



**HAL**  
open science

# Génération et caractérisation d'états intriqués en variables continues

Gaëlle Keller

► **To cite this version:**

Gaëlle Keller. Génération et caractérisation d'états intriqués en variables continues. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT: . tel-00265679v2

**HAL Id: tel-00265679**

**<https://theses.hal.science/tel-00265679v2>**

Submitted on 26 Mar 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



UNIVERSITÉ PARIS VI



LABORATOIRE KASTLER BROSEL

**Thèse de doctorat de l'Université Paris VI**

**Spécialité : Physique Quantique**

*Présentée par*

**Gaëlle KELLER**

*Pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Paris VI*

*Sujet de la thèse :*

**Génération et caractérisation  
d'états intriqués en variables continues**

*Soutenue le 19 février 2008 devant le jury composé de :*

Mme. Maria CHAMARRO	Présidente du jury
M. Thomas COUDREAU	Membre invité
M. Claude FABRE	Directeur de thèse
M. Emmanuel ROSENCHER	Examineur
M. Alessio SERAFINI	Rapporteur
M. Nicolas TREPS	Examineur
Mme. Rosa TUALLE-BROURI	Rapporteur



## Remerciements

*Mes premiers remerciements s'adressent aux membres du jury, Maria Chamarro, Emmanuel Rosencher, et tout particulièrement aux rapporteurs Rosa Tualle-Brouri et Alessio Serafini qui ont accepté cette lourde tâche malgré le peu de temps que je leur ai laissé !*

*Ma thèse s'est déroulée au Laboratoire Kastler Brossel, où j'ai été accueillie par Franck Laloë puis par Paul Indelicato. Je souhaite ici remercier tous les membres – permanents ou non – pour la chaleureuse ambiance qu'ils savent faire régner au laboratoire ; et pour l'aide que chacun a toujours été prêt à m'accorder.*

*J'ai fait mes premiers pas au laboratoire à l'occasion de mon stage de maîtrise avec Nicolas Treps, que je remercie pour la patience et la disponibilité dont il a toujours fait preuve à mon égard au cours de ces cinq années ; mais également pour sa bonne humeur, toujours bienvenue en fin de journée en salle de manip après des heures d'alignement infructueux de la cavité ! J'adresse également des remerciements tout particuliers à Claude Fabre, qui m'a accueillie dans son équipe, et est ensuite devenu mon directeur de thèse. Sa gentillesse, sa rigueur, et ses multiples propositions ont été autant d'éléments moteurs sans lesquels ce travail n'aurait certainement pas abouti. Il a également su me guider dans les moments de doute, et soutenir mes choix professionnels, ce dont je lui sais gré. Merci également à Thomas Coudreau, tant pour ses conseils et encouragements que pour les longues discussions scientifiques qui ont permis à certains chapitres de cette thèse de voir le jour. Je souhaite tout autant remercier Agnès Maître pour ses conseils, qu'ils soient scientifiques, pédagogiques, ou humains.*

*Les nombreux thésards que j'ai eu l'occasion de côtoyer ont su m'aider à franchir les petites "galères" quotidiennes par leur bonne humeur et leurs conseils, qu'ils en soient tous remerciés. Merci en particulier à Charles Leyder, Sylvain Gigan, Laurent Lopez, Antonino Chiummo, Vincent Delaubert, Benoît Chalopin et Jean Cviklinski qui ont partagé mon bureau et ma salle de manip ... et mes humeurs, à Julien Laurat qui m'a tout appris de la manip, et à Jose-Augusto Oliveira-Huguenin et Virginia D'Auria dont je ne compte plus les heures passées sur la manip, heures essentielles pour bon nombre de résultats de cette thèse. Je souhaite bonne chance et bon courage aux nouveaux thésards, Jean-François Morizur, Olivier Pinel et Taoufik Amri !*

*Le personnel technique et administratif a grandement contribué à ce que ma thèse se déroule dans les meilleurs conditions possibles. Je remercie Monique Bonnamy et Laeticia Morel pour leur capacité à démêler les écheveaux administratifs qui m'ont posé tant de problèmes, à Christophe Ravallac, Pascal Travers et Alain Vogt pour les nombreuses pièces mécaniques qu'ils ont construites pour l'expérience, à Jean-Pierre Okpiz et Brigitte Delamour pour les asservissements et autres circuits de photodiodes sans lesquels aucune mesure n'aurait pu se*

*faire, et à Annick Métais pour sa traque de la poussière, si néfaste aux éléments d'optique !  
Merci aussi à Florence Thibout pour s'être occupée du thé ... et de mon pot de thèse !*

*Je souhaite remercier ici Jérôme Tignon, qui m'a fait débiter dans la recherche, et m'a appris la rigueur et l'acharnement pour obtenir LE résultat. Les discussions fructueuses avec Jean-Pierre Gazeau d'une part, et avec Alessio Serafini et Gerardo Adesso d'autre part, ont permis au deuxième chapitre de cette thèse de voir le jour ; qu'ils soient tous remerciés pour tout ce qu'ils m'ont appris sur l'algèbre symplectique !*

*J'ai également eu l'occasion, dans le cadre de mon monitorat, d'enseigner à l'université ; et je tiens à remercier Michael Joyce, Pierre Encrenaz et Lucille Julien pour m'avoir accueillie dans leurs équipes respectives, et pour les conseils et les encouragements qu'ils m'ont prodigués. Ceci a grandement contribué à me conforter dans la voie de l'enseignement que j'ai finalement choisie.*

*Mes derniers remerciement s'adressent à ma famille, qui a su me soutenir et m'encourager au long des trois ans de cette thèse. Merci particulièrement à mes parents qui m'ont fait découvrir et aimer la physique, au point que je souhaite en faire mon métier ; et à ma sœur Chantal pour sa complicité, et pour avoir accompagné mes hésitations et mes découvertes avec l'oreille attentive qu'elle sait toujours me prêter. Enfin, un immense merci à Hervé, qui est devenu mon époux au cours de cette thèse, et qui a su me faire sourire à chaque fois que le découragement me gagnait.*

# Table des matières

Remerciements . . . . .	i
Introduction . . . . .	1
<b>Partie I Propriétés quantiques de la lumière en variables continues – Oscillateur paramétrique optique à auto-verrouillage de phase</b>	<b>5</b>
<b>1. Optique quantique en variables continues . . . . .</b>	<b>7</b>
A Introduction . . . . .	7
B Variables continues en mécanique quantique . . . . .	7
C Relations de commutation – Inégalité de Heisenberg . . . . .	9
D Fluctuations du champ . . . . .	10
E Corrélations quantiques en variables continues . . . . .	14
F Conclusion . . . . .	23
<b>2. Intrication en variables continues . . . . .</b>	<b>25</b>
A Introduction . . . . .	25
B Formalisme mathématique . . . . .	26
C Quantification de l'information contenue dans un état Gaussien . . . . .	35
D Intrication des états Gaussiens bipartitionnés . . . . .	37
E Cas particulier des états Gaussiens à 2 modes . . . . .	46
F Conclusion . . . . .	52
<b>3. Génération d'états non classiques en variables continues . . . . .</b>	<b>53</b>
A Introduction . . . . .	53
B Optique non linéaire . . . . .	53
C Oscillateur paramétrique optique . . . . .	59
D OPO auto-verrouillé en phase . . . . .	67
E Conclusion . . . . .	73
<b>Partie II Génération et caractérisation de faisceaux fortement intriqués</b>	<b>75</b>
<b>4. Dispositif expérimental . . . . .</b>	<b>77</b>
A Introduction . . . . .	77

B	Faisceau pompe et oscillateur local . . . . .	78
C	OPO auto-verrouillé en phase . . . . .	86
D	Détection et contrôle des fréquences signal et complémentaire . . . . .	90
E	Détection des propriétés quantiques . . . . .	98
F	Conclusion . . . . .	106
<b>5.</b>	<b>Étude au-dessous du seuil . . . . .</b>	<b>107</b>
A	Introduction . . . . .	107
B	Faisceaux EPR de valeur moyenne nulle . . . . .	107
C	Influence du couplage sur l'intrication . . . . .	113
D	Conclusion . . . . .	123
<b>6.</b>	<b>Étude au-dessus du seuil . . . . .</b>	<b>125</b>
A	Introduction . . . . .	125
B	Mesures directes . . . . .	126
C	Mesure du bruit du laser, en utilisant une cavité désaccordée . . . . .	128
D	Observation de faisceaux EPR au-dessus du seuil . . . . .	135
E	Conclusion . . . . .	138
<b>Partie III Au-delà de l'intrication de deux champs</b>		<b>139</b>
<b>7.</b>	<b>Génération d'intrication en polarisation : OPO à deux cristaux . . . . .</b>	<b>141</b>
A	Introduction . . . . .	141
B	OPO auto-verrouillé en phase à deux cristaux . . . . .	142
C	Reproduction de l'article . . . . .	146
<b>Conclusion . . . . .</b>		<b>155</b>

## Introduction

L'existence d'états intriqués est prédite par la mécanique quantique. C'est Schrödinger qui, le premier, a introduit ces états présentant des corrélations plus fortes que toutes les corrélations classiques : lorsque deux parties sont intriquées, on ne peut les considérer séparément. En d'autres termes, un état intriqué ne peut être décrit par la description de ses sous-parties, ce qui est toujours possible en mécanique classique. De ce fait, une mesure sur une partie du système modifie l'état quantique de l'autre partie. L'aspect particulièrement remarquable de cette propriété, qui a fortement intrigué Einstein, Podolsky et Rosen en 1935 [Einstein *et al.*, 1935], est qu'elle reste vraie même lorsque les deux parties sont distantes, et ne peuvent physiquement interagir. Ceci les a amené à conclure que la mécanique quantique est fondamentalement incomplète.

L'expérience de pensée proposée par Einstein, Podolsky et Rosen portait sur la position et l'impulsion de deux particules matérielles ; cependant, c'est dans le domaine de l'optique que les premières réussites sont intervenues. En effet, Bohm a reformulé en 1951 l'expérience de pensée pour le spin de deux particules ou la polarisation de deux photons [Bohm, 1951]. Bell a ensuite montré qu'une théorie locale à variables cachées impliquait l'existence de certaines inégalités sur les corrélations entre mesures effectuées sur le système [Bell, 1964]. C'est pour tenter de violer ces inégalités que les premières expériences de production d'états intriqués ont été réalisées à la fin des années 1970 [Fry et Thompson, 1976, Aspect *et al.*, 1982]. Les grandeurs intriquées étaient les polarisations de deux photons. Par la suite, des expériences plus proches de la proposition originelle ont été mises en place, avec l'intrication de quadratures du champ électromagnétique (analogues des variables position et impulsion d'une particule) [Ou *et al.*, 1992].

On sait à présent intriquer des systèmes matériels, qu'il s'agisse d'ions [Häffner *et al.*, 2005, Leibfried *et al.*, ], d'ensembles atomiques [Chou *et al.*, 2005, Laurat *et al.*, 2007] ou d'atomes neutres [Julsgaard *et al.*, 2001]. Certaines équipes sont également parvenues à intriquer la lumière avec des ions [Blinov *et al.*, 2004, Moehring *et al.*, 2007].

Après les expériences fondatrices de génération d'états intriqués, c'est l'étude des applications de l'intrication qui s'est développée. Elles se sont en effet révélées de plus en plus nombreuses, les avancées les plus remarquables ayant eu lieu dans le domaine des communications quantiques, qui utilisent le fait qu'on puisse modifier l'état quantique de l'ensemble des parties en agissant seulement sur l'une d'entre elles, c'est-à-dire en effectuant des opérations locales.

La base des communication quantiques est donc le partage d'intrication ("entanglement sharing" en anglais) entre les différentes parties. Elles s'appuient également sur un certain



nombre de processus plus élaborés faisant intervenir l'intrication.

Deux de ces processus-clé sont le transfert d'intrication et la téléportation. La première opération ("entanglement swapping" en anglais) consiste à intriquer deux parties n'ayant jamais interagi. Ceci est possible à partir de deux paires intriquées, en mesurant simultanément une partie de chaque paire (une telle mesure est appelée mesure de Bell). Les deux autres parties, bien que n'ayant jamais interagi, sont alors intriquées [Pan *et al.*, 1998, Jia *et al.*, 2004]. Quant à la téléportation, elle permet de transférer un état quantique d'un objet à un autre sans avoir à mesurer cet état [Vaidman, 1994, Braunstein et Kimble, 1998]. Ceci est d'autant plus intéressant que d'après l'inégalité de Heisenberg, on ne peut mesurer exactement un état quantique : la téléportation est donc plus performante que ne l'aurait été un protocole se limitant à des mesures classiques. De nombreuses équipes ont fait la démonstration expérimentale de la téléportation, en variables discrètes [Pan *et al.*, 2003] ou en variables continues [Furusawa *et al.*, 1998, Bowen *et al.*, 2003, Takei *et al.*, 2005].

Parmi les multiples applications de l'intrication, on peut encore citer le codage dense, qui permet un taux de transfert de l'information plus important qu'en l'absence d'intrication [Braunstein et Kimble, 2000, Li *et al.*, 2002].

Enfin, la cryptographie quantique utilise les propriétés de la mécanique quantique pour assurer la sécurité des protocoles de communication quantique. Certains protocoles, en particulier celui proposé par Ekert en 1991, s'appuient sur l'intrication [Ekert, 1991]. Dans ce protocole, outre le partage et la mesure de paires intriquées, les deux personnes qui communiquent utilisent un théorème central en cryptographie, le théorème de non-clonage [Wootters et Zurek, 1982]. Il stipule qu'un état quantique ne peut être copié sans être altéré. Ainsi, si un espion intercepte la communication et renvoie un clone de l'état qu'on cherche à transmettre, l'état reçu par le destinataire sera altéré. Sur ce principe, des sociétés ont développé et proposent à la vente des appareils permettant de communiquer de façon absolument sécurisée.

Communiquer avec des états intriqués implique qu'on soit capable de les caractériser. Or la génération expérimentale d'états intriqués s'est heurtée à un problème de taille : comment prouver que l'état obtenu est intriqué? Cette question, non résolue dans sa totalité à l'heure actuelle, s'est vue apporter de nombreuses réponses, basées sur l'une ou l'autre de deux notions essentielles : la séparabilité et les corrélations.

Les critères basés sur la séparabilité sont les plus nombreux et les plus utilisés. Le principe est le suivant : mathématiquement, un état est intriqué si on ne peut le factoriser, c'est-à-dire s'il n'est pas *séparable*. Si on est capable de déterminer une condition nécessaire pour qu'un état soit factorisable, tout état ne remplissant pas cette condition sera nécessairement inséparable, et donc intriqué. Nous nous intéressons dans ce mémoire aux états Gaussiens en variables continues, pour lesquels le problème est résolu dans les cas bi-partitionnés. Ce n'est pas le cas pour les multi-partitions.

Le plus connu des critères d'inséparabilité est le critère de Peres [Peres, 1996], basé sur la matrice densité de l'état, ou sa forme adaptée aux variables continues, qui repose sur la matrice de covariance de l'état, le critère de Mancini [Mancini *et al.*, 2002] (dont un cas particulier très utilisé est le critère de Duan et Simon [Duan *et al.*, 2000, Simon, 2000]). Il est très intéressant, car pour certaines classes d'états, il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante

d'inséparabilité. Ceci signifie qu'il permet de détecter *tous* les états intriqués de ces classes d'état. Les témoins d'intrications ("entanglement witnesses"), qui dérivent du même principe, sont des critères suffisants d'intrication [Hyllus et Eisert, 2006]. La littérature récente fait état d'un grand nombre de nouveaux critères d'inséparabilité; cependant aucune généralité ne se dégage encore pour les multi-partitions.

L'article fondateur d'Einstein, Podolsky et Rosen faisait apparaître l'intrication comme une double corrélation, d'origine purement quantique, entre deux parties. Certains critères d'intrication, comme le critère (suffisant) de Reid (ou critère "EPR") [Reid, 1989], font écho à cette autre approche, plus phénoménologique.

Lorsque l'intrication est identifiée, un problème subsiste : quelle est la "qualité" de l'intrication générée? En d'autres termes, comment comparer deux états intriqués? Utilisés – par exemple – dans une expérience de communication quantique, vont-ils donner des résultats équivalents? Ceci pose la question de la mesure de l'intrication; qui est loin d'être résolue dans son intégralité.

Aucune des différentes mesures d'intrication existantes ne satisfait tous les critères *a priori* nécessaires à la validité d'une telle mesure. D'ailleurs, le classement induit sur les états diffère selon la mesure considérée. Si l'intrication de formation constitue une définition acceptable d'un point de vue conceptuel [Bennett *et al.*, 1996c], elle s'avère très difficile à exprimer, et donc à calculer [Giedke *et al.*, 2003]. Les négativités [Vidal et Werner, 2002] mesurent la distance entre l'état et le témoin d'intrication ... mais dépendent du témoin utilisé, et n'ont donc pas de valeur universelle! Cependant, dans le cas particulier des états Gaussiens à deux modes, qui sont les états étudiés expérimentalement durant cette thèse, toutes les mesures débouchent sur le même classement des états; on pourra donc indifféremment utiliser la séparabilité, la négativité logarithmique, ou l'intrication de formation pour comparer ces états.

Ainsi, l'intrication (en variables continues ou non) pose encore de nombreuses questions à l'heure actuelle. Toutefois, la majeure partie des problèmes ont été aplanis dans le cadre choisi pour cette étude expérimentale de l'intrication : celui des états Gaussiens à deux modes. Ceci nous permet de disposer d'un grand nombre d'outils théoriques pour analyser les états produits par le dispositif original que nous utilisons : l'Oscillateur Paramétrique Optique à auto-verrouillage de phase. Ce dispositif a été construit au laboratoire au cours de la thèse de Julien Laurat, qui a pu étudier les propriétés du système au-dessous et au-dessus du seuil d'oscillation. Il a montré que les faisceaux générés par le système sous le seuil sont EPR; mais au-dessus du seuil un fort excès de bruit résiduel sur les faisceaux n'a pas permis de démontrer leur intrication. L'objectif de cette thèse était donc – après le déménagement du laboratoire et le remontage de l'expérience – de déterminer l'origine de cet excès de bruit et de le quantifier, puis de mettre en œuvre une solution; ce qui a permis de mesurer effectivement des faisceaux EPR au-dessus du seuil. Nous nous sommes également orientés vers la production d'autres états quantiques de la lumière, plus complexes, ou s'appuyant sur d'autres variables continues que les quadratures du champ.

Dans une première partie de ce manuscrit, les aspects théoriques de l'optique quantique utiles à la compréhension des expériences sont développés : la notion de variables continues

est rappelée et détaillée, ainsi que l'inégalité de Heisenberg et les propriétés de fluctuations des champs qui en découlent : la compression de bruit et l'intrication, notion centrale de cette thèse. Le second chapitre reprend les principaux résultats d'un formalisme mathématique puissant, reposant sur l'algèbre symplectique ; et les notions d'optique quantique précédemment définies sont exprimées dans le cadre de ce formalisme. La question des mesures d'intrication est également discutée. Enfin, un dernier chapitre aborde différentes techniques expérimentales permettant de générer des états non classiques en variables continues ; et en particulier le dispositif exploité au cours de cette thèse : l'Oscillateur Paramétrique Optique auto-verrouillé en phase.

La seconde partie est consacrée aux aspects expérimentaux. Le premier chapitre présente une description approfondie de l'ensemble de l'expérience, ainsi que les diverses techniques expérimentales permettant de produire et d'analyser les états quantiques. Les résultats obtenus au-dessous puis au-dessus du seuil sont ensuite détaillés.

Enfin une dernière partie propose un nouveau dispositif, un Oscillateur Paramétrique Optique auto-verrouillé en phase à deux cristaux. Les calculs menés montrent que ce dispositif génère des faisceaux intriqués en polarisation et non plus en quadratures. Ceci est un premier pas vers la génération d'autres états intriqués : intrication entre plus de deux états, intrication "transférable" aux atomes, *etc.*

## Partie I

Propriétés quantiques de la lumière en variables continues –

Oscillateur paramétrique optique à auto-verrouillage de phase



# 1. Optique quantique en variables continues

## Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>B</b>	<b>Variables continues en mécanique quantique</b>	<b>7</b>
<b>C</b>	<b>Relations de commutation – Inégalité de Heisenberg</b>	<b>9</b>
<b>D</b>	<b>Fluctuations du champ</b>	<b>10</b>
D.1	État vide – État cohérent	10
D.2	Bruit quantique de la lumière	10
D.3	État comprimé du rayonnement	11
D.4	Linéarisation des fluctuations	12
D.5	Mesure des fluctuations du champ	13
<b>E</b>	<b>Corrélations quantiques en variables continues</b>	<b>14</b>
E.1	Corrélations entre une quadrature de chaque mode	14
E.2	Double corrélation	17
<b>F</b>	<b>Conclusion</b>	<b>23</b>

---

## A Introduction

Dans cette partie sont présentés les aspects les plus utiles pour l'expérimentateur des variables continues en optique quantique. Après avoir introduit la notion de variables continues en mécanique quantique, on s'intéressera plus particulièrement au cas de l'optique. On introduira l'inégalité de Heisenberg, et ses conséquences sur les fluctuations quantiques du champ électromagnétique. La représentation de ces fluctuations dans le plan de Fresnel permettra tout au long de cette thèse une illustration des notions et résultats importants. Enfin on abordera le problème des corrélations quantiques, d'abord entre une quadrature de chaque mode, puis entre les deux quadratures de chaque mode, à l'origine du débat soulevé en 1935 par l'article EPR (pour un système de deux particules, problème analogue à celui de deux modes du champ). Quelques critères permettant de distinguer les différents types de corrélations seront décrits (une étude plus détaillée sera menée dans le chapitre 2). On soulignera enfin le lien étroit existant entre intrication et réduction de bruit.

## B Variables continues en mécanique quantique

La description habituelle des systèmes quantiques est la description de Von Neumann, où chaque opération physique sur un état est décrite par un opérateur. On peut distinguer deux

types d'opérateurs : ceux dont le spectre est discret (éventuellement infini), et ceux dont le spectre est continu.

Du fait de leur simplicité conceptuelle, les systèmes discrets ont été expérimentalement les premiers étudiés. Les systèmes à deux états sont les plus simples, et ont débouché (entre autres) sur le calcul quantique avec des qubits. En particulier, un des exemples les plus utilisés en optique est l'état de polarisation d'un photon unique, qui peut s'exprimer comme combinaison linéaire des polarisations horizontale et verticale :  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{|c_V|^2 + |c_H|^2}} (c_V |V\rangle + c_H |H\rangle)$  où  $(c_V, c_H) \in \mathbb{C}^2$ . C'est cet état (ou son analogue pour le spin) qu'a utilisé Bohm pour "traduire" en termes de variables discrètes l'expérience de pensée de Einstein, Podolsky et Rosen [Bohm, 1951, Einstein *et al.*, 1935]. Par exemple, l'état  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|V V\rangle + |H H\rangle)$  est un état intriqué de deux photons. De nombreux problèmes en physique atomique se réduisent également à l'étude de systèmes à 2 niveaux (ou quelques niveaux tout au plus).

Plus récemment, l'information quantique s'est intéressée aux variables à spectre continu. Ces variables sont *a priori* beaucoup plus riches que les variables discrètes. Le premier exemple de telles variables en mécanique quantique sont la position et l'impulsion d'une particule, dont l'analogue en optique quantique sont les composantes de quadrature conjuguées d'un mode du champ électromagnétique. Cette analogie résulte directement de la quantification du champ, qui permet de décrire un mode comme un oscillateur harmonique quantique [Grynberg *et al.*, 1997, Fabre, 1997].

On considère un mode du champ électromagnétique, correspondant à une onde plane de polarisation et de direction fixées, de pulsation  $\omega$ . En physique classique, le champ électrique associé peut s'écrire :

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) = E_P \cos(\omega t) + E_Q \sin(\omega t) \quad (1.1)$$

$E_0$  et  $\varphi$  sont respectivement l'amplitude et la phase de l'onde.  $E_P$  et  $E_Q$  sont les amplitudes des deux quadratures du champ dans le repère de Fresnel. On notera que pour une description en termes de quadratures, comme pour une description en termes de phase et amplitude, il est nécessaire de fixer l'origine des phases (ou de choisir la base dans le plan de Fresnel). Dans le cadre d'une description quantique, le champ électrique se définit à partir des opérateurs de création et d'annihilation de photon :

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_0(\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \equiv \mathcal{E}_0(\hat{P} \cos(\omega t) + \hat{Q} \sin(\omega t)) \quad (1.2)$$

où  $\mathcal{E}_0$  est une constante de normalisation qui correspond au champ électrique associé à un photon.

Ainsi, les opérateurs de quadratures  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$  s'expriment :

$$\hat{P} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \quad (1.3a)$$

$$\hat{Q} = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (1.3b)$$

L'intérêt des variables continues par rapport aux variables discrètes est double. En effet, si les concepts théoriques sont plus difficiles à manipuler, les systèmes expérimentaux sont plus

simples à mettre en œuvre : un faisceau lumineux est directement obtenu à la sortie d'un laser, tandis que la production de photons uniques est encore à l'heure actuelle l'objet à part entière de certaines expériences. Les techniques de mesure sont elles aussi nettement moins complexes et moins coûteuses. Par ailleurs, les possibilités offertes à l'optique quantique en variables continues sont très riches (débit plus important, instruments de mesure plus précis et donc plus sensibles, ...).

## C Relations de commutation – Inégalité de Heisenberg

À partir de la relation de commutation entre les opérateurs création et annihilation :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbf{1} \quad (1.4)$$

et de la définition des opérateurs de quadratures (1.3), on peut facilement montrer que ces derniers vérifient la même relation de commutation canonique que les opérateur position et impulsion d'une particule :

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = 2i \mathbf{1} \quad (1.5)$$

L'ensemble des propriétés quantiques du champ découle de cette relation de commutation. En particulier, elle impose une limite inférieure au produit des variances des deux variables conjuguées ; c'est l'inégalité de Heisenberg :

$$(\Delta \hat{P})^2 \cdot (\Delta \hat{Q})^2 \geq 1 \quad (1.6)$$

où, pour un opérateur  $\hat{Y}$ ,  $\Delta \hat{Y} = \sqrt{\langle \hat{Y}^2 \rangle - \langle \hat{Y} \rangle^2}$ .  $(\Delta \hat{Y})^2$  désigne sa variance.

Ainsi, on ne peut prédire avec une précision infinie le résultat de la mesure simultanée des deux composantes de quadratures : leurs fluctuations constituent le bruit quantique de la lumière, bruit intrinsèque à la nature quantique de la lumière, qui subsiste lorsque toutes les autres sources de bruit ont disparu.

On peut également déduire de ces relations le lien entre le nombre de photons (représenté par l'opérateur nombre  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ), dont dépend directement l'intensité du champ, et les quadratures :

$$\hat{P}^2 + \hat{Q}^2 = \hat{N} + \frac{1}{2} \quad (1.7)$$

Comme on l'a déjà mentionné, le choix des composantes de quadratures est arbitraire, et correspond à un choix de l'origine des phases dans le plan de Fresnel. Une fois le choix effectué, on peut s'intéresser à un couple de composantes de quadratures conjuguées tourné de  $\theta$  par rapport aux quadratures de référence :

$$\hat{P}(\theta) = \hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \quad (1.8a)$$

$$\hat{Q}(\theta) = -i \left( \hat{a} e^{-i\theta} - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \right) \quad (1.8b)$$



Tout couple de quadratures conjuguées vérifie la relation de commutation (1.5). Notons que  $\hat{Q}(\theta) = \hat{P}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Lorsque la valeur moyenne du champ étudié est non nulle, il existe un couple de quadratures particulier : les quadratures définies par  $\theta = \varphi$ , où  $\varphi$  est la phase du champ, correspondent respectivement aux quadratures d'amplitude et de phase du champ.

## D Fluctuations du champ

### D.1 État vide – État cohérent

Un état particulier est le vide, pour lequel toutes les composantes de quadrature présentent la même variance de bruit :

$$(\Delta\hat{P}_{vac})^2 = (\Delta\hat{Q}_{vac})^2 = 1 \quad (1.9)$$

Cet état définit ainsi une référence pour les fluctuations, qu'on appellera par la suite "limite quantique standard" ou "bruit quantique standard". Ces fluctuations correspondent aux fluctuations d'un oscillateur matériel au repos autour de sa position d'équilibre. Cette référence a longtemps été considérée comme une limite infranchissable – on sait aujourd'hui que ce n'est pas tout-à-fait exact.

L'état quantique dont les propriétés sont les plus proches de celles d'un champ classique est obtenu en superposant à ce dernier les fluctuations du vide. De tels états, introduits par Glauber en 1963 [Glauber, 1963, Glauber, 1965], sont appelés états cohérents. Le vide est donc un état cohérent de valeur moyenne nulle, c'est-à-dire dont le nombre moyen de photons est nul. Les états cohérents sont notés  $|\alpha\rangle$ , et ils sont vecteurs propres de l'opérateur annihilation pour la valeur propre  $\alpha$  :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.10)$$

### D.2 Bruit quantique de la lumière

Il est possible de donner une image simple en termes corpusculaire des fluctuations d'intensité du champ dues à la nature quantique de la lumière, qui sont appelées "bruit de grenaille" ("shot noise" en anglais). En effet, la lumière "classique" (assimilée à un état cohérent) est constituée de photons, qui sont répartis aléatoirement dans le temps au sein du faisceau, suivant une distribution Poissonnienne<sup>1</sup>. Lorsque les photons arrivent sur un détecteur (par exemple une photodiode), si ce dernier est suffisamment rapide, il va détecter des fluctuations autour de la valeur moyenne de l'intensité, dues à l'arrivée pendant le temps d'intégration du détecteur d'un nombre de photons plus ou moins important (*cf.* Fig. 1.1). Le bruit de grenaille de la lumière est ainsi l'analogie optique du bruit que ferait un jet de sable frappant une plaque métallique.

On a vu que la quantification du champ en quadratures conjuguées s'appuie sur la représentation de Fresnel du champ électromagnétique. Pour cette raison, une représentation courante du bruit quantique consiste à superposer dans le plan de Fresnel un champ classique et ses

1. On peut montrer à partir de (1.10) que  $(\Delta\hat{N})^2 = \langle\hat{N}\rangle$  où  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  est l'opérateur nombre.

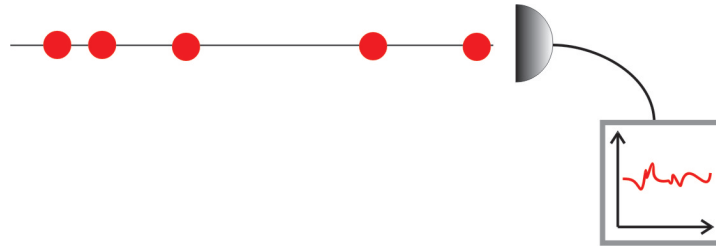


Fig. 1.1: Image corpusculaire du bruit d'intensité d'un faisceau lumineux

fluctuations (*cf.* Fig. 1.2). Le champ classique est représenté – comme à l'habitude – par un vecteur dont la norme donne l'amplitude, et l'angle par rapport à la quadrature de référence donne la phase. La nature quantique de la lumière fait apparaître des fluctuations du champ autour de cette valeur moyenne : la pointe du vecteur devient une notion vide de sens. Simplement, lorsqu'on effectue un grand nombre de mesures de la quadrature  $\hat{P}$ , on va pouvoir établir un histogramme des valeurs obtenues, ce qui donne une distribution Gaussienne de variance  $(\Delta\hat{P})^2$ . Il en est de même pour  $\hat{Q}$  (ou pour tout autre quadrature mesurée). On schématise ces distributions par une surface, le contour de cette surface étant tel que la distance à la position moyenne de la pointe du vecteur donne la variance de bruit pour chaque quadrature. Dans le cas d'un état cohérent, où la variance de bruit pour toutes les quadratures est égale à celle du vide, ce contour est un disque de rayon 1.

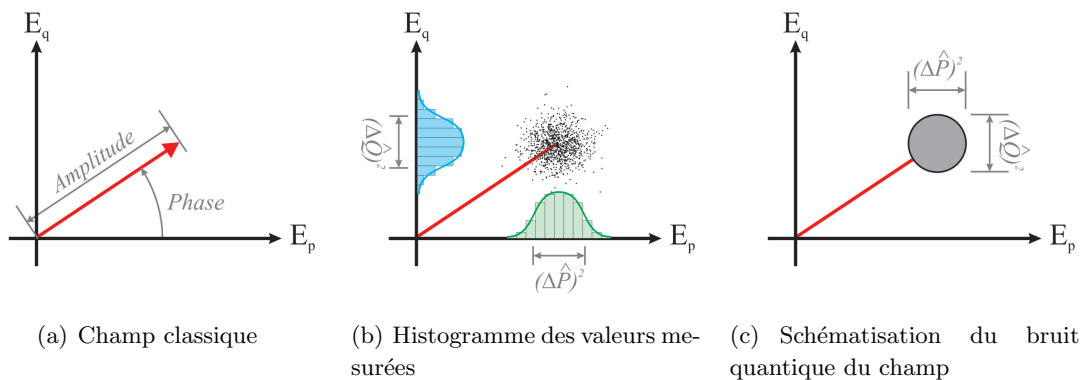


Fig. 1.2: Représentations de Fresnel du champ électromagnétique

### D.3 État comprimé du rayonnement

Si la relation d'incertitude définit une borne inférieure pour le produit des variances de deux quadratures conjuguées, elle n'impose aucune contrainte sur les variances individuelles. Ainsi, des états pour lesquels la symétrie entre les variances des deux quadratures serait brisée ne sont pas interdits. La variance de l'une des quadratures peut ainsi devenir plus petite que la limite quantique standard, à condition que la variance de la quadrature conjuguée augmente proportionnellement.

De tels états “comprimés” (“squeezed states” en anglais) sont représentés dans le diagramme de Fresnel par un champ dont la zone de fluctuations prend la forme d’une ellipse. La direction du petit axe de l’ellipse indique celle de la quadrature la plus comprimée (*cf.* Fig. 1.3).

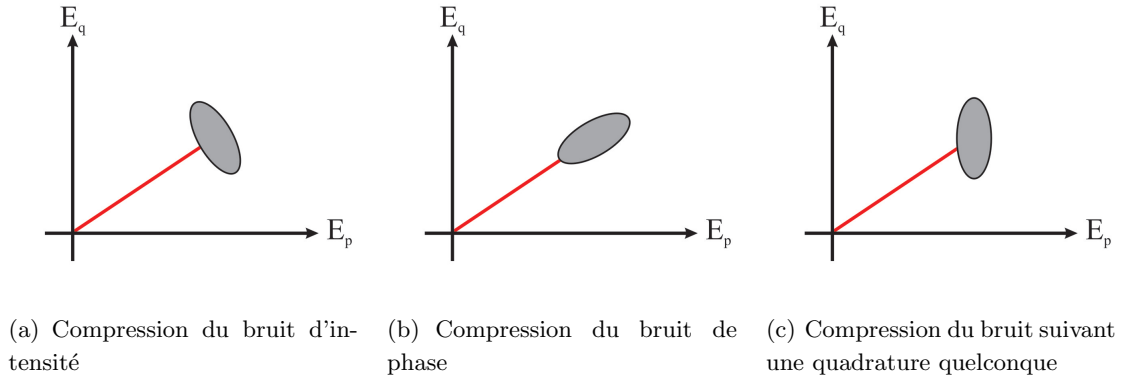


Fig. 1.3: Représentation de Fresnel d'états comprimés selon différentes quadratures

On peut à nouveau proposer une représentation corpusculaire d'un tel état dans le cas d'une compression du bruit d'intensité. Il s'agit d'un faisceau lumineux dont la distribution temporelle des photons serait plus régulière qu'une distribution Poissonnienne – les photons seraient mieux “rangés” (*cf.* Fig. 1.4).

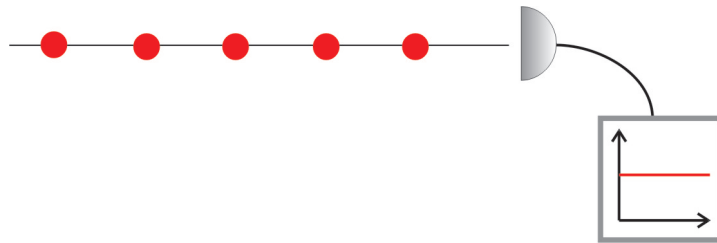


Fig. 1.4: Image corpusculaire d'un faisceau parfaitement comprimé en intensité

Cette image corpusculaire explique également la grande fragilité des états comprimés vis-à-vis des pertes. En effet, toute perte (absorption, réflexion partielle, mauvaise efficacité de détection) prélève aléatoirement des photons, et tend donc à rendre à la distribution statistique son caractère Poissonnien (*cf.* Fig. 1.5).

#### D.4 Linéarisation des fluctuations

On peut toujours écrire un opérateur  $\hat{Y}$  décrivant le champ ( $\hat{Y} = \hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{P}, \hat{Q}, \dots$ ) comme la somme de sa valeur moyenne et de ses fluctuations :

$$\hat{Y} = \langle \hat{Y} \rangle + \delta\hat{Y} \quad (1.11)$$

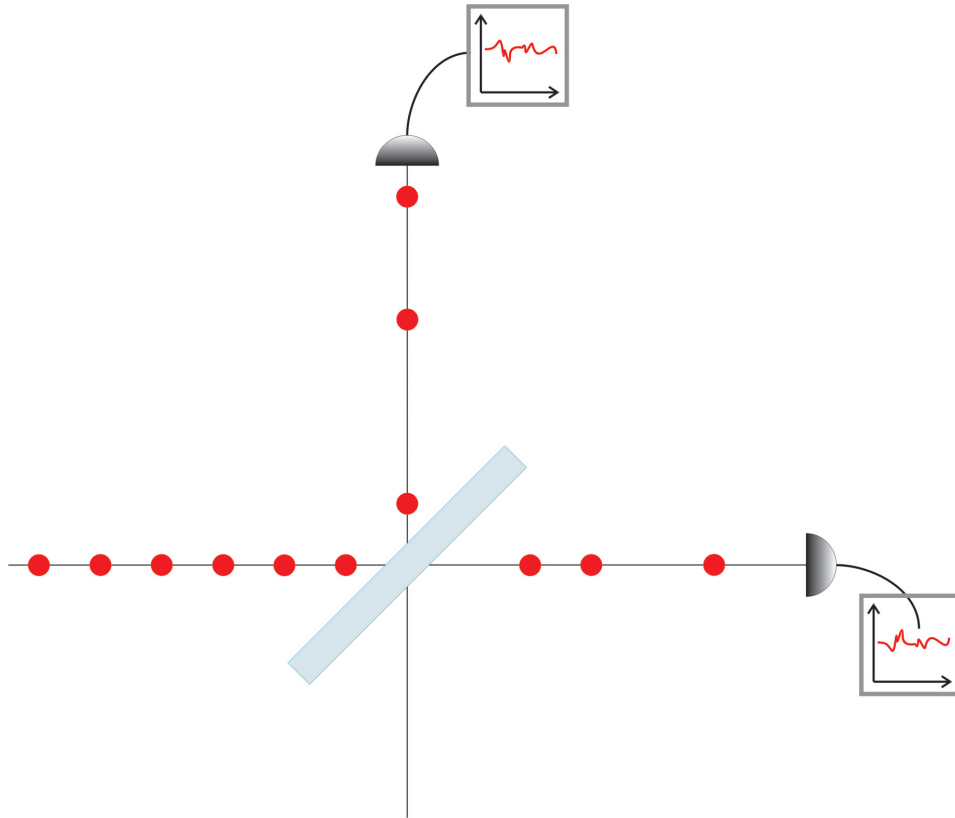


Fig. 1.5: Image corpusculaire de l'effet d'une lame 50/50 sur un faisceau parfaitement comprimé en intensité

Dans toute la suite, on fera l'approximation que les valeurs prises par les modules des éléments de matrice de  $\delta\hat{Y}$  sont très petites<sup>2</sup> devant  $|\langle\hat{Y}\rangle|$ . Dans ce cas, on pourra négliger tous les moments d'ordre supérieur ou égal à 3 des fluctuations.

Il est intéressant de remarquer que dans le cas de faisceaux Gaussiens (qui sont définis au §2.B.2), les moments d'ordre impair étant tous nuls, on ne néglige ainsi que les moments d'ordre 4 ou plus.

## D.5 Mesure des fluctuations du champ

Avec le développement de l'informatique, il est devenu aisé de faire l'acquisition en temps réel d'une séquence de mesure, ce qui donne accès directement aux fluctuations instantanées  $\delta\hat{Y}$ . Cependant, l'ensemble des mesures réalisées dans cette thèse ont consisté à mesurer (avec un analyseur de spectre par exemple) la variance de ces fluctuations, normalisée au bruit quantique standard (également appelée, dans le cas du bruit d'intensité, "facteur de Fano") :

$$(\Delta\hat{Y})^2 = \langle(\delta\hat{Y})^2\rangle = \mathcal{F}(\hat{Y}) \quad (1.12)$$

2. Dans le cas d'un champ vide, cette approximation n'est évidemment pas vérifiée. Cependant, toutes les mesures sont effectuées à l'aide d'une détection homodyne, utilisant un oscillateur local, qui est toujours plus intense que les fluctuations du champ.

Une variance normalisée inférieure à 1 correspond à un état comprimé suivant cette quadrature.

## E Corrélations quantiques en variables continues

La section précédente s'intéressait aux propriétés quantiques des fluctuations d'un seul mode du champ, cette partie s'intéresse aux fluctuations de deux modes<sup>3</sup>. En effet, en considérant deux modes, on peut envisager la possibilité que les fluctuations d'une quadrature d'un mode et celles d'une quadrature de l'autre mode soient corrélées. Ces corrélations quantiques peuvent atteindre différents degrés, que cette section a pour but de décrire, ainsi que les critères permettant de les détecter.

### E.1 Corrélations entre une quadrature de chaque mode

#### a) Faisceaux jumeaux : critère de gemellité

On considère deux modes  $A_1$  et  $A_2$  pouvant être séparés spatialement. On s'intéresse à une quadrature  $\hat{Y}_1$  quelconque du mode  $A_1$ , et une quadrature  $\hat{Z}_2$  quelconque du mode  $A_2$ . La mesure simultanée des fluctuations pour une quadrature de chaque mode permet d'accéder à la corrélation normalisée, définie par :

$$c_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Z}_2) = \frac{\langle \delta \hat{Y}_1 \delta \hat{Z}_2 \rangle}{\sqrt{(\Delta \hat{Y}_1)^2 (\Delta \hat{Z}_2)^2}} \quad (1.13)$$

Cette grandeur varie entre  $-1$  (anti-corrélations parfaites) et  $1$  (corrélations parfaites).

La méthode la plus simple pour produire des faisceaux corrélés consiste à envoyer un faisceau "classique" sur une lame 50/50 (*cf.* Fig. 1.6).

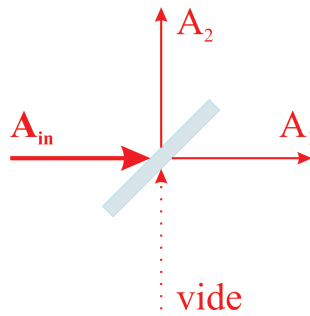


Fig. 1.6: Séparation d'un faisceau en deux à l'aide d'une lame 50/50

Un calcul simple, tenant compte du mode vide entrant par la seconde voie de la lame, fournit l'expression de la corrélation des deux faisceaux de sortie (on considère cette fois-ci la même

3. Dans cette thèse, le terme de "mode" désignera un faisceau lumineux pouvant être exploité (c'est-à-dire mesuré, séparé spatialement, ou tout simplement sur lequel on peut agir) individuellement. On pourra ainsi distinguer des modes de fréquences différentes, de polarisations différentes, ou simplement séparés spatialement.

quadrature  $\hat{Y}$  pour les deux modes sortants, et également pour le mode entrant) :

$$\mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) = \frac{(\Delta\hat{Y}_{in})^2 - 1}{(\Delta\hat{Y}_{in})^2 + 1} \quad (1.14)$$

Lorsque  $(\Delta\hat{Y}_{in})^2$  tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque le bruit du mode vide peut être négligé devant le bruit du faisceau entrant, le facteur  $\mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$  tend vers 1 : un faisceau très bruité divisé par une lame 50/50 donne deux faisceaux très fortement corrélés. Une corrélation  $\mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$  proche de 1 n'est donc pas nécessairement le signe d'une corrélation d'origine quantique. Dans l'exemple précédent, c'est même l'inverse, puisqu'elle traduit le fait que les fluctuations quantiques (du vide entrant) peuvent être négligées devant le bruit classique !

Il est donc nécessaire de mettre en place un critère plus adapté, permettant de déterminer si les corrélations observées sont ou non d'origine quantique : la gémellité [Treppe et Fabre, 2005]. Le principe est d'utiliser une opération linéaire passive, qui transforme la corrélation entre  $A_1$  et  $A_2$  en compression sur l'un des champs  $A_a$  et  $A_b$  en sortie de cette opération. Dans le cas de deux faisceaux de même fréquence, l'opération linéaire passive à effectuer est simplement l'opération "lame séparatrice", qui consiste à combiner les deux faisceaux sur une lame de transmittivité  $t$  et de réflectivité  $r$  –  $r$  et  $t$  étant des paramètres ajustables (*cf.* Fig. 1.7). Les phases des champs  $A_1$  et  $A_2$  sont ajustées de telle sorte qu'on mélange les quadratures  $\hat{Y}_1$  et  $\hat{Z}_2$ .

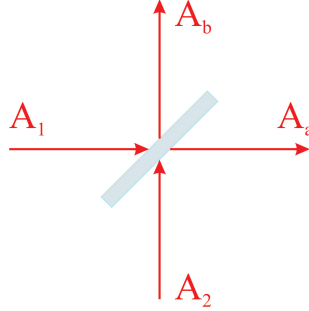


Fig. 1.7: Mélange de deux champs à l'aide d'une lame séparatrice

On considère les fluctuations de la quadrature  $\hat{X}_a$  du champ  $A_a = r A_1 + t A_2$  :

$$\delta\hat{X}_a = r \delta\hat{Y}_1 + t \delta\hat{Z}_2 \quad (1.15)$$

On choisit les paramètres  $r$  et  $t$  de telle sorte que la variance  $\langle(\delta\hat{X}_a)^2\rangle$  soit minimale. Si ce bruit minimal sur le faisceau  $A_a$  est inférieur au bruit quantique standard, nécessairement les corrélations entre  $A_1$  et  $A_2$  ne peuvent être décrites que par un modèle totalement quantique. La définition de la gémellité traduit ce critère ; c'est la variance minimale de  $\hat{Y}_a$  :

$$\mathcal{G} = (\Delta\hat{X}_a)^2 \Big|_{min} = \langle(\delta\hat{X}_a)^2\rangle \Big|_{min} \quad (1.16)$$

On peut montrer que :

$$\mathcal{G} = \frac{(\Delta\hat{Y}_1)^2 + (\Delta\hat{Z}_2)^2}{2} - \sqrt{\left(\mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Z}_2)\right)^2 (\Delta\hat{Y}_1)^2 (\Delta\hat{Z}_2)^2 + \left(\frac{(\Delta\hat{Y}_1)^2 - (\Delta\hat{Z}_2)^2}{2}\right)^2} \quad (1.17)$$

Le critère de gémellité s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{aligned} & \mathcal{G} < 1 \\ \Rightarrow & \text{Il est impossible de décrire classiquement les corrélations entre } A_1 \text{ et } A_2. \end{aligned}} \quad (1.18)$$

Un cas intéressant est celui où les deux faisceaux sont symétriques<sup>4</sup>, et où on s'intéresse à la même quadrature  $\hat{Y}$  des modes  $A_1$  et  $A_2$  de sorte que  $(\Delta\hat{Y}_1)^2 = (\Delta\hat{Y}_2)^2 = (\Delta\hat{Y})^2$ . La gémellité a alors une expression très simple :

$$\mathcal{G} = (\Delta\hat{Y})^2 \left( 1 - \left| \mathcal{C}_{12}(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) \right| \right) \quad (1.19)$$

Les paramètres  $r$  et  $t$  doivent être pris égaux :  $r = t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , de sorte que :

$$\mathcal{G} = \frac{\langle (\delta\hat{Y}_1 - \delta\hat{Y}_2)^2 \rangle}{2} \quad (1.20)$$

qui n'est autre que le bruit normalisé sur la différence des fluctuations des deux champs ; mesure qui peut être aisément réalisée. Si de tels faisceaux vérifient  $\mathcal{G} < 1$ , ils sont dits "jumeaux".

## b) Critère de corrélation QND

Ce second niveau de corrélations quantiques, toujours entre une quadrature de chaque champ, est associé à la notion de mesure quantique non destructive (QND). Le principe de cette mesure est le suivant. Soient deux champs  $A_1$  et  $A_2$  dont les quadratures  $\hat{Y}_1$  et  $\hat{Z}_2$  sont parfaitement corrélées. On ne peut mesurer  $\hat{Y}_1$  sans détruire – ou tout au moins perturber – le champ  $A_1$ . En revanche, les deux quadratures étant parfaitement corrélées, ceci permet de connaître précisément le résultat de la mesure de  $\hat{Z}_2$  sans avoir eu à mesurer  $A_2$ , et donc sans l'avoir détruit. La mesure effectuée sur  $A_1$  est ainsi une mesure QND sur  $A_2$ .

De nombreuses études ont été consacrées aux mesures QND, ainsi qu'aux critères qui y sont associés [Roch *et al.*, 1997, Grangier *et al.*, 1992, Grangier *et al.*, 1998]. La mesure QND est considérée comme effective lorsque la mesure de  $\hat{Y}_1$  fournit suffisamment d'informations sur les fluctuations instantanées  $\delta\hat{Z}_2$  pour corriger  $\hat{Z}_2$  de ses fluctuations – *via* par exemple une boucle de rétroaction – et transformer  $A_2$  en un état comprimé. Ce critère s'exprime en fonction de la variance conditionnelle  $\mathcal{V}_c(\hat{Z}_2|\hat{Y}_1)$ , qui correspond à la variance des fluctuations du mode 2 connaissant celles du mode 1. D'après la définition précédemment donnée, la mesure est QND lorsque la variance conditionnelle est inférieure à 1 :

$$\boxed{\begin{aligned} & \mathcal{V}_c(\hat{Z}_2|\hat{Y}_1) = (\Delta\hat{Y}_1)^2 - \frac{\langle \delta\hat{Y}_1 \delta Z_2 \rangle^2}{(\Delta\hat{Z}_2)^2} < 1 \\ \Rightarrow & \text{On peut réduire les fluctuations de } \hat{Z}_2 \text{ sous la limite} \\ & \text{quantique standard grâce à la mesure de } \hat{Y}_1. \end{aligned}} \quad (1.21)$$

Pour deux modes de même valeur moyenne et de même facteur de Fano, et dont on considère la même quadrature  $Y$ , les variances conditionnelles  $\mathcal{V}_c(\hat{Y}_2|\hat{Y}_1)$  et  $\mathcal{V}_c(\hat{Y}_1|\hat{Y}_2)$  sont égales et notées

4. Deux états sont dits *symétriques* s'ils sont invariants par permutation des deux parties. Ici il s'agira donc de faisceaux ayant la même valeur moyenne et la même variance de bruit.

$\mathcal{V}_c(\hat{Y})$ . On peut alors réécrire cette grandeur en fonction de la variance de bruit normalisée  $(\Delta\hat{Y})^2$  et de la gemellité  $\mathcal{G}$ , et ainsi exprimer plus simplement le critère de corrélation QND :

$$\mathcal{V}_c(\hat{Y}) = 2\mathcal{G} - \frac{\mathcal{G}^2}{(\Delta\hat{Y})^2} < 1 \quad (1.22)$$

D'après l'expression de  $\mathcal{V}_c(\hat{Y})$  en fonction de la gemellité :

$$\mathcal{G} \leq \mathcal{V}_c(\hat{Y}) \leq 2\mathcal{G} \quad (1.23)$$

Tous les faisceaux qui vérifient le critère de corrélation QND sont donc jumeaux ; la réciproque n'est pas vraie et dépend du bruit individuel. Par ailleurs, une gemellité inférieure à 0,5 assure toujours une corrélation QND.

## E.2 Double corrélation

On s'intéresse à présent au cas d'une double corrélation : chacun des deux modes possédant deux quadratures, on peut envisager le cas où il existe des corrélations entre les quadratures  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  d'une part, et entre les quadratures  $\hat{Q}_1$  et  $\hat{Q}_2$  d'autre part. Ce sont des corrélations de ce type qui ont amené Einstein, Podolsky et Rosen à poser le problème souvent appelé "paradoxe EPR"<sup>5</sup>. En outre, selon Schrödinger, il s'agit du trait de la mécanique quantique qui l'éloigne le plus de la mécanique classique.

### a) Le paradoxe EPR

En 1935, dans un article intitulé "*Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete ?*", Einstein, Podolsky et Rosen présentèrent ce qu'ils pensaient être une insuffisance de la mécanique quantique, et qui s'est par la suite révélé être l'un de ses aspects les plus riches [Einstein *et al.*, 1935].

Cet article définit tout d'abord le concept de réalité physique : si on peut, sans perturber un système, prédire avec certitude une de ses grandeurs physiques, il existe un élément de réalité physique associé à cette quantité. On considère alors deux particules 1 et 2 séparées spatialement, et on définit pour chacune d'elles les opérateurs position et impulsion associés  $(\hat{X}_1, \hat{P}_1)$  et  $(\hat{X}_2, \hat{P}_2)$ . Position et impulsion de chaque particule ne commutent pas, et les observables associées ne peuvent donc être connues simultanément avec une précision infinie. En revanche, somme et différence de ces opérateurs commutent :

$$[\hat{P}_1 - \hat{P}_2, \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2] = 0 \quad (1.24)$$

La mécanique quantique prédit donc qu'il est possible de créer des états à deux particules pour lesquels les positions sont parfaitement corrélées et les impulsions parfaitement anti-corrélées, quelle que soit la distance qui les sépare.

Ainsi, en raison de leur corrélation, une mesure de la position de la particule 1 donne avec certitude la position de la particule 2 sans qu'il y ait interaction physique entre les deux particules. Par conséquent, la prédiction de la position de la particule 2 n'a pas perturbé cette

5. Pour une explication plus détaillée du paradoxe EPR, le lecteur pourra se référer à [Aspect, 2002].



dernière. Il doit donc exister un élément de réalité physique associé à la seule particule 2 concernant cette grandeur, c'est-à-dire une valeur pré-déterminée pour sa position. On peut mener un raisonnement analogue en supposant qu'on mesure cette fois l'impulsion de la particule 1. Ainsi l'impulsion de la particule 2 doit elle aussi être pré-déterminée. Ceci implique donc que position et impulsion de la particule 2 sont pré-déterminées (la particule ne peut prévoir quelle mesure sera effectuée!), ce qui est contraire aux fondements de la mécanique quantique puisque  $\hat{X}_2$  et  $\hat{P}_2$  ne commutent pas. Einstein, Podolsky et Rosen en concluent que la mécanique quantique ne donne qu'une description incomplète de l'état d'une particule, soulignant ainsi les problèmes soulevés par la mécanique quantique pour les tenants d'une vision réaliste et locale du monde physique.

Ainsi, à l'origine, le paradoxe EPR – des initiales de ses “découvreurs” – était formulé en termes de variables continues. C'est cependant sa forme discrète – Bohm reformula le paradoxe pour le spin de deux particules ou la polarisation de deux photons [Bohm, 1951] – qui permettra à Bell d'aller plus loin, et d'établir une inégalité dont la violation éliminerait toute théorie réaliste et locale<sup>6</sup> [Bell, 1964]. Sur cette proposition, des expériences montrant des violations de plus en plus importantes des inégalités de Bell ont été mises en place, depuis les expériences fondatrices de Fry et Aspect [Fry et Thompson, 1976, Aspect *et al.*, 1982] jusqu'aux expériences les plus récentes avec une violation de plus de 30 déviations standard [Weihs *et al.*, 1998].

Dans le domaine des variables continues, c'est avec la lumière que les premières propositions d'expériences ont été formulées [Reid et Drummond, 1988, Reid, 1989] (pour des raisons de simplicité expérimentale). En effet, comme on l'a souligné précédemment, on peut faire une totale analogie entre les quadratures du champ électromagnétique et les variables position et impulsion d'une particule. On peut ainsi énoncer le paradoxe EPR de manière équivalente en considérant deux modes du champ dont les composantes de quadratures sont corrélées pour les unes et anti-corrélées pour les autres (*cf.* Fig. 1.8).

## b) Critère EPR en variables continues

Ce critère a été développé par Reid, et il s'appuie sur des considérations très proches de celles développées pour le critère QND [Reid, 1989]. En effet, on parle de corrélations EPR si, à partir d'une mesure sur un système, on peut déduire la valeur d'une observable d'un second système séparé spatialement du premier – et ce pour deux quadratures orthogonales, et non plus une seule comme dans les mesures QND.

Considérons deux modes  $A_1$  et  $A_2$ , tels que leurs composantes de quadratures  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$  sont corrélées, et  $\hat{Q}_1$  et  $\hat{Q}_2$  sont anti-corrélées. Les erreurs sur la prédiction des composantes de quadratures de  $A_2$  par mesure de  $A_1$  sont données par les variances conditionnelles  $\mathcal{V}_c(\hat{P}_2|\hat{P}_1)$

---

6. Il est important de souligner que “paradoxe EPR” et “inégalités de Bell” sont deux choses différentes : Einstein, Podolsky et Rosen ont simplement constaté que la mécanique quantique prévoyait des corrélations entre 2 variables conjuguées. Bell a tenté d'expliquer ces corrélations par une théorie à variables locales cachées ; ce qui impliquait certaines inégalités. En particulier, les faisceaux “EPR” générés au cours de cette thèse ne violent en aucun cas les inégalités de Bell, car le simple fait que les faisceaux soient Gaussiens constitue une possible variable cachée [Treps et Fabre, 2005].

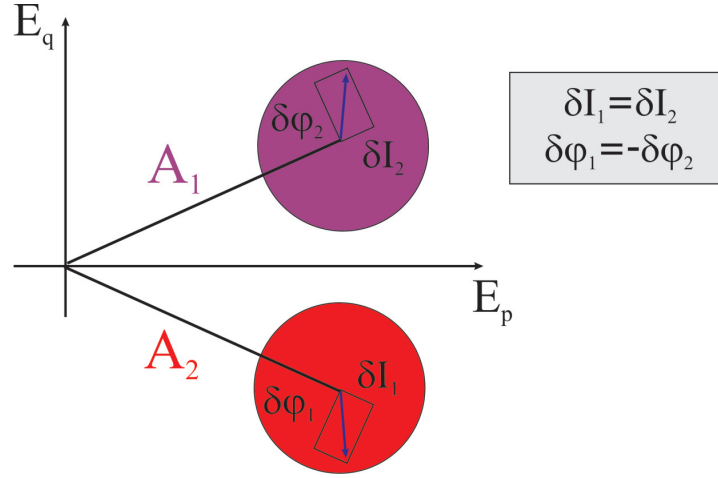


Fig. 1.8: Exemple de faisceaux EPR idéaux : les fluctuations d'intensité  $\delta I$  sont parfaitement corrélées et les fluctuations de phase  $\delta\phi$  sont parfaitement anti-corrélées.

et  $\mathcal{V}_c(\hat{Q}_2|\hat{Q}_1)$ . Le critère de corrélations EPR<sup>7</sup> s'écrit :

$$\mathcal{V}_c(\hat{P}_2|\hat{P}_1) \cdot \mathcal{V}_c(\hat{Q}_2|\hat{Q}_1) < 1 \quad (1.25)$$

⇒ Les corrélations entre  $A_1$  et  $A_2$  sont de type EPR.

La vérification de ce critère implique que l'une au moins des variances conditionnelles est inférieure à 1 : des états EPR vérifient nécessairement le critère de corrélation QND.

Pour des faisceaux symétriques, d'après l'équation (1.19), on peut définir la gémellité  $\mathcal{G}(\hat{P})$  qui évalue les corrélations quantiques entre les quadratures  $\hat{P}_1$  et  $\hat{P}_2$ . On définit également la gémellité  $\mathcal{G}(\hat{Q})$  qui évalue les anti-corrélations entre les quadratures orthogonales  $\hat{Q}_1$  et  $\hat{Q}_2$ . En notant  $(\Delta\hat{P})^2$  et  $(\Delta\hat{Q})^2$  les variances de bruit normalisées des quadratures des champs  $A_1$  et  $A_2$ , on peut réécrire<sup>8</sup> le critère (1.25) :

$$\left(2\mathcal{G}(\hat{P}) - \frac{[\mathcal{G}(\hat{P})]^2}{(\Delta\hat{P})^2}\right) \left(2\mathcal{G}(\hat{Q}) - \frac{[\mathcal{G}(\hat{Q})]^2}{(\Delta\hat{Q})^2}\right) < 1 \quad (1.26)$$

### c) Critère d'inséparabilité

Le critère de corrélations EPR est fondé sur l'expérience de pensée d'Einstein, Podolsky et Rosen, qui est elle-même basée sur la notion de particule (c'est-à-dire d'*objet* quantique). Mais il est également possible de réfléchir aux corrélations quantiques en termes de matrice densité (c'est-à-dire d'*état* quantique), ce qui mène à la définition de la notion de séparabilité.

7. On parle souvent d'une violation *apparente* de l'inégalité de Heisenberg. Mais celle-ci, qui s'écrit  $\mathcal{V}(\hat{P}_i) \cdot \mathcal{V}(\hat{Q}_i) \geq 1$  pour le mode  $i$ , reste bien sûr vérifiée!

8. En remarquant que, quelle que soit la quadrature  $\hat{Y}$  considérée, on a  $2\mathcal{G}(\hat{Y}) - \frac{[\mathcal{G}(\hat{Y})]^2}{(\Delta\hat{Y})^2} \leq 2\mathcal{G}(\hat{Y})$ , on trouve parfois dans la littérature [Mancini *et al.*, 2002] une forme plus simple d'utilisation – mais plus restrictive! – du critère EPR : si  $\mathcal{G}(\hat{P}) \cdot \mathcal{G}(\hat{Q}) < \frac{1}{4}$ , alors les faisceaux sont EPR.

On considère un système à deux modes  $A_1$  et  $A_2$ . Ce système est dit “séparable” si sa matrice densité  $\rho$  peut s’écrire sous la forme d’une superposition statistique d’états factorisables :

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i_1} \otimes \rho_{i_2} \quad (1.27)$$

où  $\rho_{i_1}$  et  $\rho_{i_2}$  sont des matrices densité des modes  $A_1$  et  $A_2$ , et  $p_i$  les probabilités associées. Un état non séparable est donc un état qui ne peut être décrit par la description indépendante de ses parties, mais nécessairement comme un tout.

Nous reviendrons très en détail sur l’inséparabilité et l’intrication au chapitre 2. Nous allons cependant citer ici les deux critères d’inséparabilité les plus souvent utilisés par la communauté expérimentale : le critère de Duan et Simon (ou “critère somme”), et le critère de Mancini (ou “critère produit”).

#### CRITÈRE DE DUAN ET SIMON

Ce critère dérive directement des considérations sur la matrice de covariance, que nous développerons dans le chapitre 2. Publié simultanément et indépendamment par Duan *et al.* et Simon [Duan *et al.*, 2000, Simon, 2000], il est très utilisé car il en existe une écriture restrictive mais simple, dans laquelle les grandeurs nécessaires sont faciles à mesurer expérimentalement. On considère deux modes  $A_1$  et  $A_2$ . Duan et Simon définissent la séparabilité :

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{\langle (\delta \hat{P}_1 - \delta \hat{P}_2)^2 \rangle}{2} + \frac{\langle (\delta \hat{Q}_1 + \delta \hat{Q}_2)^2 \rangle}{2} \right) \quad (1.28)$$

Le critère (simplifié) d’inséparabilité de Duan et Simon s’écrit :

Il existe un choix de quadratures  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$  tel que  $\Sigma < 1$ .  
 $\Rightarrow$  Les modes  $A_1$  et  $A_2$  sont inséparables.

(1.29)

Dans le cas de faisceaux symétriques, la séparabilité peut se réécrire :

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left( \mathfrak{G}(\hat{P}) + \mathfrak{G}(\hat{Q}) \right) \quad (1.30)$$

Ce critère nécessite qu’au moins l’une des deux gémellités soit plus petite que 1. Des faisceaux non séparables sont donc nécessairement jumeaux. En revanche, le critère QND n’est pas nécessairement vérifié. On constate également que le critère EPR est plus contraignant que le critère de Duan et Simon.

#### CRITÈRE DE MANCINI

Ce critère, publié par Mancini *et al.* dans le cadre d’une proposition d’expérience pour intriquer des objets macroscopiques – des miroirs – à l’aide de la pression de radiation

[Mancini *et al.*, 2002], utilise les mêmes quantités que le critère de Duan :

$$\boxed{\left(\frac{\langle(\delta\hat{P}_1 - \delta\hat{P}_2)^2\rangle}{2}\right) \cdot \left(\frac{\langle(\delta\hat{Q}_1 + \delta\hat{Q}_2)^2\rangle}{2}\right) < 1} \quad (1.31)$$

$\Rightarrow$  Les modes  $A_1$  et  $A_2$  sont inséparables.

Ce qui se réécrit pour des modes symétriques :

$$\mathcal{G}(\hat{P}) \cdot \mathcal{G}(\hat{Q}) < 1 \quad (1.32)$$

#### COMPARAISON DES DEUX CRITÈRES

Chacun de ces critères est une condition nécessaire d'inséparabilité, c'est-à-dire qu'il définit une zone du quart de plan  $(\mathcal{G}(\hat{P}), \mathcal{G}(\hat{Q}))$  dans laquelle on est certain que les états sont intriqués. Il est donc intéressant de comparer les deux zones (dans le cas symétrique, par souci de simplicité), afin de déterminer quel critère est le plus intéressant à utiliser.

Pour le critère de Duan et Simon, la courbe délimitant la portion de plan est une droite (d'équation  $x + y = 2$ ), et pour le critère de Mancini il s'agit d'une hyperbole (d'équation  $x \cdot y = 1$ ). Ces résultats sont résumés sur la figure 1.9. On constate immédiatement que les états intriqués détectés par le critère de Duan et Simon sont tous détectés par le critère de Mancini, qui en détecte d'autres également. Par conséquent, le critère de Mancini est plus performant que le critère de Duan et Simon, même s'il est moins couramment utilisé.

En réalité, ce résultat n'est pas surprenant : bien que les deux critères aient été développés indépendamment, il a été démontré par la suite que le critère de Duan et Simon est un cas particulier du critère de Mancini [Giovannetti *et al.*, 2003]. On ne peut cependant pas faire abstraction du critère de Duan et Simon : appliqué au cas particulier des états Gaussiens, ce dernier est une condition nécessaire et suffisante d'intrication [Duan *et al.*, 2000], tandis que le critère de Mancini ne donne qu'une condition suffisante d'intrication.

#### d) Intrication et compression de bruit

Les divers critères évoqués précédemment montrent qu'il existe un lien très fort entre intrication et compression de bruit. En effet, si on considère deux modes  $A_1$  et  $A_2$ , et qu'on les mélange sur une lame 50/50, on obtient en sortie les deux modes :

$$A_+ = \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}} \text{ et } A_- = \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{2}} \quad (1.33)$$

On peut alors aisément calculer les variances de bruit des deux quadratures  $\hat{P}_-$  et  $\hat{Q}_+$  :

$$\langle(\delta\hat{P}_-)^2\rangle = \frac{\langle(\delta\hat{P}_1 - \delta\hat{P}_2)^2\rangle}{2} = \mathcal{G}(\hat{P}) \text{ et } \langle(\delta\hat{Q}_+)^2\rangle = \frac{\langle(\delta\hat{Q}_1 + \delta\hat{Q}_2)^2\rangle}{2} = \mathcal{G}(\hat{Q}) \quad (1.34)$$

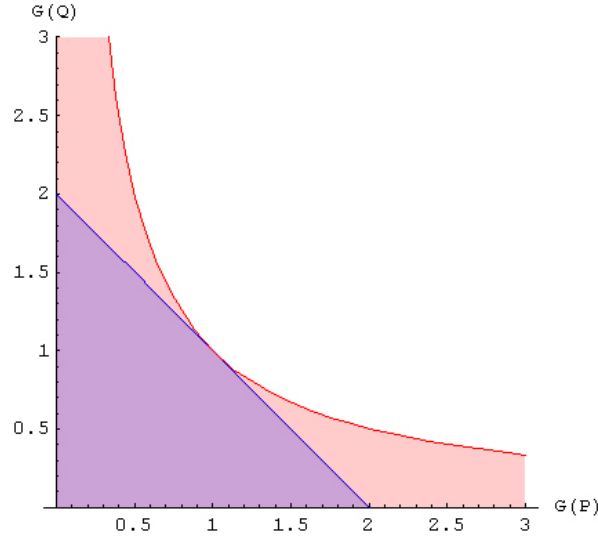


Fig. 1.9: Comparaison du critère de Duan et Simon (en bleu) et du critère de Mancini (en rouge). Les surfaces sous les courbes sont les portions du plan  $(\mathcal{G}(\hat{P}), \mathcal{G}(\hat{Q}))$  dans lesquelles on est certain que les états sont intriqués.

Ainsi, la variance de bruit du mode  $A_+$  pour la quadrature  $\hat{Q}$  est liée aux anti-corrélations suivant  $\hat{Q}$  des modes qui sont mélangés, et de même pour la variance de bruit du mode  $A_-$  pour la quadrature  $\hat{P}$ , qui est liée aux corrélations.

Si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux modes EPR idéaux, les variances de bruit (1.34) vont tendre vers 0 : deux faisceaux EPR idéaux mélangés sur une lame 50/50 donnent deux faisceaux parfaitement comprimés suivant des quadratures orthogonales ; et réciproquement (*cf.* Fig. 1.10). Ce fort lien entre intrication et compression de bruit est utilisé, par exemple, pour produire des faisceaux intriqués à partir de faisceaux comprimés [Furusawa *et al.*, 1998, Silberhorn *et al.*, 2001, Bowen *et al.*, 2003].

On peut de même réexprimer les deux critères (1.29) et (1.31) en fonction des variances des modes  $A_+$  et  $A_-$  : dans les deux cas, pour que le critère soit vérifié, il est nécessaire que l'un au moins des modes  $A_+$  et  $A_-$  soit comprimé. On verra dans le chapitre 4.E.3a) l'intérêt expérimental de cette équivalence.

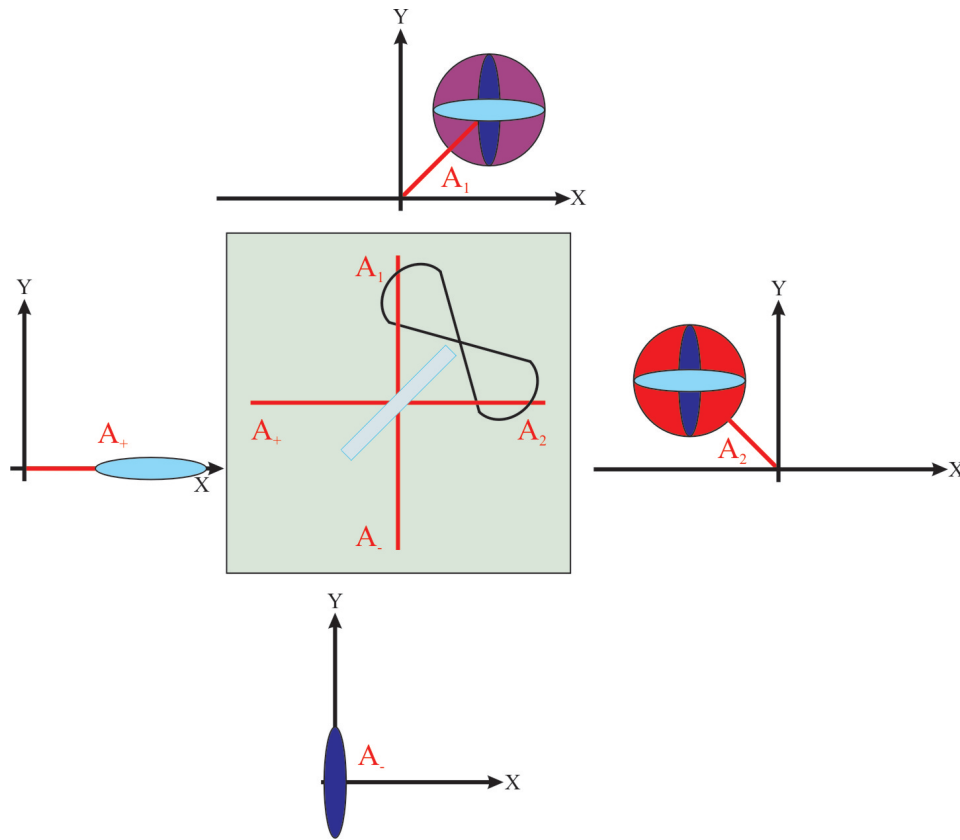


Fig. 1.10: Deux faisceaux comprimés suivant des quadratures orthogonales et mélangés sur une lame 50/50 permettent de générer des faisceaux intriqués, et réciproquement.

## F Conclusion

Dans cette partie, nous avons abordé de façon phénoménologique le problème de l'intrication et de sa caractérisation. Avant de nous intéresser à la production d'états intriqués, nous allons, dans le chapitre suivant, passer en revue les connaissances théoriques actuelles sur l'intrication en variables continues. En effet, de nombreuses questions restent encore sans réponse dans ce domaine très complexe, mais très prometteur du point de vue de ses applications (traitement quantique de l'information, cryptographie, calcul quantique, ...).



## 2. Intrication en variables continues

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>B</b>	<b>Formalisme mathématique</b>	<b>26</b>
B.1	Système à $N$ modes	26
B.2	Système Gaussien à $N$ modes : matrice de covariance	26
B.3	Transformations symplectiques	29
B.4	Valeurs propres symplectiques	32
B.5	Résumé	34
<b>C</b>	<b>Quantification de l'information contenue dans un état Gaussien</b>	<b>35</b>
C.1	Pureté	35
C.2	Entropie linéaire	36
C.3	Entropie de von Neumann	36
<b>D</b>	<b>Intrication des états Gaussiens bipartitionnés</b>	<b>37</b>
D.1	Position du problème	37
D.2	Intrication des états purs	38
D.3	Intrication des mélanges statistiques d'états	38
D.4	Séparabilité des états Gaussiens	39
D.5	Quantification de l'intrication pour les états Gaussiens bipartitionnés	43
<b>E</b>	<b>Cas particulier des états Gaussiens à 2 modes</b>	<b>46</b>
E.1	Écriture symplectique d'un état Gaussien à 2 modes	46
E.2	Intrication Gaussienne à 2 modes	47
E.3	Information et intrication extrême	50
<b>F</b>	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>

---

### A Introduction

La revue présentée dans ce chapitre a pour but de reprendre en termes familiers à la communauté expérimentale les résultats marquants dégagés par les théoriciens ces dernières années. Elle est essentiellement basée sur les articles [Laurat *et al.*, 2005b] et [Adesso et Illuminati, 2007]. Jusqu'à présent, nous avons considéré des états quelconques du champ électromagnétique. Cependant, caractériser l'intrication pour des états quelconques est un problème non encore résolu ; par contre, un certain nombre de questions sont élucidées en ce qui concerne les états Gaussiens, qui sont aussi les états les plus utilisés expérimentalement (ce sont ceux qui seront manipulés au cours de



cette thèse). Nous allons donc essentiellement nous restreindre au problème des états Gaussiens.

## B Formalisme mathématique

### B.1 Système à $N$ modes

Un système en variables continues de  $N$  modes bosoniques est décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k$ , produit tensoriel des espaces de Fock de dimension infinie  $\mathcal{H}_k$ , chacun associé à un des  $N$  modes. Dans notre cas, les modes sont ceux du champ électromagnétique. Pour chaque mode  $k$ , on peut définir – comme on l'a fait au paragraphe 1.B – les opérateurs d'annihilation  $\hat{a}_k$  et de création  $\hat{a}_k^\dagger$  d'un photon, ainsi que les opérateurs de quadrature  $\hat{P}_k$  et  $\hat{Q}_k$ . On regroupe ces opérateurs dans le vecteur colonne :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_N \\ \hat{Q}_N \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

L'espace dans lequel évolue ce vecteur  $\hat{R}$  est appelé l'espace des phases.

Cette notation permet une écriture synthétique des relations de commutation entre les opérateurs de phase et de quadrature :

$$\forall (\ell, m) \in \llbracket 1..2N \rrbracket \quad [\hat{R}_\ell, \hat{R}_m] = 2i \Omega_{\ell m} \quad (2.2)$$

où  $\Omega$  est la forme symplectique :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^N \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Ces définitions sont valables pour tout système à  $N$  modes. Nous allons à présent nous intéresser aux systèmes Gaussiens à  $N$  modes.

### B.2 Système Gaussien à $N$ modes : matrice de covariance

L'ensemble des états Gaussiens est l'ensemble des états dont certaines des fonctions caractéristiques dans l'espace des phases (et en particulier la fonction de Wigner<sup>1</sup> par

1. Nous ne développerons pas ici ce qu'est la fonction de Wigner, le lecteur pourra se référer à [Scully et Zubairy, 1997]. Citons cependant le théorème de Hudson-Piquet : seuls les états purs Gaussiens ont une fonction de Wigner positive partout [Schleich, 2001].

exemple) sont Gaussiennes. Parmi ces états, on trouve les états cohérents, les états comprimés, et les états “thermiques” [London, 1983]. Ils sont donc de première importance pour l’optique quantique en variables continues.

Une des propriétés fondamentales d’un état Gaussien (de matrice densité  $\rho$ ) est qu’il est complètement caractérisé par les premiers et les seconds moments des opérateurs de quadrature. Par conséquent, pour connaître  $\rho$ , il suffit de connaître le vecteur de ses premiers moments :  $\langle \hat{R} \rangle = (\langle \hat{P}_1 \rangle, \langle \hat{Q}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{P}_N \rangle, \langle \hat{Q}_N \rangle)$  et sa matrice de covariance  $\sigma$  définie par :

$$\begin{aligned} \forall (\ell, m) \in \llbracket 1..2N \rrbracket \quad \sigma_{lm} &= \frac{1}{2} \langle \hat{R}_\ell \hat{R}_m + \hat{R}_m \hat{R}_\ell \rangle - \langle \hat{R}_\ell \rangle \langle \hat{R}_m \rangle \\ &= \langle \hat{R}_\ell \hat{R}_m \rangle_S - \langle \hat{R}_\ell \rangle \langle \hat{R}_m \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

On peut toujours modifier les valeurs moyennes grâce à des opérations locales<sup>2</sup> unitaires (des déplacements dans l’espace des phases). Une telle opération laisse invariante les propriétés relatives à l’entropie, l’intrication, ... On peut donc prendre les valeurs moyennes nulles sans perdre la généralité de notre étude. Lorsqu’on prend les valeurs moyennes nulles, la matrice de covariance se réduit à la matrice des corrélations symétrisées entre les quadratures du champ. On peut d’ailleurs l’écrire sous la forme d’une matrice composée de blocs  $2 \times 2$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \varepsilon_{1,2} & \dots & \dots & \varepsilon_{1,N} \\ {}^t\varepsilon_{1,2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \varepsilon_{N-1,N} \\ {}^t\varepsilon_{1,N} & \dots & \dots & {}^t\varepsilon_{N-1,N} & \sigma_N \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

où les blocs diagonaux  $\sigma_k$  sont les matrices de covariance individuelles de chaque mode, et les blocs non diagonaux  $\varepsilon_{i,j}$  sont les matrices de corrélations symétrisées entre les modes  $i$  et  $j$  ( $(i, j) \in \llbracket 1..N \rrbracket$ ) :

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} \langle (\hat{P}_k)^2 \rangle & \langle \hat{P}_k \hat{Q}_k \rangle_S \\ \langle \hat{P}_k \hat{Q}_k \rangle_S & \langle (\hat{Q}_k)^2 \rangle \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{i,j} = \begin{pmatrix} \langle \hat{P}_i \hat{P}_j \rangle_S & \langle \hat{P}_i \hat{Q}_j \rangle_S \\ \langle \hat{Q}_i \hat{P}_j \rangle_S & \langle \hat{Q}_i \hat{Q}_j \rangle_S \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Nous allons voir tout au long de ce chapitre qu’on peut réécrire toutes les propriétés de l’état  $\rho$  en fonction de sa matrice de covariance  $\sigma$ .

---

2. Il est important de ne pas confondre le terme *local*, tel qu’il sera employé tout au long de cette thèse pour des opérations agissant seulement sur l’un des modes du système, avec la notion de *localité* définie par Einstein, Podolsky et Rosen [Einstein *et al.*, 1935].

### a) Fonction de Wigner

La fonction de Wigner d'un état Gaussien s'écrit :

$$W(R) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} R \sigma^{-1} {}^t R\right)}{\pi \sqrt{\text{Det}(\sigma)}} \quad (2.7)$$

où  $R$  désigne le vecteur réel de l'espace des phases :  $R = (p_1, q_1, \dots, p_N, q_N)$ . Ainsi, bien que l'espace de Hilbert associé soit de dimension infinie, la description complète (aux opérations locales unitaires près) d'un état Gaussien arbitraire est donnée par une matrice  $2N \times 2N$ .

### b) Condition pour un état physique

Si tous les états Gaussiens peuvent être représentés par une matrice de covariance, la réciproque n'est pas vraie : toute matrice de covariance ne représente pas un état physique.

En effet, la matrice densité associée  $\rho$  doit être semi-définie positive. Cette contrainte, associée aux relations de commutation (2.2), équivaut à la condition [Simon *et al.*, 1987, Simon *et al.*, 1994] :

$$\sigma + i\Omega \geq 0 \quad (2.8)$$

où une matrice est semi-définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. Cette inégalité<sup>3</sup> est l'expression, en termes de matrice de covariance, de l'inégalité de Heisenberg (1.6) [Serafini, 2006]. Il est intéressant de noter que l'équation (2.8) implique que  $\sigma \geq 0$ .

### c) Lien avec l'énergie

Les éléments diagonaux de la matrice de covariance peuvent être exprimés comme des énergies à condition de les multiplier par  $\hbar\omega_k$  (où  $\omega_k$  est la pulsation du mode  $k$  considéré). Ce sont en effet, au facteur  $\hbar\omega_k$  près, les valeurs moyennes des termes du Hamiltonien<sup>4</sup> :  $\langle \hat{P}_k^2 \rangle$  et  $\langle \hat{Q}_k^2 \rangle$ . Ainsi, on peut montrer que  $\text{Tr}(\sigma)$  est reliée à l'énergie moyenne de l'état<sup>5</sup>.

3. Dans le cas des états Gaussiens, cette inégalité est une condition nécessaire et suffisante pour que l'état soit physique. Pour les états non Gaussiens, si cette condition n'est plus suffisante, elle demeure nécessaire.

4. Pour un champ n'interagissant pas avec l'environnement, le Hamiltonien s'écrit :  $\sum_{k=1}^N \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right)$ ,

avec  $\hat{a}_k = \frac{1}{2}(\hat{P}_k + i\hat{Q}_k)$

5. Il s'agit de l'énergie moyenne de l'état dont les valeurs moyennes  $\langle \hat{R}_k \rangle$  sont nulles, qui est bien entendu différente de celle de l'état de départ !

### B.3 Transformations symplectiques

#### a) Définition

Dans l'espace de Hilbert, les opérations unitaires jouent un rôle particulier vis-à-vis des états Gaussiens car elles préservent leur caractère Gaussien. Les plus simples et les plus courantes sont celles qui correspondent aux termes au plus quadratiques (par rapport aux opérateurs du champ) du Hamiltonien. Chacune de ces opérations unitaires agissant sur l'espace de Hilbert correspond à une transformation symplectique, agissant sur l'espace des phases.

Une transformation  $S$  est dite "symplectique" si elle est linéaire et qu'elle préserve la forme symplectique  $\Omega$  (cf. équation (2.3)) :

$${}^t S \Omega S = \Omega \quad (2.9)$$

Cette définition impose  $\text{Det}(S) = 1$  pour toute transformation symplectique  $S$ . L'équation (2.9) revient à dire que la transformation doit préserver les relations de commutation entre les opérateurs  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$  (cf. Fig. 2.1).

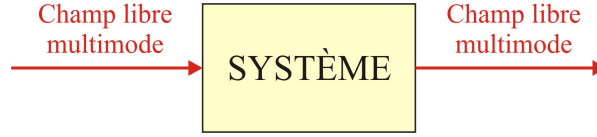


Fig. 2.1: Conservation des relations de commutations par les opérations symplectiques décrivant le système considéré : un champ libre à  $N$  modes entre dans le système ; le champ à  $N$  qui en sort est également un champ libre.

On peut également déduire immédiatement de cette définition (en multipliant à gauche par  $({}^t S)^{-1}$  et à droite par  $S^{-1}$ ) que si une transformation  $S$  est symplectique, son inverse  $S^{-1}$  est elle aussi symplectique.

Les transformations symplectiques agissant sur l'espace des phases de dimension  $2N$  forment le groupe symplectique réel  $Sp(2N, \mathbb{R})$ . Leur action sur le vecteur  $\hat{R}$  est linéaire, de sorte qu'elles agissent sur les matrices de covariance sous la forme :

$$\sigma \mapsto \sigma' = S \sigma {}^t S \quad (2.10)$$

Avant d'exposer les propriétés générales des transformations symplectiques, nous allons détailler l'expression des plus importantes d'entre elles : compression de bruit à 1 et à 2 modes, lame séparatrice, déphasage.

#### b) Compression de bruit à 1 mode

Dans l'espace de Hilbert de dimension  $N$ , on va s'intéresser à l'opérateur unitaire correspondant à la compression de bruit pour l'état du champ dans le mode  $k$ , avec un

facteur de compression  $r$  :

$$\hat{U}_k^{sq}(r) = \exp \left[ \frac{r}{2} \left( (\hat{a}_k^\dagger)^2 - (\hat{a}_k)^2 \right) \right] \quad (2.11)$$

Sa représentation symplectique est la transformation correspondante dans l'espace des phases, agissant sur le mode  $k$ . Il s'agit de la transformation "compression de bruit à 1 mode" :

$$S_k^{sq}(r) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

### c) Déphasage

Dans l'espace de Hilbert, le déphasage de l'état du champ dans le mode  $k$  par un angle  $\theta$  se traduit par :  $\hat{a}_k \rightarrow \hat{a}'_k = e^{i\theta} \hat{a}_k$ . Soit, pour les quadratures, une matrice unitaire de transformation :

$$U_k^{déph}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La représentation symplectique correspondante est [Serafini et Adesso, 2007] :

$$S_k^{déph}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

On peut montrer que toutes les transformations symplectiques à 1 mode s'écrivent comme des combinaisons linéaires de 2 rotations (orthogonales) à 1 mode dans l'espace des phases et d'une compression de bruit à 1 mode. Cette décomposition est la décomposition d'Euler [Serafini et Adesso, 2007]. La transformation la plus générale à 1 mode s'écrit donc :

$$S_{loc,1}(\theta, \theta', r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

### d) Intrication entre 2 modes

Cette opération est très importante, car l'état intriqué à 2 modes<sup>6</sup> est l'état généré par un oscillateur paramétrique optique de type II. L'état EPR est un état intriqué à 2 modes avec un facteur d'intrication<sup>7</sup>  $r \rightarrow \infty$ .

6. On parle également d'"état comprimé à 2 modes", du fait de l'analogie entre l'opérateur  $\hat{U}_{i,j}^{intric}(r)$  et l'opérateur  $\hat{U}_k^{sq}(r)$ .

7. L'état EPR, qui suppose une (double) compression de bruit infinie, est un état non normalisable et donc non physique. Cependant, il est très bien approximé par des états comprimés à 2 modes avec une grande compression de bruit.

Dans l'espace de Hilbert, l'état intriqué à 2 modes  $i$  et  $j$  est l'état

$$|\psi^{intric}(r)\rangle_{i,j} = \left[ \hat{U}_{i,j}^{intric}(r) \right] (|0\rangle_i \otimes |0\rangle_j) \quad (2.16)$$

généralisé par l'action sur le vide de l'opérateur à 2 modes :

$$\hat{U}_{i,j}^{intric}(r) = \exp \left[ \frac{r}{2} \left( \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_i \hat{a}_j \right) \right] \quad (2.17)$$

L'état intriqué à 2 modes  $|\psi^{sq2}(r)\rangle_{i,j}$  présente ainsi des corrélations d'intensité et des anti-corrélations de phase (*cf.* §1.E.2a)). Lorsqu'il s'agit d'un état Gaussien, sa matrice de covariance s'écrit :

$$\sigma_{i,j}^{intric}(r) = \begin{pmatrix} \text{ch}(2r) & 0 & \text{sh}(2r) & 0 \\ 0 & \text{ch}(2r) & 0 & -\text{sh}(2r) \\ \text{sh}(2r) & 0 & \text{ch}(2r) & 0 \\ 0 & -\text{sh}(2r) & 0 & \text{ch}(2r) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Cet état est généré par l'action sur la matrice de covariance du vide (1) de la transformation symplectique "intrication à 2 modes" :

$$S_{i,j}^{intric}(r) = \begin{pmatrix} \text{ch}(r) & 0 & \text{sh}(r) & 0 \\ 0 & \text{ch}(r) & 0 & -\text{sh}(r) \\ \text{sh}(r) & 0 & \text{ch}(r) & 0 \\ 0 & -\text{sh}(r) & 0 & \text{ch}(r) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

### e) lame séparatrice

Cette opération permet de mélanger deux modes  $i$  et  $j$  avec des poids déterminés par la transmission  $T$  de la lame. On peut écrire son action sur les opérateurs du champ :

$$\hat{U}_{i,j}^{bs}(T) : \begin{cases} \hat{a}_i & \rightarrow \hat{a}_i \sqrt{T} + \hat{a}_j \sqrt{1-T} \\ \hat{a}_j & \rightarrow \hat{a}_i \sqrt{1-T} - \hat{a}_j \sqrt{T} \end{cases} \quad (2.20)$$

Il est intéressant de poser  $\theta = \arccos(\sqrt{T})$  :

$$\hat{U}_{i,j}^{bs}(\theta) : \begin{cases} \hat{a}_i & \rightarrow \hat{a}_i \cos(\theta) + \hat{a}_j \sin(\theta) \\ \hat{a}_j & \rightarrow \hat{a}_i \sin(\theta) - \hat{a}_j \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.21)$$

On peut alors écrire la matrice de transformation symplectique associée, et on constate que l'opération "lame séparatrice" équivaut à une rotation à 2 modes dans l'espace des phases d'angle  $\theta$  :

$$S_{i,j}^{bs}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 0 & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

## f) Propriétés générales des transformations symplectiques

Toutes les transformations symplectiques dans l'espace des phases sont générées par l'exponentiation de matrices pouvant s'écrire  $J\Omega$ , où  $\Omega$  est la forme symplectique (cf. équation (2.3)), et  $J$  est anti-symétrique [Arvind *et al.*, 1995a]. Ces générateurs  $J\Omega$  sont soit symétriques, soit anti-symétriques.

Les opérations du type “lame séparatrice” (cf. équation (2.22)) ou “déphasage” (cf. équation (2.14)) sont générées par des opérateurs anti-symétriques, de sorte qu'elles sont orthogonales<sup>8</sup>. Comme elles agissent par congruence sur la matrice de covariance  $\sigma$ , elles préservent  $\text{Tr}(\sigma)$ . Or  $\text{Tr}(\sigma)$  donne la contribution des seconds moments à la moyenne du Hamiltonien  $\bigoplus_{k=1}^N \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  (cf. §B.2c), de sorte que de telles transformations conservent l'énergie. Elles sont dites “passives”.

À l'inverse, les opérations telles que la compression de bruit à 1 ou 2 mode(s) (cf. équations (2.12)(2.19)) ont des générateurs symétriques. Elles ne sont donc pas orthogonales et ne préservent pas la trace. Ces transformations optiques qui ne conservent pas l'énergie sont dites “actives” [Wolf *et al.*, 2003].

Les transformations symplectiques locales (*i.e.* agissant sur individuellement sur les modes) appartiennent au groupe  $(Sp(2, \mathbb{R}))^{\oplus N}$ . Par conséquent, les déterminants de chacune des sous-matrices  $2 \times 2$  (correspondant à un mode  $k$ ) d'une matrice de covariance à  $N$  modes sont invariants par les transformations symplectiques locales. Cette propriété mathématique est le reflet d'une propriété physique : ni la quantité d'information<sup>9</sup>, ni les corrélations entre les modes du système ne peuvent être modifiées par des opérations locales (nous aborderons de nouveau cette propriété, mais cette fois d'un point de vue expérimental, au §5.C.2c)).

Enfin, une dernière propriété très importante est que toute transformation symplectique peut être décomposée en produit de transformations à 2 modes. On peut donc se limiter à l'étude de ces dernières [Huang et Agarwal, 1994].

## B.4 Valeurs propres symplectiques

### a) Diagonalisation symplectique

Parmi toutes les transformations symplectiques pouvant agir sur la matrice de covariance  $\sigma$  d'un système donné, il en est une qui revêt une importance particulière : celle qui diagonalise la matrice de covariance<sup>10</sup>. Le théorème de Williamson [Williamson, 1936]

8. Ces transformations sont celles qui appartiennent au sous-groupe compact maximal de  $Sp(2N, \mathbb{R})$ .

9. L'information est ici définie comme en théorie de l'information, c'est-à-dire par l'entropie, que nous aborderons plus loin.

10. Cette diagonalisation symplectique doit être bien distinguée de la diagonalisation usuelle avec des matrices orthogonale.

affirme que cette diagonalisation est toujours possible pour la matrice de covariance d'un état Gaussien à  $N$  modes : elle peut toujours être écrite sous la forme dite "forme normale de Williamson" ou "forme diagonale" :

$$\sigma = {}^t S \nu S \quad (2.23)$$

où  $S \in Sp(2N, \mathbb{R})$  et  $\nu$  est la matrice de covariance :

$$\nu = \bigoplus_{k=1}^N \begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Cette matrice de covariance correspond à un état à  $N$  modes totalement décorrélés, avec une matrice densité diagonale  $\rho^\otimes$  :

$$\rho^\otimes = \bigotimes_{k=1}^N \frac{2}{\nu_k + 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\nu_k - 1}{\nu_k + 1} \right)^n |n\rangle_k \langle n| \quad (2.25)$$

où  $|n\rangle_k$  est l'état nombre d'ordre  $n$  dans l'espace de Fock  $\mathcal{H}_k$ .

Les  $N$  réels  $\nu_k$  constituent le spectre symplectique de la matrice de covariance  $\sigma$ . Elles sont invariantes sous l'action de transformations symplectiques *globales* (et non plus seulement locales) sur la matrice  $\sigma$ . On peut montrer que ce sont les valeurs propres orthogonales ("ordinaires") de la matrice<sup>11</sup>  $|\iota\Omega\sigma|$  [Serafini, 2004]. Les valeurs propres symplectiques sont donc déterminées par  $N$  invariants (par exemple les coefficients du polynôme caractéristique de  $|\iota\Omega\sigma|$ ) [Serafini, 2006].

Le plus simple des invariants symplectiques est le déterminant de la matrice de covariance (il est invariant car  $\forall S \in Sp(2N, \mathbb{R}) \text{ Det}(S) = 1$ ). En utilisant la forme diagonale de Williamson, on a immédiatement la valeur de cet invariant :

$$\text{Det}(\sigma) = \prod_{k=1}^N \nu_k^2 \quad (2.26)$$

Cet invariant est directement relié à la pureté de l'état (*cf.* équation (2.35)).

Un autre invariant symplectique important est donné par la quantité appelée "sérialien" et notée  $\Delta$  [Adesso *et al.*, 2005], définie comme la somme des déterminants de toutes les sous-matrices  $2 \times 2$  de la matrice de covariance  $\sigma$ . Pour démontrer que le sérialien est un invariant [Serafini, 2006], on utilise le fait qu'il est invariant dans le cas où  $N = 2$  [Serafini *et al.*, 2004], et la décomposition de toute transformation symplectique en produit de transformations à 2 modes (*cf.* §B.3f). Le sérialien peut être exprimé en fonction des valeurs propres symplectiques :

$$\Delta(\sigma) = \sum_{k=1}^N \nu_k^2 \quad (2.27)$$

11. Par définition, si on a une matrice  $M = P D P^{-1}$  avec  $D$  diagonale, la valeur absolue de  $M$  est la matrice  $|M| = P |D| P^{-1}$  où  $|D|$  est la matrice diagonale des modules des valeurs propres de  $M$ .



### b) Inégalité de Heisenberg et pureté

L'intérêt des valeurs propres symplectiques est qu'elles donnent accès à certaines informations sur l'état Gaussien  $\sigma$ . Ainsi, l'inégalité de Heisenberg (2.8) peut être réécrite en termes de valeurs propres symplectiques. En effet, en utilisant le fait que l'inverse d'une transformation symplectique est également symplectique et conserve donc la matrice  $\Omega$  (cf. §B.3a)), et la définition (2.23), on peut montrer que la relation (2.8) est équivalente à :

$$\nu + \imath\Omega \geq 0 \quad (2.28)$$

que l'on peut immédiatement réécrire en fonction des valeurs propres symplectiques<sup>12</sup> :

$$\forall k \in \llbracket 1..N \rrbracket \quad \nu_k \geq 1 \quad (2.29)$$

Si on note  $\nu_-$  la plus petite des valeurs propres symplectique, et  $\nu_+$  la plus grande, l'inégalité de Heisenberg se réduit à  $\nu_- \geq 1$ . On constate que l'inégalité n'est saturée que pour les états Gaussiens purs, pour lesquels :

$$\forall k \in \llbracket 1..N \rrbracket \quad \nu_k = 1 \quad (2.30)$$

ce qui signifie, en d'autres termes, que la forme normale de Williamson de tout état pur Gaussien est l'état fondamental de l'espace de Hilbert à  $N$  modes  $\mathcal{H}$ .

On peut également s'intéresser à la catégorie de mélanges statistiques d'états vérifiant :

$$\exists k_0 \in \llbracket 1..N \rrbracket \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq k_0 & \nu_k = 1 \\ k_0 < k \leq N & \nu_k > 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

Ces états neaturent que partiellement l'inégalité de Heisenberg, le degré de saturation diminuant avec  $k_0$ . Ils peuvent cependant être qualifiés de "mélanges statistiques d'états de moindre incertitude", en ce sens que les opérateurs de quadratures des modes  $k \leq k_0$ aturent l'inégalité de Heisenberg, tandis que seuls les  $N - k_0$  autres modes contiennent du bruit additionnel, responsable du taux mélange global de l'état.

On peut ainsi définir le "rang symplectique"  $\aleph$  de la matrice de covariance  $\sigma$  comme le nombre de ses valeurs propres symplectiques différentes de 1 (soit  $\aleph = N - k_0$ ).  $\aleph$  est donc le nombre de modes de l'état dont la forme normale de Williamson n'est pas le vide [Adesso, 2006]. Un état Gaussien est pur si et seulement si  $\aleph = 0$ . On peut faire l'analogie entre cette définition et celle du rang<sup>13</sup> des matrices densité de dimension finie. En effet, seuls les états purs ont un rang 1, les mélanges statistiques d'états ayant un rang plus élevé.

## B.5 Résumé

Le tableau 2.1 résume la comparaison qui a été faite tout au long de cette section entre l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et l'espace des phases  $\Gamma$ , dans le cas d'états Gaussiens.

12. Il est utile de garder à l'esprit que cette relation n'est équivalente à la relation (2.8) que si  $\sigma \geq 0$ .

13. Le rang d'une matrice est défini comme le nombre de ses valeurs propres non nulles.

Tab. 2.1: Comparaison entre l'espace des états et l'espace des phases pour des états Gaussiens. Les deux premières lignes s'appliquent aussi aux états non Gaussiens. Ce tableau inclut la définition de la pureté en fonctions des valeurs propres symplectiques, que nous verrons dans la section suivante.

	Espace de Hilbert $\mathcal{H}$	Espace des phases $\Gamma$
Dimension	$\infty$	$2N$
Structure	$\otimes$	$\oplus$
Description de l'état	Matrice densité $\rho$	Matrice de covariance $\sigma$
État physique	$\rho \geq 0$	$\sigma + i\Omega \geq 0$
Opérations sur les états	$U$ telle que $U^\dagger U = \mathbb{1}$ $\rho \mapsto U \rho U^\dagger$	$S$ telle que ${}^t S \Omega S = \Omega$ $\sigma \mapsto S \sigma {}^t S$
Spectre	$U \rho U^\dagger = \text{diag}\{\lambda_k\}$ $0 \leq \lambda_k \leq 1$	$S \sigma {}^t S = \text{diag}\{\nu_k\}$ $1 \leq \nu_k < \infty$
États purs	$\exists i$ tel que $\lambda_i = 1, \lambda_{k \neq i} = 0$	$\forall k \in [1..N] \nu_k = 1$
Pureté	$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$	$\frac{1}{\sqrt{\text{Det}(\sigma)}} = \prod_{k=1}^N \nu_k^{-1}$

## C Quantification de l'information contenue dans un état Gaussien

Le degré d'information contenu dans un état quantique correspond à la connaissance que nous avons *a priori* du résultat de n'importe quelle mesure effectuée sur l'état [Peres, 1993]. Nous allons dans la suite détailler quelques unes des mesures possibles pour des états quelconques  $\rho$ , et leur expression "Gaussienne" [Adesso *et al.*, 2004b].

### C.1 Pureté

Étant donnée la définition que nous venons de donner de la quantité d'information contenue dans un système, la mesure la plus simple de cette quantité est la pureté. En effet, la caractéristique d'un état pur est qu'on peut reconstituer la façon dont il a été préparé, ce qui permet effectivement de prédire le résultat des mesures effectuées sur le système. La pureté d'un état  $\rho$ , dont nous allons dans ce paragraphe rappeler quelques propriétés, est définie par :

$$\mu(\rho) = \text{Tr}(\rho^2) \quad (2.32)$$

Dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension finie  $D$ , on a :

$$\frac{1}{D} \leq \mu \leq 1 \quad (2.33)$$

de sorte qu'en variables continues (où  $D \rightarrow \infty$ ), la pureté minimale (qui correspond à un état le plus mélangé possible) tend vers 0.

Considérons un système bipartitionné (décrit par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ) dans l'état  $\rho$ . On note  $\rho_i = \text{Tr}_i(\rho)$ . La trace d'un produit étant égale au produit des traces, la pureté est une quantité multiplicative sur les états produits :

$$\mu(\rho_1 \otimes \rho_2) = \mu(\rho_1) \cdot \mu(\rho_2) \quad (2.34)$$

La pureté est invariante sous les opérations unitaires<sup>14</sup>. Dans le cas des états Gaussiens, ceci signifie que la pureté est uniquement fonction des valeurs propres symplectiques  $\nu_k$ . Son expression est d'ailleurs très simple :

$$\mu(\rho) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N \nu_k} = \frac{1}{\sqrt{\text{Det}(\sigma)}} \quad (2.35)$$

## C.2 Entropie linéaire

En théorie de l'information, l'habitude est de quantifier le désordre – à l'aide de l'entropie – plutôt que l'ordre – qui est caractérisé par la pureté. En conséquence, on définit l'“impureté”, ou “entropie linéaire” :

$$S_L(\rho) = \frac{D}{D-1}(1 - \mu) \quad (2.36)$$

ce qui se simplifie, dans le cas des variables continues – et donc aussi des états Gaussiens – pour lesquelles  $D \rightarrow \infty$  :

$$S_L(\rho) = 1 - \mu \quad (2.37)$$

L'entropie linéaire est comprise entre 0 et 1 (1 pour les états totalement mélangés en variables continues). Cette grandeur permet de quantifier de façon simple l'information quantique contenue dans le système.

## C.3 Entropie de von Neumann

Pour quantifier l'information quantique contenue dans le système, on utilise cependant plus couramment l'équivalent quantique de l'entropie de Shannon [Shannon, 1948] : l'entropie de von Neumann, dont nous allons aborder quelques propriétés. Cette quantité peut également être vue comme une limite des entropies généralisées ; elle est définie par :

$$S_V(\rho) = -\text{Tr} [\rho \log_2(\rho)] \quad (2.38)$$

14. Il est possible de définir d'autres puretés dites “généralisées” [Bhatia, 1996, Bastiaans, 1984, Tsallis, 1988], qui elles aussi sont invariantes.

où le logarithme est défini comme la somme de la série entière correspondante.

L'entropie de von Neumann est sous-additive [Wehrl, 1978] :

$$S_V(\rho) \leq S_V(\rho_1) + S_V(\rho_2) \quad (2.39)$$

Cette inégalité n'est saturée (*i.e.* l'entropie de von Neumann n'est additive) que pour les états produits  $\rho^{\otimes} = \rho_1 \otimes \rho_2$ .

L'entropie de von Neumann diverge pour les états totalement mélangés en variables continues.

Pour les états Gaussiens, on peut à nouveau exprimer cette entropie en fonction des valeurs propres symplectiques [Agarwal, 1971, Holevo *et al.*, 1999, Serafini *et al.*, 2004] :

$$S_V(\rho) = \sum_{k=1}^N f(\nu_k) \quad (2.40)$$

où

$$f(x) \equiv \frac{x+1}{2} \log_2 \left( \frac{x+1}{2} \right) - \frac{x-1}{2} \log_2 \left( \frac{x-1}{2} \right) \quad (2.41)$$

Dans le cas d'un état Gaussien à 1 mode, le spectre symplectique, qui n'est constitué que de  $\{\nu_1\}$ , est entièrement déterminé par l'invariant symplectique  $\text{Det}(\sigma) = \nu_1^2$ . De sorte que toutes les entropies ne sont – dans le cas  $N = 1$  – que des fonctions croissantes de  $\text{Det}(\sigma)$ , et elles induisent toutes le même classement sur les états Gaussiens à 1 mode.

Ceci n'est pas vrai dans le cas multimode, même pour  $N = 2$ . [Adesso *et al.*, 2004b]

## D Intrication des états Gaussiens bipartitionnés

### D.1 Position du problème

En présence d'un système quantique bi- ou multipartitionné, la simple question “*Y a-t-il des corrélations quantiques au sein de ce système ?*” se révèle d'une extraordinaire complexité [Heiss, 2003, Audenaert et Plenio, 2006, Serafini *et al.*, 2005].

Une façon simple de comprendre cette question est de dire qu'un système contient des corrélations quantiques si les observables associées aux différents sous-systèmes sont corrélées de telle sorte qu'on ne puisse reproduire ces corrélations par des moyens purement classiques. Ceci signifie que ces corrélations sont liées à de l'“inséparabilité”, ou à une “non-factorisabilité”.

On va voir que le problème se pose surtout pour les mélanges statistiques d'états. En effet, un mélange statistique d'états peut être préparé de plusieurs façons différentes

(en général une infinité). Or si on ne peut pas reconstituer la préparation d'un état, il est évidemment compliqué de savoir si les corrélations qu'il contient ont été produites par des moyens classiques ou quantiques. De ce fait, il n'existe pas de critère général (applicable) permettant de discriminer corrélations classiques et corrélations quantiques pour un mélange statistique d'états.

## D.2 Intrication des états purs

Il est communément admis que l'intrication d'un état pur bipartitionné  $|\psi\rangle$  est quantifiée par le taux de mélange de chacun de ses sous-systèmes. En effet, si un sous-système présente un taux de mélange non nul, c'est qu'il fait partie d'un système plus large, dont il n'est pas indépendant.

Le taux de mélange est caractérisé par l'"entropie d'intrication"  $E_V(|\psi\rangle)$ , qui est définie comme l'entropie de von Neumann (*cf.* équation (2.38)) des matrices densité réduites<sup>15</sup> [Bennett *et al.*, 1996a] :

$$E_V(|\psi\rangle) = S_V(\rho_1) = S_V(\rho_2) \quad (2.42)$$

Parmi les propriétés de l'entropie d'intrication, on peut noter que par définition elle est invariante par les opérations locales unitaires :

$$E_V\left(\left[\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2\right]|\psi\rangle\right) = E_V(|\psi\rangle) \quad (2.43)$$

On peut aussi montrer que  $E_V(|\psi\rangle)$  ne peut augmenter sous l'action d'opérations locales et de communications classiques (LOCC) [Popescu et Rohrlich, 1997] : c'est une caractéristique essentielle de toute mesure d'intrication, qui reflète le fait qu'on ne peut créer<sup>16</sup> de l'intrication avec les seules LOCC [Vedral *et al.*, 1997, Vidal, 2000].

## D.3 Intrication des mélanges statistiques d'états

On peut décomposer un mélange statistique d'états en une combinaison linéaire convexe d'états purs :

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad \text{avec} \quad \sum_k p_k = 1 \quad (2.44)$$

Cette décomposition indique comment préparer l'état  $\rho$  : il faut préparer l'état  $|\psi_1\rangle$  avec une probabilité  $p_1$ , l'état  $|\psi_2\rangle$  avec une probabilité  $p_2$ , *etc.* Malheureusement, comme déjà mentionné au §D.1, cette décomposition n'est pas unique. On ne peut donc pas savoir immédiatement si les corrélations sont dues à des LOCC ou non. Cependant, il

<sup>15</sup>. La matrice densité réduite au sous-système 1 d'un état  $\rho$  est la trace partielle de  $\rho$  sur le sous-système 2 :  $\rho_1 = \text{Tr}_2(\rho)$  [Basdevant et Dalibard, 2001].

<sup>16</sup>. L'intrication ne peut augmenter *en moyenne* ; il est possible, avec une certaine probabilité, d'augmenter la quantité d'intrication uniquement avec des LOCC : c'est la distillation d'intrication [Bennett *et al.*, 1996b, Gisin, 1996, Bennett *et al.*, 1996c].

est clair que s'il existe un moyen de préparer l'état  $\rho$  avec uniquement des LOCC, l'état peut être défini comme séparable. À l'inverse, si parmi toutes les préparations possibles, aucune n'utilise que des LOCC, alors l'état est intriqué [Werner, 1989].

Le problème de ce critère est évidemment le fait qu'il est inapplicable ! C'est pourquoi d'autres critères ont été développés pour détecter l'intrication dans les mélanges statistiques d'états quantiques [Lewenstein *et al.*, 2000a, Bruß, 2002, Leuchs et Beth, 2003]. Nous allons développer quelques uns d'entre eux, particulièrement intéressants pour les états Gaussiens.

## D.4 Séparabilité des états Gaussiens

### a) Critère PPT

L'un des critères d'inséparabilité les plus puissants à l'heure actuelle est le critère de Peres-Horodecki. Le principe de ce critère est d'utiliser l'opération de "transposition partielle" de la matrice densité d'un système bipartitionné. La transposée partielle de  $\rho$  consiste à ne transposer  $\rho$  que vis-à-vis des degrés de liberté d'un seul des deux sous-systèmes. Peres a montré que, si l'état  $\rho$  est séparable, alors sa transposée partielle (par exemple vis-à-vis du sous-système 1)  ${}^{t_1}\rho$  est une matrice densité physique ; en particulier elle est semi-définie positive ( ${}^{t_1}\rho \geq 0$ ) – et de même pour  ${}^{t_2}\rho$ . Ainsi, la positivité de la matrice transposée partielle ("Positivity of the Partial Transpose", ou "PPT" en anglais, qui sera appelée par la suite "propriété PPT") est une condition nécessaire de séparabilité [Peres, 1996].

La réciproque est en général fautive, mais elle a été démontrée dans certains cas pour des systèmes de faible dimension, en particulier des systèmes bipartitionnés avec des espaces de Hilbert de dimension  $2 \times 2$  et  $2 \times 3$ <sup>17</sup>. Pour ces systèmes, la propriété PPT est équivalente à la séparabilité [Horodecki *et al.*, 1996]. Pour des produits tensoriels de dimensions plus importantes, l'existence d'états qui à la fois vérifient la propriété PPT et sont intriqués a été démontrée [Horodecki, 1997]. De tels états sont dits "intriqués-liés" ("bound entangled" en anglais) car leur intrication ne peut être distillée pour obtenir des états maximales intriqués [Horodecki *et al.*, 1998]. Notons finalement que l'existence d'états intriqués-liés avec une transposée partielle négative a été conjecturée [Dür *et al.*, 2000, DiVincenzo *et al.*, 2000], mais jamais démontrée jusqu'à présent [Krüger et Werner, web].

Simon a généralisé récemment le critère de Peres aux variables continues [Simon, 2000]. Il a montré que l'opération de transposition partielle peut être interprétée géométriquement comme un renversement du temps (vis-à-vis de l'opérateur  $\hat{Q}$ ). Considérons ainsi la matrice de covariance d'un système bipartitionné  $\sigma_{AB}$  où le sous-système  $\mathcal{S}_A$  contient  $N_A$  modes et le sous-système  $\mathcal{S}_B$  contient  $N_B$  modes. La transposée partielle de  $\sigma_{AB}$  est

<sup>17</sup>. Dans le cas de systèmes bipartitionnés, on parlera d'espaces de dimension  $l \times m$ , où  $l$  est la dimension associée au premier sous-système, et  $m$  celle associée au second.

la matrice :

$$\tilde{\sigma}_{AB} = \Theta_{AB} \sigma_{AB} \Theta_{AB} \quad (2.45)$$

où

$$\Theta_{AB} = \left( \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{2N_A} & (0) \\ & \ddots \\ (0) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (0) \\ & & \ddots \\ (0) & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2N_B} \end{array} \right) \quad (2.46)$$

Simon a également montré que la réciproque du critère de Peres est vraie pour les états Gaussiens à  $1 \times N$  modes<sup>18</sup> [Simon, 2000, Duan *et al.*, 2000, Werner et Wolf, 2001]. Ainsi, un état Gaussien  $\sigma_{AB}$  avec  $N_A = 1$  et  $N_B$  arbitraire est un état séparable si et seulement si la matrice transposée partielle  $\tilde{\sigma}_{AB}$  est une matrice physique, qui satisfait l'inégalité (2.8) :

$$\tilde{\sigma}_{AB} + \iota \Omega \geq 0 \quad (2.47)$$

Pour des états Gaussiens bipartitionnés avec  $N_A > 1$ , le critère PPT est seulement une condition nécessaire de séparabilité (et donc sa contraposée est une condition suffisante d'inséparabilité). D'ailleurs, la réciproque du critère de Peres est déjà violée dans le cas  $N_A = N_B = 2$ , pour lequel l'existence d'états intriqués-liés a été prouvée [Werner et Wolf, 2001].

On peut exprimer le critère PPT en termes de valeurs propres symplectiques de la transposée partielle de la matrice de covariance. En effet, la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$  de la matrice de covariance  $\sigma$  d'un état Gaussien quelconque à  $N$  modes est encore une matrice symétrique et positive. Par conséquent, elle admet une décomposition de Williamson (*cf.* équation (2.23)) [Williamson, 1936]. Cette décomposition s'écrit :

$$\tilde{\sigma} = {}^t S \tilde{\nu} S \quad (2.48)$$

18. Ceci a également été montré récemment pour les états Gaussiens  $M \times N$  bisymétriques (c'est-à-dire des états invariants par permutation des modes au sein de chacun des sous-systèmes), mais nous ne détaillerons pas cet aspect ici. Le lecteur pourra se référer à [Serafini *et al.*, 2005].

où  $S \in Sp(2N, \mathbb{R})$  et  $\tilde{\nu}$  est la matrice de covariance :

$$\tilde{\nu} = \bigoplus_{k=1}^N \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_k & 0 \\ 0 & \tilde{\nu}_k \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Les  $N$  quantités  $\tilde{\nu}_k$  sont les valeurs propres symplectiques de la matrice transposée partielle  $\tilde{\sigma}$ . On a déjà vu (*cf.* §B.4 et C) que le spectre symplectique  $\{\nu_k\}$  de  $\sigma$  contient les propriétés structurelles de l'état Gaussien, ainsi que celles liées à la quantité d'information contenue dans l'état. On voit ici que le spectre symplectique  $\{\tilde{\nu}_k\}$  de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$  caractérise de façon qualitative (et parfois même quantitative, comme on le verra au §D.5b)) l'intrication contenue dans le système. En effet, on peut réécrire le critère de Peres sous la forme :

$$\forall k \in \llbracket 1..N \rrbracket \quad \tilde{\nu}_k \geq 1 \quad (2.50)$$

voire, si on ordonne les  $\tilde{\nu}_k$  dans l'ordre croissant et qu'on note  $\tilde{\nu}_-$  la plus petite :

$$\tilde{\nu}_- \geq 1 \quad (2.51)$$

Ainsi, un état Gaussien pour lequel  $\tilde{\nu}_- < 1$  est intriqué.

Quant au problème de pouvoir distiller l'intrication d'un état Gaussien, il a été résolu de façon très générale [Werner et Wolf, 2001] : on peut distiller avec des LOCC (non Gaussiennes! [Eisert *et al.*, 2002a, Fiurášek, 2002, Giedke et Cirac, 2002]) l'intrication de tout état Gaussien ne vérifiant pas le critère PPT.

Le tableau 2.2 résume les différentes conditions qui ont été revues ici pour qu'un état soit physique ou séparable.

Tab. 2.2: Comparaison entre les conditions d'existence et les conditions de séparabilité d'un état Gaussien. La condition de séparabilité est celle du critère PPT : il est vrai pour tous les états séparables, et il est équivalent à la séparabilité pour les états  $1 \times N$  et les états bisymétriques  $M \times N$ .

	État physique	État séparable
Matrice densité	$\rho \geq 0$	${}^t_A \rho \geq 0$
Matrice de covariance	$\sigma + \imath \Omega \geq 0$	$\tilde{\sigma} + \imath \Omega \geq 0$
Spectre symplectique	$\forall k \quad \nu_k \geq 1$	$\forall k \quad \tilde{\nu}_k \geq 1$

## b) Autres critères de séparabilité

Nous allons évoquer dans cette partie d'autres critères, qui sont utilisés, en particulier quand on ne peut mesurer la totalité de la matrice de covariance.



## CRITÈRE DE SOMME DIRECTE

Pour un système Gaussien bipartitionné  $N_A \times N_B$  quelconque, l'état  $\sigma$  est séparable si et seulement si il existe un couple de matrices de covariance  $\sigma_A$  relative au sous-système  $\mathcal{S}_A$  et  $\sigma_B$  relative au sous-système  $\mathcal{S}_B$  tel que [Werner et Wolf, 2001] :

$$\sigma \geq \sigma_A \oplus \sigma_B \quad (2.52)$$

Ce critère, attrayant du fait de l'équivalence, est malheureusement peu utile en pratique : il impose de tester tous les couples  $\{\sigma_A, \sigma_B\}$  possibles !

## CRITÈRE OPÉRATIONNEL

[Giedke *et al.*, 2001] introduisent une application non-linéaire qui, itérée sur la matrice  $\sigma$ , permet de déterminer la séparabilité de tous les états Gaussiens bipartitionnés. Ce critère est totalement indépendant du critère PPT, il est aussi plus puissant, mais moins pratique.

## TÉMOINS D'INTRICATION

Soit  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  le sous-ensemble convexe et compact des états séparables. On considère les opérateurs Hermitiens  $\hat{V}$  tels que pour tout état  $\rho \in \mathcal{D}$  on a  $\text{Tr}(\hat{V} \rho) \geq 0$ . Un état  $\rho' \in \mathcal{H}$  est intriqué si et seulement si parmi tous ces opérateurs  $\hat{V}$ , il existe un opérateur  $\hat{V}_0$  tel que  $\text{Tr}(\hat{V}_0 \rho) < 0$  [Horodecki *et al.*, 1996, Terhal, 2000]. L'opérateur  $\hat{V}_0$  est le *témoin*, qui permet de détecter l'intrication de l'état  $\rho$ .

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble  $\mathcal{D}$  étant convexe et compact, pour tout état  $\rho' \notin \mathcal{D}$ , il existe un hyperplan qui sépare  $\rho'$  et  $\mathcal{D}$  (*cf.* Fig. 2.2). Un témoin d'intrication  $\hat{V}_0$  est dit "optimal" lorsque l'hyperplan qu'il induit (correspondant à la frontière  $\text{Tr}(\hat{V}_0 \rho) = 0$ ) est tangent à l'ensemble  $\mathcal{D}$  [Lewenstein *et al.*, 2000b]. Il est possible de détecter plus finement la séparabilité à l'aide de témoins d'intrication non linéaires, "courbés" vers  $\mathcal{D}$ <sup>19</sup> [Gühne et Lutkenhaus, 2006].

[Hyllus et Eisert, 2006] est une étude exhaustive des témoins d'intrication linéaires et non-linéaires pour les variables continues. Elle peut être utilisée aussi bien pour les états bipartitionnés que multipartitionnés.

## CRITÈRES D'ORIGINE EXPÉRIMENTALE

En sus des critères d'origine théorique mentionnés plus haut, il existe un certain nombre de critères qui ont été développés pour les besoins d'expériences spécifiques. On a déjà abordé de tels critères au §E.2c). Ils sont basés sur la violation d'inégalités sur les variances de combinaisons des opérateurs canoniques, et sont valables à 2 modes [Duan *et al.*, 2000] ou à  $N$  modes [van Loock et Furusawa, 2003].

19. Une bonne illustration de l'intérêt des témoins d'intrication non-linéaires est donnée par la comparaison du critère simplifié de Duan-Simon et du critère de Mancini dans le cas d'un état à 2 modes, au §1E.2c).

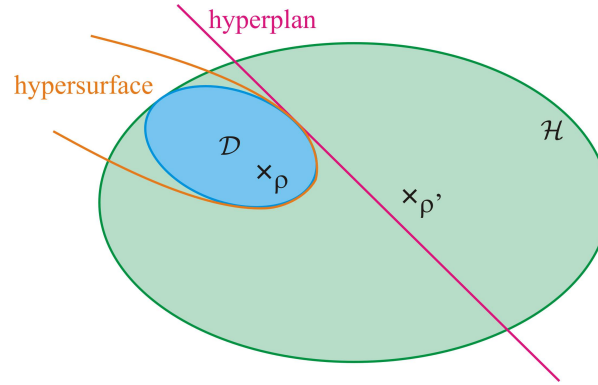


Fig. 2.2: Illustration du théorème de Hahn-Banach pour les témoins d'intrication, avec un témoin linéaire optimal (hyperplan) et un témoin non-linéaire optimal (hypersurface).

## D.5 Quantification de l'intrication pour les états Gaussiens bipartitionnés

Un critère d'intrication permet de discriminer les états intriqués des états séparables, mais ne donne en aucun cas une quantification de l'intrication ; ni un éventuel classement des états selon la quantité d'intrication qu'ils renferment.

Dans le but d'aboutir à un tel classement, de nombreux auteurs se sont attachés à rechercher une “mesure d'intrication”, c'est-à-dire une application :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho &\mapsto \mathfrak{E}(\rho) \end{aligned} \tag{2.53}$$

à laquelle on impose qu'elle vérifie certaines propriétés [Christandl et Winter, 2004, Bennett *et al.*, 1996c] :

- $\mathfrak{E}$  est une fonction continue sur  $\mathcal{H}$
- $\mathfrak{E}$  est une fonction convexe sur  $\mathcal{H}$
- $\mathfrak{E}(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho$  est séparable.
- $\mathfrak{E}(\rho)$  est conservée sous l'action d'opérations unitaires locales.
- $\mathfrak{E}(\rho)$  n'augmente pas sous l'action de LOCC :  $\mathfrak{E}[\text{LOCC}(\rho)] \leq \mathfrak{E}(\rho)$
- $\mathfrak{E}$  est additive pour des systèmes indépendants :  $\mathfrak{E}(\rho_1 \otimes \rho_2) = \mathfrak{E}(\rho_1) + \mathfrak{E}(\rho_2)$

Cette question ne peut être considérée comme complètement résolue à l'heure actuelle. Il existe un grand nombre de mesures d'intrication, qui diffèrent par les contextes pour lesquels elles ont été élaborées, et par les caractérisations de l'intrication dont elles découlent. D'ailleurs, elles ne débouchent pas toutes sur le même classement des états intriqués. On pourra trouver quelques exemples dans les références [Bruß, 2002, Horodecki *et al.*, 2001, Horodecki *et al.*, 2007, Plenio et Virmani, 2007, Christandl, 2006]. Aucune des mesures proposées à l'heure actuelle ne satisfait tous ces axiomes.

### a) Intrication de formation

L'intrication de formation  $E_F(\rho)$  ("entanglement of formation" en anglais), introduite par [Bennett *et al.*, 1996c], est la généralisation de l'entropie d'intrication (2.42) [Osborne, 2007]. En effet, elle est définie d'après une somme pondérée de la quantité d'intrication des états purs intervenant dans le mélange statistique d'états :

$$E_F(\rho) = \min_{\{p_k, |\psi_k\rangle\}} \left( \sum_k p_k E_V(|\psi_k\rangle) \right) \quad (2.54)$$

où la minimisation se fait sur toutes les décompositions possibles du mélange statistique d'états  $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ . Il s'agit d'un problème d'optimisation excessivement complexe, qui n'a été résolu que dans des cas très particuliers : mélanges statistiques d'états de deux qubits [Wootters, 1998], et certains états très symétriques [Terhal et Vollbrecht, 2000, Vollbrecht et Werner, 2001]. En variables continues, il n'existe une expression explicite de l'intrication de formation que pour les états Gaussiens symétriques à 2 modes [Giedke *et al.*, 2003].

Par construction, l'intrication de formation revient à quantifier le nombre minimal d'états purs nécessaires pour recréer la même intrication.

La question de l'additivité de l'intrication de formation reste un problème ouvert [Krüger et Werner, web].

### b) Négativités

Les négativités sont des fonctions monotones de l'intrication, qui quantifient la violation du critère PPT (*cf.* §D.4a), c'est-à-dire "combien" il manque à la transposée partielle de  $\rho$  pour être positive. Nous allons aborder ici la négativité et la négativité logarithmique.

#### NÉGATIVITÉ

La négativité est définie par [Życzkowski *et al.*, 1998, Eisert, 2001] :

$$\mathcal{N}(\rho) = \frac{\|\hat{\rho}\|_1 - 1}{2} \quad (2.55)$$

où la norme 1 est définie par :  $\|\hat{\rho}\|_1 = \text{Tr} \left( \sqrt{\hat{\rho}^\dagger \hat{\rho}} \right)$ .

La négativité a l'avantage d'être une mesure d'intrication qu'on peut calculer :

$$\mathcal{N}(\rho) = \max \left( 0, - \sum_k \lambda_k^- \right) \quad (2.56)$$

où les  $\lambda_k^-$  sont les valeurs propres négatives de la transposée partielle  ${}^{t_i}\rho$ .

## NÉGATIVITÉ LOGARITHMIQUE

La négativité peut être définie pour les variables continues [Vidal et Werner, 2002], cependant on utilise plus volontiers la négativité logarithmique [Vidal et Werner, 2002, Eisert, 2001] :

$$E_{\mathcal{N}}(\rho) = \log_2 (\|\rho\|_1) = \log_2 (1 + 2\mathcal{N}(\rho)) \quad (2.57)$$

La négativité logarithmique est additive. Bien qu'elle ne soit pas convexe, c'est une fonction totalement monotone de l'intrication sous les LOCC [Plenio, 2005].

Ni la négativité, ni la négativité logarithmique ne sont continues par rapport à la norme 1 dans un espace de Hilbert de dimension infinie ; cependant on peut s'affranchir de ce problème en ne considérant que des états physiques, c'est-à-dire d'énergie moyenne finie [Eisert *et al.*, 2002b]. Une telle contrainte étant parfaitement raisonnable, il est tout-à-fait légitime d'omettre ce problème dans un premier temps.

## c) États Gaussiens

## RÉÉCRITURE DES NÉGATIVITÉS

Le principal avantage des négativités est qu'elles sont faciles à calculer pour les états Gaussiens. Ainsi, pour un état de matrice de covariance  $\sigma$  [Vidal et Werner, 2002, Serafini, 2004, Adesso *et al.*, 2004b, Adesso *et al.*, 2004c] :

$$\mathcal{N}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \prod_{k|\tilde{\nu}_k < 1} \tilde{\nu}_k^{-1} - 1 \right) \\ 0 \text{ si } \forall k \tilde{\nu}_k \geq 1 \end{cases} \quad (2.58)$$

Et de la même façon, on peut exprimer la négativité logarithmique en fonction des valeurs propres symplectiques de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$  :

$$E_{\mathcal{N}}(\sigma) = \begin{cases} - \sum_{k|\tilde{\nu}_k < 1} \log_2(\tilde{\nu}_k) \\ 0 \text{ si } \forall k \tilde{\nu}_k \geq 1 \end{cases} \quad (2.59)$$

## LEMME

Ce lemme permet de simplifier encore la quantification de l'intrication pour certains états Gaussiens.

*Soit un état Gaussien bipartitionné  $\sigma_{AB}$ , comprenant  $N_A + N_B$  modes. Il y a au maximum  $n = \min\{N_A, N_B\}$  valeurs propres symplectiques de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}_{AB}$  qui peuvent violer l'inégalité PPT (2.50).*

On peut alors, pour les états Gaussiens<sup>20</sup>  $1 \times N$  quantifier l'intrication simplement à

20. Et aussi pour les états bisymétriques  $M \times N$ , dont le spectre symplectique présente des dégénérescences.

l'aide de  $\tilde{\nu}_-$ , la plus petite des valeurs propres symplectiques de la transposée partielle  $\tilde{\sigma}$ . En effet, si  $\tilde{\nu}_- < 1$ , l'état est intriqué, et plus  $\tilde{\nu}_-$  est petit, plus l'état  $\sigma$  est intriqué. Dans le cas particulier des états Gaussiens à 2 modes, ce résultat avait été obtenu dans [Adesso *et al.*, 2004a, Adesso *et al.*, 2005].

## E Cas particulier des états Gaussiens à 2 modes

Dans cette section, nous allons reprendre les résultats précédents dans le cas particulier de 2 modes Gaussiens. Cette démarche est motivée d'une part par le fait qu'il s'agit du plus simple des systèmes bipartitionnés – qui va permettre d'exprimer explicitement les différents critères et mesures –, et d'autre part par le fait que ce sont de tels états qui ont été étudiés expérimentalement durant cette thèse.

### E.1 Écriture symplectique d'un état Gaussien à 2 modes

La matrice de covariance  $\sigma$  d'un état à 2 modes est une matrice symétrique réelle  $4 \times 4$ , qui comporte *a priori* 10 coefficients indépendants. Cependant, pour étudier la quantité d'information contenue dans l'état, ou son intrication, on peut se limiter à la forme standard de cette matrice [Simon, 2000, Duan *et al.*, 2000]. En effet, il est possible de passer de la forme générale à la forme standard par des opérations symplectiques *locales*, qui ne modifient pas l'intrication de l'état (*cf.* §B.3f)). Ainsi, la forme standard de la matrice de covariance d'un état Gaussien à 2 modes s'écrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ {}^t\gamma & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & c_+ & 0 \\ 0 & a & 0 & c_- \\ c_+ & 0 & b & 0 \\ 0 & c_- & 0 & b \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Il y a  $N$  invariants symplectiques (*cf.* §B.4a)); ici  $N = 2$ . On peut donc exprimer toutes les propriétés de  $\sigma$  en fonction de son déterminant  $\text{Det}(\sigma)$  et de son sérialien  $\Delta(\sigma) = \text{Det}(\alpha) + \text{Det}(\beta) + 2\text{Det}(\gamma)$ .

Ainsi, l'inégalité de Heisenberg peut s'écrire :

$$\Delta(\sigma) \leq 1 + \text{Det}(\sigma) \quad (2.61)$$

ou en termes de valeurs propres symplectiques, qu'on notera  $\nu_+$  et  $\nu_-$  avec  $\nu_- \leq \nu_+$  :

$$\nu_- \geq 1 \quad (2.62)$$

On peut d'ailleurs exprimer les valeurs propres symplectiques en fonction des deux invariants cités plus haut [Vidal et Werner, 2002, Serafini *et al.*, 2004, Adesso *et al.*, 2004a, Adesso *et al.*, 2004b] :

$$2\nu_{\pm}^2 = \Delta(\sigma) \pm \sqrt{\Delta^2(\sigma) - 4\text{Det}(\sigma)} \quad (2.63)$$

Pour la quantification de l'intrication, plutôt que d'utiliser directement les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c_+$  et  $c_-$  de la matrice (2.60), il est intéressant d'écrire deux invariants symplectiques locaux – qui sont les puretés des états réduits à 1 seul mode :

$$\mu_1 = [\text{Det}(\alpha)]^{-1/2} = \frac{1}{a} \quad (2.64)$$

$$\mu_2 = [\text{Det}(\beta)]^{-1/2} = \frac{1}{b} \quad (2.65)$$

et deux invariants symplectiques globaux – la pureté et le séralien :

$$\mu = [\text{Det}(\sigma)]^{-1/2} = [(ab - c_+^2)(ab - c_-^2)]^{-1/2} \quad (2.66)$$

$$\Delta = a^2 + b^2 + 2c_+c_- \quad (2.67)$$

L'intérêt de ce changement de variables est d'utiliser des variables ayant un sens physique plus clair (tout au moins en ce qui concerne les puretés). En outre, un grand nombre de méthodes permettant de mesurer les invariants globaux  $\mu$  et  $\Delta$ , et locaux  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , ont été proposées récemment [Fiurášek et Cerf, 2004, Wenger *et al.*, 2004, Ekert *et al.*, 2002, Filip, 2002, Oi et Åberg, 2006, Rigolin et de Oliveira, 2007]. Ces méthodes ont l'avantage de ne pas nécessiter une reconstruction complète de la matrice de covariance [D'Ariano *et al.*, 2007].

## E.2 Intrication Gaussienne à 2 modes

### a) Critère PPT et négativités

En termes d'invariants symplectiques, la transposition partielle de la matrice de covariance d'un état Gaussien à 2 modes revient à changer le signe de  $\text{Det}(\gamma)$  :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ {}^t\gamma & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho \rightarrow {}^t_i \rho} \tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & \tilde{\gamma} \\ {}^t\tilde{\gamma} & \beta \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

avec  $\text{Det}(\tilde{\gamma}) = -\text{Det}(\gamma)$ . Pour une matrice de covariance sous la forme standard, ceci revient à changer  $c_-$  en  $-c_-$ .

La transposition partielle change le séralien  $\Delta$  en :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \text{Det}(\alpha) + \text{Det}(\beta) + 2\text{Det}(\tilde{\gamma}) \\ &= \text{Det}(\alpha) + \text{Det}(\beta) - 2\text{Det}(\gamma) \\ &= \Delta - 4\text{Det}(\gamma) \\ &= -\Delta + \frac{2}{\mu_1^2} + \frac{2}{\mu_2^2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Et l'équation (2.63) donne directement les valeurs propres de  $\tilde{\sigma}$  :

$$2\tilde{\nu}_\pm^2 = \tilde{\Delta} \pm \sqrt{\tilde{\Delta}^2 - \frac{4}{\mu^2}} \quad (2.70)$$

Le critère PPT – qui est une équivalence puisqu'on est dans le cas “ $1 \times N$ ” (avec  $N = 1$ ) – s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma \text{ est séparable} &\Leftrightarrow \tilde{\nu}_- \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Delta} \leq 1 + \frac{1}{\mu^2} \end{aligned}} \quad (2.71)$$

Notons que plus l'état est pur, plus  $\mu$  se rapproche de 1 par valeurs inférieures, et donc plus  $1 + \frac{1}{\mu^2}$  est petit. L'inégalité  $\tilde{\Delta} \leq 1 + \frac{1}{\mu^2}$  est donc d'autant plus facile à violer que l'état est pur, ce qui traduit le fait qu'il est plus facile pour un état pur que pour un mélange statistique d'états d'être intriqué.

On peut également calculer pour la négativité logarithmique pour un état Gaussien à 2 modes, qui est une fonction décroissante de  $\tilde{\nu}_-$  :

$$\boxed{E_N = \max \{0, -\log_2(\tilde{\nu}_-)\}} \quad (2.72)$$

Quant à l'autre valeur propre symplectique de la transposée partielle, elle vérifie toujours :  $\tilde{\nu}_+ > 1$ .

Enfin, remarquons que, d'après les équations (2.60),(2.61),(2.69),(2.71), on obtient une condition nécessaire pour qu'un état Gaussien à 2 modes soit intriqué [Simon, 2000] :

$$\sigma \text{ est intriqué} \Rightarrow \text{Det}(\gamma) < 0 \quad (2.73)$$

### b) Maximisation de l'intrication à l'aide d'opérations passives

Soit un état Gaussien  $\sigma$  à  $N \geq 2$  modes, et une opération passive  $K$  appliquée à  $\sigma$  :  $\sigma \rightarrow \sigma' = {}^t K \sigma K$ . Il a été montré dans [Wolf *et al.*, 2003] que la quantité maximale d'intrication (quantifiée par la négativité logarithmique) qu'on pouvait obtenir pour un sous-système arbitraire de deux modes de  $\sigma'$  est donnée par :

$$E_N^{max} = \max \left[ 0, -\frac{1}{2} \log_2(\lambda_1 \lambda_2) \right] \quad (2.74)$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les deux plus petites valeurs propres orthogonales (usuelles) de  $\sigma$ .



Fig. 2.3: Obtention, à l'aide d'opérations passives globales, des faisceaux les plus intriqués possible.

Nous allons à présent nous restreindre à 2 modes Gaussiens. [Wolf *et al.*, 2003] montrent également qu'un état Gaussien à 2 modes dont la matrice de covariance est naturellement dans la forme standard ne peut pas voir son intrication augmenter ; contrairement aux autres états. Pour ces derniers, la transformation à appliquer est celle qui donnera un état dont la matrice de covariance est directement dans la forme standard.

Les transformations passives ont été présentées au §B.3 : il s'agit de l'opération "déphasage" et de l'opération "lame séparatrice" (*cf.* Fig. 2.3). On peut réaliser n'importe quelle transformation passive sur les deux modes en combinant ces deux opérations [Yurke *et al.*, 1986, Han *et al.*, 1990, Arvind *et al.*, 1995b]. La figure 2.4 donne le schéma le plus général : les modes subissent un déphasage, sont mélangés sur une lame 50/50, subissent à nouveau un déphasage avant d'être recombinaés puis déphasés.

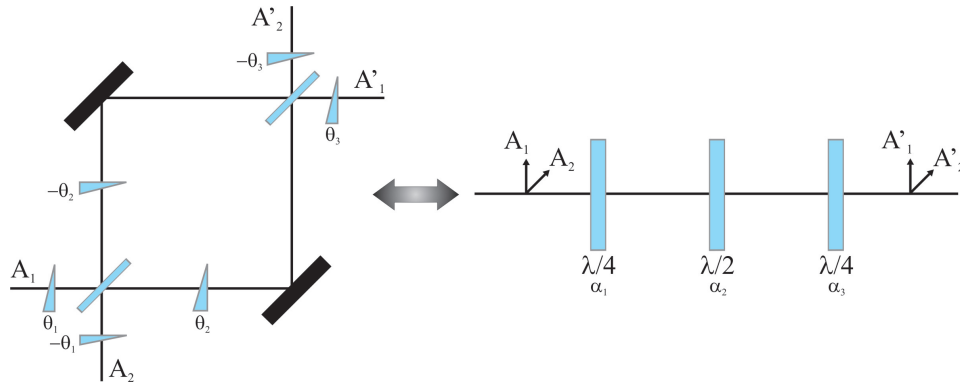


Fig. 2.4: Une transformation arbitraire sur deux modes est obtenue à l'aide de déphasages et de lames séparatrices, et se réduit à 3 paramètres indépendants. Lorsque les deux modes sont polarisés orthogonalement, la transformation est obtenue de manière équivalente à l'aide de 3 lames biréfringentes tournées selon des angles  $\alpha_i$ .

Lorsque les deux modes diffèrent uniquement par leur polarisation, cette transformation arbitraire peut être réalisée à l'aide de deux lames  $\lambda/4$  et d'une lame  $\lambda/2$  (*cf.* Fig. 2.4). Il a été montré dans [Simon et Mukunda, 1990] que ce nombre de lames est minimal et que toute association de ces trois lames dans un ordre quelconque est équivalente.

Nous verrons au §5.C.2c) l'aspect expérimental correspondant à cette partie : cette association de lame permet effectivement d'obtenir un état dont la matrice de covariance est sous la forme standard.

### c) Intrication de formation pour les états symétriques

L'expression de la décomposition convexe optimale qui apparaît dans la définition de l'intrication de formation (2.54) a été trouvée dans le cas d'un mélange statistique d'états Gaussiens *symétriques*<sup>21</sup> à 2 modes (c'est-à-dire un état tel que  $a = b$ ). Cette

21. Des bornes inférieures pour  $E_F$  ont été établies dans le cas non symétrique [Rigolin et Escobar, 2004].



décomposition est Gaussienne, de sorte que le minimum est réalisé pour des états purs Gaussiens à 2 modes [Giedke *et al.*, 2003], ce qui mène à l'expression :

$$E_F = \max\{0, g(\tilde{\nu}_-)\} \quad (2.75)$$

où

$$g(x) = \frac{(1+x)^2}{4x} \log_2 \left[ \frac{(1+x)^2}{4x} \right] - \frac{(1-x)^2}{4x} \log_2 \left[ \frac{(1-x)^2}{4x} \right] \quad (2.76)$$

$E_F$  est ainsi une fonction décroissante de  $\tilde{\nu}_-$  : la quantification de l'intrication qu'elle fournit est équivalente à celle donnée par les négativités.

#### d) Classement des états Gaussiens par leur quantité d'intrication

L'équivalence entre les négativités et l'intrication de formation pour les états Gaussiens symétriques à 2 modes pourrait mener à penser que, pour tous les états Gaussiens à 2 modes (symétriques ou non !), il existe une unique quantification de l'intrication qui reposerait sur la plus petite des valeurs propres symplectiques de la transposée partielle de la matrice de covariance,  $\tilde{\nu}_-$ .

En réalité il n'en est rien, et il existe une seconde classe de mesures, les “mesures Gaussiennes d'intrication” (que nous n'aborderons pas ici), qui débouchent sur un classement différent. Pour 2 modes, toutes les mesures ne coïncident que dans le cas symétrique.

Le lecteur pourra trouver de plus amples informations, et une discussion approfondie sur ce sujet, dans l'article d'où est tiré ce chapitre [Adesso et Illuminati, 2007] ou dans [Adesso et Illuminati, 2005].

### E.3 Information et intrication extrême

Il s'agit, dans cette dernière section, de relier l'intrication d'un état Gaussien à 2 modes avec la quantité d'information que lui et ses sous-systèmes contiennent. On a vu au §D.2 que ces deux notions sont étroitement reliées pour les états purs. Quant aux états impurs, le §D.3 a montré qu'une partie de l'information était encodée dans le taux de mélange individuel des sous-systèmes, et l'état global possède également un certain degré de mélange. Ceci suggère qu'on puisse extraire de ces grandeurs des informations sur les corrélations entre les sous-systèmes.

Les études ont montré que, à puretés individuelles et globale fixées, la négativité d'états Gaussiens à 2 modes de taux de mélange fixé possède une borne inférieure et une borne supérieure [Adesso *et al.*, 2004a, Adesso *et al.*, 2004b, Adesso *et al.*, 2005]. Ceci mène à l'inégalité suivante sur le séralien :

$$\frac{2}{\mu} + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1^2 \mu_2^2} \leq \Delta \leq \min \left\{ \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{\mu_1^2 \mu_2^2} - \frac{2}{\mu}, 1 + \frac{1}{\mu^2} \right\} \quad (2.77)$$

qui a amené à définir des “états Gaussiens extrêmement intriqués” à puretés individuelles et globale fixées. Les états qui saturent la partie gauche de l'inégalité (2.77) sont

dits “maximalement intriqués” (GMEMS) ; ceux qui saturent la partie droite de l’inégalité sont dits “minimalement intriqués” (GLEMS).

Ainsi, l’intrication – quantifiée par les négativités – des états Gaussiens à 2 modes est bornée supérieurement et inférieurement par des quantités ne dépendant que des puretés individuelles et globale ; le seul degré de liberté restant étant l’invariant symplectique  $\Delta$ .

L’existence des GMEMS et des GLEMS débouche sur deux résultats importants.

Tout d’abord, cela permet de classer la séparabilité des états Gaussiens en fonction de leurs puretés individuelles et globale : cette classification<sup>22</sup> est résumée dans le tableau 2.3.

Tab. 2.3: Classification des propriétés de séparabilité des états Gaussiens à 2 modes en fonction de leur pureté globale  $\mu$  et des puretés individuelles  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

Degré de pureté	Propriétés d’intrication
$\mu < \mu_1 \mu_2$	état non physique
$\mu_1 \mu_2 \leq \mu \leq \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2}$	états séparables
$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \mu_2} < \mu \leq \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2}}$	zone de coexistence d’états intriqués et séparables
$\frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2}} < \mu \leq \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 +  \mu_1 - \mu_2 }$	états intriqués
$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 +  \mu_1 - \mu_2 } < \mu$	état non physique

Par ailleurs, ceci permet de définir un nouvel estimateur de l’intrication dans les états Gaussiens bipartitionnés à 2 modes, à partir de la valeur moyenne des négativités des GMEMS et des GLEMS [Adesso *et al.*, 2004a].

22. Le lecteur pourra également trouver un schéma explicitant cette classification dans [Adesso *et al.*, 2004a]

## F Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre le formalisme symplectique, qui permet de caractériser totalement un état Gaussien et les transformations agissant sur cet état. Ce formalisme propose une écriture unifiée des propriétés essentielles d'un état Gaussien, tant du point de vue des fondements de la mécanique quantique (inégalité de Heisenberg) que pour l'information ou l'intrication contenues dans cet état. Il a en outre permis de dégager plusieurs critères d'intrication, en particulier pour les états Gaussiens à 2 modes qui vont nous intéresser tout au long de cette thèse.

Avant d'utiliser ce formalisme pour caractériser des états obtenus expérimentalement, nous allons dans le chapitre suivant présenter l'instrument que nous utilisons pour les produire : l'oscillateur paramétrique optique auto-verrouillé en phase.

### 3. Génération d'états non classiques en variables continues

#### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Optique non linéaire</b>	<b>53</b>
B.1	Processus non linéaires en optique	54
B.2	Conversion paramétrique	57
<b>C</b>	<b>Oscillateur paramétrique optique</b>	<b>59</b>
C.1	Aspect classique	59
C.2	Aspect quantique au-dessus du seuil d'oscillation	61
C.3	Aspect quantique sous le seuil d'oscillation	64
C.4	Conclusion	65
<b>D</b>	<b>OPO auto-verrouillé en phase</b>	<b>67</b>
D.1	Introduction	67
D.2	Propriétés classiques	67
D.3	Propriétés quantiques	69
<b>E</b>	<b>Conclusion</b>	<b>73</b>

---

#### A Introduction

Nous allons aborder dans ce chapitre les possibilités expérimentales pour produire les états non classiques du rayonnement, étudiés d'un point de vue théorique dans les chapitres précédents. Toutes reposent sur l'optique non linéaire, dont nous présenterons les bases. Ensuite nous nous focaliserons sur la non linéarité d'ordre 2, et sur la conversion paramétrique en cavité optique : c'est le principe d'un Oscillateur Paramétrique Optique. Enfin nous présenterons le dispositif étudié expérimentalement durant cette thèse : l'OPO auto-verrouillé en phase.

#### B Optique non linéaire

Les deux chapitres précédents ont abordé les états non classiques du rayonnement (comprimés, corrélés, intriqués), dont l'existence a été prévue très rapidement dans l'histoire de la mécanique quantique. Cependant, en l'absence de moyens expérimentaux permettant de générer de tels états, leur étude est restée théorique jusqu'à l'avènement de

l'optique non linéaire au début des années 60 [Armstrong *et al.*, 1962]. En effet, c'est essentiellement dans ce domaine que l'optique quantique puise ses outils expérimentaux.

## B.1 Processus non linéaires en optique

### a) Non-linéarité des milieux diélectriques

Lorsqu'un champ électromagnétique se propage dans un milieu diélectrique, il induit – *via* la force de Lorentz – un déplacement des charges liées par rapport à leur position d'équilibre. Ce déplacement modifie la distribution de charges<sup>1</sup>, et donc le champ électrique créé par cette distribution, induisant une polarisation macroscopique, qu'on peut écrire sous forme d'une série convergente de puissances du champ :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left[ \chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \dots \right] \quad (3.1)$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide. Il est à noter que les  $\chi^{(2n)}$  sont nuls pour tous les milieux centro-symétriques. La polarisation induite est un terme source pour le champ ; elle peut à son tour induire des modifications du champ incident.

Les  $\chi^{(m)}$  sont d'autant plus petits que  $m$  est grand. De ce fait, lorsque  $\|\vec{E}\|$  est faible, on peut négliger tous les termes d'ordre supérieur devant celui d'ordre 1 : la polarisation est linéaire. Ce terme d'ordre 1 est ainsi responsable des propriétés linéaires du milieu : indice de réfraction, absorption. En optique linéaire, les composantes de quadratures jouent des rôles symétriques, et les ondes se propagent sans influence mutuelle ... donc sans se corrélérer. Des champs “classiques” restent donc classiques.

Plus  $\|\vec{E}\|$  est important, plus grand sera le nombre de termes à prendre en compte. Ces termes sont à l'origine de nombreux phénomènes : indice non linéaire, génération d'harmoniques du champ d'ordres supérieurs, conversion paramétrique, ... Ces processus agissent de manière dissymétrique sur les composantes de quadratures, ou encore couplent plusieurs champs, pouvant ainsi mener – à partir d'un champ classique – à la génération d'un champ non classique (comprimé ou corrélé).

Un milieu optique est dit “non linéaire” si son  $\chi^{(2)}$  ou son  $\chi^{(3)}$  sont suffisamment grands pour qu'avec un faisceau d'intensité modérée on puisse détecter ses effets non linéaires. Nous présenterons rapidement les effets observés dans un milieu “ $\chi^{(3)}$ ” avant de détailler les effets liés à un  $\chi^{(2)} \neq 0$ .

### b) Non linéarité d'ordre 3

En général, l'effet non linéaire d'ordre 3 est totalement masqué par celui d'ordre 2. Cependant, puisque  $\chi^{(2)} = 0$  dans un milieu centro-symétrique, il est possible de détecter les effets du terme d'ordre 3.

---

1. Ces différentes interactions peuvent avoir lieu avec un certain retard, de sorte que l'écriture de la conservation de l'énergie doit tenir compte de cet éventuel déphasage.

Dans un tel milieu, il existe un processus asymétrique simple qui permet de générer un état comprimé. En effet, on peut réécrire ce terme :

$$\chi^{(3)} \vec{E}^3 = \left( \chi^{(3)} \|\vec{E}\|^2 \right) \vec{E} \quad (3.2)$$

De sorte que la polarisation macroscopique induite (avec un développement limité à l'ordre 4) s'écrit :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} + \chi^{(3)} \|\vec{E}\|^2 \right) \vec{E} \quad (3.3)$$

On peut ainsi interpréter la non linéarité  $\chi^{(3)}$  comme une correction non linéaire du  $\chi^{(1)}$ , responsable de l'indice du milieu. Cette dépendance de l'indice de réfraction en intensité du champ est appelée "effet Kerr optique".

Puisque l'indice dépend de l'intensité, le déphasage induit lors de la traversée du milieu (qui est proportionnel au chemin optique parcouru) dépend également de l'intensité. Un champ qui sera à l'instant  $t_1$  d'intensité  $I + \delta I_1$  sera moins déphasé que lorsqu'à l'instant  $t_2$  il aura l'intensité  $I + \delta I_2$  avec  $I_1 < I_2$ . La représentation de Fresnel fournit une bonne image de la conséquence sur les fluctuations du champ, qui se trouvent comprimées : le disque des fluctuations d'un champ cohérent est transformé en ellipse (*cf.* Fig. 3.1).

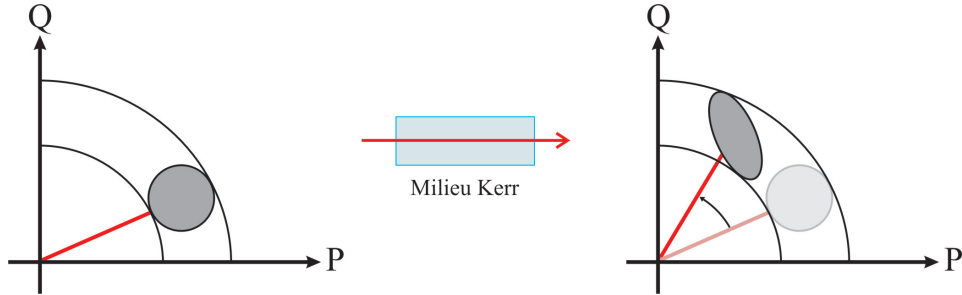


Fig. 3.1: Illustration en représentation de Fresnel de l'effet Kerr optique : les fluctuations du champ sont comprimées du fait du déphasage dépendant de l'intensité.

Une réduction de bruit par effet Kerr peut être obtenue par exemple à l'aide d'atomes froids en cavité [Lambrecht *et al.*, 1996], ou dans une fibre optique [Silberhorn *et al.*, 2001].

### c) Non linéarité d'ordre 2

Les processus non linéaires d'ordre 2, centraux dans les expériences menées lors de cette thèse, sont également appelés "mélange à trois ondes". En effet, ils couplent trois champs de pulsations  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . La conservation de l'énergie est bien entendue assurée :

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad (3.4)$$

Deux processus sont particulièrement intéressants pour l'optique quantique : la somme de fréquences et la conversion paramétrique (*cf.* Fig. 3.2).

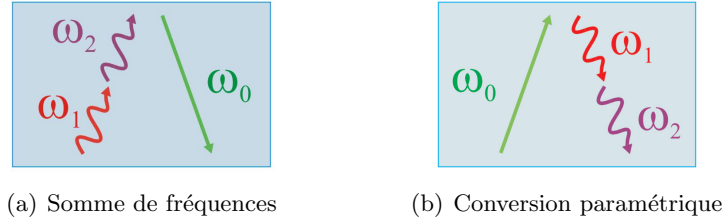


Fig. 3.2: Mélange à 3 ondes

La somme de fréquences (*cf.* Fig. 3.2(a)), ou “doublage de fréquence” correspond à la combinaison de deux photons pompe de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour donner un photon à la pulsation somme  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ . Premier effet non linéaire observé expérimentalement (sous la forme de génération de seconde harmonique, *i.e.* avec deux photons pompe de même fréquence), son plus grand intérêt à l’heure actuelle est de doubler la fréquence d’un laser. Cependant, il permet également de générer un état comprimé, car le doublage est d’autant plus efficace que l’intensité est grande : la distribution de bruit du champ à  $\omega_0$  est donc elliptique (comme pour l’effet Kerr, le doublage n’agit pas de façon symétrique sur toutes les quadratures).

La conversion paramétrique (*cf.* Fig. 3.2(b)) – sur laquelle nous reviendrons plus en détail dans la prochaine section – est en quelque sorte le processus inverse : à partir d’un photon pompe à  $\omega_0$  on génère deux photons “signal” (de pulsation  $\omega_1$ ) et complémentaire (de pulsation  $\omega_2$ ). Ces deux photons étant générés simultanément (la conservation de l’énergie l’impose) et à partir d’un même photon père, ils sont fortement corrélés.

L’énergie n’est pas la seule grandeur qui doit être conservée par les processus non linéaires : l’impulsion des photons – c’est-à-dire la vitesse de phase des ondes – doit elle aussi être conservée. On parle de “condition d’accord de phase” :

$$k_0 = k_1 + k_2 \Leftrightarrow n_0\omega_0 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \quad (3.5)$$

Lorsque le cristal n’est pas de dimension infinie, la condition (3.5) n’est plus stricte<sup>2</sup> et peut être vérifiée approximativement, l’interaction étant bien sûr d’autant plus efficace qu’on est proche des conditions idéales.

Un matériau isotrope, avec une dispersion normale (c’est-à-dire dont l’indice augmente avec la fréquence), ne permet pas de réaliser cette condition. On utilise donc en général des matériaux biréfringents (milieux uniaxes négatifs), pour lesquels l’indice diffère pour la polarisation ordinaire et la polarisation extraordinaire. Deux configurations sont possibles pour le mélange à 3 ondes :

– **Accord de phase de type I**

L’onde de pulsation  $\omega_0$  est polarisée suivant l’axe ordinaire, et les deux autres suivant l’axe extraordinaire :  $e + e \leftrightarrow o$

2. Ceci provient des retards possibles dans la réponse du milieu.

– **Accord de phase de type II**

Les ondes de pulsation  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont polarisées suivant l'axe extraordinaire, la dernière suivant l'axe ordinaire :  $e + o \leftrightarrow e$

En conversion paramétrique, ces deux configurations ne donnent pas naissance à des faisceaux quantiques de même nature.

L'accord de phase de type I assure que les deux photons signal et complémentaire sont émis dans le même mode de polarisation. On parle de "conversion paramétrique dégénérée en polarisation". Si on réalise l'accord de phase de telle sorte que  $\omega_1 = \omega_2$ , on obtient ainsi des états comprimés [Wu *et al.*, 1986, Bowen *et al.*, 2003].

Lors d'un accord de phase de type II, les photons sont émis suivant des polarisations orthogonales, et sont donc distinguables. Cette configuration "non dégénérée en polarisation" produit ainsi deux faisceaux corrélés et pouvant être spatialement séparés. C'est cette configuration qui a été exploitée expérimentalement dans cette thèse.

## B.2 Conversion paramétrique

Nous allons décrire ici la conversion paramétrique en termes de champ électrique. Les trois champs couplés sont :

- le champ pompe  $E_0$  de pulsation  $\omega_0$  et de module d'onde  $k_0$
- le champ signal  $E_1$  de pulsation  $\omega_1$  et de module d'onde  $k_1$
- le champ complémentaire  $E_2$  de pulsation  $\omega_2$  et de module d'onde  $k_2$

On suppose que les trois champs se propagent suivant une direction commune ( $Oz$ ). En représentation complexe, on a :

$$E_j(z, t) = \mathcal{E}_j(z, t) e^{i(k_j z + \omega_j t)} \quad (3.6)$$

Comme on l'a déjà mentionné, la polarisation macroscopique induite est un terme source pour le champ électrique. D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on peut écrire l'équation d'évolution de chaque champ lors de la propagation dans le milieu non linéaire :

$$\Delta E_j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_j}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

L'effet non linéaire est *a priori* faible. Il est donc possible de le considérer comme une perturbation de la solution linéaire, et de faire l'approximation de l'enveloppe lentement variable<sup>3</sup>. L'équation de propagation de l'enveloppe du champ dans le milieu non-linéaire peut alors se mettre sous la forme [Shen, 1984] :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_j}{\partial z} = \frac{i \omega_j}{2 n_j \varepsilon_0 c} P_i^{NL}(z) e^{-i k_j z} \quad (3.8)$$

où  $P^{NL}$  est la partie non linéaire de la polarisation macroscopique :

$$P_j^{NL}(z) = \varepsilon_0 \chi_{eff}^{(2)} \mathcal{E}_\ell \mathcal{E}_m \quad \ell \neq j, m \quad m \neq j, \ell \quad (3.9)$$

---

3. L'approximation de l'enveloppe lentement variable consiste à supposer que l'enveloppe  $\mathcal{E}_j(z, t)$  des oscillations varie peu sur une longueur d'onde.



On a noté  $\chi_{eff}^{(2)}$  la susceptibilité effective du milieu pour la configuration utilisée.

On en déduit les équations de propagation non linéaires couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial z} = \frac{\imath \omega_0}{2 n_0 c} \chi_{eff}^{(2)} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{-\imath \Delta k z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial z} = \frac{\imath \omega_1}{2 n_1 c} \chi_{eff}^{(2)} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_2^* e^{\imath \Delta k z} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial z} = \frac{\imath \omega_2}{2 n_2 c} \chi_{eff}^{(2)} \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_1^* e^{\imath \Delta k z} \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $\Delta k = k_0 - k_1 - k_2$  est le désaccord de phase.

Il est intéressant de réécrire les équations (3.10) en fonction des variables  $A_j$  dont le module carré est égal au flux de photons  $N_j$ . Pour cela, nous allons d'abord exprimer le lien entre  $A_j$  et  $\mathcal{E}_j$ .

Grâce au vecteur de Poynting, on peut calculer l'intensité  $I_j$  de l'onde en  $W.m^{-2}$  en fonction de  $\mathcal{E}_j$  :

$$I_j = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_j |\mathcal{E}_j|^2 \quad (3.11)$$

On en déduit le flux de photons  $N_j$  qui vérifie :

$$I_j = N_j \hbar \omega_j \quad (3.12)$$

Les variables  $A_j$  telles que  $N_j = |A_j|^2$  s'écrivent donc :

$$A_j = \sqrt{\frac{n_j c \varepsilon_0}{2 \hbar \omega_j}} \mathcal{E}_j \quad (3.13)$$

Finalement, on symétrise les équations en effectuant un changement d'origine des phases pour le champ pompe :  $A_0 \rightarrow -\imath A_0$ . On obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_0}{\partial z} = -\xi A_1 A_2 e^{-\imath \Delta k z} \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = \xi A_0 A_2^* e^{\imath \Delta k z} \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} = \xi A_0 A_1^* e^{\imath \Delta k z} \end{cases} \quad (3.14)$$

$\xi = \chi_{eff}^{(2)} \sqrt{\frac{\hbar \omega_0 \omega_1 \omega_2}{2 c^3 \varepsilon_0 n_0 n_1 n_2}}$  est un coefficient de couplage commun aux trois équations.

On peut montrer à partir des équations (3.14) que, au cours de la propagation, il y a conservation des quantités :

$$\hbar (\omega_0 N_0 + \omega_1 N_1 + \omega_2 N_2) \quad (3.15a)$$

$$\Delta N = N_1 - N_2 \quad (3.15b)$$

(3.15a) représente la somme des flux énergétiques des trois ondes qui interagissent. Puisqu'il n'y a pas de transfert d'énergie vers le milieu, ce flux se conserve.

La conservation (3.15b) est également connue sous le nom de "Relation de Manley-Rowe". Elle conforte l'interprétation de l'interaction paramétrique comme la création simultanée d'une paire de photons signal et complémentaire à partir d'un photon pompe.

Afin d'augmenter l'interaction entre les différents champs, le cristal non linéaire peut être inséré dans une cavité optique résonnante pour un ou plusieurs champs. Un tel dispositif, qui sera étudié tout au long de cette thèse, s'appelle un oscillateur paramétrique optique simplement, doublement ou triplement résonnant.

## C Oscillateur paramétrique optique

L'objectif de cette section est simplement de rappeler les principales équations qui régissent le système étudié, et les propriétés qui en découlent. Le lecteur pourra trouver les calculs détaillés dans [Debuisschert *et al.*, 1993] et [Laurat, 2004].

### C.1 Aspect classique

Nous allons nous intéresser à un oscillateur paramétrique optique (OPO) linéaire triplement résonnant, pour lequel  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$  et  $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq 1064 \text{ nm}$ . Il est dit triplement résonnant car les miroirs de la cavité optique sont traités de façon à réfléchir la pompe, le signal et le complémentaire (*cf.* Fig. 3.3).

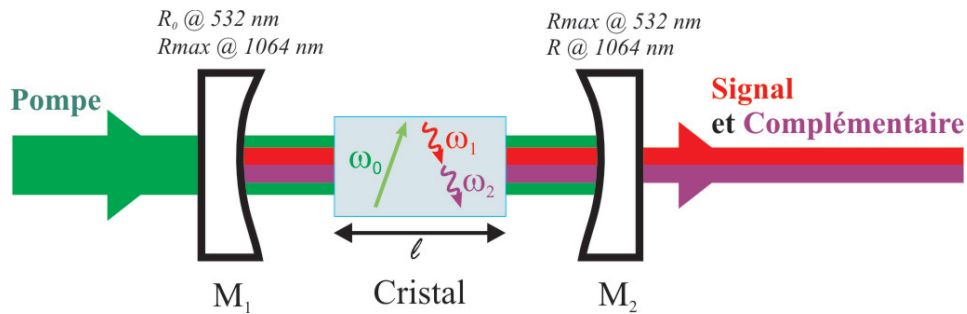


Fig. 3.3: Schéma d'un OPO linéaire triplement résonnant

Pour obtenir l'expression des champs dans la cavité, il faut tenir compte d'une part de la propagation dans le cristal de longueur  $\ell$  – avec la conversion paramétrique –, d'autre part du bouclage des champs dans la cavité.

Les équations de la conversion paramétrique (3.14) sont solubles dans le cas général avec des fonctions elliptiques [Armstrong *et al.*, 1962, Rosencher et Fabre, 2002]. Cepen-

nant, lorsque le gain paramétrique est faible, les équations se simplifient car elles peuvent être développées aux ordres faibles en  $g = \ell \xi$ , le gain paramétrique.

En régime stationnaire, le gain paramétrique est égal aux pertes. Or les pertes sont très faibles, de sorte que le gain paramétrique l'est également (pour les trois champs puisqu'il s'agit d'un OPO triplement résonnant) : on peut se restreindre au 1<sup>er</sup> ordre en  $g$ . On obtient finalement :

$$\begin{cases} A_0(\ell) = A_0(0) - \frac{g}{2} e^{-i \frac{\Delta k \ell}{2}} \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k \ell}{2} \right) A_1(0) A_2(0) \\ A_1(\ell) = A_1(0) + g e^{i \frac{\Delta k \ell}{2}} \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k \ell}{2} \right) A_0(0) A_2^*(0) \\ A_2(\ell) = A_2(0) + g e^{i \frac{\Delta k \ell}{2}} \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k \ell}{2} \right) A_0(0) A_1^*(0) \end{cases} \quad (3.16)$$

En ce qui concerne le bouclage, il faut écrire les relations d'entrée/sortie au niveau des miroirs. Le miroir d'entrée est supposé totalement réfléchissant pour les champs infrarouges, le miroir de sortie totalement réfléchissant pour le vert. On note  $r_0$  le coefficient de réflexion en amplitude du miroir d'entrée pour la pompe, et  $r$  celui du miroir de sortie pour signal et complémentaire (*cf.* Fig. 3.3). On définit des coefficients de réflexion généralisés :

$$r' = 1 - \gamma - \mu = 1 - \gamma' \quad (3.17a)$$

$$r'_0 = 1 - \gamma_0 - \mu_0 = 1 - \gamma'_0 \quad (3.17b)$$

où :

- $r = 1 - \gamma$  avec  $\gamma \ll 1$  de sorte que  $T = 1 - R \simeq 2\gamma$
- $r_0 = 1 - \gamma_0$  avec  $\gamma_0 \ll 1$  de sorte que  $T_0 = 1 - R_0 \simeq 2\gamma_0$
- $\mu$  représente le coefficient de pertes intra-cavité en amplitude pour les champs IR (dues par exemple à l'absorption dans le cristal ou aux réflexions)
- $\mu_0$  représente le coefficient de pertes intra-cavité en amplitude pour le champ pompe

Pour chaque champ  $A_j$ , on note  $\delta_j = 2k_j(n_j \ell + L)$  le déphasage subi sur un aller-retour ( $L$  représente la longueur de propagation libre dans la cavité). On suppose que les désaccords par rapport à la résonance, notés  $\Delta_j$ , sont petits ; on peut donc écrire  $e^{i\delta_j} \simeq 1 + i\Delta_j$ . Les équations de bouclage pour les champs intra-cavité s'écrivent alors :

$$\begin{cases} (\gamma' - i\Delta_1) A_1 = g A_0 A_2^* \\ (\gamma' - i\Delta_2) A_2 = g A_0 A_1^* \\ (\gamma'_0 - i\Delta_0) A_1 = -g A_1 A_2 + \sqrt{2} \gamma_0 A_0^{in} \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $A_0^{in}$  désigne le champ pompe à l'entrée de la cavité.

Les termes de gauche décrivent d'une part la décroissance des champs intra-cavité

en raison de la transmission des miroirs de couplage et des pertes internes, d'autre part l'effet de l'écart à résonance. Les termes de droite traduisent le couplage paramétrique entre les différents champs, ainsi que l'apport du champ pompe extérieur.

Pour que les champs signal  $A_1$  et complémentaire  $A_2$  ne soient pas nuls, les deux premières équations de (3.18) impliquent les conditions suivantes :

$$\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta \quad (3.19a)$$

$$N_0 = |A_0|^2 = \frac{\gamma'^2 + \Delta^2}{g^2} \quad (3.19b)$$

La condition (3.19b) indique que l'OPO est un système présentant un seuil : si le flux pompe intra-cavité est inférieur à cette valeur, les champs  $A_1$  et  $A_2$  sont nuls (on est alors au-dessous du seuil). Au-dessus du seuil, par contre, le flux pompe intra-cavité ne dépend plus du flux pompe incident. On peut déduire de cette valeur le flux pompe incident minimal pour atteindre le seuil :

$$N_0^{in}|_{seuil} = \frac{\gamma_0'^2 + \Delta_0^2}{2\gamma_0} N_0 = \frac{(\gamma_0'^2 + \Delta_0^2)(\gamma'^2 + \Delta^2)}{2\gamma_0 g^2} \quad (3.20)$$

Le seuil est donc minimal lorsque les trois champs sont à résonance :  $\Delta_0 = \Delta = 0$ . On se placera dorénavant dans cette situation, et on notera  $\sigma$  la "force" de pompage par rapport au seuil :

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0^{in}}{N_0}} = \sqrt{\frac{I_0^{in}}{I_0}} \quad (3.21)$$

La conversion paramétrique fixe également la somme des phases des champs signal et complémentaire :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0 + \arctan\left(\frac{\Delta}{\gamma'}\right) \quad (3.22)$$

En revanche, la différence des phases peut fluctuer, de sorte que les phases individuelles sont libres de diffuser.

## C.2 Aspect quantique au-dessus du seuil d'oscillation

Une analyse semi-classique<sup>4</sup> permet d'exprimer les fluctuations quantiques des champs émis ainsi que leurs corrélations [Fabre *et al.*, 1999]. On décrit la dynamique des petites fluctuations en linéarisant les fluctuations du champ (*cf.* §1.D.4).

Les équations de bouclage doivent cette fois tenir compte des champs vides entrant par les miroirs de couplage  $A_1^{in}$  et  $A_2^{in}$ , et également des fluctuations du vide  $B_j^{in}$  qui

4. Ce qui correspond ici à un traitement quantique pour le champ, mais classique pour la matière.

sont couplées aux champs intra-cavité du fait des pertes. À résonance, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \tau \frac{dA_1}{dt} + \gamma' A_1 &= g A_0 A_2^* + \sqrt{2\gamma} A_1^{in} + \sqrt{2\mu} B_1^{in} \\ \tau \frac{dA_2}{dt} + \gamma' A_2 &= g A_0 A_1^* + \sqrt{2\gamma} A_2^{in} + \sqrt{2\mu} B_2^{in} \\ \tau \frac{dA_0}{dt} + \gamma'_0 A_0 &= -g A_1 A_2 + \sqrt{2\gamma_0} A_0^{in} + \sqrt{2\mu_0} B_0^{in} \end{cases} \quad (3.23)$$

où  $\tau$  est la durée d'aller-retour d'un photon dans la cavité.

On choisit le champ pompe  $A_0$  réel, ce qui fixe l'origine des phases. Les solutions stationnaires sont données par :

$$A_0 = \frac{\gamma'}{g} \quad (3.24a)$$

$$|A_j| = \sqrt{\frac{\gamma' \gamma_0 (\sigma - 1)}{g^2}} \quad j = 1, 2 \quad (3.24b)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0 = 0 \quad (3.24c)$$

On linéarise les fluctuations des champs autour de leurs valeurs moyennes ( $A_j = \bar{A}_j + \delta A_j$ ), et on injecte dans (3.23) en tenant compte de (3.24). Afin de transformer les équations différentielles en équations algébriques, on passe dans le domaine fréquentiel à l'aide de la transformée de Fourier (notée  $\sim$ ). On pose  $\beta = \frac{\gamma'_0}{\gamma'}$  et  $\alpha^2 = \beta(\sigma - 1)$ , et on obtient :

$$\begin{cases} (1 + 2i\Omega) \widetilde{\delta A_1}(\Omega) &= \widetilde{\delta A_2^*}(-\Omega) + \alpha \widetilde{\delta A_0}(\Omega) e^{-i\varphi_2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma'} \widetilde{\delta A_1^{in}}(\Omega) + \frac{\sqrt{2\mu}}{\gamma'} \widetilde{\delta B_1^{in}}(\Omega) \\ (1 + 2i\Omega) \widetilde{\delta A_2}(\Omega) &= \widetilde{\delta A_1^*}(-\Omega) + \alpha \widetilde{\delta A_0}(\Omega) e^{-i\varphi_1} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma'} \widetilde{\delta A_2^{in}}(\Omega) + \frac{\sqrt{2\mu}}{\gamma'} \widetilde{\delta B_2^{in}}(\Omega) \\ \left(\frac{\gamma'_0}{\gamma'} + 2i\Omega\right) \widetilde{\delta A_0}(\Omega) &= -\alpha \left(\widetilde{\delta A_1}(\Omega) e^{-i\varphi_1} + \widetilde{\delta A_2}(\Omega) e^{-i\varphi_2}\right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\gamma'} \widetilde{\delta A_0^{in}}(\Omega) + \frac{\sqrt{2\mu_0}}{\gamma'} \widetilde{\delta B_0^{in}}(\Omega) \end{cases} \quad (3.25)$$

où  $\Omega = \frac{\omega \tau}{2\gamma'} = \frac{\omega}{\Omega_c}$  est la fréquence de bruit normalisée à la bande passante de la cavité.

On va réécrire ces équations en fonction des bruits sur la somme ou la différence des fluctuations des champs signal et complémentaire, ce qui permet de les découpler. On

note :

$$x_j(\varphi, \Omega) = \widetilde{\delta A_j}(\Omega) e^{-i\varphi} + \widetilde{\delta A_j^*}(-\Omega) e^{i\varphi} \quad j = 0, 1, 2 \quad (3.26a)$$

$$p_j(\Omega) = x_j(\varphi_j, \Omega) = \widetilde{\delta A_j}(\Omega) e^{-i\varphi_j} + \widetilde{\delta A_j^*}(-\Omega) e^{i\varphi_j} \quad j = 0, 1, 2 \quad (3.26b)$$

$$q_j(\Omega) = x_j(\varphi_j + \frac{\pi}{2}, \Omega) = -i \left( \widetilde{\delta A_j}(\Omega) e^{-i\varphi_j} + \widetilde{\delta A_j^*}(-\Omega) e^{i\varphi_j} \right) \quad j = 0, 1, 2 \quad (3.26c)$$

Ainsi  $p_j$  représente les fluctuations d'intensité du champ  $A_j$  et  $q_j$  ses fluctuations d'amplitude;  $x_j$  ses fluctuations suivant une quadrature quelconque. Le spectre de bruit suivant la quadrature  $x_j$  est :

$$S_{x_j}(\Omega) = \langle x_j(\Omega) x_j(-\Omega) \rangle \quad (3.27)$$

On définit :

$$p_{\pm} = \frac{p_1 \pm p_2}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad q_{\pm} = \frac{q_1 \pm q_2}{\sqrt{2}} \quad (3.28)$$

et on obtient le système d'équations découplées :

$$2\gamma'(1 + i\Omega)p_- - \sqrt{2\gamma}p_-^{in} - \sqrt{2\mu}p_-^{in'} = 0 \quad (3.29a)$$

$$2i\Omega\gamma'q_- - \sqrt{2\gamma}q_-^{in} - \sqrt{2\mu}q_-^{in'} = 0 \quad (3.29b)$$

$$2\gamma'(\alpha^2 + \beta i\Omega - 2\Omega^2)p_+ - (\beta + 2i\Omega)(\sqrt{2\gamma}p_+^{in} + \sqrt{2\mu}p_+^{in'}) - 2\alpha(\sqrt{2\gamma_0}p_0^{in} + \sqrt{2\mu_0}p_0^{in'}) = 0 \quad (3.29c)$$

$$2\gamma'(\beta\sigma + (\beta + 2)i\Omega - 2\Omega^2)q_+ - (\beta + 2i\Omega)(\sqrt{2\gamma}q_+^{in} + \sqrt{2\mu}q_+^{in'}) - 2\alpha(\sqrt{2\gamma_0}q_0^{in} + \sqrt{2\mu_0}q_0^{in'}) = 0 \quad (3.29d)$$

Pour en déduire les fluctuations des champs sortants, il suffit d'écrire la relation correspondant au miroir de sortie de la cavité :

$$p_{\pm}^{out} = t p_{\pm} - r p_{\pm}^{in} \simeq \sqrt{2\gamma} p_{\pm} - p_{\pm}^{in} \quad (3.30a)$$

$$q_{\pm}^{out} \simeq \sqrt{2\gamma} q_{\pm} - q_{\pm}^{in} \quad (3.30b)$$

On tient également compte du fait que les fluctuations des champs – vides! – entrant ne sont pas corrélées et égales au bruit quantique standard. On les normalise à 1 :

$$S_{p_j^{in}}(\Omega) = S_{p_j^{in}}(\Omega) = S_{q_j^{in}}(\Omega) = S_{q_j^{in}}(\Omega) = 1 \quad j = 1, 2 \quad (3.31a)$$

$$\langle p_j^{in} q_j^{in} \rangle = \langle q_j^{in} p_j^{in} \rangle = \langle p_j^{in'} q_j^{in'} \rangle = \langle q_j^{in'} p_j^{in'} \rangle = 0 \quad j = 1, 2 \quad (3.31b)$$

### a) Bruit sur la différence des fluctuations

Le spectre de bruit sur la différence de phase des deux champs ne dépend pas du bruit du champ pompe :

$$S_{q_{\pm}^{out}}(\Omega) = 1 + \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{1}{\Omega^2} \quad (3.32)$$

Cette expression est toujours supérieure à 1 : la quadrature  $q_{\pm}^{out}$  n'est jamais comprimée. En outre la variance de bruit diverge à fréquence nulle, ce qui traduit le phénomène de

diffusion de phase évoqué précédemment.

Quant au spectre de bruit sur la différence d'amplitude, le calcul donne :

$$S_{p_-^{out}}(\Omega) = 1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{1}{1 + \Omega^2} \quad (3.33)$$

La quadrature  $p_-^{out}$  est ainsi toujours comprimée au-dessous du bruit quantique standard, ce qui traduit de fortes corrélations en intensité entre les champs signal et complémentaire. La compression est maximale à fréquence nulle, ce qui peut s'expliquer simplement par le fait qu'aux temps courts (aux fréquences élevées), un des photons de la paire peut être sorti de la cavité tandis que l'autre est encore à l'intérieur. Plus les pertes intra-cavité sont faibles, plus grande est la compression de bruit.

### b) Bruit sur la somme des fluctuations

En supposant que les fluctuations du champ pompe sont au bruit quantique standard, les spectres de bruit sur la somme des phases et la somme des intensités sont :

$$S_{q_+^{out}}(\Omega) = 1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{1 + \zeta}{\Omega^2 + \sigma^2 + \zeta(1 + \Omega^2 - \alpha^2)} \quad (3.34a)$$

$$S_{p_+^{out}}(\Omega) = 1 + \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{1 + \zeta}{\Omega^2 + (\sigma - 1)^2 + \zeta(\Omega^2 - \alpha^2)} \quad (3.34b)$$

où on a posé  $\zeta = \frac{4\Omega^2}{\beta^2}$ .

On constate que la quadrature  $q_+^{out}$  est toujours comprimée (tandis que  $p_+^{out}$  est toujours bruitée) : les phases des champs signal et complémentaire sont anti-corrélées – et ce d'autant plus qu'on est proche du seuil et que les pertes intra-cavité sont faibles. On peut également montrer que le bruit de phase de la pompe peut dégrader très rapidement ces anti-corrélations.

## C.3 Aspect quantique sous le seuil d'oscillation

Sous le seuil, les valeurs moyennes des champs signal et complémentaire sont nulles. Cependant, les champs vides sortants ont des propriétés quantiques intéressantes.

### a) Équations linéarisées

Les équations (3.23) sont bien sûr toujours valables ; mais lorsqu'on linéarise, on tient compte du fait que  $\overline{A_1} = \overline{A_2} = 0$ . Or, dans les deux premières équations, lors de la linéarisation, le bruit sur la pompe n'apparaît plus que multiplié par les valeurs moyennes des champs signal et complémentaires : il n'apparaît donc plus du tout. Ce

résultat est important, car contrairement au cas au-dessus du seuil, les corrélations ne seront pas dégradées par le bruit sur la pompe. Les équations se réécrivent :

$$\begin{cases} \frac{\tau}{\gamma'} \frac{d\delta A_1}{dt} + \delta A_1 = \sigma \delta A_2^* + \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} \delta A_1^{in} + \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} \delta B_1^{in} \\ \frac{\tau}{\gamma'} \frac{d\delta A_2}{dt} + \delta A_2 = \sigma \delta A_1^* + \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} \delta A_2^{in} + \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} \delta B_2^{in} \end{cases} \quad (3.35)$$

Comme précédemment, on utilise la transformée de Fourier pour transformer les équations différentielles temporelles en équations algébriques fréquentielles. En passant aux quadratures (*cf.* équations (3.26)), on obtient des équations sur  $p_-$  et  $q_+$  (*cf.* équation (3.28)) :

$$\begin{cases} (1 + 2i\Omega + \sigma) p_- - \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} p_-^{in} - \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} p_-^{in'} = 0 \\ (1 + 2i\Omega + \sigma) q_+ - \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} q_+^{in} - \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} q_+^{in'} = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Pour calculer les variances des bruits, il suffit d'exprimer les fluctuations sortantes à l'aide de la relation (3.30).

### b) Variances de bruit

Les spectres de bruit sur  $p_-$  et  $q_+$  sont identiques, ce qui transparait déjà dans la symétrie des équations (3.36) :

$$S_{p_-^{out}}(\Omega) = S_{q_+^{out}}(\Omega) = 1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{4\sigma}{4\Omega^2 + (\sigma + 1)^2} \quad (3.37)$$

Ainsi les quadratures  $p_-$  et  $q_+$  sont toujours comprimées. La compression de bruit est d'autant plus forte qu'on est proche du seuil, et – comme c'était le cas au-dessus du seuil – que les pertes intra-cavité sont faibles. Les champs vides  $A_1$  et  $A_2$  sont donc des champs intriqués (corrélés en intensité et anti-corrélés en phase).

Puisqu'on a des champs intriqués symétriques, nous allons nous intéresser aux critères de Duan et Simon (1.30) et EPR (1.26), et en particulier à leur sensibilité aux pertes. On constate sur la figure 3.4 que les faisceaux sont toujours inséparables, mais que pour  $\mu \geq \gamma$ , il n'y a plus de corrélations EPR. Les corrélations EPR sont donc beaucoup plus sensibles aux pertes que l'intrication.

## C.4 Conclusion

L'OPO est un système stable, accordable en fréquence, qui donne naissance à deux faisceaux dont les intensités sont fortement corrélées et les phases fortement anti-corrélées ;



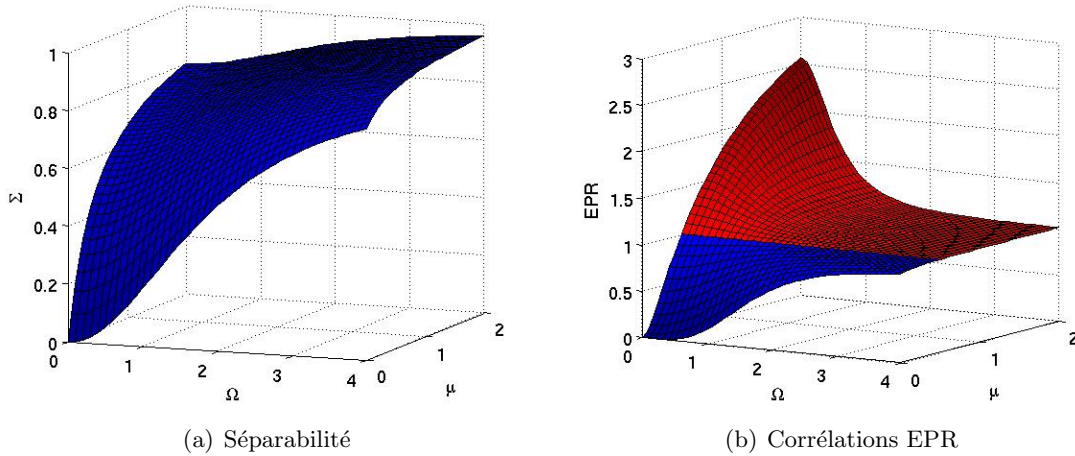


Fig. 3.4: Sensibilité aux pertes intra-cavité de la séparabilité et des corrélations EPR. Les pertes  $\mu$  sont en unités de  $\gamma$ .

c'est-à-dire des faisceaux intriqués. C'est donc une source idéale pour étudier les propriétés quantiques de la lumière.

Notre dispositif (décrit au chapitre 4) a permis, durant la thèse de Julien Laurat, de mettre en évidence les corrélations d'intensité : des faisceaux jumeaux ont été générés avec une réduction de bruit de  $9,5 \pm 0,5 \text{ dB}$  (soit 89%) [Laurat *et al.*, 2005c]. Ces corrélations permettent également de réaliser la préparation conditionnelle d'un état sub-Poissonien à  $4,4 \text{ dB}$  (64%) au-dessous du bruit quantique standard [Laurat *et al.*, 2003, Laurat *et al.*, 2004b].

Ces excellents résultats ne rendent cependant pas compte de l'autre aspect quantique des faisceaux signal et complémentaire : leur anti-corrélation en phase. En effet, ces faisceaux sont de fréquences *a priori* différentes, ce qui interdit par exemple de réaliser l'opération lame 50/50 décrite au §1.E.2d) pour exploiter cette anti-corrélation.

En outre, on pourrait imaginer ajuster les paramètres expérimentaux de façon à se placer à dégénérescence en fréquence. Mais les fréquences des champs signal et complémentaire fluctuent sous d'infimes variations des paramètres expérimentaux (température du cristal, fréquence de pompe, ...). De sorte que même si on parvient à se placer à dégénérescence, cet état n'est pas stable suffisamment longtemps pour pouvoir réaliser des mesures de type détection homodyne, dont le principe consiste à faire interférer le champ avec un champ de référence. Or cette détection est le moyen le plus simple pour mesurer les fluctuations de phase – ou de toute autre quadrature – d'un champ.

Le groupe de P. Nussenzveig à São Paulo a contourné le problème en utilisant des cavités désaccordées. Nous allons présenter dans la section suivante la solution "tout-optique" qui a été mise en œuvre sur notre expérience.

## D OPO auto-verrouillé en phase

### D.1 Introduction

Les champs signal et complémentaire sont des champs oscillants dans la cavité. Or il est bien connu depuis les travaux de Huygens en 1665 que deux oscillateurs couplés ajustent leur rythme, c'est-à-dire leur phase donc leur fréquence. En outre, il a montré que cet ajustement se produit à condition que les fréquences soient suffisamment proches, *i.e.* situées dans une plage de fréquences dite “plage d'accrochage”. De la même façon, le principe du dispositif permettant d'atteindre la dégénérescence en fréquence dans l'OPO consiste à coupler signal et complémentaire.

Le principe du couplage “tout-optique” s'appuie sur le fait que le cristal non linéaire utilisé est de type II (*cf.* §B.1c)), de sorte que les faisceaux signal et complémentaire sont polarisés orthogonalement. On utilise une lame biréfringente placée dans la cavité de l'OPO (*cf.* Fig. 3.5), et légèrement tournée par rapport aux polarisations propres du cristal. La lame est une lame  $\lambda/4$  pour les champs signal et complémentaire (donc  $\lambda/2$  après un aller-retour), et elle est  $\lambda$  (donc sans influence) pour la pompe.

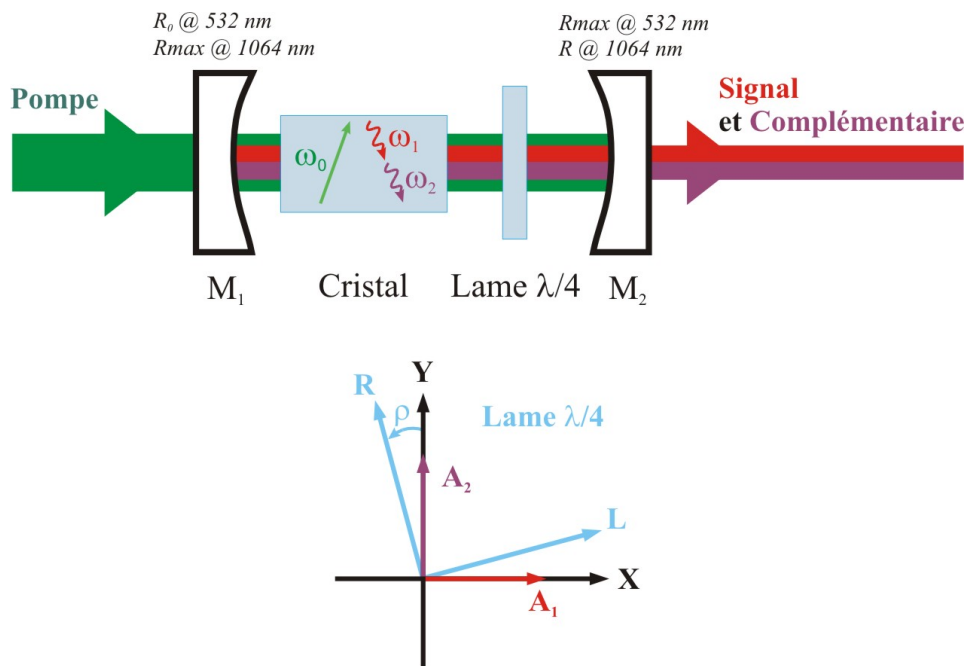


Fig. 3.5: Schéma d'un OPO triplement résonnant associé à une lame biréfringente dont les axes neutres sont tournés d'un angle  $\rho$  par rapport à ceux du cristal.

### D.2 Propriétés classiques

Nous effectuons ici un traitement simplifié du problème. Le traitement complet a été fait dans les références [Laurat, 2004, Longchambon, 2003, Longchambon *et al.*, 2004].

On suppose ainsi que le problème se ramène à des allers-retours dans la cavité, c'est-à-dire à une cavité en anneau. La lame  $\lambda/4$  se comporte alors bel et bien comme une lame  $\lambda/2$ . Dans le cas d'un angle  $\rho \ll 1$ , la matrice de la lame dans le repère  $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$  des axes du cristal s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{pmatrix} = \iota e^{\iota k \bar{n} 2e} \begin{pmatrix} 1 & 2\rho \\ 2\rho & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

où  $\bar{n} = \frac{n_L + n_R}{2}$  est l'indice moyen de la lame biréfringente, avec  $n_L$  et  $n_R$  les indices propres des axes lent (L) et rapide (R).  $e$  désigne l'épaisseur de la lame.

Dans la suite on posera :

- $\delta = \frac{\omega_0}{2c} (2\bar{n}e + 2n\ell + 2L)$
- $n = \frac{n_1 + n_2}{2}$  l'indice moyen du cristal
- $\theta = \frac{\omega_0}{2c} (n_2 - n_1)\ell$

Les désaccords à résonance au bout d'un tour des modes signal et complémentaire seront supposés petits. Pour  $\rho \ll 1$ , il s'écrivent :

$$\Delta_1 = \delta - \theta + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \delta + \theta - \frac{\pi}{2} \quad (3.39)$$

Ainsi, dans le cas particulier de notre étude, les équations de bouclage pour les champs dégénérés en fréquence s'écrivent :

$$\begin{cases} (\gamma' - \iota\Delta_1) A_1 = g A_0 A_2^* + \varepsilon_0 e^{\iota\theta} A_2 \\ (\gamma' - \iota\Delta_2) A_2 = g A_0 A_1^* - \varepsilon_0 e^{-\iota\theta} A_1 \end{cases} \quad (3.40)$$

où  $\varepsilon_0 = 2\rho$ .

On constate qu'on a levé l'invariance par changement de phase, de sorte que (comme on le souhaitait) la différence de phase des champs signal et complémentaire est désormais fixée.

Comme dans le cas sans lame, on écrit que la solution des équations (3.40) (accompagnées de leurs conjuguées) est non nulle si et seulement si le déterminant du système est nul. On aboutit à deux solutions possibles pour la valeur du flux pompe intra-cavité :

$$N_0^\pm = \frac{1}{g^2} \left[ \gamma'^2 + \Delta_1 \Delta_2 + \varepsilon_0^2 \pm \sqrt{4\varepsilon_0^2 \Delta_1 \Delta_2 - \gamma'^2 (\Delta_1 - \Delta_2)^2} \right] \quad (3.41)$$

Ainsi, lorsque la lame est tournée, l'OPO présente deux seuils d'oscillation, et donc deux régimes de fonctionnement possibles. Seule la solution à seuil bas sera considérée<sup>5</sup>. Le

5. L'autre solution est instable, ainsi que la solution non dégénérée en fréquence [Gross, 2003].

seuil  $N_0^-$  est minimal lorsque  $\Delta_1 = \Delta_2$ .

Alors que les équations de bouclage pour un OPO sans lame imposaient une relation unique  $\Delta_1 = \Delta_2$  entre les déphasages, ceux-ci sont désormais contraints par une inégalité :

$$4\varepsilon_0^2 \Delta_1 \Delta_2 - \gamma'^2 (\Delta_1 - \Delta_2)^2 \geq 0 \quad (3.42)$$

Cette inégalité définit une zone d'aire non nulle, appelée "zone d'accrochage", à l'intérieur de laquelle une oscillation dégénérée en fréquence peut se produire si l'OPO est pompé au-dessus du seuil  $N_0^-$  (3.41). Dans un OPO sans lame, la dégénérescence en fréquence ne pouvait être qu'accidentelle ; ici le couplage entre les champs permet d'obtenir une zone de dégénérescence d'extension non nulle. Cette zone est d'autant plus grande que l'angle de la lame et la puissance de pompe sont importants.

### D.3 Propriétés quantiques

Pour simplifier les calculs, on va considérer le cas d'un OPO doublement résonnant (*i.e.* résonnant pour le signal et le complémentaire, *cf.* Fig. 3.6), dont les propriétés sont très proches de celles d'un OPO triplement résonnant à proximité du seuil, ou à des fréquences d'analyse du bruit faibles devant la bande passante de la cavité.

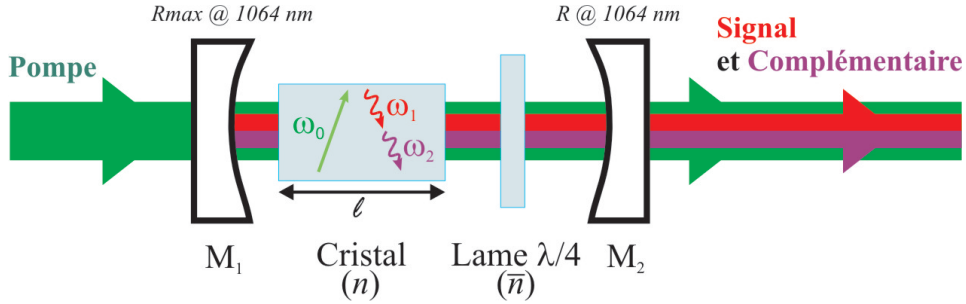


Fig. 3.6: Schéma d'un OPO doublement résonnant avec une lame  $\lambda/4$  dont les axes neutres sont tournés d'un angle  $\rho$  par rapport à ceux du cristal.

On se place au point de seuil minimum, défini par  $\Delta_1 = \Delta_2 = 2\rho$  ; ce qui impose également  $\theta = \psi$ . On introduit le paramètre  $c = \frac{2\rho}{\gamma'}$  qui mesure la force du couplage linéaire. Les équations linéarisées autour des valeurs moyennes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{\gamma'} \frac{d\delta A_1}{dt} + (1 - \nu c) \delta A_1 = \frac{g \bar{A}_0}{\gamma'} \delta A_2^* + \frac{g \delta A_0}{\gamma'} \bar{A}_2^* + \nu c \delta A_2 + \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} \delta A_1^{in} + \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} \delta B_1^{in} \\ \frac{\tau}{\gamma'} \frac{d\delta A_2}{dt} + (1 - \nu c) \delta A_2 = \frac{g \bar{A}_0}{\gamma'} \delta A_1^* + \frac{g \delta A_0}{\gamma'} \bar{A}_1^* + \nu c \delta A_1 + \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} \delta A_2^{in} + \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} \delta B_2^{in} \\ \delta A_0 = -\frac{g}{2} (\bar{A}_2 \delta A_1 + \bar{A}_1 \delta A_2) + \delta A_0^{in} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Au-dessus ou au-dessous du seuil d'oscillation, ces équations vont s'écrire différemment, et les propriétés des champs signal et complémentaire seront différentes.

### a) Étude au-dessous du seuil

Les équations (3.43) se simplifient : les valeurs moyennes des champs signal et complémentaire sont nulles (de sorte que les fluctuations de la pompe disparaissent). En outre, le terme  $\frac{g \overline{A_0}}{\gamma'}$  est égal à la puissance pompe, normalisée au seuil de l'OPO, c'est-à-dire au taux de pompage  $\sigma$  (sous le seuil,  $\sigma < 1$ ).

On transforme les équations différentielles en équations algébriques à l'aide de la transformée de Fourier, et on passe aux fluctuations sur les quadratures  $p$  et  $q$  (3.26) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + 2i\Omega) p_1 - \sigma p_2 + c(q_1 - q_2) - \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} p_1^{in} - \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} p_1^{in'} = 0 \\ (1 + 2i\Omega) p_2 - \sigma p_1 + c(q_2 - q_1) - \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} p_2^{in} - \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} p_2^{in'} = 0 \\ (1 + 2i\Omega) q_1 + \sigma q_2 + c(p_2 - p_1) - \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} q_1^{in} - \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} q_1^{in'} = 0 \\ (1 + 2i\Omega) q_2 + \sigma q_1 + c(p_1 - p_2) - \frac{\sqrt{2}\gamma}{\gamma'} q_2^{in} - \frac{\sqrt{2}\mu}{\gamma'} q_2^{in'} = 0 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

On écrit les fluctuations des champs en sortie (3.30), et on en déduit les spectres de bruit sur la somme et la différence des fluctuations.

Les bruits sur la somme des fluctuations sont identiques à ceux de l'OPO sans lame, et ne dépendent pas du couplage :

$$S_{q_+^{out}} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{4\sigma}{4\Omega^2 + (\sigma + 1)^2} \quad (3.45a)$$

$$S_{p_+^{out}} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{4\sigma}{4\Omega^2 + (\sigma - 1)^2} \quad (3.45b)$$

Ainsi, la quadrature  $q_+$  est toujours comprimée. Les anti-corrélations entre  $q_1$  et  $q_2$  sont d'autant plus grandes que la fréquence d'analyse est basse, qu'on est plus proche du seuil, et qu'il y a moins de pertes.

Les bruits sur la différence des fluctuations dépendent, eux, du couplage :

$$S_{p_-^{out}} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{4\sigma [4\Omega^2 - 4c^2 + (\sigma - 1)^2]}{16\Omega^2 + (4\Omega^2 - 4c^2 + \sigma^2 - 1)^2} \quad (3.46a)$$

$$S_{q_-^{out}} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{4\sigma [4\Omega^2 - 4c^2 + (\sigma + 1)^2]}{16\Omega^2 + (4\Omega^2 - 4c^2 + \sigma^2 - 1)^2} \quad (3.46b)$$

Quand le couplage n'est pas trop important (ce qui sera toujours le cas lors des expériences), c'est  $p_-^{out}$  qui est comprimée. La figure 3.7 illustre la dépendance avec le couplage, qui se traduit à la fois par une rotation de l'ellipse de bruit de  $A_-$  par rapport à celle de  $A_+$  et par une perte des corrélations entre  $A_1$  et  $A_2$ <sup>6</sup>. L'angle  $\xi$  d'inclinaison de l'ellipse de bruit de  $A_-$  par rapport à sa position à couplage nul peut être calculé [Laurat, 2004, Laurat *et al.*, 2005a] :

$$\tan(2\xi) = \frac{4c}{4\Omega^2 - 4c^2 + \sigma^2 + 1} \quad (3.47)$$

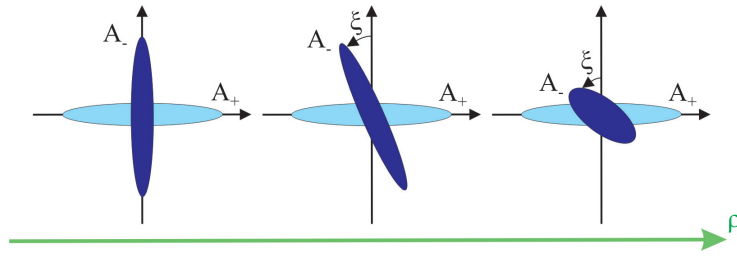


Fig. 3.7: Représentation de Fresnel des ellipses de bruit des modes  $A_+$  et  $A_-$ , sous le seuil, lorsque l'angle de la lame augmente. En l'absence de couplage, la compression de bruit est obtenue suivant des quadratures orthogonales. En présence d'un couplage, l'ellipse de bruit du mode  $A_-$  tourne et la compression est réduite; tandis que le mode  $A_+$  n'est pas affecté. La figure de droite correspond à un couplage  $c$  relativement important, mais à un angle  $\rho$  qui reste faible.

## b) Étude au-dessus du seuil

Au-dessus du seuil, les fluctuations de la pompe ne disparaissent plus. En outre, la valeur de  $\overline{A_0}$  est fixée à la valeur seuil quel que soit le taux de pompage :  $\frac{g\overline{A_0}}{\gamma'} = 1$  et  $|\overline{A_j}|^2 = \frac{2\gamma'}{g^2}(\sigma - 1)$ . Les équations sur les quadratures après avoir effectué la transformée

6. Les spectres de bruit sur  $A_1$  et  $A_2$  n'ont pas été calculés explicitement ici. On peut cependant en donner les caractéristiques essentielles. En l'absence de lame, ce sont des faisceaux bruités et symétriques. En présence de couplage, les fluctuations sont dissymétriques; et pour un grand couplage, les faisceaux peuvent être comprimés. [Laurat, 2004]

de Fourier deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma + 2i\Omega) p_1 + (\sigma - 2) p_2 + c(q_1 - q_2) - \frac{\sqrt{2\gamma'(\sigma - 1)}}{\gamma'} p_0^{in} - \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma'} p_1^{in} - \frac{\sqrt{2\mu}}{\gamma'} p_1^{in'} = 0 \\ (\sigma + 2i\Omega) p_2 + (\sigma - 2) p_1 + c(q_2 - q_1) - \frac{\sqrt{2\gamma'(\sigma - 1)}}{\gamma'} p_0^{in} - \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma'} p_2^{in} - \frac{\sqrt{2\mu}}{\gamma'} p_2^{in'} = 0 \\ (\sigma + 2i\Omega) q_1 + \sigma q_2 + c(p_2 - p_1) - \frac{\sqrt{2\gamma'(\sigma - 1)}}{\gamma'} q_0^{in} - \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma'} q_1^{in} - \frac{\sqrt{2\mu}}{\gamma'} q_1^{in'} = 0 \\ (\sigma + 2i\Omega) q_2 + \sigma q_1 + c(p_1 - p_2) - \frac{\sqrt{2\gamma'(\sigma - 1)}}{\gamma'} q_0^{in} - \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma'} q_2^{in} - \frac{\sqrt{2\mu}}{\gamma'} q_2^{in'} = 0 \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Comme précédemment, les spectres de bruit sur la somme des fluctuations ne sont pas affectés par le couplage. En supposant que le bruit du faisceau pompe est égal au bruit quantique standard, on obtient :

$$S_{q_+^{out}} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma' \Omega^2 + \sigma^2} \quad (3.49a)$$

$$S_{p_+^{out}} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma' \Omega^2 + (\sigma - 1)^2} \quad (3.49b)$$

Ainsi, le mode  $A_+$ , de valeur moyenne non nulle puisqu'on se trouve au-dessus du seuil, est comprimé en phase.

Le bruit sur la différence des fluctuations dépend du couplage :

$$S_{p_-^{out}} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma' \Omega^2 + (\Omega^2 - c^2)^2} \quad (3.50a)$$

$$S_{q_-^{out}} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma' \Omega^2 + (\Omega^2 - c^2)^2} \quad (3.50b)$$

On retrouve le même comportement qu'au-dessous du seuil : la quadrature corrélée tourne avec le couplage, et la corrélation diminue à mesure (*cf.* Fig 3.8). Notons également que le taux de pompage n'apparaît plus. Il n'apparaît de ce fait pas non plus dans la valeur de l'angle d'inclinaison de l'ellipse :

$$\tan(2\xi) = \frac{2c}{2\Omega^2 - 2c^2 + 1} \quad (3.51)$$

Les comportements au-dessus et au-dessous du seuil sont identiques quantitativement dans la limite  $\sigma \rightarrow 1$  sous le seuil : le passage au-dessus du seuil ne doit donc pas modifier de façon sensible le comportement du système.

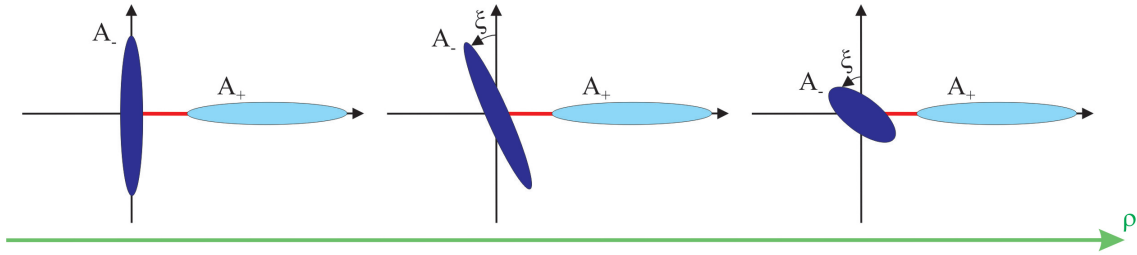


Fig. 3.8: Représentation de Fresnel des ellipses de bruit des modes  $A_+$  et  $A_-$ , au-dessus du seuil, lorsque l'angle de la lame augmente. Le comportement est le même que sous le seuil.

## E Conclusion

L'insertion d'une lame d'onde dans la cavité d'un OPO de type II permet de résoudre élégamment, et sans que le système perde en stabilité, le problème de la non dégénérescence fréquentielle des faisceaux signal et complémentaire. On introduit en outre un nouveau paramètre, qui est la force du couplage induit par la lame. Ce paramètre influence sur la corrélation entre les deux modes. Les quadratures des deux modes qui sont corrélées dépendent également de ce couplage.

En l'absence de bruit sur la pompe, le système doit générer des faisceaux corrélés en intensité et anti-corrélés en phase; un bon choix des paramètres expérimentaux (limitation des pertes, travail à proximité du seuil, analyse du bruit à une fréquence faible devant la bande passante de la cavité) doivent permettre de vérifier le critère de corrélations EPR.





## **Partie II**

### **Génération et caractérisation de faisceaux fortement intriqués**



## 4. Dispositif expérimental

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Faisceau pompe et oscillateur local</b>	<b>78</b>
B.1	Laser	78
B.2	Cavité de filtrage sur le faisceau infrarouge	80
<b>C</b>	<b>OPO auto-verrouillé en phase</b>	<b>86</b>
C.1	Description du dispositif	86
C.2	Asservissement de la cavité : “Pound-Drever-Hall”	89
<b>D</b>	<b>Détection et contrôle des fréquences signal et complémentaire</b>	<b>90</b>
D.1	Problème de l’accord de phase dans le cas de l’OPO semi-monolithique	90
D.2	Estimation de la température d’accord de phase	92
D.3	Détection du battement entre les deux fréquences	93
D.4	Auto-verrouillage en fréquence	95
<b>E</b>	<b>Détection des propriétés quantiques</b>	<b>98</b>
E.1	Principe de la détection homodyne	98
E.2	Calcul dans le cas général	99
E.3	Double détection homodyne	102
E.4	Mesure de la matrice de covariance	105
<b>F</b>	<b>Conclusion</b>	<b>106</b>

---

### A Introduction

Ce chapitre présente l’ensemble des éléments du dispositif expérimental de cette thèse, ainsi que les diverses techniques employées. Le schéma complet de l’expérience est représenté figure 4.1. On peut y distinguer différentes parties qui seront successivement abordées au cours de ce chapitre :

- la génération du faisceau pompe et du faisceau oscillateur local,
- au cœur du dispositif : l’OPO auto-verrouillé en phase,
- un bloc permettant de détecter l’écart en fréquence des faisceaux signal et complémentaire,
- un bloc permettant d’analyser les propriétés quantiques de ces faisceaux.

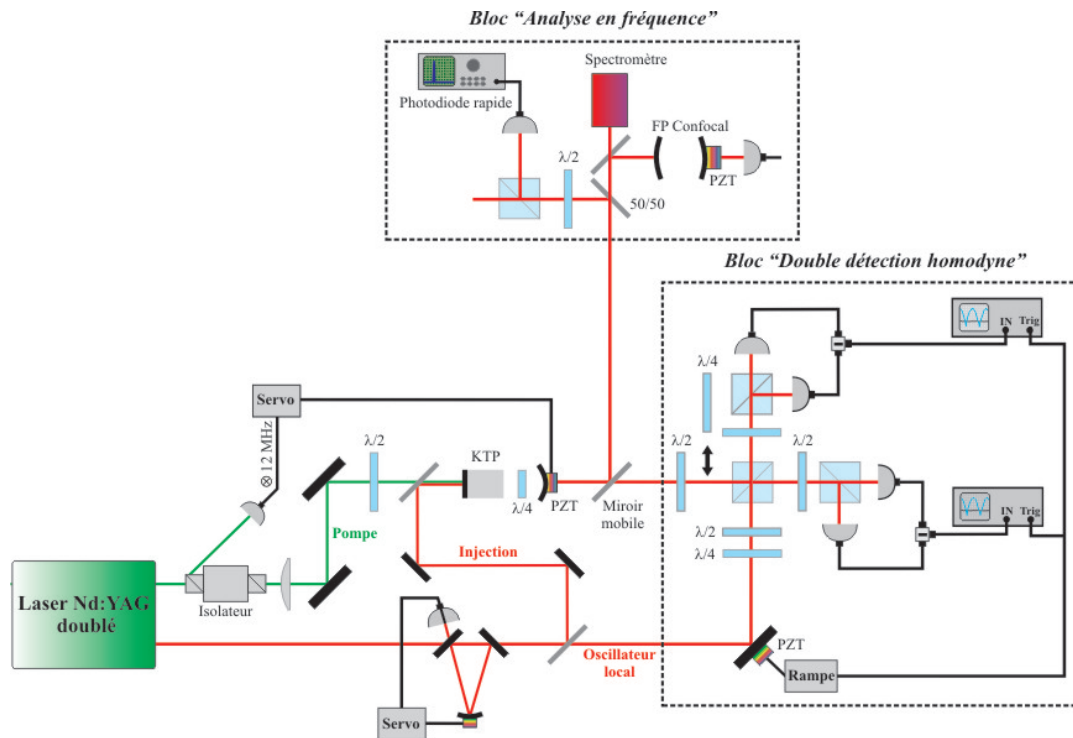


Fig. 4.1: Schéma du dispositif expérimental

## B Faisceau pompe et oscillateur local

### B.1 Laser

#### a) Principales caractéristiques

Le faisceau de pompe de l'OPO et l'oscillateur local sont générés par le même laser. Il s'agit d'un laser commercial "Diabolo", de la société allemande Innolight. Laser Nd :YAG continu, doublé en fréquence, il possède la particularité de posséder deux sorties cohérentes (*cf.* Fig. 4.2) : une sortie infrarouge à  $1064\text{ nm}$  de  $250\text{ mW}$  de puissance et une sortie doublée en fréquence, à  $532\text{ nm}$ , de puissance  $500\text{ mW}$ . Ceci permet de disposer d'un faisceau pompe pour l'OPO à  $532\text{ nm}$ , et d'un faisceau – l'oscillateur local – à la même fréquence que signal et complémentaire, qui permettra de les caractériser par la technique interférentielle de la détection homodyne.

Le laser Nd :YAG est pompé par des diodes laser à  $808\text{ nm}$  ; sa cavité est monolithique, en anneau et non planaire. La largeur de raie est de  $1\text{ kHz}$  sur  $100\text{ ms}$ , et la longueur de cohérence dépasse le kilomètre.

On prélève environ  $250\text{ mW}$  du faisceau infrarouge pour la sortie correspondante du laser ; le reste est envoyé dans une cavité de doublage semi-monolithique, contenant un cristal de Niobate de Lithium. La cavité est asservie à résonance par la méthode

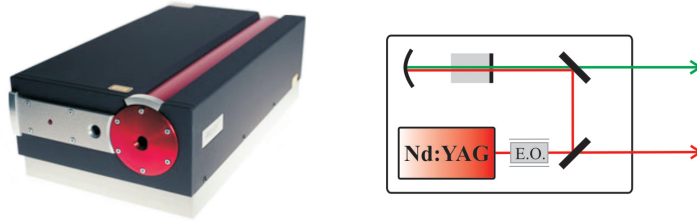


Fig. 4.2: Laser “Diabolo” à deux sorties

Pound-Drever-Hall (*cf.* §C.2), grâce à une modulation de phase à  $12\text{ MHz}$  produite par un modulateur électro-optique en sortie de la cavité laser. Cette modulation sera utilisée pour d’autres asservissements dans l’expérience.

La polarisation du faisceau vert est légèrement elliptique (5%); une lame  $\lambda/4$  en sortie du laser (non représentée sur la figure 4.1) permet de corriger cette ellipticité à 0,5%.

Outre l’aspect très intéressant de la double sortie, ce laser commercial présente l’avantage d’être particulièrement stable et simple d’emploi, et d’être accordable en fréquence.

Afin de protéger le laser des rétro-réflexions parasites, un isolateur optique a été placé sur le trajet de la pompe (faisceau de longueur d’onde  $532\text{ nm}$ ).

### b) Accordabilité en fréquence

Il est très important, pour la recherche de la dégénérescence en fréquence de l’OPO (*cf.* §D), que le laser soit accordable sur une large gamme de fréquences.

Ici, le cristal de Nd :YAG est intercalé entre un élément Peltier, qui permet de contrôler sa température, et un élément piézo-électrique, agissant sur le cristal par contrainte mécanique. La fréquence émise est modifiée à l’aide de ces deux éléments : lentement en changeant la température, plus rapidement en appliquant une tension sur l’élément piézo-électrique.

La température du cristal influe sur sa longueur optique, et par conséquent sur la fréquence de résonance dans la cavité. Cette méthode de contrôle, relativement lente, permet de parcourir une gamme de fréquences correspondant à plusieurs fois l’intervalle spectral libre de la cavité laser.

Le déplacement en fréquence n’est pas monotone : la fréquence varie linéairement avant qu’un saut de mode ne se produise. Lorsqu’on diminue ainsi la fréquence (en augmentant la température), la nouvelle fréquence après le saut est supérieure à celle qu’on avait avant le saut, car les plages continues se recouvrent partiellement. Bien qu’il ne résulte pas d’un souhait du constructeur, ce comportement – illustré sur la figure 4.3

– est très confortable car il permet d’être certain d’avoir accès à toute la gamme de fréquences.

L’accordabilité obtenue est, pour le faisceau vert, de  $-6 \text{ GHz.K}^{-1}$  sur les plages continues, et de  $-3 \text{ GHz.K}^{-1}$  en tenant compte des sauts de mode. La plage totale de fréquences accessibles est d’environ  $100 \text{ GHz}$ . Au-dessous de  $25^\circ \text{C}$  et au-dessus de  $45^\circ \text{C}$ , la stabilité du laser est moins bonne et la puissance plus faible.

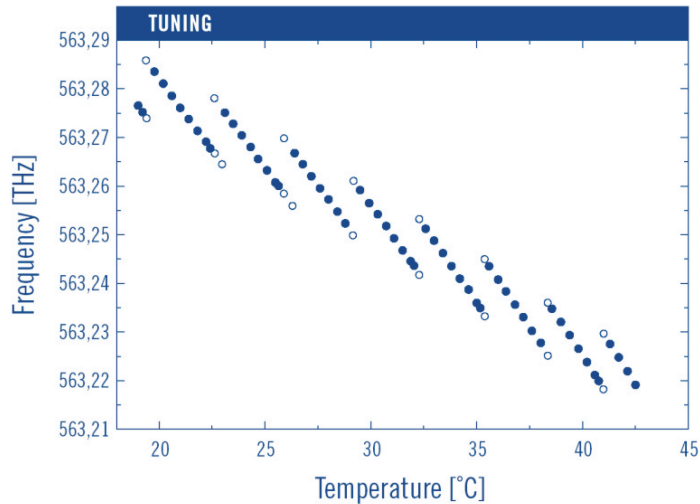


Fig. 4.3: Plages d’accord en fréquence en fonction de la température pour le laser “Diabolo”. (source : Innolight)

La tension appliquée à l’élément piézo-électrique autorise un accord sur une plage de fréquences beaucoup plus petite. En effet, la contrainte mécanique permet, tout comme la température, de modifier la longueur optique de la cavité, mais beaucoup plus faiblement : seule une fraction de l’intervalle spectral libre est ainsi balayée. L’accord en fréquence du faisceau vert est de l’ordre de  $2 \text{ MHz.V}^{-1}$  pour une plage totale de  $\pm 200 \text{ MHz}$ .

Cependant, cette méthode présente un avantage par rapport au contrôle de la température : elle est relativement rapide (jusque 50 voire  $100 \text{ kHz}$ ), et peut être utilisée, par exemple, pour asservir la fréquence du laser sur une cavité de référence, ou tout autre signal d’erreur qui dépend de cette fréquence.

## B.2 Cavité de filtrage sur le faisceau infrarouge

### a) Intérêt et aspects théoriques

Un laser présente, à basse fréquence d’analyse, un important bruit technique dû aux perturbations acoustiques, thermiques ou électriques, ainsi qu’un excès de bruit d’origine fondamentale à la fréquence de l’oscillation de relaxation. Les lasers solides pompés par diode sont actuellement parmi les sources les moins bruyantes. Pour autant, les sources

de bruit restent présentes, et empêchent le bruit du faisceau d’être limité par le bruit quantique standard avant une fréquence de l’ordre de  $15\text{ MHz}$ . C’est le cas de notre laser, pour lequel une forte oscillation de relaxation se produit vers  $1\text{ MHz}$ . Sur la figure 4.4, on peut voir que l’excès de bruit d’intensité par rapport au bruit quantique standard dépasse  $35\text{ dB}$  autour de  $1\text{ MHz}$ . Cet excès de bruit sur l’oscillateur local est gênant lorsqu’on souhaite mesurer des faisceaux intenses à l’aide d’une détection homodyne (*cf.* §E.2).

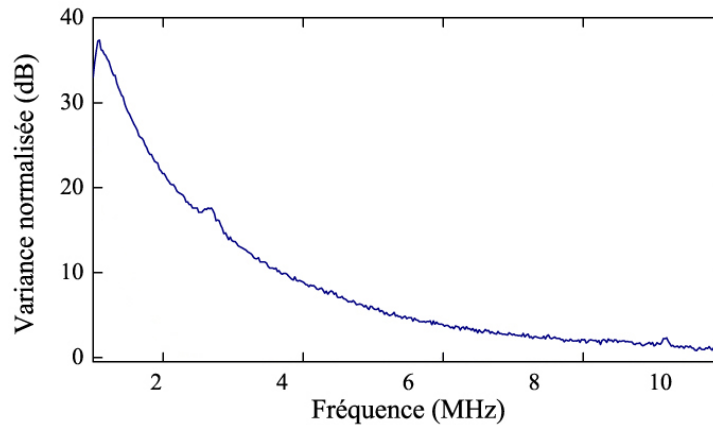


Fig. 4.4: Puissance de bruit d’intensité normalisée au bruit quantique standard d’une fraction du faisceau infrarouge ( $5\text{ mW}$ ).

Il existe plusieurs solutions pour réduire le bruit de l’oscillateur local, la première consistant à rétroagir sur le laser, *via* les diodes laser de pompe par exemple. Notre laser ne dispose pas d’un tel système appelé “mangeur de bruit”. Toutefois, cette technique diminue fortement le bruit lié à l’oscillation de relaxation, mais ne ramène en aucun cas le faisceau au niveau du bruit quantique standard.

La seule solution efficace consiste à filtrer le faisceau à l’aide d’une cavité de faible bande passante, dite “cavité de filtrage”. Asservie à résonance, elle se comporte comme un filtre passe-bas en transmission, et réfléchit ainsi en grande partie les composantes dont la fréquence est plus élevée que sa bande passante.

La cavité de filtrage que nous utilisons (*cf.* Fig. 4.5) est une cavité triangulaire (ce qui évite les retours vers le laser). Les transmissions des trois miroirs sont supposées petites, et sont notées respectivement  $T_1$  et  $T_2$  pour les miroirs d’entrée et de sortie, et  $T_3$  pour le miroir de fond.

La finesse  $\mathcal{F}$ , l’intervalle spectral libre  $\mathcal{J}$  et la bande passante  $\Delta$  d’une cavité de



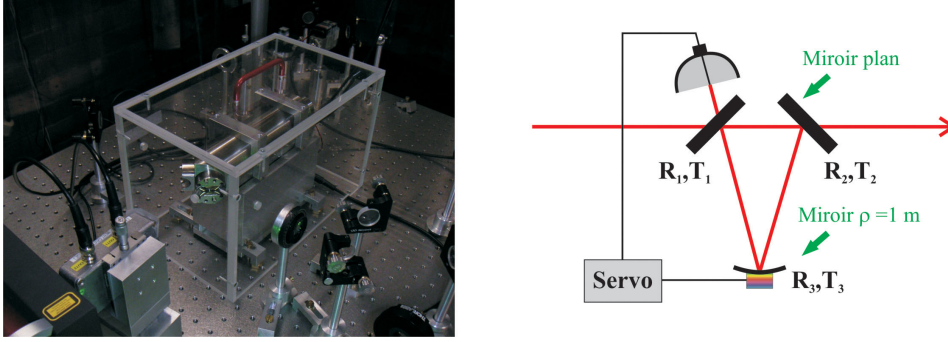


Fig. 4.5: Cavité de filtrage triangulaire mise en place sur l'infrarouge.

longueur  $L$  ont pour expression (les valeurs expérimentales sont données au §c) :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{T_1 + T_2 + T_3} \quad (4.1a)$$

$$\mathcal{J} = \frac{c}{L} \quad (4.1b)$$

$$\Delta = \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{F}} = \frac{c(T_1 + T_2 + T_3)}{2\pi L} \quad (4.1c)$$

La bande passante de la cavité est donc d'autant plus petite que la cavité est longue et de grande finesse.

Il est également important que la transmission totale de la cavité soit grande, afin de limiter les pertes de puissance. Dans le cas d'une cavité de finesse élevée, elle s'écrit à résonance :

$$T = \frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2 + T_3)^2} \quad (4.2)$$

On peut avoir  $T \simeq 1$  en choisissant  $T_1 = T_2$ , et  $T_3$  la plus faible possible. Dans le cas des cavités de très grande finesse, cette dernière condition est difficile à satisfaire : tous les miroirs étant nécessairement de transmission faible, il est difficile d'avoir  $T_3 \ll T_1, T_2$  (si les trois transmissions sont égales, la transmission totale est limitée à 44 %, ce qui est nettement insuffisant). Il est donc nécessaire d'avoir de très bons traitements réfléchissants.

#### b) Asservissement de la cavité : “tilt-locking”

Comme pour tout asservissement, il s'agit d'obtenir un signal d'erreur et de rétroagir sur le paramètre qu'on souhaite asservir. Pour asservir une cavité, un signal d'erreur exploitable est un signal qui renseigne sur la longueur de la cavité : il doit être proportionnel à l'écart à résonance, et changer de signe au niveau de cette dernière. Un signal d'erreur typique a la forme d'une courbe de dispersion centrée sur la résonance.

Le signal d'erreur est ensuite envoyé sur un correcteur PI (gain Proportionnel et Intégrateur), puis sur la cale piézo-électrique qui permet de contrôler la longueur de la cavité.

Les gains et les constantes de temps sont finement ajustés pour assurer la stabilité de la boucle de rétroaction. De manière générale, le gain doit diminuer quand la fréquence augmente, et le déphasage être inférieur à  $\pi$  pour la fréquence à laquelle le gain vaut 1. Cette fréquence est habituellement limitée à une dizaine de  $kHz$ . Elle sera d'autant plus grande que le substrat du miroir sera léger, et que la cale sera fixée sur un composant massif servant de contre-poids.

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir le signal d'erreur, connues sous leurs noms anglo-saxons, ou sous le nom de leurs inventeurs : “dither and lock”, “Pound-Drever-Hall”, “Hänsch-Couillaud”, “tilt-locking”, ... Nous allons aborder la dernière dans cette partie, et “Pound-Drever-Hall” un peu plus loin (*cf.* §C.2).

La méthode dite du “tilt-locking” (“asservissement par inclinaison”) a été introduite en 1999 [Shaddock *et al.*, 1999, Shaddock, 2000]. Très simple et très efficace, elle repose sur l'interférence du champ moyen et d'une référence de phase directement réfléchi par la cavité. Cette référence de phase est donnée par un mode transverse d'ordre supérieur et non résonnant.

Le faisceau incident est légèrement désaligné, de façon à faire coexister le mode fondamental  $TEM_{00}$  et le mode  $TEM_{01}$ . Ce dernier mode ne résonne pas simultanément avec le mode  $TEM_{00}$ , il sera donc totalement réfléchi lorsque le mode  $TEM_{00}$  sera résonnant. L'interférence des deux modes réfléchis est détectée à l'aide d'une photodiode à 2 zones dont les courants sont soustraits ; chacun correspondant à un lobe du mode  $TEM_{01}$  (*cf.* Fig. 4.6).

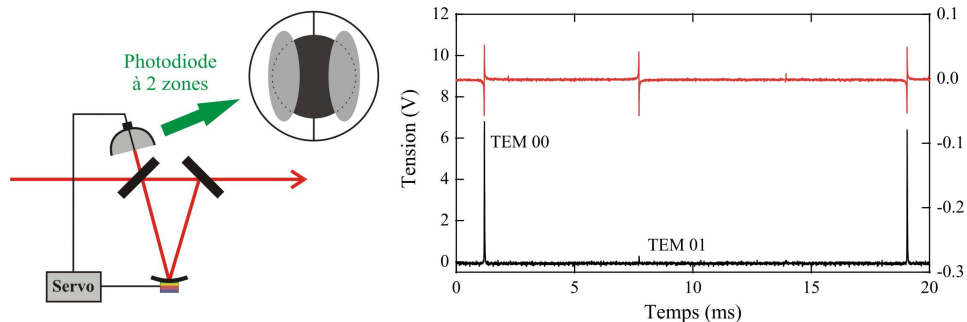


Fig. 4.6: Asservissement de la cavité de filtrage sur l'infrarouge par la méthode du “tilt-locking”. A droite : puissance transmise (en noir) et signal d'erreur expérimental (en rouge) lorsque la cavité est balayée.

Qu'en est-il de l'interférence de ces deux modes en fonctions de la longueur de la cavité ? Alors que le mode fondamental a une phase uniforme, les deux parties du mode  $TEM_{01}$  sont déphasées de  $\pi$  l'une par rapport à l'autre. À résonance pour le mode fondamental, les deux parties du mode  $TEM_{01}$  sont déphasées de  $\pm\pi/2$  par rapport au mode fondamental : les amplitudes sur chaque moitié du détecteur sont complexes conjuguées, et la différence des photocourants s'annule. Autour de la résonance, la phase du mode

fondamental varie rapidement de  $\pi$  ; de sorte que pour un désaccord donné, la phase du mode fondamental est modifiée, tandis que celle du mode  $\text{TEM}_{01}$  reste inchangée. Le déphasage devient supérieur à  $\pi/2$  pour un des éléments et plus petit que  $\pi/2$  pour l'autre, la configuration s'inversant de l'autre côté de la résonance. Ces déphasages différents ont pour effet de dissymétriser les amplitudes résultantes : la différence des photocourants ne s'annule plus. À proximité de la résonance, elle dépend linéairement du désaccord. De manière équivalente, un signal d'erreur de signe opposé est obtenu à proximité de la résonance du mode  $\text{TEM}_{01}$ .

Le désalignement nécessaire pour obtenir un signal d'erreur exploitable est très léger : de l'ordre de 1 % de la puissance du mode fondamental transféré dans le mode  $\text{TEM}_{01}$  suffit.

Cette méthode est très simple à mettre en œuvre. En outre, elle est peu coûteuse, puisqu'elle ne nécessite qu'une photodiode à 2 éléments. Nous avons ici utilisé une photodiode à 4 quadrants, dont les éléments sont reliés par paires et sommés afin d'obtenir deux éléments verticaux. La cavité peut rester asservie une journée durant. Par ailleurs, le réglage du signal d'erreur est très stable (à condition que la direction du laser soit elle-même stable !) : sur six mois d'utilisation, il n'est pas nécessaire de réaligner la cavité.

Il faut cependant noter que cette méthode n'est intéressante que pour une cavité ne nécessitant pas (pour d'autres raisons) de réalignements fréquents. C'est pourquoi elle n'a pas été utilisée pour l'OPO. Elle est en outre plus difficile à mettre en œuvre pour une cavité linéaire.

### c) Caractéristiques expérimentales

Sur notre expérience, les trois miroirs sont liés rigidement à un bloc d'Invar, afin de limiter les fluctuations de longueur dues aux changements de température de la pièce. La lumière se propage à l'intérieur du bloc d'Invar évidé : cette configuration compacte, massive et close permet une grande stabilité mécanique. Afin d'isoler encore davantage la cavité – mécaniquement et thermiquement –, le support en Invar est placé sur une plaque de caoutchouc amortisseur et l'ensemble est enfermé dans une boîte en Plexiglas.

La longueur optique est de l'ordre de 40 *cm*. Les miroirs d'entrée et de sortie sont des miroirs plans, et le miroir de fond est un miroir convexe de rayon de courbure  $\rho = 1$  *m*. Étant donnée la configuration triangulaire qui implique des incidences obliques ( $42^\circ$ ), la finesse dépend fortement de la polarisation. Pour la polarisation<sup>1</sup> *s*, la plus résonnante, les transmissions annoncées par le fabricant sont  $T_1 = T_2 = 770$  *ppm* et  $T_3 = 100$  *ppm*. Ces valeurs conduisent à une finesse théorique de 4200 et une transmission de 88 %. Expérimentalement (*cf.* Fig. 4.7), la finesse est de l'ordre de 200 pour la polarisation *p* et de 3000 pour la polarisation *s* (avec une transmission pour cette dernière atteignant

1. Le repère naturel pour la description des ondes lumineuses transversales réfléchies sont les directions parallèle (*p*) et perpendiculaire (*s*, de l'allemand "senkrecht") au plan d'incidence.

80 %).

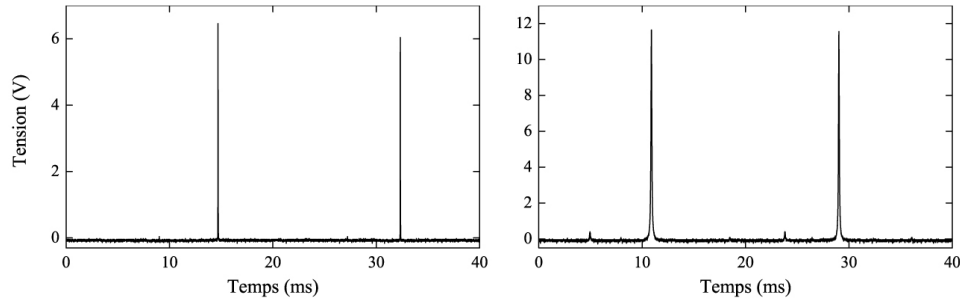


Fig. 4.7: Courbe de transmission obtenue en balayant la cavité de filtrage sur l'infrarouge, pour la polarisation  $s$  (à gauche) et la polarisation  $p$  (à droite).

Avec une finesse de 3000 et une longueur de 40  $cm$ , la bande passante est théoriquement de 250  $kHz$ . La figure 4.8 montre l'efficacité du dispositif : le bruit d'intensité de l'oscillateur local est limité au bruit quantique standard à partir de 3  $MHz$ .

La cavité de filtrage épure également le profil transverse du faisceau, puisqu'elle est asservie sur son mode fondamental  $TEM_{00}$ . Ceci permet d'améliorer la visibilité des détections homodynes. En effet, une mauvaise superposition spatiale des modes sur une détection homodyne s'apparente à des pertes (puisque la visibilité des interférences n'est pas maximale), ce qui conduit à une dégradation des effets quantiques mesurés. Cependant, dans le cas de notre laser, le profil transverse est déjà très bon avant même la cavité, comme en témoigne l'amplitude très faible des pics secondaires sur la figure 4.7. De ce fait, la visibilité des détections homodynes n'est que très légèrement améliorée (1 à 2 %) par la présence de la cavité de filtrage.

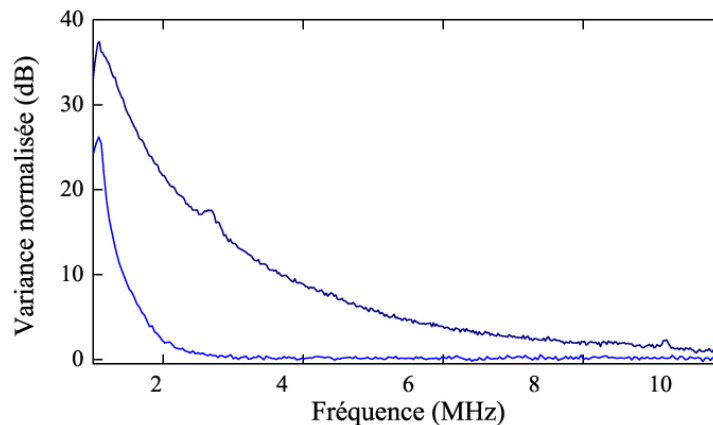


Fig. 4.8: Puissance de bruit d'intensité normalisée au bruit quantique standard d'une fraction du faisceau infrarouge (5  $mW$ ), avant (bleu foncé) et après (bleu clair) la cavité de filtrage.

## C OPO auto-verrouillé en phase

### C.1 Description du dispositif

Une photographie de l'OPO est présentée figure 4.9.

#### a) Cristal et miroirs

Le cristal utilisé (non visible sur la photographie car enfermé dans un four en cuivre) est un cristal de KTP (Potassium Titanyl Phosphate  $\text{KTiOPO}_4$ ), de dimensions  $10 \times 3 \times 3 \text{ mm}^3$ . Le KTP a été choisi pour ses caractéristiques intéressantes : fort coefficient non linéaire, faible absorption dans l'infrarouge, accord de phase à température ambiante. Une étude comparative assez complète des différents cristaux de KTP disponibles sur le marché a été menée au cours de la thèse de Julien Laurat [Laurat, 2004], soulignant entre autres le principal problème posé par ces cristaux : le phénomène de "gray-tracking". Dû à l'infra-rouge, ce phénomène de vieillissement des cristaux de KTP (encore très mal compris) se traduit par une augmentation du seuil d'oscillation, au bout de quelques minutes à quelques heures selon le fabricant et la qualité des cristaux<sup>2</sup>. Ceci amène à devoir changer très souvent de point de focalisation de la pompe.

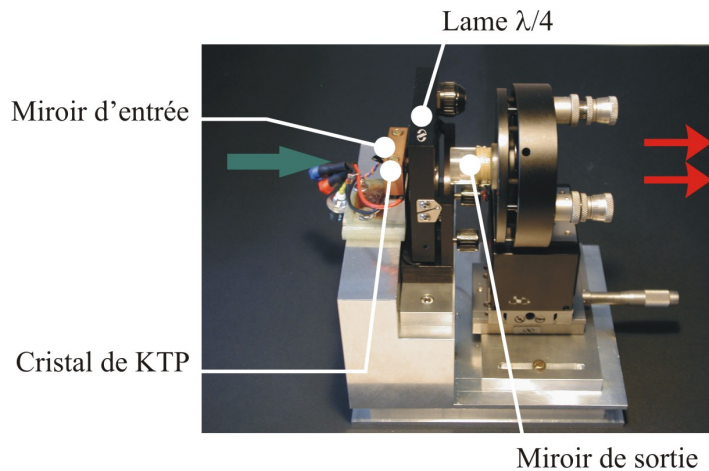


Fig. 4.9: OPO semi-monolithique auto-verrouillé en phase.

Afin de réduire les pertes aux interfaces – qui limitent l'efficacité de conversion et les effets quantiques – et d'obtenir une plus grande stabilité, une structure linéaire semi-monolithique a été choisie. Le miroir d'entrée est directement déposé sur une des faces du

2. Certains fabricants proposent des cristaux dans lesquels ce phénomène est réduit : de tels cristaux sont essentiels pour obtenir des mesures quantiques de bonne qualité. En effet, non seulement les cristaux "ordinaires" vieillissent en général trop vite pour que les réglages préliminaires aux expériences puissent être menés à leur terme, mais encore lorsqu'il est possible d'effectuer des mesures, les performances constatées – en terme de quantité d'intrication par exemple – sont moins bonnes.

cristal de KTP. Cette configuration présente cependant un inconvénient : l'angle entre le faisceau pompe et le cristal est fixé, ce qui pose parfois problème (*cf.* §D.1). Ce miroir plan est hautement réfléchissant pour l'infrarouge, et le coefficient de réflexion est de 95 % pour la pompe.

Le miroir de fond est un miroir sphérique convexe, de rayon de courbure 33 *mm*. Il est traité de façon à être hautement réfléchissant pour la pompe. La finesse infrarouge peut être modifiée en changeant ce miroir ; nous n'avons utilisé durant cette thèse qu'un miroir, de transmission 5 %. Le miroir de sortie est fixé sur une céramique piézo-électrique, qui permet de contrôler finement la longueur de la cavité.

Ces données sont résumées dans le tableau 4.1.

Tab. 4.1: Propriétés en réflexion des traitements des miroirs de la cavité de l'OPO.

	Entrée (plan)	Anti-reflet	Sortie ( $\rho = 38 \text{ mm}$ )
<b>532 nm</b>	95 %	0,5 %	< 0,1 %
<b>1064 nm</b>	< 0,1 %	0,1 %	95 %

Le cristal est inséré dans un four en cuivre, muni d'un module Peltier et d'une thermistance. Une boucle d'asservissement permet de contrôler très finement la température du cristal – ce qui est crucial pour atteindre la dégénérescence en fréquence. Il est important que la thermistance soit à la fois proche du cristal et en très bon contact thermique avec le cuivre qui l'entoure. Ce contact est amélioré – temps de réponse de l'asservissement en température diminué de plus de 30 % – grâce à une pâte thermique (“Arctic Silver”, à base d'argent).

Une seconde thermistance de test, extérieure à la boucle de régulation, a permis de montrer qu'il était possible de modifier la température par pas de 0,5 *mK* sans oscillation, et que la stabilité sur 10 *min* était supérieure au *mK*.

## b) lame biréfringente

La lame est montée dans un support motorisé permettant un contrôle fin en rotation par pas de l'ordre de 0,01° (New Focus Model 8401 et Tiny Pico-Motor). Cependant, l'actuateur piézo-électrique utilisé n'assure pas une répétabilité excellente : après 10 pas dans un sens, 10 pas dans le sens inverse ne ramènent pas de façon précise à l'angle de départ.

L'ensemble des éléments est lié à un bloc massif de Dural. Le four et la lame sont fixés rigidement au bloc et ne disposent d'aucun réglage en position. La monture du miroir de sortie dispose des réglages usuels en rotation par butées différentielles, et elle est montée sur des platines en translation *XYZ*.

Afin de limiter vibrations acoustiques et transferts thermiques, l'OPO est placé sous une boîte de Plexiglas. Une plaque de caoutchouc amortisseur est également insérée entre le socle de l'OPO et la table optique, qui est elle-même montée sur coussins d'air.

### c) Injection de la pompe et adaptation des modes

#### INJECTION DE LA POMPE

Ainsi qu'on l'a déjà mentionné précédemment, on a placé sur le trajet de la pompe un isolateur optique Conoptics qui permet d'éliminer les rétro-réflexions vers le laser (5% de pertes à l'injection et 37 dB d'isolation). Cet isolateur a un second avantage sur lequel nous reviendrons : il permet d'avoir accès au faisceau réfléchi par la cavité de l'OPO, ce qui permet d'asservir la cavité sur la pompe en réflexion.

Dans le but de limiter les causes possibles de vibrations, qui constituent le facteur limitant pour la stabilité de l'OPO, on a choisi de minimiser le nombre d'éléments optiques. On utilise ainsi, pour adapter le mode pompe au mode de l'OPO, une seule lentille de focale 150 mm. Cette lentille est montée dans un support trois axes (Newport LP-1A-XYZ), permettant un réglage très fin en position, assurant une grande stabilité. L'adaptation obtenue est de l'ordre de 99%, comme le montre la figure 4.10.

#### RÉGLAGE DE L'INJECTION

Le réglage est facilité par la structure semi-monolithique. Les deux miroirs d'injection permettent de choisir un point de focalisation sur le cristal, et d'assurer une incidence normale (le faisceau incident et le faisceau réfléchi doivent être colinéaires). Avec la cavité en balayage, les réglages transversaux en translation du miroir de fond permettent d'obtenir en sortie une tache unique. Ces étapes préliminaires sont réalisées à l'œil, et permettent d'obtenir un réglage presque parfait. En visualisant à l'oscilloscope le signal de réflexion ou de transmission de la cavité de l'OPO, il est ensuite possible d'optimiser l'adaptation du mode d'entrée et du mode de cavité à l'aide des butées différentielles du miroir de sortie, ou des réglages très fin de la lentille d'injection. Ce réglage n'a pas besoin d'être repris plus souvent qu'une fois par semaine.

#### LONGUEUR DE LA CAVITÉ

[Boyd et Kleinman, 1968] ont montré que, afin de maximiser la conversion paramétrique et de réduire le seuil d'oscillation, la focalisation du faisceau pompe doit être adaptée à la longueur du cristal. Trop forte, le faisceau divergerait rapidement ; trop faible, l'effet non linéaire ne serait pas assez important. En première approximation, il faut donc un faisceau dont la longueur de Rayleigh  $Z_R$  soit du même ordre de grandeur que la longueur  $L$  du cristal. Le calcul de la longueur de la cavité de l'OPO telle que la focalisation est optimale a été mené dans [Laurat, 2004]. Le résultat, étant donné le rayon du miroir de sortie ( $R = 38$  mm), est très proche de la limite de stabilité : la cavité devrait avoir une longueur de 37,9 mm, la limite de stabilité étant  $R$ . En pratique, le seuil est minimal pour une longueur sensiblement plus faible (de l'ordre de 33 mm). Cet

écart est sans doute dû au phénomène de “walk-off”, qui n’a pas été pris en compte dans cette étude [Huard, 1993, Suret, 2000]. Afin de régler expérimentalement la longueur de la cavité, on peut ainsi s’appuyer sur la valeur du seuil.

## C.2 Asservissement de la cavité : “Pound-Drever-Hall”

La cavité de l’OPO est asservie par la méthode dite “Pound-Drever-Hall” (PDH) [Drever *et al.*, 1983]. Plus ancienne que la méthode du “tilt-locking”, c’est aussi la plus répandue. Elle présente cependant l’inconvénient d’être plus coûteuse, puisqu’elle nécessite un générateur fonctionnant à quelques dizaines de  $MHz$ , un modulateur électro-optique et une détection synchrone.

L’idée consiste à moduler la fréquence du laser à une fréquence plus grande que la bande passante, de façon que la modulation puisse être détectée en réflexion. Ceci a plusieurs avantages : on peut utiliser une bande passante assez large pour l’électronique de rétroaction ; par rapport à une détection en transmission on s’affranchit du retard lié au passage à travers la cavité. En outre, on n’est pas sensible au bruit à basse fréquence qui n’est pas réfléchi par la cavité.

On exploite ainsi le battement entre le champ moyen et les bandes latérales obtenues par modulation de phase. Les bandes latérales (réfléchies au moins partiellement par la cavité) fournissent une référence de phase. Le faisceau détecté est ensuite démodulé à la fréquence de modulation.

Si la cavité est à résonance, la lumière réfléchie reste modulée uniquement en phase. Le signal démodulé est donc nul, puisque les deux bandes latérales se compensent. Hors résonance, les bandes latérales subissent un déphasage différent : il n’y a plus compensation et une modulation d’amplitude sera détectée. Le signal d’erreur a ainsi une forme typique (*cf.* Fig. 4.10).

Dans la plupart des expériences utilisant un OPO, la longueur de la cavité est asservie sur l’intensité de l’infra-rouge émis. Dans notre cas, seule la pompe est asservie à résonance. On utilise la modulation à  $12 MHz$  présente dans le faisceau laser (*cf.* §B.1a) : il n’a pas été nécessaire d’ajouter un autre modulateur. L’OPO peut ainsi rester asservi sur la résonance pompe pendant plusieurs heures.

Dans le cas d’un OPO triplement résonnant au-dessus du seuil, l’asservissement sur la résonance pompe ne garantit pas l’émission de faisceaux infra-rouges. En effet, l’infra-rouge n’est émis que lorsque les longueurs pour lesquelles les champs signal et complémentaire sont simultanément résonnants sont compatibles avec la condition de résonance pompe [Debuisschert *et al.*, 1993]. Ce phénomène est particulièrement accentué à proximité du seuil, et nécessite un ajustement très fin de la température du cristal.

La grande stabilité de notre asservissement en température permet d’obtenir des faisceaux signal et complémentaire stables pendant plus d’une heure.



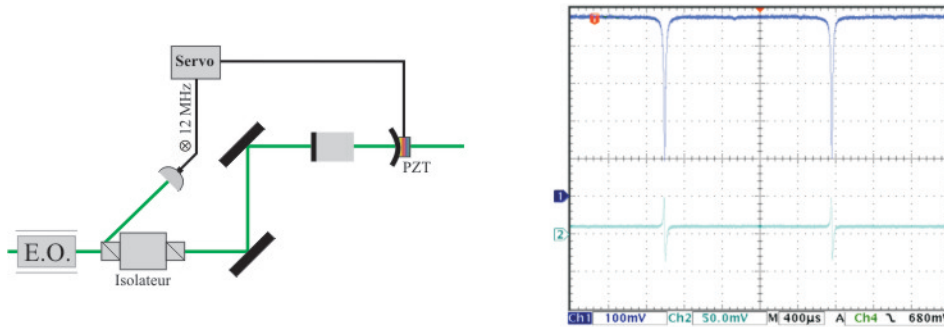


Fig. 4.10: Asservissement de l'OPO par la méthode de "Pound-Drever-Hall". Le modulateur électro-optique est dans notre cas inclus dans le laser. À droite : lumière réfléchie éjectée par l'isolateur optique (bleu foncé) et signal d'erreur (bleu ciel).

## D Détection et contrôle des fréquences signal et complémentaire

On a vu au §3.D.2 qu'en présence de la lame, il apparaît une "zone d'accrochage", d'étendue non nulle, au sein de laquelle faisceaux signal et complémentaire sont verrouillés à la même fréquence. Une des difficultés majeures de cette expérience consiste à détecter la position de cette zone dans l'espace des paramètres expérimentaux qui modifient les fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , puis à l'atteindre.

Nous disposons pour cela de trois outils d'analyse de la fréquence des faisceaux signal et complémentaire, qui sont présentés sur la figure 4.11 et dont nous allons détailler l'utilisation dans la suite de cette section :

- un spectromètre qui sépare les deux faisceaux en fonction de leur fréquence (résolution : 50 GHz)
- une cavité Fabry-Pérot en balayage qui agit de même avec une résolution plus fine (5 MHz), mais qui pose des problèmes de repliement du spectre
- une photodiode rapide reliée à un analyseur de spectre, qui détecte directement le battement entre les deux faisceaux (résolution : 100 kHz)

À tout moment au cours de l'expérience, grâce à un miroir mobile, on peut choisir d'envoyer les faisceaux signal et complémentaire soit vers le bloc d'analyse en fréquence, soit vers le bloc de détection des propriétés quantiques (*cf.* Fig. 4.1).

### D.1 Problème de l'accord de phase dans le cas de l'OPO semi-monolithique

L'accord de phase des faisceaux est déterminé par la température du cristal, la fréquence de pompe, et la direction de propagation des faisceaux dans le cristal.

La fréquence de la pompe peut être modifiée – comme on l'a vu au §B.1b) – en jouant sur la température du cristal du laser ; cette température peut être comprise entre 25°C

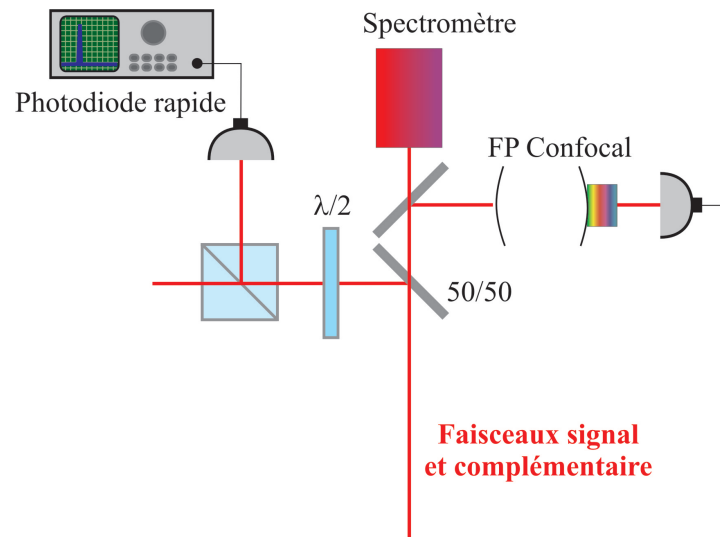


Fig. 4.11: Schéma du bloc d'analyse de la fréquence des faisceaux signal et complémentaire. Une partie des faisceaux est envoyée sur une photodiode rapide reliée à un analyseur de spectre. L'autre partie des faisceaux, grâce à un miroir mobile, peut être envoyée soit dans un spectromètre, soit dans une cavité Fabry-Pérot.

et  $45^\circ C$ .

Pour des raisons de simplicité expérimentale (nous ne souhaitons pas alourdir le dispositif en utilisant un cryostat, ni même en devant travailler sous azote pour éviter la condensation), il est nécessaire que la température du cristal de l'OPO reste au-dessus du point de rosée dans la pièce. Il est également souhaitable de ne pas trop le chauffer, en particulier pour éviter les courants de convection au sein de l'enceinte en Plexiglas, qui perturberaient la stabilité du dispositif. Une température de travail idéale se situe autour de  $35^\circ C$ .

Dans les OPO usuels, il est possible de choisir la température du cristal à laquelle on souhaite travailler en modifiant la direction de propagation des faisceaux : il suffit de tourner légèrement le cristal, afin de réorienter les plans cristallins par rapport aux faisceaux pour changer la condition d'accord de phase. Mais du fait de la géométrie semi-monolithique de notre cavité, ceci n'est pas possible : les faisceaux sont nécessairement orthogonaux à la face d'entrée du cristal. Un angle de coupe précis du cristal par rapport aux plans cristallins devrait permettre de contourner le problème ; malheureusement les fabricants ne peuvent garantir la précision de cet angle de coupe à mieux que  $0,5^\circ$ , ce qui se traduit – pour la même spécification de température d'accord de phase autour de  $35^\circ C$  – par des températures de dégénérescence très diverses, pouvant aller de  $10^\circ C$  à  $80^\circ C$  pour les cristaux testés au cours de cette thèse. On constate ainsi que la structure semi-monolithique, garante de stabilité, peut également s'avérer handicapante par rapport à la température de dégénérescence.

En pratique, les cristaux pour lesquels la température de dégénérescence est infé-

rieure à  $25^\circ C$  sont inutilisables. Les autres peuvent être utilisés; ceux pour lesquels la température est trop élevée posant parfois quelques problèmes de stabilité du fait des courants de convection évoqués plus haut. Au cours de cette thèse, deux cristaux parmi ceux testés ont permis de fournir les résultats : le premier avait une température d'accord de phase d'environ  $45^\circ C$ , le second d'environ  $70^\circ C$ .

## D.2 Estimation de la température d'accord de phase

La première étape de la recherche de la dégénérescence en fréquence consiste à estimer, à quelques dixièmes de degrés près, la position de la zone de dégénérescence. Pour ce faire, on utilise le spectromètre, dont la résolution est de  $0,2\text{ nm}$ . Afin d'avoir par la suite une amplitude maximale de choix pour ce paramètre, on fixe la température du cristal de doublage du laser au centre de la gamme accessible, soit environ  $35^\circ C$ . On mesure ensuite l'écart en fréquence entre signal et complémentaire pour différentes températures de cristal de l'OPO.

Comme détaillé dans [Laurat, 2004], la présence de la lame dans la cavité modifie la température de dégénérescence; elle l'abaisse d'environ  $4^\circ C$ . La figure 4.12 donne ainsi la courbe de recherche grossière de la température de dégénérescence sans et avec lame.

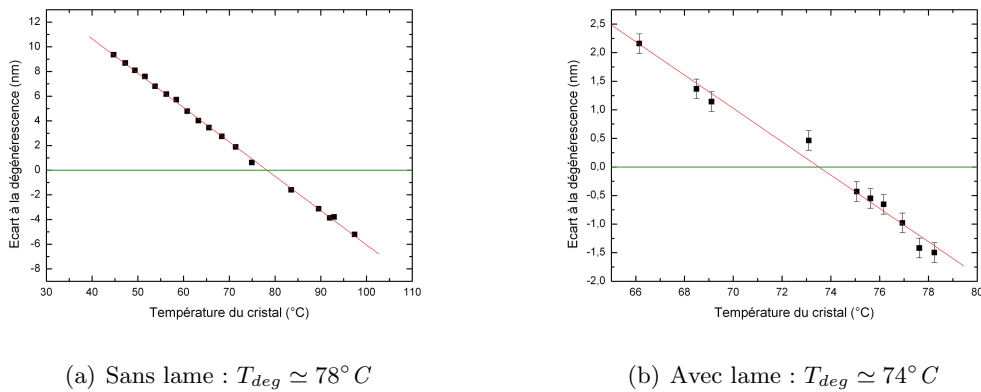


Fig. 4.12: Écart à la dégénérescence des faisceaux signal et complémentaire pour un cristal de KTP. Une régression linéaire (en rouge) permet d'estimer la position de la dégénérescence.

Cette caractérisation, nécessaire pour tout nouveau cristal, n'est effectuée qu'une fois. Elle ne permet cependant qu'une estimation du point de travail ultérieur : en effet, comme expliqué au §D.3, il s'avère nécessaire de jouer sur deux paramètres (la température du cristal de l'OPO et la fréquence de la pompe) pour parvenir à détecter le battement entre les deux faisceaux. En général, ceci conduit à s'éloigner de la fréquence de pompe choisie pour tracer cette courbe, et donc également à s'éloigner de la température évaluée au départ.

Nous avons également pu mettre au jour un phénomène surprenant, qu'aucun fabricant de cristaux n'a pu expliquer, mais qui s'avère souvent gênant : une bistabilité, qui

conduit à l'existence de deux températures de dégénérescence pour la même fréquence de pompe. Il est fréquent que le système choisisse le couple de fréquences qui ne nous intéresse pas ; en particulier si la pompe est trop intense. Ceci survient y compris en l'absence de lame à l'intérieur de la cavité de l'OPO. La figure 4.13 représente une courbe obtenue avec un autre cristal, qui montre clairement deux couples de fréquences pour chaque température du cristal de l'OPO. Ce qui revient à dire que pour une fréquence de pompe donnée, il existe deux températures du cristal donnant une dégénérescence en fréquence pour les faisceaux émis.

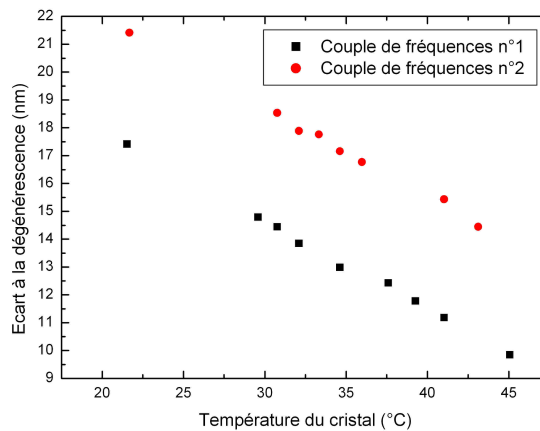


Fig. 4.13: Écart à la dégénérescence des faisceaux signal et complémentaire pour un cristal de KTP. Deux températures de dégénérescence distinctes, séparées de  $15^{\circ}C$  environ, apparaissent.

### D.3 Détection du battement entre les deux fréquences

Une fois la température de dégénérescence estimée, il faut s'approcher suffisamment de la dégénérescence pour voir apparaître le battement entre les deux fréquences sur la photodiode rapide. Il s'agit d'une photodiode en InGaAs (Hamamatsu G8376-02), polarisée sous sa tension maximale admissible ( $18 V$ ). La capacité de la photodiode diminuant avec la tension de polarisation, augmenter cette dernière permet de réaliser un système de détection avec la plus grande bande passante possible. Le photocourant est directement converti en tension par une résistance de charge de  $50 \Omega$ . Afin de réduire les capacités parasites qui limiteraient rapidement la bande passante, le circuit doit être très compact, et les pattes des composants les plus courtes possibles. Les composants utilisés sont des composants pour montage en surface (CMS). Le photocourant est ensuite amplifié (Nuclétudes 10.36.2), et visualisé sur un analyseur de spectre.

On est en pratique limité non pas par la bande passante de la détection, mais par celle de l'analyseur de spectre : ce dernier est limité à  $1,5 GHz$ . Or la méthode précédente est précise à environ  $0,5^{\circ}C$ , ce qui correspond (étant donnée la pente de la courbe) à un

écart de plus de 50  $GHz$  à la dégénérescence. Un battement aussi élevé est impossible à détecter. La méthode consiste alors à se positionner à la température souhaitée, et à balayer la plage de fréquence pompe accessible<sup>3</sup>, en cherchant à voir apparaître un battement de fréquence inférieure à 1,5  $GHz$ . Si cela ne donne rien, on change légèrement la température et on itère la méthode.

Ce processus peut être très long. En fin de ce travail de thèse, une voie d'injection d'infra-rouge dans l'OPO a été ajoutée (*cf.* Fig. 4.1) – *a priori* pour régler plus facilement la détection, comme nous le décrirons au §E.3c). Cependant, l'injection s'est avérée utile pour trouver plus rapidement la dégénérescence. En effet, l'infra-rouge injecté est prélevé directement en sortie de la cavité de filtrage de l'infra-rouge. La fréquence injectée est donc la moitié de la fréquence pompe : c'est celle qu'on cherche à atteindre pour les faisceaux signal et complémentaire.

En balayant la cavité de l'OPO au-dessous du seuil, on peut visualiser simultanément sur l'oscilloscope l'infra-rouge en sortie (correspondant à l'injection) et le vert réfléchi par la cavité. Comme déjà exposé précédemment, la dégénérescence ne peut être atteinte que si la fréquence de pompe et la fréquence de l'injection résonnent simultanément dans la cavité. On peut donc jouer sur la température et la fréquence de pompe pour superposer les deux pics (*cf.* Fig. 4.14).

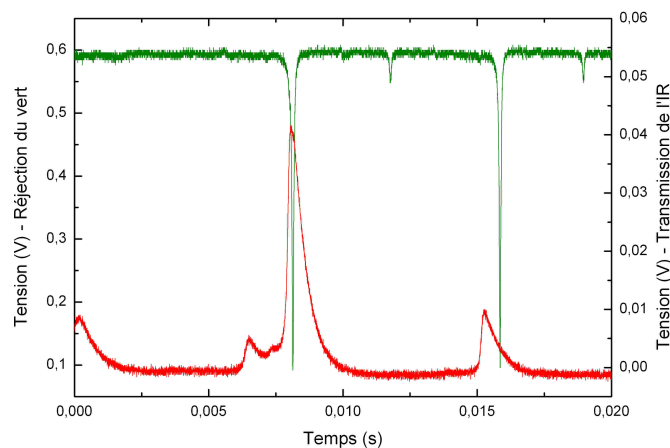


Fig. 4.14: Résonance simultanée de la pompe (en haut) et de l'injection infra-rouge (en bas) dans la cavité de l'OPO.

3. Il est également possible de choisir de balayer plutôt la température. Étant donné le matériel électronique utilisé, le balayage de la fréquence pompe s'avère plus simple.

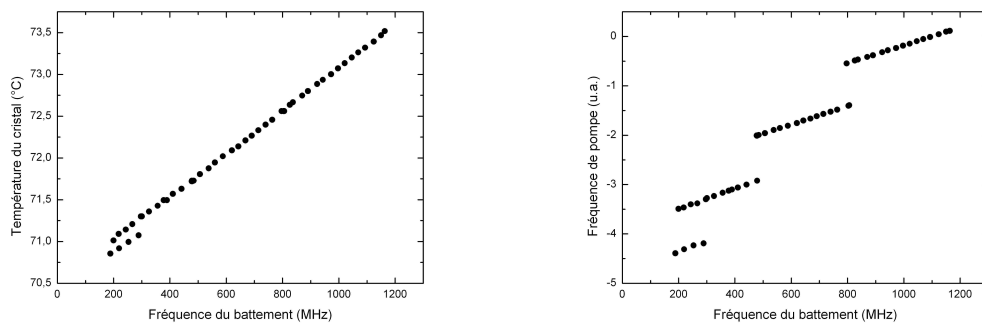
#### D.4 Auto-verrouillage en fréquence

La plage d'auto-verrouillage en fréquence est d'autant plus grande que l'angle de la lame est plus élevé ; cependant, elle n'excède pas une centaine de  $MHz$  pour les valeurs du paramètre de couplage utilisées dans cette thèse. Lorsque le battement apparaît autour de  $1,5 GHz$ , on est donc encore très loin de la dégénérescence. Il s'agit alors d'amener progressivement le battement à 0.

La technique consiste à jouer de façon antagoniste sur la température du cristal de KTP et sur la fréquence de pompe : l'une va servir à s'approcher de la dégénérescence, l'autre à ne pas sortir de la résonance pompe. En effet, lorsqu'on fait diminuer la fréquence du battement, on tend à sortir de la résonance pompe, ce qui se traduit par une diminution de la puissance des faisceaux signal et complémentaire jusqu'à extinction. Pour pallier ce phénomène, il faut modifier la fréquence de pompe dans le sens qui fait augmenter la fréquence du battement, et ainsi de suite.

Lorsqu'on part d'un battement élevé en fréquence, on est ainsi forcé de modifier beaucoup la fréquence de pompe ; de sorte qu'on se heurte au problème des sauts de modes du laser (*cf.* §B.1b)). Il faut alors retrouver la nouvelle température du cristal de doublage qui va correspondre à la même fréquence de pompe (et donc à la même position du battement).

On peut suivre ce processus en traçant la position du battement en fonction soit de la température du cristal de l'OPO, soit de la fréquence de pompe (*cf.* Fig. 4.15 – pour des raisons de lisibilité, c'est à chaque fois la fréquence du battement en abscisse). Étant donné que pour une température du cristal donnée, le battement est visible pour une plage étendue de fréquences laser, les courbes 4.15 ont été obtenues en choisissant la fréquence de pompe pour laquelle l'émission infra-rouge était la plus intense.



(a) Température du cristal de l'OPO en fonction de la fréquence de battement

(b) Fréquence de la pompe de l'OPO en fonction de la fréquence de battement

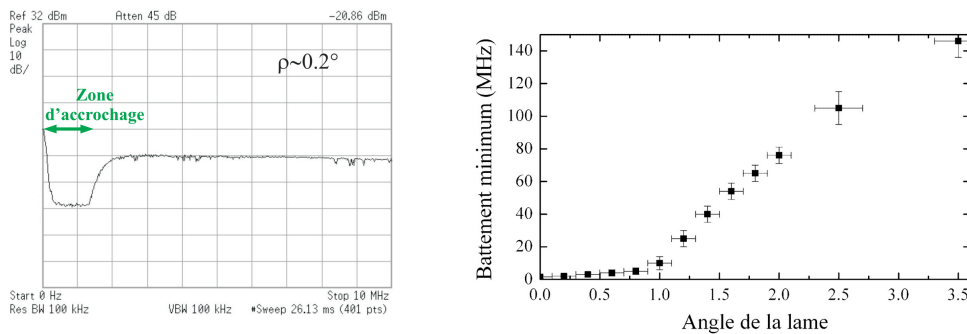
Fig. 4.15: Écart à la dégénérescence des faisceaux signal et complémentaire en fonction des paramètres de l'accord de phase pour le même cristal de KTP qu'à la figure 4.12.

La première remarque à faire au sujet de ces courbes est la linéarité : à l'exception des sauts de modes du laser – et des quatre derniers points – la progression est très linéaire.

Ces observations expérimentales corroborent les calculs de [Laurat, 2001, Laurat, 2004].

Par contre, les quatre derniers points en bas à gauche posent problème : lors du dernier saut de mode du laser, on s'est de toute évidence écarté de la courbe qu'on suivait jusqu'alors. Ce phénomène n'a pas été expliqué de façon certaine ; il est possible qu'il s'agisse d'une autre bistabilité du type de celle mentionnée au §D.2.

Lorsque le battement est suffisamment proche de 0, on entre dans la zone d'accrochage, et les faisceaux signal et complémentaire voient leur fréquences se verrouiller à la même valeur – celle du laser YAG. Si on regarde ce qui se passe par rapport au battement à l'analyseur de spectre, le réglage "Max Hold" (qui ne conserve à l'affichage que la valeur maximale vue sur toute la durée de l'acquisition) permet de visualiser l'étendue de la zone d'accrochage : il existe une plage de fréquences, d'extension non nulle, qui n'est jamais atteinte : le battement "saute" directement à la fréquence nulle (*cf.* Fig. 4.16(a)). L'extension de la zone de dégénérescence est d'autant plus grande que le couplage est plus important (*cf.* Fig. 4.16(b)).



(a) Battement à l'analyseur de spectre en configuration "Max Hold". (b) Battement minimum observé pour différents angles de la lame.

Fig. 4.16: Phénomène d'accrochage de la fréquence de dégénérescence.

Lorsque le phénomène d'accrochage se produit, le battement disparaît à l'analyseur de spectre. Ceci pouvant évidemment avoir bien d'autres causes, il est nécessaire de vérifier qu'on est effectivement à dégénérescence. Plusieurs méthodes sont utilisables (et en pratique, utilisées de façon complémentaire).

On peut tout d'abord s'appuyer sur le signal de la cavité Fabry-Pérot, qui sépare les modes en fréquence. Il s'agit d'une cavité confocale, construite à partir de deux miroirs plan-concaves de rayon de courbure 50 mm et de coefficient de réflexion 99 %. La finesse mesurée est de 300 et d'intervalle spectral libre 1,5 GHz. À dégénérescence, les modes doivent être superposés, et le pic correspondant d'amplitude double. Cependant, des superpositions accidentelles des deux pics surviennent fréquemment, qu'il n'est pas toujours possible de discerner de la "bonne" superposition. La cavité Fabry-Pérot est donc d'un intérêt relativement limité ; si ce n'est qu'elle permet de confirmer le fonction-

nement monomode longitudinal de l'OPO. La figure 4.17 présente deux signaux typiques obtenus à l'aide de la cavité Fabry-Pérot en balayage.

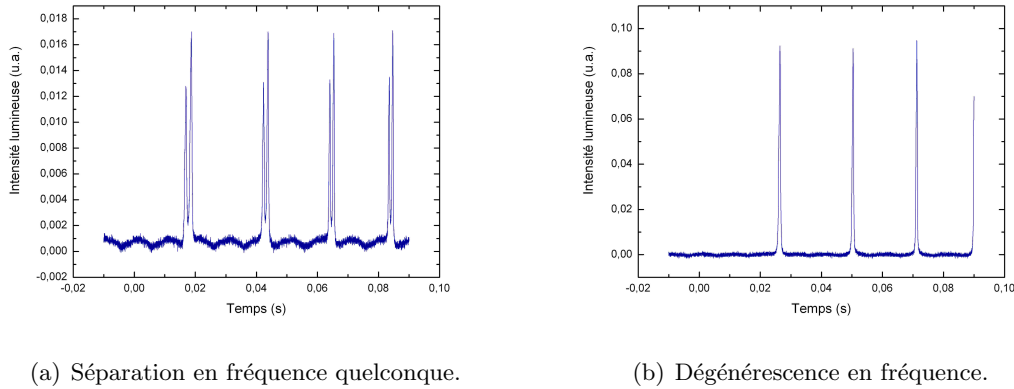


Fig. 4.17: Signal donné par la cavité Fabry-Pérot en balayage selon les fréquences des faisceaux signal et complémentaire.

Il est également possible de faire interférer, sur l'une des photodiodes de détection, le signal sortant de l'OPO avec l'oscillateur local dont la phase est balayée à quelques  $Hz$ . L'observation de franges d'interférences est la signature non ambiguë de la dégénérescence en fréquence. Un exemple est donné sur la figure 4.18. Cette méthode présente l'inconvénient de nécessiter la superposition des modes issus de l'OPO avec celui de l'oscillateur local, et donc un réglage préliminaire assez long (bien qu'il n'ait pas besoin d'être parfait pour qu'on puisse visualiser les franges).

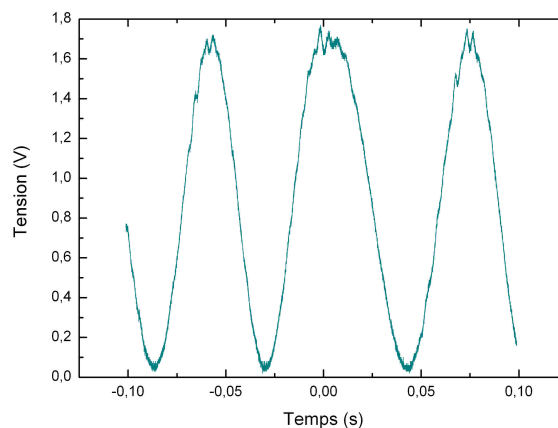


Fig. 4.18: Interférence de l'oscillateur local avec le signal

Enfin, une dernière méthode peut être utilisée, nettement plus rapide que la précédente. En effet, à dégénérescence, le mode de sortie de l'OPO, constitué de la superposi-



tion des modes signal et complémentaire, a une polarisation (linéaire) bien définie. L'intensité infra-rouge détectée après le cube polariseur est donc modifiée lorsqu'on tourne la lame  $\lambda/2$  en sortie de l'OPO. À l'inverse, si les fréquences sont différentes, la polarisation tourne à la fréquence du battement, et on n'observe aucun changement lors de cette manipulation.

Une fois les paramètres ajustés pour obtenir le verrouillage, l'OPO peut osciller quelques dizaines de minutes sur les modes dégénérés. Les fluctuations de température de la pièce, ainsi que la dérive de fréquence du laser ( $2 \text{ MHz} \cdot \text{min}^{-1}$ ) finissent par faire sortir le système de la zone d'accrochage, *a fortiori* si l'angle de la lame est petit. Les paramètres permettant l'accrochage évoluent ainsi au cours du temps (dans une zone d'environ  $50 \text{ MHz}$  pour la fréquence pompe et de  $0,1 \text{ K}$  pour la température du cristal).

La génération paramétrique étant plus efficace lorsqu'on est au centre de la zone d'accrochage, il peut d'ailleurs être nécessaire de réajuster plus fréquemment les paramètres, afin d'obtenir les meilleurs effets quantiques possibles.

Par ailleurs, lorsque le point de focalisation de la pompe sur le cristal est modifié, la recherche du battement est à nouveau nécessaire. En effet, une légère inhomogénéité fait varier localement les indices de réfraction dans le cristal, ce qui modifie les paramètres de fonctionnement à dégénérescence.

## E Détection des propriétés quantiques

### E.1 Principe de la détection homodyne

La détection de l'intrication entre les champs nécessite de pouvoir mesurer les fluctuations des champs suivant n'importe laquelle de leurs quadratures. Or une détection directe, ou une détection équilibrée, ne renseignent que sur les fluctuations d'intensité du faisceau à caractériser. L'outil le mieux adapté ici est donc la détection homodyne. Le principe de cette détection est de faire interférer le champ à mesurer avec un champ de référence appelé oscillateur local ; la phase relative entre les deux champs imposant la quadrature mesurée (*cf.* Fig. 4.19(a)).

Deux schémas sont possibles : soit le faisceau à caractériser et l'oscillateur local ont même polarisation, auquel cas on les mélange simplement sur une lame 50/50 (*cf.* Fig. 4.19(b)) ; soit ils sont polarisés orthogonalement et sont mélangés à l'aide d'un cube séparateur de polarisation et d'une lame  $\lambda/2$  qui permet de faire tourner les polarisations de  $45^\circ$  (*cf.* Fig. 4.19(c)). Ces deux configurations sont strictement équivalentes. Les deux voies sont ensuite détectées à l'aide de photodiodes, dont on soustrait les photocourants.

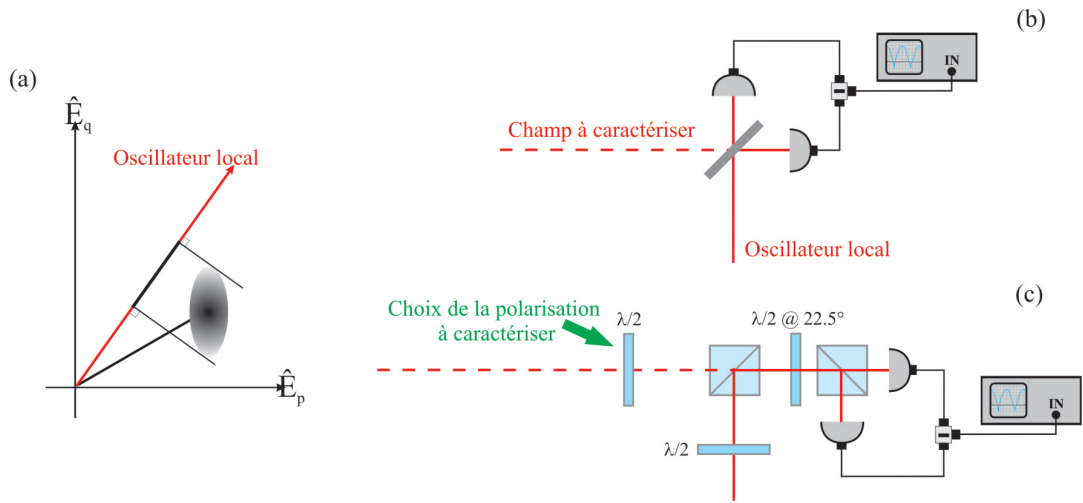


Fig. 4.19: (a) Principe de la mesure par détection homodyne. (b) Configuration usuelle où champ à caractériser et oscillateur local sont mélangés sur une lame 50/50. (c) Configuration en polarisation.

## E.2 Calcul dans le cas général

Le calcul est habituellement fait dans le cas où l'oscillateur local est très intense devant le champ à mesurer. Mais cette configuration ne suffit pas ici, puisque nous souhaitons mesurer des champs intenses (lorsque l'OPO fonctionne au-dessus du seuil). Employer alors un oscillateur local très intense aurait pour effet de saturer les photodiodes. Nous allons donc détailler le calcul dans le cas général où les intensités de l'oscillateur local et du champ à caractériser sont quelconques. Les notations sont précisées à la figure 4.20.

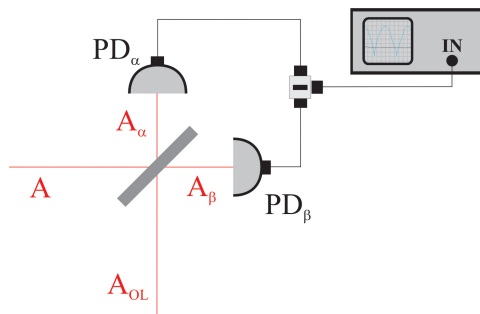


Fig. 4.20: Notations employées pour le calcul du signal détecté dans une détection homodyne.

Les champs entrant sur la lame 50/50 sont (les valeurs moyennes  $\bar{A}$  et  $\bar{A}_{OL}$  sont

choisies réelles) :

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \bar{A} + \delta\hat{P} + \imath\delta\hat{Q} \\ \hat{A}_{OL} &= \left(\overline{A_{OL}} + \delta\hat{P}_{OL} + \imath\delta\hat{Q}_{OL}\right) e^{i\varphi}\end{aligned}\quad (4.3)$$

Et après la lame :

$$\begin{aligned}\hat{A}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{A} + \hat{A}_{OL}) \\ \hat{A}_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{A} - \hat{A}_{OL})\end{aligned}\quad (4.4)$$

On peut alors calculer l'intensité détectée par la photodiode  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}\hat{I}_\alpha &= \hat{A}_\alpha^\dagger \cdot \hat{A}_\alpha \\ &= \frac{1}{2} \left[ \bar{A} + \delta\hat{P} - \imath\delta\hat{Q} + \left(\overline{A_{OL}} + \delta\hat{P}_{OL} - \imath\delta\hat{Q}_{OL}\right) e^{-i\varphi} \right] \\ &\quad \cdot \left[ \bar{A} + \delta\hat{P} + \imath\delta\hat{Q} + \left(\overline{A_{OL}} + \delta\hat{P}_{OL} + \imath\delta\hat{Q}_{OL}\right) e^{i\varphi} \right]\end{aligned}\quad (4.5)$$

On peut négliger tous les termes du deuxième ordre en  $\delta\hat{Y}$ , car ils donneront des moments d'ordre 3 ou plus dans l'expression de la variance, et on est dans le cadre de la linéarisation des fluctuations (*cf.* §1.D.4). On obtient ainsi, pour la photodiode  $\alpha$  et la photodiode  $\beta$  :

$$\begin{aligned}\hat{I}_\alpha &= \frac{1}{2} \left[ \bar{A}^2 + \overline{A_{OL}^2} + 2\bar{A}\overline{A_{OL}} \cos(\varphi) + 2\bar{A} \left( \delta\hat{P} + \delta\hat{P}_{OL} \cos(\varphi) - \delta\hat{Q}_{OL} \sin(\varphi) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\overline{A_{OL}} \left( \delta\hat{P}_{OL} + \delta\hat{P} \cos(\varphi) + \delta\hat{Q} \sin(\varphi) \right) \right] \\ \hat{I}_\beta &= \frac{1}{2} \left[ \bar{A}^2 + \overline{A_{OL}^2} - 2\bar{A}\overline{A_{OL}} \cos(\varphi) + 2\bar{A} \left( \delta\hat{P} - \delta\hat{P}_{OL} \cos(\varphi) + \delta\hat{Q}_{OL} \sin(\varphi) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\overline{A_{OL}} \left( \delta\hat{P}_{OL} - \delta\hat{P} \cos(\varphi) - \delta\hat{Q} \sin(\varphi) \right) \right]\end{aligned}\quad (4.6)$$

La différence des photocourants est proportionnelle à la différence des intensités :

$$\begin{aligned}\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta &= 2 \left[ \bar{A}\overline{A_{OL}} \cos(\varphi) + \bar{A} \left( \delta\hat{P}_{OL} \cos(\varphi) - \delta\hat{Q}_{OL} \sin(\varphi) \right) \right. \\ &\quad \left. + \overline{A_{OL}} \left( \delta\hat{P} \cos(\varphi) + \delta\hat{Q} \sin(\varphi) \right) \right]\end{aligned}\quad (4.7)$$

Par conséquent, les fluctuations sur la différence des intensités :

$$\begin{aligned}\delta(\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta) &= 2 \left[ \sqrt{\bar{I}} \left( \delta\hat{P}_{OL} \cos(\varphi) - \delta\hat{Q}_{OL} \sin(\varphi) \right) \right. \\ &\quad \left. + \overline{A_{OL}} \left( \delta\hat{P} \cos(\varphi) + \delta\hat{Q} \sin(\varphi) \right) \right]\end{aligned}\quad (4.8)$$

où  $\bar{I} = \bar{A}^2$  et  $\overline{I_{OL}} = \overline{A_{OL}^2}$ .

On supposera que l'oscillateur local et le signal à mesurer ne sont pas corrélés. L'analyseur de spectre détecte un signal proportionnel à la variance de la différence des intensités :

$$\left(\Delta(\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta)\right)^2 = 4 \left[ \bar{I} \left( \langle (\delta\hat{P}_{OL})^2 \rangle \cos^2(\varphi) - 2 \langle \delta\hat{P}_{OL} \delta\hat{Q}_{OL} \rangle_S \cos(\varphi) \sin(\varphi) \right) \right. \quad (4.9)$$

$$\left. + \langle (\delta\hat{Q}_{OL})^2 \rangle \sin^2(\varphi) \right) + \overline{I_{OL}} \left( \langle (\delta\hat{P})^2 \rangle \cos^2(\varphi) \right) \quad (4.10)$$

$$\left. + 2 \langle \delta\hat{P} \delta\hat{Q} \rangle_S \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \langle (\delta\hat{Q})^2 \rangle \sin^2(\varphi) \right] \quad (4.11)$$

On fait habituellement l'hypothèse que l'oscillateur local est au niveau du bruit quantique standard. Ceci est vérifié dans notre cas, grâce à la cavité de filtrage sur l'infrarouge. Les fluctuations de l'oscillateur local sont donc égales à celles du vide :

$$\langle (\delta\hat{P}_{OL})^2 \rangle = \langle (\delta\hat{Q}_{OL})^2 \rangle = 1 \quad (4.12a)$$

$$\langle \delta\hat{P}_{OL} \delta\hat{Q}_{OL} \rangle_S = 0 \quad (4.12b)$$

Le signal mesuré à l'analyseur de spectre est donc proportionnel à :

$$\left(\Delta(\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta)\right)^2 = 4 \left[ \bar{I} + \overline{I_{OL}} \left( \langle (\delta\hat{P})^2 \rangle \cos^2(\varphi) + 2 \langle \delta\hat{P} \delta\hat{Q} \rangle_S \cos(\varphi) \sin(\varphi) \right) \right. \quad (4.13)$$

$$\left. + \langle (\delta\hat{Q})^2 \rangle \sin^2(\varphi) \right] \quad (4.14)$$

Ainsi on peut, selon la phase relative  $\varphi$ , déduire du signal mesuré à l'analyseur de spectre la valeur de  $\langle (\delta\hat{P})^2 \rangle$ ,  $\langle (\delta\hat{Q})^2 \rangle$  ou  $\langle \delta\hat{P} \delta\hat{Q} \rangle_S$ , c'est-à-dire les termes de la matrice de covariance du champ qu'on souhaite caractériser.

Cette mesure doit être comparée à celle qu'on ferait si le champ à caractériser était un champ d'intensité  $\bar{I}$ , au bruit quantique standard :

$$\left(\Delta(\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta)\right)^2 \Big|_{ref} = 4 (\bar{I} + \overline{I_{OL}}) \quad (4.15)$$

Malheureusement, on n'a pas accès directement à cette variance : on peut seulement bloquer le faisceau à caractériser ; de sorte que le champ  $A$  est un champ vide. Le signal mesuré est :

$$\left(\Delta(\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta)\right)^2 \Big|_{vide} = 4 \overline{I_{OL}} \quad (4.16)$$

Pour avoir la véritable référence, il faut donc multiplier ce signal par :

$$\frac{\left(\Delta(\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta)\right)^2 \Big|_{ref}}{\left(\Delta(\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta)\right)^2 \Big|_{vide}} = 1 + \frac{\bar{I}}{\overline{I_{OL}}} \quad (4.17)$$

Cette méthode a été utilisée, par exemple, dans [Zhang *et al.*, 2001].

Dans le cas habituel d'utilisation de la détection homodyne,  $\bar{I} \ll \overline{I_{OL}}$ , de sorte qu'on arrive à un facteur multiplicatif de 1 : la mesure de  $\left(\Delta(\hat{I}_\alpha - \hat{I}_\beta)\right)^2 \Big|_{vide}$  donne directement la référence.

### E.3 Double détection homodyne

La détection homodyne permet donc de mesurer les fluctuations d'un champ suivant l'une de ses quadratures. Or nous souhaitons caractériser deux champs : le signal et le complémentaire, qui sont séparables grâce à leurs polarisations orthogonales. Il est donc nécessaire de disposer de deux détections homodynes (une pour chaque champ).

Il est également souhaitable d'avoir une référence de phase commune pour les deux détections homodynes, afin que la phase relative des quadratures caractérisées soit fixée – et donc connue. Il est donc nécessaire d'utiliser le même oscillateur local.

Les faisceaux à caractériser et l'oscillateur local étant polarisés, on utilise la configuration en polarisation de la détection homodyne (*cf.* Fig. 4.19(c)). La figure 4.21 présente la double détection homodyne que nous utilisons et qui a été réalisée sur le modèle de celle développée lors de la thèse de V. Josse [Josse, 2003]. Nous allons ensuite détailler précisément le rôle de chacun des éléments de cette détection.

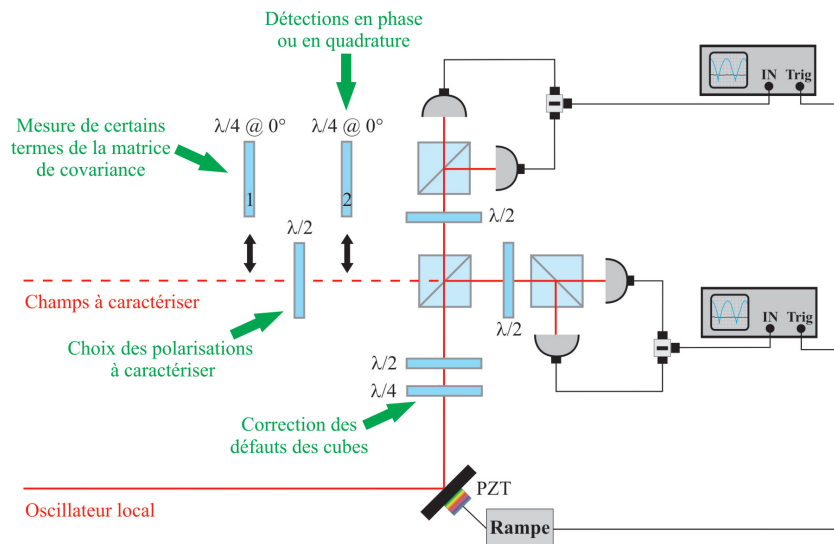


Fig. 4.21: Double détection homodyne en polarisation.

### a) Champs à caractériser

Comme on l'a vu au §1.E.2d), il est possible de tester l'intrication des champs  $A_1$  et  $A_2$  en les mélangeant sur une lame 50/50 et en mesurant la compression de bruit des champs  $A_+$  et  $A_-$  qui résulte de cette opération. La détection homodyne est un dispositif bien adapté pour mesurer la compression de bruit. Nous allons donc exploiter ce lien étroit entre compression et intrication : la mesure de la compression va nous permettre de remonter à la mesure de l'intrication.

L'opération "lame 50/50", pour les champs  $A_1$  et  $A_2$  qui sont polarisés orthogonalement, est réalisée à l'aide d'une lame  $\lambda/2$  et d'un cube polariseur, la lame étant tournée de  $\pi/8$ . Sont ainsi envoyés dans les deux détections homodynes les champs  $A_+$  et  $A_-$ , qui sont comprimés suivant des quadratures orthogonales.

Or on souhaite s'assurer que les compressions de bruit sont bien simultanées. On déphase donc de  $\pi/2$  l'un des deux champs, en insérant une lame  $\lambda/4$  non tournée (lame n°2) avant le premier cube. Ainsi, les champs caractérisés par les détections homodynes sont  $A_+$  et  $iA_-$ , qui sont comprimés suivant la même quadrature.

Nous détaillerons l'utilisation de la lame  $\lambda/4$  n°1 dans le §E.4

### b) Oscillateur local

La phase de l'oscillateur local est ajustée – ou balayée – grâce à un miroir monté sur une cale piézo-électrique, ce qui permet d'allonger le chemin parcouru par le faisceau, et donc de modifier sa phase au niveau des détections.

Sur le trajet de l'oscillateur local, on trouve une lame  $\lambda/2$ , placée avant le premier cube polariseur. Cette lame permet de choisir quelle proportion de l'oscillateur local sera envoyée dans chacune des voies de sortie du cube. On la règle avec un angle de  $\pi/8$ , de façon que l'oscillateur local soit équitablement réparti entre les deux détections homodynes.

Cette lame permet également de choisir si les deux détections homodynes sont réglées en phase (lame tournée de  $\pi/8$ ) ou en opposition de phase (lame tournée de  $-\pi/8$ ) ; la référence de phase étant donnée par la phase de l'oscillateur local.

Quant à la lame  $\lambda/4$ , elle permet de corriger les défauts des cubes polariseurs. En effet, ils sont légèrement biréfringents, de sorte que les deux détections homodynes ne sont pas en phase (l'écart est de l'ordre d'une dizaine de degrés). Or, afin de s'assurer que les faisceaux sont intriqués, les compressions de bruit doivent être observées *simultanément* sur les quadratures concernées des champs. On corrige donc cette biréfringence résiduelle en rendant la polarisation de l'oscillateur local légèrement elliptique.

Le protocole de réglage est le suivant. On sélectionne, à l'aide d'un cube auxiliaire placé en sortie de l'OPO, un seul des champs – le champ signal  $A_1$  par exemple (afin d'éviter les effets liés au mélange des champs signal et complémentaire). La lame  $\lambda/2$  sur

le trajet de ce champ est tournée de  $\pi/8$ , de façon à répartir équitablement le champ sur les deux détections homodynes. La phase de l'oscillateur local est balayée, et le réglage du couple  $\{\lambda/4, \lambda/2\}$  (qui permet d'obtenir n'importe quel état de polarisation de l'oscillateur local) est effectué en s'assurant d'une part que les détections homodynes sont en phase ou en opposition de phase, d'autre part que la puissance de l'oscillateur local est toujours la même sur les quatre photodiodes. Le meilleur réglage que nous avons pu obtenir est présenté sur la figure 4.22.

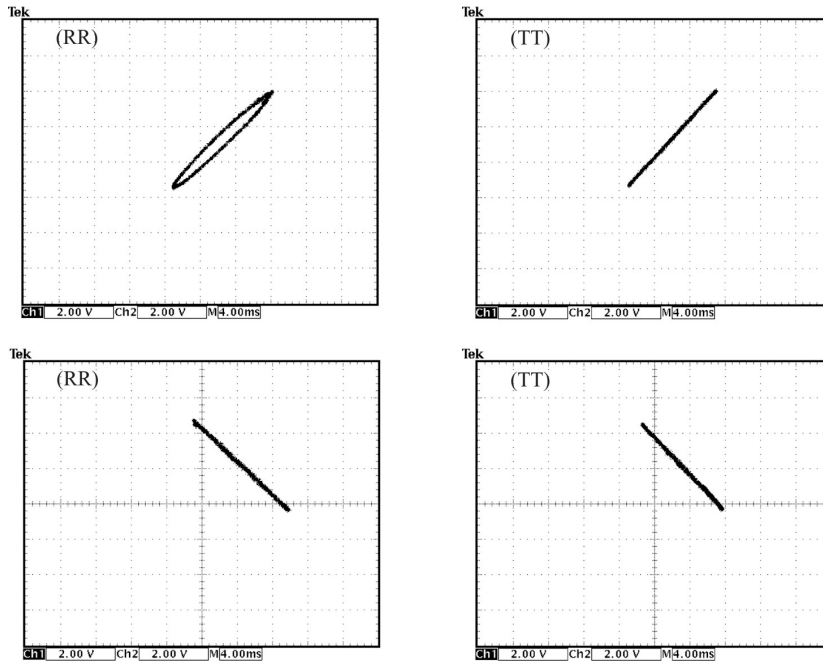


Fig. 4.22: Meilleur réglage obtenu quant à la synchronisation des deux détections homodynes. Mesure en mode XY des photocourants des deux photodiodes en réflexion (RR) ou en transmission (TT), lorsqu'on fait interférer le champ signal  $A_1$  avec l'oscillateur local dont la phase est balayée. La première ligne correspond au choix de l'orientation de la lame  $\lambda/2$  de l'oscillateur local pour que les détections soient en phase, la seconde ligne au choix en opposition de phase.

Étant données les courbes obtenues, on constate que seule la configuration en opposition de phase permet un réglage correct.

### c) Utilisation de l'injection infra-rouge

Ainsi qu'on l'a déjà mentionné au §D.3, une voie d'injection d'infra-rouge dans l'OPO a été ajoutée en fin de thèse. Ceci permet d'effectuer tous les réglages précédents, ainsi que l'adaptation des modes issus de l'OPO, sans être à dégénérescence en fréquence pour l'OPO (en faisant travailler ce dernier au-dessous du seuil d'oscillation).

Sans injection, il est en effet impossible de régler les détections homodynes si on n'est

pas à dégénérescence : elles sont basées sur les interférences entre le champ à caractériser et l'oscillateur local, ce qui n'est possible que s'ils ont la même fréquence. Or ces réglages sont assez longs, et on est gêné par la dérive en fréquence du laser, qui conduit le système à sortir de dégénérescence. Étant donné que les propriétés quantiques des champs issus de l'OPO ne nous intéressent pas pour ces réglages, un champ infra-rouge de bonne fréquence, injecté dans l'OPO, possédera toutes les propriétés de fréquence et de polarisation requises.

Par ailleurs, comme on n'a pas à rechercher sans cesse les paramètres de dégénérescence, le réglage est plus rapide. Il y a donc moins longtemps une forte puissance infra-rouge dans l'OPO pendant la phase de réglage, ce qui limite le phénomène de "gray-tracking" (*cf.* §C.1a)) pendant la phase préliminaire. On peut ainsi passer davantage de temps sur les mesures quantiques avant de devoir changer de point de focalisation de la pompe.

#### E.4 Mesure de la matrice de covariance

Nous allons détailler ici la procédure expérimentale permettant de mesurer chacun des termes de la matrice de covariance des deux champs  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\sigma_{12} = \left( \begin{array}{cc|cc} \langle (\delta \hat{P}_1)^2 \rangle & \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{Q}_1 \rangle_S & \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{P}_2 \rangle_S & \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S \\ \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{Q}_1 \rangle_S & \langle (\delta \hat{Q}_1)^2 \rangle & \langle \delta \hat{Q}_1 \delta \hat{P}_2 \rangle_S & \langle \delta \hat{Q}_1 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S \\ \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{P}_2 \rangle_S & \langle \delta \hat{Q}_1 \delta \hat{P}_2 \rangle_S & \langle (\delta \hat{P}_2)^2 \rangle & \langle \delta \hat{P}_2 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S \\ \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S & \langle \delta \hat{Q}_1 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S & \langle \delta \hat{P}_2 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S & \langle (\delta \hat{Q}_2)^2 \rangle \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Ainsi qu'on l'a montré par le calcul au §E.2, la détection homodyne permet de mesurer tous les termes de la matrice de covariance d'un champ individuel. On peut donc obtenir facilement les termes de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Pour ce faire :

- On n'utilise aucune  $\lambda/4$ .
- La  $\lambda/2$  n'est pas tournée (les champs qu'on envoie dans les détections homodynes sont  $A_1$  et  $A_2$ ).
- Pour  $\varphi = 0$ , on mesure  $\langle (\delta \hat{P}_1)^2 \rangle$  et  $\langle (\delta \hat{P}_2)^2 \rangle$ .
- Pour  $\varphi = \pi/2$ , on mesure  $\langle (\delta \hat{Q}_1)^2 \rangle$  et  $\langle (\delta \hat{Q}_2)^2 \rangle$ .
- Pour  $\varphi \notin \{0, \pi/2\}$ , connaissant les deux valeurs précédentes, on mesure  $\langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{Q}_1 \rangle_S$  et  $\langle \delta \hat{P}_2 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S$ .

Les termes de  $\varepsilon_{12}$  sont des termes mixtes, qui ne peuvent être mesurés qu'en mélangeant les champs : on va utiliser l'opération "lame 50/50" en tournant la lame  $\lambda/2$  à  $\pi/8$ . On mesure alors, suivant la même méthode que précédemment, certains termes de  $\sigma_+$  :

- $\langle (\delta \hat{P}_+)^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle (\delta \hat{P}_1)^2 \rangle + 2 \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{P}_2 \rangle_S + \langle (\delta \hat{P}_2)^2 \rangle \right)$  dont on déduit  $\langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{P}_2 \rangle_S$ .
- $\langle (\delta \hat{Q}_+)^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle (\delta \hat{Q}_1)^2 \rangle + 2 \langle \delta \hat{Q}_1 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S + \langle (\delta \hat{Q}_2)^2 \rangle \right)$  dont on déduit  $\langle \delta \hat{Q}_1 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S$ .

Pour les termes restants, il faut en outre mélanger les quadratures  $\hat{P}$  et  $\hat{Q}$ . Pour ce faire, avant l'opération "lame 50/50", on insère la lame  $\lambda/4$  n°1, ce qui permet d'envoyer dans



les deux détections homodynes les champs  $A_a$  et  $A_b$  définis par :

$$A_{a,b} = \frac{A_1 \pm i A_2}{\sqrt{2}} \quad (4.19)$$

Les quadratures de ces champs valent :

$$\hat{P}_{a,b} = \frac{\hat{P}_1 \mp \hat{Q}_2}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \hat{Q}_{a,b} = \frac{\hat{Q}_1 \pm \hat{P}_2}{\sqrt{2}} \quad (4.20)$$

De sorte qu'en mesurant certains termes de  $\sigma_a$ , on peut obtenir les derniers termes :

$$\begin{aligned} - \langle (\delta \hat{P}_a)^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left( \langle (\delta \hat{P}_1)^2 \rangle - 2 \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S + \langle (\delta \hat{Q}_2)^2 \rangle \right) \text{ dont on déduit } \langle \delta \hat{P}_1 \delta \hat{Q}_2 \rangle_S. \\ - \langle (\delta \hat{Q}_a)^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left( \langle (\delta \hat{Q}_1)^2 \rangle - 2 \langle \delta \hat{Q}_1 \delta \hat{P}_2 \rangle_S + \langle (\delta \hat{P}_2)^2 \rangle \right) \text{ dont on déduit } \langle \delta \hat{Q}_1 \delta \hat{P}_2 \rangle_S. \end{aligned}$$

Ainsi, notre dispositif permet de mesurer tous les termes de la matrice de covariance  $\sigma_{12}$ . Il faut cependant préciser que d'un point de vue expérimental, la mesure des termes nuls pose problème : le bruit sur ces mesures est important ; et l'incertitude qu'on a sur la valeur de ces termes est telle qu'on s'écarte très rapidement d'une matrice physique. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce problème dans le prochain chapitre.

## F Conclusion

Nous avons passé en revue dans ce chapitre l'ensemble du dispositif expérimental et des techniques utilisées ayant permis d'obtenir les mesures présentées dans les deux chapitres suivants.

En particulier, l'ensemble de la procédure de recherche de la dégénérescence en fréquence des champs signal et complémentaire a été détaillée ; et nous avons également montré que la double détection homodyne mise en place sur cette expérience permet de mesurer tous les termes de la matrice de covariance des deux champs. On peut donc réaliser leur caractérisation complète, puisque ces deux champs sont supposés Gaussiens.

## 5. Étude au-dessous du seuil

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>107</b>
<b>B</b>	<b>Faisceaux EPR de valeur moyenne nulle</b>	<b>107</b>
B.1	Mesures à 3,5 <i>MHz</i>	108
B.2	Mesures à basse fréquence	110
<b>C</b>	<b>Influence du couplage sur l'intrication</b>	<b>113</b>
C.1	Mesures en fonction du couplage	114
C.2	Mesure de la matrice de covariance	114
<b>D</b>	<b>Conclusion</b>	<b>123</b>

---

### A Introduction

Nous allons développer dans ce chapitre les résultats sous le seuil avec l'oscillateur paramétrique auto-verrouillé en phase. Ces résultats ont été obtenus avec Julien Laurat, à la fin de sa thèse.

Ce chapitre va permettre de montrer que ce système fonctionne très bien au-dessous du seuil, et qu'il s'agit réellement d'un système modèle pour la génération et l'étude d'états quantiques à 2 modes très généraux.

### B Faisceaux EPR de valeur moyenne nulle

Cette première expérience est la plus simple à effectuer avec notre système : la lame à l'intérieur de la cavité n'est pas tournée<sup>1</sup> ; l'OPO fonctionne juste au-dessous du seuil. La théorie prédit que dans ce cas, on doit observer des faisceaux EPR symétriques de valeur moyenne nulle.

Les mesures ont été effectuées dans deux types de fréquences d'analyse de bruit :

- à 3,5 *MHz*, fréquence suffisamment éloignée de l'oscillation de relaxation du laser (1 *MHz*), et qui reste faible devant la bande passante de la cavité de l'OPO (environ 35 *MHz*).
- sur une large bande s'étendant de 40 *kHz* à 10 *MHz*, afin de tester les limites de notre système du côté des basses fréquences.

---

1. Expérimentalement, nous n'avons jamais observé une absence d'accrochage : l'erreur sur le positionnement du zéro de la lame suffit à provoquer l'accrochage ; bien que la zone d'accrochage soit effectivement très réduite lorsque la lame n'est pas tournée.

### B.1 Mesures à 3,5 MHz

Les résultats présentés dans cette partie sont repris dans [Laurat *et al.*, 2005a].

La figure 5.1 présente les résultats obtenus en balayant la phase de l'oscillateur local, pour la compression de bruit sur  $A_+$  et  $A_-$ . On retrouve une compression de bruit suivant des quadratures orthogonales. La configuration en quadrature des deux détections homodynes (c'est-à-dire en utilisant la lame  $\lambda/4$  n°2 sur le trajet des faisceaux issus de l'OPO) permet de vérifier cela précisément.

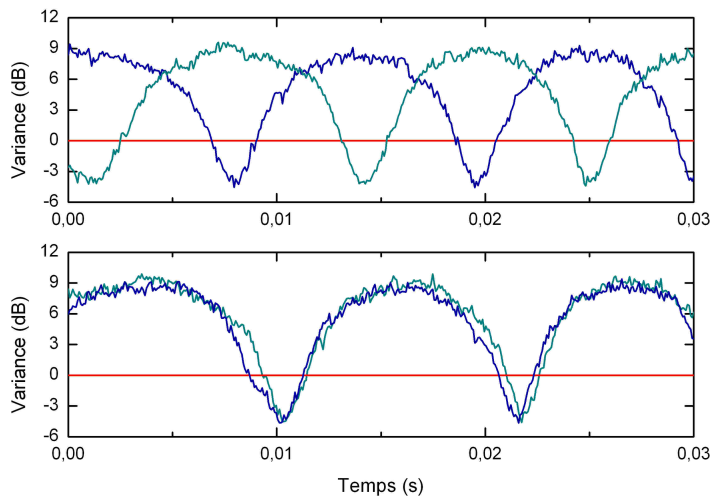


Fig. 5.1: Variance de bruit normalisée des modes  $A_+$  et  $A_-$ , pour une fréquence d'analyse de 3,5 MHz, lorsque la phase de l'oscillateur local est balayée. La première courbe correspond à des détections homodynes en phase, la seconde à des détections en quadrature. Les compressions de bruit sur  $A_+$  et  $A_-$  sont donc suivant des quadratures orthogonales. ( $\sigma = 0,9$ ,  $\text{RBW} = 100 \text{ kHz}$ ,  $\text{VBW} = 1 \text{ kHz}$ )

Le balayage de la phase de l'oscillateur local rend difficile l'estimation de la compression de bruit maximale; en fixant la phase de l'oscillateur local<sup>2</sup>, il est possible de réaliser une mesure beaucoup plus précise (*cf.* Fig. 5.2).

Les détections homodynes sont en quadrature, on a donc accès à une mesure simultanée des compressions de bruit sur les deux champs, et à une mesure directe de la séparabilité. Les compressions de bruit mesurées sont de  $-4,3 \pm 0,3 \text{ dB}$  (63%) et  $-4,5 \pm 0,3 \text{ dB}$  (64,5%). Après correction du bruit électronique, ces valeurs deviennent  $-4,7 \pm 0,3 \text{ dB}$  (66%) et  $-4,9 \pm 0,3 \text{ dB}$  (67,5%).

En tenant compte des paramètres expérimentaux :

2. Il a été montré dans [Laurat, 2004] qu'il était possible d'asservir la phase de l'oscillateur local au maximum de compression de bruit.

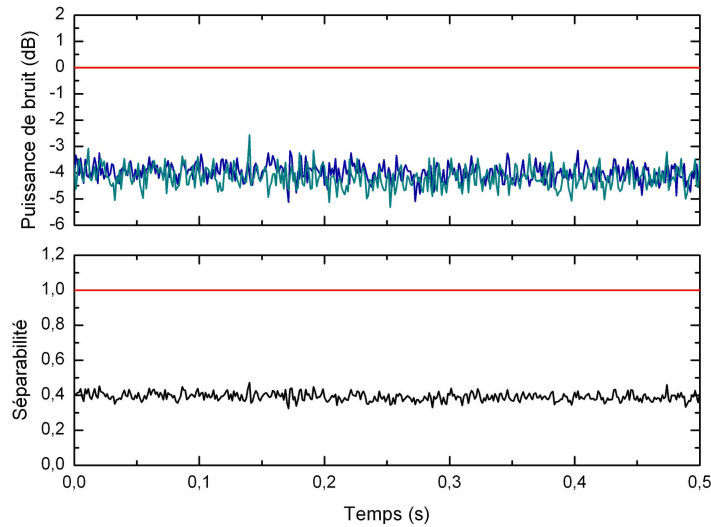


Fig. 5.2: Variance de bruit normalisée des modes  $A_+$  et  $A_-$ , pour une fréquence d'analyse de  $3,5\text{ MHz}$ , et séparabilité  $\Sigma$  pour les modes  $A_1$  et  $A_2$ . Les détections homodynes sont en quadrature. Après correction du bruit électronique, la séparabilité atteint  $0,33 \pm 0,02$ . ( $\sigma = 0,9$ ,  $\text{RBW} = 100\text{ kHz}$ ,  $\text{VBW} = 300\text{ Hz}$ )

- distance au seuil  $\sigma = 0,9$
- fréquence d'analyse normalisée à la bande passante de la cavité  $\Omega = 0,1$
- transmittivité du miroir de sortie  $\gamma = 0,025$
- transmittivité généralisée du miroir de sortie  $\gamma' = 0,03$
- efficacité quantique des détecteurs :  $0,95$
- visibilité de la détection homodyne :  $0,97$
- efficacité lors de la propagation :  $0,96$

on peut calculer la compression de bruit attendue :  $-5,3\text{ dB}$  (72%). Le faible écart des valeurs expérimentales à cette valeur peut s'expliquer partiellement par le walk-off, qui limite légèrement le recouvrement des modes, et partiellement par les quelques pertes optiques avant la détection.

Ces mesures permettent également de vérifier que les faisceaux  $A_+$  et  $A_-$  sont bien symétriques ; et donc les faisceaux  $A_1$  et  $A_2$  également.

On peut directement extraire de cette mesure la valeur de la séparabilité :  $\Sigma = 0,33 \pm 0,02 < 1$ . Les faisceaux sont bien inséparables ; à notre connaissance, cette valeur de la séparabilité est la plus faible obtenue à ce jour.

Le critère de Mancini peut également être testé directement à partir de cette mesure : le produit des gémellités vaut  $0,11 \pm 0,02 < 1$ . Il n'est pas surprenant que le critère de Mancini donne également comme résultat que les états sont inséparables, puisqu'on a vu

au §1.E.2c) que tous les états détectés par le critère de Duan le sont aussi par le critère de Mancini (dans le cas symétrique).

Pour exprimer le critère EPR, il est nécessaire de connaître le bruit individuel des faisceaux  $A_1$  et  $A_2$  (cf. équation (1.26)). Ce bruit a également été mesuré (cf. Fig. 5.7(a)) : on obtient  $(\Delta\hat{P})^2 = (\Delta\hat{Q})^2 = 8,2 \pm 0,5 \text{ dB}$ . Le produit des variances conditionnelles est donc de  $0,42 \pm 0,05 < 1$  : les faisceaux produits sont bien des faisceaux EPR.

Le formalisme symplectique est parfaitement adapté à cette situation expérimentale. Nous l'aborderons dans le §C.2, afin d'étudier l'influence du couplage sur la quantité d'intrication.

## B.2 Mesures à basse fréquence

### a) Motivation

En optique quantique, les mesures sont généralement effectuées pour une fréquence de bruit supérieure au  $MHz$ . En effet, à plus basse fréquence, le bruit technique devient très rapidement gênant. Pour cette raison, on module souvent les signaux étudiés afin de les extraire du bruit.

Cependant, certains systèmes de grande précision ne permettent pas cette modulation haute fréquence ; et pour ces systèmes une source comprimée à basse fréquence apporterait une réelle amélioration (interférométrie gravitationnelle, mesure des déplacements d'un bras de microscope à force atomique [Treppe *et al.*, 2003]).

De façon plus générale, toutes les mesures sont réalisées dans des fenêtres temporelles. Plus cette fenêtre temporelle est étendue, plus les basses fréquences vont contribuer au résultat de la mesure. Une compression sur une large bande de fréquence permettra alors d'améliorer la qualité de la mesure, en autorisant des détections sur des durées plus longues. [Laurat *et al.*, 2004a]

Notre système étant très stable, nous nous sommes intéressés à l'étendue de la gamme de fréquence sur laquelle on pouvait observer de l'intrication.

### b) Intrication sur une large bande de fréquences

Nous avons tout d'abord contrôlé que les faisceaux étaient inséparables entre  $300 \text{ kHz}$  et  $10 \text{ MHz}$ . Le résultat de cette mesure est présenté sur la figure 5.3.

On constate que à l'exception du pic de bruit correspondant à l'oscillation de relaxation du laser, autour de  $1 \text{ MHz}$ , la séparabilité est partout largement inférieure à 1 : les faisceaux sont intriqués. L'oscillation de relaxation du laser conduit à un fort excès de bruit d'intensité ; cet excès de bruit est moins sensible sur  $A_-$  car il s'annule lors de la différence. Un dispositif "mangeur de bruit" permettrait de réduire ce bruit quasiment au bruit quantique standard ; cependant un mangeur de bruit tend à élargir le pic de bruit, donc on perdrait sans doute en compression aux fréquences voisines.

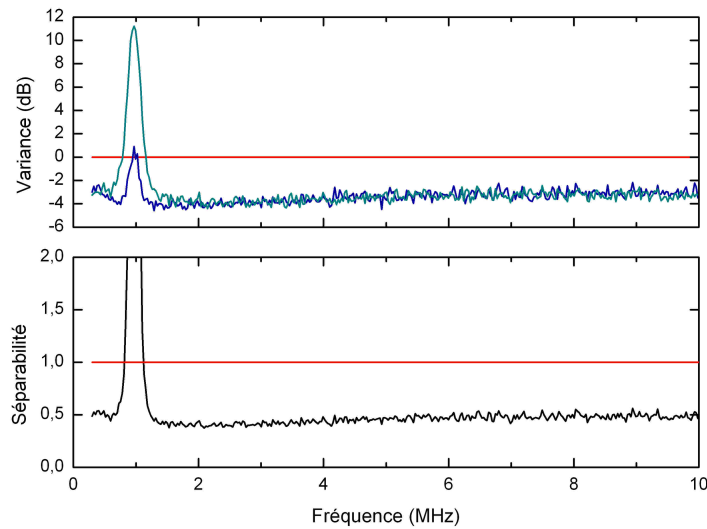


Fig. 5.3: Variance de bruit normalisée des modes  $A_+$  (bleu ciel) et  $A_-$  (bleu foncé), sur une plage de fréquences d'analyse de  $300\text{ kHz}$  à  $10\text{ MHz}$ , et séparabilité  $\Sigma$  pour les modes  $A_1$  et  $A_2$ . Les détections homodynes sont en quadrature. ( $\sigma = 0,9$ ,  $\text{RBW} = 100\text{ kHz}$ ,  $\text{VBW} = 300\text{ Hz}$ )

### c) Intrication et compression de bruit à basse fréquence

Nous avons ensuite cherché à faire des mesures à plus basse fréquence. Ceci a nécessité de modifier le circuit d'amplification des photodiodes. En effet, ce circuit possède deux voies de sortie : une voie pour les basses fréquences (permettant de contrôler l'intensité lumineuse incidente sur la photodiode, par exemple) et une pour les hautes fréquences (permettant l'analyse du bruit à ces fréquences). La fréquence de coupure entre les deux voies est déterminée par une capacité à l'entrée de la voie HF ; nous avons donc changé cette capacité de façon à diminuer la fréquence de coupure à une dizaine de  $\text{Hz}$ . Nous avons également utilisé un analyseur de spectre plus performant (Agilent E4443A), qui permet des mesures de bruit pour des fréquences comprises entre  $3\text{ Hz}$  et  $6,7\text{ GHz}$ .

Les mesures obtenues entre  $40\text{ kHz}$  et  $150\text{ kHz}$  sont présentées à la figure 5.4. Le bruit électronique, au moins inférieur de  $4\text{ dB}$ , a été soustrait.

On constate que la compression est encore de  $3\text{ dB}$  pour chaque mode à  $100\text{ kHz}$  ; le bruit quantique standard étant atteint seulement pour des fréquences inférieures à  $50\text{ kHz}$ . Le fait qu'il n'y ait pas de différence significative entre les deux modes montre que la conservation de la compression à basse fréquence n'est pas due à une réjection de mode commun du bruit classique (qui n'aurait pas lieu pour  $A_+$ ), mais bien à l'absence intrinsèque de bruit basse fréquence.

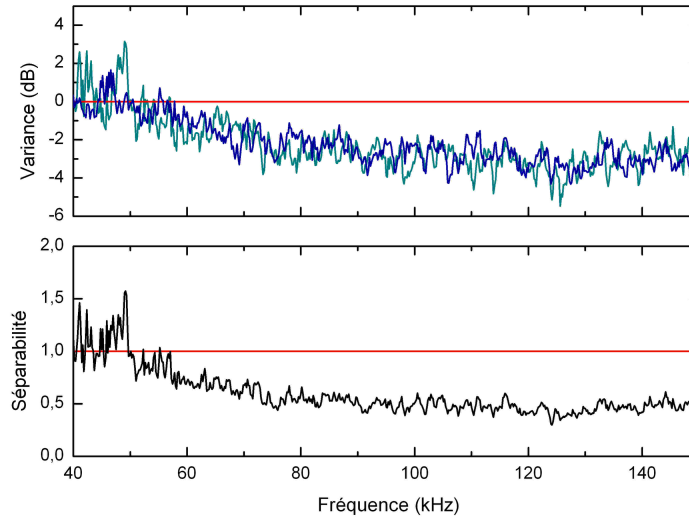


Fig. 5.4: Variance de bruit normalisée des modes  $A_+$  (bleu ciel) et  $A_-$  (bleu foncé), sur une plage de fréquences d'analyse de 40 kHz à 150 kHz, et séparabilité  $\Sigma$  pour les modes  $A_1$  et  $A_2$ . Les mesures ont été corrigées du bruit électronique. Les détections homodynes sont en quadrature. ( $\sigma = 0,9$ , RBW= 3 kHz, VBW= 10 Hz)

#### d) Analyse des résultats

La compression de bruit obtenue avec ce dispositif n'atteint pas encore les fréquences acoustiques, qui seraient indispensables pour les applications liées à l'interférométrie gravitationnelle. En outre, il est *a priori* préférable, pour ces mesures, d'avoir un champ brillant comprimé, ce dont nous ne disposons pas pour l'instant.

Par contre, en ce qui concerne la mesure de petits déplacements, la technique proposée dans [Treppe *et al.*, 2003] consiste à mélanger un champ intense classique avec deux champs vides comprimés ; pour des fréquences de l'ordre de quelques centaines de kHz : notre système est particulièrement bien adapté à cette application.

Enfin, considérons une mesure dans une fenêtre temporelle de durée  $T = 1 \mu s$ . On peut modéliser notre source comme étant limitée au bruit quantique standard au-dessous de 50 kHz, et comprimée à 3 dB au-dessus. On peut alors calculer, par rapport au cas d'un faisceau limité partout au bruit quantique standard, l'amélioration de la variance de la mesure :

$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty} S(\nu) \operatorname{sinc}^2(\pi\nu T) d\nu \quad (5.1)$$

où  $S(\nu)$  est la densité spectrale de bruit du faisceau mesuré. La variance est divisée par 1,7 ; elle serait divisée par 2 si on était comprimé à 3 dB partout. Cette valeur de 1,7 n'est pas significativement modifiée en tenant compte du pic de bruit à 1 MHz et en limitant la compression à 10 MHz. On constate donc que le bruit à basse fréquence apporte une

contribution prépondérante à de telles mesures, ce qui souligne l'intérêt de sources de lumière comprimées à aussi basse fréquence que possible.

### e) Conclusion

Nous avons montré ici la validité du modèle théorique développé pour notre système en fonctionnement sous le seuil : nous obtenons des faisceaux EPR (le critère de corrélations EPR étant très largement violé). L'intrication des champs produits est conservée jusqu'à une fréquence d'environ  $50\text{ kHz}$ , ce qui permet d'envisager des applications d'une telle source pour des mesures nécessitant des faisceaux comprimés à basse fréquence.

La limitation à  $50\text{ kHz}$  est sans doute due au bruit technique du laser et au bruit des asservissements des différentes cavités (OPO, cavité de filtrage sur l'oscillateur local). Il est cependant possible que le circuit d'amplification des photodiodes nous limite également pour cette mesure, et qu'un circuit réellement conçu pour étudier des fréquences de bruit plus basses permettrait d'observer de la compression de bruit à ces fréquences.

Suite à cette démonstration expérimentale de compression de bruit basse fréquence, une expérience similaire a été réalisée à l'Université de Canberra [McKenzie *et al.*, 2004]. La compression de bruit atteint une fréquence de l'ordre de  $200\text{ Hz}$ . L'expérience repose cependant sur un OPO de type I au-dessous du seuil : l'état généré est un état comprimé, et non intriqué comme dans notre expérience.

On peut trouver plusieurs raisons dans la différence entre les deux systèmes, expliquant que nous n'ayons pas obtenu un tel résultat. Dans l'expérience de McKenzie *et al.*, l'OPO est doublement résonnant, et la longueur de la cavité n'est pas asservie, ce qui explique peut-être une remontée plus rapide du bruit dans notre expérience. Par ailleurs, bien que les retours directs vers l'OPO soient évités en inclinant légèrement les surfaces des photodiodes de détection, il est possible que la diffusion soit suffisante pour dégrader les performances à très basse fréquence. Ceci peut être évité en plaçant un isolateur optique en sortie de l'OPO ; c'est l'option qu'a choisie l'équipe australienne, malgré les pertes introduites par un tel dispositif, qui dégradent la compression de bruit. Il est également possible que notre dispositif soit moins bien isolé des fluctuations acoustiques et mécaniques, qui deviennent prédominantes à basse fréquence.

Plus récemment, des résultats très large bande ( $10\text{ Hz} - 35\text{ MHz}$ ) ont été obtenus en type I par l'équipe de R. Schnabel à Hannover [Chelkowski *et al.*, 2007].

## C Influence du couplage sur l'intrication

Dans cette partie, nous allons détailler l'effet de l'augmentation du couplage, *via* l'augmentation de l'angle de la lame, sur l'intrication des faisceaux vides. Nous nous placerons à une fréquence d'analyse de  $3,5\text{ MHz}$ . Ces résultats ont également été présentés dans [Laurat *et al.*, 2005a].



### C.1 Mesures en fonction du couplage

Rappelons que le couplage est défini par un paramètre  $c = \frac{2\rho}{\gamma'}$  où  $\rho$  est l'angle de la lame par rapport aux axes propres du cristal, et  $\gamma'$  la transmittivité généralisée du miroir de sortie. Le paramètre  $c$  doit être comparé à 1, *cf.* par exemple les équations (3.43). Comme  $\gamma' = 0,03 \ll 1$ , un angle  $\rho$  faible correspond déjà à un couplage important : par exemple,  $c = 1$  pour  $\rho = 0,8^\circ$ .

La figure 5.5 présente la compression de bruit obtenue simultanément (les détections homodynes sont en quadrature) pour les modes  $A_+$  et  $A_-$ , pour 4 valeurs du paramètre de couplage.

Ainsi, plus le couplage augmente, plus l'angle entre les ellipses de bruit des modes  $A_+$  et  $A_-$  s'éloigne de  $90^\circ$ . Parallèlement à cette rotation des ellipses de bruit, la compression de bruit sur  $A_-$  diminue (ceci est surtout sensible sur la figure 5.5(d)).

Ce comportement était prédit qualitativement par la théorie (*cf.* §3.D.3a) ; la figure 5.6 présente la comparaison quantitative avec la théorie, en ce qui concerne l'angle de rotation de l'ellipse (*cf.* Fig. 5.6(a)), et la variance du mode  $A_-$  (*cf.* Fig. 5.6(b)).

Si la théorie décrit bien le comportement de l'angle entre les ellipses de bruit de  $A_+$  et  $A_-$ , il est manifeste que la compression de bruit est dégradée beaucoup moins vite que prévu. Cet écart à la théorie n'a pas été expliqué à ce jour. Une hypothèse avancée était que les termes non résonnants, négligés dans les équations, pouvaient contribuer à la compression de bruit, mais elle a été infirmée par le calcul.

Le bruit des modes signal et complémentaire  $A_1$  et  $A_2$  dépend également du couplage : lorsque ce dernier augmente, le bruit devient dépendant de la quadrature, et peut (pour un couplage important) être comprimé sous le bruit quantique standard. La figure 5.7 présente ces résultats.

Plus le couplage augmente, plus le bruit minimal des modes signal et complémentaire est obtenu pour des quadratures proches de celles qui sont corrélées. Il est également intéressant de constater que pour un couplage élevé ( $c = 1,8$ ), les faisceaux  $A_+$  et  $A_-$  d'une part,  $A_1$  et  $A_2$  d'autre part, sont tous comprimés. On ne peut cependant pas en conclure directement que  $A_+$  et  $A_-$  violent le critère de Duan (1.29), car on n'est pas dans le cas symétrique<sup>3</sup>, c'est-à-dire  $c = 0$ . Or le calcul de la séparabilité fait intervenir les variances de bruit des combinaisons linéaires de deux quadratures orthogonales ; les quadratures de  $A_1$  et  $A_2$  qui sont ici comprimées ne sont pas orthogonales !

### C.2 Mesure de la matrice de covariance

Dans cette partie, nous allons détailler les résultats obtenus lorsqu'on applique la procédure de mesure de la matrice de covariance présentée au §4.E.4, ainsi qu'une exploitation possible de ces mesures en termes de quantité d'intrication "disponible". Ceci

3. Dans le cas non symétrique, il reste un critère suffisant, mais qui est beaucoup plus difficile à violer.

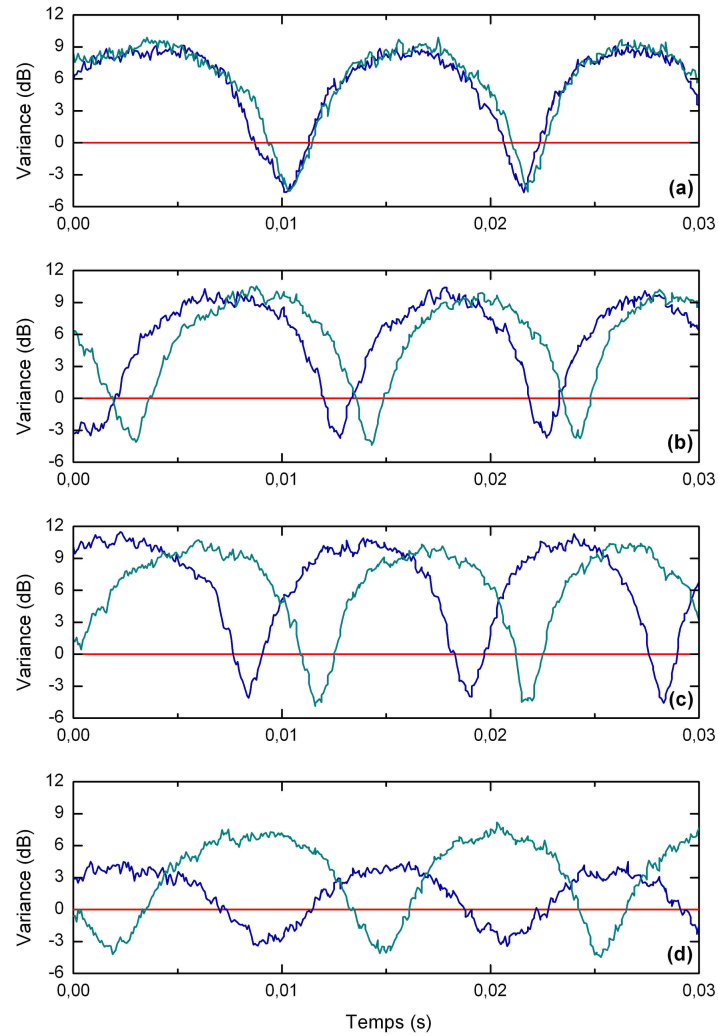
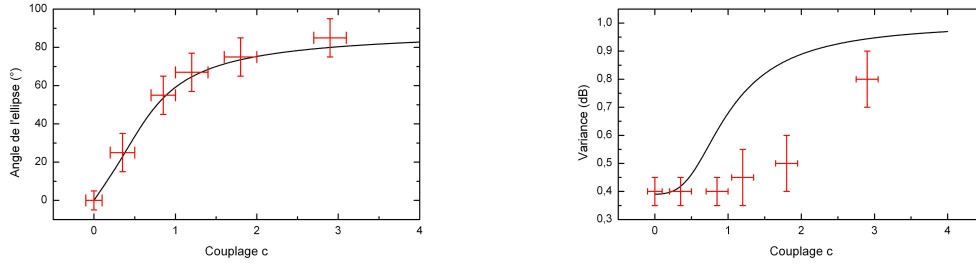


Fig. 5.5: Variance de bruit normalisée des modes  $A_+$  (bleu ciel) et  $A_-$  (bleu foncé) pour une fréquence d'analyse de bruit de  $3,5 \text{ MHz}$ , pour 4 valeurs du paramètre de couplage : **(a)**  $c = 0$  **(b)**  $c = 0,35$  **(c)**  $c = 0,85$  **(d)**  $c = 1,8$ . La phase de l'oscillateur local est balayée, les détections homodynes sont en quadrature. ( $\sigma = 0,9$ ,  $\text{RBW} = 100 \text{ kHz}$ ,  $\text{VBW} = 1 \text{ kHz}$ )

est le résultat d'une collaboration avec l'équipe de Fabrizio Illuminati à Salerno (Italie) [Laurat *et al.*, 2005b].



(a) Influence du couplage sur l'écart à  $90^\circ$  de l'angle entre les ellipses de bruit de  $A_+$  et  $A_-$ . (b) Influence du couplage sur la variance de  $A_-$ .

Fig. 5.6: Comparaison théorie (en noir) et expérience (en rouge) pour l'influence du couplage sur les propriétés des faisceaux issus de l'OPO.

### a) Aspect expérimental

Puisqu'on s'intéresse plus particulièrement à l'intrication, on souhaite mesurer la matrice de covariance  $\sigma_{12}$  des modes signal et complémentaire  $A_1$  et  $A_2$ . Nous avons en fait choisi de mesurer la matrice de covariance  $\sigma_{+-}$  des champs  $A_+$  et  $A_-$ . Connaissant la relation (1.33) qui lie ces champs, on peut aisément remonter à  $\sigma_{12}$ .

La transformation permettant de passer de  $A_1/A_2$  à  $A_+/A_-$  est une transformation passive unitaire ; elle possède donc son équivalent symplectique (*cf.* §2.B.3a)). Mais c'est une transformation non locale, elle modifie donc la quantité d'intrication du système. De fait, elle la modifie même de façon extrême : on va voir que les champs  $A_1/A_2$  sont intriqués, tandis que  $A_+/A_-$  sont totalement décorrés.

Par ailleurs, nous nous sommes heurtés à un problème (déjà mentionné au §4.E.4) concernant la précision des mesures. En effet, les modes  $A_+/A_-$  étant les modes les plus décorrés, on doit avoir des blocs non-diagonaux identiquement nuls. Mais le bruit sur la mesure étant assez important, le rapport signal à bruit<sup>4</sup> est faible. On a donc une mauvaise précision sur la mesure de ces 0 : on mesure typiquement  $0,07 \pm 0,05$  ou  $1,0 \pm 1,0$ . Malheureusement, de telles valeurs mènent très rapidement à s'écarter d'une matrice représentant un état physique.

Dans la suite, nous avons pris ces termes identiquement nuls ; ceci est figuré dans les matrices ci-dessous par la notation (0). Ce faisant nous modifions éventuellement la valeur de la quantité d'intrication du système, mais nous la diminuons nécessairement. En effet, si ces termes, qui représentent les corrélations entre les modes  $A_+$  et  $A_-$ , ne sont pas nuls, c'est qu'il existe une autre base de modes dans laquelle ils sont nuls, et donc les modes les plus corrélés de notre système ne sont pas  $A_1$  et  $A_2$ . En conclusion, si on fait par ce biais une erreur sur la quantité d'intrication contenue dans les faisceaux, il s'agit nécessairement d'une sous-estimation.

4. Tout le problème vient du fait que notre signal est ici du bruit, or le bruit du bruit est très élevé.

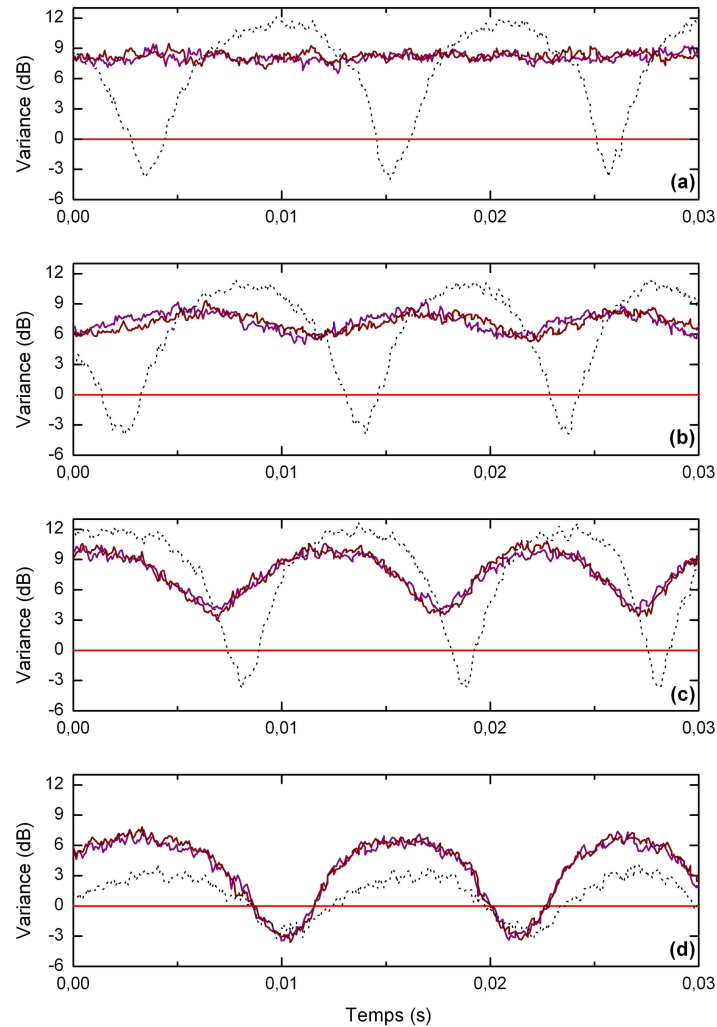


Fig. 5.7: Variance de bruit normalisée des modes  $A_1$  (bordeaux) et  $A_2$  (violet) pour une fréquence d'analyse de bruit de  $3,5 \text{ MHz}$ , pour 4 valeurs du paramètre de couplage : **(a)**  $c = 0$  **(b)**  $c = 0,35$  **(c)**  $c = 0,85$  **(d)**  $c = 1,8$ . La courbe en pointillés noirs représente la variance de bruit sur  $A_-$ . La phase de l'oscillateur local est balayée, les détections homodynes sont en quadrature. ( $\sigma = 0,9$ ,  $\text{RBW} = 100 \text{ kHz}$ ,  $\text{VBW} = 1 \text{ kHz}$ )

Le choix de la référence de phase pour l'oscillateur local va conditionner la valeur des termes de la matrice. On choisit l'origine des phases de telle sorte que l'ellipse de bruit

de  $A_+$  soit alignée avec les axes. Ainsi les deux termes non diagonaux du premier bloc seront toujours nuls.

### b) lame non tournée

#### MATRICES MESURÉES

La matrice de covariance mesurée pour  $A_+/A_-$  est :

$$\sigma_{+-}(c=0) = \left( \begin{array}{cc|cc} 7.94 & 0 & (0) & (0) \\ 0 & 0.33 & (0) & (0) \\ \hline (0) & (0) & 0.33 & 0 \\ (0) & (0) & 0 & 7.94 \end{array} \right) \quad (5.2)$$

Ce qui donne pour  $A_1/A_2$  :

$$\sigma_{12}(c=0) = \left( \begin{array}{cc|cc} 4.14 & 0 & 3.81 & 0 \\ 0 & 4.14 & 0 & -3.81 \\ \hline 3.81 & 0 & 4.14 & 0 \\ 0 & -3.81 & 0 & 4.14 \end{array} \right) \quad (5.3)$$

On constate que les termes non diagonaux du dernier bloc sont nuls : l'ellipse de bruit de  $A_-$  est elle aussi alignée sur les axes ; les champs  $A_+$  et  $A_-$  sont comprimés suivant des quadratures orthogonales. La matrice de covariance de l'état est directement dans la forme standard, il est inutile d'appliquer des transformations à cet état pour s'y ramener. On remarquera également que les termes diagonaux de la matrice sont tous égaux, ce qui signifie que l'état est symétrique (*cf.* §2.E.2c)).

On peut tout d'abord vérifier que ces matrices sont physiques, et que la transformation permettant de passer de l'une à l'autre est bien symplectique. Pour ce faire, on calcule les valeurs propres symplectiques (*cf.* §2.B.4a)).

On trouve bien qu'elles sont égales pour les deux matrices, ce qui confirme que la transformation est symplectique. Pour chaque matrice, les deux valeurs propres symplectiques sont égales à  $1,62 > 1$  : ces matrices sont bien celles d'un état physique. Ceci valide notre mesure.

#### INTRICATION ET NÉGATIVITÉ LOGARITHMIQUE

On effectue sur les matrices de covariance l'opération (2.45) correspondant à la transposition partielle de la matrice densité, et on calcule les valeurs propres symplectiques de ces nouvelles matrices.

Pour  $\tilde{\sigma}_{12}(c=0)$ , on trouve deux valeurs propres symplectiques distinctes : 0,33 et 7,94. La plus petite est inférieure à 1, ce qui prouve que les champs  $A_1$  et  $A_2$  sont intriqués, d'après le critère PPT. Le calcul de la négativité logarithmique donne  $E_{\mathcal{N}}(c=0) = 1,60 > 0$  : comme on l'a vu précédemment avec la mesure de la séparabilité, l'état  $A_1/A_2$  est très intriqué.

À l'inverse, on trouve pour  $\tilde{\sigma}_{+-}(c=0)$  deux valeurs propres égales valant 1,62. Aucune n'est inférieure à 1 : l'état  $A_+/A_-$  n'est absolument pas intriqué.

#### QUANTITÉ D'INTRICATION MAXIMALE

L'état qui sort de l'OPO est un état symétrique, directement dans la forme standard ; la théorie prévoit donc qu'aucune opération passive ne permettra d'augmenter la quantité d'intrication entre les modes (*cf.* §2.E.2b)). Nous allons le vérifier rapidement.

La négativité logarithmique maximale qu'on peut atteindre (2.74) dépend des deux plus petites valeurs propres orthogonales de la matrice de covariance, qui valent ici  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,33$ . On trouve ainsi que la négativité logarithmique maximale qu'on peut atteindre est  $E_{\mathcal{N}}^{max}(c=0) = 1,60$  : c'est la valeur mesurée.

#### INTRICATION ET PURETÉ

Nous allons nous intéresser à la pureté de l'état produit, et appliquer les critères d'intrication mentionnés au §2.E.3.

On peut calculer la valeur des invariant symplectiques globaux et locaux :

- la pureté de l'état global  $\mu = 0,38 < 1$  : l'état n'est pas un état pur, il s'agit d'un mélange statistique d'états
- le séralien :  $\Delta = 5,25$
- la pureté de l'état du premier mode :  $\mu_1 = 0,24$
- la pureté de l'état du deuxième mode :  $\mu_2 = 0,24$

L'inégalité (2.77) s'écrit donc :

$$5,25 \leq \Delta \leq 7,88 \quad (5.4)$$

On constate que non seulement l'inégalité est bien vérifiée, mais encore la partie de gauche de l'inégalité est saturée : l'état est donc un état maximalelement intriqué (GMEMS). Ceci signifie que, étant données la pureté globale de l'état et les puretés individuelles des deux modes, il n'est pas possible d'avoir un état plus intriqué.

Quant au critère d'intrication reposant sur la pureté (*cf.* tableau 2.3), on peut aisément vérifier qu'on est bien dans le cas décidable pour les états intriqués ; ce qui conforte les conclusions précédemment tirées. En effet :  $\frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 \mu_2^2}} = 0,17$  et

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 + |\mu_1 - \mu_2|} = 1.$$

c) **Lame tournée** :  $c = 0,35$

MATRICES MESURÉES

Les mesures de la matrice de covariance sur  $A_+/A_-$  donnent :

$$\sigma_{+-}(c = 0,35) = \left( \begin{array}{cc|cc} 12.59 & 0 & (0) & (0) \\ 0 & 0.4 & (0) & (0) \\ \hline (0) & (0) & 3.45 & -5.28 \\ (0) & (0) & -5.28 & 9.54 \end{array} \right) \quad (5.5)$$

De sorte que pour  $A_1/A_2$ , on obtient :

$$\sigma_{12}(c = 0,35) = \left( \begin{array}{cc|cc} 8.02 & -2.64 & 4.57 & 2.64 \\ -2.64 & 4.97 & 2.64 & -4.57 \\ \hline 4.57 & 2.64 & 8.02 & -2.64 \\ 2.64 & -4.57 & -2.64 & 4.97 \end{array} \right) \quad (5.6)$$

La première remarque à faire sur cette mesure est que, comme cette fois les compressions maximales ne sont plus suivant des quadratures orthogonales pour  $A_+$  et  $A_-$ , la matrice de covariance pour  $A_1/A_2$  n'est pas dans la forme standard (2.60). C'est pour cette raison que nous n'avons pas cherché à mesurer directement la séparabilité.

INTRICATION ET NÉGATIVITÉ LOGARITHMIQUE

Les calculs de valeurs propres symplectiques, eux, sont toujours valables; ce qui montre l'intérêt de ce formalisme très général. On trouve à nouveau que les valeurs propres symplectiques des matrices de covariance sont égales, et valent toutes  $2,24 > 1$  : ce sont les matrices d'états physiques.

Quant aux valeurs propres symplectiques de la transposée partielle, on trouve 0,46 et 11,01 pour signal et complémentaire : ces champs sont intriqués puisque  $0,46 < 1$ . La négativité logarithmique vaut  $E_{\mathcal{N}}(c = 0,35) = 1,13 > 0$  : on est toujours très intriqué; cependant, comme attendu, on l'est moins que dans le cas  $c = 0$ .

QUANTITÉ D'INTRICATION MAXIMALE

La valeur plus faible de la négativité logarithmique mesurée n'a pas pour unique origine la dégradation des corrélations par la lame. En effet, l'état issu de l'OPO est symétrique (voir plus loin), mais il n'est pas dans la forme standard.

La théorie prévoit donc qu'on peut augmenter l'intrication entre les champs grâce à des opérations passives. Les deux plus petites valeurs propres orthogonales valent  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,40$ ; ce qui mène à  $E_{\mathcal{N}}^{max}(c = 0,35) = 1,32$ . C'est certes plus faible que la valeur de 1,60 obtenue dans le cas où le couplage était nul (signe que ce dernier dégrade bel et bien l'intrication), mais supérieur à la valeur mesurée de 1,13.

Nous verrons au § d) qu'il est effectivement possible expérimentalement d'augmenter la quantité d'intrication grâce à des opérations passives non locales.

### RETOUR À LA FORME STANDARD GRÂCE À UNE TRANSFORMATION SYMPLECTIQUE LOCALE

Vérifions sur les valeurs expérimentales qu'il est possible de trouver une transformation symplectique locale qui donne une matrice de covariance sous la forme standard pour  $A_1$  et  $A_2$ .

La transformation locale à 2 modes la plus générale est donnée par une matrice-bloc donc chacun des blocs diagonaux est une transformation locale à 1 mode la plus générale possible (2.15). Les blocs anti-diagonaux sont identiquement nuls :

$$S_{loc,2}(\theta_1, \theta'_1, r_1, \theta_2, \theta'_2, r_2) = \left( \begin{array}{c|c} S_{loc,1}(\theta_1, \theta'_1, r_1) & (0) \\ \hline (0) & S_{loc,1}(\theta_2, \theta'_2, r_2) \end{array} \right) \quad (5.7)$$

Le calcul permet de déterminer les paramètres à utiliser :

- \*  $\theta_1 = \theta_2 = -50,0^\circ$
- \*  $\theta'_1 = \theta'_2 = -27,1^\circ$
- \*  $r_1 = r_2 = -0,23$

Il faudrait donc déphaser chacun des champs de  $-27,1^\circ$ , puis comprimer chacun des champs, puis à nouveau déphaser de  $-50,0^\circ$ . La matrice de covariance qu'on obtiendrait après ces opérations serait alors dans la forme standard :

$$\sigma_{12}^{stand}(c = 0,35) = \left( \begin{array}{cc|cc} 5.73 & 0 & -5.28 & 0 \\ 0 & 5.73 & 0 & 5.28 \\ \hline -5.28 & 0 & 5.73 & 0 \\ 0 & 5.28 & 0 & 5.73 \end{array} \right) \quad (5.8)$$

Le calcul montre alors immédiatement que ni les valeurs propres symplectiques de cette matrice, ni celles de la transposée partielle, n'ont changé. La valeur de la négativité logarithmique n'a donc pas non plus été modifiée. On constate également, d'après la forme standard correspondant à cet état, qu'il est symétrique.

Nous n'avons pas eu la possibilité de réaliser cette expérience ; car nous ne disposons pas de deux dispositifs de compression de bruit supplémentaires.

#### d) Obtention des états les plus intriqués

Comme on l'a vu, l'état est symétrique, mais à sa sortie de l'OPO il n'est pas dans la forme standard. Son intrication n'est pas maximale ; il est possible d'appliquer aux champs  $A_1$  et  $A_2$  une transformation passive globale permettant d'obtenir un état dont la négativité logarithmique est maximale. Comme on l'a vu au §2.E.2b), cette transformation peut être effectuée à l'aide de 3 lames d'onde qu'on insère en sortie de l'OPO. Ces lames agissent simultanément sur les deux champs : il s'agit bien d'une transformation



globale.

Appliquer cette transformation globale sur les champs  $A_1/A_2$  revient à appliquer une transformation locale sur le champ  $A_-$ , de façon à annuler les deux termes non diagonaux non nuls de la matrice (5.5). Pour cela, le champ  $A_-$  doit simplement être déphasé de façon que son ellipse de bruit ait ses axes parallèles aux axes du repère de Fresnel (*cf.* Fig. 5.8).

Expérimentalement, c'est cette dernière propriété qu'on exploite : on règle les lames

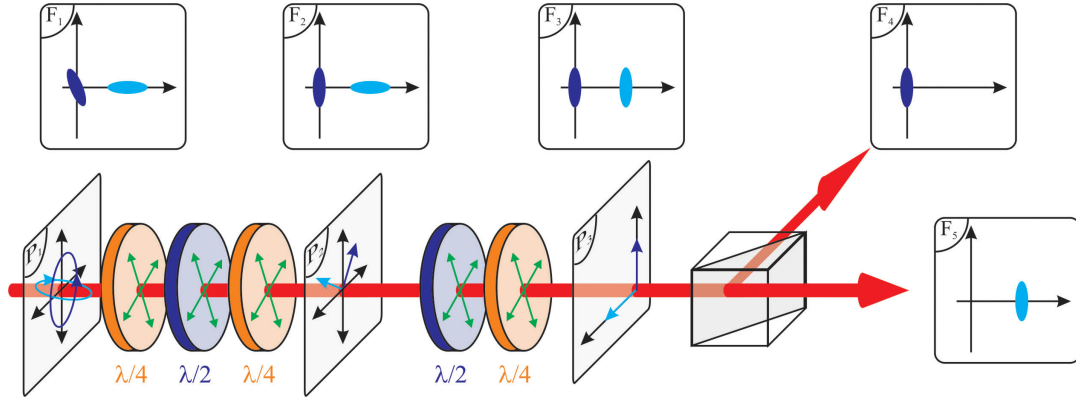


Fig. 5.8: Transformation passive globale permettant de maximiser l'intrication des champs en sortie de l'OPO auto-verrouillé en phase. Les plans ( $F_i$ ) sont les plans de Fresnel et les plans ( $P_i$ ) ceux de polarisation.

d'ondes pour que, lorsque les détections homodynes sont en quadrature, les champs  $A_+$  et  $A_-$  soient comprimés simultanément (*cf.* Fig. 5.9).

La figure 5.9 présente les mesures obtenues pour les champs  $A_+$  et  $A_-$  avant et après la transformation. Après avoir inséré les lames, on constate que les champs sont à nouveau comprimés suivant des quadratures orthogonales. La nouvelle mesure de la matrice de covariance mesurée pour  $A_+/A_-$  est :

$$\sigma_{+-} = \left( \begin{array}{cc|cc} 12.59 & 0 & (0) & (0) \\ 0 & 0.4 & (0) & (0) \\ \hline (0) & (0) & 0.4 & 0 \\ (0) & (0) & 0 & 12.59 \end{array} \right) \quad (5.9)$$

On en déduit la matrice de covariance pour  $A_1/A_2$  :

$$\sigma_{12} = \left( \begin{array}{cc|cc} 6.50 & 0 & 6.10 & 0 \\ 0 & 6.50 & 0 & -6.10 \\ \hline 6.10 & 0 & 6.50 & 0 \\ 0 & -6.10 & 0 & 6.50 \end{array} \right) \quad (5.10)$$

On constate que la matrice est bien dans la forme standard ; la négativité logarithmique est à présent de 1,32 : la quantité d'intrication a augmenté grâce à une opération

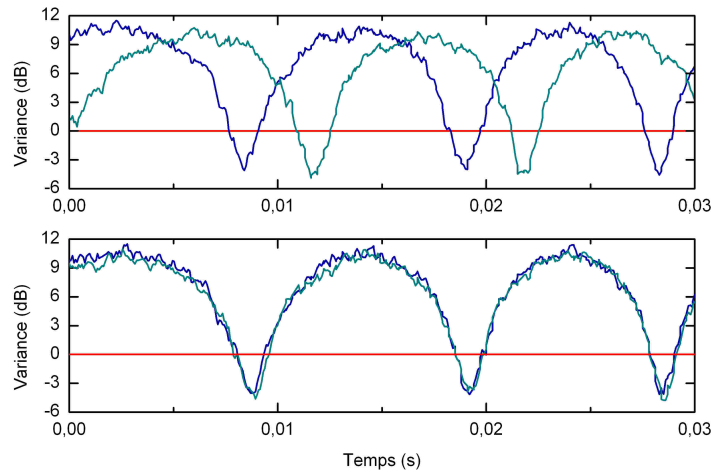


Fig. 5.9: Variance de bruit normalisée des modes  $A_+$  (bleu ciel) et  $A_-$  (bleu foncé) pour une fréquence d'analyse de bruit de  $3,5 \text{ MHz}$ , pour un paramètre de couplage  $c = 0,35$ . La première courbe est celle obtenue avant d'appliquer la transformation passive non locale, celle du bas est obtenue après la transformation. La phase de l'oscillateur local est balayée, les détections homodynes sont en quadrature. ( $\sigma = 0,9$ ,  $\text{RBW} = 100 \text{ kHz}$ ,  $\text{VBW} = 1 \text{ kHz}$ )

passive non locale. En outre, on a pu atteindre ainsi la quantité d'intrication maximale qu'on pouvait obtenir grâce à des opérations passives à partir des faisceaux issus de l'OPO.

## D Conclusion

Nous avons montré dans cette partie que l'OPO à auto-verrouillage de phase, en fonctionnement sous le seuil et avec très peu de couplage entre les champs signal et complémentaire, produit des faisceaux symétriques, très intriqués, et ce sur une large bande de fréquence.

Nous avons également montré que la matrice de covariance de l'état généré dans ces conditions est directement dans la forme standard, de sorte que l'intrication ainsi produite ne peut être augmentée par des opérations passives.

Lorsque le couplage augmente, les corrélations sont peu à peu détruites. En outre, les champs ne sont plus intriqués suivant des quadratures orthogonales, ce qui se traduit par une matrice de covariance qui n'est plus dans la forme standard. Il est possible de revenir à la forme standard par des opérations locales, qui préservent la matrice de covariance.

Il est également possible d'agir concomitamment sur les deux modes à l'aide d'opérations passives, pour générer de nouveaux champs intriqués suivant des quadratures orthogonales. La matrice de covariance de ces champs est dans la forme standard, et

la quantité d'intrication des modes ainsi obtenus ne peut plus être augmentée par des opérations passives.

## 6. Étude au-dessus du seuil

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>125</b>
<b>B</b>	<b>Mesures directes</b>	<b>126</b>
B.1	Mesures à une fréquence d'analyse de 4 <i>MHz</i>	126
B.2	Mesures à une fréquence d'analyse de 16,5 <i>MHz</i>	127
<b>C</b>	<b>Mesure du bruit du laser, en utilisant une cavité désaccordée</b>	<b>128</b>
C.1	Position du problème	128
C.2	Champs moyens	130
C.3	Linéarisation des fluctuations	130
C.4	Spectre de bruit d'intensité du champ sortant	131
C.5	Tracé des coefficients intervenant dans le spectre de bruit d'intensité	132
C.6	Expérience	134
<b>D</b>	<b>Observation de faisceaux EPR au-dessus du seuil</b>	<b>135</b>
D.1	Filtrage du bruit de la pompe	135
D.2	Résultats expérimentaux	136
D.3	Résumé du comportement en fréquence	137
D.4	Comparaison avec les résultats obtenus par d'autres équipes	137
<b>E</b>	<b>Conclusion</b>	<b>138</b>

---

### A Introduction

Comme on l'a vu au chapitre 3, l'OPO auto-verrouillé en phase présente un intérêt tout particulier au-dessus du seuil. La théorie prédit qu'il génère des faisceaux EPR brillants, de même fréquence. Cependant, il a également été démontré au chapitre 3 que, au-dessus du seuil, si le bruit de la pompe n'est pas limité par le bruit quantique standard, l'excès de bruit se transmet aux faisceaux signal et complémentaire, ce qui dégrade les corrélations.

Dans ce chapitre, nous allons aborder la mesure des faisceaux EPR au-dessus du seuil. Le bruit de la pompe va s'avérer trop important à basse fréquence d'analyse : il ne sera pas possible de détecter des corrélations entre faisceaux signal et complémentaire. Nous verrons qu'à plus haute fréquence d'analyse, le bruit de la pompe étant moins important, on peut détecter des corrélations, et que la mise en place d'une cavité de filtrage sur la

pompe sera nécessaire pour pouvoir mesurer des faisceaux EPR.

Afin d'éviter toute dégradation supplémentaire des corrélations par le couplage, les mesures de cette partie sont réalisées à couplage quasi nul (juste suffisant pour qu'il y ait accrochage).

## B Mesures directes

### B.1 Mesures à une fréquence d'analyse de 4 MHz

La figure 6.1 présente une mesure de bruit sur  $A_+$  et  $A_-$ , effectuée à une fréquence d'analyse de 4 MHz, 1,5 fois au-dessus du seuil.

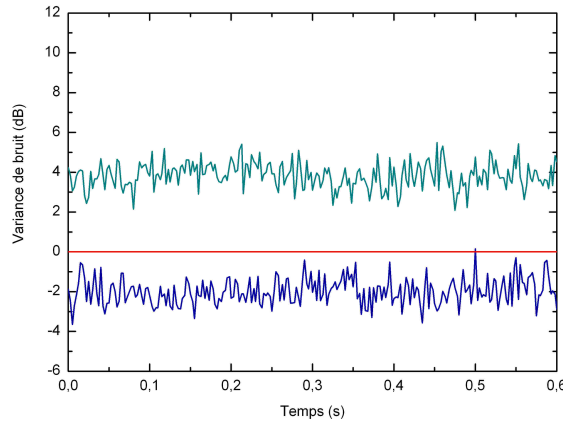


Fig. 6.1: Variance de bruit normalisée de la quadrature la moins bruitée des modes  $A_+$  (bleu ciel) et  $A_-$  (bleu foncé) pour une fréquence d'analyse de bruit de 4 MHz. Les mesures ont été corrigées du bruit électronique. ( $\sigma = 1,5$ , RBW= 100 kHz, VBW= 1 kHz)

On constate que si le champ  $A_-$  est toujours comprimé au-dessous du bruit quantique standard (compression de bruit de  $-2,5 \pm 0,5$  dB), le champ  $A_+$  présente un fort excès de bruit, de l'ordre de  $3,5 \pm 0,5$  dB [Laurat *et al.*, 2005c].

Les autres équipes utilisant le même laser (équipe de P. Nussenzeig à São Paulo, équipe de O. Pfister à Charlottesville) ont montré qu'il présente un excès de bruit, en particulier de bruit de phase, jusqu'à une fréquence d'analyse d'environ 20 MHz, et ont mis en place une cavité de filtrage sur le faisceau pompe [Villar *et al.*, 2007, Jing *et al.*, 2006]. On a vu que, au-dessus du seuil, un tel excès de bruit se transmet aux champs signal et complémentaire. Ceci pourrait expliquer les mauvais résultats observés à une fréquence d'analyse de 4 MHz.

Afin de valider cette hypothèse, et de décider de l'éventuelle mise en place d'une cavité

de filtrage, deux expériences complémentaires ont été effectuées. Nous avons d'une part réalisé les mesures de corrélations à une fréquence plus élevée, où l'excès de bruit devrait être moindre, et le phénomène moins sensible (*cf.* §B.2). D'autre part, en utilisant une cavité désaccordée, nous avons mesuré le bruit de phase et d'intensité du laser à une fréquence d'analyse de  $4\text{ MHz}$  (*cf.* §C).

## B.2 Mesures à une fréquence d'analyse de $16,5\text{ MHz}$

Le bruit de la pompe s'atténue fortement à partir de  $20\text{ MHz}$ . Il est limité par le bruit quantique standard pour une fréquence d'analyse d'environ  $25\text{ MHz}$ . Malheureusement, nous ne pouvons effectuer de mesure à cette fréquence d'analyse, car la partie haute fréquence du circuit d'amplification des photodiodes sature au-delà de  $20\text{ MHz}$ .

Nous avons donc choisi une fréquence d'analyse du bruit de  $16,5\text{ MHz}$ . La figure 6.2) présente les résultats obtenus<sup>1</sup>.

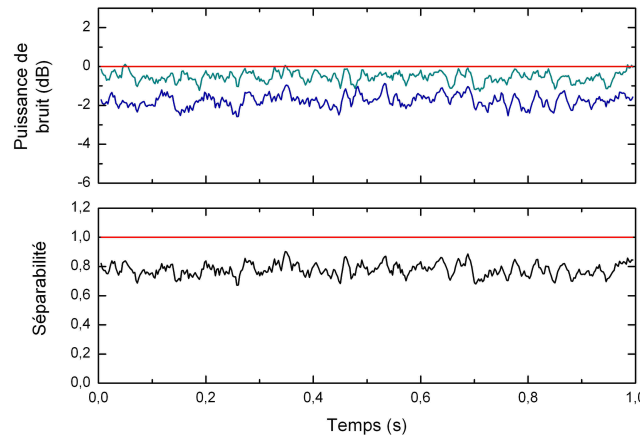


Fig. 6.2: Mesure de la quadrature la moins bruitée pour  $A_+$  (bleu ciel) et  $A_-$  (bleu foncé), au-dessus du seuil, pour une fréquence d'analyse de  $16,5\text{ MHz}$ . Les données ont été corrigées du bruit électronique, et un lissage sur 5 points a été effectué. ( $\sigma = 1,5$ ,  $\text{RBW} = 100\text{ kHz}$ ,  $\text{VBW} = 1\text{ kHz}$ )

À cette fréquence d'analyse du bruit, et sans cavité de filtrage, le bruit sur la pompe est suffisamment bas pour permettre d'observer de l'intrication : les champs  $A_+$  et  $A_-$  sont comprimés respectivement à  $-0,5 \pm 0,5\text{ dB}$  et  $-1,7 \pm 0,5\text{ dB}$  au-dessous du bruit quantique standard, ce qui mène à une séparabilité  $\Sigma = 0,78 \pm 0,09 < 1$ .

Par contre, nous n'avons pas pu mesurer de corrélations EPR : le bruit sur les champs  $A_1$  et  $A_2$  est de  $1,1 \pm 0,5\text{ dB}$  au-dessus du bruit quantique standard, ce qui conduit à une valeur du critère EPR de  $\mathcal{E} = 1,2 \pm 0,1 > 1$ . Le bruit de la pompe est donc encore trop

1. Des résultats analogues ont été obtenus à des fréquences d'analyse de  $18\text{ MHz}$  et  $20\text{ MHz}$ .

important à cette fréquence d'analyse de bruit pour pouvoir observer des corrélations EPR.

Comme nous ne pouvons pas nous placer au-delà de 20 MHz, la mise en place d'une cavité de filtrage sur la pompe s'avère nécessaire. Cette cavité, ainsi que les résultats correspondants, seront décrits dans le §D. Nous allons tout d'abord nous intéresser à l'estimation de l'excès de bruit sur la pompe.

## C Mesure du bruit du laser, en utilisant une cavité désaccordée

À l'instar de l'équipe de P. Nussenzveig à São Paulo, nous avons mesuré le bruit du laser YAG à l'aide d'une cavité désaccordée [Villar *et al.*, 2004]. Nous avons utilisé la cavité de filtrage déjà présente sur le faisceau laser primaire (à 1064 nm).

Cependant, cette cavité présente une différence majeure par rapport à celle employée par Villar *et al.* : sa transmission est non nulle. Les calculs sont donc différents ; ils sont développés dans ce paragraphe.

### C.1 Position du problème

On considère une cavité en anneau ; les notations du calcul sont précisées sur la Fig. 6.3.

On peut écrire les relations entrée-sortie au niveau des miroirs :

$$\text{miroir } \alpha \quad \begin{cases} E_\alpha(0) &= t E_{in} + r E_\beta(L_\beta) \\ E_{out} &= t E_\beta(L_\beta) - r E_{in} \end{cases} \quad (6.1a)$$

$$\text{miroir } \beta \quad \begin{cases} E_\beta(0) &= t' E_{1,vac} + r' E_\gamma(L_\gamma) \\ E_{1,out} &= t' E_\gamma(L_\gamma) - r' E_{1,vac} \end{cases} \quad (6.1b)$$

$$\text{miroir } \gamma \quad \begin{cases} E_\gamma(0) &= t'' E_{2,vac} + r'' E_\alpha(L_\alpha) \\ E_{2,out} &= t'' E_\alpha(L_\alpha) - r'' E_{2,vac} \end{cases} \quad (6.1c)$$

où l'origine des abscisses pour le champ  $E_\alpha$  est prise au niveau du miroir  $\alpha$ , celle du champ  $E_\beta$  au niveau du miroir  $\beta$  et celle du champ  $E_\gamma$  au niveau du miroir  $\gamma$ .

En notant  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  le module du vecteur d'onde, les champs après propagation s'écrivent :

$$E_j(L_j) = E_j(0) e^{ikL_j} \quad (6.2)$$

où  $j = \alpha, \beta, \gamma$ .

On peut alors en déduire l'expression du champ réfléchi par la cavité en fonction des divers champs entrants :

$$\begin{aligned} E_{out} = & \left( -r + \frac{r' r'' t^2 e^{ikL}}{1 - r r' r'' e^{ikL}} \right) E_{in} + \left( \frac{t t' e^{ikL_\beta}}{1 - r r' r'' e^{ikL}} \right) E_{1,vac} \\ & + \left( \frac{r' t t'' e^{2ikL_\beta}}{1 - r r' r'' e^{ikL}} \right) E_{2,vac} \end{aligned} \quad (6.3)$$

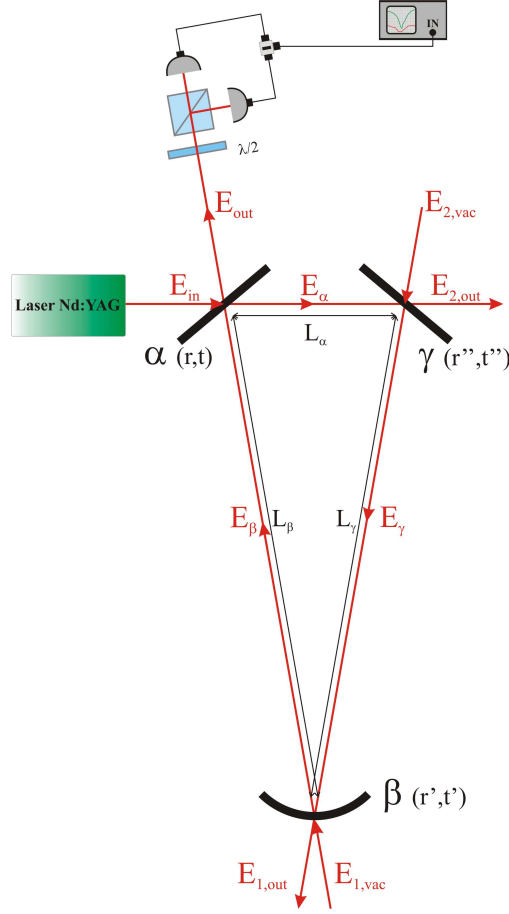


Fig. 6.3: Notations pour l'analyse du bruit d'intensité réfléchi par la cavité de filtrage à  $1064\text{ nm}$  : les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des miroirs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont notés respectivement  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$  et  $t$ ,  $t'$ ,  $t''$  ; et les distances géométriques entre les différents miroirs sont notées  $L_\alpha$ ,  $L_\beta$  et  $L_\gamma = L_\beta$

Pour simplifier les calculs, le vide n'ayant pas de phase propre, on peut inclure  $e^{ikL_\beta}$  dans  $E_{1,vac}$  et  $e^{2ikL_\beta}$  dans  $E_{2,vac}$ . On peut alors réécrire le champ réfléchi :

$$E_{out} = \rho(\omega) E_{in} + \rho_1(\omega) E_{1,vac} + \rho_2(\omega) E_{2,vac} \quad (6.4)$$

où :

$$\rho(\omega) = -r + \frac{r' r'' t^2 e^{ikL}}{1 - r r' r'' e^{ikL}} = \frac{r' r'' e^{ikL} - r}{1 - r r' r'' e^{ikL}} \quad (6.5a)$$

$$\rho_1(\omega) = \frac{t t'}{1 - r r' r'' e^{ikL}} \quad (6.5b)$$

$$\rho_2(\omega) = \frac{r' t t''}{1 - r r' r'' e^{ikL}} \quad (6.5c)$$

La dépendance en  $\omega$  se fait par l'intermédiaire du module du vecteur d'onde  $k = \frac{\omega}{c}$ .



### C.2 Champs moyens

On note  $\omega_0$  la pulsation optique du champ qu'on souhaite analyser  $E_{in}$  (cependant, il y a du bruit à toutes les fréquences, pas seulement pour  $\omega = \omega_0$ ). Les valeurs moyennes des champs entrants sont :

$$\langle E_{1,vac} \rangle = \langle E_{2,vac} \rangle = 0 \quad (6.6a)$$

$$\langle E_{in} \rangle = \imath \mathcal{A} \alpha_{in} \quad (6.6b)$$

où on choisit  $\alpha_{in}$  réel positif, ce qui fixe la référence de phase ; et où  $\mathcal{A} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_0}{2 \varepsilon_0 c}}$  [Grynberg *et al.*, 1997]. On en déduit alors, d'après l'équation (6.4), la valeur moyenne du champ sortant :

$$\langle E_{out} \rangle = \imath \mathcal{A} \rho(\omega_0) \alpha_{in} \equiv \imath \mathcal{A} \rho_0 e^{\imath \varphi_0} \alpha_{in} \quad (6.7)$$

On constate que la cavité ne déphase pas que le bruit, mais aussi le champ moyen (qui est déphasé de  $\varphi_0 = \arg(\rho(\omega_0))$ ).

### C.3 Linéarisation des fluctuations

On introduit la pulsation d'analyse  $\Omega = \omega - \omega_0$ . Il est à noter que les fonctions  $\rho(\Omega)$ ,  $\rho_1(\Omega)$  et  $\rho_2(\Omega)$  sont des fonctions de  $\Omega$  et non des transformées de Fourier. Lorsqu'on prend l'hermitien conjugué<sup>2</sup> d'une expression qui les contient, on obtiendra simplement :  $(\rho_j(\Omega))^\dagger = \rho_j^*(\Omega)$ . À l'inverse, pour un opérateur  $\hat{b}(t)$ , on peut définir sa transformée de Fourier par :

$$\hat{b}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{\imath \Omega t} \hat{b}(t) \quad (6.8)$$

Alors, l'hermitien conjugué de cet opérateur :

$$\left( \hat{b}(\Omega) \right)^\dagger = \hat{b}^\dagger(-\Omega) \quad (6.9)$$

$$\text{où } \hat{b}^\dagger(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{\imath \Omega t} \hat{b}^\dagger(t).$$

L'intensité du champ réfléchi est :

$$\hat{I}_{out}(t) = \hat{E}_{out}^\dagger(t) \cdot \hat{E}_{out}(t) \quad (6.10)$$

$$\text{où } \hat{E}_{out}(t) = \imath \mathcal{A} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega e^{-\imath \Omega t} \hat{a}_{out}(\Omega).$$

On peut linéariser les fluctuations du champ :

$$\hat{E}_{out}(t) = \langle \hat{E}_{out}(t) \rangle + \delta \hat{E}_{out}(t) \quad (6.11)$$

---

2. Un scalaire peut être considéré comme une matrice  $1 \times 1$  ; prendre son hermitien conjugué revient donc à prendre son complexe conjugué.

et en déduire la linéarisation des fluctuations d'intensité :

$$\begin{aligned} \hat{I}_{out}(t) &= \langle \hat{I}_{out}(t) \rangle + \delta \hat{I}_{out}(t) \\ &\simeq \langle \hat{E}_{out}^\dagger(t) \rangle \cdot \langle \hat{E}_{out}(t) \rangle + \langle \hat{E}_{out}^\dagger(t) \rangle \cdot \delta \hat{E}_{out}(t) + \langle \hat{E}_{out}(t) \rangle \cdot \delta \hat{E}_{out}^\dagger(t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

La valeur moyenne de l'intensité réfléchie vaut donc :

$$\langle \hat{I}_{out}(t) \rangle = \langle \hat{E}_{out}^\dagger(t) \rangle \cdot \langle \hat{E}_{out}(t) \rangle = (\imath \mathcal{A} \rho_0 e^{\imath \varphi_0} \alpha_{in})^\dagger \cdot (\imath \mathcal{A} \rho_0 e^{\imath \varphi_0} \alpha_{in}) = \Gamma R_0 I_{in} \quad (6.13)$$

où on a posé  $\Gamma = \mathcal{A}^2$ ,  $R_0 = \rho_0^2 = |\rho(\Omega = 0)|^2$  et  $I_{in} = \alpha_{in}^2$ .

Quant au bruit sur l'intensité :

$$\delta \hat{I}_{out}(t) \simeq \langle \hat{E}_{out}^\dagger(t) \rangle \cdot \delta \hat{E}_{out}(t) + \langle \hat{E}_{out}(t) \rangle \cdot \delta \hat{E}_{out}^\dagger(t) \quad (6.14)$$

$$\simeq \alpha_{in} \rho_0 \Gamma \left[ e^{-\imath \varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega e^{-\imath \Omega t} \delta \hat{a}_{out}(\Omega) + e^{\imath \varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega e^{\imath \Omega t} \delta \hat{a}_{out}^\dagger(-\Omega) \right] \quad (6.15)$$

Un changement de variable  $\Omega \rightarrow -\Omega$  est nécessaire dans la seconde intégrale pour pouvoir réunir les deux intégrales en une seule :

$$\delta \hat{I}_{out}(t) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega e^{-\imath \Omega t} \left\{ \alpha_{in} \rho_0 \Gamma \left[ e^{-\imath \varphi_0} \delta \hat{a}_{out}(\Omega) + e^{\imath \varphi_0} \delta \hat{a}_{out}^\dagger(\Omega) \right] \right\} \quad (6.16)$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega e^{-\imath \Omega t} \delta \hat{I}_{out}(\Omega) \quad (6.17)$$

#### C.4 Spectre de bruit d'intensité du champ sortant

Par définition :

$$S_{out}(\Omega) = \langle \delta \hat{I}_{out}(\Omega) \cdot \delta \hat{I}_{out}^\dagger(-\Omega) \rangle \quad (6.18)$$

En remplaçant, il vient :

$$\begin{aligned} S_{out}(\Omega) &= I_{in} R_0 \Gamma^2 \left[ \langle \delta \hat{a}_{out}(\Omega) \cdot \delta \hat{a}_{out}^\dagger(-\Omega) \rangle + e^{-2\imath \varphi_0} \langle \delta \hat{a}_{out}(\Omega) \cdot \delta \hat{a}_{out}(-\Omega) \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{2\imath \varphi_0} \langle \delta \hat{a}_{out}^\dagger(\Omega) \cdot \delta \hat{a}_{out}^\dagger(-\Omega) \rangle + \langle \delta \hat{a}_{out}^\dagger(\Omega) \cdot \delta \hat{a}_{out}(-\Omega) \rangle \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

On peut calculer chacun des termes de cette équation. On définit les quadratures  $\hat{P}(\Omega)$  et  $\hat{Q}(\Omega)$  comme les transformées de Fourier de leurs analogues temporelles<sup>3</sup> :

$$\hat{P}(\Omega) = \hat{a}(\Omega) + \hat{a}^\dagger(\Omega) \quad (6.20a)$$

$$\hat{Q}(\Omega) = -\imath (\hat{a}(\Omega) - \hat{a}^\dagger(\Omega)) \quad (6.20b)$$

---

3. Les quadratures  $\hat{P}(t)$  et  $\hat{Q}(t)$  étant réelles, leurs transformées de Fourier vérifient  $\hat{P}^\dagger(\Omega) = \hat{P}(\Omega)$  et  $\hat{Q}^\dagger(\Omega) = \hat{Q}(\Omega)$ .

On suppose que les corrélations  $\langle \delta \hat{P}_{in}(\Omega) \delta \hat{Q}_{in}(-\Omega) \rangle = 0$ , et de même pour les termes analogues. On aboutit finalement à :

$$\begin{aligned} \frac{S_{out}(\Omega)}{R_0 I_{in} \Gamma^2} = & \frac{1}{4} \{ [|\rho(\Omega)|^2 + |\rho(-\Omega)|^2 + 2\Re(\rho(\Omega) \rho(-\Omega) e^{-2i\varphi_0})] S_P^{in}(\Omega) \\ & + [|\rho(\Omega)|^2 + |\rho(-\Omega)|^2 - 2\Re(\rho(\Omega) \rho(-\Omega) e^{-2i\varphi_0})] S_Q^{in}(\Omega) \\ & + [|\rho_1(\Omega)|^2 + |\rho_1(-\Omega)|^2] S_P^{1,vac}(\Omega) \\ & + [|\rho_1(\Omega)|^2 + |\rho_1(-\Omega)|^2] S_Q^{1,vac}(\Omega) \\ & + [|\rho_2(\Omega)|^2 + |\rho_2(-\Omega)|^2] S_P^{2,vac}(\Omega) \\ & + [|\rho_2(\Omega)|^2 + |\rho_2(-\Omega)|^2] S_Q^{2,vac}(\Omega) \} \end{aligned} \quad (6.21)$$

où apparaissent les différents spectres de bruit :

$$S_P(\Omega) = \langle \delta \hat{P}(\Omega) \delta \hat{P}(-\Omega) \rangle \quad (6.22a)$$

$$S_Q(\Omega) = \langle \delta \hat{Q}(\Omega) \delta \hat{Q}(-\Omega) \rangle \quad (6.22b)$$

On peut simplifier l'expression en tenant compte des propriétés du vide :

$$S_P^{1,vac}(\Omega) = S_Q^{1,vac}(\Omega) = S_P^{2,vac}(\Omega) = S_Q^{2,vac}(\Omega) = 1 \quad (6.23)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{S_{out}(\Omega)}{R_0 I_{in} \Gamma^2} = & \frac{1}{4} \{ [|\rho(\Omega)|^2 + |\rho(-\Omega)|^2 + 2\Re(\rho(\Omega) \rho(-\Omega) e^{-2i\varphi_0})] S_P^{in}(\Omega) \\ & + [|\rho(\Omega)|^2 + |\rho(-\Omega)|^2 - 2\Re(\rho(\Omega) \rho(-\Omega) e^{-2i\varphi_0})] S_Q^{in}(\Omega) \\ & + 2 [|\rho_1(\Omega)|^2 + |\rho_1(-\Omega)|^2] + 2 [|\rho_2(\Omega)|^2 + |\rho_2(-\Omega)|^2] \} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ainsi, le spectre de bruit du champ sortant, normalisé au bruit quantique standard, s'écrit :

$$\frac{S_{out}(\Omega)}{R_0 I_{in} \Gamma^2} = \alpha_P S_P^{in}(\Omega) + \alpha_Q S_Q^{in}(\Omega) + \alpha_{vac} \quad (6.25)$$

Il permet bien d'obtenir des informations sur le spectre de bruit du champ entrant.

## C.5 Tracé des coefficients intervenant dans le spectre de bruit d'intensité

### a) Paramètres

Afin d'avoir une résonance suffisamment large pour faire des mesures précises, ces dernières sont effectuées sur la polarisation de basse finesse de la cavité de filtrage. Le miroir de fond ( $\beta$ ,  $R'$ ) étant de très bonne qualité, on considérera dans la suite que  $R' \simeq 1$ . La finesse basse est expérimentalement de 200. On peut en déduire les coefficients de réflexion des deux autres miroirs ( $\alpha$ ,  $R$ ) et ( $\gamma$ ,  $R''$ ), qui ont été traités simultanément :  $R = R'' \simeq 1 - 1,6 \cdot 10^{-2}$ .

La longueur d'onde est  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ , et la fréquence d'analyse correspondant à  $\Omega$  est  $4 \text{ MHz}$ .

## b) Tracé des différents coefficients

La figure 6.4 présente les tracés des coefficients  $\alpha_P$ ,  $\alpha_Q$  et  $\alpha_{vac}$  lorsqu'on balaie la longueur de la cavité autour de la résonance.

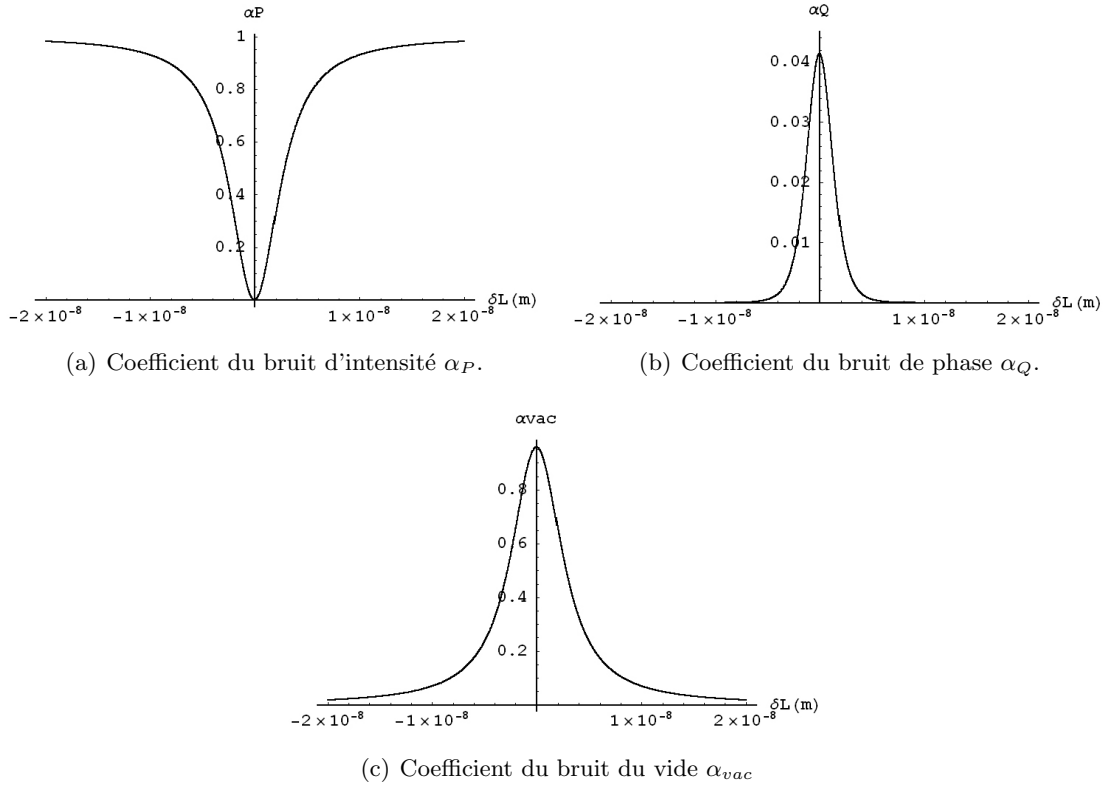


Fig. 6.4: Valeurs des coefficients des différents bruits intervenant dans le spectre de bruit du faisceau réfléchi par la cavité, lorsqu'on balaie cette dernière autour de la résonance, en fonction de l'écart à la résonance.

Loin de la résonance, le bruit d'intensité du faisceau réfléchi est égal au bruit d'intensité du faisceau incident. Ce résultat est tout-à-fait normal : loin de résonance, le faisceau incident est entièrement réfléchi par la cavité.

Le bruit de phase du faisceau incident contribue très peu au bruit d'intensité du faisceau réfléchi. La contribution est maximale à résonance (3,8%), là où le bruit d'intensité du faisceau incident ne contribue presque plus (0,3%). La contribution du bruit de phase est cependant très faible par rapport à la contribution du bruit du vide entrant (95,9%). Expérimentalement, cette mesure ne permettra donc qu'une estimation du bruit de phase, sauf lorsque celui-ci est très grand.

## C.6 Expérience

Ainsi qu'on l'a déjà mentionné, la mesure a été réalisée en balayant le plus lentement possible la résonance, en se plaçant sur la polarisation de basse finesse de la cavité.

Les mesures de bruit d'intensité peuvent être faites à l'aide d'une simple photodiode. Cependant, il est nécessaire ici d'avoir une référence de bruit, le bruit quantique standard. Pour faciliter la normalisation, une détection balancée a été mise en place : le bruit sur la différence des photocourants donne le bruit quantique standard ; et le bruit sur la somme des photocourants donne le bruit d'intensité du faisceau mesuré.

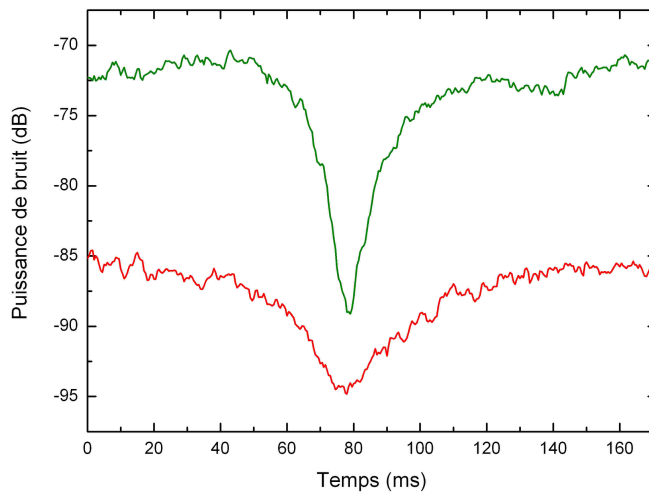


Fig. 6.5: Mesure du bruit d'intensité du faisceau réfléchi par la cavité autour de la résonance, lorsque la longueur de la cavité est balayée (en haut). La courbe du bas correspond au bruit sur la différence des photocourants. La puissance totale du faisceau pompe est de l'ordre de  $15 \text{ mW}$ , ce qui permet de ne pas saturer la détection.

La figure 6.5 présente les courbes obtenues expérimentalement. Elles permettent de donner une estimation des différents bruits :

- \* Loin de résonance, le bruit est égal au bruit d'intensité du faisceau incident sur la cavité : il est de l'ordre de  $12 \text{ dB}$  au-dessus du bruit quantique standard.
- \* À résonance, le bruit du faisceau réfléchi, qui se répartit entre les différents bruits comme détaillé ci-dessus, est environ  $5 \text{ dB}$  supérieur au bruit quantique standard.

À partir de ces mesures, et des calculs précédents, on peut estimer le bruit de phase du faisceau laser incident sur la cavité : il est de l'ordre de  $17 \text{ dB}$  au-dessus du bruit quantique standard.

Cette valeur très élevée, couplée aux  $12 \text{ dB}$  d'excès de bruit d'intensité, permet d'expliquer le fort excès de bruit observé sur le champ  $A_+$  au-dessus du seuil. En outre,

elle est cohérente avec la mesure effectuée par l'équipe de P. Nussenzveig sur un laser analogue [Villar *et al.*, 2007]. Ceci n'était pas *a priori* certain, car notre laser est un prototype du modèle Diabolo actuellement commercialisé par la firme Innolight.

## D Observation de faisceaux EPR au-dessus du seuil

### D.1 Filtrage du bruit de la pompe

La cavité de filtrage que nous avons mise en place sur le faisceau pompe est, comme celle de l'oscillateur local, une cavité triangulaire en anneau (*cf.* Fig. 6.6). Il s'agit d'une cavité construite à l'origine comme cavité de filtrage pour l'infra-rouge, lors de la thèse de Kuan Shou Zhang [Zhang, 2002] ; les miroirs ont été remplacés. La longueur de la cavité est de 76 cm ; le miroir de fond est un miroir haute réflectivité (transmission  $T = 0,1\%$ ), de rayon de courbure 750 mm. Les miroirs d'entrée et de sortie sont des miroirs plans, de transmission  $T = 3\%$ .

La finesse théorique d'une telle cavité est 103 ; et sa bande passante<sup>4</sup> 3,5 MHz. Expérimentalement, nous avons mesuré une finesse de 90.

La cavité est asservie par la technique de Pound-Drever-Hall, grâce à la modulation à 12 MHz présente dans le faisceau.

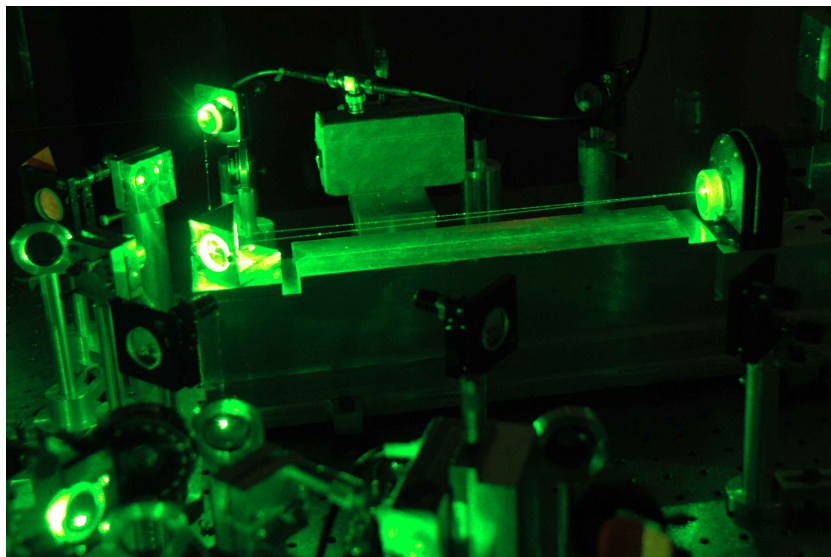


Fig. 6.6: Cavité de filtrage mise en place sur la pompe.

---

4. Bien que la finesse soit peu élevée pour une cavité de filtrage, la bande passante est suffisamment étroite pour nos besoins, car la cavité est longue.

## D.2 Résultats expérimentaux

Nous avons effectué plusieurs mesures, à diverses fréquences d'analyse. Pour les fréquences au-dessous de  $20\text{ MHz}$ , la valeur du critère EPR est améliorée grâce à la cavité de filtrage, mais il n'est pas dépassé pour autant. Les faisceaux sont inséparables à partir d'une fréquence d'analyse légèrement inférieure à  $6\text{ MHz}$ . Les faisceaux produits sont EPR à une fréquence d'analyse de  $20\text{ MHz}$ . La puissance des faisceaux EPR mesurés est de  $5\text{ mW}$ . Il est sans doute possible d'en obtenir de plus brillants mais la détection homodyne saturant au-delà de cette puissance, nous n'avons pas pu les mesurer.

La figure 6.7 présente les résultats obtenus. On peut observer sur les courbes des pics de bruit parasites, qui correspondent à un bruit électronique à  $100\text{ Hz}$  lié à l'asservissement de la cavité.

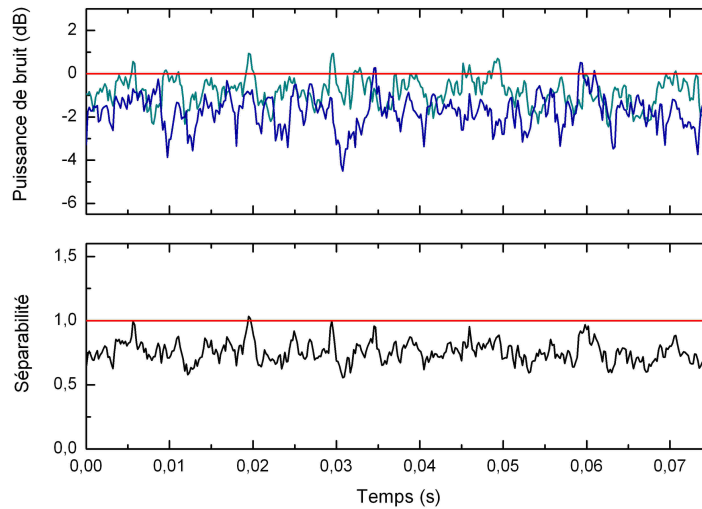


Fig. 6.7: Mesure, lorsque la cavité de filtrage est présente, de la quadrature la moins bruitée pour  $A_+$  (bleu ciel) et  $A_-$  (bleu foncé), et séparabilité. Le système fonctionne au-dessus du seuil, la fréquence d'analyse est de  $20\text{ MHz}$ . Les données ont été corrigées du bruit électroniques. ( $\sigma = 1,1$ ,  $\text{RBW} = 100\text{ kHz}$ ,  $\text{VBW} = 1\text{ kHz}$ )

La puissance de bruit mesurée pour  $A_+$  est de  $-1,8 \pm 0,5\text{ dB}$  au-dessous du bruit quantique standard, et pour  $A_-$  on obtient  $-3,9 \pm 0,5\text{ dB}$ . Ceci mène à une séparabilité  $\Sigma = 0,76 \pm 0,08 < 1$ .

Les faisceaux signal et complémentaire  $A_1$  et  $A_2$  sont, à cette fréquence d'analyse, limités par le bruit quantique standard : on mesure  $0,0 \pm 0,5\text{ dB}$ . Ceci mène à un critère EPR  $\mathcal{E} = 0,87 \pm 0,08 < 1$ .

Ainsi, les faisceaux continus, brillants et de même fréquence générés par l'OPO à auto-

verrouillage de phase utilisé au-dessus du seuil sont inséparables et EPR. Il s'agit donc de faisceaux contenant beaucoup de photons, et très quantiques. Pour limiter l'amplitude des pics de bruit observés, une solution consisterait à stabiliser l'alimentation du module d'asservissement.

### D.3 Résumé du comportement en fréquence

La figure 6.8 présente une synthèse des différents résultats obtenus. Nous n'avons malheureusement pas pu réaliser une mesure de bruit sur l'intégralité de la bande<sup>5</sup> des fréquences d'analyse.

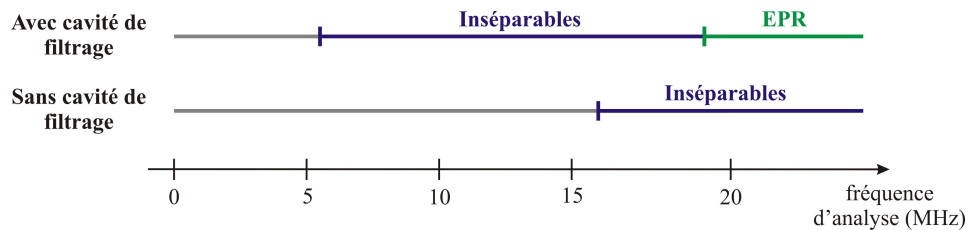


Fig. 6.8: Résumé du comportement en fréquence du système selon qu'une cavité de filtrage est mise en place ou non sur la pompe.

### D.4 Comparaison avec les résultats obtenus par d'autres équipes

Plusieurs équipes dans le monde ont généré des faisceaux brillants intriqués : les équipes de P. Nussenzveig à São Paulo (Brésil) [Villar *et al.*, 2007], O. Pfister à Charlottesville (U.S.A.) [Jing *et al.*, 2006] et K. Peng à Shanxi (Chine) [Su *et al.*, 2006] utilisent un OPO de type II au-dessus du seuil, en régime continu. On peut également mentionner l'équipe de P.K. Lam à Canberra (Australie), qui a généré des faisceaux intriqués en mélangeant les faisceaux comprimés produits par deux OPA en régime continu<sup>6</sup> [Bowen *et al.*, 2004], et enfin l'équipe de G. Leuchs à Erlangen (Allemagne), qui mélange des pulses brillants comprimés produits grâce à un interféromètre asymétrique de Sagnac fibré [Glöckl *et al.*, 2003].

Soulignons rapidement ce qui différencie notre système des trois autres dispositifs proches du nôtre : les faisceaux générés par Villar *et al.* d'une part, Su *et al.* d'autres part, sont de fréquences différentes et non verrouillées. Quant aux faisceaux produits par Jing *et al.*, leur différence de fréquence est verrouillée à 161 MHz, tandis que nos faisceaux sont verrouillés à la même fréquence.

5. Le niveau de bruit remonte *a priori* pour une fréquence d'analyse supérieure à la bande passante de la cavité de l'OPO, qui est de l'ordre de 35 MHz.

6. La puissance des faisceaux ainsi générés est évidemment beaucoup plus faible qu'avec un OPO au-dessus du seuil



Les résultats présentés par ces différentes équipes sont rappelés dans le tableau 6.1.

Tab. 6.1: Intrication de deux faisceaux brillants obtenue par différentes équipes. Le “X” indique que la grandeur concernée n’a pas été mesurée.

Équipe	Séparabilité $\Sigma$	EPR $\varepsilon$
P. Nussenzveig (Brésil)	$0,62 \pm 0,01$	X
O. Pfister (U.S.A.)	0,62	X
K. Peng (Chine)	0,666	X
P.K. Lam (Australie)	$0,44 \pm 0,01$	$0,58 \pm 0,02$
G. Leuchs (Allemagne)	0,5	X
C. Fabre (France)	$0,76 \pm 0,25$	$0,87 \pm 0,80$

Les valeurs de séparabilité obtenues par les autres équipes sont inférieures aux nôtres. Cependant, nous sommes la seule équipe à avoir pu mesurer le critère EPR en variables continues sur des faisceaux générés directement par un OPO. En outre, nos faisceaux étant de même fréquence, ceci nous autorise (par exemple) à les mélanger afin de pouvoir exploiter l’intégralité de la ressource EPR, en particulier le fort lien intrication/compression de bruit.

## E Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre l’efficacité de l’auto-verrouillage de phase pour l’OPO en fonctionnement au-dessus du seuil, qui permet d’obtenir des faisceaux EPR brillants, de même fréquence. Il a été nécessaire de mettre en place une cavité de filtrage sur la pompe : les mesures ont révélé un fort excès de bruit sur cette dernière, qui se transmet au-dessus du seuil aux faisceaux signal et complémentaire.

L’étude au-dessus du seuil pourrait être complétée en vérifiant l’influence du couplage sur l’intrication, afin de s’assurer que le comportement du système est le même qu’au-dessous du seuil. Une mesure de la matrice de covariance est également envisageable. À moyen terme, l’expérience peut s’orienter vers une utilisation des faisceaux produits, par exemple dans une expérience de téléportation ou de distillation d’intrication, ou encore dans le cadre d’une interface lumière-matière.

Cependant, la transmission de l’intrication dans le cadre d’une interaction lumière-matière est plus efficace si l’intrication est encodée sur les variables de Stokes de polarisation. La description d’un dispositif permettant de produire de tels faisceaux fait l’objet de la dernière partie de ce manuscrit.

## Partie III

### Au-delà de l'intrication de deux champs



## 7. Génération d'intrication en polarisation : OPO à deux cristaux

### Sommaire

---

<b>A</b>	<b>Introduction</b>	<b>141</b>
<b>B</b>	<b>OPO auto-verrouillé en phase à deux cristaux</b>	<b>142</b>
B.1	Description du dispositif	142
B.2	Variables de Stokes	143
B.3	Propriétés quantiques attendues	145
<b>C</b>	<b>Reproduction de l'article</b>	<b>146</b>

---

### A Introduction

Les perspectives prometteuses de l'information et du calcul quantiques se heurtent actuellement à un problème de taille, outre le stockage de l'information : la transmission de cette information aux mémoires quantiques. En effet, les avancées actuelles dans ces domaines tendent vers un transport de l'information par la lumière, qui se couple peu à l'environnement, de sorte que les états transportés sont peu soumis à la décohérence. Par contre, les propositions les plus abouties pour le stockage de l'information consistent à utiliser des ensemble d'atomes ou d'ions comme mémoires quantiques. Le problème de l'interface provient précisément de ce que la lumière est peu couplée à son environnement : elle se couple également peu avec la mémoire quantique !

Or les variables de Stokes – qui décrivent la polarisation de la lumière – obéissent aux même relations de commutation que le spin atomique (spin individuel ou spin collectif). De ce fait, afin de favoriser la transmission de l'information à l'interface lumière-matière, il est naturel de chercher à encoder l'information contenue dans la lumière sur les variables de Stokes.

Ce chapitre présente un dispositif original, un OPO auto-verrouillé en phase à deux cristaux. Nous avons montré théoriquement qu'il génère deux faisceaux de polarisation définie, de fréquences fixées et ajustables, intriqués en polarisation. L'article décrivant l'ensemble du dispositif et les prédictions théoriques sur les faisceaux générés, publié dans *Physical Review A*, est reproduit en fin de chapitre. Nous nous contenterons donc, dans le début du chapitre, de décrire le principe du dispositif, et de rappeler les principaux

résultats attendus.

## B OPO auto-verrouillé en phase à deux cristaux

### B.1 Description du dispositif

Le concept de base de l'OPO à deux cristaux consiste à placer, dans la cavité de l'OPO, non plus un mais deux cristaux de type II, tournés de  $90^\circ$  l'un par rapport à l'autre, avec une pompe polarisée à  $45^\circ$ . De ce fait, sur chaque polarisation est généré un faisceau de fréquence  $\omega_a$  et un faisceau de fréquence  $\omega_b$ . Quatre champs se propagent donc dans la cavité, qui seront notés  $a_1$  et  $b_2$  (générés par le premier cristal) et  $a_2$  et  $b_1$  (générés par le second cristal). La lettre  $a$  ou  $b$  fait référence à la fréquence et l'indice chiffré à la polarisation. Il est possible d'exploiter séparément ces quatre champs, par exemple en les séparant d'abord en fréquence (à l'aide d'un réseau ou d'un prisme), puis en polarisation (à l'aide de cubes séparateurs de polarisation), comme le suggère la figure 7.1. On pourrait alors étudier les propriétés d'intrication de ce système multipartitionné. Cependant, nous allons plutôt considérer une bipartition, en ne conservant que la séparation en fréquence.

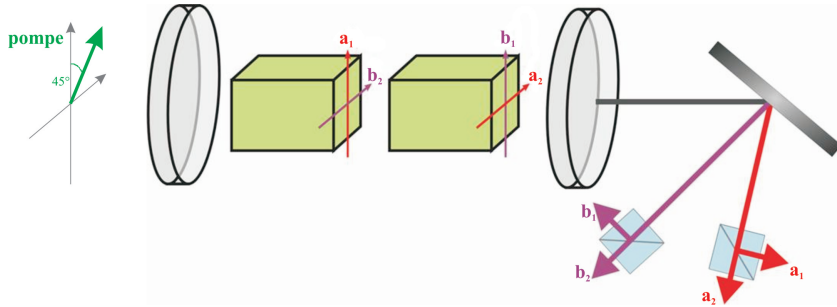


Fig. 7.1: Principe de la génération de 4 champs présentant des propriétés d'intrication.

Les faisceaux ainsi produits ne sont pas utilisables dans le cadre d'une mémoire atomique. En effet, les relations de phase fixées par le dispositif :

$$\varphi(a_1) + \varphi(b_2) = \varphi(a_2) + \varphi(b_1) = \varphi_0 \quad (7.1)$$

ne sont pas suffisantes pour que la polarisation des faisceaux soit définie ( $\varphi_0$  est la phase de la pompe), puisque  $\varphi(a_1) - \varphi(b_2)$  et  $\varphi(a_2) - \varphi(b_1)$  ne sont pas fixées. La solution proposée est analogue à celle utilisée dans la partie expérimentale de cette thèse : insérer une lame d'onde pour exploiter l'auto-verrouillage de phase (*cf.* Fig. 7.2). Il s'agit d'une lame  $\lambda/2$  pour  $\omega_a$  et  $\omega_b$ , légèrement tournée par rapport aux axes propres des cristaux. Cette lame couple, de façon indépendante, d'une part les champs  $a_1$  et  $a_2$ , d'autre part les champs  $b_1$  et  $b_2$ . Il est nécessaire d'insérer une seconde lame du même type, tournée

de  $90^\circ$  (mais alignée avec les axes des cristaux) pour compenser le déphasage sur un tour dû à la première lame.

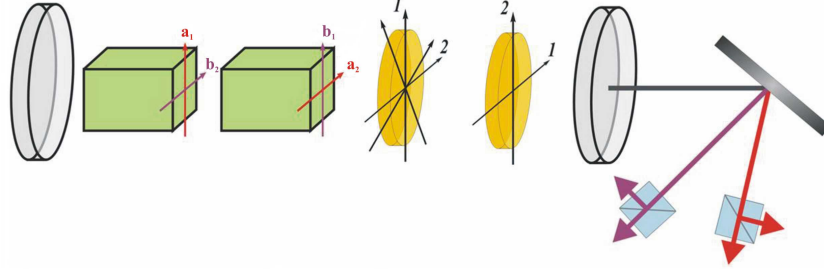


Fig. 7.2: Insertion d'une lame biréfringente légèrement tournée dans l'OPO à deux cristaux pour provoquer un auto-verrouillage de phase.

Grâce à ce dispositif, les faisceaux de fréquence  $\omega_a$  d'une part,  $\omega_b$  d'autre part ont tous deux une polarisation bien définie : ils sont polarisés circulairement. En effet, on a :

$$\varphi(a_1) - \varphi(a_2) = \varphi(b_1) - \varphi(b_2) = \frac{\pi}{2} \quad (7.2)$$

On peut ajuster les fréquences  $\omega_a$  et  $\omega_b$  avec la température des cristaux.

## B.2 Variables de Stokes

Les variables de Stokes permettent de décrire classiquement la polarisation d'un faisceau quelconque ; leurs équivalents quantiques sont définis de la façon suivante :

$$\hat{S}_0 = \hat{a}_X^\dagger \hat{a}_X + \hat{a}_Y^\dagger \hat{a}_Y \quad (7.3a)$$

$$\hat{S}_1 = \hat{a}_X^\dagger \hat{a}_X - \hat{a}_Y^\dagger \hat{a}_Y \quad (7.3b)$$

$$\hat{S}_2 = \hat{a}_X^\dagger \hat{a}_Y - \hat{a}_Y^\dagger \hat{a}_X = \hat{a}_{+45^\circ}^\dagger \hat{a}_{+45^\circ} + \hat{a}_{-45^\circ}^\dagger \hat{a}_{-45^\circ} \quad (7.3c)$$

$$\hat{S}_3 = \imath \left( \hat{a}_Y^\dagger \hat{a}_X - \hat{a}_X^\dagger \hat{a}_Y \right) = \hat{a}_D^\dagger \hat{a}_D + \hat{a}_G^\dagger \hat{a}_G \quad (7.3d)$$

Les indices  $X$  et  $Y$  désignent les deux directions de polarisation linéaire du faisceau, les indices  $\pm 45^\circ$  les polarisations linéaires tournées de  $\pm 45^\circ$ , et  $G$  et  $D$  les polarisations circulaires gauche et droite.

Les opérateurs ainsi définis obéissent, comme cela a déjà été mentionné, à des relations de commutation analogues à celles du spin atomique :

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = 2\imath \hat{S}_k \quad i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\} \quad (7.4)$$

Par ailleurs, les fluctuations des opérateurs de Stokes peuvent être mesurées sans oscillateur local (*cf.* Fig. 7.3) [Bowen *et al.*, 2002]. Ceci permet d'effectuer les mesures

quelles que soient les fréquences des deux faisceaux, et ainsi de tirer parti de l'accordabilité.

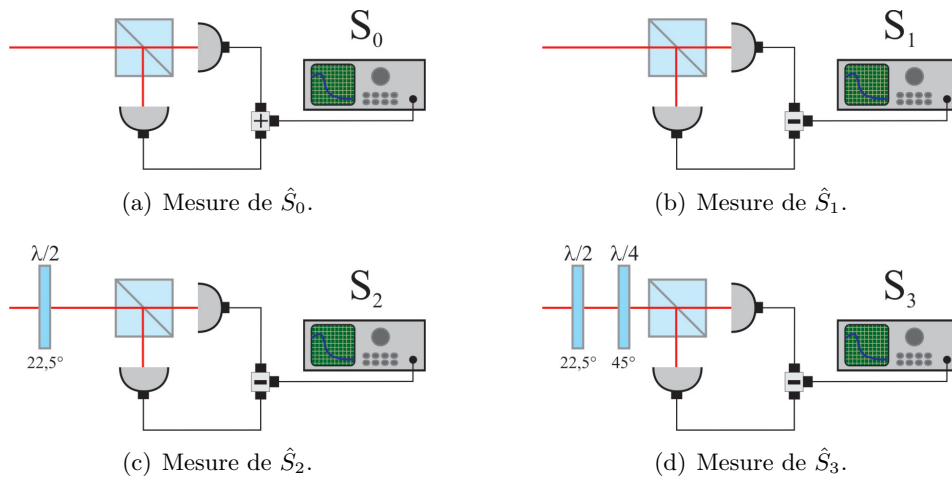


Fig. 7.3: Mesure des fluctuations des opérateurs de Stokes.

### B.3 Propriétés quantiques attendues

Les calculs, développés dans l'article reproduit ci-après, montrent que le dispositif, en fonctionnement au-dessus du seuil dans le régime de plus bas seuil, produit des faisceaux brillants, polarisés selon  $S_3$ . Les opérateurs de Stokes  $\hat{S}_1$  et  $\hat{S}_2$  sont intriqués, comme le montre la figure 7.4.

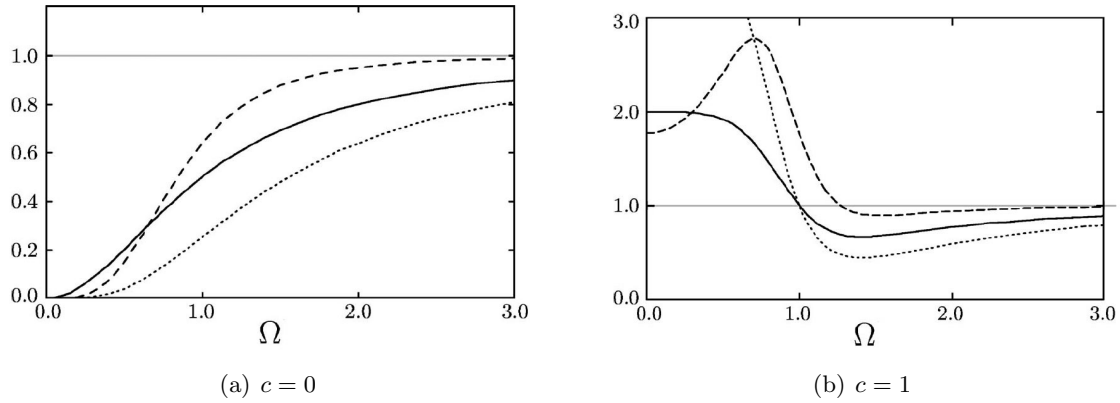


Fig. 7.4: Critères d'intrication pour les opérateurs de Stokes  $\hat{S}_1$  et  $\hat{S}_2$  : séparabilité (trait continu), critère de Mancini (pointillé court) et critère EPR (pointillé long).  $\Omega$  est la fréquence d'analyse normalisée à la bande passante de la cavité, et  $c$  est le même paramètre de couplage que pour l'OPO à un cristal ( défini au chapitre 3 § D.3).

On constate que, pour un couplage nul ou très faible, les faisceaux sont intriqués et EPR en polarisation pour toutes les fréquences d'analyse, et sont d'autant plus intriqués que la fréquence d'analyse est basse (*cf.* figure 7.4(a)). Lorsque le couplage est important, les corrélations sont dégradées (comme dans le cas de l'OPO à un cristal), en particulier à basse fréquence. Ils sont cependant inséparables et EPR à partir d'une fréquence d'analyse légèrement supérieure à la bande passante de la cavité ; l'intrication diminuant ensuite avec l'augmentation de la fréquence d'analyse. Toutefois, comme l'ont montré les expériences menées au-dessus du seuil sur l'OPO auto-verrouillé en phase à un cristal, on peut *a priori* travailler à couplage faible, voire quasi nul. Ceci permettrait de générer des faisceaux très intriqués, puisqu'on peut théoriquement atteindre une corrélation parfaite.

De tels faisceaux seraient directement utilisables pour transférer l'intrication de la lumière aux atomes.



## C Reproduction de l'article

PHYSICAL REVIEW A **73**, 012333 (2006)

### Generation of two-color polarization-entangled optical beams with a self-phase-locked two-crystal optical parametric oscillator

Julien Laurat,<sup>1</sup> Gaëlle Keller,<sup>2</sup> Claude Fabre,<sup>2</sup> and Thomas Coudreau<sup>2,3,\*</sup>

<sup>1</sup>*Norman Bridge Laboratory of Physics 12-33, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA*

<sup>2</sup>*Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Case 74, 4 Place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France*

<sup>3</sup>*Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques, Université Denis Diderot, Case 7021, 2 Place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France*

(Received 4 November 2005; published 24 January 2006)

A device to generate polarization-entangled light in the continuous-variable regime is introduced. It consists of an optical parametric oscillator with two type-II phase-matched nonlinear crystals orthogonally oriented, associated with birefringent elements for adjustable linear coupling. We give in this paper a theoretical study of its classical and quantum properties. It is shown that two optical beams with adjustable frequencies and well-defined polarization can be emitted. The Stokes parameters of the two beams are entangled. The principal advantage of this setup is the possibility to directly generate polarization-entangled light without the need of mixing four modes on beamsplitters as required in current experimental setups. This device opens up different directions for the study of light-matter interfaces and a generation of multimode nonclassical light and higher dimensional phase space.

DOI: [10.1103/PhysRevA.73.012333](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.012333)

PACS number(s): 03.67.Hk, 03.67.Mn, 42.65.Yj, 42.50.Dv

#### I. INTRODUCTION

Developing quantum memories constitutes an essential milestone on the route towards quantum communication networks. As it is difficult to directly store photons, the quantum information has to be stored in a material-based quantum system. A particularly promising application for polarization-entangled light is the ability to couple it with atomic ensembles: the algebra describing the quantum properties of polarized light *via* Stokes operators [1–3] is exactly the same as that describing the quantum properties of the atomic spin, be it single or collective spins. Quantum state exchange between light fields and matter systems has been recently experimentally demonstrated [4,5] and it has been shown that such systems can be used as quantum memories [6]. In addition, from a technical point of view, the use of polarization states offers simpler detection schemes, without the need for local oscillators. These features make the study and experimental generation of nonclassical polarization states of first importance for continuous-variable quantum communication.

Furthermore, the study of higher dimensional phase space is a fascinating and promising subject. Indeed, it has been shown that multimode nonclassical light could be a very powerful tool for an efficient processing and transport of quantum information [7]. Already experimental implementations and applications of such nonclassical multimode light have been demonstrated in the continuous-wave regime [8–11]. Such systems either involve a very large number of modes [10,11] or a much smaller number (three in the case of Ref. [9]). Increasing the number of correlated modes is of particular importance, for instance, in the case of optical read-out technologies [12] and super-resolution techniques

[13]. In this context, generating continuous-variable polarization-entangled light [1–3], which exhibits three or four mode correlations, is a first step towards increasing the phase space dimension.

Such polarization-entangled beams in the continuous-variable regime have been recently produced experimentally with injected type-I phase-matched optical parametric oscillators (OPOs) below threshold [14,15] or using  $\chi^{(3)}$  effects in a cloud of cold atoms [16]. All of these methods require linear interferences of two quadrature-entangled modes with two bright coherent states, which limits the amount of entanglement reached and the simplicity and scalability of the setup.

We investigate here an approach to directly generate polarization-entangled light without the need of mode mixing. This approach stems from an original device that we previously studied, a self-phase-locked optical parametric oscillator. This system consists of a type-II phase-matched nonlinear  $\chi^{(2)}$  crystal in an optical cavity and emits fields that are phase-locked through linear coupling [17–19]: a birefringent plate, which can be rotated relative to the principal axis of the crystal, adds this coupling between the orthogonally polarized signal and idler beams and results in a phase-locking phenomenon that is well known for coupled mechanical or electrical oscillators [20]. Such systems have recently attracted a lot of attention as efficient sources of nonclassical light [21–23]. A stable operation has been demonstrated experimentally even with very small coupling [17,24,25] and their nonclassical properties are very encouraging [24]. We propose here a new implementation where two crystals, and not only one, are placed with their neutral axis orthogonal in a cavity containing two birefringent waveplates for adjustable linear coupling. Each crystal generates a pair of signal and idler beams and the waveplates couple together the two signal beams and the two idler beams so that phase locking can be achieved in a nonfrequency degenerate operation. As

\*Author to whom correspondence should be addressed. Email address: [coudreau@spectro.jussieu.fr](mailto:coudreau@spectro.jussieu.fr)

LAURAT *et al.*PHYSICAL REVIEW A **73**, 012333 (2006)

we will show below, this device allows for a direct and efficient generation of polarization-entangled optical beams.

In this paper, we investigate in detail the classical and quantum properties of the system. The paper is organized as follows. In Sec. II we begin by presenting the linear and nonlinear elements of the two-crystal OPO. A propagating Jones matrix is associated with each element and permits us to access the round-trip matrix and the stationary solutions. Section III considers the quantum properties of the emitted beams in terms of quadrature operators in the Fourier domain. The usual input-output linearization technique is used and quantum correlation spectra are formulated. In Sec. IV, these quadrature correlations are then interpreted in terms of polarization entanglement through the Stokes operators. Considering various criteria, we demonstrate theoretically that this device is an efficient source of polarization entanglement.

## II. SETUP AND CLASSICAL PROPERTIES

In this section, we present the basic scheme of the two-crystal OPO. Round-trip equations and stationary solutions are then derived by using Jones matrix formalism.

### A. Linear and nonlinear elements in the OPO cavity

The setup is sketched in Fig. 1. Two identical type-II phase matched ( $\chi^{(2)}$ ) crystals oriented at  $90^\circ$  and two birefringent waveplates are inserted inside a ring cavity. Signal and idler fields are resonant but the pump is not enhanced. The orientation of the various axes with respect to one another are critical. They are summarized on Fig. 1: the nonlinear crystals  $c_\alpha$  and  $c_\beta$  have their fast axes orthogonal; waveplate  $l_1$  has its fast axis parallel to the fast axis of the crystal  $c_\alpha$ ; the fast axis of the waveplate  $l_2$  makes an angle  $\rho$  with respect to the fast axis of crystal  $c_\beta$ . In this paper, we will restrict ourselves to small values of  $\rho$ .

Four fields may propagate inside the cavity: their classical field amplitudes are denoted  $a_{1,2}$  and  $b_{1,2}$  where the index corresponds to the polarization and the letter to the frequency  $\omega_a$  or  $\omega_b$  (Fig. 1). The pump field is polarized at  $45^\circ$  of the crystals' axes and its amplitude is denoted  $a_0$ . We consider that the pump and subharmonic fields are coupled via the nonlinear crystals. In  $c_\alpha$ , the phase matching is such that  $a_0^{(x)}$  is coupled to  $a_1$  and  $b_2$  while in  $c_\beta$ ,  $a_0^{(y)}$  is coupled to  $a_2$  and  $b_1$ .

We suppose that the waveplates for the subharmonic waves have identical dephasing for the two fields.  $M_1$  and  $M_3$  are highly reflective mirrors while the amplitude reflection coefficient for  $M_2$  is denoted  $r$ . For the sake of simplicity, this coefficient is assumed to be real and independent of the frequency and of the polarization.

### B. Propagation matrices

Birefringent elements are usually described by Jones matrices [26]. The total field can be decomposed into four components corresponding to the two subharmonic frequencies and the two linear polarizations. The waveplates  $l_1$  and  $l_2$  couple the fields  $a_1$  and  $a_2$ , and  $b_1^*$  and  $b_2^*$  independently

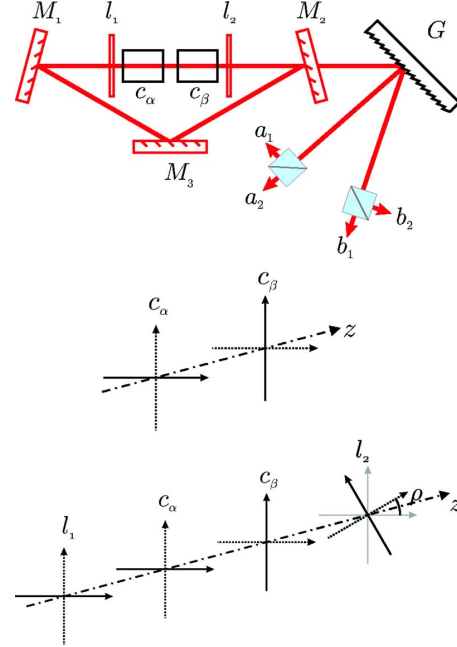


FIG. 1. (Color online) Top: Ring cavity two-crystal OPO:  $c_{\alpha,\beta}$  are type-II nonlinear crystals,  $l_{1,2}$  are  $\lambda/2$  waveplates at  $\omega_0/2$  and  $\lambda$  waveplates at  $\omega_0$ .  $M_{1,3}$  are highly reflective mirrors at  $\omega_{a,b}$  and  $M_2$  is a partially reflective mirror at  $\omega_{a,b}$ . All mirrors are transparent at  $\omega_0$ .  $G$  is a diffraction grating which separates the two frequency components. Each of them have two orthogonally polarized bright components. Center: neutral axes seen by the fundamental wave at frequency  $\omega_0$ . Bottom: neutral axes seen by the subharmonic waves at frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . Dotted lines denote fast axes and continuous lines slow axes.

while the crystals couple  $a_1$  and  $b_2^*$ , and  $a_2$  and  $b_1^*$  independently. Thus, the basis  $\{a_1, b_2^*, a_2, b_1^*\}$  is sufficient.

The waveplate  $l_1$  is a  $\lambda/2$  with its axes parallel to the basis axes so that its associated matrix is diagonal:

$$M_{l_1} = \begin{pmatrix} ie^{ik_a n e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -ie^{-ik_b n e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ie^{ik_a n e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ie^{-ik_b n e} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where  $k_{a,b}$  denotes the wave vectors,  $n$  the mean index of refraction (dispersion is neglected), and  $e$  the thickness of the plate.

To determine the transfer matrix of the nonlinear crystals, the phase matching will be taken perfect. We recall that the field amplitudes at the output of the first crystal can be written

$$a_1^{(out)} = a_1^{(in)} + g a_0^{(x)} (b_2^{(in)})^*,$$

and

GENERATION OF TWO-COLOR POLARIZATION...

$$(b_2^{(out)})^* = (b_2^{(in)})^* + g(a_0^{(x)})^* (a_1^{(in)}), \quad (2)$$

to the first order in  $g$  where  $a_0^{(x)}$  denotes the pump amplitude at the output of the first crystal,

$$a_0^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0, \quad (3)$$

and where  $g$  is the nonlinear coupling coefficient given by

$$g = l\chi^{(2)} \sqrt{\frac{\hbar \omega_a \omega_b}{2c^2 \epsilon_0 n_0 n_1 n_2}}. \quad (4)$$

Equations (2) are only valid close to the oscillation threshold where the pump depletion is small, which corresponds to the usual operation regime of such nonlinear devices in quantum optics [24]. The transfer matrix of the first crystal takes thus the following form:

$$M_{c_\alpha} = \begin{pmatrix} e^{ik_a n_1 l} & g \frac{a_0}{\sqrt{2}} e^{ik_a n_1 l} & 0 & 0 \\ g \frac{a_0^*}{\sqrt{2}} e^{-ik_b n_2 l} & e^{-ik_b n_2 l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_a n_2 l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_b n_1 l} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

As stated before, perfect phase matching has been assumed.  $n_{1,2}$  stand for the refractive indices along the neutral axes and  $l$  is the crystal thickness. In the second crystal, only  $a_2$  and  $b_1^*$  are coupled to the pump. Assuming that the two crystals are at the same temperature, the transfer matrix is given by

$$M_{c_\beta} = \begin{pmatrix} e^{ik_a n_2 l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_b n_1 l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_a n_1 l} & g a_0^{(y)} e^{ik_a n_1 l} \\ 0 & 0 & g a_0^{(y)} e^{-ik_b n_2 l} & e^{-ik_b n_2 l} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$a_0^{(y)}$  denotes the pump amplitude along  $y$  between the two crystals,

$$a_0^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_0. \quad (7)$$

Finally, the last waveplate is a  $\lambda/2$  waveplate rotated by an angle  $(\rho + \pi/2)$  with respect to  $l_1$ . To the first order in  $\rho$ , the transfer matrix is found to be [19]

$$M_{l_2} = \begin{pmatrix} -i e^{ik_a n e} & 0 & i \epsilon_0 e^{ik_a n e} & 0 \\ 0 & i e^{-ik_b n e} & 0 & -i \epsilon_0 e^{-ik_b n e} \\ i \epsilon_0 e^{ik_a n e} & 0 & i e^{ik_a n e} & 0 \\ 0 & -i \epsilon_0 e^{-ik_b n e} & 0 & -i e^{ik_b n e} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

where  $\epsilon_0 \equiv \sin 2\rho \approx 2\rho$ .

As mentioned earlier, we assume that the mirror properties are independent both of the frequency and of the polarization. The free propagation matrix is thus

PHYSICAL REVIEW A 73, 012333 (2006)

$$M_{prop} = r \begin{pmatrix} e^{ik_a L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_b L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_a L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_b L} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

where  $L$  is the cavity length without taking into account the birefringent elements (waveplates and crystal).

One can now calculate the round-trip matrix:

$$M_{rt} \equiv M_{prop} \cdot M_{l_2} \cdot M_{c_\beta} \cdot M_{c_{\alpha}} \cdot M_{l_1}. \quad (10)$$

Rather than giving the round-trip matrix in the general case, let us now make the following assumptions which are usually verified experimentally: the finesse for the subharmonic fields is high. The coefficient  $r$  is close to 1 and we put  $r = 1 - \kappa$  with  $\kappa \ll 1$ ; we assume that the double resonance condition is verified, that is both

$$\Delta_{a,b} = k_{a,b}[L + 2ne + l(n_1 + n_2)] \quad (11)$$

are close to an integer multiple of  $2\pi$ . We denote  $\delta_{a,b}$  their small round-trip phase detunings; the waveplates  $l_1$  and  $l_2$  are  $\lambda/2$  for the two frequencies  $\omega_a$  and  $\omega_b$ .

In this case, the round-trip matrix to the first order in  $\delta_{a,b}, g, \kappa$ , and  $\epsilon_0$  takes the following form:

$$M_{rt} \approx \begin{pmatrix} 1 + i\delta_a - \kappa & g \frac{a_0}{\sqrt{2}} & \epsilon_0 & 0 \\ g \frac{a_0^*}{\sqrt{2}} & 1 - i\delta_b - \kappa & 0 & -\epsilon_0 \\ -\epsilon_0 & 0 & 1 + i\delta_a - \kappa & g \frac{a_0}{\sqrt{2}} e^{-i\psi} \\ 0 & \epsilon_0 & g \frac{a_0^*}{\sqrt{2}} e^{i\psi} & 1 - i\delta_b - \kappa \end{pmatrix}, \quad (12)$$

where  $\psi = (k_b n_1 + k_a n_2)l$ . The phase of the pump amplitude between the two crystals has been shifted by  $(k_a + k_b)ne$ .

### C. Stationary solutions

The stationarity of the solutions corresponds to the fact that the field amplitudes after one round trip must be equal to the initial ones. This condition can be expressed in terms of the round-trip matrix:

$$M_{rt} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2^* \\ a_2 \\ b_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2^* \\ a_2 \\ b_1^* \end{pmatrix}. \quad (13)$$

This system has a nontrivial solution only if

$$\det(M_{rt} - \mathbb{I}_4) = 0 \quad (14)$$

which leads to a stringent condition on the dephasings

$$\delta_a = \delta_b = \delta \quad (15)$$

and provides also an expression for the pump power  $I_0^{(threshold)} = |a_0|^2$ .

LAURAT *et al.*PHYSICAL REVIEW A **73**, 012333 (2006)

We will restrict ourselves to the case where  $\psi=0[2\pi]$ , which corresponds to the lowest threshold area. Equation (14) yields to

$$I_0^{(threshold)} = |a_0|^2 = \frac{2}{g^2}[\kappa^2 + (\delta \pm \epsilon_0)^2]. \quad (16)$$

This equation has two solutions, corresponding to two possible regimes. In this paper, we will focus on the regime of lower threshold.

These equations are similar to that obtained in a one-crystal self-phase locked OPO, which has been studied in detail in [18,19,25]. For a given input pump intensity, the phase-locked operation can be obtained only for a given range of the relevant parameters (i.e., cavity length and crystal temperature) which defines a so-called "locking zone." This locking zone is typically a cavity resonance width large in terms of length and a few kelvins in terms of temperature, well within experimental capacities. For a one-crystal self-phase-locked OPO, a phase-locked operation was indeed observed even for extremely small angles of the wave plate [24] where it does not perturb the quantum properties of the system [23].

Let us consider the lowest threshold given by Eq. (16) and reach for  $\delta=\epsilon_0$ . This working point, associated with  $\psi=0[2\pi]$ , can be obtained experimentally by simultaneously adjusting both the crystal temperatures and the frequency of the pump laser. Equation (16) becomes thus

$$I_0^{(threshold)} = 2\kappa^2/g^2. \quad (17)$$

At this working point, the round-trip matrix is simpler and can be rewritten:

$$M_{rt} = \begin{pmatrix} 1 + i\epsilon_0 - \kappa & \kappa & \epsilon_0 & 0 \\ \kappa & 1 - i\epsilon_0 - \kappa & 0 & -\epsilon_0 \\ -\epsilon_0 & 0 & 1 + i\epsilon_0 - \kappa & \kappa \\ 0 & \epsilon_0 & \kappa & 1 - i\epsilon_0 - \kappa \end{pmatrix}. \quad (18)$$

The eigenvector of the round-trip equation,  $M_{rt}\vec{\mathcal{J}}=\vec{\mathcal{J}}$ , is given by

$$\vec{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}, \quad (19)$$

where  $\mathcal{J}$  is a (*a priori* complex) constant. This expression shows that the field generated consists in two modes at frequencies  $\omega_a$  and  $\omega_b$  with right circularly polarization.  $\mathcal{J}$  is determined by the pump depletion equation:

$$a_0 = (a_0^{in} - ga_1b_2)e^{ikn_0l}, \quad (20)$$

where  $a_0^{in}$  is the input pump amplitude. In order to solve this equation, one can set the pump phase between the two crystals to be zero: this amounts to changing the phase origin which will not change the properties of the system. The previous equation yields

$$\left(\frac{\kappa}{g} + g|\mathcal{J}|^2\right)^2 = I_0^{(in)} \quad (21)$$

with  $I_0^{(in)} = |a_0^{(in)}|^2$ . One then gets the usual OPO solution

$$\mathcal{J} = \sqrt{\frac{\kappa}{g^2}(\sigma - 1)}e^{i\phi_1}, \quad (22)$$

where a reduced pumping parameter  $\sigma$  has been defined equal to the input pump amplitude normalized to the threshold

$$\sigma = \sqrt{\frac{I_0^{(in)}}{I_0^{(threshold)}}}. \quad (23)$$

When  $\sigma$  is larger than 1, i.e., when the OPO is pumped above a defined threshold, four bright beams with fixed relative phases given by Eq. (19) are generated. Since the two signal (resp. idler) beams have a fixed phase relation and identical frequencies, they form a single beam with a circular polarization state. The system thus generates two circularly polarized beams which are frequency tunable.

The next sections are devoted to the study of the quantum properties. Correlations and anticorrelations of the couple signal/idler emitted by each crystal, i.e.,  $(a_1, b_2)$  or  $(a_2, b_1)$ , are formulated.

### III. QUANTUM PROPERTIES AND QUADRATURE FLUCTUATIONS

In order to calculate the fluctuations for the involved fields when the system is pumped above threshold, we apply the usual input-output linearization technique (see, e.g., [27]). Individual noise spectra as well as the correlations between any linear combinations of the various fluctuations are derived in the Fourier domain.

#### A. Linearized equations

We first determine the classical stationary solutions of the evolution equations: these solutions are denoted  $a_i^{(s)}$ ,  $b_j^{(s)}$  where  $i=0,1,2$ ;  $j=1,2$ . We then linearize the evolution equations around these stationary values by setting  $a_i = a_i^{(s)} + \delta a_i$ ,  $i=0,1,2$ , and  $b_j = b_j^{(s)} + \delta b_j$ ,  $j=0,1$ .

The evolution equations for the fluctuations are deduced from the round-trip matrix taking into account the stationary solutions (17), (19), and (22):

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\delta a_1}{dt} &= (-\kappa\sigma + i\epsilon_0)\delta a_1 + \kappa\delta b_2^* + e^{i\phi_1}\sqrt{\kappa(\sigma-1)}(\delta a_0^{(x)})^{(in)} \\ &\quad + \epsilon_0\delta a_2 - e^{2i\phi_1}\kappa(\sigma-1)\delta b_2 - \sqrt{2\kappa}\delta a_1^{in}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\delta a_2}{dt} &= (-\kappa\sigma + i\epsilon_0)\delta a_2 + \kappa\delta b_1^* - ie^{i\phi_1}\sqrt{\kappa(\sigma-1)}(\delta a_0^{(y)})^{(in)} \\ &\quad - \epsilon_0\delta a_1 + e^{2i\phi_1}\kappa(\sigma-1)\delta b_1 - \sqrt{2\kappa}\delta a_2^{in}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\delta b_1}{dt} &= (-\kappa\sigma + i\epsilon_0)\delta b_1 + \kappa\delta a_2^* + ie^{-i\phi_1}\sqrt{\kappa(\sigma-1)}(\delta a_0^{(y)})^{(in)} \\ &\quad + \epsilon_0\delta b_2 + e^{-2i\phi_1}\kappa(\sigma-1)\delta a_2 - \sqrt{2\kappa}\delta b_1^{in}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d\delta b_2}{dt} = & (-\kappa\sigma + i\epsilon_0)\delta b_2 + \kappa\delta a_1^* - e^{-i\phi_1}\sqrt{\kappa(\sigma-1)}(\delta a_0^{(x)})^{(in)} \\ & - \epsilon_0\delta b_1 - e^{-2i\phi_1}\kappa(\sigma-1)\delta a_1 - \sqrt{2\kappa}\delta b_2^{in}, \end{aligned} \quad (24)$$

where  $\tau$  stands for the cavity round-trip time.  $\delta a_i^{in}$  correspond to the vacuum fluctuations entering the cavity through the coupling mirror.

### B. Quadrature fluctuations

We define the amplitude and phase quadratures of a mode  $a$  with mean phase  $\phi_a$  by, respectively,

$$p_a = \delta a e^{-i\phi_a} + \delta a^* e^{i\phi_a}, \quad q_a = -i(\delta a e^{-i\phi_a} - \delta a^* e^{i\phi_a}). \quad (25)$$

The evolution equations can be then expressed in matrix form:

$$\tau \frac{d}{dt} \delta \mathcal{J} = M \delta \mathcal{J} + \sqrt{\kappa(\sigma-1)} \delta \mathcal{J}_0^{in} + \sqrt{2\kappa} \delta \mathcal{J}^{in}, \quad (26)$$

where

$$M = \begin{pmatrix} -\kappa\sigma & -\epsilon_0 & 0 & \epsilon_0 & 0 & 0 & -\kappa(\sigma-2) & 0 \\ \epsilon_0 & -\kappa\sigma & -\epsilon_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa\sigma \\ 0 & \epsilon_0 & -\kappa\sigma & -\epsilon_0 & -\kappa(\sigma-2) & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon_0 & 0 & \epsilon_0 & -\kappa\sigma & 0 & -\kappa\sigma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\kappa(\sigma-2) & 0 & -\kappa\sigma & -\epsilon_0 & 0 & \epsilon_0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa\sigma & \epsilon_0 & -\kappa\sigma & -\epsilon_0 & 0 \\ -\kappa(\sigma-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_0 & -\kappa\sigma & -\epsilon_0 \\ 0 & -\kappa\sigma & 0 & 0 & -\epsilon_0 & 0 & \epsilon_0 & -\kappa\sigma \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$\delta \mathcal{J}$  is the column vector of the quadrature components

$$\delta \mathcal{J} = (p_{a_1}, q_{a_1}, p_{a_2}, q_{a_2}, p_{b_1}, q_{b_1}, p_{b_2}, q_{b_2}), \quad (28)$$

$\delta \mathcal{J}_0^{in}$  for the input pump fluctuations,

$$\delta \mathcal{J}_0^{in} = (p_0^{(x)in}, q_0^{(x)in}, p_0^{(y)in}, q_0^{(y)in}, p_0^{(x)in}, q_0^{(x)in}, p_0^{(y)in}, q_0^{(y)in}), \quad (29)$$

and  $\delta \mathcal{J}^{in}$  the for the vacuum fluctuations entering the cavity through the coupling mirror

$$\delta \mathcal{J}^{in} = (p_{a_1}^{in}, q_{a_1}^{in}, p_{a_2}^{in}, q_{a_2}^{in}, p_{b_1}^{in}, q_{b_1}^{in}, p_{b_2}^{in}, q_{b_2}^{in}). \quad (30)$$

These differential equations are readily transformed into algebraic equations by taking the Fourier transform. In the frequency domain, the equations become

$$2i\Omega \delta \tilde{\mathcal{J}}(\Omega) = M' \delta \tilde{\mathcal{J}}(\Omega) + \sqrt{\frac{\sigma-1}{\kappa}} \delta \tilde{\mathcal{J}}_0^{in}(\Omega) + \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \delta \tilde{\mathcal{J}}^{in}(\Omega), \quad (31)$$

where  $\Omega = \tau\omega/2\kappa = \omega/\Omega_c$  is the noise frequency normalized to the cavity bandwidth  $\Omega_c = 2\kappa/\tau$  and  $c = \epsilon_0/\kappa$  is the normalized coupling constant.  $\delta \tilde{\mathcal{J}}(\Omega)$ ,  $\delta \tilde{\mathcal{J}}_0^{in}(\Omega)$ , and  $\delta \tilde{\mathcal{J}}^{in}(\Omega)$  are the Fourier transforms of the column vectors (28)–(30). The matrix  $M'$  is defined by

$$M' = \begin{pmatrix} -\sigma & -c & 0 & c & 0 & 0 & -\sigma-2 & 0 \\ c & -\sigma & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma \\ 0 & c & -\sigma & -c & -\sigma-2 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & c & -\sigma & 0 & -\sigma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\sigma-2 & 0 & -\sigma & -c & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & c & -\sigma & -c & 0 \\ -\sigma-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -\sigma & -c \\ 0 & -\sigma & 0 & 0 & -c & 0 & c & -\sigma \end{pmatrix}. \quad (32)$$

LAURAT *et al.*PHYSICAL REVIEW A **73**, 012333 (2006)

### C. Correlations and anticorrelations

In order to use the symmetry of the equations, one can introduce the symmetric and antisymmetric components

$$\begin{aligned}\tilde{p}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{p}_{a_1}(\Omega) + \tilde{p}_{b_2}(\Omega)], & \tilde{q}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{q}_{a_1}(\Omega) + \tilde{q}_{b_2}(\Omega)], \\ \tilde{r}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{p}_{a_1}(\Omega) - \tilde{p}_{b_2}(\Omega)], & \tilde{s}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{q}_{a_1}(\Omega) - \tilde{q}_{b_2}(\Omega)],\end{aligned}\quad (33)$$

and

$$\begin{aligned}\tilde{p}_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{p}_{a_2}(\Omega) + \tilde{p}_{b_1}(\Omega)], & \tilde{q}_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{q}_{a_2}(\Omega) + \tilde{q}_{b_1}(\Omega)], \\ \tilde{r}_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{p}_{a_2}(\Omega) - \tilde{p}_{b_1}(\Omega)], & \tilde{s}_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{q}_{a_2}(\Omega) - \tilde{q}_{b_1}(\Omega)].\end{aligned}\quad (34)$$

In a standard OPO, one expects intensity correlations and phase anticorrelations. Using our notations, this corresponds to having  $r_\alpha$  and  $r_\beta$  as well as  $q_\alpha$  and  $q_\beta$  squeezed [28]. This is also the case in a phase-locked OPO in the limit of small coupling [23].

As previously, the equations verified by these quantities can be expressed in matrix form. However, it is interesting to note that the sums are independent from the differences. Thus, one can write two sets of equations:

$$\begin{aligned}2i\Omega\delta\tilde{w}_\pm(\Omega) &= M_\pm\delta\tilde{w}_\pm(\Omega) + \sqrt{2\frac{\sigma-1}{\kappa}}\delta\tilde{w}_{0,\pm}^{in}(\Omega) \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\kappa}}\delta\tilde{w}_\pm^{in}(\Omega),\end{aligned}\quad (35)$$

where  $\delta\tilde{w}_\pm$  are the column vector

$$\begin{aligned}\delta\tilde{w}_+(\Omega) &= (\tilde{p}_\alpha(\Omega), \tilde{p}_\beta(\Omega), \tilde{q}_\alpha(\Omega), \tilde{q}_\beta(\Omega)), \\ \delta\tilde{w}_-(\Omega) &= (\tilde{r}_\alpha(\Omega), \tilde{r}_\beta(\Omega), \tilde{s}_\alpha(\Omega), \tilde{s}_\beta(\Omega)),\end{aligned}\quad (36)$$

$$\begin{aligned}M_+ &= \begin{pmatrix} -2(\sigma-1) & 0 & -c & c \\ 0 & -2(\sigma-1) & c & -c \\ c & -c & -2\sigma & 0 \\ -c & c & 0 & -2\sigma \end{pmatrix}, \\ M_- &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -c & -c \\ 0 & -2 & -c & -c \\ c & c & 0 & 0 \\ c & c & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (37)$$

$\delta\tilde{w}_{0,\pm}^{in}$  are the column vectors for the input pump fluctuations,

$$\delta\tilde{w}_{0,+}^{in} = (\tilde{p}_0^{(x)in}(\Omega), \tilde{p}_0^{(y)in}(\Omega), \tilde{q}_0^{(x)in}(\Omega), \tilde{q}_0^{(y)in}(\Omega)),$$

$$\delta\tilde{w}_{0,-}^{in} = (0, 0, 0, 0),\quad (38)$$

and  $\delta\tilde{w}^{in}$  the column vector for the input fluctuations entering the cavity through the coupling mirror

$$\begin{aligned}\delta\tilde{w}_+^{in}(\Omega) &= (\tilde{p}_\alpha^{in}(\Omega), \tilde{p}_\beta^{in}(\Omega), \tilde{q}_\alpha^{in}(\Omega), \tilde{q}_\beta^{in}(\Omega)) \\ \delta\tilde{w}_-^{in}(\Omega) &= (\tilde{r}_\alpha^{in}(\Omega), \tilde{r}_\beta^{in}(\Omega), \tilde{s}_\alpha^{in}(\Omega), \tilde{s}_\beta^{in}(\Omega)).\end{aligned}\quad (39)$$

These equations can be easily solved and one obtains the equations for the intracavity fluctuations. However, the relevant fluctuations are those outside the cavity. They can be easily calculated using the boundary condition on the output mirror:

$$f_{out} = tf - rf_{in} \approx \sqrt{2}\kappa f - f_{in}\quad (40)$$

and the corresponding spectra are given by

$$\mathcal{S}_f(\Omega) = \langle \tilde{f}_{out}(\Omega) \tilde{f}_{out}^*(-\Omega) \rangle.\quad (41)$$

The expressions are identical for the two sets of spectra  $\mathcal{S}_{p_\alpha q_\alpha r_\alpha s_\alpha}$  and  $\mathcal{S}_{p_\beta q_\beta r_\beta s_\beta}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{p_u}(\Omega) &= 1 + \frac{1}{2[\Omega^2 + (\sigma-1)^2]} \\ &+ \frac{\sigma^2 + \Omega^2 - c^2}{2\{[c^2 + \sigma(\sigma-1)]^2 + \Omega^2 - 2[c^2 - \sigma(\sigma-1)]\Omega^2 + \Omega^4\}}, \\ \mathcal{S}_{q_u}(\Omega) &= 1 - \frac{1}{\Omega^2 + \sigma^2} \\ &- \frac{(\sigma-1)^2 + \Omega^2 - c^2}{2\{[c^2 + \sigma(\sigma-1)]^2 + \Omega^2 - 2[c^2 - \sigma(\sigma-1)]\Omega^2 + \Omega^4\}}, \\ \mathcal{S}_{r_u}(\Omega) &= 1 - \frac{1}{2(1+\Omega^2)} - \frac{\Omega^2 - c^2}{2[\Omega^2 + (\Omega^2 - c^2)^2]}, \\ \mathcal{S}_{s_u}(\Omega) &= 1 + \frac{1}{2\Omega^2} + \frac{1 + \Omega^2 - c^2}{2[\Omega^2 + (\Omega^2 - c^2)^2]},\end{aligned}\quad (42)$$

$u = \alpha, \beta$ .

The behavior of the squeezed spectra,  $\mathcal{S}_{p_u^{(out)}}$  and  $\mathcal{S}_{q_u^{(out)}}$ , is shown in Fig. 2. For small coupling and low analysis frequency, one observes that the spectra go to zero which indicates the existence of very large correlations. As usual, the spectra go to 1 as  $\Omega$  goes to infinity: the correlations exist only within the cavity bandwidth or conversely, only when the integration time is larger than the field life time in the cavity. The increase of  $c$  also results in a degradation of the correlations and anticorrelations: the waveplate tends to mix the fields, and this phenomenon is increased as the coupling is increased. This phenomenon can be understood in terms of phase diffusion: as the coupling is increased, the phase diffusion is reduced which in turn reduces the intensity correlations. Finally, the phase anticorrelations (Fig. 2, bottom) are also degraded as the input pump power is increased: as  $\sigma$

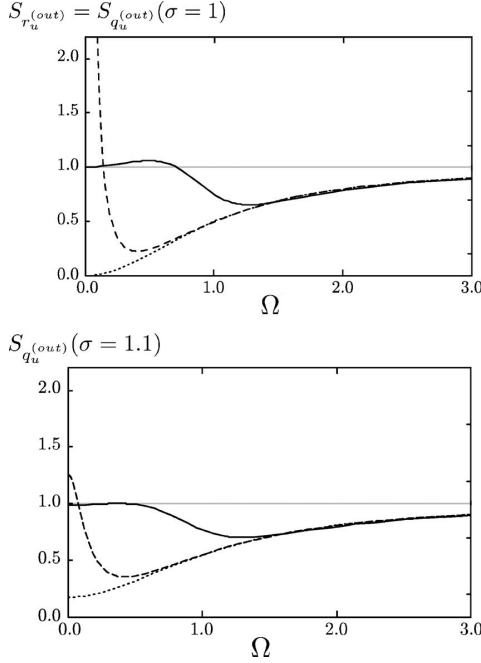


FIG. 2. Normalized noise spectrum of the amplitude quadrature difference and phase quadrature sum for  $\sigma=1$  (top) and  $\sigma=1.1$  (bottom). Continuous curves corresponds to  $c=1$ , long-dashed to  $c=0.2$ , and short-dashed to  $c=0$ .

is increased, the input pump noise becomes more and more important.

This analysis has been performed by studying the fields generated by each crystal. Since several frequencies are involved, such a measurement would require the use of multiple local oscillators or of dephasing cavities [29]. It is thus easier experimentally as well as more fruitful for quantum information purposes to study the beams at each frequency, namely the couples  $(a_1, a_2)$  and  $(b_1, b_2)$ , which are circularly polarized.

#### IV. POLARIZATION-ENTANGLEMENT GENERATION

The nonclassical properties of the two-crystal OPO are now analyzed in terms of polarization fluctuations. Polarization-entanglement generation is demonstrated using various criteria introduced in the literature.

##### A. Quantum Stokes parameters

Before describing the properties of the system, let us briefly recall the quantum picture for polarization properties. The polarization of light beams can be described in the general case by the Stokes parameters [30]:

$$\begin{aligned} S_0 &= I_x + I_y, & S_1 &= I_x - I_y, \\ S_2 &= I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ}, & S_3 &= I_{\sigma^+} - I_{\sigma^-}. \end{aligned} \quad (43)$$

where  $I_{x,y,+45^\circ,-45^\circ,\sigma^+,\sigma^-}$  describe the intensity along the  $x$ ,  $y$ ,  $+45^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,  $\sigma^+$ , and  $\sigma^-$  polarization. These four parameters

are not independent but are instead linked by the relation

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (44)$$

for a totally polarized field.

The quantum polarization properties are defined via the quantum counterparts of the Stokes parameters [1,2]:

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 &= \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y, & \hat{S}_1 &= \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y, \\ \hat{S}_2 &= \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x = \hat{a}_{+45^\circ}^\dagger \hat{a}_{+45^\circ} + \hat{a}_{-45^\circ}^\dagger \hat{a}_{-45^\circ}, \\ \hat{S}_3 &= i(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y) = \hat{a}_{\sigma^+}^\dagger \hat{a}_{\sigma^+} + \hat{a}_{\sigma^-}^\dagger \hat{a}_{\sigma^-}. \end{aligned} \quad (45)$$

$(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$  verify commutation relations identical to those verified by orbital momentum operators:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = 2i\hat{S}_k, \quad (46)$$

where  $i, j, k = 1, 2, 3$  are cyclically interchangeable. These relations result in three uncertainty relations,

$$\begin{aligned} \Delta^2 \hat{S}_1 \Delta^2 \hat{S}_2 &\geq |\langle \hat{S}_3 \rangle|^2, & \Delta^2 \hat{S}_2 \Delta^2 \hat{S}_3 &\geq |\langle \hat{S}_1 \rangle|^2, \\ \Delta^2 \hat{S}_3 \Delta^2 \hat{S}_1 &\geq |\langle \hat{S}_2 \rangle|^2, \end{aligned} \quad (47)$$

where the notation  $\Delta^2(\hat{X})$  correspond to the variance of the operator  $\hat{X}$ .

##### B. Entanglement criteria

In our case, Eq. (19) shows that the output beams are circularly polarized, thus  $\langle \hat{S}_1^{a,b} \rangle = 0 = \langle \hat{S}_2^{a,b} \rangle$ ; and as a result, the inequalities (47) which contain variances  $\hat{S}_3^{a,b}$  are automatically verified. The only nontrivial Heisenberg inequality is then given by

$$\Delta^2 \hat{S}_1^{a,b} \Delta^2 \hat{S}_2^{a,b} \geq |\langle \hat{S}_3^{a,b} \rangle|^2 = \frac{\kappa}{g^2} (\sigma - 1), \quad (48)$$

where the notation  $\Delta^2(\hat{X})$  corresponds to the variance of the operator  $\hat{X}$ :  $\Delta^2(\hat{X}) = \langle (\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle)^2 \rangle = \langle \delta X^2 \rangle$ .

Various entanglement criteria have been defined. We will restrict ourselves to three of them [31–34].

The first two criteria are, in the general case, sufficient (and not always necessary) conditions for entanglement. A general criterion is given by the product of two linear combinations of conjugate variables variances [33] (denoted “product criterion” in the following). In the case of the Stokes operators, this inseparability criterion states that when

$$\Delta^2(\hat{S}_1^a \pm \hat{S}_1^b) \Delta^2(\hat{S}_2^a \mp \hat{S}_2^b) \leq 2(|\langle \hat{S}_3^a \rangle| + |\langle \hat{S}_3^b \rangle|) \quad (49)$$

the state is entangled. The relevant Stokes parameters fluctuations  $\delta \hat{S}_1^{a,b}$  and  $\delta \hat{S}_2^{a,b}$  can be expressed from the quadrature operators. In the case of circularly polarized beams, one has ( $u=a, b$ )

$$\frac{\delta \hat{S}_1^u(\Omega)}{|\mathcal{J}|} = \delta \hat{p}_{u_1}^{(out)}(\Omega) - \delta \hat{p}_{u_2}^{(out)}(\Omega),$$

LAURAT *et al.*PHYSICAL REVIEW A **73**, 012333 (2006)

$$\frac{\delta \hat{S}_2^u(\Omega)}{|\mathcal{J}|} = -[\delta \tilde{q}_{u_1}^{(out)}(\Omega) - \delta \tilde{q}_{u_2}^{(out)}(\Omega)]. \quad (50)$$

It follows from these expressions that

$$\begin{aligned} \delta S_1^+ &= \delta \hat{S}_1^a(\Omega) + \delta \hat{S}_1^b(\Omega) \\ &= [\delta \tilde{p}_{a_1}^{(out)}(\Omega) - \delta \tilde{p}_{b_2}^{(out)}(\Omega)] - [\delta \tilde{p}_{a_2}^{(out)}(\Omega) - \delta \tilde{p}_{b_1}^{(out)}(\Omega)] \\ &= \sqrt{2}(r_\alpha^{(out)} - r_\beta^{(out)}), \\ \delta S_2^- &= \delta \hat{S}_2^a(\Omega) - \delta \hat{S}_2^b(\Omega) \\ &= -[\delta \tilde{q}_{a_1}^{(out)}(\Omega) + \delta \tilde{q}_{b_2}^{(out)}(\Omega)] + [\delta \tilde{q}_{a_2}^{(out)}(\Omega) + \delta \tilde{q}_{b_1}^{(out)}(\Omega)] \\ &= \sqrt{2}(-q_\alpha^{(out)} + q_\beta^{(out)}). \end{aligned} \quad (51)$$

Thus the relevant spectra can be calculated from the previously calculated linear combinations of the amplitude and phase quadrature components. They are given by

$$S_{S_1^+}(\Omega) = 1 - \frac{\Omega^2 - c^2}{\Omega^2 + (\Omega^2 - c^2)^2},$$

$$\begin{aligned} S_{S_2^-}(\Omega) &= 1 - \frac{(\Omega^2 - c^2) + (\sigma - 1)^2}{[c^2 + \sigma(\sigma - 1)]^2 + \Omega^2 - 2[c^2 - \sigma(\sigma - 1)]\Omega^2 + \Omega^4}. \end{aligned} \quad (52)$$

Let us remark that the two expressions are equal for  $\sigma = 1$  and  $c=0$ , i.e., for the uncoupled system operated at threshold. One also remarks that  $S_{S_1^+}(\Omega)$  is independent of the pump amplitude  $\sigma$ . This is not surprising since this quantity is the difference of the intensity correlations between the signal and idler modes of each crystal. These correlations originate in the parametric down-conversion phenomenon, independently of the pump power: the photons in the modes  $a_1$  and  $b_2$  ( $a_2$  and  $b_1$ , respectively) are emitted by pairs thus leading to intensity correlations between the two modes. These two quantities can be measured using standard methods for the measurement of quantum Stokes operators, see, e.g., [2,14,15]

Using these expressions, one gets a simple expression for the product criterion (49)

$$S_{S_1^+}(\Omega) S_{S_2^-}(\Omega) \leq 2. \quad (53)$$

The second criterion (“sum criterion”), which is widely used in continuous-variable entanglement characterization, is given by the sum of the above quantities [31,32]. It is, in fact, a special case of the previous criterion [33]. The criterion states that if

$$\frac{1}{2}(S_{S_1^+} + S_{S_2^-}) \leq 1 \quad (54)$$

then the two states are entangled.

These two criteria are entanglement witnesses in the sense that they allow us to specify whether the state is indeed entangled.

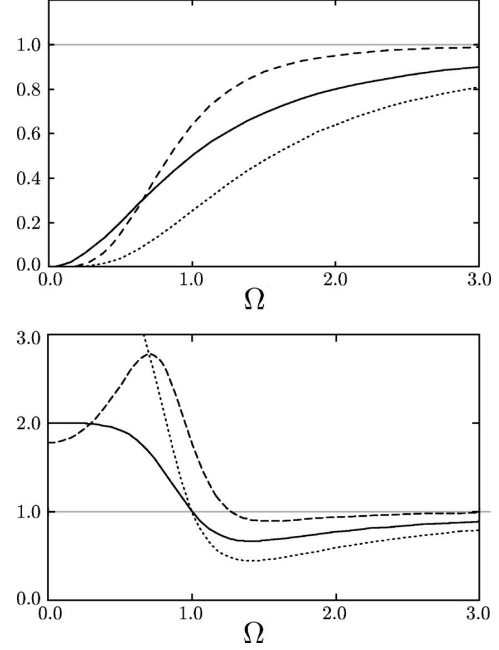


FIG. 3. Criterion spectra for  $c=0$  (top) and  $c=1$  (bottom). Continuous curves correspond to the sum criterion  $[\frac{1}{2}S_{S_1^+}(\Omega) + S_{S_2^-}(\Omega)]$ , long-dashed to the EPR criterion  $(S_{S_1^+|S_2^-} \cdot S_{S_2^-|S_1^+})$ , and short-dashed to the product criterion  $[\frac{1}{2}(S_{S_1^+} \cdot S_{S_2^-})]$ .

Finally, the last criterion is related to another particularity of the system which may allow us to make a joint QND measurement of the two noncommuting observables  $\hat{S}_1$  and  $\hat{S}_2$ . It is shown in [34] that this is related to the EPR-like “paradox.” This criterion relies on conditional probabilities and can be written

$$S_{S_1^a|S_2^b} \cdot S_{S_2^a|S_1^b} \leq 1, \quad (55)$$

where

$$S_{S_i^a|S_j^b} = \langle (S_i^a)^2 \rangle \left( 1 - \frac{\langle S_i^a S_j^b \rangle^2}{\langle (S_i^a)^2 \rangle \langle (S_j^b)^2 \rangle} \right), \quad i = 1, 2. \quad (56)$$

When this condition is verified, the correlations are sufficiently large that the information extracted from the measurement of the two Stokes operators of one field provides values for the Stokes operators of the other which violate the Heisenberg inequality [35].

Figure 3 shows the various criteria as a function of the analysis frequency,  $\Omega$  for a fixed pump power ( $\sigma=1$ ) and for different values of the coupling. Very strong entanglement can be found for small couplings,  $c$  and small analysis frequencies  $\Omega$ . As the coupling is increased, the entanglement is shifted to higher values of the analysis frequency. Let us note, however, that  $c=1$  corresponds usually to large angles (around  $1^\circ$  for typical output couplers): in the case of single-crystal phase locked OPOs, stable phase-locking has been



GENERATION OF TWO-COLOR POLARIZATION-...

PHYSICAL REVIEW A **73**, 012333 (2006)

achieved with very small angles corresponding to  $c \approx 0$ . The entanglement is present for a wide range of the parameters thus showing the efficiency of the system.

### V. CONCLUSION

We have presented and studied theoretically an original device based on an optical cavity containing two type-II phase-matched  $\chi^{(2)}$  crystals as well as birefringent plates which add a linear coupling between the signal and idler fields emitted in each crystal. The coupling induces a phase-locking, respectively, between the two signal fields and between the two idler fields. In this configuration, the system is found to directly generate two-color polarization-entangled beams without the need for mode mixing. The two-crystal OPO would be thus a useful resource for the field of continuous-variable quantum information. Nonclassical po-

larization states are well coupled to atomic ensembles which can be used as quantum memories and form the basic block required for quantum networks. Furthermore, we believe that the experimental implementation of this device is very interesting for potential parallel processing as it would be a new step towards extending the dimension of the phase space experimentally accessible.

### ACKNOWLEDGMENTS

Laboratoire Kastler-Brossel of the Ecole Normale Supérieure and the Université Pierre et Marie Curie, is associated with the Centre National de la Recherche Scientifique (UMR 8552). Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques of Université Denis Diderot, is associated with the Centre National de la Recherche Scientifique (UMR 7162). We thank A. Gatti for pointing us to Ref. [33] and acknowledge fruitful discussions with G. Adesso and A. Serafini.

- 
- [1] A. S. Chirkin, A. A. Orlov, and D. Yu Parschuk, *Kvantovaya Elektron. (Moscow)* **20**, 999 (1993) [*Quantum Electron.* **23**, 870 (1993)].
  - [2] N. Korolkova, G. Leuchs, R. Loudon, T. C. Ralph, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. A* **65**, 052306 (2002).
  - [3] N. Korolkova and R. Loudon, *Phys. Rev. A* **71**, 032343 (2005).
  - [4] B. Julsgaard, J. Sherson, J. I. Cirac, J. Fiurasek, and E. S. Polzik, *Nature (London)* **432**, 482 (2004).
  - [5] M. D. Lukin, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 457 (2003).
  - [6] A. Dantan, A. Bramati, and M. Pinard, *Europhys. Lett.* **67**, 881 (2004).
  - [7] A. Gatti, I. V. Sokolov, M. I. Kolobov, and L. A. Lugiato, *Eur. Phys. J. D* **30**, 123 (2004).
  - [8] M. Martinelli, N. Treps, S. Ducci, S. Gigan, A. Maître, and C. Fabre, *Phys. Rev. A* **67**, 023808 (2003).
  - [9] N. Treps, N. Grosse, W. P. Bowen, C. Fabre, H. A. Bachor, and P. K. Lam, *Science* **940**, 940 (2003).
  - [10] O. Jedrkiewicz, Y.-K. Jiang, E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, L. A. Lugiato, and P. Di Trapani, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 243601 (2004).
  - [11] A. Mosset, F. Devaux, and E. Lantz, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 223603 (2005).
  - [12] V. Delaubert, N. Treps, G. Bo, and C. Fabre, eprint quant-ph/0512152.
  - [13] V. N. Beskrovnyy and M. I. Kolobov, *Phys. Rev. A* **71**, 043802 (2005).
  - [14] W. P. Bowen, N. Treps, R. Schnabel, and P. K. Lam, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 253601 (2002).
  - [15] R. Schnabel, W. P. Bowen, N. Treps, T. Ralph, H. A. Bachor, and P. K. Lam, *Phys. Rev. A* **67**, 012316 (2003).
  - [16] V. Josse, A. Dantan, A. Bramati, and E. Giacobino, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **6**, S532 (2004).
  - [17] E. J. Mason and N. C. Wong, *Opt. Lett.* **23**, 1733 (1998).
  - [18] C. Fabre, E. J. Mason, and N. C. Wong, *Opt. Commun.* **170**, 299 (1999).
  - [19] L. Longchambon, J. Laurat, T. Coudreau, and C. Fabre, *Eur. Phys. J. D* **30**, 279 (2004).
  - [20] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2001).
  - [21] L. Longchambon, J. Laurat, N. Treps, S. Ducci, A. Maître, T. Coudreau, and C. Fabre, *J. Phys. I* **12**, Pr5-147 (2002).
  - [22] H. H. Adamyany and G. Yu. Kryuchkyan, *Phys. Rev. A* **69**, 053814 (2004).
  - [23] L. Longchambon, J. Laurat, T. Coudreau, and C. Fabre, *Eur. Phys. J. D* **30**, 287 (2004).
  - [24] J. Laurat, T. Coudreau, L. Longchambon, and C. Fabre, *Opt. Lett.* **30**, 1177 (2005).
  - [25] P. Groß, K.-J. Boller, and M. E. Klein, *Phys. Rev. A* **71**, 043824 (2005).
  - [26] R. C. Jones, *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 488 (1941).
  - [27] C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, L. Lugiato, S. Reynaud, M. VDACCHINO, and W. KAIGE, *Quantum Opt.* **2**, 159 (1990).
  - [28] S. Reynaud, C. Fabre, and E. Giacobino, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1520 (1987).
  - [29] A. S. Villar, L. S. Cruz, K. N. Cassemiro, M. Martinelli, and P. Nussenzveig, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 24 3603 (2005).
  - [30] G. G. Stokes, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **9**, 399 (1852).
  - [31] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000).
  - [32] R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).
  - [33] V. Giovannetti, S. Mancini, D. Vitali, and P. Tombesi, *Phys. Rev. A* **67**, 022320 (2003).
  - [34] M. D. Reid and P. Drummond, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2731 (1988).
  - [35] N. Treps and C. Fabre, *Laser Phys.* **15**, 187 (2005).

## Conclusion

Au cours des dernières années, l'optique quantique a connu des avancées majeures, tant théoriques qu'expérimentales, dans le domaine de la caractérisation et de la génération des états intriqués en variables continues, qui sont à la base de nombreux protocoles de communication quantique.

L'intrication en elle-même est une propriété de mieux en mieux comprise ; des outils permettant, à partir des mesures effectuées en laboratoire, de la détecter et de la quantifier ont été développés. Afin de proposer une base de travail pour aller plus loin, certains chercheurs se sont attelés à dresser un état des lieux des connaissances. Ceci a permis de montrer que le problème de l'intrication des états Gaussiens bi-partitionnés est bien cerné. Pour des états plus complexes (même Gaussiens), de nombreuses questions restent en suspens : le formalisme permettant de traiter les états Gaussiens existe, mais à l'heure actuelle aucun critère général d'intrication n'a été dégagé pour les états multi-partitionnés.

En ce qui concerne l'expérience, deux aspects complémentaires ont été développés : la génération d'états intriqués de très bonne qualité (en vue de leur utilisation dans divers protocoles, tels que la téléportation), et la génération d'états intriqués multi-partitionnés.

Ce travail de thèse s'inscrit pleinement dans cette évolution des connaissances. Il s'appuie sur un dispositif original, précédemment construit au laboratoire : un Oscillateur Paramétrique Optique à auto-verrouillage de phase. Ce dispositif utilise une solution tout-optique pour forcer les faisceaux signal et complémentaire à osciller à même fréquence : ces champs sont couplés grâce à une lame d'onde insérée dans la cavité de l'OPO. Nous avons généré et caractérisé des états intriqués, sous les deux régimes de fonctionnement du dispositif : au-dessous et au-dessus du seuil.

Au-dessous du seuil, l'OPO auto-verrouillé en phase avait permis de générer des faisceaux vides très intriqués (de séparabilité  $\Sigma = 0,33$ , et pour lesquels le critère EPR vaut  $\mathcal{E} = 0,42$ ). Cette intrication s'étend sur une large bande de fréquences d'analyse (elle a été observée de  $50 \text{ kHz}$  à  $10 \text{ MHz}$ ). Afin d'exploiter ces résultats sous l'angle du formalisme symplectique, nous avons mesuré la matrice de covariance de l'état généré. Ceci nous a permis de retrouver les résultats précédents. L'introduction de la lame d'onde dans la cavité offre un nouveau degré de liberté : l'intensité du couplage. Lorsque le couplage entre les états augmente, leur matrice de covariance n'est plus dans la forme standard. Le formalisme symplectique est cependant encore valable. Il nous a en outre permis de prévoir les transformations passives (non locales) à appliquer à ces états pour

atteindre la quantité maximale d'intrication.

Au-dessus du seuil, la théorie prédit que le dispositif génère des faisceaux EPR brillants et de même fréquence. Si le verrouillage en fréquence était effectif, les mesures précédemment menées n'avaient pas permis de mettre en évidence une violation du critère EPR. À assez haute fréquence d'analyse (16,5 MHz), nous avons cependant mesuré une séparabilité inférieure à 1 :  $\Sigma = 0,78$ . L'excès de bruit observé, qui empêche de violer le critère EPR, est dû au bruit présent sur le faisceau pompe, qui se transmet aux faisceaux signal et complémentaire. Nous avons pu estimer ce bruit autour de 12 dB au-dessus du bruit quantique standard pour le bruit d'intensité, et 17 dB au-dessus du bruit quantique standard pour le bruit de phase. Afin d'éliminer ce bruit, une cavité de filtrage a été mise en place sur le faisceau pompe. Le caractère EPR des faisceaux générés a ainsi été mis en évidence :  $\Sigma = 0,76$  et  $\mathcal{E} = 0,87$ .

Durant la dernière partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la génération d'un autre type de faisceaux corrélés, cette fois en polarisation. Pour ce faire, nous proposons un dispositif dérivé du précédent : un OPO auto-verrouillé en phase à deux cristaux. Il permettrait de produire deux faisceaux de couleurs différentes et ajustables, de polarisation circulaire, et intriqués en polarisation. Outre l'attrait de ces faisceaux pour le transfert de l'intrication de la lumière à la matière, ce système ouvre également des perspectives intéressantes vers l'intrication d'états multi-partitionnés.

Les travaux menés au cours de cette thèse ont permis de démontrer l'intérêt de l'OPO auto-verrouillé en phase comme un système modèle, permettant de générer des états très divers, vides ou brillants. Dans ce domaine, il serait intéressant de mesurer les termes de la matrice de covariance des faisceaux produits lorsque le système fonctionne au-dessus du seuil. Les faisceaux brillants pourraient également être utilisés dans un protocole de communication quantique.

Le dispositif de l'OPO auto-verrouillé en phase à deux cristaux est également destiné à être réalisé à moyen terme. Un certain nombre de problèmes d'ordre technique restent cependant à résoudre auparavant (contrôle de température des cristaux, réalisation de la lame d'onde de verrouillage, ...). D'un point de vue théorique, l'aspect multi-partitionné des faisceaux générés reste encore à explorer. La mise en place – en collaboration avec d'autres groupes du laboratoire – d'un dispositif d'atomes piégés sur l'expérience permettrait d'étudier la transmission de l'intrication entre la lumière et la matière.

À plus court terme, les faisceaux intriqués générés par le dispositif pourraient être exploités pour tester les critères de corrélation photons-champ. Ces critères permettent de détecter des champs comprimés [Carmichael *et al.*, 2004], y compris lorsqu'ils sont peu comprimés. Ils permettent également de s'affranchir de l'efficacité des photodiodes. Le principe est de prélever une faible partie du champ comprimé, et de conditionner la détection (continue) du champ à la détection individuelle des photons ainsi prélevés.

Ces critères n'ont – à notre connaissance – jusqu'à présent été testés que dans le

---

domaine de l'électrodynamique quantique en cavité [Foster *et al.*, 2000]. Dans notre cas, lorsqu'on travaille loin du seuil de l'OPO, les faisceaux sont trop peu intriqués pour pouvoir détecter leurs corrélations avec les critères habituels. La mise en place d'une détection mixte photons/champ nous permettrait d'explorer d'autres régimes de fonctionnement de l'OPO, peu ou pas étudiés expérimentalement jusqu'à présent.



## Bibliographie

- [Adesso, 2006] ADESSO, G. (2006). Generic entanglement and standard form for  $n$ -mode pure Gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 97(13):130502. 34
- [Adesso et Illuminati, 2005] ADESSO, G. et ILLUMINATI, F. (2005). Gaussian measures of entanglement versus negativities : Ordering of two-mode Gaussian states. *Phys. Rev. A*, 72(3):032334. 50
- [Adesso et Illuminati, 2007] ADESSO, G. et ILLUMINATI, F. (2007). Entanglement in continuous variable systems : recent advances and current perspectives. *arXiv*, quant-ph/0701221. 25, 50
- [Adesso *et al.*, 2004a] ADESSO, G., SERAFINI, A. et ILLUMINATI, F. (2004a). Determination of continuous variable entanglement by purity measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 92(8):087901. 46, 50, 51
- [Adesso *et al.*, 2004b] ADESSO, G., SERAFINI, A. et ILLUMINATI, F. (2004b). Extremal entanglement and mixedness in continuous variable systems. *Phys. Rev. A*, 70(2):022318. 35, 37, 45, 46, 50
- [Adesso *et al.*, 2004c] ADESSO, G., SERAFINI, A. et ILLUMINATI, F. (2004c). Quantification and scaling of multipartite entanglement in continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 93(22):220504. 45
- [Adesso *et al.*, 2005] ADESSO, G., SERAFINI, A. et ILLUMINATI, F. (2005). Entanglement, purity, and information entropies in continuous variable systems. *Open Sys. & Information Dyn.*, 12(2):189–205. 33, 46, 50
- [Agarwal, 1971] AGARWAL, G. (1971). Entropy, the Wigner distribution function, and the approach to equilibrium of a system of coupled harmonic oscillators. *Phys. Rev. A*, 3(2):828–831. 37
- [Armstrong *et al.*, 1962] ARMSTRONG, J., BLOEMBERGEN, N., DUCUING, J. et PERSHAN, P. (1962). Interactions between light waves in a nonlinear dielectric. *Phys. Rev.*, 127(6):1918–1939. 54, 59
- [Arvind *et al.*, 1995a] ARVIND, DUTTA, B., MUKUNDA, N. et SIMON, R. (1995a). The real symplectic groups in quantum mechanics and optics. *Pramana Journal of physics*, 45(6):471–497. 32
- [Arvind *et al.*, 1995b] ARVIND, DUTTA, B., MUKUNDA, N. et SIMON, R. (1995b). Two-mode quantum systems : Invariant classification of squeezing transformations and squeezed states. *Phys. Rev. A*, 52(2):1609–1620. 49

- [Aspect, 2002] ASPECT, A. (2002). Bell's theorem : the naive view of an experimentalist. In BERTLMANN, R. et ZEILINGER, A., éditeurs : *Quantum (un)speakables – From Bell to quantum information*. Springer. Conférence en mémoire de John Bell (Vienne, Décembre 2000). 17
- [Aspect *et al.*, 1982] ASPECT, A., GRANGIER, P. et ROGER, G. (1982). Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen Gedankenexperiment : a new violation of Bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49(2):91–94. 1, 18
- [Audenaert et Plenio, 2006] AUDENAERT, K. et PLENIO, M. (2006). When are correlations quantum ? – verification and quantification of entanglement by simple measurements. *New J. Phys.*, 8(11):266. 37
- [Basdevant et Dalibard, 2001] BASDEVANT, J.-L. et DALIBARD, J. (2001). *Mécanique quantique*. Les éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau. 38
- [Bastiaans, 1984] BASTIAANS, M. (1984). New class of uncertainty relations for partially coherent light. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1(7):711. 36
- [Bell, 1964] BELL, J. (1964). On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1(3):195. 1, 18
- [Bennett *et al.*, 1996a] BENNETT, C., BERNSTEIN, H., POPESCU, S. et SCHUMACHER, B. (1996a). Concentrating partial entanglement by local operations. *Phys. Rev. A*, 53(4):2046–2052. 38
- [Bennett *et al.*, 1996b] BENNETT, C., BRASSARD, G., POPESCU, S., SCHUMACHER, B., SMOLIN, J. et WOOTTERS, W. (1996b). Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels. *Phys. Rev. Lett.*, 76(5):722–725. 38
- [Bennett *et al.*, 1996c] BENNETT, C., DIVINCENZO, D., SMOLIN, J. et WOOTTERS, W. (1996c). Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A*, 54(5):3824–3851. 3, 38, 43, 44
- [Bhatia, 1996] BHATIA, R. (1996). *Matrix analysis*. Springer Verlag, New York. 36
- [Blinov *et al.*, 2004] BLINOV, B., MOEHRING, D., DUAN, L.-M. et MONROE, C. (2004). Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon. *Nature*, 428:153–157. 1
- [Bohm, 1951] BOHM, D. (1951). *Quantum theory*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs. Réédité par Dover (1989). 1, 8, 18
- [Bowen *et al.*, 2002] BOWEN, W., SCHNABEL, R., BACHOR, H. et LAM, P. (2002). Polarization squeezing of continuous variable stokes parameters. *Phys. Rev. Lett.*, 88(9):093601. 143
- [Bowen *et al.*, 2004] BOWEN, W., SCHNABEL, R., LAM, P. et RALPH, T. (2004). Experimental characterization of continuous-variable entanglement. *Phys. Rev. A*, 69:012304. 137

- [Bowen *et al.*, 2003] BOWEN, W., TREPS, N., BUCHLER, B., SCHNABEL, R., RALPH, T., BACHOR, H., SYMUL, T. et LAM, P. (2003). Experimental investigation of continuous-variable quantum teleportation. *Phys. Rev. A*, 67(3):032302. 2, 22, 57
- [Boyd et Kleinman, 1968] BOYD, G. et KLEINMAN, D. (1968). Parametric interaction of focused Gaussian light beams. *J. Appl. Phys.*, 39(8):3597–3639. 88
- [Braunstein et Kimble, 1998] BRAUNSTEIN, S. et KIMBLE, H. (1998). Teleportation of continuous quantum variables. *Phys. Rev. Lett.*, 80(4):869–872. 2
- [Braunstein et Kimble, 2000] BRAUNSTEIN, S. et KIMBLE, H. (2000). Dense coding for continuous variables. *Phys. Rev. A*, 61(4):042302. 2
- [Bruß, 2002] BRUSS, D. (2002). Characterizing entanglement. *J. Math. Phys.*, 43(9):4237–4251. 39, 43
- [Carmichael *et al.*, 2004] CARMICHAEL, H., FOSTER, G., OROZCO, L., REINER, J. et RICE, P. (2004). Intensity-field correlations of non-classical light. *Progress in optics*, 46:355–404. 156
- [Chelkowski *et al.*, 2007] CHELKOWSKI, S., VAHLBRUCH, H., DANZMANN, K. et SCHNABEL, R. (2007). Coherent control of broadband vacuum squeezing. *Phys. Rev. A*, 75(4):043814. 113
- [Chou *et al.*, 2005] CHOU, C., de RIEDMATTEN, H., FELINTO, D., POLYAKOV, S., van ENK, S. et KIMBLE, H. (2005). Measurement-induced entanglement for excitation stored in remote atomic ensembles. *Nature*, 438:828–832. 1
- [Christandl, 2006] CHRISTANDL, M. (2006). *The Structure of Bipartite Quantum States : Insights from Group Theory and Cryptography*. Thèse de doctorat, Selwyn College, University of Cambridge. 43
- [Christandl et Winter, 2004] CHRISTANDL, M. et WINTER, A. (2004). Squashed entanglement : an additive entanglement measure. *J. Math. Phys.*, 45(3):829–840. 43
- [D’Ariano *et al.*, 2007] D’ARIANO, G., MACCONE, L. et SACCHI, M. (2007). Homodyne tomography and the reconstruction of quantum states of light. In CERF, N., LEUCHS, G. et POLZIK, E., éditeurs : *Quantum Information with continuous variables of atoms and light*. Imperial College Press. Sous presse ; pre-print : quant-ph/0507078. 47
- [Debuisschert *et al.*, 1993] DEBUISSCHERT, T., SIZMANN, A., GIACOBINO, E. et FABRE, C. (1993). Type-II continuous-wave optical parametric oscillators : oscillation and frequency-tuning characteristics. *J. Opt. Soc. Am B*, 10(9):1668–1680. 59, 89
- [DiVincenzo *et al.*, 2000] DIVINCENZO, D., SHOR, P., SMOLIN, J., TERHAL, B. et THAPLIYAL, A. (2000). Evidence for bound entangled states with negative partial transpose. *Phys. Rev. A*, 61(6):062312. 39
- [Dür *et al.*, 2000] DÜR, W., CIRAC, J., LEWENSTEIN, M. et BRUSS, D. (2000). Distillability and partial transposition in bipartite systems. *Phys. Rev. A*, 61(6):062313. 39



- [Drever *et al.*, 1983] DREVER, R., HALL, J., KOWALSKI, F., HOUGH, J., FORD, G., MUNLEY, A. et WARD, H. (1983). Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Appl. Phys. B.*, 31(2):97–105. 89
- [Duan *et al.*, 2000] DUAN, L.-M., GIEDKE, G., CIRAC, J. et ZOLLER, P. (2000). Inseparability criterion for continuous variable system. *Phys. Rev. Lett.*, 84(12):2722–2725. 2, 20, 21, 40, 42, 46
- [Einstein *et al.*, 1935] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B. et ROSEN, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Review*, 47(10):777–780. 1, 8, 17, 27
- [Eisert, 2001] EISERT, J. (2001). *Entanglement in Quantum Information Theory*. Thèse de doctorat, Universität Potsdam. 44, 45
- [Eisert *et al.*, 2002a] EISERT, J., SCHEEL, S. et PLENIO, M. (2002a). Distilling Gaussian states with Gaussian operations is impossible. *Phys. Rev. Lett.*, 89(13):137903. 41
- [Eisert *et al.*, 2002b] EISERT, J., SIMON, C. et PLENIO, M. (2002b). On the quantification of entanglement in infinite-dimensional quantum systems. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 35(17):3911–3923. 45
- [Ekert *et al.*, 2002] EKERT, A., ALVES, C., OI, D., HORODECKI, M., HORODECKI, P. et KWEK, L. (2002). Direct estimations of linear and nonlinear functionals of a quantum state. *Phys. Rev. Lett.*, 88(21):217901. 47
- [Ekert, 1991] EKERT, A. K. (1991). Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67(6):661–663. 2
- [Fabre, 1997] FABRE, C. (1997). Quantum fluctuations in light beams. In REYNAUD, S., GIACOBINO, E. et ZINN-JUSTIN, J., éditeurs : *Quantum fluctuations*, volume LXIII de *Les Houches Summer School*, page 181. North Holland. 8
- [Fabre *et al.*, 1999] FABRE, C., MASON, E. et WONG, N. (1999). Theoretical analysis of self-phase locking in a type II phase-matched optical parametric oscillator. *Optics Communications*, 170(4-6):299–307. 61
- [Filip, 2002] FILIP, R. (2002). Overlap and entanglement-witness measurements. *Phys. Rev. A*, 65(6):062320. 47
- [Fiurášek, 2002] FIURÁŠEK, J. (2002). Gaussian transformations and distillation of entangled Gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 89(13):137904. 41
- [Fiurášek et Cerf, 2004] FIURÁŠEK, J. et CERF, N. (2004). How to measure squeezing and entanglement of Gaussian states without homodyning. *Phys. Rev. Lett.*, 93(6):063601. 47
- [Foster *et al.*, 2000] FOSTER, G., OROZCO, L., CASTRO-BELTRAN, H. et CARMICHAEL, H. (2000). Quantum state reduction and conditional time evolution of wave-particle correlations in cavity QED. *Phys. Rev. Lett.*, 85(15):3149–3152. 157
- [Fry et Thompson, 1976] FRY, E. et THOMPSON, R. (1976). Experimental test of local hidden-variables theories. *Phys. Rev. Lett.*, 37(8):465–468. 1, 18

- [Furusawa *et al.*, 1998] FURUSAWA, A., SORENSEN, J., BRAUNSTEIN, S., FUCHS, C., KIMBLE, H. et POLZIK, E. (1998). Unconditional quantum teleportation. *Science*, 282:706. 2, 22
- [Gühne et Lutkenhaus, 2006] GÜHNE, O. et LUTKENHAUS, N. (2006). Nonlinear entanglement witnesses. *Physical Review Letters*, 96(17):170502. 42
- [Giedke et Cirac, 2002] GIEDKE, G. et CIRAC, J. (2002). Characterization of Gaussian operations and distillation of Gaussian states. *Phys. Rev. A*, 66(3):032316. 41
- [Giedke *et al.*, 2001] GIEDKE, G., KRAUS, B., LEWENSTEIN, M. et CIRAC, J. (2001). Entanglement criteria for all bipartite Gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 87(16):167904. 42
- [Giedke *et al.*, 2003] GIEDKE, G., WOLF, M., KRÜGER, O., WERNER, R. et CIRAC, J. (2003). Entanglement of formation for symmetric Gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 91(10):107901. 3, 44, 50
- [Giovannetti *et al.*, 2003] GIOVANNETTI, V., MANCINI, S., VITALI, D. et TOMBESI, P. (2003). Characterizing the entanglement of bipartite quantum systems. *Phys. Rev. A*, 67(2):022320. 21
- [Gisin, 1996] GISIN, N. (1996). Hidden quantum nonlocality revealed by local filters. *Phys. Lett. A*, 210:151–156. 38
- [Glauber, 1963] GLAUBER, R. (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *The Phys. Rev.*, 31(6):2766–2788. 10
- [Glauber, 1965] GLAUBER, R. (1965). Optical coherence and photon statistics. In DE WITT, C., BLANDIN, A. et COHEN-TANNOUDJI, C., éditeurs : *Quantum optics and electronics*, page 1. Gordon and Breach, New York. 10
- [Glöckl *et al.*, 2003] GLÖCKL, O., LORENZ, S., MARQUARDT, C., HEERSINK, J., BROWNNUTT, M., SILBERHORN, C., PAN, Q., van LOOCK, P., KOROLKOVA, N. et LEUCHS, G. (2003). Experiment towards continuous-variable entanglement swapping : Highly correlated four-partite quantum state. *Phys. Rev. A*, 68(1):012319. 137
- [Grangier *et al.*, 1992] GRANGIER, P., COURTY, J. et REYNAUD, S. (1992). Characterization of nonideal quantum non-demolition measurements. *Opt. Comm.*, 89(1):99–106. 16
- [Grangier *et al.*, 1998] GRANGIER, P., LEVENSON, J.-A. et POIZAT, J.-P. (1998). Quantum non-demolition measurements in optics. *Nature*, 396:537–542. 16
- [Gross, 2003] GROSS, P. (2003). *All-optical frequency division with self-phase-locked parametric oscillators*. Thèse de doctorat, University of Twente, Nederland. 68
- [Grynberg *et al.*, 1997] GRYNBERG, G., ASPECT, A. et FABRE, C. (1997). *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*. Ellipses. 8, 130
- [Han *et al.*, 1990] HAN, D., KIM, Y. et NOZ, M. (1990). Linear canonical transformations of coherent and squeezed states in the Wigner phase space. III. Two-mode states. *Phys. Rev. A*, 41(11):6233–6244. 49

- [Heiss, 2003] HEISS, D., éditeur (2003). *Fundamentals of Quantum Information : Quantum Computation, Communication, Decoherence, and All That*. Springer. 37
- [Häffner *et al.*, 2005] HÄFFNER, H., HÄNSEL, W., ROOS, C., BENHELM, J., CHEKAL-KAR, D., CHWALLA, M., KÖRBER, T., RAPOL, U., RIEBE, M., SCHMIDT, P., BECHER, C., GÜHNE, O., DÜR, W. et BLATT, R. (2005). Scalable multiparticle entanglement of trapped ions. *Nature*, 483. 1
- [Holevo *et al.*, 1999] HOLEVO, A., SOHMA, M. et HIROTA, O. (1999). Capacity of quantum Gaussian channels. *Phys. Rev. A*, 59(3):1820–1828. 37
- [Horodecki *et al.*, 1996] HORODECKI, M., HORODECKI, P. et HORODECKI, R. (1996). Separability of mixed states : necessary and sufficient conditions. *Phys. Lett. A*, 223(1-2):1–8. 39, 42
- [Horodecki *et al.*, 1998] HORODECKI, M., HORODECKI, P. et HORODECKI, R. (1998). Mixed-state entanglement and distillation : Is there a char16bound” entanglement in nature? *Phys. Rev. Lett*, 80(24):5239–5242. 39
- [Horodecki *et al.*, 2001] HORODECKI, M., HORODECKI, P., HORODECKI, R., LEUNG, D. et TERHAL, B. (2001). Classical capacity of a noiseless quantum channel assisted by noisy entanglement. *Quantum Information & Computation*, 1(3):70–78. 43
- [Horodecki, 1997] HORODECKI, P. (1997). Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Phys. Lett. A*, 232(5):333–339. 39
- [Horodecki *et al.*, 2007] HORODECKI, R., HORODECKI, P., HORODECKI, M. et HORODECKI, K. (2007). Quantum entanglement. *arXiv*, quant-ph/0702225. 43
- [Huang et Agarwal, 1994] HUANG, H. et AGARWAL, G. (1994). General linear transformations and entangled states. *Phys. Rev. A*, 49(1):52–60. 32
- [Huard, 1993] HUARD, S. (1993). *Polarisation de la lumière*. Masson. 89
- [Hyllus et Eisert, 2006] HYLLUS, P. et EISERT, J. (2006). Optimal entanglement witnesses for continuous-variable systems. *New J. Phys.*, 8(4):51. 3, 42
- [Jia *et al.*, 2004] JIA, X., SU, X., PAN, Q., GAO, J., XIE, C. et PENG, K. (2004). Experimental demonstration of unconditional entanglement swapping for continuous variables. *Phys. Rev. Lett.*, 93(25):250503. 2
- [Jing *et al.*, 2006] JING, J., FENG, S., BLOOMER, R. et PFISTER, O. (2006). Experimental continuous-variable entanglement from a phase-difference-locked optical parametric oscillator. *Phys. Rev. A*, 74(4):041804. 126, 137
- [Josse, 2003] JOSSE, V. (2003). *Réduction du bruit de polarisation et intrication quantique en variables continues avec un nuage d’atomes froids*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie. 102
- [Julsgaard *et al.*, 2001] JULSGAARD, B., KOZHEKIN, A. et POLZIK, E. (2001). Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects. *Nature*, 413:400–403. 1

- [Krüger et Werner, web] KRÜGER, O. et WERNER, R. (Site web). Open problems in quantum information theory. <http://www.imaph.tu-bs.de/qi/problems/>. Institut für Mathematische Physik. 39, 44
- [Lambrecht *et al.*, 1996] LAMBRECHT, A., COUDREAU, T., STEINBERG, A. et GIACOBINO, E. (1996). Squeezing with cold atoms. *Europhys. Lett.*, 36(2):93–98. 55
- [Laurat, 2001] LAURAT, J. (2001). Génération de faisceaux EPR à l'aide d'un Oscillateur Paramétrique Optique à auto-verrouillage de phase. Mémoire de D.E.A., École Supérieure d'Optique. 96
- [Laurat, 2004] LAURAT, J. (2004). *États non-classiques et intrication en variables continues à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie. 59, 67, 71, 86, 88, 92, 96, 108
- [Laurat *et al.*, 2007] LAURAT, J., CHOI, K., DENG, H., CHOU, C. et KIMBLE, H. (2007). Heralded entanglement between atomic ensembles : Preparation, decoherence, and scaling. *Phys. Rev. Lett.*, 99(18):180504. 1
- [Laurat *et al.*, 2004a] LAURAT, J., COUDREAU, T., KELLER, G., TREPS, N. et FABRE, C. (2004a). Compact source of Einstein-Podolsky-Rosen entanglement and squeezing at very low noise frequencies. *Phys. Rev. A*, 70(042315). 110
- [Laurat *et al.*, 2005a] LAURAT, J., COUDREAU, T., KELLER, G., TREPS, N. et FABRE, C. (2005a). Effects of mode coupling on the generation of quadrature einstein-podolsky-rosen entanglement in a type-II optical parametric oscillator below threshold. *Phys. Rev. A*, 71(2):022313. 71, 108, 113
- [Laurat *et al.*, 2003] LAURAT, J., COUDREAU, T., TREPS, N., MAITRE, A. et FABRE, C. (2003). Conditional preparation of a quantum state in the continuous variable regime : generation of a sub-Poissonian state from twin beams. *Phys. Rev. Lett.*, 91(21):212601–1–212601–4. 66
- [Laurat *et al.*, 2004b] LAURAT, J., COUDREAU, T., TREPS, N., MAITRE, A. et FABRE, C. (2004b). Conditional preparation of a nonclassical state in the continuous-variable regime : Theoretical study. *Phys. Rev. A*, 69(033808). 66
- [Laurat *et al.*, 2005b] LAURAT, J., KELLER, G., OLIVEIRA-HUGUENIN, J., FABRE, C., COUDREAU, T., SERAFINI, A., ADESSO, G. et ILLUMINATI, F. (2005b). Entanglement of two-mode Gaussian states : characterization and experimental production and manipulation. *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.*, 7:S577–S587. 25, 115
- [Laurat *et al.*, 2005c] LAURAT, J., LONGCHAMBON, L., FABRE, C. et COUDREAU, T. (2005c). Experimental investigation of amplitude and phase quantum correlations in a type-II optical parametric oscillator above threshold : from nondegenerate to degenerate operation. *Optics Letters*, 30(10):1177–1779. 66, 126
- [Leibfried *et al.*, ] LEIBFRIED, D., KNILL, E., SEIDELIN, S., BRITTON, J., BLAKES-TAD, R., CHIAVERINI, J., HUME, D., ITANO, W., JOST, J., LANGER, C., OZERI, R., REICHLER, R. et WINELAND, D. Creation of a six-atom 'schrödinger cat' state. *Nature*, 438. 1

- [Leuchs et Beth, 2003] LEUCHS, G. et BETH, T., éditeurs (2003). *Quantum information processing*. WILEY-VCH Verlag. 39
- [Lewenstein *et al.*, 2000a] LEWENSTEIN, M., BRUSS, D., CIRAC, J., KRAUS, B., KU, M., SAMSONOWICZ, J., SANPERA, A. et TARRACH, R. (2000a). Separability and distillability in composite quantum systems - a primer. *J. Mod. Opt.*, 47(14-15):2481–2499. 39
- [Lewenstein *et al.*, 2000b] LEWENSTEIN, M., KRAUS, B., CIRAC, J. et HORODECKI, P. (2000b). Optimization of entanglement witnesses. *Phys. Rev. A*, 62(5):052310. 42
- [Li *et al.*, 2002] LI, X., PAN, Q., JING, J., ZHANG, J., XIE, C. et PENG, K. (2002). Quantum dense coding exploiting a bright Einstein-Podolsky-Rosen beam. *Phys. Rev. Lett.*, 88(4):047904. 2
- [London, 1983] LONDON, R. (1983). *The quantum theory of light*. Oxford Science Publication. 27
- [Longchambon, 2003] LONGCHAMBON, L. (2003). *Effets de polarisation dans les mélanges paramétriques à trois ondes en cavité : applications au traitement classique et quantique de l'information*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie. 67
- [Longchambon *et al.*, 2004] LONGCHAMBON, L., LAURAT, J., COUDREAU, T. et FABRE, C. (2004). Non-linear and quantum optics of a type II OPO containing a birefringent element Part 1 : Classical operation. *Eur. Phys. J. D*, 30:279–285. 67
- [Mancini *et al.*, 2002] MANCINI, S., GIOVANNETTI, V., VITALI, D. et TOMBESI, P. (2002). Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 88(12):120401. 2, 19, 21
- [McKenzie *et al.*, 2004] MCKENZIE, K., GROSSE, N., BOWEN, W., WHITCOMB, S., GRAY, M., MCCLELLAND, D. et LAM, P. (2004). Squeezing in the audio gravitational wave detection band. *Phys. Rev. Lett.*, 93:161105. 113
- [Moehring *et al.*, 2007] MOEHRING, D., MAUNZ, P., OLMSCHENK, S., YOUNGE, K., MATSUKEVICH, D., DUAN, L.-M. et MONROE, C. (2007). Entanglement of single-atom quantum bits at a distance. *Nature*, 449:68–71. 1
- [Oi et Åberg, 2006] OI, D. et ÅBERG, J. (2006). Fidelity and coherence measures from interference. *Phys. Rev. Lett.*, 97(22):220404. 47
- [Osborne, 2007] OSBORNE, T. (2007). Convex hulls of varieties and entanglement measures based on the roof construction. *Quantum Information & Computation*, 7(3):209–227. 44
- [Ou *et al.*, 1992] OU, Z., PEREIRA, S., KIMBLE, H. et PENG, K. (1992). Realization of the einstein-podolsky-rosen paradox for continuous variables. *Phys. Rev. Lett.*, 68(25):3663–3666. 1
- [Pan *et al.*, 1998] PAN, J.-W., BOUWMEESTER, D., WEINFURTER, H. et ZEILINGER, A. (1998). Experimental entanglement swapping : Entangling photons that never interacted. *Phys. Rev. Lett.*, 80(18):3891–3894. 2

- [Pan *et al.*, 2003] PAN, J.-W., GASPARONI, S., ASPELMEYER, M., JENNEWEIN, T. et ZEILINGER, A. (2003). Experimental realization of freely propagating teleported qubits. *Nature*, 421:721–725. 2
- [Peres, 1993] PERES, A. (1993). *Quantum theory : concepts and methods*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 35
- [Peres, 1996] PERES, A. (1996). Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77(8):1413–1415. 2, 39
- [Plenio, 2005] PLENIO, M. (2005). Logarithmic negativity : A full entanglement monotone that is not convex. *Physical Review Letters*, 95(9):090503. 45
- [Plenio et Virmani, 2007] PLENIO, M. et VIRMANI, S. (2007). An introduction to entanglement measures. *Quantum Information & Computation*, 7(1-2):1–51. 43
- [Popescu et Rohrlich, 1997] POPESCU, S. et ROHRLICH, D. (1997). Thermodynamics and the measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 56(5):R3319–R3321. 38
- [Reid, 1989] REID, M. (1989). Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using non-degenerate parametric amplification. *Phys. Rev. A*, 40(2):913–923. 3, 18
- [Reid et Drummond, 1988] REID, M. et DRUMMOND, P. (1988). Quantum correlations of phase in nondegenerate parametric oscillation. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2731–2733. 18
- [Rigolin et de Oliveira, 2007] RIGOLIN, G. et de OLIVEIRA, M. (2007). Quantification of continuous variable entanglement with only two types of simple measurements. *arXiv*, quant-ph/0608184. 47
- [Rigolin et Escobar, 2004] RIGOLIN, G. et ESCOBAR, C. (2004). Lower bounds on the entanglement of formation for general Gaussian states. *Phys. Rev. A*, 69(1):012307. 49
- [Roch *et al.*, 1997] ROCH, J.-F., VIGNERON, K., GRELU, P., SINATRA, A., POIZAT, J.-P. et GRANGIER, P. (1997). Quantum non demolition measurement using cold trapped atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 78(4):634–637. 16
- [Rosencher et Fabre, 2002] ROSENCHER, E. et FABRE, C. (2002). Oscillation characteristics of continuous-wave optical parametric oscillators : beyond the mean-field approximation. *J. Opt. Soc. Am. B*, 19(5):1107–1116. 59
- [Schleich, 2001] SCHLEICH, W. (2001). *Quantum optics in phase space*. Wiley-VCH, Weinheim. 26
- [Scully et Zubairy, 1997] SCULLY, M. et ZUBAIRY, S. (1997). *Quantum Optics*. Cambridge University Press. 26
- [Serafini, 2004] SERAFINI, A. (2004). *Decoherence & entanglement in continuous variable quantum information*. Thèse de doctorat, Università degli Studi di Salerno, Italia. <http://www.tampa.phys.ucl.ac.uk/quinfo/people/alessiothesis.pdf>. 33, 45
- [Serafini, 2006] SERAFINI, A. (2006). Multimode uncertainty relations and separability of continuous variable states. *Phys. Rev. Lett.*, 96(11):110402. 28, 33

- [Serafini et Adesso, 2007] SERAFINI, A. et ADESSO, G. (2007). Standard forms and entanglement engineering of multimode Gaussian states under local operations. *arXiv*, quant-ph/0705113. 30
- [Serafini *et al.*, 2005] SERAFINI, A., ADESSO, G. et ILLUMINATI, F. (2005). Unitarily localizable entanglement of Gaussian states. *Phys. Rev. A*, 71(3):032349. 37, 40
- [Serafini *et al.*, 2004] SERAFINI, A., ILLUMINATI, F. et DE SIENA, S. (2004). Symplectic invariants, entropic measures and correlations of Gaussian states. *J. Phys. B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 37(2):L21–L28. 33, 37, 46
- [Shaddock, 2000] SHADDOCK, D. (2000). *Advanced interferometry for gravitational wave detection*. Thèse de doctorat, Australian National University. 83
- [Shaddock *et al.*, 1999] SHADDOCK, D., GRAY, M. et MCCLELLAND, D. (1999). Frequency locking a laser to an optical cavity by use of spatial mode interference. *Opt. Lett.*, 24(21):1499–1501. 83
- [Shannon, 1948] SHANNON, C. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423 et 623–656. Réédité à . 36
- [Shen, 1984] SHEN, Y. (1984). *The principles of nonlinear optics*. Wiley-Interscience, New York. 57
- [Silberhorn *et al.*, 2001] SILBERHORN, C., LAM, P., WEISS, O., KÖNIG, F., KOROLKOVA, N. et LEUCHS, G. (2001). Generation of continuous variable Einstein-Podolsky-Rosen entanglement via the Kerr nonlinearity in an optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 86(19):4267–4270. 22, 55
- [Simon, 2000] SIMON, R. (2000). Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2726–2729. 2, 20, 39, 40, 46, 48
- [Simon et Mukunda, 1990] SIMON, R. et MUKUNDA, N. (1990). Minimal three-component SU(2) gadget for polarization optics. *Phys. Lett. A*, 143(4-5):165–169. 49
- [Simon *et al.*, 1994] SIMON, R., MUKUNDA, N. et DUTTA, B. (1994). Quantum-noise matrix for multimode systems :  $U(n)$  invariance, squeezing, and normal forms. *Phys. Rev. A*, 49(3):1567–1583. 28
- [Simon *et al.*, 1987] SIMON, R., SUDARSHAN, E. et MUKUNDA, N. (1987). Gaussian-Wigner distributions in quantum mechanics and optics. *Phys. Rev. A*, 36(8):3868–3880. 28
- [Su *et al.*, 2006] SU, X., TAN, A., JIA, X., PAN, Q., XIE, C. et PENG, K. (2006). Experimental demonstration of quantum entanglement between frequency-nondegenerate optical twin beams. *Optics Letters*, 31(8):1133–1135. 137
- [Suret, 2000] SURET, P. (2000). *Dynamique temporelle et effets transverses dans les oscillateurs paramétriques optiques continus : observations expérimentales et modélisation*. Thèse de doctorat, Université Paris XI. 89

- [Takei *et al.*, 2005] TAKEI, N., YONEZAWA, H., AOKI, T. et FURUSAWA, A. (2005). High-fidelity teleportation beyond the no-cloning limit and entanglement swapping for continuous variables. *Phys. Rev. Lett.*, 94(22):220502. 2
- [Terhal, 2000] TERHAL, B. (2000). Bell inequalities and the separability criterion. *Phys. Lett. A*, 271(5-6):319–326. 42
- [Terhal et Vollbrecht, 2000] TERHAL, B. et VOLLBRECHT, K. (2000). Entanglement of formation for isotropic states. *Phys. Rev. Lett.*, 85(12):2625–2628. 44
- [Treppe et Fabre, 2005] TREPS, N. et FABRE, C. (2005). Criteria of quantum correlation in the measurement of continuous variables in optics. *Laser Physics*, 15:187. 15, 18
- [Treppe *et al.*, 2003] TREPS, N., GROSSE, N., BOWEN, W., FABRE, C., BACHOR, H.-A. et LAM, P. (2003). A quantum laser pointer. *Science*, 301:940. 110, 112
- [Tsallis, 1988] TSALLIS, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, 52(1-2):479–487. 36
- [Vaidman, 1994] VAIDMAN, L. (1994). Teleportation of quantum states. *Phys. Rev. A*, 49(2):1473–1476. 2
- [van Loock et Furusawa, 2003] van LOOCK, P. et FURUSAWA, A. (2003). Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement. *Phys. Rev. A*, 67(5):052315. 42
- [Vedral *et al.*, 1997] VEDRAL, V., PLENIO, M., RIPPIN, M. et KNIGHT, P. (1997). Quantifying entanglement. *Phys. Rev. Lett.*, 78(12):2275–2279. 38
- [Vidal, 2000] VIDAL, G. (2000). Entanglement monotones. *J. Mod. Opt.*, 47(2-3):355–376. 38
- [Vidal et Werner, 2002] VIDAL, G. et WERNER, R. (2002). Computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 65(3):032314. 3, 45, 46
- [Villar *et al.*, 2007] VILLAR, A., CASSEMIRO, K., DECHOUM, K., KHOURY, A., MARTINELLI, M. et NUSSENZVEIG, P. (2007). Entanglement in the above-threshold optical parametric oscillator. *J. Opt. Soc. Am. B*, 24(2):249–256. 126, 135, 137
- [Villar *et al.*, 2004] VILLAR, A., MARTINELLI, M. et NUSSENZVEIG, P. (2004). Testing the entanglement of intense beams produced by a non-degenerate optical parametric oscillator. *Opt. Comm.*, 242(4–6):551–563. 128
- [Vollbrecht et Werner, 2001] VOLLBRECHT, K. et WERNER, R. (2001). Entanglement measures under symmetry. *Phys. Rev. A*, 64(6):062307. 44
- [Wehrl, 1978] WEHRL, A. (1978). General properties of entropy. *Rev. Mod. Phys.*, 50(2):221–260. 37
- [Weihs *et al.*, 1998] WEIHS, G., JENNEWEIN, T., SIMON, C., WEINFURTER, H. et ZEILINGER, A. (1998). Violation of Bell’s inequality under strict Einstein locality conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5039–5043. 18
- [Wenger *et al.*, 2004] WENGER, J., FIURÁŠEK, J., TUALLE-BROURI, R., CERF, N. et GRANGIER, P. (2004). Pulsed squeezed vacuum measurements without homodyning. *Phys. Rev. A*, 70(5):053812. 47



- [Werner, 1989] WERNER, R. (1989). Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys. Rev. A*, 40(8):4277–4281. 39
- [Werner et Wolf, 2001] WERNER, R. et WOLF, M. (2001). Bound entangled Gaussian states. *Phys. Rev. Lett.*, 86(16):3658–3661. 40, 41, 42
- [Williamson, 1936] WILLIAMSON, J. (1936). On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. *Am. J. Math.*, 58(1):141–163. 32, 40
- [Wolf et al., 2003] WOLF, M., EISERT, J. et PLENIO, M. (2003). Entangling power of passive optical elements. *Phys. Rev. Lett.*, 90(4):047904. 32, 48, 49
- [Wootters, 1998] WOOTTERS, W. (1998). Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10):2245–2248. 44
- [Wootters et Zurek, 1982] WOOTTERS, W. et ZUREK, W. (1982). A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299:802–803. 2
- [Wu et al., 1986] WU, L.-A., KIMBLE, H., HALL, J. et WU, H. (1986). Generation of squeezed states by parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 57(20):2520–2523. 57
- [Yurke et al., 1986] YURKE, B., MCCALL, S. et KLAUDER, J. (1986). SU(2) and SU(1,1) interferometers. *Phys. Rev. A*, 33(6):4033–4054. 49
- [Zhang, 2002] ZHANG, K. (2002). *Intracavity optical nonlinear using  $\chi^{(2)}$  quasi-phase-matched material : classical and quantum properties and application to all-optical regeneration*. Thèse de doctorat, University of Shanxi, China. 135
- [Zhang et al., 2001] ZHANG, K., COUDREAU, T., MARTINELLI, M., MAÎTRE, A. et FABRE, C. (2001). Generation of bright squeezed light at 1.06  $\mu\text{m}$  using cascaded nonlinearities in a triply resonant cw periodically-poled lithium niobate optical parametric oscillator. *Phys. Rev. A*, 64(3):033815. 102
- [Życzkowski et al., 1998] ŻYCZKOWSKI, K., HORODECKI, P., SANPERA, A. et LEWENSTEIN, M. (1998). Volume of the set of separable states. *Phys. Rev. A*, 58(2):883–892. 44





## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude expérimentale et théorique des corrélations quantiques en variables continues.

La question de la caractérisation de ces corrélations est largement abordée, en particulier dans le cas des états gaussiens. Le formalisme mathématique des matrices de covariance, particulièrement adapté à cette étude, est développé ; et les différents critères existants sont répertoriés.

Ces critères permettent de caractériser le degré d'intrication des faisceaux générés par le dispositif expérimental au cœur de cette thèse : un Oscillateur Paramétrique Optique auto-verrouillé en phase. Au-dessous du seuil, les faisceaux, de valeur moyenne nulle, présentent une séparabilité de 0,33. Le système viole de manière apparente l'inégalité de Heisenberg de 58%. Au-dessus du seuil, les faisceaux brillants obtenus sont également fortement non classiques : la séparabilité vaut 0,76 et l'inégalité de Heisenberg est violée en apparence de 24%.

Une application originale de ce dispositif est proposée : il est montré théoriquement qu'un OPO à deux cristaux auto-verrouillé en phase génère deux faisceaux intriqués en polarisation, ce qui devrait faciliter le transfert de l'intrication de la lumière à la matière.

## Mots Clés

Optique non-linéaire, oscillateur paramétrique optique, verrouillage de modes, polarisation, variables continues, états comprimés, corrélations quantiques, intrication, EPR, états gaussiens, matrice de covariance

## Abstract

This thesis studies, both theoretically and experimentally, quantum correlations in the continuous variables regime.

The problem of characterizing these correlations is widely approached, especially for Gaussian states. The formalism of covariance matrices is developed, for it is particularly well adapted to this study. The different existing criteria are listed.

The main experimental device of this thesis is a self-phase-locked Optical Parametric Oscillator. The criteria enable to characterize the entanglement amount of the beams it generates. Below threshold, the empty beams present a separability of 0.33 and the system apparently violates the Heisenberg inequality by 58%. Above threshold, the obtained bright beams are also strongly non classical: the separability is 0.6 and the Heisenberg inequality is apparently violated by 24%.

An original application of this device is proposed: it is theoretically shown that a self-phase-locked two-crystal OPO produces two polarization entangled beams, which should make easier light-matter entanglement transfer.

## Keywords

Nonlinear optics, optical parametric oscillator, mode locking, polarization, continuous variables, squeezed states, quantum correlations, entanglement, EPR, quantum information,