HAL open science

Interfaces rigides des modèles sur réseau : une application de la positivité par réflexion

Yvon Charlie Vignaud

To cite this version:

Yvon Charlie Vignaud. Interfaces rigides des modèles sur réseau : une application de la positivité par réflexion. Mathématiques [math]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2007. Français. NNT : . tel-00265658v2

HAL Id: tel-00265658

https://theses.hal.science/tel-00265658v2

Submitted on 11 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
U.F.R. Mathématiques et Informatique de Marseille
ÉCOLE DOCTORALE n° 184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE

Spécialité : Mathématiques

par

Yvon VIGNAUD

Interfaces rigides des modèles sur réseau : une application de la positivité par réflexion

soutenue publiquement le 23 mai 2007

JURY

M. Thierry BODINEAU	Rapporteur
M. Bernard DERRIDA	Président du Jury
M. Krzysztof GAWEDZKI	Examinateur
M. Geoffrey GRIMMETT	Rapporteur
M. Senya SHLOSMAN	Directeur de thèse
M. Serge TROUBETZKOY	Examinateur

Interfaces rigides des modèles sur réseau : une application de la positivité par réflexion

Yvon Vignaud

Remerciements

Je tiens ici à remercier tous ceux qui m'ont accompagné d'une façon ou d'une autre tout au long de ces années de thèse.

Merci d'abord à mon directeur de thèse Senya Shlosman, pour m'avoir fait découvrir le domaine passionnant de la mécanique statistique au cours de discussions toujours très enrichissantes. Je lui suis infiniment reconnaissant de la confiance qu'il a pu me témoigner en m'accordant une très large autonomie dans mon travail, spécialement lors de l'élaboration du manuscrit. Je remercie les membres du jury pour avoir accepté de relire ce travail, et notamment mes rapporteurs Thierry Bodineau et Geoffrey Grimmett pour la qualité de leurs remarques lors de nos échanges.

Merci à toute l'équipe du CPT et surtout à Pierre Picco, pour son efficacité, ses conseils et sa sympathie. Aux collègues qui ont partagé mon bureau et mes sautes d'humeur au fil des ans, et tout spécialement Marjorie et Benjamin. À l'équipe administrative et technique, pour sa patience à l'égard de mes incompétences multiples et de mon manque d'organisation chronique. Aux gens du LATP, pour leur excellent séminaire du vendredi. À Errico Presutti et à toute son équipe, pour leur accueil à Rome où j'espère revenir un jour.

Merci à mes mentors, Anne Bosc et Michel Pernot, Jean-Louis Liters, Jean-François Le Gall, Alice Guionnet et Pierre Mathieu. Je salue mes élèves et toutes les personnes rencontrées lors de mes différentes activités, qu'ils soient dans le 16e ou au bâtiment D.

Merci à tous les gens formidables que j'ai rencontrés ces dernières années. À mes clones d'abord : Pierre-André (en plus grand), Fanfan (en plus beau), Lény (en plus fort), et Clément (en plus intelligent). À Anne et Méla, à Leïla, à Audrey, Julie et Stef. Aux Nantais, aux Parisiens, aux Lyonnais et aux Marseillais qui sont nés quelque part. Spéciale dédicace à Sev et à tous les lapins du Clapier.

Merci à ma famille, pour son soutien et sa chaleur. À mes parents pour

leur confiance, à mon frère pour les séances DVD, et aux cousins-cousines que j'adore complètement. Un clin d'œil enfin à ma sœur Stéphanie : cette thèse est dédiée aux grands yeux bleus de sa fille Clémence.

Merci enfin à l'association Génepi, pour ces six années fantastiques. Que sa vigilance et son action se montrent à la hauteur des enjeux politiques à venir !

— 1 —

Introduction

1.1 Généralités

Transitions de phases Les transitions de phases sont des phénomènes physiques spectaculaires, dont chacun a déjà fait l'expérience : plaques de verglas sur la route, ébullition dans une casserole d'eau, aimantation des objets métalliques (aiguilles ou tournevis par exemple), *etc.* D'autres expériences un peu moins banales comme la contraction spontanée de certains alliages sont également des manifestations de ces transitions. Dans des conditions bien précises de pression et de température, certains systèmes disposent donc de plusieurs états d'équilibre appelés phases — liquide et vapeur par exemple. Tout ou partie du système est alors susceptible de passer d'une phase à l'autre sans rompre l'équilibre.

La modélisation de ce type de phénomènes est un problème délicat. Il s'agit en effet de décrire des systèmes comprenant un très grand nombre d'objets (atomes ou molécules) interagissant tous les uns avec les autres. À titre d'exemple, un simple verre de table peut contenir 10^{24} molécules d'eau ou d'huile ; un tel nombre représente des dizaines de millions de fois l'âge de la Terre en secondes ! Il est donc impensable de pouvoir prendre en compte toutes les interactions possibles entre les molécules.

Une première approximation possible, sans grande audace, consiste à considérer que chaque particule n'interagit qu'avec ses voisines. Ceci ramène le nombre de termes d'interaction à un ordre de 10^{24}, encore trop grand pour espérer des calculs analytiques, même approchés. Deux options sont alors envisageables : la simulation numérique ou l'approximation statistique. La simulation numérique peut suggérer des pistes quant au comportement du système et permet parfois de détecter des transitions de phases. Malheureusement, les temps de calcul requis pour de telles simulations explosent lorsque le nombre de particules augmente, ce qui limite sévèrement la portée

des observations.

Quant à l'approximation statistique, elle consiste à postuler que les particules sont tellement nombreuses que l'observation à notre échelle, dite macroscopique, opère une moyenne sur les phénomènes microscopiques entre particules. Cette approximation est la base de la mécanique statistique, et c'est sous cet angle que nous interpréterons plus bas la notion d'interface rigide.

Interfaces rigides Considérons maintenant de l'huile et de l'eau dans deux verres différents. Lorsque l'on réunit ces deux liquides dans un même récipient, on pourrait s'attendre à un volume homogène où l'eau et l'huile sont parfaitement mélangées, comme un sirop versé dans de l'eau par exemple. Comme chacun le sait, il n'en est rien : on observe deux phases nettement séparées par une surface horizontale, appelée *interface*. La phase huileuse est majoritairement composée d'huile, avec néanmoins de minuscules bulles d'eau, et inversement pour la phase aqueuse.

Remarque 1. Le mélange eau–huile évoqué ci-dessus permet de visualiser de façon simple le concept d'interface, bien que l'analogie avec nos modèles d'étude reste très limitée. En effet, la structure de réseau sous-jascente aux différents modèles que nous allons décrire par la suite — structure absente dans le modèle eau–huile isotrope — induit des différences fondamentales dans les propriétés et dans la nature même de leurs interfaces. Nos modèles décrivent plutôt le comportement des matériaux magnétiques et les interfaces solide–gaz, comme par exemple certains cristaux d'Hélium, cf. [BAP05].

À l'échelle microscopique, l'interface n'est jamais tout-à-fait plate : elle fluctue légèrement (cf. Figure 1.2, p. 6). Si cela ne se voit pas à notre échelle, c'est précisément parce que la probabilité pour que de nombreuses fluctuations microscopiques apparaissent est très faible ! On dit dans ce cas que l'interface est *rigide*.

Ces propriétés géométriques de l'interface sont liées à la force qui s'exerce lorsque l'on tente de la déformer. Si cette force — appelée tension de surface — est très faible, l'interface peut fluctuer librement sans briser l'équilibre du système ; en revanche, lorsque cette tension n'est plus négligeable, ces fluctuations sont extrêmement limitées et l'interface se rigidifie. Calculer la tension de surface est donc une manière théorique d'établir la rigidité d'une interface. Notre approche du phénomène de rigidité sera différente, et en un sens plus concrète. Nous contrôlerons en effet l'apparition de défauts dans notre interface en montrant que chacun d'eux fait chuter d'un certain

facteur la probabilité de l'interface. Plus l'aspérité sera étendue et de forme compliquée, et plus ce facteur sera grand.

1.2 Modèles d'étude

Nous considérons uniquement des modèles dits sur réseau. C'est-à-dire que les particules sont fixées sur les intersection i d'une grille, $\mathbb{Z}^d$, et qu'elles ont chacune un état σ_i, appelé spin. Chaque particule i interagit avec ses $2d$ particules voisines $j \in \mathcal{V}(i)$ en produisant un terme d'énergie $\Phi(\sigma_i, \sigma_j)$. On a alors une énergie totale, ou Hamiltonien, donnée par

$$H(\sigma) = \sum_{i,j \in \mathcal{V}(i)} \Phi(\sigma_i, \sigma_j).$$

La probabilité $\mathbb{P}(\sigma)$ de voir les particules se conformer à une configuration σ dans un volume de $\mathbb{Z}^d$ est alors définie par

$$\mathbb{P}(\sigma) = Z(T)^{-1} \cdot \exp\left\{-\frac{H(\sigma)}{k_B \cdot T}\right\},$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T la température. La fonction de partition $Z(T)$ est simplement une constante de normalisation qui fait de $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité.

Remarque 2. À haute température, $k_B T \to \infty$ et $\mathbb{P}$ est approximativement uniforme, alors qu'à basse température, $k_B T \to 0$ et $\mathbb{P}$ se concentre sur les configurations qui minimisent l'énergie H. Nous verrons que ces configurations jouent un rôle important dans l'étude des diagrammes de phases.

Tant que les particules sont confinées dans des régions V finies, ces définitions sont acceptables, et $\mathbb{P}$ décrit alors un système à l'équilibre, dit thermodynamique. Nous souhaiterions cependant prendre des systèmes de plus en plus grands, de sorte que le postulat de l'approximation statistique soit raisonnable.

En principe, cela revient à prendre la limite de mesures $\mathbb{P} = \mathbb{P}_V$ pour des volumes V finis et croissant indéfiniment... Malheureusement, H et $Z(T)$ divergent tous deux avec V, et cette limite n'est *a priori* pas bien définie ! Nous verrons qu'il est tout de même possible de construire des limites — dites thermodynamiques — qui décrivent un système à l'équilibre en volume infini. La subtilité remarquable ici, c'est que *plusieurs* limites sont envisageables et qu'elles peuvent *a priori* décrire des équilibres distincts ! Ce formalisme est donc susceptible d'aborder le problème de coexistence de phases. Ces questions seront abordées succinctement dans la première

partie de la thèse ; pour une étude plus complète, voir par exemple les livres de référence [Geo88, Pre76, Rue99, Sim93, Sin82].

Nous donnons ci-dessous la définition de nos modèles d'étude, ce qui revient à préciser pour chacun d'eux les valeurs possibles pour les spins σ_i, ainsi que la nature de l'interaction Φ.

Modèle d'Ising Le modèle d'Ising est un modèle très simple, suggéré à Ernest Ising par son directeur de thèse, Wilhelm Lenz ; il a été conçu à l'origine pour décrire la transition de phases des milieux ferromagnétiques.

De tels matériaux métalliques ont tendance à s'aimanter très fortement en présence d'un champ magnétique extérieur. À haute température, les moments magnétiques des atomes de métal sont relativement indépendants, et la magnétisation disparaît lorsque l'on coupe le champ. À basse température, en revanche, le couplage des spins est suffisant pour que le matériau conserve son aimantation même après disparition du champ extérieur ; plusieurs états d'équilibre sont donc possibles, selon l'orientation initiale du champ extérieur.

En 1924, Ising a démontré dans sa thèse [Isi24, Isi25] que cette magnétisation spontanée ne se produit pas en dimension $d = 1$. Les arguments qu'Ising avance alors pour étendre cette conclusion en dimension supérieure sont erronés, comme nous allons le voir.

Les spins peuvent prendre ici deux valeurs, -1 et $+1$, représentant l'orientation du moment magnétique de chaque atome de métal — son spin. L'interaction $\Phi(\sigma_i, \sigma_j)$ vaut -1 si $\sigma_i = \sigma_j$, et $+1$ sinon. L'énergie est donc minimale lorsque les particules sont toutes de signe $+1$, ou toutes de signe -1 : ce sont les deux états d'équilibre à température nulle, ou encore *états fondamentaux* du modèle d'Ising.

À haute température, $T > T_c$, il n'existe qu'un seul état d'équilibre $\mathbb{P}_T^0$ pour ce modèle. L'équilibre décrit par cette probabilité ne favorise ni les spins négatifs ni les spins positifs :

$$\mathbb{P}_T^0\left(\sigma_i = -1\right) = \mathbb{P}_T^0\left(\sigma_i = +1\right) = \frac{1}{2},$$

ce qui se traduit par une magnétisation nulle du système. Dans ce régime, il est possible d'obtenir des résultats extrêmement précis, et notamment de démontrer rigoureusement la validité de la formule d'Ornstein-Zernike, cf. les travaux récents de Campanino, Ioffe et Velenik [CIV03].

À basse température, $T < T_c$, et si $d \geq 2$, on peut construire deux mesures d'équilibre, $\mathbb{P}_T^-$ et $\mathbb{P}_T^+$, qui décrivent des équilibres favorisant res-

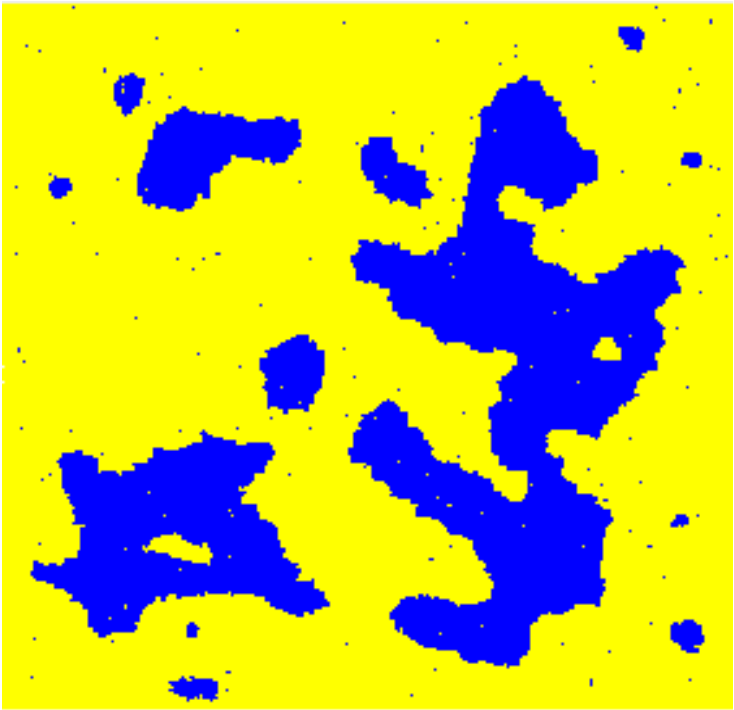


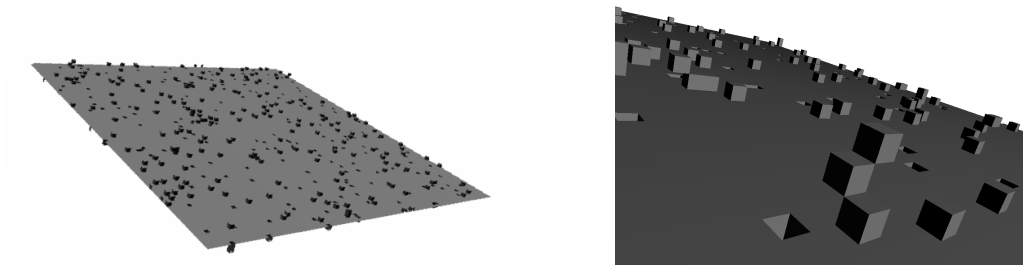
FIG. 1.1: Configuration typique d'Ising 2D dans un état proche de l'équilibre $\mathbb{P}_T^+$, $T \ll Tc$. Les spins positifs sont de couleur claire.

pectivement les $-$ et les $+$:

$$\mathbb{P}_T^-(\sigma_i = +1) < \frac{1}{2} < \mathbb{P}_T^+(\sigma_i = +1).$$

La magnétisation sous $\mathbb{P}_T^-$ est donc strictement négative, alors que la magnétisation sous $\mathbb{P}_T^+$ est strictement positive. Schématiquement, les configurations typiquement choisies par $\mathbb{P}_T^-$ sont des océans de $-$ dans lesquels émergent des îlots de $+$, et inversement pour $\mathbb{P}_T^+$, cf. Figure 1.1. De même que l'on parlait de phases aqueuse et huileuse, on parlera ici de phases $-$ et $+$ pour évoquer ces deux états d'équilibre possibles, qui sont des perturbations aléatoires des deux états fondamentaux. Les premiers arguments en faveur de cette transition figurent dans les travaux de Peierls [Pei36], et le calcul explicite en dimension 2 de la fonction de partition du modèle par Onsager [Ons44] implique déjà l'existence de cette transition, démontrée dans le formalisme de Gibbs par Dobrushin [Dob65].

Que dire de l'interface entre la phase $-$ et la phase $+$? En dimension $d = 2$, la question a été traitée par Gallavotti dans [Gal72], où il démontre que la ligne de séparation des phases est souple, et donc instable. Ce résul-



(a) Vue d'ensemble (b) Vue rapprochée

FIG. 1.2: Interface $+/-$ du modèle d'Ising 3D à basse température

tat est aussi une conséquence des travaux d'Aizenman[Aiz94] ou ceux de Higuchi[Hig81] qui aboutissent indépendamment à l'invariance par translation des états d'équilibre d'Ising 2D. En dimension supérieure, Dobrushin a démontré dans [Dob72a, Dob72b] que l'interface était bel et bien rigide à très basse température, voir Figure 1.2.

Nous verrons dans la seconde partie de cette thèse comment redémontrer ce célèbre résultat de Dobrushin en utilisant une méthode élémentaire basée sur la *positivité par réflexion* [FILS78, FILS80, Shl86, Geo88].

Remarque 3 (Transition de rugosité). La rigidité de l'interface pour des températures basses mais proches de T_c est un problème ouvert, dont la réponse dépend probablement de la dimension. En dimension $d \geq 4$, il est conjecturé que l'interface est toujours rigide dès qu'elle est définie, *i.e.* pour $T < T_c$; en dimension 3, on conjecture plutôt l'existence d'un régime de rugosité (*roughness*). Il existerait dans ce cas une température $T_R < T_c$ telle que l'interface soit rigide si $T < T_R$ et très fluctuante si $T_R < T < T_c$ — l'interface devenant subitement rugueuse lorsque l'on dépasse T_R.

Modèle de Potts Le modèle de Potts apparaît pour la première fois en 1952, dans une remarque à la fin la thèse de Renfrey Burnard Potts [Pot52]. C'est une généralisation naturelle du modèle d'Ising, les spins pouvant désormais prendre $q \geq 2$ valeurs différentes, appelées couleurs. L'interaction est définie par la même formule que pour Ising ($\Phi_{i,j} = -\mathbb{1}_{\{\sigma_i = \sigma_j\}}$) et possède q états fondamentaux, de couleur constante.

Comme pour le modèle d'Ising, si $d \geq 2$, il n'y a qu'un seul état d'équilibre à haute température — invariant par permutation des couleurs — et q états d'équilibre à basse température. Ces derniers sont engendrés par les états fondamentaux et privilégient donc chacun une couleur différente. Cependant, lorsque le nombre de couleurs devient élevé, un nouveau phéno-

mène se produit à la température critique $T = T_c$, où $q+1$ états d'équilibre sont possibles. Ces états sont issus des q phases colorées des basses températures d'une part, et de la phase chaotique des hautes températures d'autre part, voir [KS82, Mar86, DS88].

Remarque 4. En dimension 2, un argument de dualité dû à Kramers et Wannier [KW41] permet de calculer explicitement le point critique T_c sous réserve d'unicité, voir par exemple [Wu82]. En dimension supérieure, le calcul explicite de T_c est généralement considéré comme un problème insoluble, bien que l'on connaisse des asymptotiques précises pour $q \to \infty$, cf. [MMSRS91a].

Pour $q \gg 1$, deux types d'interface sont donc envisageables, selon que l'on considère deux phases colorées à basse température, ou bien une phase colorée et une phase chaotique au point critique. Le premier type peut se traiter de la même façon que l'interface $+/-$ du modèle d'Ising, et l'on voit sans difficulté supplémentaire que l'interface se rigidifie à basse température dès $d = 3$. Le deuxième est d'une autre nature, mais le phénomène de rigidité se produit lui aussi dès la dimension 3, si q est assez élevé. La méthode de positivité par réflexion founira, dans la troisième partie de cette thèse, une démonstration alternative de ce résultat, initialement prouvé dans [MMSRS91a, MMSRS91b].

Modèle continu L'un des modèles à spins continus les plus célèbres est le modèle XY, défini par l'Hamiltonien

$$H(\sigma) = -\sum_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}^3,\\ |x-y|=1}} \cos(\sigma_x - \sigma_y), \tag{1.1}$$

où les spins $\sigma_\cdot$ sont à valeur dans le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. À basse température, et en dimension 3, ce modèle présente une infinité continue de phases pures magnétisées [FSS76], μ_α, $\alpha \in \mathbb{S}^1$. Naturellement, il est tentant d'essayer de construire des états faisant coexister deux de ces phases en utilisant des conditions au bord mixtes qui prennent la valeur 0 sur le demi-espace supérieur et la valeur π sur le demi-espace inférieur. Néanmoins, une comparaison avec le cas Gaussien suggère que la limite thermodynamique de ces états serait un mélange, $\frac{1}{2}\left(\mu_{\frac{\pi}{2}} + \mu_{\frac{3\pi}{2}}\right)$. L'interface entre ces deux phases pures ne survivrait donc pas dans la limite thermodynamique.

Le modèle XYZ, également appelé modèle d'Heisenberg classique, est défini par le même Hamiltonien (1.1) , mais les variables $\sigma_\cdot$ sont maintenant à valeurs dans la sphère $\mathbb{S}^2 \in \mathbb{R}^3$, et la différence $\sigma_x - \sigma_y$ représente l'angle

entre σ_x et σ_y. Ici encore, à basse température, nous avons un ensemble de phases pures $\mu_{(\psi,\theta)}$, où $(\psi,\theta) \in \mathbb{S}^2$ sont les angles d'Euler sur $\mathbb{S}^2$, $\psi \in \mathbb{S}^1$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Les conditions au bord sont maintenant données par la configuration valant $\theta = \frac{\pi}{2}$ (pôle nord) sur le demi-espace supérieur, et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (pôle sud) sur le demi-espace inférieur. Nous pensons que les états en volume fini convergent faiblement vers le mélange $\int \mu_{(\psi,\theta=0)}\, d\psi$.

Ceci étant, nous pensons néanmoins que certains systèmes à symétrie continue possèdent des *états de Dobrushin*, *i.e.* qui décrivent la coexistence de deux phases pures séparées par une interface rigide. Nous conjecturons en particulier que c'est le cas du modèle fortement non-linéaire étudié dans [vES02, vES05] et défini par

$$H(\sigma) = -\sum_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}^3,\\ |x-y|=1}} \left(\frac{1+\cos(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\right)^p, \tag{1.2}$$

où $\sigma_x \in \mathbb{S}^1$. Pour p assez grand — *i.e.* quand le puits de potentiel est suffisamment étroit — ce modèle subit une transition de phase du premier ordre : il existe une température critique $T_c = T_c(p)$ à laquelle un état chaotique et un état ordonné coexistent.

Remarque 5. Ce résultat de [vES02] est fondamental, car il donne le premier exemple d'une telle transition dans un modèle 2D à symétrie continue. Ceci ne contredit pas le théorème de Mermin–Wagner [MW66], qui assure seulement que la symétrie de ces systèmes ne peut être brisée ; les états obtenus dans [vES02] sont d'ailleurs invariants par rotation par leur construction même.

En dehors de cette transition de phases, les seuls résultats rigoureux connus pour ce modèle sont qu'à haute température, il n'existe qu'un seul état d'équilibre (chaotique) et qu'à basse température, il y a au moins un état localement ordonné. Il est vraisemblable que pour $d \geq 3$, le modèle présente une infinité d'états d'équilibres, paramétrés par leur magnétisation dans $\mathbb{S}^1$; dans cette perspective, on pourrait tenter d'étendre les techniques de Balaban [Bal95] basées sur des développements à basse température (*low-temperature expansions*) comme le suggère Aernout van Enter [vE]. Par ailleurs, tous les états d'équilibre construits jusqu'alors pour ce modèle sont invariants par translation. Nous pensons néanmoins qu'en dimension $d = 3$ à la température critique T_c, ce système possède également des états de Dobrushin.

Cette conjecture est soutenue par les résultats de la quatrième partie de la thèse, consacrée à l'étude d'interfaces pour un modèle jouet inspiré du modèle (1.2), que nous décrivons ci-dessous.

L'espace d'états $\mathcal{S}$ sera ici $\mathbb{S}^1$, muni de la mesure de Lebesgue. On se donne un petit paramètre $\varepsilon > 0$, qui jouera le rôle de $1/q$ dans le modèle de Potts évoqué plus haut. L'interaction est définie par

$$\Phi(\sigma_i, \sigma_j) = -\mathbb{1}_{\{\langle i,j\rangle \text{ est ordonnée}\}}, \tag{1.3}$$

l'arête étant *ordonnée* si $|\sigma_i - \sigma_j| < \varepsilon$ et désordonnée sinon. Si la largeur ε du puits d'interaction est suffisamment petite, ce modèle subit une transition de phases (du premier ordre), une phase ordonnée typique des basses températures coexistant avec une phase désordonnée, typique des hautes températures ; ce résultat est la première étape du résultat principal de [vES02].

Nous montrerons dans la quatrième partie de cette thèse que l'interface ordre–désordre correspondante est rigide à condition qu'elle soit confinée dans une tranche d'épaisseur $L = L(\varepsilon)$ finie. Nous allons voir que pour une approximation raisonnable de ce modèle, notre méthode permet de prendre la limite thermodynamique complète $L \to \infty$.

Approximation d'horloge Le modèle d'horloge est un modèle qui fut suggéré à Potts par son directeur de thèse Cyril Domb, pour aborder le modèle XY (1.1). L'idée consiste à discrétiser l'espace de spins $\mathbb{S}^1$, tout en gardant les caractéristiques principales du modèle ; lorsque le pas de discrétisation est suffisamment fin, on peut espérer que le comportement de l'approximation donne de bonnes indications sur le comportement du modèle initial.

Nous considérons maintenant l'approximation d'horloge du modèle jouet (1.3). Les spins prennent des valeurs sur le cercle discret $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, et l'interaction est donnée par

$$\Phi(\sigma_i, \sigma_j) = \begin{cases} -1 & \text{si } \|\sigma_i - \sigma_j\| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, l'interaction est un puits de hauteur 1 dont la largeur $\frac{3}{q}$ tend vers 0 lorsque $q \to \infty$. Une adaptation directe des techniques de [vES02, vES05] développées pour le modèle (1.3) montre que si q est suffisamment grand, ce modèle subit lui aussi une transition ordre–désordre. Nous démontrerons dans la quatrième partie de cette thèse que l'interface ordre–désordre de cette approximation d'horloge est bien rigide en dimension 3. Ces résultats sont soumis à publication [SVar].

Remarque 6. Si ce modèle a des similarités avec le modèle de Potts, il est cependant bien plus délicat à aborder. Les difficultés viennent essentiellement de la *dégénérescence de ses états fondamentaux*. Plus précisément, on

peut remarquer que le nombre de ces états fondamentaux augmente exponentiellement avec le volume considéré ; en fixant une couleur m sur un sous-réseau, on garde en effet un degré de liberté pour chaque site j restant, puisque $\sigma_j \in \{m-1, m, m+1\}$ convient. De plus, les états fondamentaux de ce type sont particulièrement *instables* : il est possible de passer de l'un à l'autre en utilisant seulement des perturbations microscopiques — *i.e.* en changeant un nombre fini de spins.

1.3 Objet de la thèse

Cadre d'étude Nous proposons ici une contribution au vaste domaine de la mécanique statistique rigoureuse des systèmes à l'équilibre. Dans ce contexte, la notion d'équilibre thermodynamique est représentée par des mesures de probabilité — les mesures de Gibbs — et la coexistence de phases correspond à l'existence simultanée de plusieurs de ces mesures. Pour les modèles étudiés, chaque phase sera caractérisée par un événement local typique, symbolisé par une couleur ; l'interface correspondant à une transition entre deux phases sera modélisée par une surface séparant les deux couleurs correspondantes. Comme indiqué plus haut, les interactions considérées ici seront toujours à portée finie, de type plus proche voisin sur $\mathbb{Z}^d$.

Rappelons qu'il n'y a jamais de transition de phases en dimension $d = 1$ lorsque l'interaction est à portée finie sur un espace de spins compact. On pourra se référer à [Sim93] pour une démonstration de ce résultat *via* les matrices de transfert, lorsque l'espace de spins est fini, et à [Lan71] pour sa généralisation au cas compact ; une extension à certains modèles à spins non-bornés est possible, cf. [Pap84]. Enfin, on pourra consulter [Dys69] pour un exemple de transition dans un modèle d'Ising 1D à longue portée.

À partir de la dimension $d = 2$, la coexistence de phases devient possible et des interfaces apparaissent. Comme indiqué plus haut, Gallavotti a cependant montré dans [Gal72] que l'interface du modèle d'Ising 2D est une ligne soumise à des fluctuations gaussiennes, et n'est donc pas rigide. Les modèles que nous étudierons ici se comportent de façon similaire en deux dimensions et nous supposerons donc $d \geq 3$ par la suite. Pour un critère général assurant ce comportement des systèmes 2D à courte portée, on pourra consulter [DS85]. On remarquera pour finir que les interfaces de certains systèmes 2D à longue portée peuvent être rigides, en adaptant par exemple le modèle de [Dys69] en 2D.

Résultats historiques Jusqu'ici, la principale méthode connue pour traiter les questions d'interfaces reposait sur une utilisation conjointe de la théo-

rie de Pirogov et Sinaĭ et de développements en amas (*cluster expansions*), cf. [Zah86]. On pourra consulter [Sin82] et [PS75, PS76] pour un exposé de la théorie-PS, et par exemple [Dob96, KP86] pour les développements en amas. On trouvera une présentation précise du formalisme concernant la description des interfaces et de leurs aspérités — les murs (*walls*) — dans [HKZ88] ou [GG02] par exemple.

Cette approche fut initialement implémentée par Dobrushin dans ses travaux [Dob72a] sur la coexistence des phases du modèle d'Ising 3D à basse température, démontrant alors le premier résultat de rigidité. Les travaux [MMSRS91a, MMSRS91b] adaptent ensuite la méthode de Dobrushin à la transition ordre–désordre du modèle de Potts et démontrent que l'interface correspondante est bien rigide à la température critique $T_c(q)$, $q \gg 1$. Plus récemment, l'article [ČK03] a étendu ces techniques au modèle de l'amas aléatoire (*random cluster model*) au point critique pour $q \gg 1$; un résultat comparable a été obtenu dans [GG02] en régime sur-critique pour $q \geq 1$, et donc valide pour la percolation d'arêtes en particulier.

Il est remarquable que dans des cas très particuliers, une approche spécifique ait été fructueuse. Ainsi, van Beijeren obtient dans [vB75] une nouvelle démonstration particulièrement élégante des résultats de Dobrushin ; sa méthode utilise des résultats de [Leb74] basés sur les inégalités de corrélation GKS [Gri67, KS68]. Ruiz [Rui89] généralisera la méthode de van Beijeren pour traiter l'interface entre deux phases ordonnées du modèle de Potts, avec un nombre de couleurs $q = 2^n$.

Nous décrivons ici une nouvelle méthode qui s'applique à toute une classe de modèles à portée finie, dits positifs par réflexion (*reflection positive*) et dont les modèles d'Ising et de Potts font partie ; la méthode s'applique également à des modèles à spins continus. Cette méthode nous permet notamment de montrer que les interfaces des quatre modèles étudiés sont rigides en dimension supérieure ou égale à 3. On rappelle que certaines de ces interfaces n'ont jamais été étudiées auparavant, peut-être simplement parce qu'aucune théorie-PS n'a pu être développée pour les modèles correspondants ; ces interfaces inédites seront l'objet des tous derniers chapitres de la thèse.

Idée-clef de la méthode Nous souhaitons estimer la probabilité qu'une certaine interface I apparaisse. Pour cela, nous allons analyser les *défauts* de I, c'est-à-dire ce qui reste de l'interface lorsque l'on a enlevé toutes les parties plates, cf. Figure 1.3.

Nous montrerons que la probabilité $\mathbb{P}(\gamma)$ qu'un défaut γ surgisse dans

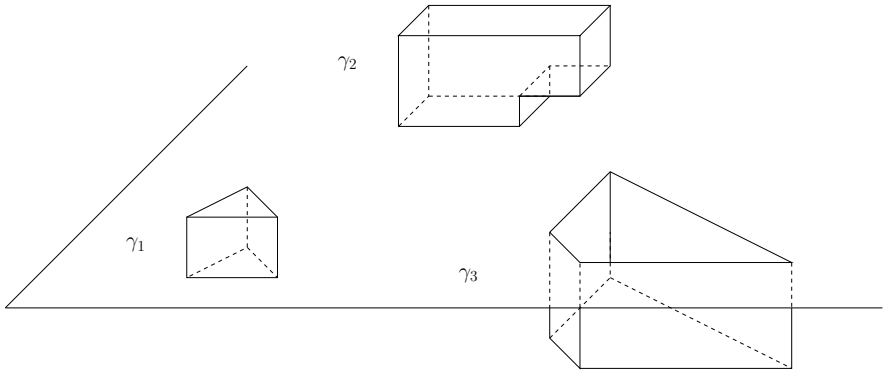


FIG. 1.3: Détail d'une interface I présentant trois défauts $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_3$

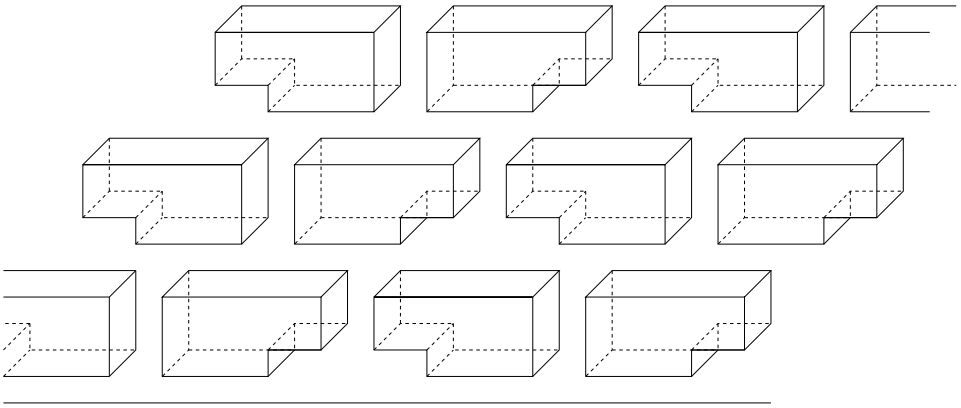


FIG. 1.4: Interface I_γ engendrée par les réflexions du défaut $\gamma = \gamma_2$ de l'interface de la Figure 1.3

l'interface est contrôlée par

$$\mathbb{P}(\gamma) \leq \exp\{-C \cdot s(\gamma)\}, \tag{1.4}$$

où $s(\gamma)$ est la surface du défaut, et $C \gg 1$ est une constante.

Pour obtenir (1.4), nous verrons qu'il suffit de contrôler l'interface périodique I_γ engendrée par les réflexions successives de cette fluctuation, cf. Figure 1.4. On montrera en effet que si S est l'aire de l'interface horizontale fondamentale :

$$\mathbb{P}(\gamma)^S \leq \mathbb{P}(I_\gamma) \leq \exp\{-C \cdot s(\gamma) S\}.$$

L'inégalité (1.4) assure que les aspérités de l'interface sont petites, mais ne contrôle pas leur nombre : elle est donc insuffisante pour établir la rigidité. La stratégie ci-dessus se généralise en fait aux familles de défauts

$\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$:

$$\mathbb{P}(\Gamma) \leq \exp\{-C \cdot s(\Gamma)\}, \tag{1.5}$$

où $\mathbb{P}(\Gamma)$ est la probabilité que l'interface présente simultanément tous les défauts $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, et où $s(\Gamma) = \sum s(\gamma_i)$ est la surface totale de ces aspérités.

Remarque 7. (1.5) peut être démontrée en dimension 2, mais pour que cela induise la propriété de rigidité, il est nécessaire que la dimension du système soit au moins égale à 3, pour une raison topologique simple. Si l'on retire de petites portions défectueuses d'une surface, elle reste en un seul morceau. En dimension 2, l'interface n'est plus une surface : c'est une ligne, déconnectée à la suppression de la moindre de ses fluctuations. De rares fluctuations ne sont donc pas incompatibles avec une interface souple, comme on l'a déjà signalé dans le cas du modèle d'Ising 2D.

Enfin, si la constante C ne peut être prise suffisamment grande dans l'inégalité (1.5), l'interface concernée pourrait ne pas être rigide, car le nombre de défauts de surface donnée s est généralement exponentiel en s. Nous démontrerons que pour nos quatre modèles, et dans un régime thermodynamique raisonnable, C peut être prise arbitrairement grande en adaptant les paramètres du modèle : $\beta \to \infty$ pour Ising, $q \to \infty$ pour Potts et l'approximation d'horloge, et $\varepsilon \to 0$ pour le modèle continu.

Plan de la thèse La première partie de cette thèse rappelle le formalisme de Gibbs sur le réseau $\mathbb{Z}^d$, la méthode de la positivité par réflexion, ainsi qu'une description des interfaces en dimension $d \geq 3$. Nous donnons une condition suffisante de rigidité (globale) portant sur les irrégularités (locales) de ces interfaces.

Dans la deuxième et la troisième partie, nous redémontrons respectivement que l'interface $+/-$ du modèle d'Ising à très basse température[1] et l'interface ordre–désordre du modèle de Potts à la température critique[2] sont toutes deux rigides. Nous rappelons au lecteur que ces résultats ne sont pas nouveaux, deux raisons essentielles motivant ici leur exposition. La première est la simplification des démonstrations historiques ; notre méthode permet en effet d'éviter l'élaboration d'une théorie-PS adaptée et se passe des développement en amas. La deuxième raison est d'ordre pédagogique ; puisqu'il s'agit de la première application de cette méthode à des problèmes d'interfaces, le contexte particulièrement favorable de ces deux parties applicatives sera sans doute profitable au lecteur.

[1] $T \ll T_c(d)$.
[2] $T = T_c(q)$, $q \gg q(d)$.

La quatrième et dernière partie aborde la question des modèles à symétrie continue, aucun résultat sur les interfaces de ces modèles n'ayant été obtenu auparavant. Nous étudions le modèle continu présenté ci-dessus, ainsi que son approximation discrète — le modèle d'horloge. Les états fondamentaux de ces deux modèles étant dégénérés, la construction d'une théorie-PS est *a priori* très délicate ; nous conjecturons même que ces modèles connaissent une décroissance polynomiale de leurs fonctions de corrélation — aucun équivalent de la théorie-PS n'étant alors envisageable. Une application de la théorie des bornes infra-rouges (*infrared bounds*, cf. [FSS76]) est susceptible de donner des résultats dans cette direction.

En s'inspirant de la méthode développée pour le modèle de Potts critique, nous démontrerons que les interfaces ordre–désordre du modèle continu sont rigides lorsqu'elles sont confinées dans des volumes d'épaisseur constante. Cette restriction spatiale étant un artefact purement technique lié à la méthode de positivité par réflexion, nous conjecturons la rigidité de ces interfaces dans la limite thermodynamique complète, *i.e.* lorsque le volume croît indéfiniment dans toutes les directions. Cette conjecture est notamment soutenue par un théorème équivalent pour le modèle d'horloge, démontré dans l'ultime chapitre.

1.4 Perspectives

La méthode de positivité par réflexion restreinte développée dans cette thèse s'applique également à certains modèles à spins non-bornés et positifs par réflexion, comme le modèle du double puits par exemple, dont l'allure du potentiel est indiquée par la Figure 1.5. Les spins sont ici à valeurs dans $\mathbb{R}$ et l'Hamiltonien s'écrit

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} |\sigma_i - \sigma_j|^2 + \sum_i \left(|\sigma_i|^2 - 1 \right)^2 . \tag{1.6}$$

Ce modèle présente des similarités avec le modèle d'Ising : à basse température, deux états magnétisés $+, -$ coexistent, alors qu'à haute température l'état d'équilibre est unique.

Un deuxième exemple que nous sommes à même de traiter par notre méthode a été initialement introduit dans [DS81] :

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} |\sigma_i - \sigma_j|^2 + \sum_i U(|\sigma_i|), \tag{1.7}$$

où U est un potentiel disposant d'un minimum global très étroit, et d'un minimum local qui s'étend sur une très vaste région, cf. Figure 1.6. À basse

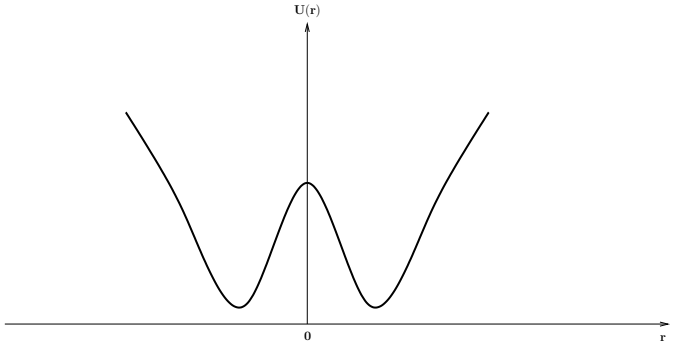


FIG. 1.5: Allure du potentiel du modèle (1.6)

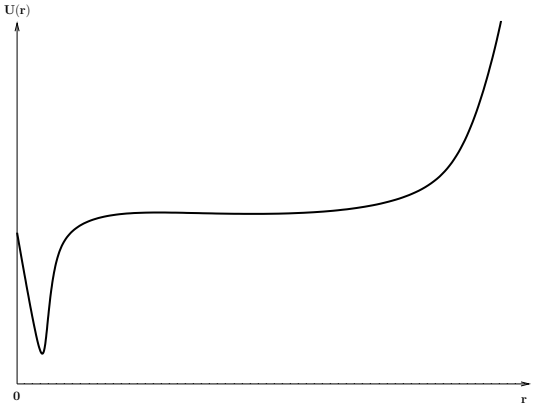


FIG. 1.6: Allure du potentiel U du modèle (1.7)

température, ce système s'ordonne autour du minimum global, alors qu'à haute température il préfère explorer la région du minimum local ; un résultat de [DS81] affirme l'existence d'une température T_c de coexistence entre ces phases ordonnées et chaotiques.

Dans un travail en cours avec Senya Shlosman [SV], nous montrerons que l'interface $+/-$ du modèle (1.6) et l'interface ordre–désordre du modèle (1.7) sont rigides en dimension $d \geq 3$.

Enfin, la rigidité de l'interface du modèle d'approximation d'horloge n'est que la première étape dans le programme de construction de mesures non-invariantes par translation pour des modèles à spin continus. Une seconde étape serait de démontrer que pour ce même modèle, on peut effectivement construire de telles mesures de Gibbs. Dans cette perspective, il nous faudrait montrer que l'on peut conditionner l'interface à être « loin des bords de la boîte », grâce à une propriété de répulsion entropique.

Avertissements Les trois dernières parties utiliseront les outils et notations développés dans la première mais sont relativement indépendantes les unes des autres. Le lecteur déjà familier avec les résultats des deuxième et troisième parties peut bien sûr passer directement à la dernière partie, qui contient les résultats originaux de la thèse, en gardant toutefois à l'esprit que les concepts de notre approche sont probablement plus abordables dans les parties précédentes.

La simplification des démonstrations historiques, évoquée plus haut, nous permet de donner des démonstrations *exhaustives et élémentaires*. Les démonstrations résultant de cette approche pédagogique sont donc nettement plus longues que les démonstrations historiques existant dans la littérature scientifique, ce qui n'enlève évidemment rien à leur relative simplicité technique.

Enfin, nos démonstrations seront restreintes au cas $d = 3$, bien que les résultats soient valides pour toute dimension $d \geq 3$.

Première partie

Description formelle du phénomène d'interfaces rigides

Résumé

Le but de cette première partie est de définir un cadre adapté à l'étude rigoureuse du phénomène de rigidité des interfaces. Dans le chapitre 2, nous détaillerons la notion de phase pure et décrirons le phénomène de transition de phases. Le chapitre 3 exposera les inégalités de corrélation au cœur de la méthode de positivité par réflexion : les inégalités de l'échiquier. La définition d'interfaces en dimension $d \geq 3$ sera l'objet du chapitre 4, où nous donnerons notamment une condition assurant la rigidité des interfaces, dans un cadre abstrait assez général.

— 2 —

États d'équilibre, phases pures

Dans ce chapitre, nous définissons les mesures de Gibbs ; ces mesures sont la représentation des états d'équilibre en mécanique statistique. Nous donnons quelques unes de leurs propriétés fondamentales, ainsi que diverses façons de les construire. Nous définissons également un peu plus loin les phases pures ; ce sont des états d'équilibre exceptionnels, de par leur caractère homogène (invariance par translation) d'une part et leur irréductibilité (extrémalité) d'autre part.

$\mathcal{S} = (S, \delta)$ sera un espace métrique compact, que l'on munira de sa mesure de Lebesgue λ. $\Omega = S^{\mathbb{Z}^d}$ désignera l'ensemble des configurations sur le réseau cubique standard $\mathcal{L} = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. En particulier, Ω sera compact pour la topologie produit.

Le modèle d'Ising nous servira ici de fil rouge, fournissant des exemples pour les différentes définitions et constructions de cette partie, assez abstraite par ailleurs. Pour ce modèle, $S = \{+1, -1\}$ sera naturellement muni de la mesure de comptage.

2.1 Mesures de Gibbs

Le but de cette section est de construire une mesure de probabilité sur Ω, interprétée comme la fréquence d'apparition des configurations physiques $\sigma \in \Omega$ soumises à une interaction Φ ; pour que cette mesure caractérise un état d'équilibre du système, il faudra qu'elle satisfasse une certaine propriété de consistance. Notre approche est constructive, au sens où nous allons d'abord construire ces mesures pour constater *a posteriori* cette propriété d'équilibre thermodynamique, cf. (2.8) plus bas.

On notera $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des probabilités sur Ω, et pour tout $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{F}_\Lambda$ sera la tribu engendrée par les variables aléatoires $\sigma \mapsto \sigma_s, s \in \Lambda$. Si A est $\mathcal{F}_\Lambda$-mesurable, on notera parfois abusivement $A \subset \Lambda$.

Définition 8 (Interactions)**.** Se donner une *interaction* Φ, c'est fixer une application $\Phi_X : \Omega_X \to \mathbb{R}$ pour toute partie $X \subset \mathbb{Z}^d$.

Φ_X est le terme d'interaction entre les spins de la partie X. Dans le cas d'un singleton $X = \{x\}$, $\Phi_{\{x\}}(\sigma) = U_x(\sigma_x)$ représente le potentiel au site x, c'est-à-dire l'interaction de la configuration avec l'environnement au point x.

Définition 9 (Portée finie, Interaction au plus proche voisin)**.** On dira qu'une interaction Φ est *à portée finie* s'il existe $R \in \mathbb{N}$ tel que si $\operatorname{diam} X > R$, alors $\Phi_X \equiv 0$. Parmi les interactions à portée finie, on distinguera les interactions dites *au plus proche voisin*, *i.e.* les interactions de portée $R = 1$.

Une interaction au plus proche voisin est donc définie par des termes de potentiel $\Phi_{\{x\}}$ et des termes Φ_e où $e \in \mathbb{E}^d$ est une arête du réseau $\mathcal{L}$. Si x, y sont les deux extrémités de e, on notera parfois $e = \langle x, y \rangle$.

Définition 10 (Invariance par translation)**.** On dira qu'une interaction Φ est invariante par translation si elle satisfait $\Phi_X \equiv \Phi_{\tau X}$ pour toute translation τ de $\mathcal{L}$ et pour tout $X \subset \mathbb{Z}^d$.

Nous supposerons par la suite que Φ est à portée finie et invariante par translation.

Exemple 11 (Modèle d'Ising ferromagnétique)*.* Le modèle d'Ising est un modèle sur $S = \{+1, -1\}$ défini par l'interaction au plus proche voisin décrite ci-après. Pour toute famille de réels $(h_x)_{x \in \mathcal{L}}$, interprétée comme un champ magnétique immergeant le réseau $\mathcal{L}$, on définit les potentiels $\Phi_{\{x\}}(\sigma) = -h_x \sigma_x$. Pour toute arête $e = \langle x, y \rangle$ de $\mathcal{L}$, on pose $\Phi_e(\sigma) = -\sigma_x \sigma_y$. Cette interaction est invariante par translation si et seulement si le champ h est constant.

Nous devons maintenant définir l'énergie des configurations soumises à l'interaction Φ. L'espace $\mathbb{Z}^d$ étant infini, l'énergie d'une configuration globale contient une infinité de termes, et n'est donc pas bien définie ; on peut toutefois définir son énergie dans chaque volume fini. Comme nous le verrons, les termes d'énergie faisant intervenir les sites à la frontière de ces volumes sont parfois décisifs pour le comportement de la mesure construite ; cette sensibilité aux conditions aux bords est caractéristique du phénomène de transition de phases.

Définition 12 (Hamiltonien)**.** On appellera Hamiltonien la fonctionnelle d'énergie $H : \Lambda \mapsto H_\Lambda$, où $H_\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie pour tout volume fini

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ par

$$H_\Lambda(\sigma) = \sum_{X \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_X(\sigma) \quad . \tag{2.1}$$

L'interaction étant à portée finie, le support de la somme ci-dessus est toujours fini lorsque Λ fini. H_Λ est alors bien défini sur Ω.

Notation 13. Pour toute configuration $\sigma \in \Omega$ et toute partie $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, on définit $\sigma_\Lambda \in \Omega_\Lambda = \mathcal{S}^\Lambda$ la restriction naturelle de σ à Λ. Si l'on dispose d'une configuration globale $\omega \in \Omega$, on définit la configuration $\sigma_\Lambda^\omega = \sigma_\Lambda \cdot \omega_{\Lambda^c} \in \Omega$, qui coïncide avec σ_Λ sur Λ et avec ω_{Λ^c} sur $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$.

Définition 14 (Hamiltonien avec conditions au bord)**.** Soit Λ une partie finie de $\mathcal{L}$. On notera H_Λ^ω l'Hamiltonien avec conditions au bord $\omega \in \Omega$, défini par

$$H_\Lambda^\omega(\sigma) := H_\Lambda(\sigma_\Lambda \cdot \omega_{\Lambda^c}) = H_\Lambda(\sigma_\Lambda^\omega) \quad . \tag{2.2}$$

Exemple 15. Dans le cas du modèle d'Ising en champ magnétique quelconque, on a donc

$$H_\Lambda^\omega(\sigma) = -\sum_{x,y \in E(\Lambda)} \sigma_x \sigma_y - \sum_{\substack{x,y \in E \\ x \in \Lambda, y \notin \Lambda}} \sigma_x \omega_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x \quad , \tag{2.3}$$

où $E(\Lambda)$ est l'ensemble des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à Λ.

Enfin, on se donne $\beta \in [0, \infty)$ la température inverse du système.

Définition 16 (Mesure de Gibbs en volume fini)**.** La mesure de Gibbs $\mu_{\beta,\Lambda}^\omega$ en volume fini Λ, à température β et avec conditions aux bords ω est définie par

$$\mu_{\beta,\Lambda}^\omega(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{Z_{\beta,\Lambda}^\omega} \cdot e^{-\beta H_\Lambda^\omega(\sigma)} & \text{si } \sigma_{\Lambda^c} \equiv \omega_{\Lambda^c}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\text{avec } \; Z_{\beta,\Lambda}^\omega = \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda^\omega(s_\Lambda \cdot \omega_{\Lambda^c})} \, d\lambda_\Lambda(s_\Lambda) \quad , \tag{2.5}$$

λ_Λ étant la mesure produit sur Ω_Λ induite par λ. La constante de normalisation $Z_{\beta,\Lambda}^\omega$, qui fait de $\mu_{\beta,\Lambda}^\omega$ une mesure de probabilité sur Ω, est appelée fonction de partition. Selon le contexte, $\mu_{\beta,\Lambda}^\omega$ sera parfois vue comme une mesure de probabilité sur Ω_Λ.

La famille de mesures ainsi construites satisfait une relation de compatibilité remarquable :

$$\mu^{\omega}_{\beta,\Delta}(A) = \int_{\Omega} \mu^{\eta}_{\beta,\Lambda}(A)\, d\mu^{\omega}_{\beta,\Delta}(\eta) \tag{2.6}$$

valide pour tout $\Lambda \subset \Delta$ finis, et tout événement $A \in \mathcal{F}_{\Lambda}$. Nous allons maintenant donner un sens à la relation (2.6) lorsque Δ devient arbitrairement grand, sous la forme des équations de Dobrushin et Lanford-Ruelle.

Puisque $\Omega = \mathcal{S}^{\mathcal{L}}$ est compact, $\mathcal{P}(\Omega)$ est faiblement compact :

Proposition 17. *De toute suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de probabilités sur Ω, il est possible d'extraire une sous-suite $(\nu_n)_{n\geq 0}$ convergeant faiblement. Ainsi, il existe $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que pour toute fonction F bornée et $\mathcal{F}_{\Lambda}$-mesurable avec $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ fini,*

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(F) = \nu(F). \tag{2.7}$$

En appliquant la proposition 17 à la famille $\left(\mu^{\omega}_{\beta,\Lambda}\right)_{\Lambda\subset\mathcal{L}}$, on obtient l'existence d'un point d'accumulation lorsque $\Lambda \nearrow \mathcal{L}$, que nous noterons μ^{ω}_{β}. La relation (2.6) implique alors immédiatement

Proposition 18 (Équations DLR)**.** *Pour tout point d'accumulation μ^{ω}_{β} construit plus haut et pour tout borélien A,*

$$\mu^{\omega}_{\beta}(A|\mathcal{F}_{\Lambda^c}) \text{ et } \left(\eta \mapsto \mu^{\eta}_{\beta,\Lambda}(A)\right) \text{ coïncident } \mu^{\omega}_{\beta}\text{-presque sûrement.} \tag{2.8}$$

Autrement dit, conditionnellement à ce qui se passe à l'extérieur d'une boîte, le système régi par μ^{ω}_{β} est à l'équilibre pour l'interaction Φ.

Définition 19 (Mesures de Gibbs)**.** La propriété fondamentale (2.8) est la définition formelle d'une *mesure de Gibbs*. On notera $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$ l'ensemble des mesures de Gibbs pour l'interaction Φ à température β. On parlera de façon équivalente de mesure Gibbs, d'état d'équilibre, ou même tout simplement d'état.

2.2 Transition de phases, phases pures

Dans la section précédente, nous avons vu que pour une classe d'interactions Φ assez vaste, $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$ est toujours non-vide. On dira qu'il y a *transition de phases* à la température β si le système admet plusieurs états d'équilibre, *i.e.* si $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$ n'est pas réduit à un singleton. Nous rappelons maintenant la structure de $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$.

Une étude générale des mesures de Gibbs montre que $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$ est en fait le plus petit convexe (faiblement) fermé de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant tous les points d'accumulation du type μ_{β}^{ω}. D'après la théorie de Choquet, $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$ est un *simplexe* : tout élément $\mu \in \mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\mu = \int_{\nu \in \chi} \nu \, d\rho_{\mu}(\nu) \quad ,$$

où ρ_{μ} est une mesure de probabilité sur l'ensemble $\chi^{\Phi}(\beta)$ des points extrémaux de $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$. Nous renvoyons le lecteur à [Sim93]) pour les démonstrations de ces faits, en retenant simplement que l'étude des points extrémaux est fondamentale pour établir le diagramme de phases d'un système.

On souhaiterait maintenant définir la notion de phase pure. Intuitivement, une phase est un état d'équilibre particulièrement homogène : un lac gelé ne devrait donc pas être décrit par une phase mais plutôt par une coexistence de deux phases. Pour formaliser cette intuition d'homogénéité, nous introduisons la notion d'invariance par translation :

Définition 20 (Mesure invariante)**.** Une mesure μ sur Ω sera dite invariante par translation si pour tout événement A et toute translation τ,

$$\mu(\tau \cdot A) = \mu(A),$$

où $\tau \cdot A = \{\sigma; \tau \cdot \sigma \in A\}$, et $\tau \cdot \sigma$ est la configuration définie par $[\tau \cdot \sigma]_x = \sigma_{\tau(x)}$. L'ensemble des mesures invariantes par translation sera noté $\mathcal{M}_I$.

Pour définir la notion de pureté, nous devons d'abord définir la notion de mélange. On dit qu'un état est un *mélange* s'il est un barycentre non-trivial de deux mesures. Dans un ensemble donné, un élément sera dit *pur* si ce n'est pas un mélange.

Définition 21 (Phases pures, états purs)**.** Une *phase* est un état invariant par translation, et leur ensemble $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta) \cap \mathcal{M}_I$ sera noté $\mathcal{G}_I^{\Phi}(\beta)$. Un *état pur* est un point extrémal de $\mathcal{G}^{\Phi}(\beta)$. Une *phase pure* est un point extrémal de $\mathcal{G}_I^{\Phi}(\beta)$.

Il est à noter que tout état pur invariant par translation est bien une phase pure, mais que toute phase pure n'est pas nécessairement un état pur ! En effet, elle peut être extrémale au sein des mesures invariantes, sans être extrémale au sein des mesures de Gibbs. Les livres de référence [Geo88, Sim93] proposent une discussion précise et agrémentée d'exemples sur ce sujet délicat. Comme nous le verrons, le modèle d'Ising à basse température possède exactement deux phases pures, qui sont toujours des états purs.

Une question naturelle est de savoir comment construire des mesures de Gibbs qui soient invariantes par translation. En effet, si nous savons que $\mathcal{G}$ est non-vide, nous ne savons *a priori* rien de $\mathcal{G}_I$. Pour une interaction quelconque, on peut par exemple prendre un élément μ quelconque de $\mathcal{G}$, et le rendre invariant ; pour cela, on définit $\mu_\Lambda^I = \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda}\tau_i\mu$, où τ_i est la translation de vecteur i. Tout point limite μ^I des μ_Λ^I sera bien une mesure de Gibbs invariante par translation.

Enfin, dans le cas où l'interaction est invariante par translation, certaines conditions au bord vont forcer l'invariance des mesures obtenues par limite thermodynamique. C'est le cas des conditions libres et des conditions au bord périodiques.

L'Hamiltonien avec conditions au bord libres H_Λ^f est défini par

$$H_\Lambda^f(\sigma) = \sum_{X\subset\Lambda}\Phi_X(\sigma), \tag{2.9}$$

et les mesures de Gibbs en volume fini correspondantes sont naturellement appelées *mesures de Gibbs avec conditions au bord libres*. Les points d'accumulation de cette famille de mesures sont alors des phases pour l'interaction Φ (voir par exemple [Geo88]).

Les conditions au bord périodiques permettent elles aussi d'obtenir gratuitement cette propriété d'invariance. Ces conditions au bord étant fondamentales pour la méthode de positivité par réflexion utilisée tout au long de cette thèse, nous expliquerons en détails dans le chapitre suivant la construction des mesures de Gibbs associées.

— 3 —

Méthode de la positivité par réflexion

Le but de ce chapitre est de fournir un outil technique qui nous permettra plus tard de contrôler les irrégularités locales des interfaces de nos modèles d'étude. La première section introduit la notion de positivité par réflexion, tandis que la deuxième section définit les mesures de Gibbs sur des tores (conditions au bord périodiques). La troisième et dernière section montre que sous certaines hypothèses, ces mesures sont positives par réflexion et qu'elles satisfont donc les inégalités de corrélation décrites dans la première section. Ces puissantes inégalités, dites de l'échiquier, sont la pierre angulaire de la méthode de positivité par réflexion.

3.1 Positivité par Réflexion et inégalité de l'échiquier

Dans cette section, nous présentons la notion de positivité par réflexion et l'inégalité de l'échiquier en reprenant les notations de [Shl86].

Θ désignera l'ensemble des réflexions de $\mathbb{R}^d$ laissant $\mathbb{Z}^d$ globalement invariant. L'ensemble des points fixes d'une telle réflexion est un hyperplan $H(\theta)$, qui sépare $\mathbb{R}^d$ en deux demi-espaces ouverts $\mathbb{R}^d_-(\theta)$, $\mathbb{R}^d_+(\theta)$. On notera $X^\pm(\theta)$ l'adhérence de $\mathbb{R}^d_\pm(\theta)$.

Si $\mathbb{V} \subset \mathbb{Z}^d$ est la trace discrète d'un pavé V de $\mathbb{R}^d$ globalement invariant par une réflexion $\theta \in \Theta$, on notera respectivement $V^- = V \cap X^-(\theta)$ et $V^+ = V \cap X^+(\theta)$ les deux parties de V séparées par l'hyperplan $H(\theta)$, et $\mathbb{V}^-$, $\mathbb{V}^+$ leurs traces discrètes respectives.

Remarque 22. Par définition, $V^+ \cap V^- = V \cap H(\theta)$. Ainsi $\mathbb{V}^+$ et $\mathbb{V}^-$ ne sont pas disjoints si et seulement si $H(\theta)$ est un hyperplan de la forme $\{x_i = k\}$, avec $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 23 (Mesure positive par réflexion)**.** Une mesure de probabilité

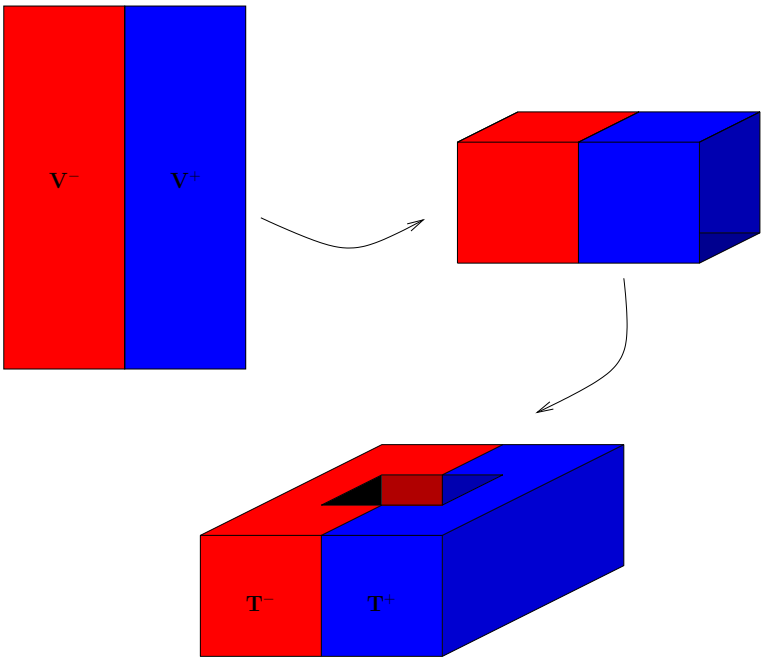


FIG. 3.1: Identification d'un pavé à un tore

$\mu_V \in \mathcal{P}(\Omega_V)$ sera dite *positive par réflexion* selon θ si et seulement si pour toutes fonctions F, G bornées et V^+-mesurable, on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mu_V}[F \cdot \theta(G)] = \mathbb{E}_{\mu_V}[G \cdot \theta(F)]\\&\mathbb{E}_{\mu_V}[F \cdot \theta(F)] \geq 0,\end{aligned}$$

avec $[\theta(F)](\sigma) = F(\theta \cdot \sigma)$ et $[\theta \cdot \sigma]_x = \sigma_{\theta(x)}$.

La définition ci-dessus se transpose au cas où V est identifié à un tore T de dimension d de façon naturelle, cf. Figure 3.1 pour $d = 2$. Dans ce cas, l'ensemble des points fixes de la réflexion θ est la réunion disjointe de deux tores (de dimension $d-1$) qui séparent T en deux composantes connexes cylindriques : T^-, T^+, correspondant évidemment aux deux boîtes V^-, V^+. Une mesure $\mu_T \in \mathcal{P}(\Omega_T)$ sera dite positive par réflexion selon θ si et seulement si pour toute fonction F bornée T^+-mesurable, on a

$$\mathbb{E}_{\mu_T}[F \cdot \theta(F)] \geq 0.$$

Considérons le pavé $\prod_{i=1}^d [0, N_i]$, où $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_r)$ est une famille d'entiers. On notera $T_{\mathbf{N}} = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d(\mathbf{N})$ le tore obtenu en identifiant les parois de ce pavé, où $\mathbb{Z}^d(\mathbf{N}) = \left\{(n_i N_i); \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d\right\}$, et $\mathbb{T}_{\mathbf{N}} = \mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}^d(\mathbf{N})$ sa trace discrète. On se donne enfin des nombres $p_i \in \mathbb{R}$.

Si N_i est divisible par $q_i \in \mathbb{N}$, on peut couvrir exactement le tore $T_{\mathbf{N}}$ en utilisant les translatés du pavé $P = \prod_{i=1}^{d}[p_i, p_i + q_i]$ par des vecteurs de $\mathbb{Z}^d(\mathbf{q}) = \left\{(n_i q_i); \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d\right\}$. On notera $\{P_j, j \in J\}$ ce pavage, avec $J = \mathbb{Z}^d(\mathbf{N})/\mathbb{Z}^d(\mathbf{q})$.

Notation 24. On notera $\Theta(P)$ le sous-groupe de Θ engendré par les réflexions selon les parois de P.

Remarque 25. Dans ces conditions, tout élément $P_j \subset T_{\mathbf{N}}$ du pavage obtenu peut s'écrire

$$P_j = \theta_j P, \text{ avec } \theta_j \in \Theta(P), \tag{3.1}$$

différents choix de θ_j étant toujours possibles.

Notation 26. Soit A un événement mesurable sur les spins appartenant à P. Si $\theta \in \Theta(P)$, on notera $\theta(A)$ l'événement $\{\theta \cdot \sigma \in A\} \subset \theta P$.

Remarque 27. Si N est divisible par $2q_i$ pour tout i, on remarque que l'événement $\theta_j(A) \subset P_j$ ne dépend pas de la réflexion θ_j choisie dans (3.1). L'événement *réfléchi* $A^J = \bigcap_{j \in J} \theta_j(A)$ est alors bien défini.

Avec ces notations, nous avons alors le théorème suivant, démontré dans les références classiques [FILS78, FILS80, Geo88] :

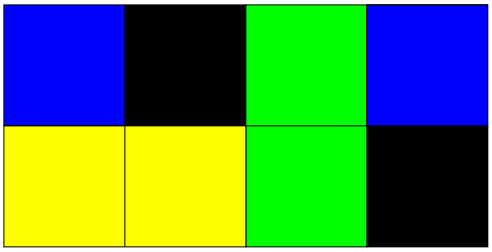
Théorème 28 (Inégalité de l'échiquier)**.** *Supposons que les N_i sont respectivement divisibles par $2q_i$, $1 \leq i \leq d$, et soit $\bigcup_{j \in J} P_j$ un pavage du tore $T_{\mathbf{N}}$ par des translatés d'un pavé $P = \prod_{i=1}^{d}[p_i, p_i + q_i]$. Soit une famille d'événements $A_j \subset P_j$, $j \in J$, et A_j^J les événements réfléchis correspondants. Si $\mu_{\mathbf{N}}$ est une mesure sur $\Omega_{\mathbb{T}_{\mathbf{N}}}$ positive par réflexion selon tout élément de $\Theta(P)$, alors pour tout $j \in J$*

$$\mu_{\mathbf{N}}(A_j) \leq \mu_{\mathbf{N}}\left(A_j^J\right)^{1/|J|},$$

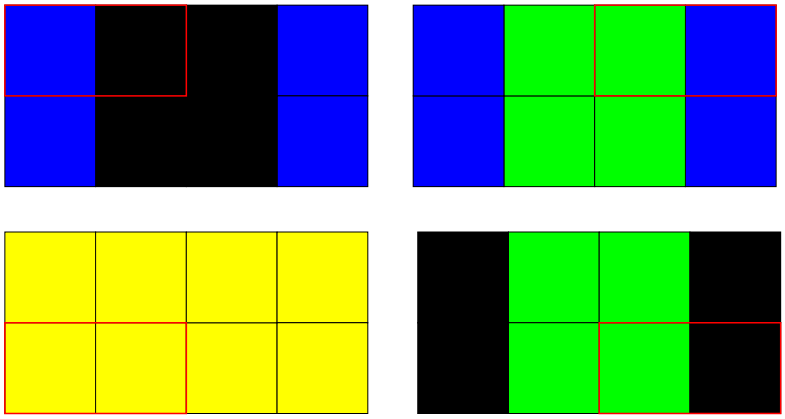
et

$$\mu_{\mathbf{N}}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \leq \left[\prod_{j \in J} \mu_{\mathbf{N}}\left(A_j^J\right)\right]^{1/|J|}.$$

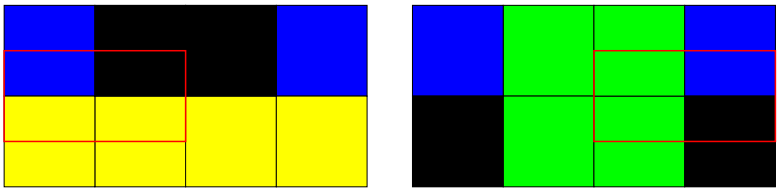
Exemple 29 (L'inégalité de l'échiquier en images, cf. Figure 3.2 p. 30). La Figure 3.2a représente un événement sur un tore 4×2. Selon le pavage choisi, cet événement a plusieurs représentations de la forme $\bigcap_{j \in J} A_j$. On peut par exemple paver le tore avec quatre rectangles horizontaux mesurant 2 unités de long et 1 de large. Les différents événements réfléchis issus de ce découpage sont donnés dans la Figure 3.2b. En décalant ce pavage du vecteur $(0, -\frac{1}{2})$ ou $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, les événements requis par l'inégalité de l'échiquier seront très différents, cf. Figure 3.2c et Figure 3.2d.



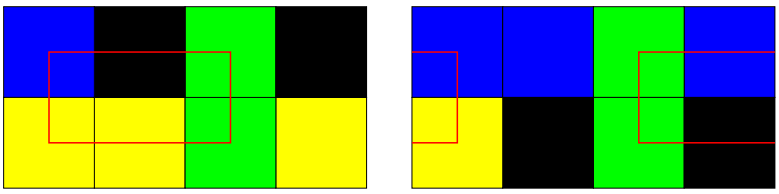
(a) Exemple d'événement à évaluer.



(b) Événements réfléchis invoqués par l'inégalité de l'échiquier, cf. Figure 3.2a et Exemple 29.



(c) Événements réfléchis pour un deuxième pavage.



(d) Événements réfléchis pour un troisième pavage.

FIG. 3.2: Application de l'inégalité de l'échiquier sur un tore 4×2, cf. Exemple 29. La coloration de chacune des 8 cases élémentaires du tore décrit l'événement à évaluer. Les lignes rouges indiquent la maille du pavage utilisé.

3.2 Conditions au bord périodiques

Jusqu'ici, nous avons construit des mesures de Gibbs soit en fixant des conditions au bord ω tangibles, fixées, soit en les négligeant (cas des conditions au bord dites libres). Une autre méthode évoquée plus haut consiste à utiliser des conditions au bord périodiques, que nous décrivons ici.

Nous considérons des boîtes finies, *i.e.* des volumes finis de forme parallélépipédique ; en identifiant deux à deux leurs parois opposées, nous pouvons les regarder comme des tores. Par construction, le volume considéré n'a donc pas de bord, et l'Hamiltonien naturel est simplement donné en sommant les interactions sur les spins inclus dans le tore obtenu. Une façon équivalente de voir les choses consiste à périodiser la restriction de σ à une boîte finie.

Plus précisément, pour tout pavé borné $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, on notera $p_\Lambda : \mathbb{Z}^d \to \Lambda$ la projection modulo Λ ; pour toute configuration $\sigma \in \Omega$, on définit alors σ^Λ par $\sigma^\Lambda(x) = \sigma(p_\Lambda(x))$. Enfin, on notera

$$H_\Lambda^{\mathrm{per}}(\sigma) = H_\Lambda^{\sigma^\Lambda}(\sigma) \quad , \tag{3.2}$$

puis

$$\mu_{\beta,\Lambda}^{\mathrm{per}}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{Z_{\beta,\Lambda}^{\mathrm{per}}} \cdot e^{-\beta H_\Lambda^\omega(\sigma)} & \text{si } \sigma \equiv \sigma^\Lambda, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\text{avec } \; Z_{\beta,\Lambda}^{\mathrm{per}} = \int_{\Omega_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda^{\mathrm{per}}(s^\Lambda)} d\lambda_\Lambda(s) \quad . \tag{3.4}$$

Par compacité, il existe des points d'accumulations de $(\mu_{\beta,\Lambda}^{\mathrm{per}})_\Lambda$ lorsque $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$. Si Φ est invariante par translation, ces mesures limites sont des phases :

Proposition 30. *Soit $\mu_{\beta,n}$ une mesure de Gibbs dans un pavé Λ_n avec conditions au bord périodiques pour une interaction invariante par translation et $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$. Alors tout point d'accumulation de la famille $(\mu_{\beta,n})_n$ pour la topologie faible est une mesure de Gibbs invariante par translation à la température β.*

Cette propriété d'invariance justifierait en soi l'intérêt que l'on peut porter aux mesures ainsi construites. De façon plus spectaculaire, nous verrons dans la section suivante que dans le cas des interactions au plus proche voisin, ces mesures sont positives par réflexion et satisfont donc l'inégalité de l'échiquier.

3.3 Mesures de Gibbs positives par réflexion

C'est ici que la construction de mesures de Gibbs utilisant des conditions au bord périodiques va révéler tout son intérêt. En effet, sous des hypothèses raisonnables sur notre interaction, les mesures en volume fini et avec conditions au bord périodiques seront positives par réflexion selon tous les hyperplans de coordonnées, et on pourra donc leur appliquer l'inégalité de l'échiquier.

Le critère sur l'interaction nous est donné par la proposition suivante démontrée par exemple dans [FILS78, Shl86] :

Proposition 31. *Si un Hamiltonien H dans un volume V peut s'écrire*

$$-H = B + \theta B + \sum_i C_i \theta C_i, \tag{3.5}$$

avec B et chacun des C_i V^+-mesurables, alors la mesure de Gibbs associée $\mu_{\beta,V} = \frac{e^{-\beta H}}{Z_{\beta,V}}$ est positive par réflexion selon θ. En particulier, si Φ est une interaction au plus proche voisin invariante par translation, alors $\mu^{\text{per}}_{\beta,V}$ est positive par réflexion selon tous les hyperplans de coordonnées entières. Dans le cas du modèle d'Ising, $\mu^{\text{per}}_{\beta,V}$ sera de plus positive par réflexion selon tous les hyperplans de coordonnées demi-entières.

Exemple 32 (Application concrète de l'inégalité de l'échiquier au modèle d'Ising). Considérons le modèle d'Ising 2D sur le tore $\mathbb{T}_N$, et estimons la probabilité de voir $\sigma_i \neq \sigma_j$ lorsque $\langle i, j\rangle$ est une arête du tore. Nous allons montrer très simplement que $\mathbb{P}(\sigma_i \neq \sigma_j) \leq 2e^{-4\beta}$ grâce à l'inégalité de l'échiquier.

Pour cela, notons A l'événement $\{\sigma; \sigma_i = +1, \sigma_j = -1\}$, mesurable sur le carré unitaire P centré sur le milieu de $\langle i, j\rangle$. Si N est pair, les hypothèses du théorème 28 sont satisfaites, et le pavage en N^2 carrés induit par P donne

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}\left(A^N\right)^{\frac{1}{N^2}},$$

où A^N est l'événement réfléchi décrit par la Figure 3.3. A^N est un événement très facile à contrôler puisqu'il est réduit à une unique configuration ! Dans cette configuration σ_A, chaque spin a exactement deux voisins de spin identique, et donc $H(\sigma_A) = 0$. On en déduit

$$\mathbb{P}\left(A^N\right) \leq Z^{-1},$$

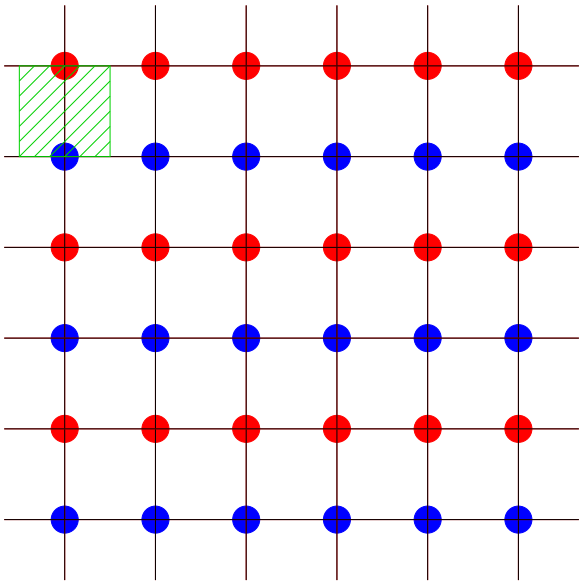


FIG. 3.3: Réflexion de l'événement $\{\sigma_i = +1, \sigma_j = -1\}$, cf. Exemple 32. Les spins positifs (négatifs) sont indiqués en rouge (en bleu).

où $Z = Z^{\text{per}}_{\beta,\mathbb{T}_N}$ est la fonction de partition sur le tore. La configuration constante $+$ nous donne une minoration triviale de Z :

$$Z \geq e^{-\beta H(+)} = e^{4\beta N^2},$$

dont on déduit

$$\mathbb{P}\left(\sigma_i = +1, \sigma_j = -1\right) := \mathbb{P}\left(A\right) \leq e^{-4\beta}.$$

Par symétrie, on a bien $\mathbb{P}\left(\sigma_i \neq \sigma_j\right) \leq 2e^{-4\beta}$.

Remarque 33. L'exemple 32 nous a montré la puissance de la méthode de la positivité par réflexion et donc des conditions au bord périodiques.

L'inconvénient majeur de ces conditions au bord, c'est que par essence elles ne font pas émerger d'interface. La clef de notre méthode pour aborder des problèmes d'interfaces consistera à imposer des conditions au bord *partiellement* périodiques, *i.e.* les parois horizontales des boîtes ne seront pas identifiées. Cette contrainte nous prive donc de l'inégalité de l'échiquier présentée ci-dessus... mais nous pourrons utiliser une version *restreinte* de cette inégalité.

Les boîtes considérées par la suite seront de la forme $\Lambda = \mathbb{T} \times I$, I étant un segment de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{T}$ la trace discrète d'un tore T. Les configurations $\sigma \in \Omega_\Lambda$ seront alors vues comme des configurations sur $\mathbb{T}$ à valeurs dans $\mathcal{S}^I$.

Dans ces conditions, **nous pourrons utiliser les réflexions selon les hyperplans verticaux, mais pas selon les hyperplans horizontaux.**

Les événements auxquels nous appliquerons l'inégalité de l'échiquier seront donc mesurables sur des *colonnes* de la forme $P \times I$, où $P \subset T$ est un pavé bien choisi. Dans la pratique, ces pavés seront de la forme $[0,1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ pour Ising, et $[0,1] \times [0,1]$ pour tous les autres modèles. La base des colonnes considérées contiendra donc 2 ou 4 spins, et on parlera respectivement de 2–colonnes (Ising) et 4–colonnes (Potts et modèles similaires) ; cette différence vient de la positivité par réflexion selon les hyperplans de coordonnées demi-entières du modèle d'Ising.

— 4 —

Interfaces rigides

Le but de ce chapitre est de définir la notion d'interfaces, et de rappeler quelques résultats fondamentaux sur la géométrie des surfaces dessinées sur le réseau dual de $\mathbb{Z}^d$. À la fin de ce chapitre, nous introduirons le phénomène de rigidité des interfaces et donnerons un critère d'apparition de ce phénomène.

4.1 Dualité en dimension $d \geq 3$

Dans cette section, nous introduisons un formalisme standard afin de pouvoir définir proprement les interfaces dans un cylindre $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$, où $\mathbb{T}$ est un tore discret de dimension $d-1$. Nous prenons des notations très proches de celles choisies par Grimmett et Gielis dans [GG02] pour $d = 3$, et reprises en dimension $d \geq 3$ dans le livre [Gri06].

Dans toute cette section, T désignera le tore obtenu en identifiant les faces opposées d'un pavé $\prod_{i=1}^{d-1}[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^{d-1}$, avec $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$.

On notera $\mathbb{T} = T \cap \mathbb{Z}^{d-1}$ la trace discrète de T et $\mathcal{L}' = (\mathbb{T} \times \mathbb{Z}, E(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}))$ le graphe induit par $\mathcal{L}$. P^- et P^+

Définition 34 (Réseau dual, plaquettes duales)**.** Nous noterons $(\mathcal{L}')^* = \mathcal{L}' + (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ le *réseau dual* sur lequel seront tracées les interfaces. Une *plaquette* p de ce réseau sera l'une des $2d$ faces d'un *cube élémentaire* $C(u) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d + u$ où $u \in \mathcal{L}'$. On notera $\mathbf{P}$ l'ensemble de toutes les plaquettes de $\mathcal{L}^*$.

À toute arête e de $\mathcal{L}$, nous associerons sa *plaquette duale* $e^* = p(e) \in \mathbf{P}$, dont le centre coïncide avec le milieu de e. Enfin, une plaquette $p = p(e) \in \mathbf{P}$ sera dite *horizontale* si e est une arête parallèle à *l'axe vertical* $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{Z}$, où $\mathbf{0}$ est l'origine du tore $\mathbb{T}$.

Pour toute collection de plaquettes $P \subset \mathbf{P}$ on notera $[P]$ la partie de $\mathbb{R}^d$

définie par

$$[P] = \left\{x \in \mathbb{R}^d;\ \exists p \in P,\ \text{t.q. } x \in p\right\}. \tag{4.1}$$

Définition 35 (s–connexité)**.** Deux plaquettes p_1, p_2 sont *s–connexes* si $p_1 \cap p_2$ est homéomorphe au cube $[0,1]^s$, on notera alors $P_1 \overset{s}{\sim} P_2$.

T étant muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^{d-1}$, on notera $\bar{A}$ l'adhérence de $A \subset T \times \mathbb{R}$. La réunion des composantes connexes bornées (non-bornées) de $\mathbb{R}^d \setminus A$ sera notée $\operatorname{Int} A$ ($\operatorname{Ext} A$) et appelée *intérieur* de A (*extérieur* de A).

Supposons maintenant A bornée. Les ensembles $\operatorname{Ext}^- A$ et $\operatorname{Ext}^+ A$ respectivement formés des points de $\operatorname{Ext} A$ reliés à $-\infty$ et $+\infty$ selon l'axe vertical de $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ sont alors connexes. Si $\operatorname{Ext}^+ A \cap \operatorname{Ext}^- A \neq \emptyset$ alors $\operatorname{Ext} A$ est connexe ; sinon il possède exactement deux composantes connexes : $\operatorname{Ext}^- A$ et $\operatorname{Ext}^+ A$.

Définition 36 (Surface séparante)**.** On dit qu'une collection de plaquettes P est une *surface séparante* si elle est $(d-2)$–connexe et si $\mathbb{R}^d \setminus [P]$ possède plusieurs composantes connexes. Si $T, U \subset \mathbb{R}^d \setminus [P]$ sont connexes et appartiennent des composantes connexes distinctes de $\mathbb{R}^d \setminus [P]$, on dira que *$P$ déconnecte T* de U.

Dans [GG02], les auteurs démontrent qu'on peut toujours envelopper une partie connexe finie de $\mathbb{Z}^d$ par une surface séparante ; nous allons maintenant adapter ce résultat au cas de parties finies de $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$, cf. Figure 4.1. La différence essentielle entre leur contexte et le nôtre réside dans le fait que l'extérieur d'une partie bornée de $T \times \mathbb{R}$ peut être déconnecté, cf. Figure 4.1 ; nous obtenons un analogue de la proposition 5 de [GG02] :

Théorème 37 ($d \geq 3$)**.** *Soit $G = (V, E)$ un sous-graphe connexe et fini de $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$. Alors il existe une collection de plaquettes Q telle que :*

1. $\operatorname{Int}[Q]$ *contient V,*
2. *toute plaquette de Q est duale d'une arête $e = \langle x, y\rangle$ avec $x \in V$, $y \notin V$,*
3. *si $\operatorname{Ext} G$ est connexe, Q est une surface séparante ; sinon Q est formée de deux surfaces séparantes,*
4. *si $w \notin V$ et s'il existe un chemin de $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ issu de w, évitant V, et partant à l'infini, alors $w \in \operatorname{Ext}[Q]$.*

La démonstration présentée ci-dessous est une adaptation directe de [GG02].

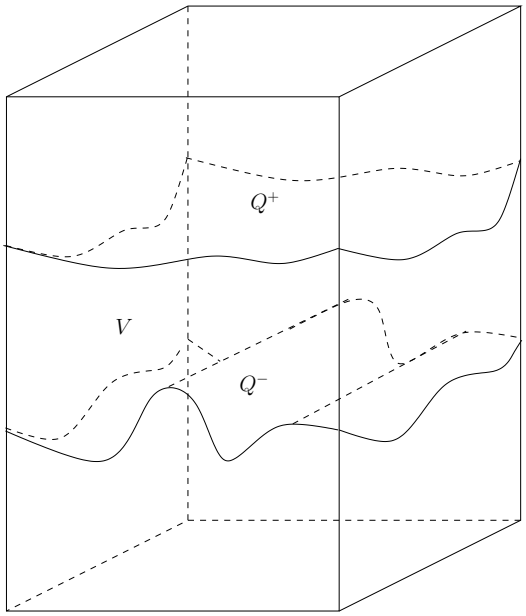


FIG. 4.1: Deux surfaces séparantes enveloppant une partie finie connexe $V \subset T \times \mathbb{R}$

Démonstration. P désignera l'ensemble des plaquettes duales des arêtes possédant exactement une extrémité dans V. Nous discuterons selon que $\operatorname{Ext} G$ est connexe ou non. En notant $\mathcal{U} \subset T \times \mathbb{R}$ la réunion des cubes $C(v)$, $v \in V$, on remarque que $\operatorname{Ext} G$ est connexe si et seulement si $\operatorname{Ext} \mathcal{U}$ est connexe.

Le cas $\operatorname{Ext} G$ connexe étant déjà traité dans [GG02], nous procédons directement à la démonstration dans le cas où $\operatorname{Ext} \mathcal{U}$ possède exactement deux composantes connexes $\operatorname{Ext}^- \mathcal{U}$ et $\operatorname{Ext}^+ \mathcal{U}$. Notant $Q_\pm$ l'ensemble des plaquettes de P dont l'un des sommets est dans $\operatorname{Ext}^\pm \mathcal{U}$, nous allons montrer que $Q = Q_- \cup Q_+$ satisfait les propriétés requises par le théorème.

1. Si $(x_0, x_1, \ldots)$ est un chemin partant de $x_0 \in V$ vers $+\infty$, tel que $\|x_i\| \to \infty$, le dernier point de ce chemin $x_i \in V$ est bien défini car V est borné, et $p(x_i, x_{i+1}) \in P$. On a donc $V \subset \operatorname{Int}[P] \subset \operatorname{Int}[Q]$.

2. $Q \subset P$ par définition.

3. Considérons un chemin issu de $x \in \operatorname{Int}[P]$ et partant à l'infini. On peut définir le dernier point de ce chemin qui appartient à $\operatorname{Int}[P]$, et voir que le reste du chemin est inclus dans la même composante connexe de $\operatorname{Ext}[P]$. $Q_\pm$ sépare donc $\operatorname{Int}[P]$ de $\operatorname{Ext}^\pm \mathcal{U}$ et $\operatorname{Int}[P] \subset \operatorname{Int}([Q_-] \cup [Q_+])$.

Un chemin non-borné partant de $\mathrm{Int}[Q_-]$ traverse nécessairement une plaquette $p = p(x, y) \in Q_-$, avec $x \in V \cap \mathrm{Int}[Q_-]$. Soit alors $p' = p(x', y') \in Q_+$, avec $x' \in V$. V étant connexe, il existe un chemin de x à x' évitant $[P]$ et *a fortiori* $[Q_-]$; en prolongeant ce chemin par $y' \in \mathrm{Ext}^+\mathcal{U}$, on voit que $x \in \mathrm{Ext}[Q_-]$, ce qui est absurde. $\mathrm{Int}[Q_-]$ est donc nécessairement vide.

Supposons maintenant que Q_- n'est pas connexe et notons $Q_1, \ldots, Q_m$ ses composantes. Soit $p'' = p(x'', y'') \in Q_- \setminus Q_i$ avec $x'' \in V$. Comme $y'' \in \mathrm{Ext}^-[Q_i]$, $p'' \notin Q_i$ assure que x'' appartient lui aussi à $\mathrm{Ext}^-[Q_i]$. Or il existe $p(x', y') \in Q_+$ avec $x' \in V$ et $y' \in \mathrm{Ext}^+\mathcal{U}$; en ajoutant x'' et y' aux extrémités d'un chemin de y'' à x' évitant $[P]$ on obtient donc $x'' \in \mathrm{Ext}^+[Q_i] \cap \mathrm{Ext}^-[Q_i]$.

Ainsi pour tout i, $\mathrm{Int}[Q_i] \subset \mathrm{Int}[Q_-] = \emptyset$ et $\mathrm{Ext}[Q_i]$ est connexe ; le complémentaire de $[Q_i]$ est donc toujours connexe. De plus, $[Q_i] \cap [Q_j]$ est mince[1] pour tout $i \neq j$, donc un argument topologique de [Kur68] signalé dans [GG02] montre que le complémentaire de $[Q_-] = \bigcup [Q_i]$ est connexe, ce qui est absurde.

Cette contradiction montre donc que Q_- est connexe. Par symétrie, Q_+ est elle aussi connexe et la troisième propriété est démontrée.

4. Cette propriété découle directement de $\mathrm{Ext}[P] \subset \mathrm{Ext}[Q]$. □

Enfin, nous aurons besoin de la proposition suivante, qui assure notamment que la frontière d'une phase est connexe.

Notation 38. Soit $\delta = \{p(e); e \in E\}$ une collection finie et $(d-2)$–connexe, avec $E \subset E(\mathbb{T} \times \mathbb{Z})$. On définit alors

$$\overline{\delta} = \delta \cup \left\{ p; \exists p' \in \delta, p \overset{d-2}{\sim} p' \right\}.$$

Si C est une composante connexe du graphe formé par les arêtes de $E(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}) \setminus E$, on notera $\Delta_{\mathrm{v}} C$ l'ensemble des sites $v \in C$ tels qu'il existe $w \in \Lambda_{N,L}$, $p(v, w) \in \overline{\delta}$, et $\Delta_{\mathrm{e}} C$ l'ensemble des arêtes e de C telles que $p(e) \in \overline{\delta} \setminus \delta$.

Proposition 39 (Graphe–frontière)**.** *Les deux extrémités d'une arête de $\Delta_{\mathrm{e}} C$ appartiennent toujours à $\Delta_{\mathrm{v}} C$. Le graphe $\Delta C = (\Delta_{\mathrm{v}} C, \Delta_{\mathrm{e}} C)$ ainsi défini est toujours connexe. On l'appellera parfois* graphe frontière.

La démonstration de cette proposition est une adaptation directe de celle donnée dans [GG02] dans le cas $\mathbb{Z}^d$.

[1] Les parties *minces* de $\mathbb{R}^3$ sont ses parties finies. Si $d \geq 4$, on dira que $X \subset \mathbb{R}^d$ est mince si $\lambda_{d-3}(X) < \infty$, λ_n étant la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle.

4.2 Description des interfaces

On se donne maintenant une boîte $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, identifiée à $\mathbb{T} \times \mathbb{I}$, où $\mathbb{T}$ est un tore discret et $\mathbb{I}$ un segment de $\mathbb{Z}$. La frontière de cette boîte possède donc deux composantes connexes, notées $\partial^- \Lambda$ de $\partial^+ \Lambda$ selon qu'elle sont reliées à $-\infty$ ou $+\infty$. On notera Π la projection verticale de Λ sur $\mathbb{T}$.

Définition 40 (Interfaces)**.** On dit qu'une collection I de plaquettes de Λ est une *interface* dans la boîte Λ si elle est $(d-2)$–connexe et si elle déconnecte $\partial^+ \Lambda$ de $\partial^- \Lambda$: *i.e.* il n'existe pas de chemin dans $\Lambda \setminus [I]$ reliant $\partial^+ \Lambda$ et $\partial^- \Lambda$.

Définition 41 (Plateaux, murs)**.** Une plaquette p d'une interface I est dite *régulière* si et seulement si elle est horizontale et vérifie $I \cap \Pi^{-1}\Pi(p) = p$. L'ensemble des plaquettes régulières de I est alors décomposé en *plateaux* et l'ensemble des plaquettes irrégulières en *murs*. Le *socle de rigidité* de I est un plateau de I d'aire maximale[2], noté $\mathcal{R}(I)$.

Définition 42 (Poids)**.** Si Q est une collection de plaquettes de Λ, $\Pi(Q)$ est une collection de plaquettes et d'arêtes du tore $\mathbb{T}$. On notera $w(Q) = |Q| - |\Pi(Q)|$ le *poids* de Q, où $|Q|$ désigne le nombre de plaquettes de Q et $|\Pi(Q)|$ le nombre de plaquettes de $\Pi(Q)$.

Remarque 43. Les projections de deux murs distincts d'une même interface n'ont jamais de plaquettes en commun, cf. Lemme (7.125) de [Gri06]. Le poids d'un plateau est donc toujours nul, et le poids d'une interface est la somme des poids de ses murs.

Exemple 44. Dans le cas du modèle d'Ising, les configurations de Ω_Λ seront prises négatives sur $\partial^- \Lambda$ et positives sur $\partial^+ \Lambda$. L'interface sera alors constituée de plaquettes duales séparant des sites de signe opposé ; l'existence d'une telle interface sera démontrée en utilisant le Théorème 37.

Pour chacun de nos modèles, nous utiliserons des mesures de probabilité μ_Λ sur Ω_Λ prescrites par le formalisme de Gibbs correspondant à des conditions au bord spécifiques, qui forceront la coexistence de deux phases dans Λ.

Pour toute configuration $\sigma \in \Omega_\Lambda$, il existera une interface $I(\sigma)$ constituée de plaquettes séparant ces deux phases. σ pourra présenter plusieurs interfaces, auquel cas nous noterons $\mathcal{I}(\sigma)$ la réunion de ses interfaces.

[2] S'il en existe plusieurs, on choisit par exemple celui qui possède le sommet de plus petites coordonnées lexicographiques.

4.3 Rigidité et invariance horizontale

Étant donnée une suite croissante de boîtes Λ_n, on dira que les interfaces $I(\sigma)$ sont typiquement *rigides* si

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\Lambda_n}\left(\frac{|\mathcal{R}(I(\sigma))|}{|\Pi(\Lambda_n)|} \geq c\right) = 1, \tag{4.2}$$

c étant une constante aussi proche de 1 que l'on veut lorsque l'on ajuste des paramètres du modèle[3]. Dans le cas du modèle d'Ising, on aura par exemple $c(\beta) \to 1$ lorsque $\beta \to \infty$.

Nous allons donner ici une condition suffisante de rigidité des interfaces. Cette condition suffisante est l'une des clefs de l'article [SVar], où elle est établie pour la première fois à notre connaissance.

Définition 45 (Interface dénouée)**.** Une interface sera dite *dénouée* si aucun de ses murs ne s'enroule autour du tore $\mathbb{T}$ (*i.e.* si la projection d'un mur ne contient jamais de lacet non-trivial de ce tore).

Remarque 46. L'extérieur de la réunion des murs d'une interface dénouée est un plateau. Nous verrons que dans un régime thermodynamique raisonnable, ce plateau extérieur sera le socle de rigidité de l'interface et qu'il sera typiquement très étendu.

Théorème 47 (Critère de rigidité)**.** *Considérons une suite croissante de boîtes $\Lambda_n := [0, N_n]^2 \times [0, L_n + 1] = \mathbb{T}_n \times [0, L_n + 1]$, où $N_n, L_n \to \infty$. On suppose l'existence de $a < 1$ tel que les inégalités de Peierls suivantes soient uniformément satisfaites sur les boîtes Λ_n :*

- *pour toute réunion d'interfaces $\mathcal{I} \subset \{$interfaces de $\Lambda_n\}$,*

$$\mu_{\Lambda_n}(\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}) \leq a^{w(\mathcal{I})},$$

- *pour toute collection de murs $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \subset \{$murs d'interfaces de $\Lambda_n\}$,*

$$\mu_{\Lambda_n}\left(\mathcal{I}(\sigma) \supset \bigcup_{i-1}^{r} \gamma_i\right) \leq a^{\sum w(\gamma_i)}. \tag{4.3}$$

Il existe $a_0 = a_0(d) < 1$ tel que si $a < a_0$, alors il existe $b = b(a) > 1$ tel que le long de Λ_n,

1. *$\mathcal{I}(\sigma)$ est typiquement connexe si $L_n \leq b^{N_n^2}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\Lambda_n}(\mathcal{I}(\sigma) \text{ est connexe }) = 1$$

[3]Température, cardinal ou dimension de l'espace de spins, *etc.*

2. *chaque interface de $\mathcal{I}(\sigma)$ est typiquement dénouée si $L_n \leq b^{N_n}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\Lambda_n} \left(\textit{toutes les interfaces de } \mathcal{I}(\sigma) \textit{ sont dénouées}\right) = 1$$

3. *$b(a) \to \infty$ lorsque $a \to 0$.*

Si de plus les μ_n sont invariantes par translation horizontale, alors il existe $c = c(a) > 0$ tel que

4. *si $L_n \leq b^{N_n^{2/3}}$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\Lambda_n} \left(\frac{|\mathcal{R}(\mathcal{I}(\sigma))|}{|\Pi(\Lambda_n)|} \geq c \right) = 1, \tag{4.4}$$

5. *$c(a) \to 1$ lorsque $a \to 0$.*

La démonstration qui suit reprend les lignes de l'article [SVar].

Démonstration. Soit $\mathbf{0} \in \mathbb{T}_N$ l'origine du tore. On note

$$h(I) = \min\{z : (\mathbf{0}, z) \in I\}$$

la hauteur de l'interface I à l'origine.

Supposons $\mathcal{I}$ non-connexe. Alors elle possède au moins deux composantes, qui sont par définition des interfaces. Soit I_1, I_2 les deux premières d'entre elles. On a alors

$$\begin{aligned} &\mu_{N,L}\left(\mathcal{I} \text{ est non-connexe}\right) \\ &= \sum_{h_1<h_2} \mu_{N,L}\left(I_1, I_2 : h(I_1) = h_1, h(I_2) = h_2\right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Peierls on a

$$\begin{aligned} &\mu_{N,L}\left(I_1, I_2 : h(I_1) = h_1, h(I_2) = h_2\right) \\ &\leq a^{|I_1|+|I_2|-N^2}. \end{aligned}$$

Puisque $|I_i| \geq N^2$, et que le nombre d'interfaces I telles que $|I| = m$ et $h(I) = l$ est au plus C^m, avec C constante, on a

$$\begin{aligned} &\mu_{N,L}\left(\mathcal{I} \text{ est non-connexe}\right) \\ &\leq L_N^2 \sum_{m\geq 2N^2} \left(Ca^{\frac{1}{2}}\right)^m = const \cdot \left(L\left(Ca^{\frac{1}{2}}\right)^{N^2}\right)^2, \end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque $N \to \infty$, pourvu que $L_N < b^{N^2}$ avec $b < \left(Ca^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

Par la suite, nous ne traiterons que les collections $\mathcal{I}$ connexes. Nous allons maintenant montrer que typiquement, les murs de l'interface ne s'enroulent pas autour du tore. Un tel mur γ contient en effet au moins N plaquettes et donc

$$\mu_{N,L_N}\left(\text{ un mur s'enroule }\right) \leq 2N^2 L_N \sum_{l \geq N} C^l a^{l/2},$$

qui tend vers zéro lorsque $N \to \infty$, pourvu que $L_N < b^N$ avec $b < \left(Ca^{1/2}\right)^{-1}$.

Soit $M \in \mathbb{T}_N$ un point du tore et γ un mur d'une interface de $\Lambda_{N,L}$. Nous noterons $\tilde{\gamma}$ sa projection $\Pi(\gamma)$, et dirons que γ entoure M si et seulement si $M \in \tilde{\gamma} \cup \mathrm{Int}(\tilde{\gamma})$. La propriété de rigidité de l'interface souhaitée découlera de la

Proposition 48.

$$\mu_{N,L}\left(M \textit{ est entouré par un mur}\right) \leq \delta(a), \tag{4.5}$$

où $\delta(a) \to 0$ *lorsque* $a \to 0$.

□

Démonstration de la Proposition 48. Grâce à l'inégalité de Peierls nous savons que la probabilité de présence d'un mur γ satisfait

$$\mu_{N,L}(\gamma) \leq a^{w(\gamma)}.$$

Nous devons bien sûr majorer la probabilité de l'événement plus grand $\gamma^* = \cup_\tau \gamma^\tau$, où γ^τ est le mur obtenu par translation verticale de γ par le vecteur $(0,0,\tau)$. Puisqu'il y a au plus L valeurs de τ pour lesquelles $\gamma^\tau \subset \Lambda_{N,L}$, la borne dont nous disposons pour l'instant est

$$\mu_{N,L}(\gamma^*) \leq La^{w(\gamma)}.$$

Si L est arbitrairement grand, cette dernière borne n'est pas suffisante pour atteindre notre objectif. Toutefois, si Γ est une collection de murs $(\gamma_1, ..., \gamma_k)$ de notre interface, on a encore

$$\mu_{N,L}(\Gamma) \leq a^{w(\Gamma)},$$

avec $w(\Gamma) = \sum w(\gamma_i)$. On a donc

$$\mu_{N,L}\left(\Gamma \text{ est une collection de murs extérieurs}\right) \leq La^{w(\Gamma)},$$

car les murs extérieurs de l'interface sont toujours placés à la même hauteur.

Bien que cette borne nous permette d'éliminer les murs de grande taille, elle est inutile pour traiter les collections de murs Γ de longueur totale bornée l, lorsque L est grand. Remarquons cependant qu'une telle collection Γ ne peut entourer qu'une surface d'aire totale au plus l^2. Puisque notre mesure $\mu_{N,L}$ est invariante par translation, la probabilité de voir un tel Γ à un endroit donné peut être majorée par $\frac{l^2}{N^2}$, qui sera petit lorsque N sera grand. Pour gagner sur les deux tableaux à la fois, il nous faudrait donc prendre N suffisamment grand avec L. Dans ce qui suit, nous rendons rigoureux ces arguments heuristiques, et montrons que la condition $N^{2/3} \approx \log L$ est un compromis acceptable qui permet d'obtenir un contrôle suffisant de toutes les collections Γ possibles.

Nous introduisons maintenant un modèle simplifié qui présente les caractéristiques essentielles de notre modèle initial. Soit $\mathbb{T}_R$ un tore discret $R \times R$, et soit $\xi_t = 0, 1$ un champ aléatoire indicé par $t \in \mathbb{T}_R$. Soit μ la distribution du champ ξ.

Lemme 49. *Supposons que*

- *μ est invariante par translation,*
- *il existe une valeur K telle que pour tout $k \geq K$*

$$\mu\left(\xi_{t_1} = \xi_{t_2} = ... = \xi_{t_k} = 1\right) \leq \alpha^k, \tag{4.6}$$

avec α suffisamment petit. Alors il existe une fonction $R(\alpha)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{T}_R$

$$\mu\left(\xi_t = 1\right) \leq 3\alpha,$$

pourvu que $R \geq \sqrt{\frac{K}{3\alpha}} + R(\alpha)$.

Reléguant la démonstration de ce lemme à la fin de la section, nous achevons maintenant la démonstration de la Proposition 48. Pour cela, nous prenons deux entiers très grands R et Q, qui seront choisis plus tard, et considérons la boîte $\Lambda_{N,L}$ avec $N = QR$. Soit $\mathbf{0}$ l'origine du tore, $\mathbf{0} \in \mathbb{T}_N$. La probabilité pour que $\mathbf{0}$ soit entouré par un mur de poids $w \geq Q$ satisfait

$$\mu_{N,L}\left(\mathbf{0} \text{ est } Q\text{-entourée}\right) \leq La^Q \tag{4.7}$$

(à des constantes sans importance près). Ainsi, dès que $Q \gg \ln L$, cette probabilité est petite. Il ne nous reste donc plus qu'à traiter l'événement que $\mathbf{0}$ soit entouré par un mur de poids $w < Q$. Pour majorer cette probabilité, nous utiliserons le Lemme 49. Considérons le sous-réseau torique $\mathbb{T}_R \subset \mathbb{T}_N$. Pour tout point $t \in \mathbb{T}_R$ nous définissons la variable aléatoire ξ_t par

$$\xi_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ est à l'intérieur d'un mur } \tilde{\gamma} \text{ avec } w(\gamma) < Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À l'évidence, le champ $\{\xi_t, t \in \mathbb{T}_R\}$ est invariant par translation. Majorons la probabilité de l'événement

$$\xi^T = \{\xi_t = 1 \text{ pour tout } t \in T \subset \mathbb{T}_R\}.$$

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, notre inégalité de Peierls donne

$$\mu_{N,L}\left(\xi^T\right) \leq L \sum_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{|T|}} a^{w(\gamma_1)+\ldots+w\left(\gamma_{|T|}\right)},$$

où la somme parcourt les collections $\left\{\gamma_1, ..., \gamma_{|T|}\right\}$ de murs extérieurs dont la base est fixée à la même hauteur – disons, $L/2$ – et tels que chaque γ_i entoure précisément un point de T. Puisqu'on a toujours $w(\gamma) \geq 4$,

$$\mu_{N,L}\left(\xi^T\right) \leq La^{4|T|}.$$

Ainsi, la condition (4.6) est satisfaite avec $\alpha = a^2$ et $K = \frac{1}{2}\ln L \ln \frac{1}{a}$. En conséquence, pour

$$R \geq \frac{\sqrt{\ln L \ln \frac{1}{a}}}{a} \tag{4.8}$$

on a $\mu_{N,L}(\xi_{\mathbf{0}} = 1) \leq 3a^2$. D'autre part, notre borne La^Q issue de (4.7) satisfait $La^Q < a^2$ dès que

$$(Q-2)\ln\frac{1}{a} > \ln L. \tag{4.9}$$

En prenant $Q = R^2$, les deux inégalités (4.8) et (4.9) sont satisfaites pourvu que $\ln L < N^{2/3}$. Sous cette condition nous pouvons donc conclure que (4.5) est satisfaite avec $\delta(a) = 4a^2$. □

La démonstration du Théorème 47 sera donc complète lorsque nous aurons démontré le Lemme 49.

Démonstration du Lemme 49. Démontrons d'abord que pour tout k

$$\mu\left(\xi_0 = 1, \sum_{t\in\mathbb{T}_R} \xi_t = k\right) = \frac{k}{R^2}\mu\left(\sum_{t\in\mathbb{T}_R} \xi_t = k\right). \tag{4.10}$$

Pour s'en convaincre, notons $X \subset \mathbb{T}_R$ une partie du tore avec $|X| = k$, et soit $\tilde{X}$ l'événement que le support $\mathrm{Supp}(\xi)$ coïncide avec l'un des $X + t$ de X, $t \in \mathbb{T}_R$. Remarquons que pour tout tel X

$$\mu\left(\xi_0 = 1 \,\middle|\, \tilde{X}\right) = \frac{k}{R^2}.$$

C'est immédiat si X n'est pas périodique, *i.e.* si tous les translatés $X+t$ sont des ensembles distincts. Dans le cas où X est périodique, nous devons considérer le sous-réseau $\mathcal{L}_X \subset \mathbb{T}_R$ de ses périodes et sa maille fondamentale $\mathcal{P}_X \subset \mathbb{T}_R$. Par le même raisonnement $\mu\left(\xi_0 = 1 \,\middle|\, \tilde{X}\right) = \frac{|X \cap \mathcal{P}_X|}{|\mathcal{P}_X|}$, tandis qu'à l' évidence $\frac{|X \cap \mathcal{P}_X|}{|\mathcal{P}_X|} = \frac{k}{R^2}$. Finalement, $\mu\left(\xi_0 = 1, \sum_{t \in \mathbb{T}_R} \xi_t = k\right) = \sum_{\tilde{X}} \mu\left(\xi_0 = 1, \tilde{X}\right) = \frac{k}{R^2} \sum_{\tilde{X}} \mu\left(\tilde{X}\right) = \frac{k}{R^2} \mu\left(\sum_{t \in \mathbb{T}_R} \xi_t = k\right)$.

Démontrons maintenant notre lemme. De (4.10) nous déduisons que pour tout $M \geq 1$,

$$\mu\left(\xi_0 = 1, 1 \leq \sum_{t \in \mathbb{T}_R} \xi_t \leq M\right) = \sum_{k=1}^{M} \frac{k}{R^2} \mu\left(\sum_{t \in \mathbb{T}_R} \xi_t = k\right) \leq \frac{M}{R^2}. \tag{4.11}$$

Dans la région $\sum_{t \in \mathbb{T}_R} \xi_t \geq M$ nous utiliserons « l'inégalité de Peierls » (4.6), en choisissant $M = bR^2$ où $b \geq 2\alpha$. Nous avons alors

$$\mu\left(\xi_0 = 1, \sum_{t \in \mathbb{T}_R} \xi_t \geq M\right) \leq \binom{R^2}{M} \alpha^M. \tag{4.12}$$

Dès que R satisfait $bR^2 > K$, nous pouvons utiliser à la fois (4.11) et (4.12) pour conclure que

$$\mu\left(\xi_0 = 1\right) \leq b + \binom{R^2}{bR^2} \alpha^{bR^2}.$$

Enfin, en introduisant $c = 1 - b$, la formule de Stirling donne

$$\begin{aligned}\binom{R^2}{bR^2} \alpha^{bR^2} &\sim \frac{R^{2R^2}}{\sqrt{2\pi bcR^2}\,(bR^2)^{bR^2}\,(cR^2)^{cR^2}} \alpha^{bR^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi bcR^2}} \left(\frac{\alpha^b}{b^b c^c}\right)^{R^2}.\end{aligned}$$

Une vérification immédiate montre que pour $b = 3\alpha$, le quotient $\frac{\alpha^b}{b^b c^c} < 1$, et donc $\binom{R^2}{bR^2} \alpha^{bR^2} \to 0$ lorsque $R \to \infty$, ce qui achève la démonstration . $\square$

Stratégie pour aborder le problème de rigidité des interfaces

Les parties suivantes auront toutes la même structure globale. Nous utiliserons d'abord le Théorème 37 pour associer une interface à chaque configuration du modèle de spins considéré. Par construction, les mesures de Gibbs en volume fini seront invariantes par translation horizontale (cf. Proposition 30) ; la rigidité se déduira donc des inégalités de Peierls requises par le Théorème 47, établies en appliquant l'inégalité de l'échiquier (Théorème 28) à des événements correspondant aux murs de l'interface.

Chacun de nos modèles d'étude comportera un petit paramètre $\varepsilon > 0$. Qu'il s'agisse de $e^{-\beta}$ pour Ising à très basse température, ou $1/q$ pour Potts au point critique, ce paramètre nous permettra d'avoir une constante $a(\varepsilon)$ aussi petite que l'on veut dans les inégalités de Peierls, et donc un taux de rigidité c très proche de 1.

Remarque 50. À la différence du modèle d'Ising, la transition de phase subie par nos trois autres modèles d'étude sera caractérisée par un événement localisé sur les arêtes. Les interfaces naturelles seront des réunions de cubes élémentaires *frustrés* : des cubes typiques d'aucune phase puisqu'ils contiennent des arêtes de phases différentes.

Nous adapterons nos définitions à ces interfaces tridimensionnelles de la façon suivante. Un cube d'une telle interface sera dit régulier s'il est le seul de l'interface dans sa colonne, et les plateaux seront les ensembles connexes maximaux de cubes réguliers. Les murs seront les ensembles connexes maximaux de cubes irréguliers, et leur poids sera défini de façon naturelle pour que le Théorème 47 soit encore valide selon cette nouvelle terminologie.

Pour notre dernier modèle, nous restreindrons notre étude à la surface externe de cette interface tridimensionnelle. Les interfaces ne seront donc pas tracées sur le dual de $\mathbb{Z}^d$, mais sur $\mathbb{Z}^d$ lui-même ; à cette translation près, on gardera la terminologie utilisée pour Ising.

Deuxième partie

Modèle d'Ising

Résumé

Le modèle d'Ising est sans doute l'un des modèles de mécanique statistique les plus étudiés à ce jour, et une abondante littérature lui est consacrée. La simplicité de sa définition contraste avec la difficulté de résolution de certaines questions pourtant très naturelles. C'est le premier modèle pour lequel une démonstration rigoureuse du phénomène de transition de phases fut établie.

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats fondamentaux concernant cette transition de phases, ainsi que la construction d'interfaces en dimension 3. L'objet des derniers chapitres de cette partie est d'obtenir les interfaces de Dobrushin pour Ising 3D, selon une nouvelle méthode basée sur la positivité par réflexion.

Ces résultats ne sont donc pas nouveaux, mais les démonstrations sont élémentaires et permettront idéalement au lecteur de se familiariser avec la méthode de positivité par réflexion restreinte. Nous verrons dans les parties suivantes une adaptation de cette méthode pour étudier des modèles plus complexes.

— 5 —

Transition de phases du modèle d'Ising

Ce chapitre a pour but d'introduire le modèle d'Ising et de présenter la transition de phases qu'il subit à basse température lorsque $d \geq 2$.

5.1 Définition du modèle

Le modèle d'Ising est un modèle sur le réseau $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, où les spins peuvent prendre deux valeurs $+1$ et -1, parfois notées aussi $+$ et $-$. Une *configuration globale* d'Ising est une application σ définie sur $\mathbb{Z}^d$ à valeurs dans $\mathcal{S} = \{+1, -1\}$. L'ensemble de ces configurations sera noté $\Omega = \mathcal{S}^{\mathbb{Z}^d}$.

Conformément au formalisme introduit dans le chapitre 2, nous définissons les mesures de Gibbs relatives à l'interaction au plus proche voisin $\Phi_{x,y} = -\sigma_x \sigma_y$. On rappelle que si η est une configuration globale fixée, l'Hamiltonien avec conditions aux bords η est défini par

$$H_\Lambda^\eta(\sigma_\Lambda) = -\sum_{(i,j)\in E_\Lambda} \sigma_i \cdot \sigma_j - \sum_{\substack{i\in\Lambda, j\notin\Lambda \\ (i,j)\in\mathbb{E}^d}} \sigma_i \cdot \eta_j \quad , \tag{5.1}$$

où $\mathbb{E}^d$ est l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^d$. Les mesures de Gibbs en volume fini Λ à température β et avec conditions aux bords η sont données par

$$\mu_{\beta,\Lambda}^\eta(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{Z_{\beta,\Lambda}^\eta} \cdot \exp\left\{-\beta H_\Lambda^\eta(\sigma_\Lambda)\right\} \quad . \tag{5.2}$$

L'ensemble des mesures de Gibbs à la température β est noté $\mathcal{G}(\beta)$, et la première partie nous a montré qu'il était toujours non-vide.

5.2 Magnétisation spontanée

Parmi les éléments de $\mathcal{G}(\beta)$, il en est de plus naturels que d'autres : ceux qui sont construits comme limites thermodynamiques pour des conditions

au bord constantes. Prenons par exemple la condition au bord $+(-)$; alors pour toute suite de volumes finis $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$, la suite des mesures de Gibbs μ^+_{β,Λ_n} (μ^-_{β,Λ_n}) converge faiblement vers une mesure μ^+_β (μ^-_β), indépendante de la suite choisie Λ_n choisie.

Le choix de conditions au bord particulières n'est pas anodin, puisque les deux mesures μ^+_β, μ^-_β peuvent être identiques ou non. Ce fait permet d'ailleurs à lui seul de caractériser les transitions de phases du modèle d'Ising. Les inégalités de corrélation dues à Fortuin, Kastelyn et Ginibre [FKG71] permettent en effet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 51. *À la température β, le modèle d'Ising subit une transition de phase si et seulement si $\mu^+_\beta \neq \mu^-_\beta$.*

Si $\mu^+_\beta(\sigma_0 = +) > \frac{1}{2}$, alors la magnétisation moyenne $m^+_\beta = \mu^+_\beta(\sigma_0)$ est strictement positive. Par symétrie, il vient immédiatement que $\mu^-_\beta(\sigma_0) < 0$, d'où l'on déduit que $\mu^+_\beta \neq \mu^-_\beta$. On parle alors de *brisure de symétrie* ou spécialement ici de *magnétisation spontanée*, car aucun champ magnétique n'impose une orientation particulière aux spins. Ce phénomène est en fait caractéristique des transitions de phases dans le modèle d'Ising :

Proposition 52. *À la température β, le modèle d'Ising subit une transition de phase si et seulement si $m^+_\beta > 0$.*

Comme le modèle est symétrique ($+ \leftrightarrow -$), il est tentant de croire que les états d'équilibre sont invariants par cette symétrie, et que la magnétisation m^+_β est toujours nulle, ou, de façon équivalente, de croire que le spin à l'origine est positif ou négatif avec probabilité 1/2.

En dimension $d = 1$, les boîtes sont des segments dont le bord est constitué d'exactement deux sites, quelque soit la taille de la boîte considérée. De façon heuristique, les conditions au bord sont donc négligeables pour l'énergie du système, et ne peuvent influer sur le spin à l'origine. Toutefois, dès que $d \geq 2$, cet argument heuristique est pris en défaut : la symétrie est brisée. La raison fondamentale de cette rupture de symétrie est la suivante. Lorsque $d \geq 2$, le cardinal du bord des boîtes diverge dans la limite thermodynamique ; pour des températures suffisamment basses, cet impact assure une magnétisation spontanée.

Le théorème suivant récapitule les résultats connus sur le diagramme de phases du modèle d'Ising en champ nul. Il est dû aux travaux de Dobrushin [Dob65, Dob68], qui sont une extension des idées de Peierls [Pei36].

Théorème 53 (Dobrushin)**.** *Supposons $d \geq 2$. Alors il existe $\beta_c \in]0;\infty[$ tel que*

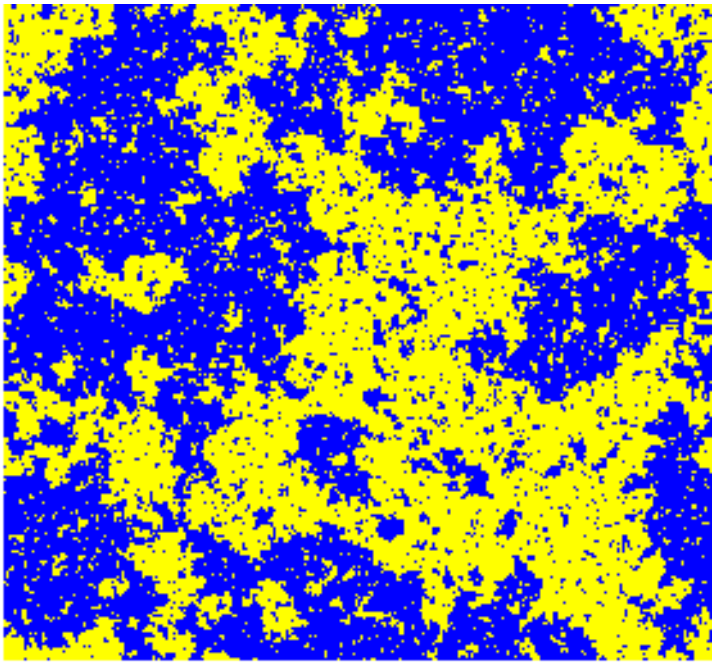


FIG. 5.1: Simulation du modèle d'Ising 2D à la température critique

- *pour $\beta < \beta_c$, il n'y a pas transition de phase,*
- *pour $\beta > \beta_c$, il y a transition de phase accompagnée de magnétisation spontanée.*

Remarque 54. L'existence d'une transition de phase au *point critique* $\beta = \beta_c$ est toujours ouverte en dimension $d = 3$. Elle a été résolue par la négative pour $d = 2$ par Abraham et Martin-Löf [AML73] et pour $d \geq 4$ par Aizenman et Fernandez [AF86]. Voir la Figure 5.1 pour une simulation du modèle d'Ising 2D au point critique.

Le caractère fondamental de μ^+, μ^- ne s'arrête bien sûr pas à la seule proposition 51. Elles sont évidemment invariantes par translation, et Aizenman [Aiz80] et Higuchi [Hig81] ont montré que ce sont en fait les seuls états purs du modèle d'Ising 2D :

Théorème 55 (Aizenman, Higuchi, $d = 2$)**.** *À toute température, et en dimension $d = 2$, toute mesure de Gibbs est une combinaison convexe de μ_β^+ et μ_β^-. En particulier, les mesures de Gibbs sont toutes invariantes par translation.*

En dimension supérieure, nous verrons que les choses deviennent plus délicates. On peut toutefois obtenir de très jolis résultats, comme ce résultat

récent de Bodineau[Bod06] qui démontre que μ_β^+ et μ_β^- sont les seules phases pures du modèle d'Ising, lorsque $d \geq 3$.

Théorème 56 (Bodineau, $d \geq 3$)**.** *Soit $\mu \in \mathcal{G}_I(\beta)$. Alors μ est une combinaison convexe de μ_β^+ et μ_β^-.*

5.3 États de Dobrushin ; transition de rugosité

L'interaction du modèle d'Ising étant invariante par translation, il serait tentant de croire que tous les états d'équilibre sont eux aussi invariants par translation, et cette idée est confortée par les théorèmes 55 et 56. La réalité est en fait bien plus riche, comme le montre le célèbre résultat de Dobrushin sur la coexistence de phases dans le modèle d'Ising 3D.

L'idée de Dobrushin est de construire, en dimension $d = 3$, une mesure de Gibbs qui assure l'existence d'une surface de séparation bien nette entre les phases plus et moins du modèle d'Ising : l'interface. Sous cette mesure, l'interface typique ressemblera à une légère perturbation du plan $\{z = 0\}$ de $\mathbb{Z}^3$; en particulier, la mesure obtenue ne sera pas invariante par translation verticale. Plus généralement, Dobrushin obtient dans [Dob72b] le résultat suivant ;

Théorème 57 (Dobrushin, $d \geq 3$)**.** *Pour β suffisamment grand, $\beta > \beta_0(d)$, il existe une famille de mesures de Gibbs $\left(\mu_\beta^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ mutuellement singulières et non invariantes par translation verticale. En effet, pour tout $i \in \{z \geq k+1\}$ on a $\mu_\beta^k(\sigma_i) > 0$ alors que pour tout $j \in \{z \leq k\}$, $\mu_\beta^k(\sigma_j) < 0$.*

La démonstration originale de ce théorème repose sur une utilisation intensive de la technique d'expansion en amas : d'abord pour contrôler la projection verticale des irrégularités de l'interface, puis pour contrôler la surface totale de ces irrégularités.

Peu après la publication de ce résultat, van Beijeren fournit une démonstration alternative [vB75] très élégante de l'existence de ces interfaces rigides. Celle-ci repose exclusivement sur des inégalités de corrélation satisfaites par le modèle d'Ising. Plus significatif encore, le résultat de van Beijeren est valable pour tout $d \geq 3$ et tout $\beta > \beta_c(d-1)$.

La question de savoir ce qui se produit dans l'intervalle de températures compris entre $\beta_c(d)$ et $\beta_c(d-1)$ est encore ouverte. Pour $d \geq 4$, il est conjecturé que ces mesures non-invariantes survivent tant que $\beta > \beta_c(d)$. En revanche pour $d = 3$, on s'attend à une transition de rugosité (*roughening transition*). Il existerait une température de transition $\beta_R \in]\beta_c(3)\,;\beta_c(2)[$

telle que pour $\beta > \beta_R$ les états de Dobrushin existent, alors que pour $\beta < \beta_R$ ils disparaissent. Dans cette dernière région, l'importance des fluctuations rendrait les interfaces *rugueuses*.

Le but du chapitre qui suit est de montrer que ces interfaces $+/-$ sont rigides en utilisant la positivité par réflexion, pour alléger techniquement la construction des états de Dobrushin. Le prix à payer pour cette simplification est une restriction de l'intervalle de température considéré ; en particulier, nous sommes loin du seuil $\beta_c(d-1)$ obtenu par van Beijeren.

Remarque 58. Notons également que nos conditions périodiques ne permettent pas de *localiser* l'interface. Les conditions au bord utilisées par Dobrushin pinçaient en effet l'interface sur le plan médian de la boîte.

Ici, la hauteur typique des interfaces typiques sera bien définie, mais aléatoire. L'analyse de la distribution de cette hauteur est l'objet d'un travail en cours, cf. [Viga]. Ceci devrait nous permettre de construire les mesures non-invariantes par translation du théorème 57.

— 6 —

Rigidité de l'interface +/−

Ce chapitre est entièrement consacré à démontrer la rigidité de l'interface dans le modèle d'Ising à basse température et en dimension 3, les résultats étant valides en toute dimension au moins égale à 3, au prix de complications techniques.

6.1 Introduction

Nous considérons le modèle d'Ising sur $\mathbb{Z}^3$ sans champ extérieur ($h \equiv 0$), avec conditions aux bords périodiques sur les parois verticales de la boîte et mixtes sur ses parois horizontales.

Étant donnés deux entiers N et L, on définit le pavé $A_{N,L} \subset \mathbb{R}^3$ et la boîte discrète $\Lambda_{N,L} \subset \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} A_{N,L} &= [0,N] \times [0,N] \times [0,L+1], \\ \Lambda_{N,L} &= A_{N,L} \cap \mathbb{Z}^3. \end{aligned}$$

En identifiant les bords de $[0,N] \times [0,N]$ on obtient un tore continu bi-dimensionnel T_N, dont la restriction aux points de coordonnées entières sera notée $\mathbb{T}_N$; $I_L = [\![0, L+1]\!]$ sera la trace discrète de $[0, L+1]$. Par la suite, on identifiera $\Lambda_{N,L}$ au cylindre $\mathbb{T}_N \times I_L$, et $\Omega_{N,L}$ désignera l'ensemble des configurations d'Ising sur ce cylindre.

La frontière du cylindre $\Lambda_{N,L}$ possède deux composantes connexes $P^- = \mathbb{T}_N \times \{0\}$ et $P^+ = \mathbb{T}_N \times \{L+1\}$; les conditions au bord définies par $\sigma \equiv -1$ sur P^- et $\sigma \equiv +1$ sur P^+ seront dites *mixtes* et notées $+/-$. Voir Figure 6.1.

On notera $H_{N,L} = H^{+/-}_{\Lambda_{N,L}}$ l'Hamiltonien défini par (5.1) pour les conditions au bord mixtes, et $\mu^{\beta}_{N,L}$ la mesure de Gibbs à température β correspondant à $H_{N,L}$, cf. (5.2).

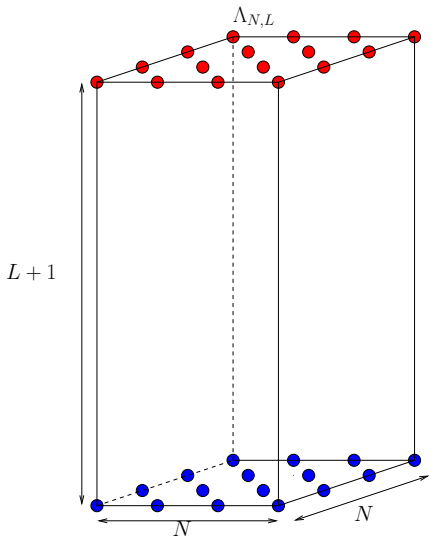


FIG. 6.1: Conditions aux bords mixtes sur $\Lambda_{N,L}$

Nous définissons maintenant les phases et les interfaces d'une configuration σ.

Définition 59 (Phases, interfaces)**.** Soit le graphe $G(\sigma) = [\Lambda_{N,L}, E(\sigma)]$, où $E(\sigma)$ est l'ensemble des arêtes $\langle s,t\rangle \subset \Lambda_{N,L}$ telles que $\sigma_s = \sigma_t$. Les *phases* sont les composantes de $G(\sigma)$ qui déconnectent P^- de P^+ dans $\Lambda_{N,L}$. On notera parfois G_s la composante connexe de G qui contient $s \in \Lambda_{N,L}$.

Les *interfaces* de σ sont les composantes 1–connexes de $\mathcal{F}(\sigma)$ qui déconnectent P^- de P^+, avec $\mathcal{F}(\sigma) = \{p(e); e \notin E(\sigma)\}$

Les conditions au bord constantes + empêchent l'apparition de toute interface, mais ici nous avons la proposition cruciale suivante, illustrée par la Figure 6.2 en dimension $d = 2$:

Proposition 60. *Avec les conditions au bord +/−, toute configuration $\sigma \in \Omega_{N,L}$ possède au moins deux phases et au moins une interface. On notera $I_1, \ldots, I_l$ les différentes interfaces de σ, par ordre croissant de leur hauteur à l'origine, et $\mathcal{I}(\sigma) = \bigcup I_i$.*

Démonstration. Notons $S^-(\sigma)$ l'ensemble des sites de $\Lambda_{N,L}$ où σ est égale à -1 et $V_1(\sigma)$ la composante connexe de $S^-(\sigma)$ contenant P^-. V_1 est alors une phase de σ, ainsi que V_2, la composante connexe de $S^+(\sigma)$ contenant P^+.

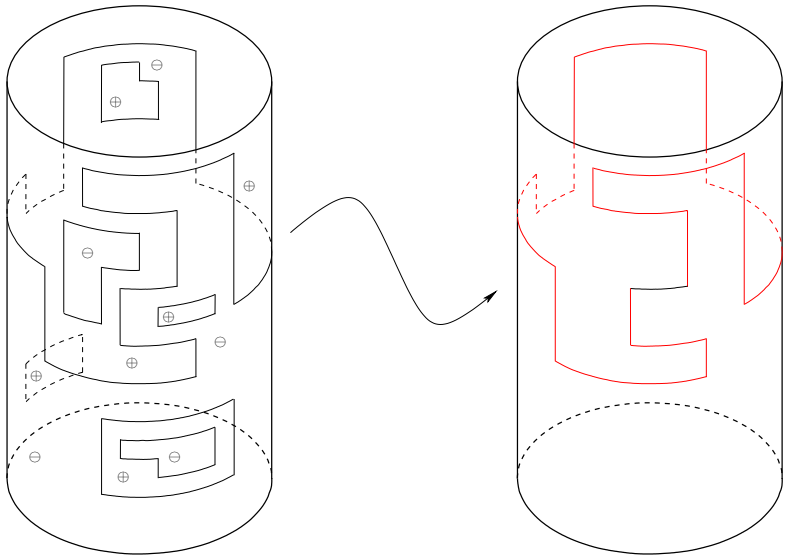


FIG. 6.2: Interface $+/-$ dans un cylindre. La figure de gauche représente $\mathcal{F}(\sigma)$; celle de droite isole l'interface (en rouge).

En appliquant le Théorème 37, on sait qu'il existe une collection de plaquettes $Q_1 = Q_1^- \cup Q_1^+$ telle que

1. $V_1 \subset \mathrm{Int}[Q_1]$,
2. toute plaquette $q \in Q_1$ est duale d'une arête e, avec exactement une extrémité dans V_1,
3. Q_1^-, Q_1^+ sont 1–connexes.

Par construction, $[Q_1^-] = T_N \times \{-1/2\}$ et Q_1^+ sépare $P^- \subset V_1$ de $P^+ \subset \mathrm{Ext}^+[Q_1]$. On notera I_1 la composante 1–connexe de $\mathcal{F}(\sigma)$ contenant Q_1^+, qui est bien une interface. □

Le Théorème 61 indique que la probabilité d'apparition d'interfaces données décroît très rapidement avec leur complexité géométrique. On rappelle que cette notion de complexité est donnée par le *poids* w, défini par $w(Q) = |Q| - |\Pi(Q)|$ pour une collection de plaquettes Q.

Théorème 61 (Inégalité de Peierls)**.** *Pour tout L, pour tout N pair, et pour toute température β les inégalités de Peierls suivantes sont satisfaites :*

– *pour toute famille d'interfaces $\mathcal{I}$,*

$$\mu_{N,L}^{\beta}\left(\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}\right) \leq e^{-\beta w(\mathcal{I})}, \tag{6.1}$$

– *pour toute collection de murs* $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$,

$$\mu_{N,L}^{\beta}\left(\mathcal{I}(\sigma) \supset \bigcup_{i-1}^{r} \gamma_i\right) \leq e^{-\beta \sum w(\gamma_i)}. \tag{6.2}$$

Le Théorème 61 fournit immédiatement la condition de Peierls requise par le Théorème 47. Pour N assez grand, et si $L_N \leq e^{b\beta N^2}$ avec b assez petit, les configurations de Ω_{N,L_N} n'auront donc typiquement qu'une seule interface.

$\mathcal{R}(\sigma)$ désignant le *socle de rigidité* de cette interface, le théorème 47 a donc pour corollaire le

Théorème 62 (Rigidité de l'interface +/−)**.** *Soit* $L_n \leq e^{n^{2/3}}$, $\Lambda_n = \Lambda_{2n,L_n}$, *et* β *suffisamment grand. Il existe alors* $c(\beta) > 0$ *tel que*

$$\mu_{\Lambda_n}^{\beta}\left(\frac{|\mathcal{R}(\sigma)|}{|\Pi(\Lambda_n)|} \geq c(\beta)\right) \to 1, \tag{6.3}$$

avec $c(\beta) \to 1$ *lorsque* $\beta \to \infty$.

La démonstration de la rigidité des interfaces est donc réduite aux inégalités de Peierls (6.1),(6.2) du Théorème 61.

6.2 Démonstration des inégalités de Peierls (6.1),(6.2)

L'interface est constituée de multiples défauts, et les traiter tous simultanément est une tâche *a priori* complexe. Nous proposons ici une nouvelle approche de cette question, basée sur la positivité par réflexion. L'inégalité de l'échiquier permet déjà de contrôler facilement la probabilité de voir un défaut élémentaire donné à un endroit précis. Mieux encore, elle affirme que le produit de ces estimations individuelles contrôle la probabilité d'apparition de toute une collection de défauts.

On se donne un ensemble admissible d'interfaces $\mathcal{I}$, au sens où il existe une configuration $\tau \in \Omega_{N,L}$ telle que $\mathcal{I}(\tau) = \mathcal{I}$. Nous allons étudier les irrégularités de $\mathcal{I}$ séparément dans chaque 2–*colonne* du système :

Définition 63 (2-colonne)**.** Si $M \sim M' \in \mathbb{T}_N$ sont deux points adjacents du tore discret, on définit la 2–colonne $c(M, M')$ par

$$c(M, M') = \Pi^{-1}(\{M, M'\}) \subset \Lambda_{N,L}.$$

On notera $\mathcal{C}_{N,L}$ l'ensemble des 2–colonnes de $\Lambda_{N,L}$.

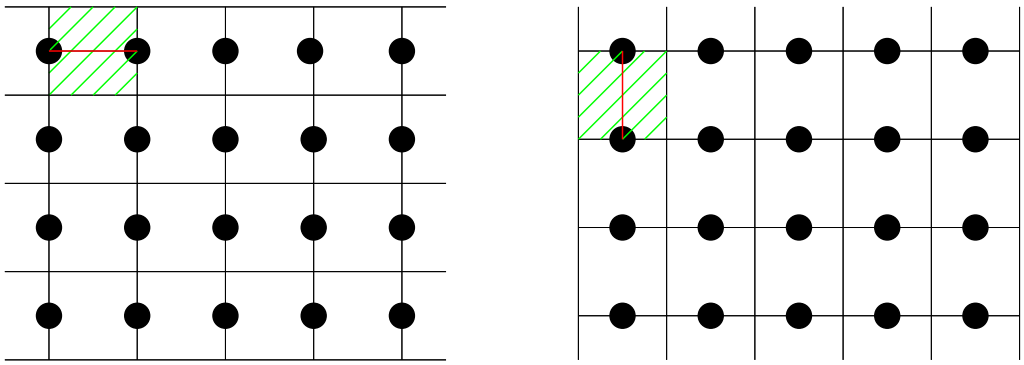


FIG. 6.3: Les deux pavages périodiques du tore, selon que l'arête M, M' (en rouge) est horizontale ou verticale. La plaquette engendrant le pavage est indiquée en vert.

Définition 64 (Pavage périodique par des 2–colonnes)**.** A chaque 2–colonne $c = c(M, M')$, on associe la plaquette élémentaire $p_c \subset \mathbb{T}_N$ centrée sur le milieu de M, M'. Le *pavage périodique* de $\mathbb{T}_N$ engendré par p_c est l'ensemble de plaquettes $\left\{p_c + u, u \in \mathbb{Z}^d\right\}$; l'ensemble des 2–colonnes correspondant à ce pavage forme un pavage périodique de $\Lambda_{N,L}$.

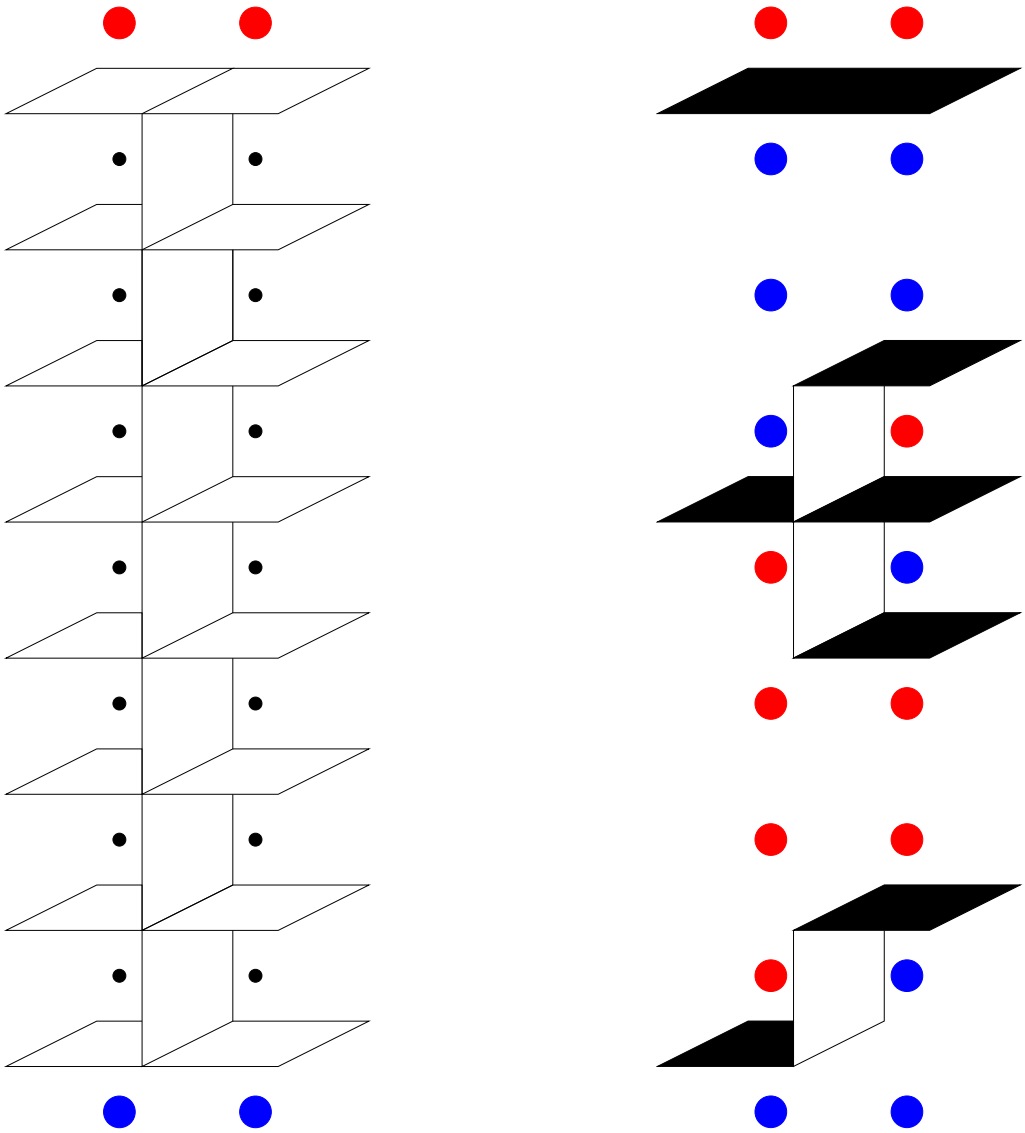
Il existe exactement 2 pavages périodiques, selon la direction de l'arête $\langle M, M'\rangle$, cf. Figure 6.3. Nous appliquerons l'inégalité de l'échiquier à ces pavages.

Définition 65 (Blobs)**.** Pour toute 2–colonne c, $\mathcal{F}_c$ désignera l'ensemble des plaquettes de c, c'est-à-dire toutes les plaquettes duales séparant deux sites de c. Nous décomposons enfin $\mathcal{I}_c = \mathcal{I} \cap \mathcal{F}_c$ en composantes connexes — les *blobs* — notées $B_1, \ldots, B_r$ de bas en haut, cf. Figure 6.4.

En étudiant la structure de ces blobs, nous allons construire un événement γ_c mesurable sur les spins de la colonne c et contenant l'événement $\{\mathcal{I}_c(\sigma) = \mathcal{I}_c\}$. Si $C \subset \mathcal{C}_{N,L}$ est un pavage périodique de $\Lambda_{N,L}$, l'inégalité de l'échiquier nous donnera alors

$$\begin{aligned}\mu^{\beta}_{N,L}\left(\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}\right) &\leq \mu^{\beta}_{N,L}\left(\bigcap_{c\in C}\gamma_c\right)\\ &\leq \left[\prod_{c\in C}\mu^{\beta}_{N,L}\left(\gamma^N_c\right)\right]^{1/N^2}, \qquad (6.4)\end{aligned}$$

où γ^N_c est l'événement obtenu à partir des réflexions successives de γ_c au travers des parois verticales des colonnes de notre pavage.



(a) Plaquettes de $\mathcal{F}_c$.

(b) Famille de blobs.

FIG. 6.4: Exemple de blobs dans une 2-colonne. La figure 6.4b représente trois blobs dans la colonne c pour une configuration particulière. Les disques noirs indiquent les sites du réseau ; les spins positifs (négatifs) sont signalés en rouge (bleu).

Nous démontrerons ensuite que

Lemme 66.

$$\mu_{N,L}^{\beta}\left(\gamma_c^N\right) \leq e^{-\beta(2|\mathcal{V}_c|+|\mathcal{H}_c|-2)N^2}, \tag{6.5}$$

où $\mathcal{V}_c$ ($\mathcal{H}_c$) désigne l'ensemble des plaquettes verticales (horizontales) de $\mathcal{I}_\rfloor$.

Par ailleurs, on verra qu'il existe toujours un pavage adapté à $\mathcal{I}$:

Lemme 67. *L'un des deux pavages périodiques C satisfait :*

$$2\sum_{c\in C}|\mathcal{V}_c| + \sum_{c\in C}|\mathcal{H}_c| - 2N^2 \geq w(\mathcal{I}). \tag{6.6}$$

En combinant les Lemmes 66 et 67 et en utilisant (6.4) nous obtenons (6.1) :

$$\mu_{N,L}^{\beta}(\mathcal{I}) \leq \exp\left\{-\beta w(\mathcal{I})\right\}.$$

Pour obtenir (6.2), il suffit de se restreindre cette technique aux colonnes intersectant la famille de murs γ_i considérée.

Dans les sections suivantes, nous construisons l'événement γ_c évoqué plus haut et démontrons les Lemmes 66 et 67.

6.3 Construction de γ_c

Structure des blobs

Nous allons voir que la simple connaissance géométrique des blobs nous donne des informations précises sur le comportement des configurations dans leur voisinage.

Si B est un blob de la colonne c, on pose $V(B) = \{x; \exists y, p(x,y) \in B\} \subset c$. On notera $W(B) = c \cap \{a(B) \leq z \leq b(B)\}$ le plus petit pavé à coordonnées entières contenant $V(B)$.

Définition 68 (Blob trivial)**.** Un blob B est dit *trivial* s'il est simplement formé de deux plaquettes horizontales adjacentes.

Exemple 69. Le plus haut des trois blobs de la figure 6.4b est trivial.

Nous allons maintenant associer à chaque blob sa configuration *standard* :

Définition 70 (Configuration standard)**.** Soit B un blob admissible. Sa *configuration standard* sera l'unique élément $\tau(B)$ de $\Omega_{W(B)}$ valant -1 sur $\{z = a(B)\}$ et satisfaisant

$$[\tau(B)]_i = [\tau(B)]_j \Longleftrightarrow p(i,j) \notin B,$$

pour toute plaquette horizontale $p = p(i,j)$, $i,j \in W(B)$.

Le but de cette section est de démontrer le fait suivant, justifiant la terminologie de configuration standard :

Proposition 71. *Pour tout blob admissible B,*

$$B \text{ est un blob de } I(\sigma) \Rightarrow \sigma \text{ coïncide avec } \tau(B) \text{ ou } -\tau(B) \text{ sur } W(B) \quad .$$

Exemple 72. Sur l'exemple de la Figure 6.4b, σ coïncide avec $\tau(B_1)$, $-\tau(B_2)$ et $\tau(B_3)$ sur leurs blobs respectifs de définition B_1, B_2, B_3.

Pour cela, nous utiliserons les deux lemmes suivants, démontrés à la fin de cette section. Le premier illustre la structure typique d'un blob : un squelette, constitué de plaquettes verticales contiguës, auquel sont éventuellement attachées des feuilles horizontales.

Lemme 73. *Si B est un blob admissible de c alors B contient la plaquette verticale $v_c(h)$ de c au niveau h, si et seulement si $a(B)+1 \leq h \leq b(B)-1$. En outre, B contient au moins une plaquette horizontale au niveau $a(B)+\frac{1}{2}$, ainsi qu'au niveau $b(B)-\frac{1}{2}$.*

Ce lemme montre que $\left\{a(B)+\frac{1}{2} \leq z \leq b(B)-\frac{1}{2}\right\}$ est la plus petite tranche horizontale contenant $[B]$. Il nous permet d'ordonner naturellement de bas en haut les blobs d'une configuration donnée, par la relation d'ordre $B < B' \iff b(B) \leq a(B')$.

Nous utiliserons également le

Lemme 74. *Si B est un blob de $I(\sigma)$, alors σ est constante aux niveaux $a(B)$ et $b(B)$.*

dont on déduit immédiatement le

Corollaire 75. *La configuration $\tau(B)$, constante sur le plan $\{z = a(B)\}$, est également constante sur $\{z = b(B)\}$. On notera $\epsilon(B) \in \{-1,+1\}$ la valeur de $\tau(B)$ sur $\{z = b(B)\}$.*

Démonstration de la Proposition 71. Soit B admissible, et σ une configuration telle que B soit un blob de $I(\sigma)$. D'après le Lemme 74, σ est constante au niveau $a(B)$. On supposera dans toute la suite que cette valeur est -1, de telle sorte que σ et $\tau(B)$ coïncident déjà au niveau $a(B)$.

Première étape Montrons que si σ et $\tau(B)$ coïncident au niveau k, avec $a(B) \leq k \leq b(B) - 2$, alors elles coïncident au niveau $k+1$.

On note s, t les deux sites de la colonne c au niveau k, et s', t' leurs translatés respectifs au niveau $k+1$. Grâce au Lemme 73, on sait que B contient la plaquette verticale $p(s', t')$ du niveau $k+1$. Cette plaquette est 1–connectée à $p(s, s')$, donc $\sigma_{s'} = \sigma_s$ si et seulement si $p(s, s') \notin B$. La construction de $\tau(B)$ assure donc que $\sigma_{s'} = [\tau(B)]_{s'}$; de même $\sigma_{t'} = [\tau(B)]_{t'}$.

Une simple récurrence montre ainsi que σ et $\tau(B)$ coïncident sur tous les niveaux k tels que $a(B) \leq k \leq b(B) - 1$.

Deuxième étape Il nous reste à montrer que σ et τ coïncident au niveau $b(B)$. On note u, v les deux sites du niveau $b(B)-1$, et u', v' leurs translatés respectifs au niveau $b(B)$.

Le lemme 74 assure que $\sigma_{u'} = \sigma_{v'} = \epsilon$ et on sait déjà que $[\tau(B)]_u = \sigma_u$, $[\tau(B)]_v = \sigma_v$. On sait également que B contient une plaquette horizontale au niveau $b(B) - \frac{1}{2}$, par exemple $p = p(u, u')$, ce qui assure $\sigma_u = -\sigma_{u'} = -\epsilon$ et $[\tau(B)]_{u'} = -[\tau(B)]_u = -\sigma_u = \epsilon$. p étant 1–connectée avec la plaquette horizontale $p' = p(v, v')$, on a $\sigma_v = \sigma_{v'}$ si et seulement si $p' \notin B$.

La définition de $\tau(B)$ assure donc $[\tau(B)]_{v'} = \sigma_{v'}$ dans tous les cas, et $\tau(B) \equiv \sigma \equiv \epsilon$ au niveau $b(B)$. □

Démonstration du Lemme 73. On notera $a = a(B)$ et $b = b(B)$. Si $h \leq a-1$ ou $h \geq b+1$, alors $v_c(h) \notin B$ par définition de a, b.

Notons $v_c(a) = p(s, t)$ et supposons-la dans B, de sorte que $\sigma_s \neq \sigma_t$. Soit s' et t' les sites placés immédiatement sous s et t. Comme $s', t' \notin W(B)$, $p(s, s')$, $p(t, t')$ et $p(s', t')$ ne peuvent appartenir à B. Or ces trois plaquettes sont 1–connectées à $v_c(a)$, donc $\sigma_s = \sigma_{s'} = \sigma_{t'} = \sigma_t$, ce qui est absurde. On en déduit que $v_c(a) \notin B$, ainsi que $v_c(b) \notin B$ par symétrie.

Par définition de a, il existe une plaquette p de B adjacente à un site du niveau a. D'après ce qui précède, cette plaquette est nécessairement horizontale, et dans le plan $z = a + \frac{1}{2}$. De même, B contient une plaquette horizontale q dans le plan $z = b - \frac{1}{2}$.

Soit maintenant un entier h tel que $a + 1 \leq h \leq b - 1$ et montrons que $v_c(h) \in B$. Si tel n'était pas le cas, nous aurions alors

$$[B] \cap \left\{ h - \frac{1}{2} < z < h + \frac{1}{2} \right\} = \emptyset.$$

Comme $\left\{ h - \frac{1}{2} < z < h + \frac{1}{2} \right\}$ déconnecte $\Lambda_{N,L}$ en deux composantes connexes (l'une contenant p, l'autre contenant q), $[B]$ ne saurait être connexe, ce qui est absurde. □

Démonstration du Lemme 74. Nous savons qu'il existe une plaquette $p \in B$, horizontale et incluse dans le plan $\left\{z = a(B) + \frac{1}{2}\right\}$. On notera s, t les deux sites au niveau a, et $p = p(s, s')$. Comme $p(s, t) \notin B$ est pourtant 1–connectée à p, nous obtenons $\sigma_t = \sigma_s$. □

Structure de $\mathcal{I}_c$

Le but de cette section est de démontrer l'existence d'une configuration standard associée à $\mathcal{I}_c$.

Notation 76. Soit $\mathcal{I}$ une famille d'interfaces admissibles, c une colonne de $\Lambda_{N,L}$. Si $B_1, \ldots, B_r$ désigne la famille des blobs de $\mathcal{I}$ dans la colonne c, on notera $W(\mathcal{I}_c) = \bigcup_{i=1}^{r} W(B_i)$. On utilisera aussi les abréviations $a_i = a(B_i)$, $b_i = b(B_i)$, $W_i = W(B_i)$.

Proposition 77. *Pour toute famille admissible d'interfaces $\mathcal{I}$, et pour toute colonne c, il existe une unique configuration $\tau(\mathcal{I}_c)$ définie sur $W(\mathcal{I}_c)$ telle que pour toute configuration $\sigma \in \Omega_{N,L}$*

$$\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I} \Rightarrow \sigma_{W(\mathcal{I}_c)} = \tau(\mathcal{I}_c).$$

Définition 78 (Type des blobs)**.** Soit σ une configuration, et B un blob de $I(\sigma)$ dans la colonne c. σ est constante égale ϵ sur le niveau $a(B)$ et constante égale à ϵ' sur $b(B)$. Le *type* de B dans σ est le couple (ϵ, ϵ'). Si $\epsilon(B) = \epsilon'(B)$, B est dit *homogène* ; sinon il est dit *hétérogène*.

Exemple 79. Les trois blobs de la Figure 6.4b sont hétérogènes et de types respectifs $(-1, +1)$, $(+1, -1)$ et $(-1, +1)$ de bas en haut.

Nous allons voir que le type de chaque blob est entièrement déterminé par la donnée de la famille complète des blobs de l'interface :

Proposition 80 (Alternance des types)**.** *Soit $B_1, \ldots, B_r$ la famille des blobs de $I(\sigma)$ dans la colonne c. Les types ϵ_i, ϵ'_i des B_i dans σ satisfont les relations suivantes :*

- $\epsilon_1 = -1$ *et* $\epsilon'_r = +1$,
- $\forall i < r, \epsilon_{i+1} = \epsilon'_i$,
- $\forall i, \epsilon'_i = -\epsilon(B_i)\epsilon_i$.

Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 81. *Soit $p(s, t)$ une plaquette d'une interface I de σ. Alors s et t appartiennent à deux composantes connexes distinctes de $A_{N,L} \setminus [I]$.*

Démonstration du lemme 81. En effet, si s, t sont dans la même composante connexe C de $A_{N,L} \setminus [I]$, ils sont connectés dans $\Delta_{\mathrm{v}}C, \Delta_{\mathrm{e}}C$. Il est facile de voir que σ est constante sur tout chemin $s = x_1, \ldots, x_r = t$ dans ΔC. En particulier, $\sigma_s = \sigma_t$, ce qui contredit $p(s,t) \in \mathcal{F}(\sigma)$. □

Démonstration de la proposition 80. Soit s l'un des deux sites de la colonne c au niveau $a(B_1)$, et montrons que $\sigma_s = -1$; I_1 sera l'interface contenant B_1. On considère G_s la composante connexe de $G(\sigma)$ contenant s, Q_s l'enveloppe de G_s, et nous allons montrer que G_s est une phase.

Sinon, G_s est d'extérieur connexe, et Q_s est connexe. Si $Q_s \cap I \neq \emptyset$, alors $Q_s \subset I$ par connexité. Comme $P^- \subset \mathrm{Ext}[Q_s]$, Q_s (et donc I) contient nécessairement une plaquette horizontale dans la colonne c au-dessous de s, ce qui est absurde.

On peut donc supposer que $Q_s \cap I = \emptyset$. Si $[Q_s] \subset \mathrm{Int}[I]$, il existerait une plaquette de I sous Q_s dans la colonne c, ce qui est absurde : $[Q_s] \subset \mathrm{Ext}[I]$. Comme $s \in \mathrm{Ext}^-[I_1]$, $[Q_s] \cup \mathrm{Int}[Q_s] \subset \mathrm{Ext}^-[I_1]$. Notant $P_s = p(s,s') \notin Q_s$, on voit donc que $s' \in \mathrm{Ext}^-[I_1]$, ce qui contredit le lemme 81.

Si au contraire G_s est une phase, alors on obtient deux composantes connexes séparantes Q_s^-, Q_s^+. Comme Q_s^- n'intersecte pas I dans la colonne c, on a donc $Q_s^- = I_0 = \mathbb{T}_N \times \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; on en déduit successivement $P^- \subset G_s$, $\sigma_s = -1$, et $\epsilon_1 = -1$. De même, $\epsilon'_{r+1} = +1$.

Observons maintenant le cas $1 \leq i \leq r-1$. Il existe alors un site $s_i \in V_i$ à hauteur b_i et un site $t_i \in V_{i+1}$ à hauteur a_{i+1} ; les plaquettes horizontales en-dessous de s_i et au dessus de t_i sont alors respectivement dans B_i et B_{i+1}. Si s_i et t_i sont des points de $\mathrm{Int}[I]$, ils appartiennent à la même composante connexe de $\mathrm{Int}[I]$. D'après le lemme 81, on en déduit que $\sigma_{s_i} = \sigma_{t_i}$. Sinon, pour toute interface I_k de σ, ils ont tous deux dans une même composante de $\mathrm{Ext}\, I_k$. Si B_i et B_{i+1} appartiennent à la même interface I_k, le lemme 81 nous donne encore $\sigma_{s_i} = \sigma_{t_i}$.

Sinon, $B_i \in I_k$ et $B_{i+1} \in I_{k+1}$, I_k et I_{k+1} étant deux interfaces consécutives de σ. Si par exemple $s_i, t_i \in \mathrm{Ext}^+ I_k$, alors $s_i, t_i \in \mathrm{Ext}^- I_{k+1}$ (sinon I_{k+1} ne séparerait pas P^- de P^+). Comme $\sigma \equiv \sigma_{s_i}$ sur la frontière de $\mathrm{Ext}^+ I_k$ et $\sigma \equiv \sigma_{t_i}$ sur la frontière de $\mathrm{Ext}^- I_{k+1}$, $\sigma_{s_i} \neq \sigma_{s_{i+1}}$ imposerait l'existence d'une interface supplémentaire entre I_k et I_{k+1}. On a donc bien $\sigma_{s_i} = \sigma_{t_{i+1}}$, et $\epsilon'_i = \epsilon_{i+1}$.

La dernière propriété découle immédiatement de la définition de $\epsilon(B)$ et de la proposition 71. □

Démonstration de la proposition 77. Soit σ telle que $\mathcal{I}_c(\sigma) = \mathcal{I}_c$. Grâce à la proposition 80, on sait déjà que B_1 est de type $(-1, \epsilon(B_1))$ dans σ ; la proposition 71 montre donc que σ coïncide donc avec $\tau(B_1)$ sur $W(B_1)$.

En utilisant les propositions 80,71, on montre facilement par récurrence que σ coïncide nécessairement avec $\tau^{(i)} = (-1)^{i-1}\left[\prod_{k=1}^{i-1}\epsilon(B_k)\right]\tau(B_i)$ sur W_i pour tout $1 \leq i \leq r$.

La configuration $\tau \in \Omega_{W(\mathcal{I}_c)}$ définie par ses restrictions $\tau^{(i)}$ à W_i est donc l'unique configuration qui satisfait la propriété requise. □

On notera γ_c l'événement $\left\{\sigma_{W(\mathcal{I}_c)} = \tau(\mathcal{I}_c)\right\}$, de telle sorte que

$$\{\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}\} \subset \bigcap_{c\in C}\gamma_c.$$

6.4 Démonstration des Lemmes 66 et 67

Comme nous l'avons expliqué dans la première section de ce chapitre, l'inégalité de l'échiquier (6.4) nous permet de contrôler l'événement $\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}$ par les événements réfléchis γ_c^N, c parcourant C, l'un des deux pavages possibles de $\Lambda_{N,L}$ par des 2–colonnes.

Pour décrire précisément cet événement γ_c^N, nous utiliserons les notations $W_i^N = \{a_i \leq z \leq b_i\}$ et $W^N = \bigcup_{i=1}^r W_i^N$. Si $\tau \in \Omega_W$, on peut définir la configuration $\tau^N \in \Omega_{W^N}$ par :

$$\forall c, c' \in C, \tau_{c'}^N \equiv \theta_{c,c'}(\tau), \text{ si } \theta_{c,c'} \in \Theta(C) \text{ est telle que } \theta(c) = c',$$

où $\Theta(C)$ est le sous-groupe engendré par les réflexions selon les parois des colonnes de C.

Remarque 82. Puisque N est pair, τ^N est bien définie sur W^N.

Comme $\gamma_c = \{\sigma;\ \sigma_W \equiv \tau(\mathcal{I}_c)\}$, γ_c^N se produit si et seulement si le motif de spins donné par $\tau(\mathcal{I}_c)$ apparaît périodiquement dans les tranches du système définies par $W(\mathcal{I}_c)$:

$$\gamma_c^N = \left\{\sigma;\ \sigma_{W^N(\mathcal{I}_c)} \equiv \tau^N(\mathcal{I}_c)\right\}.$$

Démonstration du lemme 66

Dans la configuration $\tau^N(\mathcal{I}_c)$, une plaquette de $\mathcal{I}_c$ engendre N^2 paires de spins voisins de signe contraire si elle est verticale, et $\frac{N^2}{2}$ paires si elle est horizontale. Ceci entraîne une contribution totale de $(2|\mathcal{V}_c| + |\mathcal{H}_c|)N^2$ à l'Hamiltonien.

Notre démonstration consiste à effacer un maximum de ces plaquettes pour gagner un facteur exponentiel dans les estimations. Cette opération d'effacement consiste à associer injectivement à chaque configuration de γ_c^N

une configuration possédant une seule interface, totalement plate. La baisse totale d'énergie résultante sera de $(2\,|\mathcal{V}_c| + |\mathcal{H}_c| - 2)\,N^2$ unités.

La première étape de notre procédure d'effacement consiste à régulariser tous les défauts engendrés par $\tau^{(i)} = [\tau(\mathcal{I}_c)]_{W_i}$, en les supprimant s'ils sont issus de blobs homogènes ou en les trivialisant sinon. Nous allons définir $\tilde{\tau}^{(i)}$ sur W_i de la façon suivante. On posera $\tilde{\tau}^{(i)} \equiv \epsilon$ si B_i est homogène de type (ϵ, ϵ) ; si B_i est hétérogène de type $(\epsilon, -\epsilon)$, on prendra $\tilde{\tau}^{(i)} \equiv \epsilon$ au niveau a_i, et $\tilde{\tau}^{(i)} \equiv -\epsilon$ sur les autres niveaux $\in [a_i + 1, b_i]$. On notera $\tilde{\tau} \in \Omega_{W(\mathcal{I}_c)}$ la configuration définie par ses restrictions $\tilde{\tau}^{(i)}$ à W_i, $\tilde{\gamma}_c$ l'événement $\{\sigma \equiv \tilde{\tau} \text{ sur } W(\mathcal{I}_c)\}$, et $\tilde{\gamma}_c^N$ l'événement réfléchi correspondant.

L'application $\Phi : \Omega_{\Lambda_{N,L}} \to \tilde{\gamma}_c^N$ définie par

$$[\Phi\,(\sigma)] \equiv \begin{cases} \tilde{\tau}^N(\mathcal{I}_c) & \text{sur } W^N(\mathcal{I}_c), \\ \sigma & \text{ailleurs} \end{cases}$$

induit une bijection de γ_c^N sur $\tilde{\gamma}_c^N$. Nous noterons v_i le nombre de plaquettes verticales de B_i et h_i le nombre de ses plaquettes horizontales. Remarquons alors que pour toute $\sigma \in \gamma_c^N$,

$$H(\Phi\,(\sigma)) - H(\sigma) = -\left(\sum_{i=1}^{r} n_i\right) N^2$$

où $n_i = 2v_i + h_i$ si B_i est homogène, et $2v_i + h_i - 2$ sinon. De ceci, il vient

$$\mu_{N,L}^{\beta}\left(\gamma_c^N\right) = e^{-\beta(2|\mathcal{V}_c|+|\mathcal{H}_c|-2k)N^2} \cdot \mu_{N,L}^{\beta}\left(\tilde{\gamma_c}^N\right), \tag{6.7}$$

où k est le nombre de blobs hétérogènes. Remarquons que la proposition 80 montre que le type des blobs hétérogènes ($-+$ ou $+-$) alterne et que cette séquence commence et se termine nécessairement par $-+$. Les blobs hétérogènes sont donc en nombre impair $k = 2l + 1$, et $l + 1$ d'entre eux sont de type $-+$.

Si $k = 1$, l'équation (6.7) démontre notre lemme ; si $k \geq 3$, nous devons procéder à la deuxième et dernière étape de notre procédure d'effacement. Celle-ci consiste à ne conserver que l'interface engendrée par le premier blob hétérogène, en retournant les spins entre deux interfaces consécutives.

Plus précisément, on notera $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ les indices des blobs hétérogènes, B_{i_j} étant de type $-+$ lorsque j est impair, et de type $+-$ lorsque j est pair. L'application $\Psi : \Omega_{\Lambda_{N,L}} \to \Omega_{\Lambda_{N,L}}$ définie par

$$[\Psi\,(\sigma)]_s = \begin{cases} -\sigma_s & \text{si } s \in W', \\ +\sigma_s & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\text{avec } W' = \bigcup_{j\in\{1,3,\dots,k-2\}} \left\{ b_{i_j} + 1 \leq z \leq a_{i_{j+1}} \right\}.$$

est bijective et pour toute $\sigma \in \tilde{\gamma_c}^N$ on a

$$H\left[\Psi\left(\sigma\right)\right] - H\left(\sigma\right) = -2(k-1)N^2.$$

En notant $\hat{\gamma}_c^N$ l'image de $\tilde{\gamma}_c^N$ par Ψ, nous obtenons

$$\mu_{N,L}^{\beta}\left(\tilde{\gamma}_c^N\right) = e^{-2\beta(k-1)N^2} \cdot \mu_{N,L}^{\beta}\left(\hat{\gamma_c}^N\right), \tag{6.8}$$

En combinant (6.7) et (6.8) on obtient

$$\mu_{N,L}^{\beta}\left(\gamma_c^N\right) = e^{-\beta(2|\mathcal{V}_c|+|\mathcal{H}_c|-2)N^2} \cdot \mu_{N,L}^{\beta}\left(\hat{\gamma}_c^N\right),$$

puis (6.5) en remarquant $\mu_{N,L}^{\beta}\left(\hat{\gamma}_c^N\right) \leq 1$. □

Choix du pavage : démonstration du Lemme 67

L'équation (6.6) est en général fausse si l'on choisit arbitrairement notre pavage, en risquant de manquer les irrégularités de $\mathcal{I}$. En effet, le pire des cas serait celui où $\mathcal{I}$ est une interface telle qu'aucune des plaquettes verticales ne soit interceptée par le pavage choisi ! Nous allons décrire un exemple de cette situation extrême en considérant une interface périodique, obtenue par la réflexion d'un défaut élémentaire.

Prenons $\sigma \equiv -1$ sur $z = 0$ et $\sigma \equiv +1$ sur $z \geq 2$. Sur le niveau $z = 1$, nous prendrons $\sigma_{(x,y,1)} = (-1)^x$. Cette configuration possède une seule interface I, qui contient N^2 plaquettes horizontales et N^2 plaquettes verticales.

Si le pavage C est engendré par $\langle(0,0,0),(0,1,0)\rangle$, alors $\mathcal{I}_c$ est toujours formée d'un unique blob trivial — au niveau $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ suivant la colonne c considérée. Ainsi $2\,|\mathcal{V}_c+| + |\mathcal{V}_c+| = 2$, bien que $w(\mathcal{I}) = N^2$.

Il nous faut donc chercher le meilleur pavage pour $\mathcal{I}$. Notons $\mathcal{V}$ ($\mathcal{H}$) l'ensemble des plaquettes verticales (horizontales) de $\mathcal{I}$. Constatons d'abord que quelque soit le pavage C choisi, toutes les plaquettes horizontales sont interceptées deux fois :

$$\bigcup_{c\in C} \mathcal{H}_c = \mathcal{H},$$
$$\sum_{c\in C} |\mathcal{H}_c| = 2\,|\mathcal{H}|. \tag{6.9}$$

Il suffit donc de choisir le pavage qui maximise le nombre de plaquettes verticales interceptées, *i.e.* qui maximise $\sum_{c\in C} |\mathcal{V}_c|$. Puisque chaque plaquette

verticale de $\mathcal{I}$ est interceptée par l'un des deux pavages possibles, nous en déduisons que pour ce pavage maximal $C(\mathcal{I})$,

$$\sum_{c \in C(\mathcal{I})} |\mathcal{V}_c| \geq \frac{1}{2} |\mathcal{V}| . \tag{6.10}$$

Remarquons enfin que $\mathcal{I}$ contient toujours au moins une plaquette horizontale au-dessus de chaque site du tore : $|\mathcal{H}| \geq N^2$. En combinant cette remarque avec (6.9),(6.10) on déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{c \in C(\mathcal{I})} 2 |\mathcal{V}_c| + |\mathcal{H}_c| - 2N^2 &\geq |\mathcal{V}| + 2 |\mathcal{H}| - 2N^2 \\ &\geq |\mathcal{V}| + |\mathcal{H}| - N^2 \\ &= w(\mathcal{I}). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 67 et donc celle des Théorèmes 61 et 62.□

Troisième partie

Modèle de Potts

Résumé

Le modèle de Potts est une généralisation naturelle du modèle d'Ising à un nombre entier arbitraire $q \geq 2$ d'états appelés *couleurs*, le cas $q = 2$ correspondant au modèle d'Ising. Les particules voisines sont supposées se repousser lorsqu'elles sont de couleur différente, et avec la même intensité quelque soient les couleurs $i \neq j$ choisies. L'énergie d'une configuration est donc choisie proportionnelle au nombre d'arêtes bicolores. Lorsque le nombre de couleurs q est petit (avec la dimension), le comportement du modèle de Potts est très similaire au modèle d'Ising ; notamment, il possède exactement q phases pures monochromes (ordonnées) pour $T < T_c(q, d)$, et 1 phase pure polychrome (désordonnée) si $T > T_c$. Les configurations typiques d'une phase monochrome consistent en un vaste *océan* d'une couleur donnée, au sein duquel on observe de petits *îlots* de couleurs différentes ; dans la phase polychrome, les configurations ont tendance à être très chaotiques, et l'on observe seulement une multitude de petits îlots de chaque couleur disséminés ici et là dans le système.

Toutefois, pour q assez grand, un phénomène nouveau se produit par rapport à la situation du modèle d'Ising. À la température critique T_c, $q + 1$ phases pures coexistent : les q phases ordonnées issues des basses températures, et la phase désordonnée des hautes températures. Nous étudierons ici l'interface entre l'une des phases ordonnées et la phase désordonnée *à la température critique*, et montrerons qu'elle est rigide par une méthode de positivité par réflexion, en idée similaire à la méthode développée pour le modèle d'Ising dans la partie précédente.

— 7 —

Interfaces ordre–désordre du modèle de Potts

Dans ce chapitre, nous introduisons le modèle de Potts en rappelant les caractéristiques de son diagramme de phases. Nous décrivons ensuite les interfaces ordre–désordre et énonçons les résultats de rigidité correspondants. Ces résultats seront démontrés dans le chapitre suivant.

7.1 Transition de phase dans le modèle de Potts

Pour tout entier $q \geq 2$, on définit l'espace d'états $\mathcal{S} = \mathcal{S}(q) = \{1, \ldots, q\}$. Une configuration de Potts sur $\mathbb{Z}^d$ est un élément de $\Omega = \mathcal{S}^{\mathbb{Z}^d}$.

Définition 83 (Arête ordonnée)**.** On dira qu'une arête $e = \langle s, t \rangle \in \mathbb{E}^d$ est *ordonnée* dans une configuration $\sigma \in \Omega$ si $\sigma_s = \sigma_t$, et *désordonnée* sinon.

Le modèle de Potts est défini par l'interaction au plus proche voisin $\Phi_e = \mathbb{1}_{\{e \text{ est désordonnée}\}}$, $e \in \mathbb{E}^d$. Par exemple, l'Hamiltonien avec conditions au bord libres dans un volume Λ fini quelconque est donné par

$$H_\Lambda^f = \sum_{e \in E(\Lambda)} \mathbb{1}_{\{e \text{ est désordonnée}\}}.$$

Remarque 84. Nous aurions pu définir l'interaction de Potts par $\tilde{\Phi}_e = 2\Phi_e - 1$, afin que la définition coïncide exactement avec le modèle d'Ising lorsque $q = 2$. Comme $\mathcal{G}^\Phi(\beta) = \mathcal{G}^{\tilde{\Phi}}(\beta/2)$, notre définition conduit à un modèle parfaitement équivalent.

On dira qu'une mesure $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ est ordonnée si

$$\forall e \in \mathbb{E}^d,\ \mu\left(e \text{ est ordonnée }\right) > \frac{1}{2}. \tag{7.1}$$

De même, μ est désordonnée si

$$\forall e \in \mathbb{E}^d,\ \mu\,(e \text{ est ordonnée }) < \frac{1}{2}. \tag{7.2}$$

Nous allons maintenant décrire les phases pures du modèle de Potts pour q assez grand.

Théorème 85 (Diagramme de phases, $d \geq 2$)**.** *Pour tout β, on notera* $\dim(\beta)$ *la dimension du simplexe $\mathcal{G}^I(\beta)$. Si $d \geq 2$ alors il existe $\beta_c = \beta_c(q,d) \in (0,\infty)$ telle que :*

- *si $\beta < \beta_c$,* $\dim(\beta) = 1$ *et l'unique phase correspondante est désordonnée,*
- *si $\beta > \beta_c$,* $\dim(\beta) = q$ *et toutes les phases sont ordonnées.*

Si de plus $q \geq q_0(d)$, alors $\dim(\beta_c) = q+1$*, avec une phase pure désordonnée et q phases pures ordonnées.*

Ce théorème fut initialement obtenu grâce à la théorie de Pirogov et Sinaĭ, cf. [DS88, Mar86]. On notera que la positivité par réflexion permet de montrer des résultats similaires de façon plus élémentaire, voir par exemple [BK06, KS82, Shl86].

Remarque 86 (Approximation de champ moyen)*.* Lors de l'étude de modèles sur réseaux, on est très souvent confronté à des problèmes de dénombrement (nombre de boucles auto-évitantes de longueur donnée par exemple) ; la difficulté pour résoudre ce type de questions est généralement due aux contraintes géométriques très fortes de la structure en réseau. L'approximation de champ moyen est une approche qui permet de comprendre certains aspects du modèle (en grande dimension), tout en s'affranchissant de ces contraintes sur la localisation des particules.

Pour le modèle de Potts, l'approximation de champ moyen a un comportement indépendant de la dimension :

- si $q = 2$, alors la transition ordre–désordre est continue, au sens où $\forall \beta \leq \beta_c$, $\dim(\beta) = 1$;
- si $q \geq 3$, alors la transition ordre–désordre est du premier ordre : $\dim(\beta_c) = q+1$.

En toute dimension $d \geq 2$, on conjecture l'existence d'une valeur critique $q_c(d)$ au-delà de laquelle le modèle de Potts original se comporte comme son approximation de champ moyen. Quelques résultats rigoureux ont déjà été obtenus, et l'on sait par exemple que $q_c(2) = 4$, $q_c(4) = 2$ et $q_c(6) = 1$, cf. [Wu82].

En s'inspirant du travail effectué précédemment pour le modèle d'Ising, pour toute valeur de q et à basse température, on peut étudier les interfaces

entre deux phases pures ordonnées dans un cylindre muni de conditions au bord ordonnées (distinctes) sur ces faces horizontales. La méthode et les résultats sont similaires : dans un régime thermodynamique raisonnable, un tel système possède presque sûrement une seule interface, typiquement rigide.

L'un des points les plus fascinants du théorème ci-dessus est la situation au point critique, où la phase désordonnée coexiste avec des phases ordonnées. Que pouvons nous dire des interfaces entre ordre et désordre au point critique ? Les travaux [MMSRS91a, MMSRS91b] ont montré que ces interfaces étaient rigides, en appliquant une théorie de Pirogov-Sinaĭ et des développements en amas.

Le but de ce chapitre est de présenter une méthode alternative, dont la clef de voûte est la positivité par réflexion. Le schéma sera très proche de celui suivi pour le modèle d'Ising : définir les interfaces concernées, découper les interfaces pour étudier leurs irrégularités locales, établir une inégalité de Peierls à l'aide d'inégalités de l'échiquier, puis prendre une limite thermodynamique raisonnable.

Remarque 87. Si $T \leq T_c$, nous pourrions aussi traiter le cas d'une interface entre deux phases ordonnées de couleurs distinctes. Si $T \ll T_c$, la situation est la même que pour l'interface $+/-$ du modèle d'Ising à basse température : chacune des phases monochromes remplit une partie du volume, et une infime couche désordonnée rigide les sépare.

Mais à la température critique, et pour un cylindre de hauteur suffisante (d'ordre au moins logarithmique avec l'aire de la base), une phase désordonnée se développe entre les deux phases ordonnées, et son épaisseur typique est linéaire avec la hauteur du cylindre ; les deux interfaces ordre–désordre engendrées sont bien sûr rigides. L'application de notre méthode pour obtenir ce résultat est un travail en cours.

7.2 Rigidité de l'interface ordre–désordre

Comme pour le modèle d'Ising, nous fixons deux entiers N, L, et considérons la boîte $\Lambda_{N,L}$ comme le produit d'un tore $\mathbb{T}_N$ par un segment $[0, L+1]$, ce qui revient à prendre des conditions au bord périodiques dans les directions horizontales x, y.

La frontière de $\Lambda_{N,L}$ a deux composantes connexes,

$$P^o = \Lambda_{N,L} \cap \{z = L+1\} \text{ et } P^d = \Lambda_{N,L} \cap \{z = 0\}\,. \tag{7.3}$$

Pour obtenir une interface ordre–désordre, nous allons forcer la coexistence d'une phase ordonnée dans la partie supérieure du système avec une phase

désordonnée dans la partie inférieure. Pour cela, nous fixerons une unique couleur sur sa face supérieure et un motif désordonné sur sa face inférieure.

Plus précisément, $s \in \{5, \dots, q\}$ étant fixé, nous imposons sur P^o la condition au bord ordonnée $\sigma_{\text{ord}} = \{\sigma_{i,j,L+1} \equiv s\}$. Nous nous donnons également 4 valeurs $s_{00} = 1, s_{01} = 2, s_{11} = 3, s_{10} = 4$ et imposons sur P^d la condition au bord désordonnée $\sigma_{\text{des}} = \{\sigma_{a+2i,b+2j,0} = s_{ab},\ a, b = 0, 1\}$. Ces conditions au bord seront appelées *mixtes*.

La mesure de Gibbs en volume fini associée à ces conditions au bord mixtes sera notée $\mu_{N,L}^{\beta,q}$ et la fonction de partition correspondante sera notée $Z_{N,L}^{\beta,q}$.

Définition 88 (Cubes purs, cubes frustrés)**.** Étant donnée une configuration σ, un cube élémentaire sera dit *pur* si toutes ses arêtes sont de même nature dans σ : ou bien toutes ordonnées, ou bien toutes désordonnées. De façon naturelle, un cube pur est dit *ordonné* ou *chaotique* ; la *couleur* d'un cube ordonné dans σ est la valeur constante que la configuration prend sur ce cube. Par convention, la couleur d'un cube chaotique sera notée $\bigstar$.

Les autres cubes, qui ne sont typiques ni des phases ordonnées ni des phases désordonnées, seront dits *frustrés*. Par convention, la couleur d'un cube frustré sera notée $\blacklozenge$.

Définition 89 (Interfaces)**.** L'ensemble des cubes frustrés d'une configuration σ sera noté $\mathcal{F}(\sigma)$; ses composantes 1–connexes seront appelées *interfaces* lorsqu'elles sépareront P^o de P^d. L'ensemble des cubes appartenant à une interface de σ sera noté $\mathcal{I}(\sigma)$.

Proposition 90. *Soit $\sigma \in \Omega_{N,L}$. Alors σ possède au moins une interface ; on notera $\mathcal{I} = I_1, \dots, I_l$ les différentes interfaces de σ numérotées de bas en haut, selon leur position verticale à l'origine.*

La frontière extérieure Δ_i de chacune de ces interfaces I_i est constituée des cubes purs 1–connectés à I_i. La couleur des cubes de Δ_i est constante sur chacune de ses deux composantes connexes $\Delta I_i^-, \Delta I_i^+$. Avec la convention $h(\Delta_i^-) < h(\Delta_i^+)$, la couleur des cubes de σ sur ΔI_i^+ est la même que sur ΔI_{i+1}^-.

Démonstration. On procède de manière similaire à la démonstration de la Proposition 60. Nous donnons d'abord quelques notations pour établir l'existence d'une collection J_1 de cubes 1–connexe, qui servira de base pour construire la première interface. En itérant le procédé, nous obtenons l'ensemble des interfaces de la configuration ; nous établissons pour finir les propriétés de σ sur la frontière de ces interfaces.

Notations On note $\mathbb{T}_N^* \times \mathbb{Z}^*$ le réseau obtenu en translatant $\mathbb{T}_N \times \mathbb{Z}$ par le vecteur $\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3)$, de sorte que chaque sommet i de ce réseau soit le centre d'un cube $C(i)$ du réseau original. Enfin, on notera $\Lambda^* = \mathbb{T}_N^* \times \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, L, L + \frac{3}{2}\right\}$. On étend σ à $\mathbb{T}_N \times [-1, L+2]$ par $\sigma \equiv s$ sur $\mathbb{T}_N \times \{L+2\}$ et $\sigma \equiv \tau_{e_1 - e_3}\sigma_{\text{des}}$ sur $\mathbb{T}_N \times \{-1\}$. Ainsi chaque site de $\partial^+\Lambda^*$ ($\partial^-\Lambda^*$) est le centre d'un cube ordonné (désordonné) de σ.

Construction de J_1 Si i est un sommet de Λ^*, on pose $\sigma_i^* = m(i) \in M := \{1, \ldots, q\} \cup \{\bigstar, \blacklozenge\}$ la couleur du cube $C(i)$ dans σ. On définit $S^m(\sigma^*)$ comme l'ensemble des sites de Λ^* où σ^* prend la valeur $m \in M$. Soit V_1 la composante connexe de $S^\bigstar$ qui contient $\partial^-\Lambda^*$, et appliquons-lui le théorème 37. On obtient une collection de plaquettes $Q_1 = Q_1^- \cup Q_1^+$, composée de deux surfaces déconnectant toutes deux $\partial^-\Lambda^*$ de $\partial^+\Lambda^*$. Par construction, Q_1^- est l'ensemble des plaquettes horizontales qui forment la frontière inférieure de $\Lambda_{N,L}$. On notera J_1 l'ensemble des cubes frustrés possédant au moins une face dans Q_1^+, et nous verrons que J_1 ainsi construite est 1–connexe.

Démonstration de la 1–connexité de J_1 Soit $s, t \in \Lambda^*$ les centres respectifs de deux cubes de J_1, et construisons un chemin de cubes partant de $C(s)$ et arrivant à $C(t)$. Pour commencer, nous utilisons la connexité du graphe frontière $\Delta\,\mathrm{Ext}^+\,Q^1$: par construction de J_1, s, t sont deux sommets de $\Delta\,\mathrm{Ext}^+\,Q^1$, et on peut les relier par un chemin dans ce graphe.

Lemme 91. *Si u, v, w sont trois points consécutifs de ce chemin, et si $C(v) \notin J_1$, alors il existe deux cubes $C(v'), C(v'') \in J_1$ tels que la collection formée par les 4 cubes $C(u)$,$C(v')$,$C(v'')$,$C(w)$ soit 1–connexe.*

Ainsi, en remplaçant chaque cube $C(v) \notin J_1$ par deux autres cubes, on obtient un chemin 1–connexe de cubes de J_1 partant de $C(s)$ et arrivant à $C(t)$: J_1 est bien connexe.

Démonstration du lemme. Prenons $p = p(e)$ une plaquette de $\overline{Q}_1 \setminus Q_1$ avec $e = (v, v')$, et $p' = p(e')$ une plaquette de Q_1 telle que $p \sim p'$. On notera z le milieu de l'arête $[p] \cap [p']$.

Comme $C(v) \notin J_1$ est à l'extérieur de $[Q_1]$, p' n'est pas une face de $C(v)$: soit c'est une face de $C(v')$, soit p et p' sont coplanaires,

Dans le premier cas, on définit v'' par $z = \frac{v'+v''}{2}$, de sorte que $C(v'), C(v'')$ soient des cubes de J_1. Dans le deuxième cas, le cube désordonné adjacent à $[p']$ ne peut être adjacent à $C(v)$ car $v \notin J_1$, donc le cube frustré adjacent à $[p']$ est lui bien adjacent à $C(v)$, et on notera v'' son centre.

Dans les deux cas, $C(v')$ et $C(v'')$ sont dans J_1 et ils partagent une même arête de $C(v)$; par ailleurs les plaquettes $C(v) \cap C(v')$ et $C(v) \cap C(v'')$

sont orthogonales. Comme $u \sim v$, on a nécessairement $C(u) \sim C(v')$ ou $C(u) \sim C(v'')$ (et de même pour $C(w)$). La collection formée par ces 4 cubes est donc bien 1–connexe. □

Construction des interfaces Remarquons maintenant que tout chemin de P^d à P^o traverse nécessairement Q_1, et *a fortiori* J_1. La composante 1–connexe de $\mathcal{F}(\sigma)$ contenant J_1 est donc bien une interface de σ, que l'on notera I_1.

Comme l'ensemble Q des plaquettes appartenant à un cube de I_1 est 1–connexe, le graphe frontière $\Delta\,\mathrm{Ext}^+[Q]$ est connexe. La maximalité de I_1 assure de plus que les sommets de ce graphe sont les centre de cubes ordonnés de σ, nécessairement tous de même couleur $m \in \{1, \ldots, q, \bigstar\}$.

Soit V_2 la composante connexe de $S^m(\sigma^*)$ contenant les cubes centrés sur les sommets de $\Delta\,\mathrm{Ext}^+[Q]$; si V_2 intersecte $\partial^+\Lambda$, les cubes autour de $\Delta\,\mathrm{Ext}^+[Q]$ sont ordonnés de couleur $m = s$, et σ ne possède qu'une seule interface. Sinon, $V_2(s) \cap \partial^+\Lambda = \emptyset$, et on obtient une seconde interface en répétant le processus ci-dessus : on prend Q_2 l'enveloppe du graphe connexe V_2, à partir de laquelle on construit J_2 puis I_2. Les autres interfaces sont construites en itérant ce procédé.

Propriétés des interfaces Le fait que la frontière extérieure de chaque interface possède deux composantes connexes découle bien sûr du théorème 37. La pureté de σ sur la frontière extérieure est une conséquence directe de la définition d'interface, et le type est constant sur chaque composante connexe de la frontière grâce à l'argument donné plus haut. Enfin, si la couleur des cubes sur ΔI_i^+ était différente de la couleur des cubes de ΔI_{i+1}^-, la même construction montrerait l'existence d'une interface entre I_i et I_{i+1}. □

Définition 92 (Plateaux, murs)**.** On dira qu'un cube d'une interface I est *régulier* s'il est le seul cube de I dans sa colonne. Les *plateaux* de I seront les parties 1–connexes maximales de ses cubes réguliers, et les *murs* de I les parties 1–connexes maximales de ses cubes irréguliers.

Si I est une interface ordre–ordre ou ordre–désordre, on remarque que tous les cubes d'un plateau donné C sont centrés sur le même plan horizontal $z = h(C)$, qui définit la *hauteur* du plateau C.

Remarque 93. Pour les interfaces désordre–désordre, on ne peut *a priori* rien dire sur ces plateaux ; une telle interface peut en effet être entièrement régulière et pourtant intersecter de nombreux plans horizontaux.

On notera que nos conditions au bord assurent l'existence d'au moins une interface ordre–désordre ; l'éventuel problème que pourrait poser les interfaces désordre–désordre n'en sera donc pas un.

Définition 94 (Socle de rigidité)**.** Pour toute configuration σ, on notera $I(\sigma)$ la première de ses interfaces ordre–désordre et $\mathcal{R}(I)$ l'un des plateaux de I d'aire maximale, appelé *socle de rigidité* de I.

Si Γ est une collection de cubes (ou de plaquettes), on notera $|\Gamma|$ son cardinal. Le poids $w(Q)$ d'une collection de cubes Q est alors défini par $w(Q) = |Q| - |\Pi(Q)|$. Nous allons montrer que $\mathcal{I}(\sigma)$ satisfait certaines inégalités de Peierls :

Théorème 95 (Inégalités de Peierls)**.** *Il existe $a = a(q) > 0$ tel que pour tout $\beta > 0$, pour tout L, et pour tout N pair, les inégalités de Peierls suivantes sont satisfaites :*

- *pour toute collection de cubes $\mathcal{I}$,*

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}\right) \leq a^{w(\mathcal{I})},$$

- *et pour toute collection de murs $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$*

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\gamma_1, \ldots, \gamma_r \subset \mathcal{I}(\sigma)\right) \leq a^{\sum|\gamma_i|},$$

où $a(q) \to 0$ quand $q \to \infty$,

De ce théorème nous déduirons exactement comme pour les interfaces d'Ising que pour c assez petit :

- si L est d'ordre au plus q^{cN^2}, alors $\mathcal{I}(\sigma) = \{I\}$ est connexe avec probabilité proche de 1 si N est grand ;
- si L est d'ordre au plus q^{cN}, alors l'interface $I = \mathcal{I}$ est typiquement dénouée ;
- si L est d'ordre au plus $q^{cN^{2/3}}$, alors I est typiquement rigide (*i.e.* $\mathcal{R}(I(\sigma))$ est typiquement très grand).

Remarque 96 (Justification heuristique des inégalités de Peierls). Les inégalités de Peierls ci-dessus peuvent être justifiées par l'argument heuristique suivant. Elles sont valides à toute température, mais pour des raisons très différentes. Chaque cube frustré apporte une contribution à la phase ordonnée ; il est donc normal que de grands contours de cubes frustrés soient assez rares à haute température. Pour une raison symétrique, ces grands contours sont assez rares à basse température. Enfin, à la température critique, la rareté de ces contours s'explique par la nature même de la transition de phases concernée. En effet, si la phase ordonnée coexiste avec la phase désordonnée,

c'est précisément parce que ces deux phases se mélangent très difficilement. La méthode donnée dans [Shl86] pour démontrer cette transition repose essentiellement sur ce fait.

Remarquons que bien que les résultats ci-dessus soient valides à toute température, ils n'ont de véritable intérêt qu'à la température critique, puisqu'aux autres températures l'interface est plaquée contre l'une des parois horizontales de la boîte — la phase typique de cette température remplissant alors tout le système. La valeur exacte de β_c n'étant cependant pas connue, nous aurions des difficultés à étudier le système précisément en ce point. La puissance de la méthode proposée réside notamment dans son indifférence au régime de température.

— 8 —

Démonstration des inégalités de Peierls

Soit donc une collection de cubes $\mathcal{I}$ admissible, au sens où il existe une configuration σ de $\Lambda_{N,L}$ telle que $\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}$.

Si p est une plaquette élémentaire de $\mathbb{T}_N$, on lui associe naturellement la colonne de $c = \Pi^{-1}(p) \subset \Lambda_{N,L}$. $\mathcal{C}_{N,L}$ désignera l'ensemble des colonnes du système. Pour toute colonne $c \in \mathcal{C}_{N,L}$ on notera $\mathcal{I}_c = \mathcal{I} \cap c$; les composantes connexes de $\mathcal{I}_c$ seront appelées blobs, cf. Figure 8.1.

8.1 Structure des blobs

Par définition, un blob est donc formé de cubes frustrés adjacents. Nous les étendons en leur ajoutant les deux cubes purs situés à leurs extrémités. Si ce procédé a pour conséquence de faire coaguler deux blobs, nous considérons qu'ils n'en forment plus qu'un. Ceci fait, les collections de cubes consécutifs obtenues sont disjointes deux à deux ; nous les appellerons *défauts*, et les noterons $F_1, \ldots, F_r$.

Le *type* d'un défaut sera donné par les couleurs $\epsilon_i, \epsilon'_{i+1} \in \{1, \ldots, q, \bigstar\}$ des deux cubes à ses extrémités, et nous noterons a_i, b_i les hauteurs extrêmes de $F_i = c \cap \{a_i \leq z \leq b_i\}$.

Les types dépendent de bien sûr de σ, mais comme pour le modèle d'Ising, ils satisfont une relation de compatibilité :

Proposition 97 (Alternance des types)**.** *Soit $F_1, \ldots, F_r$ la famille de défauts de σ dans une colonne. Alors les types des F_i dans σ satisfont :*

- $\epsilon_1 = \bigstar$, $\epsilon'_r = s$,
- $\forall i < r$, $\epsilon'_{i+1} = \epsilon_i$.

Démonstration. En effet, le premier cube de F_1 appartient à la frontière inférieure de la première interface de σ. D'après la proposition 90, le type de σ sur cette frontière est désordonné, donc $\epsilon_1 = \bigstar$. De même, $\epsilon'_r = s$.

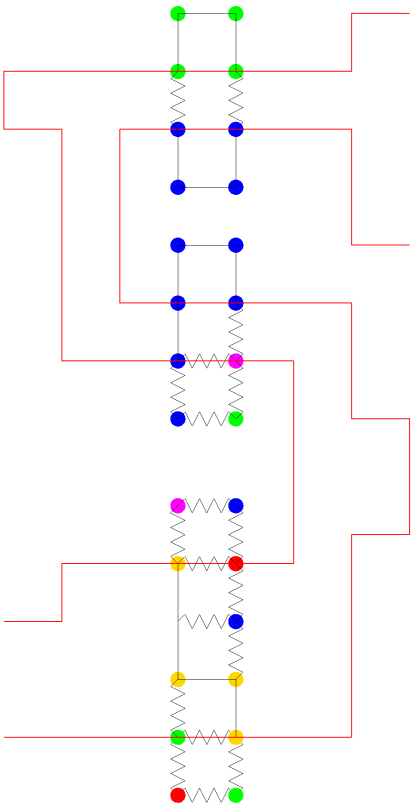


FIG. 8.1: Exemple de (trois) blobs dans une colonne. L'interface est comprise entre les lignes rouges ; les arêtes désordonnées (ordonnées) sont indiquées par des lignes brisées (droites). Les disques de couleur représentent les valeurs prises par la configuration.

Soit u et v les centres respectifs des cubes purs terminant F_1 et commençant F_2. Soit ils appartiennent à la frontière extérieure d'une même interface de σ, soit ils appartiennent à la frontière extérieure de deux interfaces distinctes, nécessairement consécutives. Dans les deux cas, la proposition 90 nous assure que $C(u)$ et $C(v)$ sont du même type. $\square$

Définition 98 (Blob trivial, colonnes régulières)**.** Un blob est dit *trivial* s'il est formé d'un seul cube (frustré). $\mathcal{I}$ est dite *régulière* dans la colonne c si $\mathcal{I}_c$ ne possède qu'un seul blob, et si ce blob est trivial. La colonne c sera alors dite *singulière*. $C(\mathcal{I})$ sera l'ensemble des colonnes singulières de $\mathcal{I}$.

Exemple 99. La figure 8.1 présente trois blobs, de types respectifs $(\bigstar, \bigstar)$, $(\bigstar, \text{bleu})$ et $(\text{bleu}, \text{vert})$. Les deux derniers blobs sont triviaux.

Le *motif* de σ est l'application $\rho(\sigma) : E(\Lambda) \to \{0, 1\}$ qui prend la valeur

0 sur les arêtes désordonnées de σ, et 1 sur ses arêtes ordonnées. ρ fixe donc la nature des arêtes de σ dans la boîte Λ. Avant d'appliquer la méthode de positivité par réflexion, nous allons subdiviser l'événement $\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I}$ selon le motif que les arêtes de σ suivent le long des défauts de l'interface.

Soit $W(\mathcal{I})$ l'ensemble des cubes qui appartiennent à l'un des défauts d'une colonne singulière de $\mathcal{I}$. Lorsque c n'est pas régulière, nous fixons le motif π_c des arêtes de σ à l'intérieur des défauts de $\mathcal{I}_c$; π sera la collection des π_c lorsque c parcourt les colonnes singulières de $\mathcal{I}$. On notera $\mathcal{A}(\mathcal{I})$ l'ensemble des choix de π compatibles avec $\mathcal{I}$.

Définissons l'événement $\mathcal{I}^\pi$:

$$\mathcal{I}^\pi = \{\mathcal{I}(\sigma) = \mathcal{I} \text{ et } \pi_{\mathcal{I}}(\sigma) \equiv \pi\},$$

où $\pi_{\mathcal{I}}$ est la restriction de ρ aux arêtes des cubes de $W(\mathcal{I})$. On notera $\pi_c(\sigma)$ la restriction de ρ aux arêtes des défauts de $\mathcal{I}_c$.

γ_c sera l'événement mesurable par les spins de la colonne c défini par :

$$\gamma_c = \{\mathcal{I}_c(\sigma) = \mathcal{I}_c\} \cap \{\pi_c(\sigma) = \pi_c\} \cap \bigcap_{i \in J(\pi)} \left\{\sigma_{|\{z=b_i\}} = \sigma_{|\{z=a_{i+1}\}}\right\},$$

où $J(\pi)$ est l'ensemble des indices i pour lesquels π_{F_i} se termine par un cube ordonné.

L'inégalité de l'échiquier se traduit dans ce contexte par :

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\pi_{c_1} \cap \ldots \cap \pi_{c_k}\right) \leq \left(\prod_{i=1}^{k} \mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\gamma_{c_i}^N\right)\right)^{1/N^2}, \tag{8.1}$$

Les inégalités de Peierls du Théorème 95 seront une conséquence immédiate de (8.1), de la Proposition 100 et du Lemme 101 ci-dessous :

Proposition 100. *Il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $\pi \in \mathcal{A}(\mathcal{I})$, et pour toute colonne $c \in C(\mathcal{I})$:*

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\gamma_c^N\right) \leq a^{(m_c-1)N^2},$$

où $m_c = |\mathcal{I}_c|$ est le nombre de cubes frustrés de $\mathcal{I}$ dans la colonne c, et où γ_c^N est l'événement obtenu à partir de γ_c par multiples réflections. En outre, $a(q) \to 0$ lorsque $q \to \infty$.

Lemme 101.

$$|\mathcal{A}(\mathcal{I})| \leq 2^{24w(\mathcal{I})}.$$

Démonstration du Lemme 101. Pour chaque colonne singulière c,

$$|\mathcal{I}_c| \leq 2\left(|\mathcal{I}_c| - 1\right)$$

et

$$\sum_{c \in C(\mathcal{I})} \left(|\mathcal{I}_c| - 1\right) = w(\mathcal{I}),$$

donc $\sum_{c \in C(\mathcal{I})} |\mathcal{I}_c| \leq 2w(I)$. Puisqu'il y au plus $2^{12|\mathcal{I}_c|}$ façons de choisir π_c dans la colonne c, il y a bien au plus $2^{24w(\mathcal{I})}$ façons de choisir π. □

La fin du chapitre est consacrée à la démonstration de la Proposition 100.

8.2 Estimation de γ_c^N

Commençons par décrire cet événement réfléchi. À partir de réflexions successives du motif π_c, on obtient un motif réfléchi π_c^N qui donne la nature de chaque arête dans le volume $\bigcup \Lambda_i$, où $\Lambda_i = \Lambda_{N,L} \cap \{a_i \leq z \leq b_i\}$.

Définition 102 (Tranche)**.** Une *tranche* de $\Lambda_{N,L}$ est un volume de la forme

$$\Lambda(a,b) := \Lambda_{N,L} \cap \{a \leq b\}\,.$$

On notera π_i^N la restriction de π_c^N à la tranche Λ_i. Ainsi γ_c^N se produit si et seulement si dans chaque tranche Λ_i nous observons le motif périodisé π_i^N, et si pour tout i tel que π_i^N se termine par un plan ordonné, alors π_{i+1}^N commence par un plan ordonné de même couleur.

On notera ∂_i^b la frontière inférieure de Λ_i et ∂_i^t sa frontière supérieure. L'ensemble des configurations $\eta = (\eta_i^b, \eta_i^t)$ définies sur $\partial\pi_c^N = \bigcup \partial\Lambda_i$ et compatibles avec γ_c^N sera noté $\mathcal{E}(\gamma_c^N)$; on a alors

$$\gamma_c^N = \bigcup_{\eta \in \mathcal{E}} \gamma_c^N(\eta).$$

La fonction de partition restreinte à $\gamma_c^N(\eta)$ se factorise facilement selon les tranches Λ_i :

$$Z_{N,L}^{\beta,q}\left(\gamma_c^N\right) = \prod_{i=1}^{r} Z_{\Lambda_i}^{\eta_i^b,\eta_i^t}\left(\pi_i^N\right) \prod_{i=0}^{r} Z_{\Lambda_i'}^{\eta_i^t,\eta_{i+1}^b}, \tag{8.2}$$

où $\Lambda_i' = \Lambda_{N,L} \cap \{b_i \leq z \leq a_{i+1}\}$, $b_0 = 0$ et $b_{r+1} = L+1$ par convention. Dans le cas où $a_{i+1} = b_i$, la fonction de partition correspondante est prise égale à 1 par convention.

Remarque 103 (Heuristique de l'inégalité de Peierls, cf Fig. 8.2). L'inégalité de Peierls dit essentiellement que chaque couche de frustration induit un surcoût exponentiel. La figure 8.2 illustre la réflexion d'un défaut d'épaisseur 4, ainsi que les deux événements auxquels on va le comparer selon la température.

On considère ici un défaut non-problématique dont les cubes suivent le motif ci-dessous :

$$(..., d, d, f, f, f, f, o, o, ...)\,,$$

ce qui signifie que la tranche défectueuse de la Figure 8.2 a une épaisseur de 4 unités, et se trouve comprise entre une phase désordonnée et une phase ordonnée. Nous verrons qu'en lui substituant l'une des deux tranches défectueuses (plus minces) suivantes :

$$(..., d, d, d, d, d, f, o, o, ...)$$

ou

$$(..., d, d, f, o, o, o, o, o, ...)$$

on obtient le gain de probabilité escompté.

Celui des deux motifs qui permet d'obtenir ce gain dépend de la température. Dans le régime des hautes températures, le premier scénario (progression du désordre) supplante la bande de frustration, alors qu'à basse température, c'est le second. De plus, – ce qui est d'une importance cruciale – les deux régimes de température s'intersectent, et à la température commune, chacun des deux scénarios a une probabilité supérieure à celle de la tranche défecteuse initiale. Notons également que la zone de frustration ne disparaît jamais complètement : dans chaque colonne il y a toujours au moins un cube frustré entre la phase désordonnée et la phase ordonnée.

Définition 104 (Nature des conditions au bord, des défauts)**.** Les conditions au bord η_i seront dites *homogènes* si η_i^b et η_i^t sont de même nature, ordonnée ou désordonnée ; on dira alors que η_i est ordonnée ou désordonnée. Elles seront dites *hétérogènes* sinon. Un défaut sera dit *frontalier* si son blob d'origine intersecte P^d et *interne* sinon.

Remarque 105. Par la suite, nous commettrons un léger abus de langage et de notation en parlant de défaut F_i^N pour désigner l'événement que π_i^N se produise dans Λ_i et que σ coïncide avec η_i sur $\partial\Lambda^i$. On considérera par exemple des *défauts hétérogènes internes*, sans ambiguïté sur les objets auquel se réfère ces adjectifs.

Le lemme suivant montre que l'on peut toujours se restreindre au cas où l'on a au plus deux défauts :

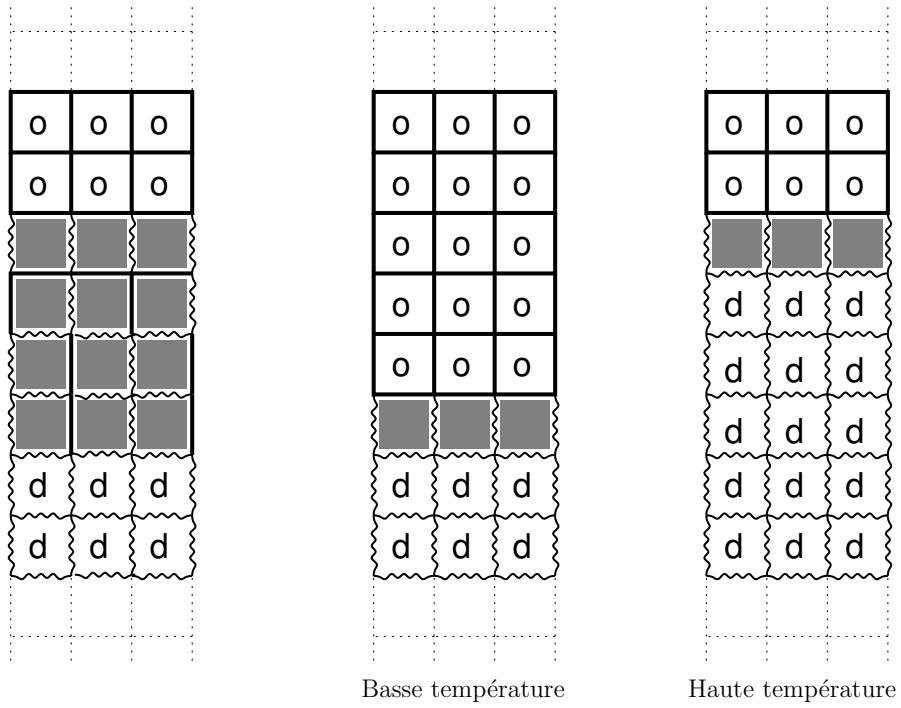


FIG. 8.2: De gauche à droite : une tranche défectueuse de largeur 4 et ses substitutions à basse et haute températures. Les arêtes ordonnées (désordonnées) sont représentées par des segments droits (ondulés).

Lemme 106 (Recollement)**.** *On peut toujours construire un événement* $\phi\left(\gamma_c^N(\eta)\right)$ *de telle manière que :*

- $\phi\left(\gamma_c^N(\eta)\right)$ *contient exactement un défaut hétérogène et éventuellement un défaut homogène frontalier (désordonné),*
- *le nombre de couches frustrées dans* $\phi(\gamma_c^N(\eta))$ *est le même que dans* γ_c^N*,*
- $\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\gamma_c^N(\eta)\right) \leq \mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\phi\left(\gamma_c^N(\eta)\right)\right)$.

Démonstration. Nous allons successivement recoller les défauts séparés par une phase ordonnée, puis les défauts séparés par une phase désordonnée. La figure 8.3 illustre une application de ce procédé sur l'exemple des trois défauts de la figure 8.1.

Suppression des phases ordonnées Le but est ici de regrouper les défauts consécutifs séparés par une phase ordonnée.

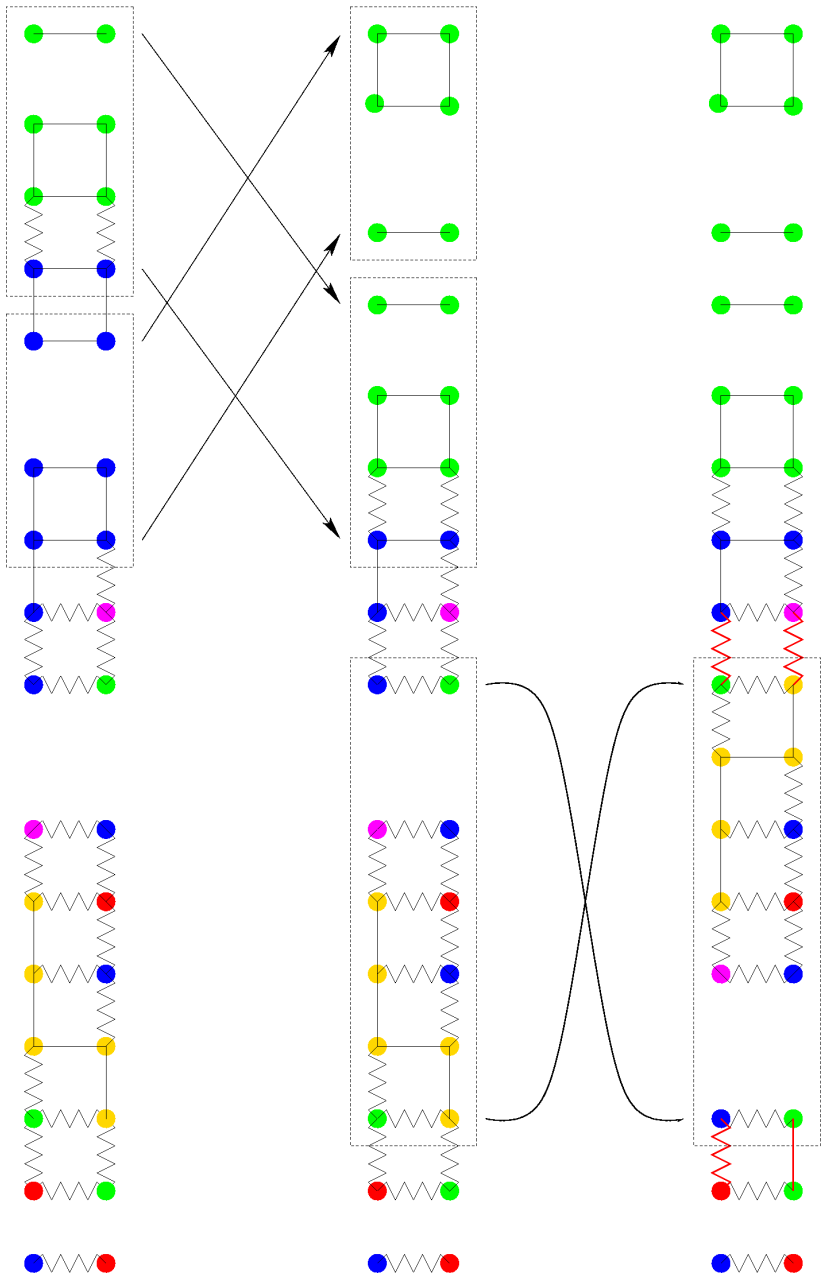


FIG. 8.3: Recollement des trois blobs de la figure 8.1. Sur les trois schémas, nous avons indiqué les conditions au bord utilisées. Les quatre arêtes susceptibles d'être modifiées lors de la deuxième transformation ont été indiquées en rouge.

Supposons que F_i^N et F_{i+1}^N soient séparés par une phase ordonnée de couleur s', et rappelons que la couleur de la phase supérieure est s. La première étape consiste à retirer la phase ordonnée s' du système, à la transformer en une phase équivalente de couleur s, et à l'interchanger avec la partie supérieure du système.

Posons $\tilde{\Lambda}_i = \{a_i \leq z \leq b_{i+1} + l_{i+1} - 2\}$, où $l_{i+1} = b_{i+1} - a_{i+1}$ est l'épaisseur de la tranche Λ_{i+1}. L'opération de recollement ϕ_i est définie par :

$$\phi_i(\sigma)_{x,y,z} = \begin{cases} \sigma_{x,y,z} & \text{si } z \leq b_i - 1 \\ \sigma_{x,y,z+a_{i+1}-b_i+2} & \text{si } b_i \leq z \leq L - a_{i+1} + b_i - 1 \\ \sigma_{x,y,z-a_{i+1}+L} + s - s' & \text{si } z \geq L - a_{i+1} + b_i \end{cases}$$

Cette opération ϕ_i est injective et conserve l'énergie ; par ailleurs on peut voir que tous les défauts F_j^N, $j \neq i, i+1$ ont été soit translatés soit laissés en place. En revanche, nous avons assemblé F_i^N et F_{i+1}^N pour obtenir un nouveau défaut $\tilde{F}_i^N$, qui contient exactement $m_i + m_{i+1}$ couches frustrées.

En itérant ce procédé, on recolle progressivement toutes les phases ordonnées en haut du cylindre — jusqu'à ce qu'aucun des défauts obtenus après recollement ne commence par un cube pur ordonné. Les tranches de définition de ces nouveaux défauts G_j^N seront notées $\Lambda_N(a'_j, b'_j)$, $1 \leq j \leq s$. L'alternance du type des phases étant maintenue par l'opération de recollement ϕ_i, les G_j sont tous homogènes de type désordonné à l'exception de G_s qui est hétérogène.

Suppression des phases chaotiques Supposons $s > 1$. G_{s-1}^N et G_s^N sont alors séparés par une phase chaotique. Nous supposerons en outre que G_{s-1} commence par un cube désordonné — c'est toujours le cas, sauf si $s = 2$ et si $G_{s-1} = G_1$ est frontalier. À chaque configuration σ satisfaisant $G_1^N, \ldots, G_s^N$, nous allons associer bijectivement une configuration σ', qui présentera un défaut de moins, et *dont l'énergie sera plus basse.*

Pour cela, nous allons renverser le système entre le premier cube de G_{s-1} et le premier cube de G_s de façon à recoller ces deux défauts en un seul défaut hétérogène. L'application ψ correspondante définie par

$$[\psi(\sigma)](x,y,z) = \begin{cases} \sigma\left(x, y, a'_{s-1} + a'_s + 1 - z\right) & \text{si } z \in \left[a'_{s-1} + 1, a'_s\right], \\ \sigma(x,y,z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

est bijective. D'autre part, ψ ne peut que diminuer l'énergie d'une configuration $\sigma \in G_1^N, \ldots, G_s^N$ — chaque arête verticale connectant la tranche $\Lambda_N(a'_{s-1} + 1, a'_s)$ avec son complémentaire étant désordonnée.

On peut itérer ce procédé sans problème jusqu'à n'avoir plus qu'un seul défaut, ou éventuellement deux défauts dans le cas où G_1 est frontalier.

Le lemme est donc démontré, puisque les différentes opérations de recollement conservent le nombre de couches frustrés et diminuent l'énergie des configurations. □

Remarque 107. Au cours de la suppression d'une phase chaotique, la procédure de recollement peut détruire la périodicité du motif π des arêtes dans le défaut obtenu. Dans ce cas, il est nécessaire d'appliquer une nouvelle fois l'inégalité de l'échiquier à l'événement $\phi\left(\gamma_c^N\right)$. Comme π peut prendre au plus 2^{m-1} valeurs dans chaque colonne, il y a au plus $2^{(m-1)N^2}$ événements $\psi\left(\gamma_c^N\right)$ réfléchis envisageables dans l'inégalité de l'échiquier correspondante, d'où :

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\phi\left(\gamma_c^N\right)\right) \leq 2^{(m-1)N^2} \sup \mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\psi\left(\gamma_c^N\right)\right),$$

où le supremum est pris sur tous les événements $\psi\left(\gamma_c^N\right) = \left(\gamma_c'\right)^N$ possibles. Ces événements sont obtenus par réflexion d'événements de la forme γ_c', où γ_c' contient au plus deux défauts — 1 seul s'il n'a pas de défaut homogène frontalier. Le nombre de cubes frustrés total étant supérieur ou égal à celui de γ_c^N, on pourra donc supposer que les événements du lemme 106 sont bien périodiques.

La proposition 100 découlera donc directement de (8.2), du Lemme 106 et du contrôle des défauts donné par la proposition suivante :

Proposition 108. *Pour $N \geq N_0$ suffisamment grand, il existe une constante $a = a(q) < 1$ telle que pour tout défaut hétérogène F avec $\eta_F^t = \sigma_{\mathrm{ord}}$,*

$$\frac{Z_{\Lambda_F}^{\eta_F^b,\eta_F^t}\left(F^N\right)}{Z_{\Lambda_F}^{\eta_F^b,\eta_F^t}} \leq a^{(m_F-1)N^2}, \tag{8.3}$$

et pour tout défaut homogène frontalier G de type désordonné,

$$\frac{Z_{\Lambda_G}^{\eta_G^b,\eta_G^t}\left(G^N\right)}{Z_{\Lambda_G}^{\eta_G^b,\eta_G^t}} \leq a^{m_G N^2}, \tag{8.4}$$

En outre, $a(q) \to 0$ lorsque $q \to \infty$.

Cette dernière proposition sera démontrée en donnant une borne inférieure (supérieure) sur la fonction de partition apparaissant au dénominateur (numérateur) de (8.4) et (8.3).

8.3 Bornes inférieures

Le but de cette section est de donner une borne inférieure sur les fonctions de partition dans des tranches $\Lambda = \{a \leq z \leq b\}$, avec différentes conditions au bord. Sur $\{z = a\}$ les conditions au bord seront toujours désordonnées, et nous examinerons le cas particulier où ces conditions sont σ_{des}. Les conditions au bord sur $\{z = b\}$ seront soit désordonnées, soit constantes. On notera η ces conditions au bord.

La borne inférieure obtenue sur la fonction de partition dans Λ sera la somme de deux termes $Z_\Lambda^{\beta,\eta}(des) + Z_\Lambda^{\beta,\eta}(ord)$. Le premier terme correspond aux configurations typiques des hautes températures alors que le second terme correspond aux configurations typiques des basses températures. Nous pouvons déjà donner une borne pour le premier terme, indépendante des conditions au bord choisies :

$$Z_\Lambda^{\beta,\eta}(des) \geq (q-6)^{lN^2} e^{-\beta(3l+1)N^2}, \tag{8.5}$$

où $l = b - a - 1 \geq 0$ est le nombre de couches internes dans la tranche Λ.

Démonstration. Toute configuration σ complètement désordonnée a une énergie $H_\Lambda^\eta(\sigma) = (3l+1)N^2$, donc il nous suffit de trouver au moins $(q-6)^{lN^2}$ telles configurations. Pour cela, nous remarquons d'abord que chaque site a 6 voisins.

Soit x, y tels que $x+y$ soit pair, et fixons les valeurs de σ sur le segment vertical $\{x\} \times \{y\} \times [a, b]$ de telle sorte que toutes les arêtes de ce segment soient désordonnées : nous avons au moins $(q-1)(q-2)^{l-1} \geq (q-6)^l$ possibilités pour cela. Comme le choix de ces valeurs pour chacun de ces segments se fait indépendamment des autres segments, on a au moins $(q-6)^{lN^2/2}$ possibilités de désordonner simultanément toutes leurs arêtes.

Une fois ce choix fait, en chacun des sites restants $j = (x, y, z)$, $x + y$ impair, on choisit la valeur de σ_j de telle sorte que les 6 arêtes issues de j soient désordonnées : nous avons $(q-6)^{lN^2/2}$ possibilités pour cela, et les configurations ainsi obtenues sont toutes désordonnées dans la tranche Λ. □

Nous détaillons maintenant le cas des basses températures, en discutant selon la nature des conditions au bord.

Défauts hétérogènes

Ici, η est constante égale à s sur $z = b$. On prendra $Z_\Lambda^{\beta,\eta}(ord)$ la restriction de la fonction de partition à la configuration constante égale à s à

l'intérieur de Λ. Puisque cette configuration a une énergie d'au plus N^2, on a

$$Z_\Lambda^{\beta,\eta}(ord) \geq e^{-\beta N^2}. \tag{8.6}$$

Défauts frontaliers homogènes (désordonnés)

Ici, η est désordonnée sur les deux parois de Λ, avec $\eta_b = \sigma_{\text{des}}$. $Z_\Lambda^{\beta,\eta}(ord)$ sera définie comme la contribution de la configuration constante égale à l'une des valeurs prises par σ_{des}. Cette configuration ayant une énergie d'au plus $2N^2 - \frac{N^2}{4}$, on obtient la borne :

$$Z_\Lambda^{\beta,\eta}(ord) \geq e^{-\frac{7}{4}\beta N^2}. \tag{8.7}$$

8.4 Bornes supérieures : preuve de (8.4) et (8.3)

Nous considérons ici un défaut F^N quelconque, obtenu par réflection d'un motif π_c. Le système considéré est une tranche $\Lambda = \{a \leq z \leq b\}$ contenant $b - a$ couches de cubes élémentaires. Il y a donc $l = b - a - 1$ couches internes de spins dans Λ.

Remarque 109. Par construction des défauts, nous notons que

$$l \leq 2m, \tag{8.8}$$

où m est le nombre de cubes frustrés du défaut, avec égalité si et seulement si ce défaut a été obtenu par coagulation de m blobs contenant chacun 1 cube frustré ; notons que l'opération de recollement préserve cette relation. Ceci sera utilisé par la suite.

Définition 110 (Caractéristiques des défauts)**.** Un site de Λ sera dit *chaotique* dans F^N s'il est à l'intérieur de Λ et si toutes ses arêtes incidentes sont désordonnées. $\mathbf{K}$ désignera l'ensemble des *sites chaotiques* de F^N, et $\mathbf{D}$ l'ensemble de ses arêtes désordonnées. On notera $K = |\mathbf{K}|$ et $D = |\mathbf{D}|$.

$D^b(D^t)$ désignera le nombre d'arêtes verticales désordonnées de F^N attachées à $\partial^b\Lambda(\partial^t\Lambda)$.

Les composantes connexes du graphe formé par les arêtes ordonnées de F^N seront notées $X_1, \ldots, X_t$. Parmi ces composantes, celles qui ne touchent pas le bord de la boîte sont dites *internes* : on notera R leur nombre. Enfin, les composantes internes formées de segments verticaux seront considérées séparément : on notera $\mathbf{Q}$ leur ensemble et $Q = |\mathbf{Q}| \leq R$ leur nombre.

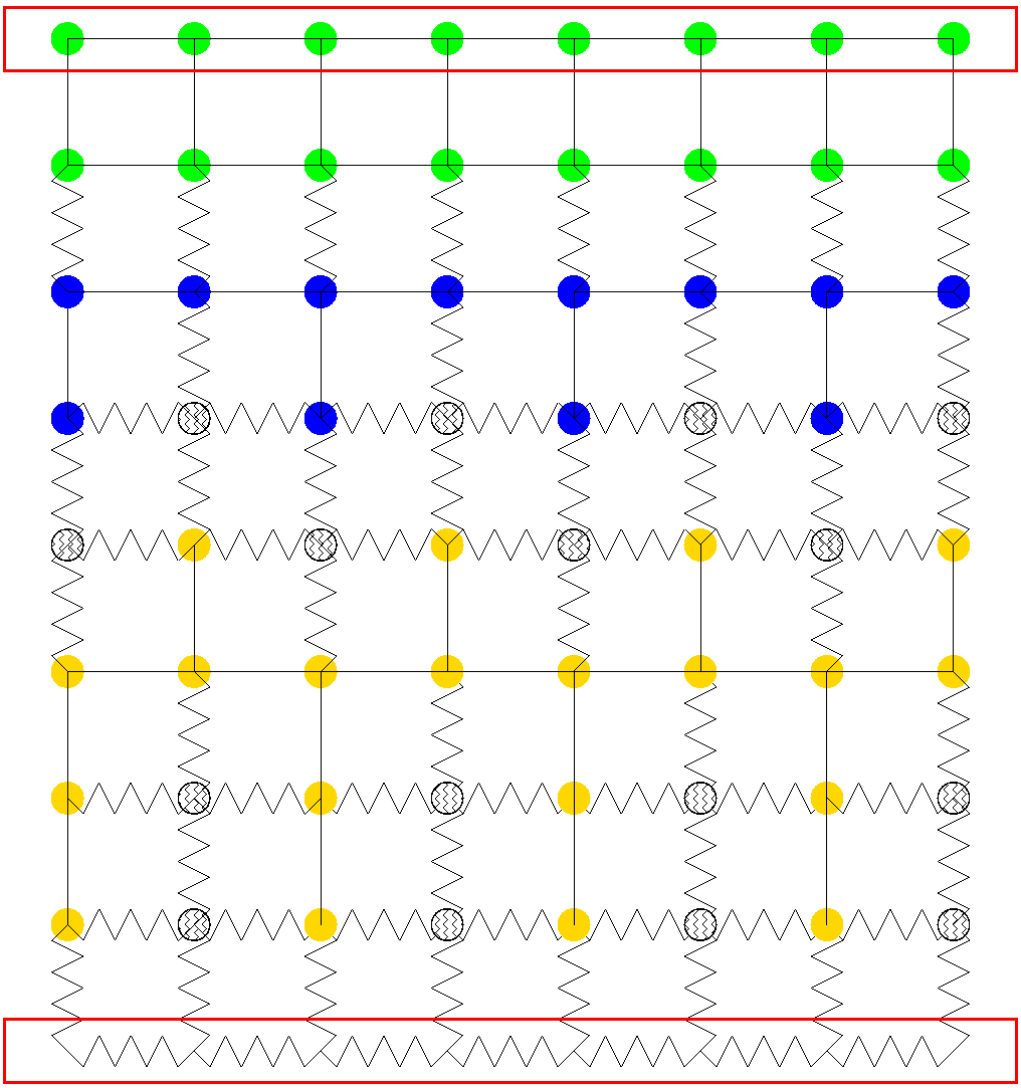


FIG. 8.4: Caractéristiques d'un défaut réfléchi

Exemple 111 (Caractéristiques des défauts). La figure 8.4 illustre, après réflexions successives, le défaut obtenu dans la figure 8.3. Ici, le graphe ordonné contient trois composantes connexes, signalées par des couleurs différentes. Les sites n'appartenant pas à ce graphe sont chaotiques ; ils sont indiqués par des disques striés sur la figure.

Ces caractéristiques permettent de donner une borne supérieure sur la fonction de partition associée au défaut :

Lemme 112 (Borne supérieure)**.** *Soit F^N un défaut itéré de type quel-*

conque. Alors

$$Z_\Lambda^{\beta,\eta}\left(F^N\right) \leq q^{K+R}e^{-\beta D}, \tag{8.9}$$

et

$$R \leq Q + 2lN. \tag{8.10}$$

Démonstration. Toute configuration σ satisfaisant le motif d'arêtes imposé par F^N possède D arêtes désordonnées. L'énergie d'une telle configuration est donc $H_\Lambda^\eta(\sigma) = D$. Nous allons maintenant majorer le nombre de ces configurations.

Les configurations qui nous intéressent sont toutes constantes sur chacune des composantes X_i, et cette valeur est déterminée par η lorsque X_i touche le bord de Λ. Le nombre de configurations satisfaisant F^N est donc majoré par q^{K+R}, ce qui démontre la première inégalité.

Quant à la deuxième inégalité, on remarque que toute composante X_i qui n'est pas un segment vertical contient une ligne horizontale complète. Comme il y a exactement $2lN$ lignes horizontales, (8.10) s'en déduit immédiatement. □

Défauts hétérogènes

Proposition 113. *Pour tout β, pour tout $q \geq 7$ et pour tout défaut hétérogène F^N on a*

$$\mu_\Lambda^{\beta,\eta}\left(F^N\right) \leq 7^{lN^2}\left(q^{-\frac{1}{3}}\right)^{D-3(K+R)-N^2}. \tag{8.11}$$

Démonstration. Ici, les conditions au bord sont désordonnées sur la face inférieure de Λ et constantes sur la face supérieure.

Si $e^\beta \leq q^{\frac{1}{3}}$, on utilise (8.5) et (8.9) :

$$\begin{aligned}
\mu_\Lambda\left(F^N\right) &\leq \frac{q^{K+R}e^{-\beta D}}{(q-6)^{lN^2}e^{-\beta(3l+1)N^2}} \\
&\leq \left(\frac{q}{q-6}\right)^{lN^2} q^{K+R-lN^2} e^{\beta\left((3l+1)N^2-D\right)} \\
&\leq \left(\frac{q}{q-6}\right)^{lN^2} \left(q^{\frac{1}{3}}\right)^{3(K+R)+N^2-D}.
\end{aligned}$$

Si $e^\beta \geq q^{\frac{1}{3}}$ on utilise (8.6) et (8.9) :

$$\begin{aligned}\mu_\Lambda\left(F^N\right) &\leq \frac{q^{K+R}e^{-\beta D}}{e^{-\beta N^2}}\\ &\leq q^{K+R}e^{\beta\left(N^2-D\right)}\\ &\leq \left(q^{\frac{1}{3}}\right)^{3(K+R)+N^2-D}.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant $\frac{q}{q-6} \geq 7$ lorsque $q \geq 7$. □

Défauts frontaliers homogènes

Proposition 114. *Pour tout β, pour tout $q \geq 7$ et pour tout défaut frontalier homogène G^N on a*

$$\mu_\Lambda^{\beta,\eta}\left(G^N\right) \leq 7^{lN^2}\left(q^{-\frac{l}{3(l-\frac{1}{4})}}\right)^{D-\frac{3\left(l-\frac{1}{4}\right)}{l}(K+R)-2N^2}. \tag{8.12}$$

Démonstration. Ici, le défaut est frontalier donc $\eta_b = \sigma_{\text{des}}$.

Si $e^\beta \leq q^{\frac{l}{3(l-\frac{1}{4})}}$, on utilise (8.5) et (8.9) :

$$\begin{aligned}\mu_\Lambda\left(G^N\right) &\leq 7^{lN^2}q^{K+R-lN^2}e^{\beta\left((3l+1)N^2-D\right)}\\ &\leq 7^{lN^2}\left(q^{\frac{l}{3(l-\frac{1}{4})}}\right)^{\frac{3(l-\frac{1}{4})}{l}(K+R)+\frac{7N^2}{4}-D}.\end{aligned}$$

Si $e^\beta \geq q^{\frac{l}{3(l-\frac{1}{4})}}$, on utilise (8.7) et (8.9) :

$$\begin{aligned}\mu_\Lambda\left(G^N\right) &\leq \frac{q^{K+R}e^{-\beta D}}{e^{-\beta\frac{7}{4}N^2}}\\ &\leq q^{K+R}e^{\beta\left(\frac{7}{4}N^2-D\right)}\\ &\leq \left(q^{\frac{l}{3(l-\frac{1}{4})}}\right)^{\frac{3(l-\frac{1}{4})}{l}(K+R)+\frac{7}{4}N^2-D}.\end{aligned}$$ □

Afin de contrôler les probabilités des différents défauts F^N, G^N de la Proposition 108, il nous suffit donc de démontrer la proposition suivante

Proposition 115 (Inégalités combinatoires)**.** *Il existe des constantes $\alpha > 0$ et $N_0 \geq 1$ telles que pour tout $N \geq N_0$:*

– *si le défaut F est hétérogène et si $\eta_F^t = \sigma_{\text{ord}}$ alors :*

$$D - 3(K+R) \geq N^2 + \alpha(m-1)N^2; \tag{8.13}$$

– *si le défaut G est frontalier homogène (on a donc $\eta_F^b = \sigma_{\text{des}}$) alors*

$$D - \left(3 - \frac{3}{4l}\right)(K+R) \geq \frac{7}{4}N^2 + \alpha m N^2. \tag{8.14}$$

Démonstration de la Proposition 108. (8.13), (8.11) et (8.8) montrent (8.4) avec $a(q) = 7^4 q^{-\alpha/3}$. (8.14), (8.12) et (8.8) montrent (8.3) avec $a(q) = 7^2 q^{-\alpha/3}$. □

8.5 Inégalités combinatoires

Dans cette section, nous démontrons les différentes inégalités de la Proposition 115. D'après les relations (8.8) et (8.10), il nous suffit de montrer la proposition suivante :

Proposition 116 (Inégalités combinatoires(*bis*))**.** *Il existe une constante $\alpha > 0$, telle que pour tout N*

– *si le défaut est hétérogène,*

$$D - 3(K+Q) \geq N^2 + \alpha(m-1)N^2; \tag{8.15}$$

– *si le défaut est frontalier homogène,*

$$D - \frac{3\left(l - \frac{1}{4}\right)}{l}(K+Q) \geq \frac{7}{4}N^2 + \alpha m N^2. \tag{8.16}$$

Nous aurons besoins de la proposition ci-dessous, qui est la clef de toutes les démonstrations qui vont suivre :

Proposition 117. *Pour tout défaut F^N, on a*

$$2D - 6K = cN^2 + D^b + \sum_j |\partial X_j|, \tag{8.17}$$

où $c = 1$ si F est homogène, $c = 0$ sinon. Ceci entraîne notamment :

$$2D - 6(K+Q) \geq (c+1)N^2 + Q + \frac{3}{4}mN^2 \tag{8.18}$$

pour les défaut internes, et

$$2D - 6(K+Q) \geq cN^2 + D^b + Q + \left(\frac{3}{4}m - \frac{1}{4}\right)N^2 \tag{8.19}$$

pour les défauts frontaliers.

Démonstration. En intervertissant les deux sommes dans la formule :

$$6K = \sum_{x \in \mathbf{K}} \sum_{e \ni x} \mathbb{1}_{e \in \mathbf{D}},$$

et en notant $f_K(e) \in \{0, 1, 2\}$ le nombre de points de K dans e, on obtient

$$6K = \sum_{e \in D} f_K(e).$$

D'autre part, on peut également récrire $\sum_j |\partial X_j|$:

$$\sum_j |\partial X_j| = \sum_{e \in D} f_O(e),$$

où $f_O(e) \in \{0, 1, 2\}$ est le nombre de composantes connexes de O touchées par e.

Supposons le défaut homogène, de sorte que $D^t = N^2$. Dans ces conditions, $f_K(e) = 2 - f_O(e)$ si $e \in \mathring{D} = D \setminus \left(D^b \cup D^t\right)$, et $f_K(e) = 1 - f_O(e)$ si $e \in D^b \cup D^t$. Mais alors

$$\begin{aligned} 2D - 6K &= D^t + D^b + \sum_{e \in D} f_O(e) \\ &= N^2 + D^b + \sum_j |\partial X_j| \,. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Si en revanche le défaut est hétérogène, $f_K(e) = 2 - f_O(e)$ si $e \in D \setminus D^b$ et $f_K(e) = 1 - f_O(e)$ si $e \in D^b$, d'où l'on déduit

$$2D - 6K = D^b + \sum_j |\partial X_j| \,. \tag{8.21}$$

Nous allons maintenant minorer chaque $|\partial X_j|$ à l'aide du nombre n_j de cubes frustrés ayant une arête en commun avec X_j. Si X_j ne touche pas la frontière désordonnée,

$$|\partial X_j| \geq \frac{3}{4} n_j, \tag{8.22}$$

et si X_j touche la frontière on a seulement

$$|\partial X_j| \geq \frac{3}{4} n_j - \frac{1}{4}. \tag{8.23}$$

Pour cela, remarquons que chaque cube frustré intersectant ∂X_j contient au moins 3 arêtes de ∂X_j, à moins que ce cube ne soit attaché à la frontière

désordonnée. Dans ce cas, le cube peut ne contenir que 2 arêtes de ∂X_j. (8.22) et (8.23) se déduisent alors du fait que chaque arête appartient à 4 cubes.

Nous noterons J l'ensemble des indices j tels que X_j est un segment vertical ne touchant pas la frontière, $|J| = Q$. Pour $j \in J$, nous avons $|\partial X_j| = n_j + 6$; comme $n_j \geq 4$, on en déduit

$$|\partial X_j| \geq \frac{3}{4} n_j + 7. \tag{8.24}$$

En combinant (8.22), (8.23) et (8.24) on obtient :

$$\sum_j |\partial X_j| \geq 7Q + \frac{3}{4} \sum_j n_j, \tag{8.25}$$

si le défaut est interne, et

$$\sum_j |\partial X_j| \geq 7Q + \frac{3}{4} \sum_j n_j - \frac{1}{4} N^2, \tag{8.26}$$

si le défaut est frontalier.

Comme tout cube frustré contribue à l'un des n_j, $\sum_j n_j \geq mN^2$. La proposition est donc démontrée en utilisant (8.20)+(8.25) ou (8.21)+(8.26) selon la nature du défaut. □

Internes hétérogènes : démonstration de (8.15)

Pour un défaut F^N interne hétérogène, la proposition 117 se lit :

$$2D - 6(K + Q) \geq N^2 + Q + \frac{3}{4} mN^2.$$

Si $m \geq 2$,

$$\begin{aligned} 2D - 6(K + Q) &\geq 2N^2 + \frac{3m - 4}{4} N^2 \\ D - 3(K + Q) &\geq N^2 + \frac{1}{4}(m - 1)N^2. \end{aligned}$$

Si $m = 1$, on obtient seulement $D - 3(K + Q) \geq N^2 - \frac{1}{8}N^2$, mais comme $D - 3(K + Q)$ est un multiple entier de $\frac{1}{4}N^2$, on en déduit

$$D - 3(K + Q) \geq N^2.$$

Dans les deux cas, (8.15) est démontrée avec $\alpha = \frac{1}{4}$. □

Frontaliers hétérogènes : démonstration de (8.15)

Soit F^N un défaut frontalier hétérogène, muni des conditions au bord $\eta^b = \sigma_{\text{des}}$ et $\eta^t = \sigma_{\text{ord}}$, nous partons de

$$2D - 6(K+Q) = D^b + \sum |\partial X_i| \,, \tag{8.27}$$

d'où nous déduisons

$$2D - 6(K+Q) = D^b + Q + \frac{3m-1}{4} N^2. \tag{8.28}$$

Nous allons utiliser les deux lemmes suivants :

Lemme 118. *Si X_0 est la composante connexe ordonnée contenant la frontière supérieure d'un défaut hétérogène frontalier avec conditions au bord $(\sigma_{\text{des}}, \sigma_{\text{ord}})$, alors*

$$|\partial X_0| \geq N^2,$$

avec égalité si et seulement si X_0 est la réflexion itérée du cube ordonné au sommet du défaut (on dira alors que X_0 est trivial*).*

Démonstration. En effet, aucune ligne verticale partant du sommet du défaut ne peut être totalement ordonnée, par choix des conditions au bord $\sigma_{\text{des}}, \sigma_{\text{ord}}$. ∂X_0 contient donc au moins une arête verticale dans chacune de ces lignes, au nombre de N^2. Si le plus haut cube frustré contient une arête verticale de X_0, il contient nécessairement une arête horizontale dans ∂X_0, sous peine d'être totalement ordonné sinon. L'égalité n'est donc possible que si toutes les arêtes verticales du dernier cube frustré sont désordonnées, ce qui assure la trivialité de X_0. □

Lemme 119. *Pour tout défaut hétérogène frontalier on a*

$$D^b + \sum_{i \notin J, i \neq 0} |\partial X_i| \geq N^2.$$

S'il y a égalité alors $D^b = N^2$ et X_0 est la seule composante hors de $\mathbf{Q}$.

Démonstration. Si $D^b = N^2$, c'est évident. Sinon, on peut choisir une arête verticale e ordonnée et attachée à la frontière désordonnée. Si $X(e)$ est la composante ordonnée contenant e, $\partial X(e)$ contient nécessairement une arête verticale, translatée de e verticalement. Comme il y a $N^2 - D^b$ telles arêtes e, que X_e est attachée au bord de Λ par construction, et que $X(e) \neq X_0$ à cause des conditions au bord, la contribution des arêtes verticales à $\sum_{i \notin J, i \neq 0} |\partial X_i|$ est au moins égale à $N^2 - D^b$.

Si la contribution des arêtes horizontales n'est pas nulle, elle est au moins égale à $\frac{1}{2}N^2$. On a donc

$$D^b + \sum_{i \notin J, i \neq 0} |\partial X_i| \geq N^2 + \frac{1}{2}N^2.$$

Si la contribution horizontale est nulle, les arêtes du plan $z = 1$ sont toutes ordonnées ; les conditions au bord imposent donc $D^b = \frac{3}{4}N^2$, et $\partial X(e)$ contient chacune des arêtes de D^b ainsi que N^2 arêtes verticales supplémentaires pour la séparer des cubes ordonnés au sommet du défaut. La contribution verticale est donc au moins égale à $\frac{7}{4}N^2 = \frac{5}{2}N^2 - D^b$, d'où

$$D^b + \sum_{i \notin J, i \neq 0} |\partial X_i| \geq 2N^2 + \frac{1}{2}N^2. \qquad \square$$

Démonstration de (8.15). Nous discutons selon les valeurs de m.

- $m \geq 4$. (8.28) implique (8.15) avec $\alpha = \frac{1}{8}$.
- $m \leq 3$. La combinaison des deux lemmes nous donne

$$2D - 6(K + Q) \geq 2N^2,$$

avec égalité si et seulement si X_0 est la seule composante ordonnée du défaut, et que X_0 est triviale. Dans ce cas, $m = 1$ et (8.15) est valide pour tout $\alpha > 0$. Dans tous les autres cas,

$$2D - 6(K + Q) \geq 2N^2 + \frac{1}{4}N^2,$$

et (8.15) est valide pour $\alpha = \frac{1}{24}$. $\square$

Frontaliers homogènes : démonstration de (8.16)

Pour un défaut frontalier homogène (désordonné), on a

$$2D - 6(K + Q) = N^2 + D^b + \sum |\partial X_i|, \tag{8.29}$$

et

$$2D - 6(K + Q) \geq N^2 + D^b + Q + \frac{3m - 1}{4}N^2. \tag{8.30}$$

On remarque que

$$D \geq 3N^2. \tag{8.31}$$

Nous allons utiliser les quatre lemmes suivants :

Lemme 120. *Si un défaut homogène possède une arête horizontale ordonnée, alors*

$$\sum_{i \notin J} |\partial X_i| \geq \frac{7}{4} N^2.$$

Démonstration du lemme 120. Soit e une telle arête horizontale, et P une plaquette horizontale contenant e. Si P est totalement ordonnée, $X(e)$ contient le plan horizontal en entier ; $\partial X(e)$ contient donc au moins N^2 arêtes verticales au-dessus de ce plan, et au moins $\frac{3}{4}N^2$ arêtes verticales en-dessous de ce plan, puisque les conditions au bord sont fortement désordonnées. Sinon, $\partial X(e)$ contient au moins deux arêtes horizontales de P, et au moins trois arêtes verticales de la colonne $\Pi^{-1}(\Pi P)$; les réflexions successives engendrent donc une contribution horizontale au moins égale à N^2 et une contribution verticale au moins égale à $\frac{3}{4}N^2$. □

Lemme 121. *Si toutes les arêtes horizontales d'un défaut homogène frontalier sont désordonnées et si $m \geq 2$, alors*

$$D^b + \sum_i |\partial X_i| \geq 3N^2 + 6Q,$$

avec égalité si et seulement si le défaut mesure deux cubes d'épaisseur, et s'il est totalement désordonné, à l'exception de $\frac{1}{4}N^2$ arêtes verticales attachées à la frontière inférieure.

Démonstration du lemme 121. Notre hypothèse assure que toutes les composantes ordonnées sont des segments verticaux. Puisque le premier cube est frustré, $D^b \leq \frac{3}{4}N^2$. Pour $j \notin J$, X_j part du fond de la boîte et $\sum |\partial X_j| \geq 10Q + \sum_{j \notin J} (4\,|X_j| + 1) \geq 10Q + 5\,|J^c|$. Puisque $|J^c| = N^2 - D^b$, nous avons $D^b + \sum |\partial X_j| \geq 10Q + 5N^2 - 4D^b \geq 10Q + 2N^2$. Le lemme est donc démontré si $Q \geq \frac{1}{4}N^2$, et nous supposerons $Q = 0$ par la suite.

Prenons maintenant une arête ordonnée dans le second cube frustré, qui est verticale par hypothèse. Comme $Q = 0$, la composante X_j correspondante vérifie $|X_j| \geq 2$. Après réflexions, on obtient $\frac{N^2}{4}$ segments de ce type, et $\frac{3N^2}{4} - D^b$ autres segments. On a alors $D^b + \sum |\partial X_j| \geq D^b + \frac{9}{4}N^2 + 5\left(\frac{3N^2}{4} - D^b\right) = 6N^2 - 4D^b$ et le lemme découle de $D^b \leq \frac{3}{4}N^2$. □

Lemme 122. *Pour tout défaut frontalier, on a*

$$D^b = 0 \Rightarrow \sum_{i \notin J} |\partial X_i| \geq 4N^2,$$

et

$$D^b = \frac{1}{4}N^2 \Rightarrow \sum_{i \notin J} |\partial X_i| \geq 2N^2.$$

Démonstration. Si $D^b = 0$, les conditions au bord σ_{des} empêchent les arêtes horizontales du plan $z = 1$ d'être ordonnées ; si $e = (s, t)$ est l'une de de ces $2N^2$ arêtes, alors e appartient à $\partial X(s)$ et à $\partial X(t)$, où $X(s) \neq X(t)$ sont les composantes ordonnées contenant s et t respectivement. Par construction, $X(s), X(t)$ sont attachées à la frontière, dont on déduit $\sum_{j \notin J} |\partial X_j| \geq 4N^2$.

Si $D^b = \frac{1}{4}N^2$, le même raisonnement montre que la moitié des arêtes du plan $z = 1$ sont désordonnées et appartiennent à la frontière de deux composantes ordonnées distinctes attachées à la frontière. En conséquence, on a bien $\sum_{j \notin J} |\partial X_j| \geq 2N^2$. □

Lemme 123. *Si $m \geq 2$, alors*

$$D - 3(K + Q) \geq \frac{7}{4}N^2. \tag{8.32}$$

Démonstration. En utilisant l'argument de divisibilité habituel, il suffit bien sûr de montrer que le terme de gauche est au moins égal à $\frac{13}{8}N^2$.

- Si $D^b \leq \frac{1}{4}N^2$, le lemme 122 et (8.29) assurent

$$2D - 6(K + Q) \geq N^2 + 2N^2 + \frac{1}{4}N^2 = \frac{13}{4}N^2.$$

- Sinon, $D^b \geq \frac{N^2}{2}$. Dans ce cas,
  - soit le défaut possède une arête horizontale ordonnée, et le lemme 120 et (8.29) donnent

$$2D - 6(K + Q) \geq N^2 + \frac{N^2}{2} + \frac{7}{4}N^2,$$

  - soit les arêtes horizontales du défaut sont toutes désordonnées. Or $m \geq 2$, donc le cas d'égalité est impossible dans le lemme 121, et nous avons :

$$D^b + \sum_{i \notin J} |\partial X_j| \geq 2N^2 + \frac{1}{2}N^2.$$ □

Démonstration de (8.16).

- Si $m \geq 4$, (8.30) implique (8.16) avec $\alpha = \frac{1}{16}$.
- Si $m = 2, 3$, alors $l \leq 5$ et
  - si $K + Q = 0$, (8.31) implique (8.16) avec $\alpha = \frac{5}{12}$,

– sinon $K+Q \geq \frac{1}{4}N^2$, et (8.16) est obtenue avec $\alpha = \frac{3}{20}$ en utilisant (8.32) et $l \leq 5$.

- Si $m = 1$, on peut tout calculer en utilisant le nombre $V \geq \frac{N^2}{4}$ d'arêtes verticales ordonnées du premier cube. En effet,

$$\left.\begin{array}{rcl} l & = & 1 \\ Q & = & 0, \\ K & = & N^2 - V, \\ D & = & 4N^2 - V, \end{array}\right\} \Rightarrow D - \frac{3\left(l - \frac{1}{4}\right)}{l}(K+Q) = \frac{7}{4}N^2 + \frac{5}{4}V,$$

ce qui implique (8.16) avec $\alpha = \frac{5}{16}$. □

Quatrième partie

Dégénérescence des états fondamentaux

Résumé

Cette partie est la plus novatrice de cette thèse. Nous décrivons ci-après un modèle à spins continus présenté par Shlosman et van Enter dans [vES02, vES05]. Ce modèle subit une transition du premier ordre présentant des similarités avec la transition ordre–désordre du modèle de Potts au point critique.

La motivation de notre étude est la construction d'états d'équilibre qui décrivent la coexistence des phases ordonnée et désordonnée de ce modèle, ces phases étant séparées par une interface *rigide* ; nos résultats dans cette direction sont de deux types. D'une part, nous démontrons la rigidité de l'interface ordre–désordre de ce modèle lorsque la largeur du puits d'interaction ε est petite, pourvu que la hauteur du système soit bornée par une constante $L \leq L(\varepsilon)$. D'autre part, et sans restriction sur la hauteur du système, nous démontrons la rigidité de cette interface dans une approximation discrète du modèle.

La difficulté de ce genre de modèle est liée à la dégénérescence de leurs états fondamentaux. En effet, l'existence d'une infinité de configurations minimisant l'Hamiltonien du système, toutes instables, rend délicates l'élaboration d'une théorie de Pirogov Sinaĭ ou la dérivation de développement en amas.

Nous établissons ici les propriétés de rigidité de l'interface ordre–désordre pour le modèle continu et son approximation en appliquant la méthode de positivité par réflexion restreinte exposée dans les parties précédentes. Le premier chapitre de cette partie contient les premiers résultats concernant la rigidité d'interfaces pour des modèles à spins continus sur réseau et sera prochainement soumis à publication [Vigb]. Ces techniques s'étendent à d'autres modèles à spins continus comme le modèle de double-puits ou encore le modèle étudié dans [DS81] où l'interaction présente un minimum global très étroit et un minimum local assez large. Les résultats concernant ces modèles à spins non-bornés sont techniquement plus simples parce que leurs fonctions de corrélation décroissent exponentiellement vite ; ils font l'objet d'un travail en cours [SV].

— 9 —

Modèle à symétrie continue

Dans ce chapitre nous démontrons, dans une limite thermodynamique restreinte, la rigidité de l'interface ordre–désordre pour un modèle jouet inspiré du modèle (1.2).

9.1 Description du modèle

L'espace d'états $\mathcal{S}$ sera ici $\mathbb{S}^1$, muni de la mesure de Lebesgue. On se donne un petit paramètre $\varepsilon > 0$, qui jouera le rôle de $1/q$ dans le modèle de Potts étudié dans la section précédente.

Une arête sera dite ordonnée si $|\sigma_s - \sigma_t| < \varepsilon$ et désordonnée sinon. L'Hamiltonien du système est alors défini de façon formelle par

$$H(\sigma) = -\sum_{\langle s,t \rangle} \mathbb{1}_{\{\langle s,t \rangle \text{ est ordonnée}\}} \tag{9.1}$$

Pour ce modèle, Shlosman et van Enter ont démontré le théorème suivant, la notion de mesure ordonnée (désordonnée) étant définie comme dans le modèle de Potts :

Théorème 124 ([vES02, vES05])**.** *Pour $d \geq 2$ et pour tout $\varepsilon < \varepsilon(d)$ le modèle défini par (9.1) subit une transition de phase du premier ordre. Plus précisément, pour une valeur $\beta \in (0, \infty)$, il existe deux mesures de Gibbs invariantes par translation $\mu^o \neq \mu^d$, μ^o et μ^d étant respectivement ordonnée et désordonnée.*

9.2 Résultats

Nous traitons dans ce chapitre des interfaces ordre–désordre correspondant à l'Hamiltonien (9.1), et démontrons leurs propriétés de rigidité dans une boîte de hauteur *finie*.

Pour étudier ces interfaces, nous considérons les boîtes $\Lambda_{N,L} \subset \mathbb{Z}^3$:

$$\Lambda_{N,L} = \{(x, y, z); 0 \leq x, y \leq N;\ 0 \leq z \leq L+1\},$$

et imposons les conditions au bord périodiques dans les directions horizontales x et y ; nous identifions donc $\Lambda_{N,L}$ au produit $\mathbb{T}_N \times I_L$.

On rappelle que la frontière de $\Lambda_{N,L}$ possède deux composantes, que nous notons encore

$$P^o = \Lambda_{N,L} \cap \{z = L+1\} \text{ and } P^d = \Lambda_{N,L} \cap \{z = 0\}.$$

Nous imposons des conditions au bord sur P^o and P^d qui vont amener une interface ordre-désordre à l'intérieur de $\Lambda_{N,L}$. Ainsi, nous imposons sur P^o la condition au bord *ordonnée* $\sigma_{\text{ord}} = \{\sigma_{i,\,j,\,L+1} \equiv 0\}$. Nous fixons par ailleurs quatre valeurs de $\mathbb{S}^1$: $s_{00} = 2\pi/5$, $s_{01} = 4\pi/5$, $s_{10} = 8\pi/5$ and $s_{11} = 6\pi/5$ et imposons la condition au bord fortement désordonnée $\sigma_{\text{des}} = \{\sigma_{a+2i,\,b+2j,\,0} = s_{ab}, a, b = 0, 1\}$ sur P^d. Les conditions au bord correspondantes seront appelées *conditions au bord ordre–désordre.*

Dans la suite, nous nous intéresserons aux mesures de Gibbs dans $\Lambda_{N,L}$, correspondant à l'Hamiltonien (9.1) pour les conditions au bord ordre-désordre, et à la température inverse β. Elles seront notés $\mu^{\beta,\varepsilon}_{N,L}$, et $Z^{\beta,\varepsilon}_{N,L}$ sera la fonction de partition correspondante.

Nous reprenons ici la terminologie définie pour la modèle de Potts, l'ensemble de tous les cubes frustrés de σ étant noté $\mathcal{F}(\sigma)$. On rappelle qu'un cube frustré est un cube contenant des arêtes ordonnées et désordonnées.

Définition 125 (Interfaces)**.** Une composante connexe de $\mathcal{F}(\sigma)$ est appelée *interface* si et seulement si elle sépare P^o de P^d.

Nous aurons besoin du fait topologique suivant, dont la démonstration est rigoureusement identique à celle donnée pour Potts :

Proposition 126 (Existence d'une interface)**.** *Avec les conditions au bord ordre–désordre définies ci-dessus, chaque configuration possède au moins une interface. On notera $\mathcal{I}(\sigma)$ la réunion des interfaces d'une configuration σ. Une collection de cubes $\mathcal{I}$ sera dite admissible s'il existe une configuration telle que $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\sigma)$.*

Comme dans le modèle de Potts, les cubes à la frontière ΔI d'une interface sont purs, leur type (ordonné ou chaotique) étant constant sur chacune des deux composantes connexes de ΔI. En outre, la séquence de ces types satisfait une relation de compatibilité entre deux interfaces consécutives. En particulier, l'une de ces interfaces est de type ordre–désordre : les cubes

le long de sa frontière supérieure sont ordonnés, tandis que ceux de sa frontière inférieure sont chaotiques. On notera $I(\sigma)$ la première de ces interfaces ordre-désordre, *i.e.* celle dont la hauteur à l'origine est la plus basse. La notion de *plateau* et de *mur* sont définies de façon naturelle, et le plus grand plateau de $I(\sigma)$, $\mathcal{R}(\sigma)$, sera appelé *socle de rigidité* de σ. Notre résultat principal affirme que les configurations typiques ont une seule interface et que le socle de rigidité de cette interface est *très* vaste :

Théorème 127. *Soit $\varepsilon < \varepsilon_0$ suffisamment petit, et notre boîte $\Lambda_{N,L}$ de largeur N paire et de hauteur $L \leq L(\varepsilon)$. Alors pour tout β,*

$$\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left\{\mathcal{I}(\sigma) \text{ est connexe }\right\} \to 1,$$

et

$$\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left\{\frac{|\mathcal{R}(\sigma)|}{N^2} > 1 - a(\varepsilon)\right\} \to 1$$

lorsque $N \to \infty$, avec $a(\varepsilon) \to 0$ et $L(\varepsilon) \to \infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

L'étape principale de la démonstration de rigidité étant le contrôle des fluctuations de l'interface par rapport à la forme plate optimale, nous utiliserons la définition suivante :

Définition 128. Si $\mathcal{D}$ est une collection de cubes, nous définissons le *poids* de $\mathcal{D}$ par $w(\mathcal{D}) = \|\mathcal{D}\| - |\Pi(\mathcal{D})|$, où $\|\cdot\|$ est le nombre de cubes et $|\cdot|$ le nombre de plaquettes.

Le théorème 127 se déduit de l'inégalité (de Peierls) suivante, que nous démontrerons dans la section suivante :

Théorème 129 (Estimation de Peierls)**.** *Supposons que N soit pair et $L \leq L(\varepsilon)$. Alors, pour tout β et pour toute collection de cubes $\mathcal{D}$,*

$$\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}(\mathcal{D} \subset \mathcal{I}(\sigma)) \leq a^{w(\mathcal{D})}, \tag{9.2}$$

où $a = a(\varepsilon)$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

9.3 Démonstration du Théorème 129

Contexte de la positivité par réflexion

Afin de mettre en place un cadre adapté à la positivité par réflexion, nous considérons notre système comme un système de spins sur le tore

bidimensionnel $\mathbb{T}_N$, associant à chaque site de $\mathbb{T}_N$ une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{S}^1)^L$.

En utilisant le critère donné par la Proposition 31, on voit que $\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}$ est bien positive par réflexion selon les réflexions par rapport aux lignes passant à travers les sites du tore.

Comme dans le modèle de Potts, l'ensemble des colonnes sera noté $\mathcal{C}_{N,L}$. Pour toute colonne $c \in \mathcal{C}_{N,L}$, nous définissons $\mathcal{I}_c = \mathcal{I}_c(\sigma)$ l'ensemble des cubes de $\mathcal{I}(\sigma)$ contenus dans c.

Application de l'inégalité de l'échiquier

Cette section est consacrée à réduire l'estimation de Peierls — qui estime un événement local, cf. (9.2) — à une estimation d'un événement global π_c^N, cf. (9.4).

Pour toute partie $\Lambda \subset \Lambda_{N,L}$ de notre boîte, nous définissons l'ensemble $E(\Lambda)$ de toutes les arêtes $e \in \mathbb{Z}^3$ dont les deux extrémités appartiennent à Λ.

Soit σ une configuration. Nous notons $\pi(\sigma) : E(\Lambda_{N,L}) \to \{0,1\}$ le *motif global* de σ, défini par $\pi(\sigma)[e] = 1$ si e est ordonné dans σ, et 0 sinon ; nous définissons aussi $\pi_c(\sigma)$, la restriction de $\pi(\sigma)$ à $E(c)$.

Pour toute colonne c, $\mathcal{D}_c := \mathcal{D} \cap c$ est une collection de cubes $a_1, \ldots, a_m$ de la colonne c. Un motif $\pi_c : E(c) \to \{0,1\}$ est dit compatible avec $\mathcal{D}_c$ si et seulement si tous les a_i-s sont frustrés dans π_c : *i.e.* pour tout i, il existe deux arêtes $e, f \in a_i$ telles que $\pi_e(e) = 0$ et $\pi_c(f) = 1$.

$C(\mathcal{D})$ sera l'ensemble de toutes les colonnes irrégulières de $\mathcal{D}$, *i.e.* les colonnes c telles que $\mathcal{D}_c$ contienne au moins 2 cubes. $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ sera l'ensemble des collections $(\pi_c)_{c \in C(\mathcal{D})}$ telles que π_c soit compatible avec $\mathcal{D}_c$ dans chaque colonne irrégulière c. Si $\mathcal{I}(\sigma)$ contient $\mathcal{D}$, alors la restriction de $\pi(\sigma)$ aux colonnes irrégulières de $\mathcal{D}$ appartient bien sur à $\mathcal{E}(\mathcal{D})$, et nous avons donc l'inclusion suivante

$$\{\mathcal{D} \subset \mathcal{I}\} \subset \bigcup \bigcap_{c \in C(\mathcal{D})} \{\pi_c(\sigma) = \pi_c\}, \tag{9.3}$$

où la réunion est effectuée sur toutes les collections $(\pi_c)_{c \in C(\mathcal{D})} \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$.

Notant π_c^N l'événement réfléchi, l'inégalité de l'échiquier nous donne

$$\begin{aligned}\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}(\mathcal{D} \subset \mathcal{I}(\sigma)) &\leq \sum_{\pi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})} \mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left(\bigcap_{c \in C(\mathcal{D})} \{\pi_c(\sigma) = \pi_c\}\right) \\ &\leq \sum_{\pi} \prod_{c \in C(\mathcal{D})} \left[\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left(\pi_c^N\right)\right]^{\frac{1}{N^2}}.\end{aligned}$$

Notre Théorème 129 viendra du

Lemme 130. $|\mathcal{E}(\mathcal{D})| \leq 2^{(8L+4)w(\mathcal{D})}$ *et pour toute collection de* $\mathcal{E}(\mathcal{D})$*, et toute* $c \in \mathcal{C}_{N,L}$ *on a l'estimation suivante*

$$\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left(\pi_c^N\right) \leq a^{N^2(\|\mathcal{D}_c\|-1)}. \tag{9.4}$$

La première affirmation du lemme vient directement du fait qu'il y a $(8L+4)$ arêtes internes dans chaque colonne du système, et de $|C(\mathcal{D})| \leq w(\mathcal{D})$. La seconde affirmation (9.4) sera démontrée dans la sous-section suivante ; cette preuve requiert des estimations combinatoires (9.5) qui seront présentées dans la section suivante. La toute dernière section de ce chapitre sera consacré à la démonstration du Théorème 127.

Estimation de π_c^N : démonstration de (9.4)

L'événement $\sigma \in \pi_c^N$ se produit si et seulement si dans toute colonne c' le motif ordre/désordre des arêtes de la configuration σ coïncide avec $\theta_{c,c'}(\pi_c)$, où la réflexion $\theta_{c,c'}$ envoie c sur c'.

π_c^N est maintenant fixé, et nous allons décrire ses caractéristiques.

Définition 131 (Caractéristiques)**.** Introduisons l'ensemble $\mathbf{K}$ des sites chaotiques et l'ensemble $\mathbf{D}$ des arêtes désordonnés de π_c^N, $|\mathbf{K}| = K$, $|\mathbf{D}| = D$. On notera $X_0, \ldots, X_t$ les composantes connexes du graphe des arêtes ordonnées de π_c^N.

∂X_j représentera l'ensemble des arêtes désordonnées touchant X_j et $\partial^2 X_j \subset \partial X_j$ la restriction de ∂X_j aux arêtes dont les *deux* extrémités appartiennent à X_j. $\mathbf{Q}$ désignera l'ensemble des segments verticaux ne touchant pas les bords parmi les composantes X_j.

Nous avons alors une borne supérieure analogue à celle donnée pour le modèle de Potts :

$$Z_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left(\pi_c^N\right) \leq \varepsilon^{LN^2-(K+Q+2LN)} e^{\beta\left\{(3L+1)N^2-D\right\}}$$

et la borne inférieure standard

$$Z_{N,L}^{\beta,\varepsilon} \geq (1-12\varepsilon)^{LN^2} + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{LN^2} e^{3\beta LN^2}.$$

Si $e^\beta \leq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}$, et pourvu que $\varepsilon \leq 1/24$, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{Z_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left(\pi_c^N\right)}{Z_{N,L}^{\beta,\varepsilon}} &\leq \frac{\varepsilon^{\frac{D-N^2}{3}-(K+Q+2LN)}}{(1-12\varepsilon)^{LN^2}} \\ &\leq 2^{LN^2}\varepsilon^{\frac{D-N^2}{3}-(K+Q+2LN)}.\end{aligned}$$

Si $e^\beta \geq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}$,

$$\frac{Z_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left(\pi_c^N\right)}{Z_{N,L}^{\beta,\varepsilon}} \leq 2^{LN^2}\varepsilon^{\frac{D-N^2}{3}-(K+Q+2LN)}.$$

En utilisant (9.5) présentée et démontrée dans la section suivante, on sait qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{D-N^2}{3} - (K+Q) \geq 2\alpha\left(\|\mathcal{D}_c\| - 1\right)N^2 \geq \alpha\left(\|\mathcal{D}_c\| - 1\right)N^2 + 2LN,$$

pour N assez grand. Par conséquent, pour tout β,

$$\frac{Z_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\left(\pi_c^N\right)}{Z_{N,L}^{\beta,\varepsilon}} \leq 2^{LN^2}\varepsilon^{\alpha(\|\mathcal{D}_c\|-1)N^2},$$

et nous avons l'estimation (9.4) avec $a(\varepsilon) = 2^{L(\varepsilon)}\varepsilon^\alpha$. Si $L(\varepsilon) = b\log\frac{1}{\varepsilon}$ avec b assez petit, on a bien $L(\varepsilon) \to \infty$ et $a(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. □

Estimations combinatoires pour π_c^N : démonstration de (9.5)

Nous démontrons ici, pour $L \leq \frac{b}{\varepsilon}$ et b assez petit, l'estimation combinatoire

$$2D - 6K - 6Q \geq 2N^2 + \alpha(m-1)N^2 \tag{9.5}$$

pour une constante universelle $\alpha > 0$, où D, K et Q sont les caractéristiques de π_c^N introduites dans la section précédente, et $m \geq \|\mathcal{D}_c\|$ le nombre de cubes frustrés de π_c.

Proposition 132. *Pour tout motif π_c^N, on a*

$$2D = 6K + D^b + \sum_j |\partial X_j| + \sum_j \left|\partial^2 X_j\right|, \tag{9.6}$$

d'où l'on déduit

$$2D - 6(K+Q) \geq D^b + \frac{1}{2}mN^2 + 2Q. \tag{9.7}$$

Démonstration de (9.6). La démonstration est une généralisation de la proposition 117 du modèle de Potts. La seule subtilité réside ici dans le fait qu'une arête peut être désordonnée même lorsque ses deux extrémités appartiennent à la même composante connexe X_j, ce qui explique la présence du terme $\partial^2 X_j$. En récrivant $6K$ comme une somme double

$$6K = \sum_{x\in\mathbf{K}}\sum_{e:x\in e} \mathbb{1}_{e\in\mathbf{D}},$$

et en intervertissant cette somme, nous obtenons

$$2D = 6K + D^b + \left|\partial^1 O\right| + 2\left|\partial^2 O\right|,$$

où O est le graphe des arêtes ordonnées de π_c^N, et $\partial^n O$ est l'ensemble des arêtes dont n sommets appartiennent à O, $n = 1, 2$. Comme O est la réunion disjointe des X_j, (9.6) est démontrée.

Si X_j est un segment vertical ne touchant pas la frontière de la boîte, nous avons

$$|\partial X_j| = n_j + 6, \tag{9.8}$$

où n_j est le nombre de cubes frustrés contenant une arête de X_j, et $|\partial^2 X_j| = 0$. Nous noterons J l'ensemble de ces indices j, de telle sorte que $|J| = Q$ par définition, et pour $j \notin J$, nous utiliserons :

$$|\partial X_j| + \left|\partial^2 X_j\right| \geq \frac{1}{2} n_j. \tag{9.9}$$

Pour obtenir (9.9), nous notons tout d'abord que

$$|\partial X_j| + \left|\partial^2 X_j\right| \geq \frac{1}{4} \sum_C \left(|\partial X_j \cap C| + \left|\partial^2 X_j \cap C\right|\right), \tag{9.10}$$

où la somme s'effectue sur tous les cubes C contribuant à n_j ; le facteur $\frac{1}{4}$ incombe au fait que chaque arête appartient à au plus 4 cubes. Nous affirmons maintenant que si C est un cube frustré, nous avons $|\partial X_j \cap C| + |\partial^2 X_j \cap C| \geq 2$. En effet, soit C a au moins deux arêtes de ∂X_j, soit il en a une seule, f. Dans ce dernier cas, les (onze) autres arêtes de C appartiennent à X_j, et f appartient par conséquent non seulement à ∂X_j, mais aussi à $\partial^2 X_j$. Ceci démontre (9.9).

En combinant (9.6), (9.8) et (9.9) nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2D - 6K &\geq D^b + 6Q + \sum_{j \in J} n_j + \frac{1}{2} \sum_{j \notin J} n_j \\ &\geq D^b + 8Q + \frac{1}{2} \sum_j n_j. \end{aligned}$$

puisque pour tout $j \in J$ nous avons $\frac{1}{2} n_j \geq 2$. Comme tout cube frustré de π_c^N contribue à l'un des n_j-s, on a $\sum_j n_j \geq mN^2$, et (9.7) est démontrée. □

Démonstration de (9.5). Tout d'abord, si $m \geq 5$, (9.7) donne immédiatement

$$2D - 6(K + Q) - 2N^2 \geq \left(\frac{m}{2} - 2\right) N^2 \geq \frac{m}{10} N^2,$$

et nous pouvons donc passer au cas $2 \leq m \leq 4$. Pour ces petites valeurs de m, nous utiliserons les deux lemmes suivants :

Lemme 133. *Si X_0 est la composante ordonnée de π_c^N contenant P^o, alors*

$$|\partial X_0| \geq N^2. \tag{9.11}$$

En outre, il y a égalité si et seulement si X_0 est une tranche horizontale du système : $X_0 = \mathbb{T}_N \times [a_0, b_0]$.

Démonstration. Si $L \leq \frac{b}{\varepsilon}$ avec b assez petit, nos conditions au bord empêchent X_0 de toucher P^d. ∂X_0 contient donc au moins une arête verticale par colonne, d'où l'inégalité. Si nous avons en fait une égalité, alors la frontière de X_0 est exactement formée de ces N^2 arêtes verticales et X_0 est bien une tranche horizontale du système. □

Lemme 134. *Pour tout motif π_c^N on a*

$$D^b + \sum_{i \notin J, i \neq 0} |\partial X_i| \geq N^2, \tag{9.12}$$

avec égalité si et seulement si $D^b = N^2$ et si X_0 est la seule composante hors de $\mathbf{Q}$.

Démonstration. La démonstration est rigoureusement identique au lemme 119 pour le modèle de Potts. □

En combinant ces deux lemmes avec (9.6), on obtient donc

$$2D - 6(K + Q) \geq 2N^2,$$

avec égalité si et seulement si le motif est entièrement ordonné dans une tranche horizontale contenant P^o, et entièrement chaotique dans la tranche complémentaire.

Puisque la colonne c est supposée irrégulière, le cas d'égalité est ici impossible, et des considérations de divisibilité assurent

$$2D - 6(K + Q) \geq 2N^2 + \frac{N^2}{2},$$

ce qui démontre (9.5) avec $\alpha = 1/8$ pour tout $2 \leq m \leq 4$. □

Démonstration du Théorème 127

Nous allons déduire de l'estimation de Peierls (9.2) les deux assertions du théorème 127 : unicité et rigidité de l'interface ordre–désordre.

L'unicité est une conséquence directe de l'inégalité de Peierls, comme on l'a vu dans la première partie. L'invariance par translation horizontale

des mesures en volume fini permettrait également d'en déduire la rigidité, mais ici L étant borné, nous pouvons nous contenter d'une démonstration plus simple qui se passe des techniques développées dans la première partie de cette thèse (qui permettent de considérer des cylindres de hauteur très grandes).

Ainsi, on sait déjà que $\mathcal{I}(\sigma)$ est connexe avec une probabilité proche de 1. Nous rappelons que dans ce cas $I(\sigma)$ est l'unique interface de σ. La première partie nous a également montré que I est typiquement *dénouée* au sens où ses murs ne s'enroulent pas autour du tore si ϵ est assez petit.

Si $M \in \mathbb{T}_N$ un point du tore, on dira qu'il est encerclé par un mur s'il existe un mur γ tel que $M \in \tilde{\gamma} \cup \mathrm{Int}\,(\tilde{\gamma})$, où $\tilde{\gamma} = \Pi(\gamma)$ est la projection du mur. La propriété de rigidité est alors conséquence de la proposition suivante :

Proposition 135.

$$\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\,(M \textit{ est encerclé par un mur}) \leq c\,(\varepsilon)\,, \tag{9.13}$$

où $c\,(\varepsilon) \to 0$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. L'estimation de Peierls nous dit que la probabilité de présence d'un mur γ satisfait

$$\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\,(\gamma) \leq a^{w(\gamma)}.$$

Le nombre de murs γ autour de M et de poids $w(\gamma) = w$ étant au plus égal à LC^{2w}, nous avons donc

$$\mu_{N,L}^{\beta,\varepsilon}\,(M \text{ est encerclé par un mur}) \leq \sum_{w\geq 1} L\left(C^2 a\right)^w, \tag{9.14}$$

et la proposition est démontré avec $c\,(\varepsilon) = const \cdot L(\varepsilon)a(\varepsilon)$. Comme $L(\varepsilon) \leq b \log \frac{1}{\varepsilon}$, et $a(\varepsilon) = \epsilon^{-\nu}$ avec $\nu > 0$, on a bien $c(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. $\square$

— 10 —

Modèle discret

Le chapitre précédent nous a montré que si le système décrit par (9.1) est verticalement confiné, son interface ordre–désordre est rigide, les zones de frustration jouant en défaveur du compromis énergie–entropie. Cette restriction est un obstacle majeur à la construction des mesures non-invariantes par translation. Cependant, et c'est le contenu de l'article [SVar], nous sommes capables d'établir la propriété de rigidité (sans restriction) pour une approximation discrète (10.1) du modèle (9.1), appelée approximation d'horloge (*clock model*).

10.1 Introduction

La discrétisation proposée ici est la suivante. On choisit q un entier, qui sera pris très grand par la suite, et les spins σ_i seront à valeurs dans le groupe additif $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, muni de la mesure de comptage. Les configurations de notre modèle seront donc des éléments $\sigma = \{\sigma_i : \sigma_i \in \mathbb{Z}_q, i \in \mathbb{Z}^3\}$. L'Hamiltonien de notre système est défini par

$$H(\sigma) = -\sum_{i\sim j} \mathbb{1}_{|\sigma_i - \sigma_j| \leq 1}, \tag{10.1}$$

où la somme s'effectue sur toutes les paires de plus proches voisins. L'interaction est alors invariante sous l'action de $\mathbb{Z}_q$, et apparaît comme une discrétisation du modèle (9.1) : la largeur du puits de potentiel est maintenant $\frac{3}{q}$, au lieu de ε.

En adaptant les méthodes des articles [vES02, vES05], on démontre que pour q suffisamment grand, et en dimension $d \geq 2$, la structure du diagramme de phases du modèle (10.1) est similaire à celle de (9.1) : à haute température, il y a une unique mesure de Gibbs, chaotique, tandis qu'à basse température il y a des mesures de Gibbs *localement ordonnées*,

au sens où la probabilité de voir l'anomalie $|\sigma_i - \sigma_j| \geq 2$ en deux sites voisins est très faible. De plus, il existe une température $T_c(q)$ à laquelle l'état chaotique $\mu^d_{T_c}$ coexiste avec l'état ordonné $\mu^o_{T_c}$.

Dans ce chapitre nous démontrons que lorsque la dimension d est au moins égale à 3, l'interface entre la phase chaotique et une phase ordonnée de ce modèle est rigide.

Comme pour les précédents modèles, notre stratégie sera la suivante : définir l'interface ordre–désordre, ainsi que ses murs, démontrer une inégalité de Peierls adaptée, puis conclure en utilisant la condition suffisante de rigidité donnée dans la première partie. Pour démontrer l'inégalité de Peierls, nous introduirons les défauts de l'interface, qui sont les zones de frustration apparaissant dans chaque colonne du système, puis nous utilisons la positivité par réflexion pour ramener l'étude des défauts locaux à l'étude de tranches défectueuses. Si on les considère un à un, certains défauts ne contribuent pas au poids de l'interface ; pour les contrôler, nous aurons besoin de les regrouper par paires, en utilisant une opération de recollement. Les dernières sections contiennent les propriétés combinatoires des différentes tranches défectueuses.

Nous considérons toujours la boîte $\Lambda_{N,L} \subset \mathbb{Z}^3$, avec N pair, sur laquelle nous imposons les conditions au bord *ordre–désordre* définies comme suit. Nous fixons une valeur $s \in \mathbb{Z}_q$, et imposons sur P^o la condition au bord ordonnée $\sigma_{\text{ord}} = \{\sigma_{i,j,L+1} \equiv s\}$. Nous fixons également 4 valeurs $s_{00} = 0$, $s_{01} = [q/4]$, $s_{10} = [3q/4]$ et $s_{11} = [q/2]$ dans $\mathbb{Z}_q$, et nous imposons les conditions au bord *fortement désordonnées*

$$\sigma_{\text{disord}} = \{\sigma_{a+2i,\,b+2j,\,0} = s_{ab}, a, b = 0, 1\}$$

sur P^d.

Les mesures de Gibbs associées seront notées $\mu^{\beta,q}_{N,L}$, tandis que $Z^{\beta,q}_{N,L}$ sera la fonction de partition correspondante.

Nous reprenons pour ce modèle toute la terminologie définie pour le modèle (9.1) au chapitre précédent, en adaptant naturellement la notion d'ordre et désordre à ce cas discret :

Définition 136 (Arête ordonnée)**.** Une arête $i \sim j$ sera dite *ordonnée* dans σ si et seulement si $|\sigma_i - \sigma_j| \leq 1$. Sinon, elle est *désordonnée.*

La notion de cube pur (chaotique ou ordonné) et de cube frustré est alors définie de façon naturelle, ainsi que la notion d'interface-3D. On aura en outre la proposition suivante, qui se démontre de la même façon que pour le modèle de Potts :

Proposition 137 (Existence d'une interface 3D)**.** *Avec les conditions au bord ordre-désordre définies ci-dessus, toute configuration a au moins une interface 3D ; on notera $\mathcal{I}$ l'ensemble des cubes appartenant à une telle interface de σ. De plus, $\Lambda_{N,L} \setminus \mathcal{I}(\sigma)$ a plusieurs composantes connexes, et le type des cubes dans σ est constant sur là frontière de ces composantes. σ exhibe alors une interface dont la frontière supérieure est ordonnée, et la frontière inférieure désordonnée ; la première de ces interfaces sera notée $I(\sigma)$ et sera dite de type ordre–désordre*

Nous allons démontrer la rigidité de la frontière inférieure de I. Plus précisément, I sépare $\mathbb{T}_N \times \mathbb{Z}$ en deux composantes connexes infinies $\mathrm{Ext}^d I$ et $\mathrm{Ext}^o I$, contenant respectivement P^d et P^o. On dira que $\mathcal{D} = \mathrm{Ext}^d I$ est la *région désordonnée* du système ; $\partial\mathcal{D}$ sera l'ensemble des plaquettes qui appartiennent à la fois à un cube de $\mathcal{D}$ et à un cube de $\mathcal{I}(\sigma)$. $B(\sigma)$ sera l'union des composantes de $\partial\mathcal{D}$ qui séparent P^d de P^o. On l'appellera *l'interface 2D*, ou simplement *l'interface.*

Une plaquette de B sera alors dite régulière si elle est seule dans sa colonne, et la notion de plateau et de mur de B est définie comme dans le modèle d'Ising. Le plateau le plus étendu de B sera noté $\mathcal{R}(\sigma)$, et appelé *socle de rigidité de l'interface.*

Notre résultat principal [SVar] affirme que le socle de rigidité des configurations typiques est *très* étendu :

Théorème 138. *Soit $q > q_0$, q_0 étant suffisamment grand. Supposons que la largeur N de $\Lambda_{N,L}$ soit paire, et que sa hauteur L n'excède pas* $\exp\left\{N^{2/3}\right\}$. *Alors pour tout β,*

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\frac{|\mathcal{R}(\sigma)|}{N^2} > 1 - a(q)\right) \to 1$$

quand $N \to \infty$, avec $a = a(q) \to 0$ lorsque $q \to \infty$. En particulier, la surface B a typiquement une seule composante connexe.

Selon une stratégie maintenant bien établie, nous allons démontrer ce théorème en utilisant une nouvelle inégalité de Peierls.

Définition 139. Soit D une collection de plaquette. On définit le *poids* de D par $w(D) = |D| - |\Pi(D)|$, où $|\cdot|$ est le nombre de plaquettes dans la collection.

Nous avons alors l'inégalité suivante :

Théorème 140 (Inégalité de Peierls)**.** *Supposons N pair. Alors, pour tout β, pour tout L et pour toute collection de plaquettes D,*

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(B : D \subset B\right) \leq a^{w(D)}, \tag{10.2}$$

où $a = a(q) \to 0$ lorsque $q \to \infty$.

Comparaisons avec les autres modèles étudiés

Dans le modèle de Potts ainsi que dans le modèle continu, les conditions au bord ordre–désordre que nous avons imposées forcent l'apparition d'au moins un cube frustré dans chaque colonne du système. En particulier, l'existence d'un défaut élémentaire (formé d'un unique cube frustré) a un coût nul en terme de probabilité d'apparition de l'interface. Si l'interface engendre plusieurs de ces défauts élémentaires dans une colonne donnée, il est inutile de considérer séparément chacun de ces défauts : c'est leur existence *simultanée* qui engendre une chute de probabilité. Il est donc nécessaire de développer une technique pour effectuer cette évaluation simultanée.

Pour le modèle de Potts, nous avons eu recours à une opération dite de recollement, qui nous a permis de regrouper tous les défauts d'une colonne donnée en un seul gros défaut. Cette opération reposait de manière essentielle sur la simplicité des phases ordonnées de ce modèle, les configurations ordonnées étant parfaitement constantes.

Nous n'avons pas été en mesure de réaliser une telle opération pour le modèle continu, en raison de la difficulté d'approche des phases ordonnées de ce modèle. Le confinement vertical imposé alors nous a permis de nous affranchir brutalement de cette question, les défauts étant fatalement proches les uns des autres ; étant déjà « regroupés », une évaluation grossière du coût de leur apparition simultanée était possible.

Revenons à notre modèle discret, où le comportement d'une phase ordonnée est encore difficile à cerner. Comme nous l'avons dit auparavant, ces phases se comportent vraisemblablement différemment en dimension 2 ou en dimension 3, ce qui ajoute à ces difficultés. Néanmoins, nous avons pu mettre au point une technique de recollement adaptée. La raison pour laquelle cette méthode fonctionne est très simple. Même si les configurations ordonnées ne sont pas nécessairement constantes[1], nous pouvons nous restreindre aux configuration ordonnées *périodiques*, issues des multiples réflexions invoquées dans l'inégalité de l'échiquier.

[1]Elles peuvent même prendre des valeurs diamétralement opposées dans une boîte de côté $2q$.

10.2 Démonstration du Théorème 140

Contexte de la positivité par réflexion, construction des blobs

Une nouvelle fois, nous considérons le système comme un champ de spins sur le tore $\mathbb{T}_N$ à 2 dimensions, chaque spin étant une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{Z}_q)^L$. Ainsi, $\mu_{N,L}^{\beta,q}$ est positive par réflexion par rapport à toute ligne passant par les sites du tore.

Remarque 141. L'ensemble des colonnes sera toujours noté $\mathcal{C}_{N,L}$. Toute plaquette *horizontale* appartient donc à une colonne bien définie, mais pour les plaquettes *verticales* nous ferons un choix dépendant de σ, avec la convention suivante. Si P est une plaquette verticale séparant un cube frustré de σ d'un cube pur chaotique, nous dirons que P appartient à la colonne contenant le cube frustré, mais pas à la colonne contenant le cube pur.

Définition 142 (Blobs)**.** Enfin, nous définissons les *blobs* de σ dans $c \in \mathcal{C}_{N,L}$ comme les composantes connexes de l'ensemble $B_c = B_c(\sigma)$ des plaquettes de $B(\sigma)$ appartenant à la colonne c. Nous noterons $\mathfrak{B}(B_c) = (b_1, \ldots, b_r)$ l'ensemble des blobs dans la colonne c de la collection $B(\sigma)$, numérotés de bas en haut.

Application de l'inégalité de l'échiquier

En s'inspirant de la méthode développée pour le modèle de Potts, nous allons réduire l'inégalité de Peierls — qui contrôle un événement local[2] — au contrôle d'événements $(\hat{\pi}_\tau)_c^N$ globaux[3]. Pour contrôler $(\hat{\pi}_\tau)_c^N$, nous le diviserons en défauts, que nous regrouperons en paires, et nous montrerons que chaque paire de défauts à une faible probabilité d'apparition.

Tout d'abord, les blobs de $\mathfrak{B}(B_c) = (b_1, \ldots, b_r)$ peuvent être de différentes sortes, voir Figure 10.1. On dira que le blob b_i est :

- de type v, si b_i est une collection de plaquettes verticales ;
- de type $h-$ ($h+$) si, lorsque l'on monte, b_i commence (termine) par une plaquette horizontale, les autres étant verticales ; si b_i consiste en une unique plaquette horizontale, il est de type $h-$ ($h+$) si le cube en-dessous (au-dessus) de lui est purement chaotique ;
- de type $h-+$, si b_i commence et termine par une plaquette horizontale, les autres étant verticales[4].

[2] Voir l'inégalité (10.3).
[3] Voir l'inégalité (10.8).
[4] Dans ce cas, les cubes aux extrémités du blob sont tous deux purement chaotiques.

Compte tenu de la convention que nous avons prise pour les plaquettes verticales, chaque blob a un type bien défini. De plus, nous avons la règle de compatibilité suivante (toujours de bas en haut) :

- il existe au moins un blob signé, et les signes des blobs alternent ;
- la séquence des signes commence et se termine par un $-$;
- le premier blob signé après un blob de type v est toujours de type $h+$.

Cette règle de compatibilité se déduit de la même façon que les règles de compatibilité des couleurs aux frontières des défauts dans le modèle de Potts.

Remarque 143. Si B_c ne contient qu'une plaquette (horizontale), il n'y a qu'un seul blob dans c, et il est de type $h-$. Un tel blob est dit *trivial*.

Exemple 144 (Exemple de blobs, cf. Figure 10.1). La Figure 10.1 fournit un exemple concret de cette terminologie, que nous allons détailler ici colonne par colonne :

- les colonnes $1, 4, 5$ possèdent un unique blob, qui est de type $h-$ et formé d'une unique plaquette horizontale (il est donc trivial) ;
- la colonne 2 contient un blob de type $h-+$ suivi d'un blob de type $h-$;
- la colonne 3 contient un blob de type $h-+$ qui fait face à un blob de type v .

Dans toute la suite, B est une collection de plaquettes, et σ une configuration telle que $B(\sigma) = B$.

Définition des défauts

Soit $F(\sigma)$ l'ensemble de tous les cubes frustrés de σ attachés à $B(\sigma) = B$. Nous noterons $F_c(\sigma)$ sa restriction $F(\sigma) \cap c$ à la colonne c. On notera $A_i \subset F_c(\sigma)$, $i = 1, ..., r'$, les composantes connexes de $F_c(\sigma)$. Ces segments de cubes frustrés seront appelés les *défauts* de σ.

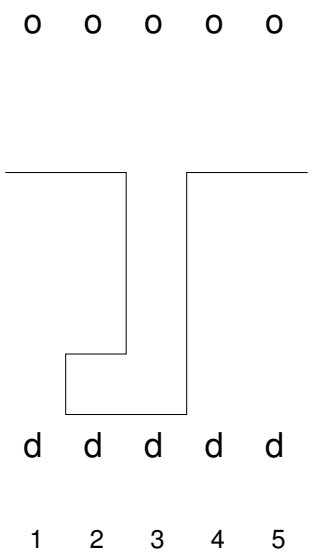
Remarque 145. Un défaut peut contenir plusieurs blobs. Dans la Figure 10.1, on voit par exemple qu'il y a un seul défaut dans la colonne 3, qui contient les deux blobs de cette colonne.

La collection des défauts de σ sera notée $\pi(\sigma)$, et $\pi_c(\sigma) \subset \pi(\sigma)$ sera sa restriction aux défauts de la colonne c.

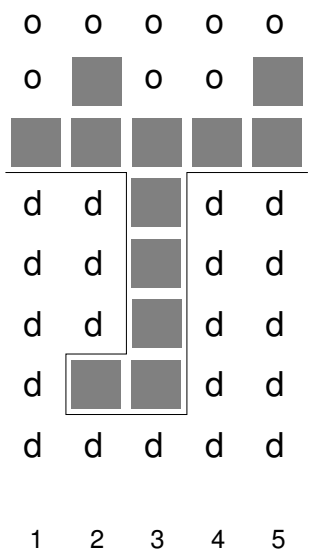
Notre but immédiat est de démontrer la proposition suivante, dont l'inégalité de Peierls (10.2) est une conséquence directe :

Proposition 146. *Soit $D \subset \Lambda_{N,L}$ une collection de cubes. Alors*

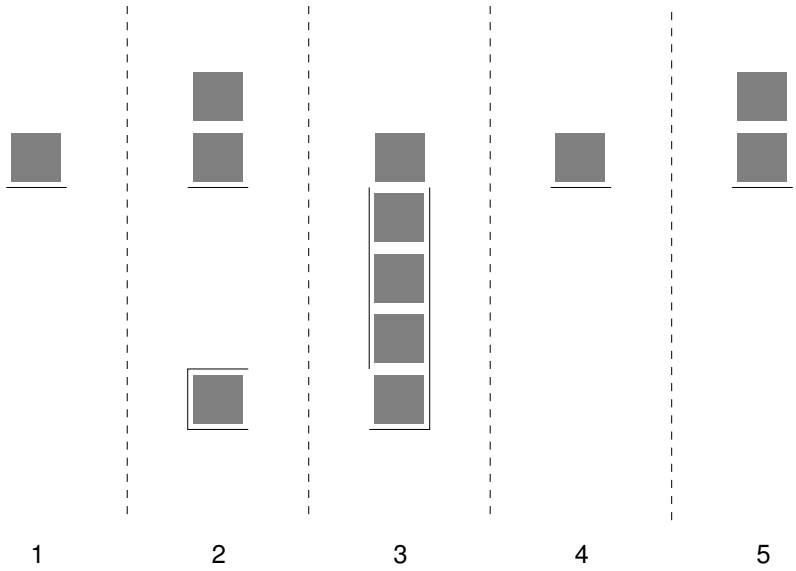
$$\mu_{N,L}^{\beta,q}(\sigma : D \subset \pi(\sigma)) \leq a^{|D|-|\Pi(D)|}. \tag{10.3}$$



(a) Morceau d'interface

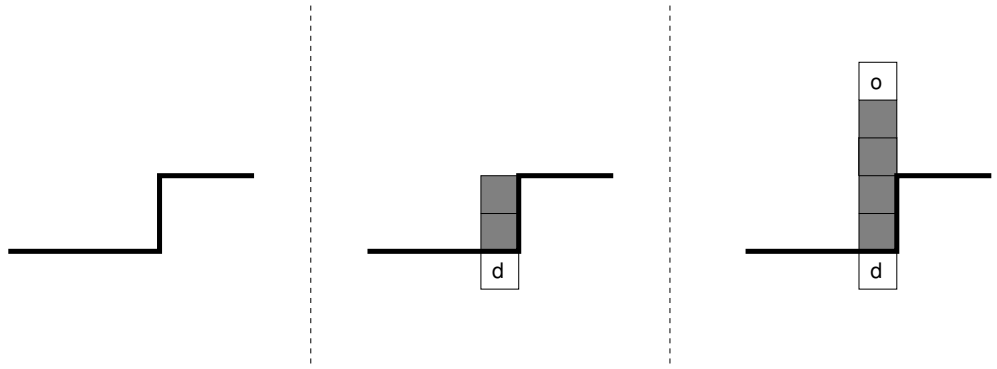


(b) Motif de frustration possible (en grisé)

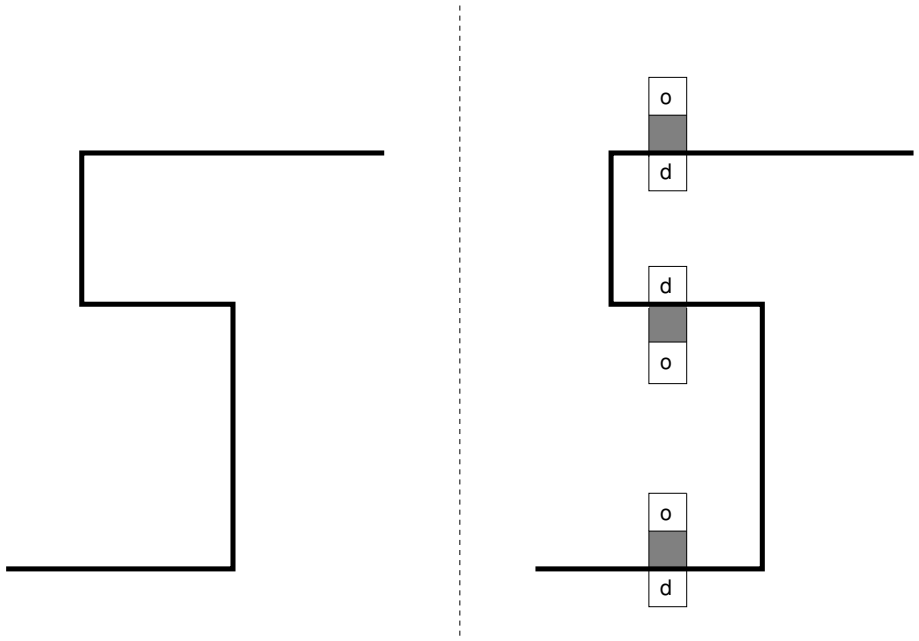


(c) Blobs des différentes colonnes

FIG. 10.1: Exemples de blobs



(a) Un morceau d'interface ; le défaut (non-problématique) ainsi engendré ; une possible extension de ce défaut.



(b) Un autre morceau d'interface, engendrant trois défauts problématiques.

FIG. 10.2: Défauts problématiques et non-problématiques

L'idée générale de la démonstration de cette proposition 146 est la suivante. Nous essaierons de montrer que le prix à payer pour avoir un défaut contenant k cubes frustrés, est une chute de probabilité de l'ordre de a^k. C'est en effet le cas, et nous montrerons que pour tout défaut contenant $k \geq 2$ cubes frustrés, ce coût est de l'ordre de a^k. Cependant, pour certains défauts tels que $k = 1$, le coût est nul ; ceci est inévitable, puisque nos conditions au bord forcent l'existence d'un défaut dans chaque colonne

du système. Nous pourrions alors être en difficulté si une colonne donnée présentait de multiples défauts de ce genre : un coût nul, pour un nombre total de cubes frustrés importants.

Nous montrerons que dans le cas où il y a plusieurs de ces défauts, dits *problématiques*, on peut toujours les regrouper par paires, de sorte que l'on puisse extraire, pour chacune de ces paires, une contribution de l'ordre de a. Ceci sera suffisant pour atteindre notre objectif.

Pour mettre en œuvre la stratégie ci-dessus, nous allons décorer nos défauts. Tout d'abord, nous leur donnons un signe. Chaque défaut A contient un ou plusieurs blobs ; le signe de A, noté $\operatorname{sgn}(A) \in \{-, 0, +\}$, est défini[5] en additionnant les signes de chaque blob contenu dans A.

Ensuite, nous aurons besoin d'information sur la configuration au voisinage des défauts. Pour cela, nous étendrons un peu les défauts et fixerons (dans une certaine mesure) la configuration aux extrémités du défaut. Bien sûr, suite à cette extension, nous devrons sommer les probabilités sur toutes les extensions possibles.

Remarque 147. Dans ce processus d'extension, certains défauts pourraient coaguler en un défaut plus grand, auquel cas nous traiterons toujours le défaut résultant comme un unique défaut.

Extension des défauts

Nous décrivons ici le processus d'extension des défauts. Cette extension dépendra évidemment de σ.

Définition 148. On notera C_B l'ensemble des colonnes c telles que B_c contienne au moins deux plaquettes. Puisque les autres colonnes ne contribuent pas au poids de B, nous les ignorerons et la procédure d'extension ne concernera que les défauts des colonnes de C_B.

La première étape consiste à étendre chaque défaut $A_j \subset c$ en un segment de cubes plus long $\phi_1(A_j)$, $A_j \subset \phi_1(A_j) \subset c$. Soit $\phi_0(A_j)$ le plus grand segment de cubes frustrés contenant A_j ; on notera alors $\phi_1(A_j)$ le segment obtenu en ajoutant un cube (nécessairement pur) à chaque extrémité de $\phi_0(A_j)$, si c'est possible. Dans le cas où le défaut A_j est attaché à la frontière de $\Lambda_{N,L}$, l'extension contient donc au plus un cube pur.

Cette opération est bien définie, mais il peut arriver que les segments obtenus $\phi_1(A_j)$ et $\phi_1(A_{j'})$ aient un cube pur en commun : ils sont alors 3–connectés. Les composantes 3–connexes de la réunion des $\{\phi_1(A_i)\}$ sont à leur tour des segments de cubes $\phi_2(A_{i_1}), \ldots, \phi_2(A_{i_t})$, que nous appellerons

[5] Cette opération est bien définie puisque la séquence des signes est alternée.

défauts étendus, ou simplement défauts. On les notera $F_1, \ldots, F_t$; $\mathring{F}_i \subset F_i$ désignera le défaut privé de ses (éventuels) cubes purs extrémaux.

Par construction, si $i \neq i'$, F_i et $F_{i'}$ n'ont aucun cube en commun, bien qu'ils puissent partager une même facette. Les signes de ces défauts (étendus) seront naturellement définis en additionnant les signes des défauts qu'ils contiennent.

Nous fixons également la nature de chaque arête dans le défaut, *i.e.* ordonnée ou désordonnée.

Définition 149 (Défauts problématiques)**.** Parmi les défauts F_i obtenus, nous mettons à part ceux dont toutes les arêtes de $\mathring{F}_i$ sont désordonnées[6]. Si ce défaut est signé, il a été construit à partir d'un blob consistant seulement d'une plaquette horizontale ; s'il n'est pas signé, il a été construit à partir de la coagulation de deux blobs signés consécutifs, chacun formé d'une seule plaquette horizontale (cf. Figure 10.3). Dans les deux cas, ces défauts seront dits *problématiques.* Si les deux cubes extrémaux d'un défaut problématique sont ordonnés, le défaut est formé de 5 cubes, dont 3 sont purs ; sinon, le défaut est formé de 3 cubes, dont 2 sont purs.

D'autres défauts, dits *exceptionnellement problématiques*, apparaissent à la frontière désordonnée. Un défaut F est dit *e-problématique*, si et seulement s'il intersecte P^d et si :

1. le cube au sommet de F est ordonné,
2. $\mathring{F}$ est formé de un ou deux cubes frustrés,
3. le cube attaché à la frontière possède au moins 3 arêtes verticales,
4. le blob d'origine est formé d'exactement une plaquette (horizontale) — celle qui est incluse dans P^d.

La Figure 10.4 donne des exemples de ces défauts. Tous les autres défauts seront dits *non-problématiques.*

Remarque 150. Tout défaut e-problématique est de signe négatif.

Ainsi, nous avons associé à chaque configuration σ telle que $B(\sigma) = B$ et à toute colonne $c \in C_B$ une extension $\hat{\pi}_c$ de l'ensemble initial $\pi_c(\sigma)$. Cette extension comprend une étiquette ordonnée–désordonnée sur chaque arête de $\hat{\pi}_c$; la collection de ces étiquettes sera parfois désignée sous le nom de *motif ordre–désordre.* L'ensemble de toutes les extensions $\hat{\pi}$ de π possibles sera noté $\mathcal{E}(\pi)$. Nous avons donc la partition suivante :

$$\{\sigma : B(\sigma) = B, \pi(\sigma) = \pi\} = \bigcup_{\hat{\pi} \in \mathcal{E}(\pi)} \{\sigma : B(\sigma) = B, \hat{\pi}(\sigma) = \hat{\pi}\},$$

[6] L'un des cubes extrémaux de F_i est donc nécessairement ordonné.

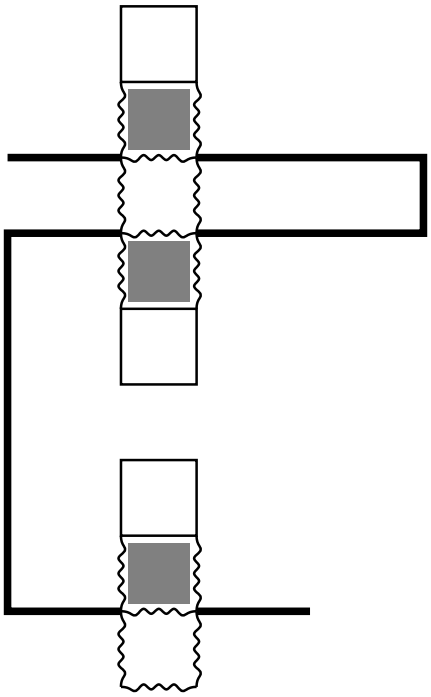
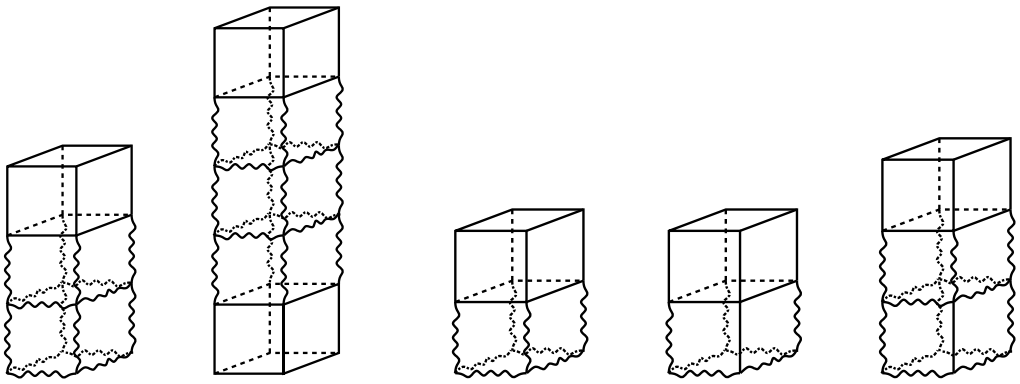


FIG. 10.3: Morceau d'interface (en gras) engendrant deux défauts problématiques.



(a) Défauts problématiques (b) Défauts e-problématiques

FIG. 10.4: Les défauts problématiques et e-problématiques

de telle sorte que

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\sigma : \pi\left(\sigma\right) = \pi\right) = \sum_{\hat{\pi}\in\mathcal{E}(\pi)} \mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\sigma : \hat{\pi}\left(\sigma\right) = \hat{\pi}\right).$$

Nous utiliserons aussi la notation $\sigma \in \hat{\pi}$ pour signifier que les défauts étendus de σ sont exactement donnés par $\hat{\pi}$.

Chaque cube de $\hat{\pi}$ possède 12 arêtes et chacune d'elles peut être de deux types, donc la démonstration de (10.3) se réduit à montrer que

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\sigma : \hat{\pi}\left(\sigma\right) = \hat{\pi}\right) \leq a^{\|\hat{\pi}\|-|\Pi(\hat{\pi})|}, \tag{10.4}$$

où $\|\hat{\pi}\|$ est le nombre de cubes frustrés dans $\hat{\pi}$, et $|\Pi\left(\hat{\pi}\right)|$ le nombre de plaquettes dans la projection $\Pi\left(\hat{\pi}\right)$.

Détermination des conditions au bord des défauts

La dernière étape de cette décoration des défauts consiste à fixer le *type* de la configuration sur les éventuelles plaquettes ordonnées P à la frontière du défaut. Si la plaquette $P = (w, x, y, z)$ est totalement ordonnée avec $\sigma(w) - \sigma(x) = a$, $\sigma(x) - \sigma(y) = b$, $\sigma(y) - \sigma(z) = c$ et $\sigma(z) - \sigma(w) = d$, on dit que σ est de type (a, b, c, d) sur P. On note que $a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}$, et qu'il y a donc au plus $3^4 = 81$ types ordonnés possibles pour σ sur P. On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les types possibles.

Chaque défaut (étendu) F est délimité par deux plaquettes horizontales : l'une au sommet $\partial^t F$, l'autre à la base $\partial^b F$. On définira $\partial F = \partial^t F \cup \partial^b F$. Chacune de ces plaquettes est soit totalement ordonnée, soit totalement désordonnée. On notera $\partial^o F \subset \partial F$ les éventuelles plaquettes ordonnées de ∂F, le contenu exact de $\partial^o F$ dépendant bien sûr de $\hat{\pi}$.

Pour toute collection $\hat{\pi}$ de défauts étendus, $\hat{\pi} \in \mathcal{E}\left(\pi\right)$, nous définissons $\partial\hat{\pi} = \cup_{F\in\hat{\pi}}\partial F$ et $\partial^o\hat{\pi} = \cup_{F\in\hat{\pi}}\partial^o F$. Nous raffinons la partition $\mathcal{E}\left(\pi\right)$ en spécifiant les types de la configuration σ sur chaque plaquette de $\partial^o\hat{\pi}$: si $\tau \in \mathcal{T}^{\partial^o\hat{\pi}}$, on définit

$$\hat{\pi}_\tau = \left\{\sigma \in \hat{\pi} : \forall P \subset \partial^o\hat{\pi},\ \sigma \text{ est de type } \tau(P) \text{ sur } P\right\},$$

de telle sorte que

$$\hat{\pi} = \bigcup_{\tau\in\mathcal{T}^{\partial^o\hat{\pi}}} \hat{\pi}_\tau.$$

Remarquons maintenant que pour toute colonne $c \in C_B$, qui contient donc un blob non-trivial,

$$|\partial^o\hat{\pi}_c| \leq 3\left(\|\hat{\pi}_c\| - 1\right).$$

Le cas d'égalité se produit si et seulement si $\hat{\pi}_c$ est formé d'exactement deux défauts problématiques contenant chacun un cube frustré[7]. Par conséquent nous avons :

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\sigma : \hat{\pi}\left(\sigma\right) = \hat{\pi}\right) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}^{\partial^o \hat{\pi}}} \mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\hat{\pi}_\tau\right) \leq (81)^{3(\|\hat{\pi}\| - |\Pi(\hat{\pi})|)} \sup_{\tau \in \mathcal{T}^{\partial^o \hat{\pi}}} \mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\hat{\pi}_\tau\right). \tag{10.5}$$

Par la suite, $\hat{\pi} \in \mathcal{E}\left(\pi\right)$ et $\tau \in \mathcal{T}^{\partial^o \hat{\pi}}$ seront fixés. Nous allons donner une borne supérieure sur la probabilité[8] des événements $\{\sigma \in \hat{\pi}_\tau\}$. Pour commencer, nous notons

$$\{\sigma \in \hat{\pi}_\tau\} = \cap_{c \in \mathcal{C}_{N,L}(\sigma)} \left\{\sigma \in \left(\hat{\pi}_\tau\right)_c\right\}, \tag{10.6}$$

où l'événement $\left(\hat{\pi}_\tau\right)_c$ représente les configurations σ dont la décoration des défauts étendus dans la colonne c est donnée par $\hat{\pi}_c$, et telles que les plaquettes de $\partial^o \hat{\pi} \cap c$ ont un type défini par la restriction τ_c de τ à $\partial^o \hat{\pi} \cap c$.

L'application de l'inégalité de l'échiquier réduit donc la question d'une borne supérieure sur les probabilités $\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\sigma \in \hat{\pi}_\tau\right)$ à un contrôle des probabilités $\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\sigma \in \left(\hat{\pi}_\tau\right)_c^N\right)$, $c \in C_B$, où l'événement $\left(\hat{\pi}_\tau\right)_c^N$ est le résultat des réflexions successives de $\left(\hat{\pi}_\tau\right)_c$. Plus précisément, l'inégalité de l'échiquier s'écrit ici :

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\sigma \in \hat{\pi}_\tau\right) \leq \prod_c \left[\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\sigma \in \left(\hat{\pi}_\tau\right)_c^N\right)\right]^{\frac{1}{N^2}}. \tag{10.7}$$

Nous démontrerons que, uniformément en τ, et pour toute $c \in C_B$:

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\left(\hat{\pi}_\tau\right)_c^N\right) \leq a^{N^2(\|\hat{\pi}_c\| - 1)}. \tag{10.8}$$

Dès lors, (10.8), (10.7) et (10.5) impliquent (10.4).

Description de l'événement réfléchi $\left(\hat{\pi}_\tau\right)_c^N$

La colonne c est désormais fixée. L'événement $\left(\hat{\pi}_\tau\right)_c$ consiste en une collection de défauts $F_1, F_2, \ldots, F_s$ dans la colonne c, chacun muni de conditions au bord $\tau_i \in \mathcal{T}^{\partial^o F_i}$. Soit $\Lambda_i = \{(x, y, z);\ 0 \leq x, y \leq N,\ a_i \leq z \leq b_i\}$ la plus petite tranche contenant le défaut F_i. L'événement $\sigma \in \left(\hat{\pi}_\tau\right)_c^N$ se produit si et seulement si :

[7] Les conditions au bord du premier défaut sont alors nécessairement de type ordre–désordre, et celles du second défaut de type ordre–ordre.

[8] Au sens de la mesure de Gibbs $\mu_{N,L}^{\beta,q}$.

- dans chaque colonne c', le motif ordre–désordre de la configuration σ coïncide avec $\theta_{c,c'}(F_1, F_2, \ldots, F_s)$, où la réflexion $\theta_{c,c'}$ envoie la colonne c sur c',
- sur tout plan ordonné $z = a_i$ (resp. $z = b_i$), $i = 1, ..., s$, le type des plaquettes de la configuration σ est donné par $\left(\tau_i^b\right)^N$ (resp. $(\tau_i^t)^N$), où le type $\left(\tau_i^b\right)^N$ est défini dans chaque colonne c' par $\theta_{c,c'}\left(\tau_i^b\right)$ (resp. $\theta_{c,c'}(\tau_i^t)$).

On note F_i^N la réflexion itérée du défaut F_i, *i.e.* $F_i^N = \cap_{c'}\theta_{c,c'}(F_i)$. Il s'agit d'un motif ordre–désordre pour les arêtes de Λ_i. Nous posons $l_i = b_i - a_i - 1$, et définissons m_i, le nombre de cubes frustrés dans F_i. Comme tout site (x, y, z) avec $a_i < z < b_i$ appartient à au moins un cube frustré de F_i, on a

$$l_i \leq 2m_i, \tag{10.9}$$

ce qui sera important par la suite. Le complémentaire $\Lambda_{N,L} \setminus (\cup_{i=1}^s \Lambda_i)$ est une collection de tranches $\Lambda_i' = \{(x, y, z);\ 0 \leq x, y \leq N,\ b_i \leq z \leq a_{i+1}\}$, $i = 0, ..., s$, avec les conventions $b_0 = 0$ et $a_{s+1} = L + 1$.

Nous fixons maintenant les valeurs η de la configuration σ sur $\partial\pi_c^N$, *i.e.* sur chaque plan $z = a_i$ ou $z = b_i$. L'ensemble des η qui sont compatibles avec $(\hat{\pi}_\tau)_c^N$ est noté $\mathcal{B}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)$. Nous choisissons $\eta \in \mathcal{B}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)$, et définissons

$$(\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta) = (\hat{\pi}_\tau)_c^N \cap \left\{\sigma \Big|_{\partial\pi_c^N} = \eta\right\}.$$

Nous avons bien sûr la partition

$$(\hat{\pi}_\tau)_c^N = \bigcup_{\eta \in \mathcal{B}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)} (\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta). \tag{10.10}$$

Uniformément en τ, η, nous obtiendrons une borne sur $\mu_{N,L}^{\beta,q}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta)\right)$.

Notons η_i^b (resp. η_i^t) la restriction de η au plan $z = a_i$ (resp. $z = b_i$). La fonction de partition $Z_{N,L}^{\beta,q}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta)\right)$, calculée sur $\left\{\sigma \in (\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta)\right\}$, se décompose alors ainsi :

$$Z_{N,L}^{\beta,q}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta)\right) = \prod_{i=1}^s Z_{\Lambda_i}^{\eta_i^b,\eta_i^t}\left(F_i^N\right) \prod_{i=0}^s Z_{\Lambda_i'}^{\eta_i^t,\eta_{i+1}^b}, \tag{10.11}$$

où les exposants dans la fonction de partition indiquent les conditions au bord correspondantes[9], et où la présence d'arguments $F_\cdot^N$ décrit les motifs ordre-désordre (périodiques) idoines.

[9] Avec les conventions $\eta_0^t = \sigma_{\text{disord}}$ et $\eta_{s+1}^b = \sigma_{\text{ord}}$.

Remarque 151. Notons qu'il est tout à fait possible que pour certains i, $b_i = a_{i+1}$. Dans ce cas, la tranche Λ'_i se réduit en fait à un plan, et la fonction de partition $Z_{\Lambda'_i}^{\eta_i^t,\eta_{i+1}^b}$ est prise dans un volume vide ; on la prendra égale à 1 par définition.

Notre but est maintenant de démontrer que

$$\prod_{i=1}^{s} Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right) \leq a^{N^2\left[\left(\sum_{i=1}^{s} m_i\right)-1\right]} \prod_{i=1}^{s} Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}, \tag{10.12}$$

où m_i est le nombre de cubes frustrés de F_i, et où nous utilisons la notation abrégée $Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right) \equiv Z_{\Lambda_i}^{\eta_i^b,\eta_i^t}\left(F_i^N\right)$, $Z_{\Lambda_i}^{\eta_i} \equiv Z_{\Lambda_i}^{\eta_i^b,\eta_i^t}$. Puisque nous avons la majoration triviale :

$$\sum_{\eta\in\mathcal{B}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)} \frac{\prod_{i=1}^{s} Z_{\Lambda_i}^{\eta_i} \prod_{i=0}^{s} Z_{\Lambda'_i}^{\eta_i^t,\eta_{i+1}^b}}{Z_{N,L}^{\beta,q}} \leq 1,$$

les relations (10.12) et (10.10) impliquent (10.8).

Nous verrons que les défauts F_i non-problématiques satisfont l'inégalité :

$$Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right) \leq a^{m_i N^2} \cdot Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}. \tag{10.13}$$

Cependant, aucune borne intéressante ne peut être obtenue pour un défaut problématique isolé. Nous les regrouperons donc par paires, et produirons un facteur a^{2N^2} pour chaque paire ainsi formée.

Nous considérons tous les défauts signés, que nous désignons à partir de maintenant par une notation spéciale : $G_1, G_2, ..., G_{2k-1}$. Ils sont bien sûr toujours en nombre impair ; de plus leurs signes alternent, et sgn $(G_1) = (-)$. Certains de ces G_i peuvent être problématiques. Les défauts neutres seront notés $H_1, H_2, \ldots, H_l$; certains d'entre eux peuvent également être problématiques. Nous apparions les défauts comme suit : $(G_1, G_{2k-1}), (G_2, G_{2k-2}), \ldots$ et $(H_1, H_2), (H_3, H_4), \ldots$ Si l est impair, nous apparions le dernier défaut neutre restant H_l avec G_k ; si l est pair, le défaut G_k reste isolé. Remarquons que deux défauts signés appariés sont de même signe. Notons également que la situation où nous aurions un seul défaut problématique ou e-problématique ne peut se produire, puisque nous avons supposé que B n'était pas régulière dans la colonne c considérée ici.

Le regroupement ci-dessus ne sera essentiel pour notre démonstration uniquement lorsque les deux défauts de la paire seront problématiques — *i.e.* lorsque nous aurons une *paire problématique*. Dans ce cas nous aurons recours à l'opération de recollement expliquée ci-dessous. Le regroupement

des autres défauts n'est pas essentiel, puisque chaque autre paire contient au moins un défaut non-problématique ; ceci nous permet de redistribuer la contribution de ce dernier sur la paire. En particulier, si les deux défauts sont non-problématiques, il nous suffira d'ajouter leurs deux contributions séparées.

Procédure de recollement

Dans cette section nous allons construire pour chaque événement stratifié $(\hat{\pi}_\tau)_c^N$, un autre événement stratifié $\phi\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)$ du même type. Le nouvel événement aura moins de tranches frustrées et, ce qui est précieux, il n'aura aucune paire de défauts problématiques. Nous allons précisément montrer :

Lemme 152 (Recollement)**.** *Pour tout événement $(\hat{\pi}_\tau)_c^N$ présentant l paires problématiques, on peut construire un événement $\phi\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)$, tel que :*

1. $\mu_{N,L}^{\beta,q}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right) \leq a^{2lN^2}\mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\phi\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)\right)$,
2. *tous les défauts de $\phi\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)$ peuvent être regroupés en paires non problématiques,*
3. *le nombre de couches frustrées de $\phi\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)$ est $\|\hat{\pi}_c\| - 2l$.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur le nombre l de paires problématiques, en enlevant successivement chacune de ces paires et en extrayant un facteur a^{2N^2} à chaque fois.

Considérons d'abord le cas où les deux défauts appariés sont les défauts problématiques (ou e-problématiques) signés G_i et G_{2k-i}, avec $1 \leq i \leq k-1$. Nous supposons d'abord que le signe de G_i (et donc celui de G_{2k-i}) est négatif, comme dans la figure 10.5 ; le cas positif est encore plus simple, puisqu'aucun de ces deux défauts n'est e-problématique.

Nous rappelons que G_{2k-i} consiste d'une séquence de 3 cubes : de bas en haut nous rencontrons d'abord un cube désordonné, puis un cube frustré suivi d'un cube ordonné ; de plus toutes les arêtes hors de ce cube ordonné sont désordonnées.

G_i peut être problématique ou e-problématique (lorsque $i = 1$). Dans le premier cas, il est formé de $l_i = 3$ cubes, identiques à ceux de G_{2k-i}. Dans le second cas, $i = 1$, et nous ajouterons à G_1 un cube chaotique *virtuel* dans la couche $\{-1 \leq z \leq 0\}$, de sorte que l_1 sera considéré égal à 3 lorsque cet e-défaut comprendra un cube frustré et un cube ordonné, ou considéré égal à 4 lorsqu'il comprendra deux cubes frustrés et un cube ordonné. Remarquons

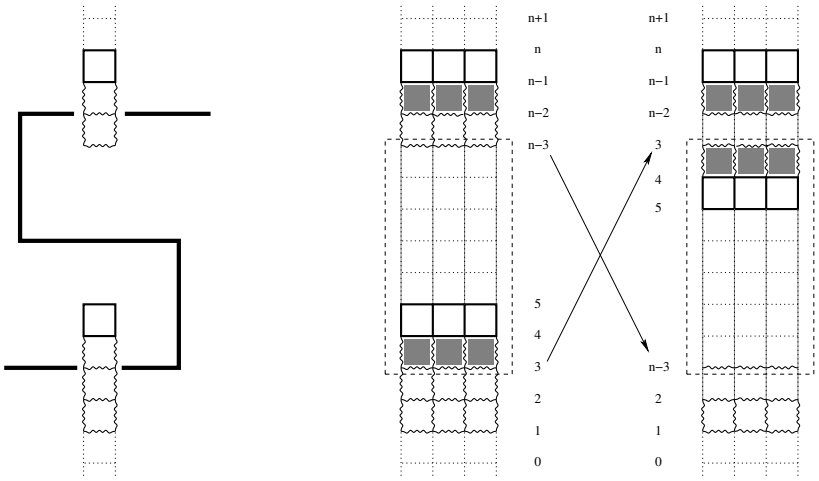


FIG. 10.5: Recollement de deux défauts problématiques. De gauche à droite : deux défauts problématiques (de type $-$) engendrés par un morceau d'interface ; l'événement réfléchi correspondant ; le résultat de l'opération de recollement.

que dans tous les cas le premier cube frustré du défaut a au moins 3 arêtes verticales désordonnées.

Enfin, chaque G_j est assorti de conditions au bord : une configuration $\eta_j \in \Omega_{\partial G_j}$.

La première étape de la procédure de recollement consiste à effectuer une rotation globale, Φ_1, du sous-système de spins confiné dans la tranche $S_i = \{a_i + 2 \leq z \leq a_{2k-i}\}$, afin que la configuration η_i^t — la condition au bord supérieure du défaut le plus bas, G_i — prenne des valeurs proches de η_{2k-i}^t — la condition au bord supérieure du défaut G_{2k-i}. Si le défaut G_1 est un défaut e-problématique, on prend $S_1 = \{1 \leq z \leq a_{2k-1}\}$.

Les configurations η_i^t et η_{2k-i}^t sont deux configurations ordonnées périodiques, entièrement définies par leur restriction à une plaquette ; nous écrirons donc symboliquement $\eta_i^t = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ et $\eta_{2k-i}^t = (s'_1, s'_2, s'_3, s'_4)$, où les s_j, s'_j sont des points du cercle discret $\mathbb{Z}_q$. Comme η_i^t et η_{2k-i}^t sont ordonnées, on peut choisir $s \in \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $s' \in \{s'_1, s'_2, s'_3, s'_4\}$ tels que pour tout $j = 1, 2, 3, 4$

$$|s - s_j| \leq 1 \text{ et } \left|s' - s'_j\right| \leq 1.$$

s, s' seront appelées les *valeurs centrales* de ces conditions au bord. Pour

toute $\sigma \in (\hat{\pi}_\tau)_c^N$ nous définissons $\Phi_1(\sigma)$ par

$$[\Phi_1(\sigma)](x,y,z) = \begin{cases} \sigma(x,y,z) + (s - s') & \text{si } (x,y,z) \in S_i, \\ \sigma(x,y,z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La transformation Φ_1 est bien sûr bijective, et les configurations $\Phi_1(\eta_i^t)$, $\Phi_1\left(\eta_{2k-i}^t\right)$ ainsi obtenues sont relativement proches l'une de l'autre.

La seconde (et dernière) étape de la procédure de recollement consiste à appliquer au sous-système confiné dans la tranche S_i une réflexion Φ_2 par rapport à son plan horizontal médian, amenant ainsi la partie supérieure de $\Phi_1(G_i)$ en contact avec $\Phi_1(G_{2k-i})$:

$$[\Phi_2(\sigma)](x,y,z) = \begin{cases} \sigma(x,y,a_i + a_{2k-i} + 2 - z) & \text{si } (x,y,z) \in S_i, \\ \sigma(x,y,z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La composition $\Phi = \Phi_2\Phi_1$ est bijective. En outre pour toute configuration $\sigma \in (\hat{\pi}_\tau)_c^N$ toutes les arêtes connectant la tranche S_i avec son extérieur sont désordonnées, sauf peut-être au plus $\frac{N^2}{4}$ de ses arêtes verticales — lorsque G_1 est e-problématique. Ainsi Φ ne peut augmenter l'énergie de la configuration obtenue que d'au plus $\frac{N^2}{4}$ unités, ce qui correspond au plus grand nombre possible d'arêtes ordonnées se transformant en arêtes désordonnées après l'opération : $H(\sigma) - H(\Phi(\sigma)) \geq -\frac{N^2}{4}$. Par conséquent, nous obtenons

$$\mu_{N,L}^{\beta,q}\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta)\right) \leq e^{\frac{\beta N^2}{4}} \mu_{N,L}^{\beta,q}\left(\Phi\left[(\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta)\right]\right). \tag{10.14}$$

Décrivons maintenant l'événement $\Phi\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N(\eta)\right)$. On notera les images $\tilde{F}_j^N = \Phi\left(F_j^N\right)$. Si F_j est situé entre G_i et G_{2k-i}, il est clair que $\tilde{F}_j$ a exactement les mêmes propriétés que F_j, à une translation et une réflexion du motif ordre–désordre près[10]. De plus, les conditions au bord de $\tilde{F}_j$ serons $\tilde{\eta}_j^t = \Phi\left(\eta_j^b\right)$, $\tilde{\eta}_j^b = \Phi\left(\eta_j^t\right)$. Si F_j est avant G_i ou après G_{2k-i}, nous avons $\tilde{F}_j = F_j$ et $\tilde{\eta}_j = \eta_j$. Le type $\tilde{\tau} = \Phi(\tau)$ est défini de la façon naturelle suivante : il coïncide avec τ en dehors de la tranche S_i et avec une réflexion de τ à l'intérieur de cette tranche.

Concentrons-nous maintenant sur la seule transformation réellement non-triviale : qu'est-il arrivé aux défauts G_i^N et G_{2k-i}^N ? Nous noterons $\tilde{G}_{2k-i}^N$ la restriction de $\Phi\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)$ à la tranche

$$\tilde{\Lambda}_{2k-i} = \{a_{2k-i} - l_i + 2 \leq z \leq b_{2k-i} = a_{2k-i} + 3\},$$

[10]En particulier, le nombre de tranches frustrées reste inchangé.

qui contient au plus 5 cubes en épaisseur, puisque $l_i \leq 4$.

Si $\tilde{G}^N_{2k-i}$ se produit, nous avons deux tranches — $\Lambda_N(a_{2k-i}-l_i+2, a_{2k-i}-l_i+3)$ et $\Lambda_N(a_{2k-i}+2, a_{2k-i}+3)$ — remplies d'arêtes ordonnées, et une tranche — $\Lambda_N(a_{2k-i}+1, a_{2k-i}+2)$ — remplie d'arêtes désordonnées ; le motif d'arêtes est ainsi entièrement déterminé, sauf pour les N^2 arêtes verticales de la tranche $\Lambda_N(a_{2k-i}, a_{2k-i}+1)$. Comme les conditions au bord $\tilde{\eta}_{2k-i} = \left(\Phi\left(\eta^t_i\right), \eta^t_{2k-i}\right)$ autour de ce défaut ont des valeurs très proches l'une de l'autre, nous serons à même de dériver les bornes suivantes :

$$e^{\frac{\beta N^2}{4}} Z^{\tilde{\eta}_{2k-i}}_{\tilde{\Lambda}_{2k-i}}\left(\tilde{G}^N_{2k-i}(\eta)\right) \leq a^{2N^2} \cdot Z^{\tilde{\eta}_{2k-i}}_{\tilde{\Lambda}_{2k-i}}, \tag{10.15}$$

qui nous donne finalement

$$e^{\frac{\beta N^2}{4}} \mu^{\beta,q}_{N,L}\left(\Phi\left(\left(\hat{\pi}_\tau\right)^N_c(\eta)\right)\right) \leq a^{2N^2} \cdot \mu^{\beta,q}_{N,L}\left(\left(\tilde{\pi}_{\tilde{\tau}}\right)^N_c(\tilde{\eta})\right), \tag{10.16}$$

où $\left(\tilde{\pi}_{\tilde{\tau}}\right)^N_c(\tilde{\eta})$ est l'événement que pour tout j tel que $F_j \notin \{G_i, G_{2k-i}\}$, $\tilde{F}^N_j$ se produit, et que le type sur les plaquettes de $\partial^o \tilde{F}_j$ soit donné par $\tilde{\tau} = \Phi(\tau)$ et que la configuration coïncide avec $\tilde{\eta}^N_j$ aux frontières de $\tilde{F}^N_j$.

Le dernier cas, une paire de défauts problématiques F_j, F_k tels que les deux cubes extrémaux de l'un d'entre eux — disons le plus haut, F_k — soient tous les deux ordonnés, est encore plus simple. En effet, il suffit dans ce cas d'effectuer une rotation globale dans une tranche adaptée, de sorte que les deux conditions au bord (ordonnées) du défaut F_k se rapprochent, de façon analogue à la première étape décrite ci-dessus. Après cela, le défaut F_k peut être traité comme le défaut $\tilde{G}^N_i$ du paragraphe précédent. Pour définir la rotation requise nous avons seulement besoin d'une couche $\{d_j \leq z \leq d_j + 1\}$ comprise dans le défaut F_j et dont au moins 3/4 des arêtes verticales sont désordonnées[11]. Puis Φ fait tourner tous les spins de la tranche $\{d_j + 1 \leq z \leq a_k + 2\}$ d'un angle $s^t - s^b$, où s^t et s^b sont les valeurs centrales des conditions au bord η^t_k et η^b_k du défaut F_k, sans modifier les autres spins. Comme Φ n'augmente pas l'énergie de plus de $\frac{N^2}{4}$ unités, nous avons bien réduit le problème à l'analyse du cas précédent.

En appliquant les arguments ci-dessus à chaque paire problématique, nous nous débarrassons de toutes ces paires, et obtenons un facteur a^{2N^2} pour chacune d'elles. Nous noterons ϕ la composition des différentes transformations Φ utilisées tout au long de cette procédure de recollement. $\phi\left(F^N_j\right)$ désignera alors la famille des défauts réfléchis qui n'ont pas été supprimés (seulement déplacés), assortis des conditions au bord $\phi\left(\eta_c\right)$. Nous

[11] Une telle tranche existe toujours par définition des défauts problématiques.

noterons évidemment $\phi\left((\hat{\pi}_\tau)_c^N\right)$ l'événement qui se produit lorsque tous ces défauts apparaissent et lorsque la configuration prend les valeurs prescrites par $\phi(\eta_c)$ sur les plans idoines.

Pour résumer, le Lemme 152 découle de (10.14, 10.16). (10.14) a déjà été montrée et (10.16) se déduit de l'inégalité (10.15), dont la démonstration est reléguée à la section suivante. □

Contrôle des défauts : (10.13) et (10.15)

La procédure de recollement nous a permis de réduire la démonstration de notre théorème principal au contrôle des défauts non-problématiques d'une part et au contrôle des paires problématiques d'autre part. Nous commençons par le cas plus simple des défauts non-problématiques.

Défauts non-problématiques : Démonstration de (10.13)

Nous obtenons ici un contrôle pour les trois types de défauts possibles, selon la nature des conditions au bord du défaut : hétérogènes (ordre–désordre), homogènes ordonnées (ordre–ordre) ou homogènes désordonnées (désordre–désordre). Nous distinguerons également les défauts internes des défauts frontaliers (ceux qui touchent P^d).

F_i^N désignera un défaut dont les caractéristiques K_i, D_i, Q_i, m_i, et l_i sont définies de façon analogue au modèle continu (voir Définition 131).

Nous remarquons que le nombre de sites touchant au moins une arête ordonnée est au plus $l_iN^2 - K_i \leq 2m_iN^2$, tandis que le nombre de composantes connexes du graphe ordonné est au plus $Q_i + 2l_iN$. Nous avons donc la borne universelle

$$Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right) \leq 3^{2m_iN^2} q^{K_i+Q_i+2l_iN} e^{\beta\left((3l_i+1)N^2-D_i\right)}.$$

Pour contrôler la fonction de partition du dénominateur, nous utiliserons différentes bornes inférieures selon les conditions au bord et selon la température. Enfin, nous aurons besoin de certaines propriétés combinatoires analogues à (9.5) et assez techniques à établir. Nous reléguons leur démonstration à la fin de ce chapitre.

Ordre–désordre Nous avons ici

$$Z_{\Lambda_i}^{\eta_i} \geq (q-18)^{l_iN^2} + e^{3\beta l_iN^2}.$$

Si $e^\beta \leq q^{\frac{1}{3}}$, nous avons (en négligeant des termes sans importance ne dépendant pas de q) :

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} &\leq 9^{m_i N^2}\frac{q^{K_i+Q_i+2l_iN}e^{\beta\left((3l_i+1)N^2-D_i\right)}}{(q-18)^{l_iN^2}}\\ &\leq 9^{m_iN^2}\left(\frac{1}{q}\right)^{\left(D_i-N^2\right)/3-K_i-Q_i-2l_iN}.\end{aligned}$$

Si $e^\beta \geq q^{1/3}$,

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} &\leq 9^{m_i N^2}\frac{q^{K_i+Q_i+2l_iN}e^{\beta\left((3l_i+1)N^2-D_i\right)}}{e^{3\beta l_iN^2}}\\ &\leq 9^{m_iN^2}\left(\frac{1}{q}\right)^{\left(D_i-N^2\right)/3-K_i-Q_i-2l_iN}\end{aligned}$$

D'après (10.20) donnée plus loin, nous pouvons prendre $\alpha' > 0$ tel que

$$\left(D_i - N^2\right)/3 - K_i - Q_i \geq 2\alpha' m_i N^2.$$

Comme $l_i \leq 2m_i$, pour tout N assez grand et tous les défauts F_i non-problématiques de type ordre–désordre,

$$\left(D_i - N^2\right)/3 - K_i - Q_i - 2l_iN \geq \alpha' m_i N^2.$$

Par conséquent, pour tout β et tout tel défaut,

$$\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} \leq 9^{m_iN^2}q^{-\alpha' m_iN^2},$$

et les inégalités requises sont valides pour $a(q) = 9q^{-\alpha'}$.

Ordre–Ordre Comme dans le cas ordre–désordre, nous avons

$$Z_{\Lambda_i}^{\eta_i} \geq (q-18)^{l_iN^2} + e^{3\beta l_iN^2},$$

et l'analyse précédente assure donc que nous aurons réglé le cas ordre–ordre si l'inégalité

$$\left(D_i - N^2\right)/3 - K_i - Q_i \geq 2\alpha' m_i N^2$$

est encore valide dans ce cas. C'est effectivement le cas, comme nous le verrons avec (10.20). Par conséquent pour tout $\beta > 0$

$$\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} \leq 9^{m_iN^2}q^{-\alpha' m_iN^2}.$$

Désordre–désordre internes Nous avons

$$Z_{\Lambda_i}^{\eta_i} \geq (q-18)^{l_i N^2} + e^{\beta(3l_i-1)N^2}.$$

Si $e^\beta \leq q^{l_i/(3l_i-1)}$, nous avons (en négligeant les termes sans importance, ne dépendant pas de q) :

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} &\leq 9^{m_i N^2} \frac{q^{K_i+Q_i+2l_iN} e^{\beta\left((3l_i+1)N^2-D_i\right)}}{(q-18)^{l_i N^2}} \\ &\leq 9^{m_i N^2} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{l_i}{3l_i-1}\left[D_i-2N^2-\frac{3l_i-1}{l_i}(K_i+Q_i)\right]-2l_iN}.\end{aligned}$$

Si $e^\beta \geq q^{l_i/(3l_i-1)}$,

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} &\leq 9^{m_i N^2} \frac{q^{K_i+Q_i+2l_iN} e^{\beta\left((3l_i+1)N^2-D_i\right)}}{e^{\beta(3l_i-1)N^2}} \\ &\leq 9^{m_i N^2} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{l_i}{3l_i-1}\left[D_i-2N^2-\frac{3l_i-1}{l_i}(K_i+Q_i)\right]-2l_iN}.\end{aligned}$$

Par (10.21) expliquée plus loin nous pouvons prendre $\alpha' > 0$ tel que

$$D_i - 2N^2 - \frac{3l_i-1}{l_i}(K_i+Q_i) \geq 6\alpha' m_i N^2.$$

Comme $l_i \leq 2m_i$, pour tout N assez grand et pour tous les défauts F_i non-problématiques de type désordre–désordre,

$$\frac{l_i}{3l_i-1}\left[D_i - 2N^2 - \frac{3l_i-1}{l_i}(K_i+Q_i)\right] - 2l_iN \geq \alpha' m_i N^2.$$

Par conséquent pour tout β et tout tel défaut,

$$\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} \leq 9^{m_i N^2} q^{-\alpha' m_i N^2},$$

et l'inégalité requise est valide avec $a(q) = 9q^{-\alpha'}$.

Désordre–Désordre frontaliers Nous avons

$$Z_{\Lambda_i}^{\eta_i} \geq (q-18)^{l_i N^2} + e^{\beta\left(3l_i-\frac{3}{4}\right)N^2}.$$

En effet, nos conditions au bord à la base du défaut sont périodiques, d'où le terme $\frac{3}{4}$ dans l'estimation d'énergie $\left(3l_i - \frac{3}{4}\right) N^2$: au moins un quart des arêtes verticales à la frontière inférieures seront ordonnées.

Si $e^\beta \leq q^{l_i/\left(3l_i - \frac{3}{4}\right)}$,

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} &\leq 9^{m_i N^2} \frac{q^{K_i+Q_i+2l_iN} e^{\beta\left((3l_i+1)N^2 - D_i\right)}}{(q-18)^{l_iN^2}} \\ &\leq 9^{m_iN^2} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{l_i}{6\left(l_i-\frac{1}{4}\right)}\left[2D_i - \frac{7}{2}N^2 - \frac{6\left(l_i-\frac{1}{4}\right)}{l_i}(K_i+Q_i)\right] - 2l_iN}.\end{aligned}$$

Si $e^\beta \geq q^{l_i/\left(3l_i - \frac{3}{4}\right)}$,

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} &\leq 9^{m_i N^2} \frac{q^{K_i+Q_i+2l_iN} e^{\beta\left((3l_i+1)N^2 - D_i\right)}}{e^{\beta\left(3l_i - \frac{3}{4}\right)N^2}} \\ &\leq 9^{m_iN^2} \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{l_i}{6\left(l_i-\frac{1}{4}\right)}\left[2D_i - \frac{7}{2}N^2 - \frac{6\left(l_i-\frac{1}{4}\right)}{l_i}(K_i+Q_i)\right] - 2l_iN}.\end{aligned}$$

Nous verrons dans (10.28) que pour une constante $\alpha' > 0$

$$2D_i - \frac{7N^2}{2} - \frac{6\left(l_i - \frac{1}{4}\right)}{l_i}(K_i + Q_i) \geq 12\alpha' m_i N^2.$$

Comme $l_i \leq 2m_i$, pour tout N assez grand et tout défaut frontalier F_i de type désordre–désordre,

$$\frac{l_i}{6\left(l_i - \frac{1}{4}\right)}\left[2D_i - \frac{7}{2}N^2 - \frac{6\left(l_i - \frac{1}{4}\right)}{l_i}(K_i + Q_i)\right] - 2l_iN \geq \alpha' m_i N^2.$$

Par conséquent pour tout β et tout tel défaut

$$\frac{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}\left(F_i^N\right)}{Z_{\Lambda_i}^{\eta_i}} \leq 9^{m_iN^2} q^{-\alpha' m_i N^2},$$

et l'inégalité souhaitée sera valide avec $a(q) = 9q^{-\alpha'}$. □

Paire de défauts problématiques recollés : démonstration de (10.15)

Nous allons analyser le défaut $\tilde{G}_i^N$, engendré par la procédure de recollement, afin de démontrer (10.15,10.16). Le défaut $\tilde{G}_i^N$ est formé d'au plus 5

couches de cubes élémentaires. Ses deux couches extrémales sont ordonnées et toutes les arêtes verticales attachées au cube du sommet sont désordonnées ; nous remarquons que certaines des arêtes verticales de la troisième couche à partir du haut peuvent être ordonnées, éventuellement de façon non-périodique. Nous fixons le motif V de ces arêtes verticales supplémentaires, $\tilde{G}_i^N(V)$ représentant la restriction de $\tilde{G}_i^N$ aux configurations satisfaisant ce motif V. Nous allons maintenant donner une borne supérieure sur la fonction de partition $Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}\left(\tilde{G}_i^N(V)\right)$ dans sa tranche $\tilde{\Lambda}_i = \left\{\tilde{a}_i \leq z \leq \tilde{b}_i\right\}$, écrire $\tilde{l}_i = \tilde{b}_i - \tilde{a}_i - 1 \leq 4$.

Le nombre de configurations dans la tranche $\tilde{\Lambda}_i$ telles que l'événement $\tilde{G}_i^N(V)$ se produise est au plus $3^{\tilde{l}_i N^2} q^{K+Q+2\tilde{l}_i N}$, où K, Q dépendent de V ; toute telle configuration $\sigma^{(i)}$ a une énergie $H^{(i)}(\sigma^{(i)}) = D - \left(3\tilde{l}_i + 1\right) N^2$, où D dépend également de V. En combinant ceci nous obtenons :

$$Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}\left(\tilde{G}_i^N(V)\right) \leq 3^{\tilde{l}_i N^2} q^{K+Q+2\tilde{l}_i N} e^{\beta\left((3\tilde{l}_i+1)N^2 - D\right)}.$$

Nous avons maintenant besoin d'une borne inférieure sur $Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}$, que nous allons obtenir de manière désormais habituelle.

Pour les hautes températures, nous sommons simplement sur les configurations d'énergie nulle, l'ensemble de ces configurations contenant au moins $(q-18)^{\tilde{l}_i N^2}$ éléments.

Pour les basses températures, nous ne prenons qu'une seule configuration, d'énergie minimale étant données les conditions au bord. Dans ce cas précis, ce minimum vaut $-(3\tilde{l}_i + 1)N^2$. En effet, comme les configurations périodiques $(\tilde{\eta}_i)^t$ sur $\left\{z = \tilde{b}_i\right\}$ et $(\tilde{\eta}_i)^b$ sur $\{z = \tilde{a}_i\}$ ont par construction une valeur centrale commune, s, toutes les arêtes de la configuration constante $\sigma \equiv s$ dans $\left\{\tilde{a}_i + 1 \leq z \leq \tilde{b}_i - 1\right\}$ sont bien ordonnées.

En rassemblant ces résultats nous avons finalement :

$$Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i} \geq (q-18)^{\tilde{l}_i N^2} + e^{(3\tilde{l}_i+1)N^2\beta}.$$

Si $e^\beta \leq q^{\tilde{l}_i/(3\tilde{l}_i+1)}$, nous utilisons $Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i} \geq (q-18)^{\tilde{l}_i N^2}$ pour obtenir

$$e^{\frac{1}{4}\beta N^2} \cdot \frac{Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}\left(\tilde{G}_i^N(V)\right)}{Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}} \leq \left(\frac{3q}{q-18}\right)^{\tilde{l}_i N^2} \left(q^{-\frac{\tilde{l}_i}{3\tilde{l}_i+1}}\right)^{D - \frac{1}{4}N^2 - \frac{3\tilde{l}_i+1}{\tilde{l}_i}(K+Q+2\tilde{l}_i N)} \tag{10.17}$$

Si $e^\beta \geq q^{\tilde{l}_i/(3\tilde{l}_i+1)}$, nous utilisons $Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i} \geq e^{(3\tilde{l}_i+1)\beta N^2}$ pour obtenir

$$e^{\frac{1}{4}\beta N^2} \cdot \frac{Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}\left(\tilde{G}_i^N(V)\right)}{Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}} \leq 3^{\tilde{l}_i N^2} \left(q^{-\frac{\tilde{l}_i}{3\tilde{l}_i+1}}\right)^{D-\frac{1}{4}N^2-\frac{3\tilde{l}_i+1}{\tilde{l}_i}(K+Q+2\tilde{l}_i N)} . \quad (10.18)$$

Nous aurons enfin besoin du lemme suivant :

Lemme 153. *Pour tout motif V des arêtes ordonnées dans la troisième couche à partir du haut du défaut, et pour tout N assez grand,*

$$D - \frac{3\tilde{l}_i+1}{\tilde{l}_i}(K+Q+2\tilde{l}_i N) \geq \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) N^2. \quad (10.19)$$

Démonstration. Nous rappelons que les cubes ordonnés aux deux extrémités du défaut sont toujours déconnectés dans le graphe correspondant à V, en raison des arêtes verticales désordonnées de la deuxième couche à partir du sommet ; en utilisant le Lemme 156 ci-dessous, nous obtenons $D - 3(K + Q) \geq N^2$. De plus, il est clair que $K + Q \leq (\tilde{l}_i - 2)N^2$ et donc que $D - \frac{3\tilde{l}_i+1}{\tilde{l}_i}(K+Q) \geq N^2 - \frac{(\tilde{l}_i-2)}{\tilde{l}_i}N^2 = \frac{2}{\tilde{l}_i}N^2$. Notre lemme découle donc du fait que $\tilde{l}_i \leq 4$, puisque $\frac{2}{\tilde{l}_i}N^2 \geq \frac{1}{2}N^2 \geq \frac{1}{4}N^2 + \frac{1}{5}N^2 + 2\tilde{l}_i N$, pour N suffisamment grand. □

Comme il y a au plus 2^{N^2} motifs V possibles, le Lemme 153 combiné avec (10.17, 10.18) assure que pour tout β :

$$e^{\frac{1}{4}\beta N^2} \cdot \frac{Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}\left(\tilde{G}_i^N\right)}{Z_{\tilde{\Lambda}_i}^{\tilde{\eta}_i}} \leq 2^{N^2} \left(\left(\frac{3q}{q-18}\right)^{\tilde{l}_i} q^{-\frac{1}{5}\cdot\frac{\tilde{l}_i}{3\tilde{l}_i+1}}\right)^{N^2} \leq a^{2N^2},$$

avec $a(q) = \sqrt{2\left(\frac{3q}{q-18}\right)^4 q^{-3/50}}$, puisque $\tilde{l}_i \leq 4$ et $\frac{\tilde{l}_i}{3\tilde{l}_i+1} \geq \frac{3}{10}$. □

10.3 Inégalités combinatoires pour les défauts internes : (10.20,10.21)

Nous démontrons ici certaines inégalités combinatoires pour les défauts non-problématiques, en restreignant la démonstration aux défauts internes du système (*i.e.* quand le défaut n'est pas collé à la frontière inférieure de la boîte). Le cas des défauts frontaliers étant plus délicat, nous le reléguons à la section suivante.

La preuve sera divisée en trois parties, selon la nature des conditions au bord du défaut. Nous introduisons à cet effet le nombre d de cubes chaotiques aux extrémités du défaut.

Si $d = 0$ ou $d = 1$, nous allons montrer que pour tout défaut interne F non-problématique possédant $m \geq 1$ cubes frustrés :

$$2D - 6K - 6Q \geq 2N^2 + \alpha m N^2 \tag{10.20}$$

pour une constante universelle $\alpha > 0$, où D, K et Q sont les caractéristiques du défaut réfléchi F^N. Si $d = 2$, nous allons montrer que pour tout défaut interne F non-problématique possédant $m \geq 1$ cubes frustrés :

$$2D - 2\frac{(3l-1)}{l}(K+Q) \geq 4N^2 + \alpha m N^2. \tag{10.21}$$

Pour cela, nous dérivons l'égalité

$$2D = 6K + dN^2 + \sum_j |\partial X_j| + \sum_j \left|\partial^2 X_j\right|, \tag{10.22}$$

de la façon habituelle, les X_j étant les composantes connexes du graphe ordonné induit par F^N. Comme dans le modèle continu, on a le lemme suivant :

Lemme 154. *La relation* (10.22) *implique que*

$$2D - 6K - 6Q \geq dN^2 + \frac{1}{2}mN^2 + 2Q. \tag{10.23}$$

Ordre–désordre ($d = 1$) : démonstration de (10.20)

1. Si $m \geq 3$, (10.23) garantit

$$2D - 6(K+Q) - 2N^2 \geq \left(\frac{m}{2} - 1\right) N^2 \geq \frac{m}{6}N^2,$$

   et la preuve est achevée dans ce cas.

2. Supposons $m \leq 2$. Un équivalent du Lemme 133 montre que la frontière de la composante X_0 au sommet du défaut possède au moins N^2 arêtes, avec égalité si et seulement si X_0 est une tranche horizontale de 1 cube d'épaisseur. Ainsi (10.22) montre que $2D - 6(K+Q) \geq 2N^2$, avec égalité si et seulement si $|\partial X_0| = N^2$ et si $\{X_j\}$ est réduit à X_0. L'égalité ne peut donc se produire que si le défaut est problématique. Ce n'est pas le cas ici, donc $2D - 6(K+Q) \geq 2N^2 + \frac{N^2}{2}$. □

Désordre–désordre ($d = 2$) : démonstration de (10.21)

Nous considérons ici le cas d'un défaut réfléchi F^N non-problématique, entouré de deux couches chaotiques, en vue d'obtenir la borne (10.21). En fait, pour la plupart des défauts, l'assertion suivante (plus forte) sera valide :

$$2D - 6(K + Q) \geq 4N^2 + \alpha m N^2. \tag{10.24}$$

En effet, la relation (10.23) devient ici

$$2D - 6K - 6Q \geq 2N^2 + \frac{1}{2} m N^2 + 2Q, \tag{10.25}$$

de sorte que (10.24) est valide dès que $m \geq 5$. Nous supposerons donc par la suite $m \leq 4$; si $K = Q = 0$, $D \geq 6N^2$ garantit (10.24), donc nous supposerons également que ce n'est pas le cas. Dans ces conditions, il est suffisant de montrer que $2D - 6(K + Q) \geq 4N^2$, (10.21) découlant alors de $l \leq 2m = 8$ et $K + Q \geq \frac{N^2}{4}$.

Dans cette perspective nous allons montrer que

Lemme 155. *Pour tout défaut interne avec conditions au bord désordre–désordre ($d = 2$), l'existence d'une arête horizontale ordonnée e assure*

$$\sum_{i \notin J} |\partial X_i| \geq 2N^2.$$

Démonstration. e appartient à une plaquette horizontale p et à une composante ordonnée $X(e)$. Si $\partial X(e)$ contient au moins 8 arêtes verticales dans la colonne de p, c'est fini. Sinon, l'un des 4 sites de p n'appartient pas à $X(e)$.

Dans ce cas, p contient au plus deux arêtes ordonnées. $\partial X(e)$ contient alors au moins 4 arêtes verticales dans la colonne de p et 2 arêtes (horizontales) de p. □

Démonstration de (10.21). Combiné avec (10.22), le lemme précédent réduit notre analyse au cas où il n'y a aucune arête horizontale ordonnée. Dans ce cas, toutes les composantes X_i sont des segments verticaux et l'on a :

$$2D - 6(K + Q) = 2N^2 + \sum_{j \in J} n_j.$$

Si $\sum_{j \in J} n_j \geq 2N^2$, nous avons terminé. Sinon, $m = 1$ et le défaut est entièrement désordonné à l'exception de $\frac{1}{4}N^2$ arêtes verticales. Dans ce dernier cas, $l = 2$ et un calcul explicite donne

$$D - \frac{3l - 1}{l}(K + Q) = \frac{27}{4}N^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{4}N^2 = \frac{19}{8}N^2,$$

et (10.21) est démontrée avec $\alpha = \frac{3}{8}$. □

Ordre–ordre ($d = 0$) : démonstration de (10.20)

Nous considérons ici la réflexion F^N d'un défaut non-problématique F possédant m cubes frustrés entre deux cubes ordonnés. Par construction, ce défaut contient une plaquette désordonnée, donc ses deux cubes ordonnés forcent $m \geq 2$.

Nous souhaitons établir l'inégalité (10.20) : $2D - 6(K + Q) \geq 2N^2 + \alpha m N^2$. Nous utiliserons pour cela les deux lemmes suivants :

Lemme 156. *Tous les défauts de type ordre–ordre pour lesquels le graphe ordonné ne connecte pas les cubes ordonnés extrémaux satisfont*

$$2D - 6(K + Q) \geq 2N^2,$$

avec égalité si et seulement si le défaut est problématique.

Démonstration. Soit X_0 et X_1 les deux composantes connexes correspondant aux cubes extrémaux. On a alors $|\partial X_0| + |\partial X_1| \geq 2N^2$ et (10.22) assure l'inégalité requise ; si nous avons égalité, chaque inégalité intermédiaire est en fait une égalité. On en déduit que X_0, X_1 sont les deux seules composantes du graphe ordonné, et qu'elles sont réduites chacune à une couche de cubes élémentaires : le défaut est alors problématique. □

Lemme 157. *Tous les défauts de type ordre–ordre pour lesquels le graphe ordonné connecte les cubes ordonnés extrémaux satisfont*

$$2D - 6(K + Q) \geq 3N^2.$$

Démonstration. Remarquons que l'hypothèse sur notre défaut assure l'existence d'une plaquette verticale p désordonnée. En effet, le défaut contient au moins une plaquette d'un blob, et si celle-ci était horizontale, le défaut contiendrait un cube désordonné qui déconnecterait les deux cubes extrémaux.

Notons X_0 la composante contenant les deux cubes ordonnés aux extrémités du défaut. En examinant les deux lignes verticales passant par les sommets de p, nous voyons que chacune d'entre elles est soit totalement ordonnée hors de p, son unique arête désordonnée appartenant alors à $\partial^2 X_0$, soit elle possède deux arêtes dans ∂X_0. Dans les deux cas, la contribution des arêtes verticales à $|\partial X_0| + |\partial^2 X_0|$ est au moins égale à $2\frac{N^2}{2} = N^2$.

Montrons maintenant que la contribution horizontale à $|\partial X_0| + |\partial^2 X_0|$ est au moins $2N^2$. Examinons p', p'' les deux plaquettes horizontales de la colonne c intersectant p ; ainsi $p \cap p'$ et $p \cap p''$ sont des arêtes désordonnées. Si p' contient une arête de X_0, alors un simple dénombrement montre

que $|\partial X_0 \cap p'| + |\partial^2 X_0 \cap p'| \geq 2$. Sinon, l'existence d'un chemin ordonné traversant le défaut de part en part montre que l'un des sommets x de p' appartient à X_0 ; par hypothèse, les deux arêtes de p' contenant x sont désordonnées (sinon elles seraient dans X_0), et appartiennent donc toutes deux à ∂X_0. En répétant l'argument pour p'', on obtient bien la contribution voulue. □

Démonstration de (10.20). Pour $m \geq 5$, (10.20) se déduit de (10.23). Si $m \leq 4$, elle découle des deux lemmes ci-dessus. □

10.4 Inégalité combinatoires pour les défauts frontaliers : (10.20, 10.28)

Nous nous intéressons maintenant au cas où le défaut est attaché au fond de la boîte P^d.

Ordre–désordre : démonstration de (10.20)

Rappelons que D^b est le nombre d'arêtes verticales attachées à la frontière inférieure P^d de F^N. En remplaçant le terme dN^2 par D^b dans (10.23) nous obtenons (10.22)

$$2D = 6K + D^b + \sum_j |\partial X_j| + \sum_j \left|\partial^2 X_j\right|, \tag{10.26}$$

ainsi que l'analogue de (10.23) :

$$2D - 6K - 6Q \geq D^b + \frac{1}{2} m N^2 + 2Q. \tag{10.27}$$

Nous voulons montrer (10.20) pour les défauts non e-problématiques. Comme le seul défaut frontalier avec $m = 1$ et conditions au bord ordre–désordre est e-problématique, on aura $m \geq 2$ dans ce paragraphe.

Si $m \geq 5$, la relation (10.20) découle directement de (10.27). Pour $m = 2, 3, 4$ nous utiliserons les trois lemmes suivants.

Lemme 158. *Soit un défaut frontalier de type ordre–désordre tel que $m \leq 4$. Alors les conditions au bord fortement désordonnées garantissent que ∂X_0 contient au moins $\frac{3}{4}N^2$ arêtes verticales, si q est suffisamment grand. (X_0 désigne ici encore la composante ordonnée contenant le cube ordonné au sommet du défaut).*

Démonstration. Comme $m \leq 4$, le défaut s'étend sur une épaisseur d'au plus 8 cubes, et contient par conséquent au plus 36 sites. Si ∂X_0 contenait moins de 3 arêtes verticales dans la colonne, alors deux sites u, v de la plaquette du fond appartiendraient à X_0. En notant M le diamètre maximal des graphes à au plus 36 sommets, nous aurions $|\sigma_u - \sigma_v| \leq M$, ce qui contredirait les conditions au bord fortement désordonnées pour q assez grand. □

Lemme 159. *Soit un défaut frontalier de type ordre–désordre ou désordre–désordre. Si $D^b \leq \frac{N^2}{4}$, alors les conditions au bord fortement désordonnées assurent*

$$\sum_{i \notin J} |\partial X_i| + \left|\partial^2 X_i\right| \geq 3N^2.$$

Démonstration. Ce lemme est un analogue du Lemme 122 dans le modèle de Potts.

Si $D^b = 0$, les conditions au bord fortement désordonnées assurent que les arêtes horizontales de la première couche de spins sont toutes désordonnées, chacune d'elles appartenant à l'un des $\partial^2 X_i$, $i \notin J$: leur contribution à la somme ci-dessus est donc au moins égale à $4N^2$.

Si $D^b = N^2/4$, ces mêmes conditions au bord garantissent qu'au moins trois des quatre arêtes horizontales de la première couche sont désordonnées. S'il y en a quatre, elles appartiennent toutes à un certain ∂X_i, et deux d'entre elles appartiennent en fait à un certain $\partial^2 X_i$; s'il n'y en a que trois, elles appartiennent toutes à un certain $\partial^2 X_i$. Dans tous les cas, leur contribution à la somme ci-dessus est au moins égale à $3N^2$. □

Lemme 160. *Soit un défaut frontalier de type ordre–désordre. S'il possède une arête horizontale désordonnée au niveau $z = 1$, la contribution de ses arêtes horizontales à*

$$\sum_{i \notin J} |\partial X_i| + \left|\partial^2 X_i\right|,$$

est au moins égale à N^2.

Démonstration. Soit p la plaquette horizontale au niveau $z = 1$. Si p possède exactement une seule arête désordonnée, elle appartient à $\partial^2 X_j$ pour un certain $j \notin J$. Si p est entièrement désordonnée, l'une des arêtes verticales e du premier cube est ordonnée, car ce cube est frustré ; les deux arêtes de p touchant e sont donc dans $\partial X(e)$. Enfin, Si p a deux ou trois arêtes désordonnées, on choisit une arête ordonnée $e \in p$; on remarque que $\partial X(e)$ contient deux arêtes de p. Dans tous les cas, on obtient une contribution horizontale de N^2. □

Démonstration de (10.20).

- Si $D^b \leq \frac{N^2}{4}$, nous pouvons appliquer le Lemme 159 et (10.26) pour obtenir (10.20).
- Si $D^b = \frac{N^2}{2}$, les conditions au bord fortement désordonnées empêchent la plaquette horizontale $z = 1$ d'être complètement ordonnée, et nous pouvons appliquer les Lemmes 160 et 158, pour obtenir (10.20).
- Si $D^b \geq \frac{3N^2}{4}$ et $m \geq 3$, (10.20) découle de (10.27).
- Enfin, si $D^b \geq \frac{3N^2}{4}$ et $m = 2$ nous savons que le défaut contient au moins deux plaquettes (désordonnées) appartenant à des blobs, puisqu'il n'est pas e-problématique par hypothèse. Si cette plaquette désordonnée supplémentaire est horizontale, alors le second cube est nécessairement désordonné ; sinon elle est verticale. Dans les deux cas, la plaquette horizontale du niveau $z = 1$ ne peut être complètement ordonnée. Nous pouvons donc appliquer le lemme 160 et (10.26) pour obtenir (10.20). □

Désordre–désordre : démonstration de (10.28)

Nous démontrons maintenant l'inégalité

$$2D - \frac{6\left(l - \frac{1}{4}\right)}{l}(K + Q) \geq \frac{7N^2}{2} + \alpha m N^2. \tag{10.28}$$

En fait, la plupart des défauts satisferont l'inégalité (plus forte) suivante

$$2D - 6(K + Q) \geq \frac{7N^2}{2} + \alpha m N^2.$$

Nous partons de l'identité

$$2D - 6K = D^b + N^2 + \sum_i |\partial X_i| + \sum_i \left|\partial^2 X_i\right|, \tag{10.29}$$

dont nous déduisons

$$2D - 6K - 6Q \geq D^b + N^2 + \frac{mN^2}{2} + 2Q, \tag{10.30}$$

qui garantira l'inégalité souhaitée dès que $m \geq 6$. Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

Lemme 161. *Soit un défaut frontalier avec conditions au bord désordre-désordre tel que $2 \leq m \leq 5$. Alors pour toute arête horizontale ordonnée e, on a*

$$|\partial X_e| + \left|\partial^2 X_e\right| \geq \frac{7}{4} N^2,$$

où X_e désigne la composante connexe contenant e.

Démonstration. Ce lemme est un analogue du Lemme 120. Si $X(e)$ contient les 4 sites de la plaquette horizontale p, $m \leq 5$ et les conditions au bord fortement désordonnées assurent que $\partial X(e)$ contient au moins $\frac{7}{4}N^2$ arêtes verticales. Sinon, $|\partial X(e)| + |\partial^2 X(e)| \geq 2N^2$. □

Lemme 162. *Pour tout défaut frontalier tel que $m \geq 2$ et dont toutes les arêtes horizontales sont désordonnées, on a*

$$D^b + \sum |\partial X_j| \geq 3N^2 + 6Q.$$

Sa démonstration est rigoureusement identique au lemme 121, analogue dans le modèle de Potts.

Démonstration de (10.28). Formellement, (10.28) et (8.16) sont identiques. Comme nous avons démontré ici les Lemmes 159, 162 et 161, respectivement analogues des Lemmes 122, 121 et 120, la fin de la démonstration de (8.16) s'applique. □

Table des matières

Remerciements **iii**

1 Introduction **1**
1.1 Généralités 1
1.2 Modèles d'étude 3
1.3 Objet de la thèse 10
1.4 Perspectives 14

I Formalisme des interfaces rigides **17**

2 États d'équilibre, phases pures **21**
2.1 Mesures de Gibbs 21
2.2 Transition de phases, phases pures 24

3 Méthode de la positivité par réflexion **27**
3.1 Positivité par Réflexion et inégalité de l'échiquier 27
3.2 Mesures de Gibbs sur un tore 31
3.3 Mesures de Gibbs positives par réflexion 32

4 Interfaces rigides **35**
4.1 Dualité en dimension $d \geq 3$ 35
4.2 Description des interfaces 39
4.3 Rigidité et invariance horizontale 40

Stratégie commune des parties applicatives **47**

II Modèle d'Ising **49**

5 Transition de phases du modèle d'Ising **53**
5.1 Définition du modèle 53
5.2 Magnétisation spontanée 53
5.3 États de Dobrushin ; transition de rugosité 56

6 Rigidité de l'interface +/− **59**
6.1 Introduction 59
6.2 Démonstration des inégalités de Peierls (6.1),(6.2) 62
6.3 Construction de γ_c 65
6.4 Démonstration des Lemmes 66 et 67 70

III Modèle de Potts **75**

7 Interfaces ordre–désordre du modèle de Potts **79**
7.1 Transition de phase dans le modèle de Potts 79
7.2 Rigidité de l'interface ordre–désordre 81

8 Démonstration des inégalités de Peierls **87**
8.1 Structure des blobs 87
8.2 Estimation de γ_c^N 90
8.3 Bornes inférieures 96
8.4 Bornes supérieures 97
8.5 Inégalités combinatoires 101

IV Dégénérescence des états fondamentaux **109**

9 Modèle à symétrie continue **113**
9.1 Description du modèle 113
9.2 Résultats 113
9.3 Démonstration du Théorème 129 115

10 Modèle discret **123**
10.1 Introduction 123
10.2 Démonstration du Théorème 140 127
10.3 Inégalités combinatoires pour les défauts internes 147
10.4 Inégalité combinatoires pour les défauts frontaliers 151

Table des matières **155**

Table des figures **157**

Bibliographie **159**

Table des figures

1.1 Configuration typique d'Ising 2D 5
1.2 Interface $+/-$ du modèle d'Ising 3D à basse température 6
1.3 Défauts d'une interface abstraite 12
1.4 Interface périodique engendrée par un défaut 12
1.5 Allure du potentiel du modèle de double-puits 15
1.6 Allure d'un potentiel (basse énergie)/(haute entropie) 15

3.1 Identification d'un pavé à un tore 28
3.2 Inégalité de l'échiquier sur un tore 4×2 30
3.3 Application de l'inégalité de l'échiquier dans Ising 2D 33

4.1 Exemple de surfaces séparantes 37

5.1 Simulation du modèle d'Ising 2D à la température critique . . . 55

6.1 Conditions aux bords mixtes sur $\Lambda_{N,L}$ 60
6.2 Interface $+/-$ dans un cylindre 61
6.3 Différents pavages périodiques 63
6.4 Exemple de blobs 64

8.1 Exemple de blobs d'interfaces ordre–désordre 88
8.2 Heuristique pour l'inégalité de Peierls 92
8.3 Recollement de trois blobs 93
8.4 Caractéristiques d'un défaut réfléchi 98

10.1 Exemples de blobs 129
10.2 Défauts problématiques et non-problématiques 130
10.3 Interface engendrant deux défauts problématiques 133

10.4 Les défauts problématiques et e-problématiques 133
10.5 Recollement de deux défauts problématiques 139

Bibliographie

[AF86] M. Aizenman et R. Fernandez : On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional Ising models. *J. Stat. Phys.*, 44:393–454, 1986.

[Aiz80] M. Aizenman : Translation invariance and instability of phase coexistence in the two-dimensional Ising system. *Comm. Math. Phys*, 73(1):83–94, 1980.

[Aiz94] M. Aizenman : On the slow decay of o(2) correlations in the absence of topological excitations : Remark on the patrascioiu-seiler model. *J. Stat. Phys.*, 77:351–359, 1994.

[AML73] D.B. Abraham et A. Martin-Löf : The transfer matrix for a pure phase in the two-dimensional Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 32:245–268, 1973.

[Bal95] T. Balaban : A low temperature expansion for classical n-vector models. i. a renormalization group flow. *Comm. Math. Phys.*, 167(1):103–154, 1995.

[BAP05] S. Balibar, H. Alles et A. Ya. Parshin : The surface of helium crystals. *Rev. Modern Phys.*, 77:317, 2005.

[BK06] M. Biskup et R. Kotecký : Forbidden gap argument for phase transitions proved by means of chessboard estimates. *Comm. Math. Phys.*, 264(3):631–656, 2006.

[Bod06] T. Bodineau : Translation invariant Gibbs states for the Ising model. *Probab. Theory Related Fields*, 135(2):153–168, 2006.

[CIV03] M. Campanino, D. Ioffe et Y. Velenik : Rigorous non-perturbative Ornstein-Zernike theory for Ising ferromagnets. *Europhysics Letters*, 62(2):182–188, 2003.

[ČK03] J. Černý et R. Kotecký : Interfaces for random cluster models. *J. Stat. Phys.*, 111(1/2):73–106, 2003.

[Dob65] R.L. Dobrushin : Existence of a phase transition in two and three dimensional Ising models. *Theory Probab Appl.*, 10:192–213, 1965.

[Dob68] R.L. Dobrushin : Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions. *Funct. Anal. Appl.*, 2:302–312, 1968.

[Dob72a] R. Dobrushin : Gibbs state describing the coexistence of phases in the three-dimensional Ising model. *Theory Probab. Appl.*, 17:582–600, 1972.

[Dob72b] R. Dobrushin : The Gibbs state that describes the coexistence of phases for a three-dimensional Ising system. *Teor. Verojat. Primen.*, 17:619–639, 1972.

[Dob96] R.L. Dobrushin : Estimates of semi-invariants for the Ising model at low temperatures. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 177: 59–81, 1996.

[DS81] R.L. Dobrushin et S. Shlosman : Phases corresponding to the local minima of the energy. *Selecta Math. Soviet.*, 1(4):317–338, 1981.

[DS85] R. Dobrushin et S. Shlosman : The problem of translation invariance of Gibbs states at low temperatures. *Math. Phys. Rev.*, 5:53–195, 1985.

[DS88] E.I. Dinaburg et Ya.G. Sinaĭ : Contour models with interaction and their applications. *Selecta Math. Soviet.*, 7(3):291–315, 1988.

[Dys69] F.J. Dyson : Existence of a phase-transition in a one-dimensional ising ferromagnet. *Comm. Math. Phys.*, 12(2): 91–107, 1969.

[FILS78] J. Frőhlich, R. Israel, E. Lieb et B. Simon : Phase transitions and reflection positivity I. *Comm. Math. Phys.*, 62(pages 1–34), 1978.

[FILS80] J. Frőhlich, R. Israel, E. Lieb et B. Simon : Phase transitions and reflection positivity II. *J. Stat. Phys.*, 22(pages 297–347), 1980.

[FKG71] C.M. Fortuin, P.W. Kasteleyn et J. Ginibre : Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22(2):89–103, 1971.

[FSS76] J. Frőhlich, B. Simon et T. Spencer : Infrared bounds, phase transitions and continuous symmetry breaking. *Comm. Math. Phys.*, 50:79, 1976.

[Gal72] G. Gallavotti : The phase separation line in the two-dimensional Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 27:103–136, 1972.

[Geo88] H.-O. Georgii : *Gibbs measures and phase transitions.* de Gruyter, 1988.

[GG02] G. Gielis et G. Grimmett : Rigidity of the interface in percolation and random-cluster models. *J. Stat. Phys.*, 109(1/2):1–37, 2002.

[Gri67] R.B. Griffiths : Correlations in Ising ferromagnets. III. a mean-field bound for binary correlations. *Comm. Math. Phys.*, 6(2):121–127, 1967.

[Gri06] G. Grimmett : *The Random Cluster Model*, volume 333 de *A series of Comprehensive Studies in Mathematics.* Springer, 2006.

[Hig81] Y. Higuchi : On the absence of non-translation invariant Gibbs states for the two-dimensional Ising model. *In Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, volume 27. North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

[HKZ88] P. Holický, R. Kotecký et M. Zahradník : Rigid Interfaces for Lattice Models at Low Temperature. *J. Stat. Phys.*, 50(3/4):754–812, 1988.

[Isi24] E. Ising : *Beitrag zur Theorie des Ferro und Paramagnetismus.* Thèse de doctorat, Hambourg, 1924. `http://www.fh-augsburg.de/~harsch/anglica/Chronology/20thC`.

[Isi25] E. Ising : Contribution to the theory of ferromagnetism. *Z. Phys.*, 21:613, 1925.

[KP86] R. Kotecký et D. Preiss : Cluster expansions for abstract polymer models. *Comm. Math. Phys.*, 103(3):491–498, 1986.

[KS68] D.G. Kelly et S. Sherman : General Griffiths' inequalities on correlations in Ising ferromagnets. *J. Math. Phys.*, 9(3): 466–484, 1968.

[KS82] R. Kotecký et S. Shlosman : First-order phase transitions in large entropy lattice systems. *Comm. Math. Phys.*, 83:493–550, 1982.

[Kur68] K. Kuratowski : *Topology.* Academic Press, New York–London, 1968.

[KW41] H. Kramers et G. Wannier : Statistics of the two-dimensional ferromagnet. *Phys. Rev.*, 60:252, 1941.

[Lan71] O. Lanford : Statistical mechanics and quantum field theory. *In Les Houches 1970.* New York : Gordon & Breach, 1971.

[Leb74] J.L. Lebowitz : GHS and other inequalities. *Comm. Math. Phys.*, 35:87–92, 1974.

[Mar86] D.H. Martirosian : Translation invariant Gibbs states in the q-state Potts model. *Comm. Math. Phys.*, 105:281–290, 1986.

[MMSRS91a] A. Messager, S. Miracle-Solé, J. Ruiz et S. Shlosman : Interfaces in the Potts Model I : Pirogov-Sinai theory of the Fortuin-Kasteleyn representation. *Comm. Math. Phys.*, 140: 81–91, 1991.

[MMSRS91b] A. Messager, S. Miracle-Solé, J. Ruiz et S. Shlosman : Interfaces in the Potts Model II : Antonov's Rule and Rigidity of the Order Disorder Interface. *Comm. Math. Phys.*, 140: 275–290, 1991.

[MW66] N.D. Mermin et H. Wagner : Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, 117:1133–1136, 1966.

[Ons44] L. Onsager : Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65(3–4):117–49, 1944.

[Pap84] F. Papangelou : On the absence of phase transition in one-dimensional random fields. *Probab. Theory Related Fields*, 67(3):29–254, 1984.

[Pei36] R. Peierls : On Ising's model of ferromagnetism. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 32:447–481, 1936.

[Pot52] R.B. Potts : Some generalized order-disorder transformations. *In Proc. Camb. Phil. Soc.*, volume 48, pages 106–109, 1952.

[Pre76] J. Preston : Random fields. *Lecture Notes in Math.*, 534, 1976.

[PS75] S. Pirogov et Ya.G. Sinaĭ : Phase diagrams of classical lattice systems. *Theoret. and Math. Phys.*, 25:1185, 1975.

[PS76] S. Pirogov et Ya.G. Sinaĭ : Phase diagrams of classical lattice systems. *Theoret. and Math. Phys.*, 26:39, 1976.

[Rue99] D. Ruelle : *Statistical Mechanics – Rigorous Results.* Imperial College, 1999.

[Rui89] J. Ruiz : Interface sharpness in the Potts model. *J. Stat. Phys.*, 56(5–6):621–629, 1989.

[Shl86] S.B. Shlosman : The method of reflection positivity in the mathematical theory of first-order phase transitions. *Russ. Math. Surveys*, 41:83–134, 1986.

[Sim93] B. Simon : *The Statistical Mechanics of Lattice Gases, Vol. 1.* Princeton Series in Physics, 1993.

[Sin82] Ya.G. Sinaĭ : *Theory of Phase Transitions : Rigorous Results.* Pergamon Press, 1982.

[SV] S. Shlosman et Y. Vignaud : Rigidity of the interface between low-energy and high-entropy phases. In preparation.

[SVar] S. Shlosman et Y. Vignaud : Dobrushin interfaces via reflection positivity. *Comm. Math. Phys.*, to appear.

[vB75] H. van Beijeren : Interfaces sharpness in the Ising system. *Comm. Math. Phys.*, 40(1):1–6, 1975.

[vE] A.C.D. van Enter : About low temperature expansions. private communication.

[vES02] A.C.D. van Enter et S.B. Shlosman : First-order transitions for n-vector models in two and more dimensions : rigorous proof. *Phys. Rev. Lett*, 89(285702), 2002.

[vES05] A.C.D. van Enter et S.B. Shlosman : Provable first-order transitions for nonlinear vector and gauge models with continuous symmetries. *Comm. Math. Phys.*, 255(1):21–32, 2005.

[Viga] Y. Vignaud : Entropic repulsion and entropic attraction. In preparation.

[Vigb] Y. Vignaud : On a continuous symmetry spin model with rigid interfaces. In preparation.

[Wu82] F.Y. Wu : The Potts model. *Rev. Modern Phys.*, 54:235–268, 1982.

[Zah86] M. Zahradník : Rigid interfaces. *In Phénomènes critiques, systèmes aléatoires, théories de jauge*, pages 441–453. Les Houches–1984, North-Holland, Amsterdam, 1986.

Rigid interfaces in lattice models: an application of the reflexion positivity method

Abstract

We study interfaces for four spin models on the lattice $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$: the Ising model at low temperature, the Potts model at critical point, a continuous symmetry model and its associated clock approximation. Interfaces of the last two models were not previously dealt with. For each model, we use specific boundary conditions that force the existence of an interface; related Gibbs measures then satisfy the so-called chessboard estimates, which are powerful correlation inequalities. These estimates are a simple way of showing that such interfaces are rigid, in the sense that they deviate only locally from a perfect hyperplane. This method is a *restricted* version of the so-called reflection positivity method, since reflections in certain directions are forbidden by the chosen boundary conditions.

In the case of Ising and Potts models, our method drastically simplifies historical proofs respectively devised by Dobrushin and Messager *et al.*, since its requires neither Pirogov-Sinaĭ theory nor cluster expansions. Besides, PS-theory is not directly available for the continuous model and its clock approximation, their ground states being infinitely degenerated; our method is thus a true alternative to such techniques.

Keywords: Phase transitions, rigid interfaces, Ising model, Potts model, clock model, continuous symmetry, correlation inequalities, reflexion positivity.

Résumé

Nous étudions les interfaces de quatre modèles de spins sur le réseau $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$: le modèle d'Ising à basse température, le modèle de Potts à la température critique, un modèle à symétrie continue et son approximation d'horloge ; les interfaces de ces deux derniers modèles n'ont jamais été étudiées auparavant. Pour chacun de ces modèles, nous imposons des conditions au bord spécifiques qui assurent l'existence d'une interface ; les mesures de Gibbs associées à de telles conditions au bord satisfont alors de puissantes inégalités de corrélation, dites de l'échiquier. Ces inégalités nous permettent de montrer que les interfaces considérées sont rigides, au sens où ce sont des hyperplans légèrement déformés par des aspérités locales. Cette méthode est une version *restreinte* de la méthode de positivité par réflexion, l'une des directions de réflexion étant prohibée par les conditions au bord choisies.

Pour Ising et Potts, notre méthode simplifie considérablement les démonstrations historiques respectivement dues à Dobrushin et Messager *et al.*, puisque ni la théorie de Pirogov-Sinaĭ, ni les développements en amas ne sont nécessaires à son application. Par ailleurs, la théorie-PS n'est directement envisageable ni pour le modèle continu ni pour son approximation car leurs états fondamentaux sont infiniment dégénérés ; notre méthode est donc une réelle alternative à ces techniques.

Discipline : Mathématiques.

Mots-clefs : Transitions de phase, interfaces rigides, modèle d'Ising, modèle de Potts, modèle d'horloge, symétrie continue, inégalités de corrélation, positivité par réflexion.

Laboratoire : Centre de Physique Théorique (UMR 6207).