



HAL
open science

Instabilité des équations de Schrödinger

Laurent Thomann

► **To cite this version:**

Laurent Thomann. Instabilité des équations de Schrödinger. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT: . tel-00265284

HAL Id: tel-00265284

<https://theses.hal.science/tel-00265284>

Submitted on 18 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

par

Laurent THOMANN

Sujet :

INSTABILITÉ DES ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER

au vu des rapports de

M. Michael CHRIST, Professeur
M. James COLLIANDER, Professeur

*Soutenue le 18 décembre
devant la Commission d'examen composée de :*

| | |
|--|--------------------|
| M. Nicolas BURQ, Professeur, | Directeur de thèse |
| M. Rémi CARLES, Chargé de recherche, | Examineur |
| M. Thierry CAZENAVE, Directeur de recherche, | Examineur |
| M. Patrick GÉRARD, Professeur, | Examineur |
| M. Jean GINIBRE, Directeur de recherche, | Examineur |
| M. Jean-Claude SAUT, Professeur, | Examineur |

Je veux tout d'abord exprimer ma plus profonde gratitude à Nicolas Burq, avec qui j'ai effectué mes premiers pas dans la recherche mathématique. Je le remercie pour la qualité des sujets qu'il m'a donné, pour sa disponibilité et pour sa constante bonne humeur. Outre des idées et des techniques, Nicolas m'a également transmis des valeurs. Qu'il en soit encore remercié.

Je remercie chaleureusement Michael Christ et James Colliander qui m'ont fait l'honneur de rapporter ma thèse, et aussi pour leurs nombreuses observations qui m'ont aidé à améliorer mon travail. Je remercie sincèrement Rémi Carles, Thierry Cazenave, Patrick Gérard, Jean Ginibre et Jean-Claude Saut d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai passé quatre années extrêmement enrichissantes à Orsay tant d'un point de vue scientifique, que humain. Je remercie toute l'équipe ANEDP pour son accueil, et en particulier les professeurs dont j'ai suivi les enseignements de haute qualité. Je suis également très reconnaissant à Thomas Alazard, Serge Alinhac, Rémi Carles, Patrick Gérard, Bernard Helffer, Pierre Pansu et Claude Zuily avec qui j'ai eu des discussions qui m'ont beaucoup apporté. Merci également à Catherine Poupon et Valérie Blandin-Lavigne pour leur efficacité et leur gentillesse.

Mon goût prononcé pour les équations aux dérivées partielles provient sans nul doute de ces belles années passées à Rennes et Ker Lann, où j'ai eu la chance d'être initié au domaine. Que ces deux institutions en soient remerciées.

J'ai également eu la chance de rencontrer Guillemette, Karine, Oana, Ramona, Raphaël, Romain, Thomas et Valeria qui ont, entre autre, toujours su me donner de bons conseils et répondre à mes questions.

Merci également à tous les doctorants que j'ai côtoyés. Leur diversité a été pour moi extraordinairement enrichissante. Une pensée particulière pour Aurélien, Bertrand Micaux, Bertrand Michel, Sébastien, Sophie, Antoine, Benoît, Frédéric, Marie et Marianne.

C'est à Rennes que j'ai rencontré mes amis esthètes, Christian, Emmanuel, Thomas et Yohann. Je les remercie pour tous les moments exceptionnels que nous avons vécus ensemble, et je me réjouis déjà de la prochaine soirée que nous passerons à refaire le monde.

Je voudrais également évoquer mes amis de Barr et environs, les amis du chalet, avec qui j'ai grandi et qui me sont indispensables, en particulier Arnaud, Céline, François, Stanislas et Stéphane.

Je remercie du fond du cœur ma famille, elle est une source inépuisable de bonheur et de réconfort. Merci à Jean, Guillaume, Lucie, Géraldine et Gabrielle pour leur joie de vivre. Merci à Annabel, Gérard, mon frère Jean-Marie et ma sœur Michèle d'avoir toujours été là pour moi. Enfin, merci à mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi. Cette thèse leur est dédiée.

Table des matières

| | | |
|-----------|---|-----------|
| I | Introduction | 9 |
| 1 | Modélisation | 10 |
| 1.1 | Équation de Schrödinger linéaire | 10 |
| 1.2 | Équation de Schrödinger non linéaire | 10 |
| 2 | Étude du problème de Cauchy | 12 |
| 2.1 | Problème bien posé | 12 |
| 2.2 | Instabilités | 13 |
| 3 | Instabilités géométrique et projective pour Gross-Pitaevski | 16 |
| 3.1 | Présentation du problème | 16 |
| 3.2 | Résultats antérieurs | 16 |
| 3.3 | Principaux résultats obtenus dans cette thèse | 19 |
| 3.4 | Méthodes employées | 20 |
| 4 | Instabilité géométrique pour l'équation de Schrödinger cubique | 23 |
| 4.1 | Résultats d'existence et d'unicité sur des surfaces non bornées | 23 |
| 4.2 | Cas d'une variété compacte : Inégalités de Strichartz bilinéaires | 24 |
| 4.3 | Résultats antérieurs d'instabilité | 26 |
| 4.4 | Résultats obtenus dans cette thèse | 29 |
| 4.5 | Schéma de la preuve | 32 |
| 4.6 | Autre phénomène d'instabilité et perspectives | 35 |
| 5 | Instabilités surcritiques | 38 |
| 5.1 | Position du problème | 38 |
| 5.2 | Résultats d'instabilités antérieurs | 39 |
| 5.3 | Principaux résultats obtenus dans cette thèse | 42 |
| 5.4 | Méthodes employées | 44 |
| 5.5 | Remarques et perspectives | 48 |
| 6 | Synthèse | 50 |
| II | Instabilité géométrique et projective pour Gross-Pitaevski | 57 |
| 7 | Introduction | 58 |
| 8 | Construction of the quasimodes | 62 |
| 9 | Geometric instability | 70 |
| 10 | Projective instability | 72 |

| | | |
|------------|--|------------|
| III | Instabilité géométrique pour Schrödinger sur des surfaces | 77 |
| 11 | Introduction | 78 |
| 12 | The WKB construction | 83 |
| 12.1 | Preliminaries: the analysis of the linear equations | 85 |
| 12.2 | The nonlinear analysis and proof of Proposition 12.3 | 94 |
| 13 | The instability for the nonlinear Schrödinger equation | 97 |
| 13.1 | The error estimate | 97 |
| 13.2 | The instability argument | 100 |
| IV | Instabilités pour les équations de Schrödinger surcritiques | 105 |
| 14 | Introduction | 106 |
| 14.1 | Instability in the energy space | 106 |
| 14.2 | Ill-posedness in Sobolev spaces | 107 |
| 15 | Nonlinear geometric optics | 110 |
| 15.1 | The Euclidian case | 110 |
| 15.2 | The general case of an analytic manifold (M^d, g) | 119 |
| 16 | Validity of the Ansatz | 124 |
| 17 | The instability argument | 127 |
| 17.1 | Proof of Theorem 14.2 | 127 |
| 17.2 | Proof of Theorem 14.3 | 130 |
| 17.3 | Proof of Theorem 14.4 | 131 |
| 1 | Appendix | 132 |

Chapitre I

Introduction

1 Modélisation

1.1 Équation de Schrödinger linéaire

Soit (M^d, g) une variété riemannienne de dimension d . L'évolution d'une particule quantique dans (M^d, g) peut être décrite au moyen de sa fonction d'onde

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} \times M^d &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, x) &\longmapsto u(t, x), \end{aligned}$$

qui satisfait à l'équation d'évolution de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

Ici Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami défini par $\Delta_g = \operatorname{div} \nabla_g$. Si $g = (g_{ij})$ (identifiée à une matrice), dans un système de coordonnées, Δ_g s'écrit

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \operatorname{div}(\sqrt{\det g} g^{-1} \nabla) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \partial_{x_i} (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_{x_j}), \quad (1.2)$$

où $g^{-1} = (g^{ij})$.

La modélisation (1.1) permet d'étudier un phénomène dans un milieu inhomogène ou anisotrope. Par exemple en optique, lorsque l'indice du milieu n'est pas constant.

En faisant le produit scalaire entre une solution u et l'équation (1.1), et en utilisant l'autoadjonction de Δ_g , on établit que $\|u(t)\|_{L^2(M^d)}$ est, au moins formellement conservé. En fait la quantité $|u(t, x)|^2 dx$ peut s'interpréter comme la densité de présence de la particule au point x et à l'instant t .

Il est donc naturel d'étudier cette équation dans des espaces basés sur $L^2(M^d)$. À l'aide du calcul fonctionnel, pour $\sigma \in \mathbb{R}$, on définit les espaces de Sobolev $H^\sigma(M^d)$ par

$$u \in H^\sigma(M^d) \quad \text{si et seulement si} \quad (1 - \Delta_g)^{\frac{\sigma}{2}} \in L^2(M^d).$$

Pour $u_0 \in H^\sigma(M^d)$, d'après le théorème de Hille-Yoshida, l'équation (1.1) admet une unique solution dans $H^\sigma(M^d)$ notée $u(t, x) = e^{it\Delta_g} u_0$, où $e^{it\Delta_g}$ est un groupe unitaire de $H^\sigma(M^d)$.

1.2 Équation de Schrödinger non linéaire

Certains mécanismes se modélisent par une équation de Schrödinger non linéaire

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = F(t, x, u, \bar{u}), & (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

(le terme F peut également comporter un potentiel, typiquement $W(x, u) = |x|^2 u$). Un cas particulier intéressant est lorsque $F(u) = V'(|u|^2)u$, où $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est de

classe \mathcal{C}^∞ . La structure particulière de ce second membre (invariance de jauge), fait que la quantité

$$H(u)(t) = \frac{1}{2} \int_{M^d} \left(|\nabla u|^2 + V(|u|^2) \right) dx,$$

est indépendante de t , au moins formellement.

Une des non-linéarités les plus physiquement utilisées est $F(u) = \pm |u|^2 u$, qui permet par exemple d'étudier les condensats de Bose-Einstein (voir [45]). Nous y reviendrons à la Section 3.

Dans la suite nous considérerons toujours des non-linéarités de la forme $F(u) = \pm |u|^{p-1} u$ avec $p \in 2\mathbb{N} + 1$.

2 Étude du problème de Cauchy

On pose ici la problématique d'étude du flot de l'équation de Schrödinger. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = F(t, x, u, \bar{u}), & (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \\ u(0, x) = u_0(x) \in X, \end{cases} \quad (2.1)$$

où X est un espace de Banach. Par la suite, X sera soit un espace de Sobolev H^σ , soit l'espace d'énergie de (2.1).

2.1 Problème bien posé

Définition 2.1. Soit X un espace de Banach. On dit que le problème (1.3) est uniformément bien posé dans X si

i) Pour tout $\mathcal{B} \subset X$ borné, il existe un temps $T = T(\mathcal{B}) > 0$ et un sous-espace $Y_T \subset \mathcal{C}([-T, T]; X)$ tels que pour tout $u_0 \in \mathcal{B}$, il existe une unique solution $u \in Y_T$ de (1.3).

ii) Le flot

$$\begin{aligned} \Phi_t : \mathcal{B} &\longrightarrow X \\ u_0 &\longmapsto u(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

ainsi défini est uniformément continu, pour tout $-T \leq t \leq T$.

Une méthode classique pour montrer que le problème (1.3) est uniformément bien posé, consiste à résoudre l'équation intégrale

$$u(t) = e^{it\Delta_g} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_g} F(s, x, u(s), \bar{u}(s)) ds, \quad (2.3)$$

obtenue grâce à la formule de Duhamel. Sous des hypothèses raisonnables sur X , on vérifie que les équations (1.3) et (2.3) sont équivalentes. Une solution de (2.3) est un point fixe de l'application

$$\phi : v \longmapsto e^{it\Delta_g} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_g} F(s, x, v(s), \bar{v}(s)) ds. \quad (2.4)$$

Il suffit alors de trouver un espace $Y_T \subset \mathcal{C}([-T, T]; X)$, où l'injection est continue, tel que pour $T = T(\mathcal{B}) > 0$ assez petit, ϕ soit une contraction d'une boule de Y_T . D'après le théorème de point fixe de Picard, l'équation (2.3) admet alors une unique solution dans Y_T . Un corollaire immédiat est que l'application Φ_t (2.2) est lipschitzienne sur \mathcal{B} , donc le problème (1.3) est uniformément bien posé.

Dans cette thèse on s'intéresse à des phénomènes d'instabilités pour l'équation de Schrödinger (2.1), i.e. à des cas où la Définition 2.1 n'est pas satisfaite. Dans notre travail, on ne traitera pas de problèmes d'existence ou d'unicité, mais on étudiera des situations où le flot n'est pas uniformément continu.

2.2 Instabilités

Pour montrer que le problème (2.1) est instable, il suffit d'exhiber deux suites de solutions u_n, \tilde{u}_n de (1.3) tel qu'il existe $C, c > 0$

$$\|u_n(0)\|_X \leq C, \quad \|\tilde{u}_n(0)\|_X \leq C, \quad (2.5)$$

et

$$\|(u_n - \tilde{u}_n)(0)\|_X \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty, \quad (2.6)$$

et un temps $-T \leq t \leq T$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|(u_n - \tilde{u}_n)(t)\|_X \geq c > 0. \quad (2.7)$$

On verra par la suite qu'on pourra même souvent trouver une suite $t_n \longrightarrow 0$ telle que (2.7) ait lieu.

Typiquement, ce mécanisme est obtenu par un déphasage (décohérence des phases) des deux suites de solutions. On nommera ce phénomène décohérence des solutions. Cette stratégie a été utilisée par B. Birnir, C. Kenig, G. Ponce, N. Svanstedt et L. Vega [7], par C. Kenig, G. Ponce et L. Vega [37], ainsi que par N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetov [17] et par M. Christ, J. Colliander et T. Tao [26] dans des contextes différents.

Si les conditions (2.5), (2.6) et (2.7) sont satisfaites alors le flot Φ_t donné par (2.2) n'est pas uniformément continu, ce qui nie la Définition 2.1. Bien que donnant une obstruction à ce que le problème de Cauchy (2.1) soit uniformément bien posé, ce phénomène d'instabilité est assez faible, et rien n'empêche au problème d'être bien posé en un sens moins restrictif, par exemple si on demande que le flot soit seulement continu.

Une situation plus intéressante est lorsqu'on est capable de nier la continuité du flot en un point $u \in X$, par exemple en choisissant $\tilde{u}_n = u$, indépendante de n dans les conditions (2.5), (2.6) et (2.7).

Par ailleurs, si l'on est capable de trouver une suite de solutions u_n de (1.3) vérifiant

$$\|u_n(0)\|_X \longrightarrow 0,$$

et tel qu'il existe $t_n \longrightarrow 0$ avec

$$\|u_n(t_n)\|_X \longrightarrow +\infty,$$

on dira que le problème (1.3) est mal posé. On parle alors d'inflation¹ de norme. Ces idées sont dues à Christ-Colliander-Tao et G. Lebeau.

Une instabilité ne peut apparaître que pour une équation non linéaire. En effet considérons l'équation linéaire inhomogène lorsque X est un espace de Sobolev

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = f, & (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^\sigma(M^d). \end{cases} \quad (2.8)$$

¹Inflation : Augmentation, accroissement excessifs.

Alors

$$\Phi_t(u_0) - \Phi_t(v_0) = e^{it\Delta}(u_0 - v_0),$$

et puisque $t \mapsto e^{it\Delta}$ est un groupe unitaire de $H^\sigma(M^d)$, il s'ensuit que Φ_t est une isométrie.

Remarque 2.2. *On peut également obtenir des instabilités en perturbant une équation linéaire (par exemple en perturbant son potentiel), c'est ce que montre R. Carles pour des équations de Schrödinger semi-classiques (voir Proposition A.1 [19]).*

Instabilités géométriques

Si les instabilités sont des phénomènes non linéaires, leur formation peut être principalement causée par la géométrie du milieu ; on parlera alors d'instabilités géométriques. Les travaux présentés dans les Sections 3 et 4 en sont des exemples.

Dans la Section 3 on étudie l'équation de Gross-Pitaevski

$$\begin{cases} ih\partial_t u + h^2\Delta u - |x|^2 u = ah^2|u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (2.9)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $0 < h < 1$. Ici la présence du potentiel $V(x) = |x|^2$ permet l'existence de solutions dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ qui se concentrent sur des cercles $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2, x_3 = 0\}$, et celles-ci permettront d'infirmer l'uniforme continuité du flot (2.2).

Dans la Section 4, on considère l'équation cubique

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = \varepsilon|u|^2 u, & \varepsilon = \pm 1, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M, \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^\sigma(M), \end{cases} \quad (2.10)$$

où (M, g) est une variété riemannienne de dimension 2. En supposant que M admet une géodésique périodique stable et non dégénérée (ceci sera précisé dans la suite), on montre que (2.10) est instable dans $H^\sigma(M)$ pour $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, alors que l'équation est uniformément bien posée dans le cas où $M = \mathbb{R}^2$. Ainsi la géométrie de la surface influe fortement sur la dynamique de l'équation.

Instabilités surcritiques

Dans la Section 5 on présente deux mécanismes d'instabilité pour l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = \varepsilon|u|^{p-1} u, & \varepsilon = \pm 1, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^\sigma(M^d) \text{ ou } H^1(M^d) \cap L^{p+1}(M^d), \end{cases} \quad (2.11)$$

qui se produisent dans n'importe quelle variété analytique (M^d, g) avec métrique g analytique, sous des hypothèses sur $\sigma \in \mathbb{R}$ et $p \in 2\mathbb{N} + 1$.

Les instabilités sont montrées à partir de solutions qui se concentrent en un point de M^d : le phénomène est donc purement local, et la géométrie de M^d n'intervient pas, si ce n'est que par son analyticité.

À propos des des instabilités

Considérons à nouveau l'équation de Schrödinger non linéaire générale (2.1). La stratégie la plus utilisée pour décrire une instabilité est la suivante (présentons-la pour le mécanisme de décohérence des solutions)

1. On construit de façon explicite deux suites de solutions régulières $u_{\text{app}}^{j,n}$, $j = 1, 2$ telles qu'il existe $t_n \rightarrow 0$ avec

$$\|(u_{\text{app}}^{1,n} - u_{\text{app}}^{2,n})(0)\|_X \rightarrow 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|(u_{\text{app}}^{1,n} - u_{\text{app}}^{2,n})(t_n)\|_X \geq c > 0. \quad (2.12)$$

et qui vérifient l'équation approchée

$$i\partial_t u_{\text{app}}^{j,n} + \Delta_g u_{\text{app}}^{j,n} = F(t, x, u_{\text{app}}^{j,n}, \overline{u_{\text{app}}^{j,n}}) + r_n^j(t, x), \quad j = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $r_n^j(t, \cdot) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ pour $0 \leq t \leq t_n$ en un certain sens ;

2. On considère les solutions u_n^1 et u_n^2 des équations

$$\begin{cases} i\partial_t u_n^j + \Delta_g u_n^j = F(t, x, u_n^j, \overline{u_n^j}), & j = 1, 2, \quad n \in \mathbb{N}, \\ u_n^j(0, x) = u_{\text{app}}^{j,n}(0, x), \end{cases}$$

et on montre (à l'aide d'une méthode d'énergie par exemple) que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|(u_n^j - u_{\text{app}}^{j,n})(t_n)\|_X \rightarrow 0 ; \quad (2.13)$$

3. On obtient alors grâce à (2.12) et (2.13) que

$$\|(u_n^1 - u_n^2)(0)\|_X \rightarrow 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|(u_n^1 - u_n^2)(t_n)\|_X \geq c > 0,$$

qui donne l'instabilité.

Cette approche est quelque peu paradoxale, en effet (2.13) est un résultat de stabilité pour (2.1). Il s'ensuit que plus un problème est instable, plus cette instabilité sera délicate à montrer. Nous sommes donc ici en conflit permanent entre les temps où (2.13) se produit et les temps d'instabilités t_n vérifiant (2.12).

Il existe des cas où on est capable de construire et décrire des solutions exactes stationnaires de (2.1), comme l'ont montré N. Burq, P Gérard et N. Tzvetkov [14]. Ceci lève la difficulté (2.13), le gros du travail réside alors dans une description fine des solutions. Voir également la discussion à la fin du Paragraphe 4.3.

Notations. Dans la suite, c, C désigneront des constantes strictement positives susceptibles de varier d'une ligne à l'autre. Elles seront indépendantes des paramètres que l'on fera tendre vers 0 ou l'infini. On notera respectivement $a \sim b$, $a \lesssim b$ ou $a \gtrsim b$ si $\frac{1}{C}b \leq a \leq Cb$, $a \leq Cb$ ou $a \geq Cb$. On écrit $a \ll b$ si $a \leq K^{-1}b$ pour une grande constante K . On désigne par \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.

3 Instabilités géométrique et projective pour Gross-Pitaevski

3.1 Présentation du problème

Considérons l'équation de Gross-Pitaevski qui intervient dans l'étude des condensats de Bose-Einstein (voir [45] et l'introduction de [18])

$$\begin{cases} ih\partial_t u_h + h^2\Delta u_h - V(x)u_h = ah^2|u_h|^2u_h, & (t, x) \in \mathbb{R}^{1+3}, \\ u_h(0, x) = u_{0,h}(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (3.1)$$

Le condensat est composé de N particules (typiquement de l'ordre de 10^6) et de masse m (de l'ordre de $1,33 \cdot 10^{-25}$ kg pour du rubidium).

Dans l'équation (3.1), $h = \frac{\hbar}{2m}$, où \hbar est la constante de Planck (qui est de l'ordre de $6,62 \cdot 10^{-34}$ m²·s⁻¹). À la vue de ces grandeurs physiques, on traitera mathématiquement $h > 0$ comme un paramètre tendant vers 0.

La constante a s'écrit $a = 4\pi m a_0 (N - 1)$, où a_0 (de l'ordre de $5 \cdot 10^{-9}$ m) est la longueur de diffusion ; dans notre étude nous permettrons à la quantité $a = a_h$ de dépendre de h , mais nous la supposons toujours bornée uniformément par rapport à h .

Dans la suite, nous étudierons des instabilités pour la distance projective, qui est une notion pertinente en mécanique quantique (voir [18]).

Définition 3.1. (*Instabilité projective*) On dit que le problème de Cauchy (3.1) est projectivement instable s'il existe des solutions $u_h^1, u_h^2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ de données $u_h^1(0), u_h^2(0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ telles que $\|u_h^1(0)\|_{L^2}, \|u_h^2(0)\|_{L^2} \leq C$ où C est une constante indépendante de h , et $t_h > 0$ telle que

$$\frac{d_{pr}(u_h^2(t_h), u_h^1(t_h))}{d_{pr}(u_h^2(0), u_h^1(0))} \longrightarrow +\infty \text{ quand } h \longrightarrow 0.$$

Ici d_{pr} représente la distance projective complexe, définie par

$$d_{pr}(v_1, v_2) = \arccos \left(\frac{|\langle v_1, v_2 \rangle|}{\|v_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2}} \right) \text{ pour } v_1, v_2 \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

Ici le temps t_h peut éventuellement être très grand, voire tendre vers l'infini lorsque h tend vers 0. Par changement de variables et d'inconnue dans l'équation (3.1), on peut selon le cas, se ramener à des temps petits pour l'équation classique.

3.2 Résultats antérieurs

Commençons par présenter les résultats obtenus par N. Burq et M. Zworski [18]. Soit $a > 0$ (cas défocalisant). Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ le point courant de \mathbb{R}^3 ; Si $\theta \in [0, 2\pi[$, R_θ désigne la rotation d'angle θ et d'axe x_3 . On suppose que le potentiel $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ de (3.1) vérifie

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, \quad V(R_\theta x) = V(x), \quad (3.2)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^3, \exists m \in \mathbb{N}, \quad \partial^\alpha V(x) = \mathcal{O}(\langle x \rangle^m), \quad (3.3)$$

$$\exists l \in \mathbb{N}, \quad V(x) \geq \langle x \rangle^l / C - 1. \quad (3.4)$$

On suppose que $n = h^{-1} \in \mathbb{N}$, et on définit

$$G_n = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3) : u(R_\theta \cdot) = e^{in\theta} u(\cdot)\}.$$

Soit l'opérateur $P_h = -h^2 \Delta + V(x)$. La condition (3.2) suggère le changement de variables cylindrique $(x_1, x_2, x_3) = (r \cos \theta, r \sin \theta, y)$, avec $(r, \theta, y) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$. On obtient alors l'expression

$$P_h|_{G_n} = -(h\partial_y)^2 - (h\partial_r)^2 - \frac{h}{r} h\partial_r + V(r, y) + \frac{1}{r^2}.$$

On suppose enfin que l'application $(r, y) \mapsto V(r, y) + r^{-2}$ admet un minimum global non dégénéré. Alors

Théorème 3.2. ([18]) *Soit V un potentiel satisfaisant aux conditions précédentes. Soit e_0 l'état fondamental de $P_h|_{G_n}$, $\varepsilon > 0$ et $\kappa \geq 1$. Alors les solutions u_1^h, u_2^h de (3.1) de données*

$$u_j^h(0) = \kappa_j e_0, \quad j = 1, 2 \quad \kappa_1 = \kappa, \quad \kappa_2 = \kappa + \varepsilon, \quad \kappa^4 a \ll 1,$$

satisfont pour $t(a\kappa^4)^{3/2} \ll \varepsilon \kappa a t \ll 1$,

$$\frac{\|(u_h^2 - u_h^1)(t)\|_{L^2}}{\|(u_h^2 - u_h^1)(0)\|_{L^2}} \gtrsim a \kappa t, \quad (3.5)$$

uniformément en h .

La preuve réside en une description de la composante selon le mode e_0 des solutions en utilisant les lois de conservations de l'équation, masse et énergie (ici intervient la restriction $a > 0$).

Plus précisément, soit $u = u_h$ la solution de (3.1) de donnée κe_0 , alors

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u(0)\|_{L^2} = \kappa^2,$$

et

$$E(u)(t) = \int |h\nabla u(t)|^2 + V(x)|u|^2 + \frac{1}{2}h^2 a |u|^4(t) = E(u)(0) = \kappa^2 \lambda_0 + \kappa^4 F_h,$$

où $\lambda_0 \sim 1$ est l'énergie fondamentale de $P_h|_{G_n}$, et $F_h = h^2 \|e_0\|_{L^4}^4 \sim ah$. On écrit alors la décomposition de u dans la base hilbertienne de L^2 formée par les vecteurs propres $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $P_h|_{V_n}$

$$u(t, x) = \kappa e^{-\frac{it}{h}(\lambda_0 + \kappa^2 F_h)} \gamma(t) e_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) e_j(x).$$

En écrivant l'équation vérifiée par γ , et à l'aide des lois de conservations, on montre que

$$\gamma(t) = e^{\frac{it}{h}(\lambda_0 + \kappa^2 F_h)} \langle u, e_0 \rangle \sim 1, \quad \text{pour } t(a\kappa^4)^{3/2} \ll 1,$$

et la conclusion du Théorème 3.2 suit en évaluant le quotient (3.5).

N. Burq et M. Zworski [18] montrent également que l'équation (3.1) est projectivement instable, sous l'hypothèse supplémentaire suivante

$$\begin{aligned} \text{L'application } (r, y) \longmapsto V(r, y) + r^{-2} \text{ admet deux minima globaux distincts} \\ \text{non dégénérés, et ses hessiens en ces points sont égaux.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Théorème 3.3. ([18]) *Soit V un potentiel satisfaisant aux hypothèses du Théorème 3.2 et à la condition (3.6). Alors l'équation (3.1) est projectivement instable.*

On renvoie à [18] pour un énoncé quantifié.

Dans le cas d'un potentiel harmonique $V(x) = |x|^2$, R. Carles [19] obtient des résultats plus forts d'instabilité pour l'équation (3.1) défocalisante. Il montre

Théorème 3.4. ([19]) *Soient $V(x) = |x|^2$, $a = 1$ et $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soient $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ telles que $\operatorname{Re}(\varphi_0 \overline{\varphi_1}) \neq 0$. Soient u_h^1, u_h^2 les solutions de (3.1) de données respectives*

$$u_h^1(0) = \varphi_0, \quad u_h^2(0) = \varphi_0 + h^{\frac{1}{3} - \frac{1}{N}} \varphi_1.$$

(i) *Instabilité géométrique : Il existe $T^h \rightarrow \frac{\pi}{4}^-$ et $\tau^h \rightarrow 0^+$ tels que*

$$\|u_h^1 - u_h^2\|_{L^\infty([0, T^h]; L^2)} \rightarrow 0, \quad \|u_h^1 - u_h^2\|_{L^\infty([0, T^h + \tau^h]; L^2)} \gtrsim 1,$$

lorsque $h \rightarrow 0$.

(ii) *Instabilité projective : On suppose que $N \in \mathbb{N}$, alors il existe $T^h \rightarrow \frac{\pi}{4}^-$ et $\tau^h \rightarrow 0^+$ tels que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T^h + \tau_h} d_{pr}(u_h^2(t), u_h^1(t)) \gtrsim 1,$$

mais

$$\sup_{0 \leq t \leq T^h} d_{pr}(u_h^2(t), u_h^1(t)) \rightarrow 0.$$

Pour démontrer le Théorème 3.4, on commence par se débarrasser du potentiel harmonique à l'aide du changement de fonction inconnue

$$v_h(t, x) = \frac{1}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{4}}} e^{i \frac{t}{1+4t^2} \frac{|x|^2}{h}} u_h \left(\frac{\arctan 2t}{2}, \frac{x}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right).$$

La fonction v_h vérifie alors l'équation de Schrödinger semi-classique

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t v_h + \hbar^2 \Delta v_h = \hbar^2 (1 + 4t^2)^{\frac{1}{2}} |v_h|^2 v_h, \\ v_h(0, x) = u_h(0, x). \end{cases}$$

Puis on pose

$$w_h(t, x) = v_h \left(\frac{t}{h^{\frac{2}{3}}} - 1, x \right),$$

en en introduisant le paramètre semi-classique $\hbar = h^{\frac{1}{3}}$, on vérifie que w_h satisfait à l'équation

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t w_h + \hbar^2 \Delta w_h = (\hbar^4 + 4(t - \hbar^2)^2)^{\frac{1}{2}} |w_h|^2 w_h, \\ w_h(\hbar^2, x) = u_h(0, x). \end{cases} \quad (3.7)$$

La fin de la preuve utilise une transformation conforme semi-classique (qui permet de supprimer la forte dépendance en \hbar de la non-linéarité), la convergence de la méthode WKB (optique géométrique non linéaire) pour l'équation de Schrödinger cubique défocalisante (3.7), obtenue par E. Grenier [32]. Voir également Paragraphe 5.4 pour une discussion de cette méthode.

3.3 Principaux résultats obtenus dans cette thèse

Théorème 3.5. (Théorème 7.3, p. 59) Soit $h^{-1} \in \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, il existe $c_0 > 0$ et $u_h^1, u_h^2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ solutions de (3.1) de données $\|u_h^2(0)\|_{L^2}, \|u_h^1(0)\|_{L^2} \rightarrow \kappa$ telles que si $|a_h|\kappa^2 \leq c_0$, on a :

(i) Si a est indépendante de h et si $\kappa|a|t \gg 1$ avec $t \lesssim 1$, alors

$$\frac{\|(u_h^2 - u_h^1)(t)\|_{L^2}}{\|(u_h^2 - u_h^1)(0)\|_{L^2}} \gtrsim |a|\kappa t.$$

(ii) Si $|a_h|t_h \rightarrow +\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$ avec $t_h \ll \log \frac{1}{h}$, alors

$$\sup_{0 \leq t \leq t_h} \|(u_h^2 - u_h^1)(t)\|_{L^2} \gtrsim 1,$$

mais

$$\|(u_h^2 - u_h^1)(0)\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

En particulier, l'équation (3.1) est géométriquement instable.

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, ce résultat est nouveau seulement dans le cas $a < 0$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ le point courant de \mathbb{R}^3 et considérons les coordonnées cylindriques ($x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, x_3 = y$). Alors les fonctions du théorème précédent sont de la forme

$$u_h(0, x) = \kappa_h h^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{k^2}{h}\theta} v_0\left(\frac{r-k}{\sqrt{h}}, \frac{y}{\sqrt{h}}\right), \quad (3.8)$$

avec $k \in \mathbb{N}$, $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et

$$u_h(t, x) = u_h(0, x) e^{-i\lambda_h t} + w_h(t, x), \quad (3.9)$$

où w_h est un terme d'erreur.

Ces fonctions se concentrent sur le cercle ($x_1^2 + x_2^2 = k^2, x_3 = 0$) de \mathbb{R}^3 . En construisant des solutions du type (3.9) qui se concentrent sur deux cercles disjoints on peut montrer le résultat suivant

Théorème 3.6. (Théorème 7.4, p. 59) Soit $h^{-1} \in \mathbb{N}$. Alors il existe $c_0 > 0$ et des solutions $u_h^1, u_h^2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ de l'équation (3.1) de données $\|u_h^2(0)\|_{L^2}, \|u_h^1(0)\|_{L^2} \rightarrow \kappa$ telles que :

Si $|a_h|\kappa^2 \leq c_0$ et $|a_h|t_h \rightarrow +\infty$ lorsque $h \rightarrow 0$ avec $t_h \ll \log \frac{1}{h}$, on a

$$\sup_{0 \leq t \leq t_h} d_{pr}(u_h^2(t), u_h^1(t)) \gtrsim 1,$$

mais

$$d_{pr}(u_h^2(0), u_h^1(0)) \rightarrow 0.$$

En particulier, l'équation (3.1) est projectivement instable.

3.4 Méthodes employées

D'emblée, en utilisant l'invariance de jauge de l'équation (3.1), on peut se restreindre à chercher des solutions stationnaires, i.e. de la forme $u(t, x) = e^{-i\lambda t} f(x)$. La fonction f doit donc être solution du problème elliptique

$$(-h^2 \Delta + |x|^2) f = h\lambda f - a_h h^2 |f|^2 f. \quad (3.10)$$

Méthode WKB

Comme dans [18], nous faisons le changement de variables cylindrique : pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ on pose $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ et $x_3 = y$ avec $(r, \theta, y) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$. Dans les nouvelles variables, le Laplacien s'écrit

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_y^2. \quad (3.11)$$

Soit $h \in]0, 1]$ un petit paramètre tel que $h^{-1} \in \mathbb{N}$, soient $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. La dépendance en θ de l'opérateur (3.11) nous incite à chercher une solution à l'équation (3.1) de la forme

$$\tilde{u} = \kappa h^{-\frac{1}{2}} e^{-i\lambda t} e^{i\frac{\kappa}{h}\theta} \tilde{v}(r, y, h). \quad (3.12)$$

Le facteur $h^{-\frac{1}{2}}$ est un facteur de normalisation, et $\lambda = \lambda_h$ sera à déterminer. La fonction \tilde{v} doit donc satisfaire à

$$-h^2(\partial_r^2 + \partial_y^2)\tilde{v} + \left(\frac{k^4}{r^2} + r^2 + y^2\right)\tilde{v} = \lambda h \tilde{v} - a_h h^2 \kappa^2 \tilde{v}^3 + h^2 \frac{1}{r} \partial_r \tilde{v}.$$

De même qu'en [18] on veut construire \tilde{v} qui se concentre exponentiellement au minimum du potentiel $V = \frac{k^4}{r^2} + r^2 + y^2$, i.e. en $(r, y) = (k, 0)$. Nous faisons ainsi le changement de variables $r = k + \sqrt{h}\rho$, $y = \sqrt{h}\sigma$ et nous posons

$$\tilde{v}(r, y, h) = v\left(\frac{r-k}{\sqrt{h}}, \frac{y}{\sqrt{h}}, h\right). \quad (3.13)$$

On va résoudre l'équation obtenue d'inconnues (v, λ) de façon approchée en suivant les idées de la méthode WKB, i.e en trouvant des développements en puissances de h

$$\begin{aligned} v(\rho, \sigma, h) &= v_0(\rho, \sigma) + h^{\frac{1}{2}} v_1(\rho, \sigma) + h v_2(\rho, \sigma) + h^{\frac{3}{2}} w(\rho, \sigma, h), \\ \frac{\lambda h - 2k^2}{h} &= E_0 + h^{\frac{1}{2}} E_1 + h E_2 + h^{\frac{3}{2}} E_3(h). \end{aligned}$$

En identifiant les puissances de h , on obtient les équations suivantes

$$P_0 v_0 = E_0 v_0 - a_h \kappa^2 v_0^3, \quad (3.14)$$

$$P_0 v_1 = E_0 v_1 + E_1 v_0 - 3a_h \kappa^2 v_0^2 v_1 + \frac{1}{k} \partial_\rho v_0 + \frac{4}{k} \rho^3 v_0, \quad (3.15)$$

$$P_0 v_2 = E_0 v_2 + E_1 v_1 + E_2 v_0 - 3a_h \kappa^2 (v_0^2 v_2 + v_0 v_1^2) + \frac{1}{k} \partial_\rho v_1 \\ + \frac{4}{k} \rho^3 v_1 - \frac{1}{k^2} \rho \partial_\rho v_0 - \frac{5}{k^2} \rho^4 v_0, \quad (3.16)$$

où P_0 est l'opérateur $P_0 = -(\partial_\rho^2 + \partial_\sigma^2) + (4\rho^2 + \sigma^2)$.

Méthodes variationnelles

Dans ce paragraphe, on montre comment l'on peut résoudre les équations (3.14)-(3.16).

Proposition 3.7. (*Proposition 8.1, p. 62; Proposition 8.3, p. 63*) Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que si $|a|\kappa^2 \leq c_0$, il existe $E_0 > 0$ et $v_0 \in H^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $v_0 \geq 0$ et $\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$, qui sont solutions de (3.14).

De plus, il existe des constantes $C, c > 0$ indépendantes de a, κ telles que pour $0 \leq j \leq 2$

$$\left| (I - \Delta)^{\frac{j}{2}} v_0(\rho, \sigma) \right| \leq C e^{-c(|\rho| + |\sigma|)}. \quad (3.17)$$

Enfin

$$E_0 = E_0(a\kappa^2) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} a\kappa^2 + o(a\kappa^2). \quad (3.18)$$

L'existence de v_0 et de E_0 est obtenue par une méthode variationnelle : on minimise la fonctionnelle

$$J(u, a) = \int \left(|\nabla u|^2 + (4\rho^2 + \sigma^2)|u|^2 + \frac{1}{2} a\kappa^2 |u|^4 \right),$$

dans l'espace

$$H = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2), (\rho^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^2), \|u\|_{L^2} = 1 \right\}.$$

L'existence d'un minimiseur v_0 , que l'on peut supposer positif, est assurée par le critère de Rellich. Le multiplicateur de Lagrange E_0 qui lui est associé est donné par

$$E_0 = \int (|\nabla v_0|^2 + (4\rho^2 + \sigma^2)v_0^2 + a\kappa^2 v_0^4). \quad (3.19)$$

Les estimations (3.17) sont obtenues en faisant passer des poids exponentiels dans l'équation (3.14) (estimations d'Agmon). Enfin, le développement (3.18) résulte de l'étude de (3.19) lorsque $a\kappa^2 \rightarrow 0$.

De manière analogue, pour $j = 1, 2$ on montre l'existence de solutions $(v_j, E_j) \in L^2(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$ aux équations (3.15) et (3.16).

Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi \geq 0$, $\text{supp}\chi \subset [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ et $\chi = 1$ sur $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$.

On définit $v = \chi(\sqrt{h}\rho)(v_0 + h^{\frac{1}{2}}v_1 + hv_2)$ et $\lambda = \frac{2k^2}{h} + E_0 + h^{\frac{1}{2}}E_1 + hE_2$, ainsi que

$$u_{app}(t, r, y, h) = u_{app}^{\kappa, k}(t, r, y, h) = \kappa h^{-\frac{1}{2}} e^{-i\lambda t} e^{i\frac{k^2}{h}\theta} v\left(\frac{r-k}{\sqrt{h}}, \frac{y}{\sqrt{h}}, h\right). \quad (3.20)$$

La troncature χ permet d'éviter la singularité en $r = 0$.

Méthode d'énergie et argument de continuité

La proposition suivante montre que u_{app} est une bonne solution approchée de l'équation (3.1).

Proposition 3.8. (*Proposition 8.7, p. 68*) Soit $|a|\kappa^2 \leq c_0$, et u_{app} donnée par (3.20). Soit u la solution de

$$\begin{cases} ih\partial_t u + h^2\Delta u - |x|^2 u = ah^2|u|^2 u, \\ u(0, x) = u_{app}(0, x), \end{cases}$$

Alors $\|(u - u_{app})(t_h)\|_{L^2} \rightarrow 0$ avec $t_h \ll \log(\frac{1}{h})$, lorsque $h \rightarrow 0$.

Posons $w = u - u_{app}$ et introduisons la quantité

$$E(t) = \int \left(\frac{1}{2}(|x|^4 + 1)|w|^2 + h^4|\Delta w|^2 \right). \quad (3.21)$$

En écrivant l'équation vérifiée par w , avec une méthode d'énergie on montre que $F = E^{\frac{1}{2}}$ vérifie $F(0) = 0$ et

$$h \frac{d}{dt} F(t) \lesssim h^{\frac{5}{2}} + hF(t) + F^2(t) + h^{-1}F^3(t). \quad (3.22)$$

Pour des temps tels que $F \lesssim h$, on a $h^{-1}F^3 \lesssim hF$, et F vérifie l'inéquation

$$\frac{d}{dt} F(t) \lesssim h^{\frac{3}{2}} + F(t).$$

D'après l'inégalité de Gronwall, $F \lesssim h^{\frac{3}{2}} e^{Ct}$. Enfin, grâce à un argument de continuité ou *bootstrap*, on montre que pour des temps t_h tels que $e^{Ct_h} \lesssim h^{-\frac{1}{2}}$, i.e. $t_h \ll \log(\frac{1}{h})$, on peut supprimer les termes non linéaires dans (3.22). Finalement $F(t_h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Si $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ et $k_1 \neq k_2$, alors les supports des fonctions $u_{app}^{\kappa_1, k_1}$ et $u_{app}^{\kappa_2, k_2}$ sont disjoints. Il est alors immédiat de vérifier que $u_{app} = u_{app}^{\kappa_1, k_1} + u_{app}^{\kappa_2, k_2}$ satisfait aussi à la Proposition 3.8.

Pour terminer les preuves des Théorèmes 3.5 et 3.6, on suit la stratégie présentée page 15 avec

$$u_{app}^1 = u_{app}^{\kappa_1, 1} + u_{app}^{\kappa_2, 2}, \quad u_{app}^2 = u_{app}^{\kappa_1^h, 1} + u_{app}^{\kappa_2^h, 2},$$

où $\kappa_1^h \rightarrow \kappa_1$ et $\kappa_2^h \rightarrow \kappa_2$ sont choisis convenablement.

Remarque 3.9. *On peut certainement adapter toute l'analyse précédente au cas d'un potentiel V vérifiant les conditions (3.2)-(3.4), comme dans [18].*

4 Instabilité géométrique pour l'équation de Schrödinger cubique

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 2.

On s'intéresse ici à l'équation de Schrödinger non linéaire cubique

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = \varepsilon |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times M, \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^\sigma(M), \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\varepsilon = 1$ (cas défocalisant) ou $\varepsilon = -1$ (cas focalisant).

Commençons par rappeler les résultats d'existence, d'unicité et de régularité du flot pour cette équation.

4.1 Résultats d'existence et d'unicité sur des surfaces non bornées

• Si $(M, g) = (\mathbb{R}^2, \text{can})$, J. Ginibre et G. Velo [31] et T. Cazenave et F. Weissler [21] ont montré le résultat suivant

Théorème 4.1. ([31], [21]) *Soit $(M, g) = (\mathbb{R}^2, \text{can})$. Alors l'équation (4.1) est uniformément bien posée dans $H^\sigma(\mathbb{R}^2)$ pour tout $\sigma > 0$.*

Remarque 4.2. *Si $\sigma = 0$ le problème (4.1) est également uniformément bien posé, mais en un sens un peu plus faible, qui ne satisfait plus à la Définition 2.1 : le temps d'existence de la solution ne dépend plus seulement de la norme $\|u_0\|_{L^2}$ de la condition initiale, mais de tout le profil $e^{it\Delta}u_0$ de la solution linéaire.*

L'ingrédient principal pour un tel résultat est l'utilisation d'inégalités de Strichartz, qui sont des estimations de la forme

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p([-T, T]; L^q(\mathbb{R}^2))} \leq C_T \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.2)$$

Une telle inégalité est réalisée pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $(p, q) \in]2, \infty[\times [2, \infty[$ et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2},$$

et la constante C_T est indépendante de T . Voir [51], [29], [30], [40] et [36].

• Si $(M, g) = (\mathbb{R}^2, g)$, on peut alors se demander à quelles conditions sur la métrique g l'inégalité (4.2) est vérifiée.

On suppose que $g = (g_{ij})$ est une perturbation longue portée de la métrique canonique : Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$

$$|\partial_x^\alpha (g^{ij} - \delta_{ij})| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\eta - |\alpha|}, \quad 1 \leq i, j \leq 2. \quad (4.3)$$

On suppose que g est équivalente à l'identité. Il existe $c, C > 0$

$$c \text{Id} \leq g(x) \leq C \text{Id}. \quad (4.4)$$

Enfin on suppose que

$$g \text{ est non captante}, \quad (4.5)$$

ce qui signifie que la projection en espace des courbes bicaractéristiques quitte tout compact lorsque $t \rightarrow \pm\infty$ (voir [48]).

Alors

Théorème 4.3. ([50], [48], [9]) Soit $(M, g) = (\mathbb{R}^2, g)$. Sous les hypothèses (4.3), (4.4) et (4.5), les inégalités de Strichartz sont vérifiées. En conséquence, l'équation (4.1) est uniformément bien posée dans $H^\sigma(\mathbb{R}^2)$ pour tout $\sigma > 0$.

Les résultats des deux théorèmes précédents sont presque les meilleurs que l'on puisse espérer : on verra dans le Paragraphe 4.3 que l'indice $\sigma = 0$ constitue un seuil infranchissable (Théorème 4.11).

On retiendra ici que l'hypothèse principale est celle de non captance de la métrique, qui fait que l'équation jouit de bonnes propriétés dispersives.

Enfin, on pourrait mentionner des résultats concernant d'autres surfaces non compactes. A. Hassel, T. Tao et J. Wunsch [33, 34] ont obtenu des estimations de Strichartz sans pertes pour des variétés asymptotiquement coniques ; V. Banica [4] a traité le cas de l'espace hyperbolique $(M, g) = (\mathbb{H}^2, \text{can})$; et J. - M. Bouclet [8] s'est placé dans des variétés asymptotiquement hyperboliques. Cette liste n'est pas exhaustive.

Dans le cas d'une variété compacte. N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov ont montré que la résolution du problème de Cauchy (4.1) était sensiblement équivalente à l'obtention d'inégalités bilinéaires sur les solutions de l'équation libre : c'est l'objet du paragraphe suivant.

4.2 Cas d'une variété compacte : Inégalités de Strichartz bilinéaires

On suppose ici que (M^d, g) est une variété riemannienne compacte de dimension d . Soit l'équation de Schrödinger linéaire

$$i\partial_t u + \Delta_g u = 0. \quad (4.6)$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on introduit le projecteur spectral

$$P_N = \mathbf{1}_{N \leq \sqrt{-\Delta} \leq 2N},$$

défini de la manière suivante : comme M^d est compacte, $L^2(M^d)$ admet une base hilbertienne $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs propres de $-\Delta_g$ telle que

$$-\Delta_g \varphi_n = \lambda_n \varphi_n.$$

Soit $f \in L^2(M^d)$. On écrit sa décomposition selon les modes φ_n , alors si

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \varphi_n,$$

on obtient alors

$$P_N f = \sum_{n \in \Gamma_N} \alpha_n \varphi_n,$$

où $\Gamma_N = \{n \in \mathbb{N}, N^2 \leq \lambda_n \leq 4N^2\}$.

On a à présent besoin de la définition suivante.

Définition 4.4. Soit M^d une variété riemannienne compacte. On dit que le flot de Schrödinger vérifie sur M^d une inégalité de Strichartz bilinéaire d'ordre $\sigma \geq 0$ s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall f, g \in L^2(M^d), \quad \forall N, L \geq 1,$$

les solutions

$$v_N(t) = e^{it\Delta_g} P_N f, \quad w_L(t) = e^{it\Delta_g} P_L g,$$

de l'équation (4.6) vérifient

$$\|v_N w_L\|_{L^2([0,1] \times M^d)} \leq C \min(N, L)^\sigma \|f\|_{L^2(M^d)} \|g\|_{L^2(M^d)}.$$

Cette notion, qui est un raffinement des inégalités de Strichartz, est due à J. Bourgain [12].

Ici l'indice σ mesure le nombre de dérivées perdues par rapport à une estimation du type (4.2).

Si le problème (4.1) est bien posé, avec un flot suffisamment régulier, une telle inégalité est nécessaire.

Proposition 4.5. ([15]) Soit M^d une variété riemannienne compacte. On suppose que l'équation de Schrödinger non linéaire cubique est uniformément bien posée dans $H^\sigma(M^d)$, avec $\sigma \geq 0$, sur $[-T, T]$. On suppose de plus que le flot est de classe \mathcal{C}^3 au voisinage de 0.

Alors le flot de Schrödinger sur M^d satisfait à une inégalité de Strichartz bilinéaire d'ordre σ .

N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov [15] ont obtenu également une réciproque de ce résultat.

Théorème 4.6. ([15]) Soit M^d une variété riemannienne compacte. On suppose que le flot de Schrödinger sur M^d satisfait à une inégalité de Strichartz bilinéaire d'ordre σ_0 . Alors

i) L'équation de Schrödinger non linéaire cubique est uniformément bien posée dans $H^\sigma(M^d)$, pour tout $\sigma > \sigma_0$.

ii) Le flot est de classe \mathcal{C}^∞ .

Dans la suite on se placera en dimension 2.

Pour montrer qu'un problème est uniformément bien posé, il suffit donc d'établir des inégalités de Strichartz bilinéaires, et c'est ainsi qu'on peut obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.7. ([16]) Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 2. Alors l'équation (4.1) est uniformément bien posée dans $H^\sigma(M)$, pour tout $\sigma > \frac{1}{2}$, avec flot \mathcal{C}^∞ .

Pour des géométries particulières, on est capable d'affiner les résultats, ainsi J. Bourgain avait montré antérieurement

Théorème 4.8. ([10],[11]) Soit $(M, g) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \text{can})$. Alors l'équation (4.1) est uniformément bien posée dans $H^\sigma(M)$, pour tout $\sigma > 0$, avec flot \mathcal{C}^∞ .

Ici, et dans la suite de notre travail, (M, can) désigne la variété M munie de la métrique euclidienne canonique.

Remarque 4.9. *On insiste ici sur le fait que le résultat précédent est valable uniquement sur des tores rationnels. À notre connaissance, pour un tore en général, il n'y a pas de meilleur résultat que le Théorème 4.7.*

Par ailleurs, sur la sphère on obtient

Théorème 4.10. *([15]) Soit $(M, g) = (\mathbb{S}^2, \text{can})$. Alors l'équation (4.1) est uniformément bien posée dans $H^\sigma(M)$, pour tout $\sigma > \frac{1}{4}$, avec flot \mathcal{C}^∞ .*

Le résultat précédent persiste si M est une surface de Zoll, i.e. une variété dont toutes les géodésiques sont périodiques de même période.

Les Théorème 4.8 et Théorème 4.10 sont obtenus grâce à la connaissance du spectre du Laplacien sur ces variétés, et de la bonne répartition des valeurs propres.

Dans le paragraphe suivant, on va étudier des phénomènes d'instabilité pour voir si ces énoncés sont optimaux et pour comprendre les obstructions géométriques à ce que le problème (4.1) soit bien posé.

4.3 Résultats antérieurs d'instabilité

Commençons par énoncer un résultat qui concerne le cas $(\mathbb{R}^2, \text{can})$, dû à M. Christ, J. Colliander et T. Tao [25].

Théorème 4.11. *([25]) Soit $(M, g) = (\mathbb{R}^2, \text{can})$. Alors l'équation (4.1) est mal posée dans $H^\sigma(\mathbb{R}^2)$, pour tout $\sigma < 0$: il existe une suite de solutions u_n et \widetilde{u}_n de (4.1) et une suite de temps $t_n \rightarrow 0$ tel que*

$$\|u_n(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^2)} \lesssim 1, \quad \|\widetilde{u}_n(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^2)} \lesssim 1 \quad \text{et} \quad \|(u_n - \widetilde{u}_n)(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0,$$

alors que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(u_n - \widetilde{u}_n)(t_n)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^2)} \gtrsim 1.$$

Ce résultat reste valable en dimension supérieure (voir Théorème 5.5).

Nous reviendrons sur ce phénomène dans la Section 5.

À la vue de ce résultat et des Théorèmes 4.7, 4.8 et 4.10, il est donc naturel de se demander si le problème (4.1) est bien posé dans $H^\sigma(M)$ quel que soit $\sigma > 0$, ou s'il existe effectivement des variétés pour lesquelles la régularité nécessaire est plus élevée. N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov [17] ont répondu à cette question dans le cas $(M, g) = (\mathbb{S}^2, \text{can})$. En donnant une description précise de certaines solutions, ils montrent que le problème (4.1) défocalisant (cas $\varepsilon = 1$) n'est pas uniformément bien posé dans $H^\sigma(\mathbb{S}^2)$ si $0 < \sigma < \frac{1}{4}$. Ce travail a ensuite été étendu par V. Banica [5].

On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ le point courant de \mathbb{S}^2 , et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\psi_n(x) = n^{\frac{1}{4}-\sigma}(x_1 + ix_2)^n, \tag{4.7}$$

est l'harmonique sphérique normalisée dans $H^\sigma(\mathbb{S}^2)$ qui se concentre sur l'équateur $\{x_3 = 0\}$. La fonction ψ_n vérifie en outre

$$-\Delta_{\mathbb{S}^2} \psi_n = n(n+1)\psi_n.$$

On peut alors énoncer

Théorème 4.12. ([17], [5]) *Soit $(M, g) = (\mathbb{S}^2, \text{can})$. Soient $T > 0$, $\kappa \in]0, 1]$ et $\sigma \in [0, \frac{1}{4}[$. Alors la solution de l'équation (4.1) défocalisante de donnée $u_n(0, x) = \kappa\psi_n(x)$ s'écrit pour tout $t \in [0, T]$*

$$u_n(t, x) = \kappa e^{-it(n(n+1)+\kappa^2\omega_n)} (z_n(t)\psi_n(x) + q_n(t, x)), \quad (4.8)$$

avec $\omega_n \sim n^{\frac{1}{2}-2\sigma}$,

$$\sup_{0 < t < T} \|q_n(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)} \sim n^{-3\sigma} \quad \text{et} \quad |z_n(t) - 1| \sim tn^{-4\sigma}. \quad (4.9)$$

Corollaire 4.13. ([17], [5]) *Soit $(M, g) = (\mathbb{S}^2, \text{can})$. Soit $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, alors l'équation (4.1) défocalisante n'est pas uniformément bien posée dans $H^\sigma(M)$.*

Remarque 4.14. *On peut toutefois noter que rien n'empêche que l'équation soit bien posée dans un sens plus faible, par exemple si on demande que le flot soit seulement continu. La question est ouverte.*

On présente une heuristique de la preuve du Théorème 4.12 :

On cherche u_n sous la forme

$$u_n(t, x) = \kappa c_n(t)\psi_n(x) + r_{n,1}(t, x), \quad (4.10)$$

avec $c_n(0) = 1$ et un reste $r_{n,1}$ vérifiant $r_{n,1}(0, x) = 0$. On écrit

$$|u_n|^2 u_n(t, x) = \kappa^3 |c_n|^2 c_n(t) |\psi_n|^2 \psi_n(x) + r_{n,2}(t, x). \quad (4.11)$$

En projetant le terme $|\psi_n|^2 \psi_n$ sur le mode ψ_n , on obtient

$$|\psi_n|^2 \psi_n = \omega_n \psi_n + r_{n,3}, \quad (4.12)$$

où

$$\omega_n = \frac{\|\psi_n\|_{L^4}^4}{\|\psi_n\|_{L^2}^2} \sim n^{\frac{1}{2}-2\sigma}. \quad (4.13)$$

En réinjectant les expressions (4.10), (4.11) et (4.12) dans l'équation

$$i\partial_t u + \Delta_g u = |u|^2 u,$$

et en omettant les termes d'erreur, on déduit l'équation sur c_n :

$$i\kappa \frac{d}{dt} c_n(t) - n(n+1)\kappa c_n(t) = \kappa^3 \omega_n |c_n(t)|^2 c_n(t), \quad c_n(0) = 1, \quad (4.14)$$

qui se résout en

$$c_n(t, x) = e^{-it(n(n+1)+\kappa^2\omega_n)}, \quad (4.15)$$

d'où l'Ansatz

$$u_n(t, x) = \kappa e^{-it(n(n+1)+\kappa^2\omega_n)}\psi_n(x) + r_{n,1}(t, x). \quad (4.16)$$

Pour démontrer le Théorème 4.12 proprement, il suffit donc de montrer que l'erreur $r_{1,n}$ est effectivement petite. Pour ce faire on utilise :

1. Les lois de conservation, masse et énergie (ici intervient la restriction $\varepsilon = 1$),
2. L'action des rotations sur \mathbb{S}^2 . Si R_α est la rotation d'axe x_3 et d'angle α , alors $R_\alpha^* u_n(0, x) = u_n(0, R_\alpha x) = e^{in\alpha} u_n(0, x)$, donc $R_\alpha^* u_n = e^{in\alpha} u_n$, et ceci permet de donner une description précise de u_n en somme d'harmoniques sphériques.

Montrons maintenant comment ces solutions permettent d'infirmer l'uniforme continuité du flot.

Démonstration du Corollaire 4.13. Soient $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, $\kappa \in]0, 1]$ et $\kappa_n \rightarrow \kappa$ à préciser. On considère $u_n^{\kappa_n}$ donnée par (4.8), associée à κ_n

$$u_n^{\kappa_n}(t, x) = \kappa_n e^{-it(n(n+1)+\kappa_n^2\omega_n)} (\tilde{z}_n(t)\psi_n(x) + \tilde{q}_n(t, x)), \quad (4.17)$$

et u_n celle associée à κ .

Alors $\|u_n^\kappa(0, \cdot)\|_{H^\sigma} \sim 1$, $\|u_n^{\kappa_n}(0, \cdot)\|_{H^\sigma} \sim 1$, et

$$\|(u_n^\kappa - u_n^{\kappa_n})(0, \cdot)\|_{H^\sigma} \sim |\kappa - \kappa_n| \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi les conditions (2.5) et (2.6) sont satisfaites.

Par ailleurs, pour $T > 0$ et $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} (u_n^\kappa - u_n^{\kappa_n})(t, x) &= \kappa e^{-it(n(n+1))} (e^{-it\kappa^2\omega_n} - e^{-it\kappa_n^2\omega_n}) (z_n(t)\psi_n(x) + q_n(t, x)) \\ &\quad + (\kappa - \kappa_n) e^{-it(n(n+1)+\kappa_n^2\omega_n)} (z_n(t)\psi_n(x) + q_n(t, x)) \\ &\quad + \kappa_n e^{-it(n(n+1)+\kappa_n^2\omega_n)} ((z_n - \tilde{z}_n)(t)\psi_n(x) + (q_n - \tilde{q}_n)(t, x)). \end{aligned}$$

D'après les estimations (4.9), les deux derniers termes tendent vers 0 dans $H^\sigma(\mathbb{S}^2)$.

Alors

$$\|(u_n^\kappa - u_n^{\kappa_n})(t, \cdot)\|_{H^\sigma} \gtrsim \kappa |e^{-it(\kappa^2 - \kappa_n^2)\omega_n} - 1|.$$

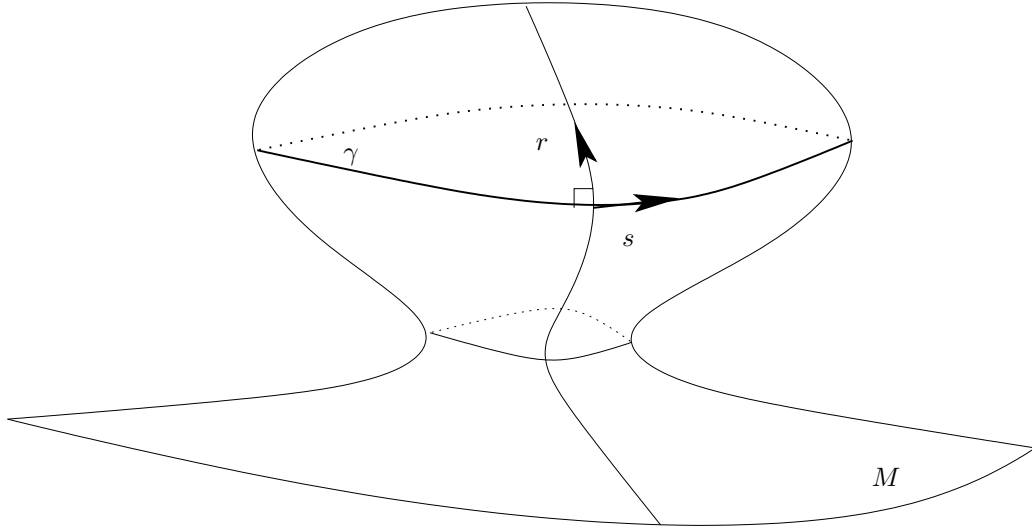
Pour satisfaire à la condition (2.7), il suffit donc de choisir $\kappa_n \rightarrow \kappa$ et $t_n \rightarrow 0$ tel que $t_n(\kappa^2 - \kappa_n^2)\omega_n \rightarrow +\infty$, ce qui est possible car $\omega_n \rightarrow +\infty$. \square

Une autre approche (voir [14]) pour obtenir le résultat du Corollaire 4.13 (et qui englobe le cas $\varepsilon = -1$), consiste à construire des solutions stationnaires *exactes* à l'équation (4.1). On cherche u_n sous la forme $u_n = e^{-i\lambda_n t} f_n$. Alors f_n doit vérifier

$$-\Delta f_n + \varepsilon |f_n|^2 f_n = \lambda_n f_n. \quad (4.18)$$

On peut alors trouver des solutions de l'équation (4.18) vérifiant $\|f_n\|_{H^\sigma} = 1$ par une méthode variationnelle en utilisant le théorème de Rellich. Puis à l'aide d'estimations d'Agmon, les auteurs obtiennent le développement asymptotique

$$\lambda_n = n(n+1) + \gamma \varepsilon n^{\frac{1}{2}-2\sigma} + \mathcal{O}(1), \quad (4.19)$$

FIG. 1 – Un exemple de surface M

avec $\gamma \neq 0$. De ceci découle le résultat d'instabilité.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de donner une description de solutions pour des temps arbitrairement longs ; cette stratégie utilise fondamentalement l'invariance par rotation de la variété.

4.4 Résultats obtenus dans cette thèse

Soit (M, g) une surface riemannienne. Dans la suite on supposera que les injections de Sobolev sont valables dans M . Pour fixer les idées, on peut supposer que (M, g) est soit compacte, soit une perturbation compacte de $(\mathbb{R}^2, \text{can})$.

D'emblée on effectue l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. *La variété M admet une géodésique périodique γ .*

Dans la suite nous allons toujours travailler au voisinage de γ , nous choisissons donc des coordonnées adaptées. Pour $r_0 > 0$ assez petit, il existe un système de coordonnées $(s, r) \in \mathbb{S}^1 \times]-r_0, r_0[$, appelé coordonnées de Fermi tel que

1. La courbe $r = 0$ est la géodésique γ paramétrée par la longueur d'arc. On peut supposer que sa longueur totale est de 2π ;
2. Les courbes $s = \text{constante}$ sont des géodésiques paramétrées par la longueur d'arc. Les courbes $r = \text{constante}$ les coupent perpendiculairement ;
3. Soit $R(s, r)$ la courbure de M au point (s, r) , et a la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + R(r, s)a = 0, \\ a(0, s) = 1, \frac{\partial a}{\partial r}(0, s) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Alors la métrique s'écrit dans les coordonnées (s, r)

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2(s, r) \end{pmatrix}.$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami prend alors la forme

$$\Delta_g := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \operatorname{div}(\sqrt{\det g} g^{-1} \nabla) = \frac{1}{a} \partial_s \left(\frac{1}{a} \partial_s \right) + \frac{1}{a} \partial_r (a \partial_r).$$

Notons qu'on peut identifier une fonction f définie localement près de γ avec une fonction de $[0, 2\pi] \times]-r_0, r_0[$ telle que

$$\forall (s, r) \in [0, 2\pi] \times]-r_0, r_0[, \quad f(s + 2\pi, r) = f(s, \omega r),$$

avec $\omega = 1$ si M est orientable et $\omega = -1$ sinon. On introduit également

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega - 1) \in \{-1, 0\}. \quad (4.21)$$

Soit $p_2 = \frac{1}{a^2} \sigma^2 + \rho^2$ le symbole principal de Δ , et

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} s(t) = \frac{\partial p_2}{\partial \sigma}, & \frac{d}{dt} \sigma(t) = -\frac{\partial p_2}{\partial s}, \\ \frac{d}{dt} r(t) = \frac{\partial p_2}{\partial \rho}, & \frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{\partial p_2}{\partial r}, \\ s(0) = s_0, \sigma(0) = \sigma_0, r(0) = r_0, \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \quad (4.22)$$

le système hamiltonien qui lui est associé.

À partir des solutions du système, on peut définir l'application ϕ de premier retour de Poincaré, par rapport à l'hyperplan $\{s = 0\}$. En effet, il existe un voisinage \mathcal{N} de $(\sigma = 1/2, r = 0, \rho = 0)$ vérifiant : Si $(s(t), \sigma(t), r(t), \rho(t))$ est la solution de (4.22) de donnée $(0, \sigma_0, r_0, \rho_0) \in \{0\} \times \mathcal{N}$, il existe T tel que $s(T) = 2\pi$. L'application ϕ est alors donnée par

$$\phi : (r_0, \rho_0) \longmapsto (r(T), \rho(T)).$$

La deuxième hypothèse porte sur la différentielle de ϕ en $(0, 0)$ et sur ses valeurs propres.

Hypothèse 2. *La géodésique γ est stable, i.e. $d\phi(0, 0)$ est une rotation. La différentielle $d\phi(0, 0)$ admet donc deux valeurs propres $\Lambda = e^{i\lambda}$ et $\Lambda^{-1} = e^{-i\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que qu'il existe $\tau, \mu > 0$ tel que*

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad |p - q \frac{\lambda}{\pi}| \geq \frac{\mu}{|(p, q)|^\tau}, \quad (4.23)$$

où $|(p, q)| = |p| + |q|$. Si cette dernière condition est vérifiée, on dit que γ est non dégénérée.

On peut montrer que presque tout réel λ (au sens de la mesure de Lebesgue) vérifie la condition (4.23). Voir la discussion p. 81 pour des exemples de telles variétés.

Nous pouvons alors énoncer

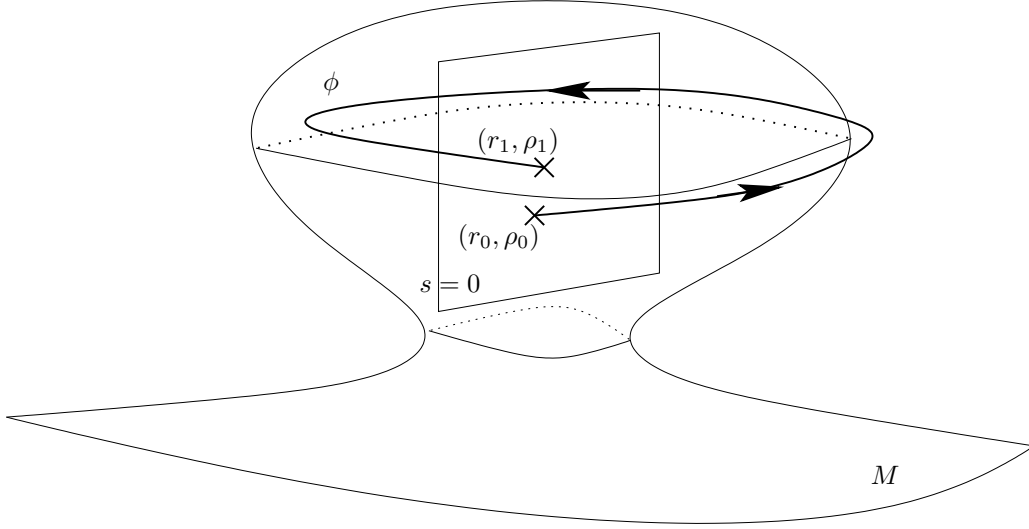


FIG. 2 – L'application de premier retour

Théorème 4.15. (*Proposition 11.3, p. 79*) Soit (M, g) une surface riemannienne. On suppose que les Hypothèses 1 et 2 sont satisfaites. Alors l'équation (4.1) (défocalisante ou focalisante) n'est pas uniformément bien posée dans $H^\sigma(M)$, pour tout $0 < \sigma < \frac{1}{4}$.

Pour la preuve de ce résultat, on suit la stratégie discutée dans le paragraphe précédent en cherchant des solutions stationnaires, i.e. de la forme $u = e^{-i\lambda t} f$, où le couple (f, λ) doit vérifier

$$-\Delta_g f = \lambda f - \varepsilon |f|^2 f. \quad (4.24)$$

Soit $0 < h < 1$ avec $h^{-1} \in \mathbb{N}$ un paramètre amené à être petit, on construit alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ une famille $f_N(h)$ de fonctions et on donne un développement en puissances de h de λ_N qui résolvent cette équation modulo h^N .

Théorème 4.16. (*Théorème 11.5, p. 82*) On suppose que les Hypothèses 1 et 2 sont satisfaites. Soit $h \in]0, 1]$ tel que $h^{-1} \in \mathbb{N}$, soient $\kappa, \sigma > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. On considère λ donné par Hypothèse 2 et ω_1 par (4.21).

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_N(k) \in \mathbb{R}$ et une famille $f_N(h)$ de la forme

$$f_N(h)(s, r) = \kappa h^{\sigma - \frac{1}{4}} \chi(r) e^{i \frac{s}{h}} (v_0 + h^{\frac{1}{2}} v_1 + \cdots + h^{N + \frac{1}{2}} v_{2N+1})(s, \frac{r}{\sqrt{h}}), \quad (4.25)$$

avec $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(]-r_0, r_0[)$ une fonction plateau et $v_j \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ pour $0 \leq j \leq 2N + 1$, tels que $\|f_N(h)\|_{L^2(M)} \sim h^\sigma$ et

$$-\Delta_g f_N(h) = \lambda_N(k) f_N(h) - \varepsilon |f_N(h)|^2 f_N(h) + h^N g_N(h) \quad (4.26)$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|h^N g_N(h)\|_{H^n(M)} \lesssim h^{N-n}.$$

De plus il existe $C_0 > 0$ indépendante de ε, κ and σ tels que

$$\lambda_N(k) = \frac{1}{h^2} - \frac{2}{h} E_0(k) + \frac{1}{\sqrt{h}} \varepsilon \kappa^2 h^{2\sigma} C_0 + \mathcal{O}(1), \quad \text{lorsque } h \longrightarrow 0,$$

avec

$$E_0(k) = -\frac{1}{4\pi}\lambda + \frac{1}{2}k\left(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi}\right). \quad (4.27)$$

Dans le cas linéaire, une telle description de quasimodes avait été obtenue par J. V. Ralston [46].

4.5 Schéma de la preuve

Utilisation de la méthode WKB

Commençons par expliquer la forme (4.25). Dans le $(M, g) = (\mathbb{S}^2, \text{can})$, on peut remarquer que les coordonnées de Fermi (s, r) correspondent aux coordonnées sphériques avec $(s, r) \in [0, 2\pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ privé des pôles, on effectue le changement de variables

$$\begin{cases} x_1 = \cos s \cos r, \\ x_2 = \sin s \cos r, \\ x_3 = \sin r, \end{cases}$$

et l'harmonique sphérique ψ_n donnée en (4.7) s'écrit pour r petit

$$\psi_n(x) = n^{\frac{1}{4}-\sigma}(x_1 + ix_2)^n = n^{\frac{1}{4}-\sigma}e^{ins} \cos^n r = n^{\frac{1}{4}-\sigma}e^{ins}e^{-(\sqrt{nr})^2(\frac{1}{2}+o(1))}, \quad (4.28)$$

en posant $h = n^{-1}$ et en faisant un développement en puissances de $h^{\frac{1}{2}}$, on obtient une expression de la forme (4.25).

Posons $\delta = \kappa h^\sigma$. La remarque précédente nous incite donc à chercher un quasimode non linéaire à l'équation (4.24) de la forme

$$f(s, r) = \delta h^{-\frac{1}{4}}e^{i\frac{s}{h}}v\left(s, \frac{r}{\sqrt{h}}\right),$$

avec (v, λ) admettant les développements formels

$$v \sim \sum_{j \geq 0} h^{\frac{j}{2}} v_j \quad \text{et} \quad \lambda \sim h^{-2} - \frac{2}{h} \sum_{j \geq 0} h^{\frac{j}{2}} E_j.$$

On effectue donc le changement de variables $x = \frac{r}{\sqrt{h}}$. Puis un développement des coefficients de Δ_g selon h et l'identification de chacune des puissances de h , donnent le système que doivent vérifier les v_j et E_j

$$\begin{cases} (i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}R(s)x^2 - E_0)v_0 = 0, \\ (i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}R(s)x^2 - E_0)v_1 = E_1 v_0 + R_3(s)x^3 v_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2|v_0|^2 v_0, \\ \dots = \dots \\ (i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}R(s)x^2 - E_0)v_p = E_p v_0 + Q_p, \\ \dots = \dots \end{cases} \quad (4.29)$$

où $R_3(s) = \frac{1}{6}\partial_r^3 a(s, 0)$ et où Q_p est une fonction qui ne dépend que de $x, s, (v_j)_{j \leq p-1}$ et $(E_j)_{j \leq p-1}$. On est ainsi amené à résoudre une cascade d'équations linéaires.

La première de ces équations est une équation aux valeurs propres, ceci explique le choix dénombrable que l'on a pour $E_0(k)$ donné en (4.27). C'est une équation de Schrödinger 1D avec un potentiel harmonique qui dépend du paramètre d'évolution. Pour la résoudre on utilise un résultat de M. Combes [27], qui montre que son propagateur est conjugué à celui de l'oscillateur harmonique.

On considère a_0 vérifiant

$$\begin{cases} \ddot{a}_0(s) + R(s, 0)a_0(s) = 0, \\ a_0(0) = 1, \dot{a}_0 = i, \end{cases} \quad (4.30)$$

et on introduit $H = \frac{1}{2}\partial_x^2 + x^2$, l'oscillateur harmonique. Alors

Théorème 4.17. ([27]) *Soit $a_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la solution de (4.30). On définit*

$$\alpha = \log |a_0|, \quad \beta = \frac{1}{2i} \log \frac{a_0}{\bar{a}_0},$$

on considère la transformation unitaire $T(s)$ donnée par

$$T(s) = e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i\alpha(s)D}, \quad \text{où } D = -\frac{i}{2}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x),$$

et $U(s, \tau)$ l'opérateur unitaire d'évolution de $-\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}R(s)x^2$, i.e. $U(s, \tau)\varphi$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} (i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}R(s)x^2)u = 0, \\ u(\tau, x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Alors pour tous $s, \tau \in \mathbb{R}$

$$U(s, \tau) = T(s)e^{-i(\beta(s) - \beta(\tau))H}T(\tau)^{-1}.$$

Voyons à présent comment va intervenir l'Hypothèse 2 dans la preuve du Théorème 4.16. D'après la théorie de Floquet, il existe une fonction 2π -périodique P telle que $a_0(s) = e^{i\frac{\lambda}{2\pi}s}P(s)$. Il s'ensuit que les fonctions α et $\theta : s \mapsto \beta(s) - \frac{\lambda}{2\pi}s$ sont 2π -périodiques.

Soient $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ les fonctions d'Hermite qui sont les fonctions propres de H ; elles forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Un calcul montre que

$$U(s, 0)\varphi_k(x) = e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i(\frac{1}{2}+k)\beta(s)} e^{-\frac{1}{2}\alpha(s)} \varphi_k(xe^{-\alpha(s)}), \quad (4.31)$$

et par suite

$$w_k(s, x) = U(s, 0)\varphi_k(x), \quad (4.32)$$

est solution de

$$(i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}R(s)x^2 - E_0)w_k = 0, \quad (4.33)$$

et vérifie la condition $w_k(s + 2\pi, x) = w_k(s, \omega x)$, si $E_0 = E_0(k)$ est de la forme

$$E_0(k) = -\frac{1}{4\pi}\lambda + \frac{1}{2}k(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi}), \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}. \quad (4.34)$$

Fixons $k_0 \in \mathbb{N}$, i.e. un niveau d'énergie et $v_0 = w_{k_0}$. La construction de $(v_p)_{p \geq 1}$ se fait alors par une décomposition selon les modes $(w_j)_{j \geq 1}$: pour chaque équation du système (4.29), on montre qu'il existe un choix (unique) de $E_p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ pour qu'il existe une solution $v_p \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ vérifiant en outre $v_p(s+2\pi, x) = v_p(s, \omega x)$. La condition de non dégénérescence (4.23) intervient dans les questions de sommabilité.

Soient $\kappa > 0$, $0 < \sigma < \frac{1}{4}$ et $\delta = \kappa h^\sigma$. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty([-r_0, r_0])$ une fonction plateau. On peut alors définir l'Ansatz

$$u_{\text{app}}^\kappa(t, s, r) = \kappa h^{\sigma - \frac{1}{4}} e^{-i\lambda_3 t} \chi(r) e^{i\frac{s}{h}} (v_0 + h^{\frac{1}{2}} v_1 + h v_2 + h^{\frac{3}{2}} v_3) \left(s, \frac{r}{\sqrt{h}}\right), \quad (4.35)$$

où les v_j et λ_3 sont donnés par le Théorème 4.16.

Estimation de l'erreur et instabilité

Proposition 4.18. (*Proposition 13.1, p. 97*) Soient u_{app}^κ donnée par (4.35) et $u = u^\kappa$ la solution de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \varepsilon |u|^2 u, \\ u(0, x) = u_{\text{app}}^\kappa(0, x). \end{cases}$$

Alors $\|u_{\text{app}}^\kappa\|_{H^\sigma} \sim 1$ et

$$\|(u^\kappa - u_{\text{app}}^\kappa)(t_h)\|_{H^\sigma} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \longrightarrow 0,$$

avec $t_h \sim h^{\frac{1}{2} - 2\sigma} \log(\frac{1}{h})$.

La Proposition 4.18 est obtenue avec la méthode classique d'énergie.

On est à présent en mesure de conclure la preuve du Théorème d'instabilité 4.15. Comme dans la démonstration du Corollaire 4.13, on peut choisir une suite $\kappa_h \longrightarrow \kappa$ telle que

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|(u_{\text{app}}^\kappa - u_{\text{app}}^{\kappa_h})(t_h)\|_{H^\sigma} \gtrsim 1.$$

Enfin, considérons les deux suites de solutions u^κ et u^{κ_h} de (4.1). Alors, d'après la Proposition 4.18 on a

$$\|(u^\kappa - u^{\kappa_h})(0)\|_{H^\sigma} \sim |\kappa - \kappa_h| \longrightarrow 0,$$

et

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|(u^\kappa - u^{\kappa_h})(t_h)\|_{H^\sigma} \gtrsim 1,$$

d'où le résultat.

Remarque 4.19. En appliquant la Proposition 4.5 on peut montrer que le flot de (4.1) n'est pas de classe \mathcal{C}^3 si $\sigma < \frac{1}{4}$, simplement en utilisant la description du quasimode linéaire (cas $\varepsilon = 0$) donné en (4.25).

Par soucis de simplicité, considérons le cas modèle de l'harmonique sphérique $\psi_N(x) = N^{\frac{1}{4}}(x_1 + ix_2)^N = N^{\frac{1}{4}} e^{iNs} e^{-Nr^2(1+o(1))/2}$ associée à la valeur propre $-N(N+1)$ de $\Delta_{\mathbb{S}^2}$,

| Variété | Bien posé | Instabilité |
|---|------------------------------------|-------------------------|
| $(\mathbb{H}^2, \text{can})$ | $\sigma > 0$ | $\sigma < 0$ |
| (\mathbb{R}^2, g) , g non captante ¹ | $\sigma > 0$ | $\sigma < 0$ |
| (M, g) compacte | $\sigma > \frac{1}{2}$ | $\sigma < -\frac{1}{2}$ |
| $(\mathbb{T}^2, \text{can})$ rationnel | $\sigma > 0$ | $\sigma < 0$ |
| $(\mathbb{S}^2, \text{can})$ | $\sigma > \frac{1}{4}$ | $\sigma < \frac{1}{4}$ |
| (M, g) , Hyp. 1 et 2 | $\sigma > \frac{1}{2}$ si compacte | $\sigma < \frac{1}{4}$ |

¹ à cela il faut ajouter les conditions (4.3) et (4.4).

FIG. 3 – Synthèse des résultats de régularité dans H^σ pour (4.1)

et normalisée dans $L^2(\mathbb{S}^2)$.

En utilisant les notations de la Définition 4.4, on a pour tous $N, L \geq 1$

$$v_N = e^{it\Delta} P_N \psi_N = e^{-iN(N+1)t} \psi_N, \quad (4.36)$$

et

$$\|v_N v_L\|_{L^2([0,1] \times \mathbb{S}^2)}^2 \sim N^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(N+L)r^2} dr \sim \frac{N^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{N+L}} \sim \min(N, L)^{\frac{1}{2}} \|v_N\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 \|v_L\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2 \quad (4.37)$$

ce qui nie toute estimation de Strichartz bilinéaire d'ordre $\sigma < \frac{1}{4}$.

4.6 Autre phénomène d'instabilité et perspectives

On commence par présenter un phénomène d'instabilité dans H^σ pour $\sigma < 0$, mis en évidence sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de dimension un par M. Christ, J. Colliander et T. Tao [24].

Soit l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \varepsilon |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \text{ avec } \varepsilon = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.38)$$

On peut définir la norme de $H^\sigma(\mathbb{T})$ par

$$\|f\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|)^{2\sigma} |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{avec } \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx.$$

Leur résultat peut alors s'écrire

Théorème 4.20. ([24]) *Soit $\sigma < 0$. Il existe une solution u de (4.38) telle que $\|u(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \sim 1$, une suite $\delta_n \rightarrow 0$ et une suite u_n de solutions de (4.38) telles que*

$$\|u_n(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \sim 1 \quad \text{et} \quad \|(u - u_n)(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{T})} \sim \delta_n,$$

alors que, uniformément en n

$$\sup_{0 \leq t \leq \delta_n} |\widehat{u(t)}(0) - \widehat{u}(t)(0)| > c.$$

Ce résultat montre en particulier que le flot n'est pas continu de $H^\sigma(\mathbb{T})$ dans $H^\rho(\mathbb{T})$, même si ρ est arbitrairement négatif. Ce phénomène d'instabilité est plus violent que celui étudié au Paragraphe 4.4 : En effet, on compare ici une solution fixe à une suite de solutions, et non plus deux suites de solutions. De plus on montre une perte de régularité pour le flot. Ce mécanisme n'est pas causé par un transfert d'énergie des hautes vers les basses fréquences (voir [23],[39] et page 39).

Pour établir ce théorème, les auteurs considèrent la solution de (4.38) telle que $u(0, x) = 1$, i.e. $u(t, x) = e^{-i\varepsilon t}$, et la suite de solutions u_n de donnée $u_n(0, x) = 1 + \delta_n n^{-\sigma} e^{inx}$, où $\delta_n \rightarrow 0$ sera choisie par la suite. Notons que ces données sont normalisées dans $H^\sigma(\mathbb{T})$. Ils approchent alors la fonction u_n par

$$u_n^{\text{app}}(t, x) = e^{-i\varepsilon(1+2\delta_n^2 n^{-2\sigma})t} + \delta_n n^{-\sigma} e^{-i\varepsilon(2+\delta_n^2 n^{-2\sigma})t} e^{inx - in^2 t}, \quad (4.39)$$

qui est la solution de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \varepsilon P_n(|P_n u|^2 P_n u), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ u(0, x) = u_n(0, x), \end{cases}$$

où P_n est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(1, e^{inx})$.

À l'aide d'une estimation d'énergie, on établit que l'approximation de u_n par u_n^{app} est pertinente pour des temps $t_n \ll n^{2\sigma} \log n$. À la vue de (4.39), il suffit donc de choisir δ_n telle que $\delta_n n^{-2\sigma} t_n \rightarrow \infty$ pour montrer l'instabilité selon le mode 1.

Ce qui rend ici les choses favorables est que si la donnée $u_n(0, x)$ est portée par les modes 1 et e^{inx} , alors la solution est (pour des temps petits) par les modes $(e^{iknx})_{k \in \mathbb{Z}}$, ce qui crée un trou spectral et permet d'obtenir de bonnes estimations.

Par ailleurs, M. Christ [22] a étudié l'équation modifiée

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = \varepsilon(|u|^2 - 2\|u\|_{L^2(\mathbb{T})}^2)u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \text{ avec } \varepsilon = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (4.40)$$

que l'on peut déduire de (4.38) par le changement d'inconnues $v = e^{2it\mu}u$, avec $\mu = \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2$ qui est constant si u est assez régulière.

Il montre que pour tous $p \in [1, \infty[$ et $\sigma \geq 0$ l'équation (4.38) est uniformément bien posée dans

$$\mathcal{H}^{\sigma,p}(\mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}), \langle \cdot \rangle^\sigma \widehat{f}(\cdot) \in l^p(\mathbb{Z})\}$$

muni de la norme naturelle. En particulier, les espaces $\mathcal{H}^{\sigma,p}(\mathbb{T})$ ont la même homogénéité que $H^{\sigma(p)}(\mathbb{T})$ avec $\sigma(p) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{p}$. Ainsi, pour $p > 2$ on obtient un résultat qui est en un certain sens pour des régularités négatives.

Il serait à présent intéressant de regarder si le phénomène d'instabilité persiste en

dimension supérieure. Par exemple sur la sphère \mathbb{S}^2 , on peut essayer de comparer les solutions de données

$$u(0, x) = 1 \quad \text{et} \quad u_n(0, x) = 1 + \delta_n n^{\frac{1}{4}-\sigma} (x_1 + ix_2)^n.$$

En suivant la méthode précédente, on peut obtenir un Ansatz analogue à u_n^{app} , mais de nouvelles difficultés nous empêchent de montrer qu'il approche bien u_n pour des temps où l'instabilité se produit. Notamment :

1. On a $\|u_n^{\text{app}}(t)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \sim \delta_n n^{\frac{1}{4}-\sigma}$ (contre $\sim \delta_n n^{-\sigma}$ dans le cas \mathbb{T}), ce qui nuit dans les estimations d'énergies,
2. On n'a plus idée de quels modes sont vraiment excités instantanément.

Il semble donc qu'il faille un Ansatz plus précis pour comprendre le phénomène. De plus on peut espérer que le problème modifié est moins instable et donc que la convergence de la solution approchée y est plus facile à montrer.

5 Instabilités surcritiques

Dans cette section, on s'intéresse au problème

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = \varepsilon |u|^{p-1} u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \text{ avec } \varepsilon = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x) \in X, \end{cases} \quad (5.1)$$

où p est un entier impair et (M^d, g) est une variété riemannienne de dimension d . Comme on l'a déjà vu au Paragraphe 1.2, cette équation admet une énergie

$$H(u)(t) = \int_{M^d} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\varepsilon}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx, \quad (5.2)$$

qui est conservée au cours du temps, si u est une solution est assez régulière. Il est donc naturel d'étudier (5.1) dans les espaces $X = H^\sigma(M^d)$ ou $X = H^1(M^d) \cap L^{p+1}(M^d)$ qui est l'espace d'énergie.

5.1 Position du problème

Commençons par regarder ce qui se passe si $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$, i.e. considérons le problème

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \varepsilon |u|^{p-1} u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \text{ avec } \varepsilon = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x) \in X. \end{cases} \quad (5.3)$$

Soit u une solution de (5.3), alors u^λ définie par $u^\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est également une solution quel que soit $\lambda > 0$. Définissons l'indice σ_c (indice critique de régularité) par

$$\sigma_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}, \quad (5.4)$$

de sorte à ce que l'espace homogène $\dot{H}^{\sigma_c}(\mathbb{R}^d)$ soit invariant par cette transformation. Par ailleurs, l'invariance Galiléenne

$$u \longmapsto e^{-ivx/2} e^{i|v|^2 t/4} u(t, x - vt), \quad v \in \mathbb{R}^d,$$

préserve l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$. De façon heuristique ([52], p. 118) on peut penser que selon que $\sigma > \max(0, \sigma_c)$ ou $\sigma < \max(0, \sigma_c)$, le problème (5.3) sera bien posé ou non. En effet, si $\sigma > \max(0, \sigma_c)$, J. Ginibre et G. Velo [31], T. Cazenave et F. B. Weissler [21] ont montré le résultat suivant

Théorème 5.1. ([31], [21])

i) Soit $\sigma > \max(0, \sigma_c)$, alors le problème (5.3) est uniformément bien posé dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d)$.

ii) En particulier, si $p < (d+2)/(d-2)$, le problème (5.3) est uniformément bien posé dans l'espace d'énergie $X = H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 5.2. *Dans le cas critique $\sigma = \sigma_c \geq 0$, les auteurs montrent que le problème (5.3) est bien posé, mais dans un sens plus faible : le temps d'existence ne dépend alors plus seulement de $\|u_0\|_{H^\sigma}$, mais du profil $e^{it\Delta} u_0$ tout entier.*

Remarque 5.3. *Les conclusions du théorème précédent restent valables dans (M^d, g) si la métrique g est non captante et vérifie les hypothèses (4.3) et (4.4).*

Soit l'équation de Schrödinger cubique unidimensionnelle

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \varepsilon |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \text{ avec } \varepsilon = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.5)$$

Récemment, M. Christ, J. Colliander et T. Tao [23] d'une part, et H. Koch et D. Tat aru [39] d'autre part, ont de façon indépendante, obtenu des bornes a priori sur les solutions de (5.5) dans des espaces $H^\sigma(\mathbb{R})$ à régularité négative ($\sigma > -\frac{1}{12}$ dans [23] et $\sigma \geq -\frac{1}{6}$ dans [39]). Ils obtiennent alors

Théorème 5.4. *([23],[39]) Soit $s \geq -\frac{1}{6}$. Pour tout $M > 0$, il existe $T > 0$ et $C > 0$ tel que pour toute donnée $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq M$, il existe une solution $u \in \mathcal{C}((0, T); H^s(\mathbb{R}))$ à l'équation (5.5). Et elle vérifie*

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; H^s(\mathbb{R}))} \leq C \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (5.6)$$

La question de l'unicité reste ouverte. De même, il reste à comprendre ce qu'il se passe pour $-\frac{1}{2} < \sigma \leq \frac{1}{6}$.

Étudions à présent la dynamique de l'équation (5.3), et plus généralement celle de (5.1), lorsque $\sigma < \max(0, \sigma_c)$.

5.2 Résultats d'instabilités antérieurs

Les premiers résultats d'instabilité pour (5.3) ont  e t e obtenus par M. Christ, J. Colliander et T. Tao [25], [26].

Leur premier résultat infirme l'uniforme continuité du flot de l'équation (5.3).

Théorème 5.5. *([25]) Soit $p \geq 3$ un entier impair et $d \geq 1$. On suppose que $\sigma < \max(0, \sigma_c)$. Alors il existe une suite de solutions u_n et \widetilde{u}_n de (5.3) et une suite de temps $t_n \longrightarrow 0$ tel que*

$$\|u_n(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \lesssim 1, \quad \|\widetilde{u}_n(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \lesssim 1 \quad \text{et} \quad \|(u_n - \widetilde{u}_n)(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0,$$

alors que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(u_n - \widetilde{u}_n)(t_n)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \gtrsim 1.$$

Remarque 5.6. *Notons ici que $\sigma_c < 0$ est uniquement r ealis e si $(p, d) = (3, 1)$; et $\sigma_c = 0$ si $(p, d) = (5, 1)$ ou $(p, d) = (3, 2)$.*

Si de plus $\sigma > 0$ ou $\sigma \leq -\frac{d}{2}$, ils mettent en évidence le phénomène d'inflation de norme suivant

Théorème 5.7. *([25]) Soit $p \geq 3$ un entier impair et $d \geq 1$. On suppose que $0 < \sigma < \sigma_c$ ou $\sigma \leq -\frac{d}{2}$. Alors il existe une suite de solutions u_n de (5.3) et une suite de temps $t_n \longrightarrow 0$ tel que*

$$\|u_n(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|u_n(t_n)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow +\infty.$$

Pour prouver ces résultats, l'idée est se placer dans un régime où le terme Δu est négligeable devant les autres dans (5.3). On peut alors approcher les solutions de l'équation (5.3) par celles de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} i\partial_t v = \varepsilon |v|^{p-1} v, & (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \\ v(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.7)$$

qui sont

$$v(t, x) = u_0(x) e^{-i\varepsilon t |u_0(x)|^{p-1}}.$$

Pour la preuve du Théorème 5.5 dans le cas $\sigma < 0$, les auteurs considèrent deux suites de données de la forme

$$u_n^j(0, x) = (1 + j \delta_n) |\mathbf{v}_n|^{-\sigma} n^{-\frac{d}{2}} e^{-i\mathbf{v}_n x/2} \varphi\left(\frac{x}{n}\right), \quad j = 0, 1,$$

où $\delta_n \rightarrow 0$, $|\mathbf{v}_n| \rightarrow \infty$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nous ne donnons aucun détail ici, notons seulement qu'on utilise l'invariance Galiléenne et que les données sont supportées dans une boule de rayon $\sim n$, contrairement à ce qui suivra.

En effet donnons maintenant l'argument de la démonstration du Théorème 5.7.

Supposons que $0 < \sigma < \sigma_c$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on considère la suite de données

$u_n(0, x) = \delta_n n^{\frac{d}{2}-\sigma} \varphi(nx)$ avec $\delta_n \rightarrow 0$ que l'on choisira plus tard. Alors $\|v_n(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \sim \delta_n$,

$$v_n(t, x) = \delta_n n^{\frac{d}{2}-\sigma} \varphi(nx) e^{-i\varepsilon t |\delta_n n^{\frac{d}{2}-\sigma} \varphi(nx)|^{p-1}},$$

et donc

$$\|v_n(t)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \sim \delta_n \langle t \delta_n^{p-1} n^{(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} \rangle^\sigma \quad (5.8)$$

Il suffit maintenant de trouver des temps $t_n \rightarrow 0$ tels que le terme précédent tende vers l'infini et tels que v_n approche bien u_n pour $t \in [0, t_n]$. On introduit donc $w_n = u_n - v_n$ qui vérifie l'équation

$$i\partial_t w_n + \Delta w_n = \varepsilon (|w_n + v_n|^{p-1} (w_n + v_n) - |v_n|^{p-1} v_n) - \Delta v_n, \quad w_n(0, x) = 0, \quad (5.9)$$

et on montre alors que $\|w_n(t)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ pour $t \in [0, t_n]$.

Pour $k > \frac{d}{2}$, on introduit

$$E_n(t) = n^\sigma (\|w_n(t)\|_{L^2}^2 + n^{-2k} \|w_n(t)\|_{H^k}^2)^{\frac{1}{2}},$$

qui contrôle $\|w_n(t)\|_{H^\sigma}$ et permet d'obtenir des estimations des termes non linéaires de (5.9). Soit $t_n \geq 0$. À l'aide d'estimations d'énergie, et en utilisant la forme explicite de v_n , on obtient, pour tout $0 \leq t \leq t_n$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_n(t) &\lesssim \delta_n^{p-1} n^{(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} \langle t_n \delta_n^{p-1} n^{(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} \rangle^k E_n(t) + n^{(k-\sigma)(p-1)} E_n^p(t) \\ &\quad + \delta_n n^2 \langle t_n \delta_n^{p-1} n^{(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} \rangle^{k+2}. \end{aligned}$$

Si l'on oublie le terme non linéaire dans l'inéquation précédente, avec l'inégalité de Gronwall on déduit

$$E_n(t) \lesssim n^{2-(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} \delta_n^{2-p} \langle t_n \delta_n^{p-1} n^{(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} \rangle^2 \exp \left(C t \delta_n^{p-1} n^{(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} \langle t_n \delta_n^{p-1} n^{(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} \rangle^k \right). \quad (5.10)$$

Il existe alors $\eta_1, \eta_2 > 0$, tel que en choisissant

$$t = t_n = \delta_n^{1-p} n^{-(\frac{d}{2}-\sigma)(p-1)} (\log n)^{\eta_1} \quad \text{et} \quad \delta_n = (\log n)^{-\eta_2},$$

le terme dans (5.8) tend vers l'infini et celui de (5.10) vers 0, pourvu que

$$2 - \left(\frac{d}{2} - \sigma\right)(p-1) < 0, \quad \text{i.e.} \quad \sigma < \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1} = \sigma_c.$$

Enfin, pour terminer l'étude, on a recours à un argument de continuité ou *bootstrap*. Dans le cas $\sigma \leq -\frac{d}{2}$ l'argument est analogue, en utilisant également des données concentrées en 0.

Cette démonstration s'étend sans difficulté au cas d'une variété riemannienne (M^d, g) . Fondamentalement, tout se passe au voisinage de l'origine, donc aucun effet géométrique n'intervient.

Par ailleurs, G. Lebeau [42, 41] (voir également [43]) a montré des résultats d'instabilité pour des équations d'ondes défocalisantes non linéaires.

Soit p un entier impair, et soit l'équation

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_g u + u^p = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x). \end{cases} \quad (5.11)$$

Cette équation admet une énergie

$$E(u, \partial_t u) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} |\partial_t u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} u^{p+1},$$

qui est formellement conservée pour une solution de (5.11). Il obtient alors les résultats suivants

Théorème 5.8. ([42]) *Soient $d = 3$ et $p \geq 7$ un entier impair. Alors il existe deux suites de données de Cauchy $(u_n(0), \partial_t u_n(0))$ et $(v_n(0), \partial_t v_n(0))$ et une suite de temps $t_n \rightarrow 0$ telles que*

$$E(u_n(0), \partial_t u_n(0)) \lesssim 1, \quad E(v_n(0), \partial_t v_n(0)) \lesssim 1,$$

et

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}, \quad \left\| |x|^k (u_n - v_n, \partial_t u_n - \partial_t v_n)(0) \right\|_{H^\sigma \times H^{\sigma-1}} \rightarrow 0,$$

et telles que les solutions u_n et v_n de (5.11) vérifient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |(u_n - v_n)(t_n)|^{p+1} dx \geq c > 0.$$

Théorème 5.9. ([41]) Soient $d \geq 1$, p un entier impair et $1 < \sigma < \sigma_c$. Alors il existe un couple $(u_0, u_1) \in H^\sigma \times \mathcal{C}_0^\infty$ de données de Cauchy et une suite de temps $t_n \rightarrow 0$ telles que

$$\|u(t_n)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \text{ pour tout } \rho \in]I(\sigma), \sigma],$$

où $I(\sigma)$ est définie par

$$I(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < \sigma \leq \frac{d}{2} - \frac{d}{p+1}, \\ \frac{\sigma}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2}-\sigma)} & \text{si } \frac{d}{2} - \frac{d}{p+1} \leq \sigma < \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}. \end{cases} \quad (5.12)$$

Le résultat du Théorème 5.8 constitue plus qu'une simple décohérence des solutions, il faut plutôt comprendre ce phénomène comme une perte de régularité. Dans le cas plus général $d \geq 3$, la condition sur la non-linéarité s'écrit $p > (d+2)/(d-2)$ (voir Théorème 5.1), de sorte que $L^{p+1}(\mathbb{R}^d) \not\subset H^1(\mathbb{R}^d)$.

Le Théorème 5.9 montre également une perte de régularité, mais dans des espaces de Sobolev. À noter ici que l'on considère une seule condition initiale, et non pas une suite. Les idées des preuves seront données au Paragraphe 5.5.

Il est à présent naturel de voir si de tels résultats peuvent être obtenus pour l'équation de Schrödinger. Une des différences fondamentales entre les deux équations est que les ondes propagent à vitesse finie. Cependant, en travaillant dans un cadre semi-classique, on sera néanmoins à même de contrôler les supports des solutions pour Schrödinger.

5.3 Principaux résultats obtenus dans cette thèse

Instabilité dans l'espace d'énergie

On définit

$$H^+(u) = \int_{M^d} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx. \quad (5.13)$$

Théorème 5.10. (Théorème 14.2, p. 107) Soient $p > (d+2)/(d-2)$ un entier impair, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, et H^+ donné par (5.13). Soit $m \in M^d$. Alors il existe une suite positive $r_n \rightarrow 0$, deux suites $u_n(0), \tilde{u}_n(0) \in \mathcal{C}_0^\infty(M^d)$ de données de Cauchy supportées dans la boule $\{|x-m|_g \leq r_n\}$, ainsi qu'une suite de temps $t_n \rightarrow 0$ et des constantes $c, C > 0$ telles que

$$H^+(u_n(0)) \leq C, \quad H^+(\tilde{u}_n(0)) \leq C, \quad (5.14)$$

$$H^+(u_n(0) - \tilde{u}_n(0)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad (5.15)$$

et tel que les solutions u_n, \tilde{u}_n de (5.1) satisfont

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{M^d} |(u_n - \tilde{u}_n)(t_n)|^{p+1} dx > c. \quad (5.16)$$

De plus les suites $u_n(0), \tilde{u}_n(0)$ peuvent être choisies de sorte à ce qu'il existe $\nu_0 > 0$ et $q_0 > p+1$, tel que $0 \leq \nu < \nu_0$ et $p+1 \leq q < q_0$,

$$\|u_n(0) - \tilde{u}_n(0)\|_{H^{1+\nu}(M^d)} + \|u_n(0) - \tilde{u}_n(0)\|_{L^q(M^d)} \rightarrow 0. \quad (5.17)$$

Instabilité dans les espaces de Sobolev

Théorème 5.11. (Théorème 14.3, p. 108) Supposons que $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$. Soient $d \geq 1$, $p \geq 3$ un entier impair, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $0 < \sigma < d/2 - 2/(p-1)$. Il existe une suite $\check{u}_n(0) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ de données de Cauchy et une suite de temps $\tau_n \rightarrow 0$ telles que

$$\|\check{u}_n(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad (5.18)$$

et tel que la solution \check{u}_n de (5.3) satisfait

$$\|\check{u}_n(\tau_n)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \text{ pour tout } \rho \in \left] \frac{\sigma}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2} - \sigma)}, \sigma \right]. \quad (5.19)$$

Dans le cas général, on obtient un résultat un peu plus faible

Théorème 5.12. (Théorème 14.4, p. 108) Soient $d \geq 1$, $p \geq 3$ un entier impair, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $0 < \sigma < d/2 - 2/(p-1)$. Soit $m \in M^d$. Alors il existe une suite positive $r_n \rightarrow 0$ et une suite $\check{u}_n(0) \in C_0^\infty(M^d)$ de données de Cauchy supportées dans $\{|x - m|_g \leq r_n\}$, ainsi qu'une suite de temps $\tau_n \rightarrow 0$ telles que

$$\|\check{u}_n(0)\|_{H^\sigma(M^d)} \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

alors que la solution \check{u}_n de (5.1) vérifie

$$\|\check{u}_n(\tau_n)\|_{H^\rho(M^d)} \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \text{ pour tout } \rho \in \left] I(\sigma), \sigma \right],$$

où $I(\sigma)$ est définie par

$$I(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} & \text{si } 0 < \sigma \leq \frac{d}{2} - \frac{4}{p-1}, \\ \frac{\sigma}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2} - \sigma)} & \text{si } \frac{d}{2} - \frac{4}{p-1} \leq \sigma < \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Dans le cas défocalisant avec $p = 3$, le Théorème 5.11 a également été obtenu par R. Carles [19] en utilisant la convergence de la méthode WKB pour les données de classe C^∞ .

Soit l'équation semi-classique

$$ih\partial_t v + h^2 \Delta v = |v|^{p-1} v. \quad (5.21)$$

T. Alazard and R. Carles [2] montrent que pour toute condition initiale non triviale $v(0, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la solution v de (5.21) se met à osciller immédiatement : il existe $\tau > 0$ tel que

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \| |h\nabla|^s v(\tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} > 0,$$

pour tout $s \in]0, 1]$. Ceci induit le résultat du Théorème 5.11 dans le cas défocalisant pour toute donnée de Cauchy à l'équation (5.21), régulière et non oscillante.

Définissons σ_{sob} l'indice de Sobolev tel que $\dot{H}^{\sigma_{\text{sob}}}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, i.e.

$$\sigma_{\text{sob}} = \frac{d}{2} - \frac{d}{p+1}. \quad (5.22)$$

| Valeurs de σ | $\sigma < -\frac{d}{2}$ | $-\frac{d}{2} < \sigma < 0$ | $0 < \sigma < \sigma_c$ | $\sigma_c < \sigma$ |
|---------------------|-------------------------|-----------------------------|---------------------------------|---------------------|
| Problème (5.1) | Mal posé | Instable | Mal posé avec perte de dérivées | Bien posé |

FIG. 4 – Synthèse des résultats de régularité dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ pour (4.1), lorsque $\sigma_c > 0$

Supposons que $p > (d+2)/(d-2)$, alors $\sigma_{\text{sob}} < \sigma_c$. Comme l'ont remarqué N. Burq, R. Carles et G. Lebeau, pour $\sigma = \sigma_{\text{sob}}$, le Théorème 5.11 donne

$$\|\check{u}_n(0)\|_{H^{\sigma_{\text{sob}}}(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad \|\check{u}_n(\tau_n)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow +\infty,$$

pour tout $\rho \in]1, \sigma_{\text{sob}}]$ (et donc pour tout $\rho \in]1, +\infty[$), intervalle qui ne peut pas être élargi à gauche. En effet, si $\rho \leq 1$, en utilisant la conservation de la masse et de l'énergie et l'injection $\dot{H}^{\sigma_{\text{sob}}}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, on obtient que pour tout $\tau > 0$

$$\|\check{u}_n(\tau)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0.$$

Le Théorème 5.11 n'est pas une simple conséquence du Théorème 5.10. En fait, dans le cas défocalisant, les suites construites avec $\sigma = 1$ et vérifiant

$$\|\check{u}_n(0)\|_{H^1(M^d)} \longrightarrow 0, \quad \|\check{u}_n(\tau_n)\|_{H^1(M^d)} \longrightarrow +\infty,$$

sont telles que $H^+(\check{u}_n(0)) \longrightarrow +\infty$, lorsque n tend vers l'infini.

5.4 Méthodes employées

Problèmes de convergence de la méthode WKB

Pour commencer, plaçons-nous dans le cas $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$. Suivant les idées de G. Lebeau [42] pour les ondes et de R. Carles [19] pour Schrödinger, nous transformons l'équation (5.3) en une équation semi-classique. Faisons ainsi le changement de variables et de fonction inconnue

$$\begin{cases} t = \hbar^\alpha s, & x = \hbar z, & h = \hbar^\beta, \\ u(\hbar^\alpha s, \hbar z) = \hbar^\gamma v(s, z, h), \end{cases} \quad (5.23)$$

où $h \in]0, 1]$ est un petit paramètre et $\beta > 0$ qui l'on précisera par la suite. Si on choisit

$$\alpha = \beta + 2, \quad (p-1)\gamma = -2(\beta+1), \quad (5.24)$$

on est amené à étudier le problème de Cauchy

$$\begin{cases} ih\partial_s v(s, z) + h^2\Delta v(s, z) = \varepsilon|v|^{p-1}v(s, z), \\ v(0, z) = v_0(z). \end{cases} \quad (5.25)$$

La méthode WKB, ou méthode de l'optique géométrique consiste alors à chercher une solution de l'équation sous la forme

$$v(s, z, h) = a(s, z, h)e^{iS(s, z)/h}, \quad v(0, z, h) = v_0(z, h) = a^0(z, h)e^{iS^0(z)/h}, \quad (5.26)$$

où l'amplitude a s'écrit formellement

$$a(s, z, h) = \sum_{j \geq 0} a_j(s, z) h^j, \quad a(0, z, h) = a^0(z, h) = \sum_{j \geq 0} a_j^0(z) h^j, \quad (5.27)$$

Ainsi, la fonction v est une solution formelle de (5.25) si le couple (S, a) vérifie le système suivant

$$\begin{cases} \partial_s S + (\nabla S)^2 + \varepsilon |a_0|^{p-1} = 0, \\ \partial_s a + 2\nabla S \cdot \nabla a + a \Delta S - ih \Delta a + \frac{i\varepsilon a}{h} (|a|^{p-1} - |a_0|^{p-1}) = 0, \\ S(0, z) = S^0(z), \quad a(0, z, h) = a^0(z, h), \end{cases} \quad (5.28)$$

où $v(0, z, h) = a^0(z, h) e^{iS^0(z)/h}$.

La question que l'on se pose est : La somme tronquée $v_N = e^{iS/h} \sum_{j=0}^N a_j h^j$ approche-t-elle une solution de (5.25) avec une erreur $\mathcal{O}(h^N)$, lorsque h tend vers 0, sur un intervalle de temps indépendant de h ?

On peut avoir l'approche élémentaire, qui consiste à identifier les coefficients de chacune des puissances h^j , pour $0 \leq j \leq N$, et de résoudre le système obtenu (de taille $N+1$), en espérant ainsi obtenir une bonne solution approchée de l'équation (5.25) pour N grand.

Mais on se heurte alors à deux difficultés :

1. Si $p > 1$ et $\varepsilon \neq 0$, le système obtenu n'est pas fermé, i.e. l'équation donnant a_j fait intervenir a_{j+1} ;
2. Quand bien même on dispose d'une telle solution approchée, via la méthode d'énergie, on n'est capable de justifier sa pertinence que pour des temps de l'ordre $\sim Nh \log \frac{1}{h}$, qui restent donc négligeables devant 1.

Néanmoins, certains cas sont compris.

E. Grenier [32] prouve la convergence de la méthode dans le cas défocalisant ($\varepsilon = 1$) cubique ($p = 3$), si les données sont dans H^σ , pour $\sigma > d/2 + 2$. Pour ce faire, il utilise une méthode de symétrisation pour le système hyperbolique vérifié par $(\varphi, a) = (\nabla S, a)$. Dans le cas focalisant ($\varepsilon = -1$), le système n'est pas symétrisable.

Récemment, T. Alazard et R. Carles [1] ont donné une justification de la méthode pour des données H^∞ , dans le cas défocalisant. Pour $p > 3$, le système précédent n'est plus symétrisable, mais avec un changement d'inconnues non linéaire les auteurs se ramènent à un système symétrique. Puis la preuve repose sur l'utilisation d'une fonctionnelle d'énergie modulée ; cet argument nécessite également que la non-linéarité soit défocalisante.

P. Gérard [28] s'est placé sur le tore $(\mathbb{T}^d, \text{can})$ et a traité le cas des données analytiques, avec une non-linéarité quelconque, préservant l'invariance de jauge. Nous nous inspirons de sa preuve pour l'adapter au cas $(\mathbb{R}^d, \text{can})$, puis au cas d'une variété analytique (M^d, g) .

Fonctions holomorphes

Comme dans [28], nous allons résoudre le système (5.28) par une méthode de point fixe dans un cadre analytique. Le choix des espaces sera inspiré de formes abstraites du théorème de Cauchy-Kowalevski dans une chaîne d'espaces de Banach [6].

D'emblée, donnons la définition suivante due à J. Sjöstrand.

Définition 5.13. (*Symbole analytique*)

On dit que la série formelle $b(s, z, h) = \sum_{j \geq 0} b_j(s, z)h^j$ est un symbole analytique, s'il existe des constantes $s_0, l, A, B > 0$ telles que pour tout $j \geq 0$

$$(s, z) \mapsto b_j(s, z) \text{ est holomorphe sur } \{|s| < s_0\} \times \{|Im z| < l\}, \quad (5.29)$$

et

$$|b_j(s, z)| \leq AB^j j! \text{ sur } \{|s| < s_0\} \times \{|Im z| < l\}. \quad (5.30)$$

Insistons sur le fait que b doit être analytique à la fois en la variable s et z .

Si f est une fonction holomorphe, d'après la formule de Cauchy, il existe $A, B > 0$ tels que $|f^{(j)}(Z)| \leq AB^j j!$ pour Z dans une petite boule; ceci motive la condition (5.30).

Comme nous travaillerons avec des normes de Sobolev, il faut nous assurer que les fonctions obtenues soient petites à l'infini en la variable $Im z$. Ainsi introduisons le poids

$$W(z) = e^{(1+z^2)^{1/2}}, \quad (5.31)$$

qui est analytique pour $Im z < 1/2$, et considérons l'espace $\mathcal{H}(s_0, l, B)$ des symboles analytiques satisfaisant

$$|W(z)b_j(s, z)| \leq AB^j j! \text{ dans } \{|s| < s_0\} \times \{|Im z| < l\}, \forall j \geq 0, \quad (5.32)$$

avec $l < 1/2$ désormais fixé.

Soient $\varepsilon_0 < 1/B$ fixé et $0 < h < \varepsilon_0$. Pour $0 \leq \theta \leq 1$, introduisons les normes

$$\|b\|_\theta = \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_0^j}{j!} \sup_{0 < \tau < 1} \sup_{|s| < s_0(1-\tau)} \sup_{|Im z| < l\tau} |W(z)b_j(s, z)| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0}\right)^{j+\theta},$$

chacune d'entre elles faisant de $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s_0, l, B)$ un espace complet. On notera $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}(0, l, B)$ l'espace des conditions initiales muni des normes naturelles.

Les propriétés principales des normes $\|\cdot\|_\theta$ sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 5.14. (*Lemmes 15.2, p. 112 et 15.3, p. 113*)

i) Il existe $C > 0$ tel que pour tous $\theta, \theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ tels que $\theta = \theta_1 + \theta_2$ et $b^1, b^2 \in \mathcal{H}$

$$\|b^1 b^2\|_\theta \leq C \|b^1\|_{\theta_1} \|b^2\|_{\theta_2}. \quad (5.33)$$

ii) Soit ∂_s^{-1} l'opérateur

$$\partial_s^{-1} b = \int_0^s b(\sigma) d\sigma \text{ pour } b \in \mathcal{H}. \quad (5.34)$$

Alors, si A est un des opérateurs

$$b \mapsto \nabla_z b, \quad b \mapsto h\Delta_z b, \quad b \mapsto \frac{1}{h}(b - b_0),$$

il existe $C > 0$ tel que pour tous $h \in]0, \varepsilon_0[$ et $b \in \mathcal{H}$

$$\|\partial_s^{-1} Ab\|_1 \leq C s_0 \|b\|_1. \quad (5.35)$$

On étend maintenant le problème aux symboles analytiques en complexifiant les variables et on prolonge les termes $|b(s, z)|^2$ par $b(s, z)\overline{b(\bar{s}, \bar{z})}$. On obtient alors la proposition suivante.

Proposition 5.15. (*Proposition 15.5, p. 116*) (*Cas $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$*) Soient $S^0 \in \mathcal{H}^0(l, B)$ une fonction réelle analytique et $a^0 \in \mathcal{H}^0(l, B)$ un symbole analytique. Alors il existe $s_0 > 0$, une fonction réelle analytique $S \in \mathcal{H}(s_0, l, B)$ et un symbole analytique $a \in \mathcal{H}(s_0, l, B)$, de sorte que $v = ae^{iS/h}$ soit une solution formelle de l'équation (5.25) de donnée $v_0 = a^0 e^{iS^0/h}$.

Suivant des idées de la mécanique des fluides, on différencie la première équation de (5.28) en la variable d'espace et on introduit la nouvelle inconnue $\varphi = \nabla_z S$.

Pour des raisons techniques, on est amené à dériver le système (5.28) en la variable s , puis la preuve de la Proposition 5.15 se fait par un argument de point fixe dans $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_1)$ sur l'inconnue $V = (\partial_s^2 \varphi, \partial_s^2 a)$ et en utilisant les estimations du Lemme 5.14. De là on peut déduire une solution (S, a) du système initial, en utilisant que S vérifiant (5.28) est irrotationnelle.

La Proposition 5.15 montre en particulier que si l'on part d'une donnée non oscillante ($S^0 = 0$), la solution v se met, elle, immédiatement à osciller ($\nabla_z v \sim \frac{1}{h}$). Autrement dit, l'énergie cinétique $E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2} \int |h\nabla v|^2$ de v vérifie $E_{\text{cin}}(0) \sim h^2$ alors que $E_{\text{cin}}(t) \sim 1$ pour $t > 0$. C'est ce phénomène que l'on utilisera pour prouver l'instabilité du problème (5.1).

À présent on considère l'approximation donnée par la série tronquée à l'ordre n

$$v_{\text{app}}(s, z, h) = \left(\sum_{j=0}^n a_j(s, z) h^j \right) e^{iS(s, z)/h}, \quad (5.36)$$

qui par construction vérifie

$$(ih\partial_s + h^2\Delta)v_{\text{app}} = \varepsilon (v_{\text{app}} \overline{v_{\text{app}}})^{\frac{p-1}{2}} v_{\text{app}} + \mathcal{O}(h^n B^n n!)g,$$

où g est telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, et uniformément en n et h , $\|(1 - h^2\Delta)^{k/2} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \lesssim 1$, d'après les propriétés de décroissance des éléments de \mathcal{H} .

D'après la formule de Stirling,

$$h^n B^n n! \sim \sqrt{2\pi n}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{nhB}{e} \right)^n. \quad (5.37)$$

On choisit alors $0 < c_0 < e/B$ et $n = c_0/h$ que l'on suppose entier. Il existe alors $\delta > 0$ tel que v_{app} satisfait à

$$(ih\partial_s + h^2\Delta)v_{\text{app}} = \varepsilon(v_{\text{app}}\overline{v_{\text{app}}})^{\frac{p-1}{2}}v_{\text{app}} + e^{-\delta/h}\tilde{g},$$

où \tilde{g} a les mêmes propriétés que g .

Le point clef est que v_{app} est solution de (5.25) modulo une erreur $\mathcal{O}(e^{-\delta/h})$ et non pas seulement $\mathcal{O}(h^\infty)$. On définit maintenant l'Ansatz pour l'équation (5.3)

$$u_{\text{app}}(t, x) = \hbar^\gamma v_{\text{app}}(\hbar^{-\alpha}t, \hbar^{-1}x), \quad (5.38)$$

où γ et α vérifient les relations (5.24) et $h = \hbar^\beta$.

Avec un théorème de point fixe on montre alors

Proposition 5.16. (*Proposition 16.2, p. 124*) Soient u_{app} donnée par (5.38) et u la solution de

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \varepsilon|u|^{p-1}u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_{\text{app}}(0, x). \end{cases}$$

Alors il existe $s_1 > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\|u - u_{\text{app}}\|_{L^\infty([0, \hbar^\alpha s_1]; H^k(\mathbb{R}^d))} \longrightarrow 0,$$

lorsque $h \longrightarrow 0$.

La Proposition 5.16 montre que l'approximation construite est valable pour des temps $\sim \hbar^\alpha$ (ce qui correspond à des temps ~ 1 pour l'équation semi-classique (5.25)).

Traiter le cas général d'une variété ne pose pas de difficultés majeures : il faut modifier légèrement les espaces $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_\theta)$ pour prendre en compte le fait qu'on travaille dans un ouvert borné et que les coefficients du Laplacien dépendent de h . On a néanmoins recours à un argument de troncature de la solution construite, ce qui nous oblige à nous placer dans le régime $\hbar \lesssim h$ et qui induit la restriction (5.20).

Pour conclure les preuves des résultats principaux, on choisit des données non oscillantes pour l'équation semi-classique (5.25) : $a_0 \in \mathcal{H}^0$ (par exemple $a^0(z) = e^{-z^2}$) et $S^0 = 0$. Puis

- Pour le Théorème 5.10, $v_0 = a^0$ et $\tilde{v}_0 = (1 + \delta_h)a^0$ avec $\delta_h \longrightarrow 0$ bien choisie. Le choix du paramètre β est fait de telle sorte que la fonction u_{app} donnée par (5.38) est normalisée dans L^{p+1} ,
- Pour le Théorème 5.10 et 5.10, $v_0 = a^0$ et avec un bon choix de $\beta > 0$, les instabilités annoncées se produisent.

5.5 Remarques et perspectives

• Comme on l'a déjà vu, dans l'article [42], G. Lebeau met en évidence un phénomène de perte de régularité dans l'espace d'énergie pour l'équation des ondes surcritiques qui est plus violent que celui que nous obtenons pour l'équation de Schrödinger. La stratégie qu'il emploie est la suivante (voir également [43] pour un exposé plus détaillé).

D'emblée il se restreint aux fonctions radiales, puis avec un changement de variables et

d'inconnue similaire à (5.23), il se ramène à une équation semi-classique. On s'intéresse ainsi au problème

$$h^2(\partial_s^2 - \partial_r^2)v + \frac{v^p}{r^{p-1}} = 0, \quad (s, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*. \quad (5.39)$$

Grâce à une optique géométrique non linéaire, on construit une solution approchée v_{app} de (5.39). On étudie ensuite la stabilité du linéarisé de (5.39) autour de v_{app} . Après changements de variables et transformation de Fourier en espace, on est amené à regarder le comportement en temps grands de l'opérateur

$$\mathcal{M}_\lambda = \partial_s^2 + pG^{p-1}(s + s_0) + \lambda, \quad (5.40)$$

où $s_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda = h^2\xi^2$, et G est l'unique solution 2π -périodique de

$$G''(s) + G^p(s) = 0, \quad G'(0) = 0, \quad G(0) > 0.$$

Pour $\lambda > 0$, on considère l'opérateur

$$\mathbb{M}_\lambda : \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w(2\pi) \\ \partial_t w(2\pi) \end{pmatrix},$$

où w est la solution de $\mathcal{M}_\lambda w = 0$, vérifiant $w(0) = w_0$ et $\partial_t w(0) = w_1$.

À l'aide de la théorie des équations de Hill, on montre alors qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que \mathbb{M}_{λ_0} admet une valeur propre de partie réelle strictement supérieure à 1, ce qui donne l'instabilité de (5.40).

Enfin on termine la preuve en considérant des données $(v_{\text{app}}, \partial_t v_{\text{app}})(0)$ et $(v_{\text{app}}, \partial_t v_{\text{app}})(0) + \mathcal{O}(h^\infty)(a_0, a_1)$, où (a_0, a_1) est source d'instabilité pour \mathcal{M}_{λ_0} .

Ces idées permettent également d'obtenir le Théorème 5.9.

La première difficulté qui apparaît lorsque qu'on transpose cette stratégie à l'équation de Schrödinger, est que le linéarisé

$$i\partial_s w - |\xi|^2 w = \varepsilon \frac{p+1}{2} w + \varepsilon \frac{p-1}{2} e^{-2\varepsilon i t \bar{w}},$$

autour de la solution $G(t, x) = e^{-i\epsilon t}$ admet seulement des valeurs propres de partie réelle nulle, donc ne donne pas d'information sur la dynamique non linéaire. Il faudrait donc linéariser (5.1) autour d'une autre solution dont on a une bonne description, par exemple comme celles construites par l'optique géométrique non linéaire au Paragraphe 5.4. L'étude semble d'emblée plus délicate.

- On pourrait par ailleurs regarder ce que devient notre étude (à partir de la Section 5.4) si l'on fait un changement de variables anisotrope comme dans [41], [13]. Bien sûr l'intervalle du Théorème 5.11 est déjà optimal, mais peut-être ce calcul pourrait nous apprendre quelque chose.

- Enfin, il est intéressant d'étudier le temps maximal d'existence de (S, a) donné par la Proposition 5.15, et de voir s'il est de l'ordre du temps d'Ehrenfest ($\sim \log \frac{1}{h}$). Pour des données de classe \mathcal{C}^∞ on sait donner une description WKB uniquement dans le cas linéaire, mais ici on travaille dans un cadre analytique.

6 Synthèse

Voici un tableau recensant les pathologies discutées dans notre travail.

| Mécanisme | Phénomène énergétique | Conséquence | Résultats |
|--|--|--|--|
| Mécanisme EDO | Trans. hautes/basses fréq. Trans. basses/hautes fréq. | Décohérence pour $\sigma < 0$ Inflation pour $0 < \sigma < \sigma_c$ Inflation pour $\sigma \leq -\frac{d}{2}$ | Théorème 5.5 Théorème 5.7 Théorème 5.7 |
| Apparition immédiate des oscillations | Apparition de l'énergie cinétique | Perte de régularité : Dans $H^1 \cap L^{p+1}$ Dans H^σ pour $0 < \sigma < \sigma_c$ | Théorème 5.10 Théorèmes 5.11 et 5.12 |
| Linéarisé instable | Apparition de l'énergie cinétique | Perte de régularité : Dans $H^1 \cap L^{p+1}$ Dans H^σ pour $0 < \sigma < \sigma_c$ | Théorème 5.8 Théorème 5.9 |
| Concentration sur des courbes | Transfert de fréquences hautes / hautes | Décohérence dans L^2 : Décohérence dans H^σ pour $0 < \sigma < \frac{1}{4}$ Décohérence dans H^σ pour $0 < \sigma < \frac{1}{4}$ | Théorèmes 3.5 et 3.6 Théorème 4.12 Théorème 4.15 |
| Perturbation du mode 0 | / | Perte de régularité dans H^σ pour $\sigma < 0$ | Théorème 4.20 |

Bibliographie

- [1] T. Alazard et R. Carles. Supercritical geometric optics for nonlinear Schrödinger equations. *arXiv :0704.2488*.
- [2] T. Alazard et R. Carles. Sequential loss of regularity for super-critical nonlinear Schrödinger equations. *arXiv :math/0701857*.
- [3] S. Alinhac et P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris, 1991.
- [4] V. Banica. The nonlinear Schrödinger equation on hyperbolic space. À paraître dans *Comm. P.D.E.*
- [5] V. Banica. On the nonlinear Schrödinger dynamics on \mathbb{S}^2 . *J. Math. Pures Appl.*, (9) 83 no. 1, 77–98, 2004.
- [6] M. S. Baouendi et C. Goulaouic. Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy-Kovalevsky theorems. *Comm. Partial Differential Equations 2* (1977), no. 11, 1151–1162.
- [7] B. Birnir, C. Kenig, G. Ponce, N. Svanstedt et L. Vega. On the ill-posedness of the IVP for the generalized Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations. *J. London Math. Soc.* (2) 53 (1996), no. 3, 551–559.
- [8] J.-M. Bouclet. Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds. En préparation.
- [9] J.-M. Bouclet et N. Tzvetkov. Strichartz estimates for long range perturbations. *arXiv :math/0509489* À paraître dans *Amer. J. Math.*
- [10] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. *Geom. Funct. Anal.*, 3(2) :107–156, 1993.
- [11] J. Bourgain. Exponential sums and nonlinear Schrödinger equations. *Geom. Funct. Anal.*, no. 2, 157–178, 1993.
- [12] J. Bourgain. Refinements of Strichartz’ inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity. *Internat. Math. Res. Notices* 1998, no. 5, 253–283.
- [13] N. Burq, P. Gérard et S. Ibrahim. Ill-posedness for supercritical non-linear Schrödinger and wave equations. *Prépublication*.
- [14] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov. Agmon estimates and nonlinear instability for Schrödinger equations. *Prépublication*.

- [15] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov. Bilinear Eigenfunction estimates and the Nonlinear Schrödinger equations on surfaces. *Invent. Math.*, 159, no. 1, 187–223 126, 2005.
- [16] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.*, 126, no. 3, 569–605, 2004.
- [17] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov. An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^d . *Math. Res. Lett.*, 9(2-3) :323–335, 2002.
- [18] N. Burq et M. Zworski. Instability for the semiclassical nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.* 260 no. 1, 45–58, 2005.
- [19] R. Carles. Geometric optics and instability for semi-classical Schrödinger equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 183, no. 3, 525–553, 2007.
- [20] R. Carles. On instability for the cubic nonlinear Schrödinger equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344, no. 8, 483-486, 2007.
- [21] T. Cazenave et F. B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Anal.* 14, no. 10, 807–836, 1990.
- [22] M. Christ. Power series of a nonlinear Schrödinger equation. *arXiv :math/0503368*.
- [23] M. Christ, J. Colliander, et T. Tao. A priori bounds and weak solutions for the nonlinear Schrödinger equation in Sobolev spaces of negative order. *arXiv :math/0612457*.
- [24] M. Christ, J. Colliander et T. Tao. Instability of the periodic nonlinear Schrödinger equation. *arXiv :math/0311227*.
- [25] M. Christ, J. Colliander et T. Tao. Ill-posedness for non linear Schrödinger and wave equation. À paraître dans *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*.
- [26] M. Christ, J. Colliander et T. Tao. Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations. *Amer. J. Math.*, 125(6) :1235–1293, 2003.
- [27] M. Combescure. The quantum stability problem for some class of time-dependent Hamiltonians. *Ann. Physics*, 185(1) :86–110, 1988.
- [28] P. Gérard. Remarques sur l’analyse semi-classique de l’équation de Schrödinger non linéaire. *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1992–1993*, Exp. No. XIII, 13 pp., École Polytech., Palaiseau, 1993.
- [29] J. Ginibre et G. Velo. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation. *Ann. I.H.P. Anal. non lin.*, 2 :309–327, 1985.
- [30] J. Ginibre et G. Velo. Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Math pures. appl.*, 64 :363–401, 1985.
- [31] J. Ginibre et G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.* 32, no. 1, 1–71, 1979.
- [32] E. Grenier. Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126, no. 2, 523–530, 1998.

- [33] A. Hassel, T. Tao, J. Wunsch. Sharp Strichartz estimates on non-trapping asymptotically conic manifolds *Amer. J. Math.* 128, 963–1024, 2006.
- [34] A. Hassel, T. Tao, J. Wunsch. A Strichartz inequality for the Schrödinger equation on non-trapping asymptotically conic manifolds. *Comm. PDE* 30, 157–205, 2004.
- [35] B. Helffer. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, volume 1336 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [36] M. Keel et T. Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.* 120, no. 5, 955–980, 1998.
- [37] C. Kenig, G. Ponce et L. Vega. On the ill-posedness of some canonical dispersive equations. *Duke Math. J.* 106 (2001), no. 3, 617–633.
- [38] W. Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1 de *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1982.
- [39] H. Koch et D. Tătaru. A-priori bounds for the 1-d cubic NLS in negative Sobolev spaces. *arXiv :math/0612717*
- [40] S. J. Montgomery-Smith. Time decay for the bounded mean oscillation of solutions of the Schrödinger and wave equations. *Duke Math. J.* 91, no. 2, 393–408, 1998.
- [41] G. Lebeau. Perte de régularité pour les équations d’ondes sur-critiques. *Bull. Soc. Math. France* 133, no. 1, 145–157, 2005.
- [42] G. Lebeau. Non linear optic and supercritical wave equation. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 70, no. 4-6, 267–306, 2001.
- [43] G. Métivier. Exemples d’instabilités pour des équations d’ondes non linéaires (d’après G. Lebeau). *Astérisque No. 294 (2004)*, vii, 63–75.
- [44] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [45] L. Pitaevski et S. Stringari. *Bose-Einstein condensation*, volume 116 de *International Series of Monographs on Physics*. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [46] J. V. Ralston. Approximate eigenfunctions of the Laplacian. *J. Differential Geometry*, 12(1) :87–100, 1977.
- [47] M. Reed et B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [48] L. Robbiano et C. Zuily. Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* No. 101-102, 2005.
- [49] J. Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. *Astérisque*, 95, 1–166, *Soc. Math. France, Paris*, 1982.
- [50] G. Staffilani et D. Tătaru. Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients. *Comm. Partial Differential Equations* 27, no. 7-8, 1337–1372, 2002.
- [51] R. S. Strichartz. Restriction of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equation. *Duke Math. J.*, 44 :705–714, 1977.

-
- [52] T. Tao. Nonlinear dispersive equations : local and global analysis.
http://www.math.ucla.edu/tao/preprints/books.html
- [53] L. Thomann. The WKB Method and geometric instability for non linear Schrödinger equations on surfaces. À paraître dans *Bull. Soc. Math. France*.
- [54] L. Thomann. Instabilities for supercritical Schrödinger equations in analytic manifolds. À paraître dans *J. Differential Equations*.
- [55] L. Thomann. Geometric and projective instability for the Gross-Pitaevski equation. *Asymptot. Anal.* 51, no. 3-4, 271–287, 2007.
- [56] N. Tzvetkov. Ill-posedness issues for nonlinear dispersive equations.
arXiv :math/0411455.

Chapitre II

Instabilité géométrique et projective pour Gross-Pitaevski

Using variational methods, we construct approximate solutions for the Gross-Pitaevski equation which concentrate on circles in \mathbb{R}^3 . These solutions will help to show that the L^2 flow is unstable for the usual topology and for the projective distance.

7 Introduction

In this paper we deal with the equations

$$\begin{cases} ih\partial_t u + h^2\Delta u - |x|^2 u = a_h h^2 |u|^2 u, & (t, x) \in \mathbb{R}^{1+3}, \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (7.1)$$

where $h > 0$ is a small parameter and a_h a constant which depends on h , that can be either positive (defocusing case) or negative (focusing case). In all the paper we assume that there exists a constant $A > 0$, independent of h , such that $|a_h| \leq A$.

This equation appears in the study of Bose-Einstein condensates; for more details see [7].

In the following we will refer to the definitions:

Definition 7.1. (*Geometric instability*) We say that the Cauchy problem (7.1) is geometrically unstable if there exist $u_h^1, u_h^2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ solutions of (7.1) with initial data $u_h^1(0), u_h^2(0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ such that $\|u_h^1(0)\|_{L^2}, \|u_h^2(0)\|_{L^2} \leq C$ where C is a constant independent of h and $t_h > 0$ such that

$$\frac{\|(u_h^2 - u_h^1)(t_h)\|_{L^2}}{\|(u_h^2 - u_h^1)(0)\|_{L^2}} \longrightarrow +\infty \text{ when } h \longrightarrow 0.$$

Definition 7.2. (*Projective instability*) We say that the Cauchy problem (7.1) is projectively unstable if there exist $u_h^1, u_h^2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ solutions of (7.1) with initial data $u_h^1(0), u_h^2(0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ such that $\|u_h^1(0)\|_{L^2}, \|u_h^2(0)\|_{L^2} \leq C$ where C is a constant independent of h and $t_h > 0$ such that

$$\frac{d_{pr}(u_h^2(t_h), u_h^1(t_h))}{d_{pr}(u_h^2(0), u_h^1(0))} \longrightarrow +\infty \text{ when } h \longrightarrow 0.$$

Here d_{pr} denotes the complex projective distance defined by

$$d_{pr}(v_1, v_2) = \arccos \left(\frac{|\langle v_1, v_2 \rangle|}{\|v_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2}} \right) \text{ for } v_1, v_2 \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

Notations. In this paper c, C denote constants the value of which may change from line to line. These constants will always be independent of h . We use the notations $a \sim b$, $a \lesssim b$, $a \gtrsim b$, if $\frac{1}{C}b \leq a \leq Cb$, $a \leq Cb$, $b \leq Ca$ respectively. We write $a \ll b$, $a \gg b$ if $a \leq Kb$, $a \geq Kb$ for some large constant K which is independent of h .

The first result of this paper is

Theorem 7.3. *Let $h^{-1} \in \mathbb{N}$. In each of the following cases, there exist $c_0 > 0$ and $u_h^1, u_h^2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ solutions of (7.1) with initial data $\|u_h^2(0)\|_{L^2}, \|u_h^1(0)\|_{L^2} \rightarrow \kappa$ such that if $|a_h|\kappa^2 \leq c_0$, we have:*

(i) *Assume a is independent of h , $|t| \lesssim 1$, and $\kappa|a|t \gg 1$,*

$$\frac{\|(u_h^2 - u_h^1)(t)\|_{L^2}}{\|(u_h^2 - u_h^1)(0)\|_{L^2}} \gtrsim |a|\kappa t.$$

(ii) *Assume $|a_h|t_h \rightarrow +\infty$ when $h \rightarrow 0$ with $t_h \ll \log \frac{1}{h}$, then*

$$\sup_{0 \leq t \leq t_h} \|(u_h^2 - u_h^1)(t)\|_{L^2} \gtrsim 1,$$

but

$$\|(u_h^2 - u_h^1)(0)\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

In particular, the Cauchy problem (7.1) is geometrically unstable

Denote by $x = (x_1, x_2, x_3)$ the current point in \mathbb{R}^3 . In cylindrical coordinates ($x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, x_3 = y$), the functions considered in Theorem 7.3 take the form

$$u_h(0, x) = \kappa_h h^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\kappa^2}{h}\theta} v_0\left(\frac{r-k}{\sqrt{h}}, \frac{y}{\sqrt{h}}\right), \quad (7.2)$$

where $k \in \mathbb{N}$, $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ and

$$u(t, x) = u_h(0, x)e^{-i\lambda_h t} + w_h(t, x), \quad (7.3)$$

with w_h a small error term in $L^2(\mathbb{R}^3)$, at least for times when instability effects occur. The Ansatz (7.2) shows that the function u in (7.3) will concentrate on the circle $(x_1^2 + x_2^2 = k^2, x_3 = 0)$ in \mathbb{R}^3 .

To prove Theorem 7.3, we consider two initial data of the form (7.2) associate with κ and κ' such that $|\kappa' - \kappa|$ is small, and therefore the initial data are close in the L^2 -norm, but we will see that the solutions do not remain close to each other after a time t .

The construction of two solutions to (7.1) of the form (7.2),(7.3) which concentrate on disjoint circles yield the following result

Theorem 7.4. *Let $h^{-1} \in \mathbb{N}$. There exist $c_0 > 0$ and $u_h^1, u_h^2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ solutions of (7.1) with initial data $\|u_h^2(0)\|_{L^2}, \|u_h^1(0)\|_{L^2} \rightarrow \kappa$ such that if $|a_h|\kappa^2 \leq c_0$ and $|a_h|t_h \rightarrow +\infty$ when $h \rightarrow 0$ with $t_h \ll \log \frac{1}{h}$, we have*

$$\sup_{0 \leq t \leq t_h} d_{pr}(u_h^2(t), u_h^1(t)) \gtrsim 1,$$

but

$$d_{pr}(u_h^2(0), u_h^1(0)) \rightarrow 0.$$

In particular, the Cauchy problem (7.1) is projectively unstable.

The part (i) of Theorem 7.3 shows that there is no Lipschitz dependence between the solutions of equation (7.1) and the initial data in the regime $\kappa at \gg 1$, whereas the part (ii) and Theorem 7.4 assert that the dependence is not continuous, but for larger times. Both types of instabilities are nonlinear behaviour, but the first one is weaker than the second.

The instability results of Theorem 7.3 are not new in the case $a > 0$. R. Carles [3] shows the instability, for finite times, of the equation

$$ih\partial_t v + h^2\Delta v - |x|^2 v = f(h^k|v|^2)v, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n},$$

when $n \geq 2$, $1 < k < n$, and $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ with $f' > 0$.

In [1], N. Burq, P. Gérard and N. Tzvetkov have pointed out geometric instability for the cubic Schrödinger equation $i\partial_t u + \Delta_{\mathbb{S}^2} u = a|u|^2 u$ on \mathbb{S}^2 when $a > 0$. This phenomenon doesn't occur on $L^2(\mathbb{R}^3)$ for the equation $i\partial_t u + \Delta u = a|u|^2 u$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$, it is therefore strongly related to the geometry of the operator and of the manifold we work on. Here there is no semiclassical parameter in the equations, but we could obtain similar results in this latter case with a scaling argument, as these instability effects are local. There are stronger instability phenomena in H^s norm, for $0 < s < \frac{1}{2}$ or for s negative, for more details see [5] or for the one dimensional case see [4].

In [2], N. Burq and M. Zworski prove Theorem 7.3 in the case $a > 0$. To obtain geometric instability, they expand the solution on the Hilbertian basis given by the eigenfunctions of $-h^2\Delta + |x|^2$. The nonlinear term in (7.1) induces a phase shift in time for the groundstate and this yields the result. We will give a more precise description of the solution by solving a pertubated eigenvalue problem for the harmonic oscillator and this will also treat the focusing case. They also obtain projective instability for the equation

$$ih\partial_t u + h^2\Delta u - V(x)u = ah^2|u|^2 u,$$

where V is a cylindrically symmetric potential with respect to the variable $y = x_3$, but they have to add the following assumption: Denote by $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ then the function $(r, y) \mapsto V(r, y) + r^{-2}$ has two distinct absolute non-degenerate minima (r_j, y_j) , $j = 1, 2$, and its Hessian at (r_j, y_j) are equal. We use a variational method to construct quasimodes which are localized on circles in \mathbb{R}^3 , which allows to remove such an hypothesis. This idea comes from an unpublished work from N. Burq, P. Gérard and N. Tzvetkov.

Thanks to the form $F(|u|^2)u$ of the nonlinearity in (7.1), we look for a solution u which may be rewritten $u(t, x) = e^{-i\lambda t} f(x)$. Then f has to satisfy

$$(-h^2\Delta + |x|^2) f = h\lambda f - a_h h^2 |f|^2 f.$$

In the case $a_h = 0$, f is an eigenvector of the operator $-h^2\Delta + |x|^2$ associate with the eigenvalue $h\lambda$. In the general case, the term $a_h h^2 |f|^2 f$ will be treated as a perturbation of the linear problem

$$(-h^2\Delta + |x|^2) f = h\lambda f.$$

In fact, we will find a development in powers of h of $h\lambda$ and f

$$h\lambda \sim \sum_{k \geq 0} \mu_k h^k, \quad f \sim \sum_{k \geq 0} f_k h^k,$$

by solving a cascade of equations. This will be done in cylindrical coordinates: Write $x = (x_1, x_2, x_3)$ and make the cylindrical change of variables $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ and $x_3 = y$ with $(r, \theta, y) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$. Then the Laplace operator takes the form

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_y^2.$$

Let κ be a positive constant and k a positive integer, we want to find a solution of (7.1) of the form

$$\tilde{u} = \kappa h^{-\frac{1}{2}} e^{-i\lambda t} e^{i\frac{k}{h}\theta} \tilde{v}(r, y, h), \quad (7.4)$$

where λ is a constant to be determined, and \tilde{v} a real function which therefore has to satisfy

$$-h^2(\partial_r^2 + \partial_y^2)\tilde{v} + \left(\frac{k^4}{r^2} + r^2 + y^2\right)\tilde{v} = \lambda h\tilde{v} - a_h h^2 \kappa^2 \tilde{v}^3 + h^2 \frac{1}{r} \partial_r \tilde{v}.$$

Notice that we have to choose $h^{-1} \in \mathbb{N}$ so that (7.4) makes sense for all $k \in \mathbb{N}$. We try to construct \tilde{v} which concentrates exponentially at the minimum of the potential $V = \frac{k^4}{r^2} + r^2 + y^2$, i.e. at $(r, y) = (k, 0)$.

Thus we make the change of variables $r = k + \sqrt{h}\rho$, $y = \sqrt{h}\sigma$ and set $\tilde{v}(r, y, h) = v\left(\frac{r-k}{\sqrt{h}}, \frac{y}{\sqrt{h}}, h\right)$.

We write the Taylor expansion of V in h :

$$\begin{aligned} \frac{k^4}{(k + \sqrt{h}\rho)^2} + (k + \sqrt{h}\rho)^2 + h\sigma^2 &= 2k^2 + (4\rho^2 + \sigma^2)h - \frac{4}{k}\rho^3 h^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + \frac{5}{k^2}\rho^4 h^2 + R(\rho, h)h^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Then v has to be solution of

$$\begin{aligned} Eq(v) &:= P_0 v - \frac{\lambda h - 2k^2}{h} v + a_h \kappa^2 v^3 - h^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{k + \sqrt{h}\rho} \partial_\rho v + \frac{4}{k} \rho^3 v \right) \\ &\quad + \frac{5}{k^2} \rho^4 h v - h^{\frac{3}{2}} R v = 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

where $P_0 = -(\partial_\rho^2 + \partial_\sigma^2) + (4\rho^2 + \sigma^2)$. Now, write

$$\begin{aligned} v(\rho, \sigma, h) &= v_0(\rho, \sigma) + h^{\frac{1}{2}} v_1(\rho, \sigma) + h v_2(\rho, \sigma) + h^{\frac{3}{2}} w(\rho, \sigma, h) \\ \frac{\lambda h - 2k^2}{h} &= E_0 + h^{\frac{1}{2}} E_1 + h E_2 + h^{\frac{3}{2}} E_3(h). \end{aligned}$$

By identifying the powers of h we obtain the following equations:

$$P_0 v_0 = E_0 v_0 - a_h \kappa^2 v_0^3, \quad (7.6)$$

$$P_0 v_1 = E_0 v_1 + E_1 v_0 - 3a_h \kappa^2 v_0^2 v_1 + \frac{1}{k} \partial_\rho v_0 + \frac{4}{k} \rho^3 v_0, \quad (7.7)$$

$$P_0 v_2 = E_0 v_2 + E_1 v_1 + E_2 v_0 - 3a_h \kappa^2 (v_0^2 v_2 + v_0 v_1^2) + \frac{1}{k} \partial_\rho v_1 + \frac{4}{k} \rho^3 v_1 - \frac{1}{k^2} \rho \partial_\rho v_0 - \frac{5}{k^2} \rho^4 v_0. \quad (7.8)$$

Remark 7.5. In the sequel we only mention the dependence in k , κ and a of the v_j and E_j when necessary. Moreover we write $a = a_h$.

8 Construction of the quasimodes

Proposition 8.1. *There exists a constant $c_0 > 0$ such that if $|a|\kappa^2 \leq c_0$, there exist $E_0 > 0$ and $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ satisfying $v_0 \geq 0$ and $\|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$, which solve (7.6).*

For $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, denote by $\hat{\psi}$ its Fourier transform, with the convention

$$\hat{\psi}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\zeta \cdot x} \psi(x) dx,$$

for $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

We use a variational method based on Rellich's criterion.

Proposition 8.2. ([8], p 247) *The set*

$$S = \left\{ \psi \mid \int_{\mathbb{R}^2} |\psi(x)|^2 dx = 1, \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|^2) |\psi(x)|^2 dx \leq 1, \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\zeta|^2) |\hat{\psi}(\zeta)|^2 d\zeta \leq 1 \right\},$$

is a compact subset of $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Proof of Proposition 8.1. We minimize the functional

$$J(u, a) = \int \left(|\nabla u|^2 + (4\rho^2 + \sigma^2) |u|^2 + \frac{1}{2} a \kappa^2 |u|^4 \right),$$

on the space

$$H = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2), (\rho^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}} u \in L^2(\mathbb{R}^2), \|u\|_{L^2} = 1 \right\}.$$

Now, on H we have the inequality

$$\|u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C \|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Thus, there exists $c_0 > 0$ such that

$$\frac{1}{2} a \kappa^2 \int |u|^4 \leq \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2,$$

as soon as $|a|\kappa^2 \leq c_0$, which we suppose from now.

Let $(u_n)_{n \geq 1}$ be a minimizing sequence. First, we can choose $u_n \geq 0$, because $|u_n|$ is also minimizing, as $|\nabla|u_n|| \leq |\nabla u_n|$. We have

$$\int \left(\frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 + (4\rho^2 + \sigma^2) u_n^2 \right) \leq J(u_n, a\kappa^2) \leq C,$$

with C independent of a , κ and n . We are able to apply Rellich's criterion: there exists $v_0 \in H$ with $v_0 \geq 0$ such that, up to a subsequence, $u_n \rightarrow v_0$, and the lower semi-continuity of J ensures

$$J(v_0, a\kappa^2) = \inf_{u \in H} J(u, a\kappa^2).$$

Then there exists a Lagrange multiplier E_0 such that

$$P_0 v_0 = -(\partial_r^2 + \partial_y^2) v_0 + (4\rho^2 + \sigma^2) v_0 = E_0 v_0 - a\kappa^2 v_0^3,$$

and E_0 is given by

$$E_0 = \int (|\nabla v_0|^2 + (4\rho^2 + \sigma^2) v_0^2 + a\kappa^2 v_0^4).$$

□

Proposition 8.3. *Let $|a|\kappa^2 \leq c_0$. There exist constants $C, c > 0$ independent of a, κ such that for $0 \leq j \leq 2$*

$$\left| (I - \Delta)^{\frac{j}{2}} v_0(\rho, \sigma) \right| \leq C e^{-c(|\rho| + |\sigma|)}. \quad (8.1)$$

Proof. We denote by $\xi = (\rho, \sigma)$, and we define $\varphi_\varepsilon(\xi) = e^{\frac{|\xi|}{1+\varepsilon|\xi|}}$. The function φ_ε is bounded and

$$|\nabla \varphi_\varepsilon| \leq \varphi_\varepsilon \quad \text{a.e.} \quad (8.2)$$

We multiply (7.6) by $\varphi_\varepsilon v_0$ and integrate over \mathbb{R}^2 :

$$\int \nabla(\varphi_\varepsilon v_0) \nabla v_0 + \int \varphi_\varepsilon |\xi|^2 v_0^2 \leq E_0 \int \varphi_\varepsilon v_0^2 + |a|\kappa^2 \int \varphi_\varepsilon v_0^4.$$

We compute $\nabla(\varphi_\varepsilon v_0) = v_0 \nabla \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon \nabla v_0$, and use (8.2) to obtain

$$\int (\varphi_\varepsilon |\nabla v_0|^2 + \varphi_\varepsilon |\xi|^2 v_0^2) \leq E_0 \int \varphi_\varepsilon v_0^2 + |a|\kappa^2 \int \varphi_\varepsilon v_0^4 + \int \varphi_\varepsilon v_0 |\nabla v_0|.$$

We set $w_0 = \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{4}} v_0$, then

$$\nabla w_0 = \frac{1}{4} \varphi_\varepsilon^{-\frac{3}{4}} \nabla \varphi_\varepsilon v_0 + \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{4}} \nabla v_0. \quad (8.3)$$

From the Gagliardo-Nirenberg inequality in dimension 2

$$\|w_0\|_{L^4}^4 \leq C \|w_0\|_{L^2}^2 \|\nabla w_0\|_{L^2}^2,$$

together with (8.3) we deduce

$$\int \varphi_\varepsilon v_0^4 \leq C \int (\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_0^2) \int \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (v_0^2 + |\nabla v_0|^2).$$

As $\int v_0^2 = 1$ and $\int |\nabla v_0|^2 \leq C$, Jensen's inequality gives

$$\begin{aligned} \int \varphi_\varepsilon v_0^4 &\leq C \left(\int \varphi_\varepsilon v_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \varphi_\varepsilon (v_0^2 + |\nabla v_0|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{16c_0} \int \varphi_\varepsilon |\nabla v_0|^2 + C \int \varphi_\varepsilon v_0^2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

We also have

$$\int \varphi_\varepsilon v_0 |\nabla v_0| \leq \frac{1}{4} \int \varphi_\varepsilon |\nabla v_0|^2 + C \int \varphi_\varepsilon v_0^2. \quad (8.5)$$

Now, write for $R > 0$

$$\int \varphi_\varepsilon v_0^2 = \int_{|\xi| < R} \varphi_\varepsilon v_0^2 + \int_{|\xi| \geq R} \varphi_\varepsilon v_0^2 \leq e^R \int v_0^2 + \frac{1}{R^2} \int \varphi_\varepsilon |\xi|^2 v_0^2,$$

and deduce that for R big enough, independent of ε , there exists a constant C independent of ε satisfying

$$\int \varphi_\varepsilon (|\nabla v_0|^2 + |\xi|^2 v_0^2) \leq C.$$

Letting ε tend to 0 yields

$$e^{\frac{|\xi|}{2}} \nabla v_0 \in L^2 \quad \text{and} \quad e^{\frac{|\xi|}{2}} |\xi| v_0 \in L^2. \quad (8.6)$$

With the help of equation (7.6), compute

$$\begin{aligned} \Delta \left(v_0 e^{\frac{1}{4}(\rho+\sigma)} \right) &= a\kappa^2 v_0^3 e^{\frac{1}{4}(\rho+\sigma)} + (4\rho^2 + \sigma^2 - E_0) v_0 e^{\frac{1}{4}(\rho+\sigma)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (1, 1) \cdot \nabla v_0 e^{\frac{1}{4}(\rho+\sigma)} + \frac{1}{16} v_0 e^{\frac{1}{4}(\rho+\sigma)}. \end{aligned}$$

According to (8.6), each term of the right hand side is in L^2 , excepted maybe the first one. But denote by $\tilde{v}_0 = v_0 e^{\frac{1}{2}(\rho+\sigma)}$, then (8.6) shows that $\tilde{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ and consequently $v_0 \in L^6(\mathbb{R}^2)$.

Hence, with the inequality $\|w\|_{L^\infty}^2 \lesssim \|w\|_{L^2} \|\Delta w\|_{L^2}$ applied to $w = v_0 e^{\frac{1}{4}(\rho+\sigma)}$ we deduce $v_0 \leq C e^{-\frac{1}{4}(\rho+\sigma)}$.

The same can be done with σ replaced with $-\sigma$ or ρ by $-\rho$. Therefore $v_0 \leq C e^{-\frac{1}{4}(|\rho|+|\sigma|)}$. Equation (7.6) and the previous estimate give

$$|\Delta v_0(\rho, \sigma)| \leq C e^{-c(|\rho|+|\sigma|)}.$$

To obtain the last estimation of Proposition 8.3, use the interpolation inequality

$$\|\nabla w\|_{L^\infty}^2 \leq \|w\|_{L^\infty} \|\Delta w\|_{L^\infty},$$

applied to $w = v_0 e^{c(\pm\rho \pm \sigma)}$. □

We are now able to describe the behaviour of $E_0(a\kappa^2)$ and $v_0(a\kappa^2)$ when $a\kappa^2 \rightarrow 0$:

Proposition 8.4.

$$v_0(a\kappa^2) \longrightarrow \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-(\rho^2 + \frac{1}{2}\sigma^2)} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{when } a\kappa^2 \longrightarrow 0,$$

and

$$E_0(a\kappa^2) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} a\kappa^2 + o(a\kappa^2). \quad (8.7)$$

Proof. The function $u_0 = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-(\rho^2 + \frac{1}{2}\sigma^2)}$ is the unique positive element in H that realises the infimum of $J(u, 0)$, and is the first eigenfunction of $P_0 = -\Delta + (4\rho^2 + \sigma^2)$ associate with the eigenvalue $E_0(0) = 3$. See [6], p 7 for details.

For $|a|\kappa^2 \leq c_0$ we have

$$\|v_0(a\kappa^2)\|_{L^2} = 1, \quad \|\nabla v_0(a\kappa^2)\|_{L^2} \leq C, \quad \text{and} \quad \|\xi v_0(a\kappa^2)\|_{L^2} \leq C. \quad (8.8)$$

By Rellich's criterion, $(v(a\kappa^2))_{|a|\kappa^2 \leq c_0}$ is compact in H ; let \mathcal{A} be its adherence set. If $u \in \mathcal{A}$, there exists a sequence $b_n = a_n \kappa_n^2 \rightarrow 0$ satisfying $v_0(b_n) \rightarrow u$ in L^2 . As $v_0(b_n)$ realises the infimum of $J(v, b_n)$:

$$J(v_0(b_n), b_n) \leq J(u_0, b_n) = 3 + \frac{1}{2} b_n \int |u_0|^4,$$

therefore, $J(u, 0) \leq 3$. As $u \geq 0$, we conclude $u = u_0$, i.e. $\mathcal{A} = \{u_0\}$ and

$$v_0(a\kappa^2) \longrightarrow u_0 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{when } a\kappa^2 \longrightarrow 0.$$

Moreover $|v(a\kappa^2)|, |u_0| \leq C$, then the convergence is also in L^4 .

Now, the self-adjointness of P_0 gives

$$0 = \langle (P_0 - 3)u_0, v(a\kappa^2) \rangle = (E_0(a\kappa^2) - 3) \int v(a)u_0 - a\kappa^2 \int v^3(a)u_0,$$

then from $\int v(a\kappa^2)u_0 \rightarrow \int u_0^2 = 1$ and $\int v(a\kappa^2)^3 u_0 \rightarrow \int u_0^4 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ we conclude $E_0(a\kappa^2) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} a\kappa^2 + o(a\kappa^2)$. \square

Proposition 8.5. *Let $|a\kappa^2| \leq c_0$. There exist $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ and $v_1, v_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ satisfying $v_1, v_2 \geq 0$ and $\|v_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \|v_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \sim 1$, which solve (7.7) and (7.8). Moreover there exists $c > 0$ such that for $l = 1, 2$ and $0 \leq j \leq 2$*

$$\left| (I - \Delta)^{\frac{j}{2}} v_l(\rho, \sigma) \right| \leq C e^{-c(|\rho| + |\sigma|)}. \quad (8.9)$$

Proof. Equation (7.7) may be rewritten

$$(P(a\kappa^2) - E_0) v_1 = (-\partial_\rho^2 + \partial_\sigma^2 + V) v_1 = E_1 v_0 + \frac{1}{k} \partial_\rho v_0 + \frac{4}{k} \rho^3 v_0,$$

where we denote by $P(a\kappa^2) = P_0 + 3a\kappa^2v_0^2$ and $V = 4\rho^2 + \sigma^2 + 3a\kappa^2v_0^2 - E_0$. The potential V is so that $V \rightarrow \infty$ as $|(\rho, \sigma)| \rightarrow \infty$, then the spectrum $\sigma(P(a))$ of $P(a\kappa^2)$ is purely discrete and the eigenvalues are given by the min-max principle (see [8] p. 120).

The first eigenvalue of $P(a\kappa^2)$ is therefore given by

$$\mu_0(a\kappa^2) = \inf_{u \in H} \int (|\nabla u|^2 + (4\rho^2 + \sigma^2)u^2 + 3a\kappa^2v_0^2u^2) - E_0(a\kappa^2),$$

and there exists $w_0 \in H$ with $w_0 \geq 0$ satisfying

$$(P(a\kappa^2) - E_0)w_0 = (P_0 - E_0(a\kappa^2) + 3a\kappa^2v_0^2)w_0 = \mu_0(a)w_0,$$

and one shows, as in the proof of (8.4) that $w_0 \rightarrow u_0$ in $L^2 \cap L^4$.

Multiply (7.6) by u_0 and integrate

$$3a\kappa^2 \int v_0^2w_0u_0 + (3 - E_0(a\kappa^2)) \int w_0u_0 = \mu_0(a\kappa^2) \int w_0u_0,$$

then according to (8.7), $\mu_0(a\kappa^2) \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi}a\kappa^2$ when $a\kappa^2 \rightarrow 0$. If $a > 0$ and $a\kappa^2$ is small enough we can conclude that $0 \notin \sigma(P(a))$.

Let's look at the case $a < 0$:

According to the min-max principle, the second eigenvalue of $P(a\kappa^2)$ is

$$\mu_1(a\kappa^2) = \inf_{u \in H, u \perp w_0} \int (|\nabla u|^2 + (4\rho^2 + \sigma^2)u^2 + 3a\kappa^2v_0^2u^2) - E_0(a\kappa^2),$$

and let w_1 realise the infimum.

We also have

$$5 = \inf_{u \in H, u \perp u_0} \int (|\nabla u|^2 + (4\rho^2 + \sigma^2)u^2) = \inf_{u \in H, u \perp u_0} J(u, 0),$$

realised for u_1 , the second normalised Hermite function. Now, define $\tilde{u} = \alpha w_1 + \beta w_0$ with α, β such that $\|\tilde{u}\|_{L^2} = \alpha^2 + \beta^2 = 1$ and $\alpha \int w_1u_0 + \beta \int w_0u_0 = 0$, then $\tilde{u} \in H$ and $\tilde{u} \perp u_0$. Notice that $|\alpha| \rightarrow 1$ and $\beta \rightarrow 0$ as $a\kappa^2 \rightarrow 0$.

One has $5 = J(u_1, 0) \leq J(\tilde{u}, 0)$, then we obtain $5 \leq \mu_1(a\kappa^2) + \varepsilon(a\kappa^2)$ with $\varepsilon(a\kappa^2) \rightarrow 0$ as $a\kappa^2 \rightarrow 0$, therefore $\mu_1(a\kappa^2) \geq 4$ for a small enough, and $0 \notin \sigma(P(a\kappa^2))$.

As a conclusion, for each choice of E_1 , equation (7.7) admits a solution $v_1 \in L^2$ as the second right hand side f is in L^2 . However, if we choose E_1 so that $f \perp v_0$, we also have $\|v_1\|_{L^2} \leq C$ uniformly in $|a|\kappa^2 \leq c_0$, as the eigenvalue $E_0(a\kappa^2)$ is simple.

The estimations (8.9) are obtained as in the proof of Proposition 8.3.

By the same argument we infer the existence of v_2 and E_2 which solve equation (7.8) and satisfy the estimates (8.9). \square

Take $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ such that $\chi \geq 0$, $\text{supp}\chi \subset [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ and $\chi = 1$ on $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$. Set $v = \chi(\sqrt{h}\rho)(v_0 + h^{\frac{1}{2}}v_1 + hv_2)$, $\tilde{v}(r, y, h) = v(\frac{r-k}{\sqrt{h}}, \frac{y}{\sqrt{h}}, h)$ and $\lambda = \frac{2k^2}{h} + E_0 + h^{\frac{1}{2}}E_1 + hE_2$, and define

$$u_{app} = \kappa h^{-\frac{1}{2}} e^{-i\lambda t} e^{i\frac{k^2}{h}\theta} \tilde{v}. \quad (8.10)$$

Recall that, according to (8.7),

$$E_0(a\kappa^2) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} a\kappa^2 + o(a\kappa^2).$$

Proposition 8.6. *The function u_{app} defined by (8.10) satisfies*

$$ih\partial_t u_{app} + h^2 \Delta u_{app} - |x|^2 u_{app} = ah^2 |u_{app}|^2 u_{app} + R(h) \quad (8.11)$$

with

$$\|(|x|^2 + 1)R(h)\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{5}{2}} \quad \text{and} \quad \|\Delta R(h)\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{1}{2}}. \quad (8.12)$$

Proof. By construction, $w = v_0 + h^{\frac{1}{2}}v_1 + hv_2$ satisfies $Eq(w) = h^{\frac{5}{2}}R_1(h)$ where Eq is defined by (7.5), and according to Propositions 8.4 and 8.6

$$|R_1(h)| \lesssim \left(\frac{1}{(k + \sqrt{h}\rho)^2} + |\rho|^3 \right) e^{-c_1(|\rho| + |\sigma|)},$$

and

$$|\Delta R_1(h)| \lesssim \left(\frac{1}{(k + \sqrt{h}\rho)^4} + |\rho|^3 \right) e^{-c_2(|\rho| + |\sigma|)}. \quad (8.13)$$

Now,

$$\begin{aligned} Eq(v) &= Eq(\chi(\sqrt{h}\rho)w) \\ &= \chi(\sqrt{h}\rho)Eq(w) - h\chi''(\sqrt{h}\rho)w - 2h^{\frac{1}{2}}\chi'(\sqrt{h}\rho)\partial_\rho w \\ &\quad + a\chi(\chi^2 - 1)w^3 \\ &= h^{\frac{5}{2}}\chi(\sqrt{h}\rho)R_1 + R_2 + R_3 + R_4 := R(h). \end{aligned}$$

Set $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ and observe that $\text{supp}\chi' \subset I$, $\text{supp}\chi'' \subset I$, $\text{supp}\chi(\chi^2 - 1) \subset I$ and if $\sqrt{h}\rho \in I$ we have

$$|w|, |\partial_\rho w| \lesssim e^{-c/\sqrt{h}} e^{-c|\sigma|},$$

then it follows

$$\|\Delta^j R_p\|_{L^2} \lesssim e^{-c/\sqrt{h}}, \quad (8.14)$$

for all $0 \leq j \leq 1$ and $2 \leq p \leq 4$. According to (8.13) we also have

$$\|\chi(\sqrt{h}\rho)R_1\|_{L^2}^2 \lesssim \int (1 + |\rho|^6) e^{-2c_1(|\rho| + |\sigma|)} \leq C.$$

Therefore, coming back in variables (r, y, θ) , $\|R(h)\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{5}{2}}$. Because of the fast decay of w we also have $\|(r^2 + y^2)R(h)\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{5}{2}}$, hence $\|(|x|^2 + 1)R(h)\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{5}{2}}$.

Differentiating u_{app} costs at most h^{-1} , then together with (8.13) and (8.14) we obtain $\|\Delta R(h)\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{1}{2}}$. \square

Proposition 8.7. *Let $|a|\kappa^2 \leq c_0$ fixed, let u_{app} be given by (8.10) and let u be solution of*

$$\begin{cases} ih\partial_t u + h^2\Delta u - |x|^2 u = ah^2|u|^2 u, \\ u(0, x) = u_{app}(0, x), \end{cases} \quad (8.15)$$

then $\|(u - u_{app})(t_h)\|_{L^2} \rightarrow 0$ with $t_h \ll \log(\frac{1}{h})$, when $h \rightarrow 0$.

Proof. Denote by $w = u - u_{app}$ and by $f = ah^2g + R(h)$ with $g = |u_{app} + w|^2(u_{app} + w) - |u_{app}|^2 u_{app}$, then

$$ih\partial_t w + h^2\Delta w - |x|^2 w = f. \quad (8.16)$$

We define

$$E(t) = \int \left(\frac{1}{2}(|x|^4 + 1)|w|^2 + h^4|\Delta w|^2 \right). \quad (8.17)$$

- Multiply (8.16) by $\frac{1}{2}(|x|^4 + 1)\bar{w}$, integrate and take the imaginary part:

$$\frac{1}{2}h \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2}(|x|^4 + 1)|w|^2 = \text{Im} \int \frac{1}{2}(|x|^4 + 1)f\bar{w} + 2h^2 \text{Im} \int |x|^2 \bar{w} x \nabla w, \quad (8.18)$$

- Multiply $\Delta(8.16)$ by $h^4\Delta\bar{w}$, integrate and take the imaginary part:

$$\frac{1}{2}h \frac{d}{dt} \int h^4|\Delta w|^2 = h^4 \text{Im} \int \Delta f \Delta \bar{w} - 2h^4 \text{Im} \int \Delta w x \nabla \bar{w}. \quad (8.19)$$

With an integration by parts, we can show that

$$h^2 \int |x|^2 |\nabla w|^2 \lesssim \int |x|^4 |w|^2 + h^4 \int |\Delta w|^2,$$

therefore

$$h^2 \left| \int |x|^2 \bar{w} x \nabla w \right| \lesssim h \int |x|^4 |w|^2 + h^3 \int |x|^2 |\nabla w|^2 \lesssim hE, \quad (8.20)$$

and

$$h^4 \left| \int \Delta w x \nabla \bar{w} \right| \lesssim h^5 \int |\Delta w|^2 + h^3 \int |x|^2 |\nabla w|^2 \lesssim hE. \quad (8.21)$$

Then the inequalities (8.18)-(8.21) yield

$$h \frac{d}{dt} E(t) \lesssim \text{Im} \int \left(\frac{1}{2}(|x|^4 + 1)f\bar{w} + h^2|x|^2 \nabla f \nabla \bar{w} + h^4 \Delta f \Delta \bar{w} \right) + hE. \quad (8.22)$$

Using the expression of u_{app}

$$\begin{aligned} \|u_{app}\|_{L^2} &\lesssim 1, & \|u_{app}\|_{L^\infty} &\lesssim h^{-\frac{1}{2}}, \\ \|\nabla u_{app}\|_{L^2} &\lesssim h^{-1}, & \|\nabla u_{app}\|_{L^\infty} &\lesssim h^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

and by definition of E

$$\|x \nabla w\|_{L^2} \lesssim h^{-1} E^{\frac{1}{2}}, \quad \|\Delta w\|_{L^2} \lesssim h^{-2} E^{\frac{1}{2}}, \quad (8.24)$$

and the Gagliardo-Nirenberg inequalities in dimension 3 yield

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^4} &\lesssim h^{-\frac{3}{4}}E^{\frac{1}{2}}, \quad \|\nabla w\|_{L^4} \lesssim h^{-\frac{7}{4}}E^{\frac{1}{2}}, \\ \|w\|_{L^\infty} &\lesssim \|w\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}\|\Delta w\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \lesssim h^{-\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

- First, the estimates (8.12) on $R(h)$ give

$$\begin{aligned} &\left| \int \left(\frac{1}{2}(|x|^4 + 1)R(h)\bar{w} + h^4\Delta R(h)\Delta\bar{w} \right) \right| \\ &\lesssim \|(|x|^2 + 1)R(h)\|_{L^2}E^{\frac{1}{2}} + h^2\|\Delta R(h)\|_{L^2}E^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim h^{\frac{5}{2}}E^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

- Then, as $g = |u_{app} + w|^2(u_{app} + w) - |u_{app}|^2u_{app}$, and according to (8.23) and (8.25)

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Im} \int (|x|^4 + 1)g\bar{w} \right| &\lesssim \int (|x|^4 + 1) (|u_{app}|^2|w|^2 + |u_{app}||w|^3) \\ &\lesssim \|u_{app}\|_{L^\infty} (\|u_{app}\|_{L^\infty} + \|w\|_{L^\infty})E \\ &\lesssim h^{-1}E + h^{-2}E^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

- Compute

$$\begin{aligned} |\Delta g| &\lesssim |u_{app}|^2|\Delta w| + |u_{app}||\nabla u_{app}||\nabla w| + |\nabla u_{app}|^2|w| \\ &\quad + |u_{app}||\Delta u_{app}||w| + |\Delta u_{app}||w|^2 + |w|^2|\Delta w| + |w||\nabla w|^2, \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} \|\Delta g\|_{L^2} &\lesssim \|u_{app}\|_{L^\infty}^2\|\Delta w\|_{L^2} + \|u_{app}\|_{L^\infty}\|\nabla u_{app}\|_{L^\infty}\|\nabla w\|_{L^2} \\ &\quad + \|\nabla u_{app}\|_{L^\infty}^2\|w\|_{L^2} + \|u_{app}\|_{L^\infty}\|\Delta u_{app}\|_{L^\infty}\|w\|_{L^2} \\ &\quad + \|\Delta u_{app}\|_{L^\infty}\|w\|_{L^4}^2 + \|w\|_{L^\infty}^2\|\Delta w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^4}^2 \\ &\lesssim h^{-3}E^{\frac{1}{2}} + h^{-4}E + h^{-5}E^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} h^4 \left| \int \Delta g \Delta\bar{w} \right| &\lesssim h^4\|\Delta g\|_{L^2}\|\Delta w\|_{L^2} \\ &\lesssim h^{-1}E + h^{-2}E^{\frac{3}{2}} + h^{-3}E^2. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Putting the estimates (8.26), (8.27), and (8.28) together with (8.22), we obtain

$$h \frac{d}{dt} E(t) \lesssim h^{\frac{5}{2}}E^{\frac{1}{2}} + hE + E^{\frac{3}{2}} + h^{-1}E^2. \quad (8.29)$$

Set $F = E^{\frac{1}{2}}$, then F satisfies $F(0) = 0$ and

$$h \frac{d}{dt} F(t) \lesssim h^{\frac{5}{2}} + hF + F^2 + h^{-1}F^3. \quad (8.30)$$

As long as $h^{-1}F^3 \lesssim hF$, i.e. for times such that $F \lesssim h$, we can write

$$\frac{d}{dt} F(t) \lesssim h^{\frac{3}{2}} + F.$$

Using Gronwall's inequality, $F \lesssim h^{\frac{3}{2}} e^{Ct}$. The non linear terms in (8.30) can be removed with the continuity argument for times t_h such that $e^{Ct_h} \lesssim h^{-\frac{1}{2}}$, i.e. $t_h \ll \log(\frac{1}{h})$ and one has $F(t_h) \rightarrow 0$ when $h \rightarrow 0$, hence the result. \square

We are now able to prove Theorem 7.3 and Theorem 7.4.

9 Geometric instability

Let $|a|\kappa^2 \leq c_0$. Consider the function u_{app} defined by (8.10) associate with κ with $k = 1$ (k will be equal to 1 in all this section).

$$u_{app} = \kappa h^{-\frac{1}{2}} e^{-i\lambda t} e^{i\frac{\theta}{h}} \tilde{v}.$$

Similarly, let the function u'_{app} defined by (8.10) associate with $\kappa' = \kappa + h^{\frac{1}{2}}$. Then there exists $\lambda' \in \mathbb{R}$ and $\tilde{v}' \in L^2(\mathbb{R}^3)$ such that

$$u'_{app} = (\kappa + h^{\frac{1}{2}}) h^{-\frac{1}{2}} e^{-i\lambda' t} e^{i\frac{\theta}{h}} \tilde{v}'.$$

define the functions $f, f' \in L(\mathbb{R}^3)$ by

$$f = h^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{h}} \tilde{v}, \quad f' = h^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{h}} \tilde{v}'. \quad (9.1)$$

Notice that by construction, $\|f\|_{L^2}, \|f'\|_{L^2} \sim 1$.

We now need the following

Lemma 9.1. *The functions defined by (9.1) satisfy*

$$\|f' - f\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{1}{2}}. \quad (9.2)$$

Proof. To construct f' , we have to solve the system (7.6)-(7.8) with $\kappa' = \kappa + h^{\frac{1}{2}}$. We reorganize this system by identifying the powers of h , and as equation (7.6) remains the same, we deduce (9.2). \square

Proof of Theorem 7.3 (i). Denote by u (resp. u') the solution of (8.15) with initial condition $u_{app}(0)$ (resp. $u'_{app}(0)$). We have

$$\begin{aligned} \|(u' - u)(0)\|_{L^2} &= \|(u'_{app} - u_{app})(0)\|_{L^2} \\ &\leq \kappa \|f' - f\|_{L^2} + \kappa h^{\frac{1}{2}} \|f'\|_{L^2} \lesssim \kappa h^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (9.3)$$

by Lemma 9.1. The triangle inequality gives

$$\begin{aligned} \|(u'_{app} - u_{app})(t)\|_{L^2} &\geq \kappa \left| e^{i(\lambda' - \lambda)t} - 1 \right| \|f'\|_{L^2} - \kappa \|f' - f\|_{L^2} - \kappa h^{\frac{1}{2}} \|f'\|_{L^2} \\ &\geq \kappa \left| e^{i(\lambda' - \lambda)t} - 1 \right| - C\kappa h^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

As $(\lambda' - \lambda)t \sim \frac{\sqrt{2}}{2\pi}a \left((\kappa + h^{\frac{1}{2}})^2 - \kappa^2 \right) t \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi}a\kappa t h^{\frac{1}{2}}$, with (9.4) we obtain, when $|a|\kappa t \gg 1$

$$\|(u'_{app} - u_{app})(t)\|_{L^2} \geq c|a|\kappa^2 t h^{\frac{1}{2}},$$

hence, using (9.3)

$$\frac{\|(u' - u)(t)\|_{L^2}}{\|(u' - u)(0)\|_{L^2}} \gtrsim |a|\kappa t.$$

which was the claim. \square

Proof of Theorem 7.3 (ii). First notice that every parameter or function involved in this part depends on h even though we do not write the subscripts. We define

$$\begin{aligned} u''_{app} &= (\kappa + \varepsilon_h) h^{-\frac{1}{2}} e^{-i\lambda''t} e^{i\frac{\theta}{h}} \tilde{v}'' \\ &:= (\kappa + \varepsilon_h) e^{-i\lambda''t} f''. \end{aligned} \quad (9.5)$$

with $\varepsilon_h \rightarrow 0$ when $h \rightarrow 0$, and denote by u'' the solution of (8.15) with initial condition $u''_{app}(0)$. Then

$$\begin{aligned} \|(u'' - u)(0)\|_{L^2} &= \|(u''_{app} - u_{app})(0)\|_{L^2} \\ &\leq \kappa \|f'' - f\|_{L^2} + \kappa \varepsilon_h \|f''\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

The right hand side of (9.6) tends to 0 with h because $\|f'' - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ and $\|f''\|_{L^2} \sim 1$. But when h is small enough

$$\begin{aligned} \|(u''_{app} - u_{app})(t)\|_{L^2} &\geq \kappa \left| e^{i(\lambda'' - \lambda)t} - 1 \right| \|f''\|_{L^2} - \kappa \|f'' - f\|_{L^2} - \kappa \varepsilon_h \|f''\|_{L^2} \\ &\geq \frac{1}{2}\kappa \left| e^{i(\lambda'' - \lambda)t} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Now use $(\lambda'' - \lambda)t_h \sim \frac{\sqrt{2}}{2\pi}a \left((\kappa + \varepsilon_h)^2 - \kappa^2 \right) t_h \sim C_0 a \kappa t_h \varepsilon_h$. Take $\varepsilon_h = (C_0 \kappa a t_h)^{-1/2}$ which tends to 0, then if $h \ll 1$, $|\lambda'' - \lambda|t_h \geq \pi$ and

$$\sup_{0 \leq t \leq t_h} \|(u''_{app} - u_{app})(t)\|_{L^2} \geq \kappa.$$

Now, according to Proposition 8.7, which can be used as we assume $t \ll \log \frac{1}{h}$, we have for h small enough

$$\sup_{0 \leq t \leq t_h} \|(u'' - u)(t)\|_{L^2} \geq \kappa.$$

This last inequality together with (9.6) proves the second part of Theorem 7.3. \square

10 Projective instability

We conserve the notations of the previous section, but here f_j and f'_j are constructed with $k = j$ in (7.4).

Define $U_{app} = \kappa e^{-i\lambda_1 t} f_1 + \kappa e^{-i\lambda_2 t} f_2$ and $U'_{app} = (\kappa + \varepsilon_h) e^{-i\lambda'_1 t} f'_1 + \kappa e^{-i\lambda_2 t} f_2$.

Lemma 10.1. *Let $V_{app} = U_{app}$ or $V_{app} = U'_{app}$, and v be solution of*

$$\begin{cases} ih\partial_t v + h^2 \Delta v - |x|^2 v = ah^2 |v|^2 v, \\ v(0, x) = V_{app}(0, x), \end{cases} \quad (10.1)$$

then $\|(v - V_{app})(t_h)\|_{L^2} \rightarrow 0$ with $t_h \ll \log(\frac{1}{h})$, when $h \rightarrow 0$.

Proof. Write $V_{app} = v_{app}^1 + v_{app}^2$ with $v_{app}^1 = \kappa e^{-i\lambda_1 t} f_1$ or $v_{app}^1 = (\kappa + \varepsilon_h) e^{-i\lambda'_1 t} f'_1$ and $v_{app}^2 = \kappa e^{-i\lambda_2 t} f_2$. As the supports of v_{app}^1 and v_{app}^2 are disjoint we have

$$\begin{aligned} & ih\partial_t(v_{app}^1 + v_{app}^2) + h^2 \Delta(v_{app}^1 + v_{app}^2) - |x|^2(v_{app}^1 + v_{app}^2) \\ &= ah^2 (|v_{app}^1|^2 v_{app}^1 + |v_{app}^2|^2 v_{app}^2) + R^1(h) + R^2(h) \\ &= ah^2 |v_{app}^1 + v_{app}^2|^2 (v_{app}^1 + v_{app}^2) + R^1(h) + R^2(h), \end{aligned}$$

where for $j = 1, 2$, $R^j(h)$ is the error term given by Proposition 8.6 and therefore satisfies $\|(|x|^2 + 1)R^j(h)\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{5}{2}}$ and $\|\Delta R^j(h)\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{1}{2}}$. We conclude with the help of Proposition 8.7. \square

Proof of Theorem 7.4. Consider the function u (resp. u') the solution of equation (10.1) with Cauchy data $U_{app}(0)$ (resp. $U'_{app}(0)$).

First notice that, for $t \geq 0$, $\|V_{app}(t)\|_{L^2}^2 \sim 2\kappa^2$. Compute

$$U_{app}(t) \overline{U'_{app}(t)} = \kappa(\kappa + \varepsilon_h) f_1 \overline{f'_1} e^{i(\lambda'_1 - \lambda_1)t} + \kappa^2 |f_2|^2. \quad (10.2)$$

Then for $t = 0$ we have

$$\int U_{app} \overline{U'_{app}}(0) \sim 2\kappa^2,$$

hence

$$d_{\text{pr}}(u(0), u'(0)) = d_{\text{pr}}(U_{app}(0), U'_{app}(0)) \rightarrow 0.$$

Let $t_h \ll \log \frac{1}{h}$, then as $(\lambda'_1 - \lambda_1)t_h \sim C_0 a \kappa \varepsilon_h t_h$, we now choose

$$\varepsilon_h = \frac{\pi}{C_0 a \kappa t_h},$$

then we have $(\lambda'_1 - \lambda_1)t_h \rightarrow \pi$, as $h \rightarrow 0$. Thus

$$\int U_{app} \overline{U'_{app}}(t_h) \rightarrow 0,$$

and

$$d_{\text{pr}}(U_{app}(t_h), U'_{app}(t_h)) \rightarrow \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Finally, from Lemma 10.1 we deduce

$$d_{\text{pr}}(u(t_h), U_{\text{app}}(t_h)), d_{\text{pr}}(u'(t_h), U'_{\text{app}}(t_h)) \longrightarrow 0,$$

and therefore

$$\begin{aligned} d_{\text{pr}}(u(t_h), u'(t_h)) &\geq d_{\text{pr}}(U_{\text{app}}(t_h), U'_{\text{app}}(t_h)) - d_{\text{pr}}(u(t_h), U_{\text{app}}(t_h)) \\ &\quad - d_{\text{pr}}(u'(t_h), U'_{\text{app}}(t_h)) \\ &\geq \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

for $h \ll 1$; hence the result. □

Bibliography

- [1] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^d . *Math. Res. Lett.*, 9(2-3):323–335, 2002.
- [2] N. Burq and M. Zworski. Instability for the semiclassical nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.* 260 no. 1, 45–58, 2005.
- [3] R. Carles. Geometric optics and instability for semi-classical Schrodinger equations. To appear in *Arch. Ration. Mech.*
- [4] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations. *Amer. J. Math.*, 125(6):1235–1293, 2003.
- [5] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Ill-posedness for nonlinear Schrödinger and wave equation. To appear in *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*.
- [6] B. Helffer. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, volume 1336 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [7] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein condensation*, volume 116 of *International Series of Monographs on Physics*. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [8] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

Chapitre III

Instabilité géométrique pour Schrödinger sur des surfaces

In this paper we are interested in constructing WKB approximations for the non linear cubic Schrödinger equation on a Riemannian surface which has a stable geodesic. These approximate solutions will lead to some instability properties of the equation.

11 Introduction

Let (M, g) be a Riemannian surface (i.e. a Riemannian manifold of dimension 2), orientable or not. We assume that M is either compact or a compact perturbation of the euclidian space, so that the Sobolev embeddings are true. Consider $\Delta = \Delta_g$ the Laplace-Beltrami operator. In this paper we are interested in constructing WKB approximations for the non linear cubic Schrödinger equation

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = \varepsilon |u|^2 u(t, x), & \varepsilon = \pm 1, \\ u(0, x) = u_0(x) \in H^\sigma(M), \end{cases} \quad (11.1)$$

that is, given a small parameter $0 < h < 1$ and an integer N , functions $u_N(h)$ satisfying

$$i\partial_t u_N(h) + \Delta u_N(h) = \varepsilon |u_N(h)|^2 u_N(h) + R_N(h), \quad (11.2)$$

with $\|u_N(h)\|_{H^\sigma} \sim 1$ and $\|R_N(h)\|_{H^\sigma} \leq C_N h^N$.

Here h is introduced so that $u_N(h)$ oscillates with frequency $\sim \frac{1}{h}$.

These approximate solutions to (11.1) will lead to some instability properties in the following sense (where h^{-1} will play the role of n):

Definition 11.1. *We say that the Cauchy problem (11.1) is unstable near 0 in $H^\sigma(M)$, if for all $C > 0$ there exist times $t_n \rightarrow 0$ and $u_{1,n}, u_{2,n} \in H^\sigma(M)$ solutions of (11.1) so that*

$$\begin{aligned} \|u_{1,n}(0)\|_{H^\sigma(M)}, \|u_{2,n}(0)\|_{H^\sigma(M)} &\leq C, \\ \|u_{1,n}(0) - u_{2,n}(0)\|_{H^\sigma(M)} &\rightarrow 0, \\ \limsup \|u_{1,n}(t_n) - u_{2,n}(t_n)\|_{H^\sigma(M)} &\geq \frac{1}{2}C, \end{aligned}$$

when $n \rightarrow +\infty$.

This means that the problem is not uniformly well-posed, if we refer to the following definition:

Definition 11.2. *Let $\sigma \in \mathbb{R}$. We say that the Cauchy problem (11.1) is locally uniformly well-posed in $H^\sigma(M)$, if for any bounded subset $\mathcal{B} \subset H^\sigma(M)$, there exist $T > 0$ and a subspace $Y_T \subset \mathcal{C}([-T, T]; H^\sigma(M))$, such that for all $u_0 \in \mathcal{B}$, there exists a unique solution $u \in Y_T$ of (11.1) and such that the flow map*

$$u_0 \in \mathcal{B} \mapsto u(t) = \Phi_t(u_0) \in H^\sigma(M),$$

is uniformly continuous for any $-T \leq t \leq T$.

We now state our instability result:

Proposition 11.3. *Let $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, and assume that M has a stable and non degenerated periodic geodesic (see Assumptions 1 and 2), then the Cauchy problem (11.1) is not uniformly well-posed.*

This problem is motivated by the following results: Let (M, g) be a riemannian compact surface, then in [5], N. Burq, P. Gérard and N. Tzvetkov prove that (11.1) is uniformly well-posed in $H^\sigma(M)$ for $\sigma > \frac{1}{2}$. Whereas, in [4], they show that (11.1) is unstable on the sphere \mathbb{S}^2 for $0 < \sigma < \frac{1}{4}$. In fact they construct solutions of (11.1) of the form

$$u_n^\kappa(t, x) = \kappa e^{i\lambda_n^\kappa t} (n^{\frac{1}{4}-\sigma} \psi_n(x) + r_n(t, x)), \quad (11.3)$$

where $0 < \kappa < 1$, $\psi_n = (x_1 + ix_2)^n$ is a spherical harmonic which concentrates on the equator of the sphere when $n \rightarrow +\infty$ and where r_n is an error term which is small. To obtain instability, they consider $\kappa_n \rightarrow \kappa$, then

$$\|u_n^\kappa(0) - u_n^{\kappa_n}(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{S}^2)} \lesssim |\kappa - \kappa_n| \rightarrow 0,$$

but

$$\|u_n^\kappa(t_n) - u_n^{\kappa_n}(t_n)\|_{H^\sigma(\mathbb{S}^2)} \gtrsim \kappa |e^{i\lambda_n^\kappa t_n} - e^{i\lambda_n^{\kappa_n} t_n}| \rightarrow 2\kappa,$$

with a suitable choice of $t_n \rightarrow 0$.

We follow this strategy but as the surface is not rotation invariant, the ansatz will be more complicated than (11.3).

This result is sharp, because in [6] they show that (11.1) is uniformly well-posed on \mathbb{S}^2 when $\sigma > \frac{1}{4}$.

On the other hand, in [3] J. Bourgain shows that (11.1) is uniformly well-posed on the rational torus \mathbb{T}^2 when $\sigma > 0$.

These results show how the geometry of M can lead to instability for the equation (11.1). Therefore it seems reasonable to obtain a result like Proposition 11.3 with purely geometric assumptions.

We first make the following assumption on M :

Assumption 1. *The manifold M has a periodic geodesic.*

Denote by γ such a geodesic, then there exists a system of coordinates (s, r) near γ , say for $(s, r) \in \mathbb{S}^1 \times]-r_0, r_0[$, called Fermi coordinates such that (see [12], p. 80)

1. The curve $r = 0$ is the geodesic γ parametrized by arclength and
2. The curves $s = \text{constant}$ are geodesics parametrized by arclength. The curves $r = \text{constant}$ meet these curves perpendicularly.
3. In this system the metric writes

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2(s, r) \end{pmatrix}.$$

We set the length of γ equal to 2π . Denote by $R(s, r)$ the Gauss curvature at (s, r) , then a is the unique solution of

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + R(s, r)a = 0, \\ a(s, 0) = 1, \frac{\partial a}{\partial r}(s, 0) = 0. \end{cases} \quad (11.4)$$

The initial conditions traduce the fact that the curve $r = 0$ is a unit-speed geodesic. In these coordinates the Laplace-Beltrami operator is

$$\Delta := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \operatorname{div}(\sqrt{\det g} g^{-1} \nabla) = \frac{1}{a} \partial_s \left(\frac{1}{a} \partial_s \right) + \frac{1}{a} \partial_r (a \partial_r).$$

A function on M , defined locally near γ , can be identified with a function of $[0, 2\pi] \times]-r_0, r_0[$ such that

$$\forall (s, r) \in [0, 2\pi] \times]-r_0, r_0[\quad f(s + 2\pi, r) = f(s, \omega r)$$

where $\omega = 1$ if M is orientable and $\omega = -1$ if M is not. Define

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega - 1) \in \{-1, 0\}. \quad (11.5)$$

From (11.4) we deduce that a admits the Taylor expansion

$$a = 1 - \frac{1}{2}R(s)r^2 + R_3(s)r^3 + \cdots + R_p(s)r^p + o(r^p), \quad (11.6)$$

with $R(s) = R(s, 0)$ and

$$R_k(s) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k a}{\partial r^k}(s, 0), \quad (11.7)$$

for $k \geq 3$.

As $a(s + 2\pi, r) = a(s, \omega r)$, we deduce $R(s + 2\pi) = R(s)$ and for all $j \geq 3$, $R_j(s + 2\pi) = \omega^j R_j(s)$.

Let $p_2 = \frac{1}{a^2}\sigma^2 + \rho^2$ be the principal symbol of Δ , and

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) = \frac{\partial p_2}{\partial \sigma} = \frac{2\sigma}{a^2}, \quad \frac{d}{dt}\sigma(t) = -\frac{\partial p_2}{\partial s} = -\partial_s \left(\frac{1}{a^2} \right) \sigma^2, \\ \frac{d}{dt}r(t) = \frac{\partial p_2}{\partial \rho} = 2\rho, \quad \frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{\partial p_2}{\partial r} = -\partial_r \left(\frac{1}{a^2} \right) \sigma^2, \\ s(0) = s_0, \sigma(0) = \sigma_0, r(0) = r_0, \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \quad (11.8)$$

its associated hamiltonian system, where $p_2 = p_2(s(t), r(t), \sigma(t), \rho(t))$. The system (11.8) admits a unique solution and defines the hamiltonian flow

$$\Phi_t : (s_0, \sigma_0, r_0, \rho_0) \longmapsto (s(t), \sigma(t), r(t), \rho(t)).$$

The curve $\Gamma = \{(s(t) = t, \sigma(t) = 1/2, r(t) = 0, \rho(t) = 0), t \in [0, 2\pi]\}$ is solution of (11.8) and its projection in the (s, r) space is the curve γ . Now denote by ϕ the Poincaré map

associated to the trajectory Γ and to the hyperplane $\Sigma = \{s = 0\}$. There exists a neighborhood \mathcal{N} of $(\sigma = 1/2, r = 0, \rho = 0)$ such that the following makes sense: solve the system (11.8) with the initial conditions $(0, \sigma_0, r_0, \rho_0) \in \{0\} \times \mathcal{N}$ and let T be such that $s(T) = 2\pi$, then ϕ is the application

$$\phi : (r_0, \rho_0) \longmapsto (r(T), \rho(T)).$$

Moreover, the Poincaré map is continuously differentiable (see [13] p. 193). To obtain its differential $d\phi(0, 0)$ at $(0, 0)$, we linearize the system (11.8) about the orbit Γ , i.e.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}s(t) = 2\sigma, & \frac{d}{dt}\sigma(t) = 0, \\ \frac{d}{dt}r(t) = 2\rho, & \frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{1}{2}R(s(t))r, \end{cases} \quad (11.9)$$

then $\sigma = \frac{1}{2}$, $s(t) = t$ and

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -R/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \rho \end{pmatrix}. \quad (11.10)$$

Hence the application $d\phi(0, 0)$ is

$$d\phi(0, 0) : (r_0, \rho_0) \longmapsto (r(2\pi), \rho(2\pi)), \quad (11.11)$$

where (r, ρ) solves (11.10). As $d\phi(0, 0)$ is symplectic, it admits two eigenvalues Λ and Λ^{-1} that are called the characteristic multipliers of the system (11.10). We add the following assumption on γ , which can be formulated in terms of the eigenvalues of $d\phi(0, 0)$:

Assumption 2. *The geodesic γ is stable, i.e. $d\phi(0, 0)$ is a rotation. Then the multipliers take the form $\Lambda = e^{i\lambda}$ and $\Lambda^{-1} = e^{-i\lambda}$ with $\lambda \in \mathbb{R}$. We assume moreover that there exist $\tau, \mu > 0$ such that*

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad |p - q\frac{\lambda}{\pi}| \geq \frac{\mu}{|(p, q)|^\tau}, \quad (11.12)$$

where $|(p, q)| = |p| + |q|$. When this condition is fulfilled, we say that γ is non degenerated.

Remark 11.4. *Almost every $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfies (11.12) with $\tau > 1$. This is an easy consequence of [1] p. 159, e.g.*

Examples 1. *Let M be a surface which has a periodic geodesic γ . In the general case, the eigenvalues of $d\phi(0, 0)$ defined by (11.11) are $\Lambda = \rho e^{i\lambda}$ and $\Lambda^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\lambda}$, with $\Lambda + \Lambda^{-1} \in \mathbb{R}_+$, i.e.*

$$(\rho - \rho^{-1}) \sin \lambda = 0. \quad (11.13)$$

Assume that M is a surface of revolution and that $R > 0$ on γ . Then the characteristic multipliers are

$$\Lambda = \rho e^{2\pi i \sqrt{R}} \quad \text{and} \quad \Lambda^{-1} = \rho^{-1} e^{-2\pi i \sqrt{R}}.$$

i) If $\lambda = 2\pi\sqrt{R}$ satisfies (11.12) then $\rho = 1$ and M satisfies the assumptions.

ii) Let $2\sqrt{R} \notin \mathbb{N}$. Let \tilde{M} be a perturbation of M , and denote by

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\rho}e^{i\tilde{\lambda}} \quad \text{and} \quad \tilde{\Lambda}^{-1} = \tilde{\rho}^{-1}e^{-i\tilde{\lambda}},$$

the new characteristic multipliers.

By (11.13), $\tilde{\rho} = 1$, and Assumption 2 is satisfied almost surely.

iii) Let $a > 0$, then the torus $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ is not under the hypotheses : in this case $d\phi(0,0)$ is not diagonalizable.

Notice that the function r which satisfies (11.10) is solution of

$$\ddot{y}(s) + R(s)y(s) = 0. \quad (11.14)$$

Consider a_0 the solution of (11.14) with initial conditions $a_0(0) = 1$ and $\dot{a}_0(0) = i$. Then, from the Floquet theory, there exists a 2π -periodic function P so that

$$a_0(s) = e^{i\frac{\lambda}{2\pi}s}P(s)$$

(or $a_0(s) = \exp(-i\frac{\lambda}{2\pi}s)P(s)$, but λ can be replaced with $-\lambda$).

Here, and in all the paper we denote by $\dot{f} = \frac{d}{ds}f$ if f is differentiable. This notation is motivated by the fact that s will play the role of a time variable (see section 12).

In order to prove Proposition 11.3, we construct stationary approximate solutions of (11.1), as stated in the following theorem

Theorem 11.5. *Assume 1 and 2. Let $h \in]0, 1]$ such that $\frac{1}{h} \in \mathbb{N}$, let $\kappa, \sigma > 0$ and $k \in \mathbb{N}$. Let λ be given by Assumption 2 and ω_1 by (11.5).*

Define $E_0(k) = -\frac{1}{4\pi}\lambda + \frac{1}{2}k(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})$.

Then for all $N \in \mathbb{N}$, there exist $\lambda_N(k) \in \mathbb{R}$ and a family $u_N(h)$ such that $C_1 h^\sigma \leq \|u_N(h)\|_{L^2(M)} \leq C_2 h^\sigma$ with $C_1, C_2 > 0$ independent of N and h , and

$$-\Delta u_N(h) = \lambda_N(k)u_N(h) - \varepsilon|u_N(h)|^2 u_N(h) + h^N g_N(h) \quad (11.15)$$

with for all $N \in \mathbb{N}$

$$\|h^N g_N(h)\|_{H^n(M)} \lesssim h^{N-n}.$$

Moreover

$$\lambda_N(k) = \frac{1}{h^2} - \frac{2}{h}E_0(k) + \frac{1}{\sqrt{h}}\varepsilon\kappa^2 h^{2\sigma} C_0 + \mathcal{O}(1),$$

where $C_0 > 0$ is independent of ε, κ and σ .

Remark 11.6. *The analog of Theorem 11.5 was proved by J. Ralston in [14] for the linear case ($\varepsilon = 0$), with the same type of assumptions.*

Remark 11.7. *Consider the more general equations*

$$i\partial_t u + \Delta u = F(u), \quad (11.16)$$

where $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is a C^∞ function. The result of Theorem 11.5 is likely to hold with other nonlinearities $F(u)$, for example for $F(z) = z^3$, $F(z) = z^4$ or $F(z) = (1 + |z|^2)^\alpha z$ with $\alpha < 1$. However, the instability phenomenon is strongly related to the gauge invariance of the equation (11.16).

The scheme of the paper is the following: Thanks to a scaling, we reduce the problem (11.15) to the resolution of linear Schrödinger equations with a harmonic time dependent potential, and we will see, using Assumption 2, that these equations have periodic solutions. To prove Proposition 11.3 we show that the family $u_N(h)$ provides good approximations of (11.1) in times where instability occurs.

Notations. In this paper c, C denote constants the value of which may change from line to line. We use the notations $a \sim b$, $a \lesssim b$ if $\frac{1}{C}b \leq a \leq Cb$, $a \leq Cb$ respectively. By $\delta_{i,j}$ we mean the Kronecker symbol, i.e. $\delta_{i,j} = 0$ for $i \neq j$ and $\delta_{i,i} = 1$.

Remark 11.8. In the sequel we do not always mention the dependence on h of the functions: we will write u, f, r_i, \dots instead of $u_h, f_h, r_{i,h}, \dots$

Acknowledgements. The author would like to thank his adviser N. Burq for his constant guidance in this work, P. Pansu for his help in the frame of geometry, and B. Helffer for having pointed out the reference [10].

12 The WKB construction

Consider the equation

$$-\Delta u = \lambda u - \varepsilon |u|^2 u. \quad (12.1)$$

Given $h > 0$, we are looking for a solution of the form

$$u = \delta h^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{s}{h}} f(s, r, h), \quad (12.2)$$

where $\delta = \kappa h^\sigma$, with $\kappa > 0$ and $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{4}$. In all this section, δ will play the role of a parameter.

We try to find a solution (u, λ) of (12.1) of the form

$$u \sim \sum_{j \geq 0} h^{j/2} u_j, \quad \lambda \sim h^{-2} \sum_{j \geq 0} h^{j/2} \lambda_j.$$

As we will see, identifying each power of h will lead to a linear equation which can be solved with a suitable choice of λ_j .

Choose h such that $h^{-1} \in \mathbb{N}$, this ensures that $\exp i\frac{s}{h}$ is 2π -periodic. Such a condition on h is natural and is known as a Bohr-Sommerfeld quantification condition.

With the ansatz (12.2), equation (12.1) becomes

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a^2} \left(\frac{2i}{h} \partial_s f + \partial_s^2 f - \frac{1}{h^2} f \right) - \frac{1}{a} \partial_s \left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{i}{h} f + \partial_s f \right) \\ & - \partial_r^2 f - \frac{\partial_r a}{a} \partial_r f = \lambda f - \varepsilon \delta^2 h^{-\frac{1}{2}} |f|^2 f. \end{aligned} \quad (12.3)$$

We make the change of variables $x = \frac{r}{\sqrt{h}}$ and set $v(s, x, h) = f(s, \sqrt{h}x, h)$. Thus $\partial_r f = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_x v$ and $\partial_r^2 f = \frac{1}{h} \partial_x^2 v$.

Therefore we now have to find $v \sim \sum_{j \geq 0} h^{j/2} v_j$.

Using (11.6) we obtain the following Taylor expansions in h

$$\frac{1}{a^2} = 1 + hRx^2 - 2h^{\frac{3}{2}}R_3x^3 + \mathcal{O}(h^2),$$

$$a^{-1}\partial_s(a^{-1}) = \mathcal{O}(h) \quad \text{and} \quad a^{-1}\partial_r a = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}).$$

Equation (12.3) can therefore be written, after multiplication by $\frac{1}{2}h$

$$\begin{aligned} i\partial_s v + \frac{1}{2}\partial_x^2 v - \frac{1}{2}Rx^2 v \\ = \frac{1 - \lambda h^2}{2h} v + h^{\frac{1}{2}}R_3x^3 v + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2 h^{\frac{1}{2}}|v|^2 v + hPv, \end{aligned} \quad (12.4)$$

where

$$P = A_1\partial_s^2 + A_2\partial_s + A_3\partial_x + A_4 \quad (12.5)$$

is a second order differential operator with coefficients $A_j = A_j(s, x, h)$ satisfying $A_j(s + 2\pi, x, h) = A_j(s, \omega x, h)$ for $0 \leq j \leq 4$.

Denote by $E = \frac{1 - \lambda h^2}{2h} = E_0 + h^{\frac{1}{2}}E_1 + \dots + h^{\frac{p}{2}}E_p + o(h^{\frac{p}{2}})$ and write $v = v_0 + h^{\frac{1}{2}}v_1 + \dots + h^{\frac{p}{2}}v_p + o(h^{\frac{p}{2}})$ and by identifying the powers of h we obtain the system of equations:

$$(i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}Rx^2 - E_0)v_0 = 0, \quad (12.6)$$

$$(i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}Rx^2 - E_0)v_1 = E_1v_0 + R_3x^3v_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2|v_0|^2v_0, \quad (12.7)$$

$$\dots = \dots$$

$$(i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}Rx^2 - E_0)v_p = E_pv_0 + Q_p. \quad (12.8)$$

$$\dots = \dots$$

so that the $(j + 1)$ th equation of unknown (v_j, E_j) corresponds to the annihilation of the coefficient of $h^{\frac{j}{2}}$ in (12.4).

Here Q_p is a function which only depends on $x, s, (v_j)_{j \leq p-1}$ and $(E_j)_{j \leq p-1}$.

Remark 12.1. Notice that thanks to the scaling, we have reduced the problem (12.1) to the resolution of linear equations. However we have to solve them exactly; no smallness assumption on x is possible, as x can be of size $\sim \frac{1}{\sqrt{h}}$.

In this section we will show

Proposition 12.2. For all $p \in \mathbb{N}$, there exist $(E_0, \dots, E_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ and $(v_0, \dots, v_p) \in (\mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R})))^{p+1}$ with $v_0 \neq 0$, which solve the system (12.6)-(12.8).

This permits us to construct approximate solutions of (12.1); more precisely, we will obtain the following proposition, which is the main result of this section.

Proposition 12.3. *Let $\chi \in C_0^\infty(]-r_0, r_0[)$ be such that $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ on $[-r_0/2, r_0/2]$ and suppose moreover that χ is an even function. Let $\delta > 0$. Denote by*

$$u_p(s, r) = \delta h^{-\frac{1}{4}} \chi(r) e^{i\frac{s}{h}} (v_0 + h^{\frac{1}{2}} v_1 + \cdots + h^{\frac{p}{2}} v_p) \left(s, \frac{r}{\sqrt{h}}\right) \quad (12.9)$$

and by

$$\lambda_p = \frac{1}{h^2} - \frac{2}{h} (E_0 + h^{\frac{1}{2}} E_1 + \cdots + h^{\frac{p}{2}} E_p). \quad (12.10)$$

Then u_p satisfies $\|u_p\|_{L^2(M)} \sim \delta$ and

$$-\Delta u_p = \lambda_p u_p - \varepsilon |u_p|^2 u_p + h^{\frac{p-1}{2}} g_p(h) \quad (12.11)$$

with

$$\forall h \in]0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|h^{\frac{p-1}{2}} g_p(h)\|_{H^n([0, 2\pi] \times \mathbb{R})} \lesssim \delta h^{\frac{p-1}{2} - n}.$$

12.1 Preliminaries: the analysis of the linear equations

We will solve the system (12.6)-(12.8) for $x \in \mathbb{R}$. Notice that the Fermi coordinates are only defined for $|r| \leq r_0$ i.e. for $x \leq \frac{r_0}{\sqrt{h}}$. That's the reason why we need the cutoff which appears in the Proposition 12.3.

We first give an expansion of the operator P defined by (12.5).

Lemma 12.4. *Let*

$$P(s, x, h) = A_1(s, x, h) \partial_s^2 + A_2(s, x, h) \partial_s + A_3(s, x, h) \partial_x + A_4(s, x, h),$$

be the differential operator defined by (12.5). Then for all $p \geq 2$, P can be written

$$P(s, x, h) = \sum_{k=0}^{p-1} h^{\frac{k}{2}} P_k(s, x) + h^{\frac{p}{2}} \tilde{P}_p(s, x, h), \quad (12.12)$$

so that

i) For all $0 \leq k \leq p-1$,

$$P_k(s, x) = A_1^k(s, x) \partial_s^2 + A_2^k(s, x) \partial_s + A_3^k(s, x) \partial_x + A_4^k(s, x),$$

where $A_j^k \in C^\infty([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$, for all $s \in [0, 2\pi]$ the function $x \mapsto A_j^k(s, x)$ is a polynomial and $A_j^k(s + 2\pi, x) = A_j^k(s, \omega x)$.

ii) Let $\chi \in C_0^\infty(]-r_0, r_0[)$ and $v \in C^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, then for all $n \in \mathbb{N}$, there exists $C = C(p, n)$ independent of $h \in]0, 1]$ so that

$$\|\chi(h^{\frac{1}{2}} x) \tilde{P}_p v(s, x)\|_{H^n([0, 2\pi] \times \mathbb{R})} \leq C. \quad (12.13)$$

Proof. We first compute the coefficients of P .

By the Taylor formula near $r = 0$ we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}(s, r) &= 1 + R(s)r^2 - 2R_3(s)r^3 + \sum_{k=4}^{p+3} r^k R_k(s) \\ &\quad + \frac{r^{p+4}}{(p+3)!} \int_0^1 (1-t)^{p+3} \frac{\partial^{p+4}}{\partial r^{p+4}} \left(\frac{1}{a^2} \right)(s, tr) dt, \end{aligned}$$

where R_k is given by (11.7).

Now write $r = \sqrt{hx}$ and obtain

$$\frac{1}{a^2}(s, \sqrt{hx}) = 1 + hR(s)x^2 - 2h^{\frac{3}{2}}R_3(s)x^3 + h^2I_1(s, x, h), \quad (12.14)$$

where

$$I_1(s, x, h) = \sum_{k=4}^{p+3} h^{\frac{k-4}{2}} x^k R_k(s) + h^{\frac{p}{2}} \frac{x^{p+4}}{(p+3)!} \int_0^1 (1-t)^{p+3} \frac{\partial^{p+4}}{\partial r^{p+4}} \left(\frac{1}{a^2} \right)(s, \sqrt{hxt}) dt. \quad (12.15)$$

Similarly

$$\frac{1}{a} \partial_s \left(\frac{1}{a} \right)(s, \sqrt{hx}) = hI_2(s, x, h), \quad (12.16)$$

with

$$\begin{aligned} I_2(s, x, h) &= \sum_{k=2}^{p+1} h^{\frac{k-2}{2}} \frac{x^k}{k!} \frac{1}{a} \partial_s \left(\frac{1}{a} \right)(s, 0) \\ &\quad + h^{\frac{p}{2}} \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \int_0^1 (1-t)^{p+1} \frac{\partial^{p+2}}{\partial r^{p+2}} \left(\frac{1}{a} \partial_s \left(\frac{1}{a} \right) \right)(s, \sqrt{hxt}) dt, \end{aligned} \quad (12.17)$$

and

$$\frac{\partial_r a}{a}(s, \sqrt{hx}) = h^{\frac{1}{2}} I_3(s, x, h), \quad (12.18)$$

where

$$\begin{aligned} I_3(s, x, h) &= \sum_{k=1}^p h^{\frac{k-1}{2}} \frac{x^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial r^k} \left(\frac{\partial_r a}{a} \right)(s, 0) \\ &\quad + h^{\frac{p}{2}} \frac{x^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p \frac{\partial^{p+1}}{\partial r^{p+1}} \left(\frac{\partial_r a}{a} \right)(s, \sqrt{hxt}) dt. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Plug the expressions (12.14), (12.16) and (12.18) in equation (12.4), and deduce that coefficients A_j are

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}(-1 - hRx^2 + 2h^{\frac{3}{2}}R_3x^3 - h^2I_1), \\
A_2 &= -iRx^2 + 2ih^{\frac{1}{2}}R_3x^3 - ihI_1 - \frac{1}{2}I_2, \\
A_3 &= -\frac{1}{2}I_3, \\
A_4 &= \frac{1}{2}(I_1 - iI_2).
\end{aligned}$$

Then with the developments (12.15), (12.17) and (12.19), we see that for all $1 \leq j \leq 4$ and $0 \leq k \leq p-1$, $x \mapsto A_j^k(s, x)$ is a polynomial. Moreover as $a(s+2\pi, x) = a(s, \omega x)$, we also have $A_j^k(s+2\pi, x) = A_j^k(s, \omega x)$.

To obtain the bound (12.13), we now have to control the integral rests which appear in (12.15), (12.17) and (12.19).

Let $q \in \mathbb{N}^*$ and let $(s, r) \mapsto f(s, r)$ be one of the functions a^{-2} , $a^{-1}\partial_s(a^{-1})$ or $a^{-1}\partial_r$. Let $\chi \in \mathcal{C}^\infty(]-r_0, r_0[)$ and define F_q by

$$F_q(s, x) = \chi(\sqrt{h}x) \int_0^1 (1-t)^{q-1} \frac{\partial^q}{\partial r^q} f(s, \sqrt{h}xt) dt.$$

As $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi] \times]-r_0, r_0[)$, we deduce that for all $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ there exists $C = C(q, n_1, n_2)$, independent of $h \in]0, 1]$ so that

$$\forall (s, x) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \quad |\partial_s^{n_1} \partial_x^{n_2} F_q(s, x)| \leq C. \quad (12.20)$$

Now let $v \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ and $n \in \mathbb{N}$. We can assume that $n \geq 2$, so that H^n is an algebra. Then by (12.20)

$$\|x^q F_q v\|_{H^n([0, 2\pi] \times \mathbb{R})} \leq C \|F_q\|_{H^n([0, 2\pi] \times \mathbb{R})} \|x^q v\|_{H^n([0, 2\pi] \times \mathbb{R})} \leq C, \quad (12.21)$$

and this yields ii). \square

Consider the Hilbertian basis of $L^2(\mathbb{R})$ composed of the Hermite functions $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ which are the eigenfunctions of the harmonic oscillator $H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}x^2$, i.e. $H\varphi_k = (k + \frac{1}{2})\varphi_k$. Moreover $\varphi_k(x) = P_k(x)e^{-x^2/2}$ where P_k is a polynomial of degree k with $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$. The link between the s -dependent operator $-\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}R(s)x^2$ and H is given by the following result proved by M. Combescure in [10].

Theorem 12.5. *Let $a_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ be the solution of (11.14) with $a_0(0) = 1$, $\dot{a}_0(0) = i$. Define*

$$\alpha = \log |a_0|, \quad \beta = \frac{1}{2i} \log \frac{a_0}{\bar{a}_0},$$

let the unitary transform $T(s)$ be defined by

$$T(s) = e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i\alpha(s)D}, \quad \text{where } D = -\frac{i}{2}(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x),$$

and let $U(s, \tau)$ be the unitary evolution operator for $-\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}R(s)x^2$, i.e. $U(s, \tau)\varphi$ is the unique solution of the problem

$$\begin{cases} (i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}R(s)x^2)u = 0, \\ u(\tau, x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Then we have for any $s, \tau \in \mathbb{R}$

$$U(s, \tau) = T(s)e^{-i(\beta(s) - (\beta(\tau))H)}T(\tau)^{-1}.$$

Remark 12.6. The functions α and β are well defined: suppose that there exists s_0 such that $a_0(s_0) = 0$, then $Re a_0$ and $Im a_0$ are linearly dependent, which is impossible with this choice of the initial conditions.

Remark 12.7. Define $\theta(s) = \beta(s) - \frac{\lambda}{2\pi}s$ where λ is given by Assumption 2. Then α and θ are 2π -periodic real functions. Moreover $\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = \beta(0) = \theta(0) = 0$.

Denote by $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ the Schwartz space, i.e. the space of smooth functions which are fast decreasing and their derivatives too.

Proposition 12.8. Let $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and $E \in \mathbb{C}$. Let $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ be such that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in [0, 2\pi], \quad \partial_s^n f(s, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

in other words $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

Let $\psi \in \mathcal{C}^1([0, 2\pi], L^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^0([0, 2\pi], H^2(\mathbb{R}))$ be the solution of

$$\begin{cases} i\partial_s \psi + \frac{1}{2}\partial_x^2 \psi - \frac{1}{2}R(s)x^2 \psi - E\psi = f, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x). \end{cases} \quad (12.22)$$

Then $\psi \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

Proof. By replacing ψ with $e^{iEt}\psi$, we can assume that $E = 0$. The solution of equation (12.22) is given by

$$\begin{aligned} \psi(s, \cdot) &= U(s, 0)\psi_0 - i \int_0^s U(s, \tau)f(\tau, \cdot)d\tau \\ &= T(s)e^{-i\beta(s)H} \left(\psi_0 - i \int_0^s e^{i\beta(\tau)H}T(\tau)^{-1}f(\tau, \cdot)d\tau \right). \end{aligned} \quad (12.23)$$

As D is a transport operator, we have

$$T, T^{-1} : \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R})),$$

we only have to show that

$$e^{i\beta H} : \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R})).$$

This follows from the fact that β is regular and $e^{iH} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

The description of U given in Theorem 12.5 yields the following representation of $U(s, 0)\varphi_k$:

Proposition 12.9. *For all $k \in \mathbb{N}$ and $s, x \in \mathbb{R}$ we have*

$$U(s, 0)\varphi_k(x) = e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i(\frac{1}{2}+k)\beta(s)} e^{-\frac{1}{2}\alpha(s)} \varphi_k(xe^{-\alpha(s)}). \quad (12.24)$$

Proof. According to Theorem 12.5, and as $H\varphi_k = (k + \frac{1}{2})\varphi_k$,

$$U(s, 0)\varphi_k = e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i(k+\frac{1}{2})\beta(s)} e^{-i\alpha(s)D} \varphi_k.$$

Denote by $f(s) = e^{-i\alpha(s)D} \varphi_k$. Then f is solution of the transport equation

$$\partial_s f = -\frac{1}{2}\dot{\alpha}(s)(x\partial_x f + \partial_x(xf)) = -\frac{1}{2}\dot{\alpha}(s)(f + 2x\partial_x f)$$

with Cauchy data $f(0, x) = \varphi_k(x)$. Make the change of variables $\sigma = \alpha(s)$ and set $g(\sigma) = f(s)$. Therefore g satisfies $\partial_\sigma g = -\frac{1}{2}(g + 2x\partial_x g)$. The equation $x = \dot{x}$, $x(0) = x_0$ admits the solution $x(\tau) = x_0 e^\tau$ and the characteristics method gives $g(\tau, x(\tau)) = e^{-\frac{1}{2}\tau} \varphi_k(x_0) = e^{-\frac{1}{2}\tau} \varphi_k(x(\tau)e^{-\tau})$, hence

$$f(s) = e^{-\frac{1}{2}\alpha(s)} \varphi_k(xe^{-\alpha(s)}).$$

□

Corollary 12.10. *Let $k \in \mathbb{N}$, define $\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega - 1)$ and $E_0(k) = -\frac{1}{4\pi}\lambda + \frac{1}{2}k(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})$. Then*

$$\begin{aligned} w_k &= e^{-isE_0(k)} U(s, 0)\varphi_k \\ &= e^{-isE_0(k)} e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i(\frac{1}{2}+k)\beta(s)} e^{-\frac{1}{2}\alpha(s)} \varphi_k(xe^{-\alpha(s)}) \end{aligned} \quad (12.25)$$

is solution of the equation

$$(i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}R(s)x^2 - E_0(k))w_k(s, x) = 0.$$

Proof. On the one hand, from Proposition 12.9 we deduce

$$\begin{aligned} w_k(s + 2\pi, x) &= e^{-2i\pi E_0(k)} e^{-i\lambda(\frac{1}{2}+k)} w_k(s, x) = e^{-ik\omega_1\pi} w_k(s, x) \\ &= (-1)^{k\omega_1} w_k(s, x) = w_k(s, \omega x). \end{aligned}$$

On the other hand, w_k satisfies (12.6) because of the definition of $U(s, 0)$. □

Fix $k_0 \in \mathbb{N}$ and take $v_0 = w_{k_0}$ with the previous choice of $E_0(k_0)$. This choice corresponds to the k_0 th level of energy for the harmonic oscillator.

Remark 12.11. *Until now we didn't use the restriction (11.12), but it will be crucial in the following.*

Proposition 12.12. *For all $p \geq 0$, there exist $E_p \in \mathbb{C}$ and $v_p \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ which solve (12.8).*

Remark 12.13. *As stated in Theorem 11.5, the E_j 's are in fact real numbers. This will be proved in Lemma 12.17.*

Proof. We proceed by induction on $p \in \mathbb{N}$.

For $p = 0$ the result was proved in Corollary 12.10.

Let $p \geq 1$, and suppose that for all $j \leq p-1$ there exist $E_j \in \mathbb{C}$ and $v_j \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ which solve the $(j+1)$ th equation of (12.6). When $p \geq 2$, set

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{p-1} &= h^{\frac{1}{2}}v_1 + \cdots + h^{\frac{p-1}{2}}v_{p-1}, \\ \tilde{E}_{p-1} &= h^{\frac{1}{2}}E_1 + \cdots + h^{\frac{p-1}{2}}E_{p-1}\end{aligned}$$

and $\tilde{v}_0 = \tilde{E}_0 = 0$. By (12.12), the function Q_p given by (12.8) is the coefficient of $h^{\frac{p}{2}}$ in the expansion in h of

$$\tilde{E}_{p-1}\tilde{v}_{p-1} + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2|v_0 + \tilde{v}_{p-1}|^2(v_0 + \tilde{v}_{p-1}) + h\left(\sum_{k=0}^{p-1} h^{\frac{k}{2}}P_k\right)(v_0 + \tilde{v}_{p-1}).$$

Now using the regularity of the v_j 's and the fact that for all $0 \leq k \leq p-1$, P_k is an operator

$$P_k : \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R})) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R})),$$

we obtain $Q_p \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$.

Moreover Q_p satisfies, $\forall (s, x) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$

$$Q_p(s + 2\pi, x) = Q_p(s, \omega x)$$

because this property holds for the v_j 's, and a .

Define $F_p(s, x) = e^{-i\dot{\alpha}(s)e^{2\alpha(s)}x^2/2}Q_p(s, xe^{\alpha(s)})$, then $F_p \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ and satisfies $Q_p(s, x) = e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2}F_p(s, xe^{-\alpha(s)})$ and $F_p(s + 2\pi, x) = F_p(s, \omega x)$. Let us decompose F_p on the basis $(\varphi_j)_{j \geq 0}$: there exists a unique family of smooth functions $(g_j^p(s))_{j \geq 0} \in l^2(\mathbb{N})$ so that

$$F_p(s, y) = \sum_{j \geq 0} g_j^p(s)\varphi_j(y). \quad (12.26)$$

Then

$$Q_p(s, x) = \sum_{j \geq 0} g_j^p(s)e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2}\varphi_j(xe^{-\alpha(s)}) = \sum_{j \geq 0} h_j^p(s)w_j(s, x), \quad (12.27)$$

where according to (12.25)

$$h_j^p(s) = e^{isE_0(j)}e^{i(\frac{1}{2}+j)\beta(s)}e^{\frac{1}{2}\alpha(s)}g_j^p(s). \quad (12.28)$$

We have

$$Q_p(s, \omega x) = \sum_{j \geq 0} h_j^p(s)w_j(s, \omega x),$$

but also

$$\begin{aligned}Q_p(s, \omega x) = Q_p(s + 2\pi, x) &= \sum_{j \geq 0} h_j^p(s + 2\pi)w_j(s + 2\pi, x) \\ &= \sum_{j \geq 0} h_j^p(s + 2\pi)w_j(s, \omega x),\end{aligned}$$

and from the uniqueness of the h_j^p 's we deduce $h_j^p(s + 2\pi) = h_j^p(s)$. We are now looking for a solution of (12.8) of the form

$$v_p(s, x) = \sum_{j \geq 0} e_j^p(s) w_j(s, x) \quad (12.29)$$

where the e_j^p 's are 2π -periodic functions. For all $j \geq 0$, by Corollary 12.10 we have

$$(i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}Rx^2)(e_j^p w_j) = i\dot{e}_j^p w_j + (E_0(k_0) - E_0(j))e_j^p w_j,$$

hence we have to solve the equations

$$i\dot{e}_j^p + (E_0(k_0) - E_0(j))e_j^p = h_j^p + \delta_{j,k_0} E_p. \quad (12.30)$$

As $E_0(k_0) - E_0(j) = \frac{1}{2}(k_0 - j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})$, the solutions of (12.30) take the form

$$e_j^p(s) = e^{\frac{1}{2}i(k_0-j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})s} (C_j^p - i \int_0^s h_j^p(\tau) e^{-\frac{1}{2}i(k_0-j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})\tau} d\tau) \quad (12.31)$$

for $j \neq k_0$, and

$$e_{k_0}^p(s) = C_{k_0}^p - i \int_0^s h_{k_0}^p(\tau) d\tau - iE_p s.$$

The constants $C_j^p \in \mathbb{C}$ and $E_p \in \mathbb{C}$ have to be determined such that $e_j^p(s + 2\pi) = e_j^p(s)$.

• Case $j = k_0$:

$$e_{k_0}^p(s + 2\pi) = -i \int_0^{2\pi} h_{k_0}^p(\tau) d\tau - 2\pi i E_p + e_{k_0}^p(s),$$

thus $e_{k_0}^p$ is 2π -periodic iff

$$E_p = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{k_0}^p(\tau) d\tau. \quad (12.32)$$

• Case $j \neq k_0$:

Denote by $\tilde{h}_j^p : \tau \mapsto h_j^p(\tau) e^{-i\frac{1}{2}(k_0-j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})\tau}$ and by $K = e^{i(k_0-j)(\pi\omega_1 - \lambda)}$. Then

$$\begin{aligned} \int_0^{s+2\pi} \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau &= \int_0^{2\pi} \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau + \int_{2\pi}^{s+2\pi} \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau + K^{-1} \int_0^s \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

and by (12.31)

$$\begin{aligned} e_j^p(s + 2\pi) &= K e^{i\frac{1}{2}(k_0-j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})s} (C_j^p - i \int_0^{s+2\pi} \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau) \\ &= e^{i\frac{1}{2}(k_0-j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})s} (K C_j^p - iK \int_0^{2\pi} \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau - i \int_0^s \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau). \end{aligned} \quad (12.33)$$

Notice that $K \neq 1$, as $\lambda \notin \pi\mathbb{Q}$ and choose

$$C_j^p = \frac{iK}{K-1} \int_0^{2\pi} \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau,$$

then according to (12.31) and (12.33), the function e_j^p is 2π -periodic.

Now, we show that the constants C_j^p are uniformly bounded in $j \geq 0$, so that the function v_p given by (12.29) is well defined. We first need the

Lemma 12.14. *Let $(h_j^p)_{j \geq 0} \in l^2(\mathbb{N})$ be the family of 2π -periodic functions defined by (12.28) and $h_j^p(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{l,j}^p e^{ils}$ its Fourier decomposition. Then for all $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ there exists $C^p > 0$ such that for all $j \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} j^{2n_1} l^{2n_2} |c_{l,j}^p|^2 \leq C^p.$$

Proof. Consider the function $F_p \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ which defines the family $(g_j^p(s))_{j \geq 0} \in l^2(\mathbb{N})$ with (12.26). Denote by $H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}x^2$. Let $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ and decompose the function $\partial_s^{n_2} H^{n_1} F_p$ on the basis $(\varphi_j)_{j \geq 0}$

$$\partial_s^{n_2} H^{n_1} F_p(s, y) = \sum_{j \geq 0} \tilde{g}_j^p(s) \varphi_j(y)$$

where $(\tilde{g}_j^p)_{j \geq 0}$ is a smooth family of functions in $l^2(\mathbb{N})$.

Using that $H\varphi_j = (j + \frac{1}{2})\varphi_j$ and that $F_p \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, we have for all $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$$\partial_s^{n_2} H^{n_1} F_p(s, y) = \sum_{j \geq 0} (j + \frac{1}{2})^{n_1} (g_j^p)^{(n_2)}(s) \varphi_j(y).$$

By uniqueness of such a decomposition,

$$\left((j + \frac{1}{2})^{n_1} (g_j^p)^{(n_2)} \right)_{j \geq 0} = (\tilde{g}_j^p)_{j \geq 0} \in l^2(\mathbb{N}).$$

Then by the definition (12.28) of h_j^p , an easy induction on $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ shows that

$$(j^{n_1} (h_j^p)^{(n_2)})_{j \geq 0} \in l^2(\mathbb{N})$$

. Write the Fourier decomposition of h_j^p

$$h_j^p(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{l,j}^p e^{ils}$$

and by Parseval

$$\sum_{j \geq 0} \sum_{l \in \mathbb{Z}} j^{2n_1} l^{2n_2} |c_{l,j}^p|^2 = \sum_{j \geq 0} j^{2n_1} \int_0^{2\pi} |(h_j^p)^{(n_2)}(s)|^2 ds \leq C^p.$$

In particular, for all $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} j^{2n_1} l^{2n_2} |c_{l,j}^p|^2 \leq C^p,$$

hence the result. □

End of the proof of Proposition 12.12: Using the Fourier decomposition of h_j we obtain

$$\begin{aligned}
C_j^p &= \frac{iK}{K-1} \int_0^{2\pi} \tilde{h}_j^p(\tau) d\tau \\
&= \frac{iK}{K-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{l,j}^p \int_0^{2\pi} e^{i(l - \frac{1}{2}(k_0 - j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi}))\tau} \\
&= -i \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{c_{l,j}^p}{l - \frac{1}{2}(k_0 - j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi})}.
\end{aligned} \tag{12.34}$$

With Assumption 2 we have

$$\begin{aligned}
\left| l - \frac{1}{2}(k_0 - j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi}) \right| &= \frac{1}{2} |(2l - (k_0 - j)\omega_1) + (k_0 - j)\frac{\lambda}{\pi}| \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{\mu}{|(2l - (k_0 - j)\omega_1, k_0 - j)|^\tau},
\end{aligned}$$

and for $j \geq k_0$, $|2l - (k_0 - j)\omega_1| + |k_0 - j| \leq 2(|l| + |j|)$, then

$$\left| l - \frac{1}{2}(k_0 - j)(\omega_1 - \frac{\lambda}{\pi}) \right| \geq \frac{c\mu}{(|l| + |j|)^\tau}. \tag{12.35}$$

Hence, from (12.34) and (12.35) we deduce

$$|C_j^p| \lesssim \sum_{l \in \mathbb{Z}} |c_{l,j}^p| (|j| + |l|)^\tau \lesssim \sum_{l \in \mathbb{Z}} |c_{l,j}^p| (|j|^\tau + |l|^\tau). \tag{12.36}$$

By Cauchy-Schwarz and Lemma 12.14, from (12.36) we obtain

$$\begin{aligned}
|C_j^p| &\lesssim \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1 + |l|}{1 + |l|} |c_{l,j}^p| (|j|^\tau + |l|^\tau) \\
&\lesssim \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |l|)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |c_{l,j}^p|^2 (1 + |l|)^2 (|j|^{2\tau} + |l|^{2\tau}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C^p.
\end{aligned} \tag{12.37}$$

Set

$$v_p(s, x) = \sum_{j \geq 0} e_j^p(s) w_j(s, x).$$

For all $j \in \mathbb{N}$, $s \mapsto e_j^p(s) w_j(s, x)$ is continuous and there exists $c > 0$ such that for all $j > k_0$, and for all $s \in [0, 2\pi]$

$$|e_j^p(s) w_j(s, x)| \lesssim |g_j^p(s)| |\varphi_j(cx)|$$

and this shows that $v_p \in C([0, 2\pi], L^2(\mathbb{R}))$. Now using Proposition 12.8 we conclude, by uniqueness of such a solution, that $v_p \in C^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$. \square

12.2 The nonlinear analysis and proof of Proposition 12.3

Lemma 12.15. *The constant E_1 given by Proposition 12.12 writes $E_1 = -\varepsilon\delta^2 C_0$ where $C_0 > 0$ is independent of ε and δ .*

Proof. Consider the equation

$$(i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}Rx^2 - E_0)v_1 = E_1v_0 + R_3x^3v_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2|v_0|^2v_0,$$

with

$$v_0(s, x) = e^{-isE_0(k_0)} e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i(\frac{1}{2}+k_0)\beta(s)} e^{-\frac{1}{2}\alpha(s)} \varphi_{k_0}(xe^{-\alpha(s)}).$$

By the definition of Q_p (see (12.8)),

$$Q_1(s, x) = R_3(s)x^3v_0(s, x) + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2|v_0|^2v_0(s, x),$$

and by (12.27), Q_1 can be written

$$Q_1(s, x) = \sum_{j \geq 0} h_j^1(s) w_j(s, x).$$

According to formula (12.32), we only have to compute the term $h_{k_0}^1$ in the previous expansion.

Write the expansion of $|\varphi_{k_0}|^2\varphi_{k_0}$ on the basis $(\varphi_j)_{j \geq 0}$:

$$|\varphi_{k_0}|^2\varphi_{k_0} = \sum_{j \geq 0} p_j \varphi_j, \quad (12.38)$$

with $p_j \in \mathbb{R}$ and $p_j = 0$ for $j - k_0 = 1 \pmod{2}$ as $\varphi_k(-x) = (-1)^k \varphi_k(x)$.

Then by (12.38) and the expression (12.25) of w_j

$$\begin{aligned} |v_0|^2v_0(s, x) &= e^{-isE_0(k_0)} e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i(\frac{1}{2}+k_0)\beta(s)} e^{-\frac{3}{2}\alpha(s)} |\varphi_{k_0}|^2\varphi_{k_0}(xe^{-\alpha(s)}) \\ &= \sum_{j \geq 0} p_j e^{-isE_0(k_0)} e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2} e^{-i(\frac{1}{2}+k_0)\beta(s)} e^{-\frac{3}{2}\alpha(s)} \varphi_j(xe^{-\alpha(s)}) \\ &= \sum_{j \geq 0} f_j(s) w_j(s, x) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} f_j(s) &= p_j e^{-is(E_0(k_0) - E_0(j))} e^{-i(k_0 - j)\beta(s)} e^{-\alpha(s)} \\ &= p_j e^{-i(k_0 - j)(\theta(s) + \frac{s}{2}\omega_1)} e^{-\alpha(s)}. \end{aligned}$$

Therefore $f_{k_0}(s) = p_{k_0} e^{-\alpha(s)}$ with, using (12.38), $p_{k_0} = \int_{\mathbb{R}} |\phi_{k_0}|^4 > 0$. In the same manner we write

$$x^3\varphi_{k_0}(x) = \sum_{j \geq 0} q_j \varphi_j(x), \quad (12.39)$$

with $q_j = 0$ when $j - k_0 = 0 \pmod 2$ and by (12.39) we have

$$\begin{aligned} R_3(s)x^3v_0(s, x) &= R_3(s)e^{-isE_0(k_0)}e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2}e^{-i(\frac{1}{2}+k_0)\beta(s)}e^{\frac{5}{2}\alpha(s)}(xe^{-\alpha(s)})^3\varphi_{k_0}(xe^{-\alpha(s)}) \\ &= \sum_{j \geq 0} q_j R_3(s)e^{-isE_0(k_0)}e^{-i(\frac{1}{2}+k_0)\beta(s)}e^{\frac{5}{2}\alpha(s)}e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2}\varphi_j(xe^{-\alpha(s)}). \end{aligned}$$

By (12.25) we have

$$e^{i\dot{\alpha}(s)x^2/2}\varphi_{k_0}(xe^{-\alpha(s)}) = e^{isE_0(j)}e^{i(\frac{1}{2}+j)\beta(s)}e^{\frac{1}{2}\alpha(s)}.$$

Then

$$R_3(s)x^3v_0(s, x) = \sum_{j \geq 0} \tilde{f}_j(s)w_j(s, x),$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(s) &= q_j R_3(s)e^{-is(E_0(k_0)-E_0(j))}e^{-i(k_0-j)\beta(s)}e^{3\alpha(s)} \\ &= q_j R_3(s)e^{-i(k_0-j)(\theta(s)+\frac{\varepsilon}{2}\omega_1)}e^{3\alpha(s)}. \end{aligned}$$

Then $\tilde{f}_{k_0} = 0$ as $q_j = 0$ when $j - k_0 = 0 \pmod 2$. Thus

$$h_{k_0}^1(s) = \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2 f_{k_0}(s) = \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2 p_{k_0}e^{-\alpha(s)}.$$

Finally, from (12.32) we deduce

$$E_1 = -\frac{1}{4\pi}\varepsilon\delta^2 p_{k_0} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha(\tau)} d\tau = -\varepsilon\delta^2 C_0,$$

where $C_0 > 0$ as $p_{k_0} > 0$. □

Lemma 12.16. *Let $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ such that $\psi = 0$ near 0, and let $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Then for all $n, N \in \mathbb{N}$, there exists $C = C(n, N)$ so that*

$$\|\psi(h^{\frac{1}{2}}\cdot)f\|_{H^n(\mathbb{R})} \leq Ch^N. \quad (12.40)$$

Proof. We only show (12.40) for $n = 0$, the general case follows from the Leibniz rule. We can assume that $\text{supp } \psi \subset [a, b]$ with $a > 0$. Then as $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, for all $N \in \mathbb{N}$, there exists $C_N > 0$ so that

$$|f(x)| \leq C_N \frac{1}{1 + |x|^N}.$$

Thus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\psi(h^{\frac{1}{2}}x)|^2 |f(x)|^2 dx &= h^{-\frac{1}{2}} \int_a^b |\psi(x)|^2 |f(h^{-\frac{1}{2}}x)|^2 dx \\ &\leq C_N h^{N-\frac{1}{2}} \int_a^b |\psi(x)|^2 \frac{1}{h^N + x^{2N}} dx \\ &\leq C_N h^{N-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

hence the result. □

Proof of Proposition 12.3. Let $p \geq 1$, and consider

$$V_p(s, x) = (v_0 + h^{\frac{1}{2}}v_1 + \cdots + h^{\frac{p}{2}}v_p)(s, x),$$

and

$$\tilde{E}_p = E_0 + h^{\frac{1}{2}}E_1 + \cdots + h^{\frac{p}{2}}E_p,$$

where the v_j 's and the E_j 's are given by Proposition 12.12.

Let $\chi \in C_0^\infty([-r_0, r_0])$ be an even function such that $0 \leq \chi \leq 1$ and $\chi = 1$ on $[-r_0/2, r_0/2]$.

We claim that there exists $G_p(h) \in C^\infty([0, 2\pi], \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, so that

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|G_p(h)\|_{H^n([0, 2\pi] \times \mathbb{R})} \leq C_{n,p}, \quad (12.41)$$

where $C_{n,p}$ is independent of $h \in]0, 1]$, and such that $G_p(h)$ satisfies

$$\begin{aligned} \chi(h^{\frac{1}{2}}x) \left((i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}Rx^2 - \tilde{E}_p)V_p \right. \\ \left. - h^{\frac{1}{2}}R_3x^3V_p - \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2h^{\frac{1}{2}}|V_p|^2V_p - hPV_p \right) = h^{\frac{p+1}{2}}G_p(h). \end{aligned} \quad (12.42)$$

By construction of the v_j 's and the E_j 's, in the l.h.s. of (12.42), the coefficient of h^j cancels for $0 \leq j \leq p$.

Then write the expansion in powers of h

$$\frac{1}{2}\varepsilon\delta^2|V_p|^2V_p = \sum_{k=0}^{3p+1} h^{\frac{k}{2}}V_p^k,$$

and use (12.12) to obtain

$$hPV_p = h \left(\sum_{k=0}^{p-1} h^{\frac{k}{2}}P_k + h^{\frac{p}{2}}\tilde{P}_p \right) \left(\sum_{k=0}^p h^{\frac{k}{2}}v_k \right) := \sum_{k=0}^{2p+2} h^{\frac{k}{2}}W_p^k$$

We therefore obtain the explicit formula of $G_p(h)$

$$\begin{aligned} h^{\frac{p+1}{2}}G_p(h) &:= -\chi(h^{\frac{1}{2}}x) \sum_{k=p+1}^{2p+2} h^{\frac{k}{2}}W_p^k - \chi(h^{\frac{1}{2}}x) \sum_{k=p+1}^{3p+1} h^{\frac{k}{2}}V_p^k - \chi(h^{\frac{1}{2}}x)h^{\frac{p+1}{2}}R_3x^3v_p \\ &= -h^{\frac{p+1}{2}}\chi(h^{\frac{1}{2}}x) \left(\sum_{l=0}^{p+1} h^{\frac{l}{2}}W_p^{l+p+1} \sum_{l=0}^{2p} h^{\frac{l}{2}}V_p^{l+p+1} + R_3x^3v_p \right). \end{aligned}$$

The bound (12.41) then follows from an application of Lemma 12.4.

Denote by $\tilde{V}_p = \chi(h^{\frac{1}{2}}x)V_p$, and write

$$\begin{aligned} P\tilde{V}_p &= (A_1\partial_s^2 + A_2\partial_s + A_3\partial_x + A_4)(\chi(h^{\frac{1}{2}}x)V_p) \\ &= \chi(h^{\frac{1}{2}}x)PV_p + h^{\frac{1}{2}}\chi'(h^{\frac{1}{2}}x)A_3V_p. \end{aligned}$$

By (12.42) we deduce that

$$\begin{aligned}
& (i\partial_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 - \frac{1}{2}Rx^2 - \tilde{E}_p)\tilde{V}_p - h^{\frac{1}{2}}R_3x^3\tilde{V}_p - \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2h^{\frac{1}{2}}|\tilde{V}_p|^2\tilde{V}_p - hP\tilde{V}_p \\
&= h^{\frac{p+1}{2}}G_h^p + h^{\frac{1}{2}}\chi'(h^{\frac{1}{2}}x)\partial_x V_p + \frac{1}{2}h\chi''(h^{\frac{1}{2}}x)V_p \\
&\quad + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2h^{\frac{1}{2}}\chi(1-\chi^2)(h^{\frac{1}{2}}x)|V_p|^2V_p - h^{\frac{3}{2}}\chi'(h^{\frac{1}{2}}x)A_3V_p \\
&:= h^{\frac{p+1}{2}}\tilde{G}_p(h).
\end{aligned}$$

Each of the functions χ' , χ'' and $\chi(1-\chi^2)$ vanishes near 0, hence by Lemma 12.16 and (12.41)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\tilde{G}_p(h)\|_{H^n([0,2\pi] \times \mathbb{R})} \leq C_{n,p}. \quad (12.43)$$

Finally, set

$$u_p = \delta h^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{s}{h}} V_p\left(s, \frac{r}{\sqrt{h}}\right),$$

then

$$-\Delta u_p - \lambda_p u_p + \varepsilon|u_p|^2 u_p = \frac{2}{h} e^{i\frac{s}{h}} h^{\frac{p+1}{2}} \tilde{G}_p(h),$$

and $g_p(h) = 2e^{i\frac{s}{h}} \tilde{G}_p(h)$ satisfies the conclusion of Proposition 12.3 by (12.43). \square

Lemma 12.17. *Let $p \geq 1$ and E_p given by Proposition (12.12). Then $E_p \in \mathbb{R}$.*

Proof. We already know that $E_0, E_1 \in \mathbb{R}$. Let $p \geq 3$. Multiply (12.11) by \bar{u}_p , integrate on M and take the imaginary part

$$0 = \|u_p\|_{L^2}^2 \operatorname{Im} \lambda_p + h^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{Im} \int g_p(h) \bar{u}_p.$$

As $\|u_p\|_{L^2} \sim 1$ and $\|g_p\|_{L^2} \lesssim 1$, we obtain the estimate

$$|\operatorname{Im} \lambda_p| \lesssim h^{\frac{p-1}{2}} \|g_p\|_{L^2} \|u_p\|_{L^2} \lesssim h^{\frac{p-1}{2}}$$

and as

$$\operatorname{Im} \lambda_p = -2(\operatorname{Im} E_2 + h^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} E_3 + \cdots + h^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{Im} E_p)$$

it follows that for all $0 \leq j \leq p-1$, $\operatorname{Im} E_j = 0$, i.e. $E_j \in \mathbb{R}$. \square

13 The instability for the nonlinear Schrödinger equation

13.1 The error estimate

Proposition 13.1. *Let $\alpha > 0$, $\sigma \in [0, \frac{1}{4}]$ and let $v \in H^2(M)$ be such that*

$$\|v\|_{L^2} \lesssim 1, \quad \|v\|_{L^\infty} \lesssim h^{-\frac{1}{4}+\sigma}, \quad \|\Delta v\|_{L^\infty} \lesssim h^{-\frac{9}{4}+\sigma},$$

and suppose that v satisfies

$$i\partial_t v + \Delta v = \varepsilon|v|^2 v + h^\alpha R(h),$$

with for all $\beta \in [0, 2]$, $\|R(h)\|_{H^\beta} \lesssim h^{-\beta}$. Let u be solution of

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \varepsilon|u|^2 u, \\ u(0, x) = v(0, x). \end{cases}$$

Then, if $\alpha > \frac{1}{4} + 3\sigma$ we have

$$\|(u - v)(t_h)\|_{H^\sigma} \longrightarrow 0 \quad \text{when } h \longrightarrow 0,$$

where $t_h \sim h^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log(\frac{1}{h})$.

Proof. Define $w = u - v$ and

$$E(t) = \|w\|_{L^2}^2 + \|h^2 \Delta w\|_{L^2}^2.$$

We have $E(0) = 0$ and the following estimates:

$$\|w\|_{L^2} \leq E^{\frac{1}{2}}, \quad \|\Delta w\|_{L^2} \leq h^{-2} E^{\frac{1}{2}}, \quad \|\nabla w\|_{L^2} \leq h^{-1} E^{\frac{1}{2}}. \quad (13.1)$$

The function w satisfies the equation

$$i\partial_t w + \Delta w = \varepsilon(|w + v|^2(w + v) - |v|^2 v) - h^\alpha R(h). \quad (13.2)$$

The energy method gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 &= \operatorname{Im} \int \bar{w} (\varepsilon(|w + v|^2(w + v) - |v|^2 v) - h^\alpha R(h)) \\ &\lesssim h^\alpha \|w\|_{L^2} + \|w\|_{L^4}^4 + \|w\|_{L^2}^2 \|v\|_{L^\infty}^2. \end{aligned}$$

The Gagliardo-Nirenberg inequality gives

$$\|w\|_{L^4}^4 \lesssim \|w\|_{L^2}^2 \|\nabla w\|_{L^2}^2 \lesssim h^{-2} E^2,$$

and as $\|v\|_{L^\infty} \lesssim h^{-\frac{1}{4}+\sigma}$, we obtain

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 \lesssim h^\alpha E^{\frac{1}{2}} + h^{-\frac{1}{2}+2\sigma} E + h^{-2} E^2. \quad (13.3)$$

Now, apply Δ to (13.2)

$$i\partial_t \Delta w + \Delta^2 w = \varepsilon \Delta A - h^\alpha \Delta R(h), \quad (13.4)$$

with

$$\begin{aligned} A &= |w + v|^2(w + v) - |v|^2 v \\ &= 2w|v|^2 + \bar{w}v^2 + w^2\bar{v} + 2|w|^2 v + |w|^2 w, \end{aligned}$$

then

$$|\Delta A| \lesssim |v|^2 |\Delta w| + |v| |\nabla v| |\nabla w| + |\nabla v|^2 |w| + |v| |\Delta v| |w| \\ + |\Delta v| |w|^2 + |w|^2 |\Delta w| + |w| |\nabla w|^2,$$

hence

$$\|\Delta A\|_{L^2} \lesssim \|v\|_{L^\infty}^2 \|\Delta w\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty} \|\nabla v\|_{L^\infty} \|\nabla w\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^\infty}^2 \|w\|_{L^2} \\ + \|v\|_{L^\infty} \|\Delta v\|_{L^\infty} \|w\|_{L^2} + \|\Delta v\|_{L^\infty} \|w\|_{L^4}^2 \\ + \|w\|_{L^\infty}^2 \|\Delta w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^4}^2. \quad (13.5)$$

The following inequality holds in dimension 2

$$\|w\|_{L^\infty} \lesssim \|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Delta w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \lesssim h^{-1} E^{\frac{1}{2}},$$

and with (13.1) and (13.5) we deduce

$$\|\Delta A\|_{L^2} \lesssim h^{-\frac{5}{2}+2\sigma} E^{\frac{1}{2}} + h^{-\frac{13}{4}+\sigma} E + h^{-4} E^{\frac{3}{2}}.$$

But

$$h^{-\frac{13}{4}+\sigma} E = h^{-\frac{5}{4}+\sigma} E^{\frac{1}{4}} h^{-2} E^{\frac{3}{4}} \lesssim h^{-\frac{5}{2}+2\sigma} E^{\frac{1}{2}} + h^{-4} E^{\frac{3}{2}},$$

and we obtain

$$\|\Delta(A)\|_{L^2} \lesssim h^{-\frac{5}{2}+2\sigma} E^{\frac{1}{2}} + h^{-4} E^{\frac{3}{2}}. \quad (13.6)$$

Now, using (13.6) and $\|\Delta(R(h))\|_{L^2} \lesssim h^{-2}$, the energy method and the Cauchy-Schwarz inequality gives

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta w\|_{L^2}^2 = \operatorname{Im} \int \Delta \bar{w} (\Delta A - h^\alpha \Delta R(h)) \\ \lesssim h^{-2} E^{\frac{1}{2}} (h^{\alpha-2} + h^{-\frac{5}{2}+2\sigma} E^{\frac{1}{2}} + h^{-4} E^{\frac{3}{2}}), \quad (13.7)$$

therefore from (13.3) and (13.7) we have

$$\frac{d}{dt} E \lesssim h^\alpha E^{\frac{1}{2}} + h^{-\frac{1}{2}+2\sigma} E + h^{-2} E^2.$$

Interpolation gives

$$\|w\|_{H^\sigma} \lesssim \|w\|_{L^2} + \|w\|_{\dot{H}^\sigma} \lesssim \|w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}^{1-\frac{\sigma}{2}} \|\Delta w\|_{L^2}^{\frac{\sigma}{2}} \lesssim h^{-\sigma} E^{\frac{1}{2}} := F.$$

The function F satisfies $F(0) = 0$ and

$$\frac{d}{dt} F \lesssim h^{-\sigma+\alpha} + h^{-\frac{1}{2}+2\sigma} F + h^{-2+2\sigma} F^3. \quad (13.8)$$

As long as $h^{-2+2\sigma} F^3 \lesssim h^{-\frac{1}{2}+2\sigma} F$, i.e. $F \lesssim h^{\frac{3}{4}}$, we can write

$$\frac{d}{dt} F \lesssim h^{-\sigma+\alpha} + h^{-\frac{1}{2}+2\sigma} F,$$

and the Gronwall inequality yields

$$F \lesssim h^{\alpha+\frac{1}{2}-3\sigma} e^{Ch^{-\frac{1}{2}+2\sigma}t}.$$

The non linear term in (13.8) can be removed with the continuity argument for times such that

$$h^{\alpha+\frac{1}{2}-3\sigma} e^{Ch^{-\frac{1}{2}+2\sigma}t} \lesssim h^{\frac{3}{4}+\eta},$$

with $\eta > 0$ i.e. for $t \lesssim (\alpha - \frac{1}{4} - 3\sigma - \eta)h^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log \frac{1}{h}$, which is possible with η small enough as we assume $\alpha > \frac{1}{4} + 3\sigma$. \square

Corollary 13.2. *Let $\kappa > 0$, $0 < \sigma < \frac{1}{4}$ and set $\delta = \kappa h^\sigma$. Denote by $v = e^{-i\lambda_3 t} u_3$ where u_3 and λ_3 are defined by (12.9) and (12.10) respectively.*

Let u be solution of

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \varepsilon |u|^2 u, \\ u(0, x) = v(0, x). \end{cases}$$

Then $\|v\|_{H^\sigma} \sim 1$ and

$$\|(u - v)(t_h)\|_{H^\sigma} \longrightarrow 0 \quad \text{when } h \longrightarrow 0,$$

where $t_h \sim h^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log(\frac{1}{h})$.

Proof. The result directly follows from Propositions 12.3 and 13.1, as for all $0 < \sigma < \frac{1}{4}$, we have $\sigma + 1 > \frac{1}{4} + 3\sigma$. \square

13.2 The instability argument

Let $\kappa, \kappa_h > 0$ and consider $v = v^1$ defined in Corollary 13.2 associated with κ and v^2 associated with κ_h . Let u be a solution of

$$\begin{cases} i\partial_t u^j + \Delta u^j = \varepsilon |u^j|^2 u^j, \\ u^j(0, x) = v^j(0, x), \end{cases}$$

and $t_h \sim h^{\frac{1}{2}-2\sigma} \log \frac{1}{h}$. Then

$$\begin{aligned} \|(u^2 - u^1)(t_h)\|_{H^\sigma} &\geq \|(v^2 - v^1)(t_h)\|_{H^\sigma} - \|(u^2 - v^2)(t_h)\|_{H^\sigma} \\ &\quad - \|(u^1 - v^1)(t_h)\|_{H^\sigma}. \end{aligned} \tag{13.9}$$

From Corollary 13.2 we deduce that for $j = 1, 2$

$$\|(u^j - v^j)(t_h)\|_{H^\sigma} \longrightarrow 0. \tag{13.10}$$

Observe that

$$\|(v^2 - v^1)(t_h)\|_{H^\sigma} \sim \left| e^{-i\lambda_3^2 t_h} - e^{-i\lambda_3^1 t_h} \right| = \left| e^{i(\lambda_3^2 - \lambda_3^1) t_h} - 1 \right|,$$

from Proposition 12.15 we have

$$(\lambda_3^2 - \lambda_3^1) t_h \sim h^{2\sigma-1} (\kappa - \kappa_h) t_h \sim (\kappa - \kappa_h) \log \frac{1}{h}.$$

It is possible to choose κ_h such that $\kappa_h \rightarrow \kappa$ and $(\kappa - \kappa_h) \log \frac{1}{h} \rightarrow \infty$. Then using (13.9) and (13.10)

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|(u^2 - u^1)(t_h)\|_{H^\sigma} \geq \limsup_{h \rightarrow 0} \|(v^2 - v^1)(t_h)\|_{H^\sigma} \geq 2,$$

even though

$$\|(u^2 - u^1)(0)\|_{H^\sigma} = \|(v^2 - v^1)(0)\|_{H^\sigma} \sim |\kappa - \kappa_h|,$$

which tends to 0 with h . According to Definition 11.1, we have proved Proposition 11.3.

Bibliography

- [1] S. Alinhac and P. Gérard. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris, 1991.
- [2] V. Banica. On the nonlinear Schrödinger dynamics on \mathbb{S}^2 . *J. Math. Pures Appl.*, (9) 83 (2004), no. 1, 77–98.
- [3] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. *Geom. Funct. Anal.*, 3(2):107–156, 1993.
- [4] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. An instability property of the nonlinear Schrödinger equation on S^d . *Math. Res. Lett.*, 9(2-3):323–335, 2002.
- [5] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.*, 126, no. 3, 569–605, 2004.
- [6] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Agmon estimates and nonlinear instability for Schrödinger equations. *Preprint*, 2005.
- [7] R. Carles. Geometric optics and instability for semi-classical Schrodinger equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 183, no. 3, 525–553, 2007.
- [8] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations. *Amer. J. Math.*, 125(6):1235–1293, 2003.
- [9] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Ill-posedness for nonlinear Schrödinger and wave equation. To appear in *Annales IHP*.
- [10] M. Combescure. The quantum stability problem for some class of time-dependent Hamiltonians. *Ann. Physics*, 185(1):86–110, 1988.
- [11] B. Helffer. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, volume 1336 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [12] W. Klingenberg. *Riemannian geometry*, volume 1 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1982.
- [13] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*, volume 7 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

- [14] J. V. Ralston. Approximate eigenfunctions of the Laplacian. *J. Differential Geometry*, 12(1):87–100, 1977.

Chapitre IV

Instabilités pour les équations de Schrödinger surcritiques

In this paper we consider H^σ -supercritical nonlinear Schrödinger equations in an analytic Riemannian manifold (M^d, g) , where the metric g is analytic. Using an analytic WKB method, we are able to construct an Ansatz for the semiclassical equation for times independent of the small parameter. These approximate solutions will help to show two different types of instabilities. The first is in the energy space, and the second is an immediate loss of regularity in higher Sobolev norms.

14 Introduction

Let (M^d, g) be an analytic Riemannian manifold of dimension $d \geq 3$. In all the paper we assume that the metric g is analytic. Let p be an odd integer.

We consider the nonlinear Schrödinger equation

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta_g u = \omega |u|^{p-1} u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (14.1)$$

with either $\omega = 1$ (defocusing equation) or $\omega = -1$ (focusing equation).

Here $\Delta = \Delta_g$ denotes the Laplace-Beltrami operator defined by $\Delta = \operatorname{div} \nabla$.

It is known that the mass

$$\|u(t)\|_{L^2(M^d)} = \|u_0\|_{L^2(M^d)}, \quad (14.2)$$

and the energy

$$H(u)(t) = \int_{M^d} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\omega}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx = H(u_0, \omega), \quad (14.3)$$

are conserved by the flow of (14.1), at least formally.

Denote also by

$$H^+(u) = \int_{M^d} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx. \quad (14.4)$$

In the following we will need the definition of uniform well-posedness :

Definition 14.1. *Let X be a Banach space. We say that the Cauchy problem (14.1) is locally uniformly well-posed in X , if for any bounded subset $\mathcal{B} \subset X$, there exist $T > 0$ and a subspace $Y_T \subset \mathcal{C}([-T, T]; X)$, such that for all $u_0 \in \mathcal{B}$, there exists a unique solution $u \in Y_T$ of (14.1) and such that the flow map*

$$u_0 \in \mathcal{B} \longmapsto u(t) = \Phi_t(u_0) \in X,$$

is uniformly continuous for any $-T \leq t \leq T$.

14.1 Instability in the energy space

By the works of J. Ginibre and G. Velo [9], T. Cazenave and F. B. Weissler [6], we know that (14.1) is locally uniformly well-posed in the energy space $X = H^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^d) =$

$H^1(\mathbb{R}^d)$ when $p < (d+2)/(d-2)$.

Our first result states that this result does not hold when $p > (d+2)/(d-2)$ is an odd integer.

Theorem 14.2. *Let $p > (d+2)/(d-2)$ be an odd integer, $\omega \in \{-1, 1\}$, and let H^+ be given by (14.4). Let $m \in M^d$. There exist a positive sequence $r_n \rightarrow 0$, and two sequences $u_0^n, \tilde{u}_0^n \in C_0^\infty(M^d)$ of Cauchy data with support in the ball $\{|x - m|_g \leq r_n\}$, a sequence of times $t_n \rightarrow 0$, and constants $c, C > 0$ such that*

$$H^+(u_0^n) \leq C, \quad H^+(\tilde{u}_0^n) \leq C, \quad (14.5)$$

$$H^+(u_0^n - \tilde{u}_0^n) \rightarrow 0, \quad \text{when } n \rightarrow +\infty, \quad (14.6)$$

and such that the solutions u^n, \tilde{u}^n of (14.1) satisfy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{M^d} |(u^n - \tilde{u}^n)(t_n)|^{p+1} dx > c. \quad (14.7)$$

Moreover, the sequences u_0^n, \tilde{u}_0^n can be chosen such that there exist $\nu_0 > 0$ and $q_0 > p+1$, such that for all $0 \leq \nu < \nu_0$ and $p+1 \leq q < q_0$,

$$\|u_0^n - \tilde{u}_0^n\|_{H^{1+\nu}(M^d)} + \|u_0^n - \tilde{u}_0^n\|_{L^q(M^d)} \rightarrow 0. \quad (14.8)$$

For $k \in \mathbb{R}$, the norm $\|\cdot\|_{H^k(M^d)}$ is defined by

$$\|f\|_{H^k(M^d)} = \|(1 - \Delta)^{k/2} f\|_{L^2(M^d)}.$$

R. Carles [5] obtains a similar result for the defocusing cubic equation in \mathbb{R}^d . An analog of Theorem 14.2 was proved by G. Lebeau [12] for the supercritical wave equation, but for a nonlinearity of the form u^p . After a rescaling of (14.1) to a semiclassical equation, we also have an almost finite speed of propagation principle, which means that the support of a solution travels with finite speed, for short times. This is one reason why such a result was expected for nonlinear supercritical Schrödinger equations.

14.2 Ill-posedness in Sobolev spaces

Assume here that (M^d, g) is the euclidian space with the canonical metric $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$. Let $T > 0$ and let $u :]-T, T[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ satisfy (14.1). Then for all $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u^\lambda :]-\lambda^{-2}T, \lambda^{-2}T[\times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, x) &\longmapsto u^\lambda(t, x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \end{aligned}$$

is also a solution of (14.1).

Define the critical index for Sobolev well-posedness

$$\sigma_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}. \quad (14.9)$$

Then, for all $f \in \dot{H}^{\sigma_c}(\mathbb{R}^d)$ (the homogeneous Sobolev space) and $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda^{\frac{2}{p-1}} \|f(\lambda \cdot)\|_{\dot{H}^{\sigma_c}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{\dot{H}^{\sigma_c}(\mathbb{R}^d)}.$$

This scaling notion is relevant, as we have the following results :

- Let $\sigma > \sigma_c$, then the equation (14.1) is locally uniformly well-posed in $X = H^\sigma(\mathbb{R}^d)$, [9],[6].
- If $0 < \sigma < \sigma_c$, the problem (14.1) is ill-posed in $H^\sigma(\mathbb{R}^d)$, in the sense that there exist a sequence of initial data u_0^n so that

$$\|u_0^n\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0,$$

and a sequence of times $t_n \longrightarrow 0$ such that the solution u^n of (14.1) satisfies

$$\|u^n(t_n)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow +\infty,$$

for $\rho = \sigma$ (see Christ-Colliander-Tao [8]), or even for all $\rho \in]\sigma/(\frac{d}{2} - \sigma), \sigma]$ in the particular case $\omega = 1$ and $p = 3$, (see Carles [4] and Alazard-Carles [1]).

Here we prove

Theorem 14.3. *Assume that $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$. Let $p \geq 3$ be an odd integer, $\omega \in \{-1, 1\}$, and let $0 < \sigma < d/2 - 2/(p-1)$. There exist a sequence $\check{u}_0^n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ of Cauchy data and a sequence of times $\tau_n \longrightarrow 0$ such that*

$$\|\check{u}_0^n\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad \text{when } n \longrightarrow +\infty, \quad (14.10)$$

and such that the solution \check{u}^n of (14.1) satisfies

$$\|\check{u}^n(\tau_n)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{when } n \longrightarrow +\infty, \quad \text{for all } \rho \in \left] \frac{\sigma}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2} - \sigma)}, \sigma \right]. \quad (14.11)$$

In the general case of an analytic manifold (M^d, g) with an analytic metric g , we obtain the weaker result

Theorem 14.4. *Let $p \geq 3$ be an odd integer, $\omega \in \{-1, 1\}$, and let $0 < \sigma < d/2 - 2/(p-1)$. Let $m \in M^d$. There exist a positive sequence $r_n \longrightarrow 0$ and a sequence $\check{u}_0^n \in \mathcal{C}_0^\infty(M^d)$ of Cauchy data with support in the ball $\{|x - m|_g \leq r_n\}$, a sequence of times $\tau_n \longrightarrow 0$ such that*

$$\|\check{u}_0^n\|_{H^\sigma(M^d)} \longrightarrow 0, \quad \text{when } n \longrightarrow +\infty,$$

and such that the solution \check{u}^n of (14.1) satisfies

$$\|\check{u}^n(\tau_n)\|_{H^\rho(M^d)} \longrightarrow +\infty, \quad \text{when } n \longrightarrow +\infty, \quad \text{for all } \rho \in \left] I(\sigma), \sigma \right],$$

where $I(\sigma)$ is defined by

$$I(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} & \text{for } 0 < \sigma \leq \frac{d}{2} - \frac{4}{p-1}, \\ \frac{\sigma}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2} - \sigma)} & \text{for } \frac{d}{2} - \frac{4}{p-1} \leq \sigma < \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}. \end{cases}$$

In the case $p = 3$ and $\omega = 1$, Theorem 14.3 was shown by R. Carles [4] using the convergence of the WKB method for \mathcal{C}^∞ data. But for $p > 3$ this method fails, as the justification of the WKB approximation on \mathcal{C}^∞ is still an open problem [10], [11].

Consider the semiclassical equation

$$ih\partial_t v + h^2\Delta v = |v|^{p-1}v. \quad (14.12)$$

In [1], T. Alazard and R. Carles prove that for all non trivial initial condition $v(0, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, the solution v of (14.12) oscillates immediately: There exists $\tau > 0$ so that

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \| |h\nabla|^s v(\tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} > 0,$$

for all $s \in]0, 1]$. This yields the result of Theorem 14.3 for the defocusing equation in the eucliden space for any smooth Cauchy condition. Their method does not apply to the focusing case.

Denote by σ_{sob} the Sobolev exponent so that $H^{\sigma_{\text{sob}}}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, i.e.

$$\sigma_{\text{sob}} = \frac{d}{2} - \frac{d}{p+1}. \quad (14.13)$$

Let $p > (d+2)/(d-2)$, then $\sigma_{\text{sob}} < \sigma_c$. As pointed out by R. Carles, for $\sigma = \sigma_{\text{sob}}$, Theorem 14.3 yields

$$\|\check{u}_0^n\|_{H^{\sigma_{\text{sob}}}(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad \|\check{u}^n(\tau_n)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow +\infty,$$

for all $\rho \in]1, \sigma_{\text{sob}}]$. This interval can not be enlarged. Indeed, for all $\rho \leq 1$, the conservation of the quantities (14.2) and (14.3) together with the embedding $\dot{H}^{\sigma_{\text{sob}}}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$ yield for all $\tau > 0$

$$\|\check{u}^n(\tau)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0.$$

See also [3].

G. Lebeau [13] obtains a similar result for the wave equation in $(\mathbb{R}^d, \text{can})$, with the same range for ρ in (14.11), but the loss of derivatives is obtained with only one one Cauchy condition, instead of a sequence.

Theorem (14.2) can not be deduced from Theorem (14.3). In fact, in the defocusing case, the sequences constructed with $\sigma = 1$ such that

$$\|\check{u}_0^n\|_{H^1(M^d)} \longrightarrow 0, \quad \|\check{u}^n(\tau_n)\|_{H^1(M^d)} \longrightarrow +\infty,$$

satisfy $H^+(\check{u}_0^n) \longrightarrow +\infty$, when n tends to infinity.

The instabilities of Theorem 14.2 and Theorem 14.3 are not geometrical effects, they are only caused by the high exponent of the nonlinearity.

We could also consider more general analytic nonlinearities, for instance $\pm(1+|u|^2)^{\alpha/2}u$ with $\alpha > (d+2)/(d-2)$.

Notice that the focusing case with non analytic Cauchy conditions is more intricate, as other phenomenons are involved, like finite time explosion.

The main ingredient of the proof of our results is the construction of approximate solutions of (14.1), via analytic nonlinear geometric optics, as done by P. Gérard in [10]. This work will be adapted to the case $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$. We will work in weighted spaces, so that these solutions concentrate in a point of \mathbb{R}^d , and then the construction in (M^d, g) will follow directly, as we are able to work only in one local chart.

The plan of the paper is the following

1. We first construct a formal solution of (14.1).
 - a) In Section 15 we deal with the case $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$: First we reduce (14.1) to a semiclassical equation as done in [12] and [4], then we adapt the analytic WKB method given in [10] to \mathbb{R}^d .
 - b) In Section 15.2 we consider the general case of an analytic manifold with an analytic metric.
2. We obtain a family of approximate solutions of (14.1). (Section 16)
3. Using two different rates of concentration of this family, we prove the main results. (Section 17)

Notations. *In this paper c, C denote constants the value of which may change from line to line. These constants will always be independent of h . We use the notations $a \sim b$, $a \lesssim b$ if $\frac{1}{C}b \leq a \leq Cb$, $a \leq Cb$ respectively. We write $a \ll b$ if $a \leq K^{-1}b$ for some large constant K which is independent of h .*

Acknowledgements. *The author would like to thank N. Burq his adviser for this interesting subject and his guidance, and P. Gérard for giving his permission to reproduce a part of the work [10] in the appendix. The author is also grateful to S. Alinhac and T. Alazard for many enriching discussions and clarifications.*

15 Nonlinear geometric optics

15.1 The Euclidian case

Reduction to a semiclassical equation

Following [12], [4], we reduce the equation (14.1) to a semiclassical equation, and therefore make the following change of variables and unknown function

$$\begin{cases} t = \hbar^\alpha s, & x = \hbar z, & h = \hbar^\beta, \\ u(\hbar^\alpha s, \hbar z) = \hbar^\gamma v(s, z, h), \end{cases} \quad (15.1)$$

where $h \in]0, 1]$ is a small parameter, and where $\beta > 0$. The value of β will be given in Section 17, in terms of p and d to prove Theorem 14.2, and in terms of p , d and σ to prove Theorem 14.3.

If we choose

$$\alpha = \beta + 2, \quad (p - 1)\gamma = -2(\beta + 1), \quad (15.2)$$

we are lead to studying the Cauchy problem

$$\begin{cases} ih\partial_s v(s, z) + h^2\Delta v(s, z) = \omega|v|^{p-1}v(s, z), \\ v(0, z) = v_0(z). \end{cases} \quad (15.3)$$

Following the ideas of nonlinear geometric optics, we can search a solution of (15.3) for small times (but independent of h) of the form

$$v(s, z, h) = a(s, z, h)e^{iS(s, z)/h}, \quad (15.4)$$

where formally

$$a(s, z, h) = \sum_{j \geq 0} a_j(s, z)h^j. \quad (15.5)$$

Then g is a formal solution of equation (15.3) if the couple (S, a) satisfies the system

$$\begin{cases} \partial_s S + (\nabla S)^2 + \omega|a_0|^{p-1} = 0, \\ \partial_s a + 2\nabla S \cdot \nabla a + a\Delta S - ih\Delta a + \frac{i\omega a}{h}(|a|^{p-1} - |a_0|^{p-1}) = 0, \\ S(0, z) = S^0(z), \quad a(0, z, h) = a^0(z, h), \end{cases} \quad (15.6)$$

where $v(0, z, h) = a^0(z, h)e^{iS^0(z)/h}$.

In fact to obtain the system (15.6), plug (15.4) in equation (15.3) and identify the coefficients in the expansion in powers of h . The first equation of (15.6) corresponds to the coefficients of h^0 , and the second to the others, after division by h . Notice that S will be a real function, if the data $S(0, \cdot)$ is real.

The WKB method consists now in plugging the development given by (15.5) in (15.6). Annihilating the coefficients of h^j , for $j \geq 0$, yields a cascade of equations. And if we are able to solve them, this gives an approximate solution v_{app} of (15.3)

$$ih\partial_s v_{\text{app}} + h^2\Delta v_{\text{app}} = |v_{\text{app}}|^{p-1}v_{\text{app}} + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (15.7)$$

Unfortunately, the obtained system is not closed: the equation which gives a_j depends on a_{j+1} .

Moreover, in general, using (15.7), we can show that v_{app} is close to a solution of (15.3) only for times $s \in [0, Ch \log \frac{1}{h}]$. See [10], Corollaire 1.

To obtain an Ansatz for h -independent times, we work in an analytic frame. Thus in the following we will consider z as a complex variable.

Construction of a formal solution of (15.3)

Here we adapt step by step the proof of P. Gérard [10] given in the case of the torus \mathbb{T}^d to the case \mathbb{R}^d .

We need Sjöstrand's definition [14] of an analytic symbol.

Definition 15.1. We say that the formal series $b(s, z, h) = \sum_{j \geq 0} b_j(s, z) h^j$ is an analytic symbol if there exist positive constants $s_0, l, A, B > 0$ such that for all $j \geq 0$

$$(s, z) \mapsto b_j(s, z) \text{ is an holomorphic function on } \{|s| < s_0\} \times \{|\operatorname{Im} z| < l\},$$

and

$$|b_j(s, z)| \leq AB^j j! \text{ on } \{|s| < s_0\} \times \{|\operatorname{Im} z| < l\}. \quad (15.8)$$

Notice that b has to be analytic in both variables, s and z .

To obtain proper estimates in Sobolev norms later, we want to make sure that the functions are small at infinity in the space variable. Therefore we define the weight

$$W(z) = e^{(1+z^2)^{1/2}}, \quad (15.9)$$

where $z^2 = z_1^2 + \dots + z_d^2$ for any $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$. Notice that W is analytic in the band $\{|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\}$, thus in the following we fix $l < \frac{1}{2}$.

We introduce the space $\mathcal{H}(s_0, l, B)$ composed of the analytic symbols satisfying

$$|W(z)b_j(s, z)| \leq AB^j j! \text{ on } \{|s| < s_0\} \times \{|\operatorname{Im} z| < l\}, \forall j \geq 0. \quad (15.10)$$

$$\mathcal{H}(s_0, l, B) = \left\{ \begin{array}{l} b = \sum_{j \geq 0} b_j h^j \text{ is an analytic symbol on} \\ (\{|s| < s_0\} \times \{|\operatorname{Im} z| < l\}) \text{ s.t. } b_j \text{ satisfies (15.10)} \end{array} \right\}. \quad (15.11)$$

Let $\varepsilon < 1/B$. For $0 \leq \theta \leq 1$, we can endow $\mathcal{H}(s_0, l, B)$ with the norms

$$\|b\|_\theta = \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} \sup_{0 < \tau < 1} \sup_{|s| < s_0(1-\tau)} \sup_{|\operatorname{Im} z| < l\tau} |W(z)b_j(s, z)| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0}\right)^{j+\theta}.$$

Each of these norms makes $\mathcal{H}(s_0, l, B)$ a complete space.

In the following, fix $0 < \varepsilon < 1/B$, and let $0 < h < \varepsilon$. Fix also $s_0, B > 0$ and $l < \frac{1}{2}$. Denote by

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(s_0, l, B),$$

and define

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}(0, l, B),$$

the restriction to $s = 0$ of \mathcal{H} , endowed with the induced norms. This is the space of the initial conditions.

We will solve the system (15.6) in $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_1)$ with a fixed point argument. The choice of the space and norms are inspired by abstract versions of the Cauchy-Kowaleski theorem [2].

We first give some properties of these norms.

Lemma 15.2. *There exists $C > 0$ such that for all $\theta, \theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$ with $\theta_1 + \theta_2 = \theta$, and $b^1, b^2 \in \mathcal{H}$*

$$\|b^1 b^2\|_\theta \leq C \|b^1\|_{\theta_1} \|b^2\|_{\theta_2}. \quad (15.12)$$

Proof. Set

$$\Omega = \{(\tau, s, z) \mid 0 < \tau < 1, |s| < s_0(1 - \tau), |\operatorname{Im} z| < l\tau\},$$

and denote by

$$\sup_{\Omega} = \sup_{0 < \tau < 1} \sup_{|s| < s_0(1 - \tau)} \sup_{|\operatorname{Im} z| < l\tau}.$$

Let

$$b^1 = \sum_{j \geq 0} b_j^1 h^j, \quad \text{and} \quad b^2 = \sum_{j \geq 0} b_j^2 h^j,$$

be two elements of \mathcal{H} , then $b^1 b^2$ can be written

$$b^1 b^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j b_k^1 b_{j-k}^2 \right) h^j. \quad (15.13)$$

It is easy to check that there exists $C > 0$ so that

$$|W(z)| \leq C|W(z)|^2, \quad (15.14)$$

on $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}$.

Now let $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ be such that $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Then by (15.13) and (15.14)

$$\begin{aligned} \|b^1 b^2\|_{\theta} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \sup_{\Omega} |W(z) \sum_{k=0}^j b_k^1 b_{j-k}^2(s, z)| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0}\right)^{j+\theta} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \sup_{\Omega} |W(z) b_k^1(s, z)| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0}\right)^{k+\theta_1} \\ &\quad \cdot \frac{\varepsilon^{j-k}}{(j-k)!} \sup_{\Omega} |W(z) b_{j-k}^2(s, z)| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0}\right)^{j-k+\theta_2} \\ &= \|b^1\|_{\theta_1} \|b^2\|_{\theta_2}. \end{aligned}$$

□

For $|s| < s_0$, denote by ∂_s^{-1} the operator defined by

$$\partial_s^{-1} b = \int_0^s b(\sigma) d\sigma \quad \text{for } b \in \mathcal{H}, \quad (15.15)$$

and $\partial_s^{-2} = \partial_s^{-1} \circ \partial_s^{-1}$. We then have the following

Lemma 15.3. *i) Let A be one of the operators*

$$b \mapsto \nabla_z b, \quad b \mapsto h\Delta_z b, \quad b \mapsto \frac{1}{h}(b - b_0),$$

then there exists $C > 0$ such that for all $h \in]0, 1]$ and $b \in \mathcal{H}$

$$\|\partial_s^{-1} A b\|_1 \leq C s_0 \|b\|_1. \quad (15.16)$$

ii) For all $\theta \in]0, 1]$, there exists C_θ such that for all $h \in]0, 1]$ and $b \in \mathcal{H}$

$$\|\partial_s^{-1}b\|_\theta \leq C_\theta s_0 \|b\|_1. \quad (15.17)$$

iii) There exists $C > 0$ such that for all $h \in]0, 1]$ and $b \in \mathcal{H}$

$$\|\partial_s^{-2}b\|_0 \leq C s_0 \|b\|_1. \quad (15.18)$$

Proof. We can assume that $\|b\|_1 = 1$. Then there exists a nonnegative sequence $d = (d_j)_{j \geq 0}$ satisfying $\sum_{j \geq 0} d_j = 1$ so that, for all $j \geq 0$, for all $0 < \tau < 1$, $|s| < s_0(1 - \tau)$, $|\operatorname{Im} z| < l\tau$, we have

$$|W(z) b_j(s, z)| \leq C \frac{j!}{\varepsilon^j} \frac{d_j}{(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0})^{j+1}}. \quad (15.19)$$

Proof of i)

• We prove the inequality $\|\partial_s^{-1}\nabla b\|_1 \leq C s_0 \|b\|_1$. Let $0 < \tau < 1$, $|s| < s_0(1 - \tau)$ and $|\operatorname{Im} z| < l\tau$. Let $\tau < \tau' < 1$. By the Cauchy formula we deduce that for all $|s'| \leq |s|$ and $|\operatorname{Im} z| < l\tau$

$$|\nabla b_j(s', z)| \leq \frac{C}{\tau' - \tau} \sup_{|\operatorname{Im} z'| < l\tau'} |b_j(s', z')|.$$

Thus, as $|\nabla W| \leq |W|$, for all $|s'| \leq |s|$ and $|\operatorname{Im} z| < l\tau$

$$|W(z) \nabla b_j(s', z)| \leq \frac{C}{\tau' - \tau} \sup_{|\operatorname{Im} z'| < l\tau'} |W(z') b_j(s', z')|. \quad (15.20)$$

Then by (15.19) and (15.20) we obtain

$$\left| W(z) \int_0^s \nabla b_j(s', z) ds' \right| \leq C \frac{j!}{\varepsilon^j} d_j \int_0^{|s|} \frac{1}{\tau' - \tau} \frac{d|s'|}{(1 - \tau' - \frac{|s'|}{s_0})^{j+1}}.$$

We now make the choice

$$\tau' - \tau = 1 - \tau' - \frac{|s'|}{s_0}, \quad \text{i.e.} \quad \tau' = \frac{1}{2} \left(1 + \tau - \frac{|s'|}{s_0} \right), \quad (15.21)$$

then τ' satisfies $\tau < \tau' < 1$ because $0 < \tau < 1$ and $|s'| < (1 - \tau)s_0$. Moreover, (15.21) yields

$$1 - \tau' - \frac{|s'|}{s_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \tau - \frac{|s'|}{s_0} \right),$$

therefore

$$\begin{aligned} \left| W(z) \int_0^s \nabla b_j(s', z) ds' \right| &\leq C \frac{j!}{\varepsilon^j} d_j \int_0^{|s|} \frac{d|s'|}{(1 - \tau - \frac{|s'|}{s_0})^{j+2}} \\ &\leq C s_0 \frac{j!}{\varepsilon^j} d_j \left((1 - \tau - \frac{|s|}{s_0})^{-j-1} - (1 - \tau)^{-j-1} \right). \end{aligned}$$

And thus, as $|s| < s_0(1 - \tau)$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^j}{j!} \left| W(z) \int_0^s \nabla b_j(s', z) ds' \right| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right)^{j+1} &\leq C s_0 \left(1 - \left(1 - \frac{|s|}{s_0(1 - \tau)} \right)^{j+1} \right) d_j \\ &\leq C s_0 d_j. \end{aligned}$$

Finally, by the previous inequality

$$\begin{aligned} \|\partial_s^{-1} \nabla b\|_1 &= \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} \sup_{0 < \tau < 1} \sup_{|s| < s_0(1 - \tau)} \sup_{|\operatorname{Im} z| < l\tau} \left| W(z) \int_0^s \nabla b_j(s', z) ds' \right| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right)^{j+1} \\ &\leq C s_0 \sum_{j \geq 0} d_j \leq C s_0, \end{aligned}$$

which was the claim.

- The inequality $h \|\partial_s^{-1} \Delta b\|_1 \leq C s_0 \|b\|_1$ can be shown by the same manner, using that $h < \varepsilon$ compensates the loss of one more derivative.
- Denote by $b' = (b - b_0)/h$, then for all $j \geq 0$, $b'_j = b_{j+1}$. By (15.19)

$$\left| W(z) \int_0^s b_{j+1}(s', z) ds' \right| \leq \frac{s_0}{j+1} \frac{(j+1)!}{\varepsilon^{j+1}} d_{j+1} \left(\left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right)^{-j-1} - (1 - \tau)^{-j-1} \right),$$

and therefore, for all $0 < \tau < 1$, $|s| < s_0(1 - \tau)$, $|\operatorname{Im} z| < l\tau$ and $j \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^j}{j!} \left| W(z) \int_0^s b_{j+1}(s', z) ds' \right| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right)^{j+1} &\leq \frac{s_0}{\varepsilon} \left(1 - \left(1 - \frac{|s|}{s_0(1 - \tau)} \right)^{j+1} \right) d_{j+1} \\ &\leq C s_0 d_{j+1}. \end{aligned}$$

This yields $h^{-1} \|\partial_s^{-1} (b - b_0)\|_1 \leq C s_0 \|b\|_1$ for fixed $\varepsilon > h$.

Proof of *ii*)

By integration of inequality (15.19), we obtain for all $j \geq 1$

$$\begin{aligned} \left| W(z) \int_0^s b_j(s', z) ds' \right| &\leq C s_0 \frac{j!}{j \varepsilon^j} d_j \left(\left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right)^{-j} - (1 - \tau)^{-j} \right). \\ &\leq C s_0 \frac{j!}{\varepsilon^j} d_j \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right)^{-j}, \end{aligned}$$

hence

$$\frac{\varepsilon^j}{j!} \left| W(z) \int_0^s b_j(s', z) ds' \right| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right)^{j+\theta} \leq C s_0 d_j. \quad (15.22)$$

For $j = 0$ we obtain

$$\left| W(z) \int_0^s b_0(s', z) ds' \right| \leq C s_0 \left(\log(1 - \tau) - \log \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right) \right),$$

then

$$\left| W(z) \int_0^s b_0(s', z) ds' \right| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0} \right)^\theta \leq C s_0 d_0. \quad (15.23)$$

By the definition of $\|\cdot\|_\theta$, inequalities (15.22) and (15.23) give the result.

The proof of *iii*) is similar, and is left here. \square

Lemma 15.4. *There exists $C > 0$ such that for all $h \in]0, 1]$ and $b^1, b^2 \in \mathcal{H}$*

$$\|(\partial_s^{-1}b^1)(\partial_s^{-1}b^2)\|_1 \leq Cs_0^2\|b^1\|_1\|b^2\|_1. \quad (15.24)$$

Proof. By Lemma 15.2 we have

$$\|(\partial_s^{-1}b^1)(\partial_s^{-1}b^2)\|_1 \leq C\|\partial_s^{-1}b^1\|_{\frac{1}{2}}\|\partial_s^{-1}b^2\|_{\frac{1}{2}}.$$

The result then follows from (15.17) with $\theta = \frac{1}{2}$ and $b = b^1, b^2$. \square

Proposition 15.5. *Let $S^0 \in \mathcal{H}^0(l, B)$ be a real analytic function, and let $a^0 \in \mathcal{H}^0(l, B)$ be an analytic symbol. Then there exist $s_0 > 0$, a real analytic function $S \in \mathcal{H}(s_0, l, B)$, and an analytic symbol $a \in \mathcal{H}(s_0, l, B)$, such that $v = ae^{iS/h}$ is a formal solution of equation (15.3) with Cauchy data $v_0 = a^0 e^{iS^0/h}$.*

Remark 15.6. *By the Cauchy formula, the function $v = ae^{iS/h}$ satisfies for all $k \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{|s| < s_0} \sup_{|\operatorname{Im} z| < l/2} |(1 - h^2\Delta)^{k/2}v| \lesssim e^{-|z|}, \quad (15.25)$$

and

$$\sup_{|s| < s_0} \sup_{|\operatorname{Im} z| < l/2} |(1 - h^2\Delta)^{k/2}|v|^{p-1}v| \lesssim e^{-p|z|}. \quad (15.26)$$

This will be useful in the sequel.

Proof. The proof is based on a fixed point argument in $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_1)$.

Set $\varphi = \nabla S$ and differentiate the first equation of (15.6) with respect to the space variable, then we obtain

$$\begin{cases} \partial_s \varphi = -2\varphi \cdot \nabla \varphi - \omega \nabla f(a_0) \\ \partial_s a = -2\varphi \cdot \nabla a - a \operatorname{div} \varphi + ih\Delta a - \frac{i\omega a}{h}(f(a) - f(a_0)), \end{cases} \quad (15.27)$$

where $\bar{a}(s, z) = \overline{a(\bar{s}, \bar{z})}$ and $f(b) = (b\bar{b})^{\frac{p-1}{2}}$

Differentiate the system (15.27) with respect to s and obtain

$$\begin{cases} \partial_s^2 \varphi = -2\partial_s \varphi \cdot \nabla \varphi - 2\varphi \cdot \nabla \partial_s \varphi - \omega \partial_s \nabla f(a_0) \\ \partial_s^2 a = -2\partial_s \varphi \cdot \nabla a - 2\varphi \cdot \nabla \partial_s a - a \operatorname{div} \partial_s \varphi - \partial_s a \operatorname{div} \varphi + ih\Delta \partial_s a \\ \quad - \frac{i\omega \partial_s a}{h}(f(a) - f(a_0)) - \frac{i\omega a}{h} \partial_s (f(a) - f(a_0)). \end{cases} \quad (15.28)$$

Write

$$\begin{cases} \partial_s \varphi = \partial_s^{-1}(\partial_s^2 \varphi) + \partial_s \varphi(0, \cdot), \\ \partial_s a = \partial_s^{-1}(\partial_s^2 a) + \partial_s a(0, \cdot), \end{cases} \quad (15.29)$$

and

$$\begin{cases} \varphi = \partial_s^{-2}(\partial_s^2 \varphi) + s \partial_s \varphi(0, \cdot) + \varphi(0, \cdot), \\ a = \partial_s^{-2}(\partial_s^2 a) + s \partial_s a(0, \cdot) + a(0, \cdot). \end{cases} \quad (15.30)$$

Now introduce the new unknown function $u = (u_1, u_2) = (\partial_s^2 \varphi, \partial_s^2 a)$. Hence we are lead to solving a system of the form

$$u = F(s, u). \quad (15.31)$$

We will show that for $0 < s_0 < 1$ small enough F is a contraction in a ball in $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_1)$. Let $R > 0$ be such that

$$\|\varphi(0, \cdot)\|_0, \|\partial_s \varphi(0, \cdot)\|_0, \|\nabla \varphi(0, \cdot)\|_0, \|\nabla \partial_s \varphi(0, \cdot)\|_0, \|\Delta \partial_s \varphi(0, \cdot)\|_0 \leq R,$$

and

$$\begin{aligned} &\|a(0, \cdot)\|_0, \|\partial_s a(0, \cdot)\|_0, \|\nabla a(0, \cdot)\|_0, \|\nabla \partial_s a(0, \cdot)\|_0, \|\Delta \partial_s a(0, \cdot)\|_0, \\ &\|(a - a_0)(0, \cdot)/h\|_0, \|\partial_s(a - a_0)(0, \cdot)/h\|_0 \leq R. \end{aligned}$$

• Write

$$\begin{aligned} \partial_s \varphi \nabla \varphi &= (\partial_s^{-1} \partial_s^2 \varphi + \partial_s \varphi(0, \cdot)) \cdot \\ &\quad (\partial_s^{-1} (\partial_s^{-1} \nabla) (\partial_s^2 \varphi) + s \nabla \partial_s \varphi(0, \cdot) + \nabla \varphi(0, \cdot)) \end{aligned}$$

Then by (15.24) and (15.12)

$$\begin{aligned} \|\partial_s \varphi \nabla \varphi\|_1 &\lesssim s_0^2 \|\partial_s^2 \varphi\|_1 \|\partial_s^{-1} \nabla (\partial_s^2 \varphi)\|_1 + R \|\partial_s^{-1} \partial_s^2 \varphi\|_1 \\ &\quad + R \|\partial_s^{-1} (\partial_s^{-1} \nabla) (\partial_s^2 \varphi)\|_1 + R^2, \end{aligned}$$

and by (15.16) and (15.17)

$$\begin{aligned} \|\partial_s \varphi \nabla \varphi\|_1 &\lesssim s_0^3 \|\partial_s^2 \varphi\|_1^2 + s_0 R \|\partial_s^2 \varphi\|_1 + R^2 \\ &\lesssim s_0^2 \|\partial_s^2 \varphi\|_1^2 + R^2. \end{aligned} \quad (15.32)$$

• Similarly we obtain

$$\|\varphi \nabla \partial_s \varphi\|_1 \lesssim s_0^2 \|\partial_s^2 \varphi\|_1^2 + R^2, \quad (15.33)$$

and

$$\|\partial_s \varphi \nabla a\|_1, \|\varphi \nabla \partial_s a\|_1, \|a \operatorname{div} \partial_s \varphi\|_1, \|\partial_s a \operatorname{div} \varphi\|_1 \lesssim s_0^2 \|\partial_s^2 \varphi\|_1 \|\partial_s^2 a\|_1 + R^2. \quad (15.34)$$

• We have

$$\nabla \partial_s f(a_0) = \nabla \partial_s^{-1} \partial_s^2 f(a_0) + \nabla \partial_s f(a_0)(0, \cdot). \quad (15.35)$$

By the Leibniz rule and (15.12)

$$\|\partial_s^2 f(a_0)\|_1 \lesssim \|\partial_s^2 a_0\|_1 \|a_0\|_0^{p-2} + \|(\partial_s a_0)^2\|_1 \|a_0\|_0^{p-3}.$$

From (15.30) and (15.18)

$$\|a_0\|_0 \lesssim \|\partial_s^{-2} \partial_s^2 a_0\|_0 + R \lesssim s_0 \|\partial_s^2 a_0\|_1 + R. \quad (15.36)$$

Now use (15.29), (15.24) and (15.17)

$$\|(\partial_s a_0)^2\|_1 \lesssim s_0^2 \|\partial_s^2 a_0\|_1^2 + R^2. \quad (15.37)$$

Finally, from (15.35), (15.36) and (15.37) we deduce

$$\|\nabla \partial_s f(a_0)\|_1 \lesssim s_0^{\frac{p-1}{2}} \|\partial_s^2 a_0\|_1^{\frac{p-1}{2}} + R^{\frac{p-1}{2}} \lesssim s_0^{\frac{p-1}{2}} \|\partial_s^2 a\|_1^{\frac{p-1}{2}} + R^{\frac{p-1}{2}}. \quad (15.38)$$

• Write

$$h\Delta \partial_s a = h\partial_s^{-1} \Delta \partial_s^2 a + h\Delta \partial_s a(0, \cdot),$$

therefore by (15.16)

$$\|h\Delta \partial_s a\|_1 \lesssim s_0 \|\partial_s^2 a\|_1 + R. \quad (15.39)$$

• We now estimate the term $\frac{\partial_s a}{h}(f(a) - f(a_0))$. Observe that

$$\begin{aligned} f(a) - f(a_0) &= (a\bar{a})^{\frac{p-1}{2}} - (a_0\bar{a}_0)^{\frac{p-1}{2}} \\ &= (a\bar{a} - a_0\bar{a}_0) \left((a\bar{a})^{\frac{p-3}{2}} + \dots + (a_0\bar{a}_0)^{\frac{p-3}{2}} \right), \end{aligned}$$

and

$$a\bar{a} - a_0\bar{a}_0 = (a - a_0)\bar{a} + (\bar{a} - \bar{a}_0)a_0.$$

Then by (15.12)

$$\left\| \frac{\partial_s a}{h} (f(a) - f(a_0)) \right\|_1 \lesssim \left\| \partial_s a \frac{a - a_0}{h} \right\|_1 \|a\|_0^{p-2}. \quad (15.40)$$

Use (15.29), (15.30) to write

$$\begin{aligned} \partial_s a \frac{a - a_0}{h} &= \left(\partial_s^{-1} (\partial_s^2 a) + \partial_s a(0, \cdot) \right) \\ &\quad \left(\partial_s^{-1} \partial_s^{-1} \frac{\partial_s^2 (a - a_0)}{h} + s \frac{\partial_s (a - a_0)(0, \cdot)}{h} + \frac{(a - a_0)(0, \cdot)}{h} \right), \end{aligned}$$

then by (15.24), (15.12) and (15.17)

$$\left\| \partial_s a \frac{a - a_0}{h} \right\|_1 \lesssim (s_0 \|\partial_s^2 a\|_1 + R s_0) \left(\left\| \partial_s^{-1} \frac{\partial_s^2 (a - a_0)}{h} \right\|_1 + R \right). \quad (15.41)$$

Moreover from (15.16) we have

$$\left\| \partial_s^{-1} \frac{\partial_s^2 (a - a_0)}{h} \right\|_1 \lesssim s_0 \|\partial_s^2 a\|_1. \quad (15.42)$$

Therefore inequalities (15.40), (15.41) and (15.42) yield

$$\left\| \frac{\partial_s a}{h} (f(a) - f(a_0)) \right\|_1 \lesssim s_0^p \|\partial_s^2 a\|_1^p + R^p. \quad (15.43)$$

• Similar arguments are used to show that

$$\left\| \frac{a}{h} \partial_s (f(a) - f(a_0)) \right\|_1 \lesssim s_0^p \|\partial_s^2 a\|_1^p + R^p. \quad (15.44)$$

Inequalities (15.32), (15.33), (15.34), (15.38), (15.39), (15.43) and (15.44) show that, if $s_0 > 0$ is small enough, there exists $R_1 > R$ such that F maps the ball of radius R_1 (in $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_1)$) into itself.

With analogous arguments, we can show that F is a contraction in $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_1)$. Hence by the fixed point theorem, there exists a unique $u = (\partial_s^2 \varphi, \partial_s^2 a) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ which satisfies (15.31).

Let $(\varphi^0, a^0) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, and consider the couple $(\partial_s \varphi(0, \cdot), \partial_s a(0, \cdot)) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ which solves the system (15.27) at $s = 0$. Let u be the solution of (15.31) with these initial conditions. Then with the formula (15.30) we recover the couple (φ, a) which is a solution of (15.27). Moreover, (15.30) shows that $(\varphi, a) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Let $S^0 \in \mathcal{H}^0$ and take $\varphi^0 = \nabla S^0$. The function φ (with Cauchy condition $\varphi(0, \cdot) = \varphi^0$) is irrotational, as it satisfies the equation

$$\partial_s \varphi = -2\varphi \cdot \nabla \varphi - \omega \nabla f(a_0).$$

Therefore there exists S so that $\varphi = \nabla S$ and which is solution of

$$\nabla(\partial_s S + (\nabla S)^2 + \omega f(a_0)) = 0.$$

Moreover, it is possible to choose S such that

$$\partial_s S + (\nabla S)^2 + \omega f(a_0) = 0.$$

Now the formula

$$S(s, z) = \int_0^s \partial_s S(\sigma, z) d\sigma + S^0(z) = - \int_0^s (\varphi \cdot \varphi + \omega f(a_0))(\sigma, z) d\sigma + S^0(z), \quad (15.45)$$

shows that $S \in \mathcal{H}$.

Finally, we have shown the existence of a solution $(S, a) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ of the system

$$\begin{cases} \partial_s S + (\nabla S)^2 + \omega |a_0|^{p-1} = 0, \\ \partial_s a + 2\nabla S \cdot \nabla a + a \Delta S - ih \Delta a + \frac{i\omega a}{h} (|a|^{p-1} - |a_0|^{p-1}) = 0, \\ S(0, z) = S^0(z) \in \mathcal{H}^0, \quad a(0, z, h) = a^0(z, h) \in \mathcal{H}^0. \end{cases}$$

With a Gronwall inequality, it is straightforward to check that S is real analytic. \square

Remark 15.7. *The inequality $\|\partial_s^{-1} b\|_0 \leq C s_0 \|b\|_1$ fails, and that is the reason why we have to differentiate the system (15.27) with respect to the time variable, before applying the contraction method.*

15.2 The general case of an analytic manifold (M^d, g)

Let (M^d, g) an analytic Riemannian manifold of dimension d . We assume moreover

that g is analytic. Let $m \in M^d$. Then there exist a neighbourhood $\mathcal{U} \subset M^d$ of m , a neighbourhood $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$ of 0, and an homeomorphism

$$\kappa: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}. \quad (15.46)$$

In the chart (\mathcal{U}, κ) the metric g can be written

$$g = \sum_{1 \leq j, k \leq d} g_{jk}(x) dx_j dx_k,$$

where $G = (g_{jk})$ is a positive symmetric matrix and analytic in \mathcal{V} .

In these coordinates, we have the explicit formula for the Laplace-Beltrami operator

$$\begin{aligned} \Delta_g = \Delta_g(x) &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \operatorname{div}(\sqrt{\det G} G^{-1} \nabla \cdot) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{1 \leq j, k \leq d} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{\det G} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}), \end{aligned}$$

where $(g^{jk}) = G^{-1}$. Every function involved in the former expression is analytic. We now make the rescaling (15.1). The function

$$v(s, z, h) = \hbar^{-\gamma} u(\hbar^\alpha s, \hbar z),$$

satisfies

$$ih \partial_t v(s, z) + h^2 \Delta(\hbar z) v(s, z) = \omega |v|^{p-1} v(s, z), \quad (s, z) \in \mathbb{R} \times \hbar^{-1} \mathcal{V}. \quad (15.47)$$

We now adapt the analysis of Section 15 to the equation (15.47), in $\hbar^{-1} \mathcal{V}$ instead of \mathbb{R}^d .

Let $r > 0$ such that

$$\mathcal{B}(0, 3r) \subset \mathcal{V}. \quad (15.48)$$

Notice that on the set $\{(|\hbar z| < 2r) \cap (|\operatorname{Im} z| < l)\}$, the coefficients of Δ_g are uniformly bounded with respect to \hbar , as well as their derivatives.

Here we try to find a formal solution of (15.47) of the form

$$v(s, z, h) = a(s, z, h) e^{iS(s, z)/h} = \left(\sum_{j \geq 0} a_j(s, z, h) h^j \right) e^{iS(s, z)/h}.$$

Therefore (S, a) has to satisfy the system

$$\begin{cases} \partial_s S + (\nabla_g S)^2 + \omega |a_0|^{p-1} = 0, \\ \partial_s a + 2 \nabla_g S \cdot \nabla_g a + a \Delta_g S - ih \Delta_g a + \frac{i\omega a}{h} (|a|^{p-1} - |a_0|^{p-1}) = 0, \\ S(0, z) = S^0(z), \quad a(0, z, h) = a^0(z, h), \end{cases} \quad (15.49)$$

with $\nabla_g = \nabla_g(\hbar z)$, $\Delta_g = \Delta_g(\hbar z)$ and where $v(0, z, h) = a^0(z, h) e^{iS^0(z)/h}$.

As the coefficients of Δ_g now depend on h , we have to modify slightly the definition of an analytic symbol. For $\hbar > 0$ small enough, denote by

$$\mathcal{D}_{\hbar} = \{|s| < s_0\} \times \{(|\hbar z| < 2r) \cap (|\operatorname{Im} z| < l)\},$$

and

$$W(z) = e^{(1+z^2)^{1/2}}.$$

Definition 15.8. *We say that the formal series $b(s, z, h) = \sum_{j \geq 0} b_j(s, z, h)h^j$ is an analytic symbol with weight W if there exist positive constants $s_0, l, A, B > 0$ such that for all $j \geq 0$*

$$(s, z) \mapsto b_j(s, z, h) \text{ is an holomorphic function on } \mathcal{D}_{\hbar},$$

and

$$|W(z) b_j(s, z, h)| \leq AB^j j! \text{ on } \mathcal{D}_{\hbar}, \forall j \geq 0.$$

We denote by $\mathcal{H}_{\hbar} = \mathcal{H}_{\hbar}(s_0, l, r, B)$ the space of these symbols and by $\mathcal{H}_{\hbar}^0 = \mathcal{H}_{\hbar}^0(0, l, r, B)$ the space of the initial conditions.

Let $\varepsilon < 1/B$. For $0 \leq \theta \leq 1$, we endow $\mathcal{H}_{\hbar}(s_0, l, r, B)$ with the norms

$$\|b\|_{\theta, \hbar} = \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} \sup_{0 < \tau < 1} \sup_{|s| < s_0(1-\tau)} \sup_{\Gamma_{\tau}} |W(z) b_j(s, z)| \left(1 - \tau - \frac{|s|}{s_0}\right)^{j+\theta},$$

where $\Gamma_{\tau} = \{(|\hbar z| < 2r\tau) \cap (|\operatorname{Im} z| < l\tau)\}$.

Now it is straightforward to check that the results of Lemma 15.2, Lemma 15.3 and Lemma 15.4 hold when $\|\cdot\|_{\theta}$ is replaced with $\|\cdot\|_{\theta, \hbar}$ and that the constants involved in the estimates do not depend on \hbar . This yields the following analog of Proposition 15.5

Proposition 15.9. *Let $S^0 \in \mathcal{H}_{\hbar}^0(l, r, B)$ be a real analytic function, and let $a^0 \in \mathcal{H}_{\hbar}^0(l, r, B)$ be an analytic symbol. Then there exist $s_1 > 0$ independent of \hbar , a real analytic function $S \in \mathcal{H}_{\hbar}(s_1, l, r, B)$, and an analytic symbol $a \in \mathcal{H}_{\hbar}(s_1, l, r, B)$, such that $v = ae^{iS/h}$ is a formal solution of equation (15.3) with Cauchy data $v_0 = a^0 e^{iS^0/h}$.*

Remark 15.10. *Proposition 15.5 is contained in Proposition 15.9: In the case $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$, $r = +\infty$ and $\mathcal{H}_{\hbar}(s_1, l, r, B) = \mathcal{H}(s_1, l, B)$.*

We are now able to construct an approximate solution of the problem (15.47).

Let c_0 such that $c_0/h =: n \in \mathbb{N}$. Define

$$a^{(n)}(s, z, h) = \sum_{j \leq n} a_j(s, z, h)h^j,$$

and

$$v_{\text{app}}(s, z, h) = a^{(n)}(s, z, h)e^{iS(s, z)/h}. \quad (15.50)$$

where the a_j 's and S are given by Proposition 15.9. The choice of the initial condition $v_{\text{app}}(0, z, h)$ will be made in Section 17.

We now show that if c_0 is small enough, v_{app} is a good approximation to the problem (15.3).

Proposition 15.11. *Let $s_1 > 0$ be given by Proposition 15.9. If $c_0 \ll 1$, there exists $\delta_1 > 0$ such that the function v_{app} defined by (15.50) satisfies*

$$ih\partial_s v_{\text{app}} + h^2 \Delta v_{\text{app}} = \omega(v_{\text{app}} \overline{v_{\text{app}}})^{\frac{p-1}{2}} v_{\text{app}} + e^{-\delta_1/h} g, \quad (15.51)$$

with $\overline{v_{\text{app}}} = \overline{v_{\text{app}}(\bar{s}, \bar{z})}$ and where g is an analytic function on $\{|s| < s_1\} \times \{(|\hbar z| < r) \cap (|\text{Im } z| < l)\}$ such that for all $k \in \mathbb{N}$, there exists $C_k > 0$ independent of h so that

$$\sup_{|s| < s_1} \sup_{|\text{Im } z| < l/2} \|(1 - h^2 \Delta)^{k/2} g(s, \cdot + i \text{Im } z)\|_{L^2(\mathcal{B}(0, r/\hbar))} \leq C_k. \quad (15.52)$$

Here we have used the convention that $\mathcal{B}(0, r/\hbar) = \mathbb{R}^d$ if $r = +\infty$.

Proof. Denote by $f(b) = (b\bar{b})^{\frac{p-1}{2}}$, with $\bar{b} = \overline{b(\bar{s}, \bar{z})}$. The function v_{app} satisfies the equation

$$\begin{aligned} & ih\partial_s v_{\text{app}} + h^2 \Delta v_{\text{app}} - \omega f(v_{\text{app}}) v_{\text{app}} \\ &= -a^{(n)} (\partial_s S + (\nabla S)^2 + \omega f(a_0)) e^{iS/h} \\ &\quad + ih \left(\partial_s a^{(n)} + 2\nabla S \cdot \nabla a^{(n)} + a^{(n)} \Delta S - ih \Delta a^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\omega a^{(n)}}{h} (f(a^{(n)}) - f(a_0)) \right) e^{iS/h}. \end{aligned} \quad (15.53)$$

For $m = n, n+1$ write the expansion in h

$$\frac{i\omega a^{(m)}}{h} (f(a^{(m)}) - f(a_0)) := \sum_{j=0}^{pm-1} b_{j,m} h^j. \quad (15.54)$$

By construction the following system is satisfied

$$\begin{cases} \partial_s S + (\nabla S)^2 + \omega(a_0 \bar{a}_0)^{\frac{p-1}{2}} = 0, \\ \partial_s a^{(n)} + 2\nabla S \cdot \nabla a^{(n)} + a^{(n)} \Delta S - ih \Delta a^{(n-1)} + \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} h^j = 0. \end{cases} \quad (15.55)$$

Notice that

$$b_{j,n} = b_{j,n+1} \quad \text{for all } j \leq n-1. \quad (15.56)$$

Therefore by (15.56) and (15.55), (15.53) rewrites

$$\begin{aligned} & ih\partial_s v_{\text{app}} + h^2 \Delta v_{\text{app}} - \omega(v_{\text{app}} \overline{v_{\text{app}}})^{\frac{p-1}{2}} v_{\text{app}} \\ &= ih \left(-ih^{n+1} \Delta a_n - \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} h^j + \sum_{j=0}^{pn-1} b_{j,n} h^j \right) e^{iS/h} \\ &= \left(h^{n+2} \Delta a_n - ih^{n+1} b_{n,n+1} + ih \sum_{j=n}^{pn-1} b_{j,n} h^j \right) e^{iS/h}. \end{aligned} \quad (15.57)$$

We now estimate each term of the r.h.s. of (15.57). By (15.54) we have

$$hb_{j,n} = i\omega \left(\sum_{i_1+\dots+i_p=j} \widetilde{a}_{i_1} \cdots \widetilde{a}_{i_p} - (a_0 \overline{a_0})^{\frac{p-1}{2}} a_j \right),$$

with $\widetilde{a}_{i_k} = a_{i_k}$ or $\widetilde{a}_{i_k} = \overline{a_{i_k}}$.

Now by (15.10), $|a_{i_k}| \lesssim B^{i_k} (i_k)! e^{-|z|}$, thus

$$h|b_{j,n}| \lesssim B^j \left(\sum_{i_1+\dots+i_p=j} (i_1)! \cdots (i_p)! + j! \right) e^{-p|z|} \lesssim B^j j! e^{-p|z|}, \quad (15.58)$$

and by the Stirling formula,

$$(pn)! \lesssim n^{1/2} \left(\frac{pn}{e} \right)^{pn},$$

we deduce from (15.58)

$$\begin{aligned} \left| h \sum_{j=n}^{pn-1} b_{j,n} h^j \right| &\lesssim \left(\sum_{j=n}^{pn-1} B^j j! h^j \right) e^{-p|z|} \\ &\leq (p-1)n (Bh)^{pn} (pn)! e^{-p|z|} \\ &\lesssim h^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{Bc_0 p}{e} \right) \frac{c_0 p}{h} e^{-p|z|}, \end{aligned}$$

as we have $n = c_0/h$. Now choose $c_0 < e/(Bp)$, then there exists $\delta > 0$ such that

$$\left| h \sum_{j=n}^{pn-1} b_{j,n} h^j \right| \lesssim \sum_{j=n}^{pn-1} h|b_{j,n} h^j| \lesssim e^{-\delta/h} e^{-p|z|}.$$

Similarly, for some $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |h^{n+1} b_{n,n+1}| &\lesssim e^{-\delta/h} e^{-|z|}, \\ |h^{n+2} \Delta a_n| &\lesssim e^{-\delta/h} e^{-|z|}. \end{aligned}$$

Finally use that the function $\phi : (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \mapsto e^{-|\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z|}$ satisfies

$$\sup_{|\operatorname{Im} z| < l} \|\phi(\cdot, \operatorname{Im} z)\|_{L^2(\mathcal{B}(0, r/h))} \lesssim 1.$$

We have therefore proved the estimate (15.52) for $k = 0$.

To treat the case $k \geq 0$, use the Cauchy formula to obtain

$$\sup_{|s| < s_1} \sup_{|\operatorname{Im} z| < l/2} \left| (1 - h^2 \Delta)^{k/2} a_j \right| \lesssim \sup_{|s| < s_1} \sup_{|\operatorname{Im} z| < l} |a_j| \lesssim B^j j! e^{-|z|},$$

and

$$\sup_{|s| < s_1} \sup_{|\operatorname{Im} z| < l/2} \left| (1 - h^2 \Delta)^{k/2} e^{iS/h} \right| \lesssim 1,$$

and we can easily adapt the previous computations. \square

16 Validity of the Ansatz

Proposition 16.1. *Let v_{app} be the function defined by (15.50). Let v be the solution of*

$$\begin{cases} ih\partial_s v + h^2\Delta v = \omega|v|^{p-1}v, & (s, z) \in \mathbb{R}^{1+d}, \\ v(0, z) = v_{app}(0, z). \end{cases} \quad (16.1)$$

Then there exist $s_2 > 0$ and $\delta_2 > 0$ such that for all $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{0 < s < s_2} \|(1 - h^2\Delta)^{k/2}(v - v_{app})(s)\|_{L^2(\mathcal{B}(0, r/\hbar))} \leq C_k e^{-\delta_2/h},$$

with $C_k > 0$.

Proof. It is given in [10], but we reproduce it in the appendix. \square

We are now able to define the Ansatz to the equation (14.1).

In the case $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$, we consider the function v_{app} given by (15.50) and define

$$u_{app}(t, x) = \hbar^\gamma v_{app}(\hbar^{-\alpha}t, \hbar^{-1}x), \quad (16.2)$$

where γ and α satisfy the relations (15.2) and $h = \hbar^\beta$. The initial condition will be given in the next section.

From Proposition 16.1 we deduce

Corollary 16.2. *(The case $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$) Let s_2 be given by Proposition 16.1, let u_{app} be given by (16.2), and let u be the solution of*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \omega|u|^{p-1}u, & (t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}, \\ u(0, x) = u_{app}(0, x). \end{cases}$$

Then for all $k \in \mathbb{N}$

$$\|u - u_{app}\|_{L^\infty([0, \hbar^\alpha s_2]; H^k(\mathbb{R}^d))} \longrightarrow 0,$$

when $h \longrightarrow 0$.

In the general case of an analytic manifold (M^d, g) , we have to construct an approximate solution supported in $\mathcal{B}(0, r) \subset \mathcal{U}$.

Let $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \geq 0$, such that

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\xi| \leq r/2, \\ 0 & \text{for } |\xi| \geq r. \end{cases} \quad (16.3)$$

Let $0 < \eta < 1$, let v_{app} be given by (15.50) and consider

$$\underline{u}_{app}(t, x) = \hbar^\gamma \chi(\hbar^{-\eta}|x|) v_{app}(\hbar^{-\alpha}t, \hbar^{-1}x), \quad (16.4)$$

where γ and α are given by the relations (15.2), and $h = \hbar^\beta$.

We have

$$\text{supp } \underline{u}_{app} \subset \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+d} : |x| \leq r\hbar^\eta\},$$

which concentrates in $x = 0$.

Hence if \hbar is small enough, u_{app} is supported in \mathcal{V} , and we can transport this function to \mathcal{U} by the chart κ (see (15.46)). We therefore define the approximate solution u_{app}^M of (14.1) by

$$u_{\text{app}}^M = \underline{u_{\text{app}}} \circ \kappa. \quad (16.5)$$

In the following we write $u_{\text{app}}^M = u_{\text{app}}$.

Then, as u_{app} is compactly supported, it can not be analytic. We now consider all the functions only with real variables.

Up to now, we did not use the rate of decrease of the weight W^{-1} introduced in (15.10), but it is needed now because of the truncation. However, because of the error $e^{-c/\hbar}$ induced from this cutoff, we obtain the following weaker result

Corollary 16.3. *(The general case) Let s_2 be given by Proposition 16.1, let u_{app} be given by (16.4), and let u be the solution of*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \omega|u|^{p-1}u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times M^d, \\ u(0, x) = u_{\text{app}}(0, x). \end{cases} \quad (16.6)$$

Let $\kappa \geq 0$ such that $\beta + \eta - \kappa < 1$. Then for all $k \in \mathbb{N}$

$$\|u - u_{\text{app}}\|_{L^\infty([0, \hbar^{\alpha+\kappa s_2}]; H^k(M^d))} \longrightarrow 0,$$

when $h \longrightarrow 0$.

Proof. Let $k > d/2$ an integer, and set

$$\|f\|_{H_h^k} = \|(1 - \hbar^{2(\beta+1)}\Delta)^{k/2} f\|_{L^2(M^d)}.$$

With the Leibniz rule and interpolation we check that for all $f \in H^k(M^d)$ and $g \in W^{k, \infty}(M^d)$

$$\|fg\|_{H_h^k} \lesssim \|f\|_{H_h^k} \|g\|_{L^\infty(M^d)} + \|f\|_{L^2(M^d)} \|(1 - \hbar^{2(\beta+1)}\Delta)^{k/2} g\|_{L^\infty(M^d)}. \quad (16.7)$$

Moreover, as $k > d/2$, for all $f_1, f_2 \in H^k(M^d)$

$$\|f_1 f_2\|_{H_h^k} \lesssim \hbar^{-(\beta+1)k} \|f_1\|_{H_h^k} \|f_2\|_{H_h^k} \quad (16.8)$$

The function u_{app} satisfies

$$i\partial_t u_{\text{app}} + \Delta u_{\text{app}} = \omega|u_{\text{app}}|^{p-1}u_{\text{app}} + e^{-c/\hbar^{1-\eta}} q,$$

with

$$\|q\|_{H_h^k} \lesssim 1.$$

Let u be the solution of (16.6) and define $w = u - u_{\text{app}}$. Then w satisfies

$$\begin{cases} i\partial_t w + \Delta w = \omega(|w + u_{\text{app}}|^{p-1}(w + u_{\text{app}}) - |u_{\text{app}}|^{p-1}u_{\text{app}}) + e^{-c/\hbar^{1-\eta}} q \\ w(0, x) = 0. \end{cases} \quad (16.9)$$

We expand the r.h.s. of (16.9), apply the operator $(1 - \hbar^{2(\beta+1)}\Delta)^{k/2}$ to the equation, and take the L^2 - scalar product with $(1 - \hbar^{2(\beta+1)}\Delta)^{k/2}w$. Then we obtain

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{H_h^k} \lesssim \sum_{j=1}^p \|w^j u_{\text{app}}^{p-j}\|_{H_h^k} + e^{-c/\hbar^{1-\eta}}. \quad (16.10)$$

We now have to estimate the terms $\|w^j u_{\text{app}}^{p-j}\|_{H_h^k}$, for $1 \leq j \leq p$. From (16.7) we deduce

$$\begin{aligned} \|w^j u_{\text{app}}^{p-j}\|_{H_h^k} &\lesssim \|w^j\|_{H_h^k} \|u_{\text{app}}^{p-j}\|_{L^\infty(M^d)} \\ &\quad + \|w^j\|_{L^2(M^d)} \|(1 - \hbar^{2(\beta+1)}\Delta)^{k/2} u_{\text{app}}^{p-j}\|_{L^\infty(M^d)}. \end{aligned} \quad (16.11)$$

By (16.8), and as we have

$$\|u_{\text{app}}^{p-j}\|_{L^\infty(M^d)} \lesssim \hbar^{\gamma(p-j)}, \quad \|(1 - \hbar^{2(\beta+1)}\Delta)^{k/2} u_{\text{app}}^{p-j}\|_{L^\infty(M^d)} \lesssim \hbar^{\gamma(p-j)}, \quad (16.12)$$

thus inequality (16.11) yields

$$\|w^j u_{\text{app}}^{p-j}\|_{H_h^k} \lesssim \hbar^{\gamma(p-j)} \hbar^{-(\beta+1)(j-1)k} \|w\|_{H_h^k}^j.$$

Therefore, from (16.10) we have

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{H_h^k} \lesssim \hbar^{\gamma(p-1)} \|w\|_{H_h^k} + \hbar^{-(\beta+1)(p-1)k} \|w\|_{H_h^k}^p + e^{-c/\hbar^{1-\eta}}.$$

Observe that $\|w(0)\|_{H_h^k} = 0$. Now, for times t so that

$$\|w\|_{H_h^k} \lesssim \hbar^{\gamma+(\beta+1)k}, \quad (16.13)$$

we can remove the nonlinear term in (16.11), and by the Gronwall Lemma,

$$\|w\|_{H_h^k} \lesssim e^{-c/\hbar^{1-\eta}} e^{C\hbar^{\gamma(p-1)}t}. \quad (16.14)$$

By (15.2), $\alpha = 2 + \beta$ and $\gamma(p-1) = -2(\beta+1)$, thus for all $0 \leq t \leq s_2 \hbar^{\alpha+\kappa}$,

$$\hbar^{\gamma(p-1)}t \leq s_2 \hbar^{-\beta+\kappa},$$

and if $\beta + \eta - \kappa < 1$, the r.h.s. in (16.14) tends to 0. Then the inequality (16.13) is satisfied for all $0 \leq t \leq s_2 \hbar^{\alpha+\kappa}$, and with a continuity argument, we infer that (16.14) holds for $0 \leq t \leq s_2 \hbar^{\alpha+\kappa}$.

Finally,

$$\|w(t)\|_{H^k(M^d)} \lesssim \hbar^{-(\beta+1)k} \|w(t)\|_{H_h^k} \longrightarrow 0,$$

for $0 \leq t \leq s_2 \hbar^{\alpha+\kappa}$, when $\hbar \longrightarrow 0$, what we wanted to prove. \square

17 The instability argument

We have now the tools to show our main results.

We consider Cauchy conditions $v^0 = a^0 e^{iS^0/h}$ of (15.3) which do not oscillate, i.e. such that $S^0 = 0$. We have seen in the previous section, that for some analytic amplitudes a^0 , the solution writes $v = a e^{iS/h}$ and therefore oscillates immediately with magnitude $\sim \frac{1}{h}$.

Let χ be given by (16.3) and $a^0 \in \mathcal{H}^0(l, B)$ nontrivial (for instance $a^0(y) = e^{-y^2}$). Now set

$$u_0^h(x) = \hbar^\gamma \chi(\hbar^{-\eta} |\kappa(x)|) a^0(\hbar^{-1} \kappa(x)), \quad (17.1)$$

as initial data for (14.1).

Then we have the Ansatz (15.50), (16.4), (16.5)

$$u_{\text{app}}(t, x) = \hbar^\gamma \chi(\hbar^{-\eta} |\kappa(x)|) a(\hbar^{-\alpha} t, \hbar^{-1} \kappa(x)) e^{iS(\hbar^{-\alpha} t, \hbar^{-1} \kappa(x))/h}, \quad (17.2)$$

with $u_{\text{app}}(0, \cdot) = u_0^h$.

For $0 < c_0 \ll 1$ satisfying Proposition 15.11, set

$$h = \hbar^\beta = \frac{c_0}{n},$$

with $n \in \mathbb{N}$, and this induces the sequences in the statements of our main results. In particular

$$\text{supp } u_0^h \subset \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M^d : |\kappa(x)| \leq r \hbar^\eta\},$$

and hence we can choose

$$r_n = \max_{|x| \leq r \hbar^\eta} |\kappa^{-1}(x)|_g \longrightarrow 0,$$

in Theorems 14.2 and 14.3. Here we have assumed $m = 0$, reduction which is always possible.

17.1 Proof of Theorem 14.2

Let $0 < \varepsilon < 1$ and define

$$\delta_h = \hbar^{\varepsilon\beta} \log \frac{1}{\hbar} = \frac{1}{\beta} \hbar^\varepsilon \log \frac{1}{\hbar}, \quad (17.3)$$

which tends to 0 with h . This choice will become clear later. Consider

$$\tilde{u}_0^h = (1 + \delta_h) u_0^h, \quad (17.4)$$

and the associate function $\widetilde{u_{\text{app}}}$.

In all this subsection we take

$$\gamma = -\frac{d}{p+1}.$$

This is the right parameter γ so that u_{app} and $\widetilde{u_{\text{app}}}$ are normalized in $L^{p+1}(M^d)$ uniformly for $h \in]0, 1]$.

Lemma 17.1. *Let $p \geq (d+2)/(d-2)$ be an odd integer, and let u_0^h, \tilde{u}_0^h be defined by (17.1), (17.4). Then*

$$H^+(u_0^h) \lesssim 1, \quad H^+(\tilde{u}_0^h) \lesssim 1.$$

There exist $\nu_0 > 0$ and $q_0 > p+1$, such that for all $0 < \nu < \nu_0$ and $p+1 \leq q < q_0$

$$\|u_0^h - \tilde{u}_0^h\|_{H^{1+\nu}(M^d)}, \quad \|u_0^h - \tilde{u}_0^h\|_{L^q(M^d)} \longrightarrow 0, \quad (17.5)$$

when $h \longrightarrow 0$.

Proof. We make the change of variables $y = \hbar^{-1}\kappa(x)$, then

$$\begin{aligned} \|\nabla u_0^h\|_{L^2(M^d)}^2 &\sim \hbar^{2\gamma+d-2} \int_{|y| \leq r\hbar^{-1+\eta}} |\nabla(\chi(\hbar^{1-\eta}y)a^0(y))|^2 dy \\ &\sim \hbar^{2\gamma+d-2} \int |\nabla a^0(y)|^2 dy, \end{aligned}$$

as $0 < \eta < 1$.

As $2\gamma + d - 2 = -2d/(p+1) + d - 2 > 0$ when $p > 2d/(d-2) - 1$, it follows that

$$\|\nabla u_0^h\|_{L^2(M^d)} \longrightarrow 0 \quad \text{for } h \longrightarrow 0.$$

Compute

$$\|u_0^h\|_{L^{p+1}(M^d)}^{p+1} \sim \hbar^{(p+1)\gamma+d} \int |a^0(y)|^{p+1} dy \sim \hbar^{(p+1)\gamma+d}.$$

By definition $(p+1)\gamma + d = 0$, hence $\|u_0^h\|_{L^{p+1}(M^d)}$ remains bounded when h tends to 0, as well as $H^+(u_0^h)$.

Similarly, $H^+(\tilde{u}_0^h) \lesssim 1$.

By the definition (17.3) of δ_h we also have for all $\sigma \geq 0$

$$\|u_0^h - \tilde{u}_0^h\|_{H^\sigma(M^d)}^2 \sim \hbar^{2\gamma+d-2\sigma} \delta_h^2 \sim \hbar^{2\gamma+d-2\sigma+2\varepsilon\beta} \left(\log \frac{1}{\hbar}\right)^2. \quad (17.6)$$

The terms in (17.6) tend to 0 if

$$\sigma < \gamma + \frac{d}{2} + \varepsilon\beta.$$

But, by (15.2) and as $p > (d+2)/(d-2)$,

$$\gamma + \frac{d}{2} > 1,$$

hence we can choose $\nu_0 = \varepsilon\beta$ in the statement.

The proof of the other part is similar. \square

Proof of Theorem 14.2. The statements (14.5), (14.6) and (14.8) have already been proved in Lemma 17.1.

Let $0 < \varepsilon < 1$ which appears in (17.3), and set $s_h = h^{1-\varepsilon} = \hbar^{\beta(1-\varepsilon)}$ and $t_h = \hbar^\alpha s_h =$

$\hbar^{\alpha+\beta(1-\varepsilon)}$. Denote by $S = S(\hbar^{-\alpha}t_h, \hbar^{-1}\kappa(x))$ (resp. \tilde{S}) and by $b = \chi(\hbar^{-\eta}|\kappa(x)|)a(\hbar^{-\alpha}t_h, \hbar^{-1}\kappa(x))$ (resp. \tilde{b}). Then we have

$$\begin{aligned} \|(u_{\text{app}} - \widetilde{u_{\text{app}}})(t_h)\|_{L^{p+1}(M^d)} &= \hbar^\gamma \|b e^{iS/h} - \tilde{b} e^{i\tilde{S}/h}\|_{L^{p+1}(\mathcal{U})} \\ &\geq \hbar^\gamma \|b(e^{i(\tilde{S}-S)/h} - 1)\|_{L^{p+1}(\mathcal{U})} - \hbar^\gamma \|b - \tilde{b}\|_{L^{p+1}(\mathcal{U})}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

We now estimate the l.h.s. terms of (17.7).

First compute

$$\hbar^\gamma \|(b - \tilde{b})(\hbar^{-\alpha}t_h, \hbar^{-1}\kappa(\cdot))\|_{L^{p+1}(\mathcal{U})} \sim \hbar^{\gamma+d/(p+1)} \|(b - \tilde{b})(s_h, \cdot)\|_{L^{p+1}(\mathcal{V})}.$$

From the well-posedness of (15.6), we deduce

$$\|(b - \tilde{b})(s_h, \cdot)\|_{L^{p+1}(\hbar^{-1}\mathcal{V})} \longrightarrow 0,$$

where s_2 is given by Proposition 16.1.

Hence

$$\hbar^\gamma \|(b - \tilde{b})(\hbar^{-\alpha}t_h, \hbar^{-1}\kappa(\cdot))\|_{L^{p+1}(\mathcal{U})} \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0. \quad (17.8)$$

Secondly, a Taylor expansion near $s = 0$ shows that

$$(\tilde{S} - S)(s_h, y) \sim -\omega(p-1)\delta_h s_h (\chi(\hbar^{-1-\eta}|y|)a^0(y))^{p-1}. \quad (17.9)$$

Now observe that

$$\frac{\delta_h s_h}{h} \sim \log \frac{1}{h} \longrightarrow +\infty.$$

We then deduce from (17.9) that for all $|y| \leq 1$,

$$\limsup_{h \rightarrow 0} |e^{i(\tilde{S}-S)/h} - 1| = 2,$$

and as $\hbar^\gamma \|b(s_h, \hbar^{-1}\kappa(x))\|_{L^{p+1}(\mathcal{U})} \sim 1$, we obtain

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \hbar^\gamma \|b(e^{i(\tilde{S}-S)/h} - 1)\|_{L^{p+1}(\mathcal{U})} \geq c. \quad (17.10)$$

Thus, according to (17.8) and (17.10)

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|(u_{\text{app}} - \widetilde{u_{\text{app}}})(t_h)\|_{L^{p+1}(M^d)} \geq c.$$

In fact, we can extract a subsequence of the previous expression such that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(u_{\text{app}} - \widetilde{u_{\text{app}}})(t_h)\|_{L^{p+1}(M^d)} \geq c. \quad (17.11)$$

Finally, if we denote by $L^{p+1} = L^{p+1}(M^d)$,

$$\begin{aligned} \|(u - \tilde{u})(t_h)\|_{L^{p+1}} &\geq \|(u_{\text{app}} - \widetilde{u_{\text{app}}})(t_h)\|_{L^{p+1}} - \|(u - u_{\text{app}})(t_h)\|_{L^{p+1}} \\ &\quad - \|(\tilde{u} - \widetilde{u_{\text{app}}})(t_h)\|_{L^{p+1}}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

If $\varepsilon > 0$ is chosen small enough, we can apply Corollary 16.3, with $\kappa = (1 - \varepsilon)\beta$, with yields $\|(u - u_{\text{app}})(t_h)\|_{L^{p+1}}, \|(\tilde{u} - \widetilde{u_{\text{app}}})(t_h)\|_{L^{p+1}} \longrightarrow 0$ with h , and thus from (17.10) and (17.12)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(u - \tilde{u})(t_h)\|_{L^{p+1}} \geq \lim_{h \rightarrow 0} \|(u_{\text{app}} - \widetilde{u_{\text{app}}})(t_h)\|_{L^{p+1}} > c,$$

which concludes the proof. \square

17.2 Proof of Theorem 14.3

Here we deal with the case $(M^d, g) = (\mathbb{R}^d, \text{can})$.

Let $\beta > 0$ and $\gamma(p-1) = -2(\beta+1)$ as prescribed by (15.2). Let $0 < \sigma < d/2 - 2/(p-1)$ and

$$\frac{\sigma}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2} - \sigma)} < \rho \leq \sigma.$$

Consider u_{app} defined by (17.2) and let $s_2 > 0$ be given by Proposition 16.1.

Then, according to Corollary 16.2, the solution u of (14.1) with initial condition $u(0) = u_{\text{app}}(0)$ satisfies for all $k \in \mathbb{R}$

$$\|(u - u_{\text{app}})(t_h)\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0,$$

with $t_h = \hbar^\alpha s_2$. To prove that u satisfies (14.10) and (14.11) we only have to check that

$$\|u_{\text{app}}(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \|u_{\text{app}}(t_h)\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)} \rightarrow +\infty.$$

To begin with,

$$\|u_{\text{app}}(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \sim \hbar^{\gamma - \sigma + d/2}. \quad (17.13)$$

Then, use the equations (15.6) to observe that $a\nabla S(s_2, \cdot) \not\equiv 0$. Hence

$$\|u_{\text{app}}(t_h)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \sim \hbar^{\gamma - (\beta+1)\rho + d/2}. \quad (17.14)$$

By (17.13) and (17.14), we only have to show that we can choose $\beta > 0$ so that

$$\gamma - \sigma + d/2 > 0, \quad (17.15)$$

$$\gamma - (\beta+1)\rho + d/2 < 0. \quad (17.16)$$

Let $\varepsilon > 0$ such that

$$\sigma < d/2 - 2/(p-1) - \varepsilon, \quad (17.17)$$

$$\rho > \frac{\sigma + \varepsilon}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2} - \sigma - \varepsilon)}, \quad (17.18)$$

and take

$$\gamma = \sigma - d/2 + \varepsilon. \quad (17.19)$$

Therefore by (17.17) and (17.19) we obtain

$$\beta = -\frac{p-1}{2}\gamma - 1 = -\frac{p-1}{2}(\sigma - d/2 + \varepsilon) - 1 > 0. \quad (17.20)$$

Moreover, with the choice (17.19), inequality (17.15) is satisfied.

Finally, using the relations (17.19) and (17.20), we deduce that (17.16) is equivalent to

$$\rho > \frac{1}{\beta+1}(\gamma + d/2) = \frac{\sigma + \varepsilon}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2} - \sigma - \varepsilon)},$$

which is satisfied by (17.18).

17.3 Proof of Theorem 14.4

Assume here that (M^d, g) is an analytic riemannian manifold with an analytic metric g .

Consider the function u_{app} defined by (17.2) and let $s_2 > 0$ be given by Proposition 16.1.

Let $\kappa \geq 0$ such that $\beta + \eta - \kappa < 1$. Denote by $t_h = \hbar^{\alpha+\kappa} s_2$, then by Corollary 16.3, the solution u of (14.1) with initial condition $u(0) = u_{\text{app}}(0)$ satisfies for all $k \in \mathbb{R}$

$$\|(u - u_{\text{app}})(t_h)\|_{H^k(M^d)} \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0. \quad (17.21)$$

• Let

$$\frac{d}{2} - \frac{4}{p-1} \leq \sigma < \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}. \quad (17.22)$$

Choose $\varepsilon > 0$ so that

$$\sigma < \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1} - \varepsilon, \quad (17.23)$$

and define

$$\gamma = \sigma - d/2 + \varepsilon,$$

thus

$$\beta = -\frac{p-1}{2}\gamma - 1 = -\frac{p-1}{2}(\sigma - d/2 + \varepsilon) - 1.$$

Then by (17.22) and (17.23), $0 < \beta < 1$. Choose now $\eta > 0$ so small that $0 < \beta + \eta < 1$. The convergence (17.21) then follows with $t_h = \hbar^\alpha s_2$ (i.e. with $\kappa = 0$).

Finally

$$\|u_{\text{app}}(t_h)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \sim \hbar^{\gamma - (\beta+1)\rho + d/2} \longrightarrow +\infty,$$

for

$$\rho > \frac{1}{\beta+1}(\gamma + d/2) = \frac{\sigma + \varepsilon}{\frac{p-1}{2}(\frac{d}{2} - \sigma - \varepsilon)},$$

which was to prove.

• Assume here that $0 < \sigma \leq \frac{d}{2} - \frac{4}{p-1}$. For $\beta > 0$ and $\varepsilon > 0$, take $\kappa = \beta - 1 + 2\varepsilon$ and $\eta = \varepsilon$, so that $\beta + \eta - \kappa = 1 - \varepsilon < 1$. Then (17.21) holds and

$$\|u_{\text{app}}(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \sim \hbar^{\gamma - \sigma + d/2} \quad \text{and} \quad \|u_{\text{app}}(t_h)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \sim \hbar^{\gamma - (\beta+1-\kappa)\rho + d/2}. \quad (17.24)$$

Define $\gamma = \sigma - d/2 + \varepsilon$, then

$$\beta = -\frac{p-1}{2}\gamma - 1 = -\frac{p-1}{2}(\sigma - d/2 + \varepsilon) - 1 > 0,$$

and

$$\|u_{\text{app}}(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0 \quad \text{when} \quad h \longrightarrow 0.$$

The second term in (17.24) tends to $+\infty$ when

$$\rho > \frac{\gamma + d/2}{\beta + 1 - \kappa} = \frac{\sigma + \varepsilon}{2(1 - \varepsilon)},$$

which concludes the proof, as $\varepsilon > 0$ is arbitrary.

1 Appendix

Here we reproduce a part of the work of P. Gérard [10].

Proposition 1.1. *Let $r > 0$ be given by (15.48). Let v_{app} be the function defined by (15.50), and let v be the solution of*

$$\begin{cases} ih\partial_s v + h^2\Delta v = \omega|v|^{p-1}v, & (s, z) \in \mathbb{R}^{1+d}, \\ v(0, z) = v_{\text{app}}(0, z). \end{cases}$$

Then there exist $s_2 > 0$, $\lambda > 0$ and $\delta_2 > 0$ such that v can be extended to a continuous function on $[0, s_2]$, holomorphic-valued on $\{(|\hbar z| < r) \cap (|\text{Im } z| < \lambda)\}$, and so that for all $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{|s| < s_2} \sup_{|\text{Im } z| < \lambda} \|(1 - h^2\Delta)^{k/2}(v - v_{\text{app}})(s, \cdot + i\text{Im } z)\|_{L^2(\mathcal{B}(0, r/\hbar))} \leq C_k e^{-\delta_2/h}, \quad (1.1)$$

with $C_k > 0$.

Proof. Let

$$r_h = -ih\partial_s v_{\text{app}} - h^2\Delta v_{\text{app}} + \omega(v_{\text{app}}\overline{v_{\text{app}}})^{\frac{p-1}{2}} v_{\text{app}}.$$

Then $f_1 = v - v_{\text{app}}$ satisfies

$$ih\partial_s f_1 + h^2\Delta f_1 = F(s, z, f_1, h) + r_h, \quad (1.2)$$

where F stands for

$$F(s, z, f_2, h) = \omega\left((v_{\text{app}} + f_2)^{\frac{p+1}{2}}(\overline{v_{\text{app}}} + \overline{f_2})^{\frac{p-1}{2}} - (v_{\text{app}}\overline{v_{\text{app}}})^{\frac{p-1}{2}} v_{\text{app}}\right),$$

with $\overline{f}(s, z) = \overline{f(\overline{s}, \overline{z})}$.

We now show, that for $s_2 > 0$ and $\lambda > 0$ small enough, there exists a solution f_1 of (1.2) such that $f(s, z)$ is continuous on $[0, s_2]$, holomorphic-valued on $|\text{Im } z| < \lambda$, and exponentially decreasing in h : There exists $\delta > 0$ so that for all $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{0 \leq s \leq s_2} \sup_{|\text{Im } z| < \lambda} \|(1 - h^2\Delta)^{k/2} f_1(s, \cdot + i\text{Im } z)\|_{L^2(\mathcal{B}(0, r/\hbar))} \leq C_k e^{-\delta/h}.$$

This will be done thanks to a fixed point argument.

For $0 < \lambda < l$ and $k > d/2$, set

$$\|f\|_h = \sup_{|\text{Im } z| < \lambda} \|(1 - h^2\Delta)^{k/2} f(\cdot + i\text{Im } z)\|_{L^2(\mathcal{B}(0, r/\hbar))}.$$

Let $s_1 > 0$ be given by Proposition 15.9. Let also $\delta > 0$ and $s_2 \in [0, s_1]$. If $f = f(s, z)$ is continuous on $[0, s_1]$ and analytic on $|\text{Im } z| < \lambda$ we set

$$N_h(f, s_2) = \sup_{0 \leq s \leq s_2} e^{\delta(1 - \frac{s}{2s_2})/h} \|f(s)\|_h.$$

By the Sobolev embeddings, we have

$$\sup_{s \leq s_2} \sup_{|\text{Im } z| < \lambda} |f(s, z)| \lesssim N_h(f, s_2) e^{-\frac{\delta}{4h}}.$$

By Proposition 15.11 we can choose $\delta > 0$, $\lambda > 0$ and $K > 0$ so that

$$\|f_1(0)\|_h \leq Ke^{-\frac{\delta}{h}}, \quad N_h(r_h, s_1) \leq K, \quad \text{and} \quad \sup_{s \leq s_1} \sup_{|\operatorname{Im} z| < \lambda} |v_{\text{app}}(s, z)| \leq K. \quad (1.3)$$

Now use that

$$\|fg\|_h \lesssim h^{-k} \|f\|_h \|g\|_h, \quad \sup_{s \leq s_2} \|f(s)\|_h \lesssim e^{-\frac{\delta}{2h}} N_h(f, s_2), \quad (1.4)$$

to deduce that for all $L > 0$, there exists $C_L > 0$ and $h_L > 0$ so that if $h < h_L$ and $N_h(f, s_2) \leq L$, the following estimates hold

$$\|F(s, \cdot, f(s), h)\|_h \leq C_L \|f(s)\|_h, \quad (1.5)$$

and

$$\|F(s, \cdot, f_1(s), h) - F(s, \cdot, f_2(s), h)\|_h \leq C_L \|f_1(s) - f_2(s)\|_h. \quad (1.6)$$

Let $L > 0$ to be chosen and $h < h_L$. For f such that $N_h(f, s_2) \leq L$, let w be the solution of

$$\begin{cases} ih\partial_t w + \Delta w = F(s, z, f, h) + r_h, \\ w(0) = f_1(0). \end{cases} \quad (1.7)$$

The usual L^2 -estimates for the Schrödinger equation and (1.4) yield

$$\|w(s)\|_h \leq \|f_1(0)\|_h + \frac{1}{h} \int_0^s (C_L \|f(\tau)\|_h + \|r_h(\tau)\|_h) d\tau. \quad (1.8)$$

Now use the exponential decrease of the norms $\|\cdot\|_h$ to obtain

$$\frac{1}{h} \int_0^s \|f(\tau)\|_h d\tau \leq \frac{2s_2}{\varepsilon} N_h(f, s_2) e^{\delta(1-\frac{s}{2s_2})/h}.$$

Then, with (1.3), we deduce from (1.8)

$$N_h(w, s_2) \leq K(1 + \frac{2s_2}{\varepsilon}) + \frac{2s_2}{\varepsilon} C_L N_h(f, s_2). \quad (1.9)$$

Now fix $L \geq 4K$ and $s_2 \leq \min(s_1, \varepsilon/2, \varepsilon/(4C_L))$, by (1.9) we obtain $N_h(w, s_2) \leq L$.

We have proved that the application $f \mapsto w$, induced by the equation (1.7), maps the ball $\{f, N_h(f, s_2) \leq L\}$ into itself. Finally use (1.6) to show that this application is a contraction. Hence (1.2) admits a unique solution f_1 , which satisfies the estimate (1.1). \square

Bibliography

- [1] T. Alazard and R. Carles. Sequential loss of regularity for super-critical nonlinear Schrödinger equations. *Preprint*.
- [2] M. S. Baouendi and C. Goulaouic. Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy-Kovalevsky theorems. *Comm. Partial Differential Equations* 2 (1977), no. 11, 1151–1162.
- [3] N. Burq, P. Gérard, and S. Ibrahim. Ill-posedness for supercritical non-linear Schrödinger and wave equations. *Preprint*.
- [4] R. Carles. Geometric optics and instability for semi-classical Schrödinger equations. To appear in *Arch. Ration. Mech.*
- [5] R. Carles. On the instability for the cubic nonlinear Schrödinger equation. *arXiv:math/0701858* .
- [6] T. Cazenave and F. B. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Anal.* 14 (1990), no. 10, 807–836.
- [7] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations. *Amer. J. Math.*, 125(6):1235–1293, 2003.
- [8] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Ill-posedness for non linear Schrödinger and wave equation. To appear in *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*.
- [9] J. Ginibre and G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.* 32 (1979), no. 1, 1–71.
- [10] P. Gérard. Remarques sur l’analyse semi-classique de l’équation de Schrödinger non linéaire. *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1992–1993*, Exp. No. XIII, 13 pp., École Polytech., Palaiseau, 1993.
- [11] E. Grenier. Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126 (1998), no. 2, 523–530.
- [12] G. Lebeau. Non linear optic and supercritical wave equation. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 70 (2001), no. 4-6, 267–306.
- [13] G. Lebeau. Perte de régularité pour les équations d’ondes sur-critiques. *Bull. Soc. Math. France* 133 (2005), no. 1, 145–157.

- [14] J. Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. *Astérisque*, 95, 1–166, Soc. Math. France, Paris, 1982.

Résumé

Dans cette thèse on s'est intéressé à différents phénomènes d'instabilités pour des équations de Schrödinger non-linéaires.

Dans la première partie on met en évidence un mécanisme de décohérence de phase pour l'équation (semi-classique) de Gross-Pitaevski en dimension 3. Ce phénomène géométrique est dû à la présence du potentiel harmonique, qui permet de construire -via une méthode de minimisation- des solutions stationnaires se concentrant sur des cercles de \mathbb{R}^3 .

Dans la deuxième partie, on obtient un résultat d'instabilité géométrique pour NLS cubique posée sur une surface riemannienne possédant une géodésique périodique, stable et non-dégénérée. Avec une méthode WKB, on construit des quasimodes non-linéaires, qui permettent d'obtenir des solutions approchées pour des temps pour lesquels l'instabilité se produit. On généralise ainsi des travaux de Burq-Gérard-Tzvetkov pour la sphère.

Enfin, dans la dernière partie on considère des équations sur-critiques sur une variété de dimension d . Grâce à une optique géométrique non-linéaire dans un cadre analytique on peut montrer un mécanisme de perte de dérivées dans les espaces de Sobolev, et une instabilité dans l'espace d'énergie.

Abstract

In this work we study different instability phenomena for nonlinear Schrödinger equations.

In the first part we show a phase decoherence mechanism for the semiclassical Gross-Pitaevski equation in dimension 3. This geometrical phenomenon occurs because the harmonical potential allows the construction of stationary solutions to the equation which concentrate on circles of \mathbb{R}^3 .

In the second part, we obtain a geometric instability result for the cubic NLS on a riemannian surface. We assume that this surface admits a stable and nondegenerate periodic geodesic. Then with a WKB method we construct nonlinear quasimodes and we obtain approximate solutions to the equation for times such that instability occurs. Thus we generalize results of Burq-Gérard-Tzvetkov for the sphere.

In the last part, we consider supercritical Schrödinger equations on a riemannian manifold of dimension d . Thanks to nonlinear geometric optics in an analytic frame, we show a mechanism of loss of derivatives in Sobolev spaces, and an instability in the energy space.

Mots-clefs : instabilité, équation de Schrödinger non-linéaire, méthode WKB, optique géométrique non-linéaire.

Key words : instability, nonlinear Schrödinger equation, WKB method, nonlinear geometric optics.

AMS Subject Classification : 35A07 ; 35A10 ; 35B33 ; 35B35 ; 35Q55 ; 35R25 ; 81Q05.