



Calculs perturbatifs variationnellement améliorés en théorie des champs; calcul du spectre et contraintes sur le modèle supersymétrique standard

Jean-Loic Kneur

► To cite this version:

Jean-Loic Kneur. Calculs perturbatifs variationnellement améliorés en théorie des champs; calcul du spectre et contraintes sur le modèle supersymétrique standard. Physique mathématique [math-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2006. tel-00265720

HAL Id: tel-00265720

<https://theses.hal.science/tel-00265720>

Submitted on 20 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**b Calculs perturbatifs variationnellement
améliorés en théorie des champs;**

**# Calcul du spectre et contraintes sur le
modèle supersymétrique standard**

Jean-Loïc Kneur

*Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules, UMR-5207-CNRS,
Université Montpellier II, F-34095 Montpellier Cedex 5, France*

Habilitation à diriger des recherches

Document de synthèse

Juin 2006

Résumé

Je discute quelques activités plus ou moins représentatives et récentes en deux parties indépendantes. La première partie décrit une technique de resommation particulière des séries perturbatives qui peut donner des résultats non-perturbatifs dans certains cas. On détaille quelques applications en théorie des champs et de la matière condensée. Dans la deuxième partie, on développe quelques activités récentes en phénoménologie du modèle supersymétrique standard minimal, concernant le calcul précis du spectre de masse des particules supersymétriques, le calcul de la densité relique de matière noire supersymétrique, et les contraintes théoriques et expérimentales actuelles qu'on peut en déduire sur certains modèles.

Avant-propos

Depuis ma thèse (soutenue fin 1988) j'ai effectué plusieurs changements thématiques. Je sélectionne donc ici quelques activités (un peu) plus récentes et représentatives (ou bien simplement que j'avais plus envie de développer dans cette synthèse, indépendamment de leur représentativité ou score au "top 50"!), en choisissant aussi dans cette sélection des sujets sur lesquels j'ai encadré des doctorants.

Depuis plusieurs années je me suis intéressé principalement à deux thématiques différentes, plus ou moins en parallèle:

–*Optimisation et resommation variationnelle: techniques de resommation des séries perturbatives, applications en théorie des champs et (plus récemment) en matière condensée;*

–*Phénoménologie du modèle supersymétrique standard minimal (MSSM) ou de ses extensions, calcul du spectre supersymétrique, calcul de la densité relique de matière noire supersymétrique.*

Comme il n'y a essentiellement pas de connexions entre ces deux sujets, je les développerai dans ce rapport en deux parties indépendantes.

Contents

1	Première partie: resommation améliorée des séries perturbatives en théorie des champs	5
1.1	Introduction et résumé	5
1.1.1	Motivation et petit historique	5
1.1.2	Développement perturbatif amélioré variationnellement	5
1.1.3	Comportement aux grands ordres: renormalons et resommation	7
1.1.4	Applications en matière condensée	8
1.2	Disparition des renormalons infrarouges dans le gap de masse du modèle GN $O(N)$	10
1.2.1	Renormalons perturbatifs dans la masse pôle $1/N$	10
1.2.2	Borel-sommabilité de la masse non-perturbative à $O(1/N)$	14
1.2.3	Compensation des renormalons IR	14
1.2.4	Conclusion sur les renormalons IR du modèle GN	16
1.3	Développement alternatif et propriétés infrarouges du GR	16
1.4	Calcul variationnel amélioré de la température critique BEC	19
1.4.1	Sommation Borel contre développement variationnellement amélioré	19
1.4.2	Théorie effective BEC	20
1.4.3	Calcul perturbatif variationnellement amélioré	23
1.4.4	Résultats et comparaison avec les simulations sur réseaux	26
2	Deuxième partie: Modèle Supersymétrique Standard Minimal, contraintes actuelles et perspectives pour les collisionneurs	30
2.1	Introduction et résumé de quelques activités choisies	30
2.1.1	Code de calcul du spectre MSSM	30

2.1.2	Contraintes théoriques, cosmologiques et expérimentales sur le modèle de supergravité minimal	31
2.1.3	La région d'annihilation de neutralinos au pôle du Higgs léger	32
2.2	Le MSSM et ses versions plus contraintes	32
2.2.1	Construction du MSSM	32
2.2.2	Brisure douce de la supersymétrie dans le MSSM	34
2.2.3	Le MSSM contraint de supergravité minimale (mSUGRA)	35
2.3	Calcul du Spectre du MSSM avec SuSpect	36
2.4	Contraintes actualisées sur le modèle mSUGRA	37
2.4.1	Contraintes théoriques sur le MSSM et mSUGRA	37
2.4.2	Contraintes expérimentales par recherches directes	37
2.4.3	Contraintes expérimentales indirectes	38
2.4.4	Contraintes expérimentales cosmologiques du CMB	39
2.4.5	Calcul de la densité relique de neutralinos	39
2.4.6	Résultats du balayage de l'espace des paramètres mSUGRA	41
2.4.7	Contraintes dans l'espace des masses physiques de sparticules	47
2.4.8	Bornes inférieures et supérieures sur les masses des sparticules	47
2.4.9	Conclusions sur les contraintes mSUGRA	51
A	Niveaux d'énergie de l'oscillateur et Borel-sommabilité	52
B	Développement δ aux ordres arbitraires	53
C	Algorithme de calcul du spectre SUSY dans <u>SuSpect</u>	55

*Sommaire

1 Première partie: resommation améliorée des séries perturbatives en théorie des champs

1.1 Introduction et résumé

Dans cette introduction on rappelle d'abord les idées de base et un peu d'histoire sur ce sujet, puis on résumera nos études spécifiques et quelques résultats qui seront développés plus en détail dans les sections suivantes.

1.1.1 Motivation et petit historique

Dans de nombreux modèles en théorie des champs, certains résultats non-perturbatifs peuvent être obtenus par le développement $1/N$ [1, 2], qui consiste essentiellement à modifier la théorie physique originale pour étendre à N composantes arbitraires un champ (scalaire, fermionique,...) avec une symétrie (par exemple $O(N)$, $SU(N)$) du Lagrangien résultant. Le développement $1/N$ est non-perturbatif dans le sens qu'il resomme à tous les ordres perturbatifs la série ordinaire (en couplage) d'origine, du moins pour certains types de graphes de Feynman, qu'on peut montrer être dominants. Du point de vue plus physique on espère (mais il arrive souvent!) que les résultats obtenus pour N "suffisamment grand" restent des approximations valides pour la valeur physique pertinente de N , même lorsque celle-ci est relativement petite. Indépendamment de l'idée du développement $1/N$, il existe aussi des techniques directes et efficaces de resommation, pour une série perturbative donnée (et donc sans modifier la théorie correspondante) comme notamment la méthode de sommation de Borel [3, 4], ou les approximants de Padé [5]. Par construction la resommation de Borel permet de définir certaines quantités via leur séries perturbatives de façon unique, sous certaines conditions (série asymptotique, signe des coefficients de la série, position des singularités etc: points qu'on discutera un peu plus en détail dans la suite). Mais elle est utile même pour les séries perturbatives *non* Borel-sommables, comme c'est le cas en particulier pour la Chromodynamique quantique (QCD), car elle donne des informations quantitatives assez précises sur l'incomplétude de la série purement perturbative, plus précisément sur la forme des contributions supplémentaires, nécessairement non-perturbatives, à une quantité physique donnée. (On reviendra aussi plus en détail sur ce point dans la suite).

1.1.2 Développement perturbatif amélioré variationnellement

D'autre part, il existe aussi une modification de la série de perturbation usuelle, applicable en principe pour une théorie des champs quelconque, souvent appelée dans la littérature sous le nom de "développement delta" (DE) [6, 7] ou bien de façon équivalente mais plus évocatrice: "perturbation variationnellement améliorée" (VIP) comme on la désignera ici dans la suite. Cette approche est basée sur une modification (plus exactement une réorganisation) du Lagrangien d'interaction de sorte que celui-ci dépende d'un (ou éventuellement plusieurs) paramètres supplémentaires non-physiques, un peu comme pour le développement $1/N$. Ces paramètres, arbitraires et donc ajustables, sont généralement fixés par optimisation aux ordres successifs de la série perturbative elle-

même modifiée par ces paramètres. Bien que ce principe puisse paraître un peu empirique à première vue, il a été démontré [8] rigoureusement qu’une telle procédure peut rendre la série modifiée convergente vers les résultats exacts pour une théorie des champs à une dimension, i.e. en mécanique quantique (niveaux d’énergies de l’oscillateur anharmonique). Plus précisément, aux grands ordres perturbatifs, l’optimisation s’avère équivalente [8] à un réajustement ("rescaling") du paramètre de masse avec l’ordre perturbatif ("order-dependent mapping" (ODM)) [9], de façon à supprimer le comportement factoriel [10] des coefficients aux grands ordres du développement perturbatif original des niveaux d’énergie de l’oscillateur, et donner ainsi une nouvelle série perturbative convergente. Numériquement cette procédure s’avère très efficace dès les premiers ordres, avec une convergence rapide vers le résultat exact pour l’oscillateur anharmonique [11]).

Une variante de l’approche VIP que nous avons considérée était mieux adaptée aux théories des champs de dimension plus élevée ($D \geq 2$) du au problème de la renormalisation. Cette variante a été initiée par André Neveu [12] puis développée avec des doctorants (Benoit Bellet, Philippe Garcia, Chris Arvanitis, Marius Iacomì) d’abord pour l’oscillateur [11] puis (avec aussi Frédéric Geniet) pour le modèle Gross-Neveu (GN) $O(N)$ [13, 14].

Pour être plus précis, considérant par exemple le Lagrangien [15] du modèle GN massif

$$\mathcal{L}_{GN} = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi + \frac{g}{2} (\bar{\Psi} \Psi)^2 \quad (1)$$

l’idée de départ est donc de modifier le poids relatif des termes d’interaction par rapport aux termes libres, ce qui est réalisé simplement par une substitution dans l’Eq. (1):

$$m \rightarrow (1 - \delta) m_v; \quad g \rightarrow \delta g \quad (2)$$

applicable ordre par ordre en perturbation. La théorie exacte à laquelle on s’intéresse, non-massive, correspond à $\delta = 1$ et ne dépend pas du paramètre “variationnel” m_v , mais ce dernier apparaît explicitement à tout ordre fini du développement alternatif en puissances de δ , qui constitue le nouveau paramètre perturbatif. On peut invoquer alors un principe d’optimisation [6] par rapport au paramètre de masse m_v (arbitraire). Un avantage par rapport à d’autres approches non-perturbatives est que celle-ci est définie au niveau des “premiers principes” pour une théorie donnée, c’est-à-dire directement sur la forme du Lagrangien, sans nécessiter a priori de modélisation ou approximation supplémentaire.

Notre approche réconciliait l’approche VIP de l’éq. (2) avec la renormalisation de la théorie des champs grâce à l’utilisation appropriée de méthodes du groupe de renormalisation, ce qui était auparavant une difficulté de principe pour l’application de méthodes similaires aux théories des champs de dimension $D \geq 2$. Numériquement nous avons obtenu [14] le gap de masse du modèle GN pour $N \rightarrow \infty$ de façon exacte comme solution variationnelle, puis d’assez bonnes approximations de ce gap de masse GN pour N quelconque. Notre construction est également facilement compatible [17, 18] avec l’invariance de jauge pour les modèles où celle-ci est pertinente comme en QCD typiquement.

1.1.3 Comportement aux grands ordres: renormalons et resommation

Mais un obstacle majeur à l'amélioration systématique ordre par ordre de cette approche VIP est la limitation perturbative en pratique. En effet, l'information perturbative usuelle reste un ingrédient nécessaire pour définir ces approximations ordre par ordre. Et pour la plupart des théories des champs renormalisables, la connaissance des quantités physiques pertinentes est limitée aux premiers ordres $n \leq 2, 3$, pour les coefficients perturbatifs des quantités physiques pertinentes, et le calcul des ordres supérieurs devient vite techniquement inextricable. Ce qui impliquait pour notre construction qu'on peut à priori difficilement aller beaucoup plus loin que le 2ème ou 3ème ordre. Donc un contrôle quantitatif de l'erreur, et de la convergence éventuelle de la méthode, est assez limitée. (Ce qui est très différent des théories plus simples comme l'oscillateur, où le développement perturbatif des états d'énergie est connu aux grands ordres, ce qui avait justement permis de démontrer la convergence de la delta-expansion [8].)

Avant d'essayer éventuellement d'autres applications plus phénoménologiques, on voulait donc pouvoir mieux tester le comportement de cette approche aux ordres supérieurs, au moins dans certaines approximations. Avec mon étudiant de thèse Damien Reynaud (doctorat soutenu en décembre 2001) on a alors regardé le cas du modèle GN $O(N)$ pour lequel le gap de masse (associé à la brisure de symétrie chirale discrète) est connu exactement pour les valeurs de N quelconque, à partir de méthodes non-perturbatives (NP) utilisant les techniques d'Ansatz de Bethe thermodynamique (TBA) [16]. Notre motivation était aussi d'étudier le lien plus précis entre ces résultats purement NP et le comportement perturbatif standard qui ressemble beaucoup à ce qui se passe en dimension 4 en QCD, pour voir comment s'effectue dans le modèle GN la transition entre les phénomènes perturbatifs à courtes distances et les effets non-perturbatifs à longue distance. On a d'abord montré [19] que la série perturbative à l'ordre $1/N$ du modèle GN implique que les coefficients perturbatifs de la masse pôle se comportent aux grands ordres comme $d_n \sim n!$, exactement comme pour la masse pôle des quarks en QCD [4], ce qui implique alors nécessairement des corrections infrarouges non-perturbatives, en puissance de Λ/μ (Λ est l'échelle caractéristique de la théorie et μ l'échelle de renormalisation), elles-mêmes ambiguës. Ces dernières signalent le caractère incomplet de la série purement perturbative, et correspondent aux termes intrinsèquement non-perturbatifs du développement en produits d'opérateurs (OPE). Puis par un calcul exact à l'ordre $1/N$ nous avons analysé [19] comment une quantité intrinsèquement non-perturbative, telle que le gap de masse, est finalement non-ambiguë, mais que cela résulte d'une compensation non-triviale entre les contributions purement perturbatives et les contributions non-perturbatives en puissances de Λ/μ . Ces résultats n'ont en fait rien de très surprenant mais confirment dans un cas un peu plus général ce qui était connu auparavant (notamment étudié dans le modèle σ [20, 21]). D'autre part, toujours pendant la thèse de Damien Reynaud, nous avons réexaminé la construction d'un développement perturbatif "alternatif", exploitant les propriétés infrarouges du groupe de renormalisation dans le cas massif, pouvant ainsi transformer dans certains cas particulier la série originale en une série Borel-sommable. Toujours pour le modèle GN on a fait une étude assez systématique [22, 23] en combinant aussi ces résultats avec ceux de l'approche variationnelle VIP.

1.1.4 Applications en matière condensée

Plus récemment, avec Marcus Pinto et Rudnei Ramos [24, 25] puis avec André Neveu [26] nous avons appliqué la méthode VIP dans un contexte très différent, pour une transition de phase à température finie. Plus précisément on a étudié la théorie critique Φ^4 $O(N)$ à 3 dimensions, largement utilisée [27, 28] pour décrire la température critique de condensation de gaz de Bose dilué homogène et faiblement interagissant, qui correspond physiquement au cas particulier $N = 2$. Les motivations pour cette étude sont multiples: la détermination précise de la température critique réaliste (c'est-à-dire en présence d'interactions) est difficile à la fois expérimentalement et théoriquement, et c'est un phénomène intrinsèquement non-perturbatif (longueur de corrélation infinie à la transition, divergences infrarouges dues aux modes de masse nulle, normalement incontrôlables perturbativement). Comme notre approche s'appuie sur la série perturbative originale, elle bénéficie du fait que la théorie Φ^4 , et plus particulièrement en dimension $D = 3$ (qui est la description théorique pertinente de cette transition de phase après réduction dimensionnelle), est à ce jour la théorie la mieux connue perturbativement (du moins pour les modèles de dimension $D \geq 3$), avec notamment des résultats pour les coefficients perturbatifs disponibles jusqu'au huitième ordre [29] (7 boucles!).

Nous avons donc principalement calculé les coefficients non-perturbatifs entrant dans l'expression de la différence de température critique $\Delta T_c \equiv T_c - T_0$: [30]

$$\frac{\Delta T_c}{T_0} = c_1 a n^{1/3} + [c'_2 \ln(a n^{1/3}) + c''_2] a^2 n^{2/3} + \mathcal{O}(a^3 n) \quad (3)$$

où T_0 est la température de condensation d'un gaz parfait, a la longueur de diffusion pour l'onde s , n la densité atomique du gaz de Bose, et c_1 , c''_2 sont les coefficients pertinents non perturbatifs à déterminer. On a aussi montré comment reproduire par le développement perturbatif amélioré les résultats connus exacts à l'ordre $1/N$ [30], et on a pu étudier précisément dans ce cas les propriétés de convergence éventuelle de la méthode.

Nous avons introduit [26] dans ce cadre une nouvelle variante de la méthode variationnelle, selon une idée originalement de A. Neveu, qui permet de supprimer (ou au moins largement réduire) la multiplicité de solutions variationnelles aux grands ordres perturbatifs, normalement dues à l'existence d'extrema multiples. Dans le cas physique $N = 2$, nos résultats [26, 31] pour les coefficients non-perturbatifs c_1 et c''_2 avec cette méthode variationnelle généralisée sont en accord remarquables avec les autres évaluations non-perturbatives récentes fiables et précises telles que notamment les résultats de simulation sur le réseau.

Dans la présentation qui suit, on illustrera plus en détail seulement quelques aspects, en ne suivant pas forcément un ordre chronologique. Cette première partie de la synthèse s'organise de la façon suivante: dans la section 1.2 on examine le problème général des singularités renormalons des séries perturbatives aux grands ordres pour le gap de masse du modèle de Gross-Neveu, leur apparition puis disparition non-perturbative (tout d'abord sans faire appel à la méthode variationnelle). Ensuite dans la section 1.3 on verra comment un développement perturbatif "alternatif", exploitant les propriétés infrarouges du groupe de renormalisation dans le cas massif, peut donner

sous certaines hypothèses une série Borel-sommable. Finalement dans la section 1.4 on développera et illustrera la méthode VIP pour le calcul de température critique BEC.

1.2 Disparition des renormalons infrarouges dans le gap de masse du modèle GN $O(N)$

Le modèle de Gross-Neveu (GN) à $(1+1)$ dimensions et symétrie $O(N)$ [15,32] est souvent utilisé comme “modèle-jouet” pour la théorie plus complexe QCD, puisqu’il a comme celle-ci les propriétés importantes de liberté asymptotique et de masse dynamiquement engendrée, tout en étant un modèle intégrable, donc avec des résultats exacts disponibles. Entre autre, le gap de masse (associé à la brisure de la symétrie chirale discrète) est connu exactement pour N quelconque à partir de méthodes non-perturbatives (NP) utilisant les résultats exacts de matrice S [33] et les techniques d’Ansatz de Bethe thermodynamique (TBA) [16]. D’un point de vue plus général, il nous a paru intéressant d’étudier le lien précis entre ces résultats purement NP et le comportement perturbatif standard qui ressemble à ce qui se passe à $D = 4$ en QCD. En effet cela pourrait éclairer, pour une théorie asymptotiquement libre, comment s’effectue la transition entre les phénomènes perturbatifs à courtes distances et les effets non-perturbatifs à longue distance. En particulier un petit paradoxe (seulement apparent) que nous examinons ici, est que le développement perturbatif de la masse pôle du modèle GN *massif* exhibe à l’ordre $1/N$ des ambiguïtés, dues à la présence de renormalons infrarouges, qui sont formellement semblables aux renormalons de la masse pôle des quarks [34] en QCD. Alors que le gap de masse exact [16], et à fortiori son développement à l’ordre $1/N$ [35], sont déterminés de façon exacte donc sans ambiguïtés. Comme dans le modèle GN tout est calculable exactement à l’ordre $1/N$, on a pu examiner précisément comment les contributions NP, ici entièrement contrôlables tout au moins à l’ordre $1/N$, s’organisent pour faire disparaître les ambiguïtés perturbatives de type renormalons infrarouges. En utilisant certaines techniques assez standards d’analyse complexe (transformation de Mellin) on a isolé les singularités correspondantes aux renormalons dans le plan complexe de la variable transformée de Borel. Cela permet d’analyser comment s’opère précisément la connexion entre les contributions perturbatives et NP pour conduire à l’absence attendue d’ambiguïtés renormalons dans le gap de masse complet.

1.2.1 Renormalons perturbatifs dans la masse pôle $1/N$

On se base sur le calcul assez standard [16, 36] du gap de masse du modèle GN $O(2N)$ ¹ à l’ordre $1/N$, mais à ceci près qu’on considère un terme de masse dans le Lagrangien, pour pouvoir définir la masse pôle de façon perturbative et aussi éventuellement faire le lien avec la QCD. Le “vrai” gap de masse doit être considéré ensuite dans la limite chirale, donc dans la limite de masse (du Lagrangien) nulle. Le Lagrangien GN s’écrit

$$\mathcal{L}_{GN} = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi + \frac{g}{2} (\bar{\Psi} \Psi)^2 \quad (4)$$

et les graphes de Feynman contribuant à la fonction de Green à deux points à l’ordre $1/N$ sont illustrés sur la Figure 1. A cet ordre $1/N$, la renormalisation est assez simple, car seul le terme de masse se renormalise, ce qui peut se faire le plus simplement par une soustraction des termes

¹toutes les expressions dépendantes de N qui suivent correspondent au modèle $O(2N)$ plutôt que $O(N)$, pour comparer plus directement avec les résultats exacts [16] et $1/N$ [35] du gap de masse.

divergents dans un développement de Taylor de l'intégrant [36]. L'expression correspondant à la

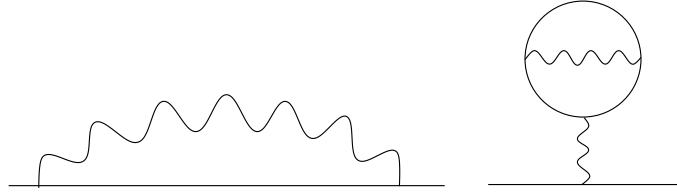


Figure 1: Les graphes contribuant à la masse du GN à l'ordre $1/N$.

$$\text{wavy line} = \text{diagram with two loops and a dashed line}$$

Fig. 1 s'écrit, après intégration sur la variable angulaire:

$$M_P = M \left[1 + \frac{r_1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right] \quad (5)$$

où $M = \Lambda \equiv \mu e^{-2\pi/(Ng(\mu))}$ est le gap de masse à l'ordre dominant $\mathcal{O}(1)$, μ est l'échelle arbitraire de renormalisation, et

$$r_1 = \frac{gN}{4\pi M} \left[\int_0^\infty dq^2 \left(\frac{\not{p}}{2p^2} \left[1 - \frac{q^2 + p^2 + M_P^2}{A} \right] - \frac{M_P}{A} \right) G[q^2] \right. \\ \left. - 4G[0]M_P \int_0^\infty \frac{dq^2}{q^2 \zeta} \ln\left[\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right] G[q^2] \right] \quad (6)$$

où $A \equiv \sqrt{(q^2 + p^2 + M_P^2)^2 - 4p^2 M_P^2}$ (NB q est Euclidien mais p est Minkowskien), $\zeta \equiv (1 + 4M_P^2/q^2)^{1/2}$, et le propagateur habillé (ligne ondulée sur le graphe Fig. 1) est

$$G[q^2] = \left[1 + \frac{gN}{2\pi} \left[\ln \frac{M_P^2}{\mu^2} + \zeta \ln \left[\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right] \right] \right]^{-1} = \left[\frac{gN}{2\pi} \zeta \ln \left[\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right] \right]^{-1} + \mathcal{O}(1/N). \quad (7)$$

Pour obtenir la masse pôle à l'ordre $1/N$ et dans la limite de masse (Lagrangienne) nulle, il est suffisant de remplacer $\not{p} = M_P = M[1 + \mathcal{O}(1/N)]$ dans les Eqs. (6)–(7) à des termes $\mathcal{O}(1/N^2)$ près. Ce qui donne:

$$r_1 = \frac{1}{4} \int_0^{\mu^2} \frac{dq^2}{M^2} (1 - \zeta) \left[\zeta \ln \left[\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right] \right]^{-1} - \frac{1}{2} \int_0^{\mu^2} \frac{dq^2}{q^2 \zeta^2} + \mathcal{O}(1/N) - \text{soustraction} \quad (8)$$

où on a introduit l'échelle μ pour régulariser les intégrales divergentes. La renormalisation par soustraction va enlever la partie divergente des intégrants, également régularisés en fonction de μ . Cette régularisation par "cutoff" est plus pratique pour notre objectif, où l'on s'intéresse principalement au comportement asymptotique de l'expression (8) (soit pour $\mu \gg \Lambda$, mais pas infini).

Pour simplifier un peu la discussion on peut laisser de côté (pour l’instant) le second graphe Fig. 1 (ce graphe donne cependant une contribution bien définie au gap de masse). On va regarder maintenant en détail comment un développement perturbatif “naïf” de (8) conduit à la présence de renormalons infrarouges et ambiguïtés associées d’ordre $\mathcal{O}(\Lambda/\mu)$. (NB le développement perturbatif usuel du “vrai” gap de masse est nul à tous les ordres, le gap de masse étant une quantité NP d’ordre Λ . Mais ce n’est vrai que lorsqu’on considère la théorie non-massive au niveau du Lagrangien, pour $m \rightarrow 0$ dans l’Eq. (4)).

Notre objectif est alors d’examiner les résultats obtenus si la connaissance des termes NP est partiellement omise. Plus précisément, faisons momentanément l’hypothèse que seule la partie purement perturbative du propagateur scalaire habillé est connue, selon la structure $1/N$ des graphes de la Fig. 1. C’est exactement ce qui se passe en QCD typiquement (sauf qu’en QCD on aurait une dépendance en q^2 différente, à la place du terme $1 - \zeta$ dans l’éq. (8)). N’utiliser que cette information “purement perturbative” signifie qu’on remplace dans (8) le propagateur habillé complet par le couplage effectif ²:

$$r_1 = \frac{1}{4} \int_0^{\mu^2} \frac{dq^2}{M^2} (1 - \zeta) \left[g(q^2) - 2g \frac{M^2}{q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{q^2}\right)^2 \right] \quad (9)$$

où dans le crochet de l’éq. (9) les termes $\mathcal{O}(M^2/q^2)$ “NP” corrigeant le couplage effectif sont bien sûr connus exactement pour le modèle GN et pourraient être obtenus explicitement ici par un développement systématique du membre de droite de l’Eq. (7) pour grand q^2 . Insistons que d’omettre cette partie NP n’est bien sûr pas complet, mais que le but de cette séparation des différentes contributions (un peu artificielle pour le modèle GN) est d’examiner précisément comment les renormalons apparaîtraient, d’une façon très similaire à ce qui se passe pour la masse pôle en QCD. La procédure la plus simple et standard pour exhiber les renormalons IR est de redévelopper le terme $1 - \zeta$ pour q^2 petit:

$$1 - \zeta = 1 - \frac{2M}{q} \left(1 + \frac{q^2}{4M^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{2M}{q} + \mathcal{O}\left(\frac{q}{2M}\right) \quad (10)$$

et de développer en même temps le couplage effectif $g(q^2)$ à l’ordre d’une boucle du groupe de renormalisation (GR) en puissances de $b_0 g(\mu) \ln[q^2/\mu^2]$. Examinant (10) on voit que la singularité dominante provient du terme q^{-1} qui, combiné avec les termes $(g(\mu) \ln[q^2/\mu^2])^n$ du développement du couplage effectif, produit des coefficients perturbatifs factoriellement divergents selon:

$$r_1^{\text{dominant}} \sim -\frac{\mu}{M} \sum_{p=0}^{\infty} 2^p p! g^{p+1}(\mu) . \quad (11)$$

(où on a utilisé $\int_0^1 dx x^\alpha \ln^p x = (-)^p (1 + \alpha)^{-(p+1)} p!$, $\text{Re}[\alpha] > -1$). La non-alternance de signe de ces coefficients implique [4] que la série correspondante n’est pas Borel-sommable: en effet

²Dans ce qui suit on redéfinit $b_0 g \equiv N/(2\pi) g \rightarrow g$, pour définir le développement $1/N$ proprement, et en absorbant au passage le facteur 2π par convenance.

l'intégrale de Borel correspondant à (11) s'écrit

$$BI[r_1^{dominant}] \sim -\frac{\mu}{M} \int_0^\infty dt e^{-t/g} (1-2t)^{-1} \quad (12)$$

de sorte que le pôle à $t_0 = 1/2$ sur le chemin d'intégration donne l'ambiguïté dominante:

$$\delta M_{dominant} \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int^{\infty+i\epsilon} - \int^{\infty-i\epsilon} \right] (dt e^{-t/g} (1-2t)^{-1}) = \pm i\pi \mu e^{-t_0/g} \propto \Lambda. \quad (13)$$

Remarquons que cette ambiguïté dominante $\mathcal{O}(\Lambda)$ est complètement similaire à celle obtenue pour la masse pôle des quarks en QCD [34]. Le fait que la contribution perturbative Eq. (12) soit proportionnelle à l'échelle μ peut paraître surprenant à première vue (puisque c'est censé être une contribution au gap de masse $\sim \Lambda \ll \mu$), mais c'est un fait caractéristique d'une série non Borel-sommable [4] dans cette régularisation avec un "cutoff" explicite: en effet, cela indique qu'une contribution NP, elle aussi proportionnelle à l'échelle de factorisation, est nécessaire pour compenser (12) et restaurer la dépendance correcte du gap de masse, $M_{gap} \sim \Lambda$.

On peut aller plus loin et caractériser aux ordres (perturbatifs) arbitraires la structure et les propriétés de ces renormalons, toujours à l'ordre $1/N$ [19]. En effet on peut réécrire Eq. (8) identiquement directement sous forme d'une intégrale de Borel, grâce à un changement de variable adéquat, définissant la variable de Borel t comme:

$$t = -g \ln \frac{q^2}{\mu^2}. \quad (14)$$

Prenant l'expression (9), on trouve après un peu d'algèbre

$$r_1^{complet} = -\frac{\mu}{2M} \int_0^\infty dt e^{-\frac{t}{2g}} (1-t)^{-1} \left[1 - \frac{\mu}{2M} e^{-\frac{t}{2g}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{p=1}^\infty \frac{(\mu^2/4M^2)^p}{p! \Gamma[3/2-p]} e^{-p t/g} \right] \quad (15)$$

(Pour obtenir (15) on développe l'éq.(10) en puissance de q^2/M^2 , ce qui donne formellement³ une série complète (dominants, sous-dominants, ..) de renormalons infrarouges (correspondant aux coupures à $t_p = 1/2, 1, \dots (2p+1)/2, p \in \mathbb{N}^*$). Pour mémoire on peut aussi calculer l'ambiguïté à tous les ordres (perturbatifs), que nous définissons [19] comme la différence entre le contour au-dessus et au-dessous de la coupure [19], mais on n'en aura pas besoin ici.

Comme on l'a dit, on a un peu simplifié la discussion en considérant seulement le premier graphe de la Fig. 1: le second graphe "tadpole" donne aussi des renormalons, si on le considère perturbativement. Une analyse similaire utilisant Eqs. (9)-(10), et développant l'intégrant pour $q^2 \rightarrow 0$ donne des pôles renormalons à $t_p = p \in \mathbb{N}^*$. De façon amusante, le pôle à $t = 1$ se compense exactement avec celui de (15), mais ceci n'est qu'un accident de cet ordre sous-dominant: le pôle dominant ainsi que tous les suivants ($t_p \geq 3/2$) ne se compensent absolument pas entre les deux types de graphes.

³En toute rigueur le développement (15) n'est valide que pour $\mu^2 < 4M^2$, mais on peut procéder similairement avec le développement valide pour $\mu^2 > 4M^2$. Pour simplifier on considère seulement (15).

1.2.2 Borel-sommabilité de la masse non-perturbative à $\mathcal{O}(1/N)$

On peut alternativement calculer exactement (8) à l'ordre $1/N$, donc sans tronquer (8) par son développement perturbatif. Plus précisément l'intégrale (8) peut être évaluée analytiquement, après changement de variable $\zeta^{-1} = \tanh(\frac{\theta}{2})$, on obtient

$$r_1 = \frac{1}{2} \left[Ei[-\theta] - \ln \theta - \gamma_E + \ln(\ln \frac{\mu^2}{M^2}) - 2 \ln(\cosh[\theta/2]) + \ln \frac{\mu^2}{M^2} \right] \quad (16)$$

où $\chi = (1 + 4M^2/\mu^2)^{1/2} \equiv 1/\tanh(\theta/2)$ (i.e. $\theta = \ln[(\chi + 1)/(\chi - 1)] \geq 0$), et $Ei(-x) \equiv -\int_x^\infty dt e^{-t}/t$ ($x \geq 0$) est la fonction intégrale exponentielle. Le terme $-2 \ln(\cosh[\theta/2])$ dans (16) correspond au graphe "tadpole" de la Fig. 1, et les termes $\ln \ln(\mu^2/M^2) \equiv -\ln g$ and $\ln \mu^2/M^2 \equiv 1/g$ sont les termes de soustraction pour le premier graphe et le tadpole, respectivement. On peut vérifier alors que (16) est finie pour $\mu \rightarrow \infty$. Mais ici on s'intéresse au comportement asymptotique soit $\mu \gg \Lambda$ mais fini, laissant tous les termes de corrections en puissance de Λ/μ . $Ei(-x)$ pour $x > 0$ a un développement asymptotique avec des coefficients factoriels mais de signes *alternés*, soit donc explicitement Borel-sommable et non-ambigu. Plus précisément:

$$M^P = M \left[1 + \frac{1}{2N} \left(2 \ln 2 - \gamma_E - \frac{M^2}{\mu^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! g^{n+1} + \mathcal{O}(\frac{M^2}{\mu^2}) \right] \right) \right] \quad (17)$$

Pour obtenir le gap de masse usuel $M^P/\bar{\Lambda}$ à l'ordre $1/N$ à partir de l'éq.(16), il faut juste encore introduire l'échelle de référence dans le schéma $\overline{MS}$, ce qui constitue un simple changement de schéma (perturbatif) par rapport à l'échelle utilisée dans les calculs précédents en régularisation avec cutoff. Omettant des termes d'ordre $\mathcal{O}(1/N^2)$, on obtient

$$M^P/\bar{\Lambda} = 1 + \frac{r_1}{N} + \mathcal{O}(\frac{1}{N^2}) = 1 + \frac{1 + 2 \ln 2 - \gamma_E}{2N} \quad (18)$$

en accord avec réf. [35].

Le résultat (16),(17) apparaît donc en contradiction avec celui obtenu en partant des développements purement perturbatifs (11–15). On va voir comment réconcilier ces deux approches.

1.2.3 Compensation des renormalons IR

Pour voir comment exactement les "mauvais" coefficients factoriels de mêmes signes dans l'éq. (11) se transmutent en "bons" factoriels avec alternance de signes dans l'éq. (17), il faut évidemment récupérer les contributions NP au gap de masse. Bien sûr le point faible de l'approche perturbative est d'avoir développé le terme $1 - \zeta$ dans le régime infrarouge (q^2 petit), tout en prenant la forme du propagateur à courte distance, de type couplage effectif. Mais voir la disparition des renormalons IR nécessite une analyse complète des pôles dans le plan de Borel. On va considérer la transformée de Mellin-Barnes (MB) [37] pour l'intégrale (8), qui peut s'écrire (on omet encore le graphe "tadpole" Fig. 1 pour simplifier):

$$r_1 = \frac{1}{4} \int_0^{\mu^2} \frac{dq^2}{M^2} \int_0^\infty dt \frac{1}{2\pi i} \oint ds K(s, t) \left(\frac{M^2}{q^2} \right)^{-s} \quad (19)$$

où le noyau (transformée MB inverse) est défini dans notre cas par

$$K(s, t) = \int_0^\infty dx x^{s-1} (1 - \zeta) \zeta^{-1} \left[\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right]^t. \quad (20)$$

La méthode de la transformée MB est connue pour exhiber précisément les diverses singularités de l'intégrant, dans le plan de Borel t pertinent. Opérant encore un changement de variable: $\zeta^{-1} = \tanh(\frac{\phi}{2})$, *sauf* pour le terme $1 - \zeta$, pour lequel on utilise encore l'éq. (10) donc sous la forme développée ⁴ en q/M , (20) donne

$$\int_0^{\mu^2} \frac{dq^2}{4M^2} \left(\frac{M^2}{q^2} \right)^{-s} K(s, t) = \frac{\mu^2}{2M^2} \sum_{a \geq -1} 2^{-a} c_a \frac{\Gamma[1 + a - 2s] \Gamma[-a/2 + s + t]}{\Gamma[1 + a/2 - s + t] (1 + s)} \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right)^{-s} \quad (21)$$

défini pour $\text{Re}[s + t] > a/2$ and $\text{Re}[2s] < 1 + a$. Ces dernières conditions sont telles que l'intégrale (20) converge, et jouent un rôle essentiel pour déterminer ensuite les singularités. La variable a dans (21) est simplement la puissance de $q/M \sim \sinh \phi$ dans le développement (10), de coefficients c_a respectivement. Par exemple $a = -1$, avec $c_{-1} = -2$, correspond au renormalon dominant, et $a = 0, \dots, 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$ aux sous-dominants. Pour calculer l'intégrale sur s on doit fermer le contour à gauche, ce qui est dicté par le domaine de convergence (puisque $x^{-s} \equiv (M^2/q^2)^{-s} = e^{-s \ln M^2/q^2}$ décroît exponentiellement pour le régime asymptotique $q^2 \gg M^2$ auquel on s'intéresse): on somme alors sur les résidus des pôles inclus dans ce domaine. L'expression (21) a des pôles (simples) à $s = -1$, $s = a/2 - t - k$, and $2s = a + 1 + k$, $k \in \mathbb{N}$, où les derniers pôles ne contribuent pas au contour pertinent. Le résultat final est

$$r_1 \sim \frac{\mu^2}{4M^2} \int_0^\infty dt \sum_{a \geq -1} \frac{c_a}{2^a} \left[\frac{\Gamma[3 + a] \Gamma[t - 1 - a/2]}{\Gamma[2 + t + a/2]} \frac{M^2}{\mu^2} + e^{-t/g} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \Gamma[1 + 2t + 2k]}{k! \Gamma[1 + 2t + k] (1 + a/2 - t - k)} \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right)^{k - a/2} \right] \quad (22)$$

où le premier terme du crochet correspond au résidu du pôle à $s = -1$, et les autres termes correspondent à la somme sur les résidus des pôles à $s = a/2 - t - k$, et on a utilisé: $(M^2/\mu^2)^t \equiv e^{-t/g}$. Dans (22) on voit que le premier terme du crochet ainsi que les termes de la somme ont des pôles à $t(a, k) = 1 + a/2 - k$, qui peuvent se situer à $t > 0$ suivant les valeurs de a, k . Les contributions du premier terme, initialement pôle à $s = -1$, proviennent de termes de puissance $(M^2/q^2)^{-s}$ dans l'Eq.(19), et correspondent alors intuitivement aux contributions non-perturbative "OPE", tandis que les contributions perturbatives sont celles multipliées par le terme $e^{-t/g}$ dans (22), conformément à la représentation standard de Borel. Même si en fait toutes ces contributions sont du même ordre (et non-perturbatives), de sorte à compenser les mauvais pôles à $t > 0$, il semble naturel dans le langage de la transformée Borel de distinguer ces deux types de contributions comme "non-perturbative" et "perturbative" respectivement. Plus précisément les pôles à $t = 1/2$ pour $a = -1$

⁴On peut en principe calculer l'intégrale exacte par la méthode MB, i.e. sans développer (10), mais ce ne serait qu'une façon (nettement plus compliquée!) de recalculer (17), alors que ce qu'on veut c'est exhiber des contributions ordre par ordre où toutes les singularités renormalons perturbatives et NP sont explicites.

correspondent au renormalon dominant, avec $k = 0$. D'ailleurs, si on garde seulement les renormalons dominants "perturbatifs", $\propto e^{-t/g}$, pour $k = 0$, on retrouve bien de cette façon exactement l'éq. (12).

On peut vérifier facilement que ce pôle à $t = 1/2$ se compense exactement avec le premier terme pôle NP à $t = 1/2$, et de façon similaire pour tous les pôles sous-dominants à $t = 1, 3/2, \dots (2p + 1)/2$. C'est la disparition annoncée des renormalons (infrarouges). Comme (22) à la forme d'une intégrale de Borel, et après compensations tous les pôles restants sont situés à $t < 0$, cela définit une série Borel-sommable, dont les termes dominants correspondent à la série asymptotique définie en (17).

Remarquons que ces propriétés des renormalons sont indépendantes de la régularisation utilisée, par exemple elles sont similaires (mais plus compliquées) en régularisation dimensionnelle (voir réf. [19] pour plus de détails). La régularisation par "cutoff" explicite qu'on a utilisé introduit une échelle de factorisation explicite μ , cf. Eq. (8), qui est assez pratique car elle illustre directement les termes NP de corrections en puissances, alors que l'interprétation de ces derniers en régularisation dimensionnelle est moins évidente.

1.2.4 Conclusion sur les renormalons IR du modèle GN

On a donc exhibé la disparition ordre par ordre des renormalons IR perturbatifs "naïfs" du gap de masse GN à l'ordre $1/N$. On insiste sur le fait que ce résultat n'est pas surprenant, notre but n'étant que d'illustrer dans un modèle calculable comment les contributions NP à la masse pôle s'organisent pour éliminer complètement les renormalons introduits ici artificiellement. Ceci est en accord avec l'idée générale [4] selon laquelle les renormalons IR sont des artefacts perturbatifs, bien qu'il semble difficile de les éviter en QCD, où pour beaucoup de quantités physiques pertinentes on ignore la forme des corrections non-perturbatives.

Dans la sous-section suivante, on discute une tentative plus directe de modification des propriétés asymptotiques du développement perturbatif pour le gap de masse, assez génériquement dans un modèle à liberté asymptotique. Cette construction s'appuie seulement sur l'information perturbative mais avec une modification de la série perturbative standard dans l'infrarouge, qui peut (dans certains cas très particuliers) court-circuiter la présence explicite des renormalons illustrée précédemment.

1.3 Développement alternatif et propriétés infrarouges du GR

On reconsidère le Lagrangien GN, éq. (4), examinant maintenant les propriétés du groupe de renormalisation (GR). L'évolution GR bien connue pour la masse (renormalisée) s'écrit:

$$m(\mu') = m(\mu) \exp\left\{-\int_{g(\mu)}^{g(\mu')} dg \frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)}\right\}, \quad (23)$$

où $\beta(g)$ et $\gamma_m(g)$ sont respectivement les fonctions beta et dimension anormale de masse, et μ l'échelle arbitraire de renormalisation dans le schéma $\overline{MS}$. En tronquant $\beta(g)$ et $\gamma_m(g)$ au 1er

ordre pour simplifier: $\beta(g^2) \equiv dg^2/d \ln \mu = -2b_0 g^4 + \dots$, $\gamma_m(g^2) = \gamma_0 g^2 + \dots$, on a par exemple pour le modèle GN $O(N)$:

$$b_0 = \frac{2N-2}{4\pi} > 0 ; \quad \gamma_0 = \frac{2N-1}{2\pi} . \quad (24)$$

Ce qui est particulier dans notre construction, c'est de prendre la solution *auto-cohérente* de (23), définie par

$$M_{GR} \equiv m(\mu' \equiv M_{GR}) \quad (25)$$

qui définit donc une sorte de masse "pôle" (mais incluant seulement la dépendance GR pour l'instant). On obtient [14, 23]:

$$M_{GR} = m(\mu) \left[1 + 2b_0 g^2(\mu) \ln \frac{M_{GR}}{\mu} \right]^{-\frac{\gamma_0}{2b_0}} \quad (26)$$

qui a les propriétés intéressantes d'être invariante d'échelle à tous les ordres (sauf bien sûr qu'on a tronqué ici la dépendance du GR au 1er ordre), et d'avoir une limite chirale *non-nulle*:

$$M_{GR} \rightarrow \Lambda \left[1 + 0\left(\frac{m}{\Lambda}\right) \right] \text{ pour } m(\mu) \rightarrow 0 . \quad (27)$$

Pour mieux le voir, on peut réécrire (26) *identiquement*:

$$M_{GR}\left(\frac{\hat{m}}{\Lambda}\right) = \frac{\hat{m}}{\Lambda} F^{-A} \quad (28)$$

où $A = \frac{\gamma_0}{2b_0}$, $\hat{m} \equiv m(\mu) [2b_0 g^2(\mu)]^{-A}$ la masse (invariante d'échelle), et

$$\Lambda = \mu e^{-\frac{1}{2b_0 g^2(\mu)}} \quad (29)$$

l'échelle basique usuelle au 1er ordre du GR. Dans (28) apparaît la fonction implicite:

$$F(\hat{m}/\Lambda) \equiv \ln(\hat{m}/\Lambda) - A \ln F . \quad (30)$$

Contrairement au logarithme, $F(\hat{m})$ (qui dans le cas le plus simple $A = 1$ est la fonction implicite de Lambert [38]: $W(x) \equiv \ln x - \ln W$, représentée sur la Fig.2), a la propriété remarquable d'avoir un développement en puissances de $\hat{m}/\Lambda$ pour $\hat{m}$ suffisamment petit:

$$F(\hat{m}/\Lambda) = \left(\frac{\hat{m}}{\Lambda}\right)^{1/A} \left[1 + 0\left(\frac{\hat{m}}{\Lambda}\right)^{1/A} \right] \text{ pour } |\hat{m}| \leq \hat{m}_c \lesssim \Lambda \quad (31)$$

et on connaît explicitement toutes les corrections d'ordres supérieures en $\hat{m}/\Lambda$ [23]:

$$F\left(\frac{\hat{m}}{\Lambda}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{A}\right)^p \frac{(p+1)^p}{(p+1)!} \left(\frac{\hat{m}}{\Lambda}\right)^{(p+1)/A} , \text{ convergent pour } \left|\frac{\hat{m}}{\Lambda}\right| < e^{-A} A^A . \quad (32)$$

D'autre part, F est cohérente avec le couplage perturbatif usuel, $2b_0 F \sim 2b_0 \ln(\hat{m}/\Lambda) \sim 1/g(\hat{m})$, à courte distance $\hat{m} \gg \Lambda$, dans le régime perturbatif. De cette façon on peut arguer que F donne

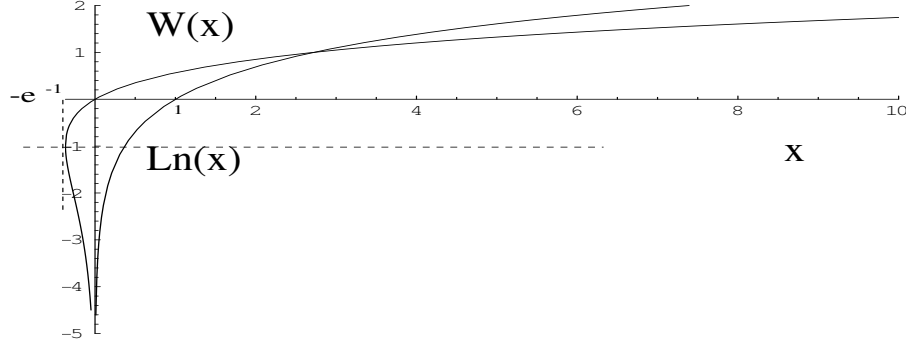


Figure 2: La fonction de Lambert $W(x) \equiv \ln x - \ln W$.

alors une transition bien définie entre le domaine perturbatif usuel et le régime de couplage fort, non-perturbatif, correspondant aussi ici à la limite non-massive (chirale) $\hat{m} \rightarrow 0$. Remarquons que la relation (27) qui exhibe une masse non-nulle $M \sim \Lambda$ à la limite chirale $m \rightarrow 0$, ne constitue pas une preuve de brisure dynamique de symétrie chirale. C'est plus simplement une généralisation de la "transmutation dimensionnelle": l'équivalence habituelle éq. (29) entre le couplage sans dimension $g(\mu)$ et l'échelle Λ , est généralisée ici pour $\hat{m} \neq 0$, avec des corrections en $\hat{m}/\Lambda$ bien définies. Mais il est intéressant de voir qu'avec ces propriétés relativement simples de F , on obtient [14, 23] par un calcul presque immédiat le gap de masse correct du modèle GN pour $N \rightarrow \infty$, sans passer par le raisonnement standard via le potentiel effectif et/ou resommation de graphes de Feynman etc. Sachant que les propriétés (26)-(30) qui ne dépendent que du GR sont donc facilement généralisables aux ordres plus élevés [14, 23].

L'idée est donc d'utiliser ces propriétés pour extrapoler le gap de masse (ou bien d'autres quantités similaires plus générales dans d'autres modèles) depuis leurs expressions perturbatives accessibles, jusqu'au régime infrarouge. Par exemple la masse pôle s'écrit [23]:

$$M^P(F) \sim \Lambda e^F \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (2b_0 F)^{-n} \right], \quad (33)$$

où les d_n sont reliés aux coefficients perturbatifs usuels donnés par les graphes à n boucles.

De plus F est en fait une "fonction" multivaluée, possédant dans le domaine $\hat{m} \lesssim \Lambda$ en particulier une branche où $F < 0$. Pour $A = 1$ la seule singularité est à $F = -1$ i.e. $\hat{m}/\Lambda = -e^{-1}$ (voir Fig.2), et on peut avoir $F < 0$, puisque F est définie (analytique) dans un cercle de rayon de convergence fini autour de zéro. Or, $F < 0$ induit une alternance de signe des coefficients perturbatifs $1/F^n \rightarrow (-)^n/|F|^n$ dans (33). La série perturbative pour $F < 0$ peut devenir alors convergente (au sens Borel) [23] dans ce domaine restreint pour $\hat{m}$ suffisamment petit. Remarquons que ça ne change pas le comportement ordinaire de la série dans le domaine perturbatif $\hat{m} \gg \Lambda$, où c'est la branche perturbative (unique) de F qui est pertinente. Dans le cas très particulier $A = 1$ (qui est la valeur pour $N \rightarrow \infty$ dans le modèle GN $O(N)$), le domaine pour lequel $F < 0$ correspond

aussi à $\hat{m} < 0$. Ce n'est pas un problème en principe, car pour une théorie invariante relativiste les quantités physiques ne dépendent pas du signe *absolu* du terme de masse du Lagrangien. Cependant pour N quelconque, $A \neq 1$, et on a alors une branche telle que $\hat{m} > 0$ pour $Re[F] < 0$ [23] autour de $\hat{m} \sim 0$. (Et à l'ordre suivant du GR, A devient dépendant du schéma de renormalisation, pouvant alors être choisi arbitrairement en principe). Prendre $Re[F] < 0$ revient donc à atteindre la limite $m \rightarrow 0$ d'une façon alternative. On pourrait critiquer le fait que ces propriétés de convergence de la série dépendent à ce point du choix de la branche considérée (et même du schéma) pour la limite de masse nulle, mais on peut arguer que la série perturbative n'est pas réellement une quantité physique (indépendamment de notre construction, la série perturbative ordinaire est déjà dépendante du schéma de renormalisation, par exemple). On voit donc que le développement perturbatif autour de $m = 0$ peut exister en deux modes:

i) le mode standard, $F > 0$, qui rejoint la perturbation standard à $\hat{m} \gg \Lambda$: la série perturbative seule doit être complétée par des corrections non-perturbatives, comme dans l'analyse précédente du GN.

ii) Le mode "alternatif", avec $F < 0$ (plus généralement $Re[F] < 0$ car F peut être complexe aux ordres supérieurs du GR): la série perturbative peut être directement Borel-sommable dans un domaine $\hat{m}$ suffisamment petit. Pour mieux motiver et illustrer l'existence possible de ces deux modes perturbatifs, on peut faire une analogie [23] non conventionnelle en regardant pour l'oscillateur les conséquences d'un couplage négatif (voir Annexe A).

On doit admettre cependant que notre construction essentiellement basée sur une extrapolation des propriétés "perturbatives" du GR dans l'infrarouge profond, avec les propriétés mathématiques de la fonction F qui en découlent, peut apparaître comme spéculative (ou simplement, naïve) s'il s'agit de décrire le comportement non-perturbatif à longue distance d'une théorie asymptotiquement libre plus complexe que le GN, telle que QCD. Il est clair que cette approche ne s'applique au mieux qu'à la limite chirale et ne décrit sûrement pas d'autres phénomènes "véritablement" non-perturbatifs.

1.4 Calcul variationnel amélioré de la température critique BEC

1.4.1 Sommation Borel contre développement variationnellement amélioré

On a vu dans les sections précédentes que la transformée de Borel donne des informations utiles sur le comportement asymptotique des séries, même dans le cas non Borel-sommable. Mais ça reste un outil assez formel et en pratique limité. Par exemple la somme de Borel pour l'oscillateur peut se faire explicitement (voir Annexe A), mais s'avère numériquement une mauvaise approximation des valeurs exactes de l'énergie du fondamental. Ce n'est pas très étonnant puisque la somme de Borel n'incorpore que le comportement dominant des coefficients aux grands ordres de la série perturbative, et pas forcément les valeurs précises des coefficients des premiers ordres. De même pour le GN: mis à part le calcul exact à l'ordre $1/N$, traité dans la section 1.2 où l'on incorpore *toutes* les contributions exactes perturbatives et NP, un traitement par sommation de Borel de la masse pôle perturbative éq. (33) (dans le mode alternatif Borel-sommable) ne donne pas [23] de bonnes approximations du gap de masse GN (sauf pour le cas particulier $N \rightarrow \infty$). En re-

vanche, la méthode variationnelle VIP converge très rapidement pour l'oscillateur [11], et donne des approximations raisonnables au gap de masse du GN pour N quelconque [14, 23]. Dans de nombreuses autres analyses similaires [6] la méthode VIP s'avère donner numériquement de bons résultats, même aux ordres relativement bas. Et elle a l'avantage d'incorporer automatiquement la dépendance exacte des termes perturbatifs lorsqu'ils sont connus. On va développer dans ce qui suit la méthode variationnelle VIP, brièvement décrite dans l'introduction, en l'illustrant dans un cadre un peu nouveau et différent de la brisure de symétrie chirale.

1.4.2 Théorie effective BEC

La condensation de Bose-Einstein (BEC) est un sujet riche actuellement en physique de la matière condensée, et en particulier la détermination précise de la température critique réaliste (c'est-à-dire en présence d'interactions) est considérée comme difficile à la fois expérimentalement et théoriquement. Comme mentionné dans l'introduction, c'est un phénomène intrinsèquement non-perturbatif mais comme la théorie Φ^4 (plus particulièrement en dimension $D = 3$ pertinente après réduction dimensionnelle) est connue perturbativement jusqu'au huitième ordre, ça constitue un cadre très intéressant pour tester dans un contexte phénoménologique riche les idées du développement variationnel amélioré (VIP). Dans notre calcul on se base [24, 25] sur la théorie critique ϕ^4 $O(N)$ à 3 dimensions, cadre approprié pour décrire la température critique de condensation de gaz de Bose dilué homogène et faiblement interagissant, qui correspond physiquement au cas particulier $N = 2$ (pour des revues récentes voir par exemple [27, 28]).

Pour un gaz parfait *sans* interactions, on considère N bosons à température T dans une boîte de volume V de sorte que la densité $n = N/V$. A haute température la longueur d'onde thermique⁵ $\lambda_T = 2\sqrt{\pi/T}$ est plus petite que l'espacement entre particules, et les atomes se comportent classiquement. Lorsqu'on abaisse la température les atomes se comportent comme de petits paquets d'onde d'extension λ_T . La condensation a lieu lorsque λ_T est de l'ordre de l'espacement inter-atomes $\sim n^{-1/3}$, de sorte que les fonctions d'onde des bosons commencent à se superposer et les bosons s'accumulent dans l'état d'impulsion nulle. Pour une température critique $T \sim T_c$ il y a création d'un condensât (macroscopique) "BEC" (S.N. Bose et A. Einstein, 1925). On peut donc estimer grossièrement la valeur de la température critique T comme: $2\sqrt{\pi/T_c} \sim n^{-1/3}$. Il a fallu attendre 70 ans pour observer [39] de tels condensats avec le succès que l'on sait (prix Nobel 2001 de E. Cornell, W. Ketterle, C. Wieman). En quelques mots (et en simplifiant à l'extrême) la difficulté expérimentale c'est que typiquement pour l'air à température ambiante, $\lambda_T^3 n \sim 10^{-8}$. Alors si on augmente la densité n ce sont les recombinaisons à trois corps qui seront favorisées et donc une transition vers la phase liquide (voire solide). La solution est plutôt de décroître T , par des techniques cryogéniques et de piégeage magnétique par laser. Mais bien que diverses propriétés intéressantes de ces condensats soient maintenant observées, la température critique n'est pas mesurée précisément (en gros il faudrait pour cela pouvoir compter *précisément* le nombre d'atomes!). De plus dans la vraie vie, il y a des interactions, ce qui modifie la température critique, et c'est ce qui nous concerne ici.

⁵Dans des unités où $\hbar = 2m = k_B = 1$ pour simplifier.

Les techniques standards de théorie des champs pour analyser la transition de phase impliquent d'abord de passer en temps Euclidien t_{eucl} , périodique de période $\beta = 1/T$. Pour $T \rightarrow T_c$, la longueur de corrélation $L_{correl} \rightarrow \infty$ et il y a donc des fluctuations de grande longueur d'onde, ce qui nécessite un traitement intrinsèquement non-perturbatif. Le Lagrangien (effectif) pertinent s'écrit [40]:

$$S_{eff,E} = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \psi^* \left[\partial_\tau - \frac{\Delta^2}{2m} - \mu \right] \psi + \frac{g}{4} (\psi^* \psi)^2 \quad (34)$$

où ψ est la fonction d'onde (plus exactement opérateur de champ) bosonique. Dans (34) on a ajouté au terme de gaz de Bose non-relativiste le potentiel chimique μ ainsi qu'une interaction à deux corps⁶ (le dernier terme dans (34)). A basse énergie, $\lambda_T \gg a$ (la longueur de diffusion): par exemple pour l'atome de Rubidium, $a_{Rb} \sim 103 a_0 = 5 \cdot 10^{-9} m \sim 25 eV^{-1}$, d'autre part le couplage (répulsif) $g = \frac{8\pi a}{m} \sim 7 \cdot 10^{-6} eV^{-2}$. Mais bien que le couplage soit faible, il s'agit bien d'un mécanisme non perturbatif, à cause notamment de la présence de fortes divergences infrarouges comme on va le voir.

A très grande distance, t_{eucl} découple: c'est le phénomène de "réduction dimensionnelle" à une théorie effective de dimension 3, qui dépend seulement des modes zéros (et on peut négliger la dynamique complète car on ne s'intéresse ici qu'au point de transition T_c). Plus précisément, utilisant des techniques standards [41], on décompose la "fonction d'onde": $\psi = \sum_j \psi_j$ sur les états propres de fréquence de Matsubara $\omega_j = \frac{2\pi j}{\beta}$ et on ignore $j \neq 0$ (seul le mode zéro $j = 0$ est important proche du point critique). Le Lagrangien effectif à trois dimensions s'écrit alors

$$S_{eff} = \beta \int d^3x \psi_0^* \left[-\frac{\Delta^2}{2m} - \mu \right] \psi_0 + \frac{2\pi a}{m} (\psi_0^* \psi_0)^2$$

qui possède une invariance (globale) $U(1)$ (reflétant simplement la conservation du nombre d'atomes). Il est plus commode de faire ensuite un changement de variable:

$$\psi_0 = \sqrt{mT} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (35)$$

pour obtenir le Lagrangien pertinent final:

$$S_{eff}(\phi) = \int d^3x \left[\frac{1}{2} |\partial\phi|^2 + \frac{1}{2} r \phi^2 + \frac{u}{4!} \phi^4 \right]$$

avec

$$r = -2\mu m, \quad u = \frac{96\pi^2}{\lambda^2} a, \quad (36)$$

qui est invariant $O(2)$ et "super-renormalisable" (c'est-à-dire seule la masse r se renormalise par un contre-terme Z_r , mais le couplage u est directement fini à tous les ordres perturbatifs). On va alors calculer: $\Delta T_c = T_c^* - T_c^0$ (sans interaction) qui est en fait proportionnelle à la variation de la densité Δn , plus précisément [30]:

$$\frac{\Delta T_c}{T_c^0} = c_1 a n^{1/3} + [c_2' \ln(a n^{1/3}) + c_2''] a^2 n^{2/3} + \mathcal{O}(a^3 n)$$

⁶analogue en physique des particules de l'interaction de Fermi.

où

$$c'_2 = -64\pi \zeta[1/2]\zeta[3/2]^{-5/3}/3 \quad (37)$$

(valeur exacte, obtenue assez simplement par les propriétés du groupe de renormalisation), et les coefficients non-perturbatifs sont

$$c_1 = -128\pi^3 \zeta[3/2]^{-4/3} \kappa \quad \text{où } \kappa u \equiv \langle \phi^2 \rangle_{u \neq 0} - \langle \phi^2 \rangle_{u=0} \quad (38)$$

et

$$c''_2 \equiv c''_2(\kappa, R), \quad R \equiv \frac{r_c}{u^2} = -\frac{\Sigma(0)}{u^2} \quad (39)$$

(NB Σ est la self-énergie. L'expression explicite de $c''_2(\kappa, R)$ est donnée par ex. dans [31]). Techniquement il faut donc calculer les quantités κ et r_c donnés par les graphes de Feynman (par ex. Figs. 3, 4 respectivement, à l'ordre $1/N$). Dans le langage de la théorie des champs, on a pour les graphes de Feynman pertinents un propagateur $1/p^2$ et des vertex u et r_c . Le fait que la longueur de corrélation $L_{\text{correl}} \rightarrow \infty$ implique que la fonction à deux points (propagateur habillé inverse) s'écrit: $[p^2 + r_c + \Sigma_u(0)] = 0$ pour $p^2 = 0$, ce qui est parfois appelé dans ce contexte le "théorème de Hugenholtz-Pines" à $T = T_c$, d'où l'expression de r_c dans (39).

On voit qu'à cause du propagateur non-massif il y a des divergences infrarouges sévères à tous les ordres perturbatifs si on calcule ces graphes naïvement. Il faut donc recourir à d'autres techniques non perturbatives. Une difficulté supplémentaire est que les graphes d'ordre dominant du développement en $1/N$, qui sont les graphes "tadpoles" $\propto \mathcal{O}(1)$, ne contribuent pas du tout aux quantités pertinentes. Il faut donc démarrer le calcul au 2ème ordre non-trivial $\mathcal{O}(1/N)$.

Jusqu'en 1999 environ, il y avait une certaine confusion et mêmes des contradictions entre les différentes évaluations non-perturbatives de c_1 (par exemple il n'y avait même pas un consensus sur le signe de c_1 !). La situation est devenue plus claire avec l'analyse de Baym et al [30], qui ont évalué de façon entièrement analytique l'éq. (38) à l'ordre $1/N$ (et prenant ensuite la valeur $N = 2$ physiquement pertinente), en sommant tout d'abord tous les graphes à cet ordre, et calculant cette somme en régularisation dimensionnelle pour régulariser les divergences infrarouges. Il obtiennent:

$$\Delta \langle \phi^2 \rangle^{(1/N)} = -\frac{N u}{96\pi^2} \quad (40)$$

qui donne immédiatement

$$c_1(1/N, N = 2) = \frac{8\pi}{3} \zeta[3/2]^{-4/3} \simeq 2.32847 \dots \quad (41)$$

Remarquons que malgré la simplicité apparente de la dépendance de l'éq. (40), en fonction du couplage u , il s'agit bien d'un résultat non-perturbatif. Le modèle étant super-renormalisable, le couplage u à la dimension de masse, et par argument dimensionnel $\Delta \langle \phi^2 \rangle$ est proportionnel à u . En contraste, un développement purement perturbatif donne bien évidemment une série en puissances de u , comme on le verra un peu plus loin.

Un calcul similaire a ensuite été fait à l'ordre $1/N^2$ [42], montrant que ces corrections d'ordre supérieur réduisent sensiblement la valeur:

$$c_1(1/N^2, N = 2) \simeq 1.71. \quad (42)$$

En parallèle, des évaluations qui peuvent être considérées comme intrinsèquement non-perturbatives de ces quantités ont été obtenus par simulation numérique Monte-Carlo sur réseaux [43–46]:

$$\begin{aligned} c_1(\text{réseau}) &= 1.29 \pm 0.05; \quad 1.32 \pm 0.02, \\ c_2''(\text{réseau}) &= 75.7 \pm 0.4 \end{aligned} \quad (43)$$

ce qu'on peut considérer donc comme les résultats les plus "exacts" à ce jour.

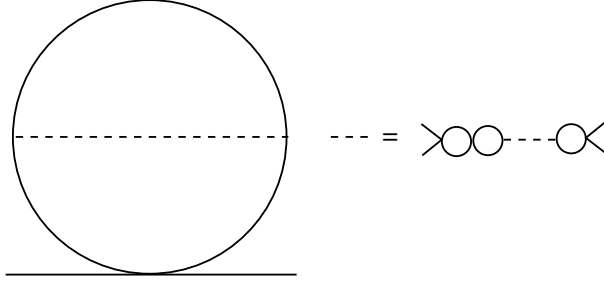


Figure 3: Graphes de Feynman de la contribution type "tadpole" à $r_c = -\Sigma(0)/u^2$ et $\kappa u = \Delta\langle\phi^2\rangle$ à l'ordre sous-dominant $1/N$, avec le propagateur resommé (en lignes pointillées).

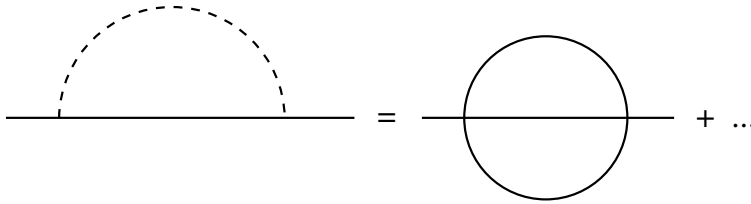


Figure 4: Graphe de Feynman pour l'autre contribution de type "chaîne" à r_c à l'ordre sous-dominant $1/N$.

1.4.3 Calcul perturbatif variationnellement amélioré

On va maintenant discuter notre calcul utilisant la perturbation variationnelle améliorée, avec le but d'aller au-delà si possible des résultats à l'ordre $1/N$ (41) et $1/N^2$ (42). Comme on l'a vu, la théorie scalaire à $D = 3$ est super-renormalisable (le couplage ne se renormalise pas) et donc il n'y a pas de "renormalons" associés aux dépendances logarithmiques comme pour les couplages renormalisés du modèle GN ou en QCD. Le problème du comportement aux grands ordres de la série perturbative est donc très différent, néanmoins les propriétés de convergence de la série du BEC physiquement pertinente ($N = 2$) ne sont pas connues.

Comme discuté dans l'introduction, modifions le Lagrangien de (34) $\mathcal{L}_{BEC}$ en:

$$\mathcal{L}_{BEC}(\delta, m) = \frac{1}{2}|\partial\phi|^2 - \frac{r}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}(1-\delta)m^2\phi^2 + \delta u\phi^4 + \mathcal{L}_{\text{contre-termes}} \quad (44)$$

où δ est le nouveau paramètre de développement, m une masse arbitraire variationnelle. Eq. (44) interpole⁷ entre la théorie libre massive pour $\delta = 0$ et la théorie originale pour $\delta = 1$ (indépendante de m). On développe alors toutes les quantités pertinentes, par ex. $\Delta T_c \sim \Delta\langle\phi^2\rangle$ en puissances de δ , utilisant les règles de Feynman standard après substitution

$$m \rightarrow m (1 - \delta)^{1/2}; \quad u \rightarrow \delta u \quad (45)$$

(ce qui est entièrement cohérent avec la renormalisation lorsqu'on prend soin de traiter de la même façon les contre-termes). Puis on prend la limite $\delta \rightarrow 1$ qui exhibe aux ordres δ finis une dépendance résiduelle en m , et on fixe alors m par une prescription d'optimisation [7]:

$$\frac{\partial}{\partial m} \Delta\langle\phi^2\rangle = 0 \text{ pour } m = m_{opt} . \quad (46)$$

Une remarque importante à ce stade est que déjà le développement (45) a pour effet de régulariser les divergences infrarouges dans les expressions perturbatives, transformant

$$\frac{1}{p^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m^2 (1 - \delta)} \quad (47)$$

pour $\delta \neq 1$. En fait, les divergences infrarouges réapparaîtraient ensuite si on prenait brutalement la limite $m \rightarrow 0$, mais l'optimisation (46) a également pour effet de régulariser la valeur optimale $\Delta\langle\phi^2\rangle_{opt}$. Mieux encore, le fait d'optimiser donne *automatiquement* la bonne dépendance non-perturbative en couplage u : $\Delta\langle\phi^2\rangle_{opt} \propto u$. Toutes ces propriétés sont génériques de la δ -expansion (par exemple pour la série des niveaux d'énergie de l'oscillateur, il est facile de voir qu'à tous les ordres on obtient aussi par optimisation la dépendance non-perturbative correcte: $E_{opt} \propto g^{1/3}$, où g est le couplage perturbatif).

Il est peut-être intéressant de voir d'un peu plus près comment ça fonctionne: se limitant au 2ème ordre, on obtient par exemple [25]:

$$\Delta\langle\phi^2\rangle^{(2)} = -\frac{Nm(1-\delta)^{1/2}}{4\pi} + u\delta K_1\left(-\frac{u\delta N}{m(1-\delta)^{1/2}}\right), \quad (48)$$

où K_1 est le coefficient perturbatif connu. Ce qui donne, développé à l'ordre δ^2 puis $\delta \rightarrow 1$:

$$\Delta\langle\phi^2\rangle^{(2)}(\delta \rightarrow 1) = -\frac{3Nm}{32\pi} - K_1 N \frac{u^2}{m} \quad (49)$$

et enfin l'optimisation (46) donne:

$$\Delta\langle\phi^2\rangle^{(2)}(m_{opt}) = \pm\left(\frac{3K_1}{8\pi}\right)^{1/2} Nu \quad (50)$$

qui (en prenant la solution de bon signe < 0) est en valeur absolue environ 20% au-dessus du résultat exact (40), mais ce n'est que le 1er ordre non-trivial de la méthode. On va voir dans la

⁷Ici la puissance $1/2$ dans $(1-\delta)^{1/2}$ est naturellement dictée par le terme de masse scalaire $\propto m^2\phi^2$, contrairement à l'éq. (2) pour des fermions.

suite que ça converge plutôt bien aux ordres supérieurs.

Ce “développement δ ” est facilement généralisable aux ordres arbitraires et peut être calculé efficacement en pratique à des ordres élevés en utilisant des programmes de calcul algébrique comme *Mathematica* [47]. Dans l’annexe II on donne par exemple la quantité $\Delta\langle\phi^2\rangle$ aux ordres arbitraires δ .

Mais un problème générique de l’optimisation est que la prescription (46) engendre de plus en plus d’optima lorsque l’ordre augmente, de plus un bon nombre de ces solutions optimales sont complexes, puisqu’il s’agit essentiellement de trouver la solution d’une équation polynomiale en m de degré de plus en plus élevé. Ceci requiert alors soit d’autres critères de choix (si on a par exemple des informations sur la nature de la solution exacte) mais reste un handicap sérieux. Un remède possible est de considérer une généralisation du PMS [26]: on introduit des paramètres variationnels arbitraires supplémentaires au fur et à mesure que l’ordre augmente: $a, b_i, i = 1, \dots, k$, de sorte que

$$m \rightarrow m(1 - \delta)^{1/2} [1 + (1 - a)\delta + b_1\delta^2 + \dots + b_i\delta^i]^{1/2}, \quad (51)$$

et on résout $\partial^k \Delta\langle\phi^2\rangle / \partial m^k = 0, k = 1, \dots, i+2$ *simultanément* pour m_{opt}, a, b_i . C’est une prescription un peu empirique (qui au 1er ordre revient simplement à forcer la solution à être réelle grâce à un paramètre supplémentaire). En fait cette approche s’avère reliée aux grands ordres à une autre généralisation du PMS, modifiant elle aussi les relations (45) en y introduisant le comportement, lorsque celui-ci est connu, des exposants critiques dictés par le groupe de renormalisation [48]:

$$m \rightarrow m(1 - \delta)^{1/\omega'}, \quad \omega' = 2\Omega/(2 - \eta) \quad (52)$$

avec $\Omega \equiv \beta'(g_c)$ où g_c est le couplage critique (défini par $\beta(g_c) \equiv 0$), pour la fonction β du GR et η étant la dimension anormale de masse pour le propagateur critique: $\sim 1/p^{2-\eta}$.

Nous avons alors appliqué l’optimisation jusqu’à l’ordre le plus élevé actuellement disponible (7-boucles) pour le cas physique ($N = 2$). D’autre part à l’ordre $1/N$ on a calculé exactement $c_1 \propto \Delta\langle\Phi^2\rangle$ et $r_c \propto -\sum(0)$ (équiv. c_2''), puis comparé à son développement $1/N$ en série perturbative (en couplage ordinaire) aux ordres arbitraires, ce qui nous permettait d’étudier les propriétés éventuelles de convergence de la série modifiée. On compare aussi les différentes méthodes d’optimisation: le PMS standard, éq. (45), PMS généralisé (IPMS), éq. (51), et enfin le PMS “critique” (RGPMs), éq. (52).

Concernant le cas physique $N = 2$, les coefficients de la série perturbative originale pertinente ne sont définis que par le calcul explicite des graphes à un ordre donné. Le calcul avait été fait jusqu’à l’ordre 3, 4 boucles par les auteurs de [49], puis plus récemment jusqu’à l’ordre 6 et 7 boucles pour $\kappa \sim \Delta\langle\phi^2\rangle$ et r_c respectivement, par Kastening [29]:

$$\langle\phi^2\rangle_g^{(6)} = -\frac{Nm}{4\pi} + u \sum_{i=1}^5 K_i \left(-\frac{u}{m}\right)^i,$$

avec $K_1 = 3.22174 \times 10^{-5}$, $K_2 = 1.51792 \times 10^{-6}$, $K_3 = 9.66512 \times 10^{-8}$, $K_4 \simeq 7.51366 \times 10^{-9}$, $K_5 \simeq 6.7493 \times 10^{-10}$. De même pour r_c :

$$r_c^{(7)} = -\Sigma_{\text{ren}}^{(7)}(0) = \frac{u m}{6\pi} + u^2 A_2 \left[\ln \left(\frac{M}{m} \right) + \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{3} \right] + m^2 \sum_{i=3}^7 \left(\frac{-u}{m} \right)^i A_i$$

et on donne les A_i dans notre normalisation dans [31]. A l'ordre $1/N$ on connaît par contre le résultat non-perturbatif exact pour c_1 , éq. (41). Pour r_c , nous avons effectué [31] ce calcul $1/N$ exact *nouveau* en suivant une technique similaire à [30] de resommation des graphes et régularisation dimensionnelle. Ce calcul a été fait au même moment en parallèle par Kastening [50], et nos deux résultats sont en accord complet:

$$r_c^{(N)} = \frac{N}{6} \frac{u^2}{48\pi^2} \left[1 + \ln \left(\frac{48 M}{N u} \right) \right] \quad (53)$$

où M est une échelle arbitraire de renormalisation dans le schéma $\overline{MS}$. Connaissant alors les résultats exacts (41) et (53) l'idée est de redévelopper ces expressions aux ordres perturbatifs arbitraires en u , puis d'appliquer la méthode VIP ordre par ordre pour étudier la convergence éventuelle de la méthode pour ce modèle. Le développement perturbatif de l'expression exacte $1/N$ s'écrit ($m^* \equiv m (1 - \delta)^{1/2}$):

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle_u^{(\delta)} = & -\frac{Nm^*}{4\pi} - \frac{\delta u N}{3} \frac{1}{(8\pi m^*)} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[1 + \frac{\delta u N}{6} B(k, m^*) \right]^{-1} \\ & \times \left[\frac{1}{k^2 + 4m^{*2}} - \frac{1}{k^2 + m^{*2}} \right], \end{aligned} \quad (54)$$

avec la fonction à 2 points massive (la simple "bulle" dans les Figs. 3, 4):

$$B(k, m^*) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[q^2 + m^{*2}] [(k+q)^2 + m^{*2}]} = \frac{1}{4\pi k} \arctan \left(\frac{k}{2m^*} \right)$$

soit encore

$$\langle \phi^2 \rangle_u^{(\delta)} = -\frac{Nm^*}{4\pi} + \delta \frac{u N}{3} \sum_{i=1}^{\infty} J_i \left(-\frac{\delta u N}{6m^*} \right)^i,$$

où on peut évaluer explicitement les intégrales:

$$J_i = \frac{3}{16\pi^3} \left(\frac{1}{8\pi} \right)^i \int_0^\infty dz \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \left[\frac{2}{z} \arctan \frac{z}{2} \right]^i$$

1.4.4 Résultats et comparaison avec les simulations sur réseaux

Les résultats pour c_1 , d'abord à l'ordre $1/N$, obtenus aux différents ordres δ^k du PMS ordinaire (pour lequel on prend parmi toutes les solutions complexes seulement la meilleure) et avec notre

Table 1: PMS généralisé IPMS comparé au PMS ordinaire pour ΔT_c à $1/N$ à différents ordres k .
 $c_1^{1/N, N=2}(\text{exact}) = 2.32847 \dots$

k	$c_{1,IPMS}$	a	$c_{1,PMS}$
2	2.852		2.852
3	2.36771	1.49	$2.444 \pm 0.276I$
4	2.34451	1.53	$2.244 \pm 0.20I$
5	2.33686	1.56	$2.397 \pm 0.079I$
6	2.32847	2.0	$2.333 \pm 0.08I$
7	2.32847	2.0	$2.298 \pm 0.06I$
8	2.32847	2.0	$2.342 \pm 0.04I$
9	2.32847	2.0	$2.324 \pm 0.036I$

méthode généralisée IPMS éq. (51) (où par contre la solution réelle est unique, par construction), sont illustrés sur la Table 1. On remarque qu'à partir du 6ème ordre, on obtient le résultat exact et de plus les valeurs obtenues (numériquement par optimisation) pour les paramètres optimaux IPMS sont: $a = 2, b_i = 0$, ce qui en comparant (51) avec (52) correspond exactement à la valeur connue pour l'exposant critique pour $N \rightarrow \infty$: $\omega' = 1$. Il est donc remarquable que notre méthode d'optimisation assez empirique est capable de deviner ce résultat du groupe de renormalisation. L'avantage étant que notre méthode est immédiatement applicable au cas $N = 2$, pour lequel on ne sait pas grand chose sur la valeur des exposants critiques. (Par contre, dans le cas de l'oscillateur, la généralisation IPMS est numériquement moins performante [26] que la méthode PMS standard, pour des raisons mal comprises).

Pour r_c , toujours à l'ordre $1/N$, on a calculé les erreurs *relatives* (table 2). On voit bien apparaître alors une convergence, l'erreur décroissant selon une loi de puissance: $|\Delta r^I| \sim k^{-P_I}$. Ces résultats sont en très bon accord déjà au 2ème ordre, mais les trois variantes du PMS plus optimisation ont des performances assez différentes [31]: pour le PMS ordinaire (en prenant bien sûr la partie réelle) on a un comportement plutôt irrégulier de l'erreur; pour le PMS généralisé IPMS, une convergence relativement lente mais régulière avec une loi de puissance $|\Delta r^I| \sim k^{-1.3}$ (et une solution réelle unique); et enfin pour le PMS critique RGPMs, une convergence rapide et régulière $|\Delta r^I| \sim k^{-3}$. Mais on a vu que celle-ci nécessite une connaissance supplémentaire sur la valeur de l'exposant critique ω' . On sait que $\omega'(N \rightarrow \infty) = 1$, mais pour $N = 2$ ce n'est pas connu.

Dans les Tables 3 et 4 enfin, on compare les résultats pour les coefficient c_1 et c_2'' (ou r_c) pour le cas physique $N = 2$, obtenus avec le PMS ordinaire et avec notre PMS généralisé. On voit que le résultat du PMS ordinaire pour c_1 , Tab. 3, est instable, de plus les solutions optimales sont toutes complexes et leurs parties imaginaires sont beaucoup plus grandes que dans le cas $1/N$, ce qui est embarrassant même si on prend la partie réelle (la température est évidemment réelle). Le comportement pour r_c , Tab. 4, est un peu meilleur. En revanche, notre méthode donne non

Table 2: erreurs relatives aux ordres successifs $\delta^k \Delta r_c^I \equiv (r_c^I - r_c^{\text{exc}})/r_c^{\text{exc}}$, à l'ordre $1/N$, pour le PMS amélioré (IPMS), ordinaire (PMS) et critique (RGPMs). $r_c^{\text{exc}}(1/N, N = 2) = (1 + 6 \ln 2) u^2 / (288\pi^2) \simeq 0.001814945 \dots u^2$

k	$\Delta r_c^{\text{exc}, IPMS}$	a	$\Delta r_c^{\text{exc}, \text{best } PMS}$	$\Delta r_c^{\text{exc}, \text{best } RGPMS} (\omega' = 1)$
2	0.137		0.137	
3	0.0165	1.43	$0.0165 \pm 3.9 \cdot 10^{-2} I$	0.0076
4	0.0108	1.43	$-0.0031 \pm 1.90 \cdot 10^{-2} I, 0.023$	0.0027
5	0.0081	1.49	$-0.0033 \pm 8.7 \cdot 10^{-3} I$	$0.0014 \pm 3.9 \cdot 10^{-4} I, 0.0031$
6	0.0066	1.53	$-0.00084 \pm 4.8 \cdot 10^{-3} I, 0.012$	0.00075, 0.0025
7	0.0056	1.57	$0.0013 \pm 3.7 \cdot 10^{-3} I$	$0.00048 \pm 1.2 \cdot 10^{-4} I, 0.00218$
8	0.0049	1.60	$0.0027 \pm 3.7 \cdot 10^{-3} I, 0.0084$	0.00032, 0.00197
9	0.0043	1.63	$0.0027 \pm 5.9 \cdot 10^{-3} I$	$0.00023 \pm 5.2 \cdot 10^{-5} I, 0.00182$
10	0.0039	1.65	$0.0026 \pm 5.5 \cdot 10^{-3} I, 0.0067$	0.00017, 0.00171
11	0.0035	1.67	$0.0027 \pm 5.3 \cdot 10^{-3} I$	$0.00013 \pm 2.6 \cdot 10^{-5} I, 0.00162$
12	0.0032	1.69	$0.0027 \pm 5.2 \cdot 10^{-3} I, 0.0057$	0.00010, 0.00155
20			$0.0015 \pm 5.6 \cdot 10^{-3} I, 0.0038$	$2.0 \cdot 10^{-5} \pm 7.5 \cdot 10^{-5} I, 0.00130$

seulement des solutions réelles uniques à un ordre k donné, mais en accord remarquable avec les résultats de simulation sur réseau. Signalons aussi que ces résultats $N = 2$ sont en excellent accord avec une analyse via la “ δ -expansion critique”, suivant l’éq. (52), faite en parallèle [50].

Table 3: Résultats du PMS généralisé (IPMS) comparés au PMS ordinaire (PMS) pour c_1 à $N = 2$ pour différents ordres k . Les résultats de réseau sont $c_1 = 1.29 \pm 0.05, 1.32 \pm 0.02$.

k	$c_{1, IPMS}$	a	$c_{1, PMS}$
2	3.06		3.06
3	0.98	1.95	$2.45 \pm 1.66 I$
4	1.426	2.81	$1.53 \pm 2.32 I$
5	1.247	2.75	$0.76 \pm 2.53 I$
6	1.300	2.83	$2.40 \pm 1.69 I$

En conclusion, nos calculs de la température critique BEC illustrent dans un cadre nouveau et non-trivial les bonnes performances de la perturbation variationnellement améliorée. On a vu comment différentes variantes de la méthode standard amélioreraient encore ces résultats et supprimeraient largement les solutions multiples d’optimisation. Dans le cas particulier $1/N$, les propriétés de convergence sont mises en évidence, et dans le cas physique $N = 2$, la méthode donne les meilleurs résultats non-perturbatifs à ce jour, comparés aux résultats très fiables de simulation sur

Table 4: Résultats du PMS généralisé ($IPMS$) comparés au PMS ordinaire (PMS) pour r_c ($N = 2$) pour différents ordres k , et résultats correspondants pour c_2'' . $r_c^{\text{réseau}}/u^2 = 0.0019201 \pm 0.0000021$; $c_2''(\text{réseau}) = 75.7 \pm 0.4$

k	r_c^{IPMS}/u^2	$c_2''(IPMS)$	a	$r_c^{best PMS}/u^2$
2	0.00315	101.2		0.00315
3	0.001828	69.85	1.77	$0.00215 \pm 7.8 \cdot 10^{-4}I$
4	0.0018988	78.31	2.02	0.00247
5	0.0018992	74.44	2.116	$0.00226 \pm 3.3 \cdot 10^{-4}I$
6	0.0019034	75.51	2.183	$0.00205 \pm 4.5 \cdot 10^{-4}I$
7	0.0019026		2.237	$0.001887 \pm 2.0 \cdot 10^{-4}I$

réseau. On signale enfin que le même accord excellent entre nos résultats et ceux de simulations sur réseau est obtenu pour les cas $N \neq 2$ fini [26].

2 Deuxième partie: Modèle Supersymétrique Standard Minimal, contraintes actuelles et perspectives pour les collisionneurs

2.1 Introduction et résumé de quelques activités choisies

Dans cette introduction on rappelle très brièvement quelques motivations générales pour la supersymétrie, puis on résume quelques activités personnelles assez récentes liées à la phénoménologie de la supersymétrie, dont certaines seront développées plus en détail dans les sections suivantes.

Les théories supersymétriques (SUSY) [51] sont actuellement les extensions du modèle standard (MS) les plus étudiés, car elles constituent une façon élégante de stabiliser la grande hiérarchie entre les échelles de grande unification (GUT) et électrofaible et de supprimer les divergences quadratiques dans les corrections radiatives à la masse du Higgs. L'extension du MS à basse énergie la plus économique, le Modèle Standard Supersymétrique Minimal [52–54] (MSSM), fournit de plus une unification cohérente des couplages de jauge, un mécanisme élégant de brisure *radiative* de la symétrie électrofaible, *et* une solution naturelle au problème de la matière noire [55]. En conséquence la recherche de particules supersymétriques et d'un spectre de Higgs étendu (comme prédit par le MSSM) est devenu un objectif principal pour les collisionneurs présents et futurs [56].

Étant donné ces motivations théoriques, notamment dans le cadre du MSSM, rappelons cependant que la principale difficulté actuelle de la supersymétrie est due à la relative ignorance du mécanisme fondamental qui doit être à l'origine de la brisure, probablement dynamique, de la supersymétrie. Il en résulte la prolifération des paramètres arbitraires du MSSM, puisqu'en l'absence de modèles on doit admettre dans un Lagrangien général tous les termes de brisure dite "douce", c'est-à-dire n'invalidant pas la stabilité des masses des particules physiques par rapport aux corrections radiatives. Dans cette situation il faut essayer pourtant d'obtenir des prédictions précises pour la comparaison avec les mesures expérimentales actuelles et dans un proche avenir, avec des outils de simulations et d'analyses pour les expériences du LEP, Tevatron, ou prévues au LHC et LC dans l'avenir plus ou moins proche.

2.1.1 Code de calcul du spectre MSSM

J'ai écrit depuis plusieurs années un programme de simulation assez complet pour le calcul du spectre du MSSM et de ses propriétés diverses, en collaboration avec Abdelhak Djouadi et Gilbert Moutaka. Ce code public ⁸ fortran "**SuSpect**" (pour "supersymmetric spectrum") [57], donne le spectre (masses physiques, couplages, etc) du MSSM pour différents modèles de brisure douce avec d'autres particularités (notamment l'évolution des paramètres par le groupe de renormalisation, la prise en compte des contraintes de brisure de symétrie électrofaible, assez non-triviales dans le MSSM, et les corrections radiatives aux masses des particules supersymétriques). Au cours des trois-quatre dernières années nous avons largement amélioré et complété le code (incorporant

⁸Le code peut être téléchargé sur le site web: www.lpta.univ-montp2.fr/~kneur/Suspect.html

par exemple les effets plus précis des corrections radiatives aux particules supersymétriques) et en incluant notamment un calcul beaucoup plus précis de la masse des Higgs (incluant les corrections radiatives à l'ordre de deux boucles, en collaboration avec Pietro Slavich), et aussi en incorporant la possibilité de traiter simplement d'autres modèles de brisure de supersymétrie. Concernant les masses des Higgs nous avons inclus les résultats analytiques disponibles les plus récents sur les corrections radiatives à 2 boucles [58]. Nous pouvons ainsi disposer d'un des codes les plus à jour concernant l'évaluation de la masse des Higgs et des partenaires supersymétriques dans le cadre de divers modèles populaires de brisure de supersymétrie. D'autre part dans un travail assez récent [59] nous avons fait une étude détaillée et une revue espérée assez complète sur ces prédictions de la masse des Higgs supersymétriques [60] dans le MSSM général ou bien dans des modèles supersymétriques plus contraints (tels que la supergravité minimale (mSUGRA), ou les modèles de brisure de supersymétrie transmises par interactions de jauge (GMSB) ou anomalie superconforme (AMSB)). On y discute aussi une comparaison utile avec deux autres codes publics similaires: Softsusy et Spheno. SuSpect est également interfacé avec des codes générateurs d'événements (SPYTHIA, HERWIG, etc) ou bien avec les codes de calculs de densité relique de matière noire supersymétrique (neutralino LSP) (DarkSUSY, micrOMEGAs, etc).

2.1.2 Contraintes théoriques, cosmologiques et expérimentales sur le modèle de supergravité minimal

Une étude s'appuyant largement sur SuSpect sur laquelle je mettrai l'accent dans cette synthèse est une analyse assez complète des contraintes théoriques, cosmologiques et expérimentales sur le modèle dit de "supergravité minimal". On a refait très récemment [61] une mise à jour d'une analyse [62] précédente en collaboration avec Abdelhak Djouadi et Manuel Drees. Nous y faisons le point sur les contraintes existantes sur ce modèle le plus simple de MSSM contraint, le modèle minimal de supergravité (mSUGRA). Nous avons joint au calcul du spectre le calcul de toutes les contributions possibles à la densité relique de matière noire dans l'univers, $\Omega_\chi h^2$, en gros inversement proportionnelle à la section efficace pour différents processus d'annihilations de neutralinos (ou bien de co-annihilation du neutralino avec d'autres particules) si le neutralino le plus léger, stable dans le MSSM à R-parité conservée, est la contribution dominante à la matière noire non-baryonique. Faisant un balayage ("scan") systématique de l'espace des paramètres mSUGRA, nous avons délimité le domaine des paramètres du modèle encore actuellement permis. On a montré alors que contrairement à quelques idées préconçues assez répandues actuellement, il persiste en fait une très large région de l'espace des paramètres mSUGRA actuellement non contrainte et cela même lorsqu'on tient compte des contraintes pourtant drastiques de WMAP sur $\Omega_\chi h^2$. En fait, notre étude n'est pas en contradiction avec d'autres analyses similaires récentes, mais on peut remarquer que la plupart de ces analyses (y compris la notre d'ailleurs) donnent ces contraintes sous la forme de "surfaces permises" par les contraintes actuelles dans l'espace $(m_{1/2}, m_0)$, mais pour des valeurs fixées des autres paramètres ($\tan \beta$, A_0 , et m_{top}). Or, la "taille" de ces surfaces, apparemment petite, n'a pas une signification quantitative précise, si on tient compte de l'indétermination sur les autres paramètres $\tan \beta$, A_0 , et aussi de l'incertitude expérimentale encore importante sur la

masse du quark top. Plus précisément, notre étude donne ces contraintes plutôt en terme de *bornes inférieures* sur toutes les masses physiques, et on en déduit alors que WMAP ne donne (pratiquement) aucune contrainte supplémentaire par rapport aux bornes inférieures expérimentales directes du LEP/Tevatron sur ces masses des particules supersymétriques.

Certaines régions permises correspondent alors évidemment à la production énergétiquement très favorable de particules supersymétriques au LHC (voire au Tevatron) et au futur collisionneur linéaire e^+e^- . D'ailleurs pour la thèse de Nada Sahoury, on travaille actuellement sur différentes méthodes de reconstruction des paramètres du mSUGRA et MSSM dans ce contexte.

2.1.3 La région d'annihilation de neutralinos au pôle du Higgs léger

D'autre part, dans un papier récent [63] nous avons (re)mis en évidence qu'il existait en fait une cinquième région de l'espace mSUGRA compatible avec WMAP, en plus des quatre régions connues (qui se distinguent par les processus différents par lesquels les neutralinos s'annihilent). Cette région se caractérise par l'annihilation du neutralino le plus léger (la "LSP") par échange virtuel résonnant dans le canal s du Higgs h léger. Cette région "h-pole" apparaît dans une zone très restreinte de l'espace des paramètres mSUGRA, car telle que l'on ait $2m_{\tilde{\chi}_1^0} \lesssim m_h$, et donc l'existence et la "taille" de cette région dépendent assez crucialement des prédictions théoriques précises sur la masse du Higgs, ainsi que de la valeur précise de m_{top} , puisque la masse du Higgs est très sensible à celle-ci via les corrections radiatives. Mais même si cette région est très "petite", elle est très intéressante pour la recherche des sparticles aux futurs collisionneurs car impliquant des bornes *supérieures* assez drastiques sur la masse du LSP (et donc, via les contraintes d'universalité dans mSUGRA, sur les masses du chargino le plus léger et du gluino). De plus des bornes supérieures significatives sur la plupart des sparticles et des Higgs "lourds" sont obtenues dans ce scénario lorsqu'on combine les contraintes WMAP avec les contraintes $g_\mu - 2$.

Cette deuxième partie de synthèse s'organise comme suit: dans la section 2.2 on va rapidement définir et résumer les principaux ingrédients du Lagrangien du MSSM et de ses versions plus contraintes (tels que notamment le modèle de supergravité minimale (mSUGRA)). Ce qui précisera aussi nos diverses conventions. Dans la section 2.3 on résumera brièvement les ingrédients de notre code SuSpect, et on analysera enfin les conséquences des diverses contraintes théoriques et expérimentales actuelles sur le modèle mSUGRA en section 2.4.

2.2 Le MSSM et ses versions plus contraintes

2.2.1 Construction du MSSM

Le MSSM non-contraint, le plus général, est défini ordinairement par les hypothèses suivantes [53, 54]:

(a) *groupe de jauge minimal*: le MSSM est basé sur le groupe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, i.e. la symétrie du MS. La supersymétrie implique alors que les bosons de jauge de spin-1 et leurs partenaires SUSY de spin-1/2, les jauginos (Bino $\tilde{B}$, Winos $\tilde{W}_{1-3}$ et Gluinos $\tilde{G}_{1-8}$), sont dans des supermultiplets "vecteurs".

(b) *Contenu minimal en particules*: On fait l'hypothèse qu'il y a seulement trois générations de quarks et leptons spin-1/2. Les champs chiraux gauches et droits appartiennent à des supermultiplets "chiraux" ainsi que leurs super-partenaires de spin-0, les squarks et sleptons: $\hat{Q}, \hat{u}_R, \hat{d}_R, \hat{L}, \hat{l}_R$. De plus, deux superchamps chiraux $\hat{H}_d, \hat{H}_u$ d'hypercharges -1 and $+1$ respectivement, sont nécessaires pour la compensation des anomalies chirales. Leurs composantes scalaires H_d and H_u , donnent séparément leurs masses aux fermions d'isospin $-1/2$ and $+1/2$, et donnent cinq particules de Higgs physiques après brisure de la symétrie électrofaible: deux bosons h, H CP-pairs, un boson A CP-impair et deux bosons chargés $H^\pm$. Leurs super-partenaires de spin-1/2, les Higgsinos, se mélangent avec les Winos et le Bino, pour donner les états propres de masse "ino": deux charginos $\chi_{1,2}^\pm$ et quatre neutralinos $\chi_{1,2,3,4}^0$.

(c) *Interactions de Yukawa minimales et R-parité conservée*: pour forcer la conservation des nombres leptoniques et baryoniques, on impose une symétrie discrète et multiplicative appelée R-parité [64]. Elle est définie par $R_p = (-1)^{2s+3B+L}$, où L et B sont les nombres leptoniques et baryoniques et s le nombre quantique de spin. Les valeurs sont alors $R_p = +1$ pour les particules ordinaires (fermions, bosons de jauge et Higgs), et $R_p = -1$ pour leurs super-partenaires. En pratique, la conservation de la R-parité a des conséquences importantes pour la phénoménologie: les particules SUSY sont toujours produites par paires, et dans leurs produits de désintégration il y a toujours un nombre impair de particules SUSY; et la particule SUSY la plus légère (LSP) est absolument stable.

Les trois conditions précédentes suffisent pour déterminer complètement un Lagrangien globalement supersymétrique. La partie cinétique du Lagrangien s'obtient en généralisant la notion de dérivée covariante à la supersymétrie [51]. Le superpotentiel le plus général, compatible avec l'invariance de jauge, renormalisable et conservant la R-parité s'écrit:

$$W = \sum_{i,j=gen} -Y_{ij}^u \hat{u}_{Ri} \hat{H}_u \cdot \hat{Q}_j + Y_{ij}^d \hat{d}_{Ri} \hat{H}_d \cdot \hat{Q}_j + Y_{ij}^l \hat{l}_{Ri} \hat{H}_d \cdot \hat{L}_j + \mu \hat{H}_u \cdot \hat{H}_d \quad (55)$$

où le produit entre les doublets $SU(2)_L$ est défini comme $H \cdot Q \equiv \epsilon_{ab} H^a Q^b$ (a, b sont les indices $SU(2)_L$ et $\epsilon_{12} = 1 = -\epsilon_{21}$) et $Y_{ij}^{u,d,l}$ désigne les couplages de Yukawa entre les générations. Les trois premiers termes ne sont rien d'autre qu'une généralisation supersymétrique des interactions de Yukawa du MS^9 , et le dernier terme est un terme de masse de Higgs qui introduit le fameux paramètre (globalement supersymétrique) μ . La partie SUSY du potentiel à l'arbre V_{tree} est la somme des termes dits "F" et "D" [51, 65], les F-termes provenant du superpotentiel via les dérivées par rapport à tous les champs scalaires ϕ_a , $V_F = \sum_a |W^a|^2$, $W^a = \partial W / \partial \phi_a$, et les D-termes correspondent aux symétries $U(1)_Y$, $SU(2)_L$, and $SU(3)_C$ et sont donnés par $V_D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\sum_a g_i \phi_a^* T^i \phi_a)^2$, où T^i et g_i sont les générateurs et couplages des groupes de jauge correspondants.

(d) *Nombre minimal de termes de brisure de SUSY douce*: pour briser la supersymétrie (nécessairement pour la phénoménologie!), tout en empêchant la re-émergence des divergences quadratiques

⁹Noter que les signes des différents termes sont choisis par convention en sorte que les signes des masses de fermions soient ceux du MS après brisure électrofaible.

dans les boucles, seuls certains types de couplages sont autorisés (c'est la définition de la brisure dite "douce" [51]).

2.2.2 Brisure douce de la supersymétrie dans le MSSM

On ajoute donc au Lagrangien SUSY l'ensemble des termes possibles de brisure douce autorisés par les hypothèses précédentes (a)–(c), soit:

- les termes de masse de Gluinos, Winos et Binos:

$$-\mathcal{L}_{\text{gaugino}} = \frac{1}{2} \left[M_1 \tilde{B} \tilde{B} + M_2 \sum_{a=1}^3 \tilde{W}^a \tilde{W}_a + M_3 \sum_{a=1}^8 \tilde{G}^a \tilde{G}_a + \text{h.c.} \right] \quad (56)$$

- les termes de masse des sfermions:

$$-\mathcal{L}_{\text{sfermions}} = \sum_{i=\text{gen}} m_{\tilde{Q}_i}^2 \tilde{Q}_i^\dagger \tilde{Q}_i + m_{\tilde{L}_i}^2 \tilde{L}_i^\dagger \tilde{L}_i + m_{\tilde{u}_i}^2 |\tilde{u}_{Ri}|^2 + m_{\tilde{d}_i}^2 |\tilde{d}_{Ri}|^2 + m_{\tilde{l}_i}^2 |\tilde{l}_{Ri}|^2 \quad (57)$$

- les termes de masse et bilinéaires pour les scalaires de Higgs:

$$-\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = m_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u + m_{H_d}^2 H_d^\dagger H_d + B\mu(H_u \cdot H_d + \text{h.c.}) \quad (58)$$

- enfin, des termes de couplage trlinéaires entre scalaires (sfermions et bosons de Higgs):

$$-\mathcal{L}_{\text{tril.}} = \sum_{i,j=\text{gen}} \left[-A_{ij}^u Y_{ij}^u \tilde{u}_{Ri} H_u \cdot \tilde{Q}_j + A_{ij}^d Y_{ij}^d \tilde{d}_{Ri} H_d \cdot \tilde{Q}_j + A_{ij}^l Y_{ij}^l \tilde{l}_{Ri} H_d \cdot \tilde{L}_j + \text{h.c.} \right] \quad (59)$$

Le potentiel scalaire complet brisant la SUSY est la somme des trois derniers termes:

$$V_{\text{soft}} = -\mathcal{L}_{\text{sfermions}} - \mathcal{L}_{\text{Higgs}} - \mathcal{L}_{\text{tril.}} \quad (60)$$

Cependant, sans contraintes supplémentaires, ce Lagrangien peut mener à des problèmes sévères de courants neutres changeant la saveur (FCNC) et d'une violation de CP de niveau inacceptable [66], ou même encore de minima brisant la couleur et/ou la charge électrique [67], etc. Un MSSM phénoménologiquement plus viable peut alors être défini en faisant les hypothèses supplémentaires suivantes: (i) tous les termes de brisure SUSY douce sont réels et ainsi il n'y a pas de nouvelles sources de violation de CP, en plus de celles venant de la matrice CKM comme dans le MS. (ii) Les matrices de masse des sfermions, et celles des couplages trlinéaires sont toutes diagonales dans l'espace des saveurs, ce qui implique l'absence de FCNC à l'arbre. (iii) l'universalité des premières et secondes générations de sfermions à basse énergie, pour préserver les contraintes sévères provenant du mélange $K^0-\bar{K}^0$, etc.

Ceci conduit alors au fameux MSSM à 22 paramètres "seulement":

$\tan \beta$: le rapport des valeurs moyennes dans le vide (vev) des deux doublets de Higgs.

$m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$: les termes de masse (carré) de Higgs.

M_1, M_2, M_3 : les termes de masse du bino, wino, gluino.

$m_{\tilde{q}}, m_{\tilde{u}_R}, m_{\tilde{d}_R}, m_{\tilde{l}}, m_{\tilde{e}_R}$: les termes de masses de sfermions de 1ère/2de génération.

$m_{\tilde{Q}}, m_{\tilde{t}_R}, m_{\tilde{b}_R}, m_{\tilde{L}}, m_{\tilde{\tau}_R}$: les termes de masses de sfermions de 3ème génération.

A_u, A_d, A_e : les termes trilineaires de 1ère/2de génération.

A_t, A_b, A_τ : les termes trilineaires de 3ème génération.

Pour un choix de ces paramètres du modèle SUSY, encore faut-il que la brisure de la symétrie électrofaible (EWSB) ait lieu à une certaine (basse) énergie. Plus précisément cela donne deux conditions nécessaires de minimisation du potentiel scalaire dans le secteur des deux doublets de Higgs qui, à l'arbre, a la forme

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}} &= \overline{m}_1^2 H_d^\dagger H_d + \overline{m}_2^2 H_u^\dagger H_u + \overline{m}_3^2 (H_u \cdot H_d + \text{h.c.}) \\ &+ \frac{g_1^2 + g_2^2}{8} (H_d^\dagger H_d - H_u^\dagger H_u)^2 + \frac{g_2^2}{2} (H_d^\dagger H_u)(H_u^\dagger H_d), \end{aligned} \quad (61)$$

où on a utilisé les notations: $\overline{m}_1^2 = m_{H_d}^2 + \mu^2$, $\overline{m}_2^2 = m_{H_u}^2 + \mu^2$, $\overline{m}_3^2 = B\mu$ et $\phi_1 \cdot \phi_2 \equiv \phi_1^1 \phi_2^2 - \phi_1^2 \phi_2^1$. On peut alors résoudre les deux équations de minimisation¹⁰ $\partial V_{\text{Higgs}} / \partial H_d^0 = \partial V_{\text{Higgs}} / \partial H_u^0 = 0$ pour μ^2 et $B\mu$:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{1}{2} \left[\tan 2\beta (m_{H_u}^2 \tan \beta - m_{H_d}^2 \cot \beta) - M_Z^2 \right] \\ B\mu &= \frac{1}{2} \sin 2\beta \left[m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 + 2\mu^2 \right] \end{aligned} \quad (62)$$

avec $M_Z^2 = (g_1^2 + g_2^2) \cdot (v_u^2 + v_d^2)/4$ et $\tan \beta = v_u/v_d$ où v_u, v_d sont les vevs des deux champs de Higgs neutres. En première approximation, une brisure électrofaible cohérente n'est possible que si $\mu^2 > 0$ (NB le signe de μ n'est pas déterminé). Donc ceci donne déjà des contraintes théoriques sur l'espace des paramètres, puisque dans un modèle donné tous les choix possibles de valeurs des paramètres ne sont pas toujours compatibles avec ces conditions, comme on l'illustrera dans la suite.

2.2.3 Le MSSM contraint de supergravité minimale (mSUGRA)

Les quelques problèmes du MSSM évoqués précédemment (FCNC etc) sont résolus d'un seul coup si les termes de brisure douce obéissent à des conditions d'*universalité* à une certaine échelle initiale, typiquement l'échelle GUT. Plus théoriquement l'hypothèse sous-jacente est que la brisure de SUSY a lieu dans un secteur "caché", qui communique avec le secteur visible seulement via les interactions gravitationnelles, donc diagonales de saveur etc [68].

A part l'unification des couplages de jauge $g_{1,2,3}$ des symétries U(1), SU(2) et SU(3), bien vérifiée expérimentalement et qui peut être vu comme fixant l'échelle de grande unification $M_{\text{GUT}} \sim 2 \cdot 10^{16}$ GeV [69], les conditions d'universalité du modèle mSUGRA sont:

¹⁰Dans le calcul réel on tient compte dans (61) des corrections complètes à une boucle et (les dominantes seulement) à deux boucles au potentiel effectif.

– universalité des masses de jauginos (Bino, Wino et Gluino):

$$M_1(M_{\text{GUT}}) = M_2(M_{\text{GUT}}) = M_3(M_{\text{GUT}}) \equiv m_{1/2} \quad (63)$$

– universalité des masses de scalaires (sfermions et Higgs) (i est un indice de génération):

$$\begin{aligned} M_{\tilde{Q}_i}(M_{\text{GUT}}) &= M_{\tilde{u}_{Ri}}(M_{\text{GUT}}) = M_{\tilde{d}_{Ri}}(M_{\text{GUT}}) = M_{\tilde{L}_i}(M_{\text{GUT}}) = M_{\tilde{l}_{Ri}}(M_{\text{GUT}}) \\ &= M_{H_u}(M_{\text{GUT}}) = M_{H_d}(M_{\text{GUT}}) \equiv m_0 \end{aligned} \quad (64)$$

– universalité des couplages trilineaires:

$$A_{ij}^u(M_{\text{GUT}}) = A_{ij}^d(M_{\text{GUT}}) = A_{ij}^l(M_{\text{GUT}}) \equiv A_0 \delta_{ij} \quad (65)$$

En plus de ces trois paramètres de brisure douce $m_{1/2}$, m_0 et A_0 , le modèle est décrit à l'échelle GUT par un couplage (brisure douce) bilinéaire B et le terme supersymétrique de Higgs(ino) μ , mais ces deux paramètres sont déterminés par EWSB comme on l'a vu plus haut. Dans le mSUGRA, on a donc seulement quatre paramètres libres continus (plus un signe):

$$\tan \beta, m_{1/2}, m_0, A_0, \text{ signe}(\mu). \quad (66)$$

Tous les termes de brisure SUSY douce pertinents pour le calcul du spectre à l'échelle EWSB sont alors obtenus par évolution par les équations du Groupe de Renormalisation (RGE).

Mentionnons qu'il existe d'autres modèles de MSSM contraints, qui diffèrent du modèle mSUGRA par leurs hypothèses de transmission de la brisure SUSY au secteur visible, et donnent des relations plus ou moins contraintes entre les 22 différents paramètres du MSSM général précédent. Par exemple deux modèles populaires sont le modèle "GMSB" [70], où la brisure de SUSY est transmise aux champs du MSSM par les interactions de jauge du MS; et "AMSB" [71], où les termes de brisure douce sont engendrés à haute énergie par des effets indirects des anomalies (super)conformes de la supergravité.

2.3 Calcul du Spectre du MSSM avec SuSpect

Pour un choix donné de modèle de brisure SUSY, il y a alors essentiellement trois étapes pour calculer le spectre physique final des super-particules, élaborées en détail par exemple dans notre code SuSpect:

i) Evolution par le groupe de renormalisation (RGE) des paramètres, avec des conditions aux limites à haute (GUT) et basses (EWSB, m_Z) échelles d'énergie; Cette évolution "RGE" se fait donc pour les couplages de jauge et Yukawa et pour tous les termes de brisure douce (ainsi que pour $\tan \beta$ et μ bien sûr) à l'ordre deux boucles [72]. Cette procédure est itérée pour inclure les effets de seuils (corrections radiatives etc) jusqu'à obtenir une précision suffisante.

ii) Cohérence de la brisure (radiative) électrofaible, soit le calcul de B et $|\mu|$ dans l'éq. (62). La aussi la procédure est itérée par un algorithme de type "point fixe", les équations (62) étant non-linéaires en μ (car ce paramètre intervient dans la détermination des masses de toutes les

(s)particules, qui contribuent au potentiel effectif sous la forme de “tadpoles” lorsqu’on prend en compte les effets à une et deux boucles).

iii) Calcul des masses pôle des particules SUSY et des bosons de Higgs, ce qui implique des diagonalisations lorsqu’il y a mélange entre les états de courants (c’est le cas pour les Higgs neutres, les charginos, les neutralinos) ainsi que des corrections radiatives, à une, voire deux boucles pour le Higgs [58, 59, 73] lorsque celles-ci sont connues.

L’algorithme général de SuSpect avec quelques détails est illustré en Annexe C.

2.4 Contraintes actualisées sur le modèle mSUGRA

Dans cette section, on va regarder un peu plus en détail les résultats de notre analyse récentes des diverses contraintes sur le modèle mSUGRA. Malgré le succès de ce modèle pour ses vertus théoriques, sa simplicité et son nombre très raisonnable de paramètres, il y a une perception récente selon laquelle le domaine de valeurs de paramètres de ce modèle est de plus en plus restreint par des données expérimentales de plus en plus contraignantes, notamment si on prend en compte les données relativement précises du satellite WMAP [74]. Ces dernières données sur le rayonnement de fond diffus (CMB) se traduisent en contraintes sur l’espace de paramètres mSUGRA lorsqu’on fait l’hypothèse que toute la matière noire est formée par des LSP (neutralinos) qui auraient été en équilibre thermique après la dernière période de production d’entropie (i.e. à la fin de l’ère d’inflation selon la cosmologie “standard”).

A l’inverse, le fait même que le modèle mSUGRA puisse accommoder ces mesures peut aussi être interprété comme un succès du modèle. En tous cas on va re-examiner ici toutes les contraintes de façon exhaustive et à jour avec les derniers développements théoriques et expérimentaux.

2.4.1 Contraintes théoriques sur le MSSM et mSUGRA

Les contraintes théoriques sont essentiellement la réalisation cohérente de la brisure électrofaible (EWSB), éq.(62), ce qui peut déjà éliminer des valeurs extrêmes de paramètres mSUGRA (comme m_0 trop grand typiquement). Dans notre analyse on a aussi pris en compte les contraintes dites “CCB”, c’est-à-dire d’exiger qu’il n’y ait pas de minima plus bas que le minimum EWSB, qui briserait éventuellement la couleur ou la charge électrique. Sous leur forme la plus simple, ces contraintes excluent [67, 75]

$$A_f^2 > 3(m_{\tilde{f}_L}^2 + m_{\tilde{f}_R}^2 + \mu^2 + m_{H_f}^2). \quad (67)$$

où $f = u(d)$ respectivement selon le type de couplage A_f . Dans le modèle mSUGRA, (67) peut exclure des valeurs trop grandes de $|A_0|/(m_0^2 + m_{1/2}^2)^{1/2}$ typiquement.

2.4.2 Contraintes expérimentales par recherches directes

On impose ensuite les bornes inférieures sur les masses de sparticles et Higgs issues des recherches directes aux collisionneurs. On interprète les limites du LEP comme

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \tilde{X}\tilde{X}; \sqrt{s} = 209 \text{ GeV}) < 20 \text{ fb} \quad (68)$$

séparément pour chaque mode pertinent ($\tilde{X} = \tilde{t}_1, \tilde{\tau}_1, \tilde{\chi}_1^+$). En pratique cela donne essentiellement les limites suivantes [76, 77]:

$$m_{\tilde{\chi}_1^+} \gtrsim 104.5 \text{ GeV}$$

$$m_{\tilde{\tau}^\pm} \gtrsim 98 \text{ GeV} (\rightarrow m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q} \neq t, b} \gtrsim 250 \text{ GeV dans le mSUGRA})$$

$$m_{\tilde{t}_1, \tilde{b}_1} \gtrsim 101.5 \text{ GeV}$$

Concernant les bosons de Higgs, une limite importante provient du processus: $e^+e^- \rightarrow ZH$ suivi de $H \rightarrow b\bar{b}$. Dans le MS on obtient la borne [78] $m_H^{\text{SM}} \gtrsim 114 \text{ GeV}$. Pour des valeurs de $\tan \beta$ relativement petites cette borne est valide pour le Higgs léger du mSUGRA, mais pour $\tan \beta \gtrsim 50$ son couplage au Z est très réduit. On paramètre cette dépendance suivant la réf. [62]. On considérera aussi une erreur théorique $\Delta m_h \sim 3 \text{ GeV}$ sur la masse du Higgs léger [59], pour tenir compte de corrections (actuellement pas connues) d'ordres supérieurs et on montre donc dans nos illustrations une zone marginalement acceptable telle que $M_h \gtrsim 111 \text{ GeV}$.

2.4.3 Contraintes expérimentales indirectes

Concernant les données de précision du LEP, la contrainte potentiellement la plus stricte (et qui a "tué" bien des modèles au-delà du MS dans les années passées..) est donnée par les limites [79]:

$$\Delta \rho_{\text{SUSY}} < 2.2 \cdot 10^{-3} \quad (69)$$

sur le paramètre $\Delta \rho \equiv \rho - 1$, qui mesure la brisure de symétrie $SU(2)$ *globale* "custodiale", et qui reçoit des contributions virtuelles SUSY [80] importantes s'il y a des écarts de masses importants dans un même doublet $SU(2)$. Mais ce n'est pas le cas pour le mSUGRA, du moins cette contrainte est toujours "écranée" par les contraintes sur le Higgs léger ou bien par les contraintes CCB.

Une contrainte plus intéressante provient des mesures précises du moment magnétique anormal des muons [81]. Ces dernières années, la différence entre prédiction théorique MS et mesures expérimentales a subi plusieurs rebondissements. En 2001, des résultats expérimentaux plus précis semblèrent établir une déviation de $\sim 2.6\sigma$ avec les prédictions MS, jusqu'à ce qu'une correction [82] dans une contribution du MS supprime largement cette déviation. Cependant, à l'heure actuelle, après les derniers résultats expérimentaux [81], l'interprétation de cette mesure diffère selon qu'on utilise les données de désintégration semi-leptonique du τ pour évaluer la contribution du MS, ou bien si on se base uniquement sur les données d'annihilation e^+e^- en hadrons. Dans le premier cas la mesure est en bon accord avec le MS, tandis que dans le second la prédiction est inférieure de $\sim 2.5\sigma$ à la mesure expérimentale [83]. Dans notre analyse, pour refléter cette incertitude, on considère deux cas, en imposant soit la contrainte conservatrice:

$$-5.7 \cdot 10^{-10} \leq a_{\mu, \text{SUSY}} \leq 4.7 \cdot 10^{-9}, \quad (70)$$

qui combine les deux limites à 2σ des processus MS, soit une contrainte plus agressive:

$$1.06 \cdot 10^{-9} \leq a_{\mu, \text{SUSY}} \leq 4.36 \cdot 10^{-9}, \quad (71)$$

qui est le domaine à 90% c.l. utilisant seulement les données e^+e^- . Dans (70–71) $a_{\mu, \text{SUSY}}$ est la contribution à une boucle des sparticules à $a_\mu \equiv (g_\mu - 2)/2$. A ce jour la prédiction MS basée

sur e^+e^- est généralement considérée plus fiable [83]. Notons que (70) est compatible avec des contributions SUSY nulles, où légèrement négatives, alors que (71) leur impose d’être positives et donne donc des contraintes intéressantes sur SUSY. Notre calcul de $a_{\mu, \text{SUSY}}$ est basé sur [84], soit la contribution à une boucle de charginos + sneutrinos (dominante) et neutralinos + smuons, où l’on inclue aussi des corrections QED de logarithme dominant à 2 boucles [85].

On considère ensuite les contraintes provenant de la désintégration $b \rightarrow s\gamma$: incluant les incertitudes théoriques de la prédiction MS [86] ainsi que les mesures expérimentales [77] (statistiquement dominées par les données BELLE), on demande dans notre analyse que le rapport de branchement soit dans le domaine:

$$2.65 \cdot 10^{-4} \leq B(b \rightarrow s\gamma) \leq 4.45 \cdot 10^{-4}. \quad (72)$$

et on tient également compte des contraintes sur $b \rightarrow sl^+l^-$ [87]. Notre calcul est basé sur la réf. [88], qui inclue les corrections QCD dominantes aux boucles $\tilde{\chi}^\pm \tilde{t}$, qui (ainsi que les boucles $tH^\pm$) dominent les contributions SUSY dans tous les modèles où la violation de saveur est décrite entièrement par la matrice CKM. Pour $\tan\beta$ grand et des sparticules pas trop lourdes, ces contributions peuvent être assez grandes, ce qui contraint pas mal le modèle. On peut éventuellement discuter notre choix des limites de (72), ici plutôt conservatrices, étant donné les erreurs théoriques encore existantes. Néanmoins cette contrainte peut s’évaporer si on autorise un mélange $\tilde{b} - \tilde{s}$ même faible à l’échelle GUT [89]. Comme dans le cas de stricte universalité, toutes les contributions sont supprimées par un facteur $|V_{ts}| \simeq 0.04$, même un faible mélange $\tilde{b} - \tilde{s}$ conduirait à de nouvelles contributions de valeur comparable à (72). En conséquence, on présentera nos limites sur le modèle soit avec, soit sans la contrainte (72).

2.4.4 Contraintes expérimentales cosmologiques du CMB

La dernière contrainte, imposée dans de nombreuses analyses similaires [62, 90], est basée sur la détermination de la densité de matière noire (DM) non-baryonique à partir de l’analyse détaillée des anisotropies du fond de rayonnement cosmique (CMB), notamment par l’expérience WMAP [74]. A 99% c.l., elle donne:

$$0.087 \leq \Omega_{\text{DM}} h^2 \leq 0.138 \quad (73)$$

où Ω mesure la densité de masse (ou d’énergie) en unités de la densité critique, et h est la constante de Hubble (ré-échelonnée).

2.4.5 Calcul de la densité relique de neutralinos

Bien que maintenant standard, il est peut-être utile d’explicitier un peu les ingrédients du calcul de cette densité relique. On fait l’hypothèse standard, comme mentionnées dans l’introduction, que la LSP découple du bain thermique de particules du MS à une température ré-échelonnée inverse: $x_F \equiv m_{\tilde{\chi}_1^0}/T_F$ donnée par [55, 91]

$$x_F = \ln \left[\frac{0.38 M_{Pl} \langle v \sigma_{\text{ann}} \rangle c(c+2) m_{\tilde{\chi}_1^0}}{\sqrt{g_* x_F}} \right], \quad (74)$$

où v est la vélocité relative des LSP dans leur référentiel du centre de masse, σ_{ann} la section efficace d’annihilation de LSP en particules du MS, $\langle \dots \rangle$ la moyenne thermique, $M_{Pl} = 2.4 \cdot 10^{18}$ GeV la masse de Planck (réduite), g_* le nombre de degrés de liberté relativistes (typiquement, $g_* \simeq 80$ à T_F), et c une constante, qu’on prend égale à 0.5. On trouve typiquement $x_F \simeq 20\text{--}25$. La densité de LSP “aujourd’hui” en unités de densité critique est alors donné par [55, 91]

$$\Omega_{\tilde{\chi}_1^0} h^2 = \frac{2.13 \cdot 10^8 / \text{GeV}}{\sqrt{g_*} M_{Pl} J(x_F)}, \quad (75)$$

où l’intégrale d’annihilation J est définie par

$$J(x_F) = \int_{x_F}^{\infty} \frac{\langle v \sigma_{\text{ann}} \rangle(x)}{x^2} dx. \quad (76)$$

h dans l’éq. (75) est la constante de Hubble actuelle en unités de 100 km/(sec·Mpc). Eqs. (74)–(76) constituent une solution approchée de l’équation de Boltzmann mais qui décrit de façon très précise la solution numérique exacte pour tous les scénarios connus.

Comme les neutralinos découplent à une température $T_F \ll m_{\tilde{\chi}_1^0}$, dans la plupart des cas il suffit d’utiliser un développement de la section efficace d’annihilation des LSP en puissance de la vélocité relative entre LSPs:

$$v \sigma_{\text{ann}} \equiv v \sigma(\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow \text{particules MS}) = a + bv^2 + \mathcal{O}(v^4). \quad (77)$$

La dépendance dans les paramètres du modèle est intégralement contenue dans les coefficients a et b , qui décrivent la section d’annihilation de LSP d’état initial onde S et P, respectivement. Le calcul de la moyenne thermique sur la section d’annihilation, et de l’intégrale éq. (76), est alors trivial, donnant une solution presque complètement analytique de Ω (L’éq. (74) doit encore être résolu itérativement mais ça converge très vite). Les expressions pour les termes a et b pour tous les états finals à deux corps sont collectés dans [92]. Dans ces expressions, on utilise bien sûr le spectre de Higgs corrigé à une et deux boucles. Dans la plupart des scénarios le développement éq. (77) reproduit les résultats exacts à quelque pour cent près, qui est suffisant pour notre propos¹¹. Par contre, il est bien connu [93] que ce développement est invalide dans certains cas, qui sont réalisés pour certaines valeurs de l’espace des paramètres:

- si la différence de masse entre la LSP et la plus légère suivante (NLSP) est inférieure à T_F , les processus de co-annihilation impliquant une LSP et une NLSP, ou deux NLSPs, peuvent être importants. On peut le traiter en utilisant le même formalisme eqs. (74)–(77) en remplaçant la section d’annihilation par une somme pondérée des différents termes d’annihilation et co-annihilation. Par exemple la co-annihilation avec un $\tilde{\tau}_1$ est importante près de la zone où $m_{\tilde{\tau}_1} \gtrsim m_{\tilde{\chi}_1^0}$. La co-annihilation avec des Higgsinos peut être importante dans la région “focus point” $m_0^2 \gg m_{1/2}^2$.

- Le développement éq. (77) est invalide aussi près du seuil de production de particules lourdes car dans ce cas la section efficace dépend sensiblement de l’énergie du centre de masse $\sqrt{s}$. Par

¹¹ Sachant que la plupart des processus d’annihilation éq. (77) ne sont actuellement connus qu’à l’approximation de Born

exemple l'énergie cinétique non-nulle des neutralinos rend possible l'annihilation en états finals de masse légèrement au-dessus de deux fois la masse du LSP, typiquement des paires $W^+ W^-$ et hh ("annihilation sous le seuil"). Dans ces cas l'intégrale (76) est calculée numériquement.

– L'eq. (77) n'est également plus valide proche de pôles dans le canal s , puisque là encore la section efficace varie rapidement avec $\sqrt{s}$. Dans le MSSM cela arrive lorsque le double de la masse LSP est par exemple proche de la masse d'un des Higgs neutres. Dans ce cas on calcule aussi l'intégrale numériquement. Notons que nous utilisons notre propre code de calcul complet de la densité relique, élaboré en grande partie par M. Drees, mais il existe maintenant plusieurs codes publics incluant également tous ces processus, notamment MicrOMEGAs [94] avec lequel on peut comparer nos résultats [95].

La nature de la LSP, qui est une combinaison linéaire du Bino, Wino et des Higgsinos:

$$\tilde{\chi}_1^0 = Z_{11}\tilde{B} + Z_{12}\tilde{W} + Z_{13}\tilde{H}_d + Z_{14}\tilde{H}_u \quad (78)$$

influence fortement le type de processus d'annihilation (ou co-annihilation) des neutralinos qui sera dominant. On distingue en général quatre zones distinctes, selon le processus d'annihilation en jeu, qu'on discutera plus en détail dans les illustrations section suivante.

On indique aussi dans notre analyse la zone compatible avec un Higgs léger qui aurait été "aperçu" au LEP [78], avec $M_h \simeq 115$ GeV. Plus précisément, on indique les régions de l'espace des paramètres telles que:

$$114 \text{ GeV} < M_h < 117 \text{ GeV} \quad (79)$$

Finalement, un point important est l'impact sur toutes ces contraintes de la dernière valeur expérimentale à jour de la masse du quark top [96]. On prend:

$$167 \text{ GeV} < m_t < 178 \text{ GeV}, \quad (80)$$

correspondant à une variation de 2 sigmas autour de la nouvelle valeur centrale $m_t \simeq 172.7$ GeV.

2.4.6 Résultats du balayage de l'espace des paramètres mSUGRA

Des exemples de balayage (scans) dans le plan $(m_0, m_{1/2})$ sont illustrés sur les Figs. 5 et suivantes. Figs. 5 et 6 représentent notre choix basique, $m_t = 172.7$ GeV $A_0 = 0$ et $\mu > 0$. On peut faire quelques commentaires utiles rapides sur ces illustrations (voir réf. [61] pour une analyse détaillée):

–tout d'abord on voit que les limites sur le Higgs sont très sévères pour de petites ou moyennes valeurs de $\tan \beta$, et/ou pour de plus petites valeurs de m_t . Par exemple, pour $m_t = 172.7$ GeV, $\tan \beta = 5$ et $A_0 = 0$ (Fig. 6) on a $m_{1/2} \gtrsim 0.6$ TeV pour m_0 petit, ou bien $m_0 \gtrsim 2$ TeV pour $m_{1/2}$ petit. Au début la région exclue par le Higgs rétrécit rapidement lorsque $\tan \beta$ augmente, mais elle devient pratiquement indépendante de ce paramètre lorsque $\tan \beta \gtrsim 20$. C'est essentiellement dû à la dépendance de la masse du Higgs léger en $\tan \beta$ déjà à l'arbre, qui devient de plus en plus "plate" pour $\tan \beta \gg 1$.

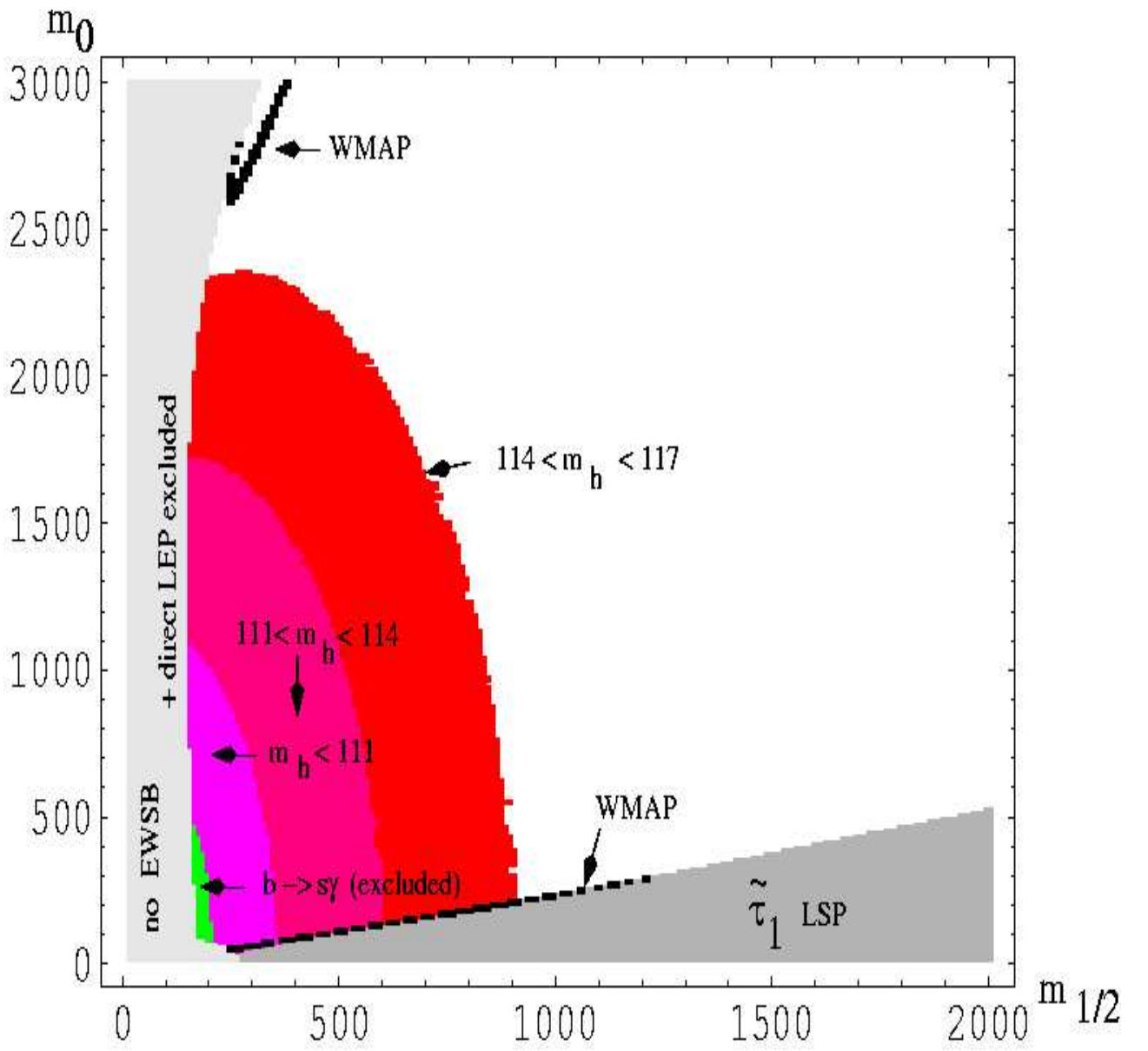


Figure 5: Le plan $mSUGRA$ ($m_{1/2}, m_0$) avec toutes les contraintes imposées pour $A_0 = 0, \mu > 0$ et $\tan \beta = 10$. La masse du quark top est fixée à sa nouvelle valeur centrale, $m_t = 172.7 \text{ GeV}$. Les régions en gris clair sont exclus par la cohérence de la brisure électrofaible, et/ou par les limites directes sur les sparticules. Dans les régions en gris foncé, $\tilde{\tau}_1$ serait la LSP. Les régions en violet (rose) sont exclues par les recherches sur le Higgs neutre au LEP, les régions en vert sont exclues par la contrainte sur $b \rightarrow s\gamma$ (72). Dans les régions en bleu (non visible ici, voir figures suivantes) la contribution SUSY au $g_\mu - 2$ est dans le domaine (71), et les régions en rouge sont compatibles avec un Higgs de 114–116 GeV. Finalement, les régions en noir satisfont la contrainte DM (73).

-Les régions exclues par $b \rightarrow s\gamma$ (en vert) montrent une dépendance opposée en $\tan \beta$, de-

venant plus importantes quand ce paramètre augmente. Il est connu en effet que augmenter $\tan \beta$ tend à augmenter les contributions SUSY à cette quantité, en retardant le découplage des sparticules pour des masses pas trop élevées de stops notamment.

-Les régions exclues en gris augmentent également avec $\tan \beta$. L'exigence d'une brisure électrofaible cohérente exclue une aire augmentante à $m_0^2 \gg m_{1/2}^2$. Cela est dû principalement au fait que varier $\tan \beta$ change beaucoup les couplages de Yukawa du top et bottom, qui interviennent quadratiquement dans les RGE des paramètres $m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$ (avec une évolution sur ~ 15 ordres de grandeur), qui à leur tour déterminent essentiellement $|\mu|$ via les conditions EWSB (62). Pour une valeur très grande de $\tan \beta = 58$ (Fig. 6), cette région exclue couvre presque tout l'espace des paramètres, du au couplage de Yukawa du bottom devenant très grand.

—On peut voir enfin sur les diverse figures, suivant la valeur de $\tan \beta$, apparaître les régions en noir où la densité relique satisfait la contrainte WMAP [74]. Il est traditionnel de distinguer quatre telles régions en fonction du processus de (co)–annihilation dominant:

1) la région dite “bulk”, pour petits $m_0, m_{1/2}$, où la LSP est essentiellement Bino et le processus dominant est l'annihilation en paires de fermions via l'échange de sleptons légers dans les canaux t et u . Cette zone est cependant souvent à la limite des exclusions actuelles: une région “bulk” encore compatible avec toutes les contraintes actuelles existe pour $m_t = 178$ GeV et (suffisamment) grand $\tan \beta$ (encore en étant pas trop exigeant avec $b \rightarrow s\gamma$, voir discussion précédente).

2) La région de co-annihilation $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\tau}_1$, qui donne une bande encore autorisée plutôt étroite, et toujours toute proche bien sûr de la zone “ $\tilde{\tau}_1$ LSP”. Notons que dans cette région Ωh^2 est très sensible à la différence des masses du $\tilde{\tau}_1$ et la LSP, et donc très sensible [95] aux valeurs précises de ces masses prédites par les différents codes de calcul du spectre suivant le degré d'approximations utilisées. Il faut donc pouvoir déterminer ces masses avec la meilleure précision théorique possible. Cependant, même si la valeur précise de Ωh^2 pour un point dans l'espace des paramètres mSUGRA peut donc varier notablement pour des valeurs légèrement différentes des masses de $\tilde{\tau}_1$ et de la LSP, ça ne changera pas sensiblement nos conclusions sur les contraintes sur ces masses, une fois qu'on fait un balayage systématique de l'espace des paramètres.

3) La région dite “focus”, pour grand $m_0 \gg m_{1/2}$, où une densité relique de l'ordre des valeurs WMAP est obtenue pour une LSP de composante Bino généralement dominante, mais aussi de composante Higgsino assez importante (notamment près de la région exclue par la brisure électrofaible, où $|\mu|$ est donc petit) de sorte que les processus de co-annihilation LSP–NLSP, soit χ_1^0 avec χ_2^0 et/ou $\chi_1^\pm$, contribuent aussi de façon non négligeable à la densité relique.

4) Enfin la région d'annihilation résonante en canal s du pôle du pseudoscalaire A : même pour les limites drastiques (73), notons que cette région peut encore être proéminente, à grand $\tan \beta$ et/ou m_t suffisamment petit, voir Figs. 6–8. En effet un m_t réduit rend plus facile de trouver

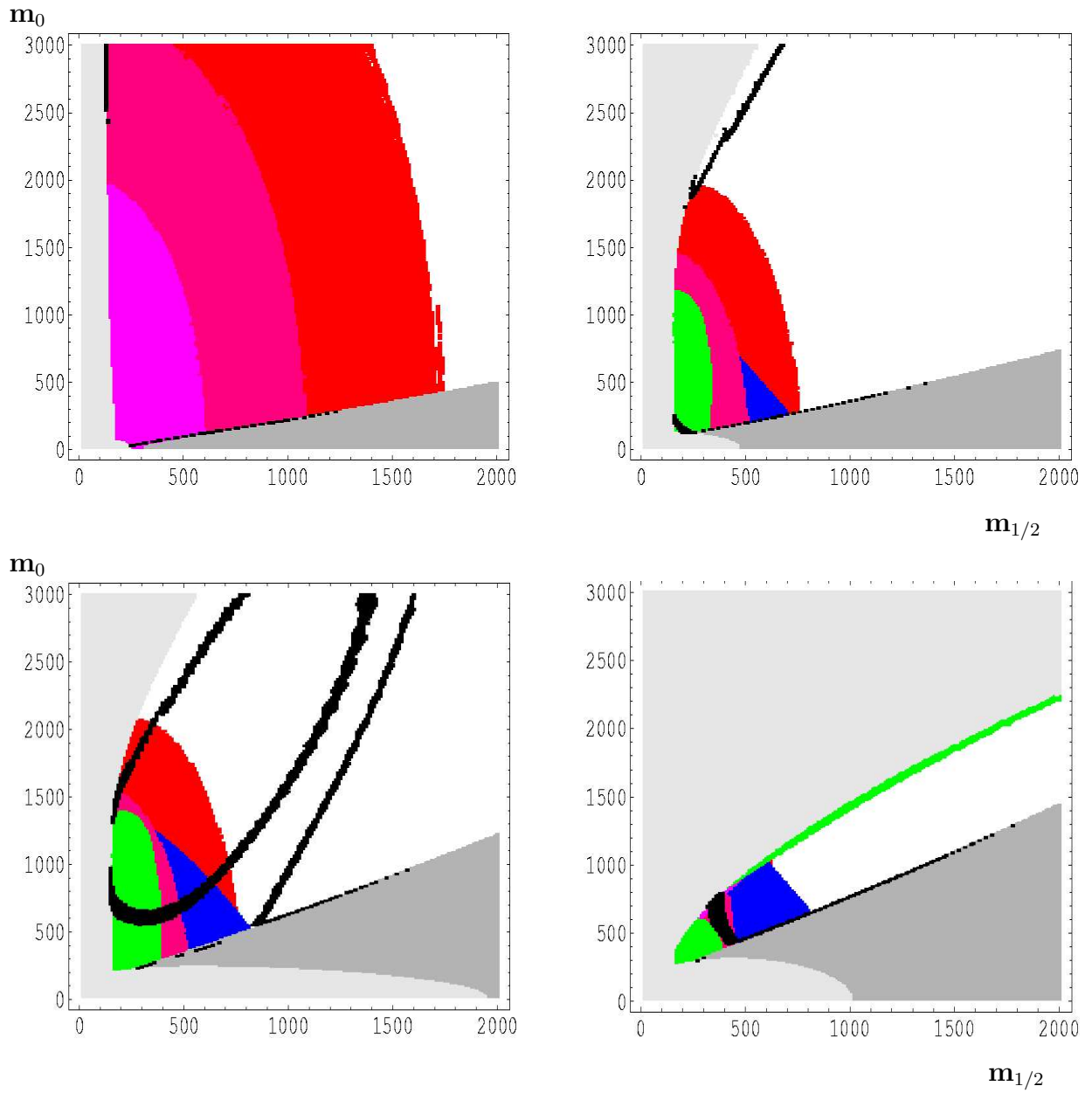


Figure 6: $A_0 = 0$, $\tan \beta = 5$ (en haut à gauche), 30 (en haut à droite), 50 (en bas à gauche) et 58 (en bas à droite). $m_t = 173$ GeV. Notations et conventions comme sur la Fig. 5.

des solutions avec $m_A \simeq 2m_{\tilde{\chi}_1^0}$, se rappelant que μ^2 contribue positivement à m_A^2 . Cette région augmente pour un m_t réduit car $|\mu|$ plus petit signifie aussi un mélange jaugino–higgsino plus important et donc un couplage $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 A$ plus fort. Là encore, cette zone déterminé par la résonance au pôle du A , est très sensible à la différence de masse $m_A \simeq 2m_{\tilde{\chi}_1^0}$ et donc aux valeurs précises de ces masses [95].

D'autre part, sur la fig 9, sur laquelle on a “zoomé” substantiellement en $m_{1/2}$ et fait varier

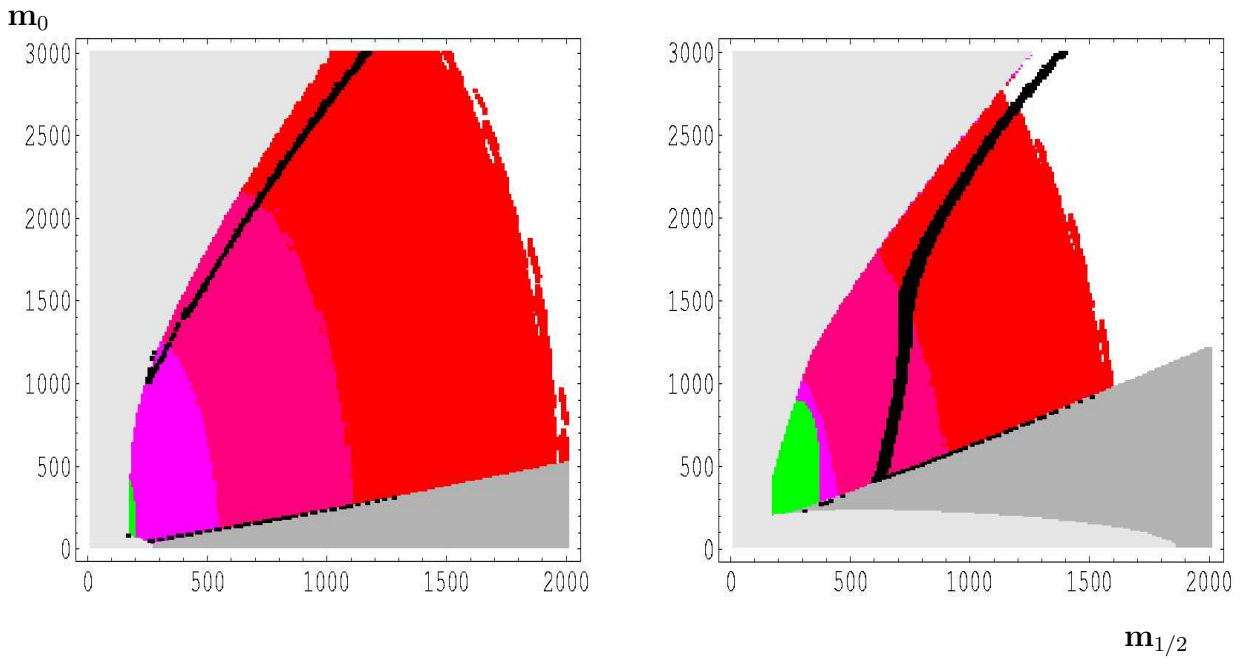


Figure 7: *L'espace de paramètres mSUGRA $(m_{1/2}, m_0)$ avec toutes les contraintes imposées pour $A_0 = 0, \mu > 0$ et les valeurs $\tan \beta = 10$ (à gauche) et 50 (à droite). La masse du quark top est fixée à $m_t = 166.9 \text{ GeV}$. Notations et conventions comme sur la Fig. 5.*

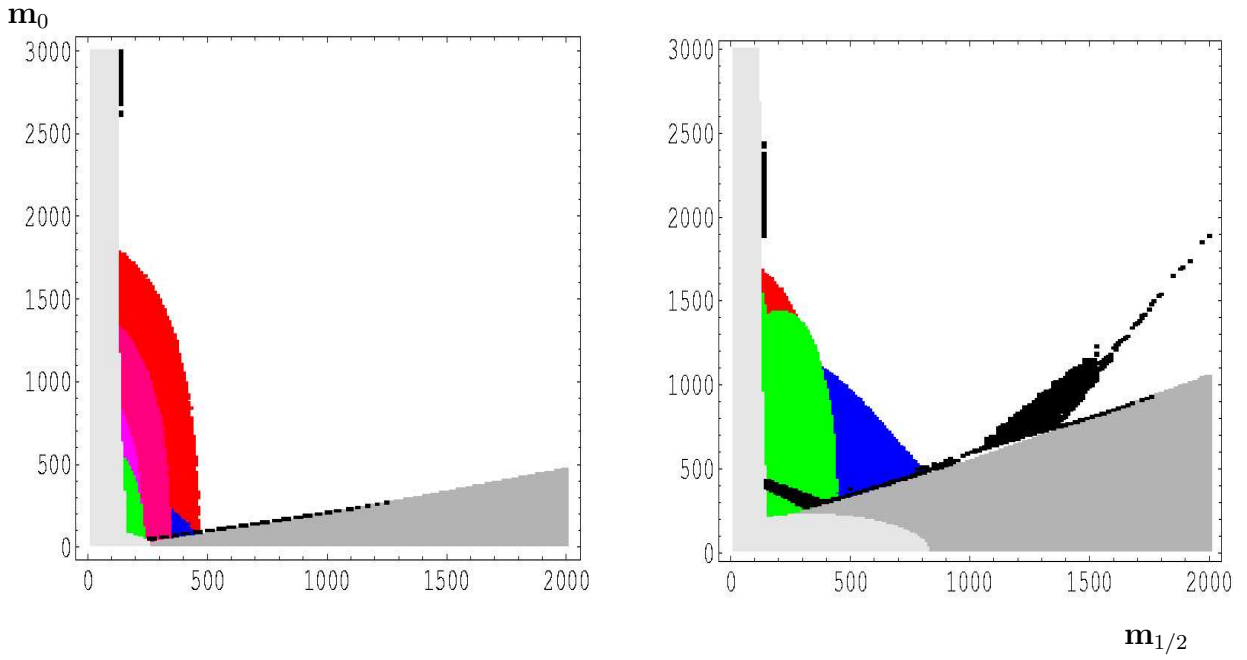


Figure 8: *L'espace de paramètres mSUGRA $(m_{1/2}, m_0)$ avec toutes les contraintes imposées pour $A_0 = 0, \mu > 0$ et les valeurs $\tan \beta = 10$ (à gauche) et 50 (à droite). La masse du quark top est fixée à $m_t = 178 \text{ GeV}$. Notations et conventions comme sur la Fig. 5.*

A_0 , on peut voir la zone d'annihilation résonante via le Higgs léger $\tilde{\chi}_1^0 \tilde{\chi}_1^0 \rightarrow h \rightarrow \dots$: cette 5ème région est en fait très limitée à présent par la nouvelle valeur expérimentale de m_t à la baisse [96]: elle n'existe pratiquement que pour $m_t \gtrsim 174$ GeV, et encore pour des valeurs plutôt restreintes des paramètres mSUGRA, mais elle a néanmoins un très grand intérêt phénoménologique pour le potentiel de découverte au LHC [63, 97], notamment lorsque on combine cette zone avec les contraintes $g_\mu - 2$, comme on l'a déjà mentionné en introduction.

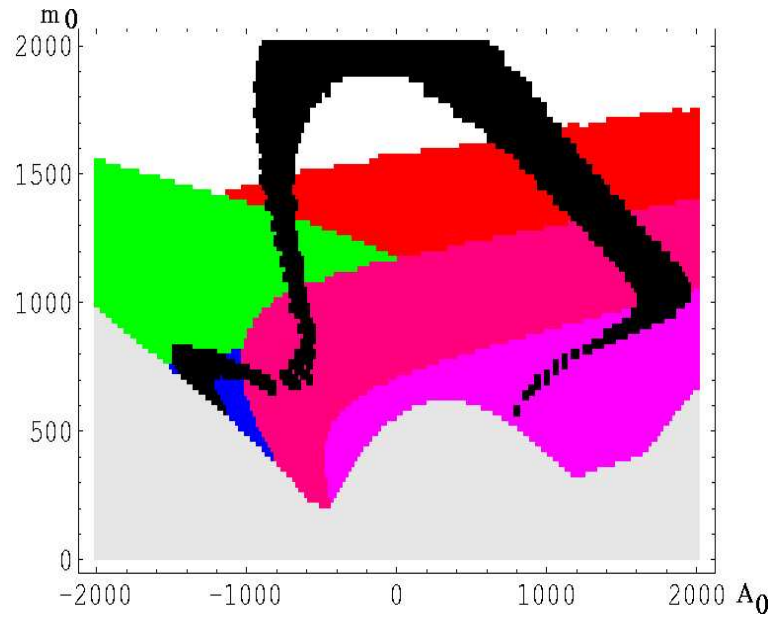


Figure 9: Contraintes dans le plan A_0 - m_0 pour $m_{1/2} = 140$ GeV, $\mu > 0$, $\tan \beta = 30$, $m_t = 178$ GeV. La zone pertinente d'annihilation via le Higgs léger est en noir. Notations et conventions comme sur la Fig. 5.

2.4.7 Contraintes dans l'espace des masses physiques de particules

Comme alternative un peu originale, on a aussi exprimé toutes les contraintes sur l'espace des paramètres mSUGRA dans les plans décrits par des couples de masses physiques de particules. Cette vision plus "physique" a un certain intérêt car elle indique immédiatement les masses physiques accessibles, non exclues par les diverses contraintes, ainsi qu'un lien plus direct avec les sections efficaces de production de sparticules accessibles au LHC ou ILC. On peut voir aussi très clairement les diverses corrélations entre différentes masses de sparticules, par exemple dans le plan (m_h, m_A) sur les figs. 11: à l'ordre de l'arbre, ces deux masses sont totalement corrélées et on obtiendrait donc comme seule région permise une ligne. La figure montre alors l'effet important des corrections radiatives sur ces deux masses, bien qu'elles soient encore relativement corrélées. Voir [61] pour plus de détail et illustrations sur ces masses physiques.

2.4.8 Bornes inférieures et supérieures sur les masses des sparticules

On a aussi balayé l'espace des paramètres mSUGRA *complet* compatible avec un ensemble de contraintes données, sachant que toutes les contraintes ne sont pas traitées de la même façon. On a vu en effet qu'on peut négliger éventuellement la contrainte $b \rightarrow s\gamma$ par une modification relativement mineure du modèle. Pour le $g_\mu = 2$, il y a l'ambiguïté due à la différence de $\sim 2\sigma$ entre les deux "prédictions" MS éqs. (70) and (71). Par contre on voit sur les Figs. 5–8 que la contrainte

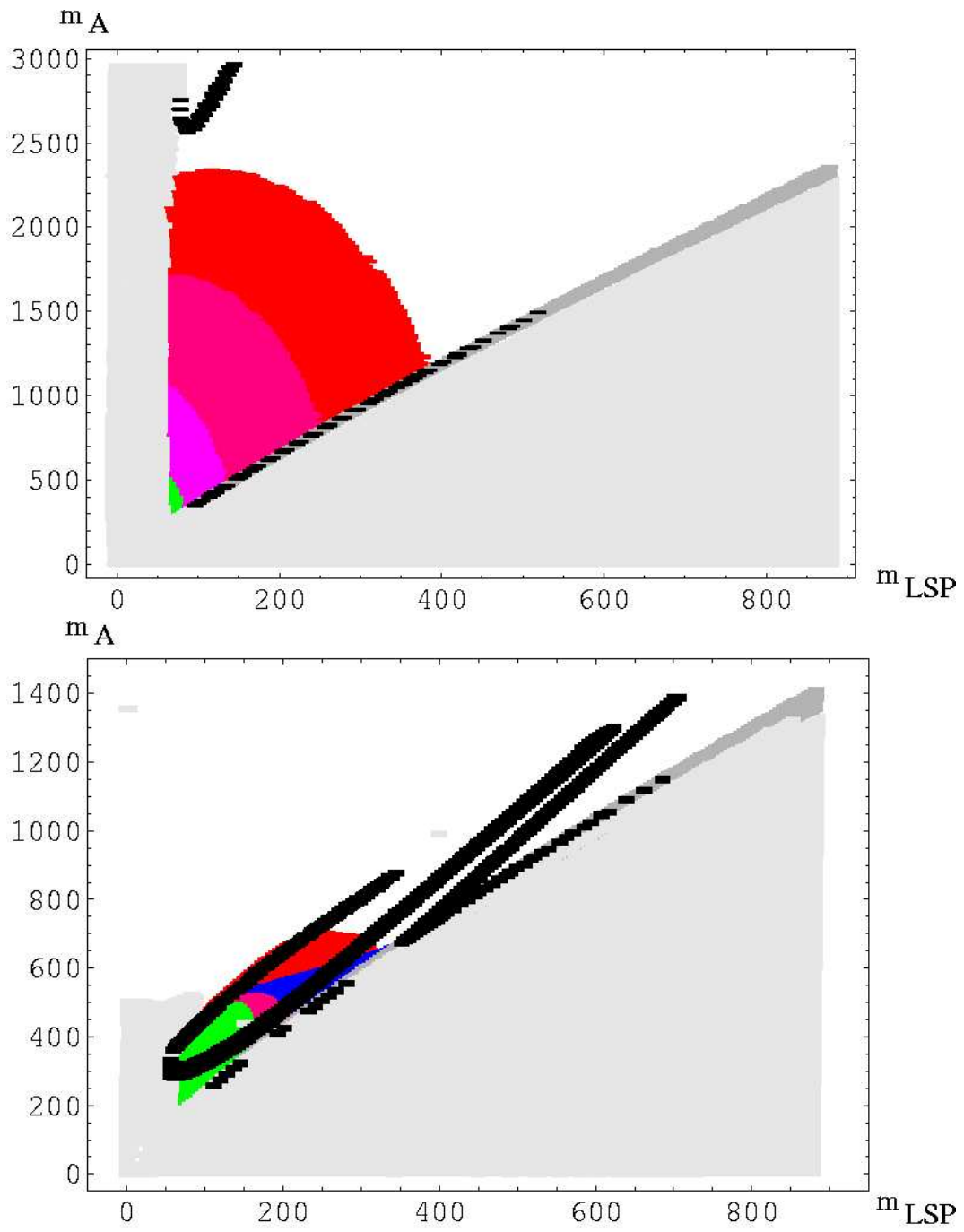


Figure 10: $A_0 = 0$, $\mu > 0$, $\tan \beta = 10$ (en haut) et $\tan \beta = 50$ (en bas). $m_t = 173$ GeV. Les zones en gris incluent maintenant aussi des combinaisons de masses qui ne sont jamais réalisées en mSUGRA.

WMAP exclue de larges morceaux de l'espace des paramètres. On pourrait donc penser légitimement que WMAP affecte largement les bornes inférieures sur les masses de sparticules. La Table 5

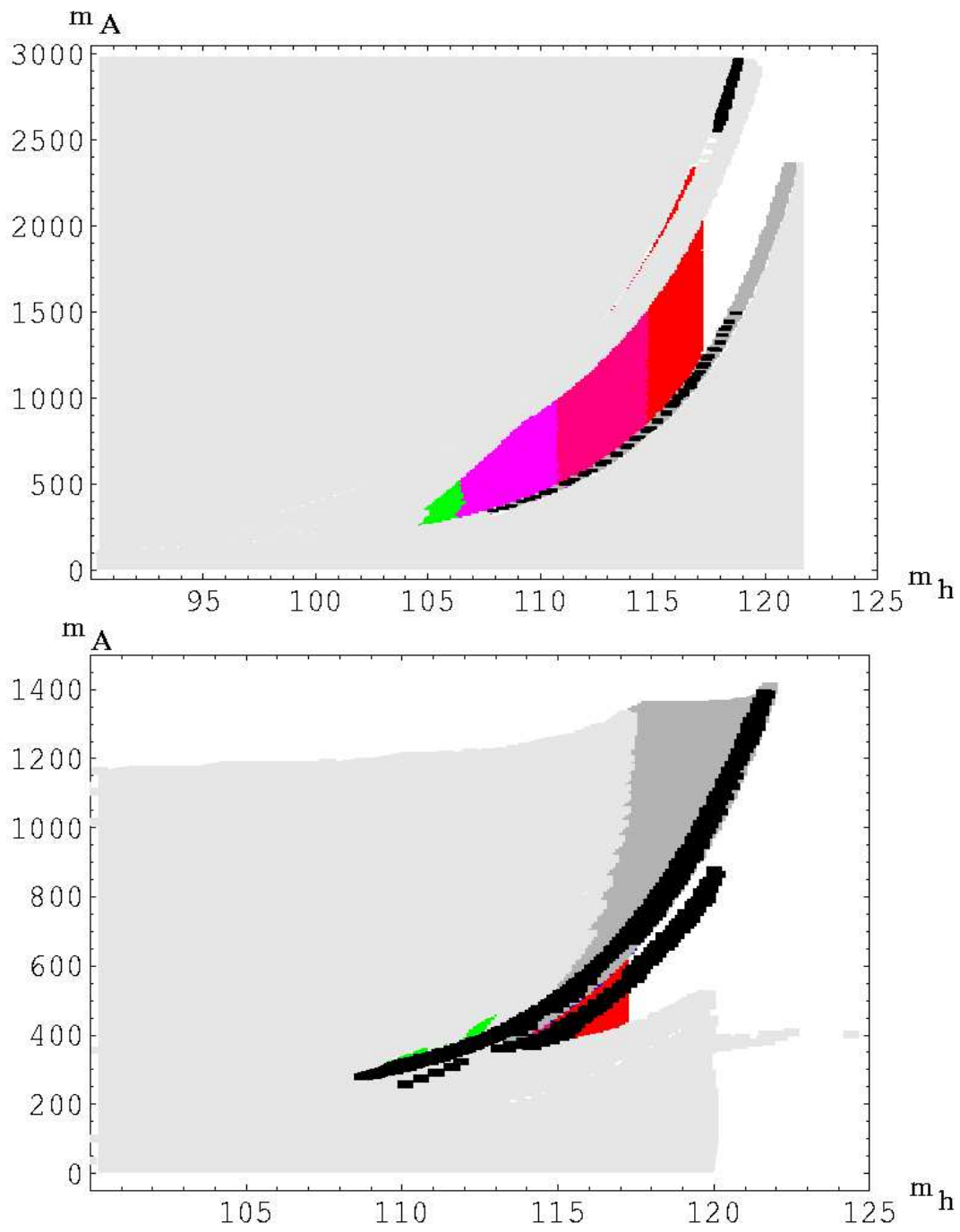


Figure 11: $A_0 = 0$, $\mu > 0$, $\tan \beta = 10$ (en haut) et $\tan \beta = 50$ (en bas). $m_t = 173$ GeV. Les zones en gris incluent maintenant aussi des combinaisons de masses qui ne sont jamais réalisées en mSUGRA.

montre que ce n'est pas vraiment le cas.

On voit en fait que les bornes inférieures de certaines particules-clés saturant toujours leurs

Table 5: *Bornes inférieures sur les masses de superparticules et Higgs, et bornes supérieures sur la section de diffusion LSP–nucléon, avec six hypothèses différentes de contraintes. (“HWIP” et “HSIP” signifie “particule interagissant faiblement la plus lourde” et “particule interagissant fortement la plus lourde” respectivement). Dans la colonne II on impose la contrainte (72) $b \rightarrow s\gamma$, et dans la colonne III la contrainte DM (73). Les colonnes IV–VI sont comme I–III, sauf pour la contrainte conservatrice sur $g_\mu - 2$ (70) remplacée par la contrainte plus agressive (71); ce qui donne des domaines de valeurs permises, plutôt que des bornes inférieures. Toutes les limites ont été obtenues en balayant l’espace complet des paramètres mSUGRA, et pour $166.9 \text{ GeV} \leq m_t \leq 178.5 \text{ GeV}$.*

Quantité	Set I	Set II	Set III	Set IV	Set V	Set VI
$m_{\tilde{e}_R} \simeq m_{\tilde{\mu}_R} [\text{GeV}]$	106	106	107	[106,1320]	106	[108,1300]
$m_{\tilde{e}_L} \simeq m_{\tilde{\mu}_L} [\text{GeV}]$	152	168	169	[152,1330]	168	[171,1310]
$m_{\tilde{\tau}_1} [\text{GeV}]$	99	99	99	[99,1020]	99	[99,915]
$m_{\tilde{\tau}_2} [\text{GeV}]$	156	171	172	[156,1160]	171	[174,1130]
$m_{\tilde{\nu}_\tau} [\text{GeV}]$	130	149	149	[130,1160]	149	[152,1120]
$m_{\tilde{\chi}_1^\pm} [\text{GeV}]$	105	105	105	[105,674]	105	[105,667]
$m_{\tilde{\chi}_2^\pm} [\text{GeV}]$	218	218	233	[219,1003]	227	[337,999]
$m_{\tilde{\chi}_1^0} [\text{GeV}]$	52	52	53	[52,359]	53	[55,357]
$m_{\tilde{\chi}_2^0} [\text{GeV}]$	105	105	105	[105,674]	105	[106,667]
$m_{\tilde{\chi}_3^0} [\text{GeV}]$	135	135	135	[135,996]	135	[292,991]
$m_{\tilde{\chi}_4^0} [\text{GeV}]$	217	218	234	[218,1003]	226	[337,999]
$m_{\tilde{g}} [\text{GeV}]$	359	380	380	[361,1880]	399	[412,1870]
$m_{\tilde{d}_R} \simeq m_{\tilde{s}_R} [\text{GeV}]$	406	498	498	[406,1740]	498	[498,1740]
$m_{\tilde{d}_L} \simeq m_{\tilde{s}_L} [\text{GeV}]$	424	518	518	[424,1810]	518	[518,1800]
$m_{\tilde{b}_1} [\text{GeV}]$	294	459	463	[295,1520]	459	[463,1500]
$m_{\tilde{b}_2} [\text{GeV}]$	400	498	498	[400,1600]	498	[498,1590]
$m_{\tilde{t}_1} [\text{GeV}]$	102	104	104	[102,1440]	231	[244,1440]
$m_{\tilde{t}_2} [\text{GeV}]$	429	547	547	[431,1600]	547	[547,1590]
$m_h [\text{GeV}]$	91	91	91	[91,124]	91	[91,124]
$m_H [\text{GeV}]$	111	111	111	[111,975]	111	[111,954]
$m_{H^\pm} [\text{GeV}]$	128	128	128	[128,979]	128	[128,960]
$m_{\text{HWIP}} [\text{GeV}]$	349	362	366	[351,1330]	366	[371,1310]
$m_{\text{HSIP}} [\text{GeV}]$	432	556	556	[432,1880]	556	[566,1870]
$\sigma_{\tilde{\chi}_1^0 p} [\text{ab}]$	140	140	7.5	$[10^{-4}, 140]$	140	$[10^{-4}, 7.5]$

bornes actuelles provenant des limites collisionneurs, quoique l’on ajoute comme contrainte supplémentaire. Particulièrement le chargino le plus léger, le slepton chargé le plus léger (toujours $\tilde{\tau}_1$ en mSUGRA), ainsi que les Higgs CP–pairs. Les masses de neutralinos et charginos plus lourds

aussi dépendent très peu des contraintes. La plupart de ces bornes proviennent directement de la structure du mSUGRA avec les conditions d'universalité des masses de jaugino, étant donné la borne directe du LEP sur $m_{\tilde{\chi}_1^\pm}$. (Une exception est l'augmentation de la borne sur $m_{\tilde{\chi}_3^0}$ pour les contraintes plus restrictives VI.)

D'autre part, l'ajout de la contrainte DM (73) a très peu d'effet sur ces bornes inférieures. Par contre celle-ci réduit substantiellement la valeur maximale possible pour la section élastique de diffusion LSP–proton (dernière ligne de la Table).

Comme on l'a déjà mentionné, la contrainte “agressive” sur $g_\mu - 2$ (71) permet d'obtenir des bornes *supérieures* intéressantes sur les masses de sparticules et bosons de Higgs. Cela car les contributions supersymétriques des boucles de jaugino–slepton essentiellement, disparaîtrait (par découplage) si les masses de jauginos ou bien les masses des sleptons devenaient trop grandes. Ça donne alors des bornes supérieures à la fois sur m_0 et $m_{1/2}$, comme l'illustrent les régions en bleu sur les Figs. 6–8. Ce qui impose aussi une borne supérieure sur $|\mu|$ via la condition EWSB (62). Par conséquent, *toutes* les sparticules et les Higgs peuvent être bornées en mSUGRA en utilisant cette seule contrainte!

2.4.9 Conclusions sur les contraintes mSUGRA

Le résultat un peu surprenant de nos “scans” est que les masses de nombreuses superparticules et Higgs pourraient toujours se situer proches de leur limites actuelles provenant de recherches directes aux collisionneurs même lorsque les contraintes les plus restrictives sont prises en compte, telles que WMAP et l'interprétation agressive de la contrainte $g_\mu - 2$. Cela signifie que les expériences actuelles (Tevatron) et du futur proche (LHC) ont de bonnes chances de découvrir de nouvelles particules même dans cette version très contrainte du MSSM. Par contre évidemment toutes ces bornes inférieures ne sont pas saturées simultanément, et correspondent à des valeurs très différentes de l'espace des paramètres mSUGRA suivant les sparticules.

A Niveaux d'énergie de l'oscillateur et Borel-sommabilité

Dans cette annexe on discute brièvement une formulation peut-être non standard des niveaux d'énergie de l'oscillateur anharmonique, pour illustrer dans un cas connu et simple l'existence de deux modes perturbatifs différents, l'un des modes étant directement Borel-sommable tandis que l'autre implique des corrections non-perturbatives.

On rappelle que l'oscillateur est décrit par une théorie des champs massive $g\phi^4$ de dimension $D = 1$ [10]:

$$\mathcal{L}_{ao} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (81)$$

Les niveaux d'énergie ont un développement perturbatif¹²

$$E_0 \sim |m| \sum_n a_n \left(\frac{g}{|m|^3}\right)^n \quad (82)$$

où les coefficients peuvent être calculés à un ordre arbitraire, et ont le comportement asymptotique bien connu [10, 98]:

$$a_n \sim -(-1)^n \left(\frac{6}{\pi^3}\right)^{1/2} \left(\frac{3}{4}\right)^n \Gamma[n + 1/2] \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (83)$$

Grâce à l'alternance de signe de ces coefficients dans l'Eq. (83), la série est Borel-sommable [99]. Par conséquent il n'y a pas de contributions supplémentaires "non-perturbatives", et la série peut être resommée à la Borel de façon unique, ce qui représente (dans cette approximation asymptotique) la partie réelle de l'énergie de l'état fondamental. Cette somme de Borel s'écrit explicitement

$$\tilde{E}_0(g, m) \sim -\frac{(6)^{1/2}}{\pi} \frac{|m|^3}{g} \int_0^\infty dt e^{-t \frac{|m|^3}{g}} \left(1 + \frac{3}{4}t\right)^{-1/2} \quad (84)$$

En fait le résultat Eq. (83), originalement obtenu par un calcul par la méthode WKB [10], a été redérivé plus tard par un calcul basé sur les instantons, le vide étant instable pour $g < 0$ avec un processus par effet tunnel correspondant. Plus précisément, un calcul classique donne [98] pour la contribution instanton à la partie imaginaire de l'énergie du fondamental:

$$Im[E_0] \sim \frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{4|m|^3}{3g}} \left(\frac{|m|^3}{-g}\right)^{1/2} \quad (85)$$

où $g < 0$.

Maintenant, faisons l'hypothèse que notre seule connaissance serait l'information purement perturbative, c'est-à-dire le développement éq. (82), et effectuons formellement un changement de signe du couplage: $g \rightarrow -g$. Cela compense bien sûr l'alternance de signe des coefficients, de sorte que la nouvelle série correspondante n'est plus Borel-sommable: au lieu de (84) on obtient une intégrale

$$\tilde{E}_0(g, m) \sim \frac{(6)^{1/2}}{\pi} \frac{|m|^3}{|g|} \int_0^\infty dt e^{-t \frac{|m|^3}{|g|}} \left(1 - \frac{3}{4}t\right)^{-1/2} \quad (86)$$

¹²On considère seulement l'état fondamental pour simplifier.

mal définie à cause de la coupure à $t = 4/3$ sur le chemin d'intégration. Néanmoins, on peut évaluer l'ambiguïté associée: définissant celle-ci par la (demi) différence entre les deux contours possibles contournant la coupure par en-haut (resp. en-bas), un calcul simple de contour donne pour l'ambiguïté:

$$\delta E_0 \sim \frac{4i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{4|m|^3}{3|g|}} \left(\frac{|m|^3}{|g|}\right)^{1/2} \quad (87)$$

qui peut être interprétée comme une contribution non-perturbative nécessaire dans ce mode (non conventionnel). On retrouve sans surprise mais de façon cohérente la contribution non-perturbative d'instanton Eq. (85), avec $g < 0$. (NB rappelons qu'historiquement c'est la solution instanton Eq. (85) qui a permis d'obtenir [98] le comportement asymptotique Eq. (83), de sorte que Eq. (87) n'est rien d'autre ici qu'un contrôle de cohérence.) On voit donc que les deux modes de développement perturbatif, respectivement avec $g > 0$ ou $g < 0$, peuvent être cohérents, pourvu qu'on identifie correctement les corrections non-perturbatives dans le cas $g < 0$.

B Développement δ aux ordres arbitraires

Dans cette annexe on donne quelques formules explicites utiles sur le développement δ , afin d'illustrer l'effet de la substitution (45) sur une série perturbative donnée ainsi que son comportement assez générique aux grands ordres.

Considérant l'éq. (54 avec $m^* \equiv m(1 - \delta)^{1/2}$, le résultat de ce développement à l'ordre k en δ suivi de $\delta \rightarrow 1$ peut s'écrire comme (les coefficients K_n sont les coefficients perturbatifs originaux):

$$\begin{aligned} \Delta \langle \phi^2 \rangle^{(k)}(m, u) &= -\frac{Nm}{4\pi} \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{\Gamma[3/2]}{n! \Gamma[3/2 - n]} + \frac{uN}{3} \sum_{n=1}^k K_n \left(-\frac{uN}{6m}\right)^n \\ &\quad \cdot \sum_{q=0}^{k-n-1} (-1)^q \frac{\Gamma[1 - n/2]}{q! \Gamma[1 - n/2 - q]} \end{aligned} \quad (88)$$

où la dernière sommation provient du développement de $(1 - \delta)^{-n/2}$ et la limite supérieure de cette sommation prend en compte que, à l'ordre k du développement δ , il y a un terme venant de $u(u/m)^n \rightarrow \delta^{n+1} u(u/m)^n$ et un terme venant de $(1 - \delta)^{-n/2}$. Les sommations peuvent être évaluées analytiquement pour donner

$$\Delta \langle \phi^2 \rangle^{(k)}(m, u) = -\frac{Nm}{4\pi} \sqrt{\pi} \frac{(-1)^k}{\Gamma[1/2 - k] \Gamma[1 + k]} + \frac{uN}{3} \sum_{n=1}^k K_n \left(-\frac{uN}{6m}\right)^n \frac{\Gamma[-n/2 + k]}{\Gamma[-n + k] \Gamma[1 + n/2]} \quad (89)$$

Cette expression (89) est particulièrement commode pour être optimisée par rapport à m à un ordre k arbitraire. On obtient des résultats similaires bien que plus compliqués si on remplace la substitution LDE originale par une généralisation multi-paramètres comme (51).

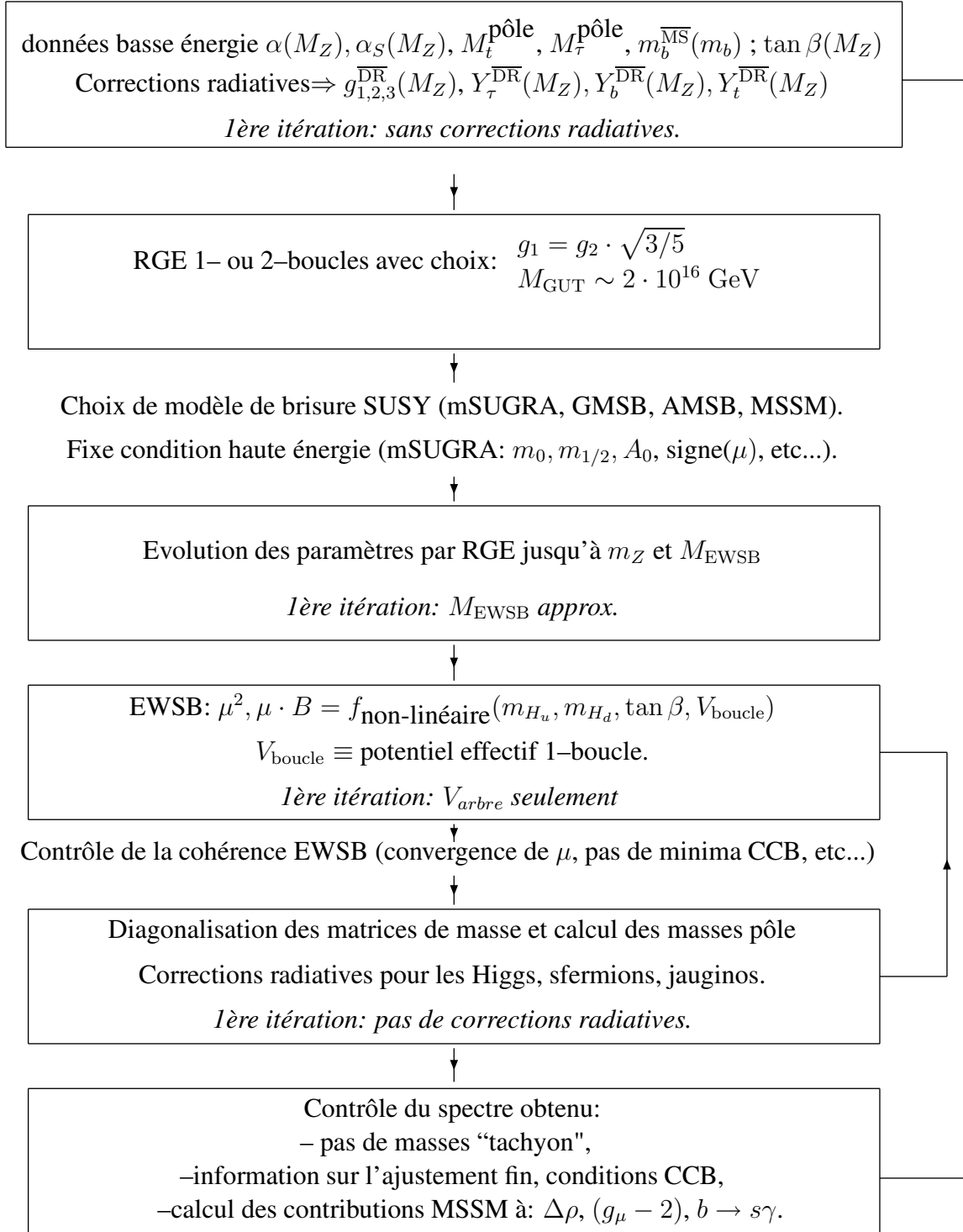
Le comportement de la LDE aux grands ordres pour $k \rightarrow \infty$ de (89) peut être analysé, ce qui donne:

$$\Delta\langle\phi^2\rangle^{(k)}(m,u) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{Nm}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi} k^{1/2}} + \frac{uN}{3} \sum_{n=1}^k K_n \left(-\frac{uN}{6m}\right)^n \frac{k^{n/2}}{\Gamma[1+n/2]}, \quad (90)$$

où pour obtenir Eq. (90) on a utilisé les propriétés des fonctions Gamma, telles que $\Gamma[2z] = 2^{2z-1/2} \Gamma[z] \Gamma[1/2+z] / \sqrt{2\pi}$, $\Gamma[z] \Gamma[1-z] \sin(\pi z) = \pi$ et la formule asymptotique de Stirling: $\Gamma[b+az] \sim \sqrt{2\pi} e^{-az} (az)^{az+b-1/2}$.

L'expression (90) peut servir de base à une analyse [25] assez similaire avec le cas de l'oscillateur [8], en particulier pour étudier le comportement de la masse optimisée aux ordres élevés en δ , et voir d'éventuelles propriétés de "scaling" pour la masse optimisée.

C Algorithme de calcul du spectre SUSY dans Suspect



References

- [1] K. G. Wilson, Phys. Rev. D7 (1973) 2911.
- [2] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461.
- [3] Pour une revue sur la sommation de Borel et beaucoup de références originales voir J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin eds., *Large-Order Behaviour of Perturbation Theory*, Current Physics—Sources and Comments, North-Holland, 1990.
- [4] pour une revue exhaustive et récente voir M. Beneke, Phys.Rept.317 (1999) 1.
- [5] voir par ex. G. A Baker, Jr. Advances in theoretical physics, vol. 1 p.1, Academic Press, New York 1965.
- [6] V. Yukalov, Teor. Mat. Fiz. **28**, 92 (1976); W.E. Caswell, Ann. Phys. (N.Y) **123**, 153 (1979); I.G. Halliday and P. Suranyi, Phys. Lett. **B85**, 421 (1979); J. Killinbeck, J. Phys. **A14**, 1005 (1981); R.P. Feynman and H. Kleinert, Phys. Rev. **A34**, 5080 (1986); H.F. Jones and M. Moshe, Phys. Lett. **B234**, 492 (1990); A. Neveu, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B18**, 242 (1990); V. Yukalov, J. Math. Phys **32**, 1235 (1991); S. Gandhi, H.F. Jones and M. Pinto, Nucl. Phys. **B359**, 429 (1991); C. M. Bender et al., Phys. Rev. **D45**, 1248 (1992); S. Gandhi and M. Pinto, Phys. Rev. **D46**, 2570 (1992); H. Yamada, Z. Phys. **C59**, 67 (1993); K.G. Klimenko, Z. Phys. **C60**, 677 (1993); A.N. Sissakian, I.L. Solovtsov and O.P. Solovtsova, Phys. Lett. **B321**, 381 (1994); H. Kleinert, Phys. Rev. **D57**, 2264 (1998); Phys. Lett. **B434**, 74 (1998); *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, World Scientific (2001), chap. 19.
- [7] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D23 (1981) 2916; Nucl. Phys. B203 (1982) 472.
- [8] par exemple: R. Guida, K. Konishi, H. Suzuki, Annals Phys. 249 (1996) 109
- [9] R. Seznec and J. Zinn-Justin, J. Math. Phys. **20**, 1398 (1979); J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Ann. Phys. **147**, 57 (1983).
- [10] C.M. Bender and T.T. Wu, Phys. Rev. 184 (1969) 1231; Phys. Rev. D7 (1973) 1620.
- [11] B. Bellet, P. Garcia and A. Neveu, Int. J. Mod. Phys. A 11 (1996) 5587; Int. J. Mod. Phys. A 11 (1996) 5607.
- [12] A. Neveu, Nucl. Phys. B18(1990) (Proc. Suppl.) 242.
- [13] C. Arvanitis, F. Geniet and A. Neveu, hep-th/9506188.
- [14] C. Arvanitis, F. Geniet, M. Iacomì, J.-L. Kneur, A. Neveu, Int. J. Mod. Phys. A12 (1997) 3307.
- [15] D. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. D10 (1974) 3235.

- [16] P. Forgacs, F. Niedermayer and P. Weisz, Nucl. Phys. B 367 (1991) 123.
- [17] C. Arvanitis, F. Geniet, J.-L. Kneur, A. Neveu, Phys. Lett. B390 (1997) 385
- [18] J.-L. Kneur, Phys. Rev. D 57 (1998) 2785
- [19] J.-L. Kneur and D. Reynaud, JHEP 0301:014, 2003; (hep-th/0111120).
- [20] F. David, Nucl. Phys. B209 (1982) 433; *ibid* B234 (1984) 237.
- [21] M. Beneke, V.M. Braun and N. Kivel, Phys. Lett. B443 (1998) 308.
- [22] J.-L. Kneur and D. Reynaud, Eur. Phys. J. C24 (2002) 323.
- [23] J.-L. Kneur and D. Reynaud, Phys. Rev. D66 (2002) 085020, (hep-th/0205133).
- [24] J-L Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 210403 (cond-mat/0207089).
- [25] J-L Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. **A68**, 043615 (2003) (cond-mat/0207295).
- [26] J-L Kneur, A. Neveu and M.B Pinto, Phys. Rev. A69, 053624 (2004) (cond-mat/0401324).
- [27] J.O. Andersen, Rev. Mod. Phys. **76**, 599 (2004).
- [28] V. Yukalov, Laser Phys. Lett. 1, 435 (2004) (cond-mat/0408599)
- [29] B. Kastening, Phys. Rev. **A 68**, 061601 (2003); Phys. Rev. **A69**, 043613 (2004) (cond-mat/0309060).
- [30] G. Baym, J.-P. Blaizot and J. Zinn-Justin, Europhys. Lett. **49**, 150 (2000).
- [31] J-L Kneur and M.B Pinto, Phys. Rev. A71 (2005) 033613 (cond-mat/0408538).
- [32] R. Dashen, B. Hasslacher and A. Neveu, Phys. Rev. D12 (1975) 2443.
- [33] A.B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, Ann. Phys. (NY) 120 (1979) 253; Nucl. Phys. B133 (1978) 525.
- [34] M. Beneke and V. Braun, Nucl. Phys. B426 (1994) 301; I. Bigi et al, Phys. Rev. D50 (1994) 2234.
- [35] P. Forgacs, F. Niedermayer and P. Weisz, Nucl. Phys. B 367 (1991) 157.
- [36] M. Campostrini and P. Rossi, Int. J; Mod. Phys. A7 (1992) 3265.

- [37] Voir par ex: M. Ablowitz and A. Fokas, *Complex Variables, Introduction and Applications*, Cambridge Univ. Press 1997.
- [38] par ex. R. Corless et al, *Advances in Computational Mathematics*, 5 (1996) 329.
- [39] M. Anderson, E. Cornell, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, *Science* **269** (1995) 198; C. Bradley et al, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1687; K. Davis et al, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3969.
- [40] E. Braaten and E. Radescu, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 271602 (2002); *Phys. Rev.* **A66**, 06360 (2002).
- [41] pour une revue récente des théories des champs à température finie, voir par exemple: J. Zinn-Justin, hep-ph/0005272.
- [42] P. Arnold and B. Tomásik, *Phys. Rev.* **A62**, 063604 (2000).
- [43] V.A. Kashurnikov, N.V. Prokof'ev and B.V. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120402 (2001).
- [44] P. Arnold and G. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120401 (2001)
- [45] P. Arnold and G. Moore, *Phys. Rev.* **E64**, 066113 (2001).
- [46] P. Arnold, G. Moore and B. Tomásik, *Phys. Rev.* **A65**, 013606 (2002).
- [47] Mathematica version 3.0, S. Wolfram Company.
- [48] H. Kleinert, *Mod. Phys. Lett.* **B17**, 1011 (2003) (cond-mat/0210162).
- [49] F. F. S. Cruz, M. B. Pinto, R. O. Ramos and P. Sena, *Phys. Rev.* **A65**, 053613 (2002).
- [50] B. Kastening, *Phys. Rev. A* 70, 043621 (2004); (cond-mat/0406035).
- [51] Pour des introduction et revues de la supersymétrie voir par exemple: "Supersymmetry and Supergravity" J. Wess and J. Bagger, Princeton Series in Physics; H.P. Nilles, *Phys. Rep.* 110 (1984) 1; S.P. Martin, hep-ph/9709356.
- [52] P. Fayet, *Nucl. Phys.* B90 (1975) 104; *Phys. Lett. B* 64 (1976) 159; *Phys. Lett. B* 69 (1977) 489.
- [53] Pour des revues du MSSM, voir en plus des refs. [51]: R. Barbieri, *Riv. Nuov. Cim.* 11 (1988) 1; R. Arnowitt and Pran Nath, Report CTP-TAMU-52-93; M. Drees and S.P. Martin, hep-ph/9504324; J. Bagger, Lectures at TASI-95, hep-ph/9604232; S. Dawson, hep-ph/9712464.
- [54] H. E. Haber and G. Kane, *Phys. Rep.* 117 (1985) 75; J.F. Gunion and H.E. Haber, *Nucl. Phys.* B272 (1986) 1 and *Nucl. Phys.* B278 (1986) 449 ; (E) hep-ph/9301205.

- [55] Pour une revue voir G. Jungman, M. Kamionkowski and K. Griest, Phys. Rep. **267** (1996) 195, hep-ph/9506380.
- [56] Pour une revue récente sur les recherche de SUSY aux collisionneurs et réfs. originales voir par ex. B.C. Allanach, C. Grojean, P. Skands et al, hep-ph/0602198.
- [57] A. Djouadi, J-L. Kneur and G. Moultaka, hep-ph/0211331.
- [58] A. Brignole, G. Degrassi, P. Slavich and F. Zwirner, Nucl.Phys. B643 (2002) 79.
- [59] B. Allanach, A. Djouadi, J-L. Kneur and P. Slavich, hep-ph/0406166, JHEP 0409 (2004) 044.
- [60] Pour une revue récente du secteur de Higgs dans le MSSM, et réfs. originales, voir par ex. A. Djouadi, hep-ph/0503173.
- [61] A. Djouadi, M. Drees and J.-L. Kneur, JHEP 03 (2006) 033 (hep-ph/0602001).
- [62] A. Djouadi, M. Drees and J.-L. Kneur, JHEP 0108 (2001) 055 (hep-ph/0107316)
- [63] A. Djouadi, M. Drees and J.L. Kneur, Phys. Lett. **B624**, 60 (2005), hep-ph/0504090.
- [64] G. Farrar and P. Fayet, Phys. Lett. B 76 (1978) 575.
- [65] P. Fayet and J. Iliopoulos, Phys. Lett. 51B (1974) 461; L. O’Raifeartaigh, Nucl. Phys. B96 (1975) 331.
- [66] voir par ex: A. Masiero and L. Silvestrini, hep-ph/9711401.
- [67] J.M. Frère, D.R.T. Jones and S. Raby, Nucl. Phys. **B222**, 11 (1983); M. Claudson, L. Hall and I. Hinchliffe, Nucl. Phys. **B228**, 501 (1983).
- [68] A.H. Chamseddine, R. Arnowitt and P. Nath, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 970; R. Barbieri, S. Ferrara and C.A Savoy, Phys. Lett. B119 (1982) 343; L. Hall, J. Lykken and S. Weinberg, Phys. Rev. D27 (1983) 2359; E. Cremmer, P.Fayet, L. Girardello, Phys. Lett. B122 (1983) 41.
- [69] J. Ellis , S. Kelley and D.V. Nanopoulos, Phys. Lett. B260 (1991) 131; U. Amaldi, W. de Boer and H. Fürstenau, Phys. Lett. B260 (1991) 447; P. Langacker and M. Luo, Phys. Rev.D 44 (1991) 817; C. Giunti, C.W. Kim and U.W. Lee, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 1745.
- [70] Pour une revue sur les modèles GMSB par exemple: G.F. Giudice and R. Rattazzi, Phys. Rept. 322 (1999) 419.
- [71] L. Randall and R. Sundrum, Nucl. Phys. B557 (1999) 79; G. Giudice, M. Luty, H. Murayama and R. Rattazzi, JHEP 9812 (1998) 027; K. Huitu, J. Laamanen and P. N. Pandita, Phys. Rev. D65 (2002) 115003.

- [72] S.P. Martin and M. Vaughn, Phys. Rev. **D50**, 2282 (1994), hep-ph/9311340; I. Jack, D.R.T. Jones, S.P. Martin, M. Vaughn and Y. Yamada, Phys. Rev. **D50**, 5481 (1994), hep-ph/9407291.
- [73] D.M. Pierce, J.A. Bagger, K. Matchev and R.J. Zhang, Nucl. Phys. B491 (1997) 3.
- [74] WMAP Collab., D.N. Spergel et al., Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003), astro-ph/0302209.
- [75] J.A. Casas, A. Lleyda and C. Muñoz, Nucl. Phys. **B471** (1996) 3, hep-ph/9507294.
- [76] Pour un résumé à jour des limites sur les sparticules provenant des recherches au LEP, voir http://lepsusy.web.cern.ch/lep_susy/.
- [77] Particle Data Group, S. Eidelman et al, Phys. Lett. **B592**, 1 (2004).
- [78] ALEPH, DELPHI, L3 et OPAL Collab., Phys. Lett. **B565**, 61 (2003), hep-ex/0306033.
- [79] G. Altarelli, R. Barbieri, F. Caravaglios, Int. J. Mod. Phys. A13 (1998) 1031.
- [80] R. Barbieri and L. Maiani, Nucl. Phys. **B224**, 32 (1983); C.S. Lim, T. Inami and N. Sakai, Phys. Rev. **D29**, 1488 (1984); E. Eliasson, Phys. Lett. **147B**, 65 (1984); M. Drees and K. Hagiwara, Phys. Rev. **D42**, 1709 (1990).
- [81] Muon $g-2$ Collab., G.W. Bennett et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 101804 (2002), Erratum-ibid. **89**, 129903 (2002), hep-ex/0208001, and Phys. Rev. Lett. **92**, 161802 (2004), hep-ex/0401008.
- [82] M. Knecht and A. Nyffeler, Phys. Rev. D 65 (2002) 073034; M. Knecht, A. Nyffeler, M. Perrottet and E. de Rafael, Phys. Rev. Lett. 82 (2002) 071802.
- [83] M. Davier, S. Eidelman, A. Höcker and Z. Zhang, Eur. Phys. J. **C31**, 503 (2003), hep-ph/0308213; K. Hagiwara, A.D. Martin, D. Nomura and T. Teubner, Phys. Rev. **D69**, 093003 (2004), hep-ph/0312250; J.F. de Troconiz and F.J. Yndurain, Phys. Rev. **D71**, 073008 (2005), hep-ph/0402285; M. Passera, J. Phys. **G31**, R75 (2005), hep-ph/0411168.
- [84] S.P. Martin and J.D. Wells, Phys. Rev. **D64**, 035003 (2001), hep-ph/0103067.
- [85] G. Degrandi and G.F. Giudice, Phys. Rev. **D58**, 053007 (1998), hep-ph/9803384.
- [86] A.L. Kagan and M. Neubert, Eur. Phys. J. **C7**, 5 (1999); P. Gambino and U. Haisch, JHEP **0110**, 020 (2001), hep-ph/0109058, and JHEP **0009**, 001 (2000), hep-ph/0007259; P. Gambino, M. Gorbahn and U. Haisch, Nucl. Phys. **B673**, 238 (2003), hep-ph/0306079.
- [87] P. Gambino, U. Haisch and M. Misiak, Phys. Rev. Lett. **94**, 061803 (2005), hep-ph/0410155.
- [88] G. Degrandi, P. Gambino and G.F. Giudice, JHEP **0012**, 009 (2000), hep-ph/0009337.
- [89] K. Okumura and L. Roszkowski, Phys. Rev. Lett. **92**, 161801 (2004), hep-ph/0208101.

- [90] H. Baer, C. Balazs, A. Belyaev, J.K. Mizukoshi, X. Tata and Y. Wang, JHEP **0207**, 050 (2002), hep-ph/0205325; H. Baer and C. Balazs, JCAP **0305**, 006 (2003), hep-ph/0303114; U. Chattopadhyay, A. Corsetti and P. Nath, Phys. Rev. **D68**, 035005 (2003), hep-ph/0303201; J.R. Ellis, K.A. Olive, Y. Santoso and V.C. Spanos, Phys. Lett. **B565**, 176 (2003), hep-ph/0303043; M. Battaglia, A. De Roeck, J.R. Ellis, F. Gianotti, K.A. Olive and L. Pape, Eur. Phys. J. **C33**, 273 (2004), hep-ph/0306219; R. Arnowitt, B. Dutta and B. Hu, hep-ph/0310103; J.R. Ellis, K.A. Olive, Y. Santoso and V.C. Spanos, Phys. Rev. **D69**, 095004 (2004), hep-ph/0310356; M.E. Gomez, T. Ibrahim, P. Nath and S. Skadhauge, Phys. Rev. **D70**, 035014 (2004), hep-ph/0404025 J.R. Ellis, S. Heinemeyer, K.A. Olive and G. Weiglein, JHEP **0502**, 013 (2005), hep-ph/0411216.
- [91] pour une revue, par ex E.W. Kolb and M.S. Turner, "The Early Universe", Addison-Wesley (New York, 1990).
- [92] M. Drees and M.M. Nojiri, Phys. Rev. **D47** (1993) 376.
- [93] K. Griest and D. Seckel, Phys. Rev. **D43** (1991) 3191.
- [94] G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov and A. Semenov, Comput. Phys. Commun. **149** (2002) 103; hep-ph/0112278.
- [95] G. Bélanger, S. Kraml and A. Pukhov, Phys. Rev. **D72** (2005) 015003 (hep-ph/0502079).
- [96] CDF Collab. and D0 Collab. and The Tevatron Electroweak Working Group, hep-ex/0507091 .
- [97] H. Baer, A. Belyaev, T. Krupovnickas and X. Tata, JHEP **0402**, 007 (2004), hep-ph/0311351; H. Baer, T. Krupovnickas and X. Tata, JHEP **0406**, 061 (2004), hep-ph/0405058.
- [98] E. Brezin, J.-C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Phys Rev. **D15** (1977) 1544; *ibid* 1558.
- [99] S. Graffi, V. Grecchi and B. Simon, Phys. Lett. **B32** (1970) 631.