HAL
open science

Exposants de Lyapounov et Densité d'Etats Intégrée pour des opérateurs de Schrödinger continus à valeurs matricielles.

Hakim Boumaza

To cite this version:

Hakim Boumaza. Exposants de Lyapounov et Densité d'Etats Intégrée pour des opérateurs de Schrödinger continus à valeurs matricielles.. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2007. Français. NNT : . tel-00264341

HAL Id: tel-00264341

https://theses.hal.science/tel-00264341

Submitted on 16 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Exposants de Lyapounov et Densité d'États Intégrée pour des opérateurs de Schrödinger continus à valeurs matricielles

-

Lyapunov exponents and Integrated Density of States for matrix-valued continuous Schrödinger operators

Hakim Boumaza

Table des matières

1 Introduction et motivations **7**
1.1 Version française 7
1.2 English version 14

2 Rappels : Matrices aléatoires dans le groupe symplectique **21**
2.1 Le groupe symplectique réel 22
2.1.1 Définition et premières propriétés 22
2.1.2 Puissances extérieures 23
2.2 Suites de matrices symplectiques aléatoires 25
2.2.1 Le sous-groupe de Fürstenberg d'une suite de matrices symplectiques aléatoires 26
2.2.2 p-contractivité et L_p-irréductibilité forte 27
2.3 Séparation des exposants de Lyapounov 29
2.3.1 Exposants de Lyapounov 29
2.3.2 Critère de séparation des exposants de Lyapounov 30
2.3.3 Théorie de Kotani 33

3 Rappels : Sous-groupes denses des groupes de Lie **37**
3.1 Critère de Gol'dsheid et Margulis 38
3.1.1 Adhérence de Zariski 38
3.1.2 Sous-groupes Zariski-denses de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ 39
3.2 Engendrer des sous-groupes de Lie denses 41

4 Positivité des exposants de Lyapounov pour un modèle d'interactions ponctuelles **45**
4.1 Un modèle d'interactions ponctuelles 46
4.2 Le cas $N = 2$ 48
4.2.1 Le résultat principal 48
4.2.2 Preuve du théorème 4.2.1 pour les énergies $E > 1$ 50
4.2.3 Preuve pour les cas $-1 < E < 1$ et $E < -1$ 55
4.3 Le cas $N = 3$ 58
4.3.1 Le résultat principal 58
4.3.2 Preuve du théorème 4.3.1 pour les énergies $E > \sqrt{2}$ 59
4.3.3 Preuve pour les énergies $E < \sqrt{2}$ 64
4.3.4 Remarques finales 65

5 Positivité des exposants de Lyapounov pour un modèle d'Anderson matriciel **69**
5.1 Un modèle d'Anderson-Bernoulli 71
5.2 Etude dans le cas $N = 2$: une première approche 73
5.2.1 Préliminaires 73
5.2.2 Preuve du théorème 5.2.1 74
5.3 Étude dans le cas $N = 2$: une seconde approche 80
5.3.1 Construction d'éléments de $G_{\tilde{\mu}_E}$ dans $\mathcal{O}$ 81
5.3.2 Calcul du logarithme de $(A^{\omega}_{0,2}(E))^{m_\omega(E)}$ 83
5.3.3 L'algèbre de Lie $\mathfrak{la}_2(E)$ 86
5.3.4 Fin de la preuve du théorème 5.3.1 98
5.4 Pistes pour l'étude du cas général 98

6 Hölder-continuité des exposants de Lyapounov **103**
6.1 Action de groupe sur les espaces compacts 104
6.1.1 Mesures invariantes 104
6.1.2 Cocycles 106
6.1.3 Les opérateurs de Laplace sur les espaces de Hölder 108
6.2 Estimations *a priori* pour nos modèles 113
6.2.1 Estimations générales 114
6.2.2 Estimations de la norme des matrices de transfert 115
6.3 Régularité des exposants de Lyapounov 120
6.3.1 Continuité des exposants de Lyapounov 120
6.3.2 Sous-harmonicité des sommes d'exposants de Lyapounov 125
6.3.3 Hölder-continuité des exposants de Lyapounov 127

7 Hölder-continuité de la Densité d'États Intégrée **137**
7.1 Méthode de suspension 138
7.2 Densité d'États Intégrée : définition et existence 140
7.2.1 Une formule de Feynman-Kac à valeurs matricielles 141
7.2.2 Existence de la Densité d'États Intégrée 143
7.3 Une formule de Thouless 150
7.3.1 Fonctions $\mathfrak{m}$ de Weyl-Titchmarsh dans le cadre continu et matriciel 150
7.3.2 Noyau de Green de la résolvante de $H_*(\omega)$ 154
7.3.3 Fonction w de Kotani 157
7.3.4 Preuve d'une formule de Thouless 162
7.4 Hölder-continuité de la Densité d'États Intégrée 166
7.4.1 La transformée de Hilbert 167
7.4.2 Hölder-continuité locale de la Densité d'États Intégrée 168

Une traversée en solitaire ?

Nombreuses sont les personnes qui perçoivent le chercheur en mathématiques comme un individu pouvant passer des heures enfermé dons son monde à manipuler des idées parfois obscures, ou encore à se poser des problèmes étonnants comme chercher à faire sauter des électrons à la corde... La tentation est alors grande de s'isoler dans cet univers. Je dois en grande partie à ma directrice de thèse, Anne Boutet de Monvel, de m'avoir aidé à éviter cet écueil. Elle ne s'est pas seulement contentée de me former à de très belles mathématiques, mais elle aura su aussi m'introduire dans un cercle international de chercheurs et me faire comprendre que la recherche est avant tout une aventure humaine. Pour cela et pour son soutien indéfectible durant ces dernières années, je la remercie sincèrement. Cette aventure est faite de rencontres nombreuses et essentielles. Au premier rang de celles-ci, se place ma rencontre avec Günter Stolz tout d'abord à Paris dans l'équipe « Physique mathématique et Géométrie », puis chez lui à l'Université de Birmingham en Alabama où il m'a chaleureusement accueilli à deux reprises. Il a su me faire profiter non seulement de son talent de chercheur, mais aussi et surtout il a su m'encourager à des moments clés. Je suis fier de pouvoir le compter parmi mes amis. Je ne veux pas oublier non plus de remercier Jean-Jacques Sansuc qui aura été omniprésent durant la rédaction de cette thèse et dont les précieux conseils et la gentillesse m'ont tant aidé.

Anne aura aussi su me guider vers plusieurs autres chercheurs qui ont accepté de prendre du temps pour répondre à mes nombreuses questions. Parmi ceux-ci, je citerai Artur Avila, Emmanuel Breuillard, Jean-Yves Charbonnel, Håkan Eliasson, Elisha Falbel, Raphaël Krikorian, Pierre Lochak, Anne Moreau, Ivan Veselić, et d'autres encore. Certains d'entre eux, Hakan Eliasson et Raphaël Krikorian, me font même l'honneur d'être dans mon jury de thèse auquels s'ajoutent Frédéric Klopp et Peter Stollmann, mes deux rapporteurs, ainsi que Tien-Cuong Dinh, François Germinet, Alexei Khorunzhy et Lech Zielinski. Je veux encore remercier Yoshiaki Maeda qui m'a permis de découvrir le Japon et Giuseppe Dito que j'y ai rencontré.

J'ai par ailleurs eu la chance de côtoyer depuis longtemps des personnes formidables qui auront su très tôt me donner le goût de la recherche. Je tiens à citer là mon ami et ancien professeur, Jean-Pierre Marco qui a eu une grande influence sur ma façon d'aborder les mathématiques et qui m'a poussé à me lancer dans cette grande aventure.

Comme une traversée en solitaire ne se fait pas sans une bonne équipe, elle ne se fait pas non plus sans ceux qui sont restés à terre et qui vous soutiennent. Parmi mes plus anciens soutiens, il y a bien sûr ma famille. Mes parents tout d'abord qui m'ont toujours poussé à me dépasser et qui n'ont jamais douté du succès de mon entreprise. Ma Maman en particulier pour avoir pris le temps d'écouter mes histoires durant de longues soirées

et pour avoir même relu ma thèse sans pourtant rien y comprendre . . . Mon Papa aussi, pour m'avoir transmis sa force de caractère et son sens des responsabilités. Mes sœurs ensuite, Magali pour m'avoir montré la voie de la recherche et évité ainsi bien des embûches dans ce monde hostile, Corinne pour m'avoir tant de fois accueilli et permis de me ressourcer en famille avec Sébastien et leurs petits bouts, Amélie et Jérémie.

Nombre de mes amis m'ont eux aussi soutenu depuis toutes ces années, parmi lesquels Valentin et Marie, Vincent et Cécile, Benoît et Sophie, Jérôme, Joseph, Catherine, David, Julien, Céline, Bertrand, Sébastien, Olivier, Aurélien, Hervé, Anne et encore Jérémie et Sophie, Touti et Lily, Arnaud, Jean, Stéphane, Sébastien, Antoine, Alexis, Cécile, Pierre, Amadeo et tous les autres que j'oublie mais qui, je l'espère, ne m'en tiendront pas rigueur.

Parmi tous mes amis qui m'ont soutenu l'un occupe une place particulière. Mon vieil ami Florent Schaffhauser qui non content d'avoir été mon coloc pendant les deux premières années de ma thèse, aura continué à distance, depuis Tokyo, d'être toujours mon interlocuteur « mathématique » favori. Il aura aussi contribué à me changer les idées en m'envoyant des vidéos, autrefois de punk et de vallenato, aujourd'hui de chanteuses japonaises romantiques. Sans toi Florent, c'est sûr j'y travaillerais encore à cette thèse et je ne serais pas sur le point de te rejoindre au Japon.

Les plus attentifs auront remarqué qu'il manque encore une personne dans ces remerciements. C'est que je veux laisser à Béatrice, qui partage ma vie depuis trois ans déjà, la place d'honneur. Tu m'as accompagné tout au long de ces années, présente dans les meilleurs moments, me soutenant dans les plus durs. Je suis heureux de pouvoir aujourd'hui construire mon avenir à tes côtés et j'ai conscience que je t'ai demandé bien des sacrifices et que je t'en demande encore. Mais tu m'as toujours poussé à continuer et pour cela je ne te remercierai jamais assez.

Enfin, je me rappelle que parfois certains ne reviennent pas de leur traversée... Je veux dédier toutes les heures passées à réaliser cette thèse à la mémoire de mon ami Stève Bouttier qui nous a quittés il y a maintenant plus de deux ans. Tu m'as influencé plus que tu ne l'imaginais, tu as énormément compté dans ma vie et aujourd'hui tu me manques tellement mon ami...

Chapitre 1

Introduction et motivations

Sommaire

1.1 Version française **7**

1.2 English version **14**

1.1 Version française

Le but de cette thèse est d'étudier les propriétés dynamiques et spectrales des opérateurs de Schrödinger *aléatoires continus à valeurs matricielles*. Plus précisément nous allons nous intéresser aux exposants de Lyapounov et à la densité d'états intégrée de deux opérateurs de Schrödinger : le premier sera un modèle dit d'*interactions ponctuelles*, le second un modèle de type Anderson.

Définissons le premier opérateur que nous allons étudier : soit $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \ldots, \omega_N^{(n)})$, $n \in \mathbb{Z}$, une suite i.i.d. de variables aléatoires sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et de distribution commune ν sur $\mathbb{R}^N$. On suppose de plus que le support de ν, $\operatorname{supp}\nu \subset \mathbb{R}^N$, est borné et est générateur au sens où le sous-ensemble $\{x - y \mid x, y \in \operatorname{supp}\nu\}$ engendre $\mathbb{R}^N$ comme espace vectoriel. On définit ensuite pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, l'opérateur H_{ω_i} agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de domaine :

$$\begin{aligned} D(H_{\omega_i}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f, f' \text{ sont absolument continues sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ f'' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R},\ f'(n^+) = f'(n^-) + \omega_i^{(n)} f(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

Sur ce domaine, l'opérateur agit par $H_{\omega_i} f = -f''$. Enfin, on définit l'opérateur :

$$H_P(\omega) = \bigoplus_{i=1}^{N} H_{\omega_i} + V_0 \tag{1.1}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ où V_0 désigne l'opérateur de mul-

tiplication par la matrice à coefficients constants :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un exemple de distribution ν des variables aléatoires $\omega^{(n)}$ est celui où les composantes $\omega_1^{(n)}, \dots \omega_N^{(n)}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et dont le support contient au moins 2 points (par exemple 0 et 1 si ce sont des variables de Bernoulli).

Le second opérateur étudié est un modèle d'Anderson :

$$H_B(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)}\chi_{[0,1]}(x-n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^{(n)}\chi_{[0,1]}(x-n) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. Dans cet opérateur, $\chi_{[0,1]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$, V_0 est le même opérateur de multiplication que ci-dessus. Les $(\omega_i^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$ sont des suites, indépendantes les unes des autres, de variables aléatoires i.i.d. sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$. On note $\tilde{\nu}$ leur loi commune dont le support $\operatorname{supp}\tilde{\nu}$ contient $\{0,1\}$.

À ces deux opérateurs on associe les systèmes différentiels :

$$H_P(\omega)u = Eu,\ H_B(\omega)u = Eu,\ E \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

On s'intéresse au comportement asymptotique des solutions $u \in \mathbb{C}^N$ de (1.3). On peut rencontrer alors principalement deux cas :

1. Ces solutions ne décroissent pas exponentiellement vers 0 à l'infini : on parle alors de « diffusion ».
2. Ces solutions décroissent exponentiellement vers 0 à l'infini : sous certaines hypothèses supplémentaires on parlera alors de « localisation d'Anderson ».

Plus précisément on parle de localisation d'Anderson lorsque l'opérateur étudié n'a que du spectre purement ponctuel et que les fonctions propres généralisées associées à ces valeurs spectrales (solutions non triviales de (1.3)) décroissent exponentiellement vers 0 à l'infini. Ce phénomène de localisation est bien compris pour les modèles d'Anderson unidimensionnels ([DSS02a, CKM87, KLS90]). En revanche son étude en dimension supérieure reste incomplète. Par exemple, bien qu'une preuve de la localisation au bord du bas du spectre pour un modèle d'Anderson–Bernoulli existe en dimension quelconque (voir [BK05]), ce résultat ne nous dit pas s'il y a, ou non, localisation pour les autres énergies du spectre. Ainsi, même en dimension 2, il n'existe pas de preuve de

la localisation à toutes les énergies et pour tous les types d'aléa et ce, bien que les physiciens en aient fait la conjecture.

L'absence de diffusion est, comme nous venons de le voir, une condition nécessaire à la localisation. Pour notre part, nous allons démontrer qu'il y a absence de diffusion pour les opérateurs $H_P(\omega)$ et $H_B(\omega)$ définis en (1.1) et (1.2). Pour cela, nous faisons le lien avec la théorie spectrale, en utilisant le théorème R.A.G.E. (voir [Ens78, Ens79, AG73]). Il s'agit alors de prouver que les opérateurs étudiés n'ont pas de spectre absolument continu. Comme $H_P(\omega)$ et $H_B(\omega)$ sont des opérateurs unidimensionnels, nous pouvons utiliser la théorie de Kotani (voir [KS88]) qui caractérise le spectre absolument continu en termes dynamiques. En effet, dans le cadre des opérateurs unidimensionnels, le spectre absolument continu est exactement le support essentiel de l'ensemble des énergies pour lesquelles les exposants de Lyapounov s'annulent. La théorie de Kotani établit donc un lien profond entre un objet spectral, le spectre absolument continu, et des objets dynamiques, les exposants de Lyapounov.

La définition ainsi que les premières propriétés des exposants de Lyapounov sont présentées dans le chapitre 2 de cette thèse. Ce chapitre de rappels contient également un premier critère de séparation, donc aussi de non-annulation, des exposants de Lyapounov ainsi qu'une présentation rapide de la théorie de Kotani. Nous y présentons également le formalisme des matrices de transfert et nous introduisons le sous-groupe de Fürstenberg associé à une suite de matrices de transfert. Pour savoir si une solution u de (1.3) décroît ou non exponentiellement vers 0 à l'infini il suffit de regarder le comportement asymptotique de la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Il nous faut donc comprendre comment on peut obtenir $u(n+1)$ en connaissant $u(n)$, pour tout entier n. Cela conduit à introduire la matrice de transfert $A_n^\omega(E)$ définie par la relation :

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u'(n+1) \end{pmatrix} = A_n^\omega(E) \begin{pmatrix} u(n) \\ u'(n) \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} u(n) \\ u'(n) \end{pmatrix} = (A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E)) \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$$

et l'étude du comportement asymptotique de u se ramène à l'étude du comportement asymptotique du produit de matrices aléatoires $A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E)$. Comme on veut comprendre le comportement asymptotique exponentiel d'un tel produit on est amené à définir les exposants de Lyapounov par :

$$\gamma_1(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log ||A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E)||)$$

et, pour $p = 1, \dots, 2N$:

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log || \wedge^p (A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E))||)$$

Pour étudier ces limites, nous introduisons alors un objet algébrique qui contient tous les produits de matrices de transfert, le sous-groupe de Fürstenberg :

$$G(E) = \overline{\langle A_0^\omega(E) \mid A_0^\omega(E) \in \operatorname{supp} \mu \rangle}$$

où μ est la mesure définie sur les boréliens Γ du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ par :

$$\mu(\Gamma) = \nu^{\otimes N}(\{\omega \in \{0,1\}^N \mid A_0^\omega(E) \in \Gamma\}) \tag{1.4}$$

Le critère de séparation des exposants de Lyapounov que nous présentons au chapitre 2 s'exprime sur ce groupe $G(E)$ (voir corollaire 2.3.8). Ce critère étant difficile à appliquer dans les cas concrets qui nous intéressent, l'idée est d'utiliser un critère dû à Gol'dsheid et Margulis ([GM89]) qui nous permet de ramener l'étude de la séparation des exposants de Lyapounov et donc l'absence de diffusion, à une reconstruction algébrique de l'adhérence de Zariski du groupe $G(E)$:

Si $G(E)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, alors $\gamma_1(E) > \ldots > \gamma_N(E) > 0$.

Nous présentons ce résultat dans le chapitre 3 qui est également un chapitre de rappels.

Aux chapitres 4 et 5 nous prouvons l'absence de diffusion dans les cas $N = 2, 3$, pour le modèle (1.1) et dans le cas $N = 2$, pour le modèle (1.2). Donnons les énoncés précis des théorèmes prouvés dans ces chapitres :

Théorème 1. *Dans le modèle (1.1) on fixe $N = 2$ ou 3. Il existe alors deux sous-ensembles discrets de $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{S}_{P,2}$ et $\mathcal{S}_{P,3}$, tels que :*

$$\begin{aligned} &\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,2}, \quad \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0, && \textit{si } N = 2, \\ &\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,3}, \quad \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > \gamma_3(E) > 0, && \textit{si } N = 3. \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur $H_P(\omega)$ n'a pas de spectre absolument continu.

Ce théorème rassemble les théorèmes 4.2.1 et 4.3.1 du chapitre 4. Dans le cas où $N = 3$, nous montrons de plus à la section 4.3.4 du chapitre 4 que l'on peut affaiblir l'aléa de la définition du modèle (1.1) et se retrouver face à un phénomène de propagation de l'aléatoire comme dans les travaux de Glaffig (voir [Gla90]).

Au chapitre 5 nous prouvons le théorème suivant ([Bou07b, Bou07a]) :

Théorème 2. *Dans le modèle (1.2) on fixe $N = 2$. Soient $\gamma_1(E)$ et $\gamma_2(E)$ les exposants de Lyapounov positifs associés à $H_B(\omega)$. Il existe un ensemble discret $\mathcal{S}_B \subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $E \in]2, +\infty[\setminus \mathcal{S}_B$:*

$$\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0$$

En particulier, $H_B(\omega)$ n'a pas de spectre absolument continu dans l'intervalle $]2, +\infty[$.

Le cas $N = 2$ du théorème 1 ainsi qu'une forme plus faible du théorème 2, qui fait l'objet de la première partie du chapitre 5 (voir théorème 5.2.1), ont été obtenus en collaboration avec Günter Stolz ([BS07]). Pour obtenir le théorème 2, il nous a fallu un outil algébrique supplémentaire qui nous permette de vérifier la Zariski-densité de $G(E)$. Il s'agit d'un critère de densité de sous-groupes de Lie de groupes de Lie réels semi-simples connexes dû à Breuillard et Gelander ([BG03]) :

Si G est un groupe de Lie connexe réel semi-simple, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors il existe un voisinage de l'identité $\mathcal{O} \subset G$, sur lequel $\log = \exp^{-1}$ est un difféomorphisme et tel que $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{O}$ engendrent un sous-groupe dense dans G si et seulement si $\log(g_1), \ldots, \log(g_m)$ engendrent $\mathfrak{g}$.

Ce résultat nous guide tout au long de la seconde partie du chapitre 5 en nous dictant les étapes de la preuve du théorème 2 :
1. Recherche d'éléments de $G(E)$ dans $\mathcal{O}$.
   Cela repose sur une approximation diophantienne simultanée.
2. Calcul des logarithmes de ces éléments.
3. Preuve que ces logarithmes engendrent bien l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$.

Les théorèmes 1 et 2 s'inscrivent dans la continuité des résultats de positivité et de séparation d'exposants de Lyapounov pour des modèles faisant intervenir des variables de Bernoulli. Dans ce cadre, on peut citer le résultat obtenu par Gol'dsheid et Margulis ([GM89]) qui prouve la séparation des exposants de Lyapounov pour un modèle de Schrödinger *discret à valeurs matricielles*, agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N)$. Dans le cas d'opérateurs *continus*, le principal résultat obtenu est celui de Damanik, Sims et Stolz dans [DSS02a], dans le cas à *valeurs scalaires* ($N = 1$). Notre étude porte quant à elle sur les opérateur *continus à valeurs matricielles.*

Au chapitre 6, nous étudions une propriété de régularité des exposants de Lyapounov : la Hölder-continuité par rapport au paramètre d'énergie E. On note dans la suite $I_P = \mathbb{R}$ et $I_B =]2, +\infty[$. On obtient les résultats suivants pour les opérateurs $H_P(\omega)$ et $H_B(\omega)$:

Théorème 3. (a) *On considère l'opérateur $H_P(\omega)$ pour $N = 2$. Étant donné un intervalle compact $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_{P,2}$, il existe un réel $\alpha > 0$ et une constante $0 < C < +\infty$ tels que, pour $p = 1, 2$ et pour tous $E, E' \in I$, on ait :*

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha$$

(b) *On considère l'opérateur $H_P(\omega)$ pour $N = 3$. Étant donné un intervalle compact $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_{P,3}$, il existe un réel $\alpha > 0$ et une constante $0 < C < +\infty$ tels que, pour $p = 1, 2, 3$ et pour tous $E, E' \in I$, on ait :*

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha$$

Théorème 4. *On considère l'opérateur $H_B(\omega)$ pour $N = 2$. Étant donné un intervalle compact $I \subset I_B \setminus \mathcal{S}_B$, il existe un réel $\alpha > 0$ et une constante $0 < C < +\infty$ tels que, pour $p = 1, 2$ et pour tous $E, E' \in I$, on ait :*

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha$$

La démarche adoptée dans ce chapitre consiste à adapter les méthodes de transformée de Laplace dans les espaces de Hölder qui existent dans le cas d'opérateurs de Schrödinger discrets à valeurs matricielles (voir [CL90] et [KLS90]) et dans le cas d'opérateurs de Schrödinger continus à valeurs scalaires (voir [DSS02a]). En combinant les preuves existant dans ces deux cas, il nous a été possible de dégager un résultat général assurant la Hölder-continuité des exposants de Lyapounov dans le cas *d'opérateurs continus à valeurs matricielles* (voir théorème 6.3.16). L'essentiel de la démarche adoptée dans ce chapitre repose sur le fait que les exposants de Lyapounov

ont une représentation intégrale faisant intervenir une mesure μ-invariante (voir (1.4)), ainsi que nous le rappelons au théorème 6.1.6.

Enfin, au chapitre 7 nous étudions la densité d'états intégrée associée aux deux modèles (1.1) et (1.2). Cette quantité physique donne le nombre moyen par unité de volume des niveaux d'énergie propres de l'opérateur $H_*(\omega)$ inférieurs à une énergie donnée E. Dans ce dernier chapitre, nous commençons par prouver l'existence de la densité d'états intégrée pour des opérateurs continus à valeurs matricielles. C'est l'objet du théorème 7.2.6. Cette preuve d'existence repose sur une formule de Feynman-Kac pour des opérateurs à valeurs matricielles développée par Boulton et Restuccia dans [BR05]. On utilise de plus une formule du calcul de la trace d'un opérateur à noyau intégral matriciel, prouvée au lemme 7.2.2. À l'aide de ces deux résultats intermédiaires, la preuve d'existence de la densité d'états intégrée s'obtient en adaptant la preuve de [Car86] au cas d'opérateurs continus à valeurs matricielles.

Après cette preuve d'existence, on prouve le résultat de régularité suivant pour les modèles (1.1) et (1.2) :

Théorème 5. (a) *La densité d'états intégrée associée à l'opérateur $H_P(\omega)$ pour $N = 2$ est Hölder-continue sur tout intervalle compact $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_{P,2}$.*

(b) *La densité d'états intégrée associée à l'opérateur $H_P(\omega)$ pour $N = 3$ est Hölder-continue sur tout intervalle compact $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_{P,3}$.*

(c) *La densité d'états intégrée associée à l'opérateur $H_B(\omega)$ pour $N = 2$ est Hölder-continue sur tout intervalle compact $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_B$.*

Ce résultat se déduit des théorèmes 3 et 4 par le biais d'une formule de Thouless inspirée des travaux de Kotani et Simon ([KS88]) :

Théorème 6 (**Formule de Thouless**). *On a la formule suivante, pour tout $E \in \mathbb{R}$:*

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E) = -\alpha + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\left|\frac{E' - E}{E' - \mathrm{i}}\right|\right) \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de E et où $\mathfrak{n}$ est la mesure « densité d'états ».

Cette formule est obtenue en combinant les techniques développées par Kotani dans [KS88] et [Kot83].

Ce résultat de régularité de la densité d'états intégrée termine la thèse.

Nous terminons ce chapitre introductif par la présentation de certaines questions qui constitueraient selon nous une suite naturelle à ce travail de thèse.

Tout d'abord nous souhaiterions aboutir à une preuve complète de la localisation pour les opérateurs (1.1) et (1.2), au moins dans les cas $N = 2, 3$ et $N = 2$ déjà traités. En suivant la démarche présentée dans [Sto01] et appliquée dans [DSS02a, KLS90], nous ramenons la preuve de la localisation à la possibilité d'appliquer un schéma d'analyse multi-échelle. Pour pouvoir utiliser un tel schéma, il nous reste à prouver une estimation de Wegner et une estimation de longueur de pas initial. De telles estimations sont déjà prouvées dans [DSS02a, KLS90] pour les cas continu à valeurs scalaires et discret à

valeurs matricielles. Il nous faudrait trouver une preuve dans le cas des opérateurs *continus à valeurs matricielles*. Un problème est, qu'à notre connaissance, il n'existe pas encore de schéma d'analyse multi-échelle qui prenne explicitement en compte le cas des opérateurs continus à valeurs matricielles. Il s'agirait donc tout d'abord de vérifier que les schémas existant s'adaptent à ce cadre avant de chercher à obtenir des estimations de Wegner et de longueur de pas initial.

Ensuite, dans l'étude de l'opérateur (1.2) pour $N = 2$ nous aimerions lever la limitation aux énergies $E > 2$ du résultat de séparation des exposants de Lyapounov prouvé au théorème 2. En effet, du point de vue physique cette limitation n'a pas de justification : le cas $E < 2$ devrait lui aussi conduire à un résultat analogue au théorème 2.

La généralisation qu'il nous reste à faire pour étudier les opérateurs (1.1) et (1.2) est de comprendre ce qui se passe pour N quelconque. Dans la section 5.4 du chapitre 5 nous exposons des pistes qui nous semblent possibles pour l'étudier. Ce problème est crucial si on veut pouvoir appliquer l'approche par discrétisation que l'on présente au chapitre 5 pour le modèle (5.1). Cette généralisation pour N quelconque passe certainement par une meilleure compréhension de la variété $\mathcal{V}$ introduite au corollaire 3.2.4, à la fin du chapitre 3.

Il nous reste aussi à comprendre ce qui se passe précisément aux énergies critiques que l'on met en évidence dans les théorèmes 1 et 2. Comme expliqué à la remarque 2 de la section 4.3.4, nous pourrions mettre là à jour des comportements très intéressants du point de vue des énergies critiques et ce pour des modèles relativement explicites. Une première approche par analyse numérique pourrait peut-être nous donner des résultats intéressants.

Une autre généralisation possible des deux opérateurs que nous étudions serait de leur ajouter un potentiel déterministe périodique. Cela est fait dans [DSS02a] pour les opérateurs continus à valeurs scalaires. Dans notre cadre, cela conduit à une difficulté. En effet, nos constructions algébriques des chapitres 4 et 5 dépendent fortement de la forme des matrices de transfert. Ajouter un potentiel périodique à nos opérateurs changerait ces matrices de transfert et nos constructions explicites ne s'adapteraient pas directement à ces nouvelles formes.

Enfin, nous pensons que les techniques employées ici pourraient servir à étudier des opérateurs aléatoires définis sur des graphes. En effet, il est présenté dans [Ves05] une façon d'associer à un opérateur de Schrödinger aléatoire où l'aléa est porté par le potentiel, un laplacien aléatoire défini sur un graphe. Ce domaine, où l'on géométrise l'étude des opérateurs de Schrödinger aléatoires, nous semble être un champ d'application intéressant pour la suite de nos travaux.

1.2 English version

In this thesis we aim at studying dynamical and spectral properties of matrix-valued continuous random Schrödinger operators. More precisely, we will focus on Lyapunov exponents and on the integrated density of states of two Schrödinger operators : the first one will be a *point interactions* model, the second one will be an *Anderson-type* model.

We define the first operator we will study : let $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)})$, $n \in \mathbb{Z}$ be an i.i.d. sequence of $\mathbb{R}^N$-valued random variables on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$, whose common distribution on $\mathbb{R}^N$ will be denoted by ν. Moreover we assume that the support of ν, $\operatorname{supp}\nu \subset \mathbb{R}^N$, is bounded and not co-linear which means that the subset $\{x-y \mid x, y \in \operatorname{supp}\nu\}$ spans $\mathbb{R}^N$ as a vector space. We then define for all $i \in \{1, \dots, N\}$, the operator H_{ω_i} acting on $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ whose domain is :

$$\begin{aligned} D(H_{\omega_i}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f, f' \text{ are absolutely continuous on } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ f'' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ f \text{ is continuous on } \mathbb{R},\ f'(n^+) = f'(n^-) + \omega_i^{(n)} f(n) \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

On this domain, the operator is acting by $H_{\omega_i} f = -f''$. At last, we define the operator :

$$H_P(\omega) = \bigoplus_{i=1}^{N} H_{\omega_i} + V_0 \tag{1.5}$$

acting on $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ where V_0 is the constant-coefficient multiplication operator by the matrix :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Such an example of distribution ν of the random variables $\omega^{(n)}$ is obtained when the components $\omega_1^{(n)}, \dots \omega_N^{(n)}$ are independent real-valued random variables whose support contains at least 2 different points (for example, 0 and 1 if they are Bernoulli variables).

The second operator we are studying is an Anderson model :

$$H_B(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} \chi_{[0,1]}(x-n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^{(n)} \chi_{[0,1]}(x-n) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

acting on $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. In this definition, $\chi_{[0,1]}$ is the characteristic function of the interval $[0, 1]$, V_0 is the same multiplication operator as before. The $(\omega_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ for $i \in \{1, \dots, N\}$

are independent sequences of i.i.d. real-valued random variables on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$. We denote by $\tilde{\nu}$ their common law, whose support $\operatorname{supp} \tilde{\nu}$ contains $\{0, 1\}$.

We associate differential systems to these two operators :

$$H_P(\omega)u = Eu, \ H_B(\omega)u = Eu, \ E \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

We look at the asymptotic behaviour of the solutions $u \in \mathbb{C}^N$ of (1.7). One can meet mainly two cases :

1. These solutions do not decay exponentially to 0 at the infinity : thus we talk about "diffusion".
2. These solutions decay exponentially to 0 at the infinity : under additional assumptions we shall talk about "Anderson localization."

More precisely, we talk about Anderson localization when the studied operator has only pure point spectrum and that the generalized eigenfunctions associated to these spectral values (nontrivial solutions of (1.7)) decay exponentially to 0 at the infinity. This phenomenon of localization is well understood for one dimensional Anderson models ([DSS02a, CKM87, KLS90]), while its study remains incomplete in higher dimensions. For example, although there is in any dimension a proof of localization near the bottom of the spectrum for an Anderson-Bernoulli model (see [BK05]), this result does not contain any information about localization for other energies of the spectrum. In particular, even in dimension 2 there is no proof yet of the physical conjecture that localization holds at all energies and for arbitrary disorder.

The absence of diffusion is a necessary condition for the localization. In the present work, we will prove absence of diffusion for the operators $H_P(\omega)$ and $H_B(\omega)$ defined at (1.5) and (1.6). For this purpose, we will use the R.A.G.E. theorem (see [Ens78, Ens79, AG73]) which links diffusion to spectral theory. So we have to prove that both operators we are studying have no absolutely continuous spectrum. As $H_P(\omega)$ and $H_B(\omega)$ are one dimensional operators, we can use Kotani's theory (see [KS88]) which describe the absolutely continuous spectrum in dynamical terms. Indeed, in the case of one dimensional operators, the absolutely continuous spectrum is exactly the essential support of the set of energies for which the Lyapunov exponents nullify each other. Kotani's theory establishes a deep link between a spectral object, the absolutely continuous spectrum, and dynamical objects, the Lyapunov exponents.

The definition and the first properties of the Lyapunov exponents are presented in Chapter 2 of this thesis. This chapter also recalls a first criterion of separability of Lyapunov exponents, as well as a quick presentation of the theory of Kotani. Besides this chapter deals with the formalism of transfer matrices and introduces the Fürstenberg subgroup associated to a sequence of transfer matrices. In order to study the exponential decaying to 0, at infinity, for a solution u of (1.7) we look at the asymptotic behaviour of the sequence $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Therefore we have to understand how we can get $u(n+1)$ from $u(n)$, for any integer n. It leads us to introduce the transfer matrix $A_n^\omega(E)$ defined

by the relation :

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u'(n+1) \end{pmatrix} = A_n^\omega(E) \begin{pmatrix} u(n) \\ u'(n) \end{pmatrix}$$

From this relation we get :

$$\begin{pmatrix} u(n) \\ u'(n) \end{pmatrix} = (A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E)) \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}$$

and the study of the asymptotic behaviour of u brings us to the study of the asymptotic behaviour of the product of random matrices $A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E)$. As we aim at understanding the exponential asymptotic behaviour of such a product, we define the Lyapunov exponents as the following limits :

$$\gamma_1(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log ||A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E)||)$$

and for all $p = 1, \dots, 2N$:

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log || \wedge^p (A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E))||)$$

To study these limits, we introduce an algebraic object which contains all products of transfer matrices, the Fürstenberg subgroup :

$$G(E) = \overline{\langle A_0^\omega(E) \mid A_0^\omega(E) \in \operatorname{supp} \mu \rangle}$$

where μ is the measure defined on the Borel sets Γ of the symplectic group $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ by :

$$\mu(\Gamma) = \nu^{\otimes N}(\{\omega \in \{0,1\}^N \mid A_0^\omega(E) \in \Gamma\}) \tag{1.8}$$

The separability criterion we present in Chapter 2 is expressed in terms of properties of $G(E)$ (see Corollary 2.3.8). This criterion being difficult to check for the explicit operators we are interested in, the idea is to use a criterion due to Gol'dsheid and Margulis ([GM89]) which allows us to reduce the proof of separability of the Lyapunov exponents, and thus the absence of diffusion, to an algebraic reconstruction of the Zariski closure of the group $G(E)$:

If $G(E)$ is Zariski-dense in $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, then $\gamma_1(E) > \dots > \gamma_N(E) > 0$.

This result is exposed in Chapter 3.

Throughout Chapters 4 and 5 we prove the absence of diffusion in the cases $N = 2, 3$, for the model (1.5), and in the case $N = 2$, for the model (1.6). Let's expose the theorems proved in these chapters :

Theorem 1. *In the model (1.5) we fix $N = 2$ or 3. Then there exist discrete subsets of $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}_{P,2}$ and $\mathcal{S}_{P,3}$, such that :*

$$\begin{aligned} &\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,2}, \quad \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0, && \text{if } N = 2, \\ &\forall E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,3}, \quad \gamma_1(E) > \gamma_2(E) > \gamma_3(E) > 0, && \text{if } N = 3. \end{aligned}$$

Thus, the operator $H_P(\omega)$ has no absolutely continuous spectrum.

This theorem contains Theorems 4.2.1 and 4.3.1 from Chapter 4. In the case $N = 3$, we show at in Chapter 4, Section 4.3.4 that one can weaken the assumption on the randomness in the definition of model (1.5) and reveals a phenomenon of propagation of randomness like in the work of Glaffig (see [Gla90]).

In Chapter 5 we prove the following theorem ([Bou07b, Bou07a]) :

Theorem 2. *In the model (1.6) we fix $N = 2$. Let $\gamma_1(E)$ and $\gamma_2(E)$ be the first two Lyapunov exponents associated to $H_B(\omega)$. There exists a discrete subset $\mathcal{S}_B \subset \mathbb{R}$ such that, for all $E \in]2, +\infty[\backslash \mathcal{S}_B$:*

$$\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0$$

Thus, $H_B(\omega)$ has no absolutely continuous spectrum in the interval $]2, +\infty[$.

The case $N = 2$ of Theorem 1 and a weaker form of Theorem 2, which is developed in the first part of Chapter 5 (see Theorem 5.2.1), have been obtained in collaboration with Günter Stolz ([BS07]). To get Theorem 2, we had to rely on an additional algebraic tool which allow us to check the Zariski-density of $G(E)$. This algebraic tool is a criterion of density of Lie subgroups in real connected semisimple Lie groups due to Breuillard and Gelander ([BG03]) :

> If G is a real connected semisimple Lie group, whose Lie algebra is denoted by $\mathfrak{g}$, then there exists an identity neighborhood $\mathcal{O} \subset G$, on which $\log = \exp^{-1}$ is a well defined diffeomorphism and such that $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{O}$ generate a dense subgroup in G whenever $\log(g_1), \ldots, \log(g_m)$ generate $\mathfrak{g}$.

This result guides us throughout the second part of Chapter 5 by giving us the stages of the proof of Theorem 2 :

1. We search elements of $G(E)$ in $\mathcal{O}$.
   It relies on simultaneous diophantine approximation.
2. We compute the logarithms of these elements.
3. We prove that these logarithms are generating the Lie algebra $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ of $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$.

Theorems 1 and 2 come within the scope of the results of positivity and separability of Lyapunov exponents for models involving Bernoulli variables. One can quote the result of Gol'dsheid and Margulis ([GM89]) on separability of Lyapunov exponents for a *discrete matrix-valued* Schrödinger operator, acting on $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N)$. In the case of *continuous* operators, the main result is the one of Damanik, Sims and Stolz in [DSS02a], in the *scalar-valued* case ($N = 1$). Our study focuses on *matrix-valued continuous* operators.

In Chapter 6, we study a regularity property of the Lyapunov exponents : the Hölder-continuity in the energy parameter E. From then, we introduce $I_P = \mathbb{R}$ and $I_B =]2, +\infty[$. We have the following results for the operators $H_P(\omega)$ and $H_B(\omega)$:

Theorem 3. (a) *We consider the operator $H_P(\omega)$ for $N = 2$. Let $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_{P,2}$ be a compact interval. Then there exist a real number $\alpha > 0$ and a constant $0 < C < +\infty$ such that ffor $p = 1, 2$ and for all $E, E' \in I$:*

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha$$

(b) *We consider the operator $H_P(\omega)$ for $N = 3$. Let $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_{P,3}$ be a compact interval. Then there exist a real number $\alpha > 0$ and a constant $0 < C < +\infty$ such that for $p = 1, 2, 3$ and for all $E, E' \in I$:*

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha$$

Theorem 4. *We consider the operator $H_P(\omega)$ for $N = 2$. Let $I \subset I_B \setminus \mathcal{S}_B$ be a compact interval. Then there exist a real number $\alpha > 0$ and a constant $0 < C < +\infty$ such that for $p = 1, 2$ and for all $E, E' \in I$:*

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha$$

The approach adopted in this chapter consists in adapting Laplace transform methods on Hölder spaces which both exists in the case of matrix-valued discrete Schrödinger operators (see [CL90, KLS90]) and in the case of scalar-valued continuous Schrödinger operators (see [DSS02a]). By combining the existing proofs, we have been able to set a general result ensuring the Hölder-continuity of Lyapunov exponents in the case of matrix-valued continuous operators (see theorem 6.3.16). Our approach relies on the fact that the Lyapunov exponents have an integral representation involving a μ-invariant measure (see (1.8)), as we recall it at theorem 6.1.6.

Finally, in Chapter 7 we study the integrated density of states associated to the models (1.5) and (1.6). This physical quantity gives us the mean number of energy levels of the operator $H_*(\omega)$ by unit volume situated below a given energy E. In this last chapter, we start by proving in Theorem 7.2.6 the existence of the integrated density of states for matrix-valued continuous operators. This existence proof relies on a Feynman-Kac formula for matrix-valued operators developed by Boulton and Restuccia in [BR05]. We also use a formula which gives us the trace of an operator with matrix-valued integral kernel, proved in Lemma 7.2.2. With these two results, the existence proof of the integrated density of states is obtained by adapting the proof of [Car86] to the case of matrix-valued continuous operators.

After this proof of existence, we prove the following regularity result for models (1.5) and (1.6) :

Theorem 5. *Let $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_{P,2}$ be a compact interval. The integrated density of states associated to $H_P(\omega)$, for $N = 2$, is Hölder-continuous on I.*

Similarly, let $I \subset I_P \setminus \mathcal{S}_{P,3}$ be a compact interval. The integrated density of states associated to $H_P(\omega)$, for $N = 3$, is Hölder-continuous on I.

Finally, if $I \subset I_B \setminus \mathcal{S}_B$ is a compact interval, the integrated density of states associated to $H_B(\omega)$, for $N = 2$, is Hölder-continuous on I.

We can derive this result from Theorems 3 and 4 by using a Thouless formula, inspired by results of Kotani and Simon ([KS88]) :

Theorem 6 (**Thouless formula**). *For all $E \in \mathbb{R}$,*

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E) = -\alpha + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\left|\frac{E' - E}{E' - \mathrm{i}}\right|\right) \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ do not depends on E and $\mathfrak{n}$ is the measure called density of states.

We obtain this formula by combining the techniques developed by Kotani in [KS88] and [Kot83].

This regularity result of the integrated density of states closes the thesis.

We end this introduction by a list of open questions we think would make a natural sequel to this thesis work.

First of all, we would like to achieve a complete proof of the localization for operators (1.5) and (1.6), at least in the cases $N = 2, 3$ and $N = 2$ that have already been studied. Following the approach presented in [Sto01] and applied in [DSS02a, KLS90], we can derive the proof of the localization from a multiscale analysis scheme. To use such a scheme, we still have to prove a Wegner estimate and an initial length scale estimate. Such estimates are already proved in [DSS02a, KLS90] for scalar-valued continuous and matrix-valued discrete cases. We would have to find a proof of such estimates for continuous matrix-valued operators. The trouble is that, up to our knowledge, it does not already exist a multiscale analysis scheme which can deal with the case of matrix-valued continuous operators. Therefore we would have to first verify that the existing schemes can be adapted to this case, before trying to prove a Wegner estimate and an initial length scale estimate.

Then, in the study of the operator (1.6) for $N = 2$, we would like to get rid of the limitation to the energies $E > 2$ in the result of separability of Lyapunov exponents proved at theorem 2. Indeed, from a physical point of view, this limitation has no meaning : the case $E < 2$ should also lead to an analog result of theorem 2.

We also have to study the generalization to arbitrary N for the operators (1.5) and (1.6). In Section 5.4 of Chapter 5, we present some ideas which seems to be interesting to study that question. This question is crucial if we want to apply the discretization approach we present in Chapter 5 for the model (5.1). For this generalization to arbitrary N, we will certainly have to develop a better understanding of the manifold $\mathcal{V}$ introduced in Corollary 3.2.4, at the end of Chapter 3.

We also still have to understand what precisely happens at the critical energies we highlight in Theorems 1 and 2. As explained in Remark 2 of Section 4.3.4, we could discover interesting behaviors, from the critical energies point of view, for explicit models. A first numerical analysis approach might lead us to interesting results for this problem.

Another possible generalization for both our operators would be to add them a deterministic periodic background potential. It is done in [DSS02a] for continuous scalar-valued operators. But, for continuous matrix-valued operators it leads to a main difficulty. Actually, our algebraic constructions in Chapters 4 and 5 depend heavily on the form of transfer matrices. Adding a periodic background to our operators would change these transfer matrices and our construction could not directly adapt to these new forms.

Finally, we believe that the techniques developed in the present work could be applied to the study of random operators on graphs. Indeed, in [Ves05] is presented a way to associate to a random Schrödinger operator, a random laplacian on a graph. This field, where we geometrize the study of random Schrödinger operators, seems to be an interesting field of application of our work.

Chapitre 2

Rappels : Matrices aléatoires dans le groupe symplectique

Sommaire

2.1 Le groupe symplectique réel 22

2.1.1 Définition et premières propriétés 22

2.1.2 Puissances extérieures 23

2.2 Suites de matrices symplectiques aléatoires 25

2.2.1 Le sous-groupe de Fürstenberg d'une suite de matrices symplectiques aléatoires 26

2.2.2 p-contractivité et L_p-irréductibilité forte 27

2.3 Séparation des exposants de Lyapounov 29

2.3.1 Exposants de Lyapounov 29

2.3.2 Critère de séparation des exposants de Lyapounov 30

2.3.3 Théorie de Kotani 33

Nous commençons cette thèse par un premier chapitre de rappels sur la théorie des suites de matrices aléatoires indépendantes. En particulier nous nous intéresserons aux produits de telles matrices. Cela nous permettra de définir la notion d'exposant de Lyapounov qui, nous le verrons par la suite, décrit le comportement asymptotique de tels produits matriciels mais aussi et surtout celui de fonctions propres généralisées associées à des opérateurs. Nous verrons cela plus en détail au chapitre 4.

Nombre de résultats que nous allons énoncer dans ce chapitre sont valables en toute généralité pour des suites de matrices inversibles. A plusieurs reprises nous ne les énoncerons que dans le cadre des suites de matrices symplectiques aléatoires. En effet, seul ce cas nous intéressera dans la suite de notre travail. C'est pourquoi dans un premier temps nous allons faire quelques rappels sur le groupe symplectique réel, principalement afin de poser une série de notations que nous utiliserons constamment dans toute la suite. Nous pourrons alors nous intéresser de plus près aux objets qui permettent de décrire les propriétés asymptotiques des suites de matrices aléatoires. En

particulier, nous introduirons un groupe qui sera notre objet d'étude central aux chapitres 4 et 5. Nous définirons aussi une propriété géométrique et une autre dynamique de ce groupe qui nous serviront dans une dernière section à étudier la question de la séparation des exposants de Lyapounov.

L'article fondateur du point de vue que nous présentons ici pour l'étude des produits de matrices aléatoires est celui de H. Fürstenberg (voir [Fur63]). Il suit l'article [FK60] qui traitait déjà de la question de l'existence des exposants de Lyapounov. Dans [Fur63], H. Fürstenberg systématise et complète les travaux initiateurs de R. Bellman (voir [Bel60]) et présente un premier critère de séparation des exposants de Lyapounov, ramenant cette question à des propriétés géométriques du groupe introduit à la section 2.2.1. Suivront ensuite les travaux de Guivarc'h, Raugi, Le Page et Oseledets qui poursuivront dans cette voie en continuant d'explorer des conditions suffisantes pour obtenir la séparation des exposants de Lyapounov. On peut lire [GR89] et [GR85] à ce sujet, ou encore [Ose68]. Sur cette question toujours, le tournant se fera dans les années 80 avec l'algébrisation du problème due à Gol'dsheid et Margulis. Nous présenterons leurs résultats au chapitre 3. Enfin en 1985 est publié le livre de Bougerol et Lacroix [BL85] qui rassemble en un ouvrage très complet les résultats connus à l'époque. C'est dans l'esprit de cet ouvrage que nous avons rédigé ce chapitre de rappels.

2.1 Le groupe symplectique réel

2.1.1 Définition et premières propriétés

Nous commençons par poser la définition et les premières notations liées au groupe symplectique réel, vu ici dans sa "forme matricielle" comme sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$.

Définition 2.1.1. Le groupe des matrices symplectiques d'ordre $2N$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$ constitué des matrices M vérifiant :

$$^tMJM = J$$

où J est la matrice d'ordre $2N$ définie par $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On le note $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. Dans la définition de J, I est la matrice identité $N \times N$.

On peut alors donner des premières propriétés qui vont nous être utiles dans la suite.

Proposition 2.1.2. *Si M est une matrice dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, on a les propriétés suivantes :*

(i) *^tM est dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.*

(ii) *Si λ est une valeur propre de M, alors $\frac{1}{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M.*

(iii) *Il existe deux matrices orthogonales K et U dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_N, \frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_N})$ avec $a_1 \geq \ldots \geq a_N \geq 1$ telles que : $M = KAU$.*

(iv) $||M|| = ||M^{-1}||$.

Démonstration. Pour le point (i) on vérifie directement que si ${}^tMJM = J$ alors en passant à l'inverse, $M^{-1}J^{-1}({}^tM)^{-1} = J^{-1}$. Or $J^{-1} = -J$ et donc $M^{-1}J({}^tM)^{-1} = J$, d'où $J = MJ^tM$ et ${}^tM$ est dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Pour le point (ii), si λ est une valeur propre de M associée au vecteur propre v, alors :

$$ {}^tMJv = \frac{1}{\lambda}{}^tMJMv = \frac{1}{\lambda}Jv $$

Ainsi $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de ${}^tM$ donc de M.

Pour le point (iii), on renvoie à la preuve du lemme 3.1, page 88 dans [BL85], où l'on voit que les a_i ne sont autres que les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice symétrique définie positive ${}^tMM$.

Enfin, pour le point (iv), c'est une conséquence immédiate du point (iii) car alors $||M|| = ||A|| = ||A^{-1}|| = ||M^{-1}||$. □

Nous allons maintenant faire des rappels sur les puissances extérieures qui nous serviront plus tard pour définir les exposants de Lyapounov.

2.1.2 Puissances extérieures

Nous allons définir les puissances extérieures d'un espace vectoriel E de dimension finie. Pour fixer les choses et puisque nous serons de toutes façons dans ce cadre par la suite, nous allons considérer que cet espace vectoriel est $\mathbb{R}^N$ pour N un entier fixé.

Définition 2.1.3. Pour $p \in \{1, \ldots, N\}$, $\wedge^p\mathbb{R}^N$ est l'espace vectoriel des formes p-linéaires alternées sur le dual $(\mathbb{R}^N)^*$. L'espace vectoriel $\wedge^p\mathbb{R}^N$ est appelé puissance extérieure p-ième de l'espace $\mathbb{R}^N$.

Pour $u_1, \ldots, u_p$ dans $\mathbb{R}^N$ et $f_1, \ldots, f_p$ dans $(\mathbb{R}^N)^*$, on pose :

$$ (u_1 \wedge \ldots \wedge u_p)(f_1, \ldots, f_p) = \det((f_i(u_j))_{i,j}) $$

Tout vecteur de la forme $u_1 \wedge \ldots \wedge u_p$ sera appelé p-vecteur décomposable. A l'aide de ces vecteurs p-décomposables, on peut définir une base de l'espace $\wedge^p\mathbb{R}^N$ de la manière suivante.

Proposition 2.1.4. *Soit $p \in \{1, \ldots, N\}$. On a les propriétés suivantes :*

(i) *Si $(u_1, \ldots, u_N)$ est une base de $\mathbb{R}^N$, alors $\{u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \ldots i_p \leq N\}$ est une base de $\wedge^p\mathbb{R}^N$.*

(ii) *Pour $u_1, \ldots, u_p$ dans $\mathbb{R}^N$, $u_1 \wedge \ldots \wedge u_p$ est non nul si et seulement si les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont indépendants.*

(iii) *$(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ engendrent le même sous-espace si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que :*

$$ u_1 \wedge \ldots \wedge u_p = \lambda(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) $$

Cette proposition justifiera que les opérations que nous allons définir sur $\wedge^p\mathbb{R}^N$ le seront simplement sur l'ensemble des p-vecteurs décomposables.

Nous aurons à étudier dans la suite le comportement asymptotique des normes de suites de matrices dont on voudra prendre la p-ième puissance extérieure. Pour l'instant nous n'avons ni défini ce qu'est la puissance extérieure d'une matrice, ni la norme sur une puissance extérieure d'espace vectoriel.

Tout d'abord, nous allons définir un produit scalaire sur $\wedge^p\mathbb{R}^N$. Pour deux p-uplets $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ on définit le produit scalaire sur les p-vecteurs décomposables par :

$$(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p, v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) = \det((\langle u_i, v_j\rangle)_{i,j})$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^N$. On notera $|| \ ||$ la norme associée.

Il nous reste donc à définir comment un élément du groupe linéaire $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ agit sur $\wedge^p\mathbb{R}^N$. Si $M \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ on définit un automorphisme $\wedge^p M$ de $\wedge^p\mathbb{R}^N$ en le définissant sur les p-vecteurs décomposables par :

$$(\wedge^p M)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) = Mu_1 \wedge \ldots \wedge Mu_p$$

On a alors la propriété de multiplicativité : $\wedge^p(MN) = (\wedge^p M)(\wedge^p N)$.

Puis, la norme de l'application linéaire ou de la matrice $\wedge^p M$ est la norme induite par $|| \ ||$ sur $\wedge^p\mathbb{R}^N$:

$$|| \wedge^p M|| = \sup\{||(\wedge^p M)v|| \mid v \in \wedge^p\mathbb{R}^N, \ ||v|| = 1\}$$

On la note aussi $|| \ ||$ dans la mesure où dans la suite de notre propos il n'y aura pas, à l'usage, de confusion possible entre la norme sur $\wedge^p\mathbb{R}^N$ et la norme d'opérateur qu'elle induit. Par la propriété de multiplicativité de la puissance extérieure et la sous-multiplicativité de la norme d'opérateur, on a pour M et N dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$:

$$|| \wedge^p (MN)|| \leq || \wedge^p M|| \ || \wedge^p N||$$

On remarque que si K est une matrice orthogonale pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^N$, alors $\wedge^p K$ est encore orthogonale. Cette remarque nous conduit à la proposition suivante :

Proposition 2.1.5. *Soient M une matrice dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ et $a_1(M) \geq \ldots \geq a_N(M) > 0$ les racines carrées positives des valeurs propres de ${}^tMM$. Alors pour tout $p \in \{1, \ldots, N\}$, on a :*

$$|| \wedge^p M|| = a_1(M) \ldots a_p(M)$$

Démonstration. On écrit une décomposition polaire de M, $M = KAU$ avec K et U des matrices orthogonales et $A = \mathrm{diag}(a_1(M), \ldots, a_N(M))$. Comme $\wedge^p K$ et $\wedge^p U$ sont encore orthogonales, on a : $|| \wedge^p M|| = || \wedge^p A||$.

Or si $(e_1, \ldots, e_N)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$:

$$(\wedge^p A)(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = (a_{i_1} \ldots a_{i_p})(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p})$$

D'où :

$$||(\wedge^p A)|| = \sup\{a_{i_1} \dots a_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq N\} = a_1(M) \dots a_p(M)$$

Ce qui achève la preuve. □

Enfin, on peut aussi estimer le logarithme de la norme de $\wedge^p M$.

Proposition 2.1.6. *Soit M une matrice dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. On pose :*

$$\ell(M) = \max(\log^+ ||M||, \log^+ ||M^{-1}||)$$

Alors pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, et pour tout vecteur unitaire w de $\wedge^p \mathbb{R}^N$, on a :

$$|\log(|| \wedge^p M||)| \leq p\ell(M) \text{ et } |\log(||(\wedge^p M)w||)| \leq p\ell(M)$$

Démonstration. Cela se déduit de la proposition précédente comme expliqué dans [BL85], Lemma 5.4, page 62. □

Nous terminons cette section en introduisant la sous-variété p-lagrangienne de $\mathbb{R}^{2N}$. Cette définition s'inscrit dans le cadre symplectique uniquement. Soit $(e_1, \dots, e_{2N})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2N}$.

Définition 2.1.7. Pour tout p dans $\{1, \dots, N\}$, soit L_p le sous-espace de $\wedge^p \mathbb{R}^{2N}$ engendré par $\{Me_1 \wedge \dots \wedge Me_p \mid M \in \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})\}$. On l'appelle la sous-variété p-lagrangienne de $\mathbb{R}^{2N}$.

Remarque 2.1.8. L'espace projectif $\mathbb{P}(L_p)$ est l'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension p dans $\mathbb{R}^{2N}$ pour la forme bilinéaire donnée par le produit scalaire usuel.

Nous avons posé là toutes les notations dont nous aurons besoin dans la suite pour définir les exposants de Lyapounov et étudier leurs propriétés. Nous allons maintenant voir comment l'étude des suites de matrices aléatoires peut se ramener à l'étude des propriétés d'un groupe construit à partir de ces matrices.

2.2 Suites de matrices symplectiques aléatoires

Nous allons ici, intentionnellement, réduire la généralité de notre propos au cas des matrices symplectiques qui sera le cadre dans lequel nous évoluerons dans la suite. Nous allons présenter les techniques de Fürstenberg, mais uniquement dans le cas de suites de matrices symplectiques aléatoires dont l'aléa n'est pas défini *a priori* sur le groupe symplectique mais pour des paramètres aléatoires contenus dans l'expression des matrices de la suite.

2.2.1 Le sous-groupe de Fürstenberg d'une suite de matrices symplectiques aléatoires

Nous souhaitons étudier le comportement asymptotique des produits formés à partir d'une suite de matrices symplectiques aléatoires $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$. Tout d'abord on fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ dans lequel se trouve le paramètre aléatoire ω. Dans les modèles que nous étudierons aux chapitres 4 et 5, il s'agira d'un espace produit d'espaces de probabilités liés à des variables aléatoires $\omega_1, \ldots, \omega_N$ *indépendantes et identiquement distribuées* (i.i.d.) de loi ν (i.e., $\mathsf{P} = \otimes^N \nu$).

Tout d'abord nous allons déduire de P la définition d'une mesure sur $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ qui sera adaptée à l'étude de la suite de matrices symplectiques $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$. En effet, lorsque l'on considère un produit quelconque de matrices de la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$, toutes les matrices de la suite n'apparaissent pas de manière équiprobable dans le produit. Cela dépend de la distribution de la loi P suivie par le paramètre ω. La mesure que l'on va définir doit donc traduire cette dépendance à la loi P.

En tant que partie de $\mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est muni de la topologie induite par la topologie usuelle sur $\mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$ et on peut donc considérer les boréliens de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ pour cette topologie induite. Si Γ est un borélien de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, on pose :

$$\mu(\Gamma) = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega \mid A_0^\omega \in \Gamma\})$$

C'est la mesure sur $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ adaptée à l'étude du produit des A_n^ω puisque c'est la mesure image par A_n^ω de la probabilité P. Cette mesure μ est définie seulement à partir de A_0^ω puisque les matrices A_n^ω sont supposées i.i.d..

Remarque 2.2.1. Dans [BL85] et déjà dans [Fur63], la mesure μ n'était pas définie exactement de cette façon. En effet, dans ces références on se donne *a priori* une distribution sur la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui n'est pas induite par une distribution sur certains des coefficients des matrices A_n^ω. Dans notre cas, l'aléa est défini par certains coefficients des matrices qui s'avèrent être des variables aléatoires suivant leur propre loi. Ainsi, dans notre cadre, on définit *a priori* un espace de probabilité dans lequel "vivent" certains coefficients des matrices A_n^ω, puis à partir de leur loi on construit la distribution des matrices A_n^ω qui est alors une mesure non plus sur $(\Omega, \mathcal{B})$, mais sur $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. On se ramène alors à la théorie présentée dans [BL85] en vérifiant que les matrices A_n^ω sont bien *indépendantes et identiquement distribuées* pour cette mesure que l'on a construite.

Ayant muni $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ de cette mesure, nous allons pouvoir définir un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ dont l'étude sera le cœur de nos preuves dans la suite. En effet, l'objet naturel qui contient tous les produits significatifs de matrices de la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$, significatifs au sens de la mesure μ, est le groupe suivant :

Définition 2.2.2. On note G_μ le plus petit sous-groupe fermé de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ contenant le support de la mesure μ :

$$G_\mu = \overline{\langle A_0^\omega \mid A_0^\omega \in \operatorname{supp} \mu \rangle}$$

On appellera ce groupe le « sous-groupe de Fürstenberg » associé à la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Remarque 2.2.3. Nous ferons dans la suite usage de la notation G au lieu de G_μ quand il n'y aura pas de confusion possible quant à la suite de matrices étudiée et donc quant à la mesure μ définissant G_μ.

Remarque 2.2.4. Le nom de « sous-groupe de Fürstenberg » est un choix personnel. En effet ce sous-groupe est constamment utilisé depuis l'article fondateur de Fürstenberg [Fur63] et nous n'avons jamais trouvé d'article dans lequel il est ainsi nommé. Ce choix a pour seul objet de faciliter la référence à ce groupe dans les preuves qui suivent.

2.2.2 p-contractivité et L_p-irréductibilité forte

Ayant défini un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ donc d'automorphismes de $\mathbb{R}^{2N}$, nous allons nous intéresser aux propriétés géométriques de ce sous-groupe de transformations.

2.2.2.1 L_p-irréductibilité forte

Nous suivons ici les définitions données dans [BL85]. Nous commençons par donner une définition de la notion d'irréductibilité forte qui vaille pour toue partie de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.

Définition 2.2.5 (Irréductibilité forte)**.** Étant donné une partie S de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$, on dit que :

(i) S est irréductible s'il n'existe pas de sous-espace strict V de $\mathbb{R}^N$ tel que $M(V) = V$ pour tout $M \in S$.

(ii) S est dit fortement irréductible s'il n'existe pas de famille finie de sous-espaces stricts de $\mathbb{R}^N$, $V_1, \ldots, V_k$ telle que :

$$M(V_1 \cup \ldots \cup V_N) = V_1 \cup \ldots \cup V_N$$

pour tout $M \in S$.

Par sous-espace strict on entend sous-espace de $\mathbb{R}^N$ différent de $\mathbb{R}^N$ et de $\{0\}$.

Remarque 2.2.6. La propriété d'irréductibilité forte s'interprète facilement dans le cas où $N = 2$. Elle signifie géométriquement qu'il y a suffisamment de transformations du plan dans l'ensemble S pour faire bouger toutes les droites et les réunions finies de droites dans le plan. Bien sûr cela signifie la même chose en dimension supérieure, l'image est juste plus simple en dimension 2. C'est d'ailleurs cette interprétation géométrique simple de l'irréductibilité forte qui est utilisée dans les preuves de [DSS02b].

Dans la suite, nous chercherons à prouver que le sous-groupe de Fürstenberg associé à une certaine suite de matrices aléatoires a cette propriété d'irréductibilité forte. Malheureusement, l'action de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ sur $\wedge^2\mathbb{R}^{2N}$ n'est pas irréductible (donc *a fortiori* pas fortement irréductible). En effet, l'espace engendré par $\sum_{i=1}^N e_i \wedge e_{N+i}$ est invariant par tout élément de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

La définition que nous venons de donner n'est donc pas adaptée au cadre symplectique. Nous allons donc raffiner cette définition pour l'adapter à nos besoins.

Définition 2.2.7 (L_p-irréductibilité forte)**.** Soient T une partie de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ et p un entier dans $\{1, \ldots, N\}$. On dit que T est L_p-fortement irréductible s'il n'existe pas d'union finie W de sous-espaces stricts de L_p telle que $\wedge^p M(W) = W$ pour tout $M \in T$.

Là encore, par sous-espace strict, on entend sous-espace de L_p différent de L_p et de $\{0\}$. Le fait de se restreindre à des sous-espaces stricts de L_p permet d'éviter l'écueil sur lequel butait la première définition. Mais cette définition est moins intuitive du point de vue géométrique que la précédente, c'est pourquoi nous ne l'avons pas donnée directement.

2.2.2.2 Propriétés de contraction

Nous suivons les définitions données dans [BL85]. Nous allons définir la notion d'ensemble contractant dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.

Définition 2.2.8 (Ensemble p-contractant)**.** Soient T une partie de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ et p un entier dans $\{1, \ldots, N-1\}$. On dit que T est p-contractant s'il existe une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans T telle que la limite suivante existe :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\wedge^p M_n}{|| \wedge^p M_n||} = M$$

et soit une matrice de rang 1.

Remarque 2.2.9. On peut voir cette propriété comme l'analogue de la non-compacité dans le cas où $N = 2$. Cela s'interprète encore comme le fait que la partie T est assez "grande" pour que l'on puisse y trouver une suite convergente vers une matrice de rang 1. C'est une condition qui assure l'unicité de la mesure limite d'une chaîne de Markov utilisée dans la preuve du théorème 2.3.7.

Nous donnons ici un moyen simple de s'assurer qu'un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ est p-contractant pour tout p.

Proposition 2.2.10. *Un sous-ensemble T de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ qui contient une matrice ayant N valeurs propres de modules distincts est p-contractant pour tout $p \in \{1, \ldots, N-1\}$.*

Démonstration. Soit M une matrice dans T ayant N valeurs propres de modules distincts, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$. Alors $\wedge^p M$ a une valeur propre simple dominante pour tout p dans $\{1, \ldots, N-1\}$. En effet si $u_1, \ldots, u_N$ sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de M, alors :

$$\forall p,\ (\wedge^p M)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_N) = \lambda_1 \ldots \lambda_N (u_1 \wedge \ldots \wedge u_N)$$

Puis il vient, par la décomposition de Jordan de $\wedge^p M$ que $\frac{\wedge^p M^{2n}}{||\wedge^p M^{2n}||}$ converge vers une matrice de projection d'image $\ker(M - (\lambda_1 \ldots \lambda_N)I)$ de dimension 1. Donc la suite $((\wedge^p M)^n)_n$ est p-contractante pour tout p dans $\{1, \ldots, N-1\}$. □

Bien sûr ce critère n'est pas un critère applicable en toute généralité pour prouver qu'un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ est p-contractant pour tout p, mais dans certains cas simples il peut suffire.

2.3 Séparation des exposants de Lyapounov

Nous allons maintenant définir la notion d'exposants de Lyapounov et donner un critère leur assurant d'être tous séparés.

2.3.1 Exposants de Lyapounov

Nous allons commencer par introduire l'exposant de Lyapounov dominant d'une suite de matrices aléatoires de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$, soit $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}}$. On a la définition suivante :

Définition 2.3.1. On suppose que l'espérance $\mathbb{E}(\log^+ ||A_0^\omega||)$ est finie. Alors la limite suivante appartient à $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega||$$

Nous l'appelons l'exposant de Lyapounov dominant associé à la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2.3.2. Sous l'hypothèse que l'espérance $\mathbb{E}(\log^+ ||A_0^\omega||)$ est finie, cette limite existe toujours comme conséquence de la loi des grands nombres dans le cas où elle vaut $-\infty$ et de la théorie des cocycles et des mesures invariantes comme présentée au chapitre 6, à la section 6.1 pour le cas où elle est finie. De plus elle est égale à la limite presque-sûre de $\frac{1}{n}\log ||\wedge^p (A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)||$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour la preuve précise de cette assertion on renvoie à [BL85], théorème 4.1, page 11.

Cet exposant décrit le comportement exponentiel asymptotique de la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $\mathbb{R}^N$ tout entier, en somme, le comportement asymptotique global de cette suite. Mais à lui tout seul cet exposant ne permet pas de connaître le comportement asymptotique exponentiel sur les sous-espaces propres de la matrice $A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega$ et donc de comprendre réellement la dynamique associée à cette suite de matrices aléatoires. Pour pallier cette difficulté, nous allons définir d'autres exposants de Lyapounov, intermédiaires en un certain sens, qui permettront d'affiner l'étude du comportement asymptotique de $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}}$. L'interprétation dynamique précise de ces exposants de Lyapounov est donnée par le théorème d'Oseledets (voir [Ose68]).

Définition 2.3.3. Soit $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de matrices aléatoires, i.i.d. dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ et telle que l'espérance $\mathbb{E}(\log^+ ||A_0^\omega||)$ soit finie. Les exposants de Lyapounov $\gamma_1, \dots, \gamma_{2N}$ associés à la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont définis de façon inductive par $\gamma = \gamma_1$ (l'exposant de Lyapounov dominant) et pour $p \geq 2$,

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log ||\wedge^p (A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)||)$$

On peut voir que les sommes $\sum_{i=1}^p \gamma_i$ sont en fait les exposants de Lyapounov dominants associés aux suites $(\wedge^p(A_n^\omega))_{n\in\mathbb{Z}}$ lorsque p varie. Ainsi pour la même raison qu'à la remarque 2.3.2, ces sommes appartiennent à $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. En fait, plus précisément,

d'après le point (iv) de la proposition 2.1.2, comme on a $\mathbb{E}(\log^+ ||A_0^\omega||) < +\infty$ et que la matrice A_0^ω est symplectique, on a aussi $\mathbb{E}(\log^+ ||(A_0^\omega)^{-1}||) < +\infty$. Mais alors la proposition 2.1.6 s'applique et pour tout p :

$$\left|\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\gamma_i\right| \leq \max(\mathbb{E}(\log^+ ||A_0^\omega||), \mathbb{E}(\log^+ ||(A_0^\omega)^{-1}||)) < +\infty$$

Par suite, le cas où l'une des sommes vaudrait $-\infty$ étant exclu, tous les exposants de Lyapounov sont finis.

On peut donner une caractérisation de ces exposants de Lyapounov en fonction de la suite des valeurs propres des matrices ${}^t(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)$.

Proposition 2.3.4. *Si $a_1(n) \geq \dots \geq a_{2N}(n)$ sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique définie positive ${}^t(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)$, alors, avec probabilité 1 :*

$$\gamma_p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}(\log a_p(n)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log a_p(n)$$

Démonstration. On renvoie à [BL85], proposition 5.6, page 63. □

On termine ces généralités sur les exposants de Lyapounov associés à des suites i.i.d. de matrices aléatoires dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ par une propriété essentielle de symétrie sur les exposants de Lyapounov.

Proposition 2.3.5. *Si $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{2N}$ sont les exposants de Lyapounov associés à une suite i.i.d. de matrices aléatoires dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, alors, pour tout $1 \leq i \leq N$:*

$$\gamma_{2N-i+1} = -\gamma_i$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du point (iii) de la proposition 2.1.2 appliqué à la matrice symplectique ${}^t(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)$, de la proposition 2.3.4 et du fait que $\log\frac{1}{a_i(n)} = -\log(a_i(n))$. □

Cette propriété de symétrie nous dit que les exposants de Lyapounov associés à une suite i.i.d. de matrices aléatoires symplectiques peuvent se regrouper par paires et nous verrons qu'alors pour montrer la séparation de ceux-ci, il nous suffira d'étudier les N premiers.

2.3.2 Critère de séparation des exposants de Lyapounov

Nous allons maintenant donner un critère de séparation des exposants de Lyapounov, fondé sur les propriétés de L_p-irréductibilité forte et de p-contractivité du sous-groupe de Fürstenberg associé à une suite de matrices aléatoires symplectiques. Ce résultat est le point le plus important de ce chapitre.

Tout d'abord un point de vocabulaire.

Définition 2.3.6. On dit que les exposants de Lyapounov sont séparés lorsqu'ils sont distincts :

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_{2N}$$

On peut alors énoncer le théorème nous donnant le principal critère de séparation des exposants de Lyapounov.

Théorème 2.3.7. *Soit $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite i.i.d. de matrices aléatoires symplectiques d'ordre $2N$ et soit p un entier dans $\{1,\ldots,N\}$. Soit μ la distribution commune des A_n^ω comme définie à la section 2.2.1. On suppose que le sous-groupe de Fürstenberg G_μ associé à la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ est p-contractant et L_p-fortement irréductible et que l'espérance $\mathbb{E}(\log||A_0^\omega||)$ est finie. On a alors :*

(i) $\gamma_p > \gamma_{p+1}$

(ii) *Pour tout élément non nul x de L_p :*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log||\wedge^p(A_{n-1}^\omega\ldots A_0^\omega)x|| = \sum_{i=1}^{p}\gamma_i$$

(iii) *Il existe une unique mesure de probabilité ν_p sur $\mathbb{P}(L_p)$, μ-invariante, telle que :*

$$\gamma_1+\ldots+\gamma_p = \int_{\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})\times\mathbb{P}(L_p)}\log\frac{||(\wedge^p g)x||}{||x||}\,\mathrm{d}\mu(g)\,\mathrm{d}\nu_p(\bar{x})$$

Démonstration. On se réfère à [BL85], proposition 3.4, page 89. Pour la définition d'une mesure invariante, voir la définition 6.1.5. □

Ce résultat va surtout nous intéresser sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 2.3.8. *Soit $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite i.i.d. de matrices aléatoires symplectiques d'ordre $2N$. Soit μ la distribution commune des A_n^ω comme définie à la section 2.2.1. On suppose que le sous-groupe de Fürstenberg G_μ associé à la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ est p-contractant et L_p-fortement irréductible pour tout $p\in\{1,\ldots,N\}$ et que l'espérance $\mathbb{E}(\log||A_0^\omega||)$ est finie.*

Alors, les exposants de Lyapounov associés à la suite $(A_n^\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont séparés, en particulier :

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_N > 0$$

Démonstration. Le fait que $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_N$ est l'application répétée du point (i) du théorème 2.3.7 ci-dessus, pour chaque p dans $\{1,\ldots,N-1\}$. Alors, γ_N est strictement positif car d'après la proposition 2.3.5, $\gamma_N = -\gamma_{N+1}$ et d'après le théorème 2.3.7, $\gamma_N > \gamma_{N+1}$ et donc on ne peut pas avoir $\gamma_N = \gamma_{N+1} = 0$. □

Nous constatons donc que le lien est fait entre d'une part une propriété dynamique associée à une suite i.i.d. de matrices aléatoires symplectiques, en l'occurrence la séparation de ses exposants de Lyapounov, et des propriétés plus géométriques d'un

objet algébrique associé à cette suite, le sous-groupe de Fürstenberg. Cela constitue un critère très puissant en pratique, puisqu'il permet de ne pas avoir à étudier directement des limites de produits matriciels, mais plus simplement de se ramener à des produits finis de telles matrices dans le sous-groupe de Fürstenberg.

Nous pouvons aussi préciser que le théorème 2.3.7 a son analogue pour $N = 1$. C'est le théorème de Fürstenberg (voir [Fur63] ou encore [BL85], théorème 4.4, page 32) qui assure la stricte positivité de l'exposant de Lyapounov dominant associé à la suite i.i.d. de matrices aléatoires dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_1(\mathbb{R})$. Dans ce cas, la 1-contractivité est remplacée par la non compacité du sous-groupe de Fürstenberg et la L_1-forte irréductibilité coïncide avec la notion d'irréductibilité forte dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Ce théorème de Fürstenberg est suffisant pour traiter le modèle étudié dans [DSS02b].

Nous donnons un dernier résultat dans cette section qui découle du corollaire 2.3.8.

Proposition 2.3.9. *Si G_μ contient un ouvert de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, alors les exposants de Lyapounov sont séparés.*

Démonstration. On suit la preuve de la proposition 3.5 page 91 dans [BL85]. Il suffit de vérifier les hypothèses du corollaire 2.3.8. Nous devons prouver que pour tout p dans $\{1, \ldots, N\}$, G_μ est L_p-fortement irréductible et p-contractant. On fixe p dans $\{1, \ldots, N\}$.

On commence par prouver que G_μ est L_p-fortement irréductible. Par hypothèse G_μ contient un ouvert de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. Or, $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ étant connexe, il vient $G_\mu = \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. Dans ce cas, nous pouvons appliquer l'exercice 2.9 page 87 dans [BL85]. Nous devons donc montrer qu'il n'y a pas de sous-espace strict V de L_p tel que $(\wedge^p M)(V) \subset V$ pour tout M dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un tel V. On écrit $M = KAU$ avec K, A et U comme au point (iii) de la proposition 2.1.2. Alors si $(e_1, \ldots, e_{2N})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{2N}$, on a :

$$(\wedge^p A)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_p) = a_1 \ldots a_p e_1 \wedge \ldots \wedge e_p$$

Et donc $(\wedge^p A)(V) \subset V$. Mais si $e_1 \wedge \ldots \wedge e_p$ est dans V, alors $Me_1 \wedge \ldots \wedge Me_p$ est dans V et donc $V = L_p$. Ainsi V n'est pas un sous-espace strict de L_p. Donc $e_1 \wedge \ldots \wedge e_p$ est dans W, l'orthogonal de V dans L_p. Alors, si $w \in W$ et $v \in V$:

$$(\wedge^p Mw, v) = (w, \wedge^p M^* v) = 0$$

pour tout M dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ (car ${}^tM$ est aussi dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$). Ainsi, $Me_1 \wedge \ldots \wedge Me_p$ est dans W pour tout M et donc $W = L_p$. Cela contredit encore le fait que V est un sous-espace strict de L_p. Et donc G_μ est bien L_p-fortement irréductible.

Pour la preuve de la p-contractivité, on renvoie à [BL85], page 91, proposition 3.5. □

Remarque 2.3.10. On a seulement prouvé la L_p-irréductibilité forte puisqu'en fait, ce que l'on vient de prouver est que le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est lui-même L_p-fortement irréductible. Et c'est tout ce dont nous aurons besoin dans la suite pour justifier l'application de la théorie de Gol'dsheid et Margulis au chapitre 3.

Nous terminons cette section sur les critères de séparation d'exposants de Lyapounov par une remarque quant à l'intérêt de prouver qu'un exposant de Lyapounov est strictement positif. Lorsqu'un exposant de Lyapounov γ_i est strictement positif, le comportement asymptotique de la suite $(||(A^\omega_{n-1}\dots A^\omega_0)w||)$ pour w dans l'espace associé à γ_i par le théorème d'Oseledets (voir [Ose68]) est de type exponentiel. Si γ_i est nul, on ne peut rien dire sur le comportement asymptotique de cette même suite de normes, si ce n'est qu'il n'est pas exponentiel. D'ailleurs, pour pouvoir utiliser le théorème d'Oseledets, qui décrit la dynamique associée à la suite des produits $(A^\omega_{n-1}\dots A^\omega_0)$, on a besoin d'avoir des exposants de Lyapounov distincts, ce qui donne une première justification à cette recherche de séparation des exposants de Lyapounov

Nous allons maintenant voir un autre intérêt à prouver que des exposants de Lyapounov sont non nuls. En effet dans la prochaine section nous allons voir dans quelle mesure on peut associer à un opérateur des exposants de Lyapounov et comment ceux-ci caractérisent le spectre absolument continu de l'opérateur en question.

2.3.3 Théorie de Kotani

La théorie de S.Kotani est une théorie centrale dans l'étude des opérateurs ergodiques. Elle permet de caractériser le spectre absolument continu en fonction des exposants de Lyapounov. Nous allons donc commencer par présenter comment on associe des exposants de Lyapounov à un opérateur de Schrödinger agissant sur $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$.

On fixe $(\Omega,\omega,\mathsf{P})$ un espace de probabilité. On commence par se donner un opérateur de Schrödinger agissant sur $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ par :

$$H(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} V^{(n)}_\omega(x)$$

où la suite de potentiels $(V^{(n)}_\omega)_{n\in\mathbb{Z}}$ est formée de fonctions bornées à valeurs dans les matrices symétriques réelles. On suppose de plus, que ces potentiels sont indépendants et identiquement distribués par rapport au paramètre $\omega\in\Omega$. On suppose enfin que $H(\omega)$ ainsi défini est $\mathbb{R}$-ergodique (ou $\mathbb{Z}$-ergodique).

Pour $E\in\mathbb{R}$ on peut considérer le système différentiel d'ordre 2 associé à l'opérateur $H(\omega)$ suivant :

$$-u'' + V_\omega u = Eu \tag{2.1}$$

avec $u=(u_1,\dots,u_N)\in\mathbb{C}^N$.
Soit alors $A^\omega_{n,N}(E)$ la matrice de transfert de n vers $n+1$ définie par la relation :

$$\begin{pmatrix} u_1(n+1)\\ \vdots\\ u_N(n+1)\\ u_1'(n+1)\\ \vdots\\ u_N'(n+1)\end{pmatrix} = A^\omega_{n,N}(E)\begin{pmatrix} u_1(n)\\ \vdots\\ u_N(n)\\ u_1'(n)\\ \vdots\\ u_N'(n)\end{pmatrix}$$

Elle envoie une solution de (2.1) de sa valeur en n à sa valeur en $n+1$. Puis le produit $A^{\omega}_{n-1,N}(E)\dots A^{\omega}_{0,N}(E)$ envoie les conditions initiales en 0 d'une telle solution en la valeur de la solution en n. Ainsi l'étude du comportement asymptotique de u se ramène à l'étude du comportement asymptotique du produit $A^{\omega}_{n-1,N}(E)\dots A^{\omega}_{0,N}(E)$.

On peut vérifier que la suite de matrices $(A^{\omega}_{n,N}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de matrices symplectiques aléatoires, indépendantes et identiquement distribuées. Le fait que ce soient des matrices symplectiques provient d'un calcul direct lorsque l'on connaît une expression de $A^{\omega}_{n,N}(E)$ en fonction d'une base de solutions de (2.1), le caractère i.i.d. de la suite provient de l'hypothèse d'indépendance faite sur les potentiels $V^{(n)}_{\omega}$ ainsi que du fait que les supports compacts des potentiels sont deux à deux disjoints. La théorie développée dans tout ce chapitre peut donc s'appliquer à la suite $(A^{\omega}_{n,N}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ et nous avons donc l'existence de $2N$ exposants de Lyapounov, $\gamma_1(E)\geq\dots\geq\gamma_{2N}(E)$, associés à cette suite.

Définition 2.3.11. Les exposants de Lyapounov $\gamma_1(E)\geq\dots\geq\gamma_{2N}(E)$ associés à la suite $(A^{\omega}_{n,N}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ des matrices de transfert pour l'opérateur $H(\omega)$ sont par définition les exposants de Lyapounov associés à l'opérateur $H(\omega)$.

Nous pouvons alors énoncer dans ce cadre les résultats de S.Kotani et B.Simon prouvés dans [KS88] qui caractérisent le spectre absolument continu de l'opérateur $H(\omega)$. Tout d'abord on rappelle le résultat de Ishii et Pastur qui nous dit que l'hypothèse d'ergodicité sur $H(\omega)$ assure l'existence d'un spectre presque sûr Σ ainsi que des spectres absolument continu presque sûr Σ_{ac}, singulier continu presque sûr Σ_{sc} et purement ponctuel presque sûr Σ_{pp}. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.3.12. *Soit S_k l'ensemble des valeurs de $E\in\mathbb{R}$ telles qu'il y ait exactement $2k$ exposants de Lyapounov $\gamma_{i_1}(E),\dots,\gamma_{i_{2k}}(E)$ nuls. Alors S_k est le support essentiel de $\Sigma^{2k}_{\mathrm{ac}}$, spectre absolument continu de multiplicité $2k$. De plus pour de tels opérateurs $H(\omega)$ il n'y a pas de spectre absolument continu de multiplicité impaire.*

Démonstration. Dans le cas des opérateurs $\mathbb{R}$-ergodiques, ce théorème est exactement le théorème 7.2 dans [KS88]. Dans le cas $\mathbb{Z}$-ergodique la méthode de suspension utilisée par Kirsch dans [Kir85] et présentée à la section 7.1 du présent travail permet de prouver que le résultat reste vrai. □

Ce résultat est important dans la mesure où il prouve que si *a contrario* les exposants de Lyapounov sont pour presque toute énergie E strictement positifs, alors l'opérateur $H(\omega)$ n'a pas de spectre absolument continu. Cela signifie par le théorème R.A.G.E. (voir [Ens78, Ens79, AG73]) que les valeurs moyennes des fonctions propres de $H(\omega)$ tendent vers 0 à l'infini à vitesse exponentielle. Le spectre absolument continu étant lié par le théorème R.A.G.E. à la notion de diffusion, il n'y a donc pas de phénomène de diffusion dans ce cas.

Les idées de Kotani, entre autres dans le cas des opérateurs à valeurs scalaires et non matricielles, ont un éventail d'applications bien plus large. Pour un aperçu très complet de cette théorie on peut citer l'articlee récent de D.Damanik, [Dam06]. Par exemple la théorie de Kotani nous assure que l'exposant de Lyapounov dominant pour

un opérateur comme $H(\omega)$ est strictement positif pour presque tous les $E \in \mathbb{R}$. Mais elle ne nous dit rien en général sur les autres exposants de Lyapounov.

Nous avons ainsi mis en place toutes les définitions liées aux exposants de Lyapounov dont nous aurons besoin dans la suite, ainsi que les résultats principaux, comme le critère de séparation et la théorie de Kotani. Dans le chapitre suivant, nous allons montrer comment on peut vérifier les hypothèses de p-contractivité et de L_p-irréductibilité forte à l'aide d'un critère algébrique et voir le sous-groupe de Fürstenberg sous l'angle de la théorie des groupes de Lie.

Chapitre 3

Rappels : Sous-groupes denses des groupes de Lie

Sommaire

3.1 Critère de Gol'dsheid et Margulis 38

3.1.1 Adhérence de Zariski 38

3.1.2 Sous-groupes Zariski-denses de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ 39

3.2 Engendrer des sous-groupes de Lie denses 41

Dans ce second chapitre de rappels, nous allons présenter les outils algébriques qui permettrons d'appliquer les résultats énoncés au chapitre 2 de séparation des exposants de Lyapounov (*Prop.* 2.3.7 et *Cor.* 2.3.8).

Dans un premier temps, nous allons exposer les travaux de Gol'sdheid et Margulis (voir [GM89]) sur une caractérisation algébrique de la p-contractivité et de la L_p-irréductibilité forte dans les groupes de Lie linéaires semi-simples. Ils prouvent que ces propriétés sont vérifiées dès lors que le sous-groupe étudié est suffisamment "gros" algébriquement ce qui va se traduire par le fait qu'il sera dense pour la topologie de Zariski. Cette caractérisation sera suffisante pour étudier le modèle d'interactions ponctuelles présenté au chapitre 4.

Puis dans un second temps, nous présenterons un critère effectif permettant de prouver qu'un sous-groupe d'un groupe de Lie semi-simple est dense pour la topologie usuelle et donc aussi pour la topologie de Zariski. Ce critère est prouvé par Breuillard et Gelander dans [Bre03] et publié dans [BG03]. Il nous permettra d'étudier un modèle d'Anderson continu à valeurs matricielles au chapitre 5.

Les deux résultats que nous présentons dans ce chapitre supposent des connaissances élémentaires sur les groupes de Lie et leurs algèbres de Lie associées. Pour une présentation des différentes définitions et propriétés sur les groupes et algèbres de Lie, il existe quantité d'ouvrages généraux. Nous renvoyons par exemple à [Bou68], [DK00] ou encore à [Kna02] pour les propriétés générales. Pour les propriétés élémentaires du groupe symplectique vu comme groupe de Lie, auquel nous appliquerons les résultats du présent chapitre, on peut consulter [MT86].

3.1 Critère de Gol'dsheid et Margulis

3.1.1 Adhérence de Zariski

Nous commençons par rappeler la définition de la densité au sens de la topologie de Zariski dans un groupe de Lie linéaire (i.e. un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$). Nous garderons en tête que nous souhaitons appliquer ces définitions et résultats au groupe symplectique. Les rappels de cette partie sont inspirés des présentations faites dans [Ben97] et [Per95].

Définissons tout d'abord la topologie de Zariski sur $\mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. On identifie pour cela $\mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{N^2}$. Alors, pour S une partie quelconque de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{N^2}]$, on pose :

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{N^2} \mid \forall P \in S,\ P(x) = 0\}$$

Ainsi, $V(S)$ est constitué des zéros communs aux polynômes de S. On appelle ensemble algébrique affine défini par S l'ensemble $V(S)$. On peut alors prouver qu'une intersection quelconque d'ensembles algébriques affines en est encore un, ainsi que pour les réunions finies.

Ces ensembles algébriques affines sont donc les fermés d'une topologie sur $\mathbb{R}^{N^2}$ que l'on appelle topologie de Zariski. La topologie de Zariski est celle pour laquelle les fermés sont les zéros communs de familles de polynômes.

Si on regarde la topologie de Zariski sur $\mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$, cela revient à regarder des polynômes en les N^2 coefficients matriciels. La topologie de Zariski sur $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ est la topologie induite par la topologie de Zariski que l'on vient de définir. Il en sera de même pour la topologie de Zariski sur tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$, comme par exemple $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ ou le sous-groupe de Fürstenberg associé à une suite i.i.d. de matrices aléatoires.

On peut maintenant définir l'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$:

Définition 3.1.1. L'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble G de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ est le plus petit fermé de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ pour la topologie de Zariski qui contienne G. On le note $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G)$. Un sous-ensemble $G' \subset G$ est alors Zariski-dense dans G lorsque $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G') = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G)$.

En d'autres termes, si G est un sous-ensemble de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$, $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G)$ est l'ensemble des zéros dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ des polynômes nuls sur G. Ainsi G' est Zariski-dense dans G si tout polynôme nul sur G' est aussi nul sur G.

Nous donnons maintenant une propriété importante de l'adhérence de Zariski : elle préserve la structure de groupe.

Proposition 3.1.2. *Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$, alors son adhérence de Zariski $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G)$ est encore un sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$.*

Pour la preuve on renvoie par exemple à [OV90]. Comme de plus l'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble est aussi un fermé pour la topologie usuelle, on en déduit que l'adhérence de Zariski d'un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ est encore un groupe de

Lie. Cela sera essentiel aux chapitres 4 et 5 pour pouvoir considérer l'algèbre de Lie de l'adhérence de Zariski du sous-groupe de Fürstenberg associé aux opérateurs étudiés.

Nous disposons maintenant des définitions élémentaires nous permettant de présenter le critère de Gol'dsheid et Margulis.

3.1.2 Sous-groupes Zariski-denses de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$

Aux chapitres 4 et 5 nous allons étudier la séparation et la stricte positivité des exposants de Lyapounov associés à des opérateurs donnés. Pour cela nous voulons pouvoir appliquer le résultat présenté au chapitre précédent au corollaire 2.3.8. Nous devons donc prouver que le sous-groupe de Fürstenberg associé aux opérateurs que nous allons étudier est p-contractant et L_p-fortement irréductible pour tout p. Si ces conditions sont vérifiables directement dans le cas des opérateurs à valeurs scalaires correspondant à (voir [DSS02b]), dans le cas d'opérateurs à valeurs matricielles, elles peuvent être particulièrement difficiles à vérifier. C'est pourquoi nous avons besoin d'un critère constructif permettant de prouver ces propriétés pour tout p. Ce critère est obtenu par Gol'dsheid et Margulis dans [GM89] et constitue une formulation algébrique de la p-contractivité et de la L_p-irréductibilité forte.

Théorème 3.1.3 (Gol'dsheid et Margulis). *Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. Si G est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, alors G est p-contractant et L_p-fortement irréductible pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$.*

Démonstration. D'après [GM89], lemme 6.2 et théorème 6.3, page 57, il suffit de prouver que la composante connexe de l'identité de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est irréductible dans L_p et que $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est p-contractant, et ce pour tout p. Pour la p-contractivité, d'après la proposition 2.2.10, il nous suffit de trouver un élément de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres soient de modules deux à deux distincts. Par exemple, la matrice suivante est dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & & \\ & 3 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & N+1 & & & & \\ & & & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & & & \frac{1}{3} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \frac{1}{N+1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$$

et toutes ses valeurs propres sont de modules distincts. Ainsi on a déjà prouvé que $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est p-contractant pour tout p.

Pour étudier l'irréductibilité dans L_p de la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, on commence par rappeler que $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est connexe. Ainsi la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ n'est autre que le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ lui-même. Nous sommes donc ramené à prouver que $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est irréductible dans L_p pour

tout p. C'est exactement ce que nous avons déjà prouvé en prouvant la proposition 2.3.9 au chapitre 2. Ceci achève la preuve du théorème. □

Avant de poursuivre, nous précisons tout de même le lemme 6.2 et le théorème 6.3 de [GM89] invoqué dans la preuve précédente. En effet, l'utilisation que l'on en fait ne correspond pas exactement aux énoncés trouvés dans [GM89], mais nécessite quelques petites précisions.

Lemme 3.1.4 ([GM89], lemme 6.2)**.** *Soit $p \in \{1, \dots, N\}$. Soient G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$, $X = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G)$ son adhérence de Zariski et X_0 la composante connexe de l'identité de X dans $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$. Alors, la L_p-irréductibilité forte de G est équivalente à l'irréductibilité de X_0 dans L_p.*

Démonstration. Pour prouver ce résultat, il suffit d'adapter à L_p la preuve de [GM89]. On fixe $p \in \{1, \dots, N\}$.

Tout d'abord, supposons que la condition de L_p-irréductibilité forte est satisfaite par G. On prouve alors que X_0 est irréductible dans L_p. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas et soit alors V un sous-espace stricte de L_p invariant par tout $g \in X_0$. Rappelons alors qu'une variété algébrique n'a qu'un nombre fini de composantes connexes (voir [Per95] par exemple). Soit alors $X_1, \dots, X_k$ les composantes connexes de X différentes de X_0. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on choisit un élément $g_i \in X_i$. On considère alors l'union suivante de sous-espaces stricts de L_p :

$$\bigcup_{i=1}^{k} g_i V$$

Étant donné que X_0 est un sous-groupe normal de X, pour tout couple (i, j) il existe un $s \in \{1, \dots, k\}$ tel que $g_i a g_j = g_s c$ avec $a, c \in X_0$. Or, si $g \in X$ on a : $g = g_j a$ avec $a \in X_0$ pour un certain $j \in \{1, \dots, k\}$. Alors, si $x \in \bigcup_{i=1}^{k} g_i V$, $x = g_i v$ et $gx = g g_i v = g_j a g_i v = g_s c v$. Or $cv \in V$ car $c \in X_0$ et V est invariant par tout élément de X_0. D'où :

$$gx \in g_s V \subset \bigcup_{i=1}^{k} g_i V$$

et cette union est invariante par tout élément de X et donc en particulier par tout élément de G, ce qui contredit la L_p-forte irréductibilité de G.

Réciproquement, supposons que X_0 est irréductible dans L_p et soit $\cup_{i=1}^{k} V_i$ une union finie de sous-espaces stricts de L_p qui soit invariante par tout élément de G. Comme l'invariance de cette union *finie* est une condition algébrique, cette union est aussi invariante par X. On rappelle alors que l'action des éléments de X sur tout sous-espace de L_p est continue. Alors, pour $g \in X_0$ dans un voisinage suffisamment petit de l'identité, $gV_i = V_i$. Il vient, par connexité, pour tout $g \in X_0$, $gV_i = V_i$. Cela contredit la L_p-irréductibilité de X_0. □

Lemme 3.1.5 ([GM89], théorème 6.3)**.** *Soit $p \in \{1, \dots, N\}$. Soit H un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, et soit $X = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(H)$ son adhérence de Zariski. Supposons que X est L_p-fortement irréductible et p-contractante. Alors H est aussi p-contractant.*

Démonstration. On peut reprendre point par point la preuve du théorème 6.3 page 58 dans [GM89] en remplaçant $\mathbb{R}^m$ par L_p. □

Nous avons donc à notre disposition un critère puissant, effectif dans certains cas, permettant de prouver qu'un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est L_p-fortement irréductible et p-contractant pour tout $p \in \{1, \ldots, N\}$. Ce critère suffit par exemple à étudier la cas d'opérateurs de Schrödinger discrets à valeurs matricielles comme dans [GM89] à la section 7. On peut aussi retrouver en utilisant ce critère le résultat de [DSS02b] dans le cas où le potentiel à un site est constant. On va voir aussi que ce critère suffit à étudier un modèle d'interactions ponctuelles au chapitre 4 et à prouver l'absence de spectre absolument continu pour un modèle d'Anderson matriciel au chapitre 5.

Prouver qu'un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ reste un problème constructif qui peut se révéler assez difficile à mettre en œuvre comme nous le verrons au chapitre 5. Déjà dans les travaux de Gol'dsheid et Margulis, la construction qui y est faite pour un opérateur de Schrödinger discret à valeurs matricielles est relativement ardue. Dans un premier temps, pour l'étude du modèle (5.2), nous avons voulu nous inspirer de cette construction. Nous nous sommes vite heurté au fait que nos matrices de transfert sont plus compliquées que dans le cas discret et la construction de [GM89] se révélant peu stable par perturbation, il ne nous a pas été possible de s'y ramener. Pour étudier le modèle (5.2) il nous a donc fallu trouver un moyen de prouver qu'un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est Zariski-dense. Nous avons finalement trouvé dans les travaux de Breuillard et Gelander un critère plus fort permettant de prouver qu'un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est dense pour la topologie usuelle dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. C'est ce critère et ses conséquences que nous allons présenter dans la section suivante.

3.2 Engendrer des sous-groupes de Lie denses

Nous allons donc présenter dans cette section un critère permettant de ramener la question de savoir si un sous-groupe d'un groupe de Lie semi-simple G engendré par un nombre fini d'éléments est dense, à un problème de reconstruction de l'algèbre de Lie de G. Ce résultat est présenté initialement dans [Bre03] et repris dans l'article [BG03]. Il est encore précisé dans [Bre06] où sont explorées certaines conséquences présentées ici.

Initialement, ce résultat est vu comme un résultat préliminaire à l'existence de sous-groupes libres denses dans des groupes de Lie semi-simples via l'étude d'une alternative de Tits topologique (voir [Bre06]).

Dans les travaux de Breuillard et Gelander, le résultat que nous allons énoncer est donné dans le cadre des groupes topologiquement parfaits. Commençons donc par en donner une définition et par voir pourquoi le groupe symplectique réel $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ l'est.

Définition 3.2.1. Un groupe de Lie connexe G est dit topologiquement parfait lorsque son groupe dérivé $[G, G]$ est dense dans G.

Dans notre cadre d'étude, on rappelle que le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est connexe et semi-simple. Or un groupe de Lie semi-simple connexe G vérifie toujours $[G, G] = G$,

il est donc topologiquement parfait. On pourra donc appliquer le théorème suivant avec $G = \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Théorème 3.2.2 (**Breuillard et Gelander**). *Soit G un groupe de Lie connexe réel topologiquement parfait, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il existe alors un voisinage de l'identité $\mathcal{O} \subset G$, sur lequel $\log = \exp^{-1}$ est un difféomorphisme bien défini et tel que $g_1, \dots g_m \in \mathcal{O}$ engendre un sous-groupe dense dans G si et seulement si $\log(g_1), \dots, \log(g_m)$ engendrent $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. La preuve de ce résultat est difficile et repose principalement sur le fait qu'il existe ce que l'on appelle un voisinage de Zassenhaus dans G, soit donc un voisinage de l'identité tel que son intersection avec tout sous-groupe discret de G soit contenu dans un sous-groupe de Lie connexe et nilpotent. Dans un groupe de Lie quelconque, un tel voisinage existe toujours. Ce résultat a tout d'abord été énoncé par Zassenhaus, puis prouvé par Kazhdan et Margulis. Pour une preuve de ce résultat on peut voir le théorème 8.16, page 147 dans [Rag72].

Pour le reste de la preuve on renvoie à [Bre03], section 6.2, théorème 2.1. □

Si on regarde la preuve de ce théorème donnée par Breuillard dans [Bre03] on se rend compte qu'en fait elle établit aussi le résultat suivant qui lui est équivalent :

Proposition 3.2.3. *Soit G un groupe de Lie connexe réel topologiquement parfait, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{A}$ la sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ engendrée par les $\mathrm{Ad}(g)$ lorsque g parcourt G.*

Alors il existe un voisinage de l'identité $\mathcal{O} \subset G$, sur lequel $\log = \exp^{-1}$ est un difféomorphisme bien défini et tel que $g_1, \dots g_m \in \mathcal{O}$ engendrent un sous-groupe dense dans G si et seulement si $\mathrm{Ad}(g_1), \dots, \mathrm{Ad}(g_m)$ engendrent $\mathcal{A}$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est contenue dans la preuve du théorème 2.1 de la section 6.2 de [Bre03]. Elle est aussi présentée dans [Bre06]. Précisons que le voisinage $\mathcal{O}$ est alors le même que celui du théorème 3.2.2. □

Ces deux résultats équivalents nous disent que dans un certain voisinage de l'identité (qui par construction ne dépend que de G), une partie finie est topologiquement génératrice si et seulement si elle est algébriquement génératrice de $\mathfrak{g}$ ou $\mathcal{A}$.

Au chapitre 5 nous utiliserons directement le théorème 3.2.2. Un corollaire important de ce théorème et de la proposition 3.2.3 mérite tout de même d'être énoncé, dans la mesure où ce corollaire nous dit que le fait de ne pas engendrer un sous-groupe dense est une condition qui intervient « très rarement » au sens topologique. On a :

Corollaire 3.2.4. *Si G est un groupe de Lie topologiquement parfait et si $\mathcal{O}$ est comme dans la proposition 3.2.3, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, les m-uplets de points de $\mathcal{O}$ qui n'engendrent pas un sous-groupe dense de G sont tous contenus dans une sous-variété analytique fermée propre de G^m, notée $\mathcal{V}_m$.*

Démonstration. En effet $\mathcal{V}_m$ est définie par une famille de conditions de type annulation d'un déterminant, car le fait d'engendrer $\mathcal{A}$ ou $\mathfrak{g}$ est une condition algébrique de ce type. On renvoie à [Bre06] pour plus de précisions. □

En particulier on déduit de ce corollaire que, pour un m-uplet, engendrer un sous-groupe dense dans G topologiquement parfait est une condition ouverte dans G^m. Mais ce corollaire précise encore la nature du fermé contenant les m-uplets qui n'engendrent pas un sous-groupe dense dans G. Une variété analytique fermée propre est un objet topologiquement très « petit », le caractère « propre » étant proche de la notion de compacité pour une variété.

De cette remarque, on déduit que dans l'exemple explicite que nous allons étudier au chapitre 5, il est naturel d'envisager que cette propriété sera vérifiée dès lors que l'on saura construire des éléments du sous-groupe de Fürstenberg étudié dans le voisinage $\mathcal{O}$. Malgré cela, nous verrons que les difficultés techniques pour arriver à un résultat rigoureux, et pas seulement heuristique, ne manquent pas...

Nous avons ainsi présenté dans ce chapitre de rappels tous les résultats de nature algébrique dans les groupes de Lie que nous utiliserons dans les chapitres 4 et 5. Nous allons pouvoir maintenant passer au chapitre 4 où nous donnons un premier résultat de séparation d'exposants de Lyapounov.

Chapitre 4

Positivité des exposants de Lyapounov pour un modèle d'interactions ponctuelles

Sommaire

4.1 Un modèle d'interactions ponctuelles 46
4.2 Le cas $N = 2$ 48
4.2.1 Le résultat principal 48
4.2.2 Preuve du théorème 4.2.1 pour les énergies $E > 1$ 50
4.2.3 Preuve pour les cas $-1 < E < 1$ et $E < -1$ 55
4.3 Le cas $N = 3$ 58
4.3.1 Le résultat principal 58
4.3.2 Preuve du théorème 4.3.1 pour les énergies $E > \sqrt{2}$ 59
4.3.3 Preuve pour les énergies $E < \sqrt{2}$ 64
4.3.4 Remarques finales 65

Dans ce chapitre nous allons présenter un premier résultat de positivité des exposants de Lyapounov et ce pour un modèle dit d'interactions ponctuelles. On entend par là un modèle défini par un opérateur du type :

$$H = -\Delta + \sum_{k \in K} \omega_k \delta_k(\,\cdot\,)$$

où K est un ensemble au plus dénombrable, δ_k est la distribution de Dirac en k et les ω_k sont des constantes de couplage, qui peuvent être aléatoires ou non en général. Une particule évoluant suivant cet hamiltonien est comme sous l'influence de sources ponctuelles, d'où le nom donné à ce type de modèles. Ce type de modèle a été étudié en physique dès les années 30. Les premiers travaux mathématiques rigoureux concernant ces modèles datent du début des années 60 et sont le fait de Berezin et Faddeev. Pour un historique complet détaillant en particulier les aspects physiques du problème, on renvoie à l'introduction de [AGHKH88].

L'intérêt des modèles d'interactions ponctuelles est qu'ils peuvent apparaître comme des approximations de modèles plus compliqués que l'on ne saurait étudier explicitement. En effet les modèles d'interactions ponctuelles amènent à des calculs explicites, par exemple en ce qui concerne leurs résolvantes ou comme nous le verrons ici, leurs matrices de transfert. Pour divers exemples de tels calculs on renvoie à [AGHKH88].

Pour étudier notre modèle d'interactions ponctuelles à valeurs matricielles nous suivrons la voie indiquée par le critère de Gol'dsheid et Margulis exposé au théorème 3.1.3 en prouvant que le sous-groupe de Fürstenberg associé à notre modèle est Zariski-dense dans le groupe symplectique. La théorie de Kotani exposée à la section 2.3.3 nous permettra de conclure à l'absence de spectre absolument continu pour l'opérateur étudié.

Dans une première partie, nous présentons le modèle étudié dans le cas général. Puis nous donnons les résultats que nous avons prouvés, à savoir les cas où le potentiel matriciel est de dimension 2 et 3. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec Günter Stolz. Le cas $N = 2$ a fait l'objet d'un article commun [BS07]. Le cas $N = 3$, qui constitue la dernière partie de ce chapitre, est obtenu par les mêmes techniques que celles mises en place pour le cas $N = 2$, nous ne détaillerons donc pas autant son étude.

4.1 Un modèle d'interactions ponctuelles

Nous présentons dans cette première partie un modèle continu d'interactions ponctuelles à valeurs matricielles. Soit $N \geq 1$ un entier. On étudie N opérateurs de Schrödinger unidimensionnels continus et déterministes, couplés, avec des interactions ponctuelles aléatoires aux points entiers. De façon formelle, un tel modèle est représenté par l'opérateur de Schrödinger aléatoire suivant :

$$H_P(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)}\delta_0(x-n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^{(n)}\delta_0(x-n) \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. Dans ce modèle, V_0 désigne l'opérateur de multiplication par la matrice à coefficients constants :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

et δ_0 est la distribution de Dirac en 0. D'autre part, $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \ldots, \omega_N^{(n)})$, $n \in \mathbb{Z}$, est une suite i.i.d. de variables aléatoires sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et de distribution commune ν sur $\mathbb{R}^N$. On suppose de plus que $\operatorname{supp}\nu \subset \mathbb{R}^N$ est borné et est générateur au sens où le sous-ensemble $\{x - y \mid x, y \in \operatorname{supp}\nu\}$ engendre $\mathbb{R}^N$.

Un tel exemple de distribution de variables aléatoires est celui où les composantes $\omega_1^{(n)}, \dots \omega_N^{(n)}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et dont le support contient au moins 2 points (par exemple 0 et 1 si ce sont des variables de Bernoulli). C'est cet exemple que nous aurons à l'esprit dans la suite.

L'introduction des distributions de Dirac dans l'opérateur 4.1 rend sa définition imprécise. Plus rigoureusement, nous allons considérer l'opérateur :

$$H_P(\omega) = \bigoplus_{i=1}^{N} H_{\omega_i} + V_0 \tag{4.3}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, H_{ω_i} est l'opérateur agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de domaine :

$$\begin{aligned} D(H_{\omega_i}) = \{ & f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f, f' \text{ sont absolument continues sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ f'' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ & f \text{ est continue sur } \mathbb{R},\ f'(n^+) = f'(n^-) + \omega_i^{(n)} f(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où les dérivées à gauche et à droite $f'(n^-)$ et $f'(n^+)$ en tout point entier n sont supposées exister. Sur ce domaine, l'opérateur agit par $H_{\omega_i} f = -f''$.

Ces opérateurs sont auto-adjoints et bornés inférieurement car la mesure ν est à support borné (voir par exemple [AGHKH88]). De plus l'opérateur de multiplication V_0 est borné et auto-adjoint car réel. Donc comme perturbation bornée d'un opérateur auto-adjoint, l'opérateur $H_P(\omega)$ défini par (4.3) est auto-adjoint pour tout ω. Son spectre presque sûr est donc inclus dans $\mathbb{R}$.

Remarque 4.1.1. On aurait aussi pu définir cet opérateur à l'aide des formes. Pour cette approche, on peut consulter [KK93]. Pour une discussion sur les différentes façons de définir rigoureusement un modèle d'interactions ponctuelles, on peut renvoyer à [Car91].

A ce modèle nous associerons le système différentiel $H_P(\omega)u = Eu$ pour $E \in \mathbb{R}$, le paramètre d'énergie. Puis nous associerons à ce système différentiel la suite des matrices de transfert comme à la section 2.3.3, ce qui nous permettra d'étudier le spectre absolument continu de $H_P(\omega)$ par la théorie de Kotani. Pour cela nous étudierons les exposants de Lyapounov associés à la suite des matrices de transfert.

Dans ce modèle, les paramètres aléatoires interviennent ponctuellement en chaque entier, au travers de conditions d'interface exprimées sur les dérivées des fonctions propres. Cela explique que l'on parle d'interactions ponctuelles. Ce modèle s'avère très proche d'un modèle discret comme celui étudié dans [GM89] ou [KLS90]. Du point de vue de l'aléa, nous allons retrouver la même dépendance des matrices de transfert que dans le cas discret, celui-ci n'intervenant qu'aux points entiers. En revanche, le fait de considérer un laplacien continu en dimension 1 au lieu d'un laplacien discret va changer la dépendance des matrices de transfert vis-à-vis du paramètre d'énergie. Cela conduira, nous le verrons dans les cas $N = 2$ et $N = 3$, à l'existence d'énergies critiques où les exposants de Lyapounov pourront s'annuler. Ces énergies critiques n'existent pas dans le cas discret étudié dans [GM89].

L'étude générale (pour N quelconque) du spectre absolument continu de l'opérateur (4.1) s'avère pour l'instant hors de notre portée. En collaboration avec Günter Stolz, nous sommes parvenus à étudier le cas $N = 2$. Puis nous avons aussi effectué les calculs nécessaires pour étudier le cas $N = 3$. Nous aurions pu ainsi continuer peut-être jusqu'aux cas $N = 4$ ou $N = 5$ mais cela n'aurait pas de sens aen l'absence d'un schéma général permettant d'appréhender le cas où N est quelconque. Nous allons présenter les résultats obtenus dans les sections suivantes, en commençant par le cas $N = 2$.

4.2 Le cas $N = 2$

Dans cette section nous reprenons l'étude faite dans [BS07]. Dans le modèle 4.1, on fixe $N = 2$. On étudie donc l'opérateur :

$$H_{P,2}(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} I_2 + V_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)}\delta_0(x-n) & 0 \\ 0 & \omega_2^{(n)}\delta_0(x-n) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$.

4.2.1 Le résultat principal

Afin d'étudier les exposants de Lyapounov associés à l'opérateur (4.5) on commence par introduire la suite des matrices de transfert associées au système différentiel :

$$H_{P,2}(\omega)u = Eu, \ E \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Nous allons voir comment les paramètres aléatoires qui interviennent dans le domaine (4.4) apparaissent dans les solutions du système (4.6).

Une fonction $u = (u_1, u_2) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ (non nécessairement de carré intégrable) est appelée solution du système (4.6) lorsque :

$$-\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}'' + V_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et u satisfait à la même condition d'interface que les éléments de $D(H_P(\omega))$, *i.e.* u est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie aux points entiers :

$$u_i'(n^+) = u_i'(n^-) + \omega_i^{(n)} u_i(n) \tag{4.8}$$

pour $i = 1, 2$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

Si $u = (u_1, u_2)$ est une solution du système (4.6), on définit la matrice de transfert $A^{\omega}_{(n,n+1]}(E)$ de n à $n+1$ par la relation

$$\begin{pmatrix} u_1((n+1)^+) \\ u_2((n+1)^+) \\ u_1'((n+1)^+) \\ u_2'((n+1)^+) \end{pmatrix} = A^{\omega}_{(n,n+1]}(E) \begin{pmatrix} u_1(n^+) \\ u_2(n^+) \\ u_1'(n^+) \\ u_2'(n^+) \end{pmatrix}.$$

En faisant ainsi, on y inclut l'effet de l'interaction ponctuelle en $n+1$ mais pas en n, ce qui permet d'assurer la propriété de multiplicativité des matrices de transfert sur plusieurs intervalles (le fait que pour aller de n à $n+2$ il suffit d'aller de n à $n+1$ puis de $n+1$ à $n+2$ correspond à multiplier les matrices de transfert). Comme à la section 2.3.3, cette suite de matrices aléatoires détermine les exposants de Lyapounov associés à l'opérateur (4.1) à l'énergie E.

Pour exprimer la matrice $A^{\omega}_{(n,n+1]}(E)$, on commence par résoudre le système libre (4.7) sur $(0,1)$. Puis en tenant compte de la condition d'interface (4.8) on voit que la matrice $A^{\omega}_{(n,n+1]}(E)$ peut s'écrire comme un produit de deux matrices :

$$A^{\omega}_{(n,n+1]}(E) = M(\mathrm{diag}(\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}))A_{(0,1)}(E), \tag{4.9}$$

où pour toute matrice Q de taille 2×2, on définit la matrice $M(Q)$ de taille 4×4 par $M(Q) := \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{smallmatrix}\right)$, où I est la matrice identité 2×2. Ainsi le premier facteur dans (4.9) ne dépend que des paramètres aléatoires et pas de l'énergie et le second facteur :

$$A_{(0,1)}(E) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -E & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

ne dépend que de l'énergie E.

De cette forme explicite, on déduit que les matrices $A^{\omega}_{(n,n+1]}(E)$ sont symplectiques, ce qui peut aussi être déduit de la théorie générale développée par exemple dans [KS88]. Comme ces matrices sont i.i.d., on peut noter leur loi commune μ_E. Elle est donnée pour tout borélien Γ de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\mu_E(\Gamma) = \nu(\{\omega^{(0)} \in \mathbb{R}^2 \mid \ M(\mathrm{diag}(\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}))A_{(0,1)}(E) \in \Gamma\}) \ . \tag{4.11}$$

comme à la section 2.2.1. Le sous-groupe de Fürstenberg associé à la suite $(A^{\omega}_{(n,n+1]}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ est donné par :

$$G_{\mu_E} = \overline{\langle M(\mathrm{diag}(\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}))A_{(0,1)}(E) \mid \omega^{(0)} \in \mathrm{supp}\,\nu\rangle} \ . \tag{4.12}$$

Nous pouvons enfin énoncer le résultat principal de cette partie pour le modèle (4.5) :

Théorème 4.2.1. *Il existe un sous-ensemble discret $\mathcal{S}_{P,2}$ de $\mathbb{R}$, tel que pour tout nombre réel $E \notin \mathcal{S}_{P,2}$, le sous-groupe G_{μ_E} soit Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. Ainsi*

$$\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0$$

pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,2}$, et l'opérateur $H_{P,2}(\omega)$ n'a presque sûrement pas de spectre absolument continu.

Remarque 4.2.2 (Réduction de la preuve du théorème 4.2.1)**.** Pour prouver ce théorème, il nous suffit d'en prouver la première assertion. En effet par le théorème 3.1.3 et par le corollaire 2.3.8, cela impliquera la séparation et la stricte positivité des deux premiers exposants de Lyapounov. Puis en appliquant le théorème 2.3.12, on obtient l'absence presque sûre de spectre absolument continu pour l'opérateur $H_{P,2}(\omega)$. En effet, par le théorème 2.3.12, le support essentiel du spectre absolument continu de $H_{P,2}(\omega)$ est contenu dans l'ensemble discret $\mathcal{S}_{P,2}$. En pratique pour pouvoir appliquer le théorème 2.3.12 à l'opérateur $H_{P,2}(\omega)$ il faudrait quelque peu adapter les preuves de [KS88] en faisant jouer à $H_{\omega_1} \oplus H_{\omega_2}$ le rôle du laplacien et à V_0 le rôle du potentiel matriciel symétrique borné que l'on y trouve. La construction et les propriétés des fonctions $\mathfrak{m}$ et w ne changent alors guère et seront reprises en détail au chapitre 7.

Dans les deux prochaines sections nous allons prouver la première assertion du théorème 4.2.1. Comme l'exponentielle matricielle (4.10) prendra des formes différentes suivant que $E > 1$, $-1 < E < 1$ ou $E < -1$, nous étudierons chacun de ces cas séparément. Nous verrons que dans les cas $-1 < E < 1$ et $E < -1$ les calculs sont en tous points similaires à ceux effectués dans le cas $E > 1$. C'est pourquoi nous allons commencer par détailler ce cas-là, puis nous expliquerons les changements à apporter pour prouver le théorème 4.2.1 dans les autres cas. On ne regardera pas en détail ce qui se passe pour les énergies $E = \pm 1$ dans la mesure où on peut les inclure dans l'ensemble discret $\mathcal{S}_{P,2}$.

4.2.2 Preuve du théorème 4.2.1 pour les énergies $E > 1$

Nous commençons donc par prouver que G_{μ_E} est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ pour toutes les énergies $E > 1$ en dehors d'un ensemble discret. Pour étudier le groupe G_{μ_E} on commence par donner une forme explicite des matrices de transfert. Pour cela nous devons calculer l'exponentielle de matrice qui définit $A_{(0,1)}(E)$. On suppose donc $E > 1$.

On commence par diagonaliser dans une base orthonormée la matrice réelle symétrique définissant V_0 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U$$

avec :

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est à la fois orthogonale et symétrique. Alors, en calculant les puissances successives de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -E & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en exprimant chaque bloc dans la base orthonormée définie par U, on obtient :

$$A_{(0,1)}(E) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} R_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

où $\alpha = \sqrt{E-1}$, $\beta = \sqrt{E+1}$, et

$$R_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \frac{1}{\alpha}\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & \frac{1}{\beta}\sin\beta \\ -\alpha\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & -\beta\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Maintenant que l'on a à notre disposition une forme explicite des matrices de transfert, expliquons la stratégie que nous allons suivre pour prouver la Zariski-densité de G_{μ_E} dans $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie connexe, pour prouver la Zariski-densité de G_{μ_E}, il suffit de prouver que l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$ (voir 3.1.2) est égale à l'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. L'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ est explicitement donnée par

$$\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -{}^t a \end{pmatrix},\ a \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ b_1 \text{ et } b_2 \text{ symétriques} \right\}, \tag{4.14}$$

qui est de dimension 10 (voir [MT86]). Ainsi notre stratégie consistera à prouver que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$, que l'on notera $\mathfrak{S}_2(E)$, est de dimension 10. Pour cela nous allons construire explicitement 10 éléments linéairement indépendants dans cette algèbre de Lie. Avant de nous lancer dans cette construction, nous prouvons le lemme suivant :

Lemme 4.2.3. *Pour toute matrice Q d'ordre 2, $M(Q) \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$ si et seulement si $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}_2(E)$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}_2(E)$. Alors :

$$M(Q) = \exp\left(M(Q) - I\right) \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$$

car $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$ est un groupe de Lie.

Réciproquement, si $M(Q) \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$, on considère le sous-groupe $G_Q := \{M(nQ) = M(Q)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$. Alors $M(xQ) \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_Q)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour prouver cela, soit p un polynôme en 4×4 variables tel que $p(A) = 0$ pour toute $A \in G_Q$. Alors le polynôme en une variable $\tilde{p}(x) := p(M(xQ))$ s'annule sur tout $\mathbb{Z}$, c'est donc le polynôme nul. Donc $p(M(xQ)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, par définition de l'adhérence de Zariski, $\in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_Q) \subset \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$. Enfin, en écrivant que, pour tout nombre réel x :

$$M(xQ) = I + x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix}$$

et en différentiant au point identité du groupe $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$ (i.e., en $x = 0$), on trouve par définition de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_2(E)$$

Cela conclut la preuve du lemme. □

Preuve du théorème 4.2.1 pour $E > 1$. Étape 1. D'après (4.9), on a :

$$A^{\tilde{\omega}^{(0)}}_{(0,1]}(E)A^{\omega^{(0)}}_{(0,1]}(E)^{-1} = M(\mathrm{diag}(\tilde{\omega}^{(0)}_1 - \omega^{(0)}_1, \tilde{\omega}^{(0)}_2 - \omega^{(0)}_2)) \in G_{\mu_E} \tag{4.15}$$

pour tout $\omega^{(0)}, \tilde{\omega}^{(0)} \in \operatorname{supp}\nu$. Comme $\mathfrak{S}_2(E)$ est une algèbre, le lemme 4.2.3 et le fait que $\operatorname{supp}\nu$ soit générateur impliquent que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_2(E)$ pour toute matrice diagonale Q.

Étape 2. En utilisant l'étape 1 et le lemme 4.2.3, on obtient que $M(Q) \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$ pour toute matrice diagonale Q. En particulier on en conclut que :

$$A_{(0,1)}(E) = M(\mathrm{diag}(\omega^{(0)}_1, \omega^{(0)}_2))^{-1}A_{(0,1]}(E) \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E}).$$

Étape 3. D'après une propriété générale des groupes de Lie linéaires on sait que :

$$XMX^{-1} \in \mathfrak{S}_2(E) \tag{4.16}$$

pour tout $M \in \mathfrak{S}_2(E)$ et $X \in G_{\mu_E}$. Alors par les étapes 1 et 2,

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} R^l_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ UQU & 0 \end{pmatrix} R^{-l}_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = A_{(0,1)}(E)^l \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix} A_{(0,1)}(E)^{-l} \in \mathfrak{S}_2(E), \tag{4.17}$$

où $Q = \mathrm{diag}(\omega^{(0)}_1, \omega^{(0)}_2)$ et $l \in \mathbb{Z}$. Mais on a aussi, puisque U est orthogonale et symétrique,

$$\mathfrak{S}_2(E) = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \tilde{\mathfrak{S}}_2(E) := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \mathfrak{S}_2(E) \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$$

Ainsi on se ramène à prouver que $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E) = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$. On utilisera pour cela que par (4.17)

$$R^l_{\alpha,\beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ UQU & 0 \end{pmatrix} R^{-l}_{\alpha,\beta} \in \tilde{\mathfrak{S}}_2(E) \tag{4.18}$$

pour tout $l \in \mathbb{Z}$ et pour toute matrice Q diagonale.

Étape 4. D'après l'étape 3, pour $(\omega^{(0)}_1, \omega^{(0)}_2) = (1, 1)$ et pour tout $l \in \mathbb{Z}$,

$$A_1(l) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}\sin(l\alpha)\cos(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha^2}\sin^2(l\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sin(l\beta)\cos(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(l\beta) \\ \cos^2(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha}\cos(l\alpha)\sin(l\alpha) & 0 \\ 0 & \cos^2(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta}\sin(l\beta)\cos(l\beta) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$$

On peut aussi choisir $(\omega^{(0)}_1, \omega^{(0)}_2) = (1, 0)$ pour obtenir $UQU = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et par multiplication par 2 et soustraction de la matrice identité on peut choisir $UQU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ à l'étape 3 pour obtenir :

$$A_2(l) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha}\sin(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sin(l\alpha)\sin(l\beta) \\ \frac{1}{\beta}\sin(l\beta)\cos(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sin(l\alpha)\sin(l\beta) & 0 \\ 0 & \cos(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta}\cos(l\alpha)\sin(l\beta) \\ \cos(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\alpha}\sin(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$$

Étape 5. On remarque que l'espace engendré par la famille de matrices $(A_1(l))_{l\in\mathbb{Z}}$ est orthogonal à celui engendré par la famille de matrices $(A_2(l))_{l\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$. On peut donc travailler indépendamment avec chacune de ces deux familles pour trouver suffisamment de matrices linéairement indépendantes dans $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$ pour engendrer un sous-espace de dimension 10. On commence par travailler avec la famille $(A_2(l))_{l\in\mathbb{Z}}$. On veut prouver que pour tout $E \in \mathbb{R}$ en dehors d'un ensemble discret, $A_2(0), A_2(1), A_2(2), A_2(3)$ sont linéairement indépendantes. Compte tenu des symétries présentes dans les coefficients de ces matrices, leur indépendance linéaire est équivalente à l'indépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ -\frac{1}{\alpha\beta}\sin\alpha\sin\beta \\ \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\cos\beta \\ \frac{1}{\beta}\sin\beta\cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(2\beta) \\ -\frac{1}{\alpha\beta}\sin(2\alpha)\sin(2\beta) \\ \frac{1}{\alpha}\sin(2\alpha)\cos(2\beta) \\ \frac{1}{\beta}\sin(2\beta)\cos(2\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(3\alpha)\cos(3\beta) \\ -\frac{1}{\alpha\beta}\sin(3\alpha)\sin(3\beta) \\ \frac{1}{\alpha}\sin(3\alpha)\cos(3\beta) \\ \frac{1}{\beta}\sin(3\beta)\cos(3\alpha) \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer le déterminant de ces quatre vecteurs :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha\cos\beta & \cos(2\alpha)\cos(2\beta) & \cos(3\alpha)\cos(3\beta) \\ 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sin\alpha\sin\beta & -\frac{1}{\alpha\beta}\sin(2\alpha)\sin(2\beta) & -\frac{1}{\alpha\beta}\sin(3\alpha)\sin(3\beta) \\ 0 & \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\cos\beta & \frac{1}{\alpha}\sin(2\alpha)\cos(2\beta) & \frac{1}{\alpha}\sin(3\alpha)\cos(3\beta) \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sin\beta\cos\alpha & \frac{1}{\beta}\sin(2\beta)\cos(2\alpha) & \frac{1}{\beta}\sin(3\beta)\cos(3\alpha) \end{vmatrix} \tag{4.19}$$

qui vaut :

$$\frac{4}{\alpha^2\beta^2}\sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)(\cos^2(\alpha)-\cos^2(\beta)) \ . \tag{4.20}$$

Cette fonction est analytique réelle en $E > 1$, sans accumulation de racines en 1, elle ne s'annule donc que sur un ensemble discret $\mathcal{S}_1$ d'énergies $E > 1$.

Étape 6. D'après l'étape 5, on sait que la famille $(A_2(0), A_2(1), A_2(2), A_2(3))$ engendre un sous-espace de dimension 4 de $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$ pour $E \in]1,\infty[\backslash\mathcal{S}_1$. Ces quatre matrices engendrent donc toutes les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & d \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & -b \\ c & 0 & -a & 0 \end{pmatrix},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. En particulier pour $a = 1$, $b = c = d = 0$,

$$B_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{S}}_2(E) \ .$$

Alors $B := \frac{1}{2}[B_0, A_2(0)] \in \tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$, où $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ est le crochet de Lie dans $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ correspondant au commutateur classique des matrices. On calcule B :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Étape 7. À cette étape on prouve que $A_1(0)$, $A_1(1)$, $A_1(2)$, $A_1(3)$, $A_1(4)$ et B sont linéairement indépendantes pour toutes les énergies $E > 1$ sauf celles contenues dans un ensemble discret. Compte tenu des symétries des coefficients et des zéros dans les matrices de la forme $A_1(l)$, il suffit de montrer l'indépendance linéaire des vecteurs formés par les coefficients $(3,1)$, $(4,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$ et $(2,4)$ de ces six matrices. Cela revient à montrer la non nullité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2(\alpha) & \cos^2(2\alpha) & \cos^2(3\alpha) & \cos^2(4\alpha) & 0 \\ 1 & \cos^2(\beta) & \cos^2(2\beta) & \cos^2(3\beta) & \cos^2(4\beta) & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha^2}\sin^2(\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sin^2(2\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sin^2(3\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sin^2(4\alpha) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(2\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(3\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(4\beta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{1}{\alpha}\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & \frac{1}{\alpha}\sin(3\alpha)\cos(3\alpha) & \frac{1}{\alpha}\sin(4\alpha)\cos(4\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sin\beta\cos\beta & \frac{1}{\beta}\sin(2\beta)\cos(2\beta) & \frac{1}{\beta}\sin(3\beta)\cos(3\beta) & \frac{1}{\beta}\sin(4\beta)\cos(4\beta) & 0 \end{vmatrix} \tag{4.21}$$

Or ce déterminant vaut :

$$\frac{64}{\alpha^3\beta^3}\sin^3(\alpha)\sin^3(\beta)\cos\alpha\cos\beta(\cos^2(\alpha)-\cos^2(\beta))^2 . \tag{4.22}$$

Comme à l'étape 5, on prouve que cette fonction réelle-analytique de $E > 1$ ne s'annule que pour E dans un ensemble discret $S_2 \subset]1,\infty[$. Ainsi pour $E \in]1,+\infty[\backslash \mathcal{S}_2$, $A_1(0), A_1(1), A_1(2), A_1(3), A_1(4), B$ sont linéairement indépendantes.

Étape 8. Tout d'abord on remarque que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$. Étant donné que les coefficients non nuls des matrices des familles $(A_1(l))_{l\in\mathbb{Z}}$ et $(A_2(l))_{l\in\mathbb{Z}}$ sont à des places complémentaires, les sous-espaces engendrés d'une part par $A_1(0)$, $A_1(1)$, $A_1(2)$, $A_1(3)$, $A_1(4)$, B et d'autre part par $A_2(0)$, $A_2(1)$, $A_2(2)$, $A_2(3)$ sont orthogonaux (pour le produit scalaire usuel sur les matrices, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tBA)$). Si $E \in]1,\infty[\backslash S_2$, ces deux ensembles de matrices forment alors une famille libre de 10 matrices toutes contenues dans $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$. Ainsi l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$ est de dimension au moins 10 et comme elle est incluse dans $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension exactement 10, elle lui est égale. Comme précisé précédemment, la connexité du groupe de Lie $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ permet de conclure que :

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$$

Le théorème 4.2.1 est donc prouvé lorsque $E > 1$. □

Pour prouver complètement le théorème 4.2.1, il nous reste à étudier ce qui se passe lorsque $E < 1$. Pour cela nous étudierons deux cas distincts suivant que $-1 < E < 1$ ou $E < -1$.

4.2.3 Preuve pour les cas $-1 < E < 1$ et $E < -1$

Nous expliquons comment adapter la construction que nous venons de faire dans le cas où $E < 1$. Nous allons commencer par voir ce qui se passe dans le cas où $-1 < E < 1$.

La différence avec le cas $E > 1$ se situe dans l'expression de la matrice $A_{(0,1)}(E)$ qui change quelque peu. En effet, $E - 1$ est maintenant négatif et donc on est amené à poser $\alpha = \sqrt{1-E}$ et, comme auparavant, $\beta = \sqrt{E+1}$. Par ailleurs, la matrice U qu ne dépend pas de E reste inchangée. En revanche on remplace $R_{\alpha,\beta}$ par :

$$\tilde{R}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & \frac{1}{\beta}\sin\beta \\ \alpha\sinh(\alpha) & 0 & \cosh(\alpha) & 0 \\ 0 & -\beta\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} .$$

Preuve du théorème 4.2.1 pour $-1 < E < 1$. En fait, on peut suivre la preuve pour le cas $E > 1$. Nous ne précisons ici que les changements à apporter à celle-ci. Les étapes 1 et 2 restent inchangées. À l'étape 3, on remplace $R_{\alpha,\beta}$ par $\tilde{R}_{\alpha,\beta}$ et ainsi à l'étape 4 on obtient que pour tout $l \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{A}_1(l) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}\sinh(l\alpha)\cosh(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(l\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sin(l\beta)\cos(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(l\beta) \\ \cosh^2(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha}\cosh(l\alpha)\sinh(l\alpha) & 0 \\ 0 & \cos^2(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta}\sin(l\beta)\cos(l\beta) \end{pmatrix}$$

est dans $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$, et

$$\tilde{A}_2(l) := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha}\sinh(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(l\alpha)\sin(l\beta) \\ \frac{1}{\beta}\sin(l\beta)\cosh(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(l\alpha)\sin(l\beta) & 0 \\ 0 & \cosh(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta}\cosh(l\alpha)\sin(l\beta) \\ \cosh(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\alpha}\sinh(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 \end{pmatrix}$$

est dans $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$. À l'étape 5 on obtient encore qu'en dehors d'un ensemble discret d'énergies, $\tilde{A}_2(0)$, $\tilde{A}_2(1)$, $\tilde{A}_2(2)$, $\tilde{A}_2(3)$ sont linéairement indépendantes. Le déterminant construit à partir des coefficients de ces matrices est le suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh(\alpha)\cos\beta & \cosh(2\alpha)\cos(2\beta) & \cosh(3\alpha)\cos(3\beta) \\ 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(\alpha)\sin\beta & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(2\alpha)\sin(2\beta) & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(3\alpha)\sin(3\beta) \\ 0 & \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha)\cos\beta & \frac{1}{\alpha}\sinh(2\alpha)\cos(2\beta) & \frac{1}{\alpha}\sinh(3\alpha)\cos(3\beta) \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sin\beta\cosh(\alpha) & \frac{1}{\beta}\sin(2\beta)\cosh(2\alpha) & \frac{1}{\beta}\sin(3\beta)\cosh(3\alpha) \end{vmatrix} \tag{4.23}$$

et il vaut :

$$\frac{4}{\alpha^2\beta^2}\sinh^2(\alpha)\sin^2(\beta)(\cosh^2(\alpha) - \cos^2(\beta)) , \tag{4.24}$$

Cette fonction de E ne s'annule que sur un enemble fini de points $\mathcal{S}_3$ dans l'intervalle $]-1, 1[$.

L'étape 6 ne change pas, excepté le fait que maintenant $B \in \tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$ pour tout $E \in]-1, 1[\backslash\mathcal{S}_3$. À l'étape 7 on définit de la même façon que dans la preuve précédente une

matrice 6×6 à partir des coefficients de $\tilde{A}_1(0), \ldots, \tilde{A}_1(4), B$, ce qui amène à considérer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh^2(\alpha) & \cosh^2(2\alpha) & \cosh^2(3\alpha) & \cosh^2(4\alpha) & 0 \\ 1 & \cos^2(\beta) & \cos^2(2\beta) & \cos^2(3\beta) & \cos^2(4\beta) & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(2\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(3\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(4\alpha) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(2\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(3\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sin^2(4\beta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha)\cosh(\alpha) & \frac{1}{\alpha}\sinh(2\alpha)\cosh(2\alpha) & \frac{1}{\alpha}\sinh(3\alpha)\cosh(3\alpha) & \frac{1}{\alpha}\sinh(4\alpha)\cosh(4\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sin\beta\cos\beta & \frac{1}{\beta}\sin(2\beta)\cos(2\beta) & \frac{1}{\beta}\sin(3\beta)\cos(3\beta) & \frac{1}{\beta}\sin(4\beta)\cos(4\beta) & 0 \end{vmatrix} \tag{4.25}$$

qui vaut :

$$\frac{64}{\alpha^3\beta^3}\sinh^3(\alpha)\sin^3(\beta)\cosh(\alpha)\cos\beta(\cosh^2(\alpha)-\cos^2(\beta))^2 \ . \tag{4.26}$$

Les zéros de cette fonction analytique en E forment un sous-ensemble fini $\mathcal{S}_4$ de $]-1,1[$ qui contient $\mathcal{S}_3$. Enfin, on en conclut comme à l'étape 8, que pour toute énergie $E \in]-1,1[\backslash\mathcal{S}_4$, on a $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. $\square$

Nous expliquons brièvement le cas $E < -1$. Là encore, la différence avec le cas $E > 1$ se situe dans l'expression de la matrice $A_{(0,1)}(E)$. Comme $E-1$ et $E+1$ sont négatifs on pose $\alpha = \sqrt{1-E}$ et $\beta = \sqrt{-E-1}$. La matrice U est encore inchangée et $R_{\alpha,\beta}$ devient :

$$\tilde{\tilde{R}}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & 0 & \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha) & 0 \\ 0 & \cosh\beta & 0 & \frac{1}{\beta}\sinh\beta \\ \alpha\sinh(\alpha) & 0 & \cosh(\alpha) & 0 \\ 0 & \beta\sinh\beta & 0 & \cosh\beta \end{pmatrix} .$$

Preuve du théorème 4.2.1 pour $E < -1$. Les étapes 1 et 2 restent inchangées. A l'étape 3, on remplace $R_{\alpha,\beta}$ par $\tilde{\tilde{R}}_{\alpha,\beta}$ et ainsi à l'étape 4 on obtient que pour tout $l \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{\tilde{A}}_1(l) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}\sinh(l\alpha)\cosh(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(l\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sinh(l\beta)\cosh(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta^2}\sinh^2(l\beta) \\ \cosh^2(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha}\cosh(l\alpha)\sinh(l\alpha) & 0 \\ 0 & \cosh^2(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta}\sinh(l\beta)\cosh(l\beta) \end{pmatrix}$$

est dans $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$, et

$$\tilde{\tilde{A}}_2(l) := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha}\sinh(l\alpha)\cosh(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(l\alpha)\sinh(l\beta) \\ \frac{1}{\beta}\sinh(l\beta)\cosh(l\alpha) & 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(l\alpha)\sinh(l\beta) & 0 \\ 0 & \cosh(l\alpha)\cosh(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\beta}\cosh(l\alpha)\sinh(l\beta) \\ \cosh(l\alpha)\cosh(l\beta) & 0 & -\frac{1}{\alpha}\sinh(l\alpha)\cosh(l\beta) & 0 \end{pmatrix}$$

est dans $\tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$.

À l'étape 5 le déterminant construit à partir des matrices $\tilde{\tilde{A}}_2(0)$, $\tilde{\tilde{A}}_2(1)$, $\tilde{\tilde{A}}_2(2)$, et $\tilde{\tilde{A}}_2(3)$ est le suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh(\alpha)\cosh\beta & \cosh(2\alpha)\cosh(2\beta) & \cosh(3\alpha)\cosh(3\beta) \\ 0 & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(\alpha)\sinh\beta & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(2\alpha)\sinh(2\beta) & -\frac{1}{\alpha\beta}\sinh(3\alpha)\sinh(3\beta) \\ 0 & \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha)\cosh\beta & \frac{1}{\alpha}\sinh(2\alpha)\cosh(2\beta) & \frac{1}{\alpha}\sinh(3\alpha)\cosh(3\beta) \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sinh\beta\cosh(\alpha) & \frac{1}{\beta}\sinh(2\beta)\cosh(2\alpha) & \frac{1}{\beta}\sinh(3\beta)\cosh(3\alpha) \end{vmatrix} \tag{4.27}$$

et il vaut :

$$\frac{4}{\alpha^2\beta^2}\sinh^2(\alpha)\sinh^2(\beta)(\cosh^2(\alpha)-\cosh^2(\beta)). \tag{4.28}$$

Cette fonction de E ne s'annule que sur un sous-ensemble discret $\mathcal{S}_5$ inclus dans l'intervalle $]-\infty,-1[$.

L'étape 6 ne change pas, excepté le fait que maintenant $B \in \tilde{\mathfrak{S}}_2(E)$ pour tout $E \in]-\infty,-1[\backslash\mathcal{S}_5$. A l'étape 7 on considère le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh^2(\alpha) & \cosh^2(2\alpha) & \cosh^2(3\alpha) & \cosh^2(4\alpha) & 0 \\ 1 & \cosh^2(\beta) & \cosh^2(2\beta) & \cosh^2(3\beta) & \cosh^2(4\beta) & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(2\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(3\alpha) & -\frac{1}{\alpha^2}\sinh^2(4\alpha) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\beta^2}\sinh^2(\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sinh^2(2\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sinh^2(3\beta) & -\frac{1}{\beta^2}\sinh^2(4\beta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha)\cosh(\alpha) & \frac{1}{\alpha}\sinh(2\alpha)\cosh(2\alpha) & \frac{1}{\alpha}\sinh(3\alpha)\cosh(3\alpha) & \frac{1}{\alpha}\sinh(4\alpha)\cosh(4\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta}\sinh\beta\cosh\beta & \frac{1}{\beta}\sinh(2\beta)\cosh(2\beta) & \frac{1}{\beta}\sinh(3\beta)\cosh(3\beta) & \frac{1}{\beta}\sinh(4\beta)\cosh(4\beta) & 0 \end{vmatrix} \tag{4.29}$$

qui vaut :

$$\frac{64}{\alpha^3\beta^3}\sinh^3(\alpha)\sinh^3(\beta)\cosh(\alpha)\cosh\beta(\cosh^2(\alpha)-\cosh^2(\beta))^2\ . \tag{4.30}$$

Les zéros de cette fonction analytique en E forment un sous-ensemble discret $\mathcal{S}_6$ de $]-\infty,-1[$ qui contient $\mathcal{S}_5$. Enfin, on en conclut comme à l'étape 8 que pour toute énergie $E \in]-\infty,-1[\backslash\mathcal{S}_6$, on a $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. □

Preuve du théorème 4.2.1. La première assertion du théorème 4.2.1 est donc prouvée si l'on pose $\mathcal{S}_{P,2} = \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_6$ qui est bien un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$. Cela suffit pour établir le théorème 4.2.1 tout entier, comme nous l'avons déjà observé à la remarque 4.2.2. □

Cela conclut l'étude du modèle (4.5). Nous allons maintenant voir comment les idées développées pour ce modèle peuvent encore s'appliquer au cas où $N = 3$ dans le modèle 4.1. C'est l'objet de la prochaine et dernière partie de ce chapitre.

4.3 Le cas $N = 3$

À présent, dans le modèle 4.1, on fixe $N = 3$. On étudie donc l'opérateur :

$$H_{P,3}(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} I_3 + V_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)}\delta_0(x-n) & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^{(n)}\delta_0(x-n) & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^{(n)}\delta_0(x-n) \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3)$. Nous allons suivre le schéma d'étude adopté pour le cas $N = 2$. Nous n'hésiterons pas à reprendre des notations déjà adoptées pour $N = 2$ afin de bien montrer l'analogie entre les cas $N = 2$ et $N = 3$.

4.3.1 Le résultat principal

On souhaite étudier la séparation des exposants de Lyapounov associés à $H_{P,3}(\omega)$. De même que pour l'étude des exposants de Lyapounov associés à l'opérateur (4.5) on commence par introduire la suite des matrices de transfert associées au système différentiel :

$$H_{P,3}(\omega)u = Eu, \ E \in \mathbb{R}. \tag{4.32}$$

Comme pour (4.7), une fonction $u = (u_1, u_2, u_3) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ (non nécessairement de carré intégrable) est appelée solution du système (4.32) lorsque :

$$-\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}'' + V_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et u satisfait à la même condition d'interface que les éléments de $D(H_P(\omega))$, *i.e.* u est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie aux points entiers :

$$u_i'(n^+) = u_i'(n^-) + \omega_i^{(n)} u_i(n) \tag{4.34}$$

pour $i = 1, 2, 3$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ est une solution du système (4.32), on définit la matrice de transfert $A^{\omega}_{(n,n+1]}(E)$ de n à $n+1$ par la relation

$$\begin{pmatrix} u_1((n+1)^+) \\ u_2((n+1)^+) \\ u_3((n+1)^+) \\ u_1'((n+1)^+) \\ u_2'((n+1)^+) \\ u_3'((n+1)^+) \end{pmatrix} = A^{\omega}_{(n,n+1]}(E) \begin{pmatrix} u_1(n^+) \\ u_2(n^+) \\ u_3(n^+) \\ u_1'(n^+) \\ u_2'(n^+) \\ u_3'(n^+) \end{pmatrix}$$

De même que dans le cas $N = 2$, on voit que la matrice $A^{\omega}_{(n,n+1]}(E)$ peut s'écrire comme un produit de deux matrices :

$$A^{\omega}_{(n,n+1]}(E) = M(\mathrm{diag}(\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \omega_3^{(n)}))A_{(0,1)}(E) \ . \tag{4.35}$$

où, cette fois-ci, pour toute matrice Q de taille 3×3, on définit la matrice $M(Q)$ de taille 6×6 par $M(Q) := \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{smallmatrix}\right)$, où I est la matrice identité 3×3. Ainsi le premier facteur dans (4.35) ne dépend que des paramètres aléatoires et pas de l'énergie, tandis que le second facteur :

$$A_{(0,1)}(E) = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -E & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -E & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

ne dépend que de l'énergie E.

Bien entendu, les matrices $A^{\omega}_{(n,n+1]}(E)$ sont encore symplectiques. On définit leur loi commune μ_E et leur sous-groupe de Fürstenberg associé comme à la section 4.2.1. Ce sous-groupe de Fürstenberg que l'on notera G_{3,μ_E} est alors un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_3(\mathbb{R})$.

Nous avons alors l'analogue du théorème 4.2.1 pour le modèle (4.31) :

Théorème 4.3.1. *Il existe un sous-ensemble discret $\mathcal{S}_{P,3}$ de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout nombre réel $E \notin \mathcal{S}_{P,3}$, le sous-groupe G_{3,μ_E} soit Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_3(\mathbb{R})$. Ainsi,*

$$\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > \gamma_3(E) > 0$$

pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_{P,3}$, et l'opérateur $H_{P,3}(\omega)$ n'a presque sûrement pas de spectre absolument continu.

Remarque 4.3.2. La remarque 4.2.2 s'applique encore pour le modèle (4.31). Pour établir le théorème 4.3.1 il nous suffira donc de prouver que G_{3,μ_E} est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_3(\mathbb{R})$.

Comme l'exponentielle de matrice définissant $A_{(0,1)}(E)$ prend des formes différentes suivant les valeurs de E, nous avons de nouveau à distinguer plusieurs cas.

4.3.2 Preuve du théorème 4.3.1 pour les énergies $E > \sqrt{2}$

Nous commençons par donner la forme explicite de $A^{\omega}_{(n,n+1]}(E)$, ce qui revient à calculer l'exponentielle de matrice $A_{(0,1)}(E)$. Pour cela on commence par diagonaliser dans une base orthonormée la matrice symétrique réelle qui définit V_0. On fixe $E > \sqrt{2}$. On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} U^{-1}$$

avec :

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$U^{-1} = {}^tU = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, en calculant les puissances successives de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -E & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -E & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en exprimant chaque bloc dans la base orthonormée définie par U, on obtient :

$$A_{(0,1)}(E) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} R_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.37}$$

où $\alpha = \sqrt{E-1}$, $\beta = \sqrt{E-\sqrt{2}}$, $\gamma = \sqrt{E+\sqrt{2}}$ et

$$R_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha}\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 & \frac{1}{\beta}\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\gamma & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma}\sin\gamma \\ -\alpha\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta\sin\beta & 0 & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma\sin\gamma & 0 & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

La stratégie de preuve est la même que pour le cas $N = 2$, si ce n'est qu'à présent il nous faudra construire une famille libre de 21 matrices dans $\mathfrak{S}_3(E)$ l'algèbre de Lie de l'adhérence de Zariski de G_{3,μ_E}. En effet, $\mathfrak{sp}_3(\mathbb{R})$, définie comme (4.14) mais avec $a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, est maintenant de dimension 21.

Le lemme 4.2.3 est encore valable, cette fois pour Q d'ordre 3 et en remplaçant $\mathfrak{S}_2(E)$ par $\mathfrak{S}_3(E)$. Nous allons donc voir comment s'adapte la preuve du théorème 4.2.1 dans notre cas.

Preuve du théorème 4.3.1 pour $E > \sqrt{2}$. Étape 1. D'après (4.35), on a :

$$A^{\tilde{\omega}^{(0)}}_{(0,1]}(E) A^{\omega^{(0)}}_{(0,1]}(E)^{-1} = M(\mathrm{diag}(\tilde{\omega}^{(0)}_1 - \omega^{(0)}_1, \tilde{\omega}^{(0)}_2 - \omega^{(0)}_2, \tilde{\omega}^{(0)}_3 - \omega^{(0)}_3)) \in G_{3,\mu_E} \tag{4.38}$$

pour tout $\omega^{(0)}, \tilde{\omega}^{(0)} \in \mathrm{supp}\,\nu$. Comme $\mathfrak{S}_3(E)$ est une algèbre, le lemme 4.2.3 et le fait que $\mathrm{supp}\,\nu$ soit générateur impliquent que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}_3(E)$ pour toute matrice diagonale Q d'ordre 3.

Étape 2. Comme à l'étape 2 de la preuve du théorème 4.2.1 on obtient que $M(Q) \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\mu_E})$ pour toute matrice diagonale Q d'ordre 3. Donc, en particulier :

$$A_{(0,1)}(E) \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{3,\mu_E}).$$

Étape 3. Là encore, comme à l'étape 3 de la preuve du théorème 4.2.1, on a :

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} R^l_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U^{-1}QU & 0 \end{pmatrix} R^{-l}_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} = A_{(0,1)}(E)^l \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix} A_{(0,1)}(E)^{-l} \tag{4.39}$$

est dans $\mathfrak{S}_3(E)$, où $Q = \mathrm{diag}(\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \omega_3^{(0)})$ et $l \in \mathbb{Z}$. Or comme U est orthogonale, on a :

$$\mathfrak{S}_3(E) = \mathfrak{sp}_3(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \tilde{\mathfrak{S}}_3(E) := \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \mathfrak{S}_3(E) \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} = \mathfrak{sp}_3(\mathbb{R})$$

Ainsi on se ramène à prouver que $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E) = \mathfrak{sp}_3(\mathbb{R})$. On utilisera pour cela que par (4.39)

$$R^l_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U^{-1}QU & 0 \end{pmatrix} R^{-l}_{\alpha,\beta,\gamma} \in \tilde{\mathfrak{S}}_3(E) \tag{4.40}$$

pour tout $l \in \mathbb{Z}$ et pour toute matrice diagonale Q d'ordre 3.

Étape 4. On peut choisir $Q = \mathrm{diag}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ pour obtenir :

$$U^{-1}QU = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après l'étape 3, pour $l \in \mathbb{Z}$ on obtient que

$$D_1(l) := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin(l\alpha)\cos(l\beta)}{\alpha} & \frac{\sin(l\alpha)\cos(l\gamma)}{\alpha} & 0 & \frac{\sin(l\alpha)\sin(l\beta)}{\alpha\beta} & \frac{\sin(l\alpha)\sin(l\gamma)}{\alpha\gamma} \\ \frac{\sin(l\beta)\cos(l\alpha)}{\beta} & 0 & 0 & \frac{\sin(l\alpha)\sin(l\beta)}{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ \frac{\sin(l\gamma)\cos(l\alpha)}{\gamma} & 0 & 0 & \frac{\sin(l\alpha)\sin(l\gamma)}{\alpha\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(l\alpha)\cos(l\beta) & -\cos(l\alpha)\cos(l\gamma) & 0 & -\frac{\sin(l\beta)\cos(l\alpha)}{\beta} & -\frac{\sin(l\gamma)\cos(l\alpha)}{\gamma} \\ -\cos(l\alpha)\cos(l\beta) & 0 & 0 & -\frac{\sin(l\alpha)\cos(l\beta)}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\cos(l\alpha)\cos(l\gamma) & 0 & 0 & -\frac{\sin(l\alpha)\cos(l\gamma)}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$. De même on peut choisir $Q = \mathrm{diag}(2, 0, 2)$ pour obtenir :

$$U^{-1}QU = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc pour $l \in \mathbb{Z}$:

$$D_2(l) : \begin{pmatrix} \frac{2\sin(l\alpha)\cos(l\alpha)}{\alpha} & 0 & 0 & -\frac{2\sin^2(l\alpha)}{\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin(l\beta)\cos(l\beta)}{\beta} & \frac{\sin(l\beta)\cos(l\gamma)}{\beta} & 0 & -\frac{\sin^2(l\beta)}{\beta^2} & -\frac{\sin(l\beta)\sin(l\gamma)}{\beta\gamma} \\ 0 & \frac{\sin(l\gamma)\cos(l\beta)}{\gamma} & \frac{\sin(l\gamma)\cos(l\gamma)}{\gamma} & 0 & -\frac{\sin(l\beta)\sin(l\gamma)}{\beta\gamma} & -\frac{\sin^2(l\gamma)}{\gamma^2} \\ 2\cos^2(l\alpha) & 0 & 0 & -\frac{2\cos(l\alpha)\sin(l\alpha)}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(l\beta) & \cos(l\beta)\cos(l\gamma) & 0 & -\frac{\sin(l\beta)\cos(l\beta)}{\beta} & -\frac{\sin(l\gamma)\cos(l\beta)}{\gamma} \\ 0 & \cos(l\beta)\cos(l\gamma) & \cos^2(l\gamma) & 0 & -\frac{\sin(l\beta)\cos(l\gamma)}{\beta} & -\frac{\sin(l\gamma)\cos(l\gamma)}{\gamma} \end{pmatrix}$$

appartient à $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$.

Étape 5. De même que dans la preuve du cas $N = 2$, on commence par prouver que les matrices $D_1(0), \ldots, D_1(7)$ forment une famille libre pour tous les E hors d'un ensemble

discret $\tilde{S}_1 \subset]\sqrt{2}, +\infty[$. En effet, on peut calculer le déterminant de taille 8×8 formé des vecteurs colonnes :

$$\begin{pmatrix} -\cos(l\alpha)\cos(l\beta) \\ -\cos(l\alpha)\cos(l\gamma) \\ \frac{\sin(l\alpha)\sin(l\beta)}{\alpha\beta} \\ \frac{\sin(l\alpha)\sin(l\gamma)}{\alpha\gamma} \\ \frac{\sin(l\alpha)\cos(l\beta)}{\alpha} \\ \frac{\sin(l\alpha)\cos(l\gamma)}{\alpha} \\ \frac{\sin(l\beta)\cos(l\alpha)}{\beta} \\ \frac{\sin(l\gamma)\cos(l\alpha)}{\gamma} \end{pmatrix}, \ l = 0, \ldots, 7.$$

On obtient alors :

$$4096 \sin^4(\alpha)\sin^2(\beta)\sin^2(\gamma)(\cos\alpha - \cos\beta)^4(\cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta))(\cos^2(\alpha) - \cos^2(\gamma)) \times \\ \times \left(-\sin^2(2\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) + 2\cos\beta\cos\gamma(1 - 2\cos^2(\alpha))\right)^2$$

qui est une fonction analytique réelle en E non identiquement nulle. Donc ce déterminant ne s'annule que pour des valeurs dans un ensemble discret $\tilde{S}_1$.

Étape 6. On prend $E \in]\sqrt{2}, +\infty[\backslash \tilde{S}_1$. Alors par ce que l'on vient de montrer à l'étape 5, toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 & g & h \\ c & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & e & f & 0 & -c & -d \\ e & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $(a, b, c, d, e, f, g, h) \in \mathbb{R}^8$ sont dans $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$. En particulier :

$$\tilde{B}_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$$

et :

$$\tilde{B}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$$

Donc, comme $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$ est une algèbre de Lie :

$$B_0 := [\tilde{B}_0, D_1(0)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$$

et

$$B_1 := [\tilde{B}_1, D_1(0)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$$

Étape 7. On peut alors prouver que $(B_0, B_1, D_2(0), \ldots, D_2(10))$ est une famille libre de 13 éléments dans $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$. Cela revient à prouver que le déterminant de taille 13×13 suivant est non identiquement nul :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 2\cos^2(\alpha) & \ldots & \ldots & 2\cos^2(10\alpha) \\ 2 & 0 & 1 & \cos^2(\beta) & \ldots & \ldots & \cos^2(10\beta) \\ 0 & 2 & 1 & \cos^2(\gamma) & \ldots & \ldots & \cos^2(10\gamma) \\ 1 & 1 & 1 & \cos\beta\cos\gamma & \ldots & \ldots & \cos(10\beta)\cos(10\gamma) \\ 0 & 0 & 0 & -2\frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2} & \ldots & \ldots & -2\frac{\sin^2(10\alpha)}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} & \ldots & \ldots & -\frac{\sin^2(10\beta)}{\beta^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin^2(\gamma)}{\gamma^2} & \ldots & \ldots & -\frac{\sin^2(10\gamma)}{\gamma^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin\gamma\sin\beta}{\gamma\beta} & \ldots & \ldots & -\frac{\sin(10\gamma)\sin(10\beta)}{\gamma\beta} \\ 0 & 0 & 0 & -2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\alpha} & \ldots & \ldots & -2\frac{\sin(10\alpha)\cos(10\alpha)}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin\beta\cos\beta}{\beta} & \ldots & \ldots & -\frac{\sin(10\beta)\cos(10\beta)}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\gamma} & \ldots & \ldots & -\frac{\sin(10\gamma)\cos(10\gamma)}{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin\beta\cos\gamma}{\beta} & \ldots & \ldots & -\frac{\sin(10\beta)\cos(10\gamma)}{\beta} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin\gamma\cos\beta}{\gamma} & \ldots & \ldots & -\frac{\sin(10\gamma)\cos(10\beta)}{\gamma} \end{vmatrix} \tag{4.41}$$

On peut le vérifier à l'aide d'un système de calcul formel. Par exemple, on peut vérifier numériquement que pour $E = 1,6 > \sqrt{2}$, ce déterminant vaut environ $-3507 \neq 0$ (on vérifie aussi numériquement que $E = 1,6 \notin \tilde{S}_1$). Ainsi, comme ce déterminant est une fonction analytique en E sur $]\sqrt{2}, +\infty[$, il ne s'annule que sur un ensemble discret de valeurs de E, soit $\tilde{S}_2$. Ainsi, pour $E \in]\sqrt{2}, +\infty[\backslash \tilde{S}_2$, les matrices $(B_0, B_1, D_2(0), \ldots, D_2(10))$ forment une famille linéairement indépendante.

Étape 8. Tout d'abord, on pose $\tilde{S}_3 = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$. Soit alors $E \in]\sqrt{2}, +\infty[\backslash \tilde{S}_3$.

Comme à l'étape 8 de la preuve du théorème 4.2.1, les familles $(D_1(0), \ldots, D_1(7))$ et $(B_0, B_1, D_2(0), \ldots, D_2(10))$ engendrent des sous-espaces orthogonaux qui sont respectivement de dimension 8 et 13. Leur somme directe, qui reste contenue dans $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$, est donc de dimension 21. L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$ est alors de dimension au moins 21 et comme $\mathfrak{sp}_3(\mathbb{R})$ est de dimension exactement 21 et contient $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E)$, on en déduit que pour tout $E \in]\sqrt{2}, +\infty[\backslash \tilde{S}_3$:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_3(E) = \mathfrak{sp}_3(\mathbb{R}),$$

ce qui achève la preuve de la Zariski-densité de G_{3,μ_E} dans $\mathrm{Sp}_3(\mathbb{R})$ pour $E \in]\sqrt{2}, +\infty[\backslash \tilde{S}_3$. □

Pour prouver entièrement le théorème 4.3.1 il nous reste à étudier ce qui se passe dans le cas où $E < \sqrt{2}$.

4.3.3 Preuve pour les énergies $E < \sqrt{2}$

Les changements à apporter à la preuve que nous avons donnée pour $E > \sqrt{2}$ sont du même ordre que ceux effectués dans la section 4.2.3 pour le cas $N = 2$. En effet, la seule chose qui change est le fait que l'exponentielle de matrice $A_{(0,1)}(E)$ fait apparaître des cosinus hyperboliques et des sinus hyperboliques.

Par exemple dans le cas où $E \in]1, \sqrt{2}[$, on obtient :

$$A_{(0,1)}(E) = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} R_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix},$$

où $\alpha = \sqrt{E-1}$, $\beta = \sqrt{\sqrt{2}-E}$, $\gamma = \sqrt{E+\sqrt{2}}$, U est la matrice même que dans (4.37) et

$$R_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha}\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\beta & 0 & 0 & \frac{1}{\beta}\sinh\beta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\gamma & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma}\sin\gamma \\ -\alpha\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta\sinh\beta & 0 & 0 & \cosh\beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma\sin\gamma & 0 & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Ainsi la preuve du cas $E > \sqrt{2}$ peut se recopier en changeant simplement les sinus et les cosinus faisant intervenir β en des sinus et cosinus hyperboliques. Cela conduit à un ensemble fini $\tilde{S}_4$ de valeurs de $E \in]1, \sqrt{2}[$ en dehors duquel on a $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E) = \mathfrak{sp}_3(\mathbb{R})$.

De même, lorsque $E \in]-\sqrt{2}, 1[$, on pose $\alpha = \sqrt{1-E}$, $\beta = \sqrt{\sqrt{2}-E}$ et $\gamma = \sqrt{E+\sqrt{2}}$ et les cosinus et les sinus faisant intervenir α ou β sont remplacés par des sinus et des cosinus hyperboliques dans la preuve du cas $E > \sqrt{2}$. Cela conduit à un ensemble fini $\tilde{S}_5$ de valeurs de $E \in]-\sqrt{2}, 1[$ en dehors duquel on a $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E) = \mathfrak{sp}_3(\mathbb{R})$.

Enfin, lorsque $E < -\sqrt{2}$, on pose $\alpha = \sqrt{1-E}$, $\beta = \sqrt{\sqrt{2}-E}$ et $\gamma = \sqrt{-E-\sqrt{2}}$ et tous les cosinus et les sinus sont remplacés par des sinus et des cosinus hyperboliques dans la preuve du cas $E > \sqrt{2}$. Cela conduit à un ensemble discret $\tilde{S}_6$ de valeurs de $E \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ en dehors duquel on a $\tilde{\mathfrak{S}}_3(E) = \mathfrak{sp}_3(\mathbb{R})$.

On peut enfin prouver le théorème 4.3.1.

Preuve du théorème 4.3.1. On pose $\mathcal{S}_{P,3} = \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_4 \cup \tilde{S}_5 \cup \tilde{S}_6$. Alors pour $E \in \mathbb{R} \backslash \mathcal{S}_{P,3}$, on vient de prouver que :

$$\tilde{\mathfrak{S}}_3(E) = \mathfrak{sp}_3(\mathbb{R})$$

Ce résultat, associé à la discussion faite à la remarque 4.2.2, achève de prouver le résultat voulu pour $H_{P,3}(\omega)$. □

4.3.4 Remarques finales

Première remarque : Si l'on regarde attentivement la preuve du théorème 4.3.1, on se rend compte que l'on n'utilise à aucun moment le paramètre aléatoire $\omega_2^{(0)}$. En effet, les seules matrices diagonales Q que l'on utilise à l'étape 4 de la preuve sont $\mathrm{diag}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ et $\mathrm{diag}(2, 0, 2)$. Ces deux matrices ne font pas intervenir de second terme diagonal, celui-ci étant nul dans les deux cas. Comme par ailleurs la suite de variables aléatoires $(\omega_2^{(n)})$ n'intervient pas à un autre endroit de la preuve, on aurait pu ne pas l'inclure dans la définition de $H_{P,3}$ et faire en sorte ainsi que $H_{P,3}$ agisse de façon déterministe sur la seconde copie de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans la décomposition $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \oplus L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \oplus L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Cela nous aurait conduit à étudier le modèle suivant :

$$H_{P,3bis}(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} \delta_0(x-n) & 0 & 0 \\ 0 & c\delta_0(x-n) & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^{(n)} \delta_0(x-n) \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)})$, $n \in \mathbb{Z}$, est une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de distribution commune ν sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\operatorname{supp} \nu \subset \mathbb{R}^2$ est borné et vérifie que $\{x - y \mid x, y \in \operatorname{supp} \nu\}$ engendre $\mathbb{R}^2$. On a donc prouvé aussi l'analogue du théorème 4.3.1 pour l'opérateur $H_{P,3\mathrm{bis}}(\omega)$.

Tout se passe donc comme si le fait de coupler la première et la dernière copie de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à la seconde par l'intermédiaire de V_0 transférait à cette dernière l'aléa qui permet de prouver que les exposants de Lyapounov sont bien séparés. En effet, la théorie de Kotani (voir [KS88]) dit que l'annulation du plus grand exposant de Lyapounov sur un ensemble de mesure non nulle implique que le potentiel doit être déterministe. Ainsi, la séparation des exposants de Lyapounov est bien liée à la présence d'aléa dans le modèle.

À notre connaissance le seul exemple d'opérateur mettant en jeu ce phénomène de propagation de l'aléa se trouve dans [Gla90], dans le cas d'opérateurs de Schrödinger discrets à valeurs matricielles. Rappelons qu'un modèle à valeurs matricielles peut être vu comme un empilement de modèles scalaires comme le suggère la décomposition $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Chacune de ces copies de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ peut être vue comme une « couche » de l'empilement sur lequel agit l'opérateur à valeurs matricielles. Pour ne pas être simplement ramené à l'étude de modèles scalaires indépendants, on suppose qu'il se produit un couplage entre ces couches. Dans notre modèle, ce couplage est donné par V_0. Dans [Gla90], Glaffig étudie un opérateur de Schrödinger discret

tel que la variable aléatoire définie sur la première couche est très régulière au sens où la loi de cette variable aléatoire réelle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée de Radon-Nikodym est dans un espace de Sobolev. Il suppose aussi que les autres couches sont soumises à un aléa modélisé par des variables aléatoires de Bernoulli, donc singulières. Il obtient alors l'existence d'une densité pour une puissance de convolution de la mesure μ définie sur les matrices de transfert. Intuitivement cela ne devrait pas se produire lorsque les couches inférieures sont soumises à des variables aléatoires singulières donc sans densité. On observe donc, dans les travaux de Glaffig, un phénomène de propagation de l'aléa depuis la première couche très régulière à des couches inférieures singulières. Il obtient de plus le caractère C^∞ de la densité d'états intégrée associée à l'opérateur qu'il étudie.

Dans notre exemple, $H_{P,3}(\omega)$, nous observons un phénomène du même type que celui qui se produit dans le modèle étudié par Glaffig, mais nous l'obtenons pour des variables aléatoires pouvant toutes être fortement singulières et sans devoir supposer que les couches où doivent se propager l'aléa sont déjà soumises à un aléa. En effet, notre preuve est encore valable si nos variables aléatoires $\omega_1^{(0)}$ et $\omega_3^{(0)}$ suivent des lois de Bernoulli et, comme on l'a dit, si notre seconde couche est déterministe. À notre connaissance, c'est le premier exemple d'opérateur continu à valeurs matricielles, dont l'aléa peut intervenir sous une forme aussi singulière que des variables de Bernoulli, et où l'on observe ce phénomène de « propagation » de l'aléa à des couches déterministes. Nos hypothèses sont donc moins fortes *a priori* que celles nécessaires à Glaffig, mais il faut rappeler que le but de Glaffig dans [Gla90] est d'obtenir le caractère C^∞ de la densité d'états intégrée à partir de distributions aussi singulières que possible, ce que nous n'obtiendrons pas dans notre chapitre 7 sur l'étude de la régularité de la densité d'états intégrée associée à nos modèles.

Seconde remarque : L'étude de la séparation des exposants de Lyapounov que nous avons faite pour les modèles 4.5 et 4.31 est en partie incomplète. En effet, nous ne sommes pas parvenu à étudier ce qui se passe précisément pour les énergies dans $\mathcal{S}_{P,2}$ et $\mathcal{S}_{P,3}$. L'étude de ces énergies critiques s'avère beaucoup plus compliquée que ce qui se passe dans le cas scalaire. En effet, pour des modèles *a priori* plus compliqués mais scalaires, il est prouvé dans [DLS06] ou [DSS02b] que les énergies critiques conduisent directement à l'annulation de l'exposant de Lyapounov, le sous-groupe de Fürstenberg associé étant compact donc borné. Ici rien de tel ne se produit. Il semblerait par exemple qu'aux énergies critiques dans $\mathcal{S}_{P,2}$, le plus grand exposant de Lyapounov soit encore strictement positif, mais que ce ne soit pas le cas du second exposant. Nous serions donc dans un cas intermédiaire entre l'annulation de tous les exposants et la stricte positivité de tous les exposants. Il semblerait aussi que le cas où les deux exposants seraient strictement positifs mais égaux ne se produise pas.

Troisième remarque : Pour l'instant, nous ne sommes parvenu à proposer de preuve complète que pour les cas $N = 2$ et $N = 3$ dans le modèle 4.1. Il nous reste donc à étudier le cas général où N est quelconque. Il semble que nous en soyons encore assez loin. En effet, l'étude des calculs effectués pour $N = 2, 3$ et une première approche du cas $N = 4$ nous font penser qu'il n'y a pas de schéma de calcul clair qui s'en détache pour le cas général. Par exemple, dans le cas général, nous ne savons pas combien et quelles familles de matrices considérer à l'étape 4 de nos preuves. Nous ne le savons même pas encore précisément pour $N = 4 \ldots$Notre méthode, très constructive dans la mesure où nous explicitons une base de $\mathfrak{S}_N(\mathbb{R})$ de dimension celle de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, semble difficile à appliquer pour $N \geq 4$. Une approche plus abstraite doit pouvoir être considérée, comme nous le verrons au chapitre 5 où nous donnerons des pistes pour le cas général du modèle d'Anderson que nous y étudions.

Cela clôt notre étude de modèles continus à interactions ponctuelles. Nous allons voir dans le prochain chapitre ce que les idées développées dans ce chapitre 4 permettent d'obtenir comme résultats lorsqu'on tente de les appliquer à un modèle continu à valeurs matricielles de type Anderson, et aussi ce qu'elles ne permettent pas d'obtenir.

Chapitre 5

Positivité des exposants de Lyapounov pour un modèle d'Anderson matriciel

Sommaire

5.1 Un modèle d'Anderson-Bernoulli 71
5.2 Etude dans le cas $N = 2$: une première approche 73
5.2.1 Préliminaires 73
5.2.2 Preuve du théorème 5.2.1 74
5.3 Étude dans le cas $N = 2$: une seconde approche 80
5.3.1 Construction d'éléments de $G_{\tilde{\mu}_E}$ dans $\mathcal{O}$ 81
5.3.2 Calcul du logarithme de $(A^{\omega}_{0,2}(E))^{m_\omega(E)}$ 83
5.3.3 L'algèbre de Lie $\mathfrak{la}_2(E)$ 86
5.3.4 Fin de la preuve du théorème 5.3.1 98
5.4 Pistes pour l'étude du cas général 98

Dans ce chapitre nous étudions la séparation des exposants de Lyapounov pour un modèle continu à valeurs matricielles de type Anderson. L'aléa n'agira plus au travers d'interactions ponctuelles, donc aux points entiers, comme au modèle (4.1), mais au travers d'interactions étendues. Cela reviendra à remplacer les distributions de Dirac par des fonctions caractéristiques d'intervalle. L'étude d'un tel modèle est motivée par la question de la localisation pour un modèle d'Anderson dans une bande continue. Plus précisément on s'intéresse à l'opérateur :

$$-\Delta + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \omega_n f(x-n, y) \tag{5.1}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ avec des conditions de Dirichlet sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathbb{R} \times \{1\}$. La fonction f est à support compact dans $[0,1] \times [0,1]$ et les variables aléatoires de couplage ω_n sont supposées indépendantes et identiquement distribuées. Pour ce système, on s'attend à ce qu'il y ait localisation pour toutes les énergies hors d'un ensemble

discret d'énergies critiques, comme cela se produit pour les modèles unidimensionnels ([DSS02a]). Pourtant cette question reste ouverte encore à ce jour dès lors que l'on ne se trouve pas dans le cas d'une fonction f indépendante de y, auquel cas le système se découple en deux systèmes unidimensionnels. La difficulté pour étudier un tel modèle provient du fait que bien que ce système soit physiquement assimilable à un système unidimensionnel, il est mathématiquement bi-dimensionnel et sa dynamique est définie par une équation aux dérivées partielles et non pas par une équation différentielle. Ainsi les outils que l'on peut utiliser dans le cadre des équations différentielles comme par exemple les exposants de Lyapounov ou la théorie de Kotani, ne peuvent plus s'appliquer directement ici. Pour une présentation d'autres techniques utilisables pour les systèmes unidimensionnels on renvoie à [Sto02].

Pour pallier cette difficulté, l'idée est de discrétiser l'opérateur (5.1) dans la direction y. On peut ainsi espérer approcher ce système de bande continue par un empilement fini de fils unidimensionnels en interactions et tenter de faire tendre ce nombre de fils vers l'infini. Cette idée nous permet de substituer à l'opérateur (5.1) un opérateur unidimensionnel, continu et à valeurs matricielles, comme celui que nous allons présenter dans ce chapitre.

Plus généralement ce modèle de bande continue s'inscrit dans l'étude de modèles d'Anderson à potentiels surfaciques ou définis sur des demi-espaces, en dimension quelconque. L'étude dans le cas continu de tels opérateurs est amorcée dans [dMSS05]. Il y est établi, entre autres, des techniques permettant de prouver l'absence de spectre absolument continu pour de tels modèles.

Les modèles d'Anderson ont initialement pour but de modéliser les phénomènes de semi-conductivité en physique du solide. Le premier modèle de ce type a été introduit par le physicien P.Anderson, en 1958 et correspond à un modèle unidimensionnel discret et aléatoire de la forme :

$$-\Delta_{\text{disc}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} q_k(\omega) f(x-k)$$

où les $q_k(\omega)$ sont des variables aléatoires et f est une fonction donnée supportée par l'intervalle $[0,1]$. On parle de potentiel à un site du fait que la fonction f ne dépend pas de k et est supportée par $[0,1]$. Dans le cas qui nous intéressera, les variables aléatoires $q_k(\omega)$ suivent une loi de Bernoulli. Pour une preuve de la localisation dans ce cas, on peut renvoyer à [CKM87]. Dans le cas d'un modèle discret à valeurs matricielles, le premier résultat de séparation des exposants de Lyapounov est le fait de Gol'dsheid et Margulis dans [GM89] et la preuve de la localisation pour ce même modèle se trouve dans [KLS90]. Pour les modèles continus, le cas à valeurs scalaires est entièrement étudié dans [DSS02a]. Enfin dans le cas multidimensionnel et à valeurs scalaires, on peut renvoyer au résultat récent de Bourgain et Kenig dans [BK05].

Nous chercherons à appliquer les méthodes développées au chapitre 4 à notre modèle d'Anderson. Nous verrons que l'on obtiendra encore l'absence de spectre absolument continu, mais que l'on n'obtiendra plus la séparation des exposants de Lyapounov hors d'un ensemble discret, mais seulement hors d'un ensemble dénombrable qui pourrait être dense. Pour obtenir à nouveau la séparation des exposants de Lyapounov hors d'un ensemble discret d'énergies, nous allons devoir raffiner les idées développées pour

les modèles à interactions ponctuelles et utiliser les résultats de théorie des groupes de Breuillard et Gelander que nous avons présentés au chapitre 3.

Dans une première partie nous présenterons en détail le modèle que l'on étudie. Dans une seconde partie nous présenterons le résultat obtenu en collaboration avec Günter Stolz (voir [BS07]) dans le cas $N = 2$. Puis dans une troisième partie nous montrerons comment améliorer ce résultat pour obtenir la stricte positivité des exposants de Lyapounov non plus en dehors d'un ensemble dénombrable, mais en dehors d'un ensemble discret. Enfin dans une quatrième et dernière partie nous discuterons de pistes permettant d'aborder le cas général de N quelconque.

5.1 Un modèle d'Anderson-Bernoulli

Nous allons étudier un modèle de type Anderson-Bernoulli unidimensionnel, continu et à valeurs matricielles. On peut voir un tel modèle comme N modèles unidimensionnels à valeurs scalaires et indépendants comme dans [DSS02b] que l'on couple via l'opérateur de multiplication V_0 défini au modèle (4.1). Cela nous amène à définir l'opérateur de Schrödinger :

$$H_B(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} I_N + V_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)}\chi_{[0,1]}(x-n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^{(n)}\chi_{[0,1]}(x-n) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. Dans cet opérateur, $\chi_{[0,1]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$, V_0 est l'opérateur de multiplication (4.2). Les $(\omega_i^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$ sont des suites de variables aléatoires sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$, i.i.d. et indépendantes les unes des autres, de loi commune $\tilde{\nu}$ telle que $\{0,1\} \subset \operatorname{supp} \tilde{\nu}$. En particulier le cas où ces variables aléatoires sont des variables de Bernoulli est couvert par ces hypothèses.

Cet opérateur est une perturbation bornée du laplacien $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}) \oplus \dots \oplus (-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$. Il est donc autoadjoint sur l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$.

En vue des chapitres 6 et 7 nous poserons :

$$V_\omega^{(n)}(x) := V_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)}\chi_{[0,1]}(x-n) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^{(n)}\chi_{[0,1]}(x-n) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Afin d'étudier les exposants de Lyapounov associés à l'opérateur (5.2) on commence par introduire la suite des matrices de transfert associées au système différentiel :

$$H_B(\omega)u = Eu, \ E \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Si $u = (u_1, \ldots, u_N)$ est une solution du système (5.4), on définit la matrice de transfert $A^{\omega}_{n,N}(E)$ de n à $n+1$ par la relation :

$$\begin{pmatrix} u_1(n+1) \\ \vdots \\ u_N(n+1) \\ u'_1(n+1) \\ \vdots \\ u'_N(n+1) \end{pmatrix} = A^{\omega}_{n,N}(E) \begin{pmatrix} u_1(n) \\ \vdots \\ u_N(n) \\ u'_1(n) \\ \vdots \\ u'_N(n) \end{pmatrix}.$$

Alors la suite des matrices de transfert $(A^{\omega}_{n,N}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d. de matrices symplectiques (voir [MV04] section 2). On définit comme à la section 2.2.1 la loi $\tilde{\mu}_E$ de ces matrices et le sous-groupe de Fürstenberg $G_{\tilde{\mu}_E} \subset \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ associé à cette suite.

En fait on peut écrire $A^{\omega}_{n,N}(E)$ sous forme exponentielle en commençant par associer au système (5.4) le système différentiel d'ordre 1 :

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ V^{(0)}_{\omega} - E & 0 \end{pmatrix} Y$$

avec $Y \in \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$. Si Y est la solution vérifiant $Y(0) = I_{2N}$, alors $A^{\omega}_{n,N}(E) = Y(1)$. La résolution de ce système nous conduit directement à l'expression (voir [DF79]) :

$$A^{\omega}_{0,N}(E) = \exp \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ \int_0^1 V^{(0)}_{\omega}(u)\, \mathrm{d}u - E & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Comme dans notre modèle (5.2), le potentiel $V^{(0)}_{\omega}(x)$ est constant sur $[0,1]$, on obtient :

$$A^{\omega}_{0,N}(E) = \exp \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ V^{(0)}_{\omega} - E & 0 \end{pmatrix} := \exp(X_{N,\omega}(E)) \tag{5.6}$$

où l'on a posé :

$$X_{N,\omega}(E) = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ V^{(0)}_{\omega} - E & 0 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

De cette forme on retrouve bien sûr le fait que $A^{\omega}_{0,N}(E)$ est symplectique.

On notera enfin $\mathfrak{A}_N(E)$ l'algèbre de Lie de l'adhérence de Zariski $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\tilde{\mu}_E})$ du groupe $G_{\tilde{\mu}_E}$.

En appliquant alors la théorie de Kotani (voir section 2.3.3) on ramène l'étude du spectre absolument continu de $H_B(\omega)$ à l'étude de ses exposants de Lyapounov. Comme pour l'opérateur $H_P(\omega)$, une preuve complète pour le cas général où N est quelconque n'est pas encore obtenue. En revanche nous allons présenter dans les deux prochaines sections une étude des exposants de Lyapounov pour le cas $N = 2$ qui impliquera l'absence de spectre absolument continu dans ce cas.

5.2 Etude dans le cas $N = 2$: une première approche

Nous présentons dans cette section un premier résultat d'absence de spectre absolument continu pour les énergies $E > 2$ dans le cas où $N = 2$. Ce résultat a été obtenu en collaboration avec Günter Stolz (voir [BS07]).

5.2.1 Préliminaires

Dans cette section nous fixons donc $N = 2$ dans le modèle (5.2) ce qui nous conduit à étudier l'opérateur :

$$H_{B,2}(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)}\chi_{[0,1]}(x-n) & 0 \\ 0 & \omega_2^{(n)}\chi_{[0,1]}(x-n) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. Comme dans le cas des opérateurs $H_{P,2}(\omega)$ et $H_{P,3}(\omega)$ nous obtiendrons que les exposants de Lyapounov sont strictement positifs en dehors d'un ensemble de mesure nulle, en l'occurrence, dans cette première approche, un ensemble dénombrable d'énergies critiques. Donnons tout de suite le résultat précis que nous allons montrer.

Théorème 5.2.1. *Soient $\gamma_1(E)$ et $\gamma_2(E)$ les exposants de Lyapounov positifs associés à $H_{B,2}(\omega)$. Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{C}$ tel que, pour tout $E > 2$, $E \notin \mathcal{C}$,*

$$\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0.$$

Ainsi, $H_{B,2}(\omega)$ n'a pas de spectre absolument continu dans l'intervalle $]2, \infty[$.

Avant de nous lancer dans la preuve de ce théorème, nous allons expliciter en détails les matrices de transfert. Tout d'abord, comme on a supposé que $\{0, 1\} \subset \operatorname{supp} \tilde{\nu}$ on a :

$$\{A_{0,2}^{(0,0)}(E), A_{0,2}^{(1,0)}(E), A_{0,2}^{(0,1)}(E), A_{0,2}^{(1,1)}(E)\} \subset G_{\tilde{\mu}_E} .$$

On aura noté ici $A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E)$ la matrice de transfert de 0 à 1, avec $\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)})$. Comme les matrices $A_{n,2}^{\omega}(E)$ sont i.i.d., $G_{\tilde{\mu}_E}$ est engendré par les $A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E)$ lorsque $\omega^{(0)}$ parcourt $\operatorname{supp} \tilde{\nu}$. En pratique nous allons nous servir uniquement des $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^2$.

Pour donner une description explicite des matrices $A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E)$, on calcule l'exponentielle (5.6). Pour cela on pose :

$$M_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} & 1 \\ 1 & \omega_2^{(0)} \end{pmatrix} = S_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{\omega^{(0)}} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\omega^{(0)}} \end{pmatrix} S_{\omega^{(0)}}^{-1},$$

où les matrices $S_{\omega^{(0)}}$ sont orthogonales et les valeurs propres de $M_{\omega^{(0)}}$, $\lambda_1^{\omega^{(0)}} \leq \lambda_2^{\omega^{(0)}}$, sont réelles. On peut calculer ces valeurs propres et ces matrices orthogonales pour les différentes valeurs de $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^2$. On obtient :

$$S_{(0,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1^{(0,0)} = 1, \lambda_2^{(0,0)} = -1,$$

$$S_{(1,1)} = S_{(0,0)}, \qquad \lambda_1^{(1,1)} = 2,\ \lambda_2^{(1,1)} = 0,$$

$$S_{(1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix},\ \lambda_1^{(1,0)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2^{(1,0)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$$S_{(0,1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix},\ \lambda_1^{(0,1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2^{(0,1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ .$$

On introduit aussi les matrices définies par blocs :

$$R_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} S_{\omega^{(0)}} & 0 \\ 0 & S_{\omega^{(0)}} \end{pmatrix}\ .$$

Enfin, on suppose que $E > 2$ pour que E soit strictement supérieur à toutes les valeurs propres de toutes les matrices $M_{\omega^{(0)}}$. En utilisant l'abréviation $r_i = r_i(E, \omega^{(0)}) := \sqrt{E - \lambda_i^{\omega^{(0)}}}$, $i = 1, 2$, on obtient l'expression suivante pour les matrices de transfert :

$$A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E) = R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \cos(r_1) & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(r_1) & 0 \\ 0 & \cos(r_2) & 0 & \frac{1}{r_2}\sin(r_2) \\ -r_1\sin(r_1) & 0 & \cos(r_1) & 0 \\ 0 & -r_2\sin(r_2) & 0 & \cos(r_2) \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1}\ . \tag{5.9}$$

Remarque 5.2.2. Pour $E < 2$ on peut bien sûr expliciter aussi les matrices de transfert comme on vient de le faire. Suivant la position de E par rapport aux valeurs propres $\lambda_i^{\omega^{(0)}}$, certains sinus et cosinus sont transformés en des sinus hyperboliques et des cosinus hyperboliques. Cela nous conduirait à étudier différents cas comme pour le modèle (4.5) si ce n'est que pour le modèle (5.8), les ajustements que l'on a pu faire à la section 4.2.3 ne sont plus possibles ici. Les arguments que l'on utilise ici sont uniquement adaptés au cas elliptique (présence uniquement de sinus et cosinus) et non pas au cas hyperbolique (présence uniquement de cosinus et sinus hyperboliques) ou intermédiaire (présence des deux types de sinus et cosinus).

Pour ces raisons techniques, nous laissons ici ouverte la question de la séparation des exposants de Lyapounov dans les cas où $E < 2$, même si nous pensons qu'un résultat similaire au théorème 5.2.1 est encore vrai dans ces cas.

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème 5.2.1

5.2.2 Preuve du théorème 5.2.1

En utilisant le critère de Gol'dsheid et Margulis (théorème 3.1.3) et les résultats de [KS88] (théorème 2.3.3) et [Kir85] (voir section 7.1) comme dans la preuve du théorème 4.2.1, on est ramené à prouver la proposition suivante :

Proposition 5.2.3. *Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{C}$ tel que pour tout $E \in]2, +\infty[\backslash\mathcal{C}$, $G_{\tilde{\mu}_E}$ est Zariski-dense dans* $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration. **Étape 1.** On fixe $E \in]2, +\infty[$. Pour $\omega^{(0)} = (0,0)$ on a

$$A_{0,2}^{(0,0)}(E) = R_{(0,0)} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & 0 & \frac{1}{\alpha_1}\sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_2) & 0 & \frac{1}{\alpha_2}\sin(\alpha_2) \\ -\alpha_1 \sin(\alpha_1) & 0 & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \sin(\alpha_2) & 0 & \cos(\alpha_2) \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \quad (5.10)$$

où $\alpha_1 = \sqrt{E - \lambda_1^{(0,0)}} = \sqrt{E-1}$ et $\alpha_2 = \sqrt{E - \lambda_2^{(0,0)}} = \sqrt{E+1}$.

Soit $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des énergies telles que 2π, α_1 et α_2 soient rationnellement dépendants. On peut vérifier que $\mathcal{C}_1$ est un ensemble dénombrable comme union dénombrable (indexée par l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}[X]$) d'ensembles finis de zéros de polynômes. On suppose maintenant que $E \in]2, +\infty[\backslash \mathcal{C}_1$. L'indépendance rationnelle de $(2\pi, \alpha_1, \alpha_2)$ implique qu'il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$(n_k\alpha_1, n_k\alpha_2) \xrightarrow[k\to\infty]{} (\frac{\pi}{2}, 0)$$

avec convergence dans $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$. De même il existe $(m_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, telle que :

$$(m_k\alpha_1, m_k\alpha_2) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0, \frac{\pi}{2}) \ .$$

Alors, comme $G_{\tilde{\mu}_E}$ est fermé pour la topologie usuelle, on en conclut que :

$$\left(A_{0,2}^{(0,0)}(E)\right)^{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in G_{\tilde{\mu}_E} \quad (5.11)$$

et

$$\left(A_{0,2}^{(0,0)}(E)\right)^{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in G_{\tilde{\mu}_E} \ . \quad (5.12)$$

On recommence pour $\omega^{(0)} = (1,1)$. On a :

$$A_{0,2}^{(1,1)}(E) = R_{(0,0)} \begin{pmatrix} \cos(\beta_1) & 0 & \frac{1}{\beta_1}\sin(\beta_1) & 0 \\ 0 & \cos(\beta_2) & 0 & \frac{1}{\beta_2}\sin(\beta_2) \\ -\beta_1 \sin(\beta_1) & 0 & \cos(\beta_1) & 0 \\ 0 & -\beta_2 \sin(\beta_2) & 0 & \cos(\beta_2) \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \ , \quad (5.13)$$

où $\beta_1 = \sqrt{E - \lambda_1^{(1,1)}} = \sqrt{E-2}$ et $\beta_2 = \sqrt{E - \lambda_2^{(1,1)}} = \sqrt{E}$.

De même que pour $A_{0,2}^{(0,0)}(E)$, en regardant les puissances de $A_{0,2}^{(1,1)}(E)$, on voit que pour les énergies E telles que 2π, β_1 et β_2 soient rationnellement indépendants (ce qui

arrive pour des E hors d'un ensemble dénombrable $\mathcal{C}_2$) :

$$R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in G_{\tilde{\mu}_E} \tag{5.14}$$

et

$$R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in G_{\tilde{\mu}_E} \ . \tag{5.15}$$

Étape 2. En multipliant (5.11) par l'inverse de (5.14) on obtient :

$$R_{(0,0)} \begin{pmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in G_{\tilde{\mu}_E} \ .$$

Comme $\alpha_1 > \beta_1 > 0$, par un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme 4.2.3, on prouve que pour tout $x > 0$:

$$C_1(x) = R_{(0,0)} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\tilde{\mu}_E}) \ .$$

On remarque que $C_1(1) = I$. Alors en dérivant en I,

$$C_1 := R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E) \ .$$

De même, en utilisant cette fois (5.12) et (5.15),

$$C_2 := R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E) \ .$$

Étape 3. On poursuit en conjuguant C_1 par $A_{0,2}^{(0,0)}(E)$ pour obtenir :

$$A_{0,2}^{(0,0)}(E)\, C_1\, (A_{0,2}^{(0,0)}(E))^{-1} =$$

$$R_{(0,0)} \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha_1) - \sin^2(\alpha_1) & 0 & -\frac{2}{\alpha_1}\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha_1 \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) & 0 & \sin^2(\alpha_1) - \cos^2(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E) \tag{5.16}$$

d'après (4.16). On peut soustraire à cette matrice un multiple de $C_1 \in \mathfrak{A}_2(E)$, soit $(\cos^2(\alpha_1) - \sin^2(\alpha_1))C_1$, et diviser le résultat par $2\alpha_1 \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1) \neq 0$ pour trouver :

$$C_3 := R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E)\ .$$

En conjuguant C_1 par $A_{0,2}^{(1,1)}(E)$ et en répétant les mêmes arguments on trouve :

$$C_4 := R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E)\ .$$

De même conjuguer C_2 au lieu de C_1 nous donne :

$$C_5 := R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E)$$

et

$$C_6 := R_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E)\ .$$

Étape 4. Comme $|\alpha_1| \neq |\beta_1|$ et $|\alpha_2| \neq |\beta_2|$, il est clair que les matrices $C_1, \ldots, C_6$ sont linéairement indépendantes. Il s'en suit que :

$$R_{(0,0)} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & \tilde{a} & 0 & \tilde{b} \\ c & 0 & -a & 0 \\ 0 & \tilde{c} & 0 & -\tilde{a} \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E) \tag{5.17}$$

pour tout $(a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, c, \tilde{c}) \in \mathbb{R}^6$.

Étape 5. Soit $\mathcal{C}_3$ l'ensemble dénombrable des énergies E telles que 2π, $\sqrt{E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ et $\sqrt{E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ soient rationnellement indépendants. Alors pour $E \in]2,+\infty[\backslash\mathcal{C}_3$, en utilisant le même argument que pour (5.11) pour les puissances de $A_{0,2}^{(1,0)}(E)$, on a :

$$M_1 := R_{(1,0)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{(1,0)}^{-1} \in G_{\tilde{\mu}_E}$$

où $\alpha := \sqrt{E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

En plus des six matrices $C_1,\dots,C_6$, nous allons construire quatre autres éléments linéairement indépendants de $\mathfrak{A}_1(E)$ en conjuguant des matrices particulières de la forme (5.17) par M_1. Soit X une matrice arbitraire de la forme (5.17). Tout d'abord on remarque que :

$$R_{(1,0)} = R_{(0,0)} \begin{pmatrix} S_{(0,0)}^{-1}S_{(1,0)} & 0 \\ 0 & S_{(0,0)}^{-1}S_{(1,0)} \end{pmatrix} .$$

Alors un calcul direct nous montre que :

$$M_1 X M_1^{-1} = R_{(0,0)} \begin{pmatrix} B & \frac{1}{\alpha}A \\ -\alpha A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & \tilde{a} & 0 & \tilde{b} \\ c & 0 & -a & 0 \\ 0 & \tilde{c} & 0 & -\tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & -\frac{1}{\alpha}A \\ \alpha A & B \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} , \quad (5.18)$$

où $A = T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T$, $B = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}T$ et $T = S_{(1,0)}S_{(0,0)}^{-1}$.

Pour construire nos quatre éléments manquants nous allons prendre des valeurs particulières pour $a,\tilde{a},b,\tilde{b},c,\tilde{c}$. Notons X_1 la matrice X lorsque $c=1$, $a=0$, $\tilde{a}=0$, $b=0$, $\tilde{b}=0$, $\tilde{c}=0$. On obtient après de longs calculs :

$$C_7 := M_1 X_1 M_1^{-1} =$$

$$\frac{1}{4(5-\sqrt{5})^2} R_{(0,0)} \begin{pmatrix} * & -\frac{2+2\sqrt{5}}{\alpha} & * & * \\ \frac{-22+10\sqrt{5}}{\alpha} & * & -\frac{2+2\sqrt{5}}{\alpha^2} & * \\ * & 22-10\sqrt{5} & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E)$$

Ici on ne garde trace que des quatre coefficients matriciels qui nous serons indispensables pour justifier de l'indépendance linéaire avec $C_1,\dots,C_6$, puisque les coefficients correspondants dans ces six matrices sont tous nuls.
De façon similaire, on note X_2 la matrice telle que $\tilde{c}=1$ et tous les autres paramètres sont nuls. Cela donne :

$$C_8 := M_1 X_2 M_1^{-1} =$$

$$\frac{1}{4(5-\sqrt{5})^2} R_{(0,0)} \begin{pmatrix} * & \frac{2+2\sqrt{5}}{\alpha} & * & * \\ \frac{22-10\sqrt{5}}{\alpha} & * & \frac{22-10\sqrt{5}}{\alpha^2} & * \\ * & -2-2\sqrt{5} & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E)$$

Sous l'hypothèse que 2π, $\sqrt{E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $\sqrt{E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ sont rationnellement indépendants, on peut prouver comme dans (5.12), pour les puissances de $A_{0,2}^{(1,0)}(E)$, que :

$$M_2 := R_{(1,0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{(1,0)}^{-1} \in G_{\tilde{\mu}_E} \ ,$$

où $\beta := \sqrt{E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. Alors comme précédemment on a :

$$M_2 X M_2^{-1} = R_{(0,0)} \begin{pmatrix} A & \frac{1}{\beta}B \\ -\beta B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & \tilde{a} & 0 & \tilde{b} \\ c & 0 & -a & 0 \\ 0 & \tilde{c} & 0 & -\tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -\frac{1}{\beta}B \\ \beta B & A \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1}$$

avec les mêmes matrices A et B que dans (5.18). Soit X_3 la matrice de la forme de X telle que $b = 1$ et tous les autres paramètres sont nuls, et soit X_4 définie de même avec $\tilde{b} = 1$ au lieu de $b = 1$. Cela donne comme auparavant :

$$C_9 := M_2 X_3 M_2^{-1} =$$

$$\frac{1}{4(5-\sqrt{5})^2} R_{(0,0)} \begin{pmatrix} * & -\beta\frac{1+\sqrt{5}}{8} & * & * \\ \beta\frac{125-41\sqrt{5}}{8} & * & \frac{1+\sqrt{5}}{8} & * \\ * & \beta^2\frac{125-41\sqrt{5}}{8} & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E)$$

et

$$C_{10} := M_2 X_4 M_2^{-1} =$$

$$\frac{1}{4(5-\sqrt{5})^2} R_{(0,0)} \begin{pmatrix} * & \beta\frac{95-29\sqrt{5}}{8} & * & * \\ \beta\frac{11-5\sqrt{5}}{8} & * & \frac{-11+5\sqrt{5}}{8} & * \\ * & \beta^2\frac{95-29\sqrt{5}}{8} & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} R_{(0,0)}^{-1} \in \mathfrak{A}_2(E) \ .$$

Étape 6. Comme $\alpha \neq \beta$, on peut vérifier que pour toutes les énergies E hors d'un ensemble discret de réels, les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ construits à partir des quatre

coefficients dont on a gardé trace dans les matrices C_7, C_8, C_9 et C_{10} sont linéairement indépendants. Plus précisément on a :

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{\alpha}(2+2\sqrt{5}) & \frac{1}{\alpha}(2+2\sqrt{5}) & -\beta\frac{1+\sqrt{5}}{8} & \beta\frac{95-29\sqrt{5}}{8} \\ \frac{1}{\alpha}(-22+10\sqrt{5}) & \frac{1}{\alpha}(22-10\sqrt{5}) & \beta\frac{125-41\sqrt{5}}{8} & \beta\frac{11-5\sqrt{5}}{8} \\ 22-10\sqrt{5} & -2-2\sqrt{5} & \beta^2\frac{125-41\sqrt{5}}{8} & \beta^2\frac{95-29\sqrt{5}}{8} \\ -\frac{1}{\alpha^2}(2+2\sqrt{5}) & \frac{1}{\alpha^2}(22-10\sqrt{5}) & \frac{1+\sqrt{5}}{8} & \frac{-11+5\sqrt{5}}{8} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2\beta(780-349\sqrt{5}(\alpha+\beta)(121\alpha-13664\sqrt{5}\beta-71805\beta))}{121(4(5-\sqrt{5})^2)^4\alpha^3}$$

Le membre de droite de l'égalité est une fonction analytique non identiquement nulle de E pour $E > 2$ (et ainsi $\alpha \neq 0$ pour tout $E > 2$) et donc il ne s'annule qu'en un ensemble discret que l'on note $\mathcal{C}_4$.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$. On fixe $E \in]2, +\infty[\backslash\mathcal{C}$. Alors $C_1, \ldots, C_6$ sont linéairement indépendantes, ainsi que les matrices $C_7, \ldots, C_{10}$. Mais de par la répartition des coefficients nuls dans ces deux familles de matrices, l'espace engendré par les matrices $C_1, \ldots, C_6$ est orthogonal à l'espace engendré par les matrices $C_7, \ldots, C_{10}$. Ainsi ces deux sous-espaces de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et donc la famille de matrices $(C_1, \ldots, C_{10})$ est linéairement indépendante. D'où :

$$10 \leq \dim \mathfrak{A}_2(E) \leq \dim \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = 10$$

et donc $\mathfrak{A}_2(E) = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$. Alors, par connexité de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(G_{\tilde{\mu}_E}) = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. On a donc prouvé la proposition. □

Ce théorème 5.2.1 est un résultat suffisant du point de la théorie de Kotani et de l'étude du spectre absolument continu. En revanche, en vue de l'étude de la régularité des exposants de Lyapounov et de la Densité d'États Intégrée que nous ferons aux chapitres 6 et 7, le fait de n'exclure qu'un ensemble dénombrable d'énergies est insuffisant. En effet, dans notre construction, rien ne nous dit que cet ensemble dénombrable $\mathcal{C}$ n'est pas dense dans $]2, +\infty[$. D'ailleurs au vu des définitions de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, qui sont des ensembles de valeurs de E telles que des « trajectoires » de la forme $(n\sqrt{E-\alpha}, n\sqrt{E-\beta})$ s'enroulent de manière dense sur le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ces ensembles sont denses dans $]2, +\infty[$. Or l'étude de la régularité des exposants de Lyapounov et de la Densité d'États Intégrée exige que l'on puisse prouver la séparation des exposants de Lyapounov sur un intervalle de valeurs de E. En cela le théorème 5.2.1 est incomplet. Nous allons donc voir comment raffiner les techniques algébriques utilisées dans la preuve de ce théorème pour obtenir qu'en fait le sous-groupe de Fürstenberg $G_{\tilde{\mu}_E}$ est dense au sens de la topologie usuelle dans $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ cette fois pour des énergies dans $]2, +\infty[$ et hors d'un ensemble discret.

5.3 Étude dans le cas $N = 2$: une seconde approche

Nous allons donc adopter une nouvelle approche dans l'étude du sous-groupe de Fürstenberg associé à $H_{B,2}(\omega)$. Nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 5.3.1. *Soient $\gamma_1(E)$ et $\gamma_2(E)$ les exposants de Lyapounov positifs associés à $H_{B,2}(\omega)$. Il existe un ensemble discret $\mathcal{S}_B \subset \mathbb{R}$ tel que, pour tout $E \in]2, +\infty[\backslash \mathcal{S}_B$,*

$$\gamma_1(E) > \gamma_2(E) > 0.$$

En particulier, $H_{B,2}(\omega)$ n'a pas de spectre absolument continu dans l'intervalle $]2, +\infty[$.

Pour prouver ce théorème, il nous suffit de prouver que le sous-groupe de Fürstenberg $G_{\tilde{\mu}_E}$ associé à $H_{B,2}(\omega)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. Nous allons de fait prouver un résultat plus fort en prouvant que $G_{\tilde{\mu}_E}$ contient un sous-groupe dense pour la topologie induite par la topologie usuelle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'où G_{μ_E} sera aussi dense dans $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. Comme $G_{\tilde{\mu}_E}$ est fermé pour cette topologie usuelle (par définition), il sera donc égal à tout $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ et on pourra directement appliquer le corollaire 2.3.8 pour obtenir la séparation des exposants de Lyapounov.

Cette discussion faite, pour construire un sous-groupe dense de $G_{\tilde{\mu}_E}$, on va appliquer le théorème 3.2.2 au groupe semi-simple $G = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. Ce théorème nous dicte précisément le plan de notre preuve. Dans un premier temps, nous allons prouver l'existence d'éléments particuliers de $G_{\tilde{\mu}_E}$ dans le voisinage $\mathcal{O}$ de l'identité donné par le théorème 3.2.2. Puis nous calculerons leurs logarithmes et nous vérifierons que ceux-ci engendrent bien toute l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$.

5.3.1 Construction d'éléments de $G_{\tilde{\mu}_E}$ dans $\mathcal{O}$

Pour pouvoir appliquer le théorème 3.2.2, il nous faut travailler avec des éléments du voisinage $\mathcal{O}$ donné par ce même théorème. Nous partons des éléments que nous savons être dans le groupe $G_{\tilde{\mu}_E}$, à savoir les quatre matrices $A_{0,2}^{(0,0)}(E)$, $A_{0,2}^{(1,0)}(E)$, $A_{0,2}^{(0,1)}(E)$ et $A_{0,2}^{(1,1)}(E)$. Nous allons prouver qu'en prenant une puissance bien choisie de chacune de ces matrices on peut construire quatre autres matrices de $G_{\tilde{\mu}_E}$ qui seront dans un voisinage arbitrairement petit de l'identité, donc en particulier dans $\mathcal{O}$.

Pour cela on va utiliser un résultat d'approximation diophantienne simultanée que nous commençons par rappeler.

Théorème 5.3.2 (Dirichlet)**.** *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ des réels et $M > 1$ un entier. Il existe alors $y, x_1, \ldots, x_N$ dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $1 \leq y \leq M$ et tels que, pour tout $i = 1, \ldots, N$:*

$$|\alpha_i y - x_i| < M^{-\frac{1}{N}}$$

Démonstration. Ce résultat est fondé sur le théorème de Minkowski sur le volume d'une maille élémentaire d'un réseau. On peut en trouver la preuve dans [Sch80]. □

Armé de ce théorème de Dirichlet, on peut prouver la proposition suivante :

Proposition 5.3.3. *Soit $E \in]2, +\infty[$. Pour tout $\omega \in \{0,1\}^2$, il existe $m_\omega(E) \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$$(A_{0,2}^{\omega}(E))^{m_\omega(E)} \in \mathcal{O}$$

Démonstration. On fixe $\omega^{(0)} \in \{0,1\}^2$. Soit alors $M > 1$ un entier. On applique le théorème 5.3.2 avec $\alpha_1 = \frac{r_1}{2\pi}$ et $\alpha_2 = \frac{r_2}{2\pi}$. Il existe donc $y \in \mathbb{Z}$, $1 \leq y \leq M$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\left|\frac{r_1}{2\pi}y - x_1\right| < M^{-\frac{1}{2}},\ \left|\frac{r_2}{2\pi}y - x_2\right| < M^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$|r_1 y - 2x_1\pi| < 2\pi M^{-\frac{1}{2}},\ |r_2 y - 2x_2\pi| < 2\pi M^{-\frac{1}{2}} \tag{5.19}$$

On a alors :

$$(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^y = R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \cos(yr_1) & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(yr_1) & 0 \\ 0 & \cos(yr_2) & 0 & \frac{1}{r_2}\sin(yr_2) \\ -r_1\sin(yr_1) & 0 & \cos(yr_1) & 0 \\ 0 & -r_2\sin(yr_2) & 0 & \cos(yr_2) \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1}$$

$$= R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 \\ 0 & \cos(yr_2 - 2x_2\pi) & 0 & \frac{1}{r_2}\sin(yr_2 - 2x_2\pi) \\ -r_1\sin(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 & \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 \\ 0 & -r_2\sin(yr_2 - 2x_2\pi) & 0 & \cos(yr_2 - 2x_2\pi) \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1}$$

par 2π-périodicité des fonctions sinus et cosinus.

Puis, soit $\varepsilon > 0$. Alors en prenant M suffisamment grand, $M^{-\frac{1}{2}}$ sera suffisamment petit pour que :

$$\left|\left|\begin{pmatrix} \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 \\ 0 & \cos(yr_2 - 2x_2\pi) & 0 & \frac{1}{r_2}\sin(yr_2(E) - 2x_2\pi) \\ -r_1\sin(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 & \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & 0 \\ 0 & -r_2\sin(yr_2 - 2x_2\pi) & 0 & \cos(yr_2 - 2x_2\pi) \end{pmatrix} - I_4\right|\right| < \varepsilon$$

On rappelle alors que comme les matrices $S_{\omega^{(0)}}$ sont orthogonales, il en est de même de $R_{\omega^{(0)}}$ et donc le fait de conjuguer par $R_{\omega^{(0)}}$ ne change pas la norme. D'où :

$$||(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^y - I_4|| < \varepsilon$$

Si l'on suppose ε suffisamment petit pour que $B(I_4, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$, ce qui revient à prendre M assez grand, il nous suffit de poser $y = m_\omega(E)$ pour avoir trouvé $m_\omega(E) \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq m_\omega(E) \leq M$ et :

$$(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)} \in \mathcal{O}$$

□

Remarque 5.3.4. Il est important de préciser que cette preuve s'appuie principalement sur le fait que dans le théorème 3.2.2, le voisinage de l'identité $\mathcal{O}$ ne dépend que du groupe semi-simple G. Il est donc ici indépendant du choix de E et de $\omega^{(0)}$. Il en est donc de même de l'entier $M > 1$. Cela sera essentiel dans la suite. Ainsi, bien que l'entier $m_\omega(E)$ dépende de E et de $\omega^{(0)}$, on peut toujours le prendre dans un intervalle d'entiers $\{1, \ldots, M\}$ qui sera lui indépendant de E et $\omega^{(0)}$. En fait ce sont alors les entiers "d'ajustement" x_1 et x_2 qui dépendent de E et $\omega^{(0)}$.

Il nous faut maintenant prouver que l'algèbre de Lie engendrée par les logarithmes des matrices $(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)}$ est bien $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$. Il se pose alors une première difficulté. Bien que l'on puisse écrire :

$$(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)} = \exp(m_\omega(E)X_{2,\omega}(E))$$

où $X_{2,\omega}(E)$ est défini en (5.7), cela ne signifie pas que le logarithme de $(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)}$ soit simplement égal à $m_\omega(E)X_{2,\omega}(E)$. En effet, *a priori*, $m_\omega(E)X_{2,\omega}(E) \notin \log \mathcal{O}$. Il va donc nous falloir calculer ce logarithme.

5.3.2 Calcul du logarithme de $(A_{0,2}^{\omega}(E))^{m_\omega(E)}$

On commence par fixer $\omega^{(0)} \in \{0,1\}^2$ et on suppose que $E > 2$. Afin de calculer le logarithme de $(A_{0,2}^{\omega}(E))^{m_\omega(E)}$, on part de son expression dans la base définie par $R_{\omega^{(0)}}$:

$$(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)} =$$

$$R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \cos(m_\omega(E)r_1) & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(m_\omega(E)r_1) & 0 \\ 0 & \cos(m_\omega(E)r_2) & 0 & \frac{1}{r_2}\sin(m_\omega(E)r_2) \\ -r_1\sin(m_\omega(E)r_1) & 0 & \cos(m_\omega(E)r_1) & 0 \\ 0 & -r_2\sin(m_\omega(E)r_2) & 0 & \cos(m_\omega(E)r_2) \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1} \quad (5.20)$$

Quitte à permuter les vecteurs de la base orthonormée définie par les colonnes de $R_{\omega^{(0)}}$, on peut écrire qu'il existe une matrice $P_{\omega^{(0)}}$ orthogonale et de permutation telle que :

$$(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)} =$$

$$R_{\omega^{(0)}} P_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \cos(m_\omega(E)r_1) & \frac{1}{r_1}\sin(m_\omega(E)r_1) & 0 & 0 \\ -r_1\sin(m_\omega(E)r_1) & \cos(m_\omega(E)r_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(m_\omega(E)r_2) & \frac{1}{r_2}\sin(m_\omega(E)r_2) \\ 0 & 0 & -r_2\sin(m_\omega(E)r_2) & \cos(m_\omega(E)r_2) \end{pmatrix} P_{\omega^{(0)}}^{-1} R_{\omega^{(0)}}^{-1} \quad (5.21)$$

Rappelons que l'on peut choisir $m_\omega(E)$ de sorte que $(A_{0,2}^{\omega}(E))^{m_\omega(E)}$ soit arbitrairement proche de l'identité de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$, en particulier, on peut toujours supposer que :

$$||(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)} - I_4|| < 1 \ .$$

Alors on peut écrire le développement en série entière du logarithme pour obtenir :

$$\log((A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)}) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}((A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)} - I_4)^k \quad (5.22)$$

Le temps du calcul, nous allons exprimer les sinus et cosinus sous forme d'exponentielle complexe. On commence par poser :

$$Q_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{r_1} & \frac{\mathrm{i}}{r_1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{r_2} & \frac{\mathrm{i}}{r_2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

et donc :

$$Q_{\omega^{(0)}}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}r_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}r_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}r_2 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}r_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

On a alors :

$(A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)} - I_4 =$

$$R_{\omega^{(0)}} P_{\omega^{(0)}} Q_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_2} - 1 \end{pmatrix} Q_{\omega^{(0)}}^{-1} P_{\omega^{(0)}}^{-1} R_{\omega^{(0)}}^{-1}$$

D'où en utilisant l'expression (5.22) on se ramène à calculer :

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}} m_\omega(E) r_l - 1)^k$$

Soit Ln la détermination principale du logarithme complexe définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On souhaite pouvoir écrire :

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_l} - 1)^k = \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_l}),\ l = 1, 2 \tag{5.25}$$

Pour cela il nous faut supposer que $r_l = \sqrt{E - \lambda_l^{\omega^{(0)}}} \notin (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. Cela nous conduit à introduire l'ensemble discret $\mathcal{S}_1$ formé des $E > 2$ de la forme $E = -\lambda_l^{\omega^{(0)}} + \pi + 2j\pi$ pour $j \in \mathbb{Z}$, $l \in \{1, 2\}$ et $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^2$. On suppose à partir de maintenant que $E \in]2, +\infty[\setminus \mathcal{S}_1$. On peut donc écrire :

$\log((A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)}) =$

$$R_{\omega^{(0)}} P_{\omega^{(0)}} Q_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_2}) \end{pmatrix} Q_{\omega^{(0)}}^{-1} P_{\omega^{(0)}}^{-1} R_{\omega^{(0)}}^{-1}$$

On est donc ramené à calculer les logarithmes complexes $\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}m_\omega(E)r_l})$. On fixe $l = 1$, le calcul pour $l = 2$ sera identique. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) &= \mathrm{iArg}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) \\ &= \mathrm{iArcsin}(\sin(m_\omega(E)r_1)) && (5.26) \\ &= \mathrm{i}\left(m_\omega(E)r_1 - \pi \mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right)(-1)^{\mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)} && (5.27) \end{aligned}$$

où E dans (5.27) désigne la partie entière. On rappelle que d'après (5.19), $m_\omega(E)r_1$ peut être choisi arbitrairement proche d'un multiple entier de 2π. D'où le fait que

l'on peut supposer que $\sin(m_\omega(E)r_1) \neq \pm 1$ et bien obtenir un Arcsin dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ à l'équation (5.26). De (5.19) on en déduit aussi que $\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi}$ est arbitrairement proche d'un entier pair. On peut donc fixer M assez grand (de sorte que $2M^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}$) pour que $\mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$ soit toujours un entier pair et de fait égal à $2x_1$. Ainsi (5.27) devient :

$$\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) = \mathrm{i}\left(m_\omega(E)r_1 - \pi\mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right) \tag{5.28}$$

De même on a l'analogue de (5.27) pour le logarithme du conjugué :

$$\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) = \mathrm{i}\left(-m_\omega(E)r_1 - \pi\mathsf{E}\left(-\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right)(-1)^{\mathsf{E}\left(-\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)} \tag{5.29}$$

Regardons ce qui se passe sur le bloc correspondant à r_1 lorsque l'on revient en écriture réelle donc lorsque l'on applique la conjugaison par $Q_{\omega^{(0)}}$. On a :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{r_1} & \frac{\mathrm{i}}{r_1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) & 0 \\ 0 & \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) \end{pmatrix} . \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i}r_1 & 1 \\ -\mathrm{i}r_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) + \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) & -\frac{\mathrm{i}}{r_1}\left(\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) - \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1})\right) \\ \mathrm{i}r_1\left(\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) - \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1})\right) & \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) + \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

D'après (5.28) et (5.29) on a :

$$\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) + \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) = -\mathrm{i}\pi\left(\mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right) + \mathsf{E}\left(-\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right) \tag{5.31}$$

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathsf{E}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \mathsf{E}\left(\frac{1}{2} - x\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{2} + n,\ n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.32}$$

Mais, comme dans notre cas, on peut choisir M de sorte que $\frac{m_\omega(E)r_l}{\pi}$ soit arbitrairement proche d'un entier pair, on peut supposer que pour $l = 1, 2$, $\frac{m_\omega(E)r_l}{\pi}$ n'est pas de la forme $\frac{1}{2} + n,\ n \in \mathbb{Z}$. Donc on a :

$$\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) + \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) = 0 \tag{5.33}$$

Toujours en ayant exclu le cas où $\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} = \frac{1}{2} + n,\ n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) - \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_\omega(E)r_1}) \\ &\quad = \mathrm{i}\left(2m_\omega(E)r_1 - \pi\left(\mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) - \mathsf{E}\left(-\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right)\right) \\ &\quad = \mathrm{i}\left(2m_\omega(E)r_1 - 2\pi\mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E)r_1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned} \tag{5.34}$$

On notera dans la suite, pour $l = 1, 2$:

$$x_l = x_l(E, \omega) := \frac{1}{2}\mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E) r_l}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \tag{5.35}$$

En réinjectant les expressions (5.33) et (5.34) dans la matrice obtenue en (5.30), et en répétant pour le bloc correspondant à r_2, il vient :

$$\begin{aligned}
&\log((A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)}) \\
= \quad & R_{\omega^{(0)}} P_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} 0 & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_1}{r_1} & 0 & 0 \\ -m_\omega(E) r_1^2 + 2\pi r_1 x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_2}{r_2} \\ 0 & 0 & -m_\omega(E) r_2^2 + 2\pi r_2 x_2 & 0 \end{pmatrix} P_{\omega^{(0)}}^{-1} R_{\omega^{(0)}}^{-1} \\
= \quad & R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_2}{r_2} \\ -m_\omega(E) r_1^2 + 2\pi r_1 x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_\omega(E) r_2^2 + 2\pi r_2 x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1}
\end{aligned}$$

En vue des calculs que nous effectuerons sur ces logarithmes à la section 5.3.3 nous introduisons la notation :

$$LA_{\omega^{(0)}} := \log((A_{0,2}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)}) \tag{5.36}$$

Ainsi dans cette section on a prouvé que pour $E \in]2, +\infty[\backslash \mathcal{S}_1$:

$$LA_{\omega^{(0)}} = R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_2}{r_2} \\ -m_\omega(E) r_1^2 + 2\pi r_1 x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_\omega(E) r_2^2 + 2\pi r_2 x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1} \tag{5.37}$$

Nous allons maintenant nous servir de cette forme pour prouver que les quatre matrices $LA_{\omega^{(0)}}$, obtenues lorsque $\omega^{(0)}$ parcourt $\{0, 1\}^2$, engendrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$.

5.3.3 L'algèbre de Lie $\mathfrak{la}_2(E)$

On fixe $E \in]2, +\infty[\backslash \mathcal{S}_1$. Nous commençons par définir $\mathfrak{la}_2(E)$ comme étant l'algèbre de Lie engendrée par les matrices $LA_{\omega^{(0)}}$ pour $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^2$. Comme nous l'avons déjà fait dans les preuves des théorèmes 4.2.1 et 5.2.1, nous allons prouver que $\mathfrak{la}_2(E)$ est de dimension au moins 10 en construisant une famille de 10 matrices linéairement indépendantes dans $\mathfrak{la}_2(E)$.

Nous allons utiliser à nouveau les expressions des matrices orthogonales $S_{\omega^{(0)}}$ et des valeurs propres λ_l^ω que nous avons calculées à la section 5.2.1. Les calculs que nous allons effectuer dans la suite de cette section donnant lieu à des expressions relativement lourdes, il nous faut introduire des notations qui nous permettront de les alléger et de less manipuler plus aisément.

5.3.3.1 Notations

On pose :

$$a_1 := x_1(E,(0,0)) = \mathsf{E}\left(\frac{m_{(0,0)}(E)\sqrt{E-1}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$
$$a_2 := x_2(E,(0,0)) = \mathsf{E}\left(\frac{m_{(0,0)}(E)\sqrt{E+1}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$
$$b_1 := x_1(E,(1,0)) = \mathsf{E}\left(\frac{m_{(1,0)}(E)\sqrt{E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$
$$b_2 := x_2(E,(1,0)) = \mathsf{E}\left(\frac{m_{(1,0)}(E)\sqrt{E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$

et

$$c_1 := x_1(E,(0,1)) = \mathsf{E}\left(\frac{m_{(0,1)}(E)\sqrt{E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$
$$c_2 := x_2(E,(0,1)) = \mathsf{E}\left(\frac{m_{(0,1)}(E)\sqrt{E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$
$$d_1 := x_1(E,(1,1)) = \mathsf{E}\left(\frac{m_{(1,1)}(E)\sqrt{E}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$
$$d_2 := x_2(E,(1,1)) = \mathsf{E}\left(\frac{m_{(1,1)}(E)\sqrt{E-2}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$

Pour $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, nous noterons aussi $M[i,j]$ le coefficient de la ligne i et de la colonne j. On notera pour $\omega = (\omega_1,\omega_2) \in \{0,1\}^2$, $m_\omega(E) = m_{\omega_1\omega_2}$. Puis en accord avec les notations de la section 5.2.1, on pose :

$$r_1^{00} := \sqrt{E-1}, \qquad r_2^{00} := \sqrt{E+1}$$
$$r_1^{11} := \sqrt{E-2}, \qquad r_2^{11} := \sqrt{E}$$
$$r_1^{10} = r_1^{01} := \sqrt{E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \qquad r_2^{10} = r_2^{01} := \sqrt{E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Enfin on pose :

$$D_1(E) := \sqrt{E-1}\sqrt{E+1}\sqrt{E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$
$$D_2(E) := \sqrt{E}\sqrt{E-2}\sqrt{E-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{E-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

La construction d'une famille de 10 matrices linéairement indépendantes dans $\mathfrak{la}_2(E)$ va se faire en plusieurs étapes. La première consiste à voir ce que l'on engendre comme sous-espace de $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ à partir des crochets de Lie $[LA_{\omega^{(0)}}, LA_{\tilde{\omega}^{(0)}}]$. Puis en utilisant des matrices particulières dans cet espace et en considérant les différences $LA_{\omega^{(0)}} - LA_{\tilde{\omega}^{(0)}}$, on construira les matrices manquantes.

5.3.3.2 L'espace V_1 engendré par les $[LA_{\omega^{(0)}}, LA_{\tilde{\omega}^{(0)}}]$

Un calcul direct nous montre que le crochet $[LA_{\omega^{(0)}}, LA_{\tilde{\omega}^{(0)}}]$ est toujours de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix}, \ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \tag{5.38}$$

On note V_1 le sous-espace de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 4 formé par ces matrices. Nous allons vérifier que hors d'un ensemble discret d'énergies E, les quatre crochets

$$[LA_{(1,0)}, LA_{(0,0)}], [LA_{(1,0)}, LA_{(1,1)}],$$
$$[LA_{(0,1)}, LA_{(0,0)}], [LA_{(0,1)}, LA_{(0,0)}]$$

engendrent V_1.

Expression de $\Upsilon_1 = [LA_{(1,0)}, LA_{(0,0)}]$. Nous donnons les expressions des coefficients de la matrice obtenue. D'après (5.38) il nous suffit d'expliciter les coefficients correspondant au premier bloc 2×2.

$$\begin{aligned}\Upsilon_1[1,1] &= -\frac{1}{4\sqrt{5}D_1(E)}\Big[(-\pi(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})+2m_{00}r_1^{00}r_2^{00})(\pi b_1(1+\sqrt{5})r_2^{10} \\ &\quad -\pi b_2(1-\sqrt{5})r_1^{10}-2\sqrt{5}m_{10}r_1^{10}r_2^{10})\Big]\end{aligned}$$

$$\Upsilon_1[1,2] = \frac{\pi^2 E}{2\sqrt{5}D_1(E)}\left[(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})(a_1r_2^{00}-a_2r_1^{00})\right]$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_1[2,1] &= -\frac{\pi}{4\sqrt{5}D_1(E)}\Big[\pi(a_2r_1^{00}-5a_1r_2^{00}+4m_{00}r_1^{00}r_2^{00})(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})+ \\ &\quad (a_1r_2^{00}-a_2r_1^{00})(2\sqrt{5}m_{10}r_1^{10}r_2^{10}+2\pi E(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10}))\Big]\end{aligned}$$

$$\Upsilon_1[2,2] = \frac{\pi^2}{2\sqrt{5}D_1(E)}\left[(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})(a_1r_2^{00}-a_2r_1^{00})\right]$$

Expression de $\Upsilon_2 = [LA_{(0,1)}, LA_{(0,0)}]$. On a :

$$\begin{aligned}\Upsilon_2[1,1] &= -\frac{1}{20D_1(E)}\Big[(10\sqrt{5}\pi m_{00}r_1^{00}r_2^{00}-\sqrt{5}\pi^2(a_2r_1^{00}+3a_1r_2^{00}))(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})\\ &+5(\pi^2(a_1r_2^{00}-3a_2r_1^{00})+2\pi m_{00}r_1^{00}r_2^{00})(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10})\\ &-10(\pi m_{01}(a_1r_2^{00}-3a_2r_1^{00})+2m_{00}m_{01}r_1^{00}r_2^{00})r_1^{10}r_2^{10}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_2[1,2] &= -\frac{1}{2\sqrt{5}D_1(E)}\Big[(\pi^2(a_1r_2^{00}-3a_2r_1^{00})+\pi^2E(a_1r_2^{00}-a_2r_1^{00})\\ &+(2+2\sqrt{5})\pi m_{00}r_1^{00}r_2^{00})(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})\\ &-\sqrt{5}\pi^2(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10})\\ &+2\sqrt{5}(\pi m_{01}(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})-2m_{00}m_{01}r_1^{00}r_2^{00})r_1^{10}r_2^{10}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_2[2,1] &= -\frac{1}{20D_1(E)}\Big[(5\pi^2(a_1r_2^{00}+3a_2r_1^{00})-20\pi m_{00}r_1^{00}r_2^{00})(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10})\\ &+\sqrt{5}\pi^2(2E-5)(a_1r_2^{00}-a_2r_1^{00})(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})\\ &-10(\pi m_{01}(a_1r_2^{00}+3a_2r_1^{00})-4m_{00}m_{01}r_1^{00}r_2^{00})r_1^{10}r_2^{10}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_2[2,2] &= -\frac{\pi}{10D_1(E)}\Big[5\pi(a_1r_2^{00}-a_2r_1^{00})(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10})\\ &+2\sqrt{5}(\pi(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})+2m_{00}r_1^{00}r_2^{00})(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})\\ &+10m_{01}(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})r_1^{10}r_2^{10}\Big]\end{aligned}$$

Expression de $\Upsilon_3 = [LA_{(1,0)}, LA_{(1,1)}]$. On a :

$$\begin{aligned}\Upsilon_3[1,1] &= -\frac{\pi}{10D_2(E)}\Big[2\sqrt{5}(2m_{11}r_1^{11}r_2^{11}-\pi(d_1r_2^{11}+d_2r_1^{11}))(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})\\ &+5\pi(d_2r_1^{11}-d_1r_2^{11})(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})+10m_{10}(d_1r_2^{11}-d_2r_1^{11})r_1^{10}r_2^{10}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_3[1,2] &= \frac{1}{20D_2(E)}\Big[\sqrt{5}\pi^2(d_1r_2^{11}-d_2r_1^{11})(2E-3)(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})\\ &+(5\pi^2(d_1r_2^{11}+3d_2r_1^{11})-20\pi m_{11}r_1^{11}r_2^{11})(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})\\ &+(40m_{11}m_{10}r_1^{11}r_2^{11}-10\pi m_{10}(d_1r_2^{11}+3d_2r_1^{11}))r_1^{10}r_2^{10}\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_3[2,1] &= -\frac{1}{10D_2(E)}\Big[(2\pi^2\sqrt{5}(2d_2r_1^{11}-d_1r_2^{11})+\pi^2\sqrt{5}E(d_1r_2^{11}-d_2r_1^{11}) \\
&\quad -2\pi\sqrt{5}m_{11}r_1^{11}r_2^{11})(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10}) \\
&\quad +(10\pi m_{11}r_1^{11}r_2^{11}-5\pi^2(d_1r_2^{11}+d_2r_1^{11}))(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10}) \\
&\quad +(10\pi m_{10}(d_1r_2^{11}+d_2r_1^{11})-20m_{11}m_{00}r_1^{11}r_2^{11})r_1^{10}r_2^{10}\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_3[2,2] &= -\frac{1}{20D_2(E)}\Big[(10\pi\sqrt{5}m_{11}r_1^{11}r_2^{11}-\pi^2\sqrt{5}(3d_1r_2^{11}+7d_2r_1^{11}))(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10}) \\
&\quad +(5\pi^2(3d_2r_1^{11}-d_1r_2^{11})-10\pi m_{11}r_1^{11}r_2^{11})(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10}) \\
&\quad +(10\pi m_{10}(d_1r_2^{11}-3d_2r_1^{11})+20m_{11}m_{00}r_1^{11}r_2^{11})r_1^{10}r_2^{10}\Big]
\end{aligned}$$

Expression de $\Upsilon_4 = [LA_{(0,1)}, LA_{(1,1)}]$. On a :

$$\Upsilon_4[1,1] = \frac{\pi^2}{2\sqrt{5}D_2(E)}\left[(d_1r_2^{11}-d_2r_1^{11})(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})\right]$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_4[1,2] &= \frac{\pi}{4\sqrt{5}D_2(E)}\Big[(\pi(d_1r_2^{11}+3d_2r_1^{11})+2\pi E(d_1r_2^{11}-d_2r_1^{11}) \\
&\quad -4m_{11}r_1^{11}r_2^{11})(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10}) \\
&\quad +\sqrt{5}\pi(d_2r_1^{11}-d_1r_2^{11})(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10}) \\
&\quad +2\sqrt{5}m_{01}(d_1r_2^{11}-d_2r_1^{11})r_1^{10}r_2^{10}\Big]
\end{aligned}$$

$$\Upsilon_4[2,1] = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{5}D_2(E)}\left[(E-1)(d_1r_2^{11}-d_2r_1^{11})(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})\right]$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_4[2,2] &= -\frac{1}{4\sqrt{5}D_2(E)}\Big[(2m_{11}r_1^{11}r_2^{11}-\pi(d_1r_2^{11}+d_2r_1^{11}))(2\sqrt{5}m_{01}r_1^{10}r_2^{10} \\
&\quad +\pi(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})-\sqrt{5}\pi(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10}))\Big]
\end{aligned}$$

On peut alors considérer le déterminant de ces coefficients :

$$\begin{vmatrix}
\Upsilon_1[1,1] & \Upsilon_2[1,1] & \Upsilon_3[1,1] & \Upsilon_4[1,1] \\
\Upsilon_1[1,2] & \Upsilon_2[1,2] & \Upsilon_3[1,2] & \Upsilon_4[1,2] \\
\Upsilon_1[2,1] & \Upsilon_2[2,1] & \Upsilon_3[2,1] & \Upsilon_4[2,1] \\
\Upsilon_1[2,2] & \Upsilon_2[2,2] & \Upsilon_3[2,2] & \Upsilon_4[2,2]
\end{vmatrix}$$

que l'on note

$$f_1(E) = \tilde{f}_1(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, m_{00}, m_{01}, m_{10}, m_{11}, E) \tag{5.39}$$

où $\tilde{f}_1(X_1, \ldots, X_{12}, Y)$ est polynomiale en $X_1, \ldots, X_{12}$ et analytique en Y. En effet, le déterminant précédent est une fraction rationnelle en les r_i^{jk} qui sont elles-mêmes des fonctions analytiques en E ne s'annulant pas sur l'intervalle $]2, +\infty[$ que l'on considère ici, d'où l'analyticité en Y de cette fonction $\tilde{f}_1$.

Il nous faut de préciser que les coefficients $a_1, \ldots, d_2$ et les entiers $m_{00}, \ldots, m_{11}$ dépendent eux aussi de E et ne sont pas analytiques en E. Donc f_1 n'est pas analytique en E. Nous allons voir tout de suite comment contourner cette difficulté.

On commence par rappeler que indépendamment en E et ω, par la preuve de la proposition 5.3.3, $1 \leq m_\omega(E) \leq M$. Ici M ne dépend que du voisinage $\mathcal{O}$ au travers du fait que M doit être fixé assez grand pour que la boule $B(I, 2\pi M^{-\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{O}$. Ainsi, $m_\omega(E)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, M\}$.

Puis on considère la suite d'intervalles $I_2 =]2, 3]$, $I_3 = [3, 4]$, et pour tout $k \geq 3$, $I_k = [k, k+1]$. Ces intervalles recouvrent tout l'intervalle ouvert $]2, +\infty[$. On fixe alors $k \geq 2$ et on suppose que $E \in I_k$. Alors les entiers

$$x_i^\omega(E) = \mathsf{E}\left(\frac{m_\omega(E)\sqrt{E - \lambda_i^\omega}}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$$

sont tous bornés par une constante ne dépendant que de M et de I_k donc de k. En effet, les valeurs propres λ_i^ω sont toutes contenues dans l'intervalle $[-2, 2]$ qui est fixe, $m_\omega(E)$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, M\}$ et $E \in I_k$. Donc ces entiers $x_i^\omega(E)$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs dans un ensemble $\{0, \ldots, N_k\}$.

Ainsi, pour étudier l'annulation du déterminant (5.39) et donc les zéros de la fonction f_1, on est ramené à étudier un nombre fini de fonctions analytiques, les fonctions :

$$\tilde{f}_{1,p,l} \;\; E \mapsto \tilde{f}_1(p_1, \ldots, p_8, l_1, \ldots, l_4, E)$$

pour $p_i \in \{0, \ldots, N_k\}$ et $l_j \in \{1, \ldots M\}$. On peut vérifier que ces fonctions sont non identiquement nulles. Le seul cas qui pourrait poser problème, au sens où la fonction $\tilde{f}_{1,p,l}$ serait nulle, est le cas limite où tous les x_i^ω s'annulent. En effet, $\tilde{f}_1(0, \ldots, 0, X_9, \ldots, X_{12}, Y)$ est identiquement nulle. Mais si on regarde les valeurs des entiers x_i^ω pour $E > 2$ et sachant que $m_\omega(E) \geq 1$, on obtient $a_2 \geq 1$. On peut calculer le terme qui fait intervenir uniquement a_2 et pas les autres x_i^ω dans le développement du déterminant. On obtient pour ce terme :

$$\frac{m_{10}^2 m_{01}^2 m_{11}^2 \pi^2 a_2^2}{E+1} \geq \frac{\pi^2}{E+1} > 0$$

Par ailleurs, en observant tous les coefficients que nous avons calculés et qui apparaissent dans le déterminant (5.39), ce terme est le seul faisant intervenir E via $E + 1 = (r_2^{00})^2$ uniquement au dénominateur et sans E au numérateur. Donc ce terme ne peut être annulé uniformément en E par un autre terme du développement du déterminant et ce quelles que soient les valeurs prises par les entiers $a_1, b_1, \ldots, d_2$ et $m_{00}, \ldots, m_{11}$. Posons :

$$J_1 = (\{0, \ldots, N_k\} \times \{1, \ldots, N_k\} \times \{0, \ldots, N_k\}^6) \times \{1, \ldots M\}^4$$

Alors, comme $(a_1, \ldots, m_{11}) \in J_1$ par la discussion que l'on vient de faire, l'ensemble des zéros de f_1 dans I_k est inclus dans la réunion finie d'ensembles discrets dans I_k suivante :

$$\{E \in I_k \mid f_1(E) = 0\} \subset \bigcup_{(p,l)\in J_1} \{E \in I_k \mid \tilde{f}_{1,p,l}(E) = 0\}$$

Cet ensemble est donc aussi discret dans I_k. On en déduit finalement que :

$$\{E \in]2, +\infty[\mid f_1(E) = 0\} = \bigcup_{k\geq 2} \{E \in I_k \mid f_1(E) = 0\}$$

est discret dans $]2, +\infty[$. On pose :

$$\mathcal{S}_2 = \{E \in]2, +\infty[\mid f_1(E) = 0\} \tag{5.40}$$

Soit $E \in]2, +\infty[\backslash(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$. La non nullité du déterminant (5.39) implique que les quatre matrices $[LA_{(1,0)}, LA_{(0,0)}]$, $[LA_{(1,0)}, LA_{(1,1)}]$, $[LA_{(0,1)}, LA_{(0,0)}]$, $[LA_{(0,1)}, LA_{(0,0)}]$ forment une famille libre dans l'espace $V_1 \subset \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4. Elles engendrent donc tout V_1. On en déduit que :

$$V_1 \subset \mathfrak{la}_2(E) \text{ pour tout } E > 2,\ E \notin \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2. \tag{5.41}$$

Remarque 5.3.5. Ce qui nous permet de prouver que $\mathcal{S}_2$ est discret sans avoir l'analyticité de f_1 est la propriété de finitude de $m_\omega(E)$ borné par M indépendant de ω et de E. Cette propriété d'uniformité vient directement de l'approximation diophantienne simultanée que l'on utilise dans la preuve de la proposition 5.3.3. Le fait de devoir localiser en E en découpant $]2, +\infty[$ en les I_k n'est qu'un argument technique dans la preuve.

Cela termine cette première partie de l'étude de l'algèbre de Lie $\mathfrak{la}_2(E)$. Il nous reste à construire une famille de six matrices linéairement indépendantes dans un supplémentaire de V_1 dans $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$.

5.3.3.3 Construction de l'orthogonal de V_1 dans $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$

Nous reprenons les notations introduites à la section 5.3.3.1. Nous allons commencer par donner les expressions des matrices $LA_{(1,0)} - LA_{(0,0)}$, $LA_{(1,0)} - LA_{(1,1)}$ et $LA_{(0,1)} - LA_{(0,0)}$. Au vu de la forme de $LA_{\omega^{(0)}}$ (voir (5.37)) on sait déjà que toutes ces différences sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e & g \\ 0 & 0 & g & f \\ a & c & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (a, b, c, e, f, g) \in \mathbb{R}^6 \tag{5.42}$$

On note V_2 le sous-espace de dimension 6 de $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de la forme (5.42). On sait alors que $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_2$. La forme (5.42) nous permet aussi de n'avoir à calculer que les coefficients $[3, 1]$, $[3, 2]$, $[4, 2]$, $[1, 3]$,$[1, 4]$ et $[2, 4]$ des matrices $LA_{(1,0)} - LA_{(0,0)}$, $LA_{(1,0)} - LA_{(1,1)}$ et $LA_{(0,1)} - LA_{(0,0)}$. Nous donnons tout de suite ces expressions.

Expression de $\Theta_1 = LA_{(1,0)} - LA_{(0,0)}$. On a :

$$\Theta_1[3,1] = m_{10}(1-E)+m_{00}E-\frac{\pi}{2}(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})+\frac{\pi}{2}(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_1[3,2] = m_{10}-m_{00}+\frac{\pi}{2}(a_2r_1^{00}-a_1r_2^{00})+\frac{\pi}{\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_1[4,2] = (m_{00}-m_{10})E-\frac{\pi}{2}(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})+\frac{\pi}{2}(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_1[1,3] = m_{10}-m_{00}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{a_1}{r_2^{00}}-\frac{a_2}{r_1^{00}}\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\left(\frac{b_2}{r_1^{10}}-\frac{b_1}{r_2^{10}}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}+\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_1[1,4] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a_1}{r_2^{00}}-\frac{a_2}{r_1^{00}}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{b_2}{r_1^{10}}-\frac{b_1}{r_2^{10}}\right)$$

$$\Theta_1[2,4] = m_{10}-m_{00}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{a_1}{r_2^{00}}+\frac{a_2}{r_1^{00}}\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}-\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}+\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

Expression de $\Theta_2 = LA_{(1,0)} - LA_{(1,1)}$. On a :

$$\Theta_2[3,1] = m_{10}+(m_{11}-m_{10})E-\frac{\pi}{2}(d_1r_2^{11}+d_2r_1^{11})+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})+\frac{\pi}{2}(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_2[3,2] = m_{10}+m_{11}+\frac{\pi}{2}(d_2r_1^{11}-d_1r_2^{11})+\frac{\pi}{\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_2[4,2] = (m_{11}-m_{10})E-\frac{\pi}{2}(d_1r_2^{11}+d_2r_1^{11})-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})+\frac{\pi}{2}(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_2[1,3] = m_{10}-m_{11}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{d_1}{r_2^{00}}+\frac{d_2}{r_1^{00}}\right)-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}-\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}+\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_2[1,4] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d_1}{r_2^{00}}-\frac{d_2}{r_1^{00}}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}-\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_2[2,4] = m_{10}-m_{11}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{d_1}{r_2^{00}}+\frac{d_2}{r_1^{00}}\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}-\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}+\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

Expression de $\Theta_3 = LA_{(0,1)} - LA_{(0,0)}$. On a :

$$\Theta_3[3,1] = m_{01}+(m_{00}-m_{01})E-\frac{\pi}{2}(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})+\frac{\pi}{2}(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10})$$

$$\Theta_3[3,2] = -(m_{00}+m_{01})+\frac{\pi}{2}(a_2r_1^{00}-a_1r_2^{00})+\frac{\pi}{\sqrt{5}}(c_2r_1^{10}-c_1r_2^{10})$$

$$\Theta_3[4,2] = (m_{00}-m_{01})E-\frac{\pi}{2}(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})-\frac{\pi}{2}(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10})$$

$$\Theta_3[1,3] = m_{01}-m_{00}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{a_1}{r_2^{00}}+\frac{a_2}{r_1^{00}}\right)+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\left(\frac{c_2}{r_1^{10}}-\frac{c_1}{r_2^{10}}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{c_1}{r_2^{10}}+\frac{c_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_3[1,4] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a_1}{r_2^{00}}-\frac{a_2}{r_1^{00}}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{c_2}{r_1^{10}}-\frac{c_1}{r_2^{10}}\right)$$

$$\Theta_3[2,4] = m_{01}-m_{00}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{a_1}{r_2^{00}}+\frac{a_2}{r_1^{00}}\right)-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\left(\frac{c_2}{r_1^{10}}-\frac{c_1}{r_2^{10}}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{c_1}{r_2^{10}}+\frac{c_2}{r_1^{10}}\right)$$

Ces trois matrices sont les trois premières matrices de la famille de six matrices linéairement indépendantes que nous cherchons. Il reste à construire à partir de ces trois matrices trois autres matrices dans V_2.

Pour cela on commence par fixer $E \in]2,+\infty[\backslash(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$. Alors $V_1 \subset \mathfrak{la}_2(E)$ et en particulier les matrices suivantes sont dans $\mathfrak{la}_2(E)$:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

Nous allons maintenant considérer les trois matrices de $\mathfrak{la}_2(E)$, $[LA_{(1,0)}-LA_{(0,0)}, Z_1]$, $[LA_{(1,0)}-LA_{(1,1)}, Z_2]$ et $[LA_{(0,1)}-LA_{(0,0)}, Z_3]$. On peut vérifier qu'en général, le crochet de Lie d'un élément de V_1 et d'un élément de V_2 est encore dans V_2. Ainsi pour expliciter ces trois matrices supplémentaires, nous n'aurons qu'à expliciter six de leurs coefficients.

Expression de $\Theta_4 = [LA_{(1,0)} - LA_{(0,0)}, Z_1]$. On a :

$$\Theta_4[3,1] = 2m_{10}+2(m_{00}-m_{10})E-\pi(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})+\pi(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})+\frac{\pi}{\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_4[3,2] = m_{10}-m_{00}+\pi(a_2r_1^{00}-a_1r_2^{00})+\frac{\pi}{\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_4[4,2] = 0$$

$$\Theta_4[1,3] = 2(m_{00}-m_{10})-\pi\left(\frac{a_1}{r_2^{00}}+\frac{a_2}{r_1^{00}}\right)+\pi\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}+\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}-\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_4[1,4] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a_2}{r_1^{00}}-\frac{a_1}{r_2^{00}}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}-\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_4[2,4] = 0$$

Expression de $\Theta_5 = [LA_{(1,0)} - LA_{(1,1)}, Z_2]$. On a :

$$\Theta_5[3,1] = 0$$

$$\Theta_5[3,2] = m_{10}+m_{11}+\frac{\pi}{2}(d_2r_1^{11}-d_1r_2^{11})+\frac{\pi}{\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_5[4,2] = 2(m_{11}-m_{10})E-2m_{11}-\pi(d_1r_2^{11}+d_2r_1^{11})+\pi(b_1r_2^{10}+b_2r_1^{10})-\frac{\pi}{\sqrt{5}}(b_1r_2^{10}-b_2r_1^{10})$$

$$\Theta_5[1,3] = 0$$

$$\Theta_5[1,4] = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d_2}{r_1^{11}}-\frac{d_1}{r_2^{11}}\right)+\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}-\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_5[2,4] = 2(m_{11}-m_{10})-\pi\left(\frac{d_1}{r_2^{11}}+\frac{d_2}{r_1^{11}}\right)+\pi\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}+\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{b_1}{r_2^{10}}-\frac{b_2}{r_1^{10}}\right)$$

Expression de $\Theta_6 = [LA_{(0,1)} - LA_{(0,0)}, Z_3]$. On a :

$$\Theta_6[3,1] = 0$$

$$\Theta_6[3,2] = m_{01}+(m_{00}-m_{01})E-\frac{\pi}{2}(a_1r_2^{00}+a_2r_1^{00})+\frac{\pi}{2}(c_1r_2^{10}+c_2r_1^{10})+\frac{\pi}{2\sqrt{5}}(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})$$

$$\Theta_6[4,2] = -2(m_{00}+m_{01})+\pi(a_2r_1^{00}-a_1r_2^{00})-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}(c_1r_2^{10}-c_2r_1^{10})$$

$$\Theta_6[1,3] = \pi\left(\frac{a_2}{r_1^{00}}-\frac{a_1}{r_2^{00}}\right)-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\left(\frac{c_1}{r_2^{10}}-\frac{c_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_6[1,4] = m_{00}-m_{01}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{a_1}{r_2^{00}}+\frac{a_2}{r_1^{00}}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{c_1}{r_2^{10}}+\frac{c_2}{r_1^{10}}\right)-\frac{\pi}{2\sqrt{5}}\left(\frac{c_1}{r_2^{10}}-\frac{c_2}{r_1^{10}}\right)$$

$$\Theta_6[2,4] = 0$$

Il nous reste à vérifier que les six matrices que l'on vient d'expliciter forment bien une famille libre pour tout E hors d'un ensemble discret de $]2,+\infty[$. On considère pour cela le déterminant 6×6 dont chaque colonne correspond à l'un des 6 crochets que l'on vient de calculer et est formée des 6 éléments que l'on vient d'expliciter. Ce déterminant est alors une fonction f_2 de l'énergie :

$$f_2(E) = \tilde{f}_2(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2,d_1,d_2,m_{00},m_{01},m_{10},m_{11},E) \tag{5.44}$$

où $\tilde{f}_2(X_1,\ldots,X_{12},Y)$ est polynomiale en $X_1,\ldots,X_{12}$ et analytique en Y. En effet, le déterminant précédent est une fraction rationnelle en les r_i^{jk} qui sont elles-mêmes des fonctions analytiques en E ne s'annulant pas sur l'intervalle $]2,+\infty[$ que l'on considère ici, d'où l'analyticité en Y de cette fonction $\tilde{f}_2$.

On peut à nouveau vérifier que les fonctions $\tilde{f}_{2,p,l}$ définies comme les $\tilde{f}_{1,p,l}$ ne sont pas identiquement nulles. Plus précisément regardons le terme en a_2 dans le développement du déterminant (5.44). Écrivons le terme qui ne fait intervenir que a_2, m_{10} et m_{11}. Ce terme vaut :

$$\begin{aligned}
&\frac{m_{10}(m_{11}-m_{10})\pi^2a_2^2}{4(E+1)^3}\Big[\pi a_2m_{11}\Big(10\sqrt{E+1}E^3-8\,(E+1)^{3/2}\,E^3-9\,(E+1)^{7/2}+(E+1)^{5/2}+28\sqrt{E+1}E^2\\
&+14\,(E+1)^{3/2}\,E-2\,(E+1)^{3/2}\,E^2-11\,(E+1)^{5/2}\,E+8\,(E+1)^{7/2}\,E+26\sqrt{E+1}E+8\,(E+1)^{3/2}+8\sqrt{E+1}\Big)\\
&+\pi a_2m_{10}\Big(10\,(E+1)^{5/2}+2\,(E+1)^{7/2}+8\,(E+1)^{3/2}\,E^3+14\,(E+1)^{5/2}\,E-8\,(E+1)^{7/2}\,E\\
&-29\sqrt{E+1}E^2-(E+1)^{3/2}\,E+10\,(E+1)^{3/2}\,E^2-28\sqrt{E+1}E-3\,(E+1)^{3/2}-9\sqrt{E+1}-10\sqrt{E+1}E^3\Big)\\
&+m_{10}m_{11}(16E^4+32E^3-16E^2-64E-32)\Big]
\end{aligned}$$

On constate que ce terme est non nul pour $a_2 \geq 1$, $m_{10} \geq 1$ et $m_{11} \geq 1$ dès lors que $m_{10} \neq m_{11}$. Or on peut toujours supposer que ces deux entiers sont distincts. En effet, dans la preuve de la proposition 5.3.3, on peut par exemple choisir $2m_{10}$ au lieu de m_{10} quitte à multiplier aussi par 2 les entiers x_1^{10} et x_1^{10} (et éventuellement quitte à choisir M deux fois plus grand si besoin est). On est sûr que m_{10} et $2m_{10}$ ne peuvent être tous les deux égaux à m_{11}. Par ailleurs le terme que l'on vient de calculer est le seul du développement du déterminant (5.44) à faire intervenir exactement ces puissances de E et $E+1$ au numérateur et au dénominateur. Il ne peut donc être annulé uniformément en E par un autre terme du développement du déterminant (5.44) et ce quelles que soient les valeurs des autres paramètres entiers. Ainsi, encore une fois, les $\tilde{f}_{2,p,l}$ sont toutes non identiquement nulles sur I_k lorsque $(p,l) \in J_2 \subset J_1$ où :

$$J_2 = (\{0,\dots,N_k\} \times \{1,\dots,N_k\} \times \{0,\dots,N_k\}^6) \times (\{1,\dots M\}^4 \setminus \{(l_1,l_2,l_3,l_4) \mid l_3 = l_4\})$$

De plus comme on vient de justifier que $(a_1,\dots,m_{11}) \in J_2$:

$$\{E \in I_k \mid f_2(E) = 0\} \subset \bigcup_{(p,l)\in J_2} \{E \in I_k \mid \tilde{f}_{2,p,l}(E) = 0\}$$

On peut donc reprendre exactement la même preuve que précédemment pour prouver que les zéros de f_2 forment un ensemble discret. À nouveau on peut écrire que l'ensemble des zéros de f_2 est inclus dans une union dénombrable sur les intervalles I_k d'unions finies d'ensembles de zéros des fonctions analytiques $\tilde{f}_{2,p,l}$. Donc si on pose :

$$\mathcal{S}_3 = \{E \in]2,+\infty[\mid f_2(E) = 0\} ,$$

$\mathcal{S}_3$ est discret. Puis si $E \in]2,+\infty[\setminus\mathcal{S}_3$, $f_2(E) \neq 0$ et donc les matrices $LA_{(1,0)} - LA_{(0,0)}$, $LA_{(1,0)} - LA_{(1,1)}$, $LA_{(0,1)} - LA_{(0,0)}$, $[LA_{(1,0)} - LA_{(0,0)}, Z_1]$, $[LA_{(1,0)} - LA_{(1,1)}, Z_2]$ et $[LA_{(0,1)} - LA_{(0,0)}, Z_3]$ forment une famille de six matrices linéairement indépendantes dans V_2 qui est de dimension 6. D'où,

$$V_2 \subset \mathfrak{la}_2(E) \ \text{ pour tout } E > 2,\ E \notin \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3.$$

On pose $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$. On fixe $E \in]2,+\infty[\setminus\mathcal{S}_B$. Tout d'abord $V_1 \subset \mathfrak{la}_2(E)$, puis $V_2 \subset \mathfrak{la}_2(E)$. Comme de plus $V_1 \oplus V_2 = \mathfrak{sp}_2(\mathbb{R})$, on obtient finalement :

$$\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{la}_2(E) \ \text{ pour tout } E > 2,\ E \notin \mathcal{S}_B.$$

Autrement dit, on a bien :

$$\mathfrak{sp}_2(\mathbb{R}) = \mathfrak{la}_2(E) \ \text{ pour tout } E > 2,\ E \notin \mathcal{S}_B.$$

Cela achève notre étude de l'algèbre de Lie $\mathfrak{la}_2(E)$.

5.3.4 Fin de la preuve du théorème 5.3.1

Avec les notations de la section précédente, si $E \in]2, +\infty[\backslash \mathcal{S}_B$, le sous-groupe de Fürstenberg $G_{\tilde{\mu}_E}$ associé à $H_{B,2}(\omega)$ est Zariski dense dans $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. On en déduit le théorème 5.3.1 de la même façon que dans les preuves des théorèmes 4.2.1, 4.3.1 et 5.2.1.

Nous verrons aux chapitres 6 et 7 pourquoi il est essentiel que dans le théorème 5.3.1 l'ensemble $\mathcal{S}_B$ soit discret. En effet cela implique en particulier que $]2, +\infty[\backslash \mathcal{S}_B$ soit une union dénombrable d'intervalles non réduits à des singletons. Mais avant de passer à ces chapitres, nous allons donner quelques pistes pour essayer d'aborder l'étude de l'opérateur (5.2) pour N quelconque.

5.4 Pistes pour l'étude du cas général

Nous cherchons à prouver l'analogue du théorème 5.3.1 pour l'opérateur $H_B(\omega)$ décrit en (5.2). Nous allons présenter dans cette partie ce qui reste vrai dans notre seconde approche dans le cas général où N est quelconque. Puis nous présenterons ce que nous n'avons pas réussi à démontrer pour l'instant et quelles sont les éventuelles pistes que nous avons pour y parvenir. Nous pensons que la conjecture suivante est vraie :

Conjecture. *Soient $\gamma_1(E), \ldots, \gamma_N(E)$ les exposants de Lyapounov positifs associés à $H_B(\omega)$. Il existe un nombre réel E_0 et un ensemble discret $\mathcal{S}_B \subset \mathbb{R}$ tels que, pour tout $E \in]E_0, +\infty[\backslash \mathcal{S}_B$,*

$$\gamma_1(E) > \ldots > \gamma_N(E) > 0.$$

En particulier, $H_B(\omega)$ n'a pas de spectre absolument continu dans l'intervalle $]E_0, +\infty[$.

Comme nous l'avons vu à la partie précédente, la preuve du théorème 5.3.1 revient à prouver que le sous-groupe de Fürstenberg $G_{\tilde{\mu}_E} \subset \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$. Ici encore, la preuve de cette conjecture se ramènerait à prouver que le sous-groupe de Fürstenberg $G_{\tilde{\mu}_E} \subset \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ associé à $H_B(\omega)$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. En effet, les résultats présentés aux chapitres 2 et 3 sont valables pour le groupe symplectique d'ordre N, $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. Il en est de même de la théorie de Kotani.

Pour prouver que $G_{\tilde{\mu}_E}$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, nous voulons suivre à nouveau le plan de preuve dicté par le théorème 3.2.2. Il s'agit de commencer par construire des éléments de $G_{\tilde{\mu}_E}$ qui soient arbitrairement proches de l'identité et donc en particulier dans le voisinage $\mathcal{O}$ donné par le théorème 3.2.2. Pour cela on part du fait que $\{0, 1\} \subset \operatorname{supp} \tilde{\nu}$ et qu'ainsi :

$$\{A_{0,N}^{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N\} \subset G_{\tilde{\mu}_E}$$

où $A^{\omega}_{n,N}(E) = \exp(X_{N,\omega}(E))$ est définie à la section 5.1. Posons :

$$M_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & \omega_N^{(0)} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$X_{N,\omega}(E) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ M_{\omega^{(0)}} - E & 0 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené à calculer les puissances successives de $M_{\omega^{(0)}}$. Nous allons donc diagonaliser dans une base orthonormée cette matrice symétrique réelle. Il existe N réels $\lambda_1^{\omega} \geq \ldots \geq \lambda_N^{\omega}$ et une matrice orthogonale S_{ω} tels que :

$$M_{\omega^{(0)}} = S_{\omega} \begin{pmatrix} \lambda_1^{\omega} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N^{\omega} \end{pmatrix} S_{\omega}^{-1}$$

Puis on considère la matrice orthogonale définie par blocs :

$$R_{\omega} = \begin{pmatrix} S_{\omega} & 0 \\ 0 & S_{\omega} \end{pmatrix}$$

On peut alors expliciter la matrice $A^{\omega}_{0,N}(E)$ lorsque $E > \lambda_1^{\omega}$. On note : $r_l = r_l(E,\omega) := \sqrt{E - \lambda_l^{\omega}}$. On obtient alors :

$$A^{\omega}_{0,N}(E) = R_{\omega} \begin{pmatrix} \cos(r_1) & & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(r_1) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & \cos(r_N) & 0 & & \frac{1}{r_N}\sin(r_N) \\ -r_1\sin(r_1) & & 0 & \cos(r_1) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & -r_N\sin(r_N) & 0 & & \cos(r_N) \end{pmatrix} R_{\omega}^{-1} \tag{5.45}$$

Remarque 5.4.1. Bien entendu on peut aussi calculer l'expression de $A^{\omega}_{0,N}(E)$ pour les autres valeurs de E en faisant intervenir des cosinus hyperboliques et des sinus hyperboliques dans l'expression (5.45). Mais la suite de notre propos s'appuyant sur l'approximation diophantienne simultanée, nous ne saurons traiter de ces cas.

Au vu de l'expression (5.45) on va pouvoir appliquer l'approximation diophantienne simultanée pour prouver l'analogue de la proposition 5.3.3. On pose :

$$E_0 = \max_{\omega \in \{0,1\}^N} \max_{i=1,\ldots,N} \lambda_i^{\omega}$$

On a alors :

Proposition 5.4.2. *Soit $E \in]E_0, +\infty[$. Pour tout $\omega \in \{0,1\}^N$, il existe $m_\omega(E) \in \mathbb{N}^*$ tel que $(A^\omega_{0,N}(E))^{m_\omega(E)} \in \mathcal{O}$.*

Démonstration. La preuve suit les mêmes étapes que celle de la proposition 5.3.3. Soit $M > 1$. En appliquant le théorème 5.3.2 aux réels $\alpha_l = \frac{r_l(E)}{2\pi}$ on obtient l'existence de $y \in \mathbb{Z}$, $1 \leq y \leq M$ et $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\left|\frac{r_1(E)}{2\pi}y - x_1\right| < M^{-\frac{1}{N}}, \ldots, \left|\frac{r_N(E)}{2\pi}y - x_N\right| < M^{-\frac{1}{N}}$$

ce qui peut se réécrire :

$$|r_1(E)y - 2x_1\pi| < 2\pi M^{-\frac{1}{N}}, \ldots, |r_N(E)y - 2x_N\pi| < 2\pi M^{-\frac{1}{N}}$$

Alors on a :

$$A^\omega_{0,N}(E)^y = R_\omega \begin{pmatrix} \cos(yr_1) & & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(yr_1) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & \cos(yr_N) & 0 & & \frac{1}{r_N}\sin(yr_N) \\ -r_1\sin(yr_1) & & 0 & \cos(yr_1) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & -r_N\sin(yr_N) & 0 & & \cos(yr_N) \end{pmatrix} R_\omega^{-1}$$

$$= R_\omega \begin{pmatrix} \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(yr_1 - 2x_1\pi) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & \cos(yr_N - 2x_N\pi) & 0 & & \frac{1}{r_N}\sin(yr_N - 2x_N\pi) \\ -r_1\sin(yr_1 - 2x_1\pi) & & 0 & \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & -r_N\sin(yr_N - 2x_N\pi) & 0 & & \cos(yr_N - 2x_N\pi) \end{pmatrix} R_\omega^{-1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si on prend M assez grand, $M^{-\frac{1}{N}}$ sera assez petit pour que :

$$\left|\left|\begin{pmatrix} \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & & 0 & \frac{1}{r_1}\sin(yr_1 - 2x_1\pi) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & \cos(yr_N - 2x_N\pi) & 0 & & \frac{1}{r_N}\sin(yr_N - 2x_N\pi) \\ -r_1\sin(yr_1 - 2x_1\pi) & & 0 & \cos(yr_1 - 2x_1\pi) & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & -r_N\sin(yr_N - 2x_N\pi) & 0 & & \cos(yr_N - 2x_N\pi) \end{pmatrix} - I_{2N}\right|\right| < \varepsilon$$

Puis, comme R_ω est orthogonale :

$$||(A^\omega_{0,N}(E))^y - I_{2N}|| < \varepsilon$$

La preuve s'achève alors comme à la proposition 5.3.3 en posant $m_\omega(E) = y$. □

À partir de ce résultat, deux voies s'offrent à nous. La première consiste à essayer de suivre ce que l'on a fait pour le cas $N = 2$. La seconde s'appuie sur le corollaire 3.2.4.

Première voie. Si on suit ce que l'on a déjà fait, l'étape suivante consiste à calculer le logarithme de $(A^\omega_{0,N}(E))^{m_\omega(E)}$. Le calcul que l'on a effectué à la section 5.3.2 se faisant bloc par bloc, on peut l'effectuer aussi bien pour deux blocs que pour N. Comme à la section 5.3.2 on introduit l'ensemble discret $\mathcal{S}_1$ des $E = \lambda^\omega_l + \pi + 2j\pi$ pour $j \in \mathbb{Z}$, $l \in \{1, \ldots, N\}$ et $\omega \in \{0,1\}^N$.

Alors pour $E \in]E_0, +\infty[\backslash \mathcal{S}_1$, on a :

$$LA_{\omega^{(0)}} =$$

$$R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} & & & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_1}{r_1} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & m_\omega(E) - \frac{2\pi x_N}{r_N} \\ -m_\omega(E) r_N^2 + 2\pi r_1 x_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & -m_\omega(E) r_N^2 + 2\pi r_N x_N & & & \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1} \tag{5.46}$$

où on a posé :

$$LA_{\omega^{(0)}} := \log((A_{0,N}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)})$$

On veut alors prouver que l'algèbre de Lie $\mathfrak{la}_N(E)$ engendrée par les $LA_{\omega^{(0)}}$ est toute l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$. On pourrait alors imaginer chercher à prouver que l'on peut construire dans $\mathfrak{la}_N(E)$ une famille libre de $2N^2 + N$ matrices, comme on l'a fait pour le cas $N = 2$. Au vu de la complexité des expressions obtenues dans le cas $N = 2$, cette approche semble illusoire. De plus on ne sait pas si dans le cas général on pourrait reconstruire directement les deux sous-espaces V_1 et V_2 ou s'il faudrait considérer d'autres étapes de construction correspondant à d'autres sous-espaces. On a déjà rencontré ce problème dans le passage de $N = 2$ à $N = 3$ pour le modèle (4.1) étudié au chapitre 4.

Plus intéressante est la constatation suivante obtenue en utilisant l'expression (5.46) :

$$\begin{aligned} LA_{\omega^{(0)}} &= m_\omega(E) X_{N,\omega}(E) - 2\pi R_{\omega^{(0)}} \begin{pmatrix} & & & \frac{x_1}{r_1} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & \frac{x_N}{r_N} \\ -r_1 x_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & -r_N x_N & & & \end{pmatrix} R_{\omega^{(0)}}^{-1} \\ &:= m_\omega(E) X_{N,\omega}(E) - 2\pi B_\omega \end{aligned} \tag{5.47}$$

Or, on peut prouver que les $X_{N,\omega}(E)$ engendrent toute l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ (voir [CL90], proposition *IV*.5.12, p.222) et ce pour tout réel E. Il en est donc de même des $m_\omega(E) X_{N,\omega}(E)$, là encore pour tout réel E. On peut donc imaginer qu'en modifiant cette famille de matrices qui engendre $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$, on devrait encore obtenir une famille qui engendre $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$. Mais cela est loin d'être évident et nos tentatives pour prouver que les $LA_{\omega^{(0)}}$ engendrent $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ par ce biais se sont révélées infructueuses pour l'instant.

Seconde voie. Essayons d'exploiter autrement l'expression (5.47). On peut essayer de raisonner perturbativement en cherchant à utiliser le corollaire 3.2.4.

On se donne un réel $t > 0$ tel que $\exp(t m_\omega(E) X_{N,\omega}(E)) \in \mathcal{O}$ pour tout $\omega \in \{0,1\}^N$, ce qui est possible car $\mathcal{O}$ ne dépend pas de E et ω et $\{0,1\}^N$ est un ensemble fini. Alors on peut appliquer le théorème 3.2.2 à ces $\exp(t m_\omega(E) X_{N,\omega}(E))$ pour $\omega \in \{0,1\}^N$. On obtient que le sous-groupe de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ engendré par ces éléments est dense dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Puis par le corollaire 3.2.4, on obtient qu'il existe un réel $u(t) > 0$ tel que pour tout $0 \leq u \leq u(t)$:

$$(\exp(tm_\omega(E)X_{N,\omega}(E) - 2\pi uB_\omega), \ldots, \exp(tm_\omega(E)X_{N,\omega}(E) - 2\pi uB_\omega)) \in \mathcal{O}^{2^N} \setminus \mathcal{V}_{2^N}$$

Si on avait un $t > 0$ tel que $t \leq u(t)$, on aurait fini, on pourrait supposer $u = t$ et par le théorème 3.2.2, l'algèbre de Lie engendrée par les $t(m_\omega(E)X_{N,\omega}(E) - 2\pi B_\omega)$ serait $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$, donc celle engendrée par les $m_\omega(E)X_{N,\omega}(E) - 2\pi B_\omega$ aussi. On pourrait alors appliquer le théorème 3.2.2 puisque maintenant $m_\omega(E)X_{N,\omega}(E) - 2\pi B_\omega \in \log(\mathcal{O})$. Mais il n'y a aucune raison d'avoir l'existence d'un tel t, ce qui nous empêche de conclure ainsi.

Une dernière approche exploitant toujours le corollaire 3.2.4 est possible. En effet, on peut essayer de regarder l'application $E \mapsto ((A_{0,N}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)})_{\omega \in \{0,1\}^N}$. Cette fonction doit être analytique par morceaux, du fait que les $m_\omega(E)$ sont localement constants. On peut alors imaginer calculer sa dérivée et voir si on peut trouver une valeur de E telle que cette dérivée ne soit pas dans l'espace tangent à la variété $\mathcal{V}_{2^N}$, auquel cas on aurait une valeur E telle que les matrices $(A_{0,N}^{\omega^{(0)}}(E))^{m_\omega(E)}$ pour $\omega \in \{0,1\}^N$ seraient hors de $\mathcal{V}_{2^N}$. Dans la mesure où la variété $\mathcal{V}_{2^N}$ est analytique fermée et surtout propre donc très "petite", on peut imaginer que cette approche a toutes les chances d'aboutir. Malheureusement, notre manque d'information sur la structure exacte de la variété $\mathcal{V}_{2^N}$ nous a empêché jusque là d'aboutir à une preuve rigoureuse.

Précisons ici que cette approche perturbative pourrait éventuellement aussi s'appliquer à l'étude du modèle (4.1) étudié au chapitre 4.

Cette discussion clôt ce chapitre 5 sur l'étude d'un modèle d'Anderson-Bernoulli continu et à valeurs matricielles.

Nous allons maintenant voir comment utiliser les théorèmes 4.2.1, 4.3.1 et 5.3.1 pour étudier la régularité des exposants de Lyapounov lorsque le paramètre E varie. Cela fait l'objet du prochain chapitre où nous allons montrer que les exposants de Lyapounov associés à ces modèles sont des fonctions Hölder-continues.

Chapitre 6

Hölder-continuité des exposants de Lyapounov

Sommaire

6.1 Action de groupe sur les espaces compacts 104

6.1.1 Mesures invariantes 104

6.1.2 Cocycles 106

6.1.3 Les opérateurs de Laplace sur les espaces de Hölder 108

6.2 Estimations *a priori* pour nos modèles 113

6.2.1 Estimations générales 114

6.2.2 Estimations de la norme des matrices de transfert 115

6.3 Régularité des exposants de Lyapounov 120

6.3.1 Continuité des exposants de Lyapounov 120

6.3.2 Sous-harmonicité des sommes d'exposants de Lyapounov . . . 125

6.3.3 Hölder-continuité des exposants de Lyapounov 127

Dans ce chapitre nous mettons en place un schéma de preuve permettant d'étudier la régularité des exposants de Lyapounov pour des opérateurs de Schrödinger continus à valeurs matricielles. Ce schéma est fondé sur la positivité de ces exposants de Lyapounov comme prouvée pour les modèles (4.1) et (5.2) étudiés aux chapitres 4 et 5. Il s'appuie encore sur la représentation intégrale donnée au point (iii) du théorème 2.3.7 qui est une conséquence de ce que nous avons prouvé aux théorèmes 4.2.1, 4.3.1 et 5.3.1. Ce que nous développons ici ne dépendra pas strictement des modèles que nous avons étudiés auparavant mais pourra s'appliquer à un plus large éventail de modèles continus à valeurs matricielles pour peu que les matrices de transfert associées vérifient certaines estimations.

On notera dans la suite $H_*(\omega)$ pour $* = P, B$. On notera alors par $\mathcal{S}_*$ l'ensemble discret donné respectivement aux théorèmes 4.2.1 et 4.3.1 pour $H_P(\omega)$ et au théorème 5.3.1 pour $H_B(\omega)$. On notera aussi $I_P = \mathbb{R}$ et $I_B =]2, +\infty[$. Ici on garde à l'esprit que les théorèmes que l'on vient de citer ne couvrent que les cas $N = 2$ et $N = 3$ pour

$H_P(\omega)$ et $N = 2$ pour $H_B(\omega)$. Mais nous écrirons tout de même les résultats obtenus pour N quelconque afin d'en dégager une méthode générale.

Nous allons prouver dans ce chapitre le théorème suivant :

Théorème 6.0.3. *On fixe un intervalle compact $I \subset I_* \setminus \mathcal{S}_*$. Il existe alors un réel $\alpha > 0$ et une constante $0 < C < +\infty$ tels que :*

$$|\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha \quad \textit{pour } p = 1, \ldots, N, \ \textit{pour tous } E, E' \in I,$$

et pour $N = 2, 3$ si $* = P$ et $N = 2$ si $* = B$.

Dans un premier temps nous ferons des rappels sur les mesures invariantes, les cocycles et nous introduirons une généralisation de la transformée de Laplace sur les espaces de Hölder. Dans un second temps nous prouverons que les modèles étudiés précédemment rentrent dans le présent cadre d'étude. Enfin dans une dernière partie nous présenterons comment utiliser ces notions pour prouver la continuité, puis la continuité höldérienne des exposants de Lyapounov vus comme fonctions du paramètre E.

6.1 Action de groupe sur les espaces compacts

Dans cette première partie nous présentons certains des outils que nous utiliserons plus tard pour prouver la régularité des exposants de Lyapounov. En cela nous suivons [CL90] et [BL85].

6.1.1 Mesures invariantes

Nous commençons par donner une définition de l'action d'un groupe sur un espace compact. Dans cette partie, G désigne un groupe localement compact d'élément unité e et B est un espace topologique.

Définition 6.1.1. On dit que G agit sur B si on peut associer continûment à chaque $(g, b) \in G \times B$ un élément gb de B tel que :
(i) $g_1(g_2 b) = (g_1 g_2)b$, $\forall g_1, g_2 \in G$ et $\forall b \in B$.
(ii) $eb = b$, $\forall b \in B$.

Pour un tel couple (G, B) on peut supposer que l'on se donne une mesure μ sur G et une mesure ν sur B. On peut alors définir la pseudo-convolution de ces deux mesures.

Définition 6.1.2. La pseudo-convolution d'une mesure μ sur G et d'une mesure ν sur B est l'unique mesure $\mu * \nu$ sur B définie par :

$$\mu * \nu(f) = \int_{G \times B} f(gb) \, \mathrm{d}\mu(g) \, \mathrm{d}\nu(b)$$

pour toute fonction f sur B mesurable et bornée.

Remarque 6.1.3. Si $B = G$, alors cette pseudo-convolution coïncide avec la convolution ordinaire de deux mesures sur un groupe. On note alors dans ce cas μ^n la n-ième convolution de μ par elle-même : $\mu * \ldots * \mu$.

Remarque 6.1.4. Si μ_1 et μ_2 sont des mesures sur G et si ν est une mesure sur B, alors on a : $(\mu_1 * \mu_2) * \nu = \mu_1 * (\mu_2 * \nu)$.

Nous pouvons maintenant définir l'importante notion de mesure invariante sur un espace topologique sur lequel agit un groupe. Dans la suite, on fixe une mesure de probabilité μ sur G.

Définition 6.1.5. Une mesure ν sur B est dite μ-invariante lorsque : $\mu * \nu = \nu$.

Nous pouvons, avec ces définitions, énoncer un théorème d'existence de mesure invariante adapté à notre contexte. Il s'agit là simplement de compléter le théorème 2.3.7 du chapitre 2 en y faisant apparaître un paramètre E représentant l'énergie du système dans nos modèles.

Pour p un entier, nous rappelons la définition de la sous-variété p-lagrangienne L_p de $\mathbb{R}^{2N}$: pour tout p dans $\{1, \ldots, N\}$, L_p est le sous-espace vectoriel de $\wedge^p \mathbb{R}^{2N}$ engendré par $\{Me_1 \wedge \ldots \wedge Me_p \mid M \in \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})\}$.

Théorème 6.1.6. *Soit $(A_n^\omega(E))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires symplectiques d'ordre $2N$ i.i.d. dépendant d'un paramètre réel E et soit p un entier dans $\{1, \ldots, N\}$. Soit μ_E la distribution commune des $A_n^\omega(E)$. On suppose que le sous-groupe de Fürstenberg G_{μ_E} associé à cette suite de matrices symplectiques est p-contractant et L_p-fortement irréductible et que $\mathbb{E}(\log ||A_0^\omega(E)||)$ est finie. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

(i) $\gamma_p(E) > \gamma_{p+1}(E)$

(ii) *Pour tout x non nul dans L_p :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log || \wedge^p (A_{n-1}^\omega(E) \ldots A_0^\omega(E))x|| = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(E)$$

(iii) *Il existe une unique distribution de probabilité μ_E-invariante, notée $\nu_{p,E}$, sur $\mathbb{P}(L_p) = \{\bar{x} \in \mathbb{P}(\wedge^p \mathbb{R}^{2N}) \mid x \in L_p\}$ telle que :*

$$\int_{\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})\times\mathbb{P}(L_p)} \log \frac{|| \wedge^p Mx||}{||x||} \, \mathrm{d}\mu_E(M) \, \mathrm{d}\nu_{p,E}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(E)$$

Démonstration. Si on fixe le paramètre E, la preuve devient la même que celle du théorème 2.3.7 au chapitre 2. Ici seule la dépendance en le paramètre E a été précisée dans l'énoncé. □

Le fait que l'on ait une représentation intégrale des exposants de Lyapounov mettant en jeu la mesure $\nu_{p,E}$, implique que pour étudier la régularité en fonction de E de ces exposants il nous suffira d'étudier la régularité de cette mesure vue comme fonction de E.

6.1.2 Cocycles

Dans cette partie nous introduisons des applications sur $G \times B$ qui en un sens généralisent la notion de caractère sur le groupe G. Dans toute la suite on fixe une mesure de probabilité μ sur le groupe G.

Définition 6.1.7. Une application continue σ sur $G \times B$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ est appelée un cocycle lorsque :

$$\forall g_1, g_2 \in G, \forall b \in B,\ \sigma(g_1 g_2, b) = \sigma(g_1, g_2 b)\sigma(g_2, b)$$

Remarque 6.1.8. Si B est réduit à un singleton, un cocycle est un caractère réel.

Remarque 6.1.9. Si $t \in \mathbb{R}$ et si σ est un cocycle, alors σ^t est encore un cocycle. Cette propriété évidente sera très utile dans toute la suite.

En vue de définir la transformée de Laplace sur les espaces de Hölder il nous faut définir la notion d'intégrabilité pour un cocycle.

Définition 6.1.10. Un cocycle σ est dit μ-intégrable si la fonction $\bar{\sigma}(g) = \sup_{b \in B} \sigma(g, b)$ est μ-intégrable.

Nous pouvons alors énoncer une proposition qui estime géométriquement le comportement d'un cocycle log-négatif.

Proposition 6.1.11. *Soit σ un cocycle vérifiant :*

(i) $\exists \tau > 0$ *tel que* σ^t *est μ-intégrable pour* $|t| \leq \tau$.

(ii) $\exists N \in \mathbb{N}$ *tel que :* $\sup_{b \in B} \int \log \sigma(g, b)\, \mathrm{d}\mu^N(g) < 0$

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour $0 < t \leq \alpha$, il existe une constante $0 < C_t < +\infty$ et un réel $\rho_t < 1$ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ \sup_{b \in B} \int \log \sigma(g, b)^t\, \mathrm{d}\mu^n(g) \leq C_t \rho_t^n$$

Démonstration. Tout d'abord on remarque l'inégalité suivante : $\exp(t|\log \sigma|) \leq \sigma^t + \sigma^{-t}$. Ainsi, pour tout entier p :

$$\sup_{b \in B} \int \exp(t|\log \sigma(g, b)|)\, \mathrm{d}\mu^p(g) < +\infty \text{ et } \sup_{b \in B} \int |\log \sigma(g, b)|^p\, \mathrm{d}\mu^p(g) < +\infty$$

Alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$\exists c \in [0, t],\ \sigma^t = \mathrm{e}^{t \log \sigma} = 1 + t \log \sigma + \frac{t^2}{2} (\log \sigma)^2 \exp(c|\log \sigma|)$$

et donc :

$$\sigma^t \leq 1 + t \log \sigma + \frac{t^2}{2} |\log \sigma|^2 \exp(t|\log \sigma|)$$

On introduit la suite de réels : $b_n(t) = \sup_{b\in B} \int \sigma^t(g,b)\,\mathrm{d}\mu^n(g)$. Cette suite est sous-multiplicative. En effet :

$$\begin{aligned}
b_{n+m}(t) &= \sup_{b\in B} \int \sigma^t(g,b)\,\mathrm{d}\mu^{n+m}(g) \\
&= \sup_{b\in B} \int \sigma^t(g_n g_m, b)\,\mathrm{d}\mu^n(g_n)\,\mathrm{d}\mu^m(g_m) \\
&= \sup_{b\in B} \int \sigma^t(g_n, g_m b)\sigma^t(g_m, b)\,\mathrm{d}\mu^n(g_n)\,\mathrm{d}\mu^m(g_m) \\
&= \sup_{b\in B} \int \sigma^t(g_n, g_m b)\,\mathrm{d}\mu^n(g_n) \times \sup_{b\in B} \int \sigma^t(g_m, b)\,\mathrm{d}\mu^m(g_m) \\
&\leq \sup_{b\in B} \int \sigma^t(g_n, b)\,\mathrm{d}\mu^n(g_n) \times b_m(t) \\
&\leq b_n(t) b_m(t)
\end{aligned}$$

La suite $b_n(t)$ vérifie aussi :

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,\tau],\ b_N(t) &\leq 1 + t \sup_{b\in B} \int \log\sigma(g,b)\,\mathrm{d}\mu^N(g) \\
&\quad + \frac{t^2}{2} \sup_{b\in B} \int |\log\sigma(g,b)|^2 \exp(t|\log\sigma(g,b)|)\,\mathrm{d}\mu^N(g)
\end{aligned}$$

Comme la seconde intégrale est finie par intégrabilité et que la première est négative par hypothèse, et comme $\frac{t^2}{2} \ll t$ au voisinage de 0, il vient :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall t \in]0,\alpha],\ b_N(t) < 1$$

Or, la suite $(b_n(t))$ étant sous-multiplicative, la suite $(b_n(t)^{\frac{1}{n}})$ converge vers : $\inf_{n\geq 1} b_n(t)^{\frac{1}{n}} \leq b_N(t)^{\frac{1}{N}} < 1$. De là :

$$\exists \rho_t > 0,\ \rho_t < 1,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0, b_n(t)^{\frac{1}{n}} \leq \rho_t$$

Posons : $C_t = \max(1, \frac{b_1(t)}{\rho_t}, \ldots, \frac{b_{n_0-1}(t)}{\rho_t^{n_0-1}})$. On a finalement :

$$\forall n \geq 1,\ b_n(t) \leq C_t \rho_t^n$$

□

Pour terminer à propos des généralités sur les cocycles nous donnons un exemple fondamental de cocycle, celui auquel on se ramènera dans toute la suite.

Exemple 6.1.12. : Soit (B,δ) un espace métrique compact et G un groupe agissant sur B. On considère l'action induite sur $\widetilde{B} = B \times B \setminus \{(b,b),\ b \in B\}$ donnée par :

$$\forall g \in G,\ \forall (a,b) \in \widetilde{B},\ g.(a,b) = (ga, gb)$$

Sur $G \times \widetilde{B}$ on définit l'application :

$$\sigma_1(g,(a,b)) = \frac{\delta(ga,gb)}{\delta(a,b)}$$

$\sigma_1 \;\; G \times \widetilde{B} \to [0,+\infty[$ est alors un cocycle. En effet :

$$\begin{aligned}\sigma_1(gg',(a,b)) &= \frac{\delta(gg'a,gg'b)}{\delta(a,b)} \\ &= \frac{\delta(gg'a,gg'b)}{\delta(g'a,g'b)}\frac{\delta(g'a,g'b)}{\delta(a,b)} \\ &= \sigma_1(g,g'.(a,b))\sigma_1(g',(a,b))\end{aligned}$$

Dans la suite, $\mathbb{P}(L_p)$ jouera le rôle de B muni de la distance projective usuelle :

$$\forall \bar{x},\bar{y},\;\; \delta(\bar{x},\bar{y}) = \left(1 - \frac{|(x,y)|^2}{||x||^2\;||y||^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous pouvons maintenant introduire la notion d'espaces de Hölder et de transformée de Laplace sur ces espaces.

6.1.3 Les opérateurs de Laplace sur les espaces de Hölder

6.1.3.1 Définitions

Soit (B,δ) un espace métrique compact et soit G un groupe muni d'une mesure de probabilité μ . Soit $\alpha > 0$ un réel.

Définition 6.1.13. L'espace des fonctions Hölder-continues d'ordre α sur B, noté $\mathcal{L}_\alpha(B)$ est l'espace des fonctions continues f sur B à valeurs réelles vérifiant :

$$m_\alpha(f) = \sup_{(a,b)\in\widetilde{B}} \frac{|f(a)-f(b)|}{\delta^\alpha(a,b)} < +\infty$$

On pose $||\;||_\alpha = ||\;||_\infty + m_\alpha$.

Remarque 6.1.14. $(\mathcal{L}_\alpha(B), ||\;||_\alpha)$ est un espace de Banach.

Nous connaissons le comportement de la suite des normes $||\;||_\alpha$ en fonction de α. Nous résumons cela dans le lemme suivant :

Lemme 6.1.15. *Si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\mathcal{L}_{\alpha'} \subset \mathcal{L}_\alpha$. Plus précisément, pour tout $f \in \mathcal{L}_\alpha$, $||f||_\alpha \leq ||f||_{\alpha'}$.*

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que dans la définition de m_α on peut supposer que $\delta(a,b) < 1$. En effet si au contraire on a $\delta(a,b) \geq 1$, comme f est bornée comme fonction continue sur le compact B :

$$|f(a)-f(b)| \leq 2\sup_{b\in B}|f(b)| \leq 2\sup_{b\in B}|f(b)|\delta(a,b)^\alpha \leq C\delta(a,b)^\alpha$$

Et dans ce cas il est clair que $m_\alpha(f) < C$. Mais alors le résultat que nous voulons prouver devient clair : si $\delta(a,b) \leq 1$ et $\alpha \leq \alpha'$, $\delta(a,b)^\alpha \geq \delta(a,b)^{\alpha'}$. Donc $m_\alpha \leq m_{\alpha'}$ et il en suit que $|| \; ||_\alpha \leq || \; ||_{\alpha'}$.

De là, si $f \in \mathcal{L}_{\alpha'}$, $||f||_{\alpha'} < +\infty$ et donc $||f||_\alpha < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}_\alpha$. □

On peut à présent définir les opérateurs qui vont étendre aux groupes la notion de transformée de Laplace-Fourier sur les mesures.

Définition 6.1.16. Soit σ un cocycle et soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'opérateur $T_{\sigma,z}$ agissant sur l'ensemble $\mathcal{B}(B)$ des fonctions mesurables bornées sur B par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(B),\ \forall b \in B,\ T_{\sigma,z}f(b) = \int_G \sigma^z(g,b)f(gb)\,\mathrm{d}\mu(g)$$

Au vu de cette définition, $T_{\sigma,z}$ est un opérateur borné lorsque $|\sigma^z|$ est μ-intégrable. Plus précisément on a :

$$\forall n \geq 1,\ T^n_{\sigma,z}f(b) = \int \sigma^z(g,b)f(gb)\,\mathrm{d}\mu^n(g)$$

Pour $\sigma = 1$ et $z = 1$ on pose $T := T_{1,1}$. Alors :

$$\forall f \in \mathcal{B}(B),\ \forall b \in B,\ Tf(b) = \int_G f(gb)\,\mathrm{d}\mu(g)$$

Nous allons à présent voir les liens qui existent entre d'une part cet opérateur T et d'autre part une mesure ν, μ-invariante, donnée sur G.

6.1.3.2 Relations entre T^n et ν

Nous allons prouver qu'en fait la suite des itérés de l'opérateur T, (T^n), converge vers la mesure μ-invariante ν. σ_1 est le cocycle défini à l'exemple 6.1.12.

Proposition 6.1.17. *On suppose que σ_1 vérifie :*
(i) $\exists \tau > 0$, σ_1^t *soit intégrable pour* $|t| \leq \tau$.
(ii) $\exists N \in \mathbb{N}$, $\sup_{(a,b)\in\widetilde{B}} \int \log \sigma_1(g,(a,b))\,\mathrm{d}\mu^N(g) < 0$
Alors : $\exists \alpha_0 > 0,\ \forall \alpha \in]0,\alpha_0]$
(a) T *est un opérateur borné sur* $\mathcal{L}_\alpha(B)$
(b) $\exists C_\alpha < +\infty,\ \exists \rho_\alpha < 1$ *tel que :*

$$\forall n \geq 1,\ \forall f \in \mathcal{L}_\alpha(B),\ ||T^n f - \nu(f)||_\alpha \leq ||f||_\alpha C_\alpha \rho_\alpha^n$$

Démonstration. On commence par prouver le premier point. Soit α un réel strictement

positif, $f \in \mathcal{L}_\alpha(B)$ et $(a,b) \in \widetilde{B}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{|Tf(a) - Tf(b)|}{\delta^\alpha(a,b)} &= \frac{|\int_G f(ga)\,\mathrm{d}\mu(g) - \int_G f(gb)\,\mathrm{d}\mu(g)|}{\delta^\alpha(a,b)} \\
&\leq \int_G \frac{|f(ga) - f(gb)|}{\delta^\alpha(a,b)}\,\mathrm{d}\mu(g) \\
&= \int_G \frac{|f(ga) - f(gb)|}{\delta^\alpha(ga,gb)} \frac{\delta^\alpha(ga,gb)}{\delta^\alpha(a,b)}\,\mathrm{d}\mu(g) \\
&\leq m_\alpha(f) \int_G \frac{\delta^\alpha(ga,gb)}{\delta^\alpha(a,b)}\,\mathrm{d}\mu(g) \\
&= m_\alpha(f) \int_G \sigma_1^\alpha(g,(a,b))\,\mathrm{d}\mu(g) \\
&\leq m_\alpha(f) \int_G \bar{\sigma}_1^\alpha(g)\,\mathrm{d}\mu(g)
\end{aligned}$$

Or, si $\alpha \leq \tau$, la première hypothèse nous donne : $\int_G \bar{\sigma}_1^\alpha(g)\,\mathrm{d}\mu(g) < +\infty$. D'où :

$$m_\alpha(Tf) \leq \left(\int_G \bar{\sigma}_1^\alpha(g)\,\mathrm{d}\mu(g)\right) m_\alpha(f)$$

De plus on a :

$$\forall b \in B,\ |Tf(b)| \leq \int_G |f(gb)| d\mu(g) \leq ||f||_\infty \int_G \mathrm{d}\mu(g) = ||f||_\infty$$

Et donc : $||Tf||_\infty \leq ||f||_\infty$. Finalement on obtient :

$$||Tf||_\alpha \leq ||f||_\infty + \left(\int_G \bar{\sigma}_1^\alpha(g)\,\mathrm{d}\mu(g)\right) m_\alpha(f) \leq C(||f||_\infty + m_\alpha(f) = C||f||_\alpha$$

Et ainsi T est bien borné sur $\mathcal{L}_\alpha(B)$.

Pour le second point on va utiliser la proposition 6.1.11 sur les cocycles log-négatifs. De là, pour α suffisamment petit, disons $\alpha \leq \alpha_1$, il vient :

$$\exists \widetilde{C}_\alpha > 0,\ \exists \rho_\alpha \in]0,1[, \forall n \geq 1,\ \int \sigma_1^\alpha(g,(a,b))\,\mathrm{d}\mu^n(g) \leq \widetilde{C}_\alpha \rho_\alpha^n$$

On pose $\alpha_0 = \min(\alpha_1, \tau)$. Alors pour $\alpha \in]0, \alpha_0]$, $f \in \mathcal{L}_\alpha(B)$ et $(a,b) \in \widetilde{B}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{|T^n f(a) - T^n f(b)|}{\delta^\alpha(a,b)} &= \frac{|\int f(ga)\,\mathrm{d}\mu^n(g) - \int f(gb)\,\mathrm{d}\mu^n(g)|}{\delta^\alpha(a,b)} \\
&\leq \int \frac{|f(ga) - f(gb)|}{\delta^\alpha(a,b)}\,\mathrm{d}\mu^n(g) \\
&\leq m_\alpha(f) \int \sigma_1^\alpha(g,(a,b))\,\mathrm{d}\mu^n(g) \\
&\leq m_\alpha(f) \widetilde{C}_\alpha \rho_\alpha^n
\end{aligned}$$

Cela implique que $m_\alpha(T^n f - \nu(f)) \leq m_\alpha(f)\widetilde{C}_\alpha \rho_\alpha^n$.

ν étant μ-invariante, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
|T^n f(a) - \nu(f)| &= |T^n f(a) - \mu^n * \nu(f)| \\
&= \left| \int f(ga)\,\mathrm{d}\mu^n(g) - \int f(gb)\,\mathrm{d}\mu^n(g)\,\mathrm{d}\nu(b) \right| \\
&= \left| \int f(ga)\,\mathrm{d}\mu^n(g)\,\mathrm{d}\nu(b) - \int f(gb)\,\mathrm{d}\mu^n(g)\,\mathrm{d}\nu(b) \right| \\
&\leq \int |f(ga) - f(gb)|\,\mathrm{d}\mu^n(g)\,\mathrm{d}\nu(b) \\
&\leq m_\alpha(f)\widetilde{C}_\alpha \rho_\alpha^n \sup_{(a,b)\in B\times B} \delta^\alpha(a,b)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du calcul précédent. Il vient alors :

$$||T^n f - \nu(f)||_\infty \leq m_\alpha(f)\widetilde{C}_\alpha \rho_\alpha^n \mathrm{diam}(B\times B)^\alpha$$

On pose : $C_\alpha = 2\max(\widetilde{C}_\alpha, \widetilde{C}_\alpha \mathrm{diam}(B\times B)^\alpha)$. Puisque $m_\alpha(f) \leq ||f||_\alpha$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
||T^n f - \nu(f)||_\alpha &= ||T^n f - \nu(f)||_\infty + m_\alpha(T^n f - \nu(f)) \\
&\leq (\widetilde{C}_\alpha + \widetilde{C}_\alpha \mathrm{diam}(B\times B)^\alpha)\; m_\alpha(f)\rho_\alpha^n \\
&\leq C_\alpha ||f||_\alpha \rho_\alpha^n
\end{aligned}$$

Et le second point est prouvé. □

De là on déduit une décomposition de l'opérateur T qui permet de voir T comme une perturbation de la mesure ν.

Corollaire 6.1.18. *Sous les hypothèses de la proposition 6.1.17 et pour α suffisamment petit, l'opérateur T agissant sur $\mathcal{L}_\alpha(B)$ a pour valeur propre 1 et le reste de son spectre est contenu dans un disque de rayon strictement plus petit que 1. Plus précisément, T admet la décomposition suivante :*

$$\forall f \in \mathcal{L}_\alpha(B), \forall n \geq 1,\ T^n f = \nu(f) + Q^n(f)$$

où Q agissant sur $\mathcal{L}_\alpha(B)$ est de rayon spectral strictement plus petit que 1.

Démonstration. Si on considère l'opérateur N de rang 1, agissant sur $\mathcal{L}_\alpha(B)$ défini par $N(f) = \nu(f)$ alors en norme d'opérateur : $T^n \to N$. Or T est un opérateur borné et donc :

$$T^{n+1}(f) = T(T^n(f)) \to TN(f)$$

et $T^{n+1}(f) \to N(f)$. Ainsi : $N(f) = TN(f)$ et 1 est valeur propre de T associé au vecteur propre $\nu(f)$.

On définit l'opérateur Q agissant sur $\mathcal{L}_\alpha(B)$ par : $Q = T - N$. Alors :

$$Q^2 = T^2 - TN - NT + N^2 = T^2 - 2N + N^2$$

De là, N étant de rang 1 il vient :

$$N^2(f) = \nu(f)\nu(B) = \nu(f) = N(f)$$

D'où : $Q^2 = T^2 - N$. Le même calcul pour les puissances successives de Q nous conduit au fait que $\forall n \geq 1,\ Q^n = T^n - N$. On obtient ainsi la décomposition voulue pour T.

D'après la proposition 6.1.17 :

$$||Q^n||^{\frac{1}{n}} = ||T^n - \nu||^{\frac{1}{n}} \leq C_\alpha^{\frac{1}{n}} \rho_\alpha$$

D'où : $\limsup_{n\to\infty} ||Q^n||^{\frac{1}{n}} \leq \rho_\alpha < 1$. Ainsi on obtient l'assertion sur le rayon spectral de Q.

Enfin, le reste du spectre de T est inclus dans le disque $D(0, \rho_\alpha)$ de rayon $\rho_\alpha < 1$. □

6.1.3.3 Dépendance en un paramètre réel

Dans nos modèles, le groupe défini par la suite des matrices de transfert dépend d'un paramètre réel E, représentant l'énergie du système. Nous aurons donc besoin de résultats sur les cocycles qui conduisent à des estimations uniformes en ce paramètre réel pour peu que l'on fasse des hypothèses uniformes en ce paramètre.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On suppose que le groupe $G = G(E)$ et la mesure $\mu = \mu_E$ dépendent d'un paramètre réel $E \in I$.

Proposition 6.1.19. *Soit σ un cocycle tel que :*

(i) $\exists \tau > 0$ *tel que* $\sup_{E\in I} \int_{G(E)} \bar{\sigma}^t(g)\, \mathrm{d}\mu_E(g) < +\infty$ *for* $|t| \leq \tau$.

(ii) $\exists N \in \mathbb{N}$ *tel que :* $\sup_{E\in I} \sup_{b\in B} \int \log \sigma(g,b)\, \mathrm{d}\mu_E^N(g) < 0$

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour $0 < t \leq \alpha$, il existe $0 < C_t < +\infty$ et $\rho_t < 1$ tels que :

$$\forall n \geq 1,\ \sup_{E\in I} \sup_{b\in B} \int \log \sigma(g,b)^t\, \mathrm{d}\mu_E^n(g) \leq C_t \rho_t^n$$

Démonstration. On reprend ici la preuve de la proposition 6.1.11 en prenant :

$$b_n(t) = \sup_{E\in I} \sup_{b\in B} \int \sigma^t(g,b)\, \mathrm{d}\mu_E^n(g)$$

Alors $(b_n(t))$ est encore sous-multiplicative et on a comme précédemment :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,\tau],\ b_N(t) \ &\leq\ 1 + t \sup_{E\in I} \sup_{b\in B} \int \log \sigma(g,b)\, \mathrm{d}\mu_E^N(g) \\ &\quad + \frac{t^2}{2} \sup_{E\in I} \sup_{b\in B} \int |\log \sigma(g,b)|^2 \exp(t|\log \sigma(g,b)|)\, \mathrm{d}\mu_E^N(g) \end{aligned}$$

La fin de la preuve ne change pas. □

Pour $E \in I$ on définit l'opérateur T_E par :

$$\forall f \in \mathcal{L}_\alpha(B),\ \forall b \in B,\ T_E f(b) = \int_{G(E)} f(gb)\,\mathrm{d}\mu_E(g)$$

On note ν_E une mesure μ_E-invariante. On a alors l'adaptation de la proposition 6.1.17 :

Proposition 6.1.20. *On fixe $E \in I$. On suppose que σ_1, défini comme précédemment mais sur $G(E) \times \widetilde{B}$, vérifie :*
(i) $\exists \tau > 0$, $\sup_{E\in I} \int_{G(E)} \bar{\sigma}^t(g)\,\mathrm{d}\mu_E(g) < +\infty$ *pour* $|t| \leq \tau$.
(ii) $\exists N \in \mathbb{N}$, $\sup_{E\in I} \sup_{(a,b)\in\widetilde{B}} \int \log \sigma_1(g,(a,b))\,\mathrm{d}\mu^N(g) < 0$
Alors : $\exists \alpha_0 > 0,\ \forall \alpha \in]0,\alpha_0]$
(a) T_E *est un opérateur borné agissant sur* $\mathcal{L}_\alpha(B)$
(b) $\exists C_\alpha < +\infty,\ \exists \rho_\alpha < 1$ *tel que :*

$$\forall n \geq 1,\ \forall f \in \mathcal{L}_\alpha(B),\ \sup_{E\in I} ||T_E^n f - \nu_E(f)||_\alpha \leq ||f||_\alpha C_\alpha \rho_\alpha^n$$

Démonstration. On peut exactement reprendre la même preuve que celle de la proposition 6.1.17. □

Bien sûr le corollaire de la proposition 6.1.17 s'adapte lui aussi à ce nouveau cadre :

Corollaire 6.1.21. *Sous les hypothèses de la proposition 6.1.17 et pour α suffisamment petit, l'opérateur T_E agissant sur $\mathcal{L}_\alpha(B)$ a pour valeur propre* 1 *et le reste de son spectre est contenu dans un disque de rayon strictement plus petit que* 1. *Plus précisément, T_E admet la décomposition suivante :*

$$\forall f \in \mathcal{L}_\alpha(B), \forall n \geq 1,\ T_E^n f = \nu_E(f) + Q_E^n(f)$$

où Q_E agissant sur $\mathcal{L}_\alpha(B)$ est de rayon spectral strictement plus petit que 1.

Démonstration. Encore une fois on peut recopier la preuve du corollaire 6.1.18. □

Nous avons rassemblé dans cette section tous les résultats sur les cocycles et sur les opérateurs de Laplace sur les espaces de Hölder dont nous aurons besoin à la section 6.3. Auparavant, dans la prochaine section nous allons prouver une série d'estimations sur les matrices de transfert associées aux modèles (4.1) et (5.2).

6.2 Estimations *a priori* pour nos modèles

Dans cette section nous allons prouver que les matrices de transfert correspondant aux modèles (4.1) et (5.2) vérifient certaines estimations qui vont nous permettre de prouver la régularité des exposants de Lyapounov à la section 6.3. Nous allons commencer par des estimations *a priori* sur les solutions d'équations de Schrödinger. Nous prouverons ainsi deux estimations tout à fait générales. Ensuite nous verrons comment en déduire des estimations sur les normes des matrices de transfert pour nos deux modèles.

6.2.1 Estimations générales

Lemme 6.2.1. *Soit V une fonction à valeurs matricielles dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$ et soit u une solution de $-u'' + Vu = 0$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$||u(x)||^2 + ||u'(x)||^2 \leq (||u(y)||^2 + ||u'(y)||^2) \exp\left(\int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} ||V(t) + 1||\, \mathrm{d}t\right)$$

Démonstration. On pose $R(t) = ||u(t)||^2 + ||u'(t)||^2$. Il vient avec cette notation :

$$\begin{aligned}
R'(t) &= < u(t), u'(t) > + < u'(t), u(t) > + < u''(t), u'(t) > + < u'(t), u''(t) > \\
&= 2\mathrm{Re}(< u(t), u'(t) >) + 2\mathrm{Re}(< u'(t), V(t)u(t) >) \\
&= 2\mathrm{Re}(< u'(t), (V(t) + 1)u(t) >) \\
&\leq 2\mathrm{Re}(||u'(t)||\ ||V(t) + 1||\ ||u(t)||) \\
&\leq 2||V(t) + 1|| \left(\frac{||u(t)||^2 + ||u'(t)||^2}{2}\right) \\
&= ||V(t) + 1||R(t)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la quatrième ligne et l'inégalité arithmético-géométrique à la cinquièm. Finalement on a l'inégalité :

$$R'(t) \leq ||V(t) + 1||R(t)$$

qui par intégration nous donne l'inégalité voulue. □

Lemme 6.2.2. *Pour $i = 1, 2$ soit $V_i \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$ et soit u_i une solution de $-u'' + V_i u = 0$ telles que :*

$$\exists y \in \mathbb{R},\ u_1(y) = u_2(y) \text{ et } u_1'(y) = u_2'(y)$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\left(||u_1(x) - u_2(x)||^2 + ||u_1'(x) - u_2'(x)||^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(||u_1(y)||^2 + ||u_1'(y)||^2\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} ||V_1(t)|| + ||V_2(t)|| + 2\,\mathrm{d}t\right) \times \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} ||V_1(t) - V_2(t)||\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Démonstration. Sans restreindre la généralité on peut supposer que $y \leq x$. Dans $\mathbb{C}^{2N}$ on a, de par les hypothèses faites sur les solutions u_1 et u_2 :

$$\begin{pmatrix} u_1(x) - u_2(x) \\ u_1'(x) - u_2'(x) \end{pmatrix} = \int_x^y \begin{pmatrix} 0 \\ (V_1(t) - V_2(t))u_1(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_x^y \begin{pmatrix} 0 & I \\ V_2(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) - u_2(t) \\ u_1'(t) - u_2'(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

Alors, en prenant la norme des deux côtés de l'égalité, on obtient l'inégalité suivante :

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x) - u_2(x) \\ u_1'(x) - u_2'(x) \end{pmatrix} \right\| \leq \int_x^y ||V_1(t) - V_2(t)||\ ||u_1(t)||\,\mathrm{d}t + \int_x^y (||V_2(t)|| + 1) \left\| \begin{pmatrix} u_1(t) - u_2(t) \\ u_1'(t) - u_2'(t) \end{pmatrix} \right\| \mathrm{d}t$$

Puis par le lemme de Gronwall :

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x) - u_2(x) \\ u_1'(x) - u_2'(x) \end{pmatrix} \right\| \leq \left(\int_x^y ||V_1(t) - V_2(t)||\ ||u_1(t)||\, \mathrm{d}t \right) \exp\left(\int_x^y (||V_2(t)|| + 1)\, \mathrm{d}t \right) \quad (6.1)$$

Or, le lemme 6.2.1 nous dit que pour tout $t \in [y, x]$:

$$||u_1(t)||^2 \leq ||u_1(t)||^2 + ||u_1'(t)||^2 \leq \left(||u_1(y)||^2 + ||u_1'(y)||^2\right) \exp\left(\int_x^y (||V_1(s)|| + 1)\, \mathrm{d}s \right)$$

Ainsi :

$$||u_1(t)|| \leq \left(||u_1(y)||^2 + ||u_1'(y)||^2\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_x^y (||V_1(s)|| + 1) ds \right)$$

Si l'on réinjecte dans l'inégalité (6.1) il vient :

$$\left(||u_1(x) - u_2(x)||^2 + ||u_1'(x) - u_2'(x)||^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(||u_1(y)||^2 + ||u_1'(y)||^2\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} \frac{1}{2}||V_1(t)|| + \frac{1}{2} + ||V_2(t)|| + 1\, \mathrm{d}t \right) \times \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} ||V_1(t) - V_2(t)||\, \mathrm{d}t$$

On a ainsi prouvé l'inégalité voulue car : $\frac{1}{2}||V_1(t)|| + \frac{1}{2} \leq ||V_1(t)|| + 1$. □

6.2.2 Estimations de la norme des matrices de transfert

6.2.2.1 Estimations pour le modèle (5.2)

A partir des estimations générales que l'on vient de prouver, on peut obtenir des estimations pour la norme des matrices de transfert, uniformes en le paramètre E lorsque celui-ci varie dans un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On fixe un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$. Soit $E \in I$. Tout d'abord, $u^1, \ldots, u^{2N}$ désignent les solutions de $-u'' + V_\omega u = Eu$ avec les conditions initiales :

$$\widetilde{u}^1(n, E) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{u}^2(n, E) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{u}^{2N}(n, E) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

où $\widetilde{u}^l(n, E) = {}^t(u^l(n, E) \quad (u^l)'(n, E))$.

La matrice de transfert associée au modèle (5.2) est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\widetilde{u}^l(n+1, E)$:

$$A^\omega_{n,N}(E) = \begin{pmatrix} u_1^1(n+1, E) & u_1^2(n+1, E) & \ldots & u_1^{2N}(n+1, E) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_N^1(n+1, E) & u_N^2(n+1, E) & \ldots & u_N^{2N}(n+1, E) \\ (u_1^1)'(n+1, E) & (u_1^2)'(n+1, E) & \ldots & (u_1^{2N})'(n+1, E) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_N^1)'(n+1, E) & (u_N^2)'(n+1, E) & \ldots & (u_N^{2N})'(n+1, E) \end{pmatrix}$$

Avec ces notations nous allons prouver les lemmes suivants :

Lemme 6.2.3. *Il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que :*

$$||A^{\omega}_{n,N}(E)||^2 \leq \exp(C_1 + |E| + 1) \leq C_2$$

Démonstration. Soit $\widetilde{u}^i(n+1, E)$ la colonne de $A^{\omega}_{n,N}(E)$ de norme maximale. Alors :

$$||A^{\omega}_{n,N}(E)||^2 = ||\widetilde{u}^i(n+1, E)||^2 = ||u^i(n+1, E)||^2 + ||(u^i)'(n+1, E)||^2$$

En appliquant le lemme 6.2.1 avec $x = n+1$ et $y = n$:

$$||u^i(n+1, E)||^2 + ||(u^i)'(n+1, E)||^2$$

$$\leq \left(||u^i(n, E)||^2 + ||(u^i)'(n, E)||^2\right) \exp\left(\int_n^{n+1} ||V_\omega(t) - E|| + 1 \, \mathrm{d}t\right)$$

Or, $||u^i(n, E)||^2 = 1$ et $||(u^i)'(n, E)||^2 = 0$ ou $||u^i(n, E)||^2 = 0$ et $||(u^i)'(n, E)||^2 = 1$. Dans tous les cas : $||\widetilde{u}^i(n, E)||^2 = 1$. Et donc :

$$||A^{\omega}_{n,N}(E)||^2 \leq \exp\left(\int_n^{n+1} ||V_\omega(t) - E|| + 1 \, \mathrm{d}t\right)$$

Or $V_\omega(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(x - k)$ est invariant par la translation par 1. Ainsi :

$$\int_n^{n+1} ||V_\omega(t) - E|| + 1 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 ||V_\omega(t) - E|| + 1 \, \mathrm{d}t \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} ||V_\omega(t)||\right) + |E| + 1$$

Puis comme dans V_ω, les ω_i prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$, il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de ω, n, E telle que :

$$\left(\sup_{t \in [0,1]} ||V_\omega(t)||\right) \leq C_1$$

Et alors :

$$||A^{\omega}_{n,N}(E)||^2 \leq \exp(C_1 + |E| + 1)$$

Puis, étant donné que I est borné, $|E|$ est aussi bornée et il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de ω, n, E telle que :

$$\exp(C_1 + |E| + 1) \leq C_2$$

Notre estimation est donc prouvée. □

Remarque 6.2.4. Comme $A^{\omega}_{n,N}(E)$ est symplectique, sa norme est la même que celle de son inverse et ainsi :

$$||A^{\omega}_{n,N}(E)^{-1}||^2 \leq C_2$$

Nous allons maintenant prouver une estimation nous donnant la variation de la norme de $A^{\omega}_{n,N}(E)$ lorsque E varie dans I.

Lemme 6.2.5. *Pour tous $E, E' \in I$, il existe une constante $C_3 > 0$ indépendante de n, ω, E telle que :*

$$||A^{\omega}_{n,N}(E) - A^{\omega}_{n,N}(E')|| \leq C_3|E - E'|$$

Démonstration. On a :

$$||A^{\omega}_{n,N}(E) - A^{\omega}_{n,N}(E')|| = ||\widetilde{u}^i(n+1, E) - \widetilde{u}^i(n+1, E')||$$

Et d'après le lemme 6.2.2 :

$$||\widetilde{u}^i(n+1, E) - \widetilde{u}^i(n+1, E')||$$

$$\leq ||\widetilde{u}^i(n, E)|| \left(\int_n^{n+1} ||V_\omega(t) - E - (V_\omega(t) - E')|| \, \mathrm{d}t\right) \exp\left(\int_n^{n+1} ||V_\omega(t) - E|| + ||(V_\omega(t) - E')|| + 2 \ \mathrm{d}t\right)$$

Ainsi :

$$||A^{\omega}_{n,N}(E) - A^{\omega}_{n,N}(E')|| \leq |E - E'| \exp\left(\int_0^1 2||V_\omega(t)|| + |E| + |E'| + 2 \ \mathrm{d}t\right)$$

Mais, comme dans la preuve du lemme 6.2.3, $\sup_{t\in[0,1]} ||V_\omega(t)|| \leq C_1$ et $|E|$ et $|E'|$ sont bornées car I l'est, disons par une constante M. Alors il existe $C_3 > 0$ indépendante de n, ω, E telle que :

$$\exp\left(\int_n^{n+1} ||V_\omega(t) - E|| + ||(V_\omega(t) - E')|| + 2 \ \mathrm{d}t\right) \leq \exp(2C_1 + 2 + 2M) \leq C_3$$

Notre estimation est prouvée. □

Nous terminons en donnant les estimations qui vont vraiment nous servir dans la suite, celles portant sur les puissances p-ièmes extérieures des matrices de transfert.

Lemme 6.2.6. *Il existe des constantes $C'_1 > 0$, $C'_2 > 0$ et $C'_3 > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que pour tout entier $p \in \{1, \ldots, N\}$:*

$$|| \wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E)||^2 \leq \exp(pC'_1 + p|E| + p) \leq C'_2$$

et pour tous $E, E' \in I$:

$$|| \wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E) - \wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E')|| \leq C'_3|E - E'|$$

Démonstration. Pour la première inégalité on utilise simplement le fait général suivant : si $M \in \mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$ alors : $|| \wedge^p M|| \leq ||M||^p$. Cela vient de la décomposition polaire de M. On peut en trouver la preuve dans [BL85] lemmes 5.3 et 5.4, page 62. Ainsi en appliquant ce résultat et le lemme 6.2.3 on obtient :

$$|| \wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E)||^2 \leq (\exp(C_1 + |E| + 1))^p = \exp(pC_1 + p|E| + p) \leq C'_2$$

Pour la seconde inégalité, le résultat est un peu plus technique. Nous allons prouver que pour deux matrices inversibles M et N :

$$|| \wedge^p M - \wedge^p N|| \leq ||N - M||(||N||^{p-1} + ||M||.||N||^{p-2} + \ldots + ||M||^{p-1})$$

Pour cela on part de :

$$\wedge^p M - \wedge^p N = \wedge^p M(I - \wedge^p(M^{-1}N)) = \wedge^p M(I - \wedge^p(M^{-1}(N - M) + I))$$

Ainsi on est ramené à calculer $\wedge^p(M^{-1}(N - M) + I)$. Pour $u_1 \wedge \ldots \wedge u_p$ un vecteur p-décomposable on a :

$\wedge^p(M^{-1}(N-M)+I)(u_1\wedge\ldots\wedge u_p)$

$$\begin{aligned}
&= (u_1 + M^{-1}(N - M)u_1) \wedge \ldots \wedge (u_p + M^{-1}(N - M)u_p) \\
&= u_1 \wedge \ldots \wedge (u_p + M^{-1}(N - M)u_p) + M^{-1}(N - M)u_1 \wedge \ldots \wedge (u_p + M^{-1}(N - M)u_p) \\
&\vdots \\
&= u_1 \wedge \ldots \wedge u_p + \ldots + u_1 \wedge \ldots \wedge M^{-1}(N - M)u_p
\end{aligned}$$

Ainsi on trouve l'expression suivante pour $\wedge^p M(I - \wedge^p(M^{-1}(N - M) + I))$:

$\wedge^p M(I-\wedge^p(M^{-1}(N-M)+I))(u_1\wedge\ldots\wedge u_p)$

$$\begin{aligned}
= \; & -((N - M)u_1 \wedge Nu_2 \wedge \ldots \wedge Nu_p + Mu_1 \wedge (N - M)u_2 \wedge \ldots \wedge Nu_p + \ldots \\
& \ldots + Mu_1 \wedge \ldots \wedge Mu_{p-1} \wedge (N - M)u_p)
\end{aligned}$$

Finalement, en prenant les normes, on obtient l'estimation suivante :

$$|| \wedge^p M - \wedge^p N|| \leq ||N - M||(||N||^{p-1} + ||M||.||N||^{p-2} + \ldots + ||M||^{p-1})$$

À présent, en appliquant les lemmes 6.2.3 et 6.2.5 et cette estimation avec $M = A^{\omega}_{n,N}(E)$ et $N = A^{\omega}_{n,N}(E')$, on obtient :

$$|| \wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E) - \wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E')|| \leq pC_2^{p-1}C_3|E - E'|$$

et $C_3' = pC_2^{p-1}C_3$ est indépendante de n, ω et de E, E'. □

6.2.2.2 Estimations pour le modèle (4.1)

Nous allons voir comment les matrices de transfert associées au modèle (4.1) vérifient les mêmes estimations que celles associées au modèle (5.2). Commençons par rappeler comment s'expriment les matrices de transfert associées au modèle (4.1). Avec les notations introduites au chapitre 4 on a :

$$A^{\omega}_{(n,n+1],N}(E) = M(\mathrm{diag}(\omega_1^{(n)}, \ldots, \omega_N^{(n)})).A_{(0,1),N}(E)$$

Les colonnes de $A_{(0,1),N}(E)$ sont formées par les solutions de l'équation différentielle $-u'' + V_0 u = Eu$ avec conditions initiales (6.2), la matrice V_0 étant celle définie en (4.2) au chapitre 4. Ainsi toutes les estimations que l'on a prouvées pour $A^{\omega}_{n,N}(E)$ à la section précédente sont vérifiées par $A_{(0,1),N}(E)$ car on a bien que V_0 étant constante, elle est invariante par translation par 1 tout comme l'était V_ω dans le modèle (5.2). Seules changent les constantes C_1, C_2, C_3, C_1', C_2' et C_3' car C_1 dépend de la norme de V_ω et cette norme n'est *a priori* pas égale à celle de V_0. Comme les autres constantes dépendent de C_1 elles sont aussi changées.

Par ailleurs la norme de la matrice $M(\mathrm{diag}(\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)}))$ est bornée indépendamment de ω et de n car les $\omega_i^{(n)} \in \{0, 1\}$, et indépendamment aussi de E puisqu'elle n'en dépend pas ! Soit C_4 une constante indépendante de ω, n, E telle que :

$$||M(\mathrm{diag}(\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)}))|| \leq C_4$$

Ainsi on obtient exactement les mêmes estimations que pour les $A^{\omega}_{n,N}(E)$ quitte à changer les constantes C_1, C_2, C_3 ,C_1' , C_2' et C_3' pour tenir compte du facteur C_4. Plus précisément en recopiant *mutatis mutandis* les preuves des lemmes 6.2.3, 6.2.5 et 6.2.6 on obtient les lemmes suivant pour le modèle (4.1) :

Lemme 6.2.7. *Il existe des constantes $C_1'' > 0$ et $C_2'' > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que :*

$$||A^{\omega}_{(n,n+1],N}(E)||^2 \leq C_4^2 \exp(C_1'' + |E| + 1) \leq C_2''$$

Lemme 6.2.8. *Pour tous $E, E' \in I$, il existe une constante $C_3'' > 0$ indépendante de n, ω, E telle que :*

$$||A^{\omega}_{(n,n+1],N}(E) - A^{\omega}_{(n,n+1],N}(E')|| \leq C_4 C_3'' |E - E'|$$

Lemme 6.2.9. *Il existe des constantes $C_1'' > 0$, $C_2''' > 0$ et $C_3''' > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que pour tout entier $p \in \{1, \dots, N\}$:*

$$|| \wedge^p A^{\omega}_{(n,n+1],N}(E)||^2 \leq C_4^{2p} \exp(pC_1'' + p|E| + p) \leq C_2'''$$

et pour tous $E, E' \in I$:

$$|| \wedge^p A^{\omega}_{(n,n+1],N}(E) - \wedge^p A^{\omega}_{(n,n+1],N}(E')|| \leq C_3'''|E - E'|$$

Remarque 6.2.10. Dans le lemme 6.2.9 on a :

$$C_2''' = C_4^{2p} C_2'' \text{ et } C_3''' = p(C_2'' C_4^2)^{p-1} C_4 C_3''$$

Dans la prochaine partie nous allons montrer comment à partir des estimations des lemmes 6.2.6 et 6.2.9 on peut étudier la régularité des exposants de Lyapounov.

6.3 Régularité des exposants de Lyapounov

Dans cette section nous allons présenter comment à partir d'estimations *a priori* sur les matrices de transfert et leurs puissances extérieures on peut en déduire une certaine régularité des exposants de Lyapounov lorsque le paramètre d'énergie E varie. Pour cela nous nous appuierons sur les résultats présentés dans les sections 6.1 et 6.2.

Nous verrons que la procédure mise en place dans ce but ne dépend pas du modèle étudié mais juste de la possibilité d'avoir des estimations du type 6.2.6 et surtout d'avoir prouvé la positivité des exposants de Lyapounov et l'existence d'une mesure invariante qui en fournisse une représentation intégrale.

Nous prouverons tout d'abord la continuité des exposants de Lyapounov, puis leur sous-harmonicité, qui nous sera utile au chapitre 7, et enfin leur Hölder-continuité.

6.3.1 Continuité des exposants de Lyapounov

On commence par prouver la continuité des exposants de Lyapounov en fonction du paramètre E. En plus des estimations prouvées aux lemmes 6.2.6 et 6.2.9 on utilisera des considérations sur la convergence faible des mesures.

On fixe un entier $p \in \{1, \dots, N\}$ et un intervalle compact $I \subset I_* \setminus \mathcal{S}_*$. Pour $E \in I$ on pose :

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{P}(L_p),\ \Phi_{p,E}(\bar{x}) = \mathbb{E}\left(\log \frac{||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E))x||}{||x||}\right)$$

Dans la proposition suivante nous résumons les propriétés de la fonction $\Phi_{p,E}$.

Proposition 6.3.1. *La fonction $\Phi_{p,E}$ a les propriétés suivantes :*

(i) $\bar{x} \mapsto \Phi_{p,E}(\bar{x})$ *est continue sur* $\mathbb{P}(L_p)$.

(ii) $\exists C > 0,\ \forall E, E' \in I,\ \sup_{\bar{x}\in\mathbb{P}(L_p)} |\Phi_{p,E}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{x})| \leq C|E - E'|$.

(iii) *La fonction*

$$\begin{aligned} \Phi\colon I \times \mathbb{P}(L_p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (E, \bar{x}) &\longmapsto \Phi_{p,E}(\bar{x}) \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. D'après le lemme 6.2.6 on a :

$$\log \frac{||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E))x||}{||x||} \leq \log ||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E))|| \leq \log \sqrt{C'_2}$$

De là, si $\bar{x}_l \to \bar{x}$ dans $\mathbb{P}(L_p)$ par le théorème de convergence dominée de Lebesgue (une constante est intégrable sur un espace de probabilité !) :

$$\Phi_{p,E}(\bar{x}_l) = \mathbb{E}\left(\log \frac{||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E))x_l||}{||x_l||}\right) \to \mathbb{E}\left(\log \frac{||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E))x||}{||x||}\right) = \Phi_{p,E}(\bar{x})$$

Cela prouve le premier point.

Pour deux matrices A et B, B étant supposée inversible : $||Ax|| = ||AB^{-1}Bx|| \leq ||AB^{-1}||\ ||Bx||$. D'où : $\frac{||Ax||}{||Bx||} \leq ||AB^{-1}||$. Il vient alors :

$$||AB^{-1}|| = ||(A-B+B)B^{-1}|| \leq ||A-B||\ ||B^{-1}|| + ||I|| = ||A-B||\ ||B^{-1}|| + 1$$

En utilisant cette inégalité et en utilisant à la dernière inégalité le lemme 6.2.6, on a :

$$\begin{aligned}
|\Phi_{p,E}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{x})| &= \left|\mathbb{E}\left(\log \frac{||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E))x||}{||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E'))x||}\right)\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\log ||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E))(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E'))^{-1}||\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\log(||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E)) - (\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E'))||\ ||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E'))^{-1}|| + 1)\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E)) - (\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E'))||\ ||(\wedge^p A^{\omega}_{n,N}(E'))^{-1}||\right) \\
&\leq C'_3|E-E'|\sqrt{C'_2}
\end{aligned}$$

Cela prouve le point (ii).
Pour prouver le troisième point il nous faut juste combiner les points (i) et (ii). Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $(E, \bar{x})$ et $(E', \bar{y})$ suffisamment proches pour que :

$$\begin{aligned}
|\Phi_{p,E}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{y})| &\leq |\Phi_{p,E}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{x})| + |\Phi_{p,E'}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{y})| \\
&\leq C|E-E'| + \varepsilon \\
&\leq \text{Cte } \varepsilon
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve. □

A l'aide de cette proposition nous allons pouvoir prouver la continuité des exposants de Lyapounov.

Proposition 6.3.2. *L'application $E \mapsto (\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E)$ est continue sur I.*

Démonstration. On fixe $E \in I$. Soit E_l une suite de réels dans I, convergent vers E. Par le théorème 6.1.6 il existe une unique mesure $\nu_{p,E}$, μ_E-invariante sur $\mathbb{P}(L_p)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe ν_{p,E_l}, μ_{E_l}-invariante sur $\mathbb{P}(L_p)$. Par le lemme 6.2.6 on a : $\mu_{E_l} \xrightarrow[l\to\infty]{w} \mu_E$.
Par le théorème de Banach-Alaoglu, la suite $(\nu_{p,E_l})_{l\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite, disons $(\nu_{p,E_{l_i}})_{i\in\mathbb{N}}$, faiblement convergente vers une limite $\tilde{\nu}$. Comme la convolution est faiblement continue :

$$\nu_{p,E_{l_i}} = \mu_{E_{l_i}} * \nu_{p,E_{l_i}} \xrightarrow[i\to\infty]{w} \mu_E * \tilde{\nu}$$

Alors par unicité de la limite faible : $\tilde{\nu} = \mu_E * \tilde{\nu}$. Ainsi $\tilde{\nu}$ est une mesure μ_E-invariante et par unicité dans le théorème 6.1.6 : $\tilde{\nu} = \nu_{p,E}$. On en déduit que $\nu_{p,E_l} \xrightarrow[l\to\infty]{w} \nu_{p,E}$ et donc $E \mapsto \nu_{p,E}$ est faiblement continue.
D'après la représentation intégrale donnée par le théorème 6.1.6 on a :

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E) = \nu_{p,E}(\Phi_{p,E})$$

Alors en utilisant le (ii) de la proposition 6.3.1 et la faible continuité que nous venons juste de prouver il vient :

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty}(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E_l) &= \lim_{l\to\infty}\nu_{p,E_l}(\Phi_{p,E_l}) \\
&= \lim_{l\to\infty}\left(\nu_{p,E_l}(\Phi_{p,E})+\nu_{p,E_l}(\Phi_{p,E_l}-\Phi_{p,E})\right) \\
&= \nu_{p,E}(\Phi_{p,E}) \\
&= (\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E)
\end{aligned}$$

Cela prouve bien la continuité des sommes d'exposants de Lyapounov. □

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 6.3.3. *Pour tout entier $p\in\{1,\ldots,N\}$, $E\mapsto\gamma_p(E)$ est continue.*

Démonstration. En effet on peut écrire :

$$\gamma_p(E)=(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E)-(\gamma_1+\ldots+\gamma_{p-1})(E)$$

□

Nous allons maintenant préciser ce résultat de continuité en prouvant un résultat de convergence uniforme vers les sommes d'exposants de Lyapounov.

Proposition 6.3.4.

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log\frac{||\wedge^p(A^\omega_{n,N}(E)\ldots A^\omega_{1,N}(E))x||}{||x||}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E)$$

uniformément en $E\in I$ et $\bar{x}\in\mathbb{P}(L_p)$.

Démonstration. De la même façon que nous avons introduit la fonction Φ pour prouver la continuité des exposants de Lyapounov, nous introduisons ici la suite de fonctions suivante :

$$h_n(E,\bar{x})=\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log\frac{||\wedge^p(A^\omega_{n,N}(E)\ldots A^\omega_{1,N}(E))x||}{||x||}\right)$$

pour $(E,\bar{x})\in I\times\mathbb{P}(L_p)$. A cette suite de fonctions on associe une suite de mesures μ_E-invariantes :

$$\nu_{n,E,\bar{x}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu_E^k*\delta_{\bar{x}}$$

Cette suite de mesures est associée aux h_n au sens suivant :

$$\forall n\geq 1,\ \forall E\in I,\ \forall\bar{x}\in\mathbb{P}(L_p),\ h_n(E,\bar{x})=\nu_{n,E,\bar{x}}(\Phi_{p,E})$$

On fixe $E\in I$ et $\bar{x}\in\mathbb{P}(L_p)$. On considère deux suites, $\bar{x}_n\to\bar{x}$ dans $\mathbb{P}(L_p)$ et $E_n\to E$ dans I.

Quitte a en extraire une sous-suite, on suppose que $\nu_{n,E_n,\bar{x}_n}$ converge faiblement vers $\tilde{\nu}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mu_{E_n} * \nu_{n,E_n,\bar{x}_n} &= \mu_{E_n} * \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{E_n}^k * \delta_{\bar{x_n}} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{E_n}^{k+1} * \delta_{\bar{x_n}} \\
&= \frac{1}{n} (\mu_{E_n} * \delta_{\bar{x_n}}) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{E_n}^k * \delta_{\bar{x_n}} \\
&= \frac{1}{n} (\mu_{E_n} * \delta_{\bar{x_n}}) + \nu_{n,E_n,\bar{x}_n} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{w} \tilde{\nu}
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{n}(\mu_{E_n} * \delta_{\bar{x_n}}) \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$. Par faible continuité de la convolution on a aussi :

$$\mu_{E_n} * \nu_{n,E_n,\bar{x}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu_E * \tilde{\nu}$$

Alors par unicité de la limite faible : $\mu_E * \tilde{\nu} = \tilde{\nu}$. Et finalement par unicité de la mesure invariante : $\tilde{\nu} = \nu_{p,E}$. Comme on peut extraire de $(\nu_{n,E_n,\bar{x}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite faiblement convergente, on a :

$$\nu_{n,E_n,\bar{x}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{w} \nu_{p,E}$$

De même que dans la preuve de la proposition 6.3.1 nous allons prouver que chaque h_n est continue sur $I \times \mathbb{P}(L_p)$. Nous allons procéder en deux étapes.

Étape 1 : Pour $E \in I$ fixé, $\bar{x} \mapsto h_n(E, \bar{x})$ est continue. Soit $\bar{x}_l \to \bar{x}$ dans $\mathbb{P}(L_p)$. D'après le lemme 6.2.6 :

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log \frac{|| \wedge^p (A_{n,N}^\omega(E) \dots A_{1,N}^\omega(E))x_l||}{||x_l||}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(\log || \wedge^p (A_{n,N}^\omega(E)||) + \dots + \mathbb{E}(\log || \wedge^p (A_{1,N}^\omega(E)||)\right) \\
&\leq \frac{1}{n} n \log \sqrt{C_2'} \\
&= \log \sqrt{C_2'}
\end{aligned}$$

Alors comme dans la preuve du point (i) de la proposition 6.3.1, par le théorème de convergence dominée :

$$h_n(E, \bar{x}_l) \to h_n(E, \bar{x})$$

Étape 2 : Nous allons prouver l'analogue du point (ii) de la proposition 6.3.1. On fixe $\bar{x} \in \mathbb{P}(L_p)$. Soit $E, E' \in I$. Pour simplifier les expressions dans la suite, on introduit

la notation suivante : $A_j(E) = \wedge^p A^{\omega}_{j,N}(E)$. Comme dans la preuve du point (ii) de la proposition 6.3.1 on a :

$$|h_n(E,\bar{x}) - h_n(E',\bar{x})| \leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log ||A_n(E)\dots A_1(E)A_1(E')^{-1}\dots A_n(E')^{-1}||\right)$$

Or :

$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ A_j(E)A_j(E')^{-1} = (A_j(E) - A_j(E'))A_j(E')^{-1} + I$$

Utilisant cette égalité de manière inductive on obtient :

$$\begin{aligned}
&A_n(E)\dots A_1(E)A_1(E')^{-1}\dots A_n(E')^{-1} \\
&\quad = \quad A_n(E)\dots A_2(E)(A_1(E) - A_1(E'))A_1(E')^{-1}A_2(E')^{-1}\dots A_n(E')^{-1} + \dots \\
&\qquad\quad A_n(E)\dots A_3(E)(A_2(E) - A_2(E'))A_2(E')^{-1}A_3(E')^{-1}\dots A_n(E')^{-1} + \\
&\quad \dots \quad + (A_n(E) - A_n(E'))A_n(E')^{-1} + I
\end{aligned}$$

Si on passe à la norme dans cette expression et si on utilise le lemme 6.2.6 :

$$\begin{aligned}
&||A_n(E)\dots A_1(E)A_1(E')^{-1}\dots A_n(E')^{-1}|| \\
&\quad \leq \quad ||A_n(E)||\dots||A_2(E)||\ ||A_1(E) - A_1(E')||\ ||A_1(E')^{-1}||\ ||A_2(E')^{-1}||\dots||A_n(E')^{-1}|| \\
&\quad + \dots \quad + ||A_n(E) - A_n(E')||\ ||A_n(E')^{-1}|| + 1 \\
&\quad \leq \quad (C'_2)^{\frac{2n-2}{2}}\sqrt{C'_2}C'_3|E - E'| + (C'_2)^{\frac{2n-4}{2}}\sqrt{C'_2}C'_3|E - E'| + \dots + \sqrt{C'_2}C'_3|E - E'| + 1 \\
&\quad \leq \quad \left((C'_2)^{n-1} + \dots + 1\right)\sqrt{C'_2}C'_3|E - E'| + 1
\end{aligned}$$

On réinjecte cela dans la première expression :

$$\begin{aligned}
|h_n(E,\bar{x}) - h_n(E',\bar{x})| &\leq \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log(1 + \left((C'_2)^{n-1} + \dots + 1\right)\sqrt{C'_2}C'_3|E - E'|)\right) \\
&\leq \frac{1}{n}\left((C'_2)^{n-1} + \dots + 1\right)\sqrt{C'_2}C'_3|E - E'|) \\
&\leq \widetilde{C}_n|E - E'|
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\sup_{\bar{x}\in\mathbb{P}(L_p)} |h_n(E,\bar{x}) - h_n(E',\bar{x})| \leq \widetilde{C}_n|E - E'|$$

On en déduit la continuité de h_n exactement de la même manière que dans la preuve du point (iii) de la proposition 6.3.1.

A présent, par le théorème de Dini, il suffit de prouver que $h_n(E_n,\bar{x}_n)$ converge vers $(\gamma_1 + \dots \gamma_p)(E)$ pour obtenir la convergence uniforme. En effet on a déjà prouvé que la fonction $E \mapsto (\gamma_1 + \dots \gamma_p)(E)$ est continue. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} h_n(E_n,\bar{x}_n) &= \lim_{n\to\infty} \nu_{n,E_n,\bar{x}_n}(\Phi_{p,E_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \nu_{n,E_n,\bar{x}_n}(\Phi_{p,E}) + \lim_{n\to\infty} \nu_{n,E_n,\bar{x}_n}(\Phi_{p,E_n} - \Phi_{p,E}) \\
&= \nu_{p,E}(\Phi_E) \\
&= (\gamma_1 + \dots \gamma_p)(E)
\end{aligned}$$

Cela termine la preuve de la proposition. □

Nous avons donc achevé l'étude de la continuité des sommes d'exposants de Lyapounov en obtenant même un résultat de convergence uniforme vers ces sommes.

Dans la prochaine section nous allons prouver une propriété de régularité intermédiaire, la sous-harmonicité des sommes d'exposants de Lyapounov. Cette propriété va jouer un rôle essentiel dans la preuve d'une formule de Thouless au chapitre 7.

6.3.2 Sous-harmonicité des sommes d'exposants de Lyapounov

Tout d'abord on remarque que la définition des exposants de Lyapounov nous permet de les définir pour des valeurs complexes de l'énergie E. En fait la formule :

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log || \wedge^p (A^\omega_{n,N}(E) \ldots A^\omega_{0,N}(E))||\right)$$

a aussi un sens pour $E \in \mathbb{C}$.

Nous allons maintenant suivre Conway dans [Con97] pour définir les fonctions sous-harmoniques et en donner les premières propriétés.

Définition 6.3.5. Une fonction f $\mathbb{C} \to [-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

(i) f est semi-continue supérieurement, i.e. : $\forall E \in \mathbb{C},\ f(E) \geq \limsup_{y\to E} f(y)$

(ii) $\forall E \in \mathbb{C},\ \forall r > 0,\ f(E) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(E + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$.

Remarque 6.3.6. Bien sûr une fonction continue est semi-continue supérieurement et la première hypothèse de la définition est satisfaite par les sommes d'exposants de Lyapounov comme prouvé dans la proposition 6.3.2.

Nous allons à présent prouver une proposition qui donne les principales propriétés de stabilité de l'ensemble des fonctions sous-harmoniques et le principal exemple de fonction sous-harmonique.

Proposition 6.3.7. (i) *Si f et g sont deux fonctions sous-harmoniques égales presque partout au sens de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, elles sont égales partout.*

(ii) *Si f_n est une suite de fonctions sous-harmoniques localement minorées, alors l'infimum pris point par point de cette suite est une fonction sous-harmonique.*

(iii) *Si $A(z)$ est une fonction entière à valeurs matricielles, la fonction $z \mapsto \log ||A(z)||$ est sous-harmonique.*

Démonstration. (i) On fixe $E \in \mathbb{C}$. Par le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques (voir [Con97]) on a :

$$\forall r > 0,\ f(E) \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(E,r)} f(z)dz$$

Puis par semi-continuité supérieure :

$$f(E) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(E,r)} f(z)dz$$

De là si $f = g$ presque sûrement, il vient :

$$f(E) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(E,r)} f(z)dz = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(E,r)} g(z)dz = g(E)$$

Et le premier point est prouvé.
(ii) Une fonction semi-continue supérieurement est minorée sur tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$. On fixe un compact $K \subset \mathbb{C}$. On peut alors appliquer localement le théorème de convergence dominé de Lebesgue pour obtenir :

$$\forall E \in K, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(E) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(E + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)(E + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta,$$

et l'infimum d'une famille de fonctions semi-continues supérieurement est encore une fonction semi-continue supérieurement.
(iii) Ce point vient de la formule de Jensen sur le logarithme des fonctions holomorphes que l'on peut trouver dans [Con97] ou [Rud97]. □

Nous avons à présent tout ce qu'il nous faut pour prouver la sous-harmonicité des sommes d'exposant de Lyapounov. On suit ici Craig et Simon dans [CS83].

Proposition 6.3.8. *Pour tout $p = 1, \ldots, N$, la fonction $E \mapsto \gamma_1(E) + \ldots + \gamma_p(E)$ est sous-harmonique.*

Démonstration. Tout d'abord, la fonction $E \mapsto A^{\omega}_{n,N}(E)$ est entière car son expression met en jeu uniquement des solutions de $-u'' + V_\omega u = Eu$ qui sont analytiques en E (pour le modèle (4.1), c'est encore plus évident que $A^{\omega}_{(n,n+1],N}(E)$ est analytique en E de par son expression...). Puis, comme un produit de fonctions entières est une fonction entière, $E \mapsto \wedge^p(A^{\omega}_{n,N}(E) \ldots A^{\omega}_{0,N}(E))$ est aussi entière. Finalement par le point (iii) de la proposition 6.3.7, $E \mapsto \log || \wedge^p (A^{\omega}_{n,N}(E) \ldots A^{\omega}_{0,N}(E))||$ est encore sous-harmonique. Par le lemme de Fatou, l'application $E \mapsto \mathbb{E}\left(\log || \wedge^p (A^{\omega}_{n,N}(E) \ldots A^{\omega}_{0,N}(E))||\right)$ est aussi sous-harmonique. Or la suite $(\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log || \wedge^p (A^{\omega}_{n,N}(E) \ldots A^{\omega}_{0,N}(E))||\right))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sous-additive de nombres strictement positifs, sa limite est donc donnée par un infimum et le point (ii) de la proposition 6.3.7 s'applique pour donner que $\gamma_1(E) + \ldots + \gamma_p(E)$ est sous-harmonique. □

Pour terminer cette section nous rappelons sans preuve l'une des propriétés les plus intéressantes des fonctions sous-harmoniques, l'existence de limites non-tangentielles.

Proposition 6.3.9. *Pour presque tout $E \in \mathbb{R}$, pour tout $p = 1, \ldots, N$, la limite suivante existe et vaut :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E + \mathrm{i}\varepsilon) = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E)$$

Démonstration. On utilise le fait que toute fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ est non-tangentiellement continue en presque tout point de la droite réelle au sens de la mesure de Lebesgue. On peut trouver ce résultat dans [Gar81]. □

Dans la prochaine section nous allons prouver que les exposants de Lyapounov de nos modèles ont plus de régularité que simplement la continuité ou la sous-harmonicité. Nous allons prouver qu'ils sont ce que l'on appelle « localement Hölder-continus ».

6.3.3 Hölder-continuité des exposants de Lyapounov

Nous allons maintenant utiliser les résultats présentés dans la section 6.1.3.3. Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, notre but est de prouver le théorème 6.0.3. C'est ce que nous allons faire à présent. Dans toute la suite, on fixe un intervalle compact $I \subset I_* \setminus \mathcal{S}_*$.

On reprend les notations de la section 6.1 et on pose $B = \mathbb{P}(L_p)$ muni de la distance projective usuelle :

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(L_p),\ \delta(\bar{x}, \bar{y}) = \left(1 - \frac{|(x,y)|^2}{||x||^2\ ||y||^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Afin de pouvoir appliquer les résultats de la section 6.1.3.3, nous allons devoir prouver d'une part l'uniforme intégrabilité du cocycle σ_1^t et d'autre part l'hypothèse de log-négativité. On rappelle que le cocycle σ_1 est définit sur $G(E) \times \widetilde{\mathbb{P}(L_p)}$ (où $G(E)$ est le groupe définit aux chapitres 4 et 5) par :

$$\forall E \in I,\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \widetilde{\mathbb{P}(L_p)},\ \forall g \in G(E), \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) = \frac{\delta(\wedge^p g.\bar{x}, \wedge^p g.\bar{y})}{\delta(x,y)}$$

Proposition 6.3.10. $\forall t \in \mathbb{R},\ \sup_{E \in I} \int_{G(E)} \bar{\sigma_1}^t(g)\, \mathrm{d}\mu_E(g) < +\infty$.

Démonstration. On fixe $E \in I$, $\bar{x}, \bar{y} \in \widetilde{\mathbb{P}(L_p)}$ et $g \in G(E)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) &= \frac{\delta(\wedge^p g.\bar{x}, \wedge^p g.\bar{y})}{\delta(x,y)} \\
&= \left(\frac{||\wedge^p gx||^2 ||\wedge^p gy||^2 - |(\wedge^p gx, \wedge^p gy)|^2}{||x||^2 ||y||^2 - |(x,y)|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{||x||\ ||y||}{||\wedge^p gx||\ ||\wedge^p gy||}\right) \\
&= \left(\frac{||\wedge^p gx\ \wedge\ \wedge^p gy||^2}{||x \wedge y||^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{||x||\ ||y||}{||\wedge^p gx||\ ||\wedge^p gy||}\right) \\
&= \left(\frac{||(\wedge^2 \wedge^p g)(x \wedge y)||}{||x \wedge y||}\right) \left(\frac{||x||\ ||y||}{||\wedge^p gx||\ ||\wedge^p gy||}\right) \\
&\leq \left(||\wedge^2 \wedge^p g|| \frac{||x \wedge y||}{||x \wedge y||}\right) \left(\frac{||x||\ ||y||}{||\wedge^p gx||\ ||\wedge^p gy||}\right) \\
&= ||\wedge^2 \wedge^p g|| \left(\frac{||x||\ ||y||}{||\wedge^p gx||\ ||\wedge^p gy||}\right)
\end{aligned}$$

Or : $||x|| = ||(\wedge^p g)^{-1} \wedge^p gx|| \leq ||(\wedge^p g)^{-1}||\ ||\wedge^p gx||$. Puis comme g est symplectique :

$$\frac{||x||}{||\wedge^p gx||} \leq ||(\wedge^p g)^{-1}|| = ||\wedge^p g||$$

D'où :

$$\sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y})) \leq ||\wedge^p g||^2 ||\wedge^2 \wedge^p g||$$

De là par le lemme 6.2.6 :

$$\bar{\sigma}_1(g) \leq || \wedge^p g||^2 || \wedge^2 \wedge^p g|| \leq \mathrm{e}^{\frac{3}{2}C+3p|E|}$$

D'où : $\forall t \in \mathbb{R},\ \bar{\sigma}_1^t(g) \leq \mathrm{e}^{\frac{3}{2}tC+3tp|E|}$. Finalement comme I est borné :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sup_{E\in I} \int_{G(E)} \bar{\sigma}_1^t(g)\, \mathrm{d}\mu_E(g) \leq \mathrm{e}^{\frac{3}{2}tC+3tpM} < +\infty$$

□

Avant de prouver l'hypothèse de log-négativité sur σ_1 nous allons prouver un lemme qui se révélera utile pour cela.

Lemme 6.3.11.

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{P}(L_p),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \int \log \frac{||(\wedge^p g)x||}{||x||}\, \mathrm{d}\mu_E^n(g) = \mathbb{E}\left(\log \frac{|| \wedge^p (A_{n,N}^\omega(E) \dots A_{1,N}^\omega(E))x||}{||x||}\right)$$

Démonstration. Nous allons utiliser de manière inductive la formule définissant l'image d'une probabilité. Pour une variable aléatoire X sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on note P_X l'image de la mesure de probabilité P par la variable aléatoire X. Alors :

$$\forall f \text{ positive, mesurable},\ \mathbb{E}(f(X)) = \int f(X(\omega))dP(\omega) = \int f(x)dP_X(x)$$

On obtient le résultat énoncé dans le lemme car μ_E est l'image de la probabilité ν par $A_{n,N}^\omega(E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Nous pouvons maintenant prouver l'hypothèse de log-négativité.

Proposition 6.3.12. *Il existe un entier N tel que :*

$$\sup_{E\in I} \sup_{(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{P}(L_p),\ \bar{x}\neq\bar{y}} \int \log \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y}))\, \mathrm{d}\mu_E^N(g) < 0$$

Démonstration. Pour $n \geq 1$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(L_p)$ et $E \in I$:

$$\frac{1}{n} \int \log \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y}))\, \mathrm{d}\mu_E^n(g)$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & \frac{1}{n} \int \log \left(|| \wedge^2 (\wedge^p g)|| \frac{||x||\ ||y||}{||(\wedge^p g)x||\ ||(\wedge^p g)y||} \right) \mathrm{d}\mu_E^n(g) \\
=\ & \frac{1}{n} \int \log || \wedge^2 (\wedge^p g)||\, \mathrm{d}\mu_E^n(g) - \frac{1}{n} \int \log \frac{||(\wedge^p g)x||}{||x||}\, \mathrm{d}\mu_E^n(g) - \frac{1}{n} \int \log \frac{||(\wedge^p g)y||}{||y||}\, \mathrm{d}\mu_E^n(g) \\
=\ & \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log || \wedge^2 \wedge^p (A_{n,N}^\omega(E) \dots A_{1,N}^\omega(E))||\right) - \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log \frac{|| \wedge^p (A_{n,N}^\omega(E) \dots A_{1,N}^\omega(E))x||}{||x||}\right) - \\
& \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log \frac{|| \wedge^p (A_{n,N}^\omega(E) \dots A_{1,N}^\omega(E))x||}{||x||}\right) \\
\xrightarrow[n\to\infty]{}\ & (\gamma_1 + \dots + \gamma_p + \gamma_{p+1} + \dots + \gamma_{2p})(E) - (\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E) - (\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E)
\end{aligned}$$

A la troisième ligne on a utilisé le lemme 6.3.11 et pour la convergence uniforme on a utilisé la proposition 6.3.4. A la limite on a donc :

$$(\gamma_1+\ldots+\gamma_p+\gamma_{p+1}+\ldots+\gamma_{2p})(E)-(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E)-(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E)$$
$$= (\gamma_{p+1}+\ldots+\gamma_{2p})(E)-(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E) < 0$$

d'après le premier point du théorème 6.1.6. En utilisant la continuité des exposants de Lyapounov et la convergence uniforme (propositions 6.3.2 et 6.3.4) :

$$\exists N,\ \forall E \in I,\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(L_p),\ \frac{1}{N}\int \log \sigma_1(g, (\bar{x}, \bar{y}))\, \mathrm{d}\mu_E^N(g) < 0$$

Et on a obtenu l'inégalité voulue. □

On a donc prouvé toutes les hypothèses de la proposition 6.1.20 et du corollaire 6.1.21 pour notre cocycle. Résumons ce que l'on obtient alors dans la proposition suivante :

Proposition 6.3.13. *Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0$, $\exists C_\alpha > 0$, $\exists \rho_\alpha < 1$:*
(i) *T_E est un opérateur borné sur $\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p))$.*
(ii) *$\forall n \geq 1$,*

$$\sup_{E\in I}\ \sup_{(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{P}(L_p),\ \bar{x}\neq\bar{y}} \mathbb{E}\left(\frac{\delta(\wedge^p(A^\omega_{n,N}(E)\ldots A^\omega_{1,N}(E))x, \wedge^p(A^\omega_{n,N}(E)\ldots A^\omega_{1,N}(E))y)^\alpha}{\delta(x,y)^\alpha}\right) \leq C_\alpha \rho_\alpha^n$$

(iii)

$$\forall n \geq 1,\ \forall f \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p)),\ \sup_{E\in I} ||T_E^n f - \nu_{p,E} f||_\alpha \leq ||f||_\alpha C_\alpha \rho_\alpha^n$$

(iv) *T_E a pour valeur propre 1 et le reste de son spectre est contenu dans un disque de rayon < 1. Plus précisément on a la décomposition suivante :*

$$\forall n \geq 1,\ \forall f \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p)),\ T_E^n f = \nu_{E,p} f + Q_E^n f$$

où Q_E est un opérateur de rayon spectral < 1.

Démonstration. Pour (i) et (iii) on retrouve exactement le résultat de la proposition 6.1.20. Pour (ii), il nous faut combiner la proposition 6.1.19 et le lemme 6.3.11. Pour le point (iv), c'est le résultat du corollaire 6.1.21. □

Ainsi nous avons réduit notre problème d'estimation de $\nu_{p,E} - \nu_{p,E'}$ au fait d'estimer $T_E - T_{E'}$. En général, $E \mapsto T_E$ de I vers $\mathcal{B}(\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p)))$ n'est pas continue. Mais nous allons prouver une propriété de régularité plus faible qui signifie que cette application est continue si l'on considère cette fois T_E comme un opérateur borné de $\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p))$ dans $\mathcal{L}_{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{P}(L_p))$.

Proposition 6.3.14. *Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_1$, $\exists \widetilde{C}_\alpha > 0$ tel que :*

$$\forall f \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p)),\ \forall E, E' \in I,\ ||T_E f - T_{E'} f||_\alpha \leq \widetilde{C}_\alpha ||f||_\alpha |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}}$$

Démonstration. Nous allons diviser la preuve en deux étapes, correspondant aux estimations respectives des termes $|| \, ||_\infty$ et m_α définissant la norme $|| \, ||_\alpha$.
Étape 1 : $|| \, ||_\infty$**.** Pour $f \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p))$, $E, E' \in I$ et $\bar{x} \in \mathbb{P}(L_p)$:

$$\begin{aligned}
|T_E f(\bar{x}) - T_{E'} f(\bar{x})| &= |\int_{G(E)} f(\wedge^p g_E \bar{x}) \, \mathrm{d}\mu_E(g_E) - \int_{G(E')} f(\wedge^p g_{E'} \bar{x}) \, \mathrm{d}\mu_{E'}(g_{E'})| \\
&= |\mathbb{E}(f(\wedge^p g_E \bar{x})) - \mathbb{E}(f(\wedge^p g_{E'} \bar{x}))| \\
&= |\mathbb{E}(f(\wedge^p g_E \bar{x}) - f(\wedge^p g_{E'} \bar{x}))| \\
&\leq m_\alpha(f) \mathbb{E}(\delta(\wedge^p g_E \bar{x}, \wedge^p g_{E'} \bar{x}))^\alpha)
\end{aligned}$$

La seconde égalité est obtenue comme dans la preuve du lemme 6.3.11 en utilisant la définition de l'image d'une mesure de probabilité. Pour poursuivre notre estimation, on utilise l'expression de la distance δ :

$$\begin{aligned}
\delta(\wedge^p g_E \bar{x}, \wedge^p g_{E'} \bar{x}))^\alpha &= \left(\frac{||(\wedge^p g_E x) \wedge (\wedge^p g_{E'} x)||}{|| \wedge^p g_E x|| \, || \wedge^p g_{E'} x||} \right)^\alpha \\
&= \left(\frac{||((\wedge^p g_E - \wedge^p g_{E'}) x) \wedge (\wedge^p g_{E'} x) + (\wedge^p g_{E'} x) \wedge (\wedge^p g_{E'} x)||}{|| \wedge^p g_E x|| \, || \wedge^p g_{E'} x||} \right)^\alpha \\
&= \left(\frac{||((\wedge^p g_E - \wedge^p g_{E'}) x) \wedge (\wedge^p g_{E'} x)||}{|| \wedge^p g_E x|| \, || \wedge^p g_{E'} x||} \right)^\alpha \\
&\leq \left(\frac{||(\wedge^p g_E - \wedge^p g_{E'}) x|| \, || \wedge^p g_{E'} x||}{|| \wedge^p g_E x|| \, || \wedge^p g_{E'} x||} \right)^\alpha \\
&\leq \left(||(\wedge^p g_E - \wedge^p g_{E'}) x|| \, || \wedge^p g_E^{-1} x|| \right)^\alpha \\
&\leq \left(\sqrt{C_2'} C_3' |E - E'| \right)^\alpha \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du lemme 6.2.6. Finalement on a prouvé :

$$|T_E f(\bar{x}) - T_{E'} f(\bar{x})| \leq m_\alpha(f) \left(\sqrt{C_2'} C_3' \right)^\alpha |E - E'|^\alpha \qquad (6.4)$$

De cette estimation on en déduit :

$$||T_E f - T_{E'} f||_\infty \leq m_\alpha(f) \left(\sqrt{C_2'} C_3' \right)^\alpha |E - E'|^\alpha$$

Étape 2 : m_α**.** Pour $f \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p))$, $E \in I$ et $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(L_p)$:

$$\begin{aligned}
|T_E f(\bar{x}) - T_E f(\bar{y})| &= |\int_{G(E)} f(\wedge^p g_E \bar{x}) \, \mathrm{d}\mu_E(g_E) - \int_{G(E)} f(\wedge^p g_E \bar{y}) \, \mathrm{d}\mu_E(g_E)| \\
&= |\mathbb{E}(f(\wedge^p g_E \bar{x})) - \mathbb{E}(f(\wedge^p g_E \bar{y}))| \\
&\leq m_\alpha(f) \mathbb{E}(\delta(\wedge^p g_E \bar{x}, \wedge^p g_E \bar{y})^\alpha)
\end{aligned}$$

Puis en utilisant des estimations similaires à celles de la preuve de la proposition 6.3.10 :

$$\begin{aligned}
\delta(\wedge^p g_E\bar{x}, \wedge^p g_E\bar{y})) &= \frac{||(\wedge^p g_E x) \wedge (\wedge^p g_E y)||}{|| \wedge^p g_E x|| \; || \wedge^p g_E y||} \\
&\leq \frac{|| \wedge^2 \wedge^p g_E|| \; ||x \wedge y||}{|| \wedge^p g_E x|| \; || \wedge^p g_E y||} \times \frac{||x|| \; ||y||}{||x|| \; ||y||} \\
&\leq || \wedge^p g_E||^2 \frac{||x \wedge y||}{||x|| \; ||y||} || \wedge^p g_E^{-1}|| \; || \wedge^p g_E^{-1}|| \\
&\leq (C_2')^2 \delta(\bar{x}, \bar{y})
\end{aligned}$$

D'où :

$$|T_E f(\bar{x}) - T_E f(\bar{y})| \leq m_\alpha(f) \, (C_2')^{2\alpha} \, \delta(\bar{x}, \bar{y})^\alpha \tag{6.5}$$

On pose : $C_\alpha = \max(\left(\sqrt{C_2'}C_3'\right)^\alpha, (C_2')^{2\alpha})$. Alors par (6.4) on obtient :

$$|(T_E - T_{E'})f(\bar{x}) - (T_E - T_{E'})f(\bar{y})| \leq 2C_\alpha m_\alpha(f)|E - E'|^\alpha$$

et par (6.5) on obtient :

$$|(T_E - T_{E'})f(\bar{x}) - (T_E - T_{E'})f(\bar{y})| \leq 2C_\alpha m_\alpha(f)\delta(\bar{x}, \bar{y})^\alpha$$

Ainsi :

$$|(T_E - T_{E'})f(\bar{x}) - (T_E - T_{E'})f(\bar{y})| \leq 2C_\alpha m_\alpha(f) \min(\delta(\bar{x}, \bar{y})^\alpha, |E - E'|^\alpha) \tag{6.6}$$

Mais on a toujours :

$$\min(\delta(\bar{x}, \bar{y})^{\frac{\alpha}{2}}, |E - E'|^\alpha \delta(\bar{x}, \bar{y})^{-\frac{\alpha}{2}}) \leq |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}}$$

En remplaçant dans (6.6) il vient :

$$m_{\frac{\alpha}{2}}(T_E f - T_{E'} f) \leq 2C_\alpha m_\alpha(f) \min\left(\delta(\bar{x}, \bar{y})^{\frac{\alpha}{2}}, \frac{|E - E'|^\alpha}{\delta(\bar{x}, \bar{y})^{\frac{\alpha}{2}}}\right) \leq 2C_\alpha m_\alpha(f)|E - E'|^{\frac{\alpha}{2}}$$

Et on a terminé l'étape 2.

Conclusion : $|| \; ||_\alpha$. Avant d'estimer cette norme on réécrit l'inégalité (6.4) en y remplaçant α par $\frac{\alpha}{2}$:

$$|T_E f(\bar{x}) - T_{E'} f(\bar{x})| \leq m_{\frac{\alpha}{2}}(f) \left(\sqrt{C_2'}C_3'\right)^{\frac{\alpha}{2}} |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}} \leq ||f||_{\frac{\alpha}{2}} \left(\sqrt{C_2'}C_3'\right)^{\frac{\alpha}{2}} |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}}$$

En combinant cette estimation avec celle prouvée à l'étape 2 il vient :

$$\begin{aligned}
||T_E f - T_{E'} f||_{\frac{\alpha}{2}} &= m_{\frac{\alpha}{2}}(T_E f - T_{E'} f) + ||T_E f - T_{E'} f||_\infty \\
&\leq 2C_\alpha m_\alpha(f)|E - E'|^{\frac{\alpha}{2}} + C_\alpha ||f||_{\frac{\alpha}{2}} |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}} |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq 3C_\alpha ||f||_\alpha |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue en utilisant le lemme 6.1.15. Finalement en posant $\widetilde{C}_\alpha = 3C_\alpha$ on termine la preuve :

$$||T_E f - T_{E'} f||_{\frac{\alpha}{2}} \leq \widetilde{C}_\alpha ||f||_\alpha |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}}$$

□

Nous pouvons maintenant voir comment à partir de cette estimation sur T on peut établir une estimation de $\nu_{p,E} - \nu_{p,E'}$.

Proposition 6.3.15. *Il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_2$, $\exists \widetilde{C}'_\alpha > 0$ tel que :*

$$\forall p \in \{1, \ldots, N\},\ \forall f \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p)),\ \forall E, E' \in I,\ |\nu_{p,E}(f) - \nu_{p,E'}(f)| \leq \widetilde{C}'_\alpha ||f||_\alpha |E - E'|^\alpha$$

Démonstration. On pose : $\alpha_2 = \min(\alpha_0, \alpha_1)$ où α_0 est donné par la proposition 6.3.13 et α_1 par la proposition 6.3.14. Soit $\alpha \in]0, \alpha_2]$. On note Γ_α le cercle de centre $z = 1$ et de rayon $r_\alpha = \frac{1-\rho_\alpha}{2}$ où ρ_α est donné par la proposition 6.3.13.
D'après le point (iv) de la proposition 6.3.13, $\Gamma_\alpha \cap \sigma(T_E) = \emptyset$ et Γ_α ne contient que la valeur propre $1 \in \sigma(T_E)$ dans son intérieur. On écrit aussi : $\forall n \geq 0,\ T_E^n = \nu_{p,E} + Q_E^n$.
On a alors le développement en série de Laurent de la résolvante de T_E en $z \in \Gamma_\alpha$:

$$\begin{aligned} R_{E,z} &= (T_E - zI)^{-1} \\ &= \frac{1}{z}(\frac{1}{z}T_E - I)^{-1} \\ &= \frac{\nu_{p,E}}{z(1-z)} + \sum_{n\geq 0} \frac{Q_E^n}{z^{n+1}} \end{aligned}$$

Or par le point (iii) de la proposition 6.3.13 :

$$\forall f \in \mathcal{L}_\alpha(\mathbb{P}(L_p)),\ ||Q_E^n f||_\alpha \leq ||f||_\alpha C_\alpha \rho_\alpha^n$$

Par abus de notation nous écrirons cela sous la forme : $||Q_E^n||_\alpha \leq C_\alpha \rho_\alpha^n$. De même nous ferons cet abus de notation en notant $||\nu_{p,E}||_\alpha \leq 1$ au lieu de $||\nu_{p,E} f||_\alpha \leq ||f||_\alpha$. Par ailleurs, pour $z \in \Gamma_\alpha$: $|1 - z| = r_\alpha = \frac{1-\rho_\alpha}{2}$ et $|z| \geq 1 - \frac{1-\rho_\alpha}{2} = \frac{1+\rho_\alpha}{2}$. Donc : $\frac{1}{|z|} \leq \frac{2}{1+\rho_\alpha}$.
D'où :

$$\begin{aligned} ||R_{E,z}||_\alpha &\leq \frac{||\nu_{p,E}||_\alpha}{|z|\ |1-z|} + \sum_{n\geq 0} \frac{||Q_E^n||_\alpha}{|z|^{n+1}} \\ &\leq \frac{2}{1+\rho_\alpha}\ \frac{2}{1-\rho_\alpha} + \sum_{n\geq 0} \frac{C_\alpha \rho_\alpha^n 2^{n+1}}{(1+\rho_\alpha)^{n+1}} \\ &= \frac{4}{1-\rho_\alpha^2} + \frac{2C_\alpha}{1+\rho_\alpha}\ \frac{1}{1-\frac{2\rho_\alpha}{1+\rho_\alpha}} \\ &= \frac{4}{1-\rho_\alpha^2} + \frac{2C_\alpha}{1-\rho_\alpha} \end{aligned}$$

Comme cette borne est indépendante de E et de z on obtient finalement :

$$\sup_{z\in\Gamma_\alpha} \sup_{E\in I} ||R_{E,z}||_\alpha \leq \frac{4}{1-\rho_\alpha^2} + \frac{2C_\alpha}{1-\rho_\alpha}$$

Comme $R_{E,z} = \frac{\nu_{p,E}}{z(1-z)} + \sum_{n\geq 0} \frac{Q_E^n}{z^{n+1}}$ par la formule de Cauchy :

$$\nu_{p,E} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\Gamma_\alpha} R_{E,z} dz$$

Et donc :

$$\begin{aligned}|\nu_{p,E}f-\nu_{p,E'}f| &\leq \frac{1}{2\pi}\ell(\Gamma_\alpha)\sup_{z\in\Gamma_\alpha}||R_{E,z}f-R_{E',z}f||_\infty\\ &\leq r_\alpha\sup_{z\in\Gamma_\alpha}||R_{E,z}f-R_{E',z}f||_\alpha\\ &\leq r_\alpha\sup_{z\in\Gamma_\alpha}||R_{E,z}-R_{E',z}||_\alpha||f||_\alpha\end{aligned}$$

Or par la seconde égalité de la résolvante :

$$R_{E,z}-R_{E',z}=R_{E',z}(T_{E'}-T_E)R_{E,z}$$

Et en utilisant la proposition 6.3.14 :

$$||R_{E,z}-R_{E',z}||_\alpha\leq||R_{E',z}||_\alpha\,||T_{E'}-T_E||_\alpha\,||R_{E,z}||_\alpha\leq\left(\frac{4}{1-\rho_\alpha^2}+\frac{2C_\alpha}{1-\rho_\alpha}\right)^2\widetilde{C}_\alpha|E-E'|^{\frac{\alpha}{2}}$$

D'où :

$$|\nu_{p,E}f-\nu_{p,E'}f|\leq r_\alpha\left(\frac{4}{1-\rho_\alpha^2}+\frac{2C_\alpha}{1-\rho_\alpha}\right)^2\widetilde{C}_\alpha||f||_\alpha|E-E'|^{\frac{\alpha}{2}}$$

Si on pose : $\widetilde{C}'_\alpha=r_\alpha\left(\frac{4}{1-\rho_\alpha^2}+\frac{2C_\alpha}{1-\rho_\alpha}\right)^2\widetilde{C}_\alpha$ on obtient :

$$|\nu_{p,E}f-\nu_{p,E'}f|\leq\widetilde{C}'_\alpha||f||_\alpha|E-E'|^{\frac{\alpha}{2}}$$

qui est l'inégalité voulue. Cela termine la preuve. □

Ayant prouvé une estimation sur la mesure invariante $\nu_{p,E}$ et étant donné que les exposants de Lyapounov admettent une représentation intégrale contre cette mesure d'après le théorème 6.1.6, on peut finalement prouver le théorème 6.0.3.

Démonstration. **Preuve du théorème 6.0.3.** Tout d'abord comme $\gamma_p(E)=(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E)-(\gamma_1+\ldots+\gamma_{p-1})(E)$ et que l'ensemble des fonctions Hölder-continues d'ordre α est un espace vectoriel, prouver le théorème 6.0.3 se réduit à prouver que :

$$\forall p\in\{1,\ldots,N\},\ \forall E,E'\in I,\ |(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E)-(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E')|\leq C|E-E'|^\alpha$$

pour un $\alpha>0$ et une constante $C>0$ convenables.

On fixe $p\in\{1,\ldots,N\}$ et $E,E'\in I$. On rappelle que : $(\gamma_1+\ldots+\gamma_p)(E)=\nu_{p,E}(\Phi_{p,E})$. Nous cherchons un $\alpha\in]0,\alpha_2]$ tel que : $\sup_{E\in I}||\Phi_{p,E}||_\alpha<+\infty$. Pour $\bar{x}\in\mathbb{P}(L_p)$ on a par le lemme 6.2.6 :

$$|\Phi_{p,E}(\bar{x})|\leq\mathbb{E}(\log||\wedge^p A^\omega_{n,N}(E)||)\leq\log\sqrt{C'_2}$$

D'où :

$$||\Phi_{p,E}||_\infty\leq\log\sqrt{C'_2}$$

On se penche sur $m_\alpha(\Phi_{p,E})$. Pour $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{P}(L_p)$ on peut trouver $x \in \bar{x}$ et $y \in \bar{y}$, de normes 1 et tels que l'angle entre x et y soit plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Alors : $\delta(\bar{x}, \bar{y}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}||x-y||$. Soit R la rotation qui envoie x sur y (R existe car $||x|| = ||y||$). Alors :

$$||R - I|| \leq \sqrt{2}\delta(\bar{x}, \bar{y})$$

De tout cela on en déduit que :

$$\begin{aligned}
|\Phi_{p,E}(\bar{y}) - \Phi_{p,E}(\bar{x})| &\leq \mathbb{E}\left(\left|\log \frac{|| \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)Rx||}{|| \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)x||}\right|\right) \\
&\leq \mathbb{E}(\log || \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)\ R\ \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)^{-1}||) \\
&\leq \mathbb{E}(\log || \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)(R-I+I) \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)^{-1}||) \\
&\leq \mathbb{E}(\log(1 + || \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)(R-I) \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)^{-1}||)) \\
&\leq \mathbb{E}(\log(1 + ||R-I||\ || \wedge^p A^\omega_{n,N}(E)||^2)) \\
&\leq \mathbb{E}(\log(1 + \sqrt{2}\delta(\bar{x}, \bar{y})C'_2))
\end{aligned}$$

Or pour $0 < \alpha \leq 1$ et $t \geq 0$: $\exists M_\alpha > 0,\ \log(1+t) \leq M_\alpha t^\alpha$. On se restreint donc à $\alpha \in]0,1] \cap]0, \alpha_2]$. Alors :

$$|\Phi_{p,E}(\bar{y}) - \Phi_{p,E}(\bar{x})| \leq (\sqrt{2}C'_2)^\alpha M_\alpha \delta(\bar{x}, \bar{y})^\alpha$$

D'où :

$$m_\alpha(\Phi_{p,E}) \leq (\sqrt{2}C'_2)^\alpha M_\alpha$$

et finalement :

$$\forall \alpha \in]0,1] \cap]0, \alpha_2],\ \sup_{E \in I} ||\Phi_{p,E}||_\alpha \leq \sqrt{C'_2} + (\sqrt{2}C'_2)^\alpha M_\alpha < +\infty$$

On peut maintenant terminer la preuve en utilisant la proposition 6.3.15 et le point (ii) de la proposition 6.3.1 :

$$|(\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E) - (\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E')| = |\nu_{p,E}(\Phi_{p,E}) - \nu_{p,E'}(\Phi_{p,E'})|$$

$$\begin{aligned}
&= |(\nu_{p,E} - \nu_{p,E'})(\Phi_{p,E'}) + \nu_{p,E}(\Phi_{p,E} - \Phi_{p,E'})| \\
&\leq |(\nu_{p,E} - \nu_{p,E'})(\Phi_{p,E'})| + ||\Phi_{p,E} - \Phi_{p,E'}||_\infty \\
&\leq \widetilde{C}'_\alpha |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}} ||\Phi_{p,E'}||_\alpha + C|E - E'| \\
&= |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}} \left(\widetilde{C}'_\alpha \sup_{E \in I} ||\Phi_{p,E}||_\alpha + C|E - E'|^{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&\leq \left(\widetilde{C}'_\alpha \sup_{E \in I} ||\Phi_{p,E}||_\alpha + C\ell(I)^{1-\frac{\alpha}{2}}\right) |E - E'|^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Si on pose "$\alpha = \frac{\alpha}{2}$" et "$C = \widetilde{C}'_\alpha \sup_{E \in I} ||\Phi_{p,E}||_\alpha + C\ell(I)^{1-\frac{\alpha}{2}}$" on obtient finalement :

$$|(\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E) - (\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E')| \leq C|E - E'|^\alpha$$

□

Avant de clore ce chapitre et de voir au prochain chapitre comment utiliser le résultat du théorème 6.0.3, nous pouvons résumer sous forme d'un résultat général ce que nous venons de prouver. En effet la méthode que nous venons de présenter ne s'applique pas que pour les deux modèles que nous étudions, mais pour d'autres modèles dès lors qu'ils vérifient les propriétés clés que nous avons utilisées ici, à savoir l'existence d'une mesure invariante et de la représentation intégrale des exposants de Lyapounov qui y est associée comme prouvée au théorème 6.1.6, ainsi que l'existence d'estimations du type de celles que l'on a exposé au lemme 6.2.6.

Nous avons donc obtenu le résultat général suivant :

Théorème 6.3.16. *Soit $(A_n^\omega(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de matrices aléatoires symplectiques d'ordre $2N$, indépendantes et identiquement distribuées, dépendant d'un paramètre réel E. Soit μ_E la distribution commune des $A_n^\omega(E)$. On fixe I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On suppose que les assertions suivantes sont vérifiées pour $E \in I$:*

(i) *Le sous-groupe de Fürstenberg G_{μ_E} associé à la suite $(A_n^\omega(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ est p-contractant et L_p-fortement irréductible pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$.*

(ii) $\mathbb{E}(\log ||A_1^\omega(E)||)$ *est finie.*

(iii) *Il existe $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que pour tout entier $p \in \{1, \dots, N\}$:*

$$|| \wedge^p A_{n,N}^\omega(E)||^2 \leq \exp(pC_1 + p|E| + p) \leq C_2$$

(iv) *Il existe $C_3 > 0$ indépendante de n, ω, E telle que pour tous $E, E' \in I$ et tout entier $p \in \{1, \dots, N\}$:*

$$|| \wedge^p A_{n,N}^\omega(E) - \wedge^p A_{n,N}^\omega(E')|| \leq C_3|E - E'|$$

Alors il existe un réel $\alpha > 0$ et une constante $0 < C < +\infty$ tels que :

$$\forall p \in \{1, \dots N\},\ \forall E, E' \in I,\ |\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha$$

Les méthodes pour prouver ce théorème se trouvent au départ dans [CL90] et [KLS90]. Nous nous sommes attaché ici à les écrire en détail, particulièrement en ce qui concerne le rôle des puissances extérieures, qui n'est abordé dans [CL90] que pour le cas des opérateurs discrets à valeurs matricielles. Il nous a donc fallu adapter les preuves à notre cadre. Pour la présentation des résultats nous nous sommes aussi inspiré de [DSS02a], en particulier pour les lemmes de la section 6.2.

Les sections 6.1 et 6.3 de ce chapitre prouvent ce théorème. Dans la section 6.2, on prouve que nos deux modèles vérifient les points (iii) et (iv) de ce théorème, les points (i) et (ii) ayant été vérifiés aux chapitres 4 et 5. Les preuves de la section 6.2 sont inspirées de celles trouvées dans [DSS02a] et ont été étendues au cas des puissances extérieures pour les opérateurs continus à valeurs matricielles.

Chapitre 7

Hölder-continuité de la Densité d'États Intégrée

Sommaire

7.1 Méthode de suspension 138

7.2 Densité d'États Intégrée : définition et existence 140

7.2.1 Une formule de Feynman-Kac à valeurs matricielles 141

7.2.2 Existence de la Densité d'États Intégrée 143

7.3 Une formule de Thouless 150

7.3.1 Fonctions $\mathfrak{m}$ de Weyl-Titchmarsh dans le cadre continu et matriciel 150

7.3.2 Noyau de Green de la résolvante de $H_*(\omega)$ 154

7.3.3 Fonction w de Kotani 157

7.3.4 Preuve d'une formule de Thouless 162

7.4 Hölder-continuité de la Densité d'États Intégrée 166

7.4.1 La transformée de Hilbert 167

7.4.2 Hölder-continuité locale de la Densité d'États Intégrée 168

Dans ce chapitre nous allons étudier la notion de Densité d'États Intégrée. Pour un système donné, on veut pouvoir compter le nombre d'états propres d'énergie plus petit qu'un niveau d'énergie de référence E. Bien sûr, pour les systèmes que l'on étudie ce nombre sera *a priori* infini, dans la mesure où les spectres des opérateurs correspondant sont, soit continus, soit denses. Pourtant cette quantité, peut dans certains cas être mesurée expérimentalement et conduit à des valeurs données, non infinies. Cela alors même que pour les modèles mathématiques correspondant, le décompte "naïf" des états propres d'énergie aboutirait à une valeur infinie. Cela signifie que cette quantité ne correspond pas à la bonne notion physique. En fait, dans les modèles mathématiques, les opérateurs que l'on étudie agissent sur tout l'espace, non borné, tandis que les systèmes réels correspondent à des sous-parties bornées de l'espace. Cette remarque physique nous conduit à définir la notion de Densité d'États Intégrée dans un premier temps sur des sous-parties bornées de l'espace puis à considérer une limite dite "thermodynamique"

où l'on fait tendre vers l'infini le diamètre de ces sous-parties bornées. Le nombre d'états propres d'énergie inférieurs à E de l'opérateur restreint à une telle sous-partie bornée est fini, égal au nombre de valeurs propres plus petites que E comptées avec multiplicité. Ce nombre correspond au nombre maximum d'électrons d'énergie plus petite que E dans le système dans la mesure où deux de ces électrons ne peuvent occuper le même état propre d'énergie du système. C'est le principe d'exclusion de Pauli.

Pour obtenir une quantité finie à la limite, nous sommes amenés à considérer une densité des niveaux d'énergies, soit donc diviser le nombre de niveaux d'énergies plus petit que le niveau de référence par le volume de la sous-partie bornée de l'espace considérée. La Densité d'États Intégrée donne donc le nombre moyen de niveaux d'énergie par unité de volume situés en-dessous d'une énergie donnée E.

Dans un premier temps nous allons définir proprement la notion de Densité d'États Intégrée pour des opérateurs de Schrödinger unidimensionnels continus à potentiel matriciel borné. Puis, nous prouverons une formule de Thouless adaptée à ces opérateurs qui reliera la somme des exposants de Lyapounov à la Densité d'États Intégrée. Nous déduirons alors des résultats de régularité des exposants de Lyapounov prouvés au chapitre 6 un résultat de régularité analogue pour la Densité d'États Intégrée et cela en "inversant" la formule de Thouless à l'aide de la transformée de Hilbert. Avant tout cela nous allons présenter dans une première section, le méthode de suspension de Kirsch, développée dans [Kir85], qui nous permettra d'utiliser tout ce que l'on sait pour les opérateurs $\mathbb{R}$-ergodiques dans notre cadre où les opérateurs sont $\mathbb{Z}$-ergodiques.

7.1 Méthode de suspension

Nous reprenons ici la présentation détaillée de la section 2 de l'article de Kirsch [Kir85].

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ un espace de probabilité complet et $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un groupe de transformations mesurables et préservant la mesure P. Un ensemble $A \in \mathcal{B}$ est dit invariant sous l'action de $\{T_i\}$ lorsque $T_i^{-1}A = A$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Alors $\{T_i\}$ est dit ergodique si tout ensemble invariant est de mesure nulle ou égale à 1. Enfin si $\{T_i\}$ est ergodique, on dit que $x \mapsto V_\omega(x) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$ est $\mathbb{Z}$-transitif (par rapport à $\{T_i\}$) lorsque :

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ V_{T_i\omega}(x) = V_\omega(x - i)$$

De même, si $\{T_y\}_{y\in\mathbb{R}}$ est un groupe de transformations mesurables et préservant la mesure P, on dit que $V_\omega(x)$ est $\mathbb{R}$-transitif (par rapport à $\{T_y\}_{y\in\mathbb{R}}$) lorsque :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ V_{T_y\omega}(x) = V_\omega(x - y)$$

Avec ces définitions on peut commencer à présenter la procédure proprement dite. On se donne $\{T_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un groupe de transformations mesurables et préservant la mesure P sur l'espace $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$. Soit alors $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathsf{P}})$ l'espace produit de $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ par l'espace $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \mu_H)$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ est la tribu borélienne sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et μ_H la mesure

de Haar sur ce même tore :

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathsf{P}}) = (\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P}) \otimes (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \mu_H)$$

On rappelle qu'à toute classe $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on peut associer un unique représentant $\kappa \in [0, 1[$. D'autre part, tout réel x se décompose de manière unique en $x = \bar{x} + \dot{x}$ avec $\bar{x} \in \mathbb{Z}$ et $\dot{x} \in [0, 1[$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ et $\bar{\kappa} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on pose :

$$\tilde{T}_x(\omega, \bar{\kappa}) = (T_{\underline{x+\kappa}}\omega, (x + \kappa)^{\cdot})$$

Remarque 7.1.1. On peut plonger Ω dans $\tilde{\Omega}$ par l'application $\omega \mapsto (\omega, 0)$ et ainsi on "plonge" T_i dans $\tilde{T}_x$ au sens où $T_i \cong \tilde{T}_i|_{\Omega \times \{0\}}$

On a alors la proposition suivante qui fait le lien entre cette construction et la notion d'ergodicité :

Proposition 7.1.2. *Avec les notations introduites on a :*
(i) $\{\tilde{T}_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ *est un groupe de transformations mesurables et préservant la mesure* $\tilde{\mathsf{P}}$.
(ii) *Si* $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *est ergodique alors* $\{\tilde{T}_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ *l'est aussi.*

Démonstration. On se réfère à la preuve de Kirsch dans [Kir85], proposition 1 à la section 2. □

Pour $(x, \omega) \mapsto V_\omega(x)$ donné, on définit :

$$\tilde{V}_{(\omega, \bar{\kappa})} = V_\omega(x - \kappa)$$

On a alors :

Proposition 7.1.3. *On suppose que* $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *est ergodique. Si* V_ω *est* $\mathbb{Z}$*-transitif par rapport à* $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *alors* $\tilde{V}_{\tilde{\omega}}$ *est* $\mathbb{R}$*-transitif par rapport à* $\{\tilde{T}_x\}_{x \in \mathbb{R}}$.

Démonstration. Comme pour la proposition 7.1.2, on se réfère à la preuve de Kirsch dans [Kir85], proposition 2 à la section 2. □

Voyons enfin comment cette procédure s'applique à la définition d'opérateurs ergodiques. Soit $H(\omega)$ un opérateur aléatoire sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. On dit que $H(\omega)$ est $\mathbb{Z}$-ergodique lorsqu'il existe une famille d'opérateurs unitaires U_y définie par $U_y\phi(x) = \phi(x - y)$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ \forall \omega \in \Omega,\ H(T_i\omega) = U_i H(\omega) U_i^*$$

Alors en posant $\tilde{H}((\omega, \kappa)) = U_\kappa H(\omega) U_\kappa$ on définit un opérateur aléatoire sur l'espace de probabilité $\tilde{\Omega}$. Cet opérateur satisfait à la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega},\ \tilde{H}(\tilde{T}_x\tilde{\omega}) = U_x \tilde{H}(\tilde{\omega}) U_x^*$$

Ainsi, $\tilde{H}(\tilde{\omega})$ est $\mathbb{R}$-ergodique.

Dans la suite, notre stratégie sera la suivante. A partir des opérateurs $\mathbb{Z}$-ergodiques $H_P(\omega)$ et $H_B(\omega)$ étudiés aux chapitres 4 et 5, nous considérerons les opérateurs $\mathbb{R}$-ergodiques $\tilde{H}_P(\tilde{\omega})$ et $\tilde{H}_B(\tilde{\omega})$ définis comme ci-dessus. Puis nous appliquerons à ces

deux opérateurs les techniques développées d'une part dans [CL90] et [Car86] pour prouver l'existence de la densité d'état associée à ces deux opérateurs, d'autre part dans [KS88] pour obtenir une formule de Thouless adaptée à notre cadre d'étude. Que ce soit dans [CL90], [Car86] ou [KS88], le cadre d'étude est toujours celui des opérateurs $\mathbb{R}$-ergodiques. Ensuite, nous en déduirons l'existence de la Densité d'États Intégrée et une formule de Thouless pour nos opérateurs initiaux, $H_P(\omega)$ et $H_B(\omega)$, en utilisant les mêmes arguments que Kirsch dans [Kir85] à la section 3 de son article.

7.2 Densité d'États Intégrée : définition et existence

Nous voulons préciser la notion de Densité d'États Intégrée. Après avoir abordé l'aspect physique de cette notion dans l'introduction du chapitre, nous allons maintenant en donner une définition mathématique. Dans toute cette partie, nous allons adapter la preuve d'existence par les intégrales de chemin donnée dans le cas à valeur scalaire dans [CL90] au chapitre 6, section 1.2. Cette approche est bien mieux détaillée dans [Car86] au chapitre V, qui est ici la référence que nous allons suivre.

Comme nous l'avons déjà fait au chapitre 6, nous noterons par $H_*(\omega)$ $(* = P, B)$ pour se référer indistinctement aux opérateurs $H_P(\omega)$ et $H_B(\omega)$ étudiés aux chapitres 4 et 5. Nous reprenons les notations liées à ces modèles, en particulier $(\Omega, \mathcal{B}, \mathsf{P})$ sera un espace de probabilité complet. Nous savons déjà que les opérateurs $H_*(\omega)$ sont autoadjoints et $\mathbb{Z}$-ergodiques. Toute la théorie développée dans [Car86] (tout comme celle développée dans [KS88] que nous utiliserons à la section 7.3) est valable pour des opérateurs $\mathbb{R}$-ergodiques et non pas $\mathbb{Z}$-ergodiques. Mais nous venons de voir comment utiliser la procédure de suspension de W. Kirsch (voir [Kir85]) pour se ramener au cas $\mathbb{R}$-ergodique.

Dans toute la suite, nous allons donc faire l'abus de notation $H_*(\omega) = \tilde{H}_*(\tilde{\omega})$ afin de travailler avec des opérateurs $\mathbb{R}$-ergodiques.

En se référant aux notations de [Car86], on commence par vérifier que notre potentiel $x \mapsto V_\omega(x)$ est dans $K_{1,\mathrm{loc}}$ pour tout ω dans Ω. En effet comme V_ω est borné et 1-périodique on a clairement :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{|x-y|\leq 1} ||V_\omega(y)||\,\mathrm{d}y < +\infty$$

Le fait que V_ω soit borné uniformément pour tout x et tout ω sera une condition très forte ici qui simplifiera certaines parties de preuve par rapport à la version présentée dans [Car86] où les hypothèses faites sur le potentiel scalaire q sont bien plus générales.

Ces remarques préliminaires faites, nous pouvons commencer la construction de la Densité d'États Intégrée. Soit L un réel strictement positif et $D = [-L, L] \subset \mathbb{R}$. On définit alors l'opérateur :

$$H_*^{(D)}(\omega) = -\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{(D)} + V_\omega$$

agissant sur $L^2(D, \mathbb{C}^N)$ avec conditions de Dirichlet au bord de D.

Nous allons commencer par étudier l'opérateur $H_*^{(D)}(\omega)$ et plus précisément montrer que son spectre est discret, formé d'une suite de valeurs propres bornée inférieurement et croissant vers $+\infty$. Pour cela nous allons commencer par étudier le sous-groupe à 1 paramètre associé à l'opérateur auto-adjoint $H_*^{(D)}(\omega)$, soit l'opérateur $\mathrm{e}^{-tH_*^{(D)}(\omega)}$ pour tout $t > 0$, et montrer qu'il est à noyau intégral L^2, donc Hilbert-Schmidt. Nous allons utiliser une formule de Feynman-Kac que nous allons tout de suite détailler.

7.2.1 Une formule de Feynman-Kac à valeurs matricielles

Tout d'abord précisons que dans sa version matricielle, nous reprenons ici la formule de Feynman-Kac prouvée par L.Boulton et A.Restuccia dans [BR05].

Nous allons commencer par poser diverses notations relatives à l'intégrale de chemin dans sa version stochastique, faisant intervenir des mesures de Wiener conditionnelles. Pour une présentation exhaustive et très claire de l'intégrale de chemin et de sa formulation stochastique, nous nous référons ici au livre de G.Roepstorff, [Roe94].

Soit $\mathsf{W} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \geq 0$ on considère la fonction coordonnée :

$$\begin{aligned} X_t \colon \mathsf{W} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathsf{w} &\longmapsto X_t(\mathsf{w}) = \mathsf{w}(t) \end{aligned}$$

Soit alors $\mathcal{W}$ la plus petite σ-algèbre sur W sur laquelle toutes les applications X_t sont mesurables. Puis pour chaque $s \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $W_{s,x}$ la mesure de Wiener, sur l'espace mesurable $(\mathsf{W}, \mathcal{W})$, du mouvement Brownien partant de x au temps s. On notera $\mathbb{E}_{s,x}$ l'espérance associée à cette mesure de Wiener $W_{s,x}$. On peut aussi considérer les mesures de Wiener conditionnelles où l'on fixe l'arrivée du mouvement Brownien à y au temps $t > s$. On note alors $W_{s,x,t,y}$ la mesure de Wiener conditionnelle du mouvement Brownien partant de x au temps s et arrivant en y au temps t. De même qu'auparavant, on note $\mathbb{E}_{s,x,t,y}$ l'espérance associée à cette mesure.

On veut à présent donner une expression du noyau intégral de l'opérateur $\mathrm{e}^{-tH_*(\omega)}$. Ce noyau intégral va faire intervenir les mesures de Wiener que nous venons d'introduire.

Tout d'abord par la formule de Lie-Trotter (voir [Roe94] ou [GJ87]) qui n'est autre qu'une réécriture au premier ordre de la formule de Campbell-Hausdorff qui donne $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$ pour A et B des opérateurs ne commutant pas *a priori* :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N),\ \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)} f = \lim_{n \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \otimes I)\frac{t}{n}} \mathrm{e}^{-V_\omega \frac{t}{n}} \right)^n f \tag{7.1}$$

où la limite est prise au sens de la norme L^2. On a en fait plus fort, la formule de Lie-Trotter nous assure une convergence en norme d'opérateur d'où l'on déduit (7.1).

Dans (7.1) on peut fixer $n \in \mathbb{N}$ dans la limite du membre de droite. Alors, d'après le corollaire 3.1.2, page 47 dans [GJ87], le noyau intégral de

$$\left(\mathrm{e}^{-(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\otimes I)\frac{t}{n}}\mathrm{e}^{-V_\omega\frac{t}{n}}\right)^n$$

est donné par l'intégrale de chemin :

$$\int \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-(\frac{jt}{n}).V_\omega(\mathsf{w}(\frac{jt}{n}))}\ \mathrm{d}W_{0,x,t,y}(\mathsf{w})$$

Mais, lorsque l'on fait tendre n vers l'infini, on retrouve la définition de l'exponentielle ordonnée issue de la théorie de l'intégrale produit de Dyson (voir [DF79]) :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-(\frac{jt}{n}).V_\omega(\mathsf{w}(\frac{jt}{n}))} = \exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(\mathsf{w}(s))\ \mathrm{d}s\right) \tag{7.2}$$

De là, en notant $K_t(x,y)$ le noyau intégral de $\mathrm{e}^{-tH_*(\omega)}$, on a par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)}f(x) = \int_{\mathbb{R}} K_t(x,y)f(y)\,\mathrm{d}x \tag{7.3}$$

avec :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ \forall t>0,\ K_t(x,y) = \int \exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(\mathsf{w}(s))\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}W_{0,x,t,y}(\mathsf{w}) \tag{7.4}$$

On vient donc d'obtenir l'expression du noyau intégral de l'opérateur $\mathrm{e}^{-tH_*(\omega)}$. Voyons comment on peut en déduire l'expression du noyau intégral de l'opérateur $\mathrm{e}^{-tH_*^{(D)}(\omega)}$. Tout d'abord on introduit le réel $T_D(\mathsf{w})$, temps de première sortie de D du chemin w :

$$T_D(\mathsf{w}) = \inf\{t>0,\ X_t(\mathsf{w}) \notin D\} \tag{7.5}$$

On obtient alors, en utilisant les résultats de [Kni81] sur les mouvements browniens tués : $\forall f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N),\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{-tH_*^{(D)}(\omega)}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\int \chi_{\{t<T(D)(\mathsf{w})\}}(\mathsf{w})\exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}W_{0,x,t,y}(\mathsf{w})\,\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}f(y)\,\mathrm{d}y \tag{7.6}$$

où l'on a utilisé la définition $X_s(\mathsf{w}) = \mathsf{w}(s)$. Ainsi on vient de prouver que l'opérateur $\mathrm{e}^{-tH_*^{(D)}(\omega)}$ possède le noyau intégral suivant : $\forall x,y \in \mathbb{R},\ \forall t>0$,

$$K_t^{(D)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(\int \chi_{\{t<T(D)(\mathsf{w})\}}(\mathsf{w})\exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}W_{0,x,t,y}(\mathsf{w})\ \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\right) \tag{7.7}$$

Le domaine D est borné et ce noyau est continu en (x,y) pour $t>0$ fixé. De plus t est borné par $T_D(\mathsf{w})$ dans cette expression. Donc, $K_t^{(D)}(x,y)$ est dans $L^2(D^2,\mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C}))$ pour tout $t>0$. Mais alors on en déduit que pour tout $t>0$, l'opérateur $\mathrm{e}^{-tH_*^{(D)}(\omega)}$ étant à

noyau de carré intégrable, il est Hilbert-Schmidt sur $L^2(D, \mathbb{C}^N)$. Ainsi son spectre est de la forme :

$$\{\mathrm{e}^{-t\lambda_j^{(D)}(\omega)},\ j \geq 0\}$$

avec $(\lambda_j^{(D)}(\omega))_{j\geq 0}$ une suite de réels croissante vers $+\infty$ et bornée inférieurement. Cette suite n'est autre que le spectre de $H_*^{(D)}(\omega)$. Le fait que ce spectre soit discret et borné inférieurement va être essentiel pour définir la Densité d'États dans la section suivante.

7.2.2 Existence de la Densité d'États Intégrée

On rappelle que l'on veut définir une quantité qui exprime le nombre moyen de niveaux d'énergies de $H_*(\omega)$ par unité de volume. Essayer directement de compter les niveaux d'énergies pour $H_*(\omega)$ n'a aucun sens dans la mesure où le nombre obtenu serait infini. On restreint donc $H_*(\omega)$ à D et on définit $H_*^{(D)}(\omega)$ comme précisé auparavant, puis on considère la limite thermodynamique associée à la mesure de comptage des niveaux d'énergies de $H_*^{(D)}(\omega)$ inférieurs à un niveau donné E.

On vient de voir $H_*^{(D)}(\omega)$ a un spectre discret borné inférieurement et tendant vers $+\infty$:

$$-\infty < \lambda_0^{(D)}(\omega) \leq \ldots \leq \lambda_j^{(D)}(\omega) \leq \ldots$$

On définit alors la mesure de comptage associée à ces valeurs propres :

$$\mathfrak{n}_{D,\omega} = \frac{1}{2L} \sum_{j\geq 0} \delta_{\lambda_j^{(D)}(\omega)} \tag{7.8}$$

où $\frac{1}{2L}$ n'est autre que le "volume" de D.

La fonction de répartition associée à cette mesure est donnée par :

$$\forall E \in \mathbb{R},\ N_{D,\omega}(E) = \frac{1}{2L}\mathrm{card}\{\text{valeurs propres de } \mathrm{H}_*^{(\mathrm{D})}(\omega) \leq \mathrm{E}\} \tag{7.9}$$

On cherche à montrer que cette fonction de répartition possède une limite lorsque "$D \to \mathbb{R}$", i.e. $L \to +\infty$. Cette limite éventuelle, notée $N(E)$, est la Densité d'États Intégrée associée à l'opérateur $H_*(\omega)$. Par ergodicité de $H_*(\omega)$ cette limite ne dépendra pas de ω et nous verrons aussi que cette limite ne dépend pas du choix des conditions aux bords fait au moment de définir l'opérateur $H_*^{(D)}(\omega)$. En fin de section nous repréciserons tout cela.

Pour prouver l'existence de cette limite à la suite de fonctions de répartition des mesures $\mathfrak{n}_{D,\omega}$, il suffit de prouver la convergence vague de la suite des mesures $\mathfrak{n}_{D,\omega}$ vers une mesure limite $\mathfrak{n}$, que l'on appelle la Distribution d'États. Pour prouver cette convergence vague, nous allons prouver que la transformée de Laplace de $\mathfrak{n}_{D,\omega}$ converge vers une certaine quantité qui ne sera autre que la transformée de Laplace d'une mesure que nous noterons $\mathfrak{n}$ et que nous appellerons la Densité d'États. La Densité d'États Intégrée sera la fonction de répartition de la Densité d'États, d'où l'usage de l'adjectif "Intégrée". Plus précisément nous allons prouver le résultat suivant :

Théorème 7.2.1. *La suite de mesures* $(\mathfrak{n}_{D,\omega})$ *converge vaguement vers une mesure* $\mathfrak{n}$ *indépendante de* ω *lorsque* $D \to \mathbb{R}$ *(i.e.,* $L \to +\infty$*) pour* P*-presque tout* $\omega \in \Omega$*. De plus la transformée de Laplace de cette mesure limite* $\mathfrak{n}$ *est donnée par :*

$$L(\mathfrak{n})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int \int_{\Omega} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\mathrm{ord}} \left(- \int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}W_{0,0,t,0}(\mathsf{w}) \tag{7.10}$$

Dans la preuve de cette proposition, nous allons avoir besoin du lemme technique suivant qui donne l'expression de la trace d'un opérateur à noyau intégral matriciel. Pour l'obtenir nous avons adapté la preuve du théorème 3.9, page 35 du livre de B.Simon, [Sim05]. B.Simon prouve là une formule de trace pour des opérateurs à noyaux intégraux à valeurs scalaires.

Lemme 7.2.2. *Si* H *est un opérateur autoadjoint agissant sur* $L^2(D, \mathbb{C}^N)$ *et si l'opérateur* e^{-tH} *est de noyau intégral matriciel* $K_t(x, y)$ *et de classe trace, alors :*

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-tH}) = \int_D \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} K_t(x, x)\, \mathrm{d}x$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $m \in \{0, \ldots, 2^n\}$ et $k \in \{1, \ldots, N\}$. Pour ces indices on introduit la fonction :

$$\phi_{n,m,k}(x) = \begin{cases} {}^t(0, \ldots, 0, 2^{\frac{n}{2}}, 0, \ldots, 0) & \text{si} \quad -L.\frac{m-1}{2^n} \leq x < L.\frac{m}{2^n} \\ {}^t(0, \ldots, 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

où le $2^{\frac{n}{2}}$ est à la k-ième place. Alors la famille $\{\phi_{n,m,k}\}_{n\in\mathbb{N}, m\in\{0,\ldots,2^n\}, k\in\{1,\ldots,N\}}$ est une base hilbertienne de $L^2(D, \mathbb{C}^N)$. Soit P_n la projection sur l'espace engendré par les $2^n N$ fonctions, $\phi_{n,m,k}$ pour n fixé et $m \in \{0, \ldots, 2^n\}$, $k \in \{1, \ldots, N\}$. On peut construire une base hilbertienne $(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ de $L^2(D, \mathbb{C}^N)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \psi_1, \ldots, \psi_{2^n N} \in \mathrm{Im}\ P_n$$

Il vient par indépendance de la trace par rapport au choix de la base hilbertienne (voir *Th* 3.1, page 31 dans [Sim05]) :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-tH}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Tr}(P_n \mathrm{e}^{-tH} P_n)$$

Mais : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(P_n \mathrm{e}^{-tH} P_n) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{2^n} (\phi_{n,m,k}, \mathrm{e}^{-tH} \phi_{n,m,k})$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{2^n} \int_D \int_D {}^t\overline{\phi_{n,m,k}(x)} K_t(x, y) \phi_{n,m,k}(y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sum_{m=1}^{2^n} \int \int_{-L.\frac{m-1}{2^n} \leq x, y < L.\frac{m}{2^n}} 2^{\frac{n}{2}}.2^{\frac{n}{2}} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N (0, \ldots, 1, \ldots, 0) K_t(x, y) {}^t(0, \ldots, 1, \ldots, 0) \right)}_{\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}(K_t(x,y))} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2^n \sum_{m=1}^{2^n} \int \int_{-L.\frac{m-1}{2^n} \leq x, y < L.\frac{m}{2^n}} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}(K_t(x, y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Alors, par uniforme continuité de K_t continu sur le compact $D \times D$, cette quantité admet la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n \sum_{m=1}^{2^n} \int\int_{-L.\frac{m-1}{2^n}\leq x,y<L.\frac{m}{2^n}} \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}(K_t(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}(K_t(x,x))\,\mathrm{d}x \quad (7.11)$$

Ceci achève la preuve de ce lemme. □

Nous allons maintenant prouver la proposition 7.2.1 et nous servir du lemme 7.2.2 pour exprimer la transformée de Laplace de $\mathfrak{n}_{D,\omega}$.

Preuve du théorème 7.2.1. On commence par exprimer la transformée de Laplace de la mesure $\mathfrak{n}_{D,\omega}$ à l'aide du noyau intégral (7.7) calculé à la section 7.2.1 et du lemme 7.2.2 que nous venons de prouver. On fixe $t > 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
L(\mathfrak{n}_{D,\omega})(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-Et}\mathfrak{n}_{D,\omega}(E) \\
&= \frac{1}{|D|}\sum_{j\geq 0} \mathrm{e}^{-\lambda_j^{(D)}(\omega)t} \\
&= \frac{1}{|D|}\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-tH_*^{(D)}(\omega)}) \\
&= \frac{1}{|D|}\int_D \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}(K_t(x,x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{|D|}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_D\int \chi_{t<T_D(\mathsf{w})}(\mathsf{w})\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}\exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}W_{0,x,t,x}(\mathsf{w})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Posons :

$$A_D = \frac{1}{|D|}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_D\int \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}\exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}W_{0,x,t,x}(\mathsf{w})\,\mathrm{d}x \quad (7.12)$$

et :

$$B_D = \frac{1}{|D|}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_D\int \chi_{t\geq T_D(\mathsf{w})}(\mathsf{w})\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}\exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}W_{0,x,t,x}(\mathsf{w})\,\mathrm{d}x \quad (7.13)$$

Alors, en faisant tendre D vers $\mathbb{R}$, i.e. $L \to +\infty$, dans (7.12) on obtient par le théorème ergodique de Birkhoff :

$$\lim_{L\to+\infty} A_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int\int_\Omega \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}\exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}W_{0,0,t,0}(\mathsf{w}) \quad (7.14)$$

Soit alors $\mathfrak{n}$ la mesure sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$L(\mathfrak{n})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int\int_\Omega \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N}\exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}W_{0,0,t,0}(\mathsf{w}) \quad (7.15)$$

Pour prouver que $\mathfrak{n}_{D,\omega}$ converge vaguement vers $\mathfrak{n}$ il nous reste à prouver que $B_D \to 0$ et, plus technique, que l'on peut rendre ces deux convergences vraies sur un ensemble

Ω_1 de mesure pleine indépendant de t (pour obtenir l'indépendance presque sûre de $\mathfrak{n}$ vis-à-vis de ω). Pour cela on se réfère à la preuve de R.Carmona dans [Car86], théorème $V1$, pages $66-67$. En effet comme V_ω est de fait indépendant de s car constant dans nos deux modèles (4.1) et (5.2), il est bien entendu borné sur $\mathbb{R}$ tout entier. Mais alors la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \Omega \times \mathsf{W} & \to & \mathbb{C} \\ (\omega, \mathsf{w}) & \to & \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\mathrm{ord}} \left(- \int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w})) \right) \end{array} \tag{7.16}$$

est dans tout $L^r(\Omega \times \mathsf{W}, \mathsf{P} \otimes W_{0,0})$ pour tout $r > 1$ et tout $t > 0$ fixé. En particulier il existe un $r > 2$ tel qu'elle soit dans $L^r(\Omega \times \mathsf{W}, \mathsf{P} \otimes W_{0,0})$ pour tout $t > 0$ fixé. Mais alors cette fonction à les mêmes propriétés que les hypothèses faites sur :

$$\begin{array}{rcl} \Omega \times \mathsf{W} & \to & \mathbb{C} \\ (\omega, \mathsf{w}) & \to & \exp \left(- \int_0^t q^-(X_s(\mathsf{w}), \omega) \right) \end{array} \tag{7.17}$$

dans [Car86], théorème $V1$. Et la fonction (7.16) joue le même rôle dans notre preuve que celui joué par (7.17) dans la preuve du théorème $V1$ de [Car86]. On peut très précisément recopier la preuve de Carmona dans [Car86] pour terminer la preuve de notre proposition. Nous en donnons juste ici les grandes lignes.

Les ingrédients de cette preuve sont tout d'abord l'inégalité de Hölder, puis un lemme ergodique maximal assurant qu'un certain sup sur D est bien intégrable ce qui associé à une nouvelle utilisation du théorème de Birkhoff nous assure la nullité de la limite de B_D. Ensuite pour l'uniformité par rapport à $t > 0$ de ces limites, on montre que la famille de fonctions $\{L(\mathfrak{n}_{D,\omega})(.)\}_D$ est équicontinue ce qui provient de l'existence d'un processus croissant $\{\mathfrak{a}(E, \omega), E \in \mathbb{R}\}$ tel que :

$$\forall E \in \mathbb{R},\ \sup_D \mathfrak{n}_{D,\omega}(E) \leq \mathfrak{a}(E, \omega) \tag{7.18}$$

et :

$$\forall t > 0,\ \forall \omega \in \Omega,\ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-Et} \mathfrak{a}(E, \omega) dE < +\infty \tag{7.19}$$

En fait dans [Car86], page 68 on prouve qu'en posant $\mathfrak{a}(E, \omega) = \sup_D \mathfrak{n}_{D,\omega}(E)$, la condition (7.19) est aussi satisfaite. Cela résulte encore du lemme ergodique maximal précité et d'une estimation sur les mesures de Wiener conditionnelles. □

Remarque 7.2.3. La preuve que l'on vient de présenter aurait tout aussi bien pu s'adapter directement à l'opérateur $\mathbb{Z}$-ergodique initial $H_*(\omega)$ sans avoir besoin de faire appel à la procédure de suspension présentée à la section 7.1. Les seules modifications à faire auraient été de remplacer le domaine D par son intersection avec $\mathbb{Z}$ et les intégrales sur D par des sommes discrètes sur $D \cap \mathbb{Z}$. Mais dans la section suivante nous ne pourrons plus nous permettre d'aussi simples modifications pour passer du cas $\mathbb{R}$-ergodique au cas $\mathbb{Z}$-ergodique et la méthode de suspension prendra tout son sens.

Remarque 7.2.4. Dans cette preuve il reste une vérification que nous ne ferons pas. Cela consiste en l'indépendance de la limite $\mathfrak{n}$ vis-à-vis du choix des conditions aux bords de Dirichlet. Ce choix se reflète dans le fait de "tuer" le mouvement Brownien

dès sa sortie de D en introduisant la fonction caractéristique $\chi_{\{t<T(D)(\mathsf{w})\}}$ de l'ensemble $\{t < T(D)(\mathsf{w})\}$ dans l'expression (7.6). Si on avait imposé des conditions de Neumann aux bords de D, on aurait dû changer cette partie de l'expression (7.6) avec une autre fonction indicatrice correspondant à ce qu'on appelle un Brownien réfléchi. Tout cela est expliqué dans le chapitre 4 de [Kni81].

Nous allons maintenant relier la mesure $\mathfrak{n}$ que l'on vient de construire à la mesure spectrale de $H_*(\omega)$, soit $E_{H_*(\omega)}(.)$.

Proposition 7.2.5. *Pour toute fonction f continue à support compact sur $\mathbb{R}$, positive et telle que $||f||_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, on note M_f l'opérateur maximal de multiplication par f. Alors pour tout borélien borné A de $\mathbb{R}$, l'opérateur $M_f E_{H_*(\omega)}(A) M_f$ est de classe trace P-presque sûrement en ω. De plus on a :*

$$\mathfrak{n}(A) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_f E_{H_*(\omega)}(A) M_f)) \tag{7.20}$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance associée à la mesure P.

Démonstration. Tout d'abord on rappelle que le potentiel V_ω étant borné en norme d'opérateur, les opérateurs $\mathrm{e}^{-tH_*(\omega)}$ sont bornés et à noyau intégral donnés par la formule (7.4). Ils sont de plus, de classe trace. Soit alors $\{f_k\}_{k\geq 1}$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. Si on se donne un borélien borné A de $\mathbb{R}$, il existe des constantes strictement positives C et t telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \chi_A(x) \leq C\mathrm{e}^{-tx}$. Il vient alors pour f comme dans l'énoncé :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 1} < (M_f E_{H_*(\omega)}(A) M_f) f_k, f_k >\right) \leq C\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 1} < \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)}(f f_k), (f f_k) >\right) \tag{7.21}$$

par le théorème spectral appliqué à $\chi_A(x)$ et l'inégalité précitée, ainsi que par le fait que M_f est auto-adjoint puisque f est réelle. Or la somme dans le membre de droite de cette inégalité n'est autre que la trace de l'opérateur $M_f \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)} M_f$ et donc :

$$C\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 1} < \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)}(f f_k), (f f_k) >\right) = C\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(M_f \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)} M_f)\right)$$

Mais alors en utilisant la preuve du lemme 7.2.2 il vient, puisque l'intégration sur $\mathbb{R}$ revient à une intégration sur un D pour L assez large de sorte que D contiennent le support de f :

$$C\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(M_f \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)} M_f)\right) = C\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} K_t(x,x)\ \mathrm{d}x\right)$$

avec K_t le noyau donné par (7.6) dans le cas où $D = \mathbb{R}$, i.e. $T_D = +\infty$. On a alors en utilisant la $\mathbb{R}$-ergodicité de l'opérateur $H_*(\omega)$ à la troisième ligne :

$$C\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} K_t(x,x)\ \mathrm{d}x\right)$$

$$\begin{aligned}
&= C\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \int \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(\mathsf{w}(s))\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}W_{0,x,t,x}(\mathsf{w})\ \mathrm{d}x\right)\\
&= C\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \int \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(x+\mathsf{w}(s))\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}W_{0,0,t,0}(\mathsf{w})\ \mathrm{d}x\right)\\
&= C\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \int \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(\mathsf{w}(s))\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}W_{0,0,t,0}(\mathsf{w})\ \mathrm{d}x\right)\\
&= C\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathbb{E}\left(\int \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(\mathsf{w}(s))\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}W_{0,0,t,0}(\mathsf{w})\right)
\end{aligned}$$

Et cette dernière quantité est finie par le résultat du théorème 7.2.1. Ainsi on vient de montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 1} < (M_f E_{H_*(\omega)}(A) M_f) f_k, f_k >\right)$$

$$\leq C\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathbb{E}\left(\int \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\mathrm{ord}}\left(-\int_0^t V_\omega(\mathsf{w}(s))\ \mathrm{d}s\right)\ \mathrm{d}W_{0,0,t,0}(\mathsf{w})\right) < +\infty \tag{7.22}$$

Donc l'opérateur $M_f E_{H_*(\omega)}(A) M_f$ est de classe trace pour P-presque tout $\omega \in \Omega$. Mais cela prouve aussi que le membre de droite dans la formule (7.20) définit une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}$. On peut alors calculer la transformée de Laplace de cette mesure pour obtenir par le théorème spectral :

$$L(\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_f E_{H_*(\omega)}(.) M_f)))(t) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_f \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)} M_f)) \tag{7.23}$$

ceci pour tout f continue à support compact dans $\mathbb{R}$, positive et de norme $L^2(\mathbb{R})$ égale à 1. Or le calcul que l'on vient de faire prouve que $\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_f \mathrm{e}^{-tH_*(\omega)} M_f))$ n'est autre que la transformée de Laplace $\mathfrak{n}$ d'après (7.10) donné au théorème 7.2.1. Ainsi on vient de prouver que :

$$L(\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_f E_{H_*(\omega)}(.) M_f)))(t) = L(\mathfrak{n})(t)$$

Et donc ces deux mesures sont égales :

$$\mathfrak{n}(A) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_f E_{H_*(\omega)}(A) M_f))$$

pour tout borélien borné A de $\mathbb{R}$ et toute fonction f continue, à support compact dans $\mathbb{R}$, positive et de norme $L^2(\mathbb{R})$ égale à 1, ce qui est l'assertion voulue. □

Nous avons donc prouvé dans cette partie l'existence de la Densité d'États Intégrée pour nos modèles (4.1) et (5.2) ainsi qu'une expression reliant la Densité d'États à la mesure spectrale des opérateurs étudiés. Nous pouvons résumer nos résultats dans le théorème suivant :

Théorème 7.2.6. *On considère les deux opérateurs $H_*(\omega)$ pour $* = P, B$. Si D est l'intervalle $[-L, L]$ alors la limite :*

$$\lim_{L\to+\infty} \frac{1}{2L}\mathrm{card}\{\text{valeurs propres de } \mathrm{H}_*^{(\mathrm{D})}(\omega) \leq \mathrm{E}\} = N_*(E)$$

existe pour tout $E \in \mathbb{R}$. Elle est indépendante de ω P-presque sûrement, ainsi que des conditions aux bords choisies pour définir l'opérateur restreint $H_*^{(D)}(\omega)$. La Densité d'États Intégrée $N_*(E)$ est la fonction de répartition d'une mesure $\mathfrak{n}(E)$ dont la transformée de Laplace est donnée par :

$$L(\mathfrak{n})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int \int_\Omega \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\mathrm{ord}} \left(- \int_0^t V_\omega(X_s(\mathsf{w}))\, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}W_{0,0,t,0}(\mathsf{w})$$

De plus cette mesure vérifie :

$$\mathfrak{n}(A) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_f E_{H_*(\omega)}(A) M_f))$$

pour tout borélien borné A de $\mathbb{R}$ et toute fonction f continue, à support compact dans $\mathbb{R}$, positive et de norme $L^2(\mathbb{R})$ égale à 1. $E_{H_*(\omega)}(.)$ désigne la mesure spectrale associée à $H_*(\omega)$.

Remarque 7.2.7. La fonction N étant une fonction de répartition associée à une mesure, elle est croissante. De plus on peut alors la supposer continue à droite dans la mesure où elle admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite et qu'en tant que fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ elle admet un ensemble au plus dénombrable de discontinuités. On peut montrer plus précisément (voir [Car86] proposition V.2, la preuve est identique dans notre cadre) que le support de la Densité d'États est égale au spectre presque sûr de $H_*(\omega)$.

Remarque 7.2.8. Dans le cas des opérateurs $\tilde{H}_*(\omega)$, $\mathbb{R}$-ergodiques construit à partir des opérateurs $H_*(\omega)$, $\mathbb{Z}$-ergodiques, ce théorème provient des résultats prouvés au théorème 7.2.1 et à la proposition 7.2.5. Nous rappelons que tout au long de cette partie nous avons fait l'abus de notations : $\tilde{H}_*(\tilde{\omega}) = H_*(\omega)$. Cela est pleinement justifié dans la mesure où les techniques de W.Kirsch dans [Kir85] s'appliquent ici pour montrer que la Densité d'États Intégrée associée à $\tilde{H}_*(\omega)$ est égale à celle associée à $H_*(\omega)$. De même nous utiliserons à la section suivante le fait que les exposants de Lyapounov associés $\tilde{H}_*(\tilde{\omega})$ sont égaux à ceux associés à $H_*(\omega)$.

Remarque 7.2.9. Les résultats sur une formule de Feynman-Kac à valeurs matricielles donnés dans [BR05] sont valables dans le cadre d'opérateurs agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$. D'autre part la preuve d'existence de la Densité d'États Intégrée donnée dans [Car86] est valable pour des opérateurs agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Dans le cas où $d = 1$ nous avons combiné les résultats de ces deux références pour obtenir le théorème 7.2.6. Nous aurions donc tout aussi bien pu écrire nos résultats dans le cas d'opérateurs agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^N)$ dont le potentiel matriciel serait borné comme dans le cas des potentiels V_ω des $H_*(\omega)$. Les preuves auraient été identiques. La méthode de suspension décrite dans [Kir85] est aussi valable pour des opérateurs $\mathbb{Z}^d$-ergodiques.

Maintenant que nous avons défini et précisé la notion de Densité d'États Intégrée et prouvé son existence pour les opérateurs $H_*(\omega)$, nous allons chercher à faire le lien entre cette quantité et les exposants de Lyapounov associés à ces opérateurs. C'est l'objet de la prochaine section.

7.3 Une formule de Thouless

Dans cette section nous allons prouver une formule reliant les exposants de Lyapounov à la Densité d'États Intégrée. De telles formules existent déjà dans plusieurs cadres et sont appelées formules de Thouless en référence au physicien David Thouless qui le premier à énoncé une telle relation. Pour l'article original de Thouless on peut consulter [Tho72] qui traite du cas unidimensionnel discret. Pour une version adaptée aux opérateurs de Schrödinger continus à valeurs scalaires, on peut regarder [AS83] ; pour une version adaptée aux cas discrets à valeurs matricielles une bonne référence est [KS88]. Cette dernière référence contient en substance tout ce qu'il faut pour prouver une formule de Thouless dans le cas continu à valeurs matricielles. Nous suivrons d'ailleurs principalement cet article ([KS88]) et nous le compléterons par des arguments d'analyse harmonique issus de [Kot85b] développés au départ dans le cas continu à valeurs scalaires. L'article de Kotani [Kot85b] est antérieur à [KS88] et à notre connaissance l'utilisation conjointe des résultats de ces deux articles n'avait pas encore été faite.

Nous allons donc commencer par suivre [KS88] en rédigeant les preuves en détails, puis nous verrons comment compléter cela en utilisant [Kot85b] pour obtenir une formule de Thouless adaptée à nos besoins dans la section 7.4.

Dans la suite, V_ω désigne V_0 pour $H_P(\omega)$ et V_ω pour $H_B(\omega)$.

7.3.1 Fonctions $\mathfrak{m}$ de Weyl-Titchmarsh dans le cadre continu et matriciel

Notre premier résultat sera de prouver l'existence de solutions du système différentiel $H_*(\omega)u = Eu$ qui soient L^2 en $+\infty$ ou $-\infty$. On note $\mathbb{C}_+$ le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im} z > 0\}$ et $\mathbb{C}_-$ le demi-plan $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im} z < 0\}$. On fixe $\omega \in \Omega$. Alors pour $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ on définit :

$$J_+(H_*(\omega), E) = \{f \text{ localement dans } D(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}) \mid H_*(\omega)f = Ef \text{ et } \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

et

$$J_-(H_*(\omega), E) = \{f \text{ localement dans } D(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}) \mid H_*(\omega)f = Ef \text{ et } \int_{-\infty}^0 |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

Avec ces notations on a :

Proposition 7.3.1. (i) $\dim J_+ = N$.
(ii) *Si $f \neq 0$ est dans J_+ alors :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0,$ et $f'(x) \neq 0$.
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, *les applications :*

$$\begin{array}{rcl} J_+ & \to & \mathbb{C}^N \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} J_+ & \to & \mathbb{C}^N \\ f & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

sont des bijections.

Démonstration. On suit la preuve du théorème 2.1 page 405 dans [KS88]. On note $D_P = C_0^\infty(]0,+\infty[) \cap (D(H_{\omega_1}) \oplus D(H_{\omega_2}))$ et $D_B = C_0^\infty(]0,+\infty[)$. Pour le premier point, posons $A_\omega = H_*(\omega)|D_*$ vu comme un opérateur symétrique sur $L^2(]0,+\infty[)$. Alors comme $H_*(\omega)$ est autoadjoint, J_+ est exactement le noyau $\ker(A_\omega^* - E)$. Et donc $\dim\ker(A_\omega^* - E)$ est l'indice de déficience de A_ω^*. Étant donné que V_ω est borné, si $A_{0,\omega} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|D_*$, alors :

$$\dim\ker(A_\omega^* - E) = \dim\ker(A_{0,\omega}^* - E) = N$$

car $f \in \ker(A_{0,\omega}^* - E)$ est équivalent à $-f'' - Ef = 0$ et en résolvant explicitement cette équation on obtient une base de N solutions. Finalement $\dim J_+ = N$.
(ii) Pour $E, E' \in \mathbb{C}_+$, soient u, v résolvant respectivement $H_*(\omega)u = Eu$ et $H_*(\omega)v = E'v$. Alors un simple calcul conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(< u'(x), v(x) > - < u(x), v'(x) >) = (E' - \bar{E}) < u(x), v(x) >$$

et par intégration :

$$< u'(y), v(y) > - < u(y), v'(y) > -(< u'(x), v(x) > - < u(x), v'(x) >) = (E' - \bar{E}) \int_x^y < u(t), v(t) > \mathrm{d}t \tag{7.24}$$

Comme V_ω est réel, si $H_*(\omega)u = Eu$ alors $H_*(\omega)\bar{u} = \bar{E}\bar{u}$ et cela amène au fait que le wronskien est constant :

$$< \bar{u}'(x), v(x) > - < \bar{u}(x), v'(x) > \text{ est constant}$$

Or si $u \in J_+$ alors $u'' = (V_\omega - E)u \in L^2$ en $+\infty$. Ainsi $u' \in L^2$ et $(|u'|^2)' \in L^1$. On en déduit que $u' \to 0$ en $+\infty$. De façon similaire $u \to 0$ en $+\infty$, et donc en prenant $v = u$ et $y \to +\infty$ dans (7.24), on a :

$$2\mathrm{Im} < u(x), u'(x) >= 2\mathrm{Im}E \int_x^\infty < u(t), u(t) > \mathrm{d}t \tag{7.25}$$

Donc si $u(x) = 0$ ou $u'(x) = 0$ alors $u = 0$ sur $[x, +\infty[$ et donc sur tout $\mathbb{R}$ par Cauchy-Lipschitz. Ainsi nous avons prouvé le point (ii).
(iii) D'après (ii), les deux applications sont injectives et comme par le point (i), $\dim J_+ = N = \dim \mathbb{C}^N$, ce sont des bijections (linéaires). □

Cette proposition nous permet de définir des applications à valeurs matricielles qui résolvent le système $H_*(\omega)u = Eu$.

Corollaire 7.3.2. *Il existe une unique fonction à valeur dans* $\mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$ *, soit* $x \mapsto F_+(x,E)$ *(respectivement* $x \mapsto F_-(x,E)$*), vérifiant :*

$$-F_+'' + V_\omega F_+ = EF_+,\ F_+(0,E) = I,\ \text{et} \int_0^\infty ||F_+(x,E)||^2 dx < +\infty$$

et respectivement :

$$-F_-'' + V_\omega F_- = EF_-,\ F_-(0,E) = I,\ \text{et} \int_{-\infty}^0 ||F_-(x,E)||^2 dx < +\infty$$

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_N$ la base canonique de $\mathbb{C}^N$. D'après la proposition 7.3.1 le système différentiel $-f'' + V_\omega f = Ef$ possède une unique solution $f_{i,+}$ telle que $f_{i,+}(0) = e_i$ et $\int_0^\infty |f_{i,+}(x)|^2 dx < +\infty$. Alors $F_+ e_i = f_{i,+}$ détermine F_+.
On fait de même pour définir F_-. □

Remarque 7.3.3. D'après le point (iii) de la proposition 7.3.1 , pour tout x, les matrices $F_\pm(x,E)$ sont inversibles.

Définition 7.3.4. Pour $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ on définit les fonctions $\mathfrak{m}$ de Weyl-Titchmarsh, notée M_+ et M_-, par :

$$M_+(E) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_+(x,E)|_{x=0} \text{ et } M_-(E) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_-(x,E)|_{x=0}$$

Remarque 7.3.5. $M_+(E)$ est entièrement déterminée par la relation $b = M_+(E)a$, a donné, où $b \in \mathbb{C}^N$ est l'unique vecteur tel qu'il existe une solution $u \in J_+$ avec $u(0) = a$ et $u'(0) = b$.

Notation : On définit le translaté de V_ω par x, soit $T_x V_\omega$, par : $\forall y \in \mathbb{R},\ T_x V_\omega(y) = V_\omega(x+y)$.

Quand il sera nécessaire d'expliciter la dépendance de $F_\pm$ et $M_\pm$ en V_ω nous utiliserons les notations $F_\pm(x,E,V_\omega)$ et $M_\pm(E,V_\omega)$.

Dans la proposition suivante, nous allons expliciter les premières propriétés de ces fonctions m.

Proposition 7.3.6. *Pour* $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ *on a :*

(i) $(\mathrm{Im}E)^{-1}\mathrm{Im}M_+(E) = \int_0^{+\infty} F_+(x,E)^* F_+(x,E)dx$.

(ii) $F_+(x,E,T_yV_\omega)F_+(y,E,V_\omega) = F_+(x+y,E,V_\omega)$.

(iii) $F_+'(x,E,V_\omega) = M_+(E,T_xV_\omega)F_+(x,E,V_\omega)$.

(iv) $\pm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}M_\pm(E,T_xV_\omega) = V_\omega(x) - E - M_\pm(E,T_xV_\omega)^2$.

(v) $M_\pm$ *est symétrique, i.e. :* $\forall a,b \in \mathbb{C}^N,\ <\bar{b}, M_\pm a> = <\overline{M_\pm b}, a>$.

(vi) $M_\pm(\bar{E}, V_\omega) = \overline{M_\pm(E, V_\omega)}$

Démonstration. (i) On écrit la relation (7.25) pour $u = F_+a$ avec $a \in \mathbb{C}^N$:

$$2\mathrm{Im} < F_+(x,E)a, (F_+(x,E)a)' >= 2\mathrm{Im}E \int_0^\infty ||F_+(t,E)a||^2 \,\mathrm{d}t$$

i.e. :

$$(\mathrm{Im}E)^{-1}\mathrm{Im} < a, F_+(x,E)^* F_+(x,E)'a >= \int_0^\infty < a, F_+(t,E)^* F_+(t,E)a > \,\mathrm{d}t$$

Si on prend $x = 0$ on obtient :

$$\forall a \in \mathbb{C}^N,\ < a, (\mathrm{Im}E)^{-1}\mathrm{Im}(I^* M_+(E)a) >= \int_0^\infty < a, F_+(t,E)^* F_+(t,E)a > \,\mathrm{d}t$$

Et le point (i) est prouvé.

(ii) Pour $a \in \mathbb{C}^N$, $F_\pm(x, E, V_\omega)a$ est l'élément $u \in J_\pm$ tel que $u(0) = a$ et $F_\pm(x - y, E, T_y V_\omega)a$ est l'élément u de $J_\pm$ tel $u(y) = a$. Par unicité de u, on obtient (ii).

(iii) D'après (ii) on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_+(y, E, T_x V_\omega)\right) F_+(x, E, V_\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_+(y + x, E, V_\omega)$$

D'où :

$$M_+(E, T_x V_\omega) F_+(x, E, V_\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_+(y + x, E, V_\omega)|_{y=0} = F'_+(x, E, V_\omega)$$

Et la même preuve s'applique pour F_- et M_- en remplaçant $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$ par $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$.

(iv) Par (iii) on peut écrire :

$$M_+(E, T_x V_\omega) = F'_+(x, E, V_\omega)(F_+(x, E, V_\omega))^{-1}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} M_+(E, T_x V_\omega) &= F''_+(x, E, V_\omega)(F_+(x, E, V_\omega))^{-1} + F'_+(x, E, V_\omega)(F_+(x, E, V_\omega)^{-1})' \\
&= V_\omega(x) - E - F'_+(x, E, V_\omega)(F_+(x, E, V_\omega))^{-1} F'_+(x, E, V_\omega)(F_+(x, E, V_\omega))^{-1} \\
&= V_\omega(x) - E - M_+(E, T_x V_\omega)^2
\end{aligned}$$

Et on a la même équation pour M_- avec un signe moins.

(v) Soient $a, b \in \mathbb{C}^N$. Posons $u(x) = F_+(x, E)b$ et $v(x) = F_+(x, E)a$. Le wronskien de u et v est constant, et lorsque $x \to \infty$ on peut montrer comme dans la preuve de (7.25) qu'il tend vers 0. Il est donc nul. Or, pour $x = 0$ ce même wronskien est égal à :

$$< \bar{u}'(0), v(0) > - < \bar{u}(0), v'(0) >=< \overline{M_+ b}, a > - < \bar{b}, M_+ a >= 0$$

(vi) Étant donné que V_ω est symétrique réelle, $F_\pm(x, \bar{E}, V_\omega) = \overline{F_\pm(x, E, V_\omega)}$ et on en déduit la relation (vi). □

Ce sont les principales propriétés des fonctions $\mathfrak{m}$ que nous utiliserons dans la suite. Étudiées en détails dans l'article de Kotani et Simon [KS88], ces fonctions se révèlent avoir d'autres propriétés très intéressantes. Une des plus importantes est que ces fonctions caractérisent le potentiel V_ω. En effet on peut trouver dans [KS88] le théorème suivant (Theorem 4.1) :

Théorème 7.3.7. *Pour un opérateur $H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V$ où V est symétrique réel et borné, $M_+(E)$ détermine le potentiel $\{V(x)\}_{x\geq 0}$ au sens où si V_1 et V_2 sont deux potentiels symétriques réels et bornés et que $M_{1,+}(E) = M_{2,+}(E)$, alors $V_1(x) = V_2(x)$ pour presque tout $x \geq 0$. De même, $M_-(E)$ détermine le potentiel $\{V(x)\}_{x\leq 0}$.*

Cela constitue un résultat intéressant de problème inverse. Les solutions de $Hu = Eu$ au travers des fonctions M_+ et M_- caractérisent le potentiel V. C'est à notre connaissance l'un des premiers résultats de problème inverse pour des opérateurs à potentiel matriciel. Depuis, ces questions de problème inverse pour des opérateurs à valeurs matricielles ont été étudiées très précisément par S.Clark, F.Gesztesy, H.Holden et B.Levitan dans [CGHL00]. Dans le cas des matrices de Jacobi ces mêmes questions ont été étudiées dans [CGR05]. Sur le même sujet on peut se référer aussi à [GKM02] et à [GT00] pour des précisions sur la notion de potentiels sans réflexion et sur les théorèmes de Borg associés. Enfin, tous ces travaux utilisent des techniques expliquées dans l'article très détaillé de F. Gesztesy et E. Tsekanovskii, [GT00], sur les fonctions de Herglotz à valeurs matricielles.

L'importance de ces résultats se retrouve encore si l'on regarde ce qui a été fait pour prouver la positivité de l'exposant de Lyapounov associé à un opérateur d'Anderson-Bernoulli dans [DSS02b]. Les techniques employées dans cet article reposent en partie sur un théorème de Borg dans le cas scalaire que l'on peut trouver initialement dans [Bor46] et précisé dans [DT79]. Une piste possible au départ pour prouver la séparation des exposants de Lyapounov aurait pu être d'utiliser les extensions de ces résultats que l'on trouve dans [CGHL00] et [BGMS03] et d'essayer d'adapter les techniques de [DSS02b]. La démarche adoptée aux chapitres 4 et 5 se basant sur une approche plus algébrique s'est révélée finalement plus fructueuse.

Ces fonctions $\mathfrak{m}$ de Weyl-Titchmarsh sont aussi à la base de la preuve du résultat clé de Kotani et Simon dans [KS88] de caractérisation du spectre absolument continu par les exposants de Lyapounov dans le cas des opérateurs à valeurs matricielles (*Th. 7.2* dans [KS88]). Ce résultat nous a permis de déduire l'absence de spectre absolument continu pour les opérateurs étudiés aux chapitres 4 et 5 comme précisé aux théorèmes 4.2.1, 4.3.1 et 5.3.1.

Nous allons maintenant utiliser ces fonctions $\mathfrak{m}$ ainsi que les autres fonctions introduites dans cette section pour obtenir une expression du noyau de Green de la résolvante de l'opérateur $H_*(\omega)$.

7.3.2 Noyau de Green de la résolvante de $H_*(\omega)$

Tout d'abord, en complément des solutions $F_\pm$ régulières en $\pm\infty$, nous allons introduire des solutions à $H_*(\omega)u = Eu$ avec conditions initiales à l'origine, les mêmes que

dans la définition des matrices de transfert.

Notation : Pour $E \in \mathbb{C}$ soit $U_1(x, E, V_\omega)$ et $U_2(x, E, V_\omega)$ les solutions du système différentiel $H_*(\omega)u = Eu$ vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{array}{ll} U_1(0, E, V_\omega) = I & U_1'(0, E, V_\omega) = 0 \\ U_2(0, E, V_\omega) = 0 & U_2'(0, E, V_\omega) = I \end{array}$$

Et soit U la matrice $2N \times 2N$ définie par :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_1' & U_2' \end{pmatrix}$$

La première propriété de U est que c'est une matrice symplectique :

$$^tUJU = J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{7.26}$$

D'autre part, pour $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ les coefficients de U vérifient :

$$F_\pm(x, E) = U_1(x, E) \pm U_2(x, E) \tag{7.27}$$

Ce qui nous donne une relation liant U, $F_\pm$ et $M_\pm(E)$.
On peut alors transcrire bloc par bloc les deux équations (7.26) et (7.27).

Proposition 7.3.8. (i) $U_1(x)\ ^tU_2(x) = U_2(x)\ ^tU_1(x)$
(ii) $U_1'(x)\ ^tU_2(x) - U_2'(x)\ ^tU_1(x) = -I$
(iii) $U_2(x)\ ^tF_+(x) = F_+(x)\ ^tU_2(x)$
(iv) $U_2'(x)\ ^tF_+(x) - F_+'(x)\ ^tU_2(x) = I$
(v) $F_-(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ ^tF_+(x) = F_+(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ ^tF_-(x)$
(vi) $-F_-'(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ ^tF_+(x) + F_+'(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ ^tF_-(x) = I$

Démonstration. (i) et (ii) sont juste les relations induites blocs par blocs par la relation (7.26). Pour (iii) et (iv) on utilise (7.27) et le point (v) de la proposition 7.3.6 : $^tM_\pm = M_\pm$. D'où : $^tF_+ =^t U_1 + M_+\ ^tU_2$. Alors en utilisant (i) :

$$\begin{aligned} U_2\ ^tF_+ - F_+\ ^tU_2 &= U_2\ ^tU_1 + U_2M_+\ ^tU_2 - (U_1\ ^tU_2 + U_2M_+\ ^tU_2) \\ &= U_2\ ^tU_1 - U_1\ ^tU_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et en utilisant (ii) :

$$\begin{aligned} U_2'\ ^tF_+ - F_+'\ ^tU_2 &= U_2'\ ^tU_1 + U_2'M_+\ ^tU_2 - U_1'\ ^tU_2 - U_2'M_+\ ^tU_2 \\ &= U_2'\ ^tU_1 - U_1'\ ^tU_2 \\ &= I \end{aligned}$$

Pour (v) et (vi), on note tout d'abord que :

$$\begin{aligned} (M_+ + M_-)^{-1} &= (M_+(I + M_+M_-))^{-1} \\ &= (I + M_+M_-)^{-1}M_+^{-1} \\ &= M_-^{-1}(M_-^{-1} + M_+^{-1})^{-1}M_+^{-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$M_-(M_- + M_+)^{-1}M_+ = (M_-^{-1} + M_+^{-1})^{-1} = M_+(M_- + M_+)^{-1}M_- \tag{7.28}$$

Et clairement :

$$(M_- + M_+)^{-1}(M_+ - (-M_-)) = I = -((-M_-) - M_+)(M_+ + M_-)^{-1} \tag{7.29}$$

Alors, en utilisant (7.27) on a :

$$\begin{aligned} F_-(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_+ &= (U_1 - U_2M_-)(M_+ + M_-)^{-1}(\ {}^tU_1 + M_+\ {}^tU_2) \\ &= U_1(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tU_1 - U_2M_-(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tU_1 + \\ &\quad \ldots + U_1(M_+ + M_-)^{-1}M_+\ {}^tU_2 - U_2M_-(M_+ + M_-)^{-1}M_+\ {}^tU_2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} F_+(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_- &= U_1(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tU_1 + U_2M_+(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tU_1 - \\ &\quad \ldots - U_1(M_+ + M_-)^{-1}M_-\ {}^tU_2 - U_2M_+(M_+ + M_-)^{-1}M_-\ {}^tU_2 \end{aligned}$$

Alors d'après (7.28) et (7.29) :

$$\begin{aligned} &F_-(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_+ - F_+(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_- \\ &\quad = -U_2M_-(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tU_1 + U_1(M_+ + M_-)^{-1}M_+\ {}^tU_2 - \\ &\qquad \ldots - U_2M_+(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tU_1 + U_1(M_+ + M_-)^{-1}M_-\ {}^tU_2 \\ &\quad = U_2(-M_-(M_+ + M_-)^{-1} - M_+(M_+ + M_-)^{-1})\ {}^tU_1 + \\ &\qquad \ldots + U_1((M_+ + M_-)^{-1}((M_+ + M_-))\ {}^tU_2 \\ &\quad = -U_2\ {}^tU_1 + U_1\ {}^tU_2 \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

par (i). Et pour (vi) on peut effectuer le même calcul en utilisant (ii) au lieu de (i) à la fin. □

A l'aide de cette proposition, on peut maintenant énoncer le principal résultat de cette section en donnant une expression du noyau de Green de la résolvante de $H_*(\omega)$ qui ne fait intervenir que $F_\pm$ et $M_\pm$.

Proposition 7.3.9. *Soit $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. Alors $(H_*(\omega) - E)^{-1}$ possède un noyau intégral continu, $G_E(x, y, \omega)$, donné par :*

$$G_E(x, y, \omega) = \begin{cases} -F_-(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_+(y) & \text{si} \quad x \leq y \\ -F_+(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_-(y) & \text{si} \quad y \leq x \end{cases}$$

Démonstration. On pose :

$$\widetilde{G_E}(x, y, \omega) = \begin{cases} -F_-(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_+(y) & \text{si} \quad x \leq y \\ -F_+(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_-(y) & \text{si} \quad y \leq x \end{cases}$$

D'après la proposition 7.3.8, (v), pour y fixé, $x \mapsto \widetilde{G_E}(x, y, \omega)$ est continue. Elle est aussi de classe C^1 en dehors de la diagonale $x = y$ et en utilisant le point (vi) de la proposition 7.3.8 il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{G_E}(x,y,\omega)|_{x=y+0}-\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{G_E}(x,y,\omega)|_{x=y-0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-F_+(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_-(y)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-F_-(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_+(y)\right)\\
&= -F'_+(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_-(y) + F'_-(x)(M_+ + M_-)^{-1}\ {}^tF_+(y)\\
&= -I
\end{aligned}$$

De plus, étant donné que les $F_\pm$ sont L^2 en $\pm\infty$, pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{G_E}(x,y,\omega)f(y)dy$$

est dans $L^2(\mathbb{R})$. Or, d'après le calcul précédent, la fonction g vérifie :

$$(H_*(\omega) - E)g = f$$

Comme $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, $H_*(\omega) - E$ est inversible car $H_*(\omega)$ étant autoadjoint, son spectre est inclus dans $\mathbb{R}$. Il s'en suit que $\widetilde{G_E}$ est le noyau intégral recherché :

$$g(x) = (H_*(\omega) - E)^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{G_E}(x,y,\omega)f(y)dy$$

□

Nous allons utiliser cette expression du noyau de Green de la résolvante de $H_*(\omega)$ pour exprimer des propriétés d'une fonction fondamentale que nous allons étudier dans la section suivante, la fonction w de Kotani.

7.3.3 Fonction w de Kotani

La fonction w est introduite par Kotani dans ses travaux sur la caractérisation du spectre absolument continu en fonction des exposants de Lyapounov. Pour le cas des opérateurs de Schrödinger continus et discrets à valeurs scalaires on peut se référer à ses premiers travaux où la fonction w intervient, soit [Kot83], [Kot85c] et [Kot85a]. Son article de référence sur le sujet auquel nous nous référerons constamment, est [Kot85b]. Tous les résultats sur la fonction w dans le cas scalaire y sont présentés en détails dans un cadre cohérent. Puis S.Kotani a développé dans [KS88] une théorie analogue pour le cas qui nous intéresse ici, à savoir celui d'opérateurs de Schrödinger à valeurs matricielles. Nous allons voir qu'en substance, la fonction w de Kotani contient toute l'information qui permet de faire le lien entre la Densité d'États Intégrée et les exposants de Lyapounov. Cela vient du fait que l'on va prouver que cette fonction scalaire contient dans sa partie réelle la somme des exposants de Lyapounov et dans sa partie imaginaire la Densité d'États Intégrée. La formule de Thouless ne sera alors qu'une application de résultats plus généraux d'analyse harmonique présentés dans [Kot85b].

Nous allons tout de suite définir cette fonction w de Kotani et explorer ses propriétés.

Définition 7.3.10. Pour $E \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on définit :

$$w(E) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_+(E) + M_-(E)))$$

On rappelle que la formule :

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\log || \wedge^N (A^\omega_{n,N}(E) \ldots A^\omega_{0,N}(E))||\right)$$

a un sens pour toute valeur $E \in \mathbb{C}$.

Alors la fonction w vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 7.3.11. *Pour $E \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:*
(i) $w(E) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_+(E))) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_-(E)))$
(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E} w(E) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(G_E(0,0,\omega)))$
(iii) $-\mathrm{Re}\ w(E) = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E)$
(iv) $\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\ M_\pm(E,\omega)^{-1})\right) = -\frac{2\mathrm{Re}\ w(E)}{\mathrm{Im}E} = \frac{2(\gamma_1+\ldots+\gamma_N)(E)}{\mathrm{Im}E}$

Démonstration. On suit la preuve du théorème 6.2C dans [KS88], en détaillant un peu plus les arguments quand cela s'avère nécessaire. On pose $M_\pm(x) = M_\pm(E, T_x V_\omega)$. Pour différencier dans les notations la dérivation par rapport à x et celle par rapport à E, on utilisera les notations suivantes : $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et $\dot{} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}$.

On commence par prouver (i). D'après le point (iv) de la proposition 7.3.6 on a :

$$\begin{aligned}(M_+ + M_-)' &= V_\omega(x) - E - M_+^2 - V_\omega(x) + E + M_-^2 \\ &= M_-^2 - M_+^2 \\ &= M_-(M_+ + M_-) - (M_+ + M_-)M_+\end{aligned}$$

Alors :

$$\mathrm{Tr}((M_+ + M_-)') = \mathrm{Tr}(M_-(M_+ + M_-)) - \mathrm{Tr}((M_+ + M_-)M_+)$$

et :

$$\mathrm{Tr}((M_+ + M_-)'(M_+ + M_-)^{-1}) = \mathrm{Tr}((M_-) - \mathrm{Tr}((M_+)$$

Finalement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Tr}\log(M_+ + M_-) = \mathrm{Tr}((M_-) - \mathrm{Tr}((M_+)$$

De là en prenant l'espérance sur Ω on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Tr}\log(M_+ + M_-)\right) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}((M_-)) - \mathbb{E}(\mathrm{Tr}((M_+))$$

D'autre part, par une loi des grands nombres pour des processus stochastiques continus trouvée dans [Doo40] au théorème 3, on a :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Tr}\log(M_+ + M_-)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{Tr}\log(M_+(E,T_xV_\omega)+M_-(E,T_xV_\omega))\right]dx \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\mathrm{Tr}\log(M_+(E,T_TV_\omega)+M_-(E,T_TV_\omega)) - \mathrm{Tr}\log(M_+(E,V_\omega)+M_-(E,V_\omega))\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

car la fonction $\mathrm{Tr}(\log(M_+ + M_-))$ est bornée sur $[0,+\infty[$ d'après la proposition 7.3.6, (iii) et car $F_\pm$ est dans $L^2([0,+\infty[)$ (resp. $L^2(]-\infty,0]))$. Il vient :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}((M_-)) - \mathbb{E}(\mathrm{Tr}((M_+)) = 0$$

et on a prouvé le point (i).

Pour le point (ii) on commence par utiliser la proposition 7.3.6, (iv), pour calculer :

$$
\begin{aligned}
\dot{M}'_+ - \dot{M}'_- &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\left(V_\omega(x) - E - M_+^2 + V_\omega(x) - E - M_-^2\right) \\
&= -2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}(M_+^2 + M_-^2) \\
&= -2 - M_+\dot{M}_+ - \dot{M}_+M_+ - \dot{M}_-M_- - M_-\dot{M}_-
\end{aligned}
$$

Puis on a :

$$\left(\mathrm{Tr}((M_+ + M_-)^{-1}(\dot{M}_+ - \dot{M}_-))\right)' = \mathrm{Tr}\left[((M_+ + M_-)^{-1})'(\dot{M}_+ - \dot{M}_-) + (M_+ + M_-)^{-1}(\dot{M}'_+ - \dot{M}'_-)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Tr}\Big[-(M_+ + M_-)^{-1}(M_+ + M_-)'(M_+ + M_-)^{-1}(\dot{M}_+ - \dot{M}_-) + (M_+ + M_-)^{-1}(-2 - M_+\dot{M}_+ - \dot{M}_+M_+ - \\
&\quad \ldots - \dot{M}_-M_- - M_-\dot{M}_-\Big] \\
&= \mathrm{Tr}\Big[-(M_+ + M_-)^{-1}(M_-(M_+ + M_-) - (M_+ + M_-)M_+)(M_+ + M_-)^{-1}(\dot{M}_+ - \dot{M}_-) - (M_+ + M_-)^{-1}(M_+\dot{M}_+ + \\
&\quad \ldots + \dot{M}_+M_+ + \dot{M}_-M_- + M_-\dot{M}_-)\Big] - 2\mathrm{Tr}(M_+ + M_-)^{-1} \\
&= \mathrm{Tr}\Big[(-(M_+ + M_-)^{-1}M_- - M_+(M_+ + M_-)^{-1})(\dot{M}_+ - \dot{M}_-) - (M_+ + M_-)^{-1}(M_+\dot{M}_+ + \dot{M}_+M_+ + \dot{M}_-M_- + M_-\dot{M}_-)\Big] \\
&\quad -2\mathrm{Tr}(M_+ + M_-)^{-1} \\
&= \mathrm{Tr}\Big[-(M_+ + M_-)^{-1}M_-\dot{M}_+ + (M_+ + M_-)^{-1}M_-\dot{M}_- + (M_+ + M_-)^{-1}\dot{M}_+M_+ - (M_+ + M_-)^{-1}\dot{M}_-M_+ - \\
&\quad \ldots - (M_+ + M_-)^{-1}(M_+\dot{M}_+ + \dot{M}_+M_+ + \dot{M}_-M_- + M_-\dot{M}_-)\Big] - 2\mathrm{tr}(M_+ + M_-)^{-1} \\
&= \mathrm{Tr}\Big[-(M_+ + M_-)^{-1}(M_-\dot{M}_+ + \dot{M}_-M_+ + M_+\dot{M}_+ + \dot{M}_-M_-)\Big] - 2\mathrm{Tr}(M_+ + M_-)^{-1} \\
&= \mathrm{Tr}\Big[-(M_+ + M_-)^{-1}((M_+ + M_-)\dot{M}_+ + \dot{M}_-(M_+ + M_-))\Big] - 2\mathrm{Tr}(M_+ + M_-)^{-1} \\
&= -\mathrm{Tr}(\dot{M}_+ + \dot{M}_-) - 2\mathrm{Tr}(M_+ + M_-)^{-1}
\end{aligned}
$$

Si on en prend l'espérance, il vient :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Tr}((M_+ + M_-)^{-1}(\dot{M}_+ - \dot{M}_-))\right) = -2\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(M_+ + M_-)^{-1}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}((M_+ + M_-)\right)$$

Alors, comme dans la preuve du point (i), par la loi des grands nombres :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Tr}((M_+ + M_-)^{-1}(\dot{M}_+ - \dot{M}_-))\right) = 0$$

Et par définition de w :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E}\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}((M_+ + M_-)\right) = -2\frac{dw}{dE}(E)$$

Puis par la proposition 7.3.9, avec $F_-(0) = F_+(0) = I$:

$$-2\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(M_+ + M_-)^{-1}\right) = 2\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}G_E(0,0,\omega)\right)$$

Finalement, en combinant ces deux égalités :

$$\frac{dw}{dE}(E) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}G_E(0,0,\omega)\right)$$

Nous pouvons alors prouver le point (iii). D'après la proposition 7.3.6 (iii), on a :

$$F'_+F_+^{-1} = M_+$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathrm{Re}\ M_+) &= \mathrm{Tr}\ \mathrm{Re}(F'_+F_+^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}\ \mathrm{Re}(\log F_+)' \\ &= (\log|\det F_+|)'\end{aligned}$$

d'après la relation usuelle : $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$. Or on sait que :

$$\frac{1}{x}\log|\det F_+(x,E)| \xrightarrow[x\to\infty]{} -(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E)$$

d'après la définition de $\gamma_1 + \ldots + \gamma_N$ et la propriété :

$$||\wedge^N A^\omega_{n,N}(E)|| = |\det F_+(n,E)|$$

On peut encore une fois utiliser la loi des grands nombres après avoir pris l'espérance pour obtenir :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(\mathrm{Re}\ M_+(E))\right) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(\log|\det F_+(x,E)|)'dx \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}(\log|\det F_+(T,E)|) \\ &= -(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E)\end{aligned}$$

Et par le point (i) :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(\mathrm{Re}\ M_+(E))\right) = \mathrm{Re}\left(\mathbb{E}(\mathrm{Tr}\ M_+(E))\right) = \mathrm{Re}\ w(E)$$

On a ainsi :

$$-\mathrm{Re}\ w(E) = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E)$$

et on a prouvé le point (iii).

Nous terminons la preuve de la proposition en prouvant le point (iv). Pour cela on sépare la partie réelle et la partie imaginaire de M_+. On pose : $M_+ = X + \mathrm{i}Y$ avec X et Y réelles strictement positives. Alors en prenant la partie imaginaire dans la relation *iv* de la proposition 7.3.6 on obtient :

$$Y' = -\mathrm{Im}E - XY - YX$$

Alors en multipliant par Y^{-1} à droite :

$$Y'Y^{-1} = (-\mathrm{Im}E)Y^{-1} - X - YXY^{-1}$$

D'où en prenant la trace :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(Y'Y^{-1}) &= -\mathrm{Im}E\ \mathrm{Tr}(Y^{-1}) - \mathrm{Tr}(X) - \mathrm{Tr}(X) \\ &= -\mathrm{Im}E\ \mathrm{Tr}(Y^{-1}) - 2\mathrm{Tr}(X) \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\mathrm{Tr}(Y'Y^{-1}) = (\mathrm{Tr}(\log Y))'$$

Alors, comme au point (i), en prenant l'espérance et en appliquant la loi des grands nombres :

$$(\mathrm{Tr}(\log Y))' = 0$$

Et donc :

$$-\mathrm{Im}E\ \mathrm{Tr}(Y^{-1}) - 2\mathrm{Tr}(X) = 0$$

D'où on en déduit :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\ M_\pm(E,\omega)^{-1})\right) = -\frac{1}{\mathrm{Im}E}.\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(\mathrm{Re}\ M_+)) = -\frac{2\mathrm{Re}\ w(E)}{\mathrm{Im}E}$$

par le point (i). La deuxième égalité est juste l'application du point (iii). □

Nous allons utiliser cette proposition pour montrer que w appartient à un espace fonctionnel introduit par Kotani dans [Kot85b]. On commence par définir cet espace fonctionnel. Tout d'abord, soit :

$$\mathcal{H} = \{h \mid h \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}_+ \text{ et } h\ \ \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+\}$$

l'espace des fonctions de Herglotz. Puis on définit le sous-espace de $\mathcal{H}$ sur lequel nous pourrons faire l'analyse harmonique voulue :

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{H} \mid w,\ w',\ -\mathrm{i}w \in \mathcal{H}\}$$

Alors la fonction w de Kotani appartient à cet espace $\mathcal{W}$.

Proposition 7.3.12. *On a : $w \in \mathcal{W}$.*

Démonstration. On commence par vérifier que $w \in \mathcal{H}$. Tout d'abord comme $H_*(\omega)$ est auto-adjoint, son spectre est contenu dans $\mathbb{R}$ et donc $M_+(E)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ainsi que $\mathrm{Tr}(M_+(E))$. De plus d'après la proposition 7.3.6, point (i), on a :

$$\mathrm{Im}\ M_+(E) = (\mathrm{Im}E) \int_0^{+\infty} F_+(x,E)^* F_+(x,E)$$

Donc si $\mathrm{Im}E > 0$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\ M_+(E)) > 0$. Ainsi, $\mathrm{Tr}(M_+(E)) \in \mathcal{H}$. Dans ce cas on a aussi $\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\ M_+(E))) \in \mathcal{H}$. Et donc $w \in \mathcal{H}$.

La deuxième étape consiste à vérifier que $w' \in \mathcal{H}$. On part du point (ii) de la proposition 7.3.11 :

$$w'(E) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(G_E(0,0,\omega))$$

Or, $G_E(0,0,\omega)$ est holomorphe hors du spectre de $H_*(\omega)$, donc en particulier sur $\mathbb{C}_+$ et donc $\mathrm{Tr}(G_E(0,0,\omega))$ l'est aussi. Or, si $\mathrm{Im}E > 0$, alors $\mathrm{Im}\ (H_*(\omega) - E)^{-1} > 0$ (en tant qu'opérateur strictement positif) et donc $\mathrm{Im}\ \mathrm{Tr}(G_E(0,0,\omega)) > 0$. Cette positivité ne change pas en passant à l'espérance sur ω donc :

$$\mathrm{Im}\ w'(E) = \mathrm{Im}\ \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(G_E(0,0,\omega)) > 0$$

Et donc $w' \in \mathcal{H}$.

On montre enfin que $-\mathrm{i}w \in \mathcal{H}$. Tout d'abord, il est clair que $-\mathrm{i}w$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_+$ car w l'est. Puis si $E \in \mathbb{C}_+$ on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(-\mathrm{i}w(E)) &= \mathrm{Im}(\mathrm{Im}\ w(E) - i\mathrm{Re}\ w(E)) \\ &= -\mathrm{Re}\ w(E) \\ &= (\mathrm{Im}E)\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\ M_+(E,\omega)^{-1})) \end{aligned}$$

par le point (iv) de la proposition 7.3.11. Or comme $\mathrm{Im}E > 0$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{Im}\ M_+(E,\omega)^{-1}) > 0$ et donc :

$$\mathrm{Im}(-\mathrm{i}w(E)) > 0$$

Ainsi $-\mathrm{i}w \in \mathcal{H}$.

On a donc prouvé que w, w' et $-\mathrm{i}w$ sont dans $\mathcal{H}$. Donc $w \in \mathcal{W}$. □

Nous allons maintenant voir comment s'articulent les résultats de cette section sur la fonction w de Kotani pour obtenir une formule de Thouless adaptée à notre cadre d'étude à savoir des opérateurs agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$. Cela va consister simplement à voir comment se comporte la fonction w lorsque le complexe E se rapproche de la droite réelle et donc du spectre de $H_*(\omega)$.

7.3.4 Preuve d'une formule de Thouless

Dans cette section nous allons combiner les résultats de la section précédente et de la proposition 7.2.5 prouvée précédemment.

On commence par énoncer une proposition qui fait le lien entre la proposition 7.2.5 et le noyau de Green de la résolvante de $H_*(\omega)$.

Proposition 7.3.13. *Pour tout $E \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:*

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}\ G_E(0,0,\omega)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')}{E'-E}$$

Démonstration. On commence par se donner une fonction f continue à support compact sur $\mathbb{R}$, positive et telle que $||f||_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. On se donne aussi A un borélien borné de $\mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')}{E'-E} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E'-E} \mathrm{d}\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(M_f E_{H_*(\omega)}(]-\infty, E'] \cap A) M_f)\right)$$

d'après la proposition 7.2.5. Mais alors, comme la distribution de Dirac en 0, δ_0, est limite au sens des distributions de fonctions continues à support compact, positives et de normes $L^2(\mathbb{R})$ égales à 1, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')}{E'-E} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E'-E} \mathrm{d}\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(< \delta_0, E_{H_*(\omega)}(]-\infty, E'] \cap A)\delta_0 >)\right)$$

pour tout borélien borné A. Là encore en approchant $\mathbb{R}$ par une suite de boréliens bornés, on prouve par approximation que :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')}{E'-E} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E'-E} \mathrm{d}\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(< \delta_0, E_{H_*(\omega)}(]-\infty, E'])\delta_0 >)\right)$$

Mais alors en utilisant le théorème spectral à la fin :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')}{E'-E} &= \mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E'-E} \mathrm{d} < \delta_0, E_{H_*(\omega)}(]-\infty, E'])\delta_0 >)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(< \delta_0, \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E'-E} \mathrm{d}E_{H_*(\omega)}(]-\infty, E'])\right) \delta_0 >)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(< \delta_0, (H_*(\omega)-E)^{-1}\delta_0 >)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}(G_E(0,0,\omega))\right)
\end{aligned}$$

□

Cette relation va nous permettre d'exprimer la partie imaginaire de la fonction w de Kotani en fonction de la Densité d'États Intégrée. On a la propriété suivante :

Proposition 7.3.14. *La fonction $w \in \mathcal{W}$ de Kotani vérifie :*

$$\forall E \in \mathbb{R}, \lim_{a \to 0^+} \mathrm{Im}\ w(E + \mathrm{i}a) = \pi N(E)$$

Démonstration. Tout d'abord on peut trouver dans [Gar81] ou dans [Con97] que toute fonction de Herglotz admet une limite non-tangentielle en tout point de la droite réelle $\mathbb{R}$. Donc la limite $\lim_{a \to 0^+} \mathrm{Im}\ w(E + \mathrm{i}a)$ existe pour presque tout $E \in \mathbb{R}$. Mais avant tout, on va déduire des propositions 7.3.11 point (ii) et 7.3.13 une expression pour $\mathrm{Im}\ w(E + \mathrm{i}a)$.

Tout d'abord d'après la proposition 7.3.11 point (ii) :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ w'(z) = \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(G_z(0,0,\omega)))$$

On se restreint à $z \in \mathbb{C}_+$. Puis d'après la proposition 7.3.13 :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ w'(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')}{E'-z} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{N(E')}{(E'-z)^2}\ \mathrm{d}E' \end{aligned}$$

par intégration par parties. Alors, par intégration, il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que :

$$w(z) = c + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+E'z}{(E'-z)(1+E'^2)} N(E')\mathrm{d}E' \tag{7.30}$$

Or, si z est réel n'appartenant pas au spectre presque sûr de $H_*(\omega)$, alors $w(z) \in \mathbb{R}$ (voir [Car86], page 84, preuve du lemme 5.10). Donc on doit avoir : $c \in \mathbb{R}$. De là en prenant la partie imaginaire dans l'expression (7.30) et en posant $z = E + \mathrm{i}a$ avec $E \in \mathbb{R}$ et $a > 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\ w(E+\mathrm{i}a) &= a \int_{\mathbb{R}} \frac{N(E')}{(E'-E)^2+a^2}\ \mathrm{d}E' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{N(E+au)}{1+u^2}\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

par le changement de variable $u = \frac{E'-E}{a}$. Alors en faisant tendre a vers 0 on obtient :

$$\mathrm{Im}\ w(E+\mathrm{i}0) = N(E) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{d}u = \pi N(E)$$

On rappelle que $N(E)$ est continue à droite (voir remarque 7.2.7) ce qui justifie le passage à la limite : $\lim_{a\to 0^+} N(E+au) = N(E)$ pour tout $E \in \mathbb{R}$.

On obtient ainsi le résultat voulu. □

De manière analogue, on peut exprimer la valeur de la partie réelle de $w(E+\mathrm{i}0)$ pour $E \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.3.15. *La fonction $w \in \mathcal{W}$ de Kotani vérifie :*

$$\forall E \in \mathbb{R},\ \lim_{a\to 0^+} \mathrm{Re}\ w(E+\mathrm{i}a) = -(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E)$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après le point (iii) de la proposition 7.3.11 on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ \mathrm{Re}\ w(z) = -(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(z) \tag{7.31}$$

Or, la fonction w est dans W donc elle est de Herglotz. Elle admet donc une limite non-tangentielle en tout point E de la droite réelle comme précisé en début de preuve

de la proposition 7.3.14. Par ailleurs d'après la proposition 6.3.9 de la section 6.3.2, pour presque tout $E \in \mathbb{R}$, la limite suivante existe et vaut :

$$\lim_{a \to 0} (\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E + \mathrm{i}a) = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_p)(E)$$

Alors en posant $z = E + \mathrm{i}a$ avec $E \in \mathbb{R}$ tel que la limite précédente existe et $a > 0$ un réel on obtient :

$$\lim_{a \to 0^+} \mathrm{Re}\ w(E + \mathrm{i}a) = -(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E)$$

Alors, par continuité des exposants de Lyapounov, cette relation s'étend à tous les nombres réels E. □

Nous avons mis en place tous les prérequis nécessaires pour prouver le principal résultat de cette partie, à savoir une formule de Thouless adaptée au cadre d'étude des opérateurs continus à valeurs matricielles $H_*(\omega)$.

Théorème 7.3.16 (**Formule de Thouless**). *Pour tout $E \in \mathbb{R}$, on a la formule suivante*

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E) = -\alpha + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\left|\frac{E' - E}{E' - \mathrm{i}}\right|\right)\ \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est indépendant de E.

Démonstration. Comme la fonction w de Kotani est dans l'espace $\mathcal{W}$, on peut lui appliquer le lemme 7.7 page 240 dans [Kot85b]. En particulier, le point (7.11), (a) nous donne la représentation intégrale suivante pour la fonction w :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ w(z) = w(\mathrm{i}) + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\frac{E' - \mathrm{i}}{E' - z}\right)\ \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') \tag{7.32}$$

en utilisant le point (7.9) du même lemme et le résultat de la proposition 7.3.14 pour pouvoir écrire que l'on intègre contre la mesure $\mathfrak{n}$. On peut alors prendre la partie réelle dans (7.32) et obtenir :

$$\mathrm{Re}\ w(z) = \mathrm{Re}\ w(\mathrm{i}) + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\left|\frac{E' - \mathrm{i}}{E' - z}\right|\right)\ \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') \tag{7.33}$$

Soit alors $E \in \mathbb{R}$. En faisant tendre z vers E non-tangentiellement dans (7.33) et en utilisant la proposition 7.3.15 on obtient :

$$-(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E) = \mathrm{Re}\ w(\mathrm{i}) + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\left|\frac{E' - \mathrm{i}}{E' - E}\right|\right)\ \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') \tag{7.34}$$

Enfin en posant $\alpha = \mathrm{Re}\ w(\mathrm{i})$ et en faisant passer le signe $-$ de l'autre côté de l'égalité on obtient la formule voulue :

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E) = -\alpha + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\left|\frac{E' - E}{E' - \mathrm{i}}\right|\right)\ \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

□

Remarque 7.3.17. Une dernière remarque pour rappeler que tout au long de cette partie 7.3 nous avons travaillé dans le cadre d'opérateurs $\mathbb{R}$-ergodiques en faisant l'abus de notation $\tilde{H}_*(\tilde{\omega}) = H_*(\omega)$. Mais comme précisé à la remarque 7.2.8, l'usage de la procédure de suspension par Kirsch dans [Kir85] justifie cet abus de notation dans la mesure où il montre que la Densité d'États Intégrée associée à $\tilde{H}_*(\tilde{\omega})$ est égale à celle associée à $H_*(\omega)$ et que les exposants de Lyapounov associés $\tilde{H}_*(\omega)$ sont égaux à ceux associés à $H_*(\omega)$. Ainsi la formule de Thouless que l'on vient de démontrer reste valable pour les opérateurs $\mathbb{Z}$-ergodiques $H_*(\omega)$.

Cette formule de Thouless fait donc le pont entre les notions d'exposants de Lyapounov et de Densité d'États Intégrée. Depuis les travaux de Kotani et l'introduction de sa fonction w, on comprend mieux le pourquoi d'une telle relation. En effet la théorie de Kotani donne un cadre naturel où mettre en relation ces deux quantités, l'une dynamique, les exposants de Lyapounov, apparaissant comme la partie réelle d'une fonction de Herglotz et l'autre spectrale, la Densité d'États Intégrée, apparaissant comme sa partie imaginaire à un facteur π près. L'analyse harmonique sur le sous-espace $\mathcal{W}$ permet alors de relier ces parties réelles et imaginaires *via* une relation intégrale.

Ce type de relations apparaissent aussi dans le cadre d'opérateurs déterministes comme par exemple les opérateurs quasi-périodiques. Le rôle de la Densité d'États Intégrée est alors joué par le nombre de rotation $\alpha(E)$ associé à l'opérateur. Pour plus de précisions sur ce nombre de rotation, on peut se référer à [PF92] où encore à l'article de Johnson et Moser [JM82] dans le cas des opérateurs presque-périodiques. On y prouve comment ce nombre de rotation caractérise le spectre de l'opérateur, comme c'est le cas pour la Densité d'États Intégrée. De là on peut l'utiliser pour déterminer que le spectre d'opérateurs quasi-périodiques est un ensemble de Cantor (voir [FJP02]). Dans [PF92] on peut d'ailleurs trouver la relation directe entre une "Densité d'États Intégrée" pour les opérateurs presque-périodiques et le nombre de rotation : $\alpha(E) = \pi N(E)$.

Nous allons maintenant utiliser cette formule de Thouless pour déduire du résultat de régularité des exposants de Lyapounov prouvé au chapitre 6 (théorème 6.0.3) un résultat de régularité analogue pour la Densité d'États Intégrée.

7.4 Hölder-continuité de la Densité d'États Intégrée

Nous allons commencer par voir comment prouver que la Densité d'États Intégrée a la même régularité que les sommes d'exposants de Lyapounov. On vient de montrer une formule de Thouless (théorème 7.3.16) qui fait le lien entre ces deux quantités en exprimant les exposants de Lyapounov en fonction de la Densité d'États Intégrée. Il nous faut maintenant "inverser" cette relation intégrale pour exprimer la Densité d'États Intégrée en fonction de la somme des exposants de Lyapounov. Pour réaliser une telle inversion nous allons utiliser la transformée de Hilbert. Nous allons donc consacrer la prochaine section à présenter cet outil issu de l'étude des intégrales indéfinies.

7.4.1 La transformée de Hilbert

Dans cette section on suit la présentation faite par U. Neri dans [Ner71] au chapitre 3.

Définition 7.4.1. Si ψ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, sa transformée de Hilbert est donnée par :

$$(T\psi)(x) = \text{vp}\ \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\psi(t)}{x-t}\ \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{\psi(t)}{x-t}\ \mathrm{d}t$$

Notations : Pour $\varepsilon > 0$ on définit :

$$(T_\varepsilon\psi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{\psi(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t$$

Et pour $0 < \varepsilon < \delta < \infty$:

$$(T_{\varepsilon,\delta}\psi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|x-t|<\delta} \frac{\psi(t)}{x-t}\,\mathrm{d}t$$

Avec ces notations, on a les propriétés suivantes de la transformée de Hilbert.

Proposition 7.4.2. *Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Alors :*

(i) *$T\psi \in L^2(\mathbb{R})$ et $||T_{\varepsilon,\delta}\psi - T\psi||_2 \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et $\delta \to \infty$ simultanément ou successivement.*

(ii) *$||T\psi||_2 = ||\psi||_2$.*

(iii) *$T^2\psi = -\psi$ presque partout au sens de la mesure de Lebesgue.*

(iv) *$(T\psi)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon\psi)(x)$ presque partout au sens de la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. Pour cette longue preuve on se réfère au théorème 1, chapitre 3, page 56 dans [Ner71]. □

Remarque 7.4.3. D'après le point (i) de cette proposition, l'application T est un opérateur linéaire agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ et à valeur dans $L^2(\mathbb{R})$.

On peut aussi résumer la discussion faite par U. Neri aux pages $55-56$ dans [Ner71] dans la proposition suivante :

Proposition 7.4.4. *Si ψ est Hölder-continue sur un intervalle $[-a, a]$ alors $T\psi$ est Hölder-continue sur l'intervalle $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$. De plus en notant $\psi_{x_0}(x) = \psi(x - x_0)$, on a $T\psi_{x_0} = (T\psi)_{x_0}$ et donc si ψ est Hölder-continue sur un intervalle $[x_0 - a, x_0 + a]$ alors $T\psi$ est Hölder-continue sur l'intervalle $[x_0 - \frac{a}{2}, x_0 + \frac{a}{2}]$.*

Le point (iii) de la proposition 7.4.2 et la proposition 7.4.4 constituent les principales propriétés de la transformée de Hilbert dont nous allons avoir besoin pour prouver la Hölder-continuité locale de la Densité d'États Intégrée associée à $H_*(\omega)$.

7.4.2 Hölder-continuité locale de la Densité d'États Intégrée

Dans cette dernière section on suit Carmona et Lacroix dans [CL90], chapitre 6, page 332 ainsi que Damanik, Sims et Stolz dans [DSS02b], page 80. On prouve ici la continuité Höldérienne locale de la Densité d'États Intégrée, i.e. la continuité Höldérienne de cette fonction sur tout intervalle compact. On commence par énoncer le principal théorème de cette section, qui constitue le but de ce chapitre.

Théorème 7.4.5. *Soit $I \subset I_* \setminus S_*$ un intervalle compact. La Densité d'États Intégrée associée à $H_*(\omega)$, pour $N = 2, 3$ si $* = P$ et $N = 2$ si $* = B$, est Hölder-continue sur I.*

Démonstration. Tout d'abord, l'application $E' \mapsto \log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right)$ est $\mathfrak{n}$-intégrable sur $\mathbb{R}$. Le terme de renormalisation $E' - \mathrm{i}$ au dénominateur dans le logarithme permet de compenser le fait que le support de $\mathfrak{n}$ n'est pas compact. Alors cette $\mathfrak{n}$-intégrabilité implique :

$$\forall E \in \mathbb{R},\ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{E-\varepsilon}^{E+\varepsilon} \left| \log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right)\right| \, \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') = 0 \tag{7.35}$$

On en déduit alors :

$$\forall E \in \mathbb{R},\ \lim_{\varepsilon \to 0^+} |\log(\varepsilon)|(N(E+\varepsilon) - N(E-\varepsilon)) = 0 \tag{7.36}$$

Cette limite implique alors la continuité de l'application $E \mapsto N(E)$ sur $\mathbb{R}$. (en fait cette limite implique même la log-Hölder continuité de cette application, mais nous n'aurons pas besoin de tant dans la suite...).

Soit $E_0 \in I$ une énergie fixée et $a > 0$ tel que $[E_0 - 4a, E_0 + 4a] \subset I_* \setminus S_*$. Alors, pour $E \in]E_0 - 4a, E_0 + 4a[$, en utilisant le théorème 7.3.16 :

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E) + \alpha - \int_{|E'-E_0|>4a} \log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right) \, \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') = \int_{E_0-4a}^{E_0+4a} \log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right) \, \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

On estime alors le second membre de cette égalité :

$$\int_{E_0-4a}^{E_0+4a} \log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right) \, \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{E_0-4a}^{E-\varepsilon} \log|E'-E| \, \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') + \int_{E+\varepsilon}^{E_0+4a} \log|E'-E| \, \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') \right) - \frac{1}{2} \int_{E_0-4a}^{E_0+4a} \log(1+(E')^2) \, \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

On pose :

$$\mathcal{I}(E_0) = \frac{1}{2} \int_{E_0-4a}^{E_0+4a} \log(1+(E')^2) \, \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

Alors, en utilisant une intégration par parties pour les deux premières intégrales on obtient :

$$\int_{E_0-4a}^{E_0+4a} \log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right) \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Bigg[[N(E')\log|E'-E|]_{E_0-4a}^{E-\varepsilon} - \int_{E_0-4a}^{E-\varepsilon}\frac{N(E')}{E-E'}dE' + [N(E')\log|E'-E|]_{E+\varepsilon}^{E_0+4a} \\ &\quad - \int_{E+\varepsilon}^{E_0+4a}\frac{N(E')}{E'-E}dE'\Bigg] - \mathcal{I}(E_0) \end{aligned}$$

On pose $\psi(E) = N(E)\chi_{\{|E-E_0|\leq 4a\}}$. Par définition de la transformée de Hilbert, il vient :

$$\int_{E_0-4a}^{E_0+4a} \log|E'-E|\,\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

$$\begin{aligned} &= \pi(T\psi)(E) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}[(N(E-\varepsilon)-N(E+\varepsilon))\log\varepsilon + N(E_0+4a)\log|E_0-E+4a| \\ &\quad -N(E_0-4a)\log|E_0-E-4a|] - \mathcal{I}(E_0) \\ &= \pi(T\psi)(E) + N(E_0+4a)\log|E_0-E+4a| - N(E_0-4a)\log|E_0-E-4a| - \mathcal{I}(E_0) \end{aligned}$$

d'après la limite (7.36). Finalement on obtient l'expression :

$$\begin{aligned} \pi(T\psi)(E) &= (\gamma_1+\ldots+\gamma_N)(E) + \alpha - \int_{|E'-E_0|>4a}\log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right)\mathrm{d}\mathfrak{n}(E') - \\ &\quad \ldots - N(E_0+4a)\log|E_0-E+4a| + N(E_0-4a)\log|E_0-E-4a| + \mathcal{I}(E_0) \\ &= (\gamma_1+\ldots+\gamma_N)(E) + \alpha - \int_{|E'-E_0|\geq 4a}\log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right)\mathrm{d}\mathfrak{n}(E') + \mathcal{I}(E_0) \end{aligned}$$

Or, comme $[E_0-4a, E_0+4a] \subset I \subset I_* \setminus S_*$, on peut appliquer le théorème 6, qui nous dit que $\gamma_1+\ldots+\gamma_N$ est Hölder-continue sur $[E_0-4a, E_0+4a]$.

D'autre part on peut vérifier directement que $E \mapsto \int_{|E'-E_0|\geq 4a}\log\left(\left|\frac{E'-E}{E'-\mathrm{i}}\right|\right)\mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$ est Hölder-continue d'ordre 1 sur $]E_0-4a, E_0+4a[$, puisqu'alors la variable d'intégration E' ne s'approche jamais de E.

Ainsi, $T\psi$ est Hölder-continue sur tout intervalle compact inclus dans $]E_0-4a, E_0+4a[$, en particulier, $T\psi$ est Hölder-continue sur l'intervalle $[E_0-2a, E_0+2a]$. Alors $T^2\psi$ est Hölder-continue sur $[E_0-a, E_0+a]$ d'après la proposition 7.4.4. Comme N est continue d'après (7.36), on obtient en appliquant le point (iii) de la proposition 7.4.2 :

$$\forall E \in [E_0-a, E_0+a],\ (T^2\psi)(E) = -N(E)$$

Alors, N est Hölder-continue sur $[E_0-a, E_0+a]$. Or, l'intervalle I étant compact, on peut le recouvrir par une union finie d'intervalles $]E_0-a, E_0+a[$, $E_0 \in I$. Donc N est en fait Hölder-continue sur I tout entier. Ceci achève la preuve. □

Nous pouvons, comme on l'a fait à la fin du chapitre 6, donner un résultat généralisant les méthodes présentées dans ce chapitre à des opérateurs semblables aux opérateurs $H_*(\omega)$. En effet, les résultats contenus dans ce chapitre ne dépendent pas directement de la forme particulière des opérateurs $H_*(\omega)$ que nous avons étudiés aux chapitres 4 et 5. Ils ne dépendent principalement que du caractère borné des coefficients matriciels du potentiel V_ω et de la $\mathbb{Z}$-ergodicité de l'opérateur, en ce qui concerne l'existence de la Densité d'États Intégrée, puis des hypothèses conduisant à la séparation des exposants de Lyapounov de l'opérateur, pour ce qui est de la régularité de cette même Densité d'États Intégrée. Nous pouvons résumer tout cela dans le théorème suivant :

Théorème 7.4.6. *Soit $H(\omega) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_\omega(x)$ un opérateur agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ avec $x \mapsto V_\omega(x) \in \mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$ une fonction bornée indépendamment de x et de ω et telle que l'opérateur $H(\omega)$ soit $\mathbb{Z}$-ergodique (ou $\mathbb{R}$-ergodique), la matrice $V_\omega(x)$ étant symétrique pour tout x et ω. Alors la Densité d'États Intégrée $N(E)$ associée à $H(\omega)$ existe et vérifie les mêmes propriétés qu'au théorème 7.2.6.*

On considère alors la suite $(A^\omega_{n,N}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ des matrices de transfert associées au système différentiel $H(\omega)u = Eu$. Soit μ_E la distribution commune de ces matrices de transfert et p un entier dans $\{1, \ldots, N\}$. On fixe aussi un intervalle compact I de $\mathbb{R}$. On suppose alors que pour tout $E \in I$, le sous-groupe de Fürstenberg G_{μ_E} associé à $(A^\omega_{n,N}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ est p-contractant et L_p-fortement irréductible.

Alors, la fonction $E \mapsto N(E)$ est Hölder-continue sur I et elle est reliée aux exposants de Lyapounov associés à $(A^\omega_{n,N}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ par la formule de Thouless suivante valable pour tout $E \in \mathbb{R}$:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ (\gamma_1 + \ldots + \gamma_N)(E) = -\alpha + \int_{\mathbb{R}} \log\left(\left|\frac{E' - E}{E' - \mathrm{i}}\right|\right)\ \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$$

Démonstration. Pour l'assertion d'existence de la Densité d'États Intégrée, on constate que la preuve du théorème 7.2.6 ne dépend pas de la forme explicite du potentiel V_ω mais juste du fait qu'il vérifie les hypothèses citées ici. Le fait de pouvoir supposer indépendamment la $\mathbb{Z}$-ergodicité ou la $\mathbb{R}$-ergodicité de l'opérateur $H(\omega)$ vient de la procédure de suspension et des résultats de W.Kirsch qui en découlent.

La formule de Thouless prouvée au théorème 7.3.16 ne dépend pas, là encore, de la forme explicite du potentiel matriciel, la théorie de Kotani sur les fonctions $\mathfrak{m}$ et sur la fonction w étant générale pour des opérateurs $\mathbb{R}$-ergodiques à potentiels matriciels symétriques.

Les hypothèses faites ici sur le potentiel V_ω suffisent pour vérifier les estimations sur les matrices de transfert faites à la section 6.2, en particulier celles du lemme 6.2.6. De là on peut appliquer le théorème 6.3.16 pour avoir la locale Hölder-continuité des exposants de Lyapounov. Alors la procédure mise en place à la section 7.4 s'applique pour que l'on obtienne la locale Hölder-continuité de $N(E)$. □

Remarque 7.4.7. En pratique on remarque que le point clé nécessitant une connaissance précise du potentiel V_ω est dans la possibilité de vérifier que pour un intervalle d'énergies donné, le sous-groupe de Fürstenberg G_{μ_E} associé à $(A^\omega_{n,N}(E))_{n\in\mathbb{Z}}$ est p-contractant et L_p-fortement irréductible pour tout p dans $\{1,\dots,N\}$. On peut affirmer que ce point est sans conteste le plus délicat à vérifier en pratique et comme nous l'avons vu aux chapitres 4 et 5, il nécessite des idées nouvelles pour chaque modèle rencontré.

Ce chapitre clôt ce travail de thèse.

Bibliographie

[AG73] W. O. Amrein and V. Georgescu. On the characterization of bound states and scattering states in quantum mechanics. *Helv. Phys. Acta*, 46 :635–658, 1973.

[AGHKH88] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, and H. Holden. *Solvable Models in Quantum Mechanics.* Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, 1988.

[AS83] J. Avron and B. Simon. Almost periodic Schrödinger operators, ii. The Integrated Density of States. *Duke Math. J.*, 50(1) :369–391, 1983.

[Bel60] R. Bellman. *Introduction to matrix analysis.* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1960.

[Ben97] Y. Benoist. Sous-groupes discrets des groupes de Lie. European Summer School in Group Theory, 1997.

[BG03] E. Breuillard and T. Gelander. On dense free subgroups of Lie groups. *J.Algebra*, 261(2) :448–467, 2003.

[BGMS03] E. Belokolos, F. Gesztesy, K. Makarov, and L. Sakhnovich. Matrix-valued generalizations of the theorems of Borg and Hochstadt. In *Evolution equations*, number 234 in Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pages 1–34. Dekker, New York, 2003.

[BK05] J. Bourgain and C. Kenig. On localization in the continuous Anderson–Bernoulli model in higher dimension. *Invent. Math.*, 161(2) :389–426, 2005.

[BL85] P. Bougerol and J. Lacroix. *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators.* Number 8 in Progr. Probab. Statist. Birkhäuser, Boston, 1985.

[Bor46] G. Borg. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. *Acta Math.*, 78 :1–96, 1946.

[Bou68] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4,5,6.* Hermann, 1968.

[Bou07a] H. Boumaza. Positivité des exposants de Lyapounov pour un opérateur de Schrödinger continu à valeurs matricielles. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris, à paraître*, 2007.

[Bou07b] H. Boumaza. Positivity of Lyapunov exponents for a continuous matrix-valued Anderson model. *Math. Phys. Anal. Geom., à paraître*, 2007.

[BR05] L. Boulton and A. Restuccia. The heat kernel of the compactified $d = 11$ supermembrane with non-trivial winding. *Nuclear Phys. B*, 724(1–2) :380–396, 2005.

[Bre03] E. Breuillard. *Marches aléatoires, équirépartition et sous-groupes denses dans les groupes de Lie.* PhD thesis, University Paris 11 Orsay, 2003.

[Bre06] E. Breuillard. Propriétés qualitatives des groupes discrets, Notes du cours Peccot. http ://www.math.polytechnique.fr/ breuilla/Peccot4.pdf, 2006.

[BS07] H. Boumaza and G. Stolz. Positivity of Lyapunov exponents for Anderson-type models on two coupled strings. *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2007(47) :1–18, 2007.

[Car86] R. Carmona. Random Schrödinger operators. In *École d'été de probabilités de Saint-Flour, 1984*, volume XIV, page 1–124. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1986.

[Car91] C. Carvalho. On the relation between two different methods to treat Hamiltonians with point interactions. *Integral Equations Operator Theory*, 14(3) :342–358, 1991.

[CGHL00] S. Clark, F. Gesztesy, H. Holden, and B. M. Levitan. Borg-type theorems for matrix-valued Schrödinger operators. *J. Differential Equations*, 167(1) :181–210, 2000.

[CGR05] S. Clark, F. Gesztesy, and W. Renger. Trace formulas and Borg-type theorems for matrix-valued Jacobi and Dirac finite difference operators. *J. Differential Equations*, 219(1) :144–182, 2005.

[CKM87] R. Carmona, A. Klein, and F. Martinelli. Anderson localization for Bernoulli and other singular potentials. *Commun. Math. Phys.*, 108 :41–66, 1987.

[CL90] R. Carmona and J. Lacroix. *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators.* Probability and Its Applications. Birkhäuser, Boston,, 1990.

[Con97] J. Conway. *Functions of one complex variable, 2nd edition.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[CS83] W. Craig and B. Simon. Subharmonicity of the Lyaponov index. *Duke Math. J.*, 50(2) :551–560, 1983.

[Dam06] D. Damanik. Lyapunov exponents and spectral analysis of ergodic Schrödinger operators : A survey of Kotani theory and its applications. *Preprint*, arXiv :math-ph/0605054, 2006.

[DF79] J. Dollard and C. Friedman. *Product Integration with applications to differential equations.* Number 10 in Encyclopedia of Mathematics and its application. Addison-Wesley, 1979.

[DK00] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Lie groups.* Universitext. Springer-Verlag, 2000.

[DLS06] D. Damanik, D. Lenz, and G. Stolz. Lower transport bounds for one-dimensional continuum Schrödinger operators. *Math. Annalen*, 336(2) :361–389, 2006.

[dMSS05] A. Boutet de Monvel, P. Stollmann, and G. Stolz. Absence of continuous spectral types for certain non-stationary random Schrödinger operators. *Ann. Henri Poincaré*, 6(2) :309–326, 2005.

[Doo40] J. L. Doob. Law of large numbers for continuous stochastic processes. *Duke. Math. J.*, 6(2) :290–306, 1940.

[DSS02a] D. Damanik, R. Sims, and G. Stolz. Localization for one-dimensional, continuum, Bernoulli–Anderson models. *Duke Mathematical Journal*, 114 :59–99, 2002.

[DSS02b] D. Damanik, R. Sims, and G. Stolz. Lyapunov exponents in continuum Bernoulli–Anderson models. *Operator Theory : Advances and Applications*, 132 :121–130, 2002.

[DT79] P. Deift and E. Trubowitz. Inverse scattering on the line. *Commun. Pure. Appl. Math.*, 32 :121–251, 1979.

[Ens78] V. Enss. Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering. I. Short range potentials. *Comm. Math. Phys.*, 61(3) :285–291, 1978.

[Ens79] V. Enss. Asymptotic completeness for quantum-mechanical potential scattering. II. Singular and long-range potentials. *Ann. Physics*, 119(1) :117–132, 1979.

[FJP02] R. Fabbri, R. Johnson, and R. Pavani. On the nature of the spectrum of the quasi-periodic Schrödinger operator. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 3 :37–59, 2002.

[FK60] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist*, 31 :457–469, 1960.

[Fur63] H. Furstenberg. Noncommuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 :377–428, 1963.

[Gar81] J. Garnett. *Bounded analytic functions.* Number 96 in Pure and Applied Mathematics. NY Academic Press, 1981.

[GJ87] J. Glimm and A. Jaffe. *Quantum Physics, A functional Integral Point of View. Second edition.* Springer-Verlag, 1987.

[GKM02] F. Gesztesy, A. Kiselev, and K. Makarov. Uniqueness results for matrix-valued Schrödinger, Jacobi, and Dirac-type operators. *Math. Nachr.*, 239/240 :103–145, 2002.

[Gla90] C. Glaffig. Smoothness of the integrated density of states on strips. *J. Funct. Anal.*, 92 :509–534, 1990.

[GM89] I. Ya. Gol'dsheid and G. A. Margulis. Lyapunov indices of a product of random matrices. *Russian Math. Surveys*, 44 :5 :11–71, 1989.

[GR85] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(2) :187–242, 1985.

[GR89] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles. coefficients de Liapunoff d'un produit de matrices aléatoires indépendantes. *Israel J. Math.*, 65(2) :165–196, 1989.

[GT00] F. Gesztesy and E. Tsekanovskii. On matrix-valued Herglotz functions. *Math. Nachr.*, 218 :61–138, 2000.

[JM82] R. Johnson and J. Moser. The rotation number for almost periodic potentials. *Comm. Math. Phys.*, 84 :403–438, 1982.

[Kir85] W. Kirsch. On a class of random Schrödinger operators. *Advances in Applied Mathematics*, 6 :177–187, 1985.

[KK93] W. Karwowski and V. Koshmanenko. On the definition of singular bilinear forms and singular linear operators. *Ukr. Mat. Zh.*, 45(8) :1084–1089, 1993.

[KLS90] A. Klein, J. Lacroix, and A. Speis. Localization for the Anderson model on a strip with singular potentials. *J. Func. Anal.*, 94 :135–155, 1990.

[Kna02] A.W. Knapp. *Lie groups beyond an introduction.* Number 140 in Prog. Math. Birkhäuser, 2nd edition, 2002.

[Kni81] F. Knight. *Brownian motion and diffusion.* Number 18 in Mathematical Survey. American Mathematical Society, 1981.

[Kot83] S. Kotani. Lyapounov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schrödinger operators. In *Taniguchi Symp. PMMP*, page 225–247, Kataka, 1983.

[Kot85a] S. Kotani. On an inverse problem for random Schrödinger operators. *AMS series of Contemporary Math.*, 41 :267–280, 1985.

[Kot85b] S. Kotani. One-dimensional random Schrödinger operators and Herglotz functions. In *Taniguchi Symp. PMMP*, page 219–250, Kataka, 1985.

[Kot85c] S. Kotani. Support theorems for random Schrödinger operators. *Comm. Math. Physics*, 97 :443–452, 1985.

[KS88] S. Kotani and B. Simon. Stochastic Schrödinger operators and Jacobi matrices on the strip. *Commun. Math. Phys.*, 119(3) :403–429, 1988.

[MT86] R. Mneimné and F. Testard. *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.* Hermann, 1986.

[MV04] S. Molchanov and B. Vainberg. Schrödinger operators with matrix potentials. Transition from the absolutely continuous to the singular spectrum. *J. Funct. Anal.*, 215(1) :111–129, 2004.

[Ner71] U. Neri. *Singular Integrals.* Number 200 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1971.

[Ose68] V.I. Oseledets. A multiplicative ergodic theorem : Lyapunov exponents for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc (A.M.S)*, 19 :197–231, 1968.

[OV90] A. Onishchik and E. Vinberg. *Lie groups and algebraic groups.* Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Per95] D. Perrin. *Géométrie algébrique. Une introduction.* Savoirs actuels. EDP Sciences, 1995.

[PF92] L. Pastur and A. Figotin. *Spectra of Random and Almost-periodic Operators.* Springer-Verlag Berlin, 1992.

[Rag72] M. S. Raghunathan. *Discrete subgroups of Lie groups.* Number 68 in Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[Roe94] G. Roepstorff. *Path Integral Approach to Quantum Physics, An Introduction.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Rud97] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe, 2nde édition.* Dunod, 1997.

[Sch80] W. Schmidt. *Diophantine approximation.* Number 785 in Lecture Notes in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1980.

[Sim05] B. Simon. *Trace ideals and their applications. Second edition.* Number 120 in Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Sto01] Peter Stollmann. *Caught by Disorder — Bound States in Random Media.* Number 20 in Progress in Mathematical Physics. Birkhäuser, 2001.

[Sto02] G. Stolz. Strategies in localization proofs for one-dimensional random Schrödinger operators. *Proc. Indian Acad. Sci*, 112 :229–243, 2002.

[Tho72] D. Thouless. A relation between the density of states and range of localization for one-dimensional random systems. *J. Phys. C : Solid State Phys.*, 5 :77–81, 1972.

[Ves05] I. Veselic. Spectral analysis of percolation Hamiltonians. *Math. Ann.*, 331(4) :841–865, 2005.