action de Γ sur $\mathscr{H}$.
- Une application $c : \Gamma \to \mathscr{H}$ est un 1-cocycle si et seulement si elle vérifie :

$$c(\gamma_1\gamma_2) = \pi(\gamma_1)(c(\gamma_2)) + c(\gamma_1).$$

Le premier groupe de cohomologie de Γ à valeurs dans π est alors le quotient :

$$H^1(\Gamma, \pi) = Z^1(\Gamma, \pi)/B^1(\Gamma, \pi).$$

De manière identique, le second groupe de cohomologie de Γ à valeurs dans π est le quotient :

$$H^2(\Gamma, \pi) = Z^2(\Gamma, \pi)/B^2(\Gamma, \pi).$$

Nous allons maintenant définir le second groupe de **cohomologie bornée** de Γ, à valeurs dans la représentation π. Nous noterons $\mathscr{C}_b(\Gamma^n, \mathscr{H})$ l'espace des applications $c : \Gamma^n \to \mathscr{H}$ qui sont uniformément bornées, c'est-à-dire pour lesquelles la quantité

$$|c|_{\infty, \Gamma^n} = \sup ||c(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)||$$

(où $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ décrit Γ^n) est finie. Il n'est pas difficile de vérifier que le cobord d'une application bornée est borné. C'est une conséquence de la forme explicite de l'opérateur $\mathfrak{d}^n$ (que nous n'avons décrit qu'en petit degré...). Par exemple, si $c : \Gamma \to \mathscr{H}$ est une

application bornée, nous avons $|\mathfrak{d}^1 c|_{\infty,\Gamma^2} \leq 3|c|_{\infty,\Gamma}$. L'application $\mathfrak{d}^1 c : \Gamma \times \Gamma \to \mathscr{H}$ est donc un 2-cocycle borné.

La famille $(\mathscr{C}_b(\Gamma^n, \mathscr{H}), \mathfrak{d}^n)_{n\geq 0}$ est donc un sous-complexe du complexe $(\mathscr{C}(\Gamma^n, \mathscr{H}), \mathfrak{d}^n)_{n\geq 0}$. Sa cohomologie est la cohomologie bornée de Γ à valeurs dans π. Nous noterons $Z_b^n(\Gamma, \pi) \subset Z^n(\Gamma, \pi)$ l'espace des 2-cocycles bornés et $B_b^n(\Gamma, \pi) \subset Z_b^n(\Gamma, \pi)$ l'espace des cobords d'applications bornées de Γ^{n-1} dans $\mathscr{H}$. Le n-ième groupe de cohomologie bornée de Γ à valeurs dans π est donc le quotient :

$$H_b^n(\Gamma, \pi) = Z_b^n(\Gamma, \pi)/B_b^n(\Gamma, \pi).$$

Nous expliquerons un peu plus loin pourquoi le groupe $H_b^1(\Gamma, \pi)$ est toujours trivial. Le seul groupe de cohomologie bornée que nous aurons à considérer sera le groupe $H_b^2(\Gamma, \pi)$.

Nous disposons bien sûr d'une application naturelle

$$H_b^2(\Gamma, \pi) \to H^2(\Gamma, \pi),$$

induite par l'inclusion de $Z_b^2(\Gamma, \pi)$ dans $Z^2(\Gamma, \pi)$. Cette application est parfois appelée *application de comparaison* (voir [88]). Suivant [88], nous noterons $EH_b^2(\Gamma, \pi) \subset H_b^2(\Gamma, \pi)$ le noyau de cette application. Le "E" signifiant bien sûr *exact* : l'espace $EH_b^2(\Gamma, \pi)$ est formé des classes de cohomologie bornée (de degré 2), qui sont exactes en cohomologie usuelle. Plus précisément, nous allons établir la proposition suivante. C'est un analoque du fait que l'espace des quasi-morphismes homogènes modulo les homomorphismes est isomorphe au noyau de l'application $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ (que nous avons rencontré dans l'introduction ainsi qu'au paragraphe 1.1.3).

Proposition 3.2.1 *L'espace $EH_b^2(\Gamma, \pi)$ s'identifie au quotient :*

$$\{u \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathscr{H}), |\mathfrak{d}^1 u|_{\infty,\Gamma^2} < \infty\} / \left(Z^1(\Gamma, \pi) + \mathscr{C}_b(\Gamma, \mathscr{H})\right).$$

Preuve : soit $u \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathscr{H})$ telle que $|\mathfrak{d}^1 u|_{\infty,\Gamma^2} < \infty$. L'application $\mathfrak{d}^1 u$ définit un 2-cocycle borné, et donc une classe de cohomologie bornée $\varphi(u) = [\mathfrak{d}^1 u] \in H_b^2(\Gamma, \pi)$. La classe $\varphi(u)$ est triviale en cohomologie usuelle puisqu'elle est représentée par le cobord d'une application de Γ dans $\mathscr{H}$. Nous avons donc une application surjective :

$$\varphi : \{u \in \mathscr{C}(\Gamma, \mathscr{H}), |\mathfrak{d}^1 u|_{\infty,\Gamma^2}\} \to \mathrm{Ker}(H_b^2(\Gamma, \pi) \to H^2(\Gamma, \pi)).$$

Décrivons son noyau. Si la classe $\varphi(u)$ est triviale, il existe $v \in \mathscr{C}_b(\Gamma, \mathscr{H})$ tel que $\mathfrak{d}^1 u = \mathfrak{d}^1 v$. La fonction $w = u - v$ est donc un 1-cocycle : $\mathfrak{d}^1 w = 0$. Nous avons donc bien :

$$u = w + v, \quad w \in Z^1(\Gamma, \pi), \ v \in \mathscr{C}_b(\Gamma, \mathscr{H}).$$

Réciproquement, pour toute fonction u dans $Z^1(\Gamma, \pi) + \mathscr{C}_b(\Gamma, \mathscr{H})$, la classe $\varphi(u)$ est triviale. Le noyau de φ s'identifie donc bien à la somme $Z^1(\Gamma, \pi) + \mathscr{C}_b(\Gamma, \mathscr{H})$. □

En 1967, Kazhdan [74] a introduit une propriété portant sur la structure de l'espace des représentations unitaires d'un groupe topologique G, appelée maintenant propriété (T). Nous ne donnerons pas la définition originale de cette propriété, mais une définition qui lui

est équivalente (pour les groupes localement compacts et σ-compacts du moins), d'après un théorème de Delorme et Guichardet (voir [30, 65], ou [67]). Cette définition équivalente fait intervenir les groupes de cohomologie $H^1(G, \pi)$ associés aux représentations unitaires π de G.

Définition 3 *Le groupe G a la propriété (T) de Kazhdan si, pour toute représentation unitaire π de G sur un espace de Hilbert réel $\mathscr{H}$, le groupe $H^1(G, \pi)$ est trivial.*

Mentionnons que, dans le cas où G est un groupe topologique, nous ne considérons que des représentations unitaires continues (l'application $g \in G \mapsto \pi(g)(v) \in \mathscr{H}$ est continue pour tout $v \in \mathscr{H}$) et des applications continues $G^n \to \mathscr{H}$ pour définir la cohomologie de G à valeurs dans une représentation unitaire sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$.

Nous mentionnons maintenant quelques faits importants reliés à la propriété (T).

- Si G est un groupe localement compact et $\Gamma \subset G$ un réseau de G, alors G a la propriété (T) si et seulement si Γ a la propriété (T).
- Si G est un groupe de Lie, simple, à centre fini, connexe, de rang réel supérieur ou égal à 2, le groupe G a la propriété (T) [29, 74]. Ainsi tout réseau de G a la propriété (T) (il existe également un énoncé analogue pour les groupes semi-simples). Notons que cette notion fut introduite par Kazhdan, précisément pour étudier les propriétés des sous-groupes discrets des groupes de Lie. Pendant très longtemps, les groupes de Lie et leurs réseaux ont d'ailleurs fourni les seuls exemples connus de groupes ayant la propriété (T), jusqu'à ce que la situation change récemment avec l'apparition de nouveaux exemples (voir [114] pour un panorama des résultats récents).
- Si Γ est un groupe discret dénombrable ayant la propriété (T), alors Γ est de type fini et le groupe $[\Gamma, \Gamma]$ est d'indice fini dans Γ. Ceci a par exemple permis de montrer que les groupes fondamentaux de certaines variétés riemanniennes localement symétriques de volume fini, sont de type fini (ce qui n'est pas trivial lorsque la variété est non-compacte).

Nous renvoyons le lecteur à [67, 114] pour plus de détails sur cette propriété. Nous rappelons simplement l'interprétation de la propriété (T) en termes d'*actions isométriques affines*.

Considérons donc un groupe Γ (que nous supposons à nouveau discret) et une représentation unitaire $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$. Soit $c : \Gamma \to \mathscr{H}$ un 1-cocycle. L'application $A_{\pi,c}(\gamma) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ définie par $A_{\pi,c}(\gamma)(v) = \pi(\gamma)(v) + c(\gamma)$ est une isométrie **affine** de $\mathscr{H}$. Nous avons de plus l'identité :

$$\begin{aligned} A_{\pi,c}(\gamma_1) \circ A_{\pi,c}(\gamma_2)(v) &= \pi(\gamma_1)(\pi(\gamma_2)(v) + c(\gamma_2)) + c(\gamma_1) \\ &= \pi(\gamma_1\gamma_2)(v) + \pi(\gamma_1)(c(\gamma_2)) + c(\gamma_1). \end{aligned}$$

Ainsi le fait que c soit un cocycle est équivalent à l'identité $A_{\pi,c}(\gamma_1\gamma_2) = A_{\pi,c}(\gamma_1) \circ A_{\pi,c}(\gamma_2)$. L'application $\gamma \mapsto A_{\pi,c}(\gamma)$ définit donc une action isométrique affine de Γ sur $\mathscr{H}$. Nous avons alors la :

Proposition 3.2.2 *Les quatre faits suivants sont équivalents :*

- *L'application c est un cobord.*

– *Il existe un point fixe pour l'action* $A_{\pi,c}$.
– *L'application* c *est bornée.*
– *Il existe une orbite bornée pour l'action* $A_{\pi,c}$.

Preuve : nous établissons d'abord que les deux derniers points sont équivalents. Si v est un vecteur dont l'orbite est bornée, il existe $C > 0$, tel que $|A_{\pi,c}(\gamma)(v)| \leq C$ $(\gamma \in \Gamma)$. On en déduit :

$$|c(\gamma)| \leq C + |\pi(\gamma)(v)| = C + |v|.$$

L'application c est bornée. Réciproquement, si c est borné, l'orbite de 0 est bornée puisque $A_{\pi,c}(\gamma)(0) = c(\gamma)$.

Nous prouvons maintenant l'équivalence des deux premiers points. Si c est un cobord, nous pouvons écrire $c(\gamma) = \pi(\gamma)(v) - v$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} A_{\pi,c}(\gamma)(-v) &= \pi(\gamma)(-v) + \pi(\gamma)(v) - v \\ &= -v, \end{aligned}$$

et l'action possède donc un point fixe. Réciproquement, si $A_{\pi,c}(\gamma)(u) = u$ $(\gamma \in \Gamma)$, nous obtenons que $c(\gamma) = u - \pi(\gamma)(u)$. Les deux premiers points sont donc équivalents.

Nous prouvons enfin l'équivalence des deux premiers points avec les deux derniers. Si l'action du groupe $A_{\pi,c}(\Gamma)$ sur $\mathscr{H}$ a un point fixe, elle a bien sûr une orbite bornée. Réciproquement, supposons que l'orbite $\mathcal{O}(v)$ du vecteur $v \in \mathscr{H}$ soit bornée. Nous utilisons alors le lemme suivant, dont le lecteur trouvera une preuve dans [67] :

Lemme 3.2.3 *Soit* $X \subset \mathscr{H}$ *une partie bornée (et non-vide). Parmi toutes les boules fermées de* $\mathscr{H}$ *contenant* X*, il en existe une unique de rayon minimal. Son centre est appelé centre de* X.

Si l'orbite $\mathcal{O}(v)$ est bornée, son centre c_v est invariant par $A_{\pi,c}(\Gamma)$, puisque l'orbite elle-même est invariante et le centre est unique : $A_{\pi,c}(\gamma)(c_v) = c_v$ $(\gamma \in \Gamma)$. Nous avons donc bien trouvé un point fixe pour l'action de Γ via $A_{\pi,c}$. □

Nous pouvons encore reformuler les conditions de la proposition de la manière suivante : c est un cobord si et seulement si l'action $A_{\pi,c}$ est conjuguée à l'action linéaire donnée par π via une translation. En effet, si $c(\gamma) = \pi(\gamma)(u) - u$, on a :

$$T_u \circ A_{\pi,c}(\gamma) \circ (T_u)^{-1} = \pi(\gamma)$$

où T_u est la translation $v \mapsto v + u$.

En utilisant cette proposition, nous concluons aisément que l'annulation du groupe $H^1(\Gamma, \pi)$ est équivalente au fait que toute action isométrique affine de Γ sur $\mathscr{H}$, dont la partie linéaire est π, possède un point fixe. Ainsi la propriété (T) est équivalente au fait que toute action isométrique affine de Γ sur un espace de Hilbert (avec une partie linéaire égale à une représentation unitaire arbitraire) admet un point fixe.

Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi le groupe $H^1_b(\Gamma, \pi)$ est toujours trivial. Soit $c : \Gamma \to \pi$ un 1-cocycle borné. D'après la proposition précédente, c est un cobord

(en degré 0, nous avons $\mathscr{C}(\Gamma^0, \mathscr{H}) = \mathscr{C}_b(\Gamma^0, \mathscr{H}) = \mathscr{H}$, toutes les applications sont donc bornées, c'est pourquoi nous ne précisons pas que c est le cobord d'une application bornée). Le groupe $H_b^1(\Gamma, \pi)$ est donc trivial.

Nous allons maintenant évoquer les théorèmes d'annulation de Burger et Monod (voir [24, 25, 88, 89]).

Dans [24, 25], Burger et Monod ont étudié la cohomologie bornée des réseaux dans les groupes de Lie simples, connexes, à centre fini, de rang réel supérieur ou égal à 2 (nous abrégerons désormais ces quatre propriétés en disant simplement que G est un *groupe de Lie de rang supérieur*). Une conséquence de leurs travaux est que certaines propriétés des groupes $EH_b^2(\Gamma, \pi)$ sont (en partie) similaires à celles des groupes $H^1(\Gamma, \pi)$ de cohomologie usuelle de degré 1. Par exemple, on a le résultat suivant : si Γ est un réseau dans le groupe localement compact et σ-compact G, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

– Pour toute représentation unitaire π de Γ, le groupe $EH_b^2(\Gamma, \pi)$ est trivial.
– Pour toute représentation unitaire π de G, le groupe $EH_b^2(G, \pi)$ est trivial.

De plus si G est un groupe de Lie de rang supérieur, Burger et Monod montrent que, pour toute représentation unitaire π de G, on a $EH_b^2(G, \pi) = \{0\}$. D'après ce qui précède, la même propriété reste donc vraie pour les réseaux de G. Suivant [88], nous dirons donc qu'un groupe Γ a la propriété (TT) si, pour toute représentation unitaire π de Γ, nous avons :

$$EH_b^2(\Gamma, \pi) = \{0\} \textit{ et } H^1(\Gamma, \pi) = \{0\}.$$

Par définition même, un groupe Γ ayant la propriété (TT) a la propriété (T) de Kazhdan. De plus, ce qui précède assure que tout réseau d'un groupe de Lie de rang supérieur possède la propriété (TT). C'est en fait à partir de cette seule propriété cohomologique que nous allons établir des contraintes sur les éventuelles actions hamiltoniennes d'un groupe Γ sur une surface fermée. Avant de passer aux conséquences dynamiques de la propriété (TT), nous mentionnons quelques remarques supplémentaires :

– Le résultat d'annulation du groupe EH_b^2 est vrai pour des coefficients plus généraux que des espaces de Hilbert. Il reste vrai pour certains espaces de Banach.
– On peut en fait formuler le résultat de manière plus précise (voir [89]) : si π est une représentation unitaire d'un groupe Γ (quelconque) sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$, on peut écrire $\mathscr{H} = \mathscr{H}^\Gamma \oplus \mathscr{H}_1$ où $\mathscr{H}^\Gamma$ est l'espace des vecteurs fixés par Γ et $\mathscr{H}_1$ l'orthogonal de $\mathscr{H}^\Gamma$. On note π^Γ et π^1 les deux sous-représentations de π associées. Le groupe $H_b^2(\Gamma, \pi)$ est alors isomorphe à la somme directe :

$$H_b^2(\Gamma, \pi^\Gamma) \oplus H_b^2(\Gamma, \pi^1).$$

  Maintenant, si Γ est un réseau dans un groupe de Lie de rang supérieur, on peut montrer que le groupe $H_b^2(\Gamma, \pi^1)$ est toujours trivial. Le groupe $H_b^2(\Gamma, \pi^\Gamma)$ peut quant à lui être explicitement décrit (voir [89]). En particulier, il s'injecte toujours dans la cohomologie usuelle.
– Il existe là encore des résultats similaires pour le cas des groupes semi-simples.

3.2.2 Conséquences dynamiques

Nous supposons désormais que Γ est un groupe (discret, dénombrable) ayant la propriété (TT). Autrement dit, pour toute représentation unitaire $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$, nous avons :

$$\begin{aligned} H^1(\Gamma, \pi) &= 0, \\ EH_b^2(\Gamma, \pi) &= 0. \end{aligned}$$

Nous allons voir quelques conséquences de cette propriété. Supposons que Γ agisse sur un espace de probabilité (X, μ) en préservant la mesure μ. Nous notons $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathrm{L}^2(X, \mu))$ la représentation unitaire associée. Nous rappelons maintenant la notion de *quasi-cocycle*, déjà évoquée dans l'introduction du chapitre 1.

Définition 4 *Une application $u : \Gamma \to \mathrm{L}^2(X, \mu)$ est un quasi-cocycle, s'il existe une constante $C > 0$, telle que :*

$$|u(\gamma_1\gamma_2) - \pi(\gamma_1)(u(\gamma_2)) - u(\gamma_1)| \leq C,$$

μ-presque partout sur X (pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$).

Notons que la définition ci-dessus diffère de manière anodine de celle introduite au chapitre 1. Si $u : \Gamma \to \mathrm{L}^2(X, \mu)$ est un quasi-cocycle au sens de la définition ci-dessus, l'application

$$\gamma \mapsto u(\gamma^{-1})$$

est un quasi-cocycle pour la définition du chapitre 1. En adoptant la définition 4, la condition de quasi-cocycle porte naturellement sur le cobord $\mathfrak{d}^1 u$ de l'application u. Ainsi, si u est un quasi-cocycle, la fonction $\mathfrak{d}^1 u(\gamma_1, \gamma_2) : X \to \mathbf{R}$ est bornée par C μ-presque partout, et donc

$$|\mathfrak{d}^1 u(\gamma_1, \gamma_2)|_{\mathrm{L}^2(X,\mu)} \leq C.$$

L'application $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \mathfrak{d}^1 u(\gamma_1, \gamma_2)$ est un 2-cocycle borné et définit une classe $[\mathfrak{d}^1 u] \in EH_b^2(\Gamma, \pi)$. Notons également que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, la suite de fonctions $\frac{1}{p} u(\gamma^p)$ converge μ-presque partout vers une fonction intégrable $\widehat{u}(\gamma)$, d'après le théorème ergodique sous-additif [75, 96]. Nous avons déjà appliqué plusieurs fois ce résultat à des exemples particuliers de quasi-cocycles, dans les chapitres précédents.

Tout ce que nous avons expliqué jusqu'à maintenant dans ce paragraphe s'applique à n'importe quel groupe discret Γ. Dans la proposition suivante, nous utilisons pour la première fois le fait que Γ a la propriété (TT).

Proposition 3.2.4 *Soit $u : \Gamma \to \mathrm{L}^2(X, \mu)$ un quasi-cocycle. Alors*

$$\widehat{u}(\gamma)(x) = \lim_{p \to \infty} \frac{u(\gamma^p)(x)}{p} = 0,$$

pour μ-presque tout x, pour tout γ de Γ.

Preuve : puisque le groupe $EH_b^2(\Gamma,\pi)$ est trivial, il existe, d'après la proposition 3.2.1 une application bornée $v : \Gamma \to \mathrm{L}^2(X,\mu)$ et un 1-cocycle $w : \Gamma \to \mathrm{L}^2(X,\mu)$ tels que $u = v + w$. Nous noterons $D = |v|_{\infty,\Gamma} = \sup_{\gamma\in\Gamma} |v(\gamma)|_{\mathrm{L}^2(X,\mu)}$. Le groupe Γ ayant en outre la propriété (T), le cocycle w est un cobord : il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$ telle que $w(\gamma) = g \circ \gamma^{-1} - g$ $(\gamma \in \Gamma)$. Nous en déduisons :

$$(*) \quad \frac{u(\gamma^p)(x)}{p} = \frac{g(\gamma^{-p}x) - g(x)}{p} + \frac{v(\gamma^p)(x)}{p}.$$

La suite $\frac{g\circ\gamma^{-p}-g}{p} = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}(g\circ\gamma^{-1}-g)\circ(\gamma^{-1})^i$ converge μ-presque partout vers une fonction mesurable ψ d'après le théorème de Birkhoff (appliqué à la transformation $\gamma^{-1} : X \to X$).

Fait. La fonction ψ est nulle presque partout.

Rappelons la preuve de ce résultat classique de théorie ergodique. Puisque $g \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$, pour μ-presque tout x nous avons $|g(x)| < \infty$, et donc :

$$X = \cup_{k\geq 1} X_k$$

(presque partout) où $X_k = \{x, |g(x)| \leq k\}$. Nous allons montrer que $\psi = 0$ μ-presque partout sur X_k pour tout entier k. D'après le théorème de récurrence de Poincaré (appliqué à la transformation $\gamma^{-1} : X \to X$), pour presque tout x de X_k, il existe une suite strictement croissante d'entiers n_i, tels que $\gamma^{-n_i}(x) \in X_k$. Nous avons alors :

$$\left|\frac{g(\gamma^{-n_i}(x)) - g(x)}{n_i}\right| \leq \frac{2k}{n_i} \to 0 \ (i \to \infty).$$

On en déduit que $\psi(x) = 0$.

Revenons à l'égalité $(*)$. Puisque chacun des deux termes

$$\frac{u(\gamma^p)(x)}{p} \quad et \quad \frac{g(\gamma^{-p}(x)) - g(x)}{p}$$

converge, la suite de fonction $\frac{v(\gamma^p)}{p}$ converge μ-presque partout. Sa limite est égale (presque partout) à $\widehat{u}(\gamma)$. Mais puisque $|\frac{v(\gamma^p)}{p}|_{\mathrm{L}^2(X,\mu)} \leq \frac{D}{p}$, nous déduisons du lemme suivant que $\widehat{u}(\gamma) = 0$ presque partout. □

Lemme 3.2.5 *Soit $(f_p)_{p\geq 0}$ une suite de fonctions dans $\mathrm{L}^2(X,\mu)$. Si $|f_p|_{\mathrm{L}^2(X,\mu)} \to 0$ et si f_p converge μ-presque partout vers une fonction mesurable f_∞, alors f_∞ est nulle presque partout.*

Preuve : l'hypothèse $|f_p|_{\mathrm{L}^2(X,\mu)} \to 0$ entraîne classiquement l'existence d'une sous-suite f_{p_k} telle que $f_{p_k} \to 0$ presque partout lorsque k tend vers l'infini. Par ailleurs, f_{p_k} converge presque partout vers f_∞. On en déduit le résultat. □

Nous avons déjà rencontré dans les chapitres précédents un certain nombre de quasi-cocycles définis sur le groupe $\mathscr{G}_S$ des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface fermée S. L'espace de probabilité (X,μ) intervenant dans la définition 4 était alors ou bien la

surface S (munie de la mesure μ_ω associée à la forme d'aire ω), ou bien l'espace $X_2(S)$ des paires de points distincts de S, muni de la mesure $\mu_\omega \times \mu_\omega$. Nous rappelons ici quelques exemples.

Exemples.

– Nous commençons par un exemple de véritable cocycle, défini sur le groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{T}^2}$ des difféomorphismes hamiltoniens du tore : c'est la fonction **"vecteur de rotation"**, qui est très utilisée dans l'étude des difféomorphismes des surfaces, voir [45, 46, 81] par exemple. Si $f : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ est un difféomorphisme hamiltonien et $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un relevé de f, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ x & \mapsto & F(x) - x \end{array}$$

est invariante par translations et définit une application $v_F : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}^2$. Celle-ci vérifie $v_F(p(x)) = F(x) - x$ ($x \in \mathbf{R}^2$), où $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$ est la projection canonique. Puisque f est hamiltonien, nous avons :

$$\int_{\mathbf{T}^2} v_F\, \omega \in \mathbf{Z}^2.$$

Notons alors $\widehat{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'unique relevé de f tel que $\int_{\mathbf{T}^2} v_{\widehat{f}}\, \omega = 0$. Nous allons vérifier que l'application $f \mapsto u(f) = v_{\widehat{f}^{-1}}$ est un 1-cocycle à valeurs dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}^2)$. Si $f, g \in \mathscr{G}_{\mathbf{T}^2}$ et F, G sont des relevés de f et g respectivement, nous avons la relation :

$$F \circ G(x) - x = F(G(x)) - G(x) + (G(x) - x),$$

d'où l'on déduit que $v_{F \circ G} = v_F \circ g + v_G$. Puisque $\widehat{f \circ g} = \widehat{f} \circ \widehat{g}$ nous avons donc :

$$v_{\widehat{f \circ g}} = v_{\widehat{f}} \circ g + v_{\widehat{g}}.$$

En échangeant f en f^{-1} et g en g^{-1} dans l'équation précédente, nous avons :

$$v_{\widehat{(g \circ f)^{-1}}} = v_{\widehat{f^{-1}}} \circ g^{-1} + v_{\widehat{g^{-1}}},$$

autrement dit $u(g \circ f) = u(g) + \pi(g)(u(f))$ où $\pi(g) : \mathrm{L}^2(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}^2) \to \mathrm{L}^2(\mathbf{T}^2, \mathbf{R}^2)$ est l'isométrie $\varphi \mapsto \varphi \circ g^{-1}$. L'application $f \mapsto u(f)$ est un cocycle.

– Donnons maintenant un exemple de quasi-cocycle défini sur le groupe $\mathrm{Diff}_0(\mathbf{T}^2, \omega)$ et à valeurs dans l'espace $\mathrm{L}^2(X_2(\mathbf{T}^2), \mathbf{R})$. Cette construction a déjà été décrite au paragraphe 1.3.2, nous la reproduisons ici. Nous fixons un quasi-morphisme homogène $\phi : \pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*) \to \mathbf{R}$ quelconque. Pour tout point $v \in X_2(\mathbf{T}^2)$ on fixe un chemin $(\alpha_v(t))_{t \in [0,1]}$ de x_* à v (de longueur bornée indépendamment de v, pour une métrique riemannienne définie sur $\overline{X_2(\mathbf{T}^2)}$). Si f est un difféomorphisme de $\mathbf{T}^2$ isotope à l'identité et préservant l'aire, et (f_t) une isotopie reliant l'identité à f, on définit :

$$\alpha(f, x, y) = [\alpha_{x-y} * (f_t(x) - f_t(y)) * \overline{\alpha_{f(x)-f(y)}}],$$

puis $V_f(x,y) = \phi(\alpha(f,x,y))$. De la relation $\alpha(f \circ g, x, y) = \alpha(g,x,y) * \alpha(f, g(x), g(y))$, nous déduisons l'inégalité :

$$|V_{f\circ g}(x,y) - V_g(x,y) - V_f(g(x), g(y))| \leq \delta(\phi).$$

Nous avons vu au paragraphe 1.3.2 que les applications V_f sont bornées. L'application qui à f associe la fonction $V_{f^{-1}} \in \mathrm{L}^2(X_2(\mathbf{T}^2), \mu_\omega^2)$ est donc un quasi-cocycle.

Il existe en fait beaucoup d'exemples de quasi-cocycles. Dans [52], Gambaudo et Ghys ont construit, pour chaque surface fermée, une famille infinie de quasi-cocycles associés, comme précédemment, à l'action du groupe des difféomorphismes hamiltoniens sur S, $X_2(S)$ mais aussi sur les espaces de configurations d'un nombre arbitraire de points sur S. Pour chaque entier $n \geq 1$, notons $X_n(S)$ l'espace des n-uplets de points 2-à-2 distincts de la surface S. C'est un ouvert de mesure pleine de S^n muni de la mesure produit μ_ω^n (où μ_ω désigne la mesure sur S associée à la forme d'aire ω). Dans [52], lorsque S est la sphère $\mathbf{S}^2$, Gambaudo et Ghys ont défini des quasi-cocycles à valeurs dans les espaces $\mathrm{L}^2(X_n(\mathbf{S}^2), \mu_\omega^n)$, pour tout entier $n \geq 4$.

Supposons maintenant que $\rho : \Gamma \to \mathscr{G}_S$ soit un homomorphisme d'un groupe Γ ayant la propriété (TT) dans le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface fermée. Si $u : \mathscr{G}_S \to \mathrm{L}^2(X_n(S), \mu_\omega^n)$ est un quasi-cocycle, on a d'après la proposition 3.2.4, pour tout $\gamma \in \Gamma$:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{u(\rho(\gamma^p))}{p} = 0,$$

μ_ω^n-presque partout.

On peut donc se demander dans quelle mesure les quasi-cocycles rendent compte de la dynamique d'un difféomorphisme hamiltonien de S ; en particulier, quelles contraintes sur un difféomorphisme f sont imposées par l'annulation de toutes les fonctions $\widehat{u}(f)$. Plus précisément, on peut poser la :

Question. Si $f \in \mathscr{G}_S$ est un difféomorphisme tel que $\widehat{u}(f) = 0$ presque partout, pour tout quasi-cocycle $u : \mathscr{G}_S \to \mathrm{L}^2(X_n(S), \mu_\omega^n)$ (pour tout n), a-t-on $f = \mathbb{1}$?

Si $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est un difféomorphisme hamiltonien à support compact et distinct de l'identité, un résultat de Viterbo [115] assure qu'il existe un point fixe x_0 de f dont l'action est non-nulle. Comme me l'a expliqué Patrice Le Calvez, dans ce cas, l'action $\mathcal{A}(x_0)$ est égale au nombre de rotation moyen autour du point x_0 :

$$\mathcal{A}(x_0) = \int_{\mathbf{R}^2} \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \mathrm{angle}_{f^p}(y, x_0) d\mu_\omega(y),$$

où la fonction angle_f est définie comme au paragraphe 1.3. Ainsi si $\mathscr{A}(x_0) \neq 0$ il existe un ensemble $\mathcal{B}$ de mesure positive dans le plan tel que l'on ait :

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \mathrm{angle}_{f^p}(y, x_0) \neq 0$$

pour y dans $\mathcal{B}$. Bien que ce résultat aille dans le sens de notre question (dans le cas où la surface est le plan) il ne donne pas une réponse positive puisque l'ensemble $\mathcal{B} \times \{x_0\}$ est

de mesure nulle pour la mesure $\mu_\omega \otimes \mu_\omega$. De notre point vue il serait plus naturel d'obtenir un ensemble de mesure positive dans l'espace des paires de points du plan, sur lequel la limite

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \mathrm{angle}_{f^p}(x,y)$$

soit non-nulle.

Une réponse positive à cette question entrainerait bien entendu que si Γ est un groupe ayant la propriété (TT), tout morphisme de Γ dans le groupe $\mathscr{G}_S$ des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface compacte a une image réduite à l'identité.

Il est tout à fait possible que la réponse à cette question soit négative si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur le difféomorphisme f. Considérons par exemple un difféomorphisme hamiltonien $f : (S, \mu_\omega) \to (S, \mu_\omega)$ qui est *faiblement mélangeant* (voir [98]). Rappelons l'une des définitions équivalentes de cette notion. Le système dynamique mesuré $S : (X, \nu) \to (X, \nu)$ est faiblement mélangeant si pour tout système dynamique (mesuré) ergodique $S' : (Y, \eta) \to (Y, \eta)$, le système produit

$$S \times S' : (X \times Y, \nu \otimes \eta) \to (X \times Y, \nu \otimes \eta)$$

est ergodique. En particulier, un tel système est ergodique. Le lecteur pourra consulter [73] pour la construction de difféomorphismes hamiltoniens faiblement mélangeant. Si $f : S \to S$ est un tel difféomorphisme, l'action (diagonale) de f sur tous les espaces $X_n(S)$ est ergodique. Toutes les fonctions $\widehat{u}(f)$ définies comme ci-dessus sont donc constantes presque partout. Il n'est pas difficile de s'assurer, en utilisant les mêmes techniques que Gambaudo et Ghys dans [51], que si un tel difféomorphisme est topologiquement conjugué à son inverse (par un homéomorphisme préservant l'aire et isotope à l'identité), toutes les fonctions $\widehat{u}(f)$ sont en réalité nulles presque partout (et le difféomorphisme f fournit un contre-exemple à la question ci-dessus). Comme me l'a suggéré L. Polterovich, il est peut-être raisonnable d'espérer construire un tel difféomorphisme, mais ceci est l'objet d'une réflexion encore en cours.

Bien entendu, si l'on suppose que le difféomorphisme f est inclus dans une action d'un réseau de rang supérieur, il est soumis à beaucoup d'autres contraintes que l'annulation des fonctions $\widehat{u}(f)$ (voir [119, 121]). En particulier, un théorème de Zimmer [121] assure qu'il ne peut être faiblement mélangeant. Cependant, même en imposant des contraintes supplémentaires au difféomorphisme, la réponse à cette question semble difficile... Nous allons tout de même voir que la réponse est essentiellement positive pour les difféomorphismes hamiltoniens les plus simples possibles : ceux qui sont temps 1 d'un flot autonome. Le lecteur dynamicien objectera, à raison, que de tels difféomorphismes n'ont pas une dynamique très riche. En effet, la réponse à la question dans ce cas particulier n'illustre certainement pas la difficulté du problème dans le cas général.

Nous allons donc prouver le :

Théorème 7 *Soit S une surface fermée orientée, munie d'une forme d'aire. Soit $H : S \to \mathbf{R}$ une fonction lisse, non constante. Notons φ_H^t le flot hamiltonien associé.*

– *Si le genre de S est supérieur ou égal à 1, il existe un quasi-cocycle $u : \mathscr{G}_S \to \mathrm{L}^2(X_n(S), \mu_\omega^n)$ (où n est égal à 1 ou 2) tel que la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^1)$ ne soit pas nulle μ_ω^n-presque partout.*
– *Si S est la sphère $\mathbf{S}^2$ nous avons l'alternative suivante. Ou bien il existe un cocycle $u : \mathscr{G}_S \to \mathrm{L}^2(X_4(S), \mu_\omega^n)$ tel que la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^1)$ ne soit pas nulle μ_ω^4-presque partout, ou bien le flot φ_H^t est topologiquement conjugué à un sous-groupe à un paramètre de rotations.*

Remarques.
– La preuve de ce résultat est simple. Pour chaque surface, nous allons trouver un quasi-cocycle u **explicite**, adapté à la géométrie de la surface, parmi ceux construits par Gambaudo et Ghys [52], pour lequel la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^1)$ est non-nulle sur un ouvert de $X_n(S)$ (à l'exception du cas où la surface est la sphère et le flot φ_H^t est topologiquement conjugué à un sous-groupe à un paramètre de rotations).
– Revenons au problème de l'existence d'actions de réseaux sur une surface. Les remarques que nous avons faites jusque là ont consisté, à partir de propriétés cohomologiques du groupe Γ, à déduire des propriétés sur la dynamique individuelle de chaque élément du groupe (les fonctions $\widehat{u}(f)$ sont obtenues en itérant un seul difféomorphisme). Il serait bien sûr intéressant de pouvoir énoncer des propriétés sur la dynamique de tout le groupe Γ. En effet, comme nous l'avons expliqué plus haut, on peut imaginer qu'il existe un difféomorphisme hamiltonien d'une surface fermée S, qui soit distinct de l'identité, et qui vérifie $\widehat{u}(f) = 0$ presque partout pour tout quasi-cocycle u (ce qui fournirait une réponse négative à la question précédente). Cependant, il paraît peu probable qu'il existe un groupe de difféomorphismes, isomorphe à un réseau de rang supérieur, dont tous les éléments aient cette propriété.

Nous prouvons le théorème 7 dans le paragraphe suivant.

3.3 Cas des flots autonomes

Le début de la preuve du théorème 7 est identique pour toutes les surfaces. Nous supposons que la fonction $H : S \to \mathbf{R}$ est non-constante. Nous pouvons alors choisir une valeur régulière t de H. Soit $\mathscr{C}$ une composante connexe du niveau $H^{-1}(t)$. Puisque t est une valeur régulière de H, $\mathscr{C}$ est une courbe fermée simple plongée dans la surface S. Il existe alors un voisinage A de $\mathscr{C}$ difféomorphe à un anneau, qui est feuilleté par des cercles qui sont les niveaux de la restriction de H à A. Plus précisément, il existe un plongement

$$i : \mathbf{S}^1 \times]a_1, a_2[\to S$$

qui envoie l'un des cercles $\mathbf{S}^1 \times \{t\}$ sur la courbe $\mathscr{C}$, tel que $i^*\omega = ds \wedge d\theta$ (où θ désigne la coordonnée sur le cercle $\mathbf{S}^1$ et $s \in]a_1, a_2[$), et tel que le champ hamiltonien X_H associé à H s'écrive, dans les coordonnées (θ, s) :

$$X_H(\theta, s) = \vartheta(s)\frac{\partial}{\partial\theta},$$

où $\vartheta :]a_1, a_2[\to \mathbf{R}^*$ est une fonction qui ne s'annule pas. On a alors l'expression suivante pour le flot hamiltonien associé à H :

$$\varphi_H^t(i(\theta, s)) = i(\theta + t\vartheta(s), s).$$

Nous distinguons alors trois cas, selon que la surface S est de genre 0, 1, ou supérieur ou égal à 2. Lorsque S est de genre supérieur ou égal à 1, nous n'aurons à considérer que la restriction du flot φ_H^t à l'anneau $A = i(\mathbf{S}^1 \times]a_1, a_2[)$ pour établir le théorème 7.

Notons que si u est un quasi-cocycle, il est équivalent d'établir que la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^1)$ n'est pas nulle presque partout, ou bien que la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^{-1})$ n'est pas nulle presque partout (il suffit de remplacer la fonction ϑ par $-\vartheta$ dans les calculs qui suivent).

3.3.1 Sur la sphère

Pour établir l'existence d'un quasi-cocycle u tel que la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^1)$ ne soit pas nulle presque partout dans le cas où la surface est la sphère $\mathbf{S}^2$, nous supposerons que la fonction $\vartheta :]a_1, a_2[\to \mathbf{R}$ n'est pas constante. Dans ce cas, quitte à réduire l'intervalle $]a_1, a_2[$, nous pouvons supposer que la dérivée de ϑ ne s'annule pas sur l'intervalle $]a_1, a_2[$.

Avant de passer à la construction d'un tel quasi-cocycle u, nous allons établir que dans tous les cas où l'on ne peut pas faire l'hypothèse précédente, le flot φ_H^t est topologiquement conjugué à un sous-groupe à 1 paramètre de rotations. Plus précisément, nous allons établir le résultat suivant.

Supposons que toutes les orbites périodiques non-constantes du flot (φ_H^t) aient la même période. Alors le flot (φ_H^t) est topologiquement conjugué à un sous-groupe à 1 paramètre de rotations.

Il n'est pas difficile de s'assurer que l'hypothèse sur les orbites périodiques du flot (φ_H^t) implique la suivante. Pour tout plongement $i : \mathbf{S}^1 \times]a, b[\to \mathbf{S}^2$ tel que $\varphi_H^t(i(\theta, s)) = i(\theta + t\vartheta(s), s)$ $((\theta, s) \in \mathbf{S}^1 \times]a, b[)$ pour une certaine fonction $\vartheta :]a, b[\to \mathbf{R}^*$, la fonction ϑ est constante. Pour prouver ce résultat, notons O l'ouvert formé par les points qui sont périodiques pour l'action du flot φ_H^t et ne sont pas des points critiques de la fonction H (on vérifie aisément que cet ensemble est bel et bien ouvert). Soit O_1 une composante connexe de O.

Il n'est pas difficile de s'assurer qu'il existe un difféomorphisme $i : \mathbf{S}^1 \times]a, b[\to O_1$ (pour certains réels a et b, avec $a < b$) et une fonction $\vartheta :]a, b[\to \mathbf{R}^*$ tels que l'on ait :

$$\varphi_H^t(i(\theta, s)) = i(\theta + t\vartheta(s), s) \quad (\theta, s) \in \mathbf{S}^1 \times]a, b[.$$

D'après l'hypothèse que nous avons faite, la fonction ϑ doit être égale à une constante $\alpha \in \mathbf{R}$. Définissons alors les ensembles suivants :

$$X_b = \cap_{n \geq 1} \overline{i(\mathbf{S}^1 \times]b - \tfrac{1}{n}, b[)},$$
$$X_a = \cap_{n \geq 1} \overline{i(\mathbf{S}^1 \times]a, a + \tfrac{1}{n}[)}.$$

Les ensembles X_a et X_b sont des compacts non-vides de la sphère $\mathbf{S}^2$, disjoints de l'ouvert O_1 et disjoints deux-à-deux. Il n'est pas difficile de s'assurer que chacun des deux compacts X_a et X_b contient (au moins) un point critique de H. L'idée de la preuve est la suivante. Si X_b (par exemple) contient deux points distincts, la présence d'un point critique va forcer les points $i(\theta, s)$ $(s \to b)$ à "ralentir" lorsqu'ils passent proche du point critique. Cela va contredire le fait que la fonction ϑ est constante.

Si chacun des deux compacts X_a et X_b est réduit à un point, alors le flot φ_H^t est topologiquement conjugué à un sous-groupe à 1 paramètre du groupe des rotations de la sphère. Nous supposons donc que l'un au moins des deux compacts X_a et X_b n'est pas réduit à un point. Nous allons alors obtenir une contradiction. Supposons par exemple que X_b contienne au moins deux points. Nous noterons x_0 un point critique de la fonction H contenu dans X_b et x_1 un point de X_b distinct de x_0.

Soient U_0 et U_1 des voisinages de x_0 et x_1 respectivement qui soient disjoints. Soit $\epsilon > 0$ tel que pour $t \in [0, \epsilon]$ l'on ait :

$$\varphi_H^t(x_1) \in U_1.$$

Soit $T > 0$ tel que :

$$T + \epsilon > \alpha^{-1}.$$

Nous fixons maintenant des voisinages V_0 et V_1 de x_0 et x_1 (que l'on peut supposer connexes), contenus respectivement dans U_0 et U_1, tels que l'on ait :

$$\begin{array}{lcl} y \in V_0 & \Longrightarrow & \varphi_H^t(y) \in U_0 \, pour \, t \in [0, T], \\ y \in V_1 & \Longrightarrow & \varphi_H^t(y) \in U_1 \, pour \, t \in [0, \epsilon]. \end{array}$$

Lemme 3.3.1 *Il existe un point $z \in O_1$ dont l'orbite rencontre à la fois V_0 et V_1.*

Preuve : notons $\mathscr{C}_s = i(\mathbf{S}^1 \times s)$, $s \in]a, b[$, D_s^+ la composante de $\mathbf{S}^2 \setminus \mathscr{C}_s$ contenant $\mathscr{C}_t$ pour $t > s$, et D_s^- la seconde composante connexe de $\mathbf{S}^2 \setminus \mathscr{C}_s$. Considérons l'ensemble I_0 défini comme suit :

$$I_0 = \{s \in]a, b[, \mathscr{C}_s \cap V_0 \neq \emptyset\},$$

et de même $I_1 = \{s \in]a, b[, \mathscr{C}_s \cap V_1 \neq \emptyset\}$. Les ensembles I_0 et I_1 sont des ouverts non-vides contenant des points arbitrairement proches de b. Si I_0 et I_1 sont connexes, alors ils seront tous deux de la forme $]s_*, b[$. L'intersection $I_0 \cap I_1$ sera non-vide, ce qui prouvera le lemme.

Montrons alors que I_0 est connexe (la preuve est identique pour I_1). Si ce n'est pas le cas, il existe $t \in]a, b[\setminus I_0$ et $s_1, s_2 \in I_0$ tels que $s_1 > t > s_2$. Puisque

$$V_0 \subset D_t^+ \cup D_t^-,$$

et que $\mathscr{C}_{s_1} \subset D_t^+$ nous avons (V_0 étant connexe) :

$$V_0 \subset D_t^+.$$

Mais le même raisonnement (en remplaçant s_1 par s_2) assure que $V_0 \subset D_t^-$. C'est absurde. L'ensemble I_0 est donc connexe. $\square$

Une fois ce lemme prouvé, il n'est pas difficile d'obtenir la contradiction désirée. Soit $z \in O_1$ un point vérifiant la propriété du lemme précédent. Le point z passe un temps $t_0 \geq T$ dans l'ouvert U_0 et un temps $t_1 \geq \epsilon$ dans l'ouvert U_1. Puisque $U_0 \cap U_1$ est vide et que $T + \epsilon$ est supérieur à la période α^{-1} de z ceci est absurde. Nous avons donc achevé la preuve du résultat annoncé.

Nous nous plaçons maintenant dans la situation du début du paragraphe. Un plongement $i : \mathbf{S}^1 \times]a_1, a_2[\to \mathbf{S}^2$ est donné, tel que $\varphi_H^t(i(\theta, s)) = i(\theta + t\vartheta(s), s)$, où la dérivée de la fonction $\vartheta :]a_1, a_2[\to \mathbf{R}^*$ ne s'annule pas. Nous allons construire un véritable cocycle $u : \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2} \to \mathrm{L}^2(X_4(\mathbf{S}^2), \mu_\omega^4)$ tel que la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^1)$ ne soit pas nulle presque partout.

Nous commençons par rappeler quelques propriétés topologiques de l'espace $X_4(\mathbf{S}^2)$ des quadruplets de points deux-à-deux distincts de la sphère $\mathbf{S}^2$. Nous fixons un point base $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \in X_4(\mathbf{S}^2)$. Nous identifions également la sphère $\mathbf{S}^2$ à la droite projective complexe $\mathbf{CP}^1$, de sorte que l'on peut considérer l'action usuelle de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{S}^2$. Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X_4(\mathbf{S}^2)$, il existe un unique élément $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ tel que :

$$(x_1, x_2, x_3) = (g(x_1^*), g(x_2^*), g(x_3^*)).$$

On note $g(x_1, x_2, x_3)$ cet élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Notant $\Sigma = \mathbf{CP}^1 \backslash \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \psi : X_4(\mathbf{S}^2) & \to & \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \times \Sigma \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (g(x_1, x_2, x_3), g(x_1, x_2, x_3)^{-1}(x_4)) \end{array}$$

est un difféomorphisme. En fait, si l'on choisit les points x_1^*, x_2^*, x_3^* égaux à 0, 1 et ∞, le nombre complexe $g(x_1, x_2, x_3)^{-1}(x_4)$ n'est autre que le birapport des points x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$g(x_1, x_2, x_3)^{-1}(x_4) = [x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3)}.$$

En effet, l'homographie $g(x_1, x_2, x_3)^{-1}$ s'écrit alors :

$$g(x_1, x_2, x_3)^{-1}(w) = \frac{(x_2 - x_3)(w - x_1)}{(x_2 - x_1)(w - x_3)}.$$

Rappelons que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est simplement connexe. En particulier le groupe fondamental $\pi_1(X_4(\mathbf{S}^2), (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*))$ est isomorphe au groupe $\pi_1(\Sigma, x_4^*)$, qui est un groupe libre à deux générateurs.

Nous noterons $\overline{\Sigma}$ la surface compacte à bord obtenue en éclatant chacun des points x_1^*, x_2^*, x_3^* dans $\mathbf{S}^2$. La surface Σ s'identifie donc à l'intérieur de la surface $\overline{\Sigma}$. Si $x \in \overline{\Sigma}$, nous choisissons (encore une fois) un chemin $(\gamma_x(t))_{0 \leq t \leq 1}$ de x_4^* à x dans $\overline{\Sigma}$, de longueur bornée pour une métrique riemannienne définie sur $\overline{\Sigma}$. Considérons maintenant un difféomorphisme $f \in \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2}$, et une isotopie (f_t) reliant l'identité à f. Si $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X_4(\mathbf{S}^2)$, on note $\alpha(f, x_1, x_2, x_3, x_4)$ l'élément du groupe $\pi_1(\Sigma, x_4^*)$ représenté par le lacet :

$$\gamma_{p_2 \circ \psi(x_1, x_2, x_3, x_4)} * p_2 \circ \psi(f_t(x_1), f_t(x_2), f_t(x_3), f_t(x_4)) * \overline{\gamma_{p_2 \circ \psi(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))}}.$$

Dans le cas où $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = \infty$, la courbe

$$p_2 \circ \psi(f_t(x_1), f_t(x_2), f_t(x_3), f_t(x_4))$$

n'est autre que la courbe décrite par le birapport $[f_t(x_1), f_t(x_2), f_t(x_3), f_t(x_4)]$ dans $\mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$. Nous avons encore une fois la relation :

$$(*) \quad \alpha(f \circ g, x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(g, x_1, x_2, x_3, x_4) * \alpha(f, g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)).$$

Lemme 3.3.2 *L'application $\alpha(f, -) : X_4(\mathbf{S}^2) \to \pi_1(\Sigma, x_4^*)$ est bornée.*

Preuve : la preuve que nous présentons ici est tirée de [52]. Remarquons que le résultat à prouver ne dépend pas du choix du point base $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \in X_4(\mathbf{S}^2)$. Nous supposons donc que $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 1, \infty)$.

Soit U un voisinage de l'identité dans le groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{S}^2}$, muni de la topologie C^∞. Puisque le groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{S}^2}$ est connexe, l'ensemble U engendre $\mathscr{G}_{\mathbf{S}^2}$: tout difféomorphisme $f \in \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2}$ est produit d'un nombre **fini** de difféomorphismes contenus dans U. Il suffit donc de prouver que l'application $\alpha(f, -)$ est bornée pour les difféomorphismes qui sont dans U : en effet, si les fonctions $\alpha(f, -)$ et $\alpha(g, -)$ sont bornées, il en est de même de la fonction $\alpha(f \circ g, -)$, d'après la relation $(*)$. De plus il nous suffit d'établir ceci pour un voisinage arbitraire de l'identité.

Notons que si z_1 et z_2 sont deux points de $\mathbf{C}$, le barycentre

$$tz_1 + (1 - t)z_2$$

de z_1 et z_2 est invariant par toute similitude de $\mathbf{C}$. Autrement dit, il vérifie :

$$S(tz_1 + (1 - t)z_2) = tS(z_1) + (1 - t)S(z_2)$$

si $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est une similitude. Ainsi si z_1, z_2, z_3 sont trois points distincts de $\mathbf{CP}^1$ on peut définir le barycentre de z_1 et z_2 (avec des poids t et $(1 - t)$ respectivement) **par rapport à** z_3 noté $[tz_1 + (1 - t)z_2]_{z_3}$: on choisit une homographie $A : \mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^1$ telle que $A(z_3) = \infty$, et on considère le barycentre des points $A(z_1)$ et $A(z_2)$ dans $\mathbf{C}$:

$$tA(z_1) + (1 - t)A(z_2) \in \mathbf{C}.$$

On pose alors $[tz_1 + (1 - t)z_2]_{z_3} = A^{-1}(tA(z_1) + (1 - t)A(z_2))$. Ce point ne dépend pas du choix de l'homographie A vérifiant $A(z_3) = \infty$.

Considérons maintenant un difféomorphisme préservant l'aire $g : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$. Pour définir le cocycle $\alpha(g, -)$ à valeurs dans le groupe $\pi_1(\Sigma, x_4^*)$, nous pouvons utiliser une isotopie (g_t) **quelconque** reliant l'identité à g. Il n'est pas nécessaire que le difféomorphisme g_t préserve l'aire pour tout t. Ceci résulte, une fois encore, du fait que l'inclusion du groupe des difféomorphismes préservant l'aire de la sphère dans le groupe de tous les difféomorphismes préservant l'orientation est une équivalence d'homotopie. Lorsque g est suffisament C^1-proche de l'identité, nous allons construire une isotope reliant l'identité à g, adaptée à la géométrie projective de la sphère.

Si g est suffisament C^0-proche de l'identité, $g(z) \neq \frac{-1}{\overline{z}}$ pour tout $z \in \mathbf{S}^2$. Nous pouvons donc définir $g_t(z) = [tg(z)+(1-t)z]_{\frac{-1}{\overline{z}}}$. Ceci définit une application lisse de $[0,1]\times\mathbf{S}^2$ dans $\mathbf{S}^2$, qui dépend, ainsi que ses dérivées, continûment de g. Lorsque g est égal à l'identité, $g_t = \mathbb{1}$ pour tout t. Ainsi, si g est suffisament C^1-proche de l'identité, la différentielle de $g_t : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ n'est jamais singulière et (g_t) est une isotopie.

Si x_i n'est pas un point fixe de g, la courbe $g_t(x_i)$ est de la forme

$$g_t(x_i) = \frac{a(x_i)t + b(x_i)}{c(x_i)t + d(x_i)}$$

(avec $a(x_i)d(x_i) - b(x_i)c(x_i) \neq 0$). Si $g(x_i) = x_i$, la courbe $g_t(x_i)$ est constante égale à x_i. Ainsi, la courbe

$$\gamma(t) = [g_t(x_1), g_t(x_2), g_t(x_3), g_t(x_4)]$$

peut être mise sous la forme $\gamma(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, où p et q sont des polynômes de degré au plus 8. Rappelons que le lacet

$$\gamma_{[x_1,x_2,x_3,x_4]} * \gamma(t) * \overline{\gamma_{[g(x_1),g(x_2),g(x_3),g(x_4)]}}$$

représente l'élément $\alpha(f, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \pi_1(\Sigma, x_4^*)$. Pour montrer que $\alpha(f, x_1, x_2, x_3, x_4)$ est contenu dans une partie uniformément bornée de $\pi_1(\Sigma, x_4^*)$, il suffit de s'assurer que le lacet $\gamma(t)$ ne coupe l'axe réel $\mathbf{R} \subset \mathbf{C} - \{0,1\}$ qu'un nombre uniformément borné de fois. Mais $\gamma(t)$ est réel si et seulement si $p(t)\overline{q(t)}$ est réel. Le polynôme $p(t)\overline{q(t)}$ étant de degré au plus 16, la courbe γ coupe au plus 16 fois l'axe réel. □

Considérons alors un homomorphisme $\phi : \pi_1(\Sigma, x_4^*) \to \mathbf{R}$ et notons

$$u_\phi(f)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \phi(\alpha(f, x_1, x_2, x_3, x_4)).$$

D'après le lemme, la fonction $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto u_\phi(f)(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est bornée (en particulier, de carré intégrable). De la relation $(*)$, on déduit que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{G}_{\mathbf{S}^2} & \to & \mathrm{L}^2(X_4(\mathbf{S}^2), \mu_\omega^4) \\ f & \mapsto & u_\phi(f^{-1}) \end{array}$$

est un cocycle. Fixons des réels s_j et s'_j $(1 \leq j \leq 4)$ tels que :

$$a_1 < s_1 < s'_1 < s_2 < s'_2 < s_3 < s'_3 < s_4 < s'_4 < a_2.$$

Notant $A_j = \mathbf{S}^1 \times [s_j, s'_j] \subset \mathbf{S}^1 \times]a_1, a_2[$, nous allons montrer que la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^{-1})$ ne s'annule pas sur l'ensemble :

$$\prod_{j=1}^{4} A_j \subset X_4(\mathbf{S}^2),$$

qui est de mesure positive dans $X_4(\mathbf{S}^2)$. Remarquons que le résultat que nous souhaitons prouver ne dépend pas du choix du point base $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \in X_4(\mathbf{S}^2)$. Nous choisissons donc ce point base en fonction du plongement $i : \mathbf{S}^1 \times]a_1, a_2[\to \mathbf{S}^2$. Pour cela, notons D_1 et D_2 les deux composantes connexes de $\mathbf{S}^2 \setminus i(\mathbf{S}^1 \times [s_1, s'_4])$ et supposons que $\partial D_1 = i(\mathbf{S}^1 \times s'_4)$ et $\partial D_2 = i(\mathbf{S}^1 \times s_1)$. Nous choisissons alors les points x_1^*, x_2^*, x_3^* et x_4^* de la manière suivante : $x_4^* \in \partial D_1$, $x_1^* \in \partial D_2$, $x_3^* \in i(\mathbf{S}^1 \times s'_3)$ et $x_2^* \in i(\mathbf{S}^1 \times s'_1)$.

Proposition 3.3.3 *Si $(\theta_j, s''_j) \in A_j$ $(1 \leq j \leq 4)$, nous avons :*

$$\alpha(\varphi_H^n, i(\theta_1, s''_1), i(\theta_2, s''_2), i(\theta_3, s''_3), i(\theta_4, s''_4)) = \alpha_n * \gamma^{[n\vartheta(s''_3)]-[n\vartheta(s''_2)]} * \beta_n,$$

où α_n et β_n sont des éléments de $\pi_1(\Sigma, x_4^*)$ bornés indépendamment de n et γ est l'élément de $\pi_1(\Sigma, x_4^*)$ représenté par le lacet :

$$(p_2 \circ \psi(x_1^*, x_2^*, i(\theta, s'_3), x_4^*))_{\theta \in \mathbf{S}^1}.$$

Preuve : là encore, nous donnons une preuve très similaire à celle d'un résultat de [52]. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon : \mathbf{T}^4 & \to & X_4(\mathbf{S}^2) \\ (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) & \mapsto & (i(\theta_1, s_1), i(\theta_2, s'_1), i(\theta_3, s'_3), i(\theta_4, s'_4)). \end{array}$$

Il n'est pas difficile de s'assurer qu'il existe des éléments α_n et β_n dans $\pi_1(\Sigma, x_4^*)$ (bornés indépendamment de n) tels que :

$$\alpha(\varphi_H^n, i(\theta_1, s''_1), i(\theta_2, s''_2), i(\theta_3, s''_3), i(\theta_4, s''_4)) = \alpha_n * A([n\vartheta(s''_1)], [n\vartheta(s''_2)], [n\vartheta(s''_3)], [n\vartheta(s''_4)]) * \beta_n,$$

où $A : \mathbf{Z}^4 \to \pi_1(\Sigma, x_*)$ est le morphisme induit par l'application $p_2 \circ \psi \circ \Upsilon$. Puisque le cercle $i(\mathbf{S}^1 \times s''_4)$ borde le disque

$$D_1 \cup i(\mathbf{S}^1 \times [s''_4, s'_4])$$

qui est disjoint de chacun des trois cercles $i(\mathbf{S}^1 \times s''_j)$ $(1 \leq j \leq 3)$, l'élément

$$A(0, 0, 0, 1) \in \pi_1(\Sigma, x_*)$$

est trivial. De même, l'élément $A(1, 0, 0, 0)$ est trivial. Par construction, nous avons l'égalité $A(0, 0, 1, 0) = \gamma$. Enfin, le lacet $(i(\theta_1, s''_1), i(\theta, s''_2), i(\theta_3, s''_3), i(\theta_4, s''_4))_{\theta \in \mathbf{S}^1}$ peut être écrit sous la forme

$$\alpha_0 * \overline{(x_1^*, x_2^*, i(\theta, s'_3), x_4^*)_{\theta \in \mathbf{S}^1}},$$

où α_0 est un lacet de la forme

$$(\alpha(t)(i(\theta_1, s''_1)), \alpha(t)(i(\theta_2, s''_2)), \alpha(t)(i(\theta_3, s''_3)), \alpha(t)(i(\theta_4, s''_4))),$$

$\alpha(t)$ étant un lacet d'homéomorphismes. D'après la remarque qui suit, le lacet α est contractile dans $X_4(\mathbf{S}^2)$. Nous avons donc $A(0, 1, 0, 0) = A(0, 0, 1, 0)^{-1}$. L'énoncé du lemme est maintenant clair. □

Remarque. Considérons un lacet $(g(t))$ d'homéomorphismes de la sphère et quatre points distincts x_1, x_2, x_3, x_4 sur la sphère. Soit $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s), \gamma_4(s))$ un lacet dans $X_4(\mathbf{S}^2)$, basé en (x_1, x_2, x_3, x_4). En considérant l'application de deux variables

$$(g(t)(\gamma_1(s)), g(t)(\gamma_2(s)), g(t)(\gamma_3(s)), g(t)(\gamma_4(s)))$$

on voit que les éléments du groupe fondamental de $X_4(\mathbf{S}^2)$ représentés par les lacets

$$\gamma_0(t) = (g(t)(x_1), g(t)(x_2), g(t)(x_3), g(t)(x_4))$$

et $\gamma(s)$ commutent. Le lacet $\gamma_0(t)$ représente donc un élément du centre du groupe fondamental de $X_4(\mathbf{S}^2)$. Puisque ce goupe est un groupe libre, son centre est trivial et le lacet γ_0 est contractile.

Nous pouvons alors conclure la preuve du théorème 7 dans le cas de la sphère. Choisissons un homomorphisme $\phi : \pi_1(\Sigma, x_4^*) \to \mathbf{R}$ tel que :

$$\phi(\gamma) = 1.$$

Il n'est pas difficile de s'assurer qu'un tel homomorphisme existe. Si $(\theta_j, s_j'') \in A_j$, nous avons alors :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{u_\phi}(\varphi_H^{-1})(i(\theta_1, s_1''), i(\theta_2, s_2''), i(\theta_3, s_3''), i(\theta_4, s_4'')) & = & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\phi(\alpha_n * \gamma^{[n\vartheta(s_3'')]-[n\vartheta(s_2'')]} * \beta_n) \\ & = & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\phi(\gamma^{[n\vartheta(s_3'')]-[n\vartheta(s_2'')]}) \\ & = & \vartheta(s_3'') - \vartheta(s_2''). \end{array}$$

Puisque nous avons supposé la fonction ϑ monotone sur l'intervalle $]a_1, a_2[$, la quantité $\vartheta(s_4'') - \vartheta(s_2'')$ n'est jamais nulle. Nous avons bien établi que la fonction $\widehat{u_\phi}(\varphi_H^{-1})$ ne s'annule pas sur $\prod_{j=1}^4 A_j \subset X_4(\mathbf{S}^2)$.

3.3.2 Sur le tore

Lorsque la surface est le tore $\mathbf{T}^2$, nous distinguons deux cas, selon que le plongement i est incompressible (c'est-à-dire induit une injection du groupe fondamental de l'anneau $\mathbf{S}^1 \times]a_1, a_2[$ dans le groupe fondamental du tore) ou compressible.

Premier cas. Le plongement i est incompressible. Dans ce cas, comme dans le cas de la sphère, nous n'aurons à utiliser qu'un cocycle (et non pas un quasi-cocycle), que nous avons déjà rencontré. C'est la fonction "vecteur de rotation" $u(f) : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}^2$ associée à tout difféomorphisme hamiltonien $f : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$. Nous noterons $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$ la projection canonique et fixons un relevé $\hat{i} : \mathbf{R} \times]a_1, a_2[\to \mathbf{R}^2$ du plongement $i : \mathbf{S}^1 \times]a_1, a_2[\to \mathbf{T}^2$. Il existe un élément $v \in \mathbf{Z}^2$ (représentant l'image du morphisme $i_* : \pi_1(\mathbf{S}^1) \to \pi_1(\mathbf{T}^2)$) tel que :

$$\hat{i}(\theta + k, s) = \hat{i}(\theta, s) + kv \ (k \in \mathbf{Z}).$$

Nous avons alors :

$$\begin{array}{rcl} u(\varphi_H^{-n})(p(\hat{i}(\theta, s))) & = & \hat{i}(\theta + n\vartheta(s), s) - \hat{i}(\theta, s) \\ & = & \hat{i}(\theta + n\vartheta(s)) - \hat{i}(\theta + [n\vartheta(s)], s) + [n\vartheta(s)]v. \end{array}$$

La quantité $\hat{i}(\theta + n\vartheta(s)) - \hat{i}(\theta + [n\vartheta(s)], s)$ est bornée par une constante C indépendante de n. Nous obtenons donc :

$$\left|\left| \frac{u(\varphi_H^{-n})(i(\theta, s)) - [n\vartheta(s)]v}{n} \right|\right| \leq \frac{C}{n}$$

($||\cdot||$ étant une norme arbitraire sur $\mathbf{R}^2$), et donc :

$$\widehat{u}(\varphi_H^{-1})(i(\theta,s)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}u(\varphi_H^n)(i(\theta,s)) = \vartheta(s)v \neq 0.$$

La fonction mesurable $\widehat{u}(\varphi_H^{-1}) : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}^2$ ne s'annule donc pas sur l'ouvert $i(\mathbf{S}^1\times]a,b[) \subset \mathbf{T}^2$. Nous obtenons bien le résultat voulu dans ce cas.

Second cas. Le plongement i est compressible. Dans ce cas, nous allons utiliser un quasi-cocycle du type de ceux déjà rencontrés au paragraphe 1.3 pour construire un quasi-morphisme de Calabi sur le tore $\mathbf{T}^2$, dont nous avons rappelé la construction en exemple au paragraphe 3.2.2.

Nous fixons un quasi-morphisme homogène $\phi : \pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*) \to \mathbf{R}$ tel que $\phi([a,b]) = 1$, où a et b sont les générateurs standards du groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$. Nous reprenons là encore les notations du paragraphe 1.3.2. Pour tout point $v \in X_2(\mathbf{T}^2)$ on fixe un chemin $(\alpha_v(t))_{t\in[0,1]}$ de x_* à v (de longueur bornée indépendamment de v, pour une métrique riemannienne définie sur $\overline{X_2(\mathbf{T}^2)}$). Si f est un difféomorphisme hamiltonien de $\mathbf{T}^2$ et (f_t) une isotopie hamiltonienne reliant l'identité à f, on définit :

$$\alpha(f,x,y) = [\alpha_{x-y} * (f_t(x) - f_t(y)) * \overline{\alpha_{f(x)-f(y)}}] \in \pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*),$$

puis $V_f(x,y) = \phi(\alpha(f,x,y))$ et enfin $\widetilde{V}_f(x,y) = \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}V_{f^p}(x,y)$ (qui est défini presque partout sur $X_2(\mathbf{T}^2)$). L'application $f \mapsto V_{f^{-1}} \in \mathrm{L}^2(X_2(\mathbf{T}^2), \mu_\omega^2)$ est un quasi-cocycle, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3.2.

Nous allons montrer que la fonction $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}$ n'est pas nulle presque partout. Fixons quatre réels b_1, b_2, b_3, b_4, tels que :

$$a_1 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < a_2.$$

Puisque la courbe $(i(\theta,b_1))_{\theta\in\mathbb{S}^1}$ est contractile, il existe un plongement du disque $u : \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$ tel que $u(e^{2i\pi\theta}) = i(\theta,b_1)$. Nous supposerons que pour x proche de $\partial\mathbf{D}$, $u(x) \in i(\mathbf{S}^1\times]a_1,b_1])$ (le second cas possible, où $u(x) \in i(\mathbf{S}^1 \times [b_1,a_2[)$ est identique, le lecteur doit simplement ajouter un signe $-$ à l'exposant qui se trouve au-dessus du commutateur $[a,b]$ et inverser les rôles de t_1 et t_2 dans le lemme suivant).

Lemme 3.3.4 *Soient $(t_1,t_2) \in [b_1,b_2] \times [b_3,b_4]$. Alors, on peut écrire :*

$$\alpha(\varphi_H^n, i(\theta_1,t_1), i(\theta_2,t_2)) = \alpha_n * [a,b]^{[n\vartheta(t_2)]} * \beta_n,$$

où α_n et β_n sont des éléments de $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$ bornés indépendamment de n.

Preuve : la preuve de ce lemme est très similaire à celles des lemmes rencontrés aux paragraphes 1.3.2 et 1.3.3. Il n'est pas difficile de s'assurer que le lacet $\alpha(\varphi_H^n, i(\theta_1,t_1), i(\theta_2,t_2))$ peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_n' * \gamma * \beta_n',$$

où les lacets α'_n et β'_n représentent des éléments de $\pi_1(\mathbf{T}^2-\{0\}, x_*)$ bornés indépendamment de n et où γ s'écrit :

$$\alpha_{i(\theta_1,t_1)-i(\theta_2,t_2)} * (i(\theta_1 + s[n\vartheta(t_1)], t_1) - i(\theta_2 + s[n\vartheta(t_2)], t_2))_{s\in[0,1]} * \overline{\alpha_{i(\theta_1,t_1)-i(\theta_2,t_2)}}.$$

Le lacet $(i(\theta_1 + s[n\vartheta(t_1)], t_1))_{s\in[0,1]}$ borde le disque

$$u(\mathbf{D}) \cup i(\mathbf{S}^1 \times [b_1, t_1]).$$

Ce disque ne rencontrant pas la courbe $i(\mathbf{S}^1 \times t_2)$, γ est homotope au lacet :

$$\alpha_{i(\theta_1,t_1)-i(\theta_2,t_2)} * (i(\theta_1, t_1) - i(\theta_2 + s[n\vartheta(t_2)], t_2))_{s\in[0,1]} * \overline{\alpha_{i(\theta_1,t_1)-i(\theta_2,t_2)}}.$$

Puisque le lacet $(i(\theta_1, t_1)-i(\theta_2+s, t_2))_{s\in[0,1]}$ représente un conjugué du commutateur $[a, b]$ dans le groupe $\pi_1(\mathbf{T}^2 - \{0\}, x_*)$, nous obtenons bien le résultat souhaité. □

Nous pouvons maintenant conclure : si $((\theta_1, t_1), (\theta_2, t_2)) \in \mathbf{S}^1 \times [b_1, b_2] \times \mathbf{S}^1 \times [b_3, b_4]$, nous avons l'inégalité :

$$|V_{\varphi_H^n}(i(\theta_1, t_1), i(\theta_2, t_2)) - [n\vartheta(t_2)]| \leq 2\delta(\phi) + 2\max_n\{|\phi(\alpha_n)|, |\phi(\beta_n)|\},$$

et donc $\widetilde{V}_{\varphi_H^1}(i(\theta_1, t_1), i(\theta_2, t_2)) = \vartheta(t_2) \neq 0$. Puisque $i(\mathbf{S}^1 \times [b_1, b_2]) \times i(\mathbf{S}^1 \times [b_3, b_4]) \subset X_2(\mathbf{T}^2)$ est de mesure positive, nous obtenons le résultat souhaité.

3.3.3 Sur les surfaces de genre supérieur

Exactement comme dans le cas du tore, nous distinguons ici deux cas, selon que le plongement i est incompressible ou non.

Premier cas. Le plongement i est incompressible. Nous allons utiliser la construction des quasi-morphismes Φ_η, déjà évoquée dans l'introduction et dans le paragraphe 1.2.1. Nous fixons donc une métrique à courbure constante sur S. Nous notons γ la géodésique fermée sur S qui est librement homotope à la courbe $(i(\theta, t))_{\theta\in\mathbf{S}^1}$ ($t \in]a, b[$ étant quelconque), et nous fixons une 1-forme η sur S telle que $\int_\gamma \eta = 1$.

Rappelons maintenant la définition du quasi-cocycle dont l'intégration donne naissance (après homogénéisation) au quasi-morphisme Φ_η. Nous notons $\widetilde{\eta}$ le relevé de la 1-forme η au revêtement universel $\widetilde{S}$ de S et, si $f \in \mathscr{G}_S$, $\widetilde{f} : \widetilde{S} \to \widetilde{S}$ l'unique relevé de S qui commute avec l'action du groupe $\pi_1(S)$ sur $\widetilde{S}$. Enfin, si $x \in \widetilde{S}$, on note $\delta(x, \widetilde{f})$ l'unique géodésique reliant x à $\widetilde{f}(x)$. La fonction

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \int_{\delta(x,\widetilde{f})} \widetilde{\eta} \end{array}$$

est invariante sous l'action du groupe $\pi_1(S)$ et descend donc en une fonction continue $v(\eta, f) : S \to \mathbf{R}$. Comme nous l'avons déjà vu au paragraphe 1.2.1, nous avons la relation ($f, g \in \mathscr{G}_S$) :

$$|v(\eta, f \circ g) - v(\eta, g) - v(\eta, f) \circ g| \leq \pi \cdot ||d\eta||_\infty.$$

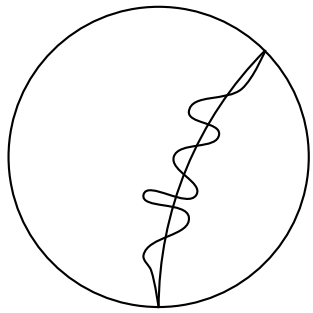

FIG. 3.1 –

L'application $f \mapsto u(f) := v(\eta, f^{-1}) \in \mathrm{L}^2(S, \mu_\omega)$ est donc un quasi-cocycle (les applications $v(\eta, g)$ sont continues sur S donc de carré intégrable). Là encore, nous fixons un relevé $\hat{i} : \mathbf{R}\times]a_1, a_2[\to \widetilde{S}$ de l'application $i : \mathbf{S}^1\times]a_1, a_2[\to S$. Il existe alors un élément T du groupe fondamental de S (vu cette fois comme groupe d'automorphismes du revêtement $\widetilde{S} \to S$) tel que :

$$\hat{i}(\theta + k, s) = T^k(\hat{i}(\theta, s)) \ \ (k \in \mathbf{Z},\ (\theta, s) \in \mathbf{R}\times]a_1, a_2[).$$

Soit $\widetilde{\gamma} \subset \widetilde{S}$ l'unique géodésique de $\widetilde{S}$ globalement invariante par T. Bien sûr, si $y \in \widetilde{\gamma}$, le segment de $\widetilde{\gamma}$ reliant y à $T(y)$ se projette sur la géodésique fermée $\gamma \subset S$. Nous noterons $\pi : \widetilde{S} \to \widetilde{\gamma}$ la projection orthogonale sur $\widetilde{\gamma}$. Nous fixons désormais un point $(\theta, s) \in \mathbf{R}\times]a_1, a_2[$ et notons $x_k = \pi(\hat{i}(\theta+k, s))$. Puisque $\widetilde{\gamma}$ est invariante par la transformation T, nous avons : $x_k = T^k(x_0)$. Dans la suite, nous noterons $\widetilde{\varphi}_H^t$ le relevé à $\widetilde{S}$ du flot φ_H^t.

Lemme 3.3.5 *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|\int_{\delta(\hat{i}(\theta,s),\widetilde{\varphi}_H^n)} \widetilde{\eta} - \int_{[x_0,x_{k_n}]} \widetilde{\eta}| \leq C,$$

où l'on a noté $[x_0, x_k]$ le segment de $\widetilde{\gamma}$ reliant x_0 à x_k, et $k_n = [n\vartheta(s)]$.

Preuve : nous noterons $[x, y]$ l'unique géodésique de $\widetilde{S}$ reliant deux points x, y de $\widetilde{S}$. Observons d'abord que dans le terme de gauche de l'inégalité, on peut remplacer le terme

$$\int_{\delta(\hat{i}(\theta,s),\widetilde{\varphi}_H^n)} \widetilde{\eta}$$

par

$$\int_{[\hat{i}(\theta,s),\hat{i}(\theta+k_n,s)]} \widetilde{\eta}.$$

En effet, la différence entre ces deux termes s'écrit

$$\int_\Delta d\widetilde{\eta} + \int_{[\widetilde{\varphi}_H^n(\hat{i}(\theta,s)),\hat{i}(\theta+k_n,s)]} \widetilde{\eta},$$

où Δ est le triangle géodésique de sommets $\hat{i}(\theta,s)$, $\widetilde{\varphi}_H^n(\hat{i}(\theta,s))$, et $\hat{i}(\theta+k_n,s)$. Cette quantité est bornée par $\pi\cdot|d\eta|_\infty+|\eta|_\infty\cdot\sup_{s,u\in[0,1]}d(\hat{i}(\theta+s,s),\hat{i}(\theta+s+u,s))$.

Pour établir le lemme, il nous suffit donc de majorer la différence

$$\mathscr{D}=\int_{[\hat{i}(\theta,s),\hat{i}(\theta+k_n,s)]}\widetilde{\eta}-\int_{[x_0,x_{k_n}]}\widetilde{\eta}.$$

Pour cela nous distinguons deux cas, selon que les segments géodésiques $[\hat{i}(\theta,s),\hat{i}(\theta+k_n,s)]$ et $[x_0,x_{k_n}]$ s'intersectent, ou non. Supposons d'abord qu'ils ne s'intersectent pas. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{D} & = & \int_Q d\widetilde{\eta}-\int_{[\hat{i}(\theta+k_n,s),x_{k_n}]}\widetilde{\eta}-\int_{[x_0,\hat{i}(\theta,s)]}\widetilde{\eta}\\ & = & \int_Q d\widetilde{\eta},\end{array}$$

où Q est le quadrilatère géodésique de sommets $\hat{i}(\theta,s)$, $\hat{i}(\theta+k_n,s)$, x_{k_n}, x_0 (orienté de telle sorte que son bord orienté soit formé des segments $[\hat{i}(\theta,s),\hat{i}(\theta+k_n,s]$, $[\hat{i}(\theta+k_n,s),x_{k_n}]$, $[x_{k_n},x_0]$, et $[x_0,\hat{i}(\theta,s)]$, parcourus dans cet ordre). Nous avons alors :

$$|\mathscr{D}|\leq 2\pi\cdot|d\eta|_\infty.$$

Le cas où les segments géodésiques $[\hat{i}(\theta,s),\hat{i}(\theta+k_n,s)]$ et $[x_0,x_{k_n}]$ s'intersectent en un point z se traite de la même manière (au lieu de considérer le quadrilatère Q, nous considérons les deux triangles géodésiques ayant un sommet commun en z et ayant pour côté opposé les segments $[\hat{i}(\theta,s),x_0]$ et $[T^{k_n}(\hat{i}(\theta,s)),T^{k_n}(x_0)]$ respectivement). □

Une fois ce lemme acquis, nous pouvons facilement conclure : le segment géodésique $[x_0,x_{k_n}]\subset\widetilde{S}$ se projette sur la géodésique $\gamma\subset S$, parcourue k_n fois. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}\widehat{u}(\varphi_H^{-1})(i(\theta,s)) & = & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\delta(\hat{i}(\theta,s),\widetilde{\varphi}_H^n)}\widetilde{\eta}\\ & = & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{[x_0,x_{k_n}]}\widetilde{\eta}\\ & = & \lim_{n\to\infty}\frac{k_n\int_\gamma\eta}{n}.\end{array}$$

Puisque la suite $\frac{k_n}{n}$ converge vers $\vartheta(s)$ et que $\int_\gamma\eta=1$, nous avons $\widehat{u}(\varphi_H^{-1})=\vartheta(s)$. Nous obtenons à nouveau que sur l'ouvert $i(\mathbf{S}^1\times]a_1,a_2[)$, la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^{-1})$ ne s'annule pas.

Second cas. Le plongement i est compressible. Nous allons utiliser ici un quasi-cocycle qui n'a pas encore été évoqué dans ce texte. Il a été introduit par Gambaudo et Ghys [52]. Nous supposons là encore que la surface S est munie d'une métrique à courbure constante, notons M le fibré unitaire tangent à S, et $\widetilde{M}$ le fibré unitaire tangent à $\widetilde{S}$. Enfin, nous notons $p_\infty:\widetilde{M}\to S^1_\infty$ la projection de $\widetilde{M}$ sur le bord à l'infini du revêtement universel de S.

Considérons une isotopie (préservant l'aire) (f_t) sur S. La différentielle df_t agit sur le fibré unitaire tangent à S : si $v\in M$ on définit :

$$[df_t](v)=\frac{df_t(v)}{|df_t(v)|}.$$

L'isotopie $[df_t] : M \to M$ se relève en une isotopie $F_t : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$. Si $v \in \widetilde{M}$, on peut considérer la courbe :

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & S^1_\infty \\ t & \mapsto & p_\infty(F_t(v)), \end{array}$$

et mesurer le nombre de tours qu'elle effectue sur le cercle S^1_∞. Pour cela, rappelons que si $\gamma : [0,1] \to S^1_\infty$ est un chemin continu, on lui associe (comme nous l'avons déjà fait au chapitre 1) un entier $n(\gamma) \in \mathbf{Z}$ de la manière suivante. On fixe une paramétrisation de S^1_∞ par $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Si $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbf{R}$ est un relevé de γ à $\mathbf{R}$, on pose :

$$n(\gamma) = [\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)].$$

Cet entier est indépendant de l'homéomorphisme entre S^1_∞ et $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ choisi. La fonction

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{M} & \to & \mathbf{Z} \\ v & \mapsto & n(p_\infty(F_t(v))) \end{array}$$

est invariante sous l'action du groupe fondamental de S sur $\widetilde{M}$ et descend donc en une fonction $\psi : M \to \mathbf{Z}$. Il n'est pas difficile de s'assurer que si v et w sont deux vecteurs unitaires tangents à S avec $\pi(v) = \pi(w)$ (où π désigne la projection $M \to S$) alors $|\psi(v) - \psi(w)| \leq 2$. On définit alors, si $x \in S$, $v(f)(x) = \inf_{v \in M, \pi(v)=x} \psi(v)$, et $u(f) = v(f^{-1})$. La fonction $v(f)$ est mesurable et bornée.

Lemme 3.3.6 *L'application $f \mapsto u(f)$ est un quasi-cocycle.*

Preuve : remarquons que la construction de la fonction $v(f)$ est identique à celle de la fonction angle$(-, f)$ que nous avons effectuée au paragraphe 1.2.1 pour construire un quasi-morphisme de Calabi sur les surfaces de genre supérieur. La seule différence est que l'isotopie

$$\Theta(f_t) : M \to M$$

utilisée au paragraphe 1.2.1, a été remplacée par l'action de la différentielle de l'isotopie f_t :

$$[df_t] : M \to M.$$

La preuve du fait que l'application u est un quasi-cocycle est alors rigoureusement identique à la preuve du lemme 1.2.1. □

Soit $(f_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie hamiltonienne sur S. Nous pouvons étendre cette isotopie en un chemin de difféomorphismes $(f_t)_{t \in \mathbf{R}}$ de telle sorte que $f_{t+1} = f_t \circ f_1$. La proposition suivante explique comment calculer la valeur de la fonction $\widehat{u}(f)(x)$ pour un point $x \in S$ dont l'orbite pendant l'isotopie $(f_t)_{t \in \mathbf{R}}$ est contenue dans un disque.

Proposition 3.3.7 *Soit D un disque (fermé) plongé dans la surface et $x \in D$ un point tel que $f_t(x) \in D$ pour tout réel t. Nous fixons une trivialisation symplectique du fibré tangent au-dessus de D. On peut alors considérer la courbe $df_t(x)$ comme une courbe dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$. *Alors :*

$$\widehat{u}(f^{-1})(x) = \frac{1}{2} \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \Phi(\{df_t(x)\}_{0 \leq t \leq p}),$$

où $\Phi : \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est le quasi-morphisme homogène introduit au paragraphe 2.1.1.

Preuve : la trivialisation fixée du fibré tangent au-dessus de D définit canoniquement une trivialisation du fibré unitaire tangent associée, que nous notons $\psi_1 : D \times \mathbf{S}^1 \to \pi^{-1}(D) \subset M$. Par ailleurs on peut définir une seconde trivialisation du fibré $M \to S$ au-dessus de D, de la manière suivante. Choisissons une section $\varsigma : D \to \widetilde{S}$ du revêtement $\widetilde{S} \to S$ au-dessus du disque D. La différentielle de cette section induit une application $d\varsigma : \pi^{-1}(D) \subset M \to \widetilde{M}$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \pi^{-1}(D) & \to & D \times S^1_\infty \\ v & \mapsto & (\pi(v), p_\infty(d\varsigma(v))) \end{array}$$

est une trivialisation du fibré $M \to S$ au-dessus de D. Nous noterons $\psi_2 : D \times S^1_\infty \to \pi^{-1}(D)$ l'inverse de l'application ci-dessus. Nous fixons maintenant une paramétrisation de S^1_∞ par $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Il existe alors une application $a : D \to \mathbf{R}$ telle que l'application :

$$\psi_1^{-1} \circ \psi_2 : D \times S^1_\infty \to D \times \mathbf{S}^1$$

s'écrive $\psi_1^{-1} \circ \psi_2(x, v) = (x, e^{2i\pi a(x)} \cdot v)$. Choisissons maintenant un vecteur tangent v au point x. On peut écrire :

$$[df_t](v) = \psi_2(f_t(x), e^{2i\pi\theta(t)}).$$

Dans la première trivialisation, nous avons donc

$$[df_t](v) = \psi_1(f_t(x), e^{2i\pi(\theta(t)+a(f_t(x))}).$$

Par définition du quasi-cocycle u, nous avons

$$\widehat{u}(f^{-1}) = \lim_{p\to\infty} \frac{\theta(p) - \theta(0)}{p}.$$

Puisque l'application a est bornée, cette quantité est égale à :

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(\theta(p) + a(f_p(x))) - (\theta(0) + a(f(x)))}{p}.$$

Cette dernière quantité est égale à la moitié du nombre de rotation (pendant l'isotopie (f_t)) de la **direction** engendrée par v, lu dans la trivialisation ψ_1. La quantité $\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Phi(df_t(x))$ est quant à elle égale au nombre de rotation de la direction engendrée par le vecteur v. Nous obtenons donc bien l'égalité : $\widehat{u}(f^{-1})(x) = \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\Phi(\{df_t(x)\}_{0\leq t\leq p})$. □

Grâce à la proposition précédente, nous pouvons calculer les valeurs de la fonction : $\widehat{u}(\varphi^1_H) \circ i : \mathbf{S}^1 \times]a_1, a_2[\to \mathbf{R}$. Fixons deux réels c et d tels que $a_1 < c < d < a_2$. Choisissons également un plongement $A : \mathbf{D} \to S$ tel que $A(e^{2i\pi\theta}) = i(\theta, c)$. Nous supposerons que $A(x) \in i(\mathbf{S}^1 \times]a_1, c])$ pour x proche de $\partial\mathbf{D}$. Ceci équivaut à dire que l'orientation du cercle $i(\mathbf{S}^1 \times c)$ comme bord du disque $A(\mathbf{D})$ est donnée par le champ de vecteurs $i_*(\frac{\partial}{\partial\theta})$. Là encore, le cas contraire où $A(x) \in i(\mathbf{S}^1 \times [c, a_2[)$ (pour x proche de $\partial\mathbf{D}$) se traite de manière identique. Nous fixons maintenant une trivialisation symplectique du fibré tangent au-dessus du disque

$$\mathbf{D}' = A(\mathbf{D}) \cup i(\mathbf{S}^1 \times [c, d]).$$

Un calcul similaire à celui effectué au paragraphe 2.4 assure alors que, si $t \in [c, d]$:

$$\frac{1}{p}\Phi(d\varphi_H^p(i(\theta, t))) \to_{p\to\infty} 2\vartheta(t).$$

D'après la proposition précédente, nous avons donc $\widehat{u}(\varphi_H^{-1})(i(\theta, t)) = \vartheta(t)$. Puisque l'ensemble $i(\mathbf{S}^1 \times [c, d])$ est de mesure positive, la fonction $\widehat{u}(\varphi_H^{-1})$ n'est pas nulle presque partout. Nous avons donc achevé la preuve du théorème 7 dans le cas des surfaces de genre supérieur.

Chapitre 4

Quelques plats pour la métrique de Hofer

4.1 Distance de Hofer

Nous désignons toujours par $\mathscr{G}$ le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique (M, ω) (qui peut être fermée ou ouverte) de dimension $2n$.

En 1990, Hofer [68] a découvert que l'on pouvait munir le groupe $\mathscr{G}$ d'une remarquable distance, notée ρ, qui est biinvariante, c'est-à-dire, invariante à la fois par les translations à droite et à gauche de $\mathscr{G}$. Rappelons-en la définition. L'*oscillation* d'une fonction (à support compact) $F : M \to \mathbf{R}$, notée $\mathrm{osc}(F)$, est la quantité

$$\max(F) - \min(F).$$

Ceci définit une norme sur l'espace des fonctions lisses sur M qui sont normalisées (c'est-à-dire, d'intégrale nulle pour la forme volume ω^n si M est compacte, et à support compact si M est ouverte). Bien sûr cet espace s'identifie à l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens sur M, auquel on peut penser comme à l'espace tangent à $\mathscr{G}$ en l'identité. La distance de Hofer est alors la distance finslerienne associée à cette norme. Plus précisément, si $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est un hamiltonien dépendant du temps, nous pouvons définir la longueur de l'isotopie hamiltonienne $\{f_t\}$ engendrée par (H_t) par :

$$\ell(\{f_t\}) = \int_0^1 \mathrm{osc}(H_t) dt.$$

L'*énergie* d'un élément $f \in \mathscr{G}$ est la quantité

$$||f|| = \inf \ell(\{f_t\})$$

où l'infimum porte sur toutes les isotopies hamiltoniennes dont le temps 1 est f. Si h est un difféomorphisme symplectique quelconque, l'isotopie $h \circ f_t \circ h^{-1}$ est engendrée par la fonction dépendante du temps

$$H_t \circ h^{-1}.$$

Pour chaque instant, celle-ci a la même oscillation que H_t. Ceci assure donc que l'énergie d'un difféomorphisme hamiltonien est invariante par conjugaison. On définit alors $\rho(f, g) = ||fg^{-1}||$. Notons que le point crucial pour s'assurer que ρ est une distance est d'établir qu'un difféomorphisme $f \in \mathscr{G} \setminus \{\mathbb{1}\}$ a une énergie strictement positive. Cela a été prouvé par Hofer [68] dans le cas de $\mathbf{R}^{2n}$, par Polterovich [99] pour les variétés rationnelles (c'est-à-dire les variétés pour lesquelles la classe de cohomologie $[\omega]$ est rationnelle) et en toute généralité par Lalonde et McDuff [77] (voir aussi [27, 94, 109, 115] pour d'autres preuves, dans différents cas particuliers). Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant. Nous renvoyons le lecteur aux livres [71, 102] pour une introduction plus détaillée à ce sujet.

Bialy et Polterovich [15] ont prouvé le résultat suivant. Lorsque $M = \mathbf{R}^{2n}$, muni de sa structure symplectique standard, il existe un voisinage U de l'identité dans $\mathscr{G}$ (pour la topologie C^1) et un voisinage V de l'origine dans l'espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbf{R}^n$ (pour la topologie C^2) tels que (U, ρ) et (V, d_{osc}) soient isométriques (où $d_{osc}(F, G) = \mathrm{osc}(F - G)$). On peut interpréter ce fait en disant que $\mathscr{G}$ est *localement plat*. Ce résultat a depuis été généralisé à d'autres variétés [78, 95].

Par ailleurs, on sait maintenant pour une large classe de variétés symplectiques que l'espace métrique $(\mathscr{G}, \rho)$ est de diamètre infini (voir [102] pour quelques résultats et références). A l'opposé du résultat de Bialy et Polterovich précédemment cité, on peut donc s'intéresser, lorsque le diamètre de $\mathscr{G}$ est infini, à la géométrie *à grande échelle* de $(\mathscr{G}, \rho)$. Dans cet esprit nous montrons le :

Théorème 8 *Supposons qu'il existe une sous-variété lagrangienne fermée L plongée dans M, vérifiant les deux conditions suivantes :*

• *l'application induite $\pi_1(L) \to \pi_1(M)$ entre les groupes fondamentaux de L et M est injective,*

• *il existe sur L une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle.*

Alors, pour tout entier naturel N, il existe un morphisme $\phi : \mathbf{R}^N \to \mathscr{G}$ ayant la propriété suivante. Si $|\cdot|$est une norme fixée sur $\mathbf{R}^N$, il existe une constante strictement positive C_N telle que :

$$C_N^{-1}|x-y| \leq \rho(\phi(x), \phi(y)) \leq C_N|x-y|,$$

pour tous x, y de $\mathbf{R}^N$.

Nous verrons que, lorsque l'on choisit comme norme sur $\mathbf{R}^N$ la norme

$$|(x_1, \ldots, x_N)| = \sum_{k=1}^{N} |x_k|$$

la constante C_N que nous obtenons converge exponentiellement vite vers l'infini lorsque N tend vers l'infini. Citons quelques exemples de variétés symplectiques vérifiant les hypothèses du théorème :

• Le fibré cotangent T^*L (muni de sa structure symplectique canonique : $\omega = d(pdq)$), d'une variété fermée L possédant une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle.

• Une surface compacte orientable de genre strictement positif, munie d'une forme d'aire ; un produit de surfaces de genres strictement positifs.

• Soit V^3 une variété fermée de dimension 3 qui fibre sur le cercle : $\pi : V^3 \to \mathbf{S}^1$. Supposons le genre de la fibre strictement positif. Notons θ_1 la coordonnée sur le cercle. Soit Ω une 2-forme fermée sur V^3 qui soit non-dégénérée sur chaque fibre de π. Considérons la variété $M = V^3 \times \mathbf{S}^1$. Si θ_2 désigne la coordonnée sur le second facteur de M, la forme

$$\omega = \Omega + \pi^*(d\theta_1) \wedge d\theta_2$$

est une forme symplectique sur M. Pour toute courbe fermée simple essentielle γ contenue dans une fibre de π, nous obtenons un tore lagrangien incompressible $\gamma \times \mathbf{S}^1$ dans M.

Notons que dans tous les exemples ci-dessus, le revêtement universel $\widetilde{M}$ de la variété M est symplectiquement difféomorphe à $\mathbf{R}^{2n}$, muni de sa structure symplectique standard. Dans le cas où M est une surface de genre supérieur ou égal à 1, nous verrons au paragraphe 4.3 que des résultats de Polterovich permettent en fait de plonger un espace vectoriel normé de dimension infinie dans le groupe des difféomorphismes hamiltoniens.

Pour construire le morphisme ϕ en général, nous allons utiliser une idée de Lalonde et Polterovich [79]. D'après un théorème classique de Weinstein, un voisinage U de L dans M est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle dans le fibré cotangent T^*L. On peut supposer que U est un fibré en boules au-dessus de L. Nous pouvons donc considérer des flots hamiltoniens sur M qui, dans U (ou une partie de U), coïncident avec le flot géodésique sur L (pour une métrique à courbure négative fixée). Notons $\widetilde{u}^t : T^*\widetilde{L} \to T^*\widetilde{L}$ le flot géodésique sur le revêtement universel $\widetilde{L}$ de L. Nous allons tirer parti du fait suivant, dû à la courbure négative : si K est un compact de $T^*\widetilde{L}$ qui évite la section nulle, on a $\widetilde{u}^t(K) \cap K = \emptyset$ pour t suffisament grand.

Dans le cas où la variété M est le disque $\mathbf{D}^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, |x|^2 + |y|^2 < 1\}$, et que le groupe $\mathscr{G}$ est muni de la distance "hydrodynamique" L^2, des résultats similaires au nôtre avaient été prouvés par Benaim et Gambaudo [11] puis Crisp et Wiest [28]. Rappelons la définition de cette distance. Si $f_t : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{D}^2$ est une isotopie hamiltonienne, on définit sa longueur, pour la distance L^2, comme

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{D}^2} |X_t(x,y)| dx \wedge dy \, dt,$$

où X_t désigne le champ de vecteurs qui engendre l'isotopie (f_t) et $|\cdot|$ est la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^2$. La distance entre deux difféomorphismes f et g est alors la borne inférieure des longueurs des isotopies (h_t) telles que $h_0 = \mathbb{1}$ et $h_1 = fg^{-1}$. Notons que cette distance est invariante à droite seulement. Elle peut être définie plus généralement sur la composante neutre du groupe des difféomorphismes préservant le volume d'une variété riemannienne compacte (voir [4] à ce sujet). Dans [11], Benaim et Gambaudo ont construit des plongements quasi-isométriques de groupes abéliens libres et de groupes libres de rang arbitraire dans le groupe des difféomorphismes hamiltoniens du disque, muni de sa métrique L^2. Crisp et Wiest [28] ont généralisé leur construction à d'autres groupes de type fini.

Dans le paragraphe suivant, nous rappelons quelques faits classiques de topologie symplectique ; puis, au paragraphe 4.3 nous rappelons les résultats de Polterovich qui donnent une version plus forte de notre énoncé dans le cas des surfaces de genre strictement positif ; enfin nous prouvons le théorème 8 au paragraphe 4.4.

4.2 Inégalité entre énergie et capacité

Nous rappelons d'abord la notion de *capacité symplectique* (voir [71] pour une discussion plus détaillée).

Définition 5 *Une capacité symplectique est une application c qui à toute variété symplectique (N, Ω) associe un nombre $c(N,\Omega) \in [0, +\infty[$ et qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *(monotonie) si $\psi : (N_1, \Omega_1) \to (N_2, \Omega_2)$ est un plongement symplectique de N_1 dans N_2 (où N_1 et N_2 sont de même dimension), alors $c(N_1, \Omega_1) \leq c(N_2, \Omega_2)$,*
2. *(homogénéité) $c(N, \lambda\Omega) = |\lambda| \cdot c(N, \Omega)$, pour tout réel non-nul λ,*
3. *(normalisation) $c(B^{2n}(1), \omega_0) = c(Z^{2n}(1), \omega_0) = \pi$.*

Dans le dernier point ci-dessus, ω_0 désigne la forme symplectique standard de $\mathbf{R}^{2n}$, $B^{2n}(1)$ est la boule unité euclidienne de $\mathbf{R}^{2n}$, et $Z^{2n}(1)$ est le cylindre :

$$\{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n}, x_1^2 + y_1^2 < 1\}.$$

Les deux dernières conditions assurent que la capacité de la boule euclidienne de rayon r $B^{2n}(r) \subset \mathbf{R}^{2n}$ est égale à πr^2.

Rappelons maintenant la définition de la *capacité de Gromov* d'une variété symplectique (N, Ω), que nous noterons $c_G(N, \Omega)$. C'est la quantité :

$$\sup\{\pi r^2; \text{il existe un plongement symplectique } B^{2n}(r) \to N\}.$$

Le seul point non-trivial pour s'assurer que c_G vérifie effectivement les axiomes d'une capacité symplectique, est d'établir que s'il existe un plongement symplectique de la boule $B^{2n}(r)$ dans le cylindre $Z^{2n}(1)$, alors $r \leq 1$. Mais c'est exactement ce qu'affirme le (difficile) théorème de *non-tassement* de Gromov [62]. Par ailleurs, il n'est pas difficile de vérifier, par définition même de la capacité c_G, que si c est une capacité symplectique quelconque, on a $c_G \leq c$. En effet, si (N, Ω) est une variété symplectique, et $\psi : B^{2n}(r) \to N$ un plongement symplectique, nous avons, par monotonie de c :

$$c(B^{2n}(r), \omega_0) \leq c(N, \Omega).$$

Puisque c est normalisée cette inégalité s'écrit en fait :

$$\pi r^2 \leq c(N, \Omega).$$

Dans le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus, nous pouvons alors prendre la borne supérieure lorsque le plongement ψ varie. Nous obtenons :

$$c_G(N, \Omega) \leq c(N, \Omega).$$

Si A est une partie de la variété symplectique (M, ω), nous noterons $c_G(A)$ la capacité de Gromov de l'ouvert $\mathrm{Int}(A)$ muni de la forme symplectique ω. Lalonde et McDuff [77] ont établi le résultat suivant. Si f est un élément de $\mathscr{G}$ et A une partie de M qui est disjointe d'elle-même par f, c'est-à-dire qui vérifie $f(A) \cap A = \emptyset$, alors l'énergie de f est minorée par la moitié de la capacité de Gromov de A :

$$||f|| \geq \frac{1}{2} c_G(A).$$

Rappelons que c'est cette inégalité qui permet d'établir que la distance de Hofer est non-dégénérée : si f est un difféomorphisme différent de l'identité, on peut trouver un ouvert de M qui est disjoint de lui-même par f. Puisque tout ouvert non-vide a une capacité strictement positive, l'énergie de f est non-nulle. Une telle inégalité avait été prouvée (sans le facteur $\frac{1}{2}$) par Hofer dans $\mathbf{R}^{2n}$ [69] (voir aussi [49]). Dans la suite, le mot "capacité" fera référence à la capacité de Gromov. C'est en effet la seule que nous utiliserons désormais.

Expliquons maintenant comment nous allons utiliser cette inégalité. Notons d'abord que toutes les variétés symplectiques qui vérifient les hypothèses de notre théorème ont un groupe fondamental infini, et donc un revêtement universel $p : \widetilde{M} \to M$ non compact. Fixons un élément f de $\mathscr{G}$. Considérons une isotopie hamiltonienne $f_t : M \to M$, engendrée par un hamiltonien (H_t), telle que $f_1 = f$. Notons $\widetilde{f_t} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ le relevé de l'isotopie (f_t) issu de l'identité. C'est une isotopie hamiltonienne engendrée par la fonction $H_t \circ p$ (à support non compact). Nous obtenons ainsi un relevé $\widetilde{f_1} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ de f. Suivant [79], nous appellerons *relevé admissible* de f tout relevé ainsi obtenu.

Proposition 4.2.1 ([79]) *Soit $c > 0$ et $f \in \mathscr{G}$. Supposons que pour tout relevé admissible $\widetilde{f}$ de f, il existe une partie A de $\widetilde{M}$ de capacité supérieure ou égale à c telle que $\widetilde{f}(A) \cap A = \emptyset$. Alors $||f|| \geq \frac{c}{2}$.*

Remarque : si M est non compacte, puisque nous ne considérons que des isotopies hamiltoniennes sur M à support compact, il est clair qu'il existe un unique relevé admissible. Si M est compacte, une conséquence facile de la (difficile) conjecture d'Arnold (voir [50, 82]) est que l'application d'évaluation

$$\pi_1(\mathscr{G}, \mathbb{1}) \to \pi_1(M, x_0)$$

a une image triviale. Ceci implique que tout difféomorphisme hamiltonien de M possède un **unique** relevé admissible. Ainsi, pour appliquer la proposition ci-dessus, il suffit de vérifier l'hypothèse pour un seul difféomorphisme de $\widetilde{M}$. Cependant, pour garder à ce chapitre un caractère élémentaire, nous n'utiliserons pas ce fait.

Preuve de la proposition : considérons une isotopie hamiltonienne (f_t) sur M, engendrée par la fonction à support compact H_t, telle que $f_1 = f$. Soit A un compact contenant la réunion des supports des fonctions H_t. Si M est compacte, nous supposerons H_t normalisée par la condition $\int_M H_t \omega^n = 0$, pour tout t. Soit $(\widetilde{f_t})$ l'isotopie de $\widetilde{M}$ engendrée par la fonction $H_t \circ p$. Par hypothèse on peut trouver un compact K de $\widetilde{M}$ de capacité supérieure à $c-\epsilon$, qui est disjoint de lui-même par $\widetilde{f_1}$. Soit B une boule de $\widetilde{M}$ qui contient $\cup_{t\in[0,1]} \widetilde{f_t}(K)$ et telle que la projection $p : B \to A$ soit surjective ; et $\varphi : \widetilde{M} \to [0,1]$ une fonction à support compact valant 1 sur B. L'isotopie hamiltonienne engendrée par la fonction à support compact définie par $G_t(x) = \varphi(x) H_t(p(x))$ disjoint K de lui-même. Nous obtenons donc, d'après l'inégalité entre énergie et capacité, $\int_0^1 \operatorname{osc}(G_t) dt \geq \frac{c-\epsilon}{2}$. Puisque $\operatorname{osc}(G_t) = \operatorname{osc}(H_t)$, on obtient l'estimation voulue. □

Une conséquence classique de la preuve ci-dessus est qu'un relevé admissible d'un difféomorphisme hamiltonien de M ne peut disjoindre d'elle-même une partie de $\widetilde{M}$ de capacité infinie.

4.3 Cas des surfaces : les résultats de Polterovich

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que des hamiltoniens *périodiques en temps*, c'est-à-dire, des fonctions définies sur $M \times \mathbf{S}^1$ (où M est la variété symplectique considérée).

Il n'est pas difficile de s'assurer que tout difféomorphisme hamiltonien est le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne engendrée par une telle fonction et qu'on ne modifie pas la distance de Hofer en ne considérant que de telles isotopies (voir [102]).

Nous considérons une surface fermée S de genre supérieur ou égal à 1, munie d'une forme d'aire, et une courbe fermée simple essentielle $\gamma \subset S$. Dans [102], en utilisant une idée déjà apparue dans [101], Polterovich prouve le théorème suivant.

Si $(H_t)_{t\in\mathbf{S}^1}$ est un hamiltonien normalisé ($\int_S H_t\,\omega = 0$ pour tout t), tel que $|H_t(x)| \geq C$ pour $x \in \gamma$ et $t \in \mathbf{S}^1$, alors $\rho(f, \mathbb{1}) \geq C$, où f désigne le temps 1 de l'isotopie hamiltonienne engendrée par (H_t).

Nous rappelons rapidement les grandes lignes de la preuve de ce résultat. Si (f_t) est l'isotopie engendrée par (H_t), une autre isotopie reliant l'identité à f serait de la forme

$$g_t \circ f_t$$

où (g_t) est un *lacet* de difféomorphismes hamiltoniens. Elle est engendrée par le hamiltonien $G_t + H_t \circ g_t^{-1}$ (où G_t désigne le hamiltonien qui engendre le lacet g_t). Polterovich ramène alors le problème considéré à un problème d'intersection lagrangienne. A cet effet, considérons le plongement suivant :

$$\begin{array}{rcl} \gamma \times \mathbf{S}^1 & \to & S \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R} \\ (x,t) & \mapsto & (g_t(x), t, -G_t(g_t(x))). \end{array}$$

Lorsque l'on munit la variété $S \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ de la forme symplectique $\omega + du \wedge d\theta$ ($u \in \mathbf{R}$, $\theta \in \mathbf{S}^1$), ce plongement est lagrangien. Puisque le groupe $\mathscr{G}_S$ des difféomorphismes hamiltoniens de S est simplement connexe, on peut montrer (voir [102]) que ce plongement est le temps 1 d'une famille à un paramètre i_s de plongements lagrangiens exacts, telle que i_0 soit défini par $i_0(x,t) = (x,t,0)$. D'après un théorème de Gromov [62], ceci implique que l'intersection

$$i_0(\gamma \times \mathbf{S}^1) \cap i_1(\gamma \times \mathbf{S}^1)$$

est non-vide. Il existe donc $(x_0, t_0) \in \gamma \times \mathbf{S}^1$ tel que $i_1(x_0,t_0) \in i_0(\gamma \times \mathbf{S}^1)$, c'est-à-dire :

$$g_{t_0}(x_0) \in \gamma \;\; et \;\; G_{t_0}(g_{t_0}(x_0)) = 0.$$

Nous avons donc :

$$|G_{t_0}(g_{t_0}(x_0)) + H_{t_0}(g_{t_0}^{-1}(g_{t_0}(x_0)))| = |H_{t_0}(x_0)| \geq C.$$

Ceci assure que l'oscillation de la fonction $G_{t_0} + H_{t_0} \circ g_{t_0}^{-1}$ est supérieure ou égale à C. Dans [102], Polterovich prouve que la distance de Hofer d'un difféomorphisme f à l'identité, définie **à priori** comme la quantité

$$\inf_{F_t} \int_0^1 \mathrm{osc}(F_t)dt$$

(où F_t décrit l'ensemble des hamiltoniens engendrant une isotopie de l'identité à f) est en fait égale à la quantité (à priori plus grande) :

$$\inf_{F_t} \max_t \operatorname{osc}(F_t).$$

Nous avons vu qu'une isotopie arbitraire reliant l'identité à f est engendrée par un hamiltonien de la forme $G_t + H_t \circ g_t^{-1}$ où G_t engendre un lacet (g_t). De plus nous avons établi que, dans ce cas, il existe $t_0 \in \mathbf{S}^1$ tel que :

$$\operatorname{osc}(G_{t_0} + H_{t_0} \circ g_{t_0}^{-1}) \geq C.$$

Nous avons donc $\max_t \operatorname{osc}(G_t + H_t \circ g_t^{-1}) \geq C$, et donc par ce qui précède $\rho(f, \mathbb{1}) \geq C$. Ceci établit donc le théorème de Polterovich mentionné ci-dessus.

Il est maintenant aisé de plonger un espace vectoriel normé de dimension infinie dans le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de S, muni de la distance de Hofer. Considérons par exemple le tore $\mathbf{T}^2$, muni des coordonnées $(x, y) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ et de la forme d'aire $\omega = dx \wedge dy$. Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{T}^2$, de moyenne nulle, ne dépendant que de la coordonnée x. Si $H \in E$, notons φ_H^t le flot hamiltonien associé. D'après le théorème de Polterovich que nous venons d'exposer, nous avons :

$$\rho(\varphi_H^1, \mathbb{1}) \geq |H|_\infty$$

(où $|H|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{S}^1} |H(x)|$). Par ailleurs, $\rho(\varphi_H^1, \mathbb{1}) \leq \operatorname{osc}(H) \leq 2 \cdot |H|_\infty$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \psi : E & \to & \mathscr{G}_{\mathbf{T}^2} \\ H & \mapsto & \varphi_H^1 \end{array}$$

est donc un plongement quasi-isométrique lorsque E est muni de la norme $|\cdot|_\infty$. En fait, on peut prouver dans ce cas que $\rho(\varphi_H^1, \mathbb{1}) = \operatorname{osc}(H)$ (voir [102]), l'application ψ est donc une isométrie lorsque E est muni de la distance induite par la norme osc.

Dans le cas d'une surface de genre supérieur ou égal à 2, on peut bien entendu faire une construction analogue. Choisissons un plongement incompressible (c'est-à-dire induisant une injection entre les groupes fondamentaux) $i : \mathbf{S}^1 \times]a, b[\to S$ tel que $i^*\omega = ds \wedge d\theta$ ($s \in]a, b[$, $\theta \in \mathbf{S}^1$). Notons E l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur l'intervalle $]a, b[$, de moyenne nulle. Chaque fonction de E définit naturellement, via le plongement i, un hamiltonien normalisé sur la surface S. Comme précédemment, ceci permet d'obtenir un plongement quasi-isométrique de E dans le groupe $\mathscr{G}_S$.

4.4 Construction des plats

Pour illustrer l'idée de la preuve du théorème 8, nous commençons par expliquer comment plonger quasi-isométriquement $\mathbf{R}^2$ (muni d'une norme quelconque) dans le groupe des difféomorphismes hamiltoniens du tore $\mathbf{T}^2$, en utilisant uniquement l'inégalité entre

énergie et capacité dans le revêtement universel (bien sûr, l'existence d'un tel plongement est aussi une conséquence des résultats du paragraphe précédent).

Dans le tore $\mathbf{T}^2$, considérons les deux anneaux :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y), 0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}\} \\ A_2 &= \{(x,y), \tfrac{1}{2} \leq x \leq \tfrac{3}{4}\} \end{aligned}$$

(nous avons identifié le cercle $\mathbf{S}^1$ au segment $[0,1]$ avec ses deux extrémités identifiées). Considérons alors deux fonctions $H_1, H_2 : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{R}$, normalisées, ne dépendant que de x, telles que $H_1'(x) = 1$ pour $x \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $H_2'(x) = 1$ pour $x \in [0, \frac{1}{4}]$, et $H_2'(x) = -1$ pour $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. Nous avons ainsi, sur l'anneau A_1 :

$$\varphi^t_{H_1}(x,y) = \varphi^t_{H_2}(x,y) = (x, y+t);$$

et sur l'anneau A_2 :

$$\begin{aligned} \varphi^t_{H_1}(x,y) &= (x, y+t), \\ \varphi^t_{H_2}(x,y) &= (x, y-t). \end{aligned}$$

Considérons alors le morphisme $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathscr{G}_{\mathbf{T}^2}$ défini par : $\phi(a,b) = \varphi^a_{H_1} \circ \varphi^b_{H_2}$. Nous avons bien sûr

$$\rho(\phi(a,b), \mathbb{1}) \leq (|a| + |b|)\max\{\mathrm{osc}(H_1), \mathrm{osc}(H_2)\}.$$

Nous allons vérifier que $\rho(\phi(a,b), \mathbb{1}) \geq \frac{|a|+|b|}{4}$, ce qui assurera que ϕ est un plongement quasi-isométrique lorsque $\mathbf{R}^2$ est muni de la norme $|(a,b)| = |a| + |b|$ (et donc également lorsque $\mathbf{R}^2$ est muni d'une norme quelconque). Nous considérons les relevés $\widetilde{\varphi}^t_{H_1}$ et $\widetilde{\varphi}^t_{H_2}$ à $\mathbf{R}^2$ des flots $\varphi^t_{H_1}$ et $\varphi^t_{H_2}$. Si a et b sont de même signe, sur la bande

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}\},$$

le difféomorphisme $\widetilde{\varphi}^a_{H_1} \circ \widetilde{\varphi}^b_{H_2}$ coïncide avec la translation $(x,y) \mapsto (x, y+a+b)$. Il disjoint donc de lui-même l'ensemble

$$\{(x,y),\ 0 < x < \frac{1}{4},\ 0 < y < |a| + |b| = |a+b|\},$$

qui est d'aire $\frac{|a|+|b|}{4}$. Si a et b sont de signes opposés, sur la bande

$$\{(x,y), \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}\},$$

le difféomorphisme $\widetilde{\varphi}^a_{H_1} \circ \widetilde{\varphi}^b_{H_2}$ coïncide avec la translation $(x,y) \mapsto (x, y+a-b)$. Il disjoint donc de lui-même l'ensemble

$$\{(x,y),\ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4},\ 0 < y < |a| + |b| = |a-b|\},$$

qui est également d'aire $\frac{|a|+|b|}{4}$. Nous concluons alors avec l'inégalité entre énergie et capacité, comme expliqué au paragraphe 4.2.

Nous prouvons maintenant le théorème 8 en toute généralité. Fixons une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle g sur L. Nous noterons d_g la distance induite par g sur le revêtement universel $\widetilde{L}$ de L, et $|p|_q^2 = g_q(p,p)$ le carré de la norme d'un vecteur tangent p en un point q de L ou de $\widetilde{L}$.

Quitte à multiplier la métrique g par une constante, on peut supposer qu'il existe un voisinage U de L dans M et un difféomorphisme symplectique

$$\theta : T^*L(\sqrt{3}) \to U,$$

où $T^*L(\sqrt{3}) = \{(q,p) \in T^*L, |p|_q^2 < 3\}$. Fixons désormais un entier naturel N. Notons A_i $(1 \leq i \leq 2^N)$ la partie suivante de $T^*L(\sqrt{3})$:

$$\{(q,p), 1 + \frac{i-1}{2^N} \leq |p|_q^2 \leq 1 + \frac{i-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}\}.$$

Nous avons représenté en noir sur la figure 1, dans le cas où $N = 2$, la trace des ensembles $A_1, \ldots, A_4$ sur une fibre de la projection $T^*L \to L$. En fait, il n'est pas difficile de vérifier que pour plonger (quasi-isométriquement) $\mathbf{R}^N$ dans le groupe des difféomorphismes hamiltoniens, il suffit d'utiliser 2^{N-1} domaines de la forme de A_i. Nous en utilisons ici 2^N pour simplifier la présentation.

Il sera plus commode d'indexer les ensembles $(A_i)_{1 \leq i \leq 2^N}$ par $\{\pm 1\}^N$. Pour cela nous fixons une bijection entre $\{\pm 1\}^N$ et $\{1, \ldots, 2^N\}$:

$$I = (I_1, \ldots, I_N) \in \{\pm 1\}^N \mapsto i(I) \in \{1, \ldots, 2^N\}.$$

Soit, pour $1 \leq k \leq N$, $\varphi_k : [0,3] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞, ayant les propriétés suivantes :

• l'application φ_k est nulle en dehors de l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$.

• Si $I_k = 1$ et $s \in [1 + \frac{i(I)-1}{2^N}, 1 + \frac{i(I)-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}]$, $\varphi_k(s) = s$; si $I_k = -1$ et $s \in [1 + \frac{i(I)-1}{2^N}, 1 + \frac{i(I)-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}]$, $\varphi_k(s) = -s$.

Enfin si $(q,p) \in T^*L(\sqrt{3})$, on pose $H_k(q,p) = \frac{1}{2}\varphi_k(|p|_q^2)$. Grâce au difféomorphisme θ on peut voir H_k comme une fonction sur U, que l'on prolonge par 0 en dehors de U pour obtenir une fonction lisse sur M. Les flots hamiltoniens $\phi_{H_k}^t$ associés aux fonctions $H_1, \ldots, H_N$ commutent et définissent une action de $\mathbf{R}^N$ sur M. Nous définissons un morphisme $\phi : \mathbf{R}^N \to \mathscr{G}$ par :

$$\phi(a = (a_1, \ldots, a_N)) = \prod_{k=1}^N \phi_{H_k}^{a_k}.$$

Nous avons bien sûr :

$$\rho(\phi(a), \phi(b)) = || \prod_{k=1}^N \phi_{H_k}^{a_k - b_k} || \leq C \cdot (\sum_{k=1}^N |a_k - b_k|),$$

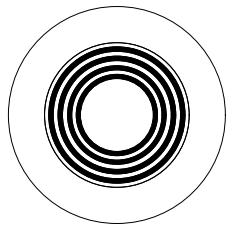

FIG. 4.1 –

où l'on a noté $C = \max_{1\leq k\leq N}||\phi^1_{H_k}||$. Pour prouver le théorème, nous devons établir une minoration de la forme

$$||\phi(a)|| \geq \epsilon_N \cdot (\sum_{k=1}^{N} |a_k|)$$

pour tout $a \in \mathbf{R}^N$, pour une certaine constante ϵ_N. On peut ensuite prendre $C_N = \max(\epsilon_N^{-1}, C)$.

Fixons donc $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{R}^N - \{0\}$. On peut choisir $I \in \{\pm 1\}^N$ tel que $I_k a_k \geq 0$ pour tout k de $\{1, \ldots, N\}$. Si $(q, p) \in A_{i(I)}$, alors

$$(\sum_{k=1}^{N} a_k H_k)(q, p) = \frac{l}{2}|p|_q^2$$

(où $l := \sum_{k=1}^{N} |a_k|$). Notons $u^t : T^*L \to T^*L$ le flot géodésique (pour la métrique g) : c'est le flot hamiltonien associé à la fonction $E(q, p) = \frac{1}{2}|p|_q^2$. Le flot hamiltonien engendré par la fonction $\sum_{k=1}^{N} a_k H_k$ coïncide donc avec le flot (u^{lt}) sur $A_{i(I)}$.

Choisissons une composante connexe $\widetilde{U}$ de l'image inverse de U dans $\widetilde{M}$. Puisque L est incompressible dans M, $\widetilde{U}$ est symplectiquement difféomorphe à $T^*\widetilde{L}(\sqrt{3})$. Nous choisissons également un point base $q_0 \in \widetilde{L}$, et notons $B(q_0, R)$ la boule ouverte de $\widetilde{L}$ de rayon R centrée en q_0.

Notons $\widetilde{\phi}(a) : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ le relevé admissible de $\phi(a)$ déterminé par l'isotopie engendrée par la fonction $\sum_{k=1}^{N} a_k H_k$. Un autre relevé admissible (hypothétique !!! d'après la remarque faite plus haut) serait de la forme $T \circ \widetilde{\phi}(a)$ où T est un élément du groupe fondamental de M. Notons que T appartient nécessairement au groupe fondamental de L, sinon $T \circ \widetilde{\phi}(a)$ disjoindrait $\widetilde{U}$ de lui-même. C'est impossible car $\widetilde{U}$ est de capacité infinie (ceci se déduit, par exemple, de la proposition 4.4.1). Ici, nous pensons au groupe fondamental de L comme au sous-groupe du groupe des automorphismes du revêtement $\widetilde{M} \to M$ formé des transformations T' telles que $T'(\widetilde{U}) = \widetilde{U}$.

Posons $R = \frac{l}{4}$ et $i_0 = i(I)$. Soit $\widetilde{A}_{i_0,R}$ la partie suivante de $T^*\widetilde{L}(\sqrt{3})$:

$$\{(q, p), q \in B(q_0, R), 1 + \frac{i_0 - 1}{2^N} \leq |p|_q^2 \leq 1 + \frac{i_0 - 1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}\}.$$

Si $(q,p) \in \widetilde{A}_{i_0,R}$, écrivant $\widetilde{\phi}(a)(q,p) = (q',p')$, nous avons $d_g(q,q') \geq l$. Ceci assure que $\widetilde{\phi}(a)(\widetilde{A}_{i_0,R}) \cap \widetilde{A}_{i_0,R} = \emptyset$.

Considérons maintenant un autre relevé admissible de la forme $T \circ \widetilde{\phi}(a)$ $(T \in \pi_1(L) - \{1\})$. Supposons que $T \circ \widetilde{\phi}(a)(\widetilde{A}_{i_0,R})$ rencontre $\widetilde{A}_{i_0,R}$. Il existe alors $(q,p) \in \widetilde{A}_{i_0,R}$ tel que

$$\widetilde{\phi}(a)(q,p) = (q',p') \in T^{-1}(\widetilde{A}_{i_0,R}).$$

On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} d_g(T(q_0),q_0) & \geq & d_g(T(q_0),T(q')) - d_g(T(q'),q_0) \\ & \geq & d_g(T(q_0),T(q')) - R \\ & \geq & d_g(q',q) - 2R \\ & \geq & \frac{l}{2}. \end{array}$$

Si ν et C sont des constantes strictement positives, nous noterons

$$\Lambda_{\nu,C} = \{(q,p), q \in B(q_0,C), |p|_q < \nu\}.$$

Rappelons que l'on a $H_k(q,p) = 0$ (pour tout k), dès que $|p|_q^2 < \frac{1}{2}$. Alors, si $(q,p) \in \Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}}$, $T \circ \widetilde{\phi}(a)(q,p) = T(q,p) = (q',p')$ vérifie :

$$d_g(q',q_0) \geq d_g(T(q_0),q_0) - d_g(q,q_0) \geq \frac{l}{2} - \frac{l}{8} = \frac{3l}{8}.$$

Donc $T \circ \widetilde{\phi}(a)(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}}) \cap (\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}}) = \emptyset$.

En résumé, tout relevé admissible de $\phi(a)$ disjoint d'elle-même une partie de $\widetilde{M}$ de capacité supérieure ou égale à $\min(c_G(\widetilde{A}_{i_0,R}), c_G(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}}))$. D'après la proposition 4.2.1, nous avons :

$$||\phi(a)|| \geq \frac{1}{2}\min(c_G(\widetilde{A}_{i_0,R}), c_G(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}})).$$

Pour conclure la preuve du théorème, il nous reste à obtenir une minoration, linéaire en R, des capacités de $\widetilde{A}_{i_0,R}$ et $\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}}$. La preuve de la proposition suivante m'a été suggérée par Jean-Claude Sikorav.

Proposition 4.4.1 *Il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que* $\min(c_G(\widetilde{A}_{i_0,R}), c_G(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}})) \geq \varepsilon R$.

Preuve : on commence par ramener l'estimation de la capacité de $\widetilde{A}_{i_0,R}$ à celle d'un ensemble de la forme $\Lambda_{\alpha,R} = \{(q,p), q \in B(q_0,R), |p|_q < \alpha\}$.

Soit $V : \widetilde{L} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $||dV(q)|| = \sqrt{1 + \frac{i_0-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+2}}}$ pour $q \in B(q_0,2R)$. Pour cela fixons un point $q_\infty \in \widetilde{L}$ tel que $d_g(q_0,q_\infty) \geq 10^7 \cdot R$, et prenons pour V la fonction

$$\sqrt{1 + \frac{i_0-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+2}}} d_g(\cdot, q_\infty),$$

multipliée par une fonction plateau qui s'annule au voisinage de q_∞. Notons $T_V(q,p) = (q, p - dV(q))$ $((q,p) \in T^*\widetilde{L})$. On vérifie aisément que si $q \in B(q_0, R)$ et $|p|_q < (10 \cdot 2^{N+2})^{-1}$, alors $(q, dV(q) + p) \in \widetilde{A}_{i_0,R}$. L'application T_V étant un difféomorphisme symplectique de $T^*\widetilde{L}$, on a donc

$$c(\widetilde{A}_{i_0,R}) = c(T_V(\widetilde{A}_{i_0,R})) \geq c(\Lambda_{(10 \cdot 2^{(N+2)})^{-1},R}).$$

Il nous reste maintenant à obtenir une minoration de la capacité de $\Lambda_{\alpha,R}$. L'application $G : T_{q_0}\widetilde{L} \times T^*_{q_0}\widetilde{L} \to T^*\widetilde{L}$ définie par :

$$(v \in T_{q_0}\widetilde{L}, \eta \in T^*_{q_0}\widetilde{L}) \mapsto (exp_{q_0}(v), \eta \circ (Dexp_{q_0}(v))^{-1})$$

est un difféomorphisme symplectique : c'est l'application induite entre les fibrés cotangents de $T_{q_0}\widetilde{L}$ et $\widetilde{L}$ par le difféomorphisme $exp_{q_0} : T_{q_0}\widetilde{L} \to \widetilde{L}$. Puisque la métrique g est à courbure négative ou nulle, l'application $(Dexp_{q_0}(v))^{-1} : (T_{exp_{q_0}(v)}\widetilde{L}, g_{exp_{q_0}(v)}) \to (T_{q_0}\widetilde{L}, g_{q_0})$ est de norme majorée par 1. Il en est de même pour sa transposée. On a donc

$$\{(v,\eta), |v|_{q_0} < R, |\eta|_{q_0} < \alpha\} \subset G^{-1}(\Lambda_{\alpha,R}).$$

L'application linéaire symplectique

$$(q,p) \mapsto \left(\sqrt{\frac{R}{\alpha}}q, \sqrt{\frac{\alpha}{R}}p\right)$$

envoie la boule euclidienne $B(0, \sqrt{R\alpha})$ dans $\{(v,\eta), |v|_{q_0} < R, |\eta|_{q_0} < \alpha\}$. Nous obtenons donc bien l'inégalité $c_G(\Lambda_{\alpha,R}) \geq \pi R\alpha$. Finalement :

$$\min\left(c_G(\widetilde{A}_{i_0,R}), c_G(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}})\right) \geq \min\left(\frac{\pi R}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi R}{10 \cdot 2^{N+2}}\right) \geq \frac{\pi R}{10 \cdot 2^{N+2}}.$$

□

Il serait intéressant de savoir si un résultat analogue est vrai lorsque M est la sphère $\mathbf{S}^2$. Dans ce cas, et à notre connaissance, les seules manières d'obtenir des bornes inférieures arbitrairement grandes sur la distance de Hofer proviennent de [36, 101]. Leonid Polterovich m'a indiqué que, dans le cas où M est le disque $\mathbf{D}^2$, les résultats de [36] permettent de prouver un résultat analogue au théorème 8.

Une approche (naïve) de ce problème serait la suivante. Comme cela a été fait dans [52] par Gambaudo et Ghys pour construire des quasi-morphismes, nous pouvons considérer les espaces de configurations $X_n(\mathbf{S}^2)$. Pour $n \geq 4$ ces espaces ont un groupe fondamental infini. De plus, chaque isotopie hamiltonienne de $\mathbf{S}^2$ induit une isotopie hamiltonienne (à support non-compact) de la variété symplectique $X_n(\mathbf{S}^2) \subset (\mathbf{S}^2)^n$. Se pose alors la question suivante :

le revêtement universel de $X_n(\mathbf{S}^2)$ $(n \geq 4)$ a-t-il une capacité de Gromov infinie ?

Si la réponse était positive, il serait peut-être possible d'obtenir de nouvelles bornes inférieures sur la distance de Hofer en considérant certains flots autonomes sur $\mathbf{S}^2$, en les faisant agir sur les espaces $X_n(\mathbf{S}^2)$ $(n \geq 4)$ et en utilisant l'inégalité entre énergie et capacité dans le revêtement universel de $X_n(\mathbf{S}^2)$.

Bibliographie

[1] J.F. Aarnes, *Quasi-states and quasi-measures*, Adv. Math. **86**, No. 1 (1991), 41–67.

[2] V.I. Arnold, *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Funct. Anal. Appl. **1**, (1967), 1–14.

[3] V.I. Arnold, *The asymptotic Hopf invariant and its applications*, Sel. Math. Sov. **5**, No. 4 (1986), 327–345.

[4] V.I. Arnold et B.A. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics*, Applied Mathematical Sciences 125, Springer-Verlag, New York, (1998).

[5] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comment. Math. Helv. **53**, No. 2 (1978), 174–227.

[6] A. Banyaga, *The group of diffeomorphisms preserving a regular contact form*, Topology and algebra (Proc. Colloq., Eidgenöss. Tech. Hochsch., Zurich, 1977), 47–53, Monograph. Enseign. Math. **26**, Univ. Genève (1978).

[7] A. Banyaga, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its applications **400**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[8] C. Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) **37**, No. 1-2 (1991), 109–150.

[9] J. Barge et É. Ghys, *Surfaces et cohomologie bornée*, Invent. Math. **92**, No. 3 (1988), 509–526.

[10] J. Barge et É. Ghys, *Cocycles d'Euler et de Maslov*, Math. Ann. **294**, No. 2 (1992), 235–265.

[11] M. Benaim et J.-M. Gambaudo, *Metric properties of the group of area preserving diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **353**, No. 11 (2001), 4661–4672.

[12] G. Ben Simon, *The Nonlinear Maslov index and the Calabi homomorphism*, (2006), prépublication.

[13] G. Besson, *Séminaire sur la cohomologie bornée*, ENS Lyon (1988).

[14] M. Bestvina et K. Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups*, Geom. Topol. **6**, (2002), 69–89.

[15] M. Bialy et L. Polterovich, *Geodesics of Hofer's metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*, Duke Math. J. **76**, No. 1 (1994), 273–292.

[16] P. Biran, M. Entov et L. Polterovich, *Calabi quasimorphisms for the symplectic ball*, Commun. Contemp. Math. **6**, No. 5 (2004), 793-802.

[17] C. Boissy-Gentric, *Quasi-morphismes sur un groupe de difféomorphismes*, Mémoire de DEA, École Normale Supérieure de Lyon (2004).

[18] W.M. Boothby et H.C. Wang, *On contact manifolds*, Ann. of Maths (2) **68**, (1958), 721–734.

[19] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.

[20] P. Boyland, *Topological methods in surface dynamics*, Topology Appl. **58**, No. 3 (1994), 223-298.

[21] R. Brooks, *Some remarks on bounded cohomology*, Riemann Surfaces and Related Topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), 53–63, Ann. of Math. Stud. **97**, Princeton University Press, New Jersey, (1981).

[22] R. Brooks et C. Series, *Bounded cohomology for surface groups*, Topology **23**, No. 1 (1984), 29–36.

[23] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Corrected reprint of the 1982 original, Graduate Texts in Mathematics **87**, Springer-Verlag, New York (1994).

[24] M. Burger et N. Monod, *Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1**, No. 2 (1999), 199–235.

[25] M. Burger et N. Monod, *Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory*, Geom. Funct. Anal. **12**, No. 2 (2002), 219–280.

[26] E. Calabi, *On the group of automorphisms of a symplectic manifold*, Problems in Analysis (Lectures at the Sympos. in honour of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969), 1–26, Princeton University Press, (1970).

[27] Yu.V. Chekanov, *Lagrangian intersections, symplectic energy, and areas of holomorphic curves*, Duke Math. J. **95**, No. 1 (1998), 213–226.

[28] J. Crisp et B. Wiest, *Quasi-isometrically embedded subgroups of braid and diffeomorphism groups*, Trans. Amer. Math. Soc., à paraître.

[29] C. Delaroche et A. Kirillov, *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés (d'après D. A. Kazhdan)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 10, Exp. No. 343, Soc. Math. de France, Paris (1995), 507–528.

[30] P. Delorme, 1-*cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations.*, Bull. Soc. Math. France **105**, No. 3 (1977), 281–336.

[31] J. Dieudonné, *Sur les groupes classiques*, Paris, Hermann (1967).

[32] A. Domic et D. Toledo, *The Gromov norm and the Kaehler class of symmetric domains*, Math. Ann. **276**, No. 3 (1987), 425–432.

[33] J.L. Dupont, *Bounds for the characteristic numbers of flat bundles*, Algebraic Topology, Aarhus 1978 (Proc. Sympos., Univ. Aarhus, Aarhus, 1978), 109–119, Lect. Notes in Math. **763**, Springer, Berlin, (1979).

[34] C.J. Earle et J. Eells, *A fibre bundle description of Teichmüller theory*, J. Diff. Geometry **3**, 19–43, (1969).

[35] M. Entov, *Commutator length of symplectomorphisms*, Comment. Math. Helv. **79**, No. 1 (2004), 58–104.

[36] M. Entov et L. Polterovich, *Calabi quasimorphism and quantum homology*, Int. Math. Res. Not., No. 30 (2003), 1635–1676.

[37] M. Entov et L. Polterovich, *Quasi-states and symplectic intersections*, Comment. Math. Helv. **81**, No. 1 (2006), 75–99.

[38] M. Entov et L. Polterovich, *Symplectic quasi-states and semi-simplicity of quantum homology*, prépublication, (2007).

[39] D. Epstein et K. Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36**, No. 6 (1997), 1275–1289.

[40] B. Farb et H. Masur, *Superrigidity and mapping class groups*, Topology **37**, No. 6 (1998), 1169-1176.

[41] B. Farb et P. Shalen, *Real-analytic actions of lattices*, Invent. Math. **135**, No. 2 (1999), 273–296.

[42] A. Fathi, *Transformations et homéomorphismes préservant la mesure. Systèmes dynamiques minimaux*, Thèse, Orsay, (1980).

[43] A. Floer, *Proof of the Arnold conjecture and generalizations to certain Kähler manifolds*, Duke Math. J. **53**, No. 1 (1986), 1–32.

[44] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120**, No. 4 (1989), 575-611.

[45] J. Franks, *Rotation vectors for surface diffeomorphisms*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol.1, 2, (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel (1995), 1179-1186.

[46] J. Franks, *Rotation vectors and fixed points of area preserving surface diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**, No. 7 (1996), 2637–2662.

[47] J. Franks et M. Handel, *Area preserving group actions on surfaces*, Geom. Topol. **7**, (2003), 757–771.

[48] J. Franks et M. Handel, *Distortion elements in group actions on surfaces*, Duke Math. J. **131**, No. 3 (2006), 441-468.

[49] U. Frauenfelder, V. Ginzburg et F. Schlenk, *Energy capacity inequalities via an action selector*, Geometry, spectral theory, groups and dynamics, 129–152, Contemp. Math. **387**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).

[50] K. Fukaya et K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants*, Topology **38**, No. 5 (1999), 933–1048.

[51] J.-M. Gambaudo et É. Ghys, *Enlacements asymptotiques*, Topology **36**, No. 6 (1997), 1355–1379.

[52] J.-M. Gambaudo et É. Ghys, *Commutators and diffeomorphisms of surfaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems **24**, No. 5 (2004), 1591-1617.

[53] J.-M. Gambaudo et É. Ghys, *Braids and signatures*, Bull. Soc. Math. France **133**, No. 4 (2005), 541–579.

[54] É. Ghys, *Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée*, The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984), 81–106, Contemp. Math. **58**, III, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987).

[55] É. Ghys, *Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **24**, No. 2 (1993), 137–178.

[56] É. Ghys, *Actions de réseaux sur le cercle*, Invent. Math. **137**, No. 1 (1999), 199–231.

[57] É. Ghys, *Groups acting on the circle*, Enseign. Math. (2) **47**, No. 3-4 (2001), 329–407.

[58] É. Ghys, *Knots and Dynamics*, International Congress of Mathematicians, Eur. Math. Soc., Zürich (2006).

[59] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Reprint of the 1978 original, Wiley Classics Library, John Wiley and Sons, Inc., New York (1994).

[60] M. Gromov, *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, Riemann Surfaces and Related Topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), 183–213, Ann. of Math. Stud. **97**, Princeton University Press, New Jersey, (1981).

[61] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **56**, (1983), 5–99.

[62] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82**, No. 2 (1985), 307–347.

[63] M. Gromov, *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group*, Enseign. Math. (2) **46**, No. 3-4 (2000), 391–402.

[64] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Textes Mathématiques **2**, CEDIC, Paris (1980).

[65] A. Guichardet, *Sur la cohomologie des groupes topologiques II*, Bull. Sci. Math. France (2) **96** (1972), 305–332.

[66] A. Guichardet et D. Wigner, *Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11**, No. 2 (1978), 277–292.

[67] P. de la Harpe et A. Valette, *La propriété* (T) *de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger)*, Astérisque No. 175 (1989).

[68] H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115**, No. 1-2 (1990), 25–38.

[69] H. Hofer, *Estimates for the energy of a symplectic map*, Comment. Math. Helv. **68**, No. 1 (1993), 48–72.

[70] H. Hofer et D. Salamon, *Floer homology and Novikov rings*, The Floer memorial volume, Progr. Math. **133**, Birkhäuser, Basel (1995), 483–524.

[71] H. Hofer et E. Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks, Birkhäuser Verlag, Basel, (1994).

[72] V. Kaimanovich et H. Masur, *The Poisson boundary of the mapping class group*, Ivent. Math. **125**, No. 2 (1996), 221–264.

[73] A. Katok, *Bernoulli diffeomorphisms on surfaces*, Ann. of Math. (2) **110**, No. 3 (1979), 529–547.

[74] D. A. Kazhdan, *On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funkcional. Anal. i Prilozhen **1** (1967), 71–74.

[75] J.F.C. Kingman, *Subadditive processes*, École d'été de Probabilités de Saint-Flour, V 1975, Lecture Notes in Math. **539**, (1976), Springer, Berlin, 167–223.

[76] F.F. Knudsen, *New topological measures on the torus*, Fund. Math. **185**, No. 3 (2005), 287–293.

[77] F. Lalonde et D. McDuff, *The geometry of symplectic energy*, Ann. of Math. (2) **141**, No. 2 (1995), 349–371.

[78] F. Lalonde et D. McDuff, *Hofer's L^∞-geometry : energy and stability of Hamiltonian flows. II*, Invent. Math. **122**, No. 1 (1995), 35–69.

[79] F. Lalonde et L. Polterovich, *Symplectic diffeomorphisms as isometries of Hofer's norm*, Topology **36**, No. 3 (1997), 711-727.

[80] F. Laudenbach, *Symplectic geometry and Floer homology*, Ensaios Mat. **7**, Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro (2004), 1–50.

[81] P. Le Calvez, *Identity isotopies on surfaces*, Dynamique des difféomorphismes conservatifs des surfaces : un point de vue topologique, Panor. Synthèse **21**, Soc. Math. France, Paris (2006), 105–143.

[82] G. Liu et G. Tian, *Floer homology and Arnold conjecture*, J. Differential Geom. **49**, No. 1 (1998), 1–74.

[83] A. Lubotzky, S. Mozes et M. S. Raghunathan, *The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 91 (2000), 5–53.

[84] G.A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[85] S. Matsumoto et S. Morita, *Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **94**, No. 3 (1985), 539–544.

[86] D. McDuff et D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Second edition, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1998).

[87] J. Milnor, *On the existence of a connection with curvature zero*, Comment. Math. Helv. **32** (1958), 215–223.

[88] N. Monod, *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*, Lecture Notes in Mathematics **1758**, Springer-Verlag, Berlin, (2001).

[89] N. Monod et Y. Shalom, *Cocycle superrigidity and bounded cohomology for negatively curved spaces*, J. Differential Geom. **67**, No. 3 (2004), 395–455.

[90] J. Moser, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 286–294.

[91] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita, Birkhäuser, Boston (1996).

[92] A. Navas, *Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35**, No. 5 (2002), 749–758.

[93] A. Navas, *Grupos de difeomorfismos del circulo*, (2006).

[94] Y.-G. Oh, *Gromov-Floer theory and disjunction energy of compact Lagrangian embeddings*, Math. Res. Lett. **4**, No. 6 (1997), 895–905.

[95] Y.-G. Oh, *Spectral invariants, analysis of the Floer moduli space, and geometry of the Hamiltonian diffeomorphisms group*, Duke Math. J. **130**, No. 2 (2005), 199–295.

[96] V. I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem, Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Moscow Math. Soc. **19**, (1968), 197–231.

[97] Y. Ostrover, *Calabi quasi-morphisms for some non-monotone symplectic manifolds*, Algebr. Geom. Topol. **6**, (2006), 405–434.

[98] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2, Cambridge University Press, Cambridge (1983).

[99] L. Polterovich, *Symplectic displacement energy for Lagrangian submanifolds*, Ergodic Theory Dynam. Systems **13**, No. 2 (1993), 357-367.

[100] L. Polterovich, *Hamiltonian loops and Arnold's principle*, Topics in singularity theory, 181–187, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **180**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997).

[101] L. Polterovich, *Hofer's diameter and Lagrangian intersections*, Internat. Math. Res. Notices, No. 4 (1998), 217–223.

[102] L. Polterovich, *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, (2001).

[103] L. Polterovich, *Growth of maps, distortion in groups and symplectic geometry*, Invent. Math. **150**, No. 3 (2002), 655–686.

[104] L. Polterovich, *Floer homology, dynamics and groups*, Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. **217**, Springer, Dordrecht (2006), 417–438.

[105] J. Rebelo, *On nilpotent groups of real analytic diffeomorphisms of the torus*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331**, No. 4 (2000), 317–322.

[106] G. Reeb, *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique*, C. R. Acad. Sci. Paris **222**, (1946), 847–849.

[107] M. Rosenberg, *Py-Calabi quasi-morphisms and quasi-states on orientable surfaces of higher genus*, MSc thesis, Tel-Aviv University, (2007), arXiv :0706.0028.

[108] D. Ruelle, *Rotation numbers for diffeomorphisms and flows*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **42**, No. 1 (1985), (109–115).

[109] M. Schwarz, *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds*, Pacific J. Math. **193**, No. 2 (2000), 419-461.

[110] S. Schwartzman, *Asymptotic cycles*, Ann. of Maths (2) **66**, (1957), 270–284.

[111] S. Smale, *Diffeomorphisms of the* 2*-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621–626.

[112] D. Sullivan, *A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations and affine manifolds*, Comment. Math. Helv. **51**, No. 2 (1976), 183–189.

[113] W. Thurston, *Geometry and topology of* 3*-manifolds*, Lecture notes, Princeton (1978).

[114] A. Valette, *Nouvelles approches de la propriété (T) de Kazhdan*, Astérisque No. **294** (2004), 97–124.

[115] C. Viterbo, *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Math. Ann. **292**, No. 4 (1992), 685-710.

[116] D. Witte, *Arithmetic groups of higher* $\mathbf{Q}$*-rank cannot act on* 1*-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **122**, No. 2 (1994), 333-340.

[117] J. Wood, *Bundles with totally disconnected structure group*, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 257-273.

[118] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics **81**, Birkhäuser Verlag, Basel, (1984).

[119] R. J. Zimmer, *Kazhdan groups acting on compact manifolds*, Invent. Math. **75**, No. 3 (1984), 425–436.

[120] R. J. Zimmer, *Actions of semisimple groups and discrete subgroups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 1247–1258, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987).

[121] R. J. Zimmer, *Spectrum, entropy, and geometric structures for smooth actions of Kazhdan groups*, Israel J. Math. **75**, No. 1 (1991), 65–80.

Résumé. Dans ce travail, nous étudions différents invariants de nature algébrique et dynamique définis sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface fermée orientée. Occasionnellement, nous considérerons également le groupe des difféomorphismes hamiltoniens de certaines variétés symplectiques de dimension supérieure. Ces invariants peuvent être vus comme des généralisations du nombre de rotation de Poincaré, et des vecteurs de rotations associés aux difféomorphismes des surfaces. D'autre part, tous ces invariants sont reliés à la théorie de la cohomologie bornée.

Dans le premier chapitre nous construisons des quasi-morphismes sur le groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une surface de genre strictement positif, qui sont des homomorphismes en restriction au sous-groupe des difféomorphismes à support dans un ouvert difféomorphe à un disque. Ces constructions sont motivées par une question de Entov et Polterovich. Dans le second chapitre nous construisons un quasi-morphisme défini sur le revêtement universel du groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique monotone.

Le troisième chapitre contient quelques résultats concernant les actions préservant l'aire sur les surfaces de réseaux dans les groupes de Lie semi-simples. Dans l'esprit du "programme de Zimmer", nous montrons comment l'existence de nombreux quasi-morphismes, combinées avec des théorèmes d'annulation en cohomologie bornée, pourrait être utile pour exclure l'existence d'actions de réseaux de rang supérieur. Le dernier chapitre contient quelques remarques autour de la distance de Hofer.

Mots clés. Quasi-morphisme, cohomologie bornée, variété symplectique, difféomorphisme hamiltonien, réseau de rang supérieur.

Abstract. In this work, we study various invariants of algebraic and dynamical nature, defined on the group of Hamiltonian diffeomorphisms of a closed oriented surface. Occasionally we will also consider the group of Hamiltonian diffeomorphisms of certain symplectic manifolds of higher dimension. These invariants are constructed in the spirit of the classical Poincaré rotation number, or of the rotation vectors associated to diffeomorphisms of surfaces. Moreover all these invariants are related to the theory of bounded cohomology.

In the first chapter, we construct homogeneous quasi-morphisms on the group of Hamiltonian diffeomorphisms of a closed oriented surface of positive genus, which are homomorphisms when restricted to the subgroup of Hamiltonian diffeomorphisms supported in any open set diffeomorphic to a disc. These constructions are motivated by a question of Entov and Polterovich. In the second chapter, we construct a quasi-morphism on the universal cover of the group of Hamiltonian diffeomorphisms of a monotone symplectic manifold.

The third chapter contains some results concerning area preserving actions on surfaces of lattices in semisimple groups. In the spirit of the "Zimmer program" we show how the existence of many quasi-morphisms, combined with some vanishing result in bounded cohomology, might be useful to exclude the existence of actions of higher rank lattices. The last chapter contains some remarks around Hofer's metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms.