



**HAL**  
open science

# OUTILS ET MÉTHODOLOGIE D'ÉTUDE DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES POLYPHASÉS. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DES VECTEURS D'ESPACE

Eric Semail

► **To cite this version:**

Eric Semail. OUTILS ET MÉTHODOLOGIE D'ÉTUDE DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES POLYPHASÉS. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DES VECTEURS D'ESPACE. Autre. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2000. Français. NNT : . tel-00266256

**HAL Id: tel-00266256**

**<https://theses.hal.science/tel-00266256v1>**

Submitted on 21 Mar 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1

Spécialité : GÉNIE ÉLECTRIQUE

par

**Éric SEMAIL**

Agrégé de Physique Appliquée

## **OUTILS ET MÉTHODOLOGIE D'ÉTUDE DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES POLYPHASÉS.**

### **GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DES VECTEURS D'ESPACE**

**Le 30 juin 2000, devant la commission d'examen :**

<b>MM. M. IVANES</b>	<b>Président</b>
<b>J.P. LOUIS</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>G. MANESSE</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>C. ROMBAUT</b>	<b>Directeur de Thèse</b>
<b>H. FOCH</b>	<b>Examineur</b>
<b>J.P. HAUTIER</b>	<b>Examineur</b>
<b>G. SÉGUIER</b>	<b>Examineur</b>



## Remerciements

*Le travail relatif à cette thèse s'est déroulé au sein du laboratoire L2EP sur les sites de l'École Centrale de Lille et de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Je remercie M. Christian Rombaut, directeur de cette thèse, pour la compréhension et la confiance dont il a su faire preuve au cours de ces quelques années de thèse. La liberté qu'il m'a accordé m'a permis de développer ce travail de recherche.*

*Je suis reconnaissant à M. Jean-Paul Louis, professeur à l'E.N.S. de Cachan, et à M. Georges Manesse, professeur au C.N.A.M de Paris, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. Ils m'ont aidé par leurs remarques à mieux situer dans son contexte de recherche le travail fourni.*

*M. Marcel Ivanès, professeur à l'E.N.S.I.E.G., m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse, je l'en remercie vivement.*

*Je remercie également M. Henri Foch, professeur à l'E.N.S.E.E.I.H.T. et M. Jean-Paul Hautier, professeur à l'E.N.S.A.M. de Lille, d'avoir accepté de participer à ce jury. Leurs interventions m'encouragent à développer ma démarche de chercheur.*

*M. Guy Péquier, professeur émérite à l'U.P.T.L., m'a toujours poussé, depuis ma nomination en tant que professeur agrégé à l'U.P.T.L., à développer une activité de recherche en parallèle. Aussi, lui suis-je reconnaissant d'être présent à ce jury.*

*Mes remerciements s'adressent également:*

- *À mes collègues agrégés, M. Jean-François Sergent et M. Michel Amberg, par l'ambiance émulative et amicale qu'ils ont su créer. Ambiance qui a permis de mieux gérer ces années pendant lesquelles il m'a été nécessaire d'adopter une démarche d'équilibriste. Équilibre entre une pleine activité d'enseignement stimulante et une recherche heureusement libre.*
- *Aux enseignants chercheurs du I2EP et particulièrement ceux, tout proche, de l'UPTL, M. Alain Bouscayrol, M. Philippe Delarue et M. Stéphane Clénet, avec lesquels des discussions impromptues ou plus structurées accompagnent une maïeutique toujours longue et délicate.*
- *À l'équipe technique du I2EP pour son assistance et sa bonne humeur. Pour les réalisations expérimentales, M. Xavier Cimelière, par sa disponibilité, M. Jean-Jacques Franchaud, par ses conseils avisés et réalisations soignées, m'ont apporté l'aide nécessaire. Je n'oublierai pas à ce propos également les précieux échanges avec Michel Amberg notamment en informatique industrielle.*

*Enfin, merci à ma famille pour la liberté de choix qui m'a toujours été laissé dans mon cheminement malgré les contraintes qui en découlent.*

## RÉSUMÉ

La démarche générale du mémoire consiste à utiliser des outils mathématiques permettant d'élaborer un formalisme vectoriel applicable aux systèmes électriques au sens large. Ce formalisme bénéficie à la fois des propriétés graphiques et géométriques de la théorie des vecteurs d'espace qu'il généralise et de la puissance du calcul matriciel. Aussi, est-il tout particulièrement adapté à l'étude des systèmes polyphasés.

Tout d'abord, on caractérise les modulateurs d'énergie indépendamment de leurs charges. Pour cela des espaces vectoriels leur sont associés ainsi que des familles de vecteurs qui les caractérisent. Il est possible alors de définir quel type de charge le modulateur est capable de contrôler. Les degrés de liberté de la commande trouvent également une formulation mathématique. Les exemples traités sont les onduleurs de tension monophasé et triphasé deux niveaux. L'approche conduit, dans le cas d'une commande aux valeurs moyennes, à un calcul original des durées de conduction des interrupteurs en utilisant la notion de barycentre. Les algorithmes obtenus, généralisables aux onduleurs à  $n$  bras, comportent un nombre réduit d'opérations logiques et arithmétiques.

Le formalisme est ensuite appliqué à la machine asynchrone triphasée avec  $q$  barres au rotor ; ceci nous permet d'expliciter la notion de rotor diphasé équivalent. La machine asynchrone pentaphasée est également modélisée et l'approche développée met en évidence les conditions que doit remplir l'onduleur à 5 bras pour l'alimenter correctement.

Dans la dernière partie, un onduleur de courant à Modulation de Largeur d'Impulsions est étudié à l'aide du formalisme. Les non-linéarités de la commande sont prises en compte vectoriellement, notamment, de façon originale, celle concernant la durée minimale de conduction des interrupteurs. On décrit enfin l'implantation matérielle de cette commande sur microcontrôleur 16 bits et présente les résultats expérimentaux dans le cas d'une charge constituée d'une machine asynchrone triphasée en parallèle avec des condensateurs.

---

## MOTS-CLÉS

Polyphasé, pentaphasé, hexaphasé, phaseur complexe, vecteur d'espace, modulation de largeur d'impulsion, MLI, machine asynchrone, onduleur de tension, onduleur de courant, barycentre, homopolaire.

---

## TITLE

### **Tools and Studying Method of Polyphase Electrical Systems. Generalisation of the Space Vector Theory**

---

## ABSTRACT

The general methodology of this thesis consists of using mathematics tools allowing the elaboration of a vectorial formalism which is applicable to electrical systems in the broad sense of the word.

This formalism is enjoying the matricial calculation power and, at the same time, the geometric and graphical properties of the space vector theory that is generalized. So, it is particularly adapted to the study of polyphases systems.

First of all, we characterize the static power converters regardless of their loads. To do that, vectorial spaces are associated to them along with characteristic families of vectors. Then, it is possible to define which kind of load the converter can control. The degrees of freedom find also a mathematic formulation. The examples which are dealt with, are the two-level, one and three-phase, voltage-source inverters. In the case of a mean value control, the approach leads to an original calculation of the on-state duration of the switches, by using the concept of barycenter. The obtained algorithms, to be generalized to  $n$ -legs inverters, comprise a reduced numbers of logical and arithmetic operations.

The formalisme is secondly applied to the three-phase induction machine with  $q$  rotoric bars. This allows us to clarify the concept of equivalent two-phase rotor. The five-phase induction machine is also modelized and the developped approach highlighths the conditions that the five legs inverters must verify to supply it correctly.

In the latest part, a PWM current source inverter is studied with the formalism. The non-linearities of the control are vectorially taken into account, and particularly this one relative to the minimal duration of conduction of the switches. Finally, we describe the material implementation of the control on a 16-bits microcontroler, and present experimental results in the case of a load composed of a three-phase induction machine with capacitors in parallel.

---

## KEY WORDS

Polyphase, pentaphase, hexaphase, complex phasor, space vector, Pulse Width Modulation, PWM, barycenter, induction machine, voltage-source inverter, VSI, current-source inverter, CSI, homopolar.

---

## DISCIPLINE: GÉNIE ÉLECTRIQUE

Laboratoire L2EP, USTL UFR IEEA bat P2 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex



CHAPITRE I	PRELIMINAIRES .....	3
------------	---------------------	---

**I. Tour d’horizon des formalismes utilisés en électrotechnique et électronique de puissance .....3**

**I.1. Formalisme Matriciel.....3**

**I.2. Formalisme des vecteurs d’espace ou phaseurs complexes .....5**

**II. Mise en situation du travail des chapitres 2 et 3 .....7**

**II.1. Chapitre 2 .....7**

**II.2. Chapitre 3 .....12**

**III. Présentation des outils mathématiques .....13**

**III.1. Espace euclidien .....13**

III.1.1. Définition ..... 13

III.1.2. Produit scalaire ..... 14

III.1.3. Espaces orthogonaux ..... 14

III.1.4. Barycentre ..... 14

III.1.4.a. Barycentre de deux points ..... 14

III.1.4.b. Barycentre de trois points non alignés : ..... 15

**III.2. Espace hermitien .....15**

III.2.1. Définitions ..... 15

III.2.2. Produit scalaire « hermitien » ..... 16

**III.3. Morphisme d’espace vectoriel.....16**

III.3.1. Définition ..... 16

III.3.2. Noyau d’un morphisme  $f$  (« Kernel »)..... 16

III.3.3. Image ..... 16

III.3.4. Bijectivité, injectivité, surjectivité ; relations utiles ..... 17

III.3.5. Valeur propre – vecteur propre- polynôme caractéristique..... 17

III.3.6. Diagonalisable – trigonalisable - base de vecteurs propres..... 17

**III.4. Comparaison plan complexe, plan euclidien .....18**



## CHAPITRE II ÉTUDE DE MODULATEUR D'ENERGIE A L'AIDE D'UN FORMALISME VECTORIEL..... 20

### **I. Introduction au formalisme par l'exemple..... 20**

#### **I.1. Espaces vectoriels associés à la source et à la charge..... 21**

#### **I.2. Alimenter, c'est créer un morphisme ..... 21**

#### **I.3. Caractère discret du modulateur ..... 24**

#### **I.4. Commande de type M.L.I. à période de hachage constante..... 26**

##### I.4.1. Avec deux vecteurs ..... 29

###### I.4.1.a. Segment $[M_1, M_2]$ ..... 29

###### I.4.1.b. Segment $[M_1, M_3]$ ..... 30

###### I.4.1.c. Segment $[M_2, M_4]$ ..... 30

##### I.4.2. Avec trois vecteurs coplanaires..... 31

###### I.4.2.a. Travail au sein du triangle $[M_1, M_2, M_3]$ ..... 31

###### I.4.2.b. Triangle $[M_1, M_2, M_4]$ ..... 33

##### I.4.3. Avec les quatre vecteurs ..... 33

#### **I.5. Lois de commande ..... 34**

##### I.5.1. Commande complémentaire ou bipolaire ..... 34

##### I.5.2. Commande séquentielle ou unipolaire ..... 35

##### I.5.3. Commande à «double modulation» ..... 36

##### I.5.4. Onduleur pleine onde à trois niveaux de période $T_h$ ..... 37

#### **I.6. Conclusion ..... 39**

### **II. Généralisation de l'étude d'un modulateur d'énergie..... 40**

#### **II.1. Espaces vectoriels associés..... 41**

##### II.1.1. Espaces vectoriels associés au modulateur ..... 41

##### II.1.2. Espaces vectoriels associés aux sources ..... 42

#### **II.2. Familles de vecteurs engendrées par le modulateur ..... 43**

##### II.2.1. Famille discrète..... 43

##### II.2.2. Famille continue ..... 45

#### **II.3. Morphismes d'espace vectoriels ..... 46**

##### II.3.1. Morphismes entre modulateur et sources de courant ..... 47

##### II.3.2. Morphismes entre modulateur et sources de tension ..... 47

II.3.3. Morphisme entre modulateur et sources .....	48
<b>II.4. De l'usage des morphismes : synthèse d'une commande .....</b>	<b>48</b>
II.4.1. Commande en tension de la source de courant .....	48
II.4.2. Commande en courant de la source de tension .....	50
II.4.3. Commande en courant et en tension .....	50
II.4.4. Commande « instantanée » ou « en amplitude » .....	51
II.4.5. Commande « aux valeurs moyennes » ou « en durée » .....	51
<b>II.5. Conclusion.....</b>	<b>55</b>
<b>III. Étude d'un onduleur de tension triphasé deux niveaux.....</b>	<b>57</b>
<b>III.1. Espaces vectoriels et familles engendrées de vecteurs .....</b>	<b>57</b>
III.1.1. Espace vectoriel associé au modulateur .....	57
III.1.2. Espace vectoriel associé aux sources de courant .....	58
III.1.3. Familles engendrées.....	58
III.1.3.a. Famille discrète .....	58
III.1.3.b. Famille continue.....	59
<b>III.2. Morphisme entre modulateur et sources de courant .....</b>	<b>59</b>
III.2.1. Considérations sur le nombre de phases $n$ des sources de courant.....	59
III.2.1.a. Nombre de phases inférieur ou égal à trois .....	59
III.2.1.b. Nombre de phases supérieur à trois.....	60
III.2.2. Étude du morphisme pour un couplage de trois sources en triangle .....	60
III.2.2.a. Recherche du noyau de $\mathcal{V}_c$ .....	61
III.2.2.b. Construction d'une nouvelle base de travail dans $\mathcal{E}_{c3}$ .....	61
III.2.2.c. Image d'un vecteur $\overrightarrow{v}_c$ .....	61
III.2.2.d. Étude de $\mathcal{H}_{nc}$ , l'image par $\mathcal{V}_c$ de $\mathcal{E}_{c3}$ .....	62
III.2.2.e. Bijection entre $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ et $\mathcal{H}_{nc}$ .....	63
III.2.2.f. Synthèse d'une commande aux valeurs moyennes.....	63
III.2.3. Étude du morphisme pour un couplage de trois sources en étoile sans neutre sorti.....	63
III.2.3.a. Recherche du noyau de $\mathcal{V}_c$ .....	64
III.2.3.b. Image d'un vecteur $\overrightarrow{v}_c$ .....	65
III.2.3.c. Étude de $\mathcal{H}_{nc}$ , l'image par $\mathcal{V}_c$ de $\mathcal{E}_{c3}$ .....	65
III.2.3.d. Bijection entre $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ et $\mathcal{H}_{nc}$ .....	66
III.2.3.e. Synthèse d'une commande aux valeurs moyennes.....	66
III.2.4. Étude du morphisme pour un couplage de trois sources en étoile AVEC neutre sorti... 66	
<b>III.3. Commande aux valeurs moyennes par vecteur d'espace .....</b>	<b>67</b>
III.3.1. Décomposition d'un vecteur .....	67

III.3.1.a. Sur deux vecteurs indépendants .....	68
III.3.1.b. Sur trois vecteurs indépendants .....	68
III.3.1.c. Sur une famille génératrice de quatre vecteurs.....	70
III.3.1.d. Vers une généralisation .....	72
III.3.2. Choix d'une décomposition – séquence de commutation .....	73
III.3.3. Validité de la requête de la commande .....	75
III.3.3.a. Cas du couplage étoile sans neutre sorti : étude d'un exemple .....	76
<i>a. i Caractérisation de l'image par <math>\mathcal{V}_c</math> du cube</i> .....	76
<i>a. ii Examen de l'appartenance à un hexagone</i> .....	78
III.3.3.b. Cas du couplage triangle .....	80
III.3.3.c. Cas du couplage avec neutre sorti .....	81
III.3.4. Commande « classique » d'un onduleur de tension.....	84
III.3.4.a. Détermination du domaine d'excursion pour un vecteur $\vec{v}_c$ solution .....	84
III.3.4.b. Exemple de synthèse par M.L.I. intersective .....	86
<i>b. i Condition d'égalité entre les tensions <math>u_{ck}</math> et <math>v_{ck}</math></i> .....	86
<i>b. ii Domaine d'excursion</i> .....	87
<i>b. iii Détermination des instants de commutation</i> .....	88
<i>b. iv Comparaison avec la commande par vecteur d'espace</i> .....	89
<i>b. v Résumé</i> .....	91
III.3.5. Utilisation du morphisme bijectif $\mathcal{V}_{cr}$ .....	91
III.3.5.a. Cas du couplage triangle .....	92
III.3.5.b. Cas du couplage étoile sans neutre sorti .....	93
III.3.5.c. Équivalence avec les phaseurs complexes .....	94
III.3.6. Commande d'un onduleur de tension avec « harmonique trois» ou « homopolaire » ..	95
III.3.6.a. Présentation .....	95
III.3.6.b. Étude des différents cas.....	96
III.3.6.c. Application à l'étude d'une commande « optimale » .....	98
<b>III.4. Conclusion.....</b>	<b>104</b>

CHAPITRE III MACHINE ELECTRIQUE POLYPHASEE MODELISEE  
A L' AIDE D' UN FORMALISME VECTORIEL..... 107

**I. Étude d'une machine « diphasée équivalente »..... 107**

**I.1. Le modèle ..... 108**

**I.2. Formulation vectorielle ..... 108**

I.2.1. Expression dans deux repères simultanément ..... 108

I.2.2. Changement de repère de travail..... 110

I.2.3. Expression des puissances et du couple ..... 111

**I.3. Conclusion ..... 114**

**II. Étude d'une machine asynchrone triphasée à cage ..... 114**

**II.1. Expression des flux captés par les phases statoriques et rotoriques ..... 115**

II.1.1. Étude de  $f_{ss}$  ..... 116

II.1.2. Étude de  $f_{rr}$  ..... 119

II.1.3. Étude de  $f_{sr}$  ..... 123

II.1.4. Étude de  $f_{rs}$  ..... 126

**II.2. Équations en tension ..... 128**

**II.3. Conclusion..... 130**

**III. Étude d'une machine asynchrone pentaphasée ..... 132**

**III.1. Le modèle ..... 132**

**III.2. Expression des flux captés par les phases statoriques et rotoriques ..... 133**

III.2.1. Étude de  $f_{ss}$  et  $f_{rr}$  ..... 135

III.2.2. Étude de  $f_{sr}$  et  $f_{rs}$  ..... 136

III.2.3. Expression finale..... 139

**III.3. Équations en tension. .... 140**

**III.4. Lien avec le formalisme complexe ..... 142**

**IV. Conclusion..... 143**

CHAPITRE IV    SYNTHESE    D'UN    ONDULEUR    DE    COURANT  
TRIPHASE    COMMANDE    EN    MODULATION    DE  
LARGEUR    D'IMPULSIONS ..... 147

**I. Application du formalisme à l'onduleur de courant triphasé ..... 148**

**I.1. Espaces vectoriels associés ..... 148**

I.1.1. Espace vectoriel associé au modulateur ..... 148

I.1.2. Espaces vectoriels associés aux sources de tension ..... 149

**I.2. Familles de vecteurs engendrées par le modulateur ..... 149**

I.2.1. Famille discrète ..... 149

I.2.2. Famille continue ..... 151

**I.3. Morphisme entre le modulateur et les sources de tension ..... 151**

**I.4. Commande aux valeurs moyennes..... 152**

I.4.1. Recherche des trois points les plus proches ..... 153

I.4.2. Recherche des durées d'activation ..... 155

**II. Implantation matérielle de l'onduleur de courant..... 157**

**II.1. Contexte de la réalisation ..... 157**

II.1.1. Onduleur asservi en tension ..... 157

II.1.2. Source de courant..... 157

II.1.3. Conclusion ..... 158

**II.2. Recherche du secteur et des durées d'activation..... 158**

**II.3. Prise en compte d'une consigne trop grande et des durées minimales de conduction**

..... 161

II.3.1. Durée minimale de conduction ..... 161

II.3.2. Prise en compte de la saturation de la commande..... 163

II.3.3. Résumé ..... 164

**II.4. Choix des séquences ..... 164**

**II.5. Organisation matérielle pour la genèse des impulsions..... 164**

**II.6. Chronogramme d'une période T ..... 166**

**II.7. Relevés expérimentaux ..... 168**

<b>II.8. Conclusion.....</b>	<b>171</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>173</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>175</b>



# Introduction

On se propose de montrer dans ce mémoire comment l'usage de certains outils mathématiques du formalisme vectoriel contribue à l'étude des modulateurs d'énergie et des machines électriques. Ces outils permettent d'analyser des systèmes existants en formalisant et généralisant des résultats obtenus en triphasé par des approches inductives.

Les machines électriques, de plus en plus alimentées par des modulateurs d'énergie, doivent surtout à l'histoire de conserver leurs trois phases. Leurs performances tiennent en effet à un savoir – faire « patiemment » accumulé, dont les techniques de bobinage sont un exemple. Leur alimentation « classique » était de type sinusoïdale. Actuellement, elles pâtissent en général ([4], [39], [40], [56]) des échelons de tension que leur imposent les onduleurs de tension M.L.I. classiques à deux niveaux de tension.

C'est dans le domaine des fortes puissances que les problèmes sont les plus marqués. Les matériaux sont alors fortement sollicités et le transfert de puissance au travers de trois phases implique, dans les onduleurs deux niveaux, des interrupteurs de puissance de fort calibre (type GTO ou IGCT). Pour éviter ceci, tout en conservant la structure triphasée de la machine, une solution consiste à réaliser des onduleurs multiniveaux ([16], [20], [25], [26], [30], [43], [53], [55]) procurant une alimentation de meilleure qualité tout en nécessitant des interrupteurs de plus faibles calibres (type IGBT). Une autre approche cherche, dans la multiplication du nombre de phases ([37], [45], [46], [50], [62]), à répartir la puissance fournie à la machine. Cela permet de conserver des structures simples et éprouvées pour les onduleurs, avec réduction des problèmes thermiques et des perturbations électromagnétiques. Les classiques machines « double étoile » alimentée en tension en sont un exemple.

Que l'on augmente le nombre de niveaux ou celui de phases, la complexité accrue de ces nouveaux systèmes requiert à notre sens une approche qui doit pouvoir faire oublier ce nombre si grand soit-il.

Le chapitre 1 consiste en un rapide tour d'horizon sur les formalismes habituellement utilisés pour la commande des modulateurs d'énergie et des machines électriques. Les chapitres 2 et 3 sont ensuite situés dans leur contexte. On présente enfin les outils mathématiques qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Au chapitre 2, le classique « onduleur monophasé en pont » permet dans un premier temps de montrer par l'exemple l'intérêt des outils vectoriels introduits. Dans un deuxième temps,



est développé un formalisme généralisant la notion de vecteurs d'espace (ou phaseurs complexes). L'exemple d'application est celui de l'onduleur de tension triphasé à deux niveaux.

Le chapitre 3 traite des machines électriques à l'aide du même formalisme que celui développé pour les modulateurs. Là encore l'étude détaillée de morphisme conduit à dégager certaines propriétés de machines polyphasées. Le premier développement concerne la machine asynchrone triphasée à  $q$  barres rotoriques. Il nous permet dans un cas très classique de préciser la notion de rotor diphasé « équivalent ». Nous poursuivons par une machine pentaphasée. Son étude met en évidence une particularité de la machine triphasée par rapport aux machines polyphasées : un simple couplage « mécanique » en étoile ou en triangle permet de réduire à deux la dimension de l'espace vectoriel associé. Nous introduisons, dans l'optique d'une alimentation par modulateur de machine polyphasée, la notion de « couplage électrique » qui permet de définir une machine diphasée équivalente.

Enfin, au 4<sup>ième</sup> et dernier chapitre, le formalisme développé est mis en œuvre pour la synthèse pratique d'un onduleur de courant M.L.I. deux niveaux. C'est en fait lors de la réalisation de ce modulateur que s'est dégagée l'approche vectorielle que nous proposons. Elle nous a permis d'implanter, avec très peu de moyens de calculs, cette commande aux « vecteurs d'espace ».

# Chapitre I Préliminaires

## *I. Tour d'horizon des formalismes utilisés en électrotechnique et électronique de puissance*

On propose un rapide tour d'horizon sur les formalismes d'étude disponibles :

- celui qui se base sur une approche matricielle ;
- celui qui s'appuie sur la notion de vecteurs d'espace.

### I.1. Formalisme Matriciel

L'étude des systèmes électrotechniques à l'aide du formalisme matriciel n'est pas récente. La transformée de Park date ainsi de 1929. Le caractère multivariable de ces systèmes a effectivement mené naturellement vers cette présentation très pratique pour réaliser des calculs opérationnels (le produit et l'inversion de matrices en sont deux exemples). La présentation relativement synthétique ainsi obtenue a également contribué à son développement. On trouve en [36] une synthèse sur les nombreux travaux concernant ce formalisme dans l'étude des machines classiques. Le développement des interrupteurs et des moyens de calculs a permis une mise en application très forte de ces changements de repères. Pour la commande des machines en contrôle vectoriel se placer dans un « bon » repère permet d'obtenir ainsi des performances correctes en utilisant de simples correcteurs de type P.I..

Actuellement, il est possible d'alimenter des machines polyphasées de fortes puissances par des onduleurs de tension et non plus seulement par des commutateurs de courants ([37],[45]). L'étude des changements de repère pour ce type de machine doit permettre une meilleure commande des onduleurs de tension.

De même, des changements de repère plus complexes et délicats à opérer sont à notre portée. Obtenir de bonnes performances à partir d'actionneurs rustiques au coût de fabrication modeste devient possible ([15],[21],[22],[57]).

Mais que se cache-t-il derrière une **matrice** qui permet d'effectuer ces changements de repères ?

Dans la plupart des cas, une matrice est bien **plus qu'un simple tableau**. Elle permet de caractériser simplement un **morphisme\*** d'espaces vectoriels. Cette **simplicité** dans la représentation se paie par la **nécessité** de **choisir** dans chaque espace, de départ et d'arrivée du morphisme, **une base**. Un « mauvais » **choix**, souvent naturel, **masque** les **propriétés** caractéristiques du morphisme qui doivent être recherchées par ailleurs.

Ainsi, dans le cas très fréquent des **endomorphismes**♥, ces derniers sont caractérisés par leurs valeurs et vecteurs propres qui sont indépendants de tout choix de base. Leur recherche a mené à élaborer de très nombreuses transformées♣ (Fortescue, Park, Concordia, Clark, etc) qui permettent ensuite de travailler avec ces vecteurs, **propres** au morphisme. Si le système étudié permet de ne considérer que des endomorphismes alors le recours à la notion de **morphisme n'est guère utile**.

Par contre, dans le **cas plus général**© qui sera développé dans les chapitres suivants, un morphisme sera caractérisé par l'étude de son noyau et de son image. On peut ainsi par exemple examiner l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité du **morphisme** pour **connaître** au niveau d'une commande les **degrés de liberté** dont on dispose. L'usage des matrices n'apporte plus de simplification. Bien que mathématiquement équivalentes, nous leurs préférons le morphisme qui permet d'insister sur le caractère vectoriel des grandeurs manipulées **en oubliant les coordonnées**. C'est seulement lors de l'implantation matérielle

---

\* *Un morphisme  $f$  est une application linéaire d'un espace vectoriel de départ  $E$  vers un espace vectoriel d'arrivée  $F$ . À tout vecteur  $\vec{x}$  de  $E$  on associe le vecteur  $\vec{y}$  de  $F$  par :  $\vec{y} = f(\vec{x})$ . C'est le cas des matrices inductances d'une machine électrique.*

♥ *Un endomorphisme est un morphisme pour lequel espace de départ et d'arrivée sont confondus. Toute matrice le caractérisant est alors dite carrée (autant de lignes que de colonnes). C'est le cas des matrices inductances propres d'une machine électrique.*

♣ *Une transformée n'est autre qu'une matrice de changement de bases.*

© *Par exemple, c'est le cas d'une matrice d'inductance mutuelle entre un stator à  $q$  phases et un rotor à  $n$  phases (cf. chapitre 3). Ces matrices sont alors « rectangulaires » ( $q$  lignes et  $n$  colonnes). Un autre exemple est celui du morphisme caractérisant l'alimentation d'une machine asynchrone (espace de dimension 2) par un onduleur de tension triphasé deux niveaux (espace de dimension 3).*

qu'il faut revenir à la formulation matricielle par projection des vecteurs dans une base ou une autre.

## 1.2. Formalisme des vecteurs d'espace ou phaseurs complexes

Le **plan complexe** est bien connu en électrotechnique notamment de par l'usage du vecteur de **Fresnel**. On rappelle que ce dernier est obtenu à partir d'un signal  $A \cos \omega t$  en définissant le vecteur « complexe » associé  $A (\cos \omega t + j \sin \omega t)$  ce qui donne un vecteur d'amplitude constante qui tourne à la vitesse  $\omega$ . Cette notion peut être d'ailleurs généralisée en faisant appel à la transformée de Hilbert [14],[13]. Est associé à un signal  $x(t)$  un vecteur complexe aussi appelé « **phaseur** » **complexe** ou signal analytique complexe :  $\underline{X}(t) = x(t) + j \text{TH}^H(x(t))$ . Il est alors possible de définir, par l'argument de  $\underline{X}(t)$ , la phase instantanée de  $\underline{X}(t)$  et donc de  $x(t)$ . Il apparaît que, déjà dans le cadre d'une charge monophasée caractérisée par une tension  $u(t)$  et un courant  $i(t)$ , le plan complexe comporte un intérêt certain [8]. Mais ce n'est pas de cette notion dont il est question lorsqu'on utilise l'appellation « vecteur d'espace ». L'espace n'y est effectivement pas présent.

Dans le domaine électrotechnique, certaines spécificités ont permis d'utiliser le plan complexe dans d'autres conditions liées notamment à la disposition spatiale des bobinages d'une machine électrique triphasée.

Ainsi, cette notion de vecteur d'espace est introduite **classiquement** ([62], [38]) en considérant la force magnétomotrice tournante obtenue par somme de trois **forces magnétomotrices** sinusoïdales créées par trois bobinages déphasés spatialement de  $2\pi/3$ .

Nous proposons ci-après **une autre introduction** basée sur des considérations un peu plus mathématiques et qui ne nécessitent nullement le recours à la notion de force magnétomotrice. Cette dernière est d'ailleurs très peu présente en électronique de puissance, domaine qui use fréquemment des vecteurs d'espace.

---

<sup>H</sup> avec TH transformation de Hilbert de  $x(t)$ . Cette transformée est un filtre linéaire de gain complexe  $-j \text{sgn}(\omega)$  avec  $\text{sgn}$  la fonction signe. On a donc  $y(\omega) = -j \text{sgn}(\omega) \cdot x(\omega)$  ou encore

dans le domaine temporel :  $y(t) = \text{TH}(x(t)) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\theta) d\theta}{t - \theta} \right)$  avec vp valeur principale au

sens de Cauchy. **L'exemple le plus connu est bien entendu :  $\sin(\omega t) = \text{TH}(\cos(\omega t))$**

Les systèmes triphasés sont historiquement très fréquents. Il est tentant de considérer les trois courants et tensions associées comme les coordonnées de vecteurs d'un espace de dimension trois. En fait, les couplages usuellement réalisés et la nature habituellement « symétrique » des systèmes permettent de montrer que ces vecteurs courant et tension appartiennent à un plan (cf. chapitres 2 et 3) qui est bien sûr isomorphe<sup>A</sup> au plan complexe. Il suffit alors de considérer  $\vec{i}_p$  et  $\vec{v}_p$ , les projections des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{v}$  dans ce plan. S'introduit alors naturellement (cf. chapitres 2 et 3) des vecteurs « d'espace » du type suivant :

$\underline{X}(t) = c(x_1(t) + a x_2(t) + a^2 x_3(t))$  avec  $c$  un coefficient,  $a = \exp\left(j\frac{2\pi}{3}\right)$  et  $x_k$  courant ou tension associé à la phase  $n^\circ k$ .

*Remarque 1 : l'utilisation du plan complexe n'est liée en aucune façon à des contraintes temporelles sur les courants ou tensions qui ne sont pas forcément sinusoïdaux dans le temps. L'appellation de vecteurs « d'espace » permet de mettre en exergue ce fait.*

*Remarque 2 : Bien entendu, utiliser un même plan complexe pour ces deux notions différentes mènent inexorablement à un mélange d'autant plus que lorsque les grandeurs triphasées sont sinusoïdales, le vecteur d'espace et le phaseur complexe (vecteur de Fresnel) associés à une des phases se confondent si  $c = 2/3$ :*

$$\underline{X}(t) = \frac{2}{3}(x_1(t) + a x_2(t) + a^2 x_3(t)) = \frac{2}{3}\left(A \cos(\omega t) + a A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + a^2 A \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right) = A[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)].$$

*Aussi utilise-t-on souvent indistinctement les appellations phaseur complexe et vecteur d'espace.*

*Remarque 3 : dans la référence[8], l'auteur propose la notion de « monophasé » pour généraliser celle du vecteur de Fresnel qu'il distingue*

---

<sup>A</sup> il est possible de définir un morphisme bijectif entre deux espaces vectoriels isomorphes.

*également de celle de phaseur spatial (vecteur d'espace, « space vector »). La définition proposée ne permet toutefois pas, contrairement à la transformation de Hilbert, d'associer un unique « monophaséur » à un signal réel.*

*Remarque 4 : dans la référence [33] une généralisation de la notion de vecteur d'espace (phaseur complexe) est proposée également par analogie.*

Pourquoi avoir introduit cette notion de vecteur d'espace qui n'apporte rien théoriquement aux approches matricielles? Les points suivants sont probablement des éléments de justification :

- utilisation du plan complexe bien connu (grâce au vecteur de Fresnel) ;
- utilisation du plan complexe au sein duquel les rotations s'expriment très simplement par l'opérateur  $\exp(j\phi)$  ;
- visualisation graphique dans un plan. Les changements de référentiels apparaissent très simplement en commande de machines électriques;
- évaluation des durées de conduction des interrupteurs par simple « projection » pour la commande de modulateurs d'énergie ; on traduit les équations instantanées par des constructions géométriques aussi simples que celles réalisées avec les vecteurs de Fresnel .

Notre démarche ne fera pourtant pas appel au **plan complexe**. En effet, ce dernier ne permet a priori que l'étude des  **systèmes**  dont les vecteurs courant et tension appartiennent évidemment à un espace de  **dimension 2** . Pour développer le formalisme, nous considérerons des espaces de dimension  $k$  supérieure ou égale à deux. On montrera ensuite dans quelles conditions un plan vectoriel suffit à l'étude. Dans ce cas, un morphisme bijectif permettra de retrouver simplement la notion de phaseurs complexes (vecteur d'espace) telle qu'elle est actuellement utilisée.

## **II. Mise en situation du travail des chapitres 2 et 3**

### **II.1. Chapitre 2**

Les modulateurs d'énergie sont l'objet de nombreuses études. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux méthodes de synthèse de leur commande. Historiquement, ils

ont d'abord été utilisés pour alimenter les charges monophasée et triphasée correspondant aux réseaux classiquement disponibles. Les structures adoptées permettaient alors avec des outils mathématiques simples et une bonne analyse d'obtenir différentes lois de commandes [3],[16],[53]. Néanmoins, il est apparu nécessaire avec l'expérience de proposer d'autres méthodes qui guident plus le concepteur : la notion de vecteur d'espace (« space vector ») dont le caractère graphique permet d'utiliser la géométrie, est bien adaptée aux systèmes triphasés usuels; l'approche matricielle permet également en utilisant les notions de fonctions de connexion et de conversion [26] de sortir, de par son caractère général, du cadre des charges mono et triphasée.

Notre démarche a consisté à essayer de poursuivre cet effort de synthèse en proposant l'usage d'outils mathématiques classiques mais peu exploités en commande.

Il nous a semblé intéressant de mettre en scène ces outils au sein de paysages familiers (l'onduleur monophasé en pont et l'onduleur triphasé) afin qu'il soit plus aisé de juger de leur intérêt. Cette même démarche a permis déjà de visiter à nouveau les onduleurs par l'approche matricielle [10],[11],[17],[18], [23]. Les résultats obtenus sont bien entendus connus même si le moyen d'y parvenir est original. Nous avons cherché à conserver la généralité de l'approche matricielle tout en bénéficiant du support visuel et géométrique des vecteurs d'espace\*.

Nous proposons **dans un premier temps** la structure très simple de la charge monophasée alimentée par deux bras d'interrupteurs (hacheur quatre quadrants ou onduleur monophasé en pont). En effet, lors de la présentation de ce type de structure, les ouvrages classiques [3],[16], [26] considèrent très rapidement la différence de potentiel appliquée  $u = v_B - v_A$  à la charge. Ils étudient ensuite les effets des différents modes de commande sur les formes d'onde de la tension appliquée à la charge qui est dite « monophasée ». L'analyse fait apparaître alors deux degrés de liberté au niveau du contrôle de  $v_B - v_A$ , du fait de l'indépendance des deux potentiels  $v_A$  et  $v_B$ .

---

\* on bénéficie surtout des outils mathématiques de la géométrie comme le barycentre. Le caractère visuel s'estompe au delà des espaces de dimension deux et trois alors que les propriétés géométriques ne connaissent pas de limite liée à la dimension de l'espace.

Nous cherchons à traduire mathématiquement, sans tenir compte de la charge, le fait que l'utilisation de deux cellules de commutation permet de commander indépendamment les deux potentiels  $v_A$  et  $v_B$ . On associe pour cela un espace de dimension deux au modulateur d'énergie. Il signifie cette indépendance des potentiels  $v_A$  et  $v_B$ . La dimension deux nous incite à envisager la charge « monophasée » plutôt comme diphasée couplée (deux phases en série ou en parallèle). En dissociant le plus possible le modulateur de sa charge, on insiste ainsi sur ses caractéristiques intrinsèques. L'onduleur « monophasé » en pont peut donc bien entendu alimenter une charge « diphasée » couplée en étoile avec neutre sorti (cf. Figure 2).

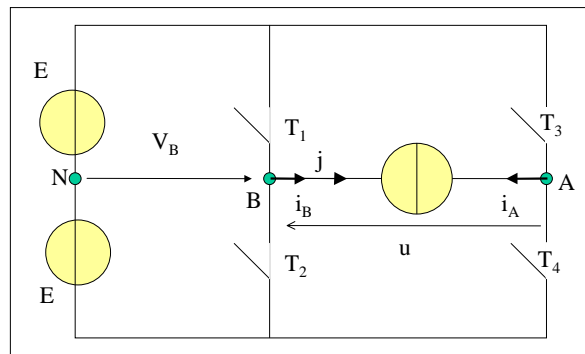


Figure 1, onduleur monophasé

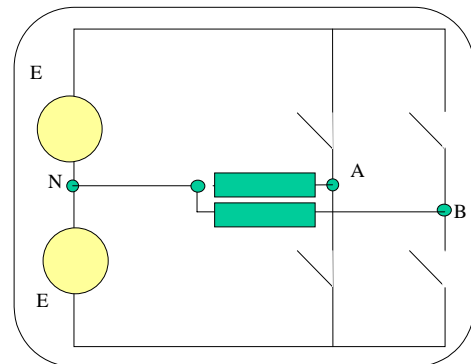


Figure 2, charge diphasée

Une fois introduit la notion d'espace vectoriel, on exploite celle de morphisme qui lui est directement associée.

Cette première étape nous a permis d'introduire des notions mathématiques à partir de quelques remarques. La deuxième phase consiste à amorcer la formalisation des concepts dont l'onduleur de tension triphasé deux niveaux bénéficie dans la troisième partie du chapitre.

C'est l'analyse bibliographique concernant la commande de l'onduleur de tension deux niveaux triphasé qui nous a encouragé à développer cette approche vectorielle.

En effet, ce modulateur, bien que connu depuis de nombreuses années ([29]), fait néanmoins encore l'objet d'études. La commande de type M.L.I. y occupe une large place, qu'elle soit obtenue par une analyse des formes d'onde ([5], [7], [11], [12], [28], [33], [53]) ou par l'usage des phaseurs complexes. Il faut à ce propos noter qu'au sein de certains travaux utilisant les phaseurs complexes, ([49],[63]), ce n'est pas tant le plan complexe qui est utilisé mais plutôt un plan vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire. En effet utiliser le plan



complexe n'est pas forcément toujours la meilleure approche : les produits scalaire et vectoriel y sont d'un usage moins commode. C'est également le même constat qui peut être fait pour les commandes « en instantanée » du type DTC ([24], [41], [48],[58]) où, là encore, le plan vectoriel euclidien est mieux adapté. Ce type de constat nous a encouragé également à abandonner le plan complexe, par trop réducteur.

Revenons à l'onduleur triphasé. Par rapport à son homologue monophasé en demi-pont, ses possibilités de commande sont plus étendues. Historiquement pourtant, il a bien été considéré comme une simple association de 3 onduleurs monophasés demi-pont. C'est le cas lorsque la charge triphasée est couplée en étoile avec **neutre sorti** et relié au point O.

*On rappelle que la technique classique qui permet d'obtenir une tension moyenne sinusoïdale  $\langle v_1 \rangle(t)$  consiste à déterminer les instants de commutation en réalisant l'intersection entre deux signaux l'un sinusoïdal, l'autre triangulaire (M.L.I. intersective). Dans ce cas, il faut néanmoins remarquer que le potentiel O est un point milieu entre deux sources de tensions  $+E$ ,  $-E$ .*

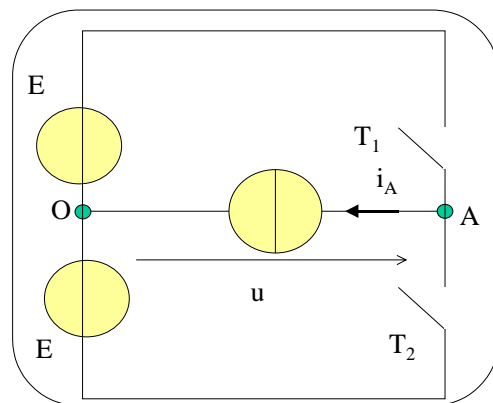


Figure 3, onduleur monophasé demi-pont

*Pour obtenir 3 tensions sinusoïdales  $\langle v_1 \rangle(t)$ ,  $\langle v_2 \rangle(t)$  et  $\langle v_3 \rangle(t)$  déphasées de  $2\pi/3$  entre elles, il suffit de déphaser pareillement de  $2\pi/3$  puis de  $4\pi/3$  le signal de commande monophasé généré pour obtenir  $\langle v_1 \rangle$ .*

En fait, la charge triphasée qu'alimente l'onduleur est rarement couplée en étoile avec neutre sorti <sup>⊗</sup>. L'onduleur triphasé ne peut plus alors être simplement considéré comme l'association de trois onduleurs monophasés en demi-pont. Ce sont les couplages sans neutre sorti ou en triangle qui ont plus le vent en poupe. Cette différence implique que les 3 tensions  $\langle v_1 \rangle(t)$ ,  $\langle v_2 \rangle(t)$  et  $\langle v_3 \rangle(t)$  ne sont plus indépendantes. Or l'onduleur triphasé permet de contrôler 3 potentiels. Il reste donc un degré de liberté dont l'exploitation mène aux commandes « suboptimale », « à injection d'harmonique 3 » ou avec « homopolaire ». Le

<sup>⊗</sup> lors de la prise en compte de la capacité parasite entre le point neutre d'une machine couplée en étoile et la « terre », on retrouve tout de même ce type de charge triphasée [32].

contrôle par vecteur d'espace couramment présenté use également de ce paramètre de réglage mais de façon implicite.

Que peut-il apporter ?

- Une meilleure exploitation de la source de tension ([5],[27], [53]) ;
- Un nombre de commutations réduit d'un tiers ([5],[11]) ;
- Une valeur efficace de l'ondulation de courant moindre pour la charge ([5]) ;
- Une autre possibilité de réglage des harmoniques de tension ([6],[7],[31]) ;
- un meilleur contrôle du fonctionnement en surmodulation ([27],[28]) ;
- Une réduction des perturbations électromagnétiques ([9]).

Nous avons cherché à développer une méthode générale au sein de laquelle l'existence d'un degré de liberté s'exprime mathématiquement. Le nombre de degré de liberté correspond ainsi à la dimension du noyau d'un morphisme. Il est vrai que la présence d'un seul degré de liberté en triphasé a permis d'utiliser des approches plus simples mais néanmoins moins « visuelles » que celle que nous proposons. Si on désire par contre étudier des systèmes où ce nombre devient plus élevé<sup>A</sup>, alors notre approche trouve un intérêt supplémentaire en raison de son caractère plus général. Ainsi, on retrouve dans [12] les mêmes résultats qui apparaissent naturellement dans la représentation graphique tridimensionnelle que nous proposons en fin de chapitre 3.

En exploitant cette méthode vectorielle dans le cas d'une commande aux valeurs moyennes, nous avons trouvé d'autres formulations pour les durées de conductions des interrupteurs, formulations usant des notions aisément généralisables de barycentre et de produit mixte.

Par ailleurs, dans le cadre de commande en « amplitude », de type DTC par exemple, là encore la présentation vectorielle est un atout : des calculs de distance euclidienne permettent par exemple de choisir le vecteur « le plus proche » d'un vecteur désiré. C'est d'ailleurs actuellement l'approche par phaseurs complexes qui est majoritairement utilisée dans ce type de commande.

---

<sup>A</sup> *par exemple pour une machine hexaphasée double étoile alimentée par un onduleur à 6 bras*

## II.2. Chapitre 3

Il est nécessaire lors de la synthèse d'une commande de modulateur de décrire correctement les sources. Si le formalisme de description est le même que celui utilisé pour le modulateur, l'intérêt est évident. Ainsi, Peter Vas a longuement développé la théorie des phaseurs complexes dans [62], ce qui permet une approche cohérente des systèmes qui peuvent s'étudier dans le plan complexe. Notre démarche est sensiblement identique. Nous avons voulu par ailleurs montrer ce que peuvent apporter ces outils à l'étude des machines.

Dans un premier temps, on traite de la machine asynchrone triphasée à cage comportant  $q$  barres au rotor. Le sujet a été traité dans [47],[35]. Notre approche permet de préciser la notion de rotor diphasé « équivalent » mais surtout en raison de sa démarche générale de traiter le cas des machines dont les nombres de phases statoriques et rotoriques sont différents.

Nous avons voulu montrer l'apport du formalisme dans le domaine des machines polyphasées en étudiant la machine asynchrone pentaphasée.

Relativement peu étudiée, la présence de ses deux phases supplémentaires nous autorise pourtant à exploiter les harmoniques de rang 3 des forces magnétomotrices [59] pour pouvoir créer plus de couple (+10%). Par ailleurs, augmenter le nombre de phases permet de diminuer la puissance qui doit être fournie à chacune d'entre elles.

Cette machine souffre probablement de sa proximité par son nombre de phases avec la machine triphasée. En effet, certaines propriétés de cette dernière disparaissent pour deux phases supplémentaires seulement :

- Ainsi, la notion de phaseur complexe montre là ses limites puisque même après un couplage en étoile sans neutre sorti, la dimension de l'espace d'étude est au premier abord de quatre et donc non réductible au plan complexe. La possibilité d'une représentation graphique disparaîtrait donc.
- Par ailleurs, pour la machine triphasée, un couplage « mécanique » des phases (triangle ou étoile sans neutre sorti) permet d'obtenir une machine diphasée équivalente. Qu'en est-il pour cette machine pentaphasée ? En fait, on met en évidence que, dans le cas d'une modélisation au premier harmonique pour les forces magnétomotrices, les tensions d'alimentation doivent vérifier deux relations (on définira la notion de **couplage électrique**) afin de pouvoir définir une machine

diphassée « équivalente ». Or, si la commande de l'onduleur 5 bras ne cherche pas à vérifier au mieux ces deux relations, on peut s'attendre à générer des courants qui produiront très peu de couple mais des pertes Joule. Une commande rustique qui consiste à déphaser les commandes de chaque bras de  $2\pi/5$  entre elles est loin d'être une commande optimale<sup>A</sup>.

Bien entendu, notre démarche peut s'appliquer à la machine plus connue industriellement dans le domaine des fortes puissances qu'est la machine hexaphasée double étoile ([42], [45], [50], [64]).

### **III. Présentation des outils mathématiques**

Nous avons essayé dans la rédaction de ce mémoire de rappeler au fur et à mesure, par des notes de bas de page, les définitions des outils mathématiques employés. Il nous apparaît néanmoins souhaitable d'en proposer également une présentation groupée.

#### **III.1. Espace euclidien**

##### **III.1.1. Définition**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps des réels  $\mathbf{R}$ . Une forme bilinéaire symétrique positive et non dégénérée est une application  $f$  de  $E^2$  dans  $\mathbf{R}$  vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout  $\vec{b} \in E$ , l'application  $\vec{a} \rightarrow f(\vec{a}, \vec{b})$  est linéaire ;
- pour tout  $\vec{a} \in E$ , l'application  $\vec{b} \rightarrow f(\vec{a}, \vec{b})$  est linéaire ;
- $\forall \vec{a} \in E$  et  $\forall \vec{b} \in E$ ,  $f(\vec{a}, \vec{b}) = f(\vec{b}, \vec{a})$  ;
- $\forall \vec{a} \in E$ ,  $f(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$  ;
- la proposition  $(\forall \vec{b} \in E, f(\vec{a}, \vec{b}) = 0)$  implique  $\vec{a} = \vec{0}$ .

Un espace euclidien est un espace vectoriel sur le corps  $\mathbf{R}$  des réels sur lequel est définie une forme bilinéaire  $f$  symétrique positive et non dégénérée.

---

<sup>A</sup> Une commande avec des tensions sinusoïdales en instantanée et déphasées de  $2\pi/5$  entre elles est par contre correcte.

### III.1.2. Produit scalaire

Dans un espace euclidien  $E$ , on nomme produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  le nombre **réel**  $f(\vec{a}, \vec{b})$  noté  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . La norme de tout vecteur  $\vec{a} \in E$  est  $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ .

Il est à noter que ce produit scalaire est commutatif :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

Dans notre étude le produit scalaire est défini par :  $f(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$  avec :

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  base orthonormée,  $\vec{a} = a_1 \vec{x} + a_2 \vec{y} + a_3 \vec{z}$  et  $\vec{b} = b_1 \vec{x} + b_2 \vec{y} + b_3 \vec{z}$ .

### III.1.3. Espaces orthogonaux

Deux espaces vectoriels sont orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre.

### III.1.4. Barycentre

#### III.1.4.a. Barycentre de deux points

(1) Le barycentre  $M$  de deux points  $M_1$  et  $M_2$  affectés des poids<sup>A</sup> respectifs  $\frac{t_1}{T}$  et  $\frac{t_2}{T}$  avec  $t_1 + t_2 = T$  vérifie par définition la relation :

$$\vec{OM} = \frac{t_1}{T} \vec{OM}_1 + \frac{t_2}{T} \vec{OM}_2 ;$$

(2) Le barycentre  $M$  de deux points  $M_1$  et  $M_2$  appartient au segment  $[M_1 M_2]$ . En effet,

$$\vec{OM} = \frac{t_1}{T} \vec{OM}_1 + \frac{t_2}{T} \vec{OM}_2 = \frac{t_1}{T} \vec{OM}_1 + \frac{T-t_1}{T} \vec{OM}_2 = \vec{OM}_2 + \frac{t_1}{T} \vec{M}_2 \vec{M}_1 . \text{ Il vient}$$

$$\text{donc } \vec{M}_2 \vec{M} = \frac{t_1}{T} \vec{M}_2 \vec{M}_1 .$$

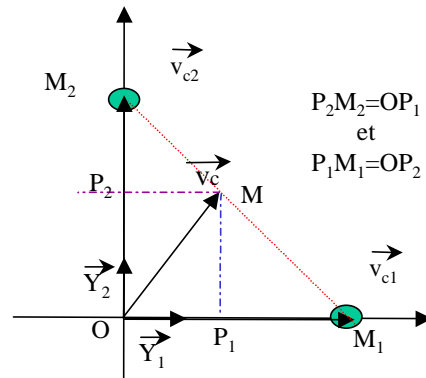


Figure 4, recherche des coordonnées barycentriques

$$\frac{t_1}{T} \text{ et } \frac{t_2}{T} \text{ de } M \text{ dans le repère } (M_1, M_2)$$

<sup>A</sup> Les poids sont également appelés coordonnées barycentriques

(3) On vérifie les relations suivantes :  $\frac{t_1}{T} = \frac{OP_1}{OM_1}$  et  $\frac{t_2}{T} = \frac{OP_2}{OM_2}$  avec  $P_1$  et  $P_2$  définis

en Figure 4. En effet,  $\overrightarrow{OM} = \frac{t_1}{T} \overrightarrow{OM_1} + \frac{t_2}{T} \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$  d'où le résultat puisque  $\overrightarrow{OP_1}$  et  $\overrightarrow{OP_2}$  sont orthogonaux.

**III.1.4.b. Barycentre de trois points non alignés :**

(1) Un point  $M$  barycentre de trois points  $M_1, M_2$  et  $M_3$  affectés des poids respectifs

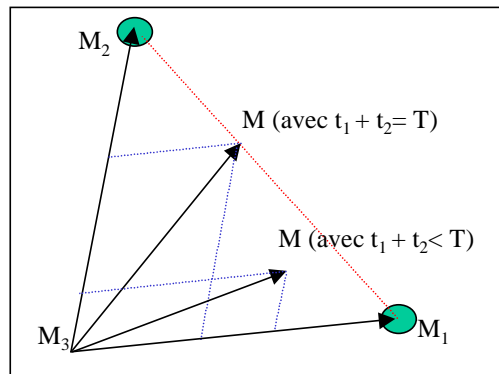
$\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}$  et  $\frac{t_3}{T}$  avec  $t_1 + t_2 + t_3 = T$  vérifie par définition la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{t_1}{T} \overrightarrow{OM_1} + \frac{t_2}{T} \overrightarrow{OM_2} + \frac{t_3}{T} \overrightarrow{OM_3}$$

(2) Le point  $M$  appartient au triangle  $[M_1 M_2 M_3]$ . En effet :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{t_1}{T} \overrightarrow{OM_1} + \frac{t_2}{T} \overrightarrow{OM_2} + \frac{t_3}{T} \overrightarrow{OM_3} = \\ &= \frac{t_1}{T} \overrightarrow{OM_1} + \frac{t_2}{T} \overrightarrow{OM_2} + \frac{T - t_1 - t_2}{T} \overrightarrow{OM_3} \end{aligned}$$

$$\text{Il vient : } \overrightarrow{M_3M} = \frac{t_1}{T} \overrightarrow{M_3M_1} + \frac{t_2}{T} \overrightarrow{M_3M_2} .$$



L'examen de la Figure 5 prouve le résultat.

*Remarque :* si  $t_1 + t_2 = T$  alors  $M$  appartient au segment  $[M_2 M_1]$ .

Figure 5, mise en évidence du domaine géométrique accessible au point  $M$

**III.2. Espace hermitien**

**III.2.1. Définitions**

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps des complexes  $\mathbf{C}$ . Une forme hermitienne positive non dégénérée est une application  $f$  de  $E^2$  dans  $\mathbf{C}$  vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout  $\vec{b} \in E$ , l'application  $\vec{a} \rightarrow f(\vec{a}, \vec{b})$  est linéaire ;
- pour tout  $\vec{a} \in E$ , l'application  $\vec{b} \rightarrow \overline{f(\vec{a}, \vec{b})}$  est linéaire avec  $\overline{f(\vec{a}, \vec{b})}$  le complexe conjugué de  $f(\vec{a}, \vec{b})$ ;

- $\forall \vec{a} \in E, f(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$  ;
- la proposition ( $\forall \vec{b} \in E, f(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ) implique  $\vec{a} = \vec{0}$ .

Un espace hermitien est un espace vectoriel sur lequel est définie une forme hermitienne  $f$  positive non dégénérée.

### III.2.2. Produit scalaire « hermitien »

Dans un espace hermitien  $E$ , on nomme produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  le nombre **complexe**  $f(\vec{a}, \vec{b})$  noté  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . La norme de tout vecteur  $\vec{a} \in E$  est  $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ .

Dans notre étude le produit scalaire est défini par :  $f(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i \bar{b}_i$  avec :

$$\vec{a} = a_1 \vec{x} + a_2 \vec{y} + a_3 \vec{z} \text{ et } \vec{b} = b_1 \vec{x} + b_2 \vec{y} + b_3 \vec{z} .$$

Il est à noter que ce produit scalaire n'est **pas commutatif** :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{\vec{b} \cdot \vec{a}}$  . Néanmoins si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont à coordonnées réelles alors le produit scalaire est commutatif.

## III.3. Morphisme d'espace vectoriel

### III.3.1. Définition

Un morphisme  $f$  est une application linéaire d'un espace vectoriel de départ  $E$  vers un espace vectoriel d'arrivée  $F$ . À tout vecteur  $\vec{x}$  de  $E$  on associe le vecteur  $\vec{y}$  de  $F$  par :  $\vec{y} = f(\vec{x})$ .

### III.3.2. Noyau d'un morphisme $f$ (« Kernel »)

Noté  $\text{Ker} f$ , c'est le sous espace vectoriel de  $E$  dont l'image par  $f$  dans  $F$  est le vecteur nul.

### III.3.3. Image

Noté  $\text{Im} f$ , c'est le sous espace vectoriel de  $F$  engendré par l'ensemble des vecteurs  $\vec{y}$  de  $F$  qui sont l'image d'un vecteur  $\vec{x}$  de  $E$  ( $\vec{y} = f(\vec{x})$ ).

Le rang du morphisme  $f$ , noté  $\text{rg } f$ , est la dimension de  $\text{Im} f$ .

### III.3.4. Bijectivité, injectivité, surjectivité ; relations utiles

- ❖ Un morphisme est bijectif si tout vecteur de  $F$  est l'image d'un unique vecteur de  $E$ .  
Un tel morphisme est alors appelé isomorphisme ;
- ❖ Un morphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul :  
 $\text{Ker}f = \{ \vec{0} \}$  ;
- ❖ Un morphisme est surjectif si tout vecteur de  $F$  est l'image d'au moins un vecteur de  $E$ ;
- ❖ On a la relation suivante :  $\dim(\text{Ker}f) + \text{rg } f = \dim E$  ; on a donc  $\text{rg } f \leq \dim E$  et si  $\text{rg } f = \dim E$  alors  $f$  est bijective.

### III.3.5. Valeur propre – vecteur propre- polynôme caractéristique

#### Définitions :

- ❖ Un endomorphisme est un morphisme tel que les espaces de départ et d'arrivée sont confondus.
- ❖ Un scalaire  $\lambda$  est valeur propre d'un endomorphisme  $\varphi$  s'il existe un vecteur  $\vec{u}_\lambda$ , dit vecteur propre, tel que  $\varphi(\vec{u}_\lambda) = \lambda \vec{u}_\lambda$ .
- ❖ Le polynôme caractéristique de  $\varphi$  est défini par  $P_\varphi = \det(A - \lambda I_n)$ , avec  $I_n$  matrice identité et  $A$  matrice de  $\varphi$  dans une base.

#### Propriétés :

- ❖  $\lambda$  est valeur propre si et seulement si elle est racine du polynôme caractéristique  $P_\varphi$ .

### III.3.6. Diagonalisable – trigonalisable - base de vecteurs propres

#### Définitions :

- ❖ Un endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable s'il existe une base par rapport à laquelle  $\varphi$  est représenté par une matrice diagonale.
- ❖ Un endomorphisme  $\varphi$  est trigonalisable s'il existe une base par rapport à laquelle  $\varphi$  est représentée par une matrice triangulaire.
- ❖ l'espace propre  $E_\lambda$  associé à une valeur propre  $\lambda$  est défini par  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_E)$  avec  $\text{id}_E$  l'identité sur  $E$ .

#### Propriétés :

[P 1]  $\varphi$  est diagonalisable si et seulement si :



- son polynôme caractéristique est scindé, c'est à dire s'il peut s'exprimer sous la forme  $P_\varphi(z) = \prod_{k=1}^{k=p} (z - \lambda_k)^{n_k}$  avec  $p$  nombre de racines et  $n_k$  ordre de multiplicité de  $\lambda_k$ ;

ET

- la dimension de l'espace propre  $E_\lambda$  associé à une valeur propre  $\lambda$  est égale à l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  au sein du polynôme caractéristique.

[P 2]  $\varphi$  est diagonalisable si et seulement si  $E$  est somme directe des sous espaces propres de  $\varphi$ .

[P 3]  $\varphi$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres.

[P 4] Une condition suffisante pour que  $\varphi$  soit diagonalisable est que les racines de son polynôme caractéristique soient simples (ordre de multiplicité égal à 1).

[P 5]  $\varphi$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

(Corollaire : puisque tout polynôme à coefficient réels est scindé sur  $\mathbb{C}$ , toute une matrice carrée est trigonalisable dans  $\mathbb{C}$ )

[P 6] **Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et il existe une base orthonormée de vecteurs propres.**

(Application : toute matrice « inductance propre » est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Cette propriété est à la base des transformées de KU)

### III.4. Comparaison plan complexe, plan euclidien

Il est désormais classique lors d'une commande de modulateur d'énergie de considérer des phaseurs complexes de type suivant :  $\underline{v} = c(v_1 + a v_2 + a^2 v_3)$  avec  $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$  et  $c = \sqrt{\frac{2}{3}}$  ou  $c = \frac{2}{3}$ .

Le formalisme est donc celui du plan complexe.

A tout couple de réels  $(u_d, u_q)$  on associe le nombre complexe  $\underline{u} = u_d + j u_q$ .

Ce plan tire son intérêt de la simplicité avec laquelle s'exprime un endomorphisme  $\varphi$  de type **rotation** d'angle  $\theta$ . Comparons en effet à ce propos plan euclidien et plan complexe.

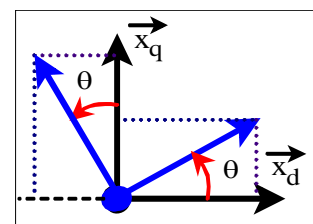


Figure 6

Dans le plan euclidien :

On notera  $\vec{i}$  l'image de  $\vec{u}$  par  $\varphi$  :

$$\vec{i} = i_d \vec{x}_d + i_q \vec{x}_q = \varphi(\vec{u}) = \varphi(u_d \vec{x}_d + u_q \vec{x}_q) .$$

Dans le plan euclidien  $(\vec{x}_d, \vec{x}_q)$  l'expression de  $\vec{i}$  est :

$$\vec{i} = \varphi(\vec{u}) = u_d(\cos\theta \vec{x}_d + \sin\theta \vec{x}_q) + u_q(-\sin\theta \vec{x}_d + \cos\theta \vec{x}_q),$$

soit encore, avec l'écriture matricielle,  $\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix}$ .

Dans le plan complexe : on obtient :  $\underline{i} = (\cos\theta + j \sin\theta) \underline{u} = e^{j\theta} \underline{u}$  .

Or, en électrotechnique, les endomorphismes fréquemment rencontrés ont une matrice symétrique et/ou circulante. Ils peuvent être décomposés sous forme de somme de rotations ce qui justifie l'intérêt de ce plan complexe.

Cette simplicité se paie par l'absence de produit scalaire :  $u_d i_d + u_q i_q = \text{Re}(\underline{u} \underline{i}^*)$  avec  $\underline{i}^*$  conjugué de  $\underline{i}$

De plus les notions introduites avec le plan euclidien se généralisent aisément en dimension n alors que ce n'est pas le cas du plan complexe.

## Chapitre II Étude de modulateur d'énergie à l'aide d'un formalisme vectoriel

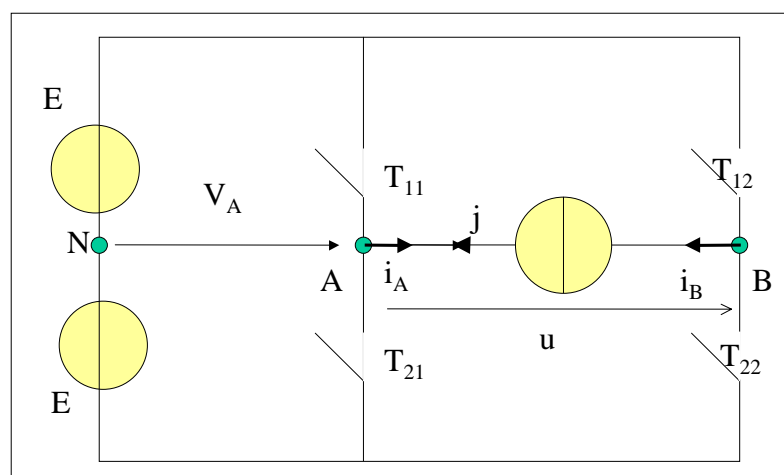
Dans une première étape sont introduits, lors de l'étude d'un cas simple, la démarche suivie pour l'étude d'un modulateur d'énergie ainsi que quelques éléments du formalisme.

La deuxième étape consiste à mettre en forme la méthode d'étude et à généraliser par induction des notions utilisées précédemment.

Dans la troisième on applique, toujours dans un cas connu mais plus complexe, le formalisme. Il apparaît alors qu'avec cette approche plusieurs types de commande d'un même modulateur d'énergie peuvent être synthétisés, justifiés et décrits.

### ***I. Introduction au formalisme par l'exemple***

À partir d'un générateur monophasé de tension d'amplitude  $2E$ , on alimente une charge monophasée de nature inductive, traversée par un courant  $j$ , et dont on note  $u$  la tension présente à ses bornes. Deux bras d'interrupteurs notés  $(T_{11}, T_{21})$  et  $(T_{21}, T_{22})$  permettent de connecter source et charge. Ils imposent respectivement un potentiel  $v_B, v_A$  par rapport au point neutre fictif  $N$  de la source de tension (cf. *Figure 7*). Enfin, les courants en sortie de chaque bras sont notés  $i_A$  et  $i_B$ .



*Figure 7, structure à deux bras avec point neutre fictif  $N$*

## 1.1. Espaces vectoriels associés à la source et à la charge

Les deux bras permettent d'imposer deux potentiels  $v_B$  et  $v_A$  indépendants. Vu de la charge (source de courant), ce couple  $(v_B, v_A)$  permet de caractériser l'ensemble source de tension – bras. Mais à cette notion de couple on préfère celle de vecteur. Il est alors naturel de définir un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}^A$  de dimension 2 noté  $\mathcal{E}_{c2}$ <sup>B</sup>.

Soit  $(\vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2})$  une base de  $\mathcal{E}_{c2}$ . On définit :

- $\vec{v}_c = v_A \vec{x}_{c1} + v_B \vec{x}_{c2}$
- $\vec{i}_c = i_A \vec{x}_{c1} + i_B \vec{x}_{c2}$

On munit  $\mathcal{E}_{c2}$  d'un produit scalaire<sup>C</sup> pour lui conférer une structure d'espace euclidien. Si on suppose de plus la base  $(\vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2})$  orthonormée, retrouver  $v_B$  et  $v_A$  à partir de  $\vec{v}_c$  est un jeu d'enfant :  $v_A = \vec{x}_{c1} \cdot \vec{v}_c$  et  $v_B = \vec{x}_{c2} \cdot \vec{v}_c$ .

Considérons à présent le modulateur d'énergie. De son point de vue, la charge est un circuit électrique qui comporte une seule source de courant<sup>D</sup>. Lui associer un espace vectoriel de dimension 1 noté  $\mathcal{E}_{1c}$  est naturel. Un vecteur unitaire de cette droite  $\mathcal{E}_{1c}$  est noté  $\vec{s}_{c1}$ <sup>E</sup>. On définit alors les vecteurs  $\vec{j} = j \vec{s}_{c1}$  et  $\vec{u} = u \vec{s}_{c1}$ .

## 1.2. Alimenter, c'est créer un morphisme

La connexion que l'on établit entre source et charge par l'intermédiaire des bras permet d'écrire :

$$u = v_B - v_A \text{ ainsi que } j = i_B = -i_A.$$

<sup>A</sup> Les scalaires sont des réels.

<sup>B</sup> On choisit l'indice **c** pour les sources de courant, l'indice **t** pour les sources de tension.

<sup>C</sup>  $\vec{v}_c \cdot \vec{i}_c = v_A i_A + v_B i_B$ .

<sup>D</sup> On peut aussi considérer qu'il y a deux sources de courant couplées (cf. Chapitre II II.1.1. p42).

<sup>E</sup>  $\vec{s}_{c1}$  : la lettre **s** rappelle que c'est un vecteur de l'espace vectoriel associé à la source.

L'indice est **c** car on a une source de courant.

On établit donc une relation entre les coordonnées  $(v_A, v_B)$  du vecteur  $\overrightarrow{v_c}$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_{c2}$  et la coordonnée  $u$  du vecteur  $\overrightarrow{u}$  de  $\mathcal{E}_{1c}$ . Cette relation linéaire permet de définir un morphisme que l'on note  $\Phi$  de  $\mathcal{E}_{c2}$  vers  $\mathcal{E}_{1c}$  tel que  $\Phi(\overrightarrow{v_c}) = u \overrightarrow{s_{c1}}$ . Alimenter par un modulateur d'énergie une charge peut donc être considéré comme créer un morphisme. Cette approche apporte un éclairage nouveau dans la mesure où les concepts mathématiques classiques des morphismes permettent de dégager des propriétés jusqu'alors cachées.

Étudions donc ce morphisme. Les trois points essentiels auxquels on s'intéresse sont :

- le caractère bijectif, injectif ou surjectif de  $\Phi$  (cf. Chapitre I III.3 pour les définitions);
- le noyau  $\text{Ker}\Phi$  de  $\Phi$ ;
- l'image  $\text{Im}\Phi$  de  $\Phi$ .

Rappelons les propriétés suivantes :

- $\dim \text{Ker}\Phi + \dim \text{Im}\Phi = \dim \mathcal{E}_{c2}$  avec  $\dim E$  la dimension de l'espace  $E$ ;
- $\Phi$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker}\Phi = \{ \overrightarrow{0} \}$ .

Au vu de ces relations on cherche le noyau  $\text{Ker}\Phi = \{ \overrightarrow{v_c} \in \mathcal{E}_{c2} / \Phi(\overrightarrow{v_c}) = \overrightarrow{0} \}$ .

Or,  $\Phi(\overrightarrow{v_c}) = u \overrightarrow{s_{c1}} = (v_B - v_A) \overrightarrow{s_{c1}}$ .

Par conséquent  $\Phi(\overrightarrow{v_c}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow v_B = v_A \Leftrightarrow \overrightarrow{v_c} = v_A (\overrightarrow{x_{c1}} + \overrightarrow{x_{c2}})$ .

Il vient :  $\text{Ker}\Phi = \{ \lambda \overrightarrow{Y_1} / \lambda \text{ réel avec } \overrightarrow{Y_1} = \frac{\overrightarrow{x_{c2}} + \overrightarrow{x_{c1}}}{\sqrt{2}}, \text{ vecteur unitaire} \}$  et  $\dim \text{Ker}\Phi = 1$ .

Puisque son noyau n'est pas nul  $\Phi$  n'est pas injectif et donc a fortiori bijectif. Par contre, son image  $\text{Im}\Phi$ , sous espace vectoriel inclus dans la droite vectorielle  $\mathcal{E}_{1c}$ , est de dimension 1. En effet en utilisant la relation rappelée,  $\dim \text{Ker}\Phi + \dim \text{Im}\Phi = \dim \mathcal{E}_c$ , il vient  $\dim \text{Im}\Phi = \dim \mathcal{E}_{c2} - \dim \text{Ker}\Phi = 1$ . L'image  $\text{Im}\Phi$  est donc confondue avec  $\mathcal{E}_{1c}$  ce qui implique la surjectivité de  $\Phi$ .

Tout vecteur de  $\mathcal{E}_{1c}$  peut donc être considéré comme l'image d'un vecteur de  $\mathcal{E}_{c2}$ .

Cette étude a mis en évidence la présence dans  $\mathcal{E}_{c2}$  d'un sous espace vectoriel non nul particulier :  $\text{Ker}\Phi$ . On cherche alors à décomposer tout vecteur en la somme d'un vecteur

$V_{Y_1} \overrightarrow{Y_1}$  de  $\text{Ker}\Phi$  et d'un autre vecteur  $\overrightarrow{Z}$ . Ce type de décomposition est d'autant plus facile d'utilisation si  $\overrightarrow{Z}$  et  $V_{Y_1} \overrightarrow{Y_1}$  sont orthogonaux.

Considérons donc  $\Delta$  la droite vectorielle orthogonale à  $\text{Ker}\Phi$  dont un vecteur unitaire est

$$\overrightarrow{Y_2} = \frac{\overrightarrow{x_{c2}} - \overrightarrow{x_{c1}}}{\sqrt{2}}. (\overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2}) \text{ constitue une base orthonormée.}$$

On calcule l'image de  $\overrightarrow{Y_2}$  par  $\Phi: \Phi(\overrightarrow{Y_2}) = u \overrightarrow{s_{c1}} = \frac{1 - (-1)}{\sqrt{2}} \overrightarrow{s_{c1}}$

Les coordonnées  $(V_{Y_1}, V_{Y_2})$  de  $\overrightarrow{v_c}$  s'obtiennent aisément en fonction de  $v_A$  et  $v_B$  :

- $V_{Y_1} = \overrightarrow{Y_1} \cdot \overrightarrow{v_c} = \frac{\overrightarrow{x_{c2}} + \overrightarrow{x_{c1}}}{\sqrt{2}} \cdot (v_A \overrightarrow{x_{c1}} + v_B \overrightarrow{x_{c2}}) = \frac{v_B + v_A}{\sqrt{2}} ;$
- $V_{Y_2} = \overrightarrow{Y_2} \cdot \overrightarrow{v_c} = \frac{\overrightarrow{x_{c2}} - \overrightarrow{x_{c1}}}{\sqrt{2}} \cdot (v_A \overrightarrow{x_{c1}} + v_B \overrightarrow{x_{c2}}) = \frac{v_B - v_A}{\sqrt{2}}.$

De la même façon :

- $v_A = \overrightarrow{x_{c1}} \cdot \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{x_{c1}} \cdot (V_{Y_1} \overrightarrow{Y_1} + V_{Y_2} \overrightarrow{Y_2}) = \frac{V_{Y_1} - V_{Y_2}}{\sqrt{2}} ;$
- $v_B = \overrightarrow{x_{c2}} \cdot \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{x_{c2}} \cdot (V_{Y_1} \overrightarrow{Y_1} + V_{Y_2} \overrightarrow{Y_2}) = \frac{V_{Y_1} + V_{Y_2}}{\sqrt{2}}.$

En résumé :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{Y_1} = \frac{v_B + v_A}{\sqrt{2}} \\ V_{Y_2} = \frac{v_B - v_A}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} v_A = \frac{V_{Y_1} - V_{Y_2}}{\sqrt{2}} \\ v_B = \frac{V_{Y_1} + V_{Y_2}}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\overrightarrow{Y_1}) = \overrightarrow{0} \\ \Phi(\overrightarrow{Y_2}) = \sqrt{2} \overrightarrow{s_{c1}} \end{array} \right.$$

Muni de cette nouvelle base, il est aisé de définir  $\Phi_p$  un nouveau morphisme de  $\Delta^A$  vers  $\mathcal{E}_{1c}$  tel que  $\Phi_p(\overrightarrow{Y_2}) = \Phi(\overrightarrow{Y_2}) = \sqrt{2} \overrightarrow{s_{c1}}$  et dont le noyau, réduit à zéro, nous assure du caractère bijectif.

On a immédiatement  $\Phi_p^{-1}(\overrightarrow{s_{c1}}) = \frac{\overrightarrow{Y_2}}{\sqrt{2}}.$

---

<sup>A</sup> De vecteur unitaire  $\overrightarrow{Y_2} = \frac{\overrightarrow{x_{c2}} - \overrightarrow{x_{c1}}}{\sqrt{2}}.$

**Conclusion** : un vecteur  $\vec{u} = u \vec{s}_{c1}$  de  $\mathcal{E}_{1c}$  peut être considéré comme l'image par  $\Phi$  d'un vecteur de  $\mathcal{E}_{c2}$  du type  $\Phi_p^{-1}(\vec{u}) + V_{Y1} \vec{Y}_1$  avec  $V_{Y1} \vec{Y}_1$  appartenant à  $\text{Ker } \Phi$ . Il apparaît bien qu'il existe de nombreuses façons d'obtenir la tension  $u$  à partir du modulateur en fonction des différents choix de  $V_{Y1}$ .

### I.3. Caractère discret du modulateur

On suppose la source de tension d'amplitude constante  $2 E$ , les commutations instantanées et les chutes de tension aux bornes des interrupteurs nulles. Enfin, pour garantir un contrôle permanent de la tension  $u$ , il faut qu'à tout instant un interrupteur de chaque bras soit fermé.

Les valeurs possibles pour  $v_A$  et  $v_B$  sont alors  $+ E$  et  $- E$ .

Par conséquent, en instantané, seuls quatre vecteurs du plan  $\mathcal{E}_{c2}$  sont accessibles :

- $\vec{v}_{c1} = +E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} = \sqrt{2} E \vec{Y}_1$  ;
- $\vec{v}_{c2} = -E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} = +\sqrt{2} E \vec{Y}_2$  ;
- $\vec{v}_{c3} = -E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} = -\sqrt{2} E \vec{Y}_1$  ;
- $\vec{v}_{c4} = +E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} = -\sqrt{2} E \vec{Y}_2$  .

Notation : on appelle ces quatre vecteurs les vecteurs générateurs puisqu'ils engendrent, par leurs combinaisons linéaires, un espace vectoriel.

Nous allons représenter graphiquement ces vecteurs. Pour cela on fait intervenir un espace affine d'origine  $O$  associé à  $\mathcal{E}_{c2}$ . On définit les points  $M_k$  tels que  $\overrightarrow{OM}_k = \vec{v}_{ck}$  .

Selon le choix de la base de travail,  $(\vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2})$  ou  $(\vec{Y}_1, \vec{Y}_2)$ , on obtient la *Figure 8* ou la *Figure 9*.

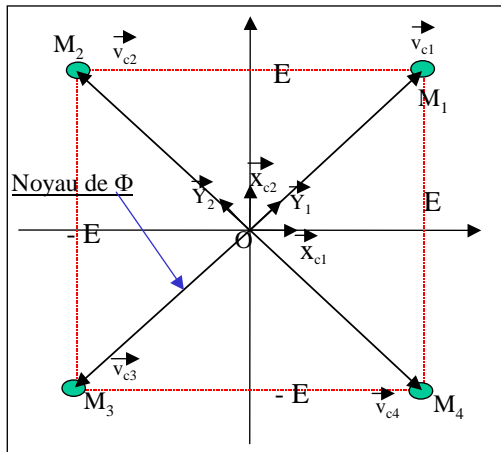


Figure 8, représentation dans la base  $(\vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2})$  des vecteurs  $\vec{OM}_k = \vec{v}_{ck}$

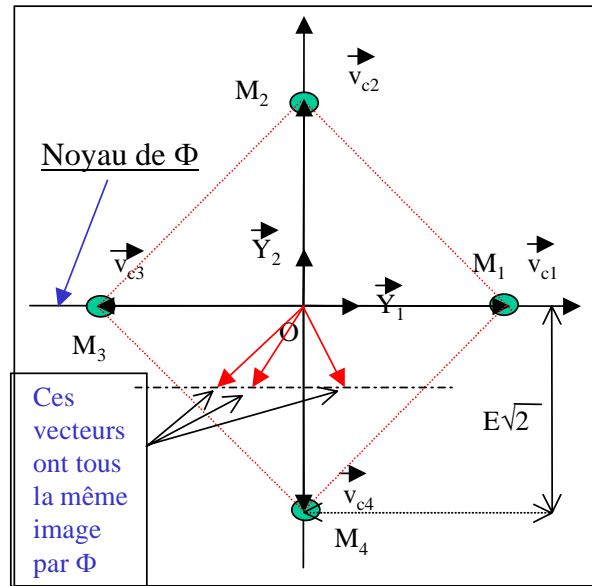


Figure 9, représentation dans la base  $(\vec{Y}_1, \vec{Y}_2)$  des vecteurs  $\vec{OM}_k = \vec{v}_{ck}$

Cette représentation graphique permet de traduire visuellement certaines propriétés.

Soient deux points  $M_k$  et  $M_j$  dont les coordonnées respectives dans la base orthonormée  $(\vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2})$  sont  $(\varepsilon_{M_{k1}} E, \varepsilon_{M_{k2}} E)$  et  $(\varepsilon_{M_{j1}} E, \varepsilon_{M_{j2}} E)$  avec  $\varepsilon_{M_{k1}}, \varepsilon_{M_{k2}}, \varepsilon_{M_{j1}}, \varepsilon_{M_{j2}}$  éléments de  $\{-1, 1\}$ .

Alors, la distance entre ces deux points est :

$$\|\vec{M}_k \vec{M}_j\| = E \sqrt{|\varepsilon_{M_{k1}} - \varepsilon_{M_{j1}}|^2 + |\varepsilon_{M_{k2}} - \varepsilon_{M_{j2}}|^2}.$$

Ils peuvent donc être espacés de  $2 E$  ou  $2 \sqrt{2} E$ .

**Propriété 1** : soit un point  $M_k$  alors l'ensemble des points  $M_j$  qui se situent à une distance  $2 E$  de  $M_k$  sont obtenus après une seule commutation d'un des bras.

Prenons en effet deux points  $M_k$  et  $M_j$  qui ne diffèrent que par la modification d'une seule coordonnée alors, la base  $(\vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2})$  étant orthonormée,  $\|\vec{M}_k \vec{M}_j\| = 2 E$ .

Réciproquement, si on suppose  $\|\vec{M}_k \vec{M}_j\| = 2 E$  alors étant donné que,

$$2 = \sqrt{|\varepsilon_{M_{k1}} - \varepsilon_{M_{j1}}|^2 + |\varepsilon_{M_{k2}} - \varepsilon_{M_{j2}}|^2},$$

il vient que  $\varepsilon_{M_{k1}} - \varepsilon_{M_{j1}} = \pm 2$  ou  $\varepsilon_{M_{k2}} - \varepsilon_{M_{j2}} = \pm 2$  d'où le résultat.



*Remarque* : En généralisant cette propriété à des modulateurs plus complexes tels que les onduleurs multiniveaux, on peut rechercher pour un vecteur générateur donné, les autres qui lui sont proches à une commutation près. On retrouve la notion de distance de Hamming [17].

**Propriété 2** : soit un point  $M_k$  alors l'ensemble des points  $M_j$  qui se situent à une distance  $2\sqrt{2} E$  de  $M_k$  sont obtenus après deux commutations, une de chaque bras.

**Choix de représentation** : on relie par un segment les vecteurs du modulateur qui ne diffèrent que d'une commutation. Il est aisé de justifier ce choix. En effet, commander le modulateur consiste à choisir à un instant donné le vecteur qui doit être activé. À chaque changement de vecteur il y a commutation. Dans la pratique cela occasionne pertes et émission de perturbations. Privilégier les « chemins » qui minimisent le nombre de commutations peut sembler souhaitable.

#### 1.4. Commande de type M.L.I. à période de hachage constante

Examinons pour ce type de mode très classique de commande l'usage du formalisme.

On cherche à obtenir une valeur moyenne  $u$  de tension aux bornes de la charge, ceci grâce au modulateur. Ce dernier doit donc être capable de produire un vecteur moyen  $\overrightarrow{v_c}$  tel que  $\Phi(\overrightarrow{v_c}) = u \overrightarrow{s_{cl}}$ . C'est cette équation que l'on doit résoudre. Explicitons en chaque membre.

Le vecteur  $\overrightarrow{v_c}$ , **moyenne sur une période  $T_h$**  du vecteur tension instantané  $\overrightarrow{v_{ins}}$ , s'exprime par :

$$\overrightarrow{v_c} = \frac{1}{T_h} \int_{\text{période}} \overrightarrow{v_{ins}}(t) dt .$$

Pendant la durée  $T_h$ ,  $\overrightarrow{v_{ins}}$  peut prendre seulement quatre valeurs, celles correspondant aux vecteurs générateurs. Chacun d'entre eux  $\overrightarrow{v_{ck}}$  est activé une durée globale<sup>A</sup>  $t_k$  sur la période  $T_h$ . Cela correspond à un certain pourcentage puisque  $t_k < T_h$ . On obtient :

<sup>A</sup> Bien entendu, certaines durées peuvent être nulles ce qui a pour effet de réduire le nombre de vecteurs utilisés.



(3) On vérifie les relations suivantes :  $\frac{t_1}{T} = \frac{OP_1}{OM_1}$  et  $\frac{t_2}{T} = \frac{OP_2}{OM_2}$  avec  $P_1$  et  $P_2$  définis

en Figure 10.

Rappels sur le barycentre de trois points non alignés :

(1) Un point  $M$  barycentre de trois points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  affectés des poids respectifs

$\frac{t_1}{T}$ ,  $\frac{t_2}{T}$  et  $\frac{t_3}{T}$  avec  $t_1 + t_2 + t_3 = T$  vérifie par définition la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{t_1}{T} \overrightarrow{OM_1} + \frac{t_2}{T} \overrightarrow{OM_2} + \frac{t_3}{T} \overrightarrow{OM_3}$$

(2) Le point  $M$  appartient au triangle  $[M_1 M_2 M_3]$

Remarque : si  $t_1 + t_2 = T$  alors  $M$  appartient au segment  $[M_2 M_1]$ .

On obtient ainsi les zones spatiales occupées par  $M$  selon le nombre de points activés :

- un segment pour deux ;
- un triangle pour trois.

Enfin, si les quatre points  $M_k$  sont activés alors  $M$  appartient au carré  $[M_1 M_2 M_3 M_4]$  que l'on peut créer avec deux triangles.

On déduit de ces rappels une information graphique sur les vecteurs  $\overrightarrow{v_c}$  qu'il est possible d'obtenir et par voie de conséquence sur les tensions  $u$  accessibles avec le modulateur.

Ainsi, de l'examen de la Figure 9, p 25 s'en suivent les valeurs qu'il est permis de requérir pour la tension moyenne  $u = v_B - v_A$  aux bornes du convertisseur. En effet,  $\Phi(\overrightarrow{v_{c2}}) = \Phi(\overrightarrow{OM_2}) = 2E \overrightarrow{s_{c1}}$  et  $\Phi(\overrightarrow{v_{c4}}) = \Phi(\overrightarrow{OM_4}) = -2E \overrightarrow{s_{c1}}$ . Or, tout point à l'intérieur du segment  $[M_2 M_4]$  peut être obtenu par une commande aux valeurs moyennes. Il vient donc :

$$\boxed{-2E \leq u \leq +2E}$$

C'est l'image par  $\Phi$  du segment  $[M_2 M_4]$ .

Réciproquement, lorsqu'une tension moyenne  $u$  est requise aux bornes de la charge alors le vecteur  $\vec{v}_c$  qu'il faut synthétiser à l'aide du modulateur est du type  $\vec{v}_c = \Phi_p^{-1}(\vec{u}) + \beta \vec{Y}_1 = \frac{u}{\sqrt{2}} \vec{Y}_2 + \beta \vec{Y}_1$  avec  $\beta$  tel que  $\vec{v}_c$  appartienne au domaine permis qui est ici un carré.

Le choix de  $\beta$  est lié à une stratégie de commande. Il existe plusieurs possibilités (cf. les flèches rouges en Figure 11). Le choix de  $\beta$  est lié à une stratégie de commande. Il existe plusieurs possibilités. On rappelle que  $\beta \vec{Y}_1$  est un vecteur du noyau. Son image par  $\Phi$  est donc le vecteur nul.

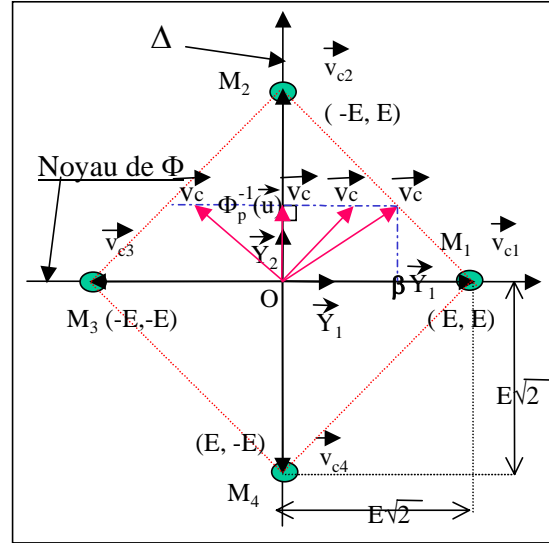


Figure 11, recherche à partir de  $\vec{u}$  désiré d'un vecteur  $\vec{v}_c$  à synthétiser aux valeurs moyennes avec  $\vec{v}_{c1}$  et  $\vec{v}_{c2}$

On se propose maintenant d'analyser plus en détail les effets du choix des vecteurs générateurs activés pendant  $T_h$ .

### I.4.1. Avec deux vecteurs

L'image du segment  $[M_j, M_i]$  par  $\Phi$  permet de déterminer le domaine accessible par  $u$ .

Inversement, soit  $u$  une tension moyenne désirée aux bornes de la charge. Alors on obtient le vecteur  $\vec{v}_c = \frac{t_i \vec{v}_{ci} + t_j \vec{v}_{cj}}{t_i + t_j}$  en ajoutant à  $\Phi_p^{-1}(\vec{u})$  un vecteur  $\beta \vec{Y}_1$  tel que la somme  $\Phi_p^{-1}(\vec{u}) + \beta \vec{Y}_1$  appartienne au segment  $[M_j, M_i]$ . En effet, l'extrémité du vecteur  $\vec{v}_c$  est un barycentre de  $M_j$  et  $M_i$ .

Examinons à présent les cas particuliers.

#### I.4.1.a. Segment $[M_1, M_2]$

Puisque  $\Phi(\vec{v}_{c2}) = \Phi(\vec{OM}_2) = 2E \vec{s}_{c1}$  et  $\Phi(\vec{v}_{c1}) = \Phi(\vec{OM}_1) = 0 \vec{s}_{c1}$ , le domaine accessible pour la tension  $u$  est le segment  $[0, 2E]$ .

Considérons donc une tension  $u$  qui appartienne à cet intervalle. On cherche alors un

vecteur  $\vec{v}_c = \frac{t_1 \vec{v}_{c1} + t_2 \vec{v}_{c2}}{T_h}$  dont l'extrémité  $M$  appartienne au segment  $[M_1, M_2]$  et dont la

projection orthogonale sur  $\Delta$  soit égale à  $\Phi_p^{-1}(\vec{u})$ . Il faut donc résoudre :

$$\vec{Y}_2 \cdot \vec{v}_c = \vec{Y}_2 \cdot \Phi_p^{-1}(\vec{u})$$

Explicitons chacun des membres :

$$\vec{Y}_2 \cdot \vec{v}_c = \vec{Y}_2 \cdot \frac{t_1 \vec{v}_{c1} + t_2 \vec{v}_{c2}}{T_h} = \frac{t_2}{T_h} \sqrt{2} E \quad \text{et} \quad \vec{Y}_2 \cdot \Phi_p^{-1}(\vec{u}) = \frac{u}{\sqrt{2}}.$$

Il vient :

$$\frac{t_2}{T_h} = \frac{u}{2E} \quad \text{et} \quad \frac{t_1}{T_h} = 1 - \frac{u}{2E}.$$

*Remarque 1 :* On retrouve le cas d'un hacheur « abaisseur » l'expression classique :  $u = \alpha 2E$  en prenant  $\alpha = \frac{t_2}{T_h}$ .

*Remarque 2 :* le même type d'étude peut être effectué pour les segments  $[M_2, M_3]$ ,  $[M_3, M_4]$  et  $[M_4, M_1]$ .

#### I.4.1.b. Segment $[M_1, M_3]$

Seule la tension moyenne  $u = 0$  peut être obtenue.

#### I.4.1.c. Segment $[M_2, M_4]$

Le domaine accessible pour la tension  $u$  est le segment  $[-2E, 2E]$ .

Étant donné que  $\Phi_p^{-1}(\vec{u})$  appartient déjà au segment  $[M_2, M_4]$ , la recherche de

$\vec{v}_c = \frac{t_4 \vec{v}_{c4} + t_2 \vec{v}_{c2}}{T_h}$  s'en trouve facilitée.

Il suffit de résoudre :  $\vec{v}_c = \frac{t_2 - t_4}{T_h} \sqrt{2} E \vec{Y}_2 = \frac{u}{\sqrt{2}} \vec{Y}_2$  avec  $t_2 + t_4 = T_h$ .

Il vient :

$$\frac{t_2}{T_h} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{u}{2E} \right) \quad \text{et} \quad \frac{t_4}{T_h} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{u}{2E} \right).$$

Remarque : on retrouve le cas d'un hacheur en commande bipolaire l'expression classique :  $u = (2\alpha - 1)2E$  en prenant  $\alpha = \frac{t_2}{T_h}$ . A chaque passage d'un point à un autre chaque bras commute (cf. propriété 2, paragraphe I.3.)

### **I.4.2. Avec trois vecteurs coplanaires**

La décomposition d'un vecteur sur deux vecteurs non liés est unique. Ce n'est plus le cas si l'on désire décomposer ce même vecteur sur trois vecteurs d'un même plan. Afin de lever l'indétermination, une contrainte supplémentaire est à imposer.

#### **I.4.2.a. Travail au sein du triangle $[M_1, M_2, M_3]$**

Le domaine accessible pour la tension  $u$  est alors le segment  $[0, 2E]$ . C'est l'image du triangle par  $\Phi$ . Avec cet exemple apparaît que l'usage du plan  $\mathcal{E}_{c2}$  met en évidence que deux états distincts du modulateur (points  $M_1$  et  $M_3$ ) ont même image par  $\Phi$ . Une étude classique par examen des formes d'ondes ne permet pas de distinguer ces deux états qui correspondent à une tension nulle imposée.

On cherche un vecteur  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v_c} = \frac{t_1 \overrightarrow{v_{c1}} + t_2 \overrightarrow{v_{c2}} + t_3 \overrightarrow{v_{c3}}}{t_1 + t_2 + t_3}$  tel que  $M$  soit un point du

triangle  $[M_1, M_2, M_3]$  et dont la projection orthogonale sur  $\Delta$  soit égale à  $\Phi_p^{-1}(\overrightarrow{u})$  (cf. Figure 12). Il apparaît immédiatement sur la Figure 12 que tout un segment répond à ces exigences.

Poursuivons la résolution :

$$\overrightarrow{Y_2} \cdot \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{Y_2} \cdot \Phi_p^{-1}(\overrightarrow{u})$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{Y_2} \cdot \overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{Y_2} \cdot \frac{t_1 \overrightarrow{v_{c1}} + t_2 \overrightarrow{v_{c2}} + t_3 \overrightarrow{v_{c3}}}{T_h} = \frac{t_2}{T_h} \sqrt{2} E \text{ et } \overrightarrow{Y_2} \cdot \Phi_p^{-1}(\overrightarrow{u}) = \frac{u}{\sqrt{2}} \text{ d'où,}$$

$$\boxed{\frac{t_2}{T_h} = \frac{u}{2E}}$$

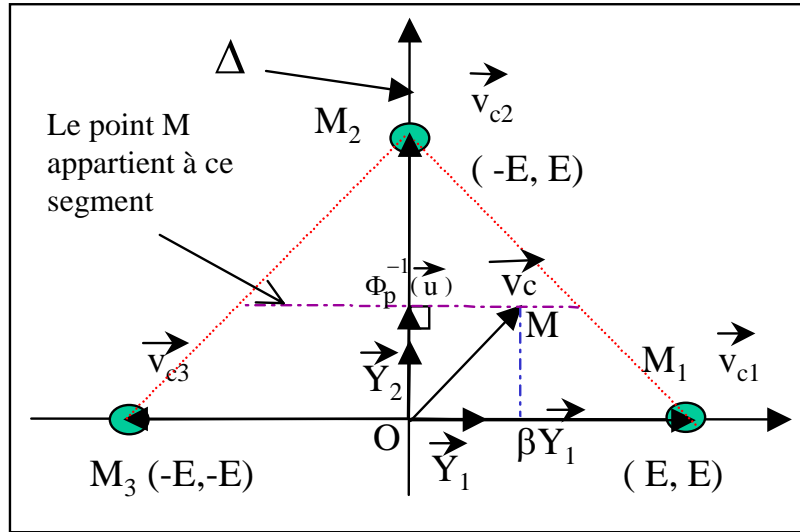


Figure 12, mise en évidence du degré de liberté dans le choix de  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v_c}$

Il vient alors que  $\frac{t_1 + t_2 + t_3}{T_h} = 1 \Rightarrow \frac{t_1 + t_3}{T_h} = 1 - \frac{t_2}{T_h} = 1 - \frac{u}{2E}$ .

Il reste un degré de liberté à choisir pour obtenir l'unicité de la solution.

L'observation du plan du modulateur montre que par rapport au point  $M_2$ ,  $M_1$  et  $M_3$  sont positionnés de façon symétrique. Il peut sembler naturel de chercher conserver cette propriété au niveau des durées de conduction. Chaque bras sera ainsi sollicité de façon identique (pertes à la conduction et à la commutation). Si **on s'impose** donc  $t_1 = t_3$ , on a :

$$\frac{t_3}{T_h} = \frac{t_1}{T_h} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{u}{2E} \right) \text{ et } \frac{t_2}{T_h} = \frac{u}{2E}.$$

*Remarque* : Les durées totales de conduction pour chaque état ont été trouvées. Il reste à élaborer la séquence d'activation de ces différents états. Quel est l'état initial, l'état final ? Combien de fois un point  $M_k$  sera-t-il activé ? Par exemple on peut désirer que l'état initial soit l'état final de la période précédente. Ainsi, au début de la période il n'y a pas de commutation puisqu'on reste dans le même état. De même la recherche d'un nombre minimal de commutations implique d'activer une seule fois chaque état. L'état initial, est alors  $M_1$  ou  $M_3$ . Il y a deux types de

séquences  $M_1, M_2, M_3$  ou  $M_3, M_2, M_1$ . Dans la commande « double modulation » ce type d'idée est utilisée.

#### I.4.2.b. Triangle $[M_1, M_2, M_4]$

Le domaine accessible pour la tension  $u$  est le segment  $[-2 E, 2 E]$

On cherche comme précédemment un vecteur  $\vec{v}_c = \frac{t_1 \vec{v}_{c1} + t_2 \vec{v}_{c2} + t_4 \vec{v}_{c4}}{t_1 + t_2 + t_4}$  dont

l'extrémité M appartienne au triangle  $[M_1, M_2, M_4]$  et tel que la projection orthogonale sur  $\Delta$  de  $\vec{OM}$  soit égale à  $\Phi_p^{-1}(\vec{u})$ . Il faut donc résoudre :

$$\vec{Y}_2 \cdot \vec{v}_c = \vec{Y}_2 \cdot \frac{t_1 \vec{v}_{c1} + t_2 \vec{v}_{c2} + t_4 \vec{v}_{c4}}{T_h} = \frac{t_2 - t_4}{T_h} \sqrt{2} E = \vec{Y}_2 \cdot \Phi_p^{-1}(\vec{u}) = \frac{u}{\sqrt{2}} \text{ d'où,}$$

$$\frac{t_2 - t_4}{T_h} = \frac{u}{2E}$$

En tenant compte que  $t_2 + t_4 = T_h - t_1$ , il vient :

$$\frac{t_2}{T_h} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{u}{2E} \right) - \frac{t_1}{2T_h} \quad \text{et} \quad \frac{t_4}{T_h} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{u}{2E} \right) - \frac{t_1}{2T_h}$$

Il reste à choisir  $t_1$  pour obtenir l'unicité de la solution.

*Remarque 1* : il faut ensuite élaborer la séquence qui sera suivie. Par exemple, on s'impose que l'instant initial soit toujours  $M_2$ . Pour minimiser ensuite le nombre de commutations on prend la séquence  $M_2 M_1 M_4 M_1 M_2$ .

*Remarque 2* : on peut également dans le cas d'une commande d'onduleur (pour lequel  $u = 0$  donc  $t_2 = t_4$ ) régler l'amplitude du premier harmonique en jouant sur le rapport  $t_1/t_2$ .

#### I.4.3. Avec les quatre vecteurs

Le domaine accessible pour la tension  $u$  est le segment  $[-2E, 2 E]$ . On dispose de deux degrés de liberté. Un exemple de ce type de décomposition est réalisé au paragraphe I.5.4. dans l'élaboration d'une commande d'onduleur monophasé.



## 1.5. Lois de commande

Quatre types de commande très fréquentes<sup>A</sup> sont ici présentées avec l'éclairage du formalisme vectoriel.

On rappelle que pour obtenir une tension  $u$  il faut synthétiser  $\vec{v}_c = \Phi_p^{-1}(\vec{u}) + \beta \vec{Y}_1$  avec  $\beta$  tel que  $\vec{v}_c$  appartienne au domaine permis dans  $\mathcal{E}_{c2}$ .

### 1.5.1. Commande complémentaire ou bipolaire

On choisit  $\beta = 0$ . Par conséquent les deux vecteurs avec lesquels on travaille sont :

$$\vec{v}_{c2} = -E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} = -\sqrt{2} E \vec{Y}_2 \quad \text{et} \quad \vec{v}_{c4} = +E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} = +\sqrt{2} E \vec{Y}_2.$$

La séquence la plus courante (cf. *Figure 13*) consiste à débiter la période en restant en  $M_2$  pendant  $t_2$  puis à commuter en  $M_4$  pendant le reste de la période c'est à dire pendant  $t_4$ . C'est le segment  $[M_2, M_4]$  qui est donc emprunté. L'obtention des durées de conduction  $t_2$  et  $t_4$  est alors immédiat (cf. I.4.1.c. ).

$$t_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{u}{2E} \right) T_h \quad \text{et} \quad t_4 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{u}{2E} \right) T_h$$

soit encore classiquement :

$$u = (2\alpha - 1) 2E \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{t_2}{T_h}$$

Il est à remarquer que ce type de commande ne sélectionne pas les deux points  $M_i M_j$  les plus proches de  $M$ . L'ondulation de courant n'est donc pas minimale. En début de chaque période il y a changement d'état donc commutation.

On peut envisager une autre séquence plus « symétrique » (cf. *Figure 14*).  $M_4$  entame la séquence pendant  $t_4/2$  puis on commute en  $M_2$  pendant  $t_2$  pour à nouveau commuter en  $M_4$  pendant  $t_4/2$ . Cette séquence n'implique pas pour autant de commutations supplémentaires puisque l'état est le même en début et en fin de la période.

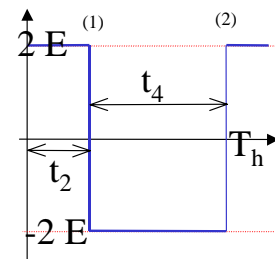


Figure 13, motif de M.L.I. en commande bipolaire

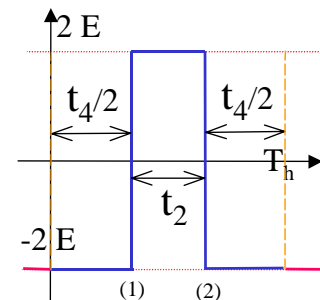


Figure 14, motif de M.L.I. en commande bipolaire symétrique

<sup>A</sup> voir par exemple les composants L 6258 de ST Thomson et UC 1637 d'Unitrode qui proposent les 3 trois types de commandes développées.

Remarque 1 : Du point de vue pratique on suppose la commutation simultanée de 4 interrupteurs ce qui n'a pas lieu. Il faut prendre des précautions afin d'éviter la mise en court-circuit de la source (circuit classique d'anti - chevauchement pour les transistors d'un même bras). En partant de  $M_2$  ( $T_{12}$  et  $T_{21}$  fermés), on commence par ouvrir les transistors « simultanément »  $T_{12}$  et  $T_{21}$  avant de fermer  $T_{22}$  et  $T_{11}$ . En fait l'un des deux transistors  $T_{12}$  ou  $T_{21}$  va s'ouvrir avant l'autre. Si  $i > 0$ , on passse par un état intermédiaire qui correspond à  $M_1$  ou  $M_3$ . Lorsque  $T_{12}$  et  $T_{21}$ , mais aussi encore  $T_{22}$  et  $T_{11}$  sont ouverts on passe alors, si  $i > 0$ , au point  $M_4$ . Une circulation de courant est assurée par les diodes en antiparallèle, de l'énergie est renvoyée alors vers la source. La fermeture de  $T_{11}$  et  $T_{22}$ , sans risque de court circuit de la source, permet d'inverser le sens de transit de l'énergie.

Il apparaît donc que cette commande complémentaire peut comporter des commutations mal maîtrisées puisque la durée pendant laquelle on reste en  $M_1$  ou en  $M_3$  est inconnue.

Remarque 2 : dans le cadre du formalisme ce type de commande est du même type que celle à homopolaire nul pour les onduleurs de tension triphasés.

Remarque 3 : si  $t_2 = T_h/2$  alors la valeur moyenne  $u$  est nulle. On obtient un signal alternatif dont la période est  $T_h$  et d'amplitude  $8E/\pi$ . On ne peut régler l'amplitude.

### I.5.2. Commande séquentielle ou unipolaire

Afin de minimiser l'ondulation de courant tout en n'activant que deux vecteurs, la commande séquentielle sélectionne par exemple les couples de vecteurs de la façon suivante :

- si la valeur moyenne  $u$  désirée est positive alors on active les vecteurs  $\vec{v}_{c2}$  et  $\vec{v}_{c3}$  (cf. Figure 15);
- si  $u < 0$  alors on active les vecteurs  $\vec{v}_{c4}$  et  $\vec{v}_{c3}$  .

On travaille donc selon le signe de  $u$  soit sur le segment  $[M_2, M_3]$  soit sur  $[M_4, M_3]$ .

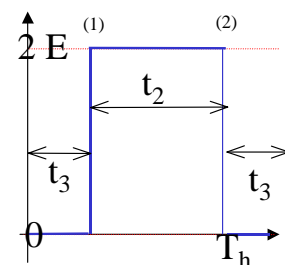


Figure 15, motif de M.L.I. en commande unipolaire

Si l'on désire un passage continu d'un segment à un autre, il faut que le vecteur activé initialement en début de chaque période soit commun aux deux triangles, c'est à dire  $\vec{v}_{c3}$ .

Les durées de conduction se calculent aisément :

- pour  $u > 0$ ,  $\frac{t_2}{T_h} = \frac{u}{2E}$  ;  $\frac{t_3}{T_h} = 1 - \frac{u}{2E}$  ;
- pour  $u < 0$ ,  $\frac{t_4}{T_h} = \frac{u}{2E}$  et  $\frac{t_3}{T_h} = 1 - \frac{u}{2E}$ .

Par rapport à la commande complémentaire on rappelle les faits suivants :

- la variation maximale de tension aux bornes de la charge est d'amplitude  $2E$  au lieu de  $4E$ . L'ondulation de courant est donc moindre;
- un régime de conduction discontinue apparaît aux faibles valeurs de courant moyen alors que ce n'est pas le cas avec la commande complémentaire. Par conséquent, la fonction de transfert est non linéaire.

*Remarque 1 : en cas de conduction discontinue l'hypothèse de travail selon laquelle au moins un interrupteur de chaque bras est fermée n'est plus vérifiée. La tension instantanée n'est plus imposée par le modulateur d'énergie. Il y a perte de commandabilité.*

*Remarque 2 : le vecteur  $\vec{v}_{c1}$  n'a guère été mis à contribution. On aurait pu évidemment considérer une commande avec les vecteurs  $\vec{v}_{c2}$ ,  $\vec{v}_{c4}$  et  $\vec{v}_{c1}$ . Néanmoins, il apparaît dans les deux cas une rupture de symétrie qui se traduit par des pertes différentes au sein des interrupteurs.*

### **I.5.3. Commande à «double modulation»**

L'appellation « double modulation » permet d'insister sur le fait que la fréquence des ondulations de courant est double de celle avec laquelle sont sollicités les interrupteurs.

Trois vecteurs suffisent pour réaliser cette commande de type unipolaire.

Le principe est le même que celui de la commande séquentielle mais on active pendant chaque période 3 vecteurs au lieu de deux. On distingue deux types de séquences selon le signe de  $u$ . Elles débutent néanmoins toutes les deux par le même vecteur commun aux deux triangles :

- pour  $u > 0$ , on suit la séquence suivante,  $M_3, M_2, M_1, M_2, M_3$  (cf. Figure 16);

- pour  $u < 0$ ,  $M_3, M_4, M_1, M_4, M_3$ .

On s'impose dans la durée  $T_h$  d'une séquence qu'un même point  $M_j$  soit toujours occupé pendant la même durée. Cela permet de conserver une symétrie et d'obtenir ainsi une période apparente  $T_h/2$  pour la tension. Par rapport à la commande séquentielle précédente, les pertes par conduction sont identiques<sup>A</sup>, celles par commutation multipliées par deux mais avec répartition égale entre les deux bras. L'ondulation de courant du fait de la diminution de la période apparente sera réduite.

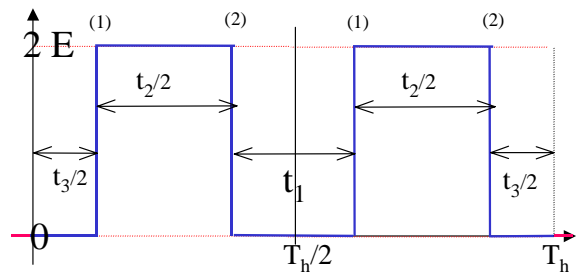


Figure 16, motif de M.L.I. en commande double modulation

Si de plus on impose  $t_1 = t_3$  afin que chaque bras soit sollicité pendant la même durée, il vient pour  $u > 0$  :

$$\frac{t_3}{T_h} = \frac{t_1}{T_h} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{u}{2E} \right) \text{ et } \frac{t_2}{T_h} = \frac{u}{2E}.$$

*Remarque* : il y a, comme avec la commande séquentielle, perte de contrôle lorsqu'il y a conduction discontinue.

#### **I.5.4. Onduleur pleine onde à trois niveaux de période $T_h$**

L'étude de ce cas est particulière par rapport aux précédentes puisqu'on cherche à obtenir une valeur moyenne nulle aux bornes de la charge. C'est l'occasion de montrer comment on adapte le formalisme.

On désire que le premier harmonique de la tension aux bornes de la source de courant soit  $U \sin(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $\omega_0 = 2\pi/T_h$ .

On active pendant chaque période chacun des 4 vecteurs générateurs. La séquence peut être la suivante :  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_1$ . Pour obtenir le fonctionnement onduleur désiré il faut en premier lieu obtenir une valeur moyenne nulle aux bornes de la charge. Connaissant l'expression du vecteur tension moyen  $\vec{v}$  on en déduit l'équation à respecter :

$$\left( \sum t_k \vec{v}_{ck} \right) \vec{Y}_2 = 0. \text{ Ceci implique } t_2 = t_4.$$

<sup>A</sup> Les pertes par conduction ne sont plus localisées toutefois sur les mêmes interrupteurs.

Les quatre inconnues  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$  sont donc liées par les deux relations

$t_2 = t_4$  et  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = T_h$ . Il reste deux relations que l'on trouve en exprimant que l'on désire un premier harmonique de la tension aux bornes de la source de courant égal à  $U \sin(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $\omega_0 = 2\pi / T_h$ .

Considérons pour cela  $\Phi_p^{-1}(U \sin(\omega_0 t + \varphi) \overrightarrow{s_{cl}})$  soit encore  $\frac{U}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \overrightarrow{Y_2}$ .

Il faut que  $\overrightarrow{v_1}$ , le premier harmonique du développement en série de Fourier du vecteur instantané  $\overrightarrow{v_{ins}}(t)$ , soit tel que :  $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{Y_2} = \frac{U}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \varphi)$ .

On calcule donc d'abord les deux premiers termes du développement en série de Fourier :

$$\bullet \left( \frac{2}{T_h} \int_0^{T_h} \overrightarrow{v_{ins}} \sin \omega_0 t \, dt \right) \cdot \overrightarrow{Y_2} = \frac{2}{T_h} \int_0^{T_h} \frac{U}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin \omega_0 t \, dt$$

et

$$\bullet \left( \frac{2}{T_h} \int_0^{T_h} \overrightarrow{v_{ins}} \cos \omega_0 t \, dt \right) \cdot \overrightarrow{Y_2} = \frac{2}{T_h} \int_0^{T_h} \frac{U}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos \omega_0 t \, dt$$

On exprime ensuite que  $\frac{U}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) = \frac{U}{\sqrt{2}} \cos \varphi \sin(\omega_0 t) + \frac{U}{\sqrt{2}} \sin \varphi \cos(\omega_0 t)$ .

On obtient alors les deux équations transcendantes suivantes :

$$\bullet \frac{2}{T_h} \int_0^{T_h} \frac{U}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin \omega_0 t \, dt = \frac{U}{\sqrt{2}} \cos \varphi \tag{Équation I-1}$$

$$\bullet \frac{2}{T_h} \int_0^{T_h} \frac{U}{\sqrt{2}} \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos \omega_0 t \, dt = \frac{U}{\sqrt{2}} \sin \varphi \tag{Équation I-2}$$

Pour poursuivre il est nécessaire de préciser la séquence (temporelle) que l'on s'impose.

Bien entendu, pour assurer une périodicité  $T_h$ , les durées  $t_k$  de stationnement aux quatre points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  doivent être identiques d'une période à l'autre.

On choisit la séquence suivante :

$$M_1(t_1/2), M_2(t_2), M_3(t_3), M_4(t_4), M_1(t_1/2).$$

Il vient alors :

$$\left( \frac{2}{T_h} \int_0^{T_h} v_{\text{ins}} \sin \omega_0 t \, dt \right) \cdot \vec{Y}_2 = \frac{2}{T_h} \int_{t_1/2}^{t_2+t_1/2} E \sqrt{2} \sin \omega_0 t \, dt - \frac{2}{T_h} \int_{T_h-t_2-t_1/2}^{T_h-t_1/2} E \sqrt{2} \sin \omega_0 t \, dt =$$

$$\frac{2 E \sqrt{2}}{\pi} \left[ \cos \left( \frac{\omega_0 t_1}{2} \right) - \cos \left( \frac{\omega_0 (t_1 + 2 t_2)}{2} \right) \right] = \frac{+4 E \sqrt{2}}{\pi} \sin \left( \frac{\omega_0 (t_1 + t_2)}{2} \right) \sin \left( \frac{\omega_0 t_2}{2} \right).$$

La première équation peut alors être explicitée :

$$\square \quad \frac{U}{\sqrt{2}} \cos \varphi = \frac{+4 E \sqrt{2}}{\pi} \sin \left( \frac{\omega_0 (t_1 + t_2)}{2} \right) \sin \left( \frac{\omega_0 t_2}{2} \right)$$

De même pour la deuxième équation il vient :

$$\square \quad \frac{U}{\sqrt{2}} \sin \varphi = \frac{+4 E \sqrt{2}}{\pi} \cos \left( \frac{\omega_0 (t_1 + t_2)}{2} \right) \sin \left( \frac{\omega_0 t_2}{2} \right)$$

On en déduit finalement :

$$\boxed{\text{tg} \varphi = \cot g \left( \frac{\omega_0 (t_1 + t_2)}{2} \right)} \text{ et}$$

$$\boxed{\frac{U \pi}{8 E} = \sin \left( \frac{\omega_0 t_2}{2} \right)}.$$

On règle bien l'amplitude à l'aide de  $t_2$  et le déphasage par  $t_1$ .

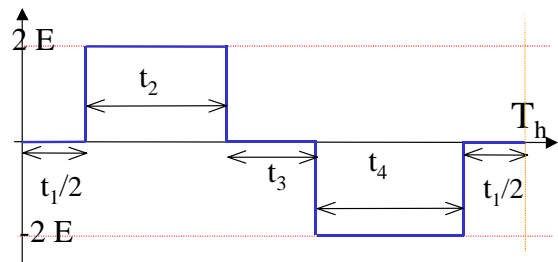


Figure 17, tension en commande pleine onde trois niveaux

*Remarque* : si  $\varphi = 0$  alors  $t_2 + t_1 = T_h/2$  d'où  $t_1 = t_3$ ; si  $t_2 = T_h/2$  alors  $U = (4/\pi) 2 E$

## 1.6. Conclusion

Dans l'étude de cet exemple, l'usage du formalisme vectoriel a permis de faire apparaître, lors de la phase de synthèse de la commande, les degrés de liberté dont disposait le concepteur ainsi que les dissymétries dans l'usage des interrupteurs selon les choix opérés.

La description exhaustive que requiert le formalisme implique un passage facilité à l'implantation matérielle de la commande (chaque point  $M_k$  représente un état de la PAL).

A son désavantage, il faut rappeler l'hypothèse de contrôle permanent qui a été formulée.

## II. Généralisation de l'étude d'un modulateur d'énergie

Le modulateur d'énergie que nous considérons connecte  $k$  sources de tensions à  $p$  sources de courants à l'aide d'interrupteurs supposés idéaux. Le dénombrement des sources est réalisé en utilisant la représentation du type de la *Figure 18*, au sein de laquelle les couplages des sources ont volontairement été omis.

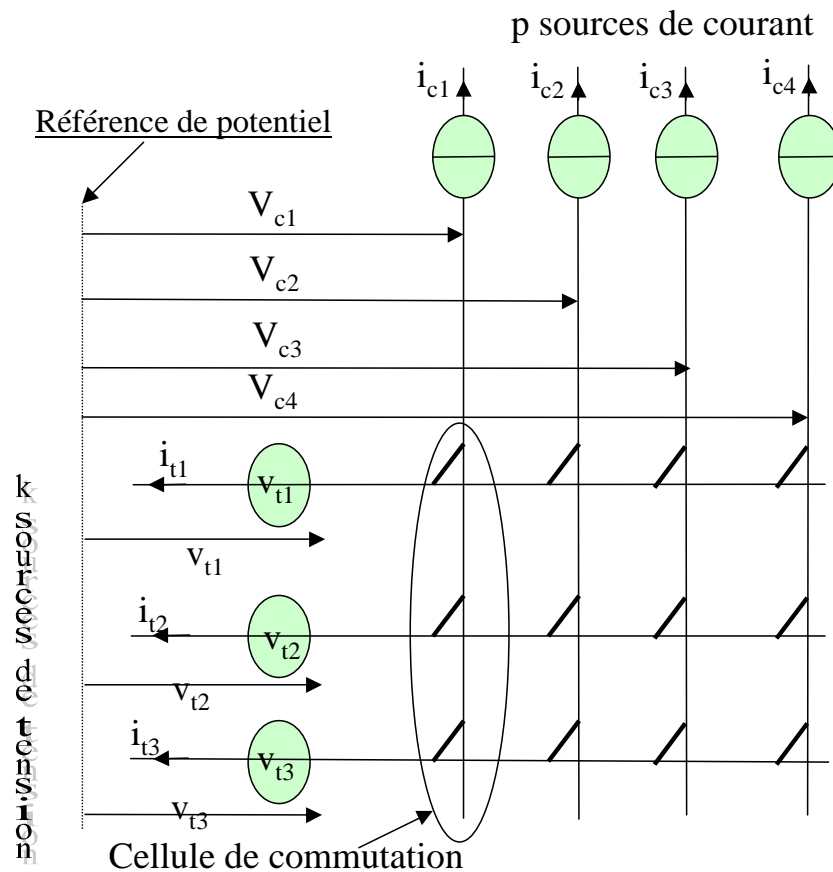


Figure 18, représentation de la structure du modulateur étudié,

indice  $c$  pour les sources de courant, indice  $t$  pour les sources de tension

Le modulateur d'énergie permet aux  $k$  sources de tension d'imposer  $p$  potentiels  $v_{cr}$  aux  $p$  sources de courants. Réciproquement les sources de tension se verront imposer  $k$  courants  $i_{tr}$  par les sources de courants. Ainsi dans l'exemple présenté au paragraphe précédent on a, en

respectant la représentation type, deux sources de tension et deux sources de courant (cf. Figure 19).

*Remarque 1: on ne distingue plus comme dans l'exemple traité la charge de la source. Ces notions impliquent en effet un sens du transit de l'énergie. On leur préfère celles plus générales de sources de tension et de sources de courant. Aucun sens de transit de l'énergie n'est ainsi privilégié.*

*Remarque 2 : le potentiel de référence par rapport auquel sont référencées les tensions  $v_{ck}$  est quelconque a priori. Dans l'exemple traité précédemment on a choisi un potentiel de référence fictif qui confère une certaine symétrie à la source de tension qui impose  $+E$  ou  $-E$  par rapport à ce potentiel. Ce choix induit une certaine symétrie dans les calculs. On aurait pu prendre une autre référence bien réelle, une des bornes de sortie de l'onduleur par exemple.*

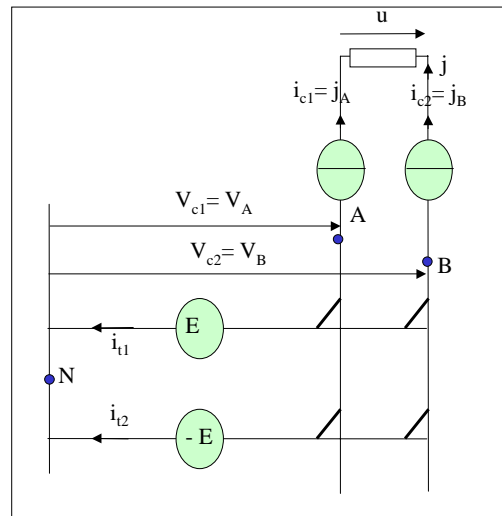


Figure 19, représentation du modulateur étudié au paragraphe I avec la représentation proposée

## II.1. Espaces vectoriels associés

### II.1.1. Espaces vectoriels associés au modulateur

Le modulateur établit un lien entre les sources.

- vu des sources de tension c'est lui qui impose les **k** courants ;
- vu des sources de courant il impose **p** tensions.

Cette dualité nous mène à associer deux espaces au modulateur, un par type de source :

- au modulateur vu des sources de tension un espace de dimension **k**, noté  $\mathcal{E}_{tk}$  ;
- au modulateur vu des sources de courant un espace de dimension **p**, noté  $\mathcal{E}_{cp}$  .

On notera par ailleurs  $\mathcal{E}_{ic}$  l'espace vectoriel produit :  $\mathcal{E}_{ic} = \mathcal{E}_{tk} \times \mathcal{E}_{cp}$ .



$\mathcal{E}_{tk}$  et  $\mathcal{E}_{cp}$  sont munis chacun d'une base orthonormée directe notée respectivement  $\mathcal{B}_t$  et  $\mathcal{B}_c$  avec  $\mathcal{B}_t = \left\{ \overrightarrow{x_{t1}}, \overrightarrow{x_{t2}}, \dots, \overrightarrow{x_{tk}} \right\}$  et  $\mathcal{B}_c = \left\{ \overrightarrow{x_{c1}}, \overrightarrow{x_{c2}}, \dots, \overrightarrow{x_{cp}} \right\}$ .

On définit alors les vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{v}_t = v_{t1} \overrightarrow{x_{t1}} + v_{t2} \overrightarrow{x_{t2}} + \dots + v_{tk} \overrightarrow{x_{tk}}$  et  $\overrightarrow{i}_t = i_{t1} \overrightarrow{x_{t1}} + i_{t2} \overrightarrow{x_{t2}} + \dots + i_{tk} \overrightarrow{x_{tk}}$  de l'espace  $\mathcal{E}_{tk}$ ;
- $\overrightarrow{v}_c = v_{c1} \overrightarrow{x_{c1}} + v_{c2} \overrightarrow{x_{c2}} + \dots + v_{cp} \overrightarrow{x_{cp}}$  et  $\overrightarrow{i}_c = i_{c1} \overrightarrow{x_{c1}} + i_{c2} \overrightarrow{x_{c2}} + \dots + i_{cp} \overrightarrow{x_{cp}}$  de l'espace  $\mathcal{E}_{cp}$ .

Ainsi dans l'exemple étudié au paragraphe I l'intérêt s'est porté uniquement sur la source de courant. On a seulement considéré  $\mathcal{E}_{c2}$ , de dimension deux, associé au modulateur vu de la source de courant. Par contre, on ne s'est pas intéressé au modulateur vu côté source de tension : l'espace associé  $\mathcal{E}_{t2}$  est de dimension deux puisqu'on a deux sources de tension de valeur +E et - E.

### II.1.2. Espaces vectoriels associés aux sources

Sur la *Figure 18*, les sources n'ont pas été représentées entièrement. En effet, on rencontre différentes façons de les réaliser. Néanmoins, lors d'une étude concrète, la prise en compte précise des sources est nécessaire. On propose alors dans le cas d'un système à  $n$  phases d'associer un espace vectoriel  $\mathcal{E}_{nx}^A$  de dimension  $n$  dont on note  $\mathcal{B}_{nx}$  une base orthonormée avec  $\mathcal{B}_{nx} = \left\{ \overrightarrow{s_{x1}}, \overrightarrow{s_{x2}}, \dots, \overrightarrow{s_{xn}} \right\}$ .

En notant  $u_{xk}$  la tension aux bornes d'une phase et  $j_{xk}$  le courant qui la traverse (convention récepteur par exemple) on définit les vecteurs :

- $\overrightarrow{u}_x = u_{x1} \overrightarrow{s_{x1}} + u_{x2} \overrightarrow{s_{x2}} + \dots + u_{xn} \overrightarrow{s_{xn}}$
- $\overrightarrow{j}_x = j_{x1} \overrightarrow{s_{x1}} + j_{x2} \overrightarrow{s_{x2}} + \dots + j_{xn} \overrightarrow{s_{xn}}$

Il est à noter dès maintenant que les vecteurs  $\overrightarrow{u}_t$  ou  $\overrightarrow{j}_c$  que l'on obtiendra pratiquement pourront très bien appartenir tous à un sous espace vectoriel de  $\mathcal{E}_{nx}$ , noté  $\mathcal{H}_{nx}$  (de dimension  $d_{nx}$ ). En effet  $\overrightarrow{u}_t$  ou  $\overrightarrow{j}_c$  sont imposés respectivement par la source de tension, de courant.

<sup>A</sup> L'indice  $x$  sera identique à  $c$  ou  $t$  respectivement pour une source de courant, de tension.

Des couplages au sein des sources peuvent donc par exemple être à l'origine de cette propriété d'appartenance à un sous espace vectoriel.

*Exemple* : pour une machine triphasée couplée en étoile sans neutre sorti, du fait du couplage des trois sources de courant les vecteurs courants  $\vec{j}_c$  appartiennent tous à un plan<sup>A</sup> puisque  $\vec{j}_c = j_{c1} \vec{s}_{c1} + j_{c2} \vec{s}_{c2} + j_{c3} \vec{s}_{c3} = j_{c1} \vec{s}_{c1} + j_{c2} \vec{s}_{c2} - (j_{c1} + j_{c2}) \vec{s}_{c3}$ . Le sous espace vectoriel  $\mathcal{H}_{3c}$  existe donc et c'est un plan au sein duquel on définit habituellement les deux couples de tensions et courants fictifs  $(v_d, v_q)$  et  $(i_d, i_q)$ .

De façon plus générale pour une source de courant, si la somme des courants  $j_{ck}$  est nulle alors cela implique que les vecteurs courants appartiennent à un sous espace vectoriel de dimension (n-1).

Qu'en est-il alors des vecteurs tensions ? Cela dépend de la source. Dans de nombreux cas (cf. chapitre III) les vecteurs tension appartiendront au même sous espace vectoriel que les courants. On pourrait penser alors se restreindre à ce sous espace de dimension (n-1) comme cela a été fait dans l'exemple. En fait, il peut être préférable de continuer de travailler au sein de  $\mathcal{E}_{nc}$  afin de bénéficier des propriétés de la base **orthonormée**  $\mathcal{E}_{nc}$ . On peut ainsi très facilement retrouver  $u_{ck}$  et  $j_{ck}$  à partir de  $\vec{u}_c$  et  $\vec{j}_c$  par simple produit scalaire. De plus, l'approche envisagée est plus générale puisqu'elle n'impose pas de connaître les couplages des sources.

## II.2. Familles de vecteurs engendrées par le modulateur

### II.2.1. Famille discrète

Le modulateur d'énergie engendre  $\mathcal{F}_H$ , une famille finie de H couples de vecteurs  $(\vec{i}_t, \vec{v}_c) \in \mathcal{E}_{tk} \times \mathcal{E}_{cp}$ . En effet, il existe entre les vecteurs tensions  $\vec{v}_c$  et  $\vec{v}_t$  ainsi qu'entre les vecteurs courants  $\vec{i}_t$  et  $\vec{i}_c$  des relations. Ces dernières varient selon les connexions réalisées par les interrupteurs. Leur expression générale peut être établie à l'aide de la notion de fonction de connexion  $f_{rs}$  qui permet de caractériser l'état de l'interrupteur qui lie la r<sup>ième</sup>

---

<sup>A</sup> il n'y a pas de composante « homopolaire en courant ».

source de tension à la  $s^{\text{ième}}$  source de courant :  $f_{rs} = 0$  à l'état ouvert, 1 à l'état fermé (cf. *Figure 20*).

Les règles de compatibilité des sources impliquent par ailleurs la contrainte suivante pour chaque cellule de commutation :

$$\forall s \in \{1, \dots, p\}, \sum_{r=1}^{r=k} f_{rs} = 1.$$

Il vient qu'il y a  $k$  combinaisons possibles pour chaque cellule. On en déduit, pour le modulateur qui comporte  $p$  cellules, le nombre possible de combinaisons et donc de couples :

$$\boxed{H = k^p.}$$

(exemples :  $3^2 = 9$  pour onduleur de courant triphasé à 2 cellules de commutation de 3 interrupteurs ;  $2^3 = 8$  pour onduleur de tension triphasé « classique » à 3 cellules de commutation de 2 interrupteurs).

Il vient alors qu'un couple quelconque parmi les  $H$  est défini par les relations suivantes<sup>A</sup> :

- $\vec{v}_c = \left( \sum_{r=1}^{r=k} f_{r1} v_{tr} \right) \vec{x}_{c1} + \left( \sum_{r=1}^{r=k} f_{r2} v_{tr} \right) \vec{x}_{c2} + \dots + \left( \sum_{r=1}^{r=k} f_{rp} v_{tr} \right) \vec{x}_{cp}$  ;
- $\vec{i}_t = \left( \sum_{s=1}^{s=p} f_{1s} i_{cs} \right) \vec{x}_{t1} + \left( \sum_{s=1}^{s=p} f_{2s} i_{cs} \right) \vec{x}_{t2} + \dots + \left( \sum_{s=1}^{s=p} f_{ks} i_{cs} \right) \vec{x}_{tk}$  .

Dans le cas de l'exemple traité qui comporte 2 cellules de commutation à 2 interrupteurs, la famille  $\mathcal{F}_4$  comporte quatre couples :

- $(\vec{v}_{c1} = +E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} ; \vec{i}_{t1} = \vec{0}) ;$   $\begin{cases} f_{11} = 1 & f_{12} = 1 \\ f_{21} = 0 & f_{22} = 0 \end{cases}$

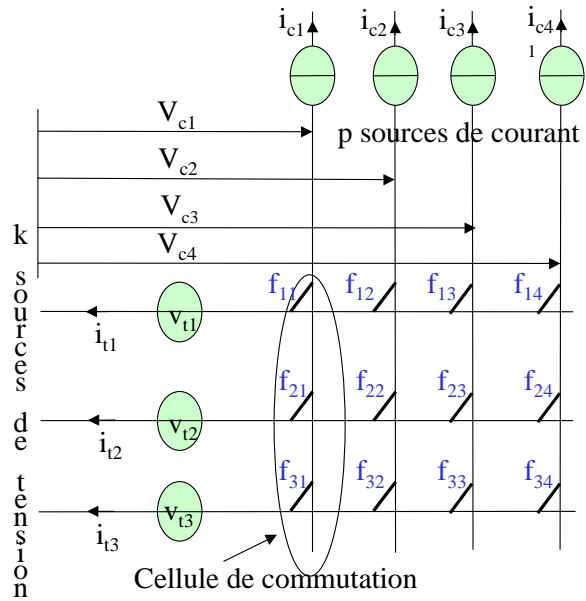


Figure 20, association d'une fonction de connexion  $f_{ij}$  aux interrupteurs

<sup>A</sup> En exprimant les vecteurs selon leurs composantes, on obtient les matrices de connexion.

$$\begin{aligned}
\bullet \quad (\vec{v}_{c2} = -E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} ; \vec{i}_{t2} = -j \vec{x}_{t1} + j \vec{x}_{t2} ) ; & \quad \begin{cases} f_{11} = 0 & f_{12} = 1 \\ f_{21} = 1 & f_{22} = 0 \end{cases} \\
\bullet \quad (\vec{v}_{c3} = -E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} ; \vec{i}_{t3} = \vec{0} ) ; & \quad \begin{cases} f_{11} = 0 & f_{12} = 0 \\ f_{21} = 1 & f_{22} = 1 \end{cases} \\
\bullet \quad (\vec{v}_{c4} = +E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} ; \vec{i}_{t4} = +j \vec{x}_{t1} - j \vec{x}_{t2} ) ; & \quad \begin{cases} f_{11} = 1 & f_{12} = 0 \\ f_{21} = 0 & f_{22} = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Cette famille  $\mathbf{F}_H$  représente l'ensemble des vecteurs qu'il est possible de requérir. Le **domaine accessible** à la commande ainsi défini, est donc par nature discret et comporte  $H$  couples de vecteurs.

Dans les cas particuliers où l'on cherche seulement à imposer les tensions ou les courants on considérera les familles issues de  $\mathbf{F}_H$  :

- $\mathbf{F}_{Hc} = \{ \vec{v}_{cr} \text{ avec } 1 \leq r \leq H \}$  ;
- $\mathbf{F}_{Ht} = \{ \vec{i}_{tr} \text{ avec } 1 \leq r \leq H \}$ .

On note alors :

- $\mathcal{G}_{Hc}$  le sous espace vectoriel de  $\mathcal{E}_{cp}$  engendré par  $\mathbf{F}_{Hc}$  ;  $d_{Hc}$  la dimension de  $\mathcal{G}_{Hc}$  ;
- $\mathcal{G}_{Ht}$  le sous espace vectoriel de  $\mathcal{E}_{tk}$  engendré par  $\mathbf{F}_{Ht}$  ;  $d_{Ht}$  la dimension de  $\mathcal{G}_{Ht}$  ;

Ce sont les dimensions de ces sous espaces vectoriels qui nous permettront de déterminer les possibilités pour un modulateur de piloter une charge.

*Exemple : Dans l'exemple traité ( $H = 4$ ,  $d_{Hc} = 1$ ,  $d_{Ht} = 2$ ) on cherche **seulement** à imposer la tension à la source de courant. Seule la famille  $\mathbf{F}_{4c}$  nous intéresse. Elle est composée de quatre vecteurs tension. L'espace engendré  $\mathcal{G}_{4c}$  est un plan. On verra que l'onduleur monophasé est capable d'alimenter des charges monophasées mais également diphasées (cf. Figure 23).*

### **II.2.2. Famille continue**

Lors d'une commande aux valeurs moyennes (« en durée »), l'ensemble des couples que le modulateur permet d'obtenir par combinaison des éléments de la famille discrète définie précédemment est :

$$\mathbf{F}_m = \left\{ \left( \overrightarrow{i_{\text{tmoy}}}, \overrightarrow{v_{\text{cmoy}}} \right) \in \mathcal{E}_{\text{tk}} \times \mathcal{E}_{\text{cp}} / \overrightarrow{i_{\text{tmoy}}} = \sum_{r=1}^{r=H} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{i_{\text{tr}}} \right. \text{ et}$$

$$\left. \overrightarrow{v_{\text{cmoy}}} = \sum_{r=1}^{r=H} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{v_{\text{cr}}} \text{ avec } T = \sum_{r=1}^{r=H} t_r \right\}$$

Cette nouvelle famille  $\mathbf{F}_m$ , infinie, définit dans l'espace vectoriel produit  $\mathcal{E}_{\text{tc}} = \mathcal{E}_{\text{tk}} \times \mathcal{E}_{\text{cp}}$  un **domaine accessible**  $\mathcal{D}_m$  de nature continue. Tout couple requis par la commande devra se situer à l'intérieur des frontières du domaine. La caractérisation de ces frontières permettra de déterminer les potentialités offertes par le modulateur.

Dans les cas particuliers où l'on cherche seulement à imposer les tensions ou les courants on considérera les familles :

- $\mathbf{F}_{\text{mc}} = \left\{ \overrightarrow{v_{\text{cmoy}}} \in \mathcal{E}_{\text{cp}} / \overrightarrow{v_{\text{cmoy}}} = \sum_{r=1}^{r=H} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{v_{\text{cr}}} \text{ avec } T = \sum_{r=1}^{r=H} t_r \right\}$  ;
- $\mathbf{F}_{\text{mt}} = \left\{ \overrightarrow{i_{\text{tmoy}}} \in \mathcal{E}_{\text{tk}} / \overrightarrow{i_{\text{tmoy}}} = \sum_{r=1}^{r=H} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{i_{\text{tr}}} \text{ avec } T = \sum_{r=1}^{r=H} t_r \right\}$  .

On note alors :

- $\mathcal{D}_{\text{mc}}$  le domaine accessible correspondant à la famille  $\mathbf{F}_{\text{mc}}$ ;
- $\mathcal{D}_{\text{mt}}$  le domaine accessible correspondant à la famille  $\mathbf{F}_{\text{mt}}$ ;

Dans l'exemple traité on cherche seulement à imposer la tension à la source de courant. Le domaine  $\mathcal{D}_{\text{mc}}$  correspondant est un carré dont les frontières sont des segments.

### II.3. Morphismes d'espace vectoriels

Alimenter une « source » par un modulateur d'énergie c'est établir des relations entre les courants et les tensions des deux protagonistes. L'introduction des espaces vectoriels associés ainsi que des vecteurs tension et courant permet de considérer ces relations sous un autre angle de vue. Linéaires, elles définissent des morphismes d'espace vectoriel. Leur étude permet de déterminer les capacités du modulateur à imposer tensions ou courants désirés à la charge. Par ailleurs, les degrés de liberté de la commande apparaissent également par l'étude des dimensions des espaces vectoriels.

**II.3.1. Morphismes entre modulateur et sources de courant**

Le modulateur impose les tensions aux p sources de courant. L'espace de départ du morphisme  $\mathcal{V}_c$  qui relie les vecteurs tensions sera donc  $\mathcal{E}_{cp}$ , l'espace d'arrivée  $\mathcal{E}_{nc}$  :

$$\mathcal{V}_c : \mathcal{E}_{cp} \rightarrow \mathcal{E}_{nc}, \mathcal{V}_c(\vec{v}_c) = \vec{u}_c .$$

Par contre les sources imposent les courants au modulateur. L'espace de départ du morphisme  $\mathcal{I}_c$  qui relie les vecteurs courants sera donc  $\mathcal{E}_{nc}$ , l'espace d'arrivée  $\mathcal{E}_{cp}$  :

$$\mathcal{I}_c : \mathcal{E}_{nc} \rightarrow \mathcal{E}_{cp}, \mathcal{I}_c(\vec{j}_c) = \vec{i}_c .$$

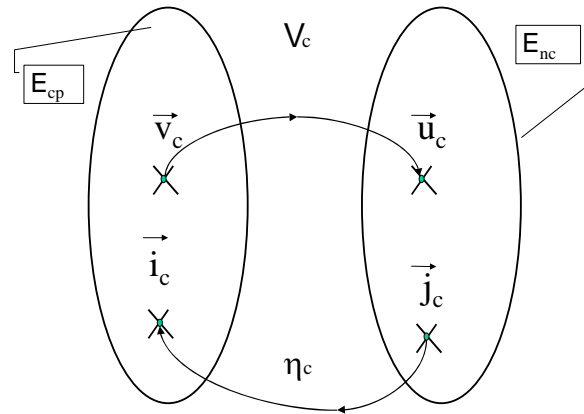


Figure 21, représentation symbolique des espaces vectoriels associés au modulateur et aux sources de courant.

Dans l'exemple traité, on a deux sources de courant et une phase. Il vient donc :

$$\mathcal{V}_c : \mathcal{E}_{c2} \rightarrow \mathcal{E}_{1c}, \mathcal{V}_c(\vec{v}_c) = \vec{u}_c = (v_B - v_A) \vec{s}_{c1} .$$

Le morphisme  $\Phi$  qui a été introduit au paragraphe I se confond donc avec  $\mathcal{V}_c$ .

**II.3.2. Morphismes entre modulateur et sources de tension**

L'approche est bien évidemment duale de celle suivie au paragraphe précédent.

Le modulateur impose les k courants aux sources de tension. L'espace de départ du morphisme  $\mathcal{I}_t$  qui relie les vecteurs courants sera donc  $\mathcal{E}_{tk}$ , associé au modulateur, l'espace d'arrivée  $\mathcal{E}_{nt}$ , associé aux sources :

$$\mathcal{I}_t : \mathcal{E}_{tk} \rightarrow \mathcal{E}_{nt}, \mathcal{I}_t(\vec{i}_t) = \vec{j}_t .$$

Par contre les sources imposent les tensions au modulateur. L'espace de départ du morphisme  $\mathcal{V}_t$  qui relie les vecteurs tensions sera donc  $\mathcal{E}_{nt}$ , l'espace d'arrivée  $\mathcal{E}_{tk}$  :

$$\mathcal{V}_t : \mathcal{E}_{nt} \rightarrow \mathcal{E}_{tk}, \mathcal{V}_t(\vec{u}_t) = \vec{v}_t .$$

### II.3.3. Morphisme entre modulateur et sources

Dans la mesure où l'on cherche simultanément à imposer tension et courant il est naturel de définir le morphisme  $\mathcal{S}$  défini à partir de ceux des paragraphes précédents :

$$\mathcal{S} : \mathcal{E}_{tk} \times \mathcal{E}_{cp} \rightarrow \mathcal{E}_{nt} \times \mathcal{E}_{nc}, \mathcal{S}(\vec{i}_t, \vec{v}_c) = (\mathcal{V}_t(\vec{i}_t), \mathcal{V}_c(\vec{v}_c)) = (\vec{j}_t, \vec{u}_c).$$

## II.4. De l'usage des morphismes : synthèse d'une commande

Lors de la synthèse d'une commande on désire imposer à l'aide du modulateur :

- soit seulement les tensions aux sources de courant ;
- soit seulement les courants aux sources de tension ;
- ou les deux simultanément (par exemple onduleur de tension à absorption sinusoïdale de courant).

### II.4.1. Commande en tension de la source de courant

On va établir dans un premier temps des conditions, portant sur les dimensions des espaces, qui permettent de savoir dans quelle mesure le pilotage d'une source par le modulateur est possible.

Si on désire piloter en tension, à l'aide d'une commande aux valeurs moyennes, une charge, il faut que tout vecteur tension du sous espace vectoriel  $\mathcal{H}_{nc}$  (de dimension  $d_{nc}$ ) qui caractérise un état de cette charge soit l'image par un morphisme d'un vecteur du domaine  $\mathcal{D}_{mc}$ . Ce domaine engendre l'espace  $\mathcal{G}_{Hc}$  de dimension  $d_{Hc}$ .

Or, la dimension de l'image d'un espace vectoriel de dimension  $d_{Hc}$  par un morphisme est inférieure ou égale à  $d_{Hc}$ .

Par conséquent,  $d_{nc}$  la dimension du sous espace vectoriel  $\mathcal{H}_{nc}$  doit être inférieure ou égale à  $d_{Hc}$ , la dimension de  $\mathcal{G}_{Hc}$  :  $d_{Hc} \geq d_{nc}$ . C'est une condition nécessaire.

#### Considérons alors :

- une charge comportant n phases ;

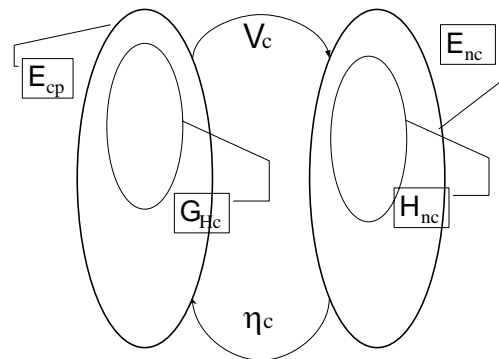


Figure 22, représentation symbolique des espaces vectoriels associés au modulateur pour une commande aux valeurs moyennes.

<sup>A</sup> Défini en fin de paragraphe Chapitre II II.1.2. , p 43.

- un modulateur dont l'espace associé  $\mathcal{G}_{Hc}$  est de dimension  $d_{Hc}$  ;

Puisque  $\mathcal{Z}_{nc}$ , de dimension  $d_{nc}$ , est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{E}_{nc}$  de dimension  $n$  alors :  $n > d_{nc}$ . Il vient que,

- **si**  $d_{Hc} \geq n$  alors  $d_{Hc} \geq d_{nc}$ . On peut envisager de piloter en tension la charge à l'aide du modulateur.
- **Par contre**, si  $n > d_{Hc}$  alors il est nécessaire d'effectuer un couplage des phases qui réduise la dimension  $d_{nc}$  de  $\mathcal{Z}_{nc}$ .

### Appliquons !

- Dans l'exemple étudié :
  - ❖  $n = 1$  (nombre de phases de la charge) ;
  - ❖  $H = 4$  (nombre de combinaisons possibles) ;
  - ❖  $d_{Hc} = 2$  (dimension de  $\mathcal{G}_{Hc}$  engendré par les vecteurs tension « générateurs ») ;
  - ❖  $d_{nc} = 1$  (dimension de l'espace associé à la charge monophasée) ;

On a bien  $d_{Hc} \geq n$ , la commande

est possible sans aucun problème.

- Pour une source de courant triphasée ( $n = 3$ ) couplée en triangle ou en étoile sans neutre sorti on a  $d_{nc} = 2$ . L'onduleur de tension étudié dans l'exemple (2 cellules de commutation à 2 interrupteurs :  $d_{Hc} = 2$ ) est effectivement capable d'alimenter ce type de charge (cf. Figure 23).

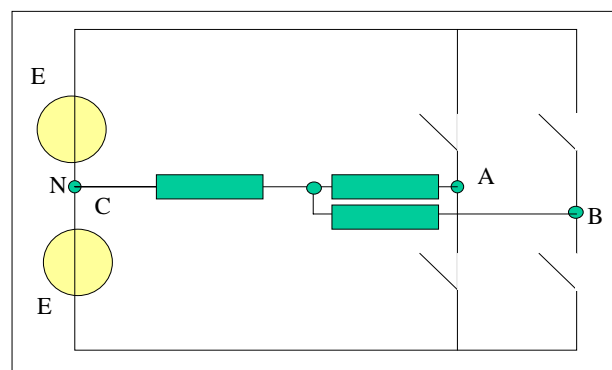


Figure 23, alimentation d'une charge triphasée (sous espace associé de dimension 2) par un modulateur à deux bras (espace associé de dimension 2).

**On vient donc d'établir quelques conditions permettant de savoir si un modulateur est capable de piloter une source.**



Poursuivons dans l'étude en supposant maintenant que le couplage de la source est connu. Le morphisme  $\mathcal{V}_c$  est alors parfaitement défini. Désignons par  $\overrightarrow{u_{c\text{ref}}}$  le vecteur tension de la source de courant.

Si le morphisme  $\mathcal{V}_c$  est bijectif alors s'en déduit immédiatement le vecteur tension désiré dans l'espace vectoriel du modulateur d'énergie :  $\overrightarrow{v_{c\text{ref}}} = \mathcal{V}_c^{-1}(\overrightarrow{u_{c\text{ref}}})$ .

Lorsque  $\mathcal{V}_c$  n'est pas bijectif mais surjectif plusieurs vecteurs  $\overrightarrow{v_{c\text{ref}}}$  peuvent répondre au problème. C'est le cas dans l'exemple traité où  $\Phi$  est surjectif (cf. Chapitre II I).

Lorsque  $\mathcal{V}_c$  n'est pas bijectif mais injectif certains vecteurs tensions  $\overrightarrow{u_{c\text{ref}}}$  ne peuvent être obtenus.

#### **II.4.2. Commande en courant de la source de tension**

La démarche est exactement la même que celle du paragraphe précédent.

Désignons par  $\overrightarrow{j_{t\text{ref}}}$  le vecteur courant de la source de tension.

Si le morphisme  $\mathcal{I}_t$  est bijectif alors s'en déduit immédiatement le vecteur courant désiré dans l'espace vectoriel du modulateur d'énergie :  $\overrightarrow{i_{t\text{ref}}} = \mathcal{I}_t^{-1}(\overrightarrow{j_{t\text{ref}}})$ .

Lorsque  $\mathcal{I}_t$  n'est pas bijectif mais surjectif plusieurs vecteurs  $\overrightarrow{j_{t\text{ref}}}$  peuvent répondre au problème.

Lorsque  $\mathcal{I}_t$  n'est pas bijectif mais injectif certains vecteurs courants  $\overrightarrow{j_{t\text{ref}}}$  ne peuvent être obtenus.

#### **II.4.3. Commande en courant et en tension**

Désignons par  $\overrightarrow{u_{c\text{ref}}}$  et  $\overrightarrow{j_{t\text{ref}}}$  les vecteurs tension et courant respectivement de la source de courant, de la source de tension.

Si le morphisme  $\mathcal{S}$  est bijectif alors s'en déduisent immédiatement le couple de vecteurs tension et courant désiré dans l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_{tc} = \mathcal{E}_{tk} \times \mathcal{E}_{cp}$  du modulateur d'énergie :

$$(\overrightarrow{v_{c\text{ref}}}, \overrightarrow{i_{t\text{ref}}}) = \mathcal{S}^{-1}(\overrightarrow{u_{c\text{ref}}}, \overrightarrow{j_{t\text{ref}}}).$$

Lorsque  $\mathcal{S}$  n'est pas bijectif mais surjectif plusieurs couples  $(\overrightarrow{v_{c\text{ref}}}, \overrightarrow{i_{t\text{ref}}})$  peuvent répondre au problème.

Lorsque  $\mathcal{S}$  n'est pas bijectif mais injectif certains vecteurs tensions  $\overrightarrow{u_{c\text{ref}}}$  et courant  $\overrightarrow{j_{t\text{ref}}}$  ne peuvent être obtenus.

#### **II.4.4. Commande « instantanée » ou « en amplitude »**

Dans le cadre de ce type de commande, le caractère discret et non linéaire du modulateur est pris en compte :

- on désire un couple  $(\overrightarrow{v_{c\text{ref}}}, \overrightarrow{i_{t\text{ref}}})$  ;
- on choisit alors au sein de la famille  $\mathcal{F}_H$  celui qui « convient le mieux » au sens donc d'un certain critère d'optimisation.

On peut par exemple prendre le vecteur le plus proche en considérant la notion de distance euclidienne entre deux vecteurs. C'est ce qui est utilisé classiquement dans la commande par vecteurs d'espace d'onduleur de tension afin de minimiser l'ondulation de courant.

Un autre exemple est celui de la commande « Direct Torque Control » des machines électriques. On choisit alors un vecteur tension qui permet de conserver constant le module du vecteur flux statorique ainsi que d'augmenter ou de diminuer le couple.

#### **II.4.5. Commande « aux valeurs moyennes » ou « en durée »**

Dans le cadre de ce type de commande,  $\overrightarrow{u_{c\text{ref}}}$  et  $\overrightarrow{j_{t\text{ref}}}$  désignent plus modestement les valeurs moyennes que l'on désire obtenir sur une durée  $T$ . Pour que le problème comporte au moins une solution, il faut que  $(\overrightarrow{u_{c\text{ref}}}, \overrightarrow{j_{t\text{ref}}})$  appartienne à l'image par  $\mathcal{S}$  (cf. II.3.3. , p48) du domaine  $\mathcal{D}_{mc} \times \mathcal{D}_{mt}$ . On note alors  $(\overrightarrow{v_{c\text{ref}}}, \overrightarrow{i_{t\text{ref}}})$  un couple solution.

**On suppose dans la suite que cette condition est remplie.**

On rappelle qu'aux instants  $kT$  d'échantillonnage les valeurs moyennes glissantes<sup>A</sup>  $\langle \overrightarrow{v_c} \rangle(t)$  et  $\langle \overrightarrow{i_t} \rangle(t)$  des vecteurs tension et courant imposés par l'onduleur aux sources s'écrivent :

$$\langle \overrightarrow{v_c} \rangle(kT) = \sum_{r=1}^{r=N} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{v_{cr}} \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{i_t} \rangle(kT) = \sum_{r=1}^{r=N} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{i_{tr}}$$

avec  $T = \sum_{r=1}^{r=N} t_r$  et  $t_r$  durée pendant laquelle sont activés les vecteurs  $\overrightarrow{v_{cr}}$  et  $\overrightarrow{i_{tr}}$ .

Le problème consiste donc à résoudre les équations :

$$\overrightarrow{v_{cref}} = \sum_{r=1}^{r=N} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{v_{cr}} \quad \text{Équation II-1}$$

et

$$\overrightarrow{i_{tref}} = \sum_{r=1}^{r=N} \frac{t_k}{T} \overrightarrow{i_{tr}} \quad \text{Équation II-2}$$

avec la contrainte  $T = \sum_{r=1}^{r=N} t_r$

La solution n'est pas unique en général. Se pose alors le problème du choix. Un des critères les plus employés consiste à utiliser le minimum de vecteurs possibles de la famille  $\mathcal{F}_H$  afin de réduire le nombre de commutations.

Dans cette optique il est intéressant de poursuivre l'analyse entamée quant aux possibilités qu'offre le modulateur d'énergie. On cherche ainsi à savoir quels sont les vecteurs que l'on peut obtenir par combinaison barycentrique de deux, trois, quatre, ...,  $H$  vecteurs.

À ce propos, on voit réapparaître la notion de barycentre déjà introduite au paragraphe Chapitre II I.4. Cette notion mathématique est elle-même utilisée usuellement dans le cadre des espaces affines<sup>B</sup> dont les éléments sont des points.

---

<sup>A</sup>  $\langle \overrightarrow{v} \rangle(t) = \frac{1}{T} \int_{z=t-T}^{z=t} \overrightarrow{v}(z) dz$

<sup>B</sup> On rappelle que pour associer un espace affine, dont les éléments sont appelés points, à un espace vectoriel  $G$ , il suffit de définir pour tout vecteur  $\overrightarrow{p}$  de l'espace vectoriel un élément  $M$  dit point tel que :  $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{OM}$ . Le point image du vecteur nul est appelé origine de l'espace affine et noté  $O$ . Il est possible bien entendu d'utiliser plusieurs origines.

On a rappelé au paragraphe I.4, p 26 que le barycentre :

- de deux points  $M_k$  et  $M_j$  est un point du segment  $[M_k M_j]$  ;
- de trois points  $M_k, M_j, M_t$  non alignés<sup>A</sup> est un point qui appartient au triangle  $[M_k M_j M_t]$  défini par  $M_k, M_j$  et  $M_t$  ;

L'utilisation de ce type de résultat est relativement immédiate. En effet, supposons que l'on désire un vecteur  $\overrightarrow{v_{\text{cref}}}$ . Alors, une décomposition sur uniquement deux vecteurs existe si et seulement si le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{v_{\text{cref}}} = \overrightarrow{OM}$  appartient à l'un des segments  $[M_k M_j]$  (un point  $M_r$  est défini par  $\overrightarrow{v_{\text{cr}}} = \overrightarrow{OM_r}$  avec  $1 \leq r \leq H$ ).

De même, une décomposition sur uniquement trois vecteurs existe si et seulement si le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{v_{\text{cref}}} = \overrightarrow{OM}$  appartient à l'un des triangles  $[M_k M_j M_t]$ .

On peut montrer de la même façon que le barycentre de quatre points non coplanaires<sup>▲</sup>  $M_k, M_j, M_t, M_s$  est un point qui appartient au tétraèdre  $[M_k M_j M_t M_s]$  défini par  $M_k, M_j, M_t$  et  $M_s$ . Il s'en suit qu'une décomposition sur quatre vecteurs uniquement existe si et seulement si le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{v_{\text{cref}}} = \overrightarrow{OM}$  appartient à l'un des tétraèdres  $[M_k M_j M_t M_s]$ .

Ces rappels sur les barycentres font apparaître que les dimensions respectives  $d_{Hc}$  et  $d_{Ht}$  des sous espaces vectoriels  $\mathcal{G}_{Hc}$  et  $\mathcal{G}_{Ht}$  respectivement engendrés par les familles  $\mathcal{F}_{Hc} = \{ \overrightarrow{v_{\text{cr}}} \text{ avec } 1 \leq r \leq H \}$  et  $\mathcal{F}_{Ht} = \{ \overrightarrow{i_{\text{tr}}} \text{ avec } 1 \leq r \leq H \}$  gagnent à être connues.

En effet, reprenons la recherche de solution des équations II-1 et II-2 p 52.

<sup>A</sup> Vectoriellement cela se traduit par le fait que la famille  $( \overrightarrow{M_k M_j}, \overrightarrow{M_k M_t} )$  est une famille libre. Ces trois points engendrent un espace de dimension deux.

<sup>▲</sup> Vectoriellement cela se traduit par le fait que la famille  $( \overrightarrow{M_k M_j}, \overrightarrow{M_k M_t}, \overrightarrow{M_k M_s} )$  est une famille libre. Ces quatre points engendrent un espace de dimension trois.

Par hypothèse, le vecteur  $\overrightarrow{v_{\text{cref}}}$ , élément de  $\mathcal{D}_{\text{mc}}$ , appartient à  $\mathcal{G}_{\text{Hc}}$  qui est de dimension  $d_{\text{Hc}}$ . Considérons un point  $M$  tel que  $\overrightarrow{v_{\text{cref}}} = \overrightarrow{OM}$ .

Un raisonnement par itération du même type que celui réalisé pour les barycentres de deux, trois et quatre points montre qu'il est alors possible de trouver  $(d_{\text{Hc}} + 1)$  points  $M_r^A$  tels que :

- $M$  soit le barycentre de ces  $(d_{\text{Hc}} + 1)$  points ;
- les  $d_{\text{Hc}}$  vecteurs du type  $\overrightarrow{M_k M_r}$  forment une famille libre de  $\mathcal{G}_{\text{Hc}}$ .

Il vient alors :

$$\overrightarrow{v_{\text{cref}}} = \overrightarrow{OM} = \sum_{1+d_{\text{Hc}}} \frac{t_j}{T} \overrightarrow{v_{c_j}} = \sum_{1+d_{\text{Hc}}} \frac{t_j}{T} \overrightarrow{OM_j}, \text{ ou,}$$

$$\text{en prenant } O = M_k, \quad \overrightarrow{M_k M} = \sum_{d_{\text{Hc}}} \frac{t_j}{T} \overrightarrow{M_k M_j}$$

Il y a unicité de la décomposition sur la famille libre des  $d_{\text{Hc}}$  vecteurs  $\overrightarrow{M_k M_j}$ .

**Définitions** : l'ensemble des  $(d_{\text{Hc}} + 1)$  points  $M_r$  sont dits points de base. L'ensemble des réels  $\frac{t_j}{T}$  constitue les coordonnées barycentriques de  $M$  dans la base des  $(d_{\text{Hc}} + 1)$  points  $M_r$ .

Quant à la décomposition sur un nombre de vecteurs inférieur à  $(d_{\text{Hc}} + 1)$ , elle est toujours unique mais n'est par contre pas toujours possible.

*Dans l'exemple traité Chapitre II I:*

- ❖  $H = 4$  (nombre de combinaisons possibles) ;
- ❖  $d_{\text{Hc}} = 2$  (dimension de  $\mathcal{G}_{\text{Hc}}$  engendré par les vecteurs tension « générateurs ») ;
- ❖  $d_{\text{Ht}} = 1$  (dimension de  $\mathcal{G}_{\text{Ht}}$  engendré par les vecteurs courant « générateurs »).

*La décomposition du vecteur tension désiré a été envisagé sur 2, 3 ou 4 vecteurs.*

---

<sup>A</sup> Rappel : un point  $M_r$  est défini par  $\overrightarrow{v_{cr}} = \overrightarrow{OM_r}$  avec  $1 \leq r \leq H$

Avec deux, la décomposition est bien unique et le point  $M$  doit appartenir à un segment de type  $[M_k M_j]$ . Avec trois, une fois choisi le vecteur  $\vec{v}$ , la décomposition est unique<sup>A</sup> et le point  $M$  doit simplement appartenir au carré  $[M_1 M_2 M_3 M_4]$ . Avec quatre la décomposition n'est plus unique d'où un degré de liberté supplémentaire qui permet la commande en onduleur.

Pour la synthèse d'une commande, il faut donc être en mesure de :

- déterminer  $d_{Hc}$  et  $d_{Ht}$  ;
- déterminer les sous familles libres constituées de vecteurs de type  $\overline{M_k M_j}$  ;
- d'effectuer une décomposition d'un vecteur sur  $m$  autres (pas forcément orthogonaux entre eux).

C'est ce qui a été réalisé dans l'exemple simple présenté mais on doit être capable de le généraliser. Nous l'examinerons dans la suite pour le classique onduleur de tension triphasé bipolaire.

## II.5. Conclusion

Dans cette partie nous avons proposé une généralisation de certaines notions introduites au cours de l'exemple simple étudié. Une telle généralisation se justifie-t-elle ?

En d'autres termes, est-il intéressant de s'intéresser à l'alimentation de systèmes polyphasés ?

Historiquement les machines triphasées se sont imposées de par la nature triphasée de l'alimentation. Par les techniques de bobinages ainsi que par le choix du nombre d'encoches on a réussi à obtenir de bonnes performances à partir d'une simple alimentation triphasée. Mais en vitesse variable ne serait-il pas intéressant pour les fortes puissances de multiplier le nombre de phases d'alimentation ce qui permettrait de fractionner la puissance électrique aiguillée par chaque interrupteur (moins de perturbation électromagnétique, plus faible dimensionnement). Dans cette optique, on peut s'intéresser à l'élaboration d'un formalisme commun aux machines et aux modulateurs d'énergie.

---

<sup>A</sup> On remarque néanmoins qu'il y a plusieurs vecteurs  $\vec{v}$  solution du problème puisque  $\mathcal{U}_c$  n'est pas bijective.

Puisqu'on se place dans le cadre d'une conception, nous avons pris l'option de ne pas s'imposer a priori le type de couplage entre les différentes phases des sources afin de dégager des propriétés indépendantes du couplage. Nous avons de même introduit les notions de morphismes et d'espaces vectoriels associés, notions qui seront utilisées également avec les machines électriques.

Par contre, certains points effleurés lors du traitement de l'exemple n'ont pas été développés. Nous préférons traiter auparavant un autre exemple, l'onduleur de tension triphasé bipolaire, dans le but :

- d'appliquer le formalisme que nous venons de présenter ;
- de développer dans un cas concret et bien connu les points à peine abordés lors du premier exemple.

### III. Étude d'un onduleur de tension triphasé deux niveaux

Dans cette étude on s'intéressera à la commande en tension des sources de courant. On impose un couplage étoile des deux sources de tension d'amplitude  $+E$  et  $-E$  (cf. *Figure 24*).

#### III.1. Espaces vectoriels et familles engendrées de vecteurs

##### III.1.1. Espace vectoriel associé au modulateur

Le modulateur établit un lien entre les sources. Vu des sources de courant il impose **3** tensions ( $p = 3$ ).

On associe donc au modulateur vu des sources de courant un espace de dimension **3**, noté  $\mathcal{E}_{c3}$ , muni d'une base orthonormée directe  $\mathcal{B}_c$  avec

$$\mathcal{B}_c = \left\{ \vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2}, \vec{x}_{c3} \right\}.$$

On définit alors dans l'espace  $\mathcal{E}_{c3}$  les vecteurs suivants :

- $\vec{v}_c = v_{c1} \vec{x}_{c1} + v_{c2} \vec{x}_{c2} + v_{c3} \vec{x}_{c3}$  ;
- $\vec{i}_c = i_{c1} \vec{x}_{c1} + i_{c2} \vec{x}_{c2} + i_{c3} \vec{x}_{c3}$ .

Remarque 1 : le point neutre

$N_T$  de la source de tension peut être fictif (non utilisé), il suffit alors de réaliser l'asservissement d'une différence de potentiel de valeur  $2E$  entre les sources  $+E$  et  $-E$ . On n'a pas donc pas deux sources de tension à réguler à  $+E$  ou  $-E$ . Considérer le potentiel de référence au « milieu » de la source d'amplitude  $2E$  confère une certaine symétrie à la source de tension qui impose  $+E$  ou  $-E$  par rapport à ce potentiel. Ce choix induit une certaine symétrie dans les calculs. On aurait pu prendre une autre référence bien réelle, une des bornes d'entrée d'une des trois sources de courant par exemple. On privilégie alors dans les calculs une phase par rapport aux autres ce qui implique une dissymétrie dans la présentation des calculs.

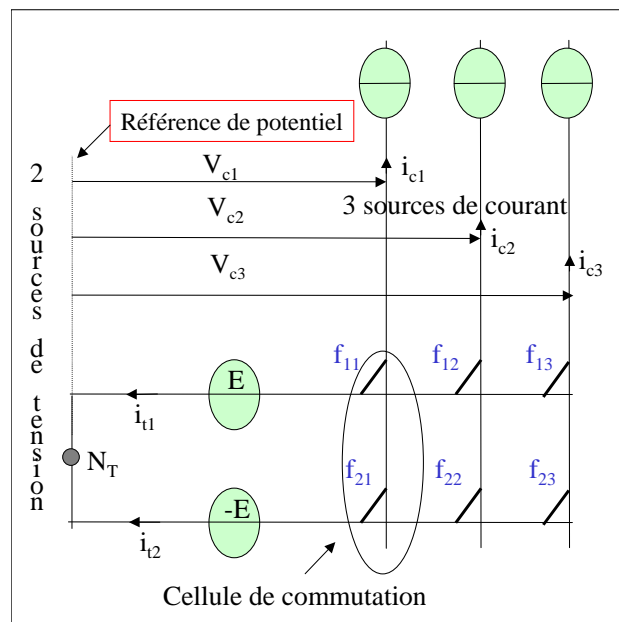


Figure 24, représentation de l'onduleur de tension triphasé étudié



*Remarque 2* : si on utilise le potentiel  $N_T$  (charge triphasée à neutre sorti par exemple relié à  $N_T$ ) il faut alors réellement deux sources de tension réglées à  $+E$  et  $-E$ .

### III.1.2. Espace vectoriel associé aux sources de courant

Si les sources comportent  $n$  phases, on leur associe un espace vectoriel  $\mathcal{E}_{nc}$  de dimension  $n$  avec  $\mathcal{B}_{nc} = \{\vec{s}_{c1}, \vec{s}_{c2}, \dots, \vec{s}_{cn}\}$  une base orthonormée.

En notant  $u_{ck}$  la tension aux bornes d'une phase et  $j_{ck}$  le courant qui la traverse on définit les vecteurs :

- $\vec{u}_c = u_{c1} \vec{s}_{c1} + u_{c2} \vec{s}_{c2} + \dots + u_{cn} \vec{s}_{cn}$  ;
- $\vec{j}_c = j_{c1} \vec{s}_{c1} + j_{c2} \vec{s}_{c2} + \dots + j_{cn} \vec{s}_{cn}$  .

### III.1.3. Familles engendrées

L'onduleur comporte trois cellules de commutation à deux interrupteurs. Le nombre de combinaisons possibles est donc  $H = 2^3 = 8$ .

#### III.1.3.a. Famille discrète

On note  $\mathcal{F}_{8c} = \{\vec{v}_{cr} \text{ avec } 0 \leq r \leq 7\}$  la famille des huit vecteurs tension suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{c0} = -E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} - E \vec{x}_{c3} \quad ; \quad \vec{v}_{c1} = +E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} - E \vec{x}_{c3} ; \\ \vec{v}_{c2} = +E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} - E \vec{x}_{c3} \quad ; \quad \vec{v}_{c3} = -E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} - E \vec{x}_{c3} \quad ; \\ \vec{v}_{c4} = -E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} + E \vec{x}_{c3} \quad ; \quad \vec{v}_{c5} = -E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} + E \vec{x}_{c3} \quad ; \\ \vec{v}_{c6} = +E \vec{x}_{c1} - E \vec{x}_{c2} + E \vec{x}_{c3} \quad ; \quad \vec{v}_{c7} = +E \vec{x}_{c1} + E \vec{x}_{c2} + E \vec{x}_{c3} \quad . \end{array} \right.$$

Une représentation graphique dans un repère affine  $(O, \vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2}, \vec{x}_{c3})$  fait apparaître immédiatement que les extrémités ( $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7$ ) de ces 8 vecteurs forment les sommets d'un cube centré en  $(0, 0, 0)$  (cf. Figure 25).

$\mathcal{G}_{8c}$  le sous espace vectoriel<sup>A</sup> de  $\mathcal{E}_{c3}$  engendré par  $\mathcal{F}_{8c}$  est de dimension 3 :  $d_{8c} = 3$ .

<sup>A</sup> défini en fin du paragraphe Chapitre II II.2.1. , p 44

III.1.3.b. Famille continue

Le domaine  $\mathcal{D}_{mc}$  correspondant à la famille

continue  $\mathcal{F}_{mc} = \{ \vec{v}_{cmoy} \in \mathcal{E}_{c3} /$

$$\vec{v}_{cmoy} = \sum_{r=0}^{r=7} \frac{t_r}{T} \vec{v}_{cr} \text{ avec } T = \sum_{r=0}^{r=7} t_r \}$$

est le **cube**

Figure 25.

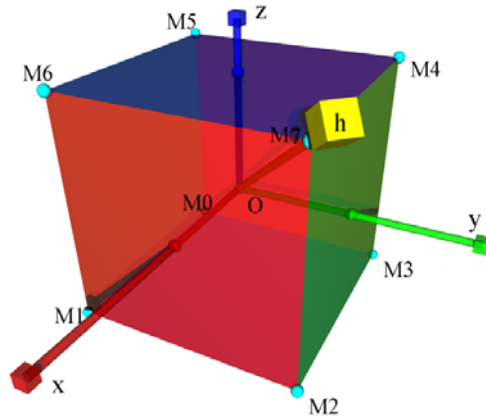


Figure 25, représentation spatiale de la famille discrète

$\vec{OM}_k$  des vecteurs engendrés par l'onduleur

III.2. Morphisme entre modulateur et sources de courant

III.2.1. Considérations sur le nombre de phases n des sources de courant

III.2.1.a. Nombre de phases inférieur ou égal à trois

Au paragraphe II.4.1. , p48, on a vu que si  $d_{Hc}^A \geq n$  alors la source peut être pilotée en tension indépendamment du couplage choisi pour les sources. Ici  $d_{Hc} = d_{gc} = 3$ . On peut donc envisager alimenter les systèmes à trois phases ou moins présentés Figure 26 et Figure 28.

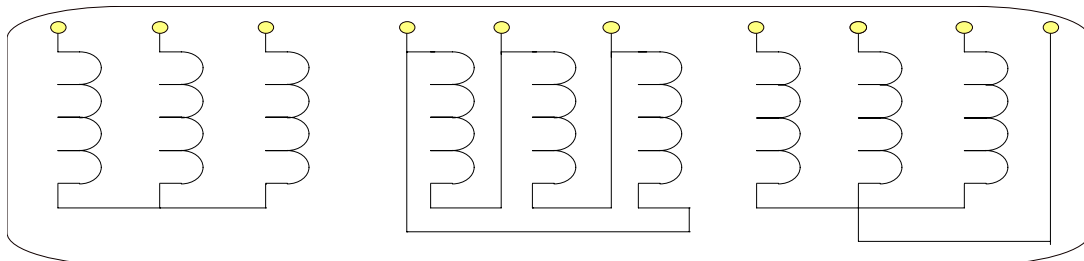


Figure 26, Sources triphasées qu'il est possible d'alimenter avec l'onduleur triphasé.

- Pour les couplages triphasés triangle et étoile sans neutre sorti, on montre (cf.Chapitre II III.2.2. ) que  $\mathcal{V}_c$  n'est pas injectif et que son noyau est de dimension UN. On dispose donc d'UN degré de liberté au niveau de la commande. Réduire le nombre de commutations ou l'ondulation de courant, imposer une forme d'onde pour le courant absorbé par les sources de tension peuvent être des critères pour lever l'indétermination

<sup>A</sup>  $d_{Hc}$  est la dimension du sous espace vectoriel  $\mathcal{G}_{Hc}$  engendrée par la famille des vecteurs de tension « générateurs ».

correspondant à ce degré de liberté. Par contre pour le couplage étoile avec neutre sorti  $d_{nc} = 3$ . Le morphisme  $\mathcal{V}_c$  est bijectif.

- Pour les couplages de systèmes diphasés  $n = 2$  et donc  $\text{rang } \mathcal{V}_c \leq 2$ . Or,  $\text{rang } \mathcal{V}_c + \dim \text{Ker } \mathcal{V}_c = \dim \mathcal{E}_{c3} = 3$ . Par conséquent,  $\dim \text{Ker } \mathcal{V}_c \geq 1$ . On dispose d'au moins 1 degré de liberté pour la commande.

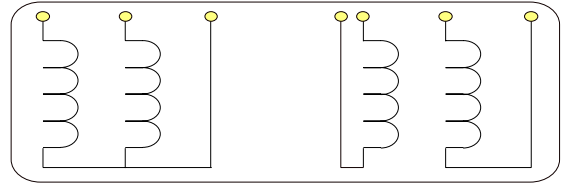


Figure 28, sources diphasées

**III.2.1.b. Nombre de phases supérieur à trois**

Si le nombre de phases est supérieur à trois il faut absolument que le couplage permette d'obtenir un sous espace vectoriel  $\mathcal{N}_{nc}$  de dimension inférieure ou égale à trois.

Un exemple de ce type de couplage pour un système tétraphasé est présenté Figure 27 (utilisé pour la réalisation de moteurs dits « diphasés »).

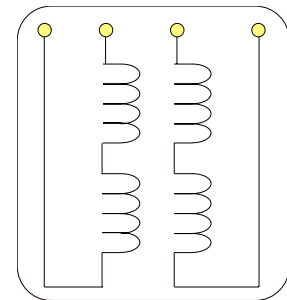


Figure 27, source tétraphasée avec couplage pour réduire la dimension du sous espace vectoriel associé

**III.2.2. Étude du morphisme pour un couplage de trois**

**sources en triangle**

On considère  $\mathcal{V}_c : \mathcal{E}_{c3} \rightarrow \mathcal{E}_{nc}$ ,  $\mathcal{V}_c$

$(\vec{v}_c) = \vec{u}_c$  avec :

- $u_{c1} = v_{c1} - v_{c3}$  ;
- $u_{c2} = v_{c2} - v_{c1}$  ;
- $u_{c3} = v_{c3} - v_{c2}$  ;

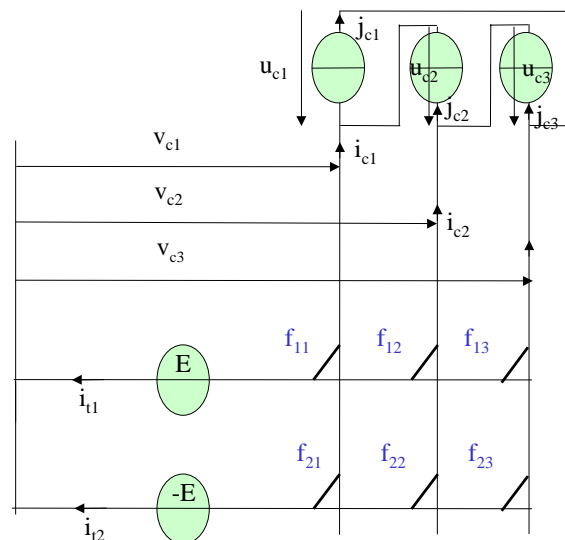


Figure 29, source de courant couplée en

III.2.2.a. Recherche du noyau de  $\mathcal{V}_c$

On démontre que<sup>A</sup>,  $\text{Ker } \mathcal{V}_c = \{ \vec{v}_c = \lambda \vec{y}_{c1} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{y}_{c1} = \frac{\vec{x}_{c1} + \vec{x}_{c2} + \vec{x}_{c3}}{\sqrt{3}} \}$ . C'est

une droite. Par conséquent, puisque  $\text{rang } \mathcal{V}_c + \dim \text{Ker } \mathcal{V}_c = \dim \mathcal{E}_{c3} = 3$ , l'image par  $\mathcal{V}_c$  de  $\mathcal{E}_{c3}$  est un sous espace de dimension deux.

III.2.2.b. Construction d'une nouvelle base de travail dans  $\mathcal{E}_{c3}$

On décompose  $\mathcal{E}_{c3}$  en une somme directe de deux espaces orthogonaux dont l'un est  $\text{Ker } \mathcal{V}_c$ , le noyau de  $\mathcal{V}_c$  :

$$\mathcal{E}_{c3} = \text{Ker } \mathcal{V}_c \oplus (\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp.$$

On considère une nouvelle base de travail orthonormée

$$\left\{ \vec{y}_{c1}, \vec{y}_{c2}, \vec{y}_{c3} \right\} \text{ avec } \vec{y}_{c1} = \frac{\vec{x}_{c1} + \vec{x}_{c2} + \vec{x}_{c3}}{\sqrt{3}} \text{ et}$$

$$\left\{ \vec{y}_{c2}, \vec{y}_{c3} \right\} \text{ base orthonormée de } (\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp.$$

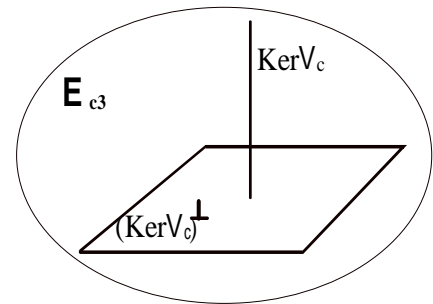


Figure 30, représentation symbolique de la décomposition de  $\mathcal{E}_{c3}$  en somme de deux sous espaces orthogonaux

III.2.2.c. Image d'un vecteur  $\vec{v}_c$

Un vecteur  $\vec{v}_c$  se décompose alors de la façon suivante :

$$\vec{v}_c = \frac{v_{c1} + v_{c2} + v_{c3}}{\sqrt{3}} \vec{y}_{c1} + \vec{v}_P \text{ avec } \vec{v}_P \text{ appartenant à } (\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp.$$

Il vient donc  $\vec{v}_P = \vec{v}_c - \frac{v_{c1} + v_{c2} + v_{c3}}{\sqrt{3}} \vec{y}_{c1}$  soit encore :

$$\vec{v}_P = \frac{2v_{c1} - v_{c2} - v_{c3}}{3} \vec{x}_{c1} + \frac{-v_{c1} + 2v_{c2} - v_{c3}}{3} \vec{x}_{c2} + \frac{-v_{c1} - v_{c2} + 2v_{c3}}{3} \vec{x}_{c3}$$

Par conséquent,  $\mathcal{V}_c(\vec{v}_c) = \mathcal{V}_c(\vec{v}_P) =$

$$\frac{2v_{c1} - v_{c2} - v_{c3}}{3} \vec{z}_{c1p} + \frac{-v_{c1} + 2v_{c2} - v_{c3}}{3} \vec{z}_{c2p} + \frac{-v_{c1} - v_{c2} + 2v_{c3}}{3} \vec{z}_{c3p}$$

<sup>A</sup> puisque  $\text{Ker } \mathcal{V}_c = \{ \vec{v}_c / \mathcal{V}_c(\vec{v}_c) = \vec{0} \}$  soit  $u_{c1} = 0 = v_{c1} - v_{c3}$ ;  $u_{c2} = 0 = v_{c2} - v_{c1}$ ;

$u_{c3} = 0 = v_{c3} - v_{c2}$ ;

avec  $\vec{z}_{ckp} = V_c(\vec{x}_{ck})$ .

*Remarque :* les commandes classiques à l'aide des phaseurs complexes ont lieu dans un plan complexe. On retrouve ici une justification de la possibilité de ne considérer qu'un espace de dimension 2 pour piloter l'onduleur. Dans notre cas,  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  est un plan euclidien qui est bien sûr isomorphe au plan complexe. Il y a donc une équivalence stricte.

Par contre l'approche proposée montre qu'il est possible de réaliser une commande qui bénéficie de la troisième dimension disponible. On obtiendra alors les commandes du même type que celles avec injection d'harmonique 3, couramment utilisées en milieu industriel.

III.2.2.d. Étude de  $\mathcal{H}_{nc}$ , l'image par  $\mathcal{V}_c$  de  $\mathcal{E}_{c3}$

On sait déjà que ce sous espace vectoriel est un plan. On cherche à le caractériser.

Soit donc un vecteur  $\vec{u}_c$  image par  $\mathcal{V}_c$  d'un vecteur  $\vec{v}_c$ . Les composantes de  $\vec{u}_c$  vérifient alors du fait du couplage :

$$u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = 0 \text{ soit encore } \vec{u}_c \cdot \vec{d}_{c1} = 0 \text{ avec } \vec{d}_{c1} = \frac{\vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3}}{\sqrt{3}}.$$

Il apparaît que les vecteurs  $\vec{u}_c$  sont tous orthogonaux au vecteur  $\vec{d}_{c1}$ . Ils appartiennent donc bien à un plan, noté  $\mathcal{H}_{nc}$ , orthogonal à la droite engendrée par  $\vec{d}_{c1}$  (cf. Figure 31).

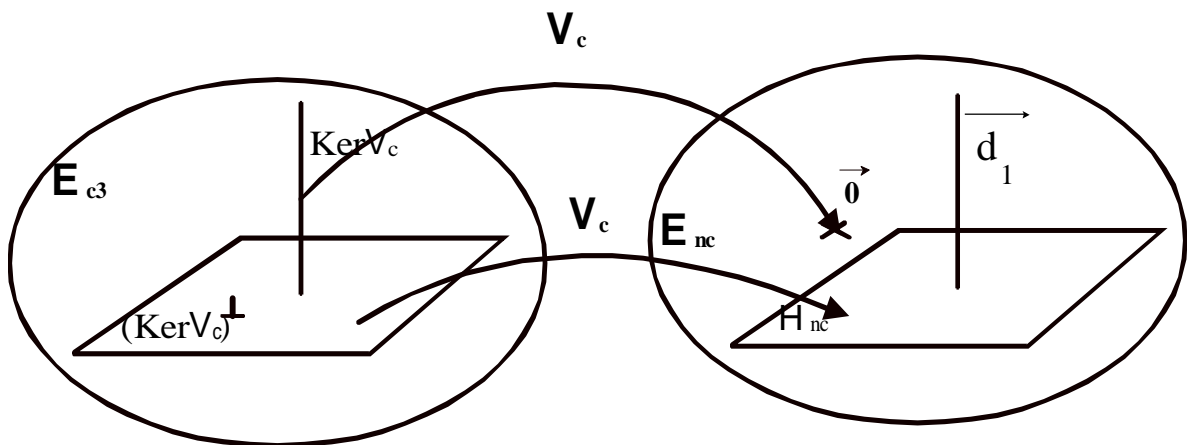


Figure 31, représentation symbolique des relations entre espaces vectoriels dues à  $\mathcal{V}_c$

On munit ce plan d'une base orthonormée  $\{\overrightarrow{d_{c2}}, \overrightarrow{d_{c3}}\}$ .

*Remarque :* Pour choisir judicieusement cette base on s'appuie sur des propriétés de la charge. On ne peut donc à ce stade de développement préciser  $\{\overrightarrow{d_{c2}}, \overrightarrow{d_{c3}}\}$ .

### III.2.2.e. Bijection entre $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ et $\mathcal{H}_{nc}$

À partir de  $\mathcal{V}_c$  on élabore un morphisme  $\mathcal{V}_{cr}$  tel que :

$$\mathcal{V}_{cr} : (\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp \rightarrow \mathcal{H}_{nc}, \mathcal{V}_{cr}(\overrightarrow{v_c}) = \mathcal{V}_c(\overrightarrow{v_c}).$$

Par construction de  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ , le noyau de  $\mathcal{V}_{cr}$  est réduit au vecteur nul. Comme  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  et  $\mathcal{H}_{nc}$  sont des plans,  $\mathcal{V}_{cr}$  est donc **bijection**. Cette propriété est très utile lors de la synthèse d'une commande.

### III.2.2.f. Synthèse d'une commande aux valeurs moyennes

On cherche à imposer les tensions aux bornes des sources de courants. Il faut donc pouvoir à l'aide de l'onduleur élaborer  $\overrightarrow{u_{créf}}$ , vecteur de  $\mathcal{H}_{nc}$ . Il suffit pour cela de chercher s'il existe des vecteurs  $\overrightarrow{v_c}$  du domaine  $\mathcal{D}_{mc}$  qui est ici un cube, tels que :

$$\overrightarrow{v_c} = \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overrightarrow{u_{créf}}) + h \overrightarrow{y_{c1}} \text{ avec } h \in \mathbb{R} \text{ et } \overrightarrow{y_{c1}} = \frac{\overrightarrow{x_{c1}} + \overrightarrow{x_{c2}} + \overrightarrow{x_{c3}}}{\sqrt{3}}.$$

Dans la suite on examine séparément les commandes avec :

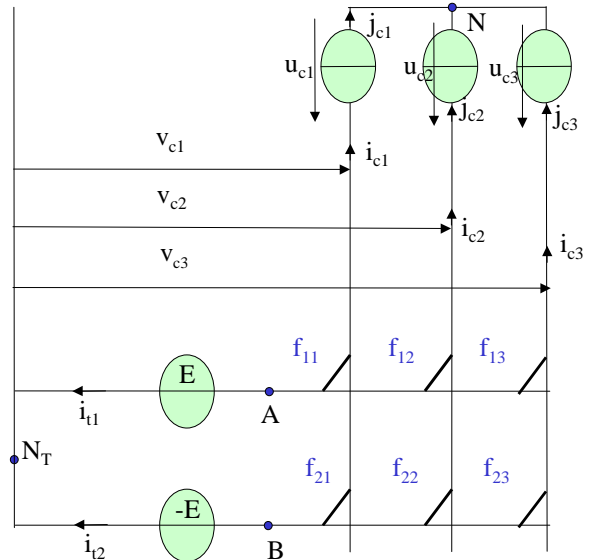
- $h = 0$  ce qui correspond aux commandes classiques sans adjonction d'homopolaire ;
- $h$  non nul ce qui correspond aux commandes avec adjonction d'harmonique trois.

### III.2.3. Étude du morphisme pour un couplage de trois sources en étoile sans neutre sorti

On considère  $\mathcal{V}_c : \mathcal{E}_{c3} \rightarrow \mathcal{E}_{nc}, \mathcal{V}_c(\overrightarrow{v_c}) = \overrightarrow{u_c}$  avec :

- $u_{c1} = v_{c1} - v_{cN}$  ;
- $u_{c2} = v_{c2} - v_{cN}$  ;
- $u_{c3} = v_{c3} - v_{cN}$  ;

avec  $v_{cN}$ , potentiel du point « neutre » N de la charge par rapport au potentiel de référence qu'est celui du point fictif  $N_T$ . Ce potentiel n'est pas imposé directement par l'onduleur (cf. *Figure 32*).



*Figure 32, source de courant couplée en étoile sans neutre sorti*

**III.2.3.a. Recherche du noyau de  $\mathcal{V}_c$**

Les trois composantes d'un vecteur du noyau vérifient  $v_{c1} = v_{c2} = v_{c3} = v_{cN}$  puisqu'alors  $u_{c1} = u_{c2} = u_{c3} = 0$ .

Par conséquent, si un vecteur  $\vec{v}_c$  appartient au noyau alors il s'exprime :

$$\vec{v}_c = \sqrt{3} v_{cN} \vec{y}_{c1} \text{ avec } \vec{y}_{c1} = \frac{\vec{x}_{c1} + \vec{x}_{c2} + \vec{x}_{c3}}{\sqrt{3}}.$$

Le noyau de  $\mathcal{V}_c$  est inclus dans la droite vectorielle engendrée par  $\vec{y}_{c1}$  : c'est donc soit le vecteur nul soit la droite elle-même. A ce niveau de l'analyse il reste à exploiter les propriétés de la source de courant.

Or, si on applique trois tensions identiques aux bornes de la source de courant considérée alors les courants  $j_1, j_2$  et  $j_3$  sont nuls après un régime transitoire mais non instantanément sauf si  $v_{cN} = v_{c1} = v_{c2} = v_{c3}$ .

**Lorsque** les sources sont modélisées par un système triphase équilibré alors :

$$j_{c1} + j_{c2} + j_{c3} = 0 \text{ implique } u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = 0 \text{ et donc } v_{cN} = \frac{v_{c1} + v_{c2} + v_{c3}}{3}.$$

On a alors bien  $v_{cN} = v_{c1}$  lorsque  $v_{c1} = v_{c2} = v_{c3}$ . Il vient :

$$\text{Ker } \mathcal{V}_c = \left\{ \vec{v}_c = h \vec{y}_{c1} \text{ avec } h \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{y}_{c1} = \frac{\vec{x}_{c1} + \vec{x}_{c2} + \vec{x}_{c3}}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Dans le cas contraire, le noyau est le vecteur nul.

### III.2.3.b. Image d'un vecteur $\vec{v}_c$ .

On suppose être dans le cas fréquent où  $v_{cN} = \frac{v_{c1} + v_{c2} + v_{c3}}{3}$ .

Dans la mesure où le noyau est identique à celui du couplage triangle, on reprend le paragraphe III.2.2.c. p61.

On a donc que  $\mathcal{V}_c(\vec{v}_c) = \mathcal{V}_c(\vec{v}_P) =$

$$\frac{2v_{c1} - v_{c2} - v_{c3}}{3} \vec{z}_{c1p} + \frac{-v_{c1} + 2v_{c2} - v_{c3}}{3} \vec{z}_{c2p} + \frac{-v_{c1} - v_{c2} + 2v_{c3}}{3} \vec{z}_{c3p}$$

avec  $\vec{z}_{ckp} = \mathcal{V}_c(\vec{x}_{ck}) = \vec{s}_{ck} - v_{cN}(\vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3})$ .

Comme  $v_{cN} = \frac{v_{c1} + v_{c2} + v_{c3}}{3}$ ,  $\mathcal{V}_c(\vec{x}_{ck}) = \vec{z}_{ckp} = \vec{s}_{ck} - \frac{1}{3}(\vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3})$ .

Il vient l'expression classique pour les trois tensions simples de la charge :

$$\mathcal{V}_c(\vec{v}_c) = \frac{2v_{c1} - v_{c2} - v_{c3}}{3} \vec{s}_{c1} + \frac{-v_{c1} + 2v_{c2} - v_{c3}}{3} \vec{s}_{c2} + \frac{-v_{c1} - v_{c2} + 2v_{c3}}{3} \vec{s}_{c3}$$

### III.2.3.c. Étude de $\mathcal{H}_{nc}$ , l'image par $\mathcal{V}_c$ de $\mathcal{E}_{c3}$

**Contrairement** au cas du couplage **triangle**, un vecteur tension  $\vec{u}_c$  image par  $\mathcal{V}_c$  d'un vecteur  $\vec{v}_c$  ne jouit d'aucune propriété particulière liée à  $\mathcal{V}_c$ .

**Néanmoins**, dans le cas où les sources sont modélisées par un système **triphase équilibré** alors :

la relation  $j_{c1} + j_{c2} + j_{c3} = 0$  implique  $u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = 0$  soit encore  $\vec{u}_c \cdot \vec{d}_{c1} = 0$  avec,

$$\vec{d}_{c1} = \frac{\vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3}}{\sqrt{3}}.$$

Il apparaît donc que les vecteurs  $\vec{u}_c$  appartiennent tous au même plan que les vecteurs  $\vec{j}_c$ . Ce plan, image par  $\mathcal{V}_c$  de  $\mathcal{E}_{c3}$ , est  $\mathcal{H}_{nc}$ . Dans ce cas, certes particulier mais très fréquent



en pratique,  $\mathcal{H}_{nc}$  est le même que celui obtenu lors de l'étude du couplage triangle. On obtient donc les mêmes résultats. On ne peut les étendre si la charge triphasée n'est pas équilibrée.

III.2.3.d. Bijection entre  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  et  $\mathcal{H}_{nc}$

À partir de  $\mathcal{V}_c$  on élabore un morphisme  $\mathcal{V}_{cr}$  tel que :

$$\mathcal{V}_{cr} : (\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp \rightarrow \mathcal{H}_{nc}, \mathcal{V}_{cr}(\overrightarrow{v_c}) = \mathcal{V}_c(\overrightarrow{v_c}).$$

Le noyau de  $\mathcal{V}_{cr}$  est bien évidemment réduit au vecteur nul. Comme  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  et  $\mathcal{H}_{nc}$  sont tous deux des plans,  $\mathcal{V}_{cr}$  est bijective.

III.2.3.e. Synthèse d'une commande aux valeurs moyennes

Ce paragraphe est identique à celui III.2.2.f. p63.

III.2.4. Étude du morphisme pour un couplage de trois sources en étoile AVEC neutre sorti

On considère  $\mathcal{V}_c : \mathcal{E}_{c3} \rightarrow \mathcal{E}_{nc}$ ,  
 $\mathcal{V}_c(\overrightarrow{v_c}) = \overrightarrow{u_c}$  avec :

- $u_{c1} = v_{c1} - v_{cN}$  ;
- $u_{c2} = v_{c2} - v_{cN}$  ;
- $u_{c3} = v_{c3} - v_{cN}$  ;

Le potentiel  $v_{cN}$  du point neutre N des sources de courant est, cette fois, imposé. On peut relier le point N soit au point A de la source de tension +E soit au point B de la source de tension -E soit enfin à un autre potentiel obtenu grâce aux deux sources +E et -

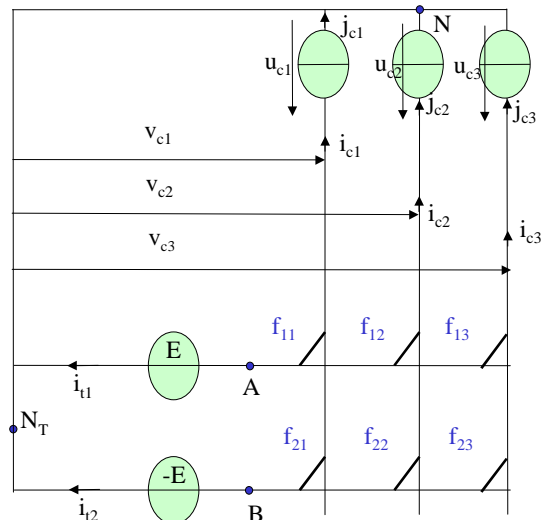


Figure 33, source de courant couplée en étoile avec neutre sorti

E. L'exemple le plus fréquent (cf. Figure 33) est de réaliser réellement un point neutre  $N_T$  pour la source de tension que l'on connecte au point neutre N de la source de courant. Dans ce cas on a  $v_{cN} = 0$ . Il faut pour cela réaliser deux sources effectives de tension et donc deux asservissements de tension l'un à +E, l'autre à -E. Il ne suffit donc pas a priori d'utiliser un simple « pont diviseur » capacitif.

Le morphisme  $\mathcal{V}_c$  se confond alors avec l'identité. La synthèse d'une commande est donc triviale.

### III.3. Commande aux valeurs moyennes par vecteur d'espace

Par l'utilisation du morphisme il est possible pour un vecteur de tension désiré  $\overrightarrow{u_{\text{créf}}}$  de trouver un ou plusieurs vecteurs tension  $\overrightarrow{v_c}$  qui appartiennent au domaine  $\mathcal{D}_{mc}$ .

Dans le cadre d'une commande aux valeurs moyennes, il est alors nécessaire (cf. p 51 II.4.5. ), afin de calculer les durées de conduction des interrupteurs, de décomposer le **vecteur moyen désiré**  $\overrightarrow{v_c}$  en fonction de ceux de la famille  $\mathcal{F}_{8c}$  :

$$\overrightarrow{v_c} = \sum_{r=0}^{r=7} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{v_{cr}} \text{ avec la contrainte } T = \sum_{r=0}^{r=7} t_r$$

Au paragraphe II.4.5. p 51, on a vu que pour tout vecteur  $\overrightarrow{v_c}$  de  $\mathcal{D}_{mc}$  on peut en trouver quatre dans la famille  $\mathcal{F}_{8c}$  sur lesquels  $\overrightarrow{v_c}$  se décompose de façon unique. En géométrie affine cela se traduit graphiquement par le fait que le point  $\mathbf{M}$ , tel que  $\overrightarrow{v_c} = \overrightarrow{OM}$ , est :

- ❖ à l'intérieur d'un tétraèdre dont les quatre sommets sont  $M_k, M_j, M_t$  et  $M_s$  (avec  $\overrightarrow{v_{ck}} = \overrightarrow{OM_k}$ ,  $\overrightarrow{v_{cj}} = \overrightarrow{OM_j}$ ,  $\overrightarrow{v_{ct}} = \overrightarrow{OM_t}$ ,  $\overrightarrow{v_{cs}} = \overrightarrow{OM_s}$ )
- ❖ **barycentre des quatre points**  $M_k, M_j, M_t$  et  $M_s$ .

On sait également que les décompositions sur trois ou deux vecteurs ne sont pas toujours possibles. Néanmoins, il est intéressant de les étudier puisque dans la pratique elles sont souvent utilisées.

#### III.3.1. Décomposition d'un vecteur

Il s'agit donc de rechercher les coordonnées barycentriques d'un point  $M$  barycentre de  $q$  points  $M_r$  avec  $2 \leq q \leq d_{Hc} + 1$ . Il faut donc décomposer un vecteur  $\overrightarrow{OM}$  de  $\mathcal{G}_{Hc}$ , espace de dimension  $d_{Hc}$ , sur deux, trois, ...,  $(d_{Hc} + 1)$  vecteurs de type  $\overrightarrow{OM_r}$ . Dans le cas étudié  $d_{Hc} = 3$ .

III.3.1.a. Sur deux vecteurs indépendants

On suppose donc qu'il existe deux réels  $t_k$  et  $t_j$  tels que le vecteur  $\vec{OM}$  s'exprime par :

$$\vec{OM} = \frac{t_k \vec{OM}_k + t_j \vec{OM}_j}{T} \text{ avec } T = t_k + t_j$$

Puisque  $d_{Hc} = 3$ , les valeurs de  $t_k$  et  $t_j$  s'obtiennent rapidement<sup>A</sup> par :

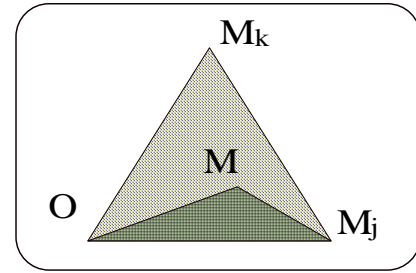


Figure 34

$$t_k = T \frac{(\vec{OM} \wedge \vec{OM}_j) \cdot \vec{h}}{(\vec{OM}_k \wedge \vec{OM}_j) \cdot \vec{h}} \text{ et } t_j = T \frac{(\vec{OM} \wedge \vec{OM}_k) \cdot \vec{h}}{(\vec{OM}_j \wedge \vec{OM}_k) \cdot \vec{h}}$$

avec  $\vec{h}$  vecteur orthogonal au plan engendré par les deux vecteurs  $\vec{OM}_k$  et  $\vec{OM}_j$ .

Remarque 1 : la notion de produit vectoriel requiert au moins un espace de dimension trois.

Remarque 2 : on peut interpréter  $t_k/T$  comme le rapport entre deux surfaces, celle de  $[O M M_j]$  par celle de  $[O M_k M_j]$  (Figure 34).

Remarque 3 : si on choisit l'origine  $O$  en un des deux points, par exemple  $O = M_j$ .

$$\text{Il vient, } \vec{M_j M} = \frac{t_k \vec{M_j M}_k}{T} \text{ avec } t_j = T - t_k \text{ et } t_k = T \frac{\|\vec{M_j M}\|}{\|\vec{M_j M}_k\|}.$$

III.3.1.b. Sur trois vecteurs indépendants

On suppose donc qu'il existe trois réels  $t_k$ ,  $t_j$  et  $t_q$  tels que le vecteur  $\vec{OM}$  s'exprime par :

$$\vec{OM} = \frac{t_k \vec{OM}_k + t_j \vec{OM}_j + t_q \vec{OM}_q}{T} \text{ avec } T = t_k + t_j + t_q.$$

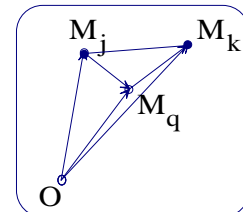


Figure 35, trois vecteurs indépendants

On rappelle les éléments mathématiques suivants sur le produit

<sup>A</sup> en utilisant le fait que pour un vecteur quelconque  $\vec{OM}_i$  on a  $\vec{OM}_i \wedge \vec{OM}_i = \vec{0}$ . Il vient

$$\text{alors } \vec{OM} \wedge \vec{OM}_j = \left( \frac{t_k \vec{OM}_k + t_j \vec{OM}_j}{T} \right) \wedge \vec{OM}_j = \frac{t_k \vec{OM}_k \wedge \vec{OM}_j}{T}.$$

mixte :

- le produit mixte  $\left(\vec{A} \mid \vec{B} \mid \vec{C}\right)$  de trois vecteurs n'est autre que le déterminant du triplet  $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$  dans une base orthonormée directe quelconque  $B$  :  

$$\left(\vec{A} \mid \vec{B} \mid \vec{C}\right) = \det_B(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) ;$$
- $\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right) = 0$  si la famille de ces trois vecteurs est liée c'est à dire qu'il existe trois scalaires  $d, f, g$  tels que  $f \vec{A} + d \vec{B} + g \vec{C} = \vec{0}$  ;
- $\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right) = -\left(\vec{B}, \vec{A}, \vec{C}\right) ; \left(\vec{A}, \vec{A}, \vec{C}\right) = 0$

Les valeurs de  $t_k, t_j$  et  $t_q$  s'obtiennent alors par :

$$t_k = T \frac{\left(\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q}\right)}{\left(\overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q}\right)} ; \quad t_j = T \frac{\left(\overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM_q}\right)}{\left(\overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q}\right)} ; \quad t_q = T \frac{\left(\overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM}\right)}{\left(\overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q}\right)} .$$

Remarque 1 : la notion de produit mixte demande au moins un espace de dimension trois mais s'étend très facilement aux dimensions supérieures. C'est l'intérêt de cette présentation.

Remarque 2 : on peut interpréter  $\left(\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q}\right)$  et  $\left(\overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q}\right)$  comme les volumes respectifs des tétraèdres  $[O M_j M_q M]$  et  $[O M_j M_q M_k]$

Remarque 3 : si on choisit l'origine  $O$  en un des trois points, par exemple  $O = M_q$ .

Il vient, en tenant compte de l'égalité  $T = t_k + t_j + t_q$  :

$$\overrightarrow{M_q M} = \frac{t_k \overrightarrow{M_q M_k} + t_j \overrightarrow{M_q M_j}}{T} \text{ avec comme au paragraphe III.3.1.a. :}$$

$$t_k = T \frac{\left(\overrightarrow{M_q M} \wedge \overrightarrow{M_q M_j}\right) \cdot \vec{h}}{\left(\overrightarrow{M_q M_k} \wedge \overrightarrow{M_q M_j}\right) \cdot \vec{h}} \quad \text{et} \quad t_j = T \frac{\left(\overrightarrow{M_q M} \wedge \overrightarrow{M_q M_k}\right) \cdot \vec{h}}{\left(\overrightarrow{M_q M_j} \wedge \overrightarrow{M_q M_k}\right) \cdot \vec{h}}$$

et  $\vec{h}$  vecteur orthogonal au plan engendré par les deux vecteurs  $\overrightarrow{M_q M_k}$  et  $\overrightarrow{M_q M_j}$ .

### III.3.1.c. Sur une famille génératrice de quatre vecteurs

Bien entendu, une famille de quatre vecteurs est forcément liée<sup>A</sup> dans un espace de dimension trois. On la considère par contre comme étant génératrice de l'espace  $\mathcal{G}_{Hc}$  de dimension  $d_{Hc} = 3$ . Les quatre points sont donc non coplanaires et tout vecteur peut être décomposé selon ces quatre vecteurs.

On suppose qu'il existe quatre réels  $t_i, t_k, t_j$  et  $t_q$  tels que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  s'exprime par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{t_i \overrightarrow{OM_i} + t_k \overrightarrow{OM_k} + t_j \overrightarrow{OM_j} + t_q \overrightarrow{OM_q}}{T} \text{ avec } T = t_i + t_k + t_j + t_q.$$

Si on choisit l'origine O en un des quatre points, par exemple  $O = M_i$ . Il vient, en tenant compte de l'égalité  $T = t_i + t_k + t_j + t_q$  :

$$\overrightarrow{M_i M} = \frac{t_k \overrightarrow{M_i M_k} + t_j \overrightarrow{M_i M_j} + t_q \overrightarrow{M_i M_q}}{T}$$

Il suffit alors d'utiliser les résultats obtenus au paragraphe précédent :

$$t_k = T \frac{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M} & \overrightarrow{M_i M_j} & \overrightarrow{M_i M_q} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M_k} & \overrightarrow{M_i M_j} & \overrightarrow{M_i M_q} \end{pmatrix}} ; t_j = T \frac{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M_k} & \overrightarrow{M_i M} & \overrightarrow{M_i M_q} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M_k} & \overrightarrow{M_i M_j} & \overrightarrow{M_i M_q} \end{pmatrix}} ; t_q = T \frac{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M_k} & \overrightarrow{M_i M_j} & \overrightarrow{M_i M} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M_k} & \overrightarrow{M_i M_j} & \overrightarrow{M_i M_q} \end{pmatrix}}.$$

Afin d'obtenir des calculs en ligne plus rapides, on utilise les propriétés suivantes du produit mixte et du produit vectoriel :  $\begin{pmatrix} \vec{A} & \vec{B} & \vec{C} \end{pmatrix} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{pmatrix} \vec{B} & \vec{C} & \vec{A} \end{pmatrix} = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$  et  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C}$ .

$$t_k = T \frac{\overrightarrow{M_i M} \cdot (\overrightarrow{M_i M_j} \wedge \overrightarrow{M_i M_q})}{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M_k} & \overrightarrow{M_i M_j} & \overrightarrow{M_i M_q} \end{pmatrix}} ; t_j = T \frac{\overrightarrow{M_i M} \cdot (\overrightarrow{M_i M_q} \wedge \overrightarrow{M_i M_k})}{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M_k} & \overrightarrow{M_i M_j} & \overrightarrow{M_i M_q} \end{pmatrix}} ; t_q = T \frac{\overrightarrow{M_i M} \cdot (\overrightarrow{M_i M_k} \wedge \overrightarrow{M_i M_j})}{\begin{pmatrix} \overrightarrow{M_i M_k} & \overrightarrow{M_i M_j} & \overrightarrow{M_i M_q} \end{pmatrix}}.$$

Soit encore :

<sup>A</sup> Si elle n'est pas liée elle est libre et engendre par définition un espace de dimension quatre.

$$t_k = T \overrightarrow{M_i M} \cdot \overrightarrow{u_k} ; t_j = T \overrightarrow{M_i M} \cdot \overrightarrow{u_j} ; t_q = T \overrightarrow{M_i M} \cdot \overrightarrow{u_q} .$$

avec,

$$\overrightarrow{u_k} = \frac{\overrightarrow{M_i M_j} \wedge \overrightarrow{M_i M_q}}{\left( \overrightarrow{M_i M_k} \mid \overrightarrow{M_i M_j} \mid \overrightarrow{M_i M_q} \right)} ; \overrightarrow{u_j} = \frac{\overrightarrow{M_i M_q} \wedge \overrightarrow{M_i M_k}}{\left( \overrightarrow{M_i M_k} \mid \overrightarrow{M_i M_j} \mid \overrightarrow{M_i M_q} \right)} ; \overrightarrow{u_q} = \frac{\overrightarrow{M_i M_k} \wedge \overrightarrow{M_i M_j}}{\left( \overrightarrow{M_i M_k} \mid \overrightarrow{M_i M_j} \mid \overrightarrow{M_i M_q} \right)} .$$

*Remarque* : Le calcul d'une durée se résume ainsi à trois soustractions, deux additions et trois multiplications (expression du type  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$  puisque  $c$  est le résultat du produit scalaire de deux vecteurs comportant trois coordonnées. Dans l'optique d'une implantation matérielle (cf. chapitre 4), cela permet d'obtenir le résultat en économisant les moyens de calcul mis en œuvre. Aucune fonction trigonométrique n'est nécessaire.

Cette approche particularise le point  $M_i$  par rapport aux trois autres. Pour éviter cela il suffit de travailler dans un espace affine de dimension quatre avec une origine  $O$  telle que la famille  $\left\{ \overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_q} \right\}$  soit libre. La notion de produit mixte de quatre vecteurs d'un espace de dimension 4 est nécessaire à ce stade du développement. On en rappelle la définition et quelques propriétés :

- le produit mixte  $\left( \overrightarrow{A} \mid \overrightarrow{B} \mid \overrightarrow{C} \mid \overrightarrow{D} \right)$  de quatre vecteurs n'est autre que le déterminant du quadruplet  $\left( \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{D} \right)$  dans une base orthonormée directe quelconque  $B$  :

$$\left( \overrightarrow{A} \mid \overrightarrow{B} \mid \overrightarrow{C} \mid \overrightarrow{D} \right) = \det_B \left( \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{D} \right) ;$$

- $\left( \overrightarrow{A} \mid \overrightarrow{B} \mid \overrightarrow{C} \mid \overrightarrow{D} \right) = 0$  si la famille des quatre vecteurs est liée.

On obtient alors :

$$t_i = T \frac{\left( \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} ; \quad t_k = T \frac{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} ;$$

$$t_j = T \frac{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} ; \quad t_q = T \frac{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)}$$

**Remarque 1 :** Le calcul d'une durée se résume ici à 3 additions et quatre multiplications au plus. En effet, explicitons par exemple  $t_i$ .

$$t_i = T \frac{\left( \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} = T \frac{\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_q}\right)}{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} \text{ soit,}$$

$t_i = K \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_q}\right)$ . En développant ce déterminant selon la première colonne au sein de laquelle figurent les coordonnées  $(x, y, z, t)$  de  $\overrightarrow{OM}$ , les seules à ne pas être constantes, on obtient bien une expression du type :  $Ax + By + Cz + Dt$  ( $A, B, C$  et  $D$  sont des constantes<sup>A</sup>).

**Remarque 2 :** C'est le choix de l'origine qui a conféré la quatrième dimension puisque  $M, M_i, M_j, M_k$  et  $M_q$  appartiennent au même sous espace de dimension  $\mathcal{G}_{Hc}$  de dimension  $d_{Hc} = 3$  engendré par l'onduleur. Pour travailler en dimension 3, on considère  $O_p$  une projection de  $O$  sur  $\mathcal{G}_{Hc}$ . Il vient alors :

$$\left( 1 - \frac{t_i + t_k + t_j + t_q}{T} \right) \overrightarrow{OO_p} + \overrightarrow{O_pM} = \frac{t_i \overrightarrow{O_pM_i} + t_k \overrightarrow{O_pM_k} + t_j \overrightarrow{O_pM_j} + t_q \overrightarrow{O_pM_q}}{T}$$

Il apparaît que si  $t_i + t_j + t_k + t_q = T$  alors il est indifférent de travailler avec  $O$  ou  $O_p$ .

### III.3.1.d. Vers une généralisation

Pour la décomposition d'un vecteur dans un espace de dimension trois, nous avons à chaque fois présenté deux méthodes. L'une fait appel à la notion de **produit mixte** qui est

<sup>A</sup> Si on introduit la notion de produit vectoriel de trois vecteurs dans un espace de dimension 4, on a  $t_i = T \frac{\left( \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} = T \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \left( \overrightarrow{OM_k} \wedge \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{OM_q} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_i} \mid \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)}$ .

On retrouve alors une expression de type produit scalaire comme au paragraphe 0.

aisément **généralisable** à un espace de dimension  $d_{Hc}$  supérieure à trois. C'est la raison pour laquelle on la préfère à celle qui tient compte des spécificités d'un espace de dimension trois.

### **III.3.2. Choix d'une décomposition – séquence de commutation**

La décomposition sur huit vecteurs n'est pas unique. Il est donc possible d'imposer des contraintes supplémentaires à la commande. Ainsi, pour obtenir un taux de distorsion faible de l'ondulation de courant, on peut chercher à décomposer le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  sur trois ou quatre vecteurs  $\overrightarrow{OM_i}, \overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_q}$  avec  $M_i, M_k, M_j$  et  $M_q$ , les quatre points les plus proches de  $M$ .  $M$  appartient alors au tétraèdre  $[M_i, M_k, M_j, M_q]$ .

Les quatre points les plus proches de  $M$  peuvent mener à des tétraèdres de formes différentes. Ainsi, les « coins » du cube (trois arêtes du cube ayant un point commun) forment-ils une famille de 8 tétraèdres. Pour effectuer son choix, il est nécessaire d'affiner l'analyse quant à la séquence des commutations effectuées sur une période.

Pour obtenir la tension moyenne désirée sur une période, il est nécessaire de combiner plusieurs vecteurs de l'onduleur.

Afin de réduire les aléas de commutations il est prudent à chaque changement de vecteur de s'imposer de ne modifier l'état que d'un seul interrupteur. Si on imagine passer d'un point  $M_k$  à un autre  $M_j$  par une ligne droite, l'examen des vecteurs générateurs montre que les seuls segments possibles avec une seule commutation sont les arêtes du cube. Il vient la **règle suivante** :

On peut passer d'un point  $M_k$  à un point  $M_j$  si et seulement si le segment  $[M_k, M_j]$  constitue une arête du cube et non une diagonale.

Une **autre contrainte** est relative aux vecteurs activés en début et fin de période. Une continuité est nécessaire aux instants d'échantillonnage :

Le chemin qui permet de joindre le dernier point activé (lors de la période précédente) au premier activé (lors d'une nouvelle période) doit être encore une arête du cube si on veut une seule commutation en début de chaque période.

Pour satisfaire facilement à cette contrainte il suffit de s'imposer un seul et même vecteur en début et fin de période ce qui implique d'une période à l'autre le choix de tétraèdres



comportant au moins un point commun. Pour les trouver on construit étape par étape une séquence pendant laquelle sont activés chacun de leurs sommets (cf. *Tableau 1*).

Soit  $M_i$  le point activé à l'instant initial. A la première commutation on passe en suivant une arête à un point  $M_k$ . A la deuxième commutation deux choix s'offrent. Soit on revient au point  $M_i$  soit on rejoint un autre point  $M_j$ . La poursuite de ce raisonnement (cf. *Tableau 1*) permet de dégager, outre la famille des « coins » (un des sommets du tétraèdre peut rejoindre chacun des autres trois autres sommets en passant par une arête), une autre famille (chaque sommet ne peut rejoindre, en passant par une arête, qu'au plus deux autres sommets).

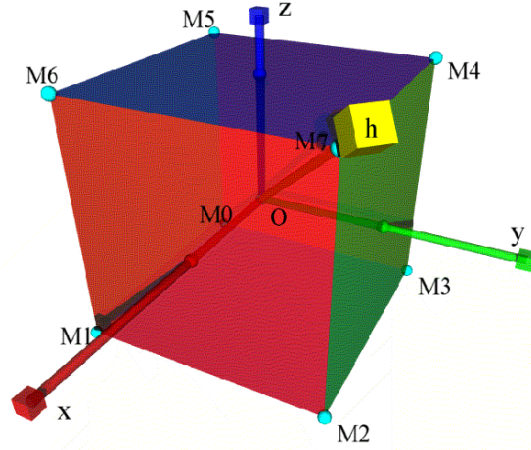
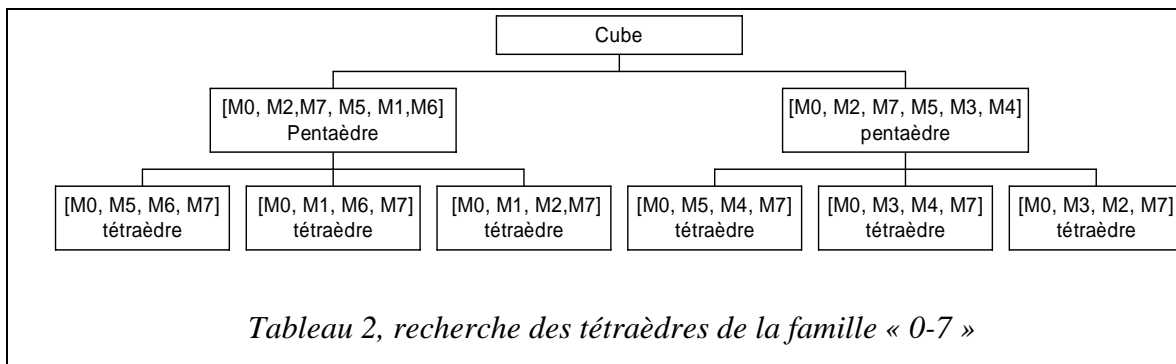
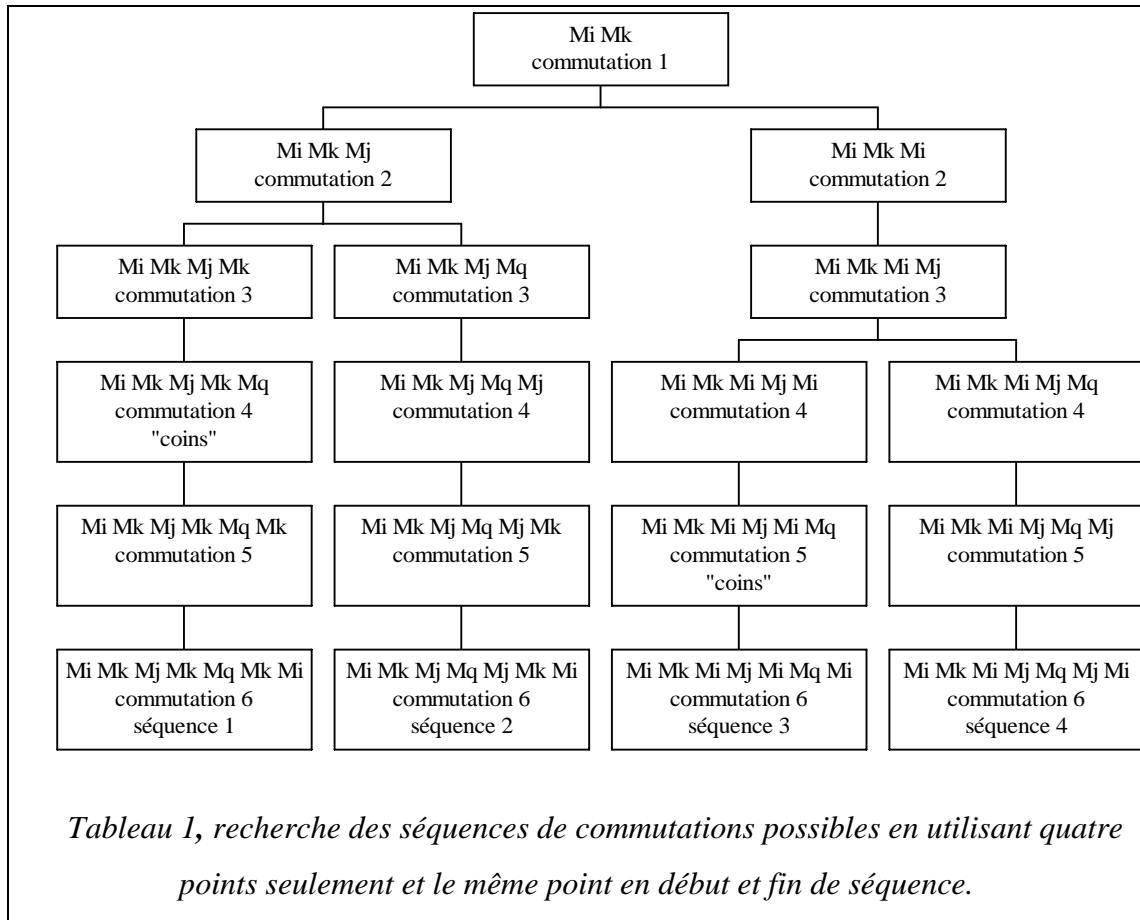


Figure 36, représentation de la famille discrète des vecteurs générés par l'onduleur triphasé deux niveaux étudié.

Cette dernière peut être subdivisée en quatre sous-familles de six (3!) en regroupant les tétraèdres ayant deux points communs situés aux extrémités d'une « grande » diagonale du cube:

- Famille « 0-7 » :  $[M_0, M_1, M_2, M_7]$ ,  $[M_0, M_1, M_6, M_7]$ ,  $[M_0, M_3, M_2, M_7]$ ,  $[M_0, M_3, M_4, M_7]$ ,  $[M_0, M_5, M_4, M_7]$ ,  $[M_0, M_5, M_6, M_7]$  ; les points extrêmes sont  $M_0$  et  $M_7$  d'où le nom de la famille ;
- Famille « 1-4 » :  $[M_1, M_0, M_3, M_4]$ ,  $[M_1, M_0, M_5, M_4]$ ,  $[M_1, M_2, M_7, M_4]$ ,  $[M_1, M_2, M_3, M_4]$ ,  $[M_1, M_6, M_7, M_4]$ ,  $[M_1, M_6, M_5, M_4]$  ;
- Famille « 2-5 » :  $[M_2, M_1, M_0, M_5]$ ,  $[M_2, M_1, M_6, M_5]$ ,  $[M_2, M_3, M_0, M_5]$ ,  $[M_2, M_3, M_4, M_5]$ ,  $[M_2, M_7, M_4, M_5]$ ,  $[M_2, M_7, M_6, M_5]$  ;
- Famille « 3-6 » :  $[M_3, M_2, M_1, M_6]$ ,  $[M_3, M_2, M_7, M_6]$ ,  $[M_3, M_0, M_1, M_6]$ ,  $[M_3, M_0, M_5, M_6]$ ,  $[M_3, M_4, M_5, M_6]$ ,  $[M_3, M_4, M_7, M_6]$ .



**III.3.3. Validité de la requête de la commande**

Au paragraphe III.3.1. , on suppose que le vecteur de tension désiré  $\vec{u}_{créf}$  est tel qu'il existe un ou plusieurs vecteurs tension  $\vec{v}_c$  solutions, éléments du cube  $\mathcal{D}_{mc}$ . C'est effectivement le cas si  $\vec{u}_{créf}$  appartient lui-même à l'image du cube  $\mathcal{D}_{mc}$  par  $\mathcal{V}_c$ .

Lors de la synthèse d'une commande, il est donc nécessaire de caractériser, selon les différents type de couplage, l'image  $\mathcal{V}_c(\mathcal{D}_{mc})$  et de vérifier que  $\vec{u}_{créf}$  y appartienne.

### III.3.3.a. Cas du couplage étoile sans neutre sorti : étude d'un exemple

On se place dans le cas fréquent où les sources sont modélisées par un système triphase équilibré (matrice impédance du type circulante).

#### a. i Caractérisation de l'image par $\mathcal{V}_c$ du cube

On a vu dans ce cas particulier qu'alors les coordonnées d'un vecteur image du morphisme  $\mathcal{V}_c : \mathcal{E}_{c3} \rightarrow \mathcal{E}_{nc}$ ,  $\mathcal{V}_c(\vec{v}_c) = \vec{u}_c$  sont :

- $u_{c1} = v_{c1} - v_{cN} = \frac{1}{3}(2 v_{c1} - v_{c2} - v_{c3})$  ;
- $u_{c2} = v_{c2} - v_{cN} = \frac{1}{3}(- v_{c1} + 2 v_{c2} - v_{c3})$  ;
- $u_{c3} = v_{c3} - v_{cN} = \frac{1}{3}(- v_{c1} - v_{c2} + 2 v_{c3})$  ;

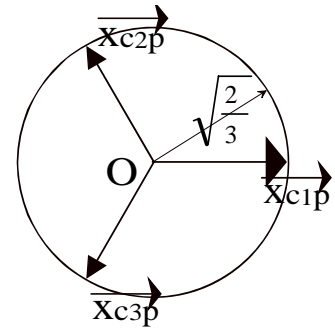
De par l'étude du morphisme  $\mathcal{V}_c$  on sait que  $\mathcal{V}_c(\mathcal{D}_{mc})$  (cf. III.2.3.a. ,p 64) appartient à un plan orthogonal au vecteur  $\vec{d}_{c1} = \frac{\vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3}}{\sqrt{3}}$ .

On définit  $\{\vec{d}_{c2}, \vec{d}_{c3}\}$  une base orthonormée du plan image. Il existe une infinité de possibilités. L'examen des propriétés de la source de courant peut permettre de lever cette indétermination. On verra au chapitre 3 qu'il est intéressant de considérer la base suivante :

$$\begin{cases} \vec{d}_{c2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \vec{s}_{c1} - \frac{\vec{s}_{c2}}{2} - \frac{\vec{s}_{c3}}{2} \right) \\ \vec{d}_{c3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{s}_{c2} - \vec{s}_{c3}) \end{cases}$$

On recherche l'image par  $\mathcal{V}_c$  des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_c = \{\vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2}, \vec{x}_{c3}\}$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{V}_c(\vec{x}_{c1}) = \vec{x}_{c1p} &= +\frac{2}{3}\vec{s}_{c1} - \frac{1}{3}\vec{s}_{c2} - \frac{1}{3}\vec{s}_{c3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{d}_{c2}; \\ \mathcal{V}_c(\vec{x}_{c2}) = \vec{x}_{c2p} &= -\frac{1}{3}\vec{s}_{c1} + \frac{2}{3}\vec{s}_{c2} - \frac{1}{3}\vec{s}_{c3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}\vec{d}_{c2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{d}_{c3}\right); \\ \mathcal{V}_c(\vec{x}_{c3}) = \vec{x}_{c3p} &= -\frac{1}{3}\vec{s}_{c1} - \frac{1}{3}\vec{s}_{c2} + \frac{2}{3}\vec{s}_{c3} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}\vec{d}_{c2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{d}_{c3}\right). \end{aligned} \right.$$



Les vecteurs  $\vec{x}_{ckp}$  sont trois vecteurs coplanaires, de norme

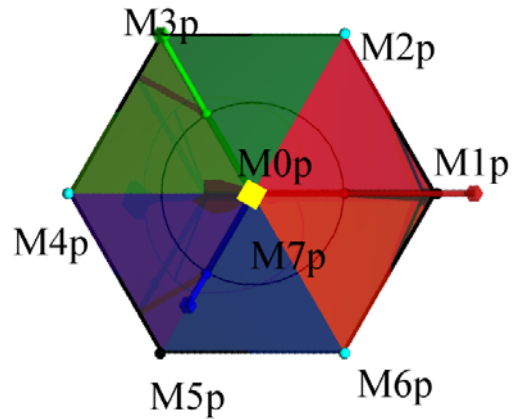
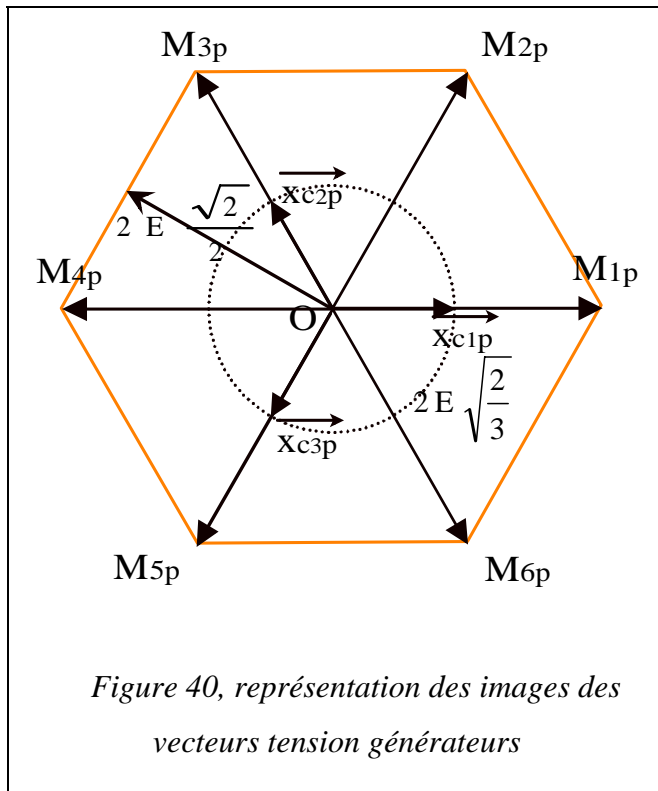
Figure 37

$\sqrt{\frac{2}{3}}$  et déphasés de  $120^\circ$  entre eux (cf. Figure 37).

Voyons l'expression des images de la famille  $\mathcal{G}_{Hc}$ ,  $\mathcal{V}_c(\vec{v}_{ck}) = \vec{v}_{ckp} = \vec{OM}_{kp}$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{v}_{c0p} &= \vec{0} ; \\ \vec{v}_{c1p} &= +E\vec{x}_{c1p} - E\vec{x}_{c2p} - E\vec{x}_{c3p} = 2E\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{d}_{c2}; \\ \vec{v}_{c2p} &= +E\vec{x}_{c1p} + E\vec{x}_{c2p} - E\vec{x}_{c3p} = 2E\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}\vec{d}_{c2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{d}_{c3}\right) ; \\ \vec{v}_{c3p} &= -E\vec{x}_{c1p} + E\vec{x}_{c2p} - E\vec{x}_{c3p} = 2E\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}\vec{d}_{c2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{d}_{c3}\right) ; \\ \vec{v}_{c4p} &= -E\vec{x}_{c1p} + E\vec{x}_{c2p} + E\vec{x}_{c3p} = -2E\sqrt{\frac{2}{3}}\vec{d}_{c2} ; \\ \vec{v}_{c5p} &= -E\vec{x}_{c1p} - E\vec{x}_{c2p} + E\vec{x}_{c3p} = 2E\sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}\vec{d}_{c2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{d}_{c3}\right); \\ \vec{v}_{c6p} &= +E\vec{x}_{c1p} - E\vec{x}_{c2p} + E\vec{x}_{c3p} = 2E\sqrt{\frac{2}{3}}\left(+\frac{1}{2}\vec{d}_{c2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{d}_{c3}\right); \\ \vec{v}_{c7p} &= \vec{0}. \end{aligned} \right.$$

L'image par  $\mathcal{V}_c$  du cube sur le plan définit donc un hexagone (cf. Figure 37, Figure 39 et Figure 38) dont les sommets sont les points  $M_{kp}$  pour  $k$  variant de 1 à 6. L'observation de l'hexagone montre les spécificités des points  $M_{0p}$  et  $M_{7p}$ . De même les six triangles adjacents équilatéraux qui apparaissent mettent en évidence **la particularité des tétraèdres de la famille « 0-7 »** (cf. III.3.2. ) dont les images forment ces six triangles.

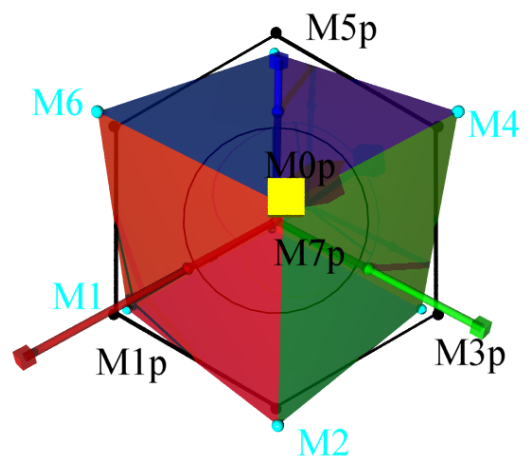


*Figure 38, représentation bidimensionnelle de l'image du cube.*

*a. ii Examen de l'appartenance à un hexagone*

Il est intéressant pour effectuer la recherche des durées de conduction de travailler dans un espace de dimension 3 qui contienne le plan  $\mathcal{V}_c(\mathcal{D}_{mc})$ .  
 Considérons donc la base orthonormée  $\{\vec{d}_{c1}, \vec{d}_{c2}, \vec{d}_{c3}\}$ .

Pour que  $\vec{u}_c$  appartienne au plan  $\mathcal{V}_c(\mathcal{D}_{mc})$ , il faut que le produit scalaire  $\vec{u}_c \cdot \vec{d}_{c1}$  soit nul c'est à dire  $u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = 0$ .



*Figure 39, représentation tridimensionnelle du cube et de son image*

Il suffit ensuite de vérifier que les six produits scalaires suivants sont positifs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \overrightarrow{M_{1p}M_{3p}} \wedge \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_{1p}M} \wedge \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_{2p}M_{4p}} \wedge \overrightarrow{M_{2p}M_{3p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_{2p}M} \wedge \overrightarrow{M_{2p}M_{3p}} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_{3p}M_{5p}} \wedge \overrightarrow{M_{3p}M_{4p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_{3p}M} \wedge \overrightarrow{M_{3p}M_{4p}} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_{4p}M_{6p}} \wedge \overrightarrow{M_{4p}M_{5p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_{4p}M} \wedge \overrightarrow{M_{4p}M_{5p}} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_{5p}M_{1p}} \wedge \overrightarrow{M_{5p}M_{6p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_{5p}M} \wedge \overrightarrow{M_{5p}M_{6p}} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_{6p}M_{2p}} \wedge \overrightarrow{M_{6p}M_{1p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_{6p}M} \wedge \overrightarrow{M_{6p}M_{1p}} \right) \geq 0 \end{array} \right.$$

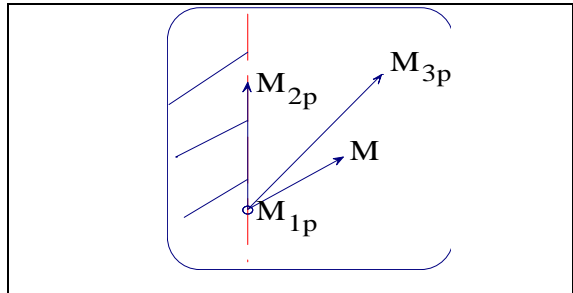


Figure 41, représentation de vecteurs dans un plan.

*M et M<sub>3p</sub> appartiennent-ils au même demi-plan défini par la droite M<sub>1p</sub> M<sub>2p</sub> ?*

En effet, le premier test permet par exemple de vérifier que M et M<sub>3p</sub> se situent du même côté du demi-plan délimité par la droite qui passe par M<sub>1p</sub> et M<sub>2p</sub> (cf. Figure 41 et rappel suivant).

Rappel : un vecteur  $\overrightarrow{M_{1p}M_{2p}}$  permet de définir deux demi-plans. Deux vecteurs  $\overrightarrow{M_{1p}M_{3p}}$  et  $\overrightarrow{M_{1p}M}$  appartiennent à un même demi-plan si et seulement si les produits vectoriels  $\overrightarrow{M_{1p}M_{3p}} \wedge \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}}$  et  $\overrightarrow{M_{1p}M} \wedge \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}}$  sont de même direction.

Afin d'obtenir des calculs en ligne rapides, on cherche à transformer les expressions précédentes en utilisant les propriétés suivantes du produit mixte et du produit vectoriel :

$$\left( \vec{A} \mid \vec{B} \mid \vec{C} \right) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{B} \mid \vec{C} \mid \vec{A}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) \text{ et } \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C} .$$

Les six inégalités précédentes deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{M_{1p}M} \cdot \vec{u}_1 \geq 0 \text{ avec } \vec{u}_1 = \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}} \wedge \left( \overrightarrow{M_{1p}M_{3p}} \wedge \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}} \right) \\ \overrightarrow{M_{2p}M} \cdot \vec{u}_2 \geq 0 \text{ avec } \vec{u}_2 = \overrightarrow{M_{2p}M_{3p}} \wedge \left( \overrightarrow{M_{2p}M_{4p}} \wedge \overrightarrow{M_{2p}M_{3p}} \right) \\ \overrightarrow{M_{3p}M} \cdot \vec{u}_3 \geq 0 \text{ avec } \vec{u}_3 = \overrightarrow{M_{3p}M_{4p}} \wedge \left( \overrightarrow{M_{3p}M_{5p}} \wedge \overrightarrow{M_{3p}M_{4p}} \right) \\ \overrightarrow{M_{4p}M} \cdot \vec{u}_4 \geq 0 \text{ avec } \vec{u}_4 = \overrightarrow{M_{4p}M_{5p}} \wedge \left( \overrightarrow{M_{4p}M_{6p}} \wedge \overrightarrow{M_{4p}M_{5p}} \right) \\ \overrightarrow{M_{5p}M} \cdot \vec{u}_5 \geq 0 \text{ avec } \vec{u}_5 = \overrightarrow{M_{5p}M_{6p}} \wedge \left( \overrightarrow{M_{5p}M_{1p}} \wedge \overrightarrow{M_{5p}M_{6p}} \right) \\ \overrightarrow{M_{6p}M} \cdot \vec{u}_6 \geq 0 \text{ avec } \vec{u}_6 = \overrightarrow{M_{6p}M_{1p}} \wedge \left( \overrightarrow{M_{6p}M_{2p}} \wedge \overrightarrow{M_{6p}M_{1p}} \right) \end{array} \right. \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}} \cdot \overrightarrow{M_{1p}M_{3p}} - \left( \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}} \cdot \overrightarrow{M_{1p}M_{3p}} \right) \overrightarrow{M_{1p}M_{2p}} \\ \vec{u}_2 = \overrightarrow{M_{2p}M_{3p}} \cdot \overrightarrow{M_{2p}M_{4p}} - \left( \overrightarrow{M_{2p}M_{3p}} \cdot \overrightarrow{M_{2p}M_{4p}} \right) \overrightarrow{M_{2p}M_{3p}} \\ \vec{u}_3 = \overrightarrow{M_{3p}M_{4p}} \cdot \overrightarrow{M_{3p}M_{5p}} - \left( \overrightarrow{M_{3p}M_{4p}} \cdot \overrightarrow{M_{3p}M_{5p}} \right) \overrightarrow{M_{3p}M_{4p}} \\ \vec{u}_4 = \overrightarrow{M_{4p}M_{5p}} \cdot \overrightarrow{M_{4p}M_{6p}} - \left( \overrightarrow{M_{4p}M_{5p}} \cdot \overrightarrow{M_{4p}M_{6p}} \right) \overrightarrow{M_{4p}M_{5p}} \\ \vec{u}_5 = \overrightarrow{M_{5p}M_{6p}} \cdot \overrightarrow{M_{5p}M_{1p}} - \left( \overrightarrow{M_{5p}M_{6p}} \cdot \overrightarrow{M_{5p}M_{1p}} \right) \overrightarrow{M_{5p}M_{6p}} \\ \vec{u}_6 = \overrightarrow{M_{6p}M_{1p}} \cdot \overrightarrow{M_{6p}M_{2p}} - \left( \overrightarrow{M_{6p}M_{1p}} \cdot \overrightarrow{M_{6p}M_{2p}} \right) \overrightarrow{M_{6p}M_{1p}} \end{cases}$$

Les vecteurs  $\vec{u}_k$  sont constants. Il n'est pas nécessaire de recalculer leurs coordonnées à chaque test. Chaque produit scalaire se résume donc à trois soustractions<sup>A</sup>, trois multiplications et deux additions. On gagne en rapidité par rapport à une méthode qui utilise les fonctions trigonométriques.

*Remarque 1 : Si l'un des produits scalaires est nul alors M appartient à la frontière du polygone.*

*Remarque 2 : Si l'un des produits scalaires est négatif alors, le vecteur désiré ne peut être obtenu. Il y a donc saturation de l'onduleur qu'il est nécessaire de gérer. Il est par exemple possible de conserver la position angulaire du vecteur désiré et de modifier<sup>B</sup> son module de façon à « rester » à la frontière de l'hexagone.*

### III.3.3.b. Cas du couplage triangle

On recherche l'image par  $\mathcal{V}_c$  des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_c = \{ \vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2}, \vec{x}_{c3} \}$ .

- $\vec{u}_{c1} = \vec{v}_{c1} - \vec{v}_{c3}$  ;

<sup>A</sup> Pour obtenir les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{MM_{kp}}$ .

<sup>B</sup> Si un seul des produits scalaires est négatif, par exemple  $\overrightarrow{M_{3p}M} \cdot \vec{u}_3 < 0$ , alors on définit le point  $M_n$  qui appartient à la frontière du polygone et tel que  $\overrightarrow{M_{0p}M_n} = k \overrightarrow{M_{0p}M}$ . Le

coefficient  $k$  et donc les coordonnées de  $M_n$  s'obtient par  $k = \frac{\overrightarrow{M_{0p}M_{3p}} \cdot \vec{u}_3}{\overrightarrow{M_{0p}M} \cdot \vec{u}_3}$  (en remarquant

que  $\overrightarrow{M_{3p}M_n} \cdot \vec{u}_3 = 0$ ).

- $\mathbf{u}_{c2} = \mathbf{v}_{c2} - \mathbf{v}_{c1}$  ;
- $\mathbf{u}_{c3} = \mathbf{v}_{c3} - \mathbf{v}_{c2}$  ;

De par l'étude du morphisme  $\mathcal{V}_c$  on sait que  $\mathcal{V}_c(\mathcal{D}_{mc})$  (cf. III.2.3.a. ,p64) appartient à un

plan orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{\mathbf{d}_{c1}} = \frac{\overrightarrow{s_{c1}} + \overrightarrow{s_{c2}} + \overrightarrow{s_{c3}}}{\sqrt{3}}$ .

On définit  $\{\overrightarrow{\mathbf{d}_{c2}}, \overrightarrow{\mathbf{d}_{c3}}\}$  une base orthonormée du plan image par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{d}_{c2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \overrightarrow{s_{c1}} - \frac{\overrightarrow{s_{c2}}}{2} - \frac{\overrightarrow{s_{c3}}}{2} \right) \\ \overrightarrow{\mathbf{d}_{c3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overrightarrow{s_{c2}} - \overrightarrow{s_{c3}}) \end{cases}$$

Les images par  $\mathcal{V}_c$  des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_c = \{\overrightarrow{x_{c1}}, \overrightarrow{x_{c2}}, \overrightarrow{x_{c3}}\}$  s'expriment alors :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_c(\overrightarrow{x_{c1}}) = \overrightarrow{z_{c1p}} = \overrightarrow{s_{c1}} - \overrightarrow{s_{c2}} = \sqrt{2} \left( +\frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{\mathbf{d}_{c2}} - \frac{1}{2} \overrightarrow{\mathbf{d}_{c3}} \right) ; \\ \mathcal{V}_c(\overrightarrow{x_{c2}}) = \overrightarrow{z_{c2p}} = \overrightarrow{s_{c2}} - \overrightarrow{s_{c3}} = \sqrt{2} \overrightarrow{\mathbf{d}_{c3}} ; \\ \mathcal{V}_c(\overrightarrow{x_{c3}}) = \overrightarrow{z_{c3p}} = -\overrightarrow{s_{c1}} + \overrightarrow{s_{c3}} = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{\mathbf{d}_{c2}} - \frac{1}{2} \overrightarrow{\mathbf{d}_{c3}} \right) . \end{cases}$$

Par rapport à l'étude du couplage étoile sans neutre sorti les images des vecteurs de la base sont de module  $\sqrt{3}$  plus grands et sont déphasés de  $-\frac{\pi}{6}$ . Il en sera donc de même pour l'image  $\mathcal{V}_c(\mathcal{D}_{mc})$ . L'étude d'appartenance à l'hexagone est bien entendu la même.

### III.3.3.c. Cas du couplage avec neutre sorti

On suppose que le neutre de la source N est relié au « neutre » de la source de tension  $N_T$ .  $\mathcal{V}_c$  est alors l'identité. Par conséquent  $\mathcal{V}_c(\mathcal{D}_{mc})$  est un cube.

Il s'agit donc de vérifier que le vecteur  $\overrightarrow{\mathbf{u}_{créf}}$  appartient à ce cube.

Comme au paragraphe III.3.1.c. , il est intéressant pour effectuer la recherche de travailler dans un espace de dimension  $(d_{Hc} + 1)$  qui contienne évidemment  $\mathcal{G}_{Hc}$ . Considérons donc une base orthonormée  $\{\overrightarrow{x_{c1}}, \overrightarrow{x_{c2}}, \overrightarrow{x_{c3}}, \overrightarrow{x_{c4}}\}$ .



**Rappel sur le produit vectoriel de 3 vecteurs dans un espace vectoriel E de dimension 4 :**

Soient trois vecteurs  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ . On considère l'application  $\psi$  définie par :

$E \rightarrow \mathbb{R}, \vec{t} \mapsto (\vec{A} | \vec{B} | \vec{C} | \vec{t})$ . C'est une forme linéaire sur E. Il existe alors un vecteur

$\vec{y}$  et un seul de E tel que  $\vec{y} \cdot \vec{t} = (\vec{A} | \vec{B} | \vec{C} | \vec{t})$ . On obtient alors une application f

de  $E^3$  vers E telle que  $f(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \vec{y}$ .

$\vec{y}$  est le produit vectoriel des trois vecteurs

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  noté  $\vec{y} = \vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C}$ .

Quelques propriétés :

- le produit vectoriel est orthogonal à chacun des vecteurs  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  ;
- si les trois vecteurs  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  sont liés le produit vectoriel  $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C}$  est nul ;
- si la famille  $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$  est libre alors la famille  $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C}\}$  l'est aussi.

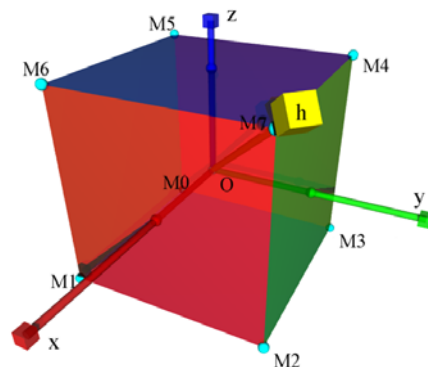


Figure 42

Il suffit de vérifier que les six produits scalaires suivants sont positifs :

$$\begin{cases} \left( \overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M_4} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_5} \wedge \overrightarrow{M_0M_4} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_5} \wedge \overrightarrow{M_0M} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_0M_3} \wedge \overrightarrow{M_0M_5} \wedge \overrightarrow{M_0M_1} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_0M_3} \wedge \overrightarrow{M_0M_5} \wedge \overrightarrow{M_0M} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_7M_2} \wedge \overrightarrow{M_7M_6} \wedge \overrightarrow{M_7M_4} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_7M_2} \wedge \overrightarrow{M_7M_6} \wedge \overrightarrow{M_7M} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_7M_2} \wedge \overrightarrow{M_7M_3} \wedge \overrightarrow{M_7M_1} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_7M_2} \wedge \overrightarrow{M_7M_3} \wedge \overrightarrow{M_7M} \right) \geq 0 \\ \left( \overrightarrow{M_7M_4} \wedge \overrightarrow{M_7M_6} \wedge \overrightarrow{M_7M_2} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_7M_4} \wedge \overrightarrow{M_7M_6} \wedge \overrightarrow{M_7M} \right) \geq 0 \end{cases}$$

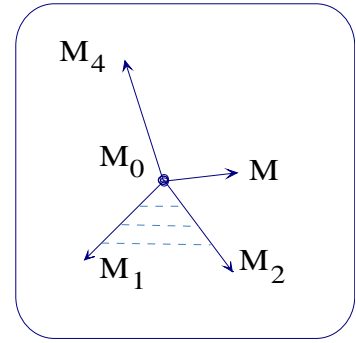


Figure 43,  $M$  et  $M_4$  appartiennent – ils au même demi espace défini par les points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  ?

En effet, le premier test<sup>A</sup> permet par exemple de vérifier que  $M$  et  $M_4$  se situent du même côté du demi espace délimité par le plan qui passe par  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$ . Il y a six tests puisque le domaine est délimité par six frontières que sont les 6 faces du cube.

*Remarque 1* : si de plus l'un des produits scalaires est nul alors le point  $M$  appartient à l'une des faces du cube. En effet la nullité implique celle d'un des produits vectoriels. Il en résulte que trois vecteurs sont liés et donc quatre points sont coplanaires.

*Remarque 2* : Si le vecteur  $\overrightarrow{u_{\text{créf}}}$  n'appartient pas à l'image de  $\mathcal{D}_{mc}$  par  $\mathcal{V}_c$ , il est possible de trouver un vecteur de même direction que  $\overrightarrow{u_{\text{créf}}}$  mais qui soit sur la surface du cube. Il suffit de trouver l'intersection du cube avec une demi droite.

*Remarque 3* : Afin d'obtenir des calculs en ligne plus rapides, on utilise la propriété suivante du produit mixte :

<sup>A</sup>  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\overrightarrow{M_0M_4}$ ,  $\overrightarrow{M_0M_1}$  et  $\overrightarrow{M_0M_2}$  appartiennent à  $\mathcal{G}_{Hc}$  espace de dimension trois. Les deux vecteurs  $\overrightarrow{M_0M_1}$  et  $\overrightarrow{M_0M_2}$  engendrent un plan au sein de cet espace  $\mathcal{G}_{Hc}$ . Soit  $\vec{t}$  le vecteur orthogonal à ce plan et dans  $\mathcal{G}_{Hc}$ . Lorsqu'on calcule les produits vectoriels  $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M_4}$  et  $\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M}$  seules les composantes de  $\overrightarrow{M_0M}$  et de  $\overrightarrow{M_0M_4}$  colinéaires à  $\vec{t}$  interviennent. Si ces composantes sont de même signe alors  $M$  et  $M_4$  sont dans le même demi-espace partagé par les vecteurs  $\overrightarrow{M_0M_1}$  et  $\overrightarrow{M_0M_2}$ .

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} | \vec{B} | \vec{C} | \vec{D}) = -(\vec{D} | \vec{B} | \vec{C} | \vec{A}) = -\vec{D} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C} \wedge \vec{A}).$$

Les six inégalités précédentes deviennent alors :

$$\begin{cases} \vec{M}_0\vec{M} \cdot \vec{u}_1 \geq 0 & \text{avec } \vec{u}_1 = -\vec{M}_0\vec{M}_1 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_2 \wedge (\vec{M}_0\vec{M}_1 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_2 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_4) \\ \vec{M}_0\vec{M} \cdot \vec{u}_2 \geq 0 & \text{avec } \vec{u}_2 = -\vec{M}_0\vec{M}_1 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_5 \wedge (\vec{M}_0\vec{M}_1 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_5 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_4) \\ \vec{M}_0\vec{M} \cdot \vec{u}_3 \geq 0 & \text{avec } \vec{u}_3 = -\vec{M}_0\vec{M}_3 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_5 \wedge (\vec{M}_0\vec{M}_3 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_5 \wedge \vec{M}_0\vec{M}_1) \\ \vec{M}_7\vec{M} \cdot \vec{u}_4 \geq 0 & \text{avec } \vec{u}_4 = -\vec{M}_7\vec{M}_2 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_6 \wedge (\vec{M}_7\vec{M}_2 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_6 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_4) \\ \vec{M}_7\vec{M} \cdot \vec{u}_5 \geq 0 & \text{avec } \vec{u}_5 = -\vec{M}_7\vec{M}_2 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_3 \wedge (\vec{M}_7\vec{M}_2 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_3 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_1) \\ \vec{M}_7\vec{M} \cdot \vec{u}_6 \geq 0 & \text{avec } \vec{u}_6 = -\vec{M}_7\vec{M}_4 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_6 \wedge (\vec{M}_7\vec{M}_4 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_6 \wedge \vec{M}_7\vec{M}_2) \end{cases}$$

Les vecteurs  $\vec{u}_k$  peuvent se calculer en utilisant la relation suivante :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{D} \wedge \vec{E}) = \frac{(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{D} \wedge \vec{E})}{(\vec{C} | \vec{D} | \vec{E})} \vec{C} + \frac{(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{E} \wedge \vec{C})}{(\vec{C} | \vec{D} | \vec{E})} \vec{D} + \frac{(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D})}{(\vec{C} | \vec{D} | \vec{E})} \vec{E}.$$

### **III.3.4. Commande « classique » d'un onduleur de tension**

On considère les deux couplages les plus fréquents pour la source de courant :

- étoile sans neutre sorti ;
- triangle.

On entend par commande « classique » une commande pour laquelle la somme  $v_{c1} + v_{c2} + v_{c3}$  est nulle.

#### **III.3.4.a. Détermination du domaine d'excursion pour un vecteur $\vec{v}_c$ solution**

On cherche donc des vecteurs  $\vec{v}_c$  tels que  $v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} = 0$  c'est à dire des éléments de  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ . On a vu au paragraphe Chapitre II III.2.2.e. p63 que l'on pouvait définir une bijection notée  $\mathcal{V}_{cr}$ .

La commande classique consiste à utiliser simplement cette bijection. On travaille alors à homopolaire moyen nul ( $h = 0$ , cf. III.2.2.f. ,p 63).

Pour tout vecteur désiré  $\overrightarrow{u_{créf}}$  il suffit de synthétiser  $\overrightarrow{v_c} = \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overrightarrow{u_{créf}})$  à l'aide des vecteurs de la famille  $\mathbf{F}_{8c}$ . Le vecteur  $\overrightarrow{v_c}$  doit alors appartenir à l'intersection entre le plan  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  d'équation  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  et le cube. Cette surface est un hexagone  $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]$  qui s'inscrit dans celui défini par les projections des tétraèdres de la famille « 07 » (cf. III.3.3.a. p76, Figure 44, Figure 45, et Figure 46).

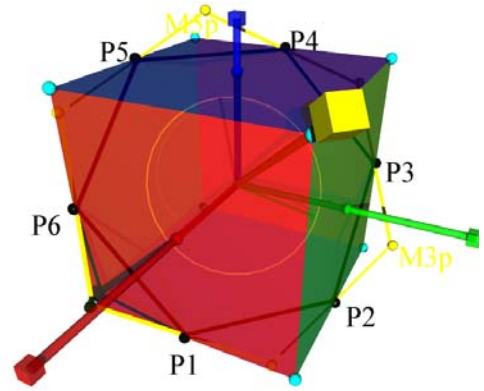


Figure 44,  $[P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6]$ , intersection du plan  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  d'équation  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  avec le cube.

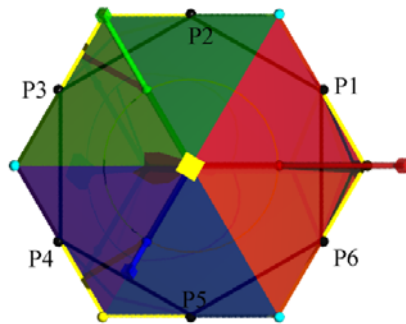


Figure 46, représentation du domaine d'excursion autorisé  $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]$  pour  $\overrightarrow{v_c}$

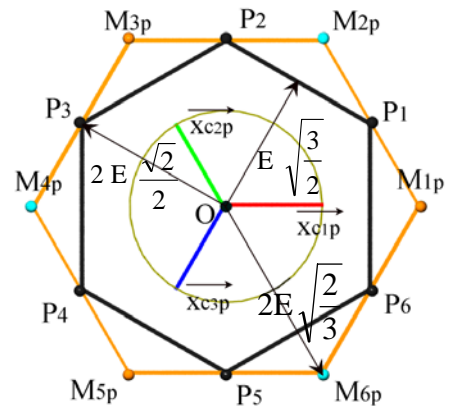


Figure 45, quelques valeurs numériques correspondant aux frontières des hexagones.

Démonstration :

On pose  $\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{y_{c2}} + \beta \overrightarrow{y_{c3}}$  avec  $(\overrightarrow{y_{c2}}, \overrightarrow{y_{c3}})$  base orthonormée du plan  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ . Il suffit ensuite pour trouver les frontières de la surface de résoudre :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} &= \pm E \quad \text{avec} \quad -E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} \leq E \quad \text{et} \quad -E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} \leq E ; \\ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} &= \pm E \quad \text{avec} \quad -E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} \leq E \quad \text{et} \quad -E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} \leq E ; \\ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} &= \pm E \quad \text{avec} \quad -E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} \leq E \quad \text{et} \quad -E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} \leq E . \end{aligned}$$

Par conséquent, il apparaît qu'avec cette commande on ne peut obtenir des vecteurs tension  $\vec{v}_c$  de module supérieur à  $\|\vec{OP}_k\| = \frac{\sqrt{2}}{2} 2E$  alors qu'il est permis d'espérer, en utilisant le cube dans son entier, parvenir à une amplitude  $\|\vec{OM}_{kp}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} 2E$ . La perte relative<sup>A</sup> est de 13,4%. Les commandes avec injection d'harmonique 3 ou avec homopolaire font partie de ces commandes qui exploitent mieux le cube.

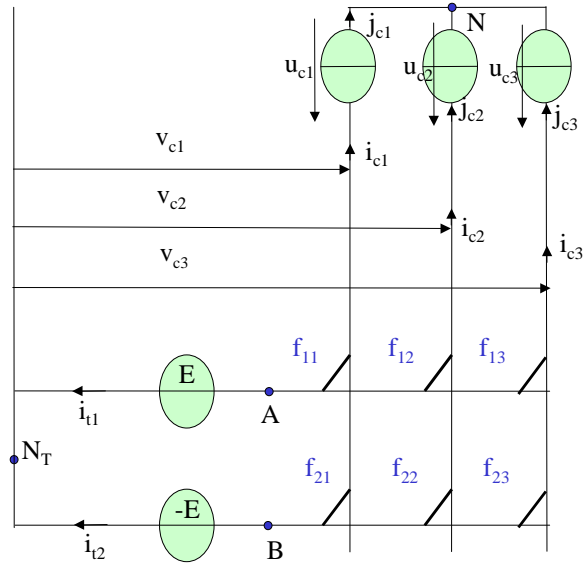


Figure 47

### III.3.4.b. Exemple de synthèse par M.L.I. intersective

Une des plus connues des commandes d'onduleur consiste à générer les signaux M.L.I. en effectuant l'intersection entre un signal triangulaire et un autre signal  $v_{ck}(t)$ , image de la valeur moyenne désirée de la tension entre le point « neutre »  $N_T$  de l'onduleur et la borne  $n^{\circ}k$  de la source de courant triphasée.

Dans ce paragraphe, on se propose d'analyser ce type de commande à l'aide du formalisme vectoriel développé dans le cas d'une source de courant triphasée couplée en étoile sans neutre sorti (cf. Figure 47).

#### *b. i Condition d'égalité entre les tensions $u_{ck}$ et $v_{ck}$*

On a vu alors au paragraphe III.2.3. les relations entre tensions :

- $u_{c1} = v_{c1} - v_{cN}$  ;
- $u_{c2} = v_{c2} - v_{cN}$  ;

---


$$^A \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

- $u_{c3} = v_{c3} - v_{cN}$  ;

Si on suppose classiquement\* de plus que la somme des tensions de phase est nulle,  $u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = 0$ . La relation suivante  $v_{cN} = \frac{v_{c1} + v_{c2} + v_{c3}}{3}$  est alors vérifiée (cf. paragraphe III.2.3.b. ). Par conséquent, si on s'impose de travailler avec des tensions  $v_{ck}$  telles que  $v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} = 0$  alors  $v_{cN} = 0$  et

- $u_{c1} = v_{c1}$  ;
- $u_{c2} = v_{c2}$  ;
- $u_{c3} = v_{c3}$  ;

Il n'est plus nécessaire de distinguer  $u_{ck}$  de  $v_{ck}$ . La contrainte  $v_{c1} + v_{c2} + v_{c3} = 0$  mène ainsi à une simplification de la commande.

Exemple : Prenons le cas le plus courant où l'on s'impose les tensions suivantes :

$$\begin{cases} u_{c1}(t) = v_{c1}(t) = V_m \cos(\omega t) \\ u_{c2}(t) = v_{c2}(t) = V_m \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ u_{c3}(t) = v_{c3}(t) = V_m \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

Dans le plan  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ ,  $\vec{v}_c$  décrit un cercle de module

$$\|\vec{v}_c\| = \sqrt{v_{c1}^2 + v_{c2}^2 + v_{c3}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_m \text{ à la vitesse } \omega.$$

### b. ii Domaine d'excursion

L'examen de la Figure 45, permet d'affirmer que la valeur maximale de  $V_m$  que l'on peut obtenir est telle que  $\sqrt{\frac{3}{2}} V_m = \sqrt{\frac{3}{2}} E$  soit  $V_m = E$  alors que dans le cas d'une commande avec « homopolaire » on trouve  $\sqrt{\frac{3}{2}} V_m = \frac{\sqrt{2}}{2} 2E$  soit  $V_m = \frac{2E}{\sqrt{3}} = 1,155 E$ .

---

\* La charge est équilibrée.

*b. iii Détermination des instants de commutation*

Dans la commande « intersective » on obtient les instants de commutation en réalisant l'intersection des trois tensions  $v_{c1}$ ,  $v_{c2}$  et  $v_{c3}$  :

- avec un signal de type dent de scie de durée  $T$  variant entre  $-E$  et  $E$  d'équation  $E - 2E \frac{t}{T}$

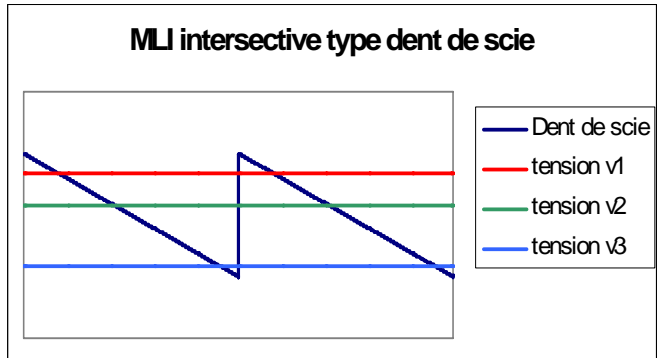


Figure 48

ou

- avec un signal triangulaire de durée  $T$  variant entre  $-E$  et  $E$  d'équation  $E - 4E \frac{t}{T}$  pour  $0 < t < T/2$  et  $-3E + 4E \frac{t}{T}$  pour  $T/2 < t < T$ .

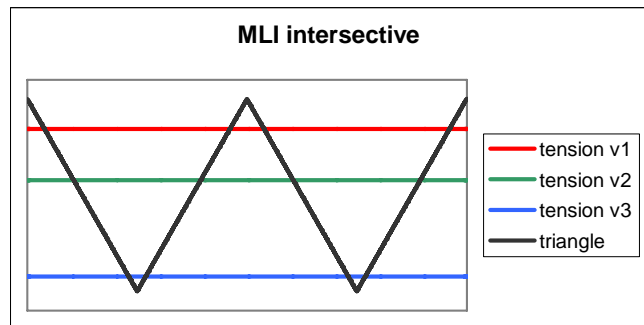


Figure 49

Les séquences obtenues dépendent de la position respectives des trois tensions  $v_{c1}$ ,  $v_{c2}$  et  $v_{c3}$ . Dans la suite, on considérera  $v_{c3} < v_{c2} < v_{c1}$  (cf. Figure 50).

La séquence des vecteurs tension utilisés est alors la suivante :

- $M_0, M_1, M_2, M_7$  pour un signal dent de scie ;
- $M_0, M_1, M_2, M_7, M_2, M_1, M_0$  pour un signal triangulaire.

Il apparaît donc que réaliser une telle commande revient à choisir de décomposer

$\vec{v}_c$  sur les vecteurs  $\vec{v}_{c0}, \vec{v}_{c1}, \vec{v}_{c2}, \vec{v}_{c7}$  avec la séquence décrite soit encore

$M_0(-E, -E, -E), M_1(E, -E, -E), M_2(E, E, -E), M_7(E, E, E)$  .

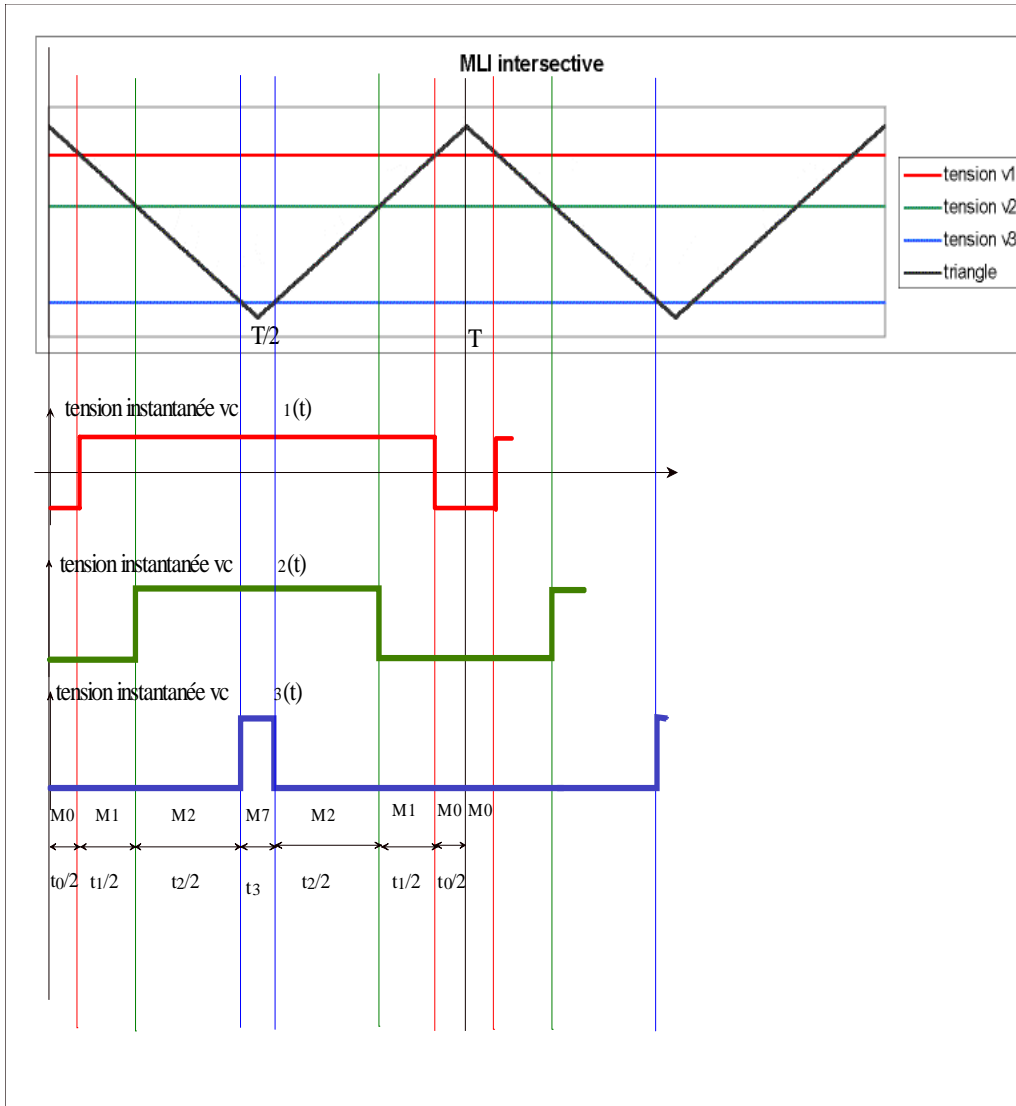


Figure 50, M.L.I. intersective,  $v_{c3} < v_{c2} < v_{c1}$ ,  $\omega t = 40^\circ$

*b. iv Comparaison avec la commande par vecteur d'espace*

On a  $v_{c3} < v_{c2} < v_{c1}$  pour  $\psi = \omega t$  entre 0 et  $+60^\circ$ . Par conséquent, cela signifie que le vecteur désiré  $\vec{v}_c = \overrightarrow{OM}$  appartient au triangle  $(M_{0p}, M_{1p}, M_{2p})$ , projection du tétraèdre  $(M_0, M_1, M_2, M_7)$ . Ces points de l'hexagone  $M_{0p}, M_{1p}, M_{2p}$  sont les points les plus proches de M.

Au paragraphe III.3.1.c. , on a exprimé les durées de conduction. Lorsqu'on travaille avec le quadruplet de points  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_7$ , il vient :



$$t_0 = T \frac{\left( \overrightarrow{M_7 M} \mid \overrightarrow{M_7 M_1} \mid \overrightarrow{M_7 M_2} \right)}{\left( \overrightarrow{M_7 M_0} \mid \overrightarrow{M_7 M_1} \mid \overrightarrow{M_7 M_2} \right)} ; t_1 = T \frac{\left( \overrightarrow{M_7 M_0} \mid \overrightarrow{M_7 M} \mid \overrightarrow{M_7 M_2} \right)}{\left( \overrightarrow{M_7 M_0} \mid \overrightarrow{M_7 M_1} \mid \overrightarrow{M_7 M_2} \right)} ; t_2 = T \frac{\left( \overrightarrow{M_7 M_0} \mid \overrightarrow{M_7 M_1} \mid \overrightarrow{M_7 M} \right)}{\left( \overrightarrow{M_7 M_0} \mid \overrightarrow{M_7 M_1} \mid \overrightarrow{M_7 M_2} \right)}.$$

En utilisant la définition du produit mixte on obtient :

$$t_0 = T \frac{4 E^2 (v_{c1} - E)}{-8 E^3} ; t_1 = T \frac{4 E^2 (v_{c2} - v_{c1})}{-8 E^3} ; t_2 = T \frac{4 E^2 (v_{c3} - v_{c2})}{-8 E^3}$$

ce qui donne :

$$-2 E \frac{t_0}{T} + E = v_{c1} ; -2 E \frac{t_0 + t_1}{T} + E = v_{c2} ; -2 E \frac{t_0 + t_1 + t_2}{T} + E = v_{c3}.$$

ou

$$-4 E \frac{t_0/2}{T} + E = v_{c1} ; -4 E \frac{(t_0 + t_1)/2}{T} + E = v_{c2} ; -4 E \frac{(t_0 + t_1 + t_2)/2}{T} + E = v_{c3}$$

On retrouve bien l'intersection des trois tensions  $v_{c1}$ ,  $v_{c2}$  et  $v_{c3}$  :

- avec un signal de type dent de scie de durée  $T$  variant entre  $-E$  et  $E$

$$\text{d'équation } E - 2 E \frac{t}{T}$$

ou

- avec un signal triangulaire de durée  $T$  variant entre  $-E$  et  $E$  d'équation

$$E - 4 E \frac{t}{T} \text{ pour } 0 < t < T/2 \text{ et } -3E + 4 E \frac{t}{T} \text{ pour } T/2 < t < T.$$

La commande M.L.I. « intersective » est donc simplement une méthode qui permet de calculer analogiquement les durées de conduction. On a vu que numériquement ce calcul se réduit à un produit scalaire.

Si on réalise la même étude dans les cinq autres triangles de l'hexagone on obtient le même type de résultat. Dans le cas d'une M.L.I. intersective la sélection du triangle est par conséquent automatique alors que dans une commande par vecteur d'espace il faut déterminer dans quel triangle se situe le vecteur désiré. Cette détermination s'opère par simple test de signe des trois produits scalaires suivants (même raisonnement qu'au paragraphe III.3.3. ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \overrightarrow{OM_{1p}} \wedge \overrightarrow{OM_{2p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{OM_{1p}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\ \left( \overrightarrow{OM_{2p}} \wedge \overrightarrow{OM_{3p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{OM_{2p}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \\ \left( \overrightarrow{OM_{3p}} \wedge \overrightarrow{OM_{4p}} \right) \cdot \left( \overrightarrow{OM_{3p}} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \end{array} \right.$$

Par exemple, si les deux premiers produits scalaires sont positifs et le dernier négatif alors M appartient au triangle [O, M<sub>2p</sub>, M<sub>3p</sub>]

*b. v Résumé*

La commande « intersective » consiste donc à utiliser les tétraèdres de la famille « 07 » : [M<sub>0</sub>, M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, M<sub>7</sub>], [M<sub>0</sub>, M<sub>1</sub>, M<sub>6</sub>, M<sub>7</sub>], [M<sub>0</sub>, M<sub>3</sub>, M<sub>2</sub>, M<sub>7</sub>], [M<sub>0</sub>, M<sub>3</sub>, M<sub>4</sub>, M<sub>7</sub>], [M<sub>0</sub>, M<sub>5</sub>, M<sub>4</sub>, M<sub>7</sub>], [M<sub>0</sub>, M<sub>5</sub>, M<sub>6</sub>, M<sub>7</sub>].

Elle sélectionne les quatre points M<sub>k</sub> les plus proches du point M désiré et effectue l'unique décomposition sur les quatre vecteurs correspondants qui permette d'obtenir une composante homopolaire moyenne nulle.

*Remarque* : avec une commande à homopolaire non nul les tensions u<sub>ck</sub> et v<sub>ck</sub> ne s'identifient plus.

**III.3.5. Utilisation du morphisme bijectif  $\mathcal{V}_{cr}$**

On vient d'examiner une fois déterminé le vecteur  $\overrightarrow{v_c}$  comment on peut le synthétiser à l'aide de la commande de l'onduleur.

Il nous reste à expliciter, pour les types de couplage envisagés,  $\overrightarrow{v_c} = \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overrightarrow{u_{créf}})$ , avec  $\mathcal{V}_{cr}$  morphisme bijectif défini au Chapitre II III.2.3.d. . Il faut donc caractériser la bijection  $\mathcal{V}_{cr}$ .

Il suffit par exemple pour cela d'exprimer les images des vecteurs d'une base de  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ ,  $\mathcal{V}_{cr}(\overrightarrow{y_{c2}})$  et  $\mathcal{V}_{cr}(\overrightarrow{y_{c3}})$ , dans une base orthonormée de  $\mathcal{H}_{nc}$ ,  $\{\overrightarrow{d_{c2}}, \overrightarrow{d_{c3}}\}$ .

$$\text{On choisit : } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{y_{c2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \overrightarrow{x_{c1}} - \frac{\overrightarrow{x_{c2}}}{2} - \frac{\overrightarrow{x_{c3}}}{2} \right) \\ \overrightarrow{y_{c3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overrightarrow{x_{c2}} - \overrightarrow{x_{c3}}) \end{array} \right.$$

III.3.5.a. Cas du couplage triangle

La connaissance du plan  $\mathcal{H}_{nc}$  permet de choisir une base  $\{\vec{d}_{c2}, \vec{d}_{c3}\}$ . Il est intéressant de

$$\text{prendre : } \begin{cases} \vec{d}_{c2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \vec{s}_{c1} - \frac{\vec{s}_{c2}}{2} - \frac{\vec{s}_{c3}}{2} \right) \\ \vec{d}_{c3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{s}_{c2} - \vec{s}_{c3}) \end{cases}.$$

On a d'ailleurs déjà exprimé au paragraphe III.3.3.b. les images des vecteurs de la base  $\{\vec{x}_{c1}, \vec{x}_{c2}, \vec{x}_{c3}\}$  en fonction des vecteurs de cette base  $\{\vec{d}_{c2}, \vec{d}_{c3}\}$  :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_c(\vec{x}_{c1}) = \vec{z}_{c1p} = +\vec{s}_{c1} - \vec{s}_{c2} = \sqrt{2} \left( +\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{d}_{c2} - \frac{1}{2} \vec{d}_{c3} \right); \\ \mathcal{V}_c(\vec{x}_{c2}) = \vec{z}_{c2p} = \vec{s}_{c2} - \vec{s}_{c3} = \sqrt{2} \vec{d}_{c3}; \\ \mathcal{V}_c(\vec{x}_{c3}) = \vec{z}_{c3p} = -\vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c3} = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{d}_{c2} - \frac{1}{2} \vec{d}_{c3} \right). \end{cases}$$

$$\text{Sachant que } \begin{cases} \vec{y}_{c2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \vec{x}_{c1} - \frac{\vec{x}_{c2}}{2} - \frac{\vec{x}_{c3}}{2} \right) \\ \vec{y}_{c3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{x}_{c2} - \vec{x}_{c3}) \end{cases}, \text{ il vient :}$$

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{cr}(\vec{y}_{c2}) = \sqrt{3} \left( +\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{d}_{c2} - \frac{1}{2} \vec{d}_{c3} \right); \\ \mathcal{V}_{cr}(\vec{y}_{c3}) = \sqrt{3} \left( +\frac{1}{2} \vec{d}_{c2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{d}_{c3} \right). \end{cases}$$

Pour caractériser  $\mathcal{V}_{cr}^{-1}$  il suffit d'inverser la relation précédente. On obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\vec{d}_{c2}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( +\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{y}_{c2} + \frac{1}{2} \vec{y}_{c3} \right); \\ \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\vec{d}_{c3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( -\frac{1}{2} \vec{y}_{c2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{y}_{c3} \right). \end{cases}$$

Si on confond le plan de départ  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  avec le plan d'arrivée  $\mathcal{H}_{nc}$  ainsi que les deux bases  $\{\vec{d}_{c2}, \vec{d}_{c3}\}$  et  $\{\vec{y}_{c2}, \vec{y}_{c3}\}$  alors  $\mathcal{V}_{cr}$  (resp  $\mathcal{V}_{cr}^{-1}$ ) est simplement une rotation d'angle  $-30^\circ$  (resp  $+30^\circ$ ) suivi d'une homothétie de rapport  $\sqrt{3}$  (resp  $1/\sqrt{3}$ ). On a alors :

$$\mathcal{V}_{cr}(\vec{v}_c) = \sqrt{3} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{v}_c - \frac{1}{2} \vec{y}_{c1} \wedge \vec{v}_c \right] \text{ et } \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\vec{u}_{c\text{réf}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_{c\text{réf}} + \frac{1}{2} \vec{y}_{c1} \wedge \vec{u}_{c\text{réf}} \right].$$

L'obtention des coordonnées de  $\vec{v}_c = \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\vec{u}_{c\text{réf}})$  est aisée :

$$\begin{cases} v_{c1} = \vec{v}_c \cdot \vec{x}_{c1} = \frac{u_{c1\text{réf}} - u_{c2\text{réf}}}{3} \\ v_{c2} = \vec{v}_c \cdot \vec{x}_{c2} = \frac{u_{c2\text{réf}} - u_{c3\text{réf}}}{3} \\ v_{c3} = \vec{v}_c \cdot \vec{x}_{c3} = \frac{u_{c3\text{réf}} - u_{c1\text{réf}}}{3} \end{cases}$$

Calcul pour la première coordonnée :

$$\begin{aligned} v_{c1} = \vec{v}_c \cdot \vec{x}_{c1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_{c\text{réf}} + \frac{1}{2} \vec{y}_{c1} \wedge \vec{u}_{c\text{réf}} \right] \cdot \vec{x}_{c1} = \frac{1}{2} u_{c1\text{réf}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \vec{y}_{c1} \mid \vec{u}_{c\text{réf}} \mid \vec{x}_{c1} \right) \\ &= \frac{1}{2} u_{c1\text{réf}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \vec{u}_{c\text{réf}} \mid \vec{x}_{c1} \mid \vec{y}_{c1} \right) = \frac{1}{2} u_{c1\text{réf}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \vec{u}_{c\text{réf}} \cdot \frac{\vec{x}_{c3} - \vec{x}_{c2}}{2\sqrt{3}} = \frac{u_{c1\text{réf}} - u_{c2\text{réf}}}{3} \end{aligned}$$

### III.3.5.b. Cas du couplage étoile sans neutre sorti

On cherche à exprimer les images des vecteurs d'une base,  $\mathcal{V}_{cr}(\vec{y}_{c2})$  et  $\mathcal{V}_{cr}(\vec{y}_{c3})$ , dans la base  $\{\vec{d}_{c2}, \vec{d}_{c3}\}$ . Or, on a vu pour ce type de couplage que le choix de  $\{\vec{d}_{c2}, \vec{d}_{c3}\}$  est liée à la nature des sources de courant. On ne peut donc dans le cas général poursuivre sans préciser la nature exacte des sources. On considère donc un exemple.

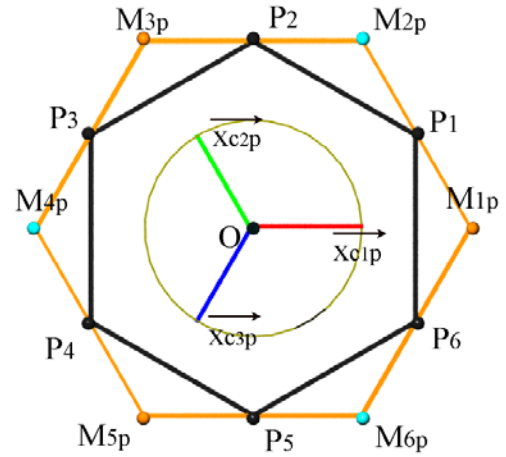
Exemple : On prend toujours le cas particulier d'un système triphasé équilibré pour lequel  $u_{c1} + u_{c2} + u_{c3} = 0$ . Le plan  $\mathcal{H}_{nc}$  est le même alors que dans le cas du couplage triangle. On peut donc choisir la même base  $\{\vec{d}_{c2}, \vec{d}_{c3}\}$ .

On a vu au paragraphe III.3.3. p75:  $\mathcal{V}_c(\vec{x}_{ck}) = \vec{x}_{ckp} = \vec{s}_{ck} - \frac{1}{3}(\vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3})$ .

$$\text{Sachant que } \begin{cases} \vec{y}_{c2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \vec{x}_{c1} - \frac{\vec{x}_{c2}}{2} - \frac{\vec{x}_{c3}}{2} \right) \\ \vec{y}_{c3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{x}_{c2} - \vec{x}_{c3}) \end{cases}, \text{ il vient : } \begin{cases} \mathcal{V}_{cr}(\vec{y}_{c2}) = \vec{d}_{c2} \\ \mathcal{V}_{cr}(\vec{y}_{c3}) = \vec{d}_{c3} \end{cases}$$

La caractérisation de  $\mathcal{V}_{cr}^{-1}$  est triviale :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overrightarrow{d_{c2}}) = \overrightarrow{y_{c2}}; \\ \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overrightarrow{d_{c3}}) = \overrightarrow{y_{c3}}. \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \overrightarrow{v_{c1}} = \overrightarrow{v_c} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} = \overrightarrow{u_{c1ref}} \\ \overrightarrow{v_{c2}} = \overrightarrow{v_c} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} = \overrightarrow{u_{c2ref}} \\ \overrightarrow{v_{c3}} = \overrightarrow{v_c} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} = \overrightarrow{u_{c3ref}} \end{cases}$$



### III.3.5.c. Équivalence avec les phaseurs complexes

Par construction, le vecteur  $\overrightarrow{v_c} = \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overrightarrow{u_{c1ref}})$  appartient au plan  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ .

La projection orthogonale sur ce plan le laisse donc inchangé. Il vient :

Figure 51,  $\{\overrightarrow{x_{c1p}}, \overrightarrow{x_{c2p}}, \overrightarrow{x_{c3p}}\}$ ,

projection des vecteurs  $\{\overrightarrow{x_{c1}}, \overrightarrow{x_{c2}}, \overrightarrow{x_{c3}}\}$

$$\overrightarrow{v_c} = v_{c1} \overrightarrow{x_{c1p}} + v_{c2} \overrightarrow{x_{c2p}} + v_{c3} \overrightarrow{x_{c3p}}$$

avec  $\overrightarrow{x_{ckp}}$  projection de  $\overrightarrow{x_{ck}}$  sur  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$ .

On évalue ces trois projections :

$$\overrightarrow{x_{ckp}} = \overrightarrow{x_{ck}} - (\overrightarrow{x_{ck}} \cdot \overrightarrow{y_{c1}}) \overrightarrow{y_{c1}} = \overrightarrow{x_{ck}} - \frac{1}{3} (\overrightarrow{x_{c1}} + \overrightarrow{x_{c2}} + \overrightarrow{x_{c3}})$$

Les trois vecteurs  $\{\overrightarrow{x_{c1p}}, \overrightarrow{x_{c2p}}, \overrightarrow{x_{c3p}}\}$  sont de norme  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  d'où :

$$\overrightarrow{v_{cp}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ v_{c1} \frac{\overrightarrow{x_{c1p}}}{\|\overrightarrow{x_{c1p}}\|} + v_{c2} \frac{\overrightarrow{x_{c2p}}}{\|\overrightarrow{x_{c2p}}\|} + v_{c3} \frac{\overrightarrow{x_{c3p}}}{\|\overrightarrow{x_{c3p}}\|} \right].$$

De plus,  $\overrightarrow{x_{c1p}}, \overrightarrow{x_{c2p}}$  et  $\overrightarrow{x_{c3p}}$  sont déphasés de  $120^\circ$ .

Par conséquent, si on identifie (par isomorphisme) la base  $\{\overrightarrow{y_{c2}}, \overrightarrow{y_{c3}}\}$  à celle  $\{1, j\}$  du plan complexe, on obtient l'expression classique du phaseur complexe :

$$\underline{v_c} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ v_{c1} 1 + v_{c2} e^{j\frac{2\pi}{3}} + v_{c3} e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ v_{c1} 1 + v_{c2} a + v_{c3} a^2 \right]. \text{ avec } a = e^{j\frac{2\pi}{3}}.$$

*Remarque 1* : bien entendu dans la mesure où l'on a une bijection entre les deux plans  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  et  $\mathcal{H}_{nc}$ , il est possible de définir des phaseurs complexes pour les grandeurs liées aux sources.

*Remarque 2* : si l'on désire que le module du vecteur soit égal à la valeur maximale dans l'hypothèse d'une alimentation sinusoïdale il faut définir le phaseur par :

$$\underline{v}_c = \frac{2}{3} \left[ +v_{c1} 1 + v_{c2} e^{j\frac{2\pi}{3}} + v_{c3} e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] = \frac{2}{3} \left[ +v_{c1} 1 + v_{c2} a + v_{c3} a^2 \right].$$

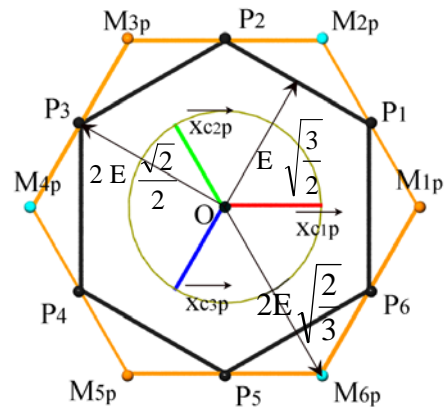


Figure 52

### III.3.6. Commande d'un onduleur de tension avec « harmonique trois» ou « homopolaire »

#### III.3.6.a. Présentation

Pour tout vecteur désiré  $\overrightarrow{u}_{\text{créf}}$  il suffit de synthétiser des vecteurs  $\overrightarrow{v}_c$  du cube  $\mathcal{D}_{mc}$  tels que :

$$\overrightarrow{v}_c = \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overrightarrow{u}_{\text{créf}}) + h \overrightarrow{y}_{c1} \text{ avec } h \in \mathbb{R} \text{ et } \overrightarrow{y}_{c1} = \frac{\overrightarrow{x}_{c1} + \overrightarrow{x}_{c2} + \overrightarrow{x}_{c3}}{\sqrt{3}}.$$

**Note** : on appellera composante « homopolaire » d'un vecteur  $\overrightarrow{v}_c$ , sa coordonnée selon le vecteur  $\overrightarrow{y}_{c1}$  c'est à dire h.

Bien entendu  $\overrightarrow{u}_{\text{créf}}$  doit se situer à l'intérieur<sup>A</sup> de l'hexagone  $[M_{1p}, M_{2p}, M_{3p}, M_{4p}, M_{5p}, M_{6p}]$  image par  $\mathcal{V}_c$  du cube  $\mathcal{D}_{mc}$  (cf. paragraphes III.3.3.a. ou III.3.3.b. selon le type de couplage). On a vu au paragraphe III.3.3. , p 75 comment effectuer cette vérification.

On cherche dans la suite les valeurs possibles de la composante homopolaire h d'un vecteur solution  $\overrightarrow{v}_c = \overrightarrow{OM}$ .

<sup>A</sup> Si  $\overrightarrow{u}_{\text{créf}}$  est sur le contour d'un hexagone alors il est possible de le décomposer sur uniquement 3 vecteurs. Dans le cas contraire quatre vecteurs sont nécessaires.

Soit un point P, intérieur à l'hexagone  $[M_{1p}, M_{2p}, M_{3p}, M_{4p}, M_{5p}, M_{6p}]$ , représenté par ses **coordonnées polaires R et  $\alpha$** . On a :  $\overrightarrow{OP} = \mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overrightarrow{u_{créf}}) = R \cos \alpha \overrightarrow{y_{c2}} + R \sin \alpha \overrightarrow{y_{c3}}$  .

Considérons la droite  $\Delta$  passant par le point P du plan  $(\text{Ker } \mathcal{V}_c)^\perp$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{y_{c1}}$  . Elle coupe la surface du cube en au plus deux points notés,  $S_B$  et  $S_H$ . Sur la *Figure 53* on a placé  $S_B$  et  $S_H$  pour une valeur de  $\alpha$ . Si on fait varier  $\alpha$  de 0 à 360° alors cette droite génère un cylindre.

*Remarque* : Les intersections entre le cylindre et les faces du cube engendrent des courbes. Or lorsqu'on reste sur une face du cube cela signifie que l'un des bras de l'onduleur ne commute plus. Il pourra donc être intéressant pour minimiser les nombres de commutations de rester sur ces courbes.

Notations :

- $h_B, h_H$  les composantes homopolaires respectives des points  $S_B$  et  $S_H$  qu'on choisit pour que  $h_B < h_H$ ;
- $C_B, C_H$  les courbes engendrées respectivement par les points de type  $S_B$  et  $S_H$  lorsque R et  $\alpha$  varient.

La composante homopolaire h doit vérifier  $h_B < h < h_H$ . Graphiquement cela se traduit par l'appartenance du point M au segment  $[S_H, S_B]$ .

### III.3.6.b. Étude des différents cas

Plusieurs cas de figures se présentent selon la valeur de R (cf. *Figure 52*) ou du coefficient de réglage en tension r

$$r = \frac{V_{\max}}{2E/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{R}{E} .$$

- si à tout instant  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}}{2} \geq \frac{R}{2E}$  ( soit encore  $r \leq 1$ ), P est alors à l'intérieur du polygone défini par les points  $P_k$  (cf. *Figure 53*) et on vérifie :

$$\forall (S_B, S_H), (S_B \in C_B \text{ et } S_H \in C_H) \Rightarrow (h_B \leq 0 \leq h_H) .$$

La fonction homopolaire h

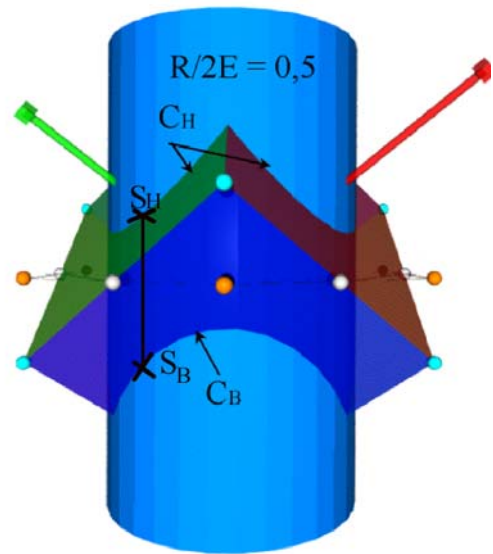
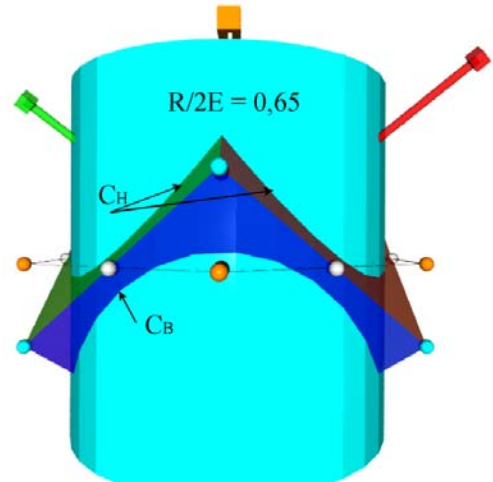


Figure 53, coefficient de réglage en tension ,  $r = 0,81$

la plus simple comprise entre les courbes  $C_B$  et  $C_H$  est  $h(t) = 0$  puisqu'on a bien  $h_B \leq h(t) \leq h_H$  ;

- si à tout instant  $\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{R}{2E} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$  ( soit encore  $1 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155$  ), alors il n'y a aucune

intersection entre  $C_B$  et  $C_H$  (cf. *Figure 54*). La fonction  $h = 0$  ne convient plus puisque  $h_B$  et  $h_H$  sont parfois de même signe. Il est néanmoins possible de choisir pour fonction homopolaire toute courbe inscrite entre  $C_H$  et  $C_B$ . Dans le cas particulier où  $P$  décrit un cercle à vitesse angulaire constante  $\omega = 2\pi / T$ , la forme des frontières  $C_B$  et  $C_H$  incite à considérer une fonction homopolaire de période  $T/3$ . Cela justifie les commandes avec « injection » de l'harmonique 3 ;



*Figure 54, coefficient de réglage en tension,  $r = 1,06$*

- si  $\frac{R}{2E} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( soit encore  $r = 1,155$  ), il y a alors

intersection entre  $C_B$  et  $C_H$  aux points  $P_k$  (cf.

*Figure 55*). Si  $R$  est constant dans le temps, le cercle décrit par le point  $P$  est alors « tangent » au polygone  $[M_{1p}, M_{2p}, M_{3p}, M_{4p}, M_{5p}, M_{6p}]$  aux points  $P_k$ . C'est donc le cas limite puisque les points  $S_B$  et  $S_H$  sont alors confondus. En ces points  $h = 0$  ;

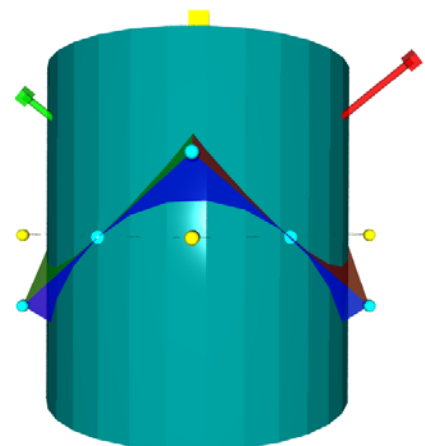
- si  $\sqrt{\frac{2}{3}} \geq \frac{R}{2E} > \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( soit encore

$1,155 < r \leq 1,33$  ) alors, pour certaines valeurs de  $\alpha$ ,

il n'y a pas d'intersection entre le cube et la droite

$\Delta$  ; on est dans le domaine de la surmodulation ;

- si  $\frac{R}{2E} > \sqrt{\frac{2}{3}}$  alors la droite  $\Delta$  ne coupe plus le cube.



*Figure 55,  $R/2E=0.707$ , coefficient de réglage en tension,  $r = 1,155$*

*Remarque* : le fait d'ajouter à  $\mathcal{V}_{cr}^{-1}(\overline{u_{créf}})$  une composante homopolaire ne modifie en rien le vecteur tension  $\overline{u_{créf}}$  puisque l'image de cette composante est nulle par le



*morphisme. Cela permet d'exploiter au mieux les performances du modulateur.*

### III.3.6.c. Application à l'étude d'une commande « optimale »

Au paragraphe III.3.4.b. , p 86 on a vu que la commande classique n'utilise pas de façon optimale la source de tension  $2E$  et que l'injection d'une composante homopolaire permet de d'utiliser plus pleinement la source de tension.

On peut encore mieux exploiter le degré de liberté offert par l'homopolaire en s'imposant de rester toujours à la surface du cube. En effet, lorsque le point M se déplace sur la surface du cube l'une des coordonnées reste égale à  $+E$  ou  $-E$ . Cela signifie que l'un des bras de l'onduleur ne commute plus. Il suffit pour réaliser la synthèse du vecteur tension désiré de prendre uniquement trois vecteurs de la famille. Réduire ainsi le nombre de vecteurs utilisés permet de réduire celui des commutations des interrupteurs.

*Remarque : il est d'autant plus intéressant de réduire le nombre de commutations du bras associé à une phase que le courant qui circule dans cette phase est grand. Pour qu'il y ait un intérêt réel à réduire le nombre de commutations il faut donc que le déphasage du courant avec la tension soit tel qu'au moment où le courant est d'amplitude élevé dans cette phase alors le bras correspondant ne commute plus !*

On cherche donc pour réduire le nombre de commutations l'intersection du cube avec un cylindre de rayon  $R$  et d'axe parallèle à  $\vec{y}_{c1}$ . On obtient deux courbes que l'on note  $C_B$  et  $C_H$ . Pour résoudre ce problème de géométrie élémentaire, considérons deux expressions de  $\vec{OM}$  :

- $\vec{OM} = h \vec{y}_{c1} + R \cos \alpha \vec{y}_{c2} + R \sin \alpha \vec{y}_{c3}$

et

- $\vec{OM} = x_1 \vec{x}_{c1} + x_2 \vec{x}_{c2} + x_3 \vec{x}_{c3}$  .

Il suffit ensuite pour trouver les deux courbes  $C_B$  et  $C_H$  de résoudre :

$$\vec{OM} \cdot \vec{x}_{c1} = \pm E \quad \text{avec} \quad -E \leq \vec{OM} \cdot \vec{x}_{c2} \leq E \quad \text{et} \quad -E \leq \vec{OM} \cdot \vec{x}_{c3} \leq E ;$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{x}_{c2} = \pm E \quad \text{avec} \quad -E \leq \vec{OM} \cdot \vec{x}_{c1} \leq E \quad \text{et} \quad -E \leq \vec{OM} \cdot \vec{x}_{c3} \leq E ;$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{x}_{c3} = \pm E \quad \text{avec} \quad -E \leq \vec{OM} \cdot \vec{x}_{c1} \leq E \quad \text{et} \quad -E \leq \vec{OM} \cdot \vec{x}_{c2} \leq E ;$$

Entre les deux systèmes de coordonnées on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} h = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{y_{c1}} = \frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}} \\ R \cos \alpha = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{y_{c2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( x_1 - \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2} \right) \\ R \sin \alpha = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{y_{c3}} = \left( \frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{x_3}{\sqrt{2}} \right) \end{cases} .$$

Traduisons maintenant au sein de ces relations les différents cas relatifs à l'intersection entre cylindre et cube.

$$[1] \quad \underline{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} = \pm E} \quad \text{s'exprime par} \quad \begin{cases} h = \frac{\pm E + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} R \cos \alpha = \pm E - \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2} \\ \sqrt{2} R \sin \alpha = x_2 - x_3 \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} h = \frac{\pm E + x_2 + x_3}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{6} R \cos \alpha \pm 2E = x_2 + x_3 \\ \sqrt{2} R \sin \alpha = x_2 - x_3 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$\begin{cases} h = -\sqrt{2} R \cos \alpha \pm \sqrt{3} E \\ x_2 = \frac{\sqrt{2} R \sin \alpha - \sqrt{6} R \cos \alpha \pm 2E}{2} = \sqrt{2} R \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{3} \right) \pm E \\ x_3 = \frac{-\sqrt{2} R \sin \alpha - \sqrt{6} R \cos \alpha \pm 2E}{2} = \sqrt{2} R \sin \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \pm E \end{cases} .$$

$$[2] \quad \underline{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} = \pm E} \quad \text{s'exprime par} \quad \begin{cases} h = \frac{\pm E + x_1 + x_3}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} R \cos \alpha = x_1 - \frac{\pm E}{2} - \frac{x_3}{2} \\ \sqrt{2} R \sin \alpha = \pm E - x_3 \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} h = \pm \sqrt{3} E - \sqrt{2} R \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \\ x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} R \cos \alpha \pm \frac{E}{2} + \frac{\pm E - \sqrt{2} R \sin \alpha}{2} = \pm E - \sqrt{2} R \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{3} \right) \\ x_3 = \pm E - \sqrt{2} R \sin \alpha \end{cases}$$

$$[3] \quad \underline{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} = \pm E} \quad \text{s'exprime par} \quad \begin{cases} h = \frac{\pm E + x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} R \cos \alpha = x_1 - \frac{\pm E}{2} - \frac{x_2}{2} \\ \sqrt{2} R \sin \alpha = x_2 - \pm E \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} h = \pm \sqrt{3} E + \sqrt{2} R \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right) \\ x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} R \cos \alpha \pm \frac{E}{2} + \frac{\pm E + \sqrt{2} R \sin \alpha}{2} = \pm E + \sqrt{2} R \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{3} \right) \\ x_2 = \pm E + \sqrt{2} R \sin \alpha \end{cases}$$

**On recherche la courbe  $C_H$  :**

$$[1] \quad \underline{\text{Lorsque } x_1 = E} \text{ alors } x_2 = \sqrt{2} R \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{3} \right) + E \text{ et } x_3 = \sqrt{2} R \sin \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) + E.$$

Les inégalités  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} \leq E$  et  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} \leq E$  deviennent alors :

$$-\sqrt{2} \frac{E}{R} < \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{3} \right) < 0 \quad \text{et} \quad -\sqrt{2} \frac{E}{R} < \sin \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) < 0 \quad .$$

Il vient donc qu'il faut  $-60^\circ < \alpha < 60^\circ$  et  $\sqrt{2} E > R$  .

En posant  $\beta = \alpha$  , on obtient pour  $-60^\circ < \beta < 60^\circ$  :

$$\begin{cases} h = +\sqrt{3} E - \sqrt{2} R \cos\beta \\ x_1 = +E \\ x_2 = +E + \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) \\ x_3 = +E + \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

[2] Lorsque  $x_2 = E$  alors  $x_1 = +E - \sqrt{2} R \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$  et  $x_3 = +E - \sqrt{2} R \sin\alpha$ .

Les inégalités  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} \leq E$  et  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} \leq E$  deviennent alors :

$$0 < \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{2} \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad 0 < \sin\alpha < \sqrt{2} \frac{E}{R} .$$

Il vient donc qu'il faut  $60^\circ < \alpha < 180^\circ$  et  $\sqrt{2} E > R$ .

En posant  $\beta = \alpha - 120^\circ$ , on obtient pour  $-60^\circ < \beta < 60^\circ$  :

$$\begin{cases} h = \sqrt{3} E - \sqrt{2} R \cos\beta \\ x_1 = E + \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ x_2 = E \\ x_3 = E + \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

[3] Lorsque  $x_3 = E$  alors  $x_1 = +E + \sqrt{2} R \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$  et  $x_2 = +E + \sqrt{2} R \sin\alpha$ .

Les inégalités  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} \leq E$  et  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} \leq E$  deviennent alors :

$$-\sqrt{2} \frac{E}{R} < \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad \text{et} \quad -\sqrt{2} \frac{E}{R} < \sin\alpha < 0 .$$

Il vient donc qu'il faut  $-180^\circ < \alpha < -60^\circ$  et  $\sqrt{2} E > R$ .

En posant  $\beta = \alpha + 120^\circ$ , on obtient pour  $-60^\circ < \beta < 60^\circ$  :

$$\begin{cases} h = \sqrt{3} E - \sqrt{2} R \cos\beta \\ x_1 = E + \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) \\ x_2 = E + \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ x_3 = E \end{cases}$$

Exemple de tracé de la tension  $v_{c1}$  pour  $E = 100$  et  $R = 100$  :

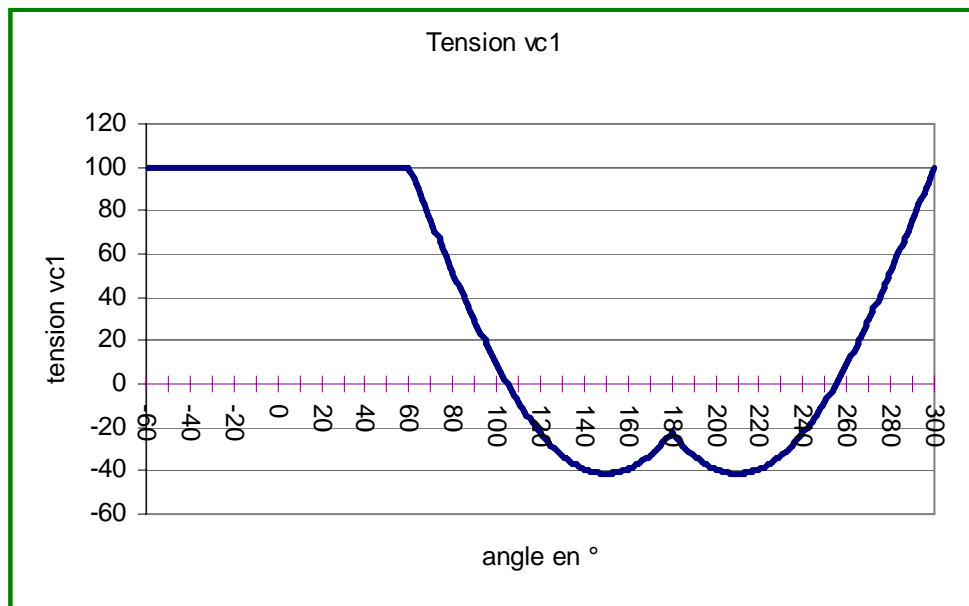


Figure 56

*Le même type de démarche permet d'obtenir la courbe  $C_B$ .*

[1] Lorsque  $x_1 = -E$  alors  $x_2 = \sqrt{2} R \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - E$  et  $x_3 = \sqrt{2} R \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - E$ .

Les inégalités  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} \leq E$  et  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} \leq E$  deviennent alors :

$$0 < \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{2} \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad 0 < \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) < \sqrt{2} \frac{E}{R}$$

Il vient donc qu'il faut  $120^\circ < \alpha < 240^\circ$  et  $\sqrt{2} E > R$ .

En posant  $\beta = \alpha - 180^\circ$ , on obtient pour  $-60^\circ < \beta < 60^\circ$  :

$$\begin{cases} h = -\sqrt{3} E + \sqrt{2} R \cos\beta \\ x_1 = -E \\ x_2 = -E - \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) \\ x_3 = -E - \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

[2] Lorsque  $x_2 = -E$  alors  $x_1 = -E - \sqrt{2} R \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$  et  $x_3 = -E - \sqrt{2} R \sin\alpha$ .

Les inégalités  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} \leq E$  et  $-E \leq \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{x_{c3}} \leq E$  deviennent alors :

$$-\sqrt{2} \frac{E}{R} < \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad \text{et} \quad -\sqrt{2} \frac{E}{R} < \sin \alpha < 0 .$$

Il vient donc qu'il faut  $-120^\circ < \alpha < 0^\circ$  et  $\sqrt{2} E > R$  .

En posant  $\beta = \alpha + 60^\circ$ , on obtient pour  $-60^\circ < \beta < 60^\circ$  :

$$\begin{cases} h = -\sqrt{3} E + \sqrt{2} R \cos \beta \\ x_1 = -E - \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ x_2 = -E \\ x_3 = -E - \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

[3] Lorsque  $x_3 = -E$  alors  $x_1 = -E + \sqrt{2} R \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$  et  $x_2 = -E + \sqrt{2} R \sin \alpha$  .

Les inégalités  $-E \leq \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{x_{c1}} \leq E$  et  $-E \leq \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{x_{c2}} \leq E$  deviennent alors :

$$0 < \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{2} \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad 0 < \sin \alpha < \sqrt{2} \frac{E}{R} .$$

Il vient donc qu'il faut  $0^\circ < \alpha < 120^\circ$  et  $\sqrt{2} E > R$  .

En posant  $\beta = \alpha - 60^\circ$ , on obtient pour  $-60^\circ < \beta < 60^\circ$  :

$$\begin{cases} h = -\sqrt{3} E + \sqrt{2} R \cos \beta \\ x_1 = -E - \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right) \\ x_2 = -E - \sqrt{2} R \sin\left(\beta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ x_3 = -E \end{cases}$$

On a déterminé les courbes  $C_H$  et  $C_B$  sur lesquelles doit se situer le point M. La solution n'est pas encore unique. On peut alors chercher à réduire la valeur efficace de l'ondulation de tension de  $\overrightarrow{u_c}(t) = u_{c1}(t) \overrightarrow{s_{c1}} + u_{c2}(t) \overrightarrow{s_{c2}} + u_{c3}(t) \overrightarrow{s_{c3}}$  qui caractérise les tensions aux bornes des phases des sources de courant. Étant donné que la composante homopolaire qu'on rajoute appartient au noyau, on sait qu'elle n'affecte pas  $\overrightarrow{u_{\text{créf}}}$  la valeur moyenne de  $\overrightarrow{u_c}(t)$  (on ne trouve pas ainsi d'harmonique 3, 6 ou 9). Par contre selon la valeur de la composante homopolaire choisie les durées  $t_0$  et  $t_7$  ne sont pas les mêmes (la valeur  $t_0+t_7$  est par contre

imposée). Jouer sur ce dernier degré de liberté permet de réduire la valeur efficace de l'ondulation de tension :  $\left\| \overrightarrow{u_c(t)} - \overrightarrow{u_{créf}} \right\|$ .

*Remarque :* pour décrire la courbe  $C_H$  les vecteurs employés sont d'une part,  $\overrightarrow{v_{c2}}$ ,  $\overrightarrow{v_{c4}}$  et  $\overrightarrow{v_{c6}}$  qui correspondent aux points  $M_2$ ,  $M_4$  et  $M_6$  et dont la composante homopolaire vaut  $\frac{2E}{\sqrt{3}}$ ,  $\overrightarrow{v_{c7}}$  d'autre part de composante homopolaire  $\frac{3E}{\sqrt{3}}$ . Cela signifie que le potentiel du point neutre (en cas de couplage étoile sans neutre sorti) varie entre  $\frac{2E}{\sqrt{3}}$  et  $\frac{3E}{\sqrt{3}}$ . Avec une commande classique les variations de ce même point neutre sont plus marquées: entre  $-\frac{3E}{\sqrt{3}}$  et  $\frac{3E}{\sqrt{3}}$ . Par contre son potentiel moyen est nul. Certaines commandes qui s'intéressent aux problèmes de compatibilité électromagnétique, montrent l'intérêt de diminuer les fluctuations du potentiel du point neutre.

### III.4. Conclusion

À travers l'étude de l'onduleur de tension deux niveaux, on a cherché à appliquer sur un cas bien connu le formalisme vectoriel développé. Cela permet de mettre en évidence plus facilement le nouvel éclairage qu'apporte la méthode.

Ainsi, la définition de deux espaces vectoriels, l'un associé à la source, l'autre au modulateur d'énergie permet d'introduire naturellement la commande avec ou sans homopolaire.

Par ailleurs, le formalisme permet de généraliser la notion de vecteur d'espace, très utilisée en électronique de puissance, à des cas de dimension supérieure à 2 tout en conservant des aspects géométriques qui manquent au formalisme matriciel tel qu'il est traditionnellement utilisé.

Si on avait choisi une autre référence de potentiel, le formalisme mène à des résultats non « habituels » mais tout aussi exploitables. Prenons ainsi pour potentiel de référence la borne de sortie de la phase 1 de la source de courant triphasé alors le vecteur  $\overrightarrow{v_c}$  devient :

$$\vec{v}_c = 0 \vec{x}_{c1} + (v_{c2} - v_{c1}) \vec{x}_{c2} + (v_{c3} - v_{c1}) \vec{x}_{c3} .$$

Le caractère bidimensionnel du modulateur apparaît alors immédiatement puisqu'une composante du vecteur tension est nulle. Le domaine accessible n'est plus un cube mais un hexagone correspondant à une nouvelle famille de vecteurs. On passe donc d'un domaine volumique à un domaine surfacique<sup>A</sup>. Par contre, le choix de cette référence fait apparaître une dissymétrie géométrique et les points M<sub>0</sub> et M<sub>7</sub> sont confondus. Néanmoins une étude similaire à celle réalisée est possible<sup>B</sup>.

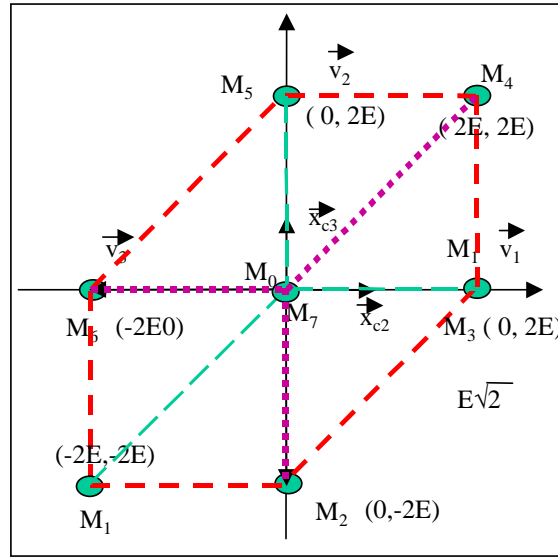


Figure 57, plan des vecteurs engendrés par le modulateur en choisissant une référence de

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{c0} = 0 \vec{x}_{c1} + 0 \vec{x}_{c2} + 0 \vec{x}_{c3} ; \\ \vec{v}_{c2} = +0 \vec{x}_{c1} + 0 \vec{x}_{c2} - 2E \vec{x}_{c3} ; \\ \vec{v}_{c4} = +0 \vec{x}_{c1} + 2E \vec{x}_{c2} + 2E \vec{x}_{c3} ; \\ \vec{v}_{c6} = +0 \vec{x}_{c1} - 2E \vec{x}_{c2} + 0 \vec{x}_{c3} ; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \vec{v}_{c1} = +0 \vec{x}_{c1} - 2E \vec{x}_{c2} - 2E \vec{x}_{c3} ; \\ \vec{v}_{c3} = +0 \vec{x}_{c1} + 2E \vec{x}_{c2} + 0 \vec{x}_{c3} ; \\ \vec{v}_{c5} = +0 \vec{x}_{c1} + 0 \vec{x}_{c2} + 2E \vec{x}_{c3} ; \\ \vec{v}_{c7} = +0 \vec{x}_{c1} + 0 \vec{x}_{c2} + 0 \vec{x}_{c3} . \end{array} \quad \text{potentiel différente.}$$

<sup>A</sup> Attention ce n'est pas une vue en perspective ! Les trois types traits pointillés relient les points qui ne diffèrent entre que par une seule commutation. C'est la raison pour laquelle semble réapparaître en perspective le cube considéré précédemment.

<sup>B</sup> Le rayon du cercle maximum inscrit est  $\frac{\sqrt{3}}{2} 2E$  pour des tensions composées donc  $\frac{\sqrt{2}}{2} 2E$  pour des tensions simples.





## Chapitre III Machine électrique polyphasée modélisée à l'aide d'un formalisme vectoriel

Lors de l'étude des modulateurs d'énergie à l'aide du formalisme vectoriel proposé les sources ont été associées à un espace vectoriel euclidien dont la dimension est simplement liée au nombre de phases connectées au modulateur. On se propose dans ce chapitre de poursuivre l'étude des sources avec ce formalisme en prenant pour exemple support des machines électriques classiques. Il sera alors possible d'examiner dans quelle mesure les notions introduites à propos des modulateurs s'utilisent avec ces sources de courant.

Dans le cadre d'une alimentation à l'aide de modulateur d'énergie, se limiter à des machines triphasées se justifie par des critères essentiellement d'ordre historique et économique (connaissance, disponibilité et prix des machines). Augmenter le nombre de phases peut d'ailleurs sembler intéressant dans la mesure où la puissance électrique qui est fournie à la machine via un modulateur est alors fractionnée. Les interrupteurs s'en trouvent être de calibre plus faible. Cette démarche est d'ailleurs déjà largement utilisée dans le cadre des machines hexaphasées de forte puissance.

Dans un premier temps, on s'attache à étudier deux cas très connus :

- une machine asynchrone « diphasée » au stator et au rotor ;
- une machine asynchrone triphasée à cage comportant  $q$  barres rotoriques.

Dans un deuxième temps, deux machines sont étudiées l'une pentaphasée, l'autre hexaphasée. On en déduit les relations à respecter afin de réduire la dimension de l'espace vectoriel d'étude.

### ***I. Étude d'une machine « diphasée équivalente »***

Dans ce paragraphe l'objectif est d'ordre introductif. En effet ce cas classique se traite autant en formalisme matriciel que complexe. Même si évidemment aucun résultat nouveau n'est à attendre, traiter ce cas permet de présenter la démarche d'étude qui sera adoptée dans la suite du chapitre.

### I.1. Le modèle

On adopte un modèle classique de représentation des phénomènes électromagnétiques ayant lieu au sein d'une machine « diphasée » :

Le stator (respectivement le rotor) est représenté électriquement par deux bobinages  $B_{s\alpha}$  et  $B_{s\beta}$  (resp  $B_{r\alpha}$  et  $B_{r\beta}$ ) dont la configuration est indiquée Figure 58, avec  $p$

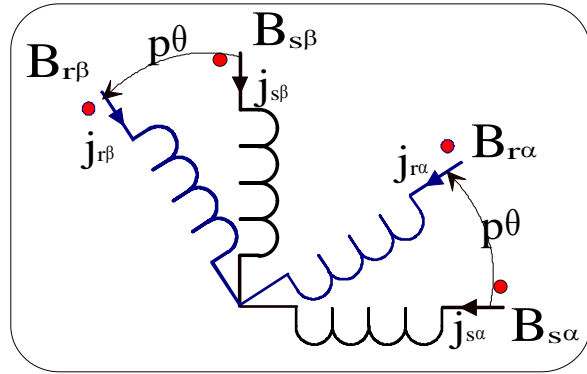


Figure 58 , représentation diphasée

nombre de paires de pôles et  $\theta$  angle mécanique entre stator et rotor ;

Chaque phase est régie électriquement par la relation :

$$u(t) = R j(t) - e(t) \tag{R 1}$$

avec,

- ❖  $u(t)$  tension aux bornes de la phase ;
- ❖  $R$  résistance de la phase ;
- ❖  $j(t)$  courant dans la phase ;
- ❖  $e(t) = -\frac{d\phi}{dt}$ ,  $e(t)$  tension induite dans le bobinage de la phase ;
- ❖  $\phi(t)$  flux capté par la phase.

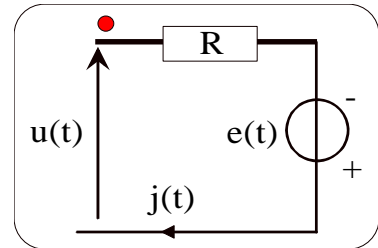


Figure 59

On suppose qu'entre flux et courants existent les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \phi_{s\alpha} \\ \phi_{s\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{s\alpha} \\ j_{s\beta} \end{pmatrix} + M_{sr} \begin{pmatrix} \cos p\theta & -\sin p\theta \\ \sin p\theta & \cos p\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{r\alpha} \\ j_{r\beta} \end{pmatrix} \tag{R 2}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_r & 0 \\ 0 & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{r\alpha} \\ j_{r\beta} \end{pmatrix} + M_{sr} \begin{pmatrix} \cos p\theta & \sin p\theta \\ -\sin p\theta & \cos p\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{s\alpha} \\ j_{s\beta} \end{pmatrix} \tag{R 3}$$

### I.2. Formulation vectorielle

#### I.2.1. Expression dans deux repères simultanément

Associons aux phases statoriques le repère orthonormé  $\mathcal{R}_s (O, \vec{s}_{c1}, \vec{s}_{c2})$  et aux phases rotoriques le repère orthonormé  $\mathcal{R}_r (O, \vec{r}_{c1}, \vec{r}_{c2})$  (cf. Figure 60).

On introduit les vecteurs suivants :

- $\vec{\phi}_s = \phi_{s\alpha} \vec{s}_{c1} + \phi_{s\beta} \vec{s}_{c2} ;$
- $\vec{\phi}_r = \phi_{r\alpha} \vec{r}_{c1} + \phi_{r\beta} \vec{r}_{c2} ;$
- $\vec{j}_s = j_{s\alpha} \vec{s}_{c1} + j_{s\beta} \vec{s}_{c2} ;$
- $\vec{j}_r = j_{r\alpha} \vec{r}_{c1} + j_{r\beta} \vec{r}_{c2} ;$
- $\vec{u}_s = u_{s\alpha} \vec{s}_{c1} + u_{s\beta} \vec{s}_{c2} ;$
- $\vec{u}_r = u_{r\alpha} \vec{r}_{c1} + u_{r\beta} \vec{r}_{c2} ;$

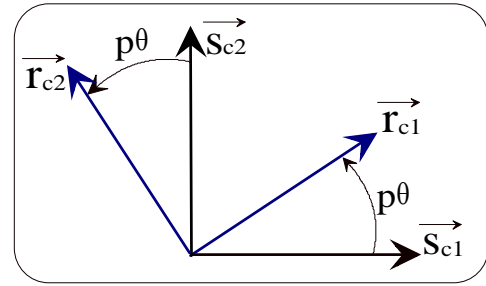


Figure 60 , repères associés aux phases statoriques et rotoriques

Les relations R1, R2 et R3 deviennent alors :

$$\vec{\phi}_s = L_s \vec{j}_s + M_{sr} \vec{j}_r ; \quad R 4$$

$$\vec{\phi}_r = M_{sr} \vec{j}_s + L_r \vec{j}_r ; \quad R 5$$

$$\vec{u}_s = R_s \vec{j}_s + \left( \frac{d\vec{\phi}_s}{dt} \right) /_{\mathcal{R}_s} ; \quad R 6$$

$$\vec{u}_r = R_r \vec{j}_r + \left( \frac{d\vec{\phi}_r}{dt} \right) /_{\mathcal{R}_r} ; \quad R 7$$

Remarque 1 : Il est à noter qu'il est important de préciser, lors de la dérivation de vecteurs, le repère au sein duquel s'opère cette dérivation temporelle.

Remarque 2 : on bénéficie de la même compacité que le formalisme des phaseurs complexes par rapport au formalisme matriciel, notamment pour les expressions R4 et R5 entre flux et courant.

Remarque 3 : deux repères distincts ont été associés aux phases statoriques et rotoriques avec néanmoins des contraintes entre ces repères. Ils définissent un même plan vectoriel et sont déphasés entre eux d'un angle  $p\theta$ .

Ce choix peut être guidé implicitement par la réalité physique dans la mesure où l'on identifie ces repères avec des repères spatiaux. Il existe effectivement un déphasage mécanique  $\theta$  entre stator et rotor. On se placerait ainsi dans un plan de coupe de la machine. Néanmoins cette approche basée sur une représentation

spatiale est par trop réductrice. En effet, pour une machine triphasée, elle n'est déjà plus guère possible.

Une autre justification est celle développée au sein du formalisme des phaseurs complexes. Elle se base sur l'équivalence des forces magnétomotrices. Certes, cette approche permet également de traiter les machines polyphasées classiques. Néanmoins, étant donné que le formalisme a pour support le plan complexe, il n'est guère possible d'associer à  $q$  phases une base de  $q$  vecteurs. L'utilisation des propriétés des espaces vectoriels s'en trouve compromise.

Finalement, on trouvera, lors de l'étude des machines triphasée ou pentaphasée, que s'introduisent naturellement, de par les propriétés des machines, deux repères déphasés de  $p\theta$ , l'un associé à des grandeurs statoriques l'autre à des grandeurs rotoriques.

On a préféré pour l'instant imposer ce choix sans justification théorique.

### I.2.2. Changement de repère de travail

Lors de la synthèse d'une commande on préfère travailler dans un seul repère que l'on note  $\mathcal{R}$ ,  $(O, \vec{t}_{c1}, \vec{t}_{c2})$ . Il s'agit donc d'exprimer les dérivées vectorielles temporelles dans ce repère. Il suffit pour cela d'utiliser les relations bien connues en mécanique et qu'il est aisé de rétablir :

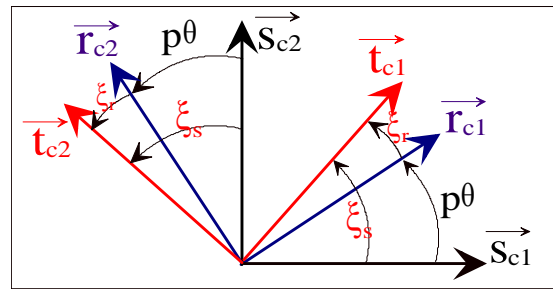


Figure 61, passage à un nouveau repère,  $(O, \vec{t}_{c1}, \vec{t}_{c2})$ .

$$\left( \frac{d\vec{\phi}_s}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_s} = \left( \frac{d\vec{\phi}_s}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \dot{\xi}_s \vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_s \quad \text{et} \quad \left( \frac{d\vec{\phi}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} = \left( \frac{d\vec{\phi}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \dot{\xi}_r \vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_r$$

avec :

- les angles  $\xi_s, \xi_r$  définis Figure 61 ;
- $\vec{s}_{c3}$  tel que les bases  $(\vec{s}_{c1}, \vec{s}_{c2}, \vec{s}_{c3})$  et  $(\vec{r}_{c1}, \vec{r}_{c2}, \vec{s}_{c3})$  soient orthonormées directes c'est à dire  $\vec{s}_{c3} = \vec{s}_{c1} \wedge \vec{s}_{c2}$  ;
- $\dot{\xi}_s = \frac{d\xi_s}{dt}$  et  $\dot{\xi}_r = \frac{d\xi_r}{dt}$  .

Les relations R4, R5 sont inchangées, par contre R6 et R7 deviennent :

$$\vec{u}_s = R_s \vec{j}_s + \left( \frac{d\vec{\phi}_s}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \dot{\xi}_s \vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_s ; \quad R 8$$

$$\vec{u}_r = R_r \vec{j}_r + \left( \frac{d\vec{\phi}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} + \dot{\xi}_r \vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_r ; \quad R 9$$

À ce stade, étant donné que toutes les dérivées s'opèrent par rapport à un même repère, on peut omettre de le préciser. Dans ce cas on retrouve bien des expressions équivalentes à celles obtenues avec les phaseurs complexes à savoir :

$$\underline{u}_s = R_s \underline{j}_s + \frac{d\phi_s}{dt} + j \dot{\xi}_s \phi_s \text{ et } \underline{u}_r = R_r \underline{j}_r + \frac{d\phi_r}{dt} + j \dot{\xi}_r \phi_r$$

*Remarque 1 :* l'angle entre les deux vecteurs  $\vec{\phi}_s$  et  $\vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_s$  est de  $+90^\circ$ . On retrouve cette rotation dans le plan complexe en réalisant le produit avec le complexe  $j$

*Remarque 2 :* l'obtention des composantes dans le nouveau repère s'opère grâce à de simples produits scalaires (par exemple  $u_{s\beta} = \vec{u}_s \cdot \vec{s}_{c2}$ ).

### **I.2.3. Expression des puissances et du couple**

Afin d'obtenir le couple électromagnétique on effectue un bilan énergétique :

$$p_e = p_j + p_{m\acute{e}} + p_{em} \text{ avec,}$$

- $p_e$  puissance électrique fournie à la machine ;
- $p_j$  « pertes » joule ;
- $p_{m\acute{e}}$  puissance mécanique fournie par la machine ;
- $p_{em}$  puissance magnétique absorbée par la machine.

Explicitons les différents termes du bilan :

- la puissance électrique instantanée  $p_e$  totale fournie à la machine s'obtient immédiatement par simple produit scalaire :  $p_e = \vec{u}_s \cdot \vec{j}_s + \vec{u}_r \cdot \vec{j}_r$  ;
- trivialement, au vu du modèle choisi, :  $p_j = R_s \vec{j}_s^2 + R_r \vec{j}_r^2$  ;
- la puissance mécanique fournie par le couple électromagnétique est :  $p_{m\acute{e}} = C_{em} \cdot \dot{\theta} \vec{s}_{c3}$  ;

- l'énergie magnétique  $W_m$  du système linéaire étudié s'exprime simplement par :

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{\phi}_s \cdot \vec{j}_s + \frac{1}{2} \vec{\phi}_r \cdot \vec{j}_r \quad \text{d'où} \quad p_{em} = \frac{dW_m}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} \vec{\phi}_s \cdot \vec{j}_s + \frac{1}{2} \vec{\phi}_r \cdot \vec{j}_r\right)}{dt}.$$

On cherche à faire apparaître les dérivées des différents flux en utilisant les propriétés de la dérivée du produit scalaire de deux vecteurs :

- $\frac{d\left(\frac{1}{2} \vec{\phi}_s \cdot \vec{j}_s\right)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{\phi}_s}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{j}_s + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{j}_s}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{\phi}_s$  ;
- $\frac{d\left(\frac{1}{2} \vec{\phi}_r \cdot \vec{j}_r\right)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{\phi}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{j}_r + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{j}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{\phi}_r$ .

Les relations R4 et R5 permettent finalement d'obtenir :

$$p_{em} = \left(\frac{d\vec{\phi}_s}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{j}_s + \left(\frac{d\vec{\phi}_r}{dt}\right)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{j}_r$$

*Remarque* : si l'on omet de préciser dans quel repère on effectue les dérivations vectorielles les résultats peuvent être alors surprenants ! Ainsi en prenant au sein

du bilan énergétique  $p_m = \frac{d\vec{\phi}_s}{dt} \cdot \vec{j}_s + \frac{d\vec{\phi}_r}{dt} \cdot \vec{j}_r$ ,  $\vec{u}_s = R_s \vec{j}_s + \frac{d\vec{\phi}_s}{dt}$  et

$\vec{u}_r = R_r \vec{j}_r + \frac{d\vec{\phi}_r}{dt}$  il vient  $C_{em} = 0!$

En faisant intervenir dans le bilan énergétique les relations R8 et R9 on obtient :

$$p_{mé} = \vec{C}_{em} \cdot \dot{\vec{\theta}}_{s_{c3}} = p_e - p_j - p_{em} = \vec{j}_s \cdot \left(\dot{\vec{\xi}}_s \vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_s\right) + \vec{j}_r \cdot \left(\dot{\vec{\xi}}_r \vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_r\right)$$

Or les propriétés du produit mixte permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{j}_s \cdot \left(\dot{\vec{\xi}}_s \vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_s\right) + \vec{j}_r \cdot \left(\dot{\vec{\xi}}_r \vec{s}_{c3} \wedge \vec{\phi}_r\right) &= \dot{\xi}_s \left(\vec{j}_s \mid \vec{s}_{c3} \mid \vec{\phi}_s\right) + \dot{\xi}_r \left(\vec{j}_r \mid \vec{s}_{c3} \mid \vec{\phi}_r\right) = \\ \dot{\xi}_s \left(\vec{s}_{c3} \mid \vec{\phi}_s \mid \vec{j}_s\right) + \dot{\xi}_r \left(\vec{s}_{c3} \mid \vec{\phi}_r \mid \vec{j}_r\right) &= \vec{s}_{c3} \cdot \left(\dot{\xi}_s \vec{\phi}_s \wedge \vec{j}_s\right) + \vec{s}_{c3} \cdot \left(\dot{\xi}_r \vec{\phi}_r \wedge \vec{j}_r\right) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\dot{\theta} \overrightarrow{C_{em}} = \dot{\xi}_s \overrightarrow{\phi_s} \wedge \overrightarrow{j_s} + \dot{\xi}_r \overrightarrow{\phi_r} \wedge \overrightarrow{j_r}$$

**Cette expression originale met en exergue une équivalence entre stator et rotor.**

**Elle montre que le couple résulte de la somme de deux produits vectoriels.**

On cherche maintenant à retrouver différentes expressions plus classiques.

En tenant compte que :

- $\dot{\xi}_s - \dot{\xi}_r = p \dot{\theta}$  (cf. Figure 61) ;
- $\overrightarrow{\phi_s} \wedge \overrightarrow{j_s} = (\overrightarrow{L_s j_s} + \overrightarrow{M_{sr} j_r}) \wedge \overrightarrow{j_s} = \overrightarrow{M_{sr} j_r} \wedge \overrightarrow{j_s}$  car  $\overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{j_s} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{\phi_r} \wedge \overrightarrow{j_r} = (\overrightarrow{M_{sr} j_s} + \overrightarrow{L_r j_r}) \wedge \overrightarrow{j_r} = \overrightarrow{M_{sr} j_s} \wedge \overrightarrow{j_r}$ .

En jouant également sur le fait que le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul on trouve d'autres expressions :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_{em}} &= p \overrightarrow{M_{sr} j_r} \wedge \overrightarrow{j_s} = \\ p \overrightarrow{\phi_s} \wedge \overrightarrow{j_s} &= p \overrightarrow{j_r} \wedge \overrightarrow{\phi_r} = \\ p \frac{\overrightarrow{M_{sr}}}{\overrightarrow{L_s}} \overrightarrow{j_r} \wedge \overrightarrow{\phi_s} &= p \frac{\overrightarrow{M_{sr}}}{\overrightarrow{L_r}} \overrightarrow{\phi_r} \wedge \overrightarrow{j_s} \end{aligned}$$

*Remarque 1 : avec la notion de phaseur complexe on trouve  $C_{em} = \text{Im}(p M_{sr} \underline{j_r}^* \underline{j_s})$ , ce qui peut être effectivement interprétée comme un produit vectoriel. On a vu que le passage entre les différentes formulations du couple est grandement facilité en utilisant les propriétés du produit vectoriel.*

*Remarque 2 : dans le cas d'un effet réductance variable les relations R4 et R5 sont encore vérifiées mais les inductance propres et mutuelles dépendent de l'angle  $\theta$ . L'expression de la dérivée de l'énergie magnétique ne peut plus se simplifier et on obtient alors :*

$$\dot{\theta} \overrightarrow{C_{em}} = \dot{\xi}_s \overrightarrow{\phi_s} \wedge \overrightarrow{j_s} + \dot{\xi}_r \overrightarrow{\phi_r} \wedge \overrightarrow{j_r} + \dot{\theta} \overrightarrow{C_{emr}} \quad \text{avec}$$



$$\dot{\theta} C_{\text{emr}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d \overrightarrow{\phi_s}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{j_s} + \frac{1}{2} \left( \frac{d \overrightarrow{j_s}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\phi_s} - \frac{1}{2} \left( \frac{d \overrightarrow{\phi_r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{j_r} + \frac{1}{2} \left( \frac{d \overrightarrow{j_r}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\phi_r}$$

### I.3. Conclusion

On souligne les points suivants relatifs au formalisme vectoriel proposé :

- formulation compacte permettant une approche graphique comme pour les phaseurs complexes. Le vecteur flux statorique apparaît ainsi comme une somme vectorielle de deux composantes l'une dû au vecteur courant statorique l'autre au vecteur courant rotorique. L'approche matricielle masque quelque peu cette propriété en faisant intervenir une matrice rotation. En effet, dans cette approche on a besoin d'explicitier toutes les grandeurs vectorielles dans une seule et même base.
- expression de la puissance et du couple faisant intervenir produit scalaire et produit vectoriel ce qui permet des manipulations aisées (voir par exemple les différentes formulations du couple) alors que ce n'est le cas avec les phaseurs complexes (la puissance électrique s'obtient par exemple par  $p = \text{Re}(\underline{u}^* \underline{j})$ ).
- nécessité d'une connaissance minimale sur les propriétés des espaces vectoriels : produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte.

## II. Étude d'une machine asynchrone triphasée à cage

Au paragraphe Chapitre III I, on s'est imposé un modèle sur lequel les développements ont été effectués. On s'intéresse à présent à la démarche de modélisation d'une machine triphasée asynchrone à cage. On a choisi volontairement un cas où nombre de phases statoriques et rotoriques sont distincts afin de mettre en évidence l'apport du formalisme pour traiter ce type de problème.

### Description classique :

La machine comporte  $q$  barres au rotor régulièrement réparties avec anneaux de court-circuit. Le stator est quant à lui supposé triphasé et régulièrement construit (trois phases identiques déphasées spatialement de  $120^\circ/p$ ,  $p$  nombre de paires de pôles).

On considère une phase rotorique comme étant constituée de deux barres successives reliées par les anneaux de court-circuit. Il y a donc  $q$  phases au rotor.

Hypothèse : on suppose la machine linéaire du point de vue magnétique.

Notations :

- $\phi_{sk}$  flux capté par la phase n°k du stator,  $j_{sk}$  le courant qui la traverse,  $u_{sk}$  la tension à ses bornes,  $R_{sk}$  sa résistance ;
- $\phi_{rk}$  flux capté par la phase n°k du rotor,  $j_{rk}$  le courant qui la traverse<sup>A</sup>,  $u_{rk}$  la tension à ses bornes.

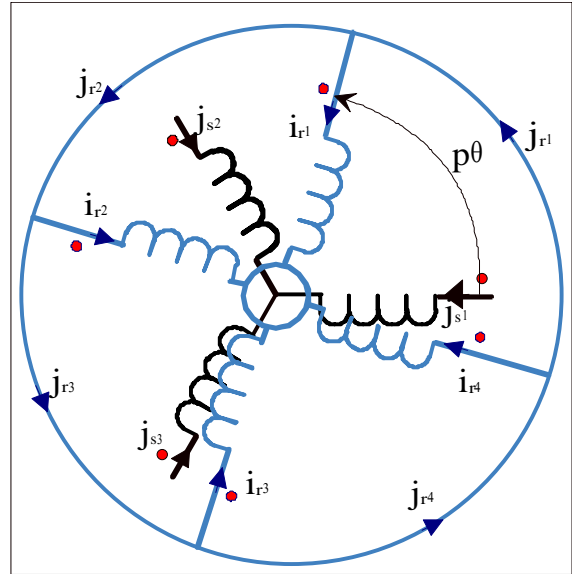


Figure 62, Représentation symbolique d'une machine à trois phases statoriques et quatre phases rotoriques en court-circuit, 1 paire de pôles

Associons aux phases statoriques un espace vectoriel  $\mathcal{E}_3$  de dimension 3 muni d'une base orthonormée  $\mathcal{R}_s (\vec{s}_{c1}, \vec{s}_{c2}, \vec{s}_{c3})$  et aux phases rotoriques un espace vectoriel  $\mathcal{E}_{rq}$  de dimension q muni d'une base orthonormée  $\mathcal{R}_r (\vec{r}_{c1}, \vec{r}_{c2}, \dots, \vec{r}_{cq})$

On introduit les vecteurs suivants :

- $\vec{\phi}_s = \phi_{s1} \vec{s}_{c1} + \phi_{s2} \vec{s}_{c2} + \phi_{s3} \vec{s}_{c3} ;$
- $\vec{j}_s = j_{s1} \vec{s}_{c1} + j_{s2} \vec{s}_{c2} + j_{s3} \vec{s}_{c3} ;$
- $\vec{u}_s = u_{s1} \vec{s}_{c1} + u_{s2} \vec{s}_{c2} + u_{s3} \vec{s}_{c3} .$
- $\vec{\phi}_r = \phi_{r1} \vec{r}_{c1} + \phi_{r2} \vec{r}_{c2} + \dots + \phi_{rq} \vec{r}_{cq} ;$
- $\vec{j}_r = j_{r1} \vec{r}_{c1} + j_{r2} \vec{r}_{c2} + \dots + j_{rq} \vec{r}_{cq} ;$
- $\vec{u}_r = u_{r1} \vec{r}_{c1} + u_{r2} \vec{r}_{c2} + \dots + u_{rq} \vec{r}_{cq} .$

## II.1. Expression des flux captés par les phases statoriques et rotoriques

L'hypothèse de linéarité permet d'exprimer les flux captés à l'aide des courants et des inductances entre phases. On a les relations matricielles suivantes :

<sup>A</sup> Le courant de phase  $j_{rk}$  est le courant qui circule dans l'anneau (cf. Figure 62)

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} \phi_{s1} \\ \phi_{s2} \\ \phi_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_s & M_s \\ M_s & L_{ss} & M_s \\ M_s & M_s & L_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ j_{s3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{a1} & M_{a2} & M_{a3} & \dots & M_{aq} \\ M_{b1} & M_{b2} & M_{b3} & \dots & M_{bq} \\ M_{c1} & M_{c2} & M_{c3} & \dots & M_{cq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{r1} \\ j_{r2} \\ j_{r3} \\ \dots \\ j_{rq} \end{bmatrix} \quad R 10$$

$$\bullet \quad \begin{bmatrix} \phi_{r1} \\ \phi_{r2} \\ \phi_{r3} \\ \dots \\ \phi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{a1} & M_{b1} & M_{c1} \\ M_{a2} & M_{b2} & M_{c2} \\ M_{a3} & M_{b3} & M_{c3} \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{aq} & M_{bq} & M_{cq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ j_{s3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{r1} & M_{r2} & M_{r3} & \dots & M_{rq} \\ M_{r1} & M_{r1} & M_{r2} & \dots & M_{rq-1} \\ M_{rq-1} & M_{rq} & M_{r1} & \dots & M_{rq-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{r2} & M_{r3} & M_{r4} & \dots & M_{r1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{r1} \\ j_{r2} \\ j_{r3} \\ \dots \\ j_{rq} \end{bmatrix} \quad R 11$$

Ces relations matricielles sont équivalentes à :

$$\vec{\phi}_s = f_{ss}(\vec{j}_s) + f_{sr}(\vec{j}_r) \quad \text{et} \quad \vec{\phi}_r = f_{rs}(\vec{j}_s) + f_{rr}(\vec{j}_r).$$

$f_{ss}$ ,  $f_{sr}$ ,  $f_{rs}$ ,  $f_{rr}$  sont quatre applications linéaires (morphisms) dont on donne les espaces vectoriels de départ et d'arrivée :

$$f_{ss} : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3; f_{sr} : \mathcal{E}_q \rightarrow \mathcal{E}_3; f_{rs} : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_q; f_{rr} : \mathcal{E}_q \rightarrow \mathcal{E}_q$$

L'expression matricielle n'est pas très commode d'utilisation ni celle utilisant les morphismes. Pour savoir si des simplifications sont possibles il faut étudier ces applications linéaires en recherchant :

- les noyaux<sup>A</sup> ;
- les espaces images<sup>B</sup> ;
- les valeurs propres et vecteurs propres pour  $f_{ss}$  et  $f_{rr}$  qui sont des endomorphismes (même espace de départ et d'arrivée)

### II.1.1. Étude de $f_{ss}$

$f_{ss}$  est un endomorphisme. La recherche des valeurs et vecteurs propres s'impose donc.

On adopte une méthode de recherche générale en travaillant dans un espace vectoriel dont les scalaires sont des complexes (espace hermitien) et non des réels (espace euclidien). Dans ce cas, tout polynôme de degré  $n$  possède  $n$  racines (certaines peuvent être identiques). Or, les

<sup>A</sup> ensemble des vecteurs de l'espace de départ dont l'image est nulle.

<sup>B</sup> ensemble des vecteurs de l'ensemble d'arrivée qui sont image d'un vecteur de l'espace de départ.

valeurs propres sont les racines d'un polynôme dit caractéristique. Cette méthode permet de les trouver.

**La matrice qui caractérise  $f_{ss}$  est circulante et symétrique.**

La symétrie implique qu'il existe trois valeurs propres réelles et que la base de vecteurs propres normée associée est orthogonale.

La circularité nous donne l'expression des trois valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  dans l'espace hermitien associé à  $\mathcal{E}_3$  ainsi que trois vecteurs propres unitaires  $\vec{y}_{ss1}, \vec{y}_{ss2}, \vec{y}_{ss3}$  :

- $\lambda_1 = L_{ss} + M_s + M_s$  ;
- $\lambda_2 = L_{ss} + a M_s + a^2 M_s$  avec  $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$  ;
- $\lambda_3 = L_{ss} + a^2 M_s + a^4 M_s$  ;
- $\vec{y}_{ss1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3} \right)$  ;
- $\vec{y}_{ss2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \vec{s}_{c1} + e^{j\frac{2\pi}{3}} \vec{s}_{c2} + e^{j\frac{4\pi}{3}} \vec{s}_{c3} \right)$  ;
- $\vec{y}_{ss3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \vec{s}_{c1} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} \vec{s}_{c2} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} \vec{s}_{c3} \right)$  .

Or, la matrice étant symétrique, les valeurs propres sont réelles. On peut donc écrire :

- $\lambda_1 = \text{Re}(L_{ss} + M_s + M_s)$  avec  $\text{Re}(x)$ , partie réelle du complexe  $x$  ;
- $\lambda_2 = \text{Re}(L_{ss} + a M_s + a^2 M_s)$  ;
- $\lambda_3 = \text{Re}(L_{ss} + a^2 M_s + a^4 M_s)$ .

Il vient les résultats classiques :

$$\lambda_1 = L_{ss} + 2M_s \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = L_{ss} - M_s .$$

*Remarque 1:  $\lambda_2$  est classiquement appelée l'inductance cyclique statorique,  $\lambda_1$  l'inductance de fuite statorique.*

*Remarque 2: la donnée de la base de vecteurs propres permet d'obtenir la*

*classique matrice de Fortescue :*  $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$  avec  $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ .

Étant donné que  $\lambda_2 = \lambda_3$  toute combinaison linéaire de  $\vec{y}_{ss2}$  et  $\vec{y}_{ss3}$  est également vecteur propre associé à  $\lambda_2$ . En remarquant que  $\vec{y}_{ss3}$  est conjugué de  $\vec{y}_{ss2}$ , on trouve facilement deux combinaisons qui permettent d'obtenir des vecteurs propres à coefficients réels  $\vec{d}_2^{cs}, \vec{d}_3^{cs}$ .

On obtient alors une<sup>A</sup> base de vecteurs propres orthonormée dans l'espace euclidien  $\mathcal{E}_3$ ,  $(\vec{d}_1^{cs}, \vec{d}_2^{cs}, \vec{d}_3^{cs})$  :

- $\vec{d}_1^{cs} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3} \right) ;$
- $\vec{d}_2^{cs} = \sqrt{2} \frac{\vec{y}_{ss2} + \vec{y}_{ss3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \vec{s}_{c1} + \cos \frac{2\pi}{3} \vec{s}_{c2} + \cos \frac{4\pi}{3} \vec{s}_{c3} \right) ;$
- $\vec{d}_3^{cs} = \sqrt{2} \frac{\vec{y}_{ss2} - \vec{y}_{ss3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( 0 \vec{s}_{c1} + \sin \frac{2\pi}{3} \vec{s}_{c2} + \sin \frac{4\pi}{3} \vec{s}_{c3} \right) .$

Soit :

- $\vec{d}_1^{cs} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \vec{s}_{c1} + \vec{s}_{c2} + \vec{s}_{c3} \right) ;$
- $\vec{d}_2^{cs} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( 1 \vec{s}_{c1} - \frac{1}{2} \vec{s}_{c2} - \frac{1}{2} \vec{s}_{c3} \right) ;$
- $\vec{d}_3^{cs} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( 0 \vec{s}_{c1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{s}_{c2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{s}_{c3} \right) .$

*Remarque :* on retrouve dans ce cas les coefficients de la matrice de Concordia qui n'est autre qu'une matrice de changement de base<sup>B</sup>.

Il vient une expression plus explicite du morphisme  $f_{ss}$  :

<sup>A</sup> Elle n'est pas unique du fait que  $\lambda_2$  est d'ordre 2. D'autres combinaisons linéaires permettent d'obtenir d'autres bases.

<sup>B</sup> Il est à remarquer que des hypothèses ont été faites sur la machine. La matrice de Concordia n'est donc la bonne matrice de changement de base que lorsque les hypothèses de symétrie sont vérifiées.

$$\vec{f}_{ss}(\vec{j}_s) = \lambda_1 J_{s1} \vec{d}_1^{cs} + \lambda_2 \left( J_{s2} \vec{d}_2^{cs} + J_{s3} \vec{d}_3^{cs} \right)$$

avec :

$$\vec{j}_s = j_{s1} \vec{s}_{c1} + j_{s2} \vec{s}_{c2} + j_{s3} \vec{s}_{c3} = J_{s1} \vec{d}_1^{cs} + J_{s2} \vec{d}_2^{cs} + J_{s3} \vec{d}_3^{cs} \text{ et}$$

$$\begin{cases} J_{s1} = \vec{j}_s \cdot \vec{d}_1^{cs} = \frac{j_{s1} + j_{s2} + j_{s3}}{\sqrt{3}}; \\ J_{s2} = \vec{j}_s \cdot \vec{d}_2^{cs} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( j_{s1} - \frac{j_{s2}}{2} - \frac{j_{s3}}{2} \right); \\ J_{s3} = \vec{j}_s \cdot \vec{d}_3^{cs} = \frac{1}{\sqrt{2}} (j_{s2} - j_{s3}) \end{cases}$$

*Remarque :* Cette expression peut encore se simplifier lorsque par exemple  $J_{s1}$ , la composante homopolaire du vecteur courant statorique, est nulle. On a alors :

$$\vec{f}_{ss}(\vec{j}_s) = \lambda_2 \left( J_{s2} \vec{d}_2^{cs} + J_{s3} \vec{d}_3^{cs} \right) = \lambda_2 \vec{j}_s$$

### II.1.2. Étude de $f_{rr}$

La matrice caractérisant  $f_{rr}$  est elle aussi circulante et symétrique. L'étude effectuée au préalable sur  $f_{ss}$  peut être alors reproduite. On sait, de par la symétrie de la matrice, qu'il y a  $q$  valeurs propres réelles et une base de vecteurs propres associée orthonormée.

Par ailleurs, la circularité nous permet de trouver analytiquement ces valeurs et vecteurs propres en travaillant dans un espace vectoriel hermitien .

Par résolution de l'équation caractéristique on trouve  $q$  valeurs propres :

- $\lambda_{1r} = M_{r1} + M_{r2} + \dots + M_{rq}$  ;
- $\lambda_{2r} = M_{r1} + \left( e^{j\frac{2\pi}{q}} \right)^1 M_{r2} + \left( e^{2j\frac{2\pi}{q}} \right)^1 M_{r3} + \dots + \left( e^{(q-1)j\frac{2\pi}{q}} \right)^1 M_{rq}$  ;
- $\lambda_{3r} = M_{r1} + \left( e^{j\frac{2\pi}{q}} \right)^2 M_{r2} + \left( e^{2j\frac{2\pi}{q}} \right)^2 M_{r3} + \dots + \left( e^{(q-1)j\frac{2\pi}{q}} \right)^2 M_{rq}$  ;

• ...

$$\bullet \lambda_{qr} = M_{r1} + \left( e^{j \frac{2\pi}{q}} \right)^{q-1} M_{r2} + \left( e^{2j \frac{2\pi}{q}} \right)^{q-1} M_{r3} + \dots + \left( e^{(q-1)j \frac{2\pi}{q}} \right)^{q-1} M_{rq}$$

La symétrie de la matrice nous assure de la nature réelle de ces valeurs propres. Il vient donc :

$$\bullet \lambda_{1r} = M_{r1} + M_{r2} + \dots + M_{rq}$$

$$\bullet \lambda_{2r} = M_{r1} + M_{r2} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) + M_{r3} \cos\left(2 \frac{2\pi}{q}\right) + \dots + M_{rq} \cos\left((q-1) \frac{2\pi}{q}\right);$$

$$\bullet \lambda_{3r} = M_{r1} + M_{r2} \cos\left(2 \frac{2\pi}{q}\right) + M_{r3} \cos\left(4 \frac{2\pi}{q}\right) + \dots + M_{rq} \cos\left(2 (q-1) \frac{2\pi}{q}\right);$$

• ...

$$\bullet \lambda_{qr} = M_{r1} + M_{r2} \cos\left((q-1) \frac{2\pi}{q}\right) + M_{r3} \cos\left(2 (q-1) \frac{2\pi}{q}\right) + \dots + M_{rq} \cos\left((q-1)^2 \frac{2\pi}{q}\right)$$

Dans l'espace vectoriel hermitien on trouve, associés aux valeurs propres  $\lambda_{kr}$ , les vecteurs propres  $\vec{e}_k$  suivants :

$$\bullet \vec{e}_1 = \sqrt{\frac{1}{q}} \left( \vec{r}_{c1} + \vec{r}_{c2} + \dots + \vec{r}_{cq} \right);$$

$$\bullet \vec{e}_2 = \sqrt{\frac{1}{q}} \left( \vec{r}_{c1} + \left( e^{j \frac{2\pi}{q}} \right)^1 \vec{r}_{c2} + \left( e^{2j \frac{2\pi}{q}} \right)^1 \vec{r}_{c3} + \dots + \left( e^{(q-1)j \frac{2\pi}{q}} \right)^1 \vec{r}_{cq} \right);$$

• ...

$$\bullet \vec{e}_q = \sqrt{\frac{1}{q}} \left( \vec{r}_{c1} + \left( e^{j \frac{2\pi}{q}} \right)^{q-1} \vec{r}_{c2} + \left( e^{2j \frac{2\pi}{q}} \right)^{q-1} \vec{r}_{c3} + \dots + \left( e^{(q-1)j \frac{2\pi}{q}} \right)^{q-1} \vec{r}_{cq} \right)$$

En remarquant que  $\lambda_{kr} = \lambda_{q-k+2r}$  et  $e^{(q-k)j\frac{2\pi}{q}} = e^{-kj\frac{2\pi}{q}}$  il vient<sup>A</sup> que la famille de vecteurs

$(\vec{m}_0^{cr}, \vec{m}_1^{cr}, \dots, \vec{m}_{q-1}^{cr})$  forme une base orthonormée de vecteurs propres à coefficients réels :

- $\vec{m}_0^{cr} = \frac{1}{\sqrt{q}}(\vec{r}_{c1} + \vec{r}_{c2} + \dots + \vec{r}_{cq})$  ;
- $\begin{cases} \vec{m}_1^{cr} = \frac{\vec{e}_2 + \vec{e}_q}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 1\vec{r}_{c1} + \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)\vec{r}_{c2} + \cos\left(\frac{4\pi}{q}\right)\vec{r}_{c3} + \dots + \cos\left(\frac{2\pi}{q}(q-1)\right)\vec{r}_{cq} \right) \\ \vec{m}_2^{cr} = \frac{\vec{e}_2 - \vec{e}_q}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 0\vec{r}_{c1} + \sin\left(\frac{2\pi}{q}\right)\vec{r}_{c2} + \sin\left(\frac{4\pi}{q}\right)\vec{r}_{c3} + \dots + \sin\left(\frac{2\pi}{q}(q-1)\right)\vec{r}_{cq} \right) \end{cases}$
- $\begin{cases} \vec{m}_3^{cr} = \frac{\vec{e}_3 + \vec{e}_{q-1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 1\vec{r}_{c1} + \cos\left(2\frac{2\pi}{q}\right)\vec{r}_{c2} + \cos\left(2\frac{4\pi}{q}\right)\vec{r}_{c3} + \dots + \cos\left(2\frac{2\pi}{q}(q-1)\right)\vec{r}_{cq} \right) \\ \vec{m}_4^{cr} = \frac{\vec{e}_3 - \vec{e}_{q-1}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 0\vec{r}_{c1} + \sin\left(2\frac{2\pi}{q}\right)\vec{r}_{c2} + \sin\left(2\frac{4\pi}{q}\right)\vec{r}_{c3} + \dots + \sin\left(2\frac{2\pi}{q}(q-1)\right)\vec{r}_{cq} \right) \end{cases}$
- ...

Si  $q$  est impair avec  $q = 2h + 1$  alors le dernier couple de vecteurs propres est :

- $\begin{cases} \vec{m}_{q-2}^{cr} = \vec{m}_{2h-1}^{cr} = \frac{\vec{e}_{h+1} + \vec{e}_{h+2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 1\vec{r}_{c1} + \cos\left(h\frac{2\pi}{q}\right)\vec{r}_{c2} + \cos\left(h\frac{4\pi}{q}\right)\vec{r}_{c3} + \dots + \cos\left(h\frac{2\pi}{q}(q-1)\right)\vec{r}_{cq} \right) \\ \vec{m}_{q-1}^{cr} = \vec{m}_{2h}^{cr} = \frac{\vec{e}_{h+1} - \vec{e}_{h+2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 0\vec{r}_{c1} + \sin\left(h\frac{2\pi}{q}\right)\vec{r}_{c2} + \sin\left(h\frac{4\pi}{q}\right)\vec{r}_{c3} + \dots + \sin\left(h\frac{2\pi}{q}(q-1)\right)\vec{r}_{cq} \right) \end{cases}$

Si  $q$  est pair avec  $q = 2h$  alors le dernier vecteur propre est :

<sup>A</sup> En effet,  $f_{rr} \left( \frac{\vec{e}_k + \vec{e}_{q-k+2}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\lambda_{kr} \vec{e}_k + \lambda_{q-k+2r} \vec{e}_{q-k+2}}{\sqrt{2}} = \lambda_{kr} \frac{(\vec{e}_k + \vec{e}_{q-k+2})}{\sqrt{2}}$ . Au sein de la

somme  $(\vec{e}_k + \vec{e}_{q-k+2})$  on trouve des expressions élémentaires du type  $\left( e^{mj\frac{2\pi}{q}} \right)^{k-1} + \left( e^{mj\frac{2\pi}{q}} \right)^{q-k+2-1}$ .

Or,  $\left( e^{mj\frac{2\pi}{q}} \right)^{k-1} + \left( e^{mj\frac{2\pi}{q}} \right)^{q-k+2-1} = \left( e^{(k-1)j\frac{2\pi}{q}} \right)^m + \left( e^{(q-k+1)j\frac{2\pi}{q}} \right)^m = e^{(k-1)mj\frac{2\pi}{q}} + e^{-(k-1)mj\frac{2\pi}{q}} =$

$2 \cos\left( (k-1)mj\frac{2\pi}{q} \right)$  d'où le résultat.



$$\bullet \quad \overrightarrow{m}_{q-1}^{cr} = \overrightarrow{m}_{2h-1}^{cr} = \overrightarrow{e}_{h+1} = \sqrt{\frac{1}{q}} \left( \overrightarrow{r}_{c1} + \left( e^{j\frac{2\pi}{2h}} \right)^h \overrightarrow{r}_{c2} + \left( e^{2j\frac{2\pi}{2h}} \right)^h \overrightarrow{r}_{c3} + \dots + \left( e^{(q-1)j\frac{2\pi}{2h}} \right)^h \overrightarrow{r}_{cq} \right)$$

$$\text{soit, } \overrightarrow{m}_{2h-1}^{cr} = \frac{1}{\sqrt{q}} \left( \overrightarrow{r}_{c1} - \overrightarrow{r}_{c2} + \overrightarrow{r}_{c3} + \dots - \overrightarrow{r}_{cq} \right).$$

L'obtention de cette base orthonormée nous permet de simplifier l'expression de  $f_{rr}(\overrightarrow{j}_r)$ .

On y décompose  $\overrightarrow{j}_r$  :

$$\overrightarrow{j}_r = J_{r0} \overrightarrow{m}_0^{cr} + J_{r1} \overrightarrow{m}_1^{cr} + J_{r2} \overrightarrow{m}_2^{cr} + \dots + J_{rq-1} \overrightarrow{m}_{q-1}^{cr}$$

$$\text{avec } J_{rk} = \overrightarrow{j}_r \cdot \overrightarrow{m}_k^{cr}$$

Il vient alors :

$$f_{rr}(\overrightarrow{j}_r) = \lambda_{r1} J_{r0} \overrightarrow{m}_0^{cr} + \lambda_{r2} \left( J_{r1} \overrightarrow{m}_1^{cr} + J_{r2} \overrightarrow{m}_2^{cr} \right) + \lambda_{r3} \left( J_{r3} \overrightarrow{m}_3^{cr} + J_{r4} \overrightarrow{m}_4^{cr} \right) + \dots + \lambda_{rh+1} J_{rq-1} \overrightarrow{m}_{q-1}^{cr}$$

En posant :

- ❖  $\overrightarrow{J}_{r1} = J_{r0} \overrightarrow{m}_0^{cr}$  ;
- ❖  $\overrightarrow{J}_{r2} = J_{r1} \overrightarrow{m}_1^{cr} + J_{r2} \overrightarrow{m}_2^{cr}$  ;
- ❖  $\overrightarrow{J}_{r3} = J_{r3} \overrightarrow{m}_3^{cr} + J_{r4} \overrightarrow{m}_4^{cr}$  ;
- ❖  $\overrightarrow{J}_{r4} = J_{r5} \overrightarrow{m}_5^{cr} + J_{r6} \overrightarrow{m}_6^{cr}$  ;
- ❖ ...
- ❖  $\overrightarrow{J}_{rh+1} = J_{rq-1} \overrightarrow{m}_{q-1}^{cr}$  si  $q = 2h$ ;  $\overrightarrow{J}_{rh+1} = J_{rq-2} \overrightarrow{m}_{q-2}^{cr} + J_{rq-1} \overrightarrow{m}_{q-1}^{cr}$  si  $q = 2h + 1$ .

Après un développement un peu lourd on obtient le résultat particulièrement simple :

$$f_{rr}(\overrightarrow{j}_r) = \lambda_{r1} \overrightarrow{J}_{r1} + \lambda_{r2} \overrightarrow{J}_{r2} + \lambda_{r3} \overrightarrow{J}_{r3} + \dots + \lambda_{rh+1} \overrightarrow{J}_{rh+1}$$

A ce stade on peut encore simplifier. En effet, du fait du couplage naturel d'une cage la composante  $J_{r0}$  du vecteur courant rotorique selon  $\overrightarrow{d}_0^{cr} = \frac{1}{\sqrt{q}} \left( \overrightarrow{r}_{c1} + \overrightarrow{r}_{c2} + \dots + \overrightarrow{r}_{cq} \right)$  est nulle.

$$\vec{f}_{\text{rr}}(\vec{j}_r) = \lambda_{r2} \vec{J}_{r2} + \lambda_{r3} \vec{J}_{r3} + \dots + \lambda_{r_{h+1}} \vec{J}_{r_{h+1}}.$$

*Remarque* : dans le cas où  $q = 3$ ,  $\vec{f}_{\text{rr}}(\vec{j}_r) = \lambda_{r2} \vec{j}_r$  et on retrouve effectivement le résultat du paragraphe précédent.

### II.1.3. Étude de $f_{\text{sr}}$

Cette application linéaire n'est pas un endomorphisme, on ne peut donc étudier ses vecteurs propres et valeurs propres. C'est pour ce type d'étude que la notion de morphisme est d'un usage particulièrement intéressant. On étudie son image et son noyau.

Pour connaître ce dernier il faut résoudre l'équation :

$$\begin{bmatrix} M_{a1} & M_{a2} & M_{a3} & \dots & M_{aq} \\ M_{b1} & M_{b2} & M_{b3} & \dots & M_{bq} \\ M_{c1} & M_{c2} & M_{c3} & \dots & M_{cq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{r1} \\ j_{r2} \\ j_{r3} \\ \dots \\ j_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

c'est à dire trouver l'ensemble des vecteurs  $\vec{j}_r$  orthogonaux aux trois vecteurs suivants :

- $\vec{M}_a = M_{a1} \vec{r}_{c1} + M_{a2} \vec{r}_{c2} + \dots + M_{aq} \vec{r}_{cq}$  ;
- $\vec{M}_b = M_{b1} \vec{r}_{c1} + M_{b2} \vec{r}_{c2} + \dots + M_{bq} \vec{r}_{cq}$  ;
- $\vec{M}_c = M_{c1} \vec{r}_{c1} + M_{c2} \vec{r}_{c2} + \dots + M_{cq} \vec{r}_{cq}$  .

Ces trois vecteurs engendrent au plus un espace de dimension trois noté  $(\text{Ker } f_{\text{sr}})^\perp$ . Par conséquent,  $\text{Ker } f_{\text{sr}}$  est au moins de dimension  $q-3$ .

La connaissance du noyau nous mène ensuite à créer une nouvelle base de travail. On décompose  $\mathcal{E}_q$  en une somme directe de deux espaces orthogonaux  $\text{Ker } f_{\text{sr}}$  et  $(\text{Ker } f_{\text{sr}})^\perp$  :

$$\mathcal{E}_q = \text{Ker } f_{\text{sr}} \oplus (\text{Ker } f_{\text{sr}})^\perp.$$

Tout vecteur  $\vec{j}_r = j_{r1} \vec{r}_{c1} + j_{r2} \vec{r}_{c2} + \dots + j_{rq} \vec{r}_{cq}$  peut alors se décomposer de façon unique en une somme de deux vecteurs, l'un  $\vec{J}_{\text{rK}}$  élément de  $\text{Ker } f_{\text{sr}}$ , l'autre  $\vec{J}_{\text{ré}}$  élément de  $(\text{Ker } f_{\text{sr}})^\perp$  :

$$\vec{j}_r = \vec{J}_{\text{rK}} + \vec{J}_{\text{ré}}.$$

**Vu du stator**, puisque par définition du noyau  $f_{sr}(\vec{j}_r) = f_{sr}(\vec{J}_{r\acute{e}})$ , c'est la dimension de  $(\text{Ker } f_{sr})^\perp$  et non le nombre de phases rotoriques qui est à prendre en considération. On peut dire que  $\vec{J}_{r\acute{e}}$  est un courant « équivalent » à  $\vec{j}_r$ .

**Étude d'un exemple :**

On applique la démarche proposée sur un exemple pour lequel les mutuelles s'expriment par :

$$M_{xi} = M_{sr} \cos(p\delta_{xi})$$

avec  $\delta_{xi}$  angle mécanique entre la phase statorique x et la phase rotorique  $n^\circ i$ .

C'est le cas d'une machine où l'on suppose une répartition sinusoidale des forces magnétomotrices.

La répartition régulière des barres rotoriques permet d'affirmer que d'après Figure 62:

- $p \delta_{ai} = -p \theta - p \frac{2\pi}{q}(i-1) = -p \theta - \frac{2\pi}{n_r}(i-1)$  avec  $n_r = \frac{q}{p}$ ;
- $p \delta_{bi} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{n_r}(i-1) - p \theta$  d'où  $M_{bi} = M_{sr} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{n_r}(i-1) - p \theta\right)$ ;
- $p \delta_{ci} = \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{n_r}(i-1) - p \theta$  d'où  $M_{ci} = M_{sr} \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{n_r}(i-1) - p \theta\right)$ .

On cherche tout d'abord à caractériser  $(\text{Ker } f_{sr})^\perp$  engendré par  $\vec{M}_a$ ,  $\vec{M}_b$  et  $\vec{M}_c$ .

La propriété  $M_{ai} + M_{bi} + M_{ci} = 0^A$  implique  $\vec{M}_a + \vec{M}_b + \vec{M}_c = \vec{0}$ . Les trois vecteurs sont donc liés sans être pour autant colinéaires (sauf si  $2p$  est multiple de  $q$ )<sup>B</sup>.  $(\text{Ker } f_{sr})^\perp$  est alors un plan dont il est aisé de prouver<sup>C</sup> qu'une base orthonormée est constituée par la famille suivante de vecteurs  $(\vec{d}_1^{cr}, \vec{d}_2^{cr})$  :

<sup>A</sup> Puisque,  $\cos\left(-\frac{2\pi}{n_r}(i-1) - p \theta\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{n_r}(i-1) - p \theta\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{n_r}(i-1) - p \theta\right) = 0$

<sup>B</sup> car alors  $\frac{2\pi}{n_r} = \frac{2p}{q} \pi = m\pi$  ce qui implique que  $\vec{d}_2^{cr}$  est nul.

<sup>C</sup> En utilisant les formules trigonométriques :

$$\diamond \cos\left(a + \frac{2\pi}{n_r}k\right) = \cos a \cos\left(\frac{2\pi}{n_r}k\right) - \sin a \sin\left(\frac{2\pi}{n_r}k\right) \text{ et}$$

- $\vec{d}_1^{cr} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 1 \vec{r}_{c1} + \cos\left(\frac{2\pi}{n_r}\right) \vec{r}_{c2} + \cos\left(\frac{4\pi}{n_r}\right) \vec{r}_{c3} + \dots + \cos\left(\frac{2\pi}{n_r}(q-1)\right) \vec{r}_{cq} \right)$
- $\vec{d}_2^{cr} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 0 \vec{r}_{c1} + \sin\left(\frac{2\pi}{n_r}\right) \vec{r}_{c2} + \sin\left(\frac{4\pi}{n_r}\right) \vec{r}_{c3} + \dots + \sin\left(\frac{2\pi}{n_r}(q-1)\right) \vec{r}_{cq} \right)$ .

Vu du stator le rotor est alors « équivalent » à un système diphasé de bobinages en quadrature dont un vecteur courant est  $\vec{J}_{ré} = J_{ré1} \vec{d}_1^{cr} + J_{ré2} \vec{d}_2^{cr}$  avec :

- $J_{ré1} = \vec{j}_r \cdot \vec{d}_1^{cr} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( j_{r1} + \cos\left(\frac{2\pi}{n_r}\right) j_{r2} + \cos\left(\frac{4\pi}{n_r}\right) j_{r3} + \dots + \cos\left(\frac{2\pi}{n_r}(q-1)\right) j_{rq} \right)$ ;
- $J_{ré2} = \vec{j}_r \cdot \vec{d}_2^{cr} = \sqrt{\frac{2}{q}} \left( 0 + \sin\left(\frac{2\pi}{n_r}\right) j_{r2} + \sin\left(\frac{4\pi}{n_r}\right) j_{r3} + \dots + \sin\left(\frac{2\pi}{n_r}(q-1)\right) j_{rq} \right)$ .

Pour obtenir l'image du vecteur courant rotorique "équivalent"  $\vec{J}_{ré}$  il suffit de connaître les images de  $\vec{d}_1^{cr}$  et  $\vec{d}_2^{cr}$  par  $f_{sr}$  :

- $f_{sr}(\vec{d}_1^{cr}) = \sqrt{\frac{q}{2}} M_{sr} \left( \cos p\theta \vec{s}_{c1} + \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \vec{s}_{c2} + \cos\left(p\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \vec{s}_{c3} \right)$ .
- $f_{sr}(\vec{d}_2^{cr}) = -\sqrt{\frac{q}{2}} M_{sr} \left( \sin p\theta \vec{s}_{c1} + \sin\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \vec{s}_{c2} + \sin\left(p\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \vec{s}_{c3} \right)$

Il apparaît que ces deux images, de module  $\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} M_{sr}$ , sont orthogonales à  $\vec{d}_1^{cs}$  défini au paragraphe II.1.1. et appartient donc au plan engendré par les vecteurs  $\vec{d}_2^{cs}$  et  $\vec{d}_3^{cs}$ .

Notons  $\vec{b}_2^{cs} = \frac{f_{sr}(\vec{d}_1^{cr})}{\|f_{sr}(\vec{d}_1^{cr})\|}$  et  $\vec{b}_3^{cs} = \frac{f_{sr}(\vec{d}_2^{cr})}{\|f_{sr}(\vec{d}_2^{cr})\|}$ . La Figure 63 se construit alors aisément et on

a :

$$f_{sr}(\vec{j}_r) = f_{sr}(\vec{J}_{ré}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} M_{sr} \left( J_{ré1} \vec{b}_2^{cs} + J_{ré2} \vec{b}_3^{cs} \right)$$

---

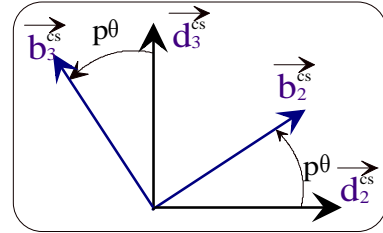
❖  $\sin\left(a + \frac{2\pi}{n_r}k\right) = \sin a \cos\left(\frac{2\pi}{n_r}k\right) - \cos a \sin\left(\frac{2\pi}{n_r}k\right)$ , on décompose  $\vec{M}_a$ ,

$\vec{M}_b$  et  $\vec{M}_c$  sur  $(\vec{d}_1^{cr}, \vec{d}_2^{cr})$ .

Conclusion sur l'exemple :

Dans la mesure où le rotor est "diphase" vu du stator, il serait intéressant que le stator soit lui aussi "diphase". Plus précisément il faudrait que l'image de  $\mathcal{E}_3$  par  $f_{ss}$  soit confondue avec celle de  $\mathcal{E}_q$  par  $f_{sr}$ . Dans notre cas, il suffit pour cela que la composante "homopolaire" du vecteur courant soit nulle. Un couplage étoile sans neutre sorti permet simplement d'assurer cette condition.

On peut alors réaliser l'étude de la machine triphasée en restant dans le plan engendré par les vecteurs  $\vec{d}_2^{cs}$  et  $\vec{d}_3^{cs}$  (cf. étude de  $f_{ss}$ ).



$$\vec{\phi}_s = \lambda_2 \vec{j}_s + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} M_{sr} \left( J_{r\acute{e}1} \vec{b}_2^{cs} + J_{r\acute{e}2} \vec{b}_3^{cs} \right) \quad \text{Figure 63}$$

*Remarque :* dans l'exemple traité l'espace image  $f_{sr}(\mathcal{E}_q)$  est de dimension deux. La symétrie constructive n'est pas étrangère à cette propriété. Supposons une rupture de cette symétrie due à celle d'une barre de la cage, alors la dimension de l'espace image peut devenir égale à trois. Cela signifie qu'il peut apparaître une composante "homopolaire" du vecteur flux statorique. Si l'on désire être capable d'exploiter cette composante afin de produire du couple il faudra donc savoir créer un courant homopolaire. L'adjonction supplémentaire d'un bras d'onduleur qui alimente le point neutre d'une machine couplée en étoile est par exemple une solution. Par ailleurs, ce type de propriété peut permettre également d'obtenir des informations (**aide au diagnostic**) sur l'état du rotor d'une machine à cage par l'observation du flux homopolaire.

**II.1.4. Étude de  $f_{rs}$**

La matrice qui caractérise  $f_{rs}$  est transposée de celle de  $f_{sr}$ . Ces morphismes sont dits également transposés l'un de l'autre et il en résulte des propriétés :

- $\text{Im } f_{rs} = (\text{Ker } f_{sr})^\perp$ ;
- $(\text{Im } f_{rs})^\perp = \text{Ker } f_{sr}$ .

La décomposition de  $\mathcal{E}_q$  réalisée au paragraphe II.1.3. en une somme directe de deux espaces orthogonaux peut donc s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{E}_q = \text{Im } f_{rs} \oplus (\text{Im } f_{rs})^\perp.$$

Par conséquent le vecteur courant statorique n'affectera directement que les composantes des flux et courants rotoriques qui appartiennent à  $(\text{Ker } f_{sr})^\perp = \text{Im } f_{rs}$ .  $\vec{J}_{rK}$ , l'élément de  $\text{Ker } f_{sr}$  qui intervient dans la décomposition de  $\vec{j}_r = \vec{J}_{rK} + \vec{J}_{r\epsilon}$ , ne peut être excité par le stator.

**Examen avec l'exemple précédent :**

On cherche les images de la base. On trouve :

- $f_{rs}(\vec{d}_1^{cs}) = \vec{0}$  car  $M_{ai} + M_{bi} + M_{ci} = 0$

et après usage de quelques formules de trigonométrie :

- $f_{rs}(\vec{d}_2^{cs}) = M_{sr} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \cos(p\theta) \vec{r}_{c1} + \cos\left(\frac{2\pi}{n_r} + p\theta\right) \vec{r}_{c2} + \cos\left(\frac{4\pi}{n_r} + p\theta\right) \vec{r}_{c3} + \dots + \cos\left(\frac{2\pi}{n_r}(q-1) + p\theta\right) \vec{r}_{cq} \right)$

$$= M_{sr} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} \vec{b}_1^{cr};$$

- $f_{rs}(\vec{d}_3^{cs}) = M_{sr} \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \sin(p\theta) \vec{r}_{c1} + \sin\left(\frac{2\pi}{n_r} + p\theta\right) \vec{r}_{c2} + \sin\left(\frac{4\pi}{n_r} + p\theta\right) \vec{r}_{c3} + \dots + \sin\left(\frac{2\pi}{n_r}(q-1) + p\theta\right) \vec{r}_{cq} \right)$

$$= M_{sr} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} \vec{b}_2^{cr};$$

Il apparaît que ces deux dernières images, de module  $\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} M_{sr}$ , appartiennent bien au

plan engendré par les vecteurs  $\vec{d}_1^{cr}$  et  $\vec{d}_2^{cr}$ .

Notons  $\vec{b}_1^{cr} = \frac{f_{rs}(\vec{d}_2^{cs})}{\|f_{rs}(\vec{d}_2^{cs})\|}$  et  $\vec{b}_2^{cr} = \frac{f_{rs}(\vec{d}_3^{cs})}{\|f_{rs}(\vec{d}_3^{cs})\|}$ . On construit

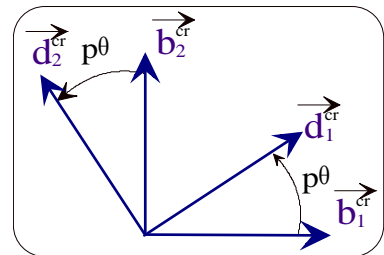


Figure 64

aisément la Figure 64 et :

- $f_{rs}(\vec{d}_2^{cs}) = M_{sr} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} \vec{b}_1^{cr};$

$$\bullet f_{rs}(\vec{d}_3^{cs}) = M_{sr} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} \vec{b}_2^{cr};$$

Par conséquent,  $f_{rs}(\vec{j}_s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} M_{sr} (J_{s2} \vec{b}_1^{cr} + J_{s3} \vec{b}_2^{cr})$ . On retrouve bien que

$$\text{Im } f_{rs} = (\text{Ker } f_{sr})^\perp.$$

## II.2. Équations en tension

En tenant compte des éléments résistifs, l'application des lois de Kirchhoff permet d'obtenir les équations en tension :

$$\diamond \text{ Au stator, } \vec{u}_s = g_s(\vec{j}_s) + \left( \frac{d\vec{\phi}_s}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_s}; \quad \text{R 12}$$

$$\diamond \text{ Au rotor, } \vec{u}_r = g_r(\vec{j}_r) + \left( \frac{d\vec{\phi}_r}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r}. \quad \text{R 13}$$

Avec

- ❖  $g_r$  et  $g_s$  endomorphismes dont les matrices contiennent les éléments résistifs du stator ou du rotor ;
- ❖  $\vec{\phi}_s = f_{ss}(\vec{j}_s) + f_{sr}(\vec{j}_r)$  ;
- ❖  $\vec{\phi}_r = f_{rs}(\vec{j}_s) + f_{rr}(\vec{j}_r)$  ;
- ❖  $\mathcal{R}_s$  et  $\mathcal{R}_r$  bases orthonormées des espaces vectoriels  $\mathcal{E}_3$  et  $\mathcal{E}_{rq}$ .

**Lorsque  $\text{Im } f_{rs}$  est stable par  $g_r$  et  $f_{rr}$  alors la relation R13 devient :**

$$\vec{u}_{r\acute{e}} = g_r(\vec{J}_{r\acute{e}}) + \left( \frac{d f_{rr}(\vec{J}_{r\acute{e}})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} + \left( \frac{d f_{rs}(\vec{j}_s)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \quad \text{et} \quad \vec{u}_{rK} = g_r(\vec{J}_{rK}) + \left( \frac{d f_{rr}(\vec{J}_{rK})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r}$$

avec  $\vec{u}_{r\acute{e}}$  et  $\vec{J}_{r\acute{e}}$  projections de  $\vec{u}_r$  et  $\vec{j}_r$  sur  $\text{Im } f_{rs}$ ,  $\vec{u}_{rK}$  et  $\vec{J}_{rK}$  projections de  $\vec{u}_r$  et  $\vec{j}_r$  sur  $(\text{Im } f_{rs})^\perp$ . Or, pour un rotor en court-circuit le vecteur tension rotorique est nul. Par conséquent, si les conditions initiales sont nulles pour les courants, il vient  $\vec{J}_{rK} = \vec{0}$ .

On peut alors, puisque  $\vec{j}_r = \vec{J}_{rK} + \vec{J}_{r\acute{e}} = \vec{0} + \vec{J}_{r\acute{e}}$ , considérer mathématiquement une équivalence avec un rotor dont le nombre de phases est égal à la dimension de  $\text{Im } f_{rs}$ .

Tout courant  $j_{rk}$  dans une phase rotorique s'obtient simplement par le produit scalaire suivant :  $j_{rk} = \vec{J}_{ré} \cdot \vec{r}_{ck}$ .

Explicitons ces considérations générales dans notre cas particulier en supposant une même résistance :

- ❖  $R_s$  pour toutes les phases statoriques;
- ❖  $R_a$  pour toute portion d'anneau entre deux barres consécutives;
- ❖  $R_b$  pour toute barre rotorique.

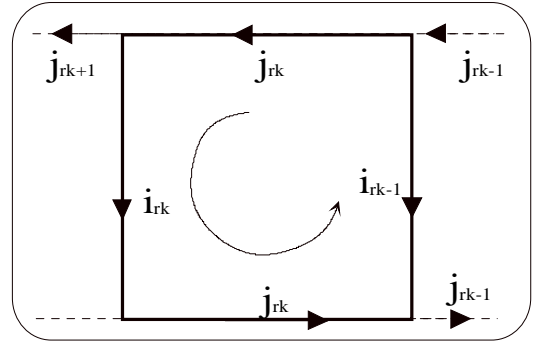


Figure 65, maille d'une phase rotorique

On applique la loi des mailles successivement à une phase statorique puis rotorique :

$$❖ u_{sk} = R_s j_{sk} + \frac{d\phi_{sk}}{dt}; \quad R 14$$

$$❖ u_{rk} = 0 = R_b i_{rk} + R_a j_{rk} - R_b i_{rk-1} + R_a j_{rk} + \frac{d\phi_{rk}}{dt} = 2(R_a + R_b)j_{rk} - R_b j_{rk+1} - R_b j_{rk-1} + \frac{d\phi_{rk}}{dt} \quad R 15$$

On retrouve bien les équations en tension avec :

$$❖ g_s \text{ morphisme défini par } g_s(\vec{j}_s) \cdot \vec{s}_{ck} = R_s j_{sk}. \quad R 16$$

$$❖ g_r \text{ morphisme défini par } g_r(\vec{j}_r) \cdot \vec{r}_{ck} = 2(R_a + R_b)j_{rk} - R_b j_{rk+1} - R_b j_{rk-1}; \quad R 17$$

Trivialement on caractérise  $g_s$  par :  $g_s(\vec{j}_s) = R_s \vec{j}_s$

Pour  $g_r$ , étant donné que sa matrice est circulante et symétrique, on peut utiliser les résultats obtenus avec  $f_r$  à savoir,  $g_r(\vec{j}_r) = R_{r1} \vec{J}_{r0} + R_{r2} \vec{J}_{r1} + R_{r3} \vec{J}_{r3} + \dots R_{rh+1} \vec{J}_{rh+1}$ , avec :

- ❖  $R_{r1} = 2R_a$
- ❖  $R_{r2} = 2(R_a + R_b) - 2R_b \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) = 2R_a - 4R_b \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right);$
- ❖  $R_{r3} = 2(R_a + R_b) - 2R_b \cos\left(2\frac{2\pi}{q}\right) = 2R_a - 4R_b \sin^2\left(2\frac{\pi}{q}\right);$
- ❖ ...
- ❖  $R_{rh+1} = 2(R_a + R_b) - 2R_b \cos\left(h\frac{2\pi}{q}\right) = 2R_a - 4R_b \sin^2\left(h\frac{\pi}{q}\right).$



Les équations en tension deviennent donc :

$$\diamond \quad \vec{u}_s = R_s \vec{j}_s + (L_{ss} + 2 M_s) \frac{dJ_{s1}}{dt} \vec{d}_1^{cs} + (L_{ss} - M_s) \left( \frac{dJ_{s2}}{dt} \vec{d}_2^{cs} + \frac{dJ_{s3}}{dt} \vec{d}_3^{cs} \right) + \left( \frac{df_{sr}(\vec{J}_{ré})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_s} \quad R 18$$

$$\diamond \quad \vec{u}_r = \left( R_{r1} \vec{J}_{r1} + \lambda_{r1} \left( \frac{d\vec{J}_{r1}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \right) + \left( R_{r2} \vec{J}_{r2} + \lambda_{r2} \left( \frac{d\vec{J}_{r2}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \right) + \dots + \left( R_{r_{th+1}} \vec{J}_{r_{th+1}} + \lambda_{r_{th+1}} \left( \frac{d\vec{J}_{r_{th+1}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \right) + \left( \frac{df_{rs}(\vec{j}_s)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \quad R 19$$

Les relations en tension ne peuvent guère être précisées sans informations supplémentaires sur les morphismes  $f_{rs}$  et  $f_{sr}$ , c'est à dire sur les mutuelles. Examinons donc l'exemple considéré précédemment.

**Cas de l'exemple étudié :**

On a vu que  $\text{Im}f_{rs}$  est le plan engendré par le couple de vecteurs  $\vec{d}_1^{cr}$  et  $\vec{d}_2^{cr}$ . Par conséquent,  $\vec{j}_r = \vec{J}_{r1} = J_{r1} \vec{d}_1^{cr} + J_{r2} \vec{d}_2^{cr} = \vec{J}_{ré}$ .

Or, si  $2p \leq q+1$  alors le couple  $(\vec{d}_1^{cr}, \vec{d}_2^{cr})$  est identique à l'un des couples  $(\vec{m}_t^{cr}, \vec{m}_{t+1}^{cr})$  (cf. II.1.2.). Il apparaît donc que  $\text{Im}f_{rs}$  est stable par  $f_{rr}$  et  $g_r$ . On peut considérer un rotor diphasé équivalent dont l'équation en tension est :

$$\vec{0} = \left( R_{rp+1} \vec{J}_{ré} + \lambda_{rp+1} \left( \frac{d\vec{J}_{ré}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \right) + \left( \frac{df_{rs}(\vec{j}_s)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \quad \text{avec}$$

$$R_{rp+1} = 2(R_a + R_b) - 2R_b \cos\left(\frac{2\pi}{n_r}\right) \quad \text{et} \quad f_{rs}(\vec{j}_s) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} M_{sr} \left( J_{s2} \vec{b}_1^{cr} + J_{s3} \vec{b}_2^{cr} \right).$$

Pour l'équation au stator on a :

$$\vec{u}_s = R_s \vec{j}_s + (L_{ss} + 2 M_s) \frac{dJ_{s1}}{dt} \vec{d}_1^{cs} + (L_{ss} - M_s) \left( \frac{dJ_{s2}}{dt} \vec{d}_2^{cs} + \frac{dJ_{s3}}{dt} \vec{d}_3^{cs} \right) + \left( \frac{df_{sr}(\vec{J}_{ré})}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_s}$$

*Remarque :* on obtient le même système d'équations que celui utilisé au paragraphe I.

**II.3. Conclusion**

Nous avons développé le formalisme proposé dans le cas classique d'une machine asynchrone triphasée à q barres rotoriques.

L'étude des endomorphismes  $f_{ss}$  et  $f_{rr}$  a permis de rappeler les conditions d'obtention des matrices classiques (Fortescue ou Concordia). On trouve également les conditions d'une réduction de la dimension de l'espace de travail pour les grandeurs statoriques et rotoriques.

L'étude des morphismes  $f_{rs}$  et  $f_{sr}$  qui traduisent les interactions entre rotor et stator a permis de dégager la notion de rotor équivalent ainsi que **ses conditions d'utilisation**.

Par ailleurs, dans le cas particulier, mais très fréquent, où tous les vecteurs appartiennent à un même plan la représentation graphique permet d'utiliser les connaissances de géométrie élémentaires du plan.

Enfin, le fait de travailler avec des vecteurs permet de formuler des expressions indépendantes de tout choix de base. Ainsi, avec l'exemple choisi, dans le cas d'un couplage étoile sans neutre sorti, on a :

$$\begin{aligned} \diamond \quad \vec{u}_s &= \mathbf{R}_s \vec{j}_s + (\mathbf{L}_{ss} - \mathbf{M}_s) \left( \frac{d\vec{j}_s}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_s} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} \mathbf{M}_{sr} \left( \frac{d \left( \mathbf{J}_{ré1} \vec{b}_2^{cs} + \mathbf{J}_{ré2} \vec{b}_3^{cs} \right)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_s} \\ \diamond \quad \vec{0} &= \left( \mathbf{R}_{rp+1} \vec{J}_{ré} + \lambda_{rp+1} \left( \frac{d\vec{J}_{ré}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \right) + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{q}{2}} \mathbf{M}_{sr} \left( \frac{d \left( \mathbf{J}_{s2} \vec{b}_1^{cr} + \mathbf{J}_{s3} \vec{b}_2^{cr} \right)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_r} \end{aligned}$$

Pour obtenir une composante dans une base ou une autre il suffit de projeter.

### III. Étude d'une machine asynchrone pentaphasée

Augmenter le nombre de phases d'une machine afin de réduire la puissance qui doit transiter par chaque bras d'onduleur nous mène à étudier naturellement une machine tétraphasée. Néanmoins, c'est au cas moins connu, de la machine comportant 5 phases que nous présentons ici l'application de notre démarche.

En effet, la machine tétraphasée usuellement utilisée est en fait plutôt appelée diphasée car on couple souvent<sup>A</sup> ce type de machine de telle façon que, finalement, apparaissent seulement deux bobinages déphasés de  $90^\circ$  (cf. Figure 66).

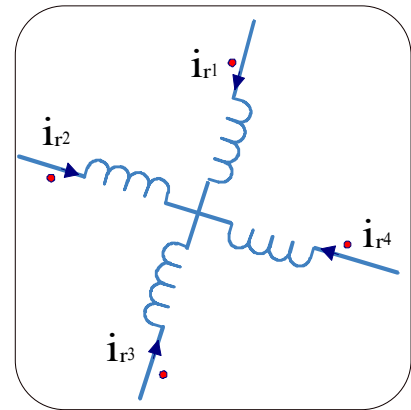


Figure 66, couplage classique d'une machine tétraphasée

Ce type de couplage permet effectivement (tout comme un couplage étoile pour une machine triphasée) d'obtenir mathématiquement une réduction de la dimension de l'espace d'étude de quatre à deux et donc de travailler avec une machine diphasée équivalente. C'est donc à nouveau, comme dans le cas triphasé, par un simple couplage des phases statoriques que l'on vérifie les conditions d'obtention d'un modèle diphasé. C'est la raison pour laquelle l'étude de ce cas ne nous semble pas apporter d'éléments nouveaux.

Par contre, pour la machine pentaphasée, un couplage mécanique n'est plus suffisant. On se propose de montrer que c'est au niveau de la commande de l'onduleur qu'il faut agir pour retrouver l'équivalence diphasée.

#### III.1. Le modèle

On adopte un modèle classique de représentation des phénomènes électromagnétiques ayant lieu au sein d'une machine régulièrement construite comportant cinq phases au stator et au rotor décalées de  $\frac{2\pi}{5p}$ ,  $p$  nombre de paires de pôles. La machine est supposée linéaire du point de vue magnétique.

<sup>A</sup> On trouve néanmoins également le couplage « carré », pendant du couplage « triangle » en triphasé.

*Remarque :* on a pris ici le même nombre de phases au stator et au rotor. En effet, on a vu dans le cas de la machine triphasée le traitement lorsque les nombres de phases sont distincts. On montre ici comment le cas, particulier mais fréquent, d'un même nombre de phases au rotor et au stator permet de simplifier l'étude.

Notations :

- $\phi_{sk}$  flux capté par la phase n°k du stator,  $j_{sk}$  le courant qui la traverse,  $u_{sk}$  la tension à ses bornes,  $R_{sk}$  sa résistance ;
- $\phi_{rk}$  flux capté par la phase n°k du rotor,  $j_{rk}$  le courant qui la traverse,  $u_{rk}$  la tension à ses bornes,  $R_{rk}$  sa résistance ;

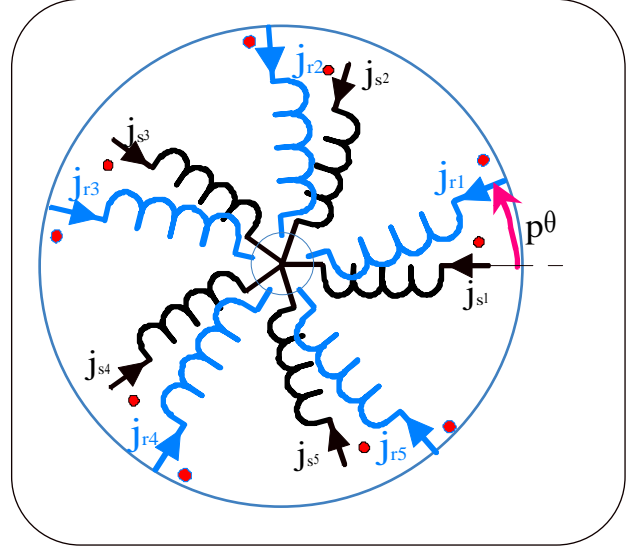


Figure 67, schéma symbolique d'une machine pentaphasée au stator et au rotor à une paire de pôles. Le rotor est en court-circuit.

Associons aux phases statoriques et rotoriques une base orthonormée  $\mathcal{R}_{sr}(\overrightarrow{sr_{c1}}, \overrightarrow{sr_{c2}}, \overrightarrow{sr_{c3}}, \overrightarrow{sr_{c4}}, \overrightarrow{sr_{c5}})$  au sein d'un même espace vectoriel  $\mathcal{E}_5$  de dimension 5

On introduit les vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{\phi_s} = \phi_{s1} \overrightarrow{sr_{c1}} + \phi_{s2} \overrightarrow{sr_{c2}} + \phi_{s3} \overrightarrow{sr_{c3}} + \phi_{s4} \overrightarrow{sr_{c4}} + \phi_{s5} \overrightarrow{sr_{c5}} ;$
- $\overrightarrow{j_s} = j_{s1} \overrightarrow{sr_{c1}} + j_{s2} \overrightarrow{sr_{c2}} + j_{s3} \overrightarrow{sr_{c3}} + j_{s4} \overrightarrow{sr_{c4}} + j_{s5} \overrightarrow{sr_{c5}} ;$
- $\overrightarrow{u_s} = u_{s1} \overrightarrow{sr_{c1}} + u_{s2} \overrightarrow{sr_{c2}} + u_{s3} \overrightarrow{sr_{c3}} + u_{s4} \overrightarrow{sr_{c4}} + u_{s5} \overrightarrow{sr_{c5}} ;$
- $\overrightarrow{\phi_r} = \phi_{r1} \overrightarrow{sr_{c1}} + \phi_{r2} \overrightarrow{sr_{c2}} + \phi_{r3} \overrightarrow{sr_{c3}} + \phi_{r4} \overrightarrow{sr_{c4}} + \phi_{r5} \overrightarrow{sr_{c5}} ;$
- $\overrightarrow{j_r} = j_{r1} \overrightarrow{sr_{c1}} + j_{r2} \overrightarrow{sr_{c2}} + j_{r3} \overrightarrow{sr_{c3}} + j_{r4} \overrightarrow{sr_{c4}} + j_{r5} \overrightarrow{sr_{c5}} ;$
- $\overrightarrow{u_r} = u_{r1} \overrightarrow{sr_{c1}} + u_{r2} \overrightarrow{sr_{c2}} + u_{r3} \overrightarrow{sr_{c3}} + u_{r4} \overrightarrow{sr_{c4}} + u_{r5} \overrightarrow{sr_{c5}} .$

### III.2. Expression des flux captés par les phases statoriques et rotoriques

L'hypothèse de linéarité permet d'exprimer les flux captés à l'aide des courants et des inductances entre phases. On a les relations matricielles suivantes :

$$\bullet \begin{bmatrix} \phi_{s1} \\ \phi_{s2} \\ \phi_{s3} \\ \phi_{s4} \\ \phi_{s5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{s1} & M_{s2} & M_{s3} & M_{s4} & M_{s5} \\ M_{s5} & M_{s1} & M_{s2} & M_{s3} & M_{s4} \\ M_{s4} & M_{s5} & M_{s1} & M_{s2} & M_{s3} \\ M_{s3} & M_{s4} & M_{s5} & M_{s1} & M_{s2} \\ M_{s2} & M_{s3} & M_{s4} & M_{s5} & M_{s1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ j_{s3} \\ j_{s4} \\ j_{s5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{a1} & M_{a2} & M_{a3} & M_{a4} & M_{a5} \\ M_{b1} & M_{b2} & M_{b3} & M_{b4} & M_{b5} \\ M_{c1} & M_{c1} & M_{c3} & M_{c4} & M_{c5} \\ M_{d1} & M_{d2} & M_{d3} & M_{d4} & M_{d5} \\ M_{e1} & M_{e2} & M_{e3} & M_{e4} & M_{e5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{r1} \\ j_{r2} \\ j_{r3} \\ j_{r4} \\ j_{r5} \end{bmatrix} \quad R \ 20$$

$$\bullet \begin{bmatrix} \phi_{r1} \\ \phi_{r2} \\ \phi_{r3} \\ \phi_{r4} \\ \phi_{r5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{a1} & M_{b1} & M_{c1} & M_{d1} & M_{e1} \\ M_{a2} & M_{b2} & M_{c2} & M_{d2} & M_{e2} \\ M_{a3} & M_{b3} & M_{c3} & M_{d3} & M_{e3} \\ M_{a4} & M_{b4} & M_{c4} & M_{d4} & M_{e4} \\ M_{a5} & M_{b5} & M_{c5} & M_{d5} & M_{e5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ j_{s3} \\ j_{s4} \\ j_{s5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{r1} & M_{r2} & M_{r3} & M_{r4} & M_{r5} \\ M_{r5} & M_{r1} & M_{r2} & M_{r3} & M_{r4} \\ M_{r4} & M_{r5} & M_{r1} & M_{r2} & M_{r3} \\ M_{r3} & M_{r4} & M_{r5} & M_{r1} & M_{r2} \\ M_{r2} & M_{r3} & M_{r4} & M_{r5} & M_{r1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{r1} \\ j_{r2} \\ j_{r3} \\ j_{r4} \\ j_{r5} \end{bmatrix} \quad R \ 21$$

Notations :

❖  $\ell_s$  et  $\ell_r$  respectivement inductances de fuite statorique et rotorique.

On suppose une répartition sinusoïdale des forces magnétomotrices :

❖  $M_{s1} = M_{ss} + \ell_s$  et  $M_{sk} = M_{ss} \cos\left((k-1)\frac{2\pi}{5}\right)$  pour  $2 \leq k \leq 5$  ;

❖  $M_{r1} = M_{rr} + \ell_r$  et  $M_{rk} = M_{rr} \cos\left((k-1)\frac{2\pi}{5}\right)$  pour  $2 \leq k \leq 5$  ;

❖  $M_{xi} = M_{sr} \cos(p\delta_{xi})$  avec  $\delta_{xi}$  angle mécanique entre la phase statorique  $x$  (a, b, c, d ou e) et la phase rotorique  $n^\circ i$ , c'est à dire en explicitant :

$$[a] > p \delta_{a1} = 0 - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta \text{ d'où } M_{a1} = M_{sr} \cos\left(0 - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta\right) ;$$

$$[b] > p \delta_{b1} = \frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta \text{ d'où } M_{b1} = M_{sr} \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta\right) ;$$

$$[c] > p \delta_{c1} = 2\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta \text{ d'où } M_{c1} = M_{sr} \cos\left(2\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta\right) ;$$

$$[d] > p \delta_{d1} = 3\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta \text{ d'où } M_{d1} = M_{sr} \cos\left(3\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta\right) ;$$

$$[e] > p \delta_{e1} = 4\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta \text{ d'où } M_{e1} = M_{sr} \cos\left(4\frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}(i-1) - p \theta\right).$$

Ces relations matricielles sont équivalentes à :

$$\vec{\phi}_s = f_{ss}(\vec{j}_s) + f_{sr}(\vec{j}_r) \text{ et } \vec{\phi}_r = f_{rs}(\vec{j}_s) + f_{rr}(\vec{j}_r),$$

avec  $f_{ss}, f_{sr}, f_{rs}, f_{rr}$  quatre endomorphismes de  $\mathcal{E}_5$ .

### III.2.1. Étude de $f_{ss}$ et $f_{rr}$

L'étude des valeurs et vecteurs propres de  $f_{ss}$  et  $f_{rr}$  est la même que celle réalisée pour le rotor  $q$  phasé (cf. II.1.2.) en prenant  $q = 5$ .

Par résolution de l'équation caractéristique on trouve donc 5 valeurs propres :

- $\lambda_{1s} = M_{s1} + M_{s2} + M_{s3} + M_{s4} + M_{s5} = \ell_s$  ;
- $\lambda_{2s} = M_{s1} + M_{s2} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s3} \cos\left(2\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s4} \cos\left(3\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s5} \cos\left(4\frac{2\pi}{5}\right) = \ell_s + \frac{5}{2} M_{ss}$  ;
- $\lambda_{3s} = M_{s1} + M_{s2} \cos\left(2\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s3} \cos\left(4\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s4} \cos\left(6\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s5} \cos\left(8\frac{2\pi}{5}\right) = \ell_s$  ;
- $\lambda_{4s} = M_{s1} + M_{s2} \cos\left(3\frac{2\pi}{q}\right) + M_{s3} \cos\left(6\frac{2\pi}{q}\right) + M_{s4} \cos\left(9\frac{2\pi}{q}\right) + M_{s5} \cos\left(12\frac{2\pi}{q}\right) = \lambda_{3s}$  ;
- $\lambda_{5s} = M_{s1} + M_{s2} \cos\left(4\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s3} \cos\left(8\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s4} \cos\left(12\frac{2\pi}{5}\right) + M_{s5} \cos\left(16\frac{2\pi}{5}\right) = \lambda_{2s}$  ,

ainsi que la base orthonormée de vecteurs propres ( $\vec{m}_0^c, \vec{m}_1^c, \vec{m}_2^c, \vec{m}_3^c, \vec{m}_4^c$ ) :

- $\vec{m}_0^c = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \vec{sr}_{c1} + \vec{sr}_{c2} + \vec{sr}_{c3} + \vec{sr}_{c4} + \vec{sr}_{c5} \right)$  ;
- $\begin{cases} \vec{m}_1^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( 1 \vec{sr}_{c1} + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \vec{sr}_{c2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) \vec{sr}_{c3} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 3\right) \vec{sr}_{c4} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) \vec{sr}_{c5} \right) \\ \vec{m}_2^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( 0 \vec{sr}_{c1} + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \vec{sr}_{c2} + \sin\left(\frac{4\pi}{5} 2\right) \vec{sr}_{c3} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 3\right) \vec{sr}_{c4} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) \vec{sr}_{c5} \right) \end{cases}$
- $\begin{cases} \vec{m}_3^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( 1 \vec{sr}_{c1} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) \vec{sr}_{c2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) \vec{sr}_{c3} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 6\right) \vec{sr}_{c4} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 8\right) \vec{sr}_{c5} \right) \\ \vec{m}_4^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( 0 \vec{sr}_{c1} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) \vec{sr}_{c2} + \sin\left(\frac{4\pi}{5} 4\right) \vec{sr}_{c3} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 6\right) \vec{sr}_{c4} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 8\right) \vec{sr}_{c5} \right) \end{cases}$

L'obtention de cette base orthonormée nous permet de simplifier l'expression de  $f_{ss}(\vec{j}_s)$ .

On y décompose  $\vec{j}_s$  :

$$\vec{j}_s = J_{s0} \vec{m}_0^c + J_{s1} \vec{m}_1^c + J_{s2} \vec{m}_2^c + J_{s3} \vec{m}_3^c + J_{s4} \vec{m}_4^c$$

$$\text{avec } \mathbf{J}_{sk} = \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\mathbf{m}}_k^c$$

Soit, en explicitant :

- $\mathbf{J}_{s0} = \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\mathbf{m}}_0^c = \sqrt{\frac{1}{5}} (\mathbf{j}_{s1} + \mathbf{j}_{s2} + \mathbf{j}_{s3} + \mathbf{j}_{s4} + \mathbf{j}_{s5})$ ;
- $\mathbf{J}_{s1} = \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\mathbf{m}}_1^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( \mathbf{j}_{s1} + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \mathbf{j}_{s2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) \mathbf{j}_{s3} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 3\right) \mathbf{j}_{s4} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) \mathbf{j}_{s5} \right)$ ;
- $\mathbf{J}_{s2} = \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\mathbf{m}}_2^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( 0 + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \mathbf{j}_{s2} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) \mathbf{j}_{s3} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 3\right) \mathbf{j}_{s4} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) \mathbf{j}_{s5} \right)$ .
- $\mathbf{J}_{s3} = \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\mathbf{m}}_3^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( \mathbf{j}_{s1} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) \mathbf{j}_{s2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) \mathbf{j}_{s3} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 6\right) \mathbf{j}_{s4} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 8\right) \mathbf{j}_{s5} \right)$ ;
- $\mathbf{J}_{s4} = \vec{\mathbf{j}}_s \cdot \vec{\mathbf{m}}_4^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( 0 + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) \mathbf{j}_{s2} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) \mathbf{j}_{s3} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 6\right) \mathbf{j}_{s4} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 8\right) \mathbf{j}_{s5} \right)$ .

Il vient alors :

$$\mathbf{f}_{ss}(\vec{\mathbf{j}}_s) = \lambda_{1s} \mathbf{J}_{s0} \vec{\mathbf{m}}_0^c + \lambda_{2s} \left( \mathbf{J}_{s1} \vec{\mathbf{m}}_1^c + \mathbf{J}_{s2} \vec{\mathbf{m}}_2^c \right) + \lambda_{3s} \left( \mathbf{J}_{s3} \vec{\mathbf{m}}_3^c + \mathbf{J}_{s4} \vec{\mathbf{m}}_4^c \right).$$

En posant :  $\vec{\mathbf{J}}_{s1} = \mathbf{J}_{s0} \vec{\mathbf{m}}_0^c$  ;  $\vec{\mathbf{J}}_{s2} = \mathbf{J}_{s1} \vec{\mathbf{m}}_1^c + \mathbf{J}_{s2} \vec{\mathbf{m}}_2^c$  ;  $\vec{\mathbf{J}}_{s3} = \mathbf{J}_{s3} \vec{\mathbf{m}}_3^c + \mathbf{J}_{s4} \vec{\mathbf{m}}_4^c$  ;  $\mathbf{f}_{ss}(\vec{\mathbf{j}}_s)$  s'exprime finalement :

$$\mathbf{f}_{ss}(\vec{\mathbf{j}}_s) = \lambda_{s1} \vec{\mathbf{J}}_{s1} + \lambda_{s2} \vec{\mathbf{J}}_{s2} + \lambda_{s3} \vec{\mathbf{J}}_{s3} = \ell_s \vec{\mathbf{j}}_s + \frac{5}{2} \mathbf{M}_{ss} \vec{\mathbf{J}}_{s2}$$

Pour  $\mathbf{f}_{rr}$ , on obtient les mêmes résultats que pour  $\mathbf{f}_{ss}$ . Il suffit de remplacer l'indice s par r.

### III.2.2. Étude de $\mathbf{f}_{sr}$ et $\mathbf{f}_{rs}$

Contrairement au cas de la machine triphasée à q barres rotoriques, le même nombre de phases statoriques et rotoriques nous permet de considérer  $\mathbf{f}_{sr}$  et  $\mathbf{f}_{rs}$  comme des endomorphismes dont on recherche valeurs et vecteurs propres.

L'examen des mutuelles montre que les matrices caractérisant  $\mathbf{f}_{rs}$  et  $\mathbf{f}_{sr}$  sont circulantes. Si on tient compte de plus du fait que les coefficients sont réels, on trouve, en travaillant dans l'espace vectoriel hermitien associé, cinq valeurs propres complexes dont quatre conjuguées deux à deux :

- $\lambda_{1rs} = M_{a1} + M_{a2} + M_{a3} + M_{a4} + M_{a5} = 0$ ;
- $\lambda_{2rs} = M_{a1} + \left(e^{j\frac{2\pi}{5}}\right)^1 M_{a2} + \left(e^{2j\frac{2\pi}{5}}\right)^1 M_{a3} + \left(e^{3j\frac{2\pi}{5}}\right)^1 M_{a4} + \left(e^{4j\frac{2\pi}{5}}\right)^1 M_{a5} = \frac{5}{2} M_{rs} e^{-jp\theta}$ ;
- $\lambda_{3rs} = M_{a1} + \left(e^{j\frac{2\pi}{5}}\right)^2 M_{a2} + \left(e^{2j\frac{2\pi}{5}}\right)^2 M_{a3} + \left(e^{3j\frac{2\pi}{5}}\right)^2 M_{a4} + \left(e^{4j\frac{2\pi}{5}}\right)^2 M_{a5} = 0$ ;
- $\lambda_{4rs} = M_{a1} + \left(e^{j\frac{2\pi}{5}}\right)^3 M_{a2} + \left(e^{2j\frac{2\pi}{5}}\right)^3 M_{a3} + \left(e^{3j\frac{2\pi}{5}}\right)^3 M_{a4} + \left(e^{4j\frac{2\pi}{5}}\right)^3 M_{a5} = 0$  ;
- $\lambda_{5rs} = M_{a1} + \left(e^{j\frac{2\pi}{5}}\right)^4 M_{a2} + \left(e^{2j\frac{2\pi}{5}}\right)^4 M_{a3} + \left(e^{3j\frac{2\pi}{5}}\right)^4 M_{a4} + \left(e^{4j\frac{2\pi}{5}}\right)^4 M_{a5} = \frac{5}{2} M_{rs} e^{+jp\theta}$

Dans l'espace vectoriel hermitien les vecteurs propres complexes  $\overrightarrow{e_k}$  suivants sont associés aux valeurs propres  $\lambda_{krs}$  :

- $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \overrightarrow{sr_{c1}} + \overrightarrow{sr_{c2}} + \overrightarrow{sr_{c3}} + \overrightarrow{sr_{c4}} + \overrightarrow{sr_{c5}} \right)$  ;
- $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \overrightarrow{sr_{c1}} + \left(e^{j\frac{2\pi}{5}}\right)^1 \overrightarrow{sr_{c2}} + \left(e^{2j\frac{2\pi}{5}}\right)^1 \overrightarrow{sr_{c3}} + \left(e^{3j\frac{2\pi}{5}}\right)^1 \overrightarrow{sr_{c4}} + \left(e^{4j\frac{2\pi}{5}}\right)^1 \overrightarrow{sr_{c5}} \right)$  ;
- $\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \overrightarrow{sr_{c1}} + \left(e^{j\frac{2\pi}{5}}\right)^2 \overrightarrow{sr_{c2}} + \left(e^{2j\frac{2\pi}{5}}\right)^2 \overrightarrow{sr_{c3}} + \left(e^{3j\frac{2\pi}{5}}\right)^2 \overrightarrow{sr_{c4}} + \left(e^{4j\frac{2\pi}{5}}\right)^2 \overrightarrow{sr_{c5}} \right)$  ;
- $\overrightarrow{e_4} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \overrightarrow{sr_{c1}} + \left(e^{j\frac{2\pi}{5}}\right)^3 \overrightarrow{sr_{c2}} + \left(e^{2j\frac{2\pi}{5}}\right)^3 \overrightarrow{sr_{c3}} + \left(e^{3j\frac{2\pi}{5}}\right)^3 \overrightarrow{sr_{c4}} + \left(e^{4j\frac{2\pi}{5}}\right)^3 \overrightarrow{sr_{c5}} \right)$  ;
- $\overrightarrow{e_5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \overrightarrow{sr_{c1}} + \left(e^{j\frac{2\pi}{5}}\right)^4 \overrightarrow{sr_{c2}} + \left(e^{2j\frac{2\pi}{5}}\right)^4 \overrightarrow{sr_{c3}} + \left(e^{3j\frac{2\pi}{5}}\right)^4 \overrightarrow{sr_{c4}} + \left(e^{4j\frac{2\pi}{5}}\right)^4 \overrightarrow{sr_{c5}} \right)$  .

En remarquant que  $\overrightarrow{e_4}$  et  $\overrightarrow{e_3}$  (respectivement  $\overrightarrow{e_5}$  et  $\overrightarrow{e_2}$ ) sont conjugués l'un de l'autre ( $\overrightarrow{e_4} = (\overrightarrow{e_3})^*$  et  $\overrightarrow{e_5} = (\overrightarrow{e_2})^*$ ) il vient que la famille de vecteurs à coefficients réels  $(\overrightarrow{m_0^c}, \overrightarrow{m_1^c}, \overrightarrow{m_2^c}, \overrightarrow{m_3^c}, \overrightarrow{m_4^c}) = \left( \overrightarrow{e_1}, \frac{\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_5}}{\sqrt{2}}, \frac{\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_5}}{j\sqrt{2}}, \frac{\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}}{\sqrt{2}}, \frac{\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}}{j\sqrt{2}} \right)$  forment une base

orthonormée. C'est la même que celle introduite au paragraphe II.1.2. . Les images de ces vecteurs par  $f_{sr}$  sont les suivantes :



- $f_{sr}(\vec{m}_0^c) = \lambda_{1rs} \vec{m}_0^c = \vec{0}$  ;
- $f_{sr}(\vec{m}_1^c) = \lambda_{2rs} \frac{\vec{e}_2}{\sqrt{2}} + \lambda_{2rs}^* \frac{(\vec{e}_2)^*}{\sqrt{2}} = \text{Re}(\lambda_{2rs}) \vec{m}_1^c - \text{Im}(\lambda_{2rs}) \vec{m}_2^c$  d'où  
 $f_{sr}(\vec{m}_1^c) = \frac{5}{2} M_{sr} \left( \cos(p\theta) \vec{m}_1^c + \sin(p\theta) \vec{m}_2^c \right)$  ;
- $f_{sr}(\vec{m}_2^c) = \lambda_{2rs} \frac{\vec{e}_2}{j\sqrt{2}} - \lambda_{2rs}^* \frac{(\vec{e}_2)^*}{j\sqrt{2}} = \text{Im}(\lambda_{2rs}) \vec{m}_1^c + \text{Re}(\lambda_{2rs}) \vec{m}_2^c$  d'où  
 $f_{sr}(\vec{m}_2^c) = \frac{5}{2} M_{sr} \left( -\sin(p\theta) \vec{m}_1^c + \cos(p\theta) \vec{m}_2^c \right)$  ;
- $f_{sr}(\vec{m}_3^c) = \text{Re}(\lambda_{3rs}) \vec{m}_3^c - \text{Im}(\lambda_{3rs}) \vec{m}_4^c = \vec{0}$
- $f_{sr}(\vec{m}_4^c) = \text{Im}(\lambda_{3rs}) \vec{m}_3^c - \text{Re}(\lambda_{3rs}) \vec{m}_4^c = \vec{0}$  ;

L'obtention de cette base orthonormée nous permet de simplifier l'expression de  $f_{sr}(\vec{j}_r)$ .

On y décompose  $\vec{j}_r$  :

$$\vec{j}_r = J_{r0} \vec{m}_0^c + J_{r1} \vec{m}_1^c + J_{r2} \vec{m}_2^c + J_{r3} \vec{m}_3^c + J_{r4} \vec{m}_4^c = \vec{J}_{r1} + \vec{J}_{r2} + \vec{J}_{r3}$$

$$\text{avec } \vec{J}_{rk} = \vec{j}_r \cdot \vec{m}_k^c, \vec{J}_{r1} = J_{r0} \vec{m}_0^c; \vec{J}_{r2} = J_{r1} \vec{m}_1^c + J_{r2} \vec{m}_2^c; \vec{J}_{r3} = J_{r3} \vec{m}_3^c + J_{r4} \vec{m}_4^c;$$

Il vient donc :

$$f_{sr}(\vec{j}_r) = \frac{5}{2} M_{sr} \left[ J_{r1} \left( \cos(p\theta) \vec{m}_1^c + \sin(p\theta) \vec{m}_2^c \right) + J_{r2} \left( -\sin(p\theta) \vec{m}_1^c + \cos(p\theta) \vec{m}_2^c \right) \right]$$

soit encore, en posant,  $\vec{b}_1 = \cos(p\theta) \vec{m}_1^c + \sin(p\theta) \vec{m}_2^c$  et  $\vec{b}_2 = -\sin(p\theta) \vec{m}_1^c + \cos(p\theta) \vec{m}_2^c$  :

$$f_{sr}(\vec{j}_r) = \frac{5}{2} M_{sr} \left[ J_{r1} \vec{b}_1 + J_{r2} \vec{b}_2 \right]$$

Conclusion sur  $f_{sr}$ :  $f_{sr}$  est un endomorphisme dont une base orthonormée du noyau  $\text{Ker}f_{sr}$  est constituée par la famille  $(\vec{m}_0^c, \vec{m}_3^c, \vec{m}_4^c)$ . Par ailleurs, au sein du plan constitué par  $\text{Im}f_{sr}$ ,  $f_{sr}$  est la composée d'une rotation d'angle  $p\theta$  (cf. Figure 68) et d'une homothétie de rapport  $\frac{5}{2}M_{sr}$ .

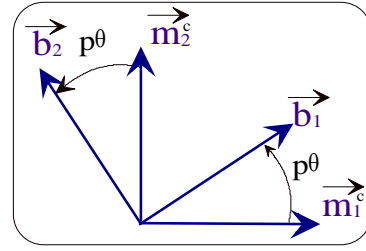


Figure 68, relation spatiale entre les couples  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$  et  $(\vec{m}_1^c, \vec{m}_2^c)$

Étant donné que  $f_{rs}$  est l'endomorphisme transposé de  $f_{sr}$  on obtient :

$$f_{rs}(\vec{j}_s) = \frac{5}{2}M_{sr} [J_{s1} \vec{b}_3 + J_{s2} \vec{b}_4]$$

en posant :  $\vec{b}_3 = \cos(p\theta)\vec{m}_1^c - \sin(p\theta)\vec{m}_2^c$  et  $\vec{b}_4 = \sin(p\theta)\vec{m}_1^c + \cos(p\theta)\vec{m}_2^c$ .

Conclusion sur  $f_{rs}$ :  $f_{rs}$  est un endomorphisme dont une base orthonormée du noyau  $\text{Ker}f_{rs}$  est constituée par la famille  $(\vec{m}_0^c, \vec{m}_3^c, \vec{m}_4^c)$ . Par ailleurs, au sein du plan constitué par  $\text{Im}f_{rs}$ ,  $f_{rs}$  est la composée d'une rotation d'angle  $-p\theta$  (cf. Figure 68) et d'une homothétie de rapport  $\frac{5}{2}M_{sr}$ .

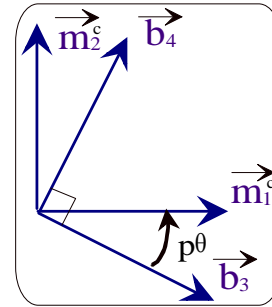


Figure 69, relation spatiale entre les couples  $(\vec{b}_3, \vec{b}_4)$  et  $(\vec{m}_1^c, \vec{m}_2^c)$

### III.2.3. Expression finale

On obtient en tenant compte des expressions des différents endomorphismes :

$$\vec{\phi}_s = f_{ss}(\vec{j}_s) + f_{sr}(\vec{j}_r) \text{ et } \vec{\phi}_r = f_{rs}(\vec{j}_s) + f_{rr}(\vec{j}_r),$$

$$\vec{\phi}_s = \ell_s \vec{j}_s + \frac{5}{2}M_{ss} \vec{j}_{s2} + \frac{5}{2}M_{sr} [J_{r1} \vec{b}_1 + J_{r2} \vec{b}_2];$$

$$\vec{\phi}_r = \ell_r \vec{j}_r + \frac{5}{2}M_{rr} \vec{j}_{r2} + \frac{5}{2}M_{sr} [J_{s1} \vec{b}_3 + J_{s2} \vec{b}_4]$$

Il apparaît que les vecteurs de type « courants » affectent les vecteurs flux par des coefficients multiplicateurs différents que sont les inductances.  $\vec{j}_s$  et  $\vec{j}_r$  sont multipliées par

les inductances de fuites, bien plus faibles<sup>A</sup> que les inductances  $M_{ss}$ ,  $M_{sr}$ ,  $M_{rr}$ . C'est donc grâce aux vecteurs  $\vec{J}_{s2}$ ,  $\vec{J}_{r1} \vec{b}_1 + \vec{J}_{r2} \vec{b}_2$ ,  $\vec{J}_{r2}$  et  $\vec{J}_{r1} \vec{b}_1 + \vec{J}_{r2} \vec{b}_2$  que les modules des flux sont significatifs. Il faut privilégier ces composantes des vecteurs courants par rapport aux autres. En effet, pour un même module, soit encore pour un même niveau de pertes Joule, elles participent plus activement à la production de couple.

Or ces vecteurs appartiennent tous à un même plan  $\mathcal{P}$  engendré par la famille orthonormée  $(\vec{m}_1^c, \vec{m}_2^c)$ .

Par conséquent, afin d'utiliser au mieux les courants il est intéressant d'annuler les composantes de  $\vec{j}_s$  et  $\vec{j}_r$  qui n'appartiennent pas à ce plan. On peut à ce niveau proposer de généraliser la notion d'homopolaire. **Une composante serait homopolaire** si elle ne participe pas à l'effet amplificateur apporté par l'usage des matériaux ferromagnétiques.

Si toutes les composantes homopolaires ainsi définies sont nulles alors une machine diphasée équivalente apparaît. On peut jouer pour cela soit sur le couplage soit sur l'alimentation.

- Un couplage étoile sans neutre sorti au stator et au rotor nous assure ainsi de la nullité de  $J_{s0}$  et  $J_{r0}$  ;
- **Par contre, étant donné les expressions de  $J_{s3}$ ,  $J_{s4}$ ,  $J_{r3}$  et  $J_{r4}$ , leur nullité ne peut être assurée par un simple couplage mécanique. Il faut jouer sur l'alimentation et effectuer en quelque sorte un « couplage électrique ». L'étude des équations en tension s'impose donc.**

### III.3. Équations en tension.

En tenant compte des éléments résistifs, l'application des lois de Kirchhoff permet d'obtenir les équations en tension :

$$\diamond \text{ Au stator, } \vec{u}_s = R_s \vec{j}_s + \left( \frac{d\vec{\phi}_s}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_{sr}} ; \quad \text{R 22}$$

<sup>A</sup> Tant que la machine n'est pas saturée soit encore tant que les matériaux magnétiques conservent une perméabilité magnétique élevée (coefficient d'amplification).

$$\diamond \text{ Au rotor, } \vec{u}_r = R_r \vec{j}_r + \left( \frac{d\vec{\phi}_r}{dt} \right) / \mathcal{R}_{sr} \quad \text{R 23}$$

Les équations en tension deviennent donc :

$$\diamond \vec{u}_s = R_s \vec{j}_s + \ell_s \frac{d\vec{j}_s}{dt} + \frac{5}{2} M_{ss} \frac{d\vec{J}_{s2}}{dt} + \frac{5}{2} M_{sr} \frac{d[\vec{J}_{r1} \vec{b}_1 + \vec{J}_{r2} \vec{b}_2]}{dt} \quad \text{R 24}$$

$$\diamond \vec{u}_r = R_r \vec{j}_r + \ell_r \frac{d\vec{j}_r}{dt} + \frac{5}{2} M_{rr} \frac{d\vec{J}_{r2}}{dt} + \frac{5}{2} M_{sr} \frac{d[\vec{J}_{s1} \vec{b}_3 + \vec{J}_{s2} \vec{b}_4]}{dt} \quad \text{R 25}$$

Étant donné que  $\vec{u}_r = \vec{0}$ , seules des composantes non nulles de  $\vec{u}_s$  dans l'espace engendré par  $(\vec{m}_0^c, \vec{m}_3^c, \vec{m}_4^c)$  peuvent impliquer la non appartenance des courants  $\vec{j}_s$  et  $\vec{j}_r$  au plan  $\mathcal{P}$ .

Les expressions de ces composantes sont les suivantes :

$$\diamond u_{s0} = \vec{u}_s \cdot \vec{m}_0^c = \sqrt{\frac{1}{5}} (u_{s1} + u_{s2} + u_{s3} + u_{s4} + u_{s5}); \quad \text{R 26}$$

$$\diamond u_{s3} = \vec{u}_s \cdot \vec{m}_3^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( u_{s1} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) u_{s2} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) u_{s3} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 6\right) u_{s4} + \cos\left(\frac{2\pi}{5} 8\right) u_{s5} \right); \quad \text{R 27}$$

$$\diamond u_{s4} = \vec{u}_s \cdot \vec{m}_4^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( 0 + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 2\right) u_{s2} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 4\right) u_{s3} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 6\right) u_{s4} + \sin\left(\frac{2\pi}{5} 8\right) u_{s5} \right). \quad \text{R 28}$$

Il est à noter que si la machine est couplée en étoile sans neutre sorti alors il n'est pas nécessaire de vérifier  $u_{s0} = 0$  pour annuler la composante  $J_{s0}$ . Dans le cas contraire une façon simple de vérifier mécaniquement cette relation est de réaliser un couplage « polygonal » (cf. Figure 70).

Par contre, l'annulation des composantes  $u_{s3}$  et  $u_{s4}$  définies par les relations R23 et R24 devront être assurées par une commande adéquate<sup>A</sup> de l'onduleur de tension. Au couplage mécanique il faut substituer en quelque sorte un **couplage électrique** dont la fonction est la même : annuler les composantes du courant qui ne

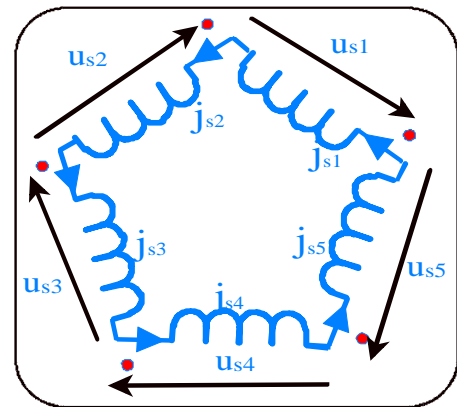


Figure 70, couplage polygonal permettant d'assurer  $u_{s0} = 0$ .

<sup>A</sup> Au chapitre 2, on a proposé une méthode qui permet la synthèse de cette commande.

participent pas activement à la création de flux au sein de la machine mais sont à l'origine de pertes Joule.

*Remarque : le système suivant de tensions permet de vérifier ces relations :*

- $u_{s1}(t) = U_m \sin(\omega t) ;$
- $u_{s2}(t) = U_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{5}\right) ;$
- $u_{s3}(t) = U_m \sin\left(\omega t - 2\frac{2\pi}{5}\right) ;$
- $u_{s4}(t) = U_m \sin\left(\omega t - 3\frac{2\pi}{5}\right) ;$
- $u_{s5}(t) = U_m \sin\left(\omega t - 4\frac{2\pi}{5}\right) ;$

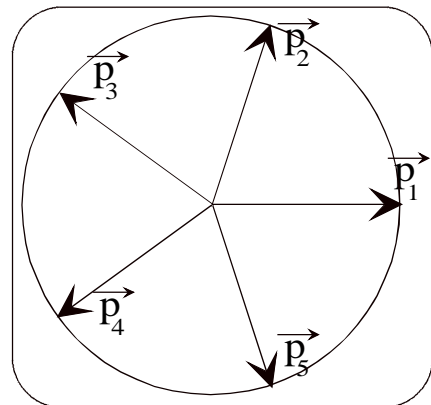
*Par analogie avec la machine triphasée, ce type d'alimentation serait celle que délivrerait un réseau pentaphasé et correspond au régime permanent.*

### III.4. Lien avec le formalisme complexe

L'approche vectorielle développée a mis en évidence qu'il est intéressant de décomposer l'espace vectoriel associé à la machine en trois sous espaces orthogonaux, constitués de deux plans et d'une droite. Il est possible d'étudier dans chaque sous espace indépendamment.

L'observation des composantes du flux dans chacun de ces espaces met en évidence le rôle privilégié d'un des deux plans, noté  $\mathcal{P}$ , au sein duquel la composante du vecteur flux  $y$  est bien supérieure aux autres.

Bien entendu, si on décide d'annuler par un couplage mécanique ou une commande adéquate les composantes autres que celle du plan  $\mathcal{P}$ , alors on peut justifier de ne considérer que les projections dans ce plan des différents vecteurs tension, flux et courant.



*Figure 71, projections des vecteurs de la base dans le plan  $\mathcal{P}$*

Projetons les vecteurs de la base  $(\vec{sr}_{c1}, \vec{sr}_{c2}, \vec{sr}_{c3}, \vec{sr}_{c4}, \vec{sr}_{c5})$ . On trouve cinq vecteurs déphasés  $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4, \vec{p}_5)$  de  $2\pi/5$  entre eux et de module égal à  $\sqrt{\frac{2}{5}}$  (cf. Figure 71).

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_1 = \left( \vec{sr}_{c1} \cdot \vec{m}_1^c \right) \vec{m}_1^c + \left( \vec{sr}_{c1} \cdot \vec{m}_2^c \right) \vec{m}_2^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ 1 \vec{m}_1^c + 0 \vec{m}_2^c \right]; \\ \vec{p}_2 = \left( \vec{sr}_{c2} \cdot \vec{m}_1^c \right) \vec{m}_1^c + \left( \vec{sr}_{c2} \cdot \vec{m}_2^c \right) \vec{m}_2^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \vec{m}_1^c + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \vec{m}_2^c \right] \\ \vec{p}_3 = \left( \vec{sr}_{c3} \cdot \vec{m}_1^c \right) \vec{m}_1^c + \left( \vec{sr}_{c3} \cdot \vec{m}_2^c \right) \vec{m}_2^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 2\right) \vec{m}_1^c + \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 2\right) \vec{m}_2^c \right] \\ \vec{p}_4 = \left( \vec{sr}_{c4} \cdot \vec{m}_1^c \right) \vec{m}_1^c + \left( \vec{sr}_{c4} \cdot \vec{m}_2^c \right) \vec{m}_2^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 3\right) \vec{m}_1^c + \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 3\right) \vec{m}_2^c \right] \\ \vec{p}_5 = \left( \vec{sr}_{c5} \cdot \vec{m}_1^c \right) \vec{m}_1^c + \left( \vec{sr}_{c5} \cdot \vec{m}_2^c \right) \vec{m}_2^c = \sqrt{\frac{2}{5}} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 4\right) \vec{m}_1^c + \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot 4\right) \vec{m}_2^c \right] \end{array} \right.$$

Un vecteur quelconque  $\vec{x}$  s'exprime alors :

$$\vec{x} = x_1(t) \vec{p}_1 + x_2(t) \vec{p}_2 + x_3(t) \vec{p}_3 + x_4(t) \vec{p}_4 + x_5(t) \vec{p}_5$$

Si on considère le plan complexe isomorphe à  $\mathcal{P}$  le vecteur complexe suivant s'introduit

naturellement :  $\underline{x} = \sqrt{\frac{2}{5}} (x_1(t) 1 + x_2(t) a + x_3(t) a^2 + x_4(t) a^3 + x_5(t) a^4)$  avec  $a = e^{j\frac{2\pi}{5}}$ .

Cet exemple a permis de développer la méthode dans un cas encore relativement simple pour lequel il est intéressant, du fait du choix du modèle, de travailler uniquement dans un seul plan. Mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, si les effets de saillance sont suffisamment prononcés il est possible que la composante du flux qui appartient au deuxième plan ne soit plus négligeable et permette d'obtenir un couple supplémentaire. La prise en compte de l'harmonique 3 de force magnétomotrice au sein d'une machine à réluctance variable pentaphasée permet d'accroître de près de 10% le couple.

## IV. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons progressivement montré comment il était possible d'utiliser plus largement le formalisme vectoriel que par l'usage des matrices de passage de type Park Concordia, Fortescue, etc. Notre démarche met l'accent non pas sur une matrice de passage d'une base de travail à une autre mais plutôt sur la décomposition en somme directe de plans et de droites de l'espace vectoriel associé à la machine. Elle nous semble en cela plus générale même si elle mène également à des matrices de transformation. En effet, **la décomposition**

**est unique** alors que les bases relatives à ces plans et droites sont en nombre infini et donc également celui des matrices de passage correspondantes.

Nous avons amorcé l'étude des machines polyphasées par celles dont les bobinages sont répartis régulièrement tant au stator qu'au rotor. Dans ce cas, très fréquent d'ailleurs, il est en effet possible de poursuivre les calculs analytiquement.

- ❑ L'étude de la machine, triphasée au stator mais avec un rotor à  $q$  phases, a permis de mettre en évidence l'apport de l'usage de la notion de morphisme lorsque les dimensions des espaces vectoriels associés au stator et au rotor ne sont pas identiques.
- ❑ La machine tétraphasée quant à elle montre la spécificité du nombre pair de phases. Après couplage deux à deux des phases déphasées de  $180^\circ$  on retrouve la machine diphasée traitée en guise d'introduction.
- ❑ Avec la machine pentaphasée, l'accent a été mis sur la décomposition en somme directe de sous espaces vectoriels orthogonaux, décomposition qui rend possible la fragmentation de l'espace vectoriel de travail en sous-espaces de dimension au plus égale à deux au sein desquels apparaissent des relations simples entre composantes des grandeurs flux et courant. La commande s'en trouve facilitée. La notion de « couplage électrique » par analogie avec celle de « couplage mécanique » a été introduite également à ce propos. Lors de la synthèse de la commande d'un onduleur de tension deux niveaux à cinq bras, deux degrés de liberté seront consacrés à l'établissement du couplage électrique. Il en restera trois pour piloter un espace de dimension deux.

**Après l'étude de ces cas représentatifs, il aisé de généraliser la méthode par raisonnement inductif.**

- ❑ On peut montrer ainsi que la machine hexaphasée dont les bobinages sont déphasés électriquement de  $360/6 = 60^\circ$  peut se ramener après quatre couplages mécaniques à une machine triphasée couplée en étoile.
- ❑ Quant à la machine hexaphasée dite double étoile avec deux étoiles déphasées électriquement de  $30^\circ$ , ce n'est rien d'autre qu'une machine comportant 12 phases régulièrement réparties ( $30 = 360/12$ ). L'examen du morphisme caractérisant le stator

met en effet en évidence que pour diminuer la dimension de l'espace vectoriel d'étude associé il suffit :

- ❖ de coupler deux par deux les phases qui sont déphasées de  $180^\circ$ ;
- ❖ de coupler les six phases ainsi obtenues en deux étoiles du même type que celle d'une machine triphasée (déphasage de  $120^\circ$  entre deux phases d'une même étoile et de  $30^\circ$  entre les deux étoiles). On obtient ainsi un classique stator double étoile, bien connu dans le domaine des fortes puissances.

La dimension de l'espace de travail est ainsi réduite de 12 à 4 : deux plans vectoriels orthogonaux constituent ce domaine d'étude privilégié.

Cette approche originale de ce type de machine double étoile permet de déduire naturellement une transformation analogue à celle de Park. Classiquement c'est par un raisonnement inductif à partir du cas triphasé que sont définies les transformations matricielles utilisées pour l'étude de cette machine.

Dans la mesure donc où les bobinages sont régulièrement répartis la démarche proposée mène logiquement d'une part vers les conditions d'une réduction de l'espace de travail, d'autre part vers la définition de nouveaux sous espaces d'étude et donc l'élaboration de matrices de transformation.

Si cette hypothèse de régularité ne peut être formulée, la symétrie des matrices inductances propres garantit une décomposition de l'espace de travail en une somme directe de sous espaces vectoriels orthogonaux..





## **Chapitre IV Synthèse d'un onduleur de courant triphasé commandé en modulation de largeur d'impulsions**

C'est l'étude de la commande et de l'alimentation par un onduleur de courant d'une machine asynchrone triphasée comportant des condensateurs à ses bornes qui est à l'origine de l'élaboration du formalisme décrit aux chapitres précédents.

Dans ce type de système, la présence de condensateurs assure le respect des règles de compatibilité entre sources. Les commutations peuvent ainsi être dans le principe instantanées et une commande en modulation de largeur d'impulsions devient possible.

Comparée à l'onduleur de tension classique cette structure présente a priori certains avantages essentiellement en terme de sécurité :

- en cas de défaut de commande le courant dans le moteur et donc le couple ne peut atteindre des valeurs prohibitives alors que le court-circuit du condensateur présent dans l'onduleur de tension implique nécessairement une surintensité conséquente ;
- les tensions appliquées à la machine asynchrone ne comportent plus de gradient de tension élevé, cause d'un vieillissement accéléré des isolants.

Par contre, la présence de condensateurs aux bornes du circuit inductif que constitue la machine asynchrone implique une instabilité du système qu'il faut contrôler par asservissement. Cela ne pose pas de difficultés majeures dans la mesure où l'on reste en régime linéaire. Néanmoins le fait que le système soit instable en boucle ouverte conduit à porter son attention sur les phénomènes qui mènent éventuellement à une ouverture de la boucle. Ainsi, si la consigne demandée est supérieure à celle que peut délivrer le modulateur, elle ne peut pas être prise en compte. Le système est alors en boucle ouverte. Il est nécessaire de pouvoir gérer ce type d'éventualité au niveau de la commande. Lors de l'élaboration de la commande de l'onduleur les problèmes de saturation ont été par conséquent pris en compte. Nous avons pour cela cherché à obtenir une représentation graphique des frontières du domaine au sein duquel évolue le vecteur courant dont les trois composantes correspondent aux sorties de l'onduleur de courant.

Par ailleurs l'utilisation d'un microcontrôleur 16 bits HC16 de Motorola aux capacités de calcul modestes<sup>A</sup> nous a également amené à rechercher un algorithme de recherche des durées de conduction peu gourmand en temps de calcul.

Ces deux contraintes nous ont ainsi poussé à développer le formalisme que nous proposons.

Dans ce chapitre nous présentons la synthèse de l'onduleur de courant qui a été réalisé. Au chapitre III il a été question uniquement d'onduleur de tension. Cet exemple permet donc de mettre en évidence quelques différences entre les deux types de modulateurs.

## I. Application du formalisme à l'onduleur de courant triphasé

### I.1. Espaces vectoriels associés

#### I.1.1. Espace vectoriel associé au modulateur

Le modulateur établit un lien entre les sources :

- vu des sources de tension c'est lui qui impose les **3** courants ;
- vu des sources de courant il impose **2** tensions.

Cette dualité nous mène à associer deux espaces au modulateur, un par type de source :

- au modulateur vu des sources de tension un espace de dimension **3**, noté  $\mathcal{E}_{t3}$  ;
- au modulateur vu des sources de courant un espace de dimension **2**, noté  $\mathcal{E}_{c2}$ .

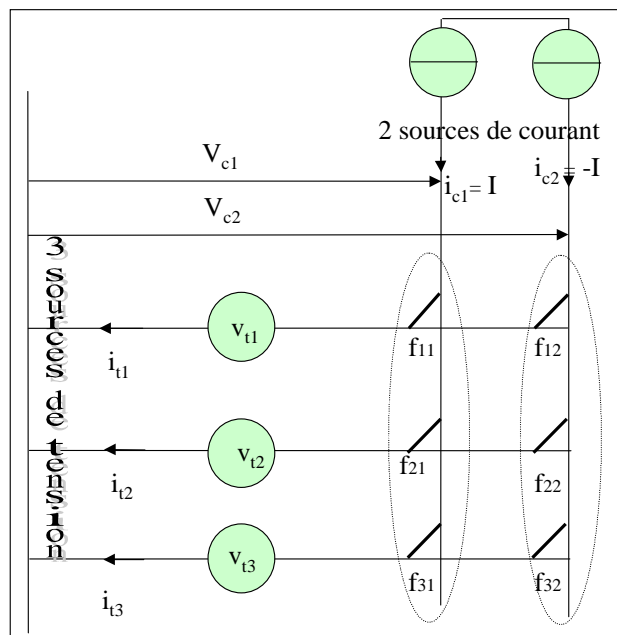


Figure 72

<sup>A</sup> Par rapport aux D.S.P.

On notera par ailleurs  $\mathcal{E}_{tc}$  l'espace vectoriel produit :  $\mathcal{E}_{tc} = \mathcal{E}_{t3} \times \mathcal{E}_{c2}$ .

$\mathcal{E}_{t3}$  et  $\mathcal{E}_{c2}$  sont munis chacun d'une base orthonormée directe notée respectivement  $\mathcal{B}_t$  et  $\mathcal{B}_c$  avec  $\mathcal{B}_t = \{\overrightarrow{x_{t1}}, \overrightarrow{x_{t2}}, \overrightarrow{x_{t3}}\}$  et  $\mathcal{B}_c = \{\overrightarrow{x_{c1}}, \overrightarrow{x_{c2}}\}$ .

On définit alors les vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{v_t} = v_{t1} \overrightarrow{x_{t1}} + v_{t2} \overrightarrow{x_{t2}} + v_{t3} \overrightarrow{x_{t3}}$  et  $\overrightarrow{i_t} = i_{t1} \overrightarrow{x_{t1}} + i_{t2} \overrightarrow{x_{t2}} + i_{t3} \overrightarrow{x_{t3}}$  de l'espace  $\mathcal{E}_{t3}$ ;
- $\overrightarrow{v_c} = v_{c1} \overrightarrow{x_{c1}} + v_{c2} \overrightarrow{x_{c2}}$  et  $\overrightarrow{i_c} = i_{c1} \overrightarrow{x_{c1}} + i_{c2} \overrightarrow{x_{c2}}$  de l'espace  $\mathcal{E}_{c2}$ .

Dans le cadre de l'étude notre attention se porte tout particulièrement sur les sources de tension qui représente le récepteur d'énergie lors du fonctionnement en moteur de la machine asynchrone.

### **I.1.2. Espaces vectoriels associés aux sources de tension**

On associe aux sources triphasées de tension un espace vectoriel  $\mathcal{E}_{3t}$  de dimension 3 dont on note  $\mathcal{B}_{3t}$  une base orthonormée avec  $\mathcal{B}_{3t} = \{\overrightarrow{s_{t1}}, \overrightarrow{s_{t2}}, \overrightarrow{s_{t3}}\}$ .

En notant  $u_{tk}$  la tension aux bornes d'une phase et  $j_{tk}$  le courant qui la traverse (convention récepteur par exemple) on définit les vecteurs :

- $\overrightarrow{u_t} = u_{t1} \overrightarrow{s_{t1}} + u_{t2} \overrightarrow{s_{t2}} + u_{t3} \overrightarrow{s_{t3}}$  ;
- $\overrightarrow{j_t} = j_{t1} \overrightarrow{s_{t1}} + j_{t2} \overrightarrow{s_{t2}} + j_{t3} \overrightarrow{s_{t3}}$ .

## **I.2. Familles de vecteurs engendrées par le modulateur**

L'onduleur comporte deux cellules de commutation à trois interrupteurs. Le nombre de combinaisons possibles est donc  $H = 3^2 = 9$ .

### **I.2.1. Famille discrète**

Parmi les neuf combinaisons, trois correspondent au vecteur nul. La famille que l'on peut définir comporte donc 7 éléments. On la note  $\mathcal{F}_{7t} = \{\overrightarrow{i_{tr}} \text{ avec } 0 \leq r \leq 6\}$ . Elle se compose des vecteurs suivants :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_0} = \vec{i}_{t0} = 0 \vec{x}_{t1} + 0 \vec{x}_{t2} + 0 \vec{x}_{t3} & ; & \overrightarrow{OM_1} = \vec{i}_{t1} = I \vec{x}_{t1} + 0 \vec{x}_{t2} - I \vec{x}_{t3} & ; \\ \overrightarrow{OM_2} = \vec{i}_{t2} = 0 \vec{x}_{t1} + I \vec{x}_{t2} - I \vec{x}_{t3} & ; & \overrightarrow{OM_3} = \vec{i}_{t3} = -I \vec{x}_{t1} + I \vec{x}_{t2} + 0 \vec{x}_{t3} & ; \\ \overrightarrow{OM_4} = \vec{i}_{t4} = -I \vec{x}_{t1} + 0 \vec{x}_{t2} + I \vec{x}_{t3} & ; & \overrightarrow{OM_5} = \vec{i}_{t5} = 0 \vec{x}_{t1} - I \vec{x}_{t2} + I \vec{x}_{t3} & ; \\ \overrightarrow{OM_6} = \vec{i}_{t6} = I \vec{x}_{t1} - I \vec{x}_{t2} + 0 \vec{x}_{t3} & . \end{cases}$$

Une représentation graphique dans un repère affine  $(O, \vec{x}_{t1}, \vec{x}_{t2}, \vec{x}_{t3})$  fait apparaître immédiatement que  $(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6)$  forment les sommets d'un hexagone plan centré en  $M_0$  de coordonnées  $(0, 0, 0)$  (cf. Figure 73 et Figure 74).

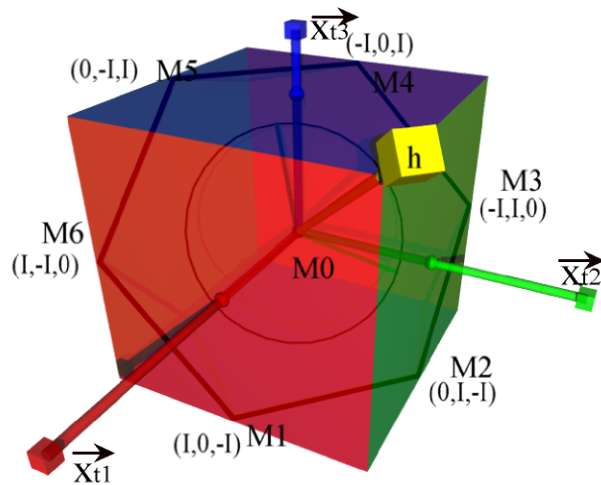


Figure 73, représentation des vecteurs « générateurs » de courant

La dimension du sous espace vectoriel  $\mathcal{G}_{7t}$  de  $\mathcal{E}_{t3}$  engendré par ces 7 vecteurs est au plus de trois puisqu'ils sont eux-mêmes combinaison linéaire de trois vecteurs d'une base. Par ailleurs, tous ces vecteurs sont orthogonaux à  $(\vec{x}_{t1} + \vec{x}_{t2} + \vec{x}_{t3})$  puisque  $\overrightarrow{OM_k} \cdot (\vec{x}_{t1} + \vec{x}_{t2} + \vec{x}_{t3}) = 0$ .

$\mathcal{G}_{7t}$  est donc de dimension 2 :  $d_{7t} = 2$ . C'est un plan d'équation  $x + y + z = 0$ , orthogonal à la droite engendrée par  $\vec{h} = \frac{(\vec{x}_{t1} + \vec{x}_{t2} + \vec{x}_{t3})}{\sqrt{3}}$ .

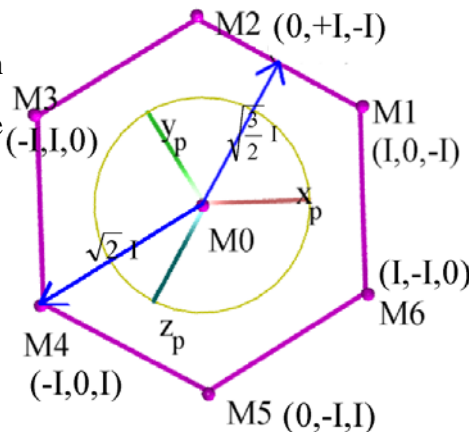


Figure 74

### I.2.2. Famille continue

Le domaine  $\mathcal{D}_{mt}$  correspondant à la famille continue  $\mathcal{F}_{mt} = \{ \overrightarrow{i_{tmoy}} \in \mathcal{E}_{i3} /$

$\overrightarrow{i_{tmoy}} = \sum_{r=0}^{r=6} \frac{t_r}{T} \overrightarrow{i_{tr}}$  avec  $T = \sum_{r=0}^{r=6} t_r$  } est **l'hexagone**  $[M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6]$  représenté

Figure 74 sur laquelle on a indiqué également les projections (orthogonales) respectives  $(\overrightarrow{x_p}, \overrightarrow{y_p}, \overrightarrow{z_p})$  des vecteurs  $(\overrightarrow{x_{t1}}, \overrightarrow{x_{t2}}, \overrightarrow{x_{t3}})$ .

On a en effet :

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{x_{t1}} - (\overrightarrow{x_{t1}} \cdot \overrightarrow{h}) \overrightarrow{h} = \frac{2}{3} \overrightarrow{x_{t1}} - \frac{1}{3} \overrightarrow{x_{t2}} - \frac{1}{3} \overrightarrow{x_{t3}} \\ \overrightarrow{y_p} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{x_{t1}} + \frac{2}{3} \overrightarrow{x_{t2}} - \frac{1}{3} \overrightarrow{x_{t3}} ; \\ \overrightarrow{z_p} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{x_{t1}} - \frac{1}{3} \overrightarrow{x_{t2}} + \frac{2}{3} \overrightarrow{x_{t3}} \end{cases}$$

Ces trois vecteurs sont de norme  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  et déphasés de  $120^\circ$ .

### I.3. Morphisme entre le modulateur et les sources de tension

Le modulateur impose les courants aux sources de tension. L'espace de départ du morphisme  $\mathcal{I}_t$  qui relie les vecteurs courants entre eux sera donc  $\mathcal{E}_{i3}^A$ , l'espace d'arrivée  $\mathcal{E}_{jt}^B$  :

$$\mathcal{I}_t : \mathcal{E}_{i3} \rightarrow \mathcal{E}_{jt}, \mathcal{I}_t(\overrightarrow{i_t}) = \overrightarrow{j_t} .$$

Au paragraphe I.2.1. on a vu que le sous espace vectoriel  $\mathcal{G}_{7t}$  engendré par la famille de vecteurs  $\mathcal{F}_{7t}$  est de dimension deux. La dimension maximale de son image par  $\mathcal{I}_t$  est alors également deux. Pour que les trois sources de tension puissent être commandées il faut donc réaliser un couplage qui réduise de trois à deux la dimension de l'espace vectoriel auquel appartiennent les vecteurs des sources de tension : un classique couplage en étoile sans neutre sorti permet par exemple cette réduction. Nous traitons dans la suite uniquement cet exemple.

On considère  $\mathcal{I}_t : \mathcal{E}_{i3} \rightarrow \mathcal{E}_{jt}, \mathcal{I}_t(\overrightarrow{i_t}) = \overrightarrow{j_t}$  avec les relations suivantes :

$$j_{t1} = i_{t1} ; j_{t2} = i_{t2} ; j_{t3} = i_{t3} .$$

---

<sup>A</sup> associé au modulateur

<sup>B</sup> associé aux sources

On remarque que si on confond les bases  $(\vec{x}_{t1}, \vec{x}_{t2}, \vec{x}_{t3})$  et  $(\vec{s}_{t1}, \vec{s}_{t2}, \vec{s}_{t3})$  alors  $\mathcal{T}_t$  n'est autre que l'identité. Il vient donc :

- le noyau de  $\mathcal{T}_t$  se réduit au vecteur nul. **Il n'y a donc pas contrairement au cas de l'onduleur de tension triphasé de « degré de liberté » supplémentaire.**
- l'image par  $\mathcal{T}_t$  de l'hexagone engendré par la famille  $\mathbf{F}_{mt}$  est donc également un hexagone aux caractéristiques identiques. Il suffit de remplacer les vecteurs de la base  $(\vec{x}_{t1}, \vec{x}_{t2}, \vec{x}_{t3})$  par ceux de  $\mathcal{E}_{3t} = (\vec{s}_{t1}, \vec{s}_{t2}, \vec{s}_{t3})$ .

**Conclusion :** si on désire pour la charge un vecteur courant  $\vec{j}_t = j_{t1} \vec{s}_{t1} + j_{t2} \vec{s}_{t2} + j_{t3} \vec{s}_{t3}$  dans la charge il y a une solution si  $\vec{j}_t$  appartient à l'hexagone image de l'hexagone  $[M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6]$ . Cette solution est **unique** c'est le vecteur courant  $\vec{i}_t = j_{t1} \vec{x}_{t1} + j_{t2} \vec{x}_{t2} + j_{t3} \vec{x}_{t3}$  qu'il suffit ensuite de synthétiser à l'aide du modulateur.

***Remarque 1 :** Puisque  $j_{t1} + j_{t2} + j_{t3} = 0$ ,  $\vec{i}_t$  peut encore s'exprimer par  $\vec{i}_t = j_{t1} \vec{x}_p + j_{t2} \vec{y}_p + j_{t3} \vec{z}_p$ . Or, les trois vecteurs  $(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  sont de norme  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  et déphasés de  $120^\circ$ , on retrouve donc une expression strictement équivalente à celle utilisée en utilisant les phaseurs complexes :  $\underline{j}_t = \sqrt{\frac{2}{3}} (j_{t1} + a j_{t2} + a^2 j_{t3})$  avec  $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ .*

***Remarque 2 :** on retrouve apparemment un résultat analogue à celui obtenu pour l'onduleur de tension triphasé : le domaine accessible par les vecteurs caractérisant la source est un hexagone. La différence réside dans le domaine engendré par les vecteurs caractérisant le modulateur : un cube pour l'onduleur de tension ou un hexagone pour l'onduleur de courant.*

#### 1.4. Commande aux valeurs moyennes

Nous avons implanté une commande aux valeurs moyennes au sein de l'onduleur de courant. On reprend la même démarche que celle décrite au Chapitre II II.4.5. et III.3.

Il faut décomposer le vecteur courant  $\vec{i}_t = j_{t1} \vec{x}_{t1} + j_{t2} \vec{x}_{t2} + j_{t3} \vec{x}_{t3}$  sur les 7 vecteurs de la famille  $\mathcal{F}_{7t}$ . La solution n'est pas unique puisque ces vecteurs appartiennent tous à un plan. Il est donc possible d'imposer des contraintes supplémentaires à la commande.

Ainsi, afin de réduire le nombre de commutations sur une période et d'obtenir un taux de distorsion faible de l'ondulation de courant, on cherche les coordonnées barycentriques de M sur un nombre minimum de points  $M_k$ , les plus proches de M.

Si M appartient à un segment  $[M_k M_j]$  alors la décomposition sur 2 points est possible :

$$\vec{OM} = \frac{t_k \vec{OM}_k + t_j \vec{OM}_j}{T} \text{ avec } 1 = \frac{t_k + t_j}{T} .$$

Sinon il faut chercher  $M_k, M_j$  et  $M_q$  les trois points les plus proches de M. Ce dernier appartient alors au triangle  $[M_k, M_j, M_q]$  :

$$\vec{OM} = \frac{t_k \vec{OM}_k + t_j \vec{OM}_j + t_q \vec{OM}_q}{T} \text{ avec } 1 = \frac{t_k + t_j + t_q}{T}$$

Pour réaliser cette étude on pourrait rester dans le plan au sein duquel se situe les 7 vecteurs. Néanmoins

l'expression de coordonnées barycentriques  $(t_k, t_j, t_q)$  sur trois points  $[M_k, M_j, M_q]$  est facilitée dans un espace de dimension 3.

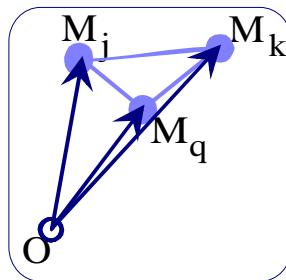


Figure 75

On considère donc un espace affine avec une origine O telle que les familles du type  $\{\vec{OM}_k, \vec{OM}_j, \vec{OM}_q\}$  soient libres (cf. Figure 75).

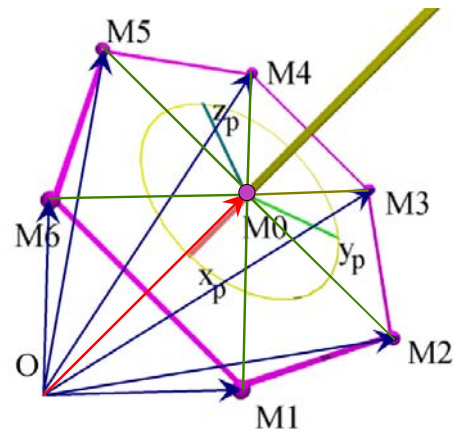


Figure 76

**I.4.1. Recherche des trois points les plus proches**

Nous présentons dans un premier temps une approche générale. Lors de l'implantation matérielle nous tiendrons compte du fait que les six triangles définissent un hexagone régulier afin d'obtenir des temps de calcul encore plus faibles.

Le problème équivaut à trouver auquel des six triangles suivants  $[M_1, M_0, M_2]$ ,  $[M_2, M_0, M_3]$ ,  $[M_3, M_0, M_4]$ ,  $[M_4, M_0, M_5]$ ,  $[M_5, M_0, M_6]$  et  $[M_6, M_0, M_1]$  le point M appartient-il ?

Il est à remarquer que chaque triangle définit un secteur angulaire  $(M_k, M_0, M_j)$ . Attribuons donc un numéro à chaque triangle et secteur (cf. Figure 77)



Trois tests suffisent à trouver dans lequel des six secteurs angulaires se situe le point M. Une fois déterminé le numéro du secteur il faut vérifier par un dernier test que M est bien à l'intérieur du triangle.

On commence donc par rechercher le numéro du secteur.

Rappelons à ce propos qu'un vecteur  $\overrightarrow{M_0M_1}$  permet de définir deux demi-plans et que deux vecteurs  $\overrightarrow{M_0M_2}$  et  $\overrightarrow{M_0M}$  appartiennent à un même demi-plan si et

seulement si les produits vectoriels  $\overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M_1}$  et  $\overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{M_0M_1}$  sont de même direction.

Par conséquent, l'évaluation les trois nombres suivants permet de trouver le numéro du secteur recherché :

$$\begin{cases} c_{123} = \left( \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M_1} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{M_0M_1} \right) = \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{u_{123}} \\ c_{234} = \left( \overrightarrow{M_0M_3} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \right) = \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{u_{234}} \\ c_{345} = \left( \overrightarrow{M_0M_4} \wedge \overrightarrow{M_0M_3} \right) \cdot \left( \overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{M_0M_3} \right) = \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{u_{345}} \end{cases} \text{ avec }^A,$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_{123}} = \overrightarrow{M_0M_1} \wedge \left( \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \overrightarrow{M_0M_1} \right) = \overrightarrow{M_0M_1}^2 \overrightarrow{M_0M_2} - \left( \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0M_2} \right) \overrightarrow{M_0M_1} \\ \overrightarrow{u_{234}} = \overrightarrow{M_0M_2} \wedge \left( \overrightarrow{M_0M_3} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \right) = \overrightarrow{M_0M_2}^2 \overrightarrow{M_0M_3} - \left( \overrightarrow{M_0M_2} \cdot \overrightarrow{M_0M_3} \right) \overrightarrow{M_0M_2} \\ \overrightarrow{u_{345}} = \overrightarrow{M_0M_3} \wedge \left( \overrightarrow{M_0M_4} \wedge \overrightarrow{M_0M_3} \right) = \overrightarrow{M_0M_3}^2 \overrightarrow{M_0M_4} - \left( \overrightarrow{M_0M_3} \cdot \overrightarrow{M_0M_4} \right) \overrightarrow{M_0M_3} \end{cases}$$

L'examen du signe de ces nombres permet en effet de conclure :

- si  $c_{123} > 0$  alors on se situe dans un des secteurs 1, 2 ou 3 ;
- si  $c_{234} > 0$  alors on se situe dans un des secteurs 2, 3 ou 4 ;
- si  $c_{345} > 0$  alors on se situe dans un des secteurs 3, 4 ou 5.

Il vient :

- si  $c_{123} > 0$  et  $c_{234} < 0$  et  $c_{345} < 0$  alors M appartient au secteur 1 ;
- si  $c_{123} > 0$  et  $c_{234} > 0$  et  $c_{345} < 0$  alors M appartient au secteur 2 ;
- si  $c_{123} > 0$  et  $c_{234} > 0$  et  $c_{345} > 0$  alors M appartient au secteur 3 ;
- si  $c_{123} < 0$  et  $c_{234} > 0$  et  $c_{345} > 0$  alors M appartient au secteur 4 ;
- si  $c_{123} < 0$  et  $c_{234} < 0$  et  $c_{345} > 0$  alors M appartient au secteur 5 ;
- si  $c_{123} < 0$  et  $c_{234} < 0$  et  $c_{345} < 0$  alors M appartient au secteur 6.

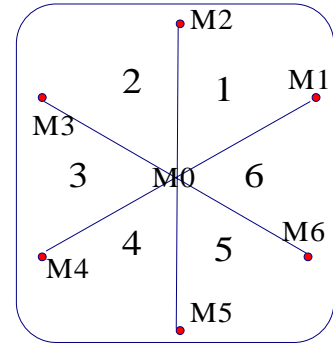


Figure 77

<sup>A</sup> Rappel :  $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{C} \wedge \vec{D}) \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{C} \cdot (\vec{D} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}))$

Enfin, cf. Chapitre II III.3.3. a. ii « Examen de l'appartenance à un hexagone », selon le numéro de secteur trouvé l'un des six tests suivants confirme ou infirme que le point M se situe dans l'hexagone :

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{u_1} \geq 0 & \text{confirme l'appartenance au triangle n°1 ;} \\ \overrightarrow{M_2M} \cdot \overrightarrow{u_2} \geq 0 & \text{confirme l'appartenance au triangle n°2 ;} \\ \overrightarrow{M_3M} \cdot \overrightarrow{u_3} \geq 0 & \text{confirme l'appartenance au triangle n°3 ;} \\ \overrightarrow{M_4M} \cdot \overrightarrow{u_4} \geq 0 & \text{confirme l'appartenance au triangle n°4 ;} \\ \overrightarrow{M_5M} \cdot \overrightarrow{u_5} \geq 0 & \text{confirme l'appartenance au triangle n°5 ;} \\ \overrightarrow{M_6M} \cdot \overrightarrow{u_6} \geq 0 & \text{confirme l'appartenance au triangle n°6 ;} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}^2 \overrightarrow{M_1M_3} - (\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}) \overrightarrow{M_1M_2}}{\overrightarrow{M_2M_3}^2} \\ \overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{M_2M_3}^2 \overrightarrow{M_2M_4} - (\overrightarrow{M_2M_3} \cdot \overrightarrow{M_2M_4}) \overrightarrow{M_2M_3}}{\overrightarrow{M_3M_4}^2} \\ \overrightarrow{u_3} = \frac{\overrightarrow{M_3M_4}^2 \overrightarrow{M_3M_5} - (\overrightarrow{M_3M_4} \cdot \overrightarrow{M_3M_5}) \overrightarrow{M_3M_4}}{\overrightarrow{M_4M_5}^2} \\ \overrightarrow{u_4} = \frac{\overrightarrow{M_4M_5}^2 \overrightarrow{M_4M_6} - (\overrightarrow{M_4M_5} \cdot \overrightarrow{M_4M_6}) \overrightarrow{M_4M_5}}{\overrightarrow{M_5M_6}^2} \\ \overrightarrow{u_5} = \frac{\overrightarrow{M_5M_6}^2 \overrightarrow{M_5M_1} - (\overrightarrow{M_5M_6} \cdot \overrightarrow{M_5M_1}) \overrightarrow{M_5M_6}}{\overrightarrow{M_6M_1}^2} \\ \overrightarrow{u_6} = \frac{\overrightarrow{M_6M_1}^2 \overrightarrow{M_6M_2} - (\overrightarrow{M_6M_1} \cdot \overrightarrow{M_6M_2}) \overrightarrow{M_6M_1}}{\overrightarrow{M_1M_2}^2} \end{cases}$$

#### I.4.2. Recherche des durées d'activation

Une fois déterminé le triangle il suffit de décomposer  $\overrightarrow{OM}$  selon les trois vecteurs pour obtenir les durées d'activation des vecteurs  $\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_j}$  et  $\overrightarrow{OM_q}$ . Puisque  $\{\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_j}, \overrightarrow{OM_q}\}$  est une famille libre la décomposition est alors unique :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{t_k \overrightarrow{OM_k} + t_j \overrightarrow{OM_j} + t_q \overrightarrow{OM_q}}{T}.$$

Les valeurs de  $t_k, t_j$  et  $t_q$  s'obtiennent simplement (cf. Chapitre II III.3.1.b.) par :

$$\diamond t_k = T \frac{\left( \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM_k} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{OM_q} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM_k} \right)} ;$$

$$\begin{aligned} \diamond t_j &= T \frac{\left( \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM_j} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{OM_k} \wedge \overrightarrow{OM_q} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM_k} \right)} \\ \diamond t_q &= T \frac{\left( \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM} \right)}{\left( \overrightarrow{OM_k} \mid \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{OM_k} \wedge \overrightarrow{OM_j} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM_k} \right)} \end{aligned}$$

*Remarque 2 : l'usage du produit mixte est intéressant dans la mesure où cette notion permet de **généraliser** l'étude à des cas où la dimension de l'espace est  $n$ .*

En choisissant O (cf. Figure 78) tel que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  soit orthogonal au triangle  $[M_j M_q M_k]$  les expressions précédentes se simplifient en :

$$\left\{ \begin{aligned} t_k &= T \frac{\left( \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{OM_q} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM_k} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{MM_j} \wedge \overrightarrow{MM_q} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{M_q M_k} \mid \overrightarrow{M_q M_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{MM_j} \wedge \overrightarrow{MM_q} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{M_q M_k} \wedge \overrightarrow{M_q M_j} \right) \cdot \overrightarrow{OM}} \\ t_j &= T \frac{\left( \overrightarrow{OM_q} \wedge \overrightarrow{OM_k} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM_k} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{MM_q} \wedge \overrightarrow{MM_k} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{M_q M_k} \mid \overrightarrow{M_q M_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{MM_q} \wedge \overrightarrow{MM_k} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{M_q M_k} \wedge \overrightarrow{M_q M_j} \right) \cdot \overrightarrow{OM}} \\ t_q &= T \frac{\left( \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{OM_k} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{OM_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \mid \overrightarrow{OM_k} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{MM_j} \wedge \overrightarrow{MM_k} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{M_q M_k} \mid \overrightarrow{M_q M_j} \mid \overrightarrow{OM_q} \right)} = T \frac{\left( \overrightarrow{MM_j} \wedge \overrightarrow{MM_k} \right) \cdot \overrightarrow{OM}}{\left( \overrightarrow{M_q M_k} \wedge \overrightarrow{M_q M_j} \right) \cdot \overrightarrow{OM}} \end{aligned} \right.$$

Puisque  $\left\| \left( \overrightarrow{MM_j} \wedge \overrightarrow{MM_q} \right) \right\|$  est égale au double de la surface du triangle  $[M_j M_q M]$  les

durées  $t_k$ ,  $t_j$  et  $t_q$  ne sont autres que des rapports de surfaces de triangles :

$$\left\{ \begin{aligned} t_k &= T \frac{\text{Surface}[M_j M_q M]}{\text{Surface}[M_j M_q M_k]} \\ t_j &= T \frac{\text{Surface}[M_k M_q M]}{\text{Surface}[M_j M_q M_k]} \\ t_q &= T \frac{\text{Surface}[M_j M_k M]}{\text{Surface}[M_j M_q M_k]} \end{aligned} \right.$$

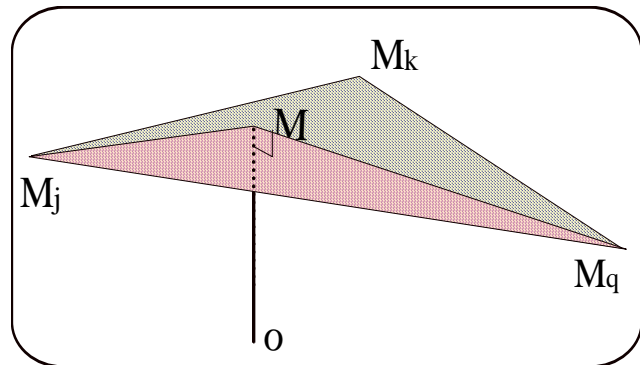


Figure 78, représentation graphique de la durée de conduction  $t_k$

## II. Implantation matérielle de l'onduleur de courant

### II.1. Contexte de la réalisation

#### II.1.1. Onduleur asservi en tension

Le système à contrôler, machine asynchrone avec condensateurs, présente deux circuits résonants (cf. Figure 79). Afin de pas exciter les deux fréquences<sup>A</sup> de résonance, il faut choisir une fréquence de Modulation de Largeur d'Impulsions relativement élevée ( en prenant  $f_{MLI} = 9669 \text{ Hz}$  on écarte les risques). Néanmoins, on observe en boucle ouverte, lors de régimes transitoires, des instabilités.

Par un asservissement de tension de l'onduleur de courant, Pour maîtriser des résonances, il faut éviter tout phénomène non linéaire qui implique une perte de contrôle prolongée de la commande. Ainsi, les phénomènes de saturation de la commande sont à éviter. Par ailleurs, contrairement aux onduleurs de tension, I, l'amplitude du courant de la source sera amenée à varier dans le temps. Lors de la synthèse du correcteur on tient compte de ces variations possibles. Ainsi, la valeur réelle du courant I est utilisée pour le calcul des valeurs des coefficients des correcteurs qui sont réévalués à chaque période  $T_c$  (1 ms).

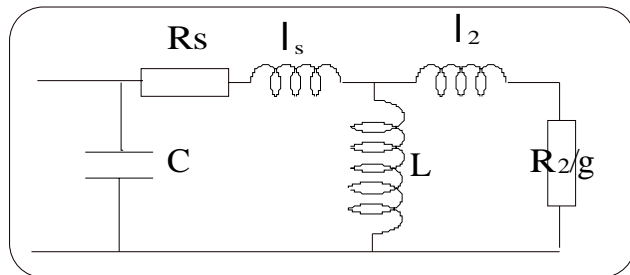


Figure 79

#### II.1.2. Source de courant

La source de courant de l'onduleur est obtenue à l'aide d'un pont PD3 six thyristors associée à une bobine de lissage. Par asservissement<sup>B</sup>, on contrôle la valeur moyenne du courant qui comporte évidemment une ondulation à 300 Hz. Par conséquent le courant I considéré jusqu'à présent ne sera pas rigoureusement constant. De plus, pour la commande de la machine asynchrone une variation de la valeur moyenne du courant I est elle-même

<sup>A</sup> Avec des capacités de  $66 \mu\text{F}$  la première fréquence est proche de 45 Hz, la deuxième se situe entre 140 et 160 Hz.

<sup>B</sup> Un correcteur P.I. avec une compensation partielle de la charge.

souhaitable. Néanmoins, l'approche reste valable dans la mesure où ces variations restent faibles pendant la période d'échantillonnage  $T_e$  de l'asservissement de tension.

### II.1.3. Conclusion

Étant donné la puissance limitée du microcontrôleur HC16 et la fréquence d'échantillonnage choisie il n'était guère possible de lui confier la commande rapprochée des interrupteurs. On préfère l'utiliser pour la réalisation des correcteurs des boucles d'asservissement présentes au sein du système.

Ainsi, le microcontrôleur se contente de fournir le numéro du triangle au sein duquel se situe le point M ainsi que les durées d'activation des vecteurs d'espace correspondants.

## II.2. Recherche du secteur et des durées d'activation

Nous avons présenté au Chapitre IV I.4.2. une approche relativement générale.

En tenant compte de particularités de l'onduleur de courant il est possible de réduire le nombre de calculs à effectuer. On utilisera particulièrement les faits suivants :

- tous les triangles sont identiques, équilatéraux et forment un hexagone ;
- le point  $M_0$  est commun à tous les triangles.

À chaque triangle  $(M_k, M_0, M_j)$  est associée la base **non** orthogonale directe  $(\overrightarrow{M_0M_k}, \overrightarrow{M_0M_j})$ . On recherche ensuite les coordonnées  $(p_{kj}, p_{jk})$  de  $\overrightarrow{M_0M}$  dans ces différentes bases (cf. chapitre II paragraphe III.3.1.a.) avec  $\overrightarrow{M_0M} = p_{kj} \overrightarrow{M_0M_k} + p_{jk} \overrightarrow{M_0M_j}$ . Ces coordonnées sont toutes deux positives si et seulement si M appartient au triangle associé à la base<sup>A</sup> (cf. Figure 80).

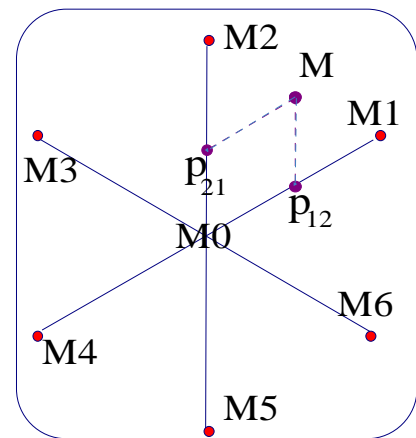


Figure 80

On démontre que ces coordonnées sont au signe près  $t_k/T$  et  $t_j/T$  deux des durées de conduction recherchées.

<sup>A</sup> C'est ce qui d'ailleurs a été observé au paragraphe Chapitre IV I.4.1. lors de l'examen des coefficients du type  $c_{123}$ ,  $c_{234}$  etc.

Démonstration :

Considérons  $M_0$  comme l'origine d'une base orthonormée  $(\vec{M}_0, \vec{x}, \vec{y})$ . On pose :  $\vec{M}_0\vec{M}_k = I \begin{pmatrix} x_k \\ \vec{x} + y_k \vec{y} \end{pmatrix}$  et  $\vec{M}_0\vec{M} = I \begin{pmatrix} x \\ \vec{x} + y \vec{y} \end{pmatrix}$  (cf. Figure 81).

Pour les différents sommets de l'hexagone, on obtient alors les coordonnées suivantes :

$$\square (x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.5\right) ; (x_2, y_2) = (0, 1) ; (x_3, y_3) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.5\right);$$

$$\square (x_4, y_4) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -0.5\right) ; (x_5, y_5) = (0, -1) ; (x_6, y_6) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -0.5\right);$$

Pour obtenir les coordonnées de  $M$  dans les six différentes bases non orthogonales du type  $(\vec{M}_0\vec{M}_k, \vec{M}_0\vec{M}_j)$  on utilise les résultats obtenus Chapitre II III.3.1.a. :

$$p_{kj} = T \frac{(\vec{M}_0\vec{M} \wedge \vec{M}_0\vec{M}_j) \cdot \vec{h}}{(\vec{M}_0\vec{M}_k \wedge \vec{M}_0\vec{M}_j) \cdot \vec{h}} \text{ et } p_{jk} = T \frac{(\vec{M}_0\vec{M} \wedge \vec{M}_0\vec{M}_k) \cdot \vec{h}}{(\vec{M}_0\vec{M}_j \wedge \vec{M}_0\vec{M}_k) \cdot \vec{h}}$$

avec  $\vec{h}$  vecteur orthogonal au plan engendré par les deux vecteurs  $\vec{M}_0\vec{M}_k$  et  $\vec{M}_0\vec{M}_j$ . cqfd

Puisqu'il y a six triangles et donc six bases, il faut a priori calculer 12 coordonnées. En réalité, on obtient au signe près seulement trois valeurs distinctes ( $p_a, p_b, p_c$ ) à rechercher (cf. Figure 81) car :

- tous les triangles ont même surface

$$\frac{\|\vec{M}_0\vec{M}_j \wedge \vec{M}_0\vec{M}_k\|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} I^2 ;$$

- les triangles sont adjacents et forment un hexagone régulier.

Il vient en effet en tenant compte de ces propriétés :

$$\diamond \begin{cases} p_{12} = -p_{45} = \frac{(x y_2 - y x_2)}{(x_1 y_2 - y_1 x_2)} = \frac{x}{\sqrt{3}/2} = \frac{2x}{\sqrt{3}} ; \\ p_{21} = -p_{54} = -\frac{(x y_1 - y x_1)}{(x_1 y_2 - y_1 x_2)} = -\frac{x}{\sqrt{3}} + y \end{cases}$$

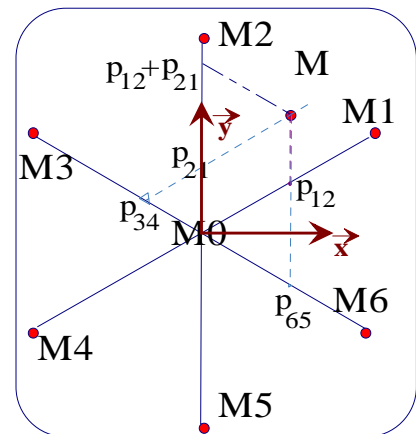


Figure 81

$$\begin{aligned} \diamond & \left\{ \begin{aligned} p_{23} = -p_{56} &= \frac{(x y_3 - y x_3)}{\sqrt{3}/2} = \frac{x}{\sqrt{3}} + y \\ p_{32} = -p_{65} &= -\frac{(x y_2 - y x_2)}{\sqrt{3}/2} = -\frac{2x}{\sqrt{3}} \end{aligned} \right. \\ \diamond & \left\{ \begin{aligned} p_{34} = -p_{61} &= \frac{(x y_4 - y x_4)}{\sqrt{3}/2} = -\frac{x}{\sqrt{3}} + y \\ p_{43} = -p_{16} &= -\frac{(x y_3 - y x_3)}{\sqrt{3}/2} = -\frac{x}{\sqrt{3}} - y \end{aligned} \right. ; \end{aligned}$$

S'en déduit le tableau suivant qui met en évidence la nécessité de ne calculer que trois projections :

$$\left\{ \begin{aligned} p_a = p_{12} = -p_{45} = -p_{32} = p_{65} &= \frac{2x}{\sqrt{3}} \\ p_b = p_{21} = -p_{54} = p_{34} = -p_{61} &= -\frac{x}{\sqrt{3}} + y \\ p_c = p_{23} = -p_{56} = -p_{43} = p_{16} &= \frac{x}{\sqrt{3}} + y \end{aligned} \right.$$

Tableau 3

Trois calculs au total (comportant chacun au plus 1 addition et 1 multiplication) seulement sont donc nécessaires.

Au sein du programme l'examen de la signature du triplet ( $p_a$ ,  $p_b$ ,  $p_c$ ) fournit le numéro du secteur (cf. Figure 82). Il reste ensuite à interpréter correctement les valeurs  $p_a$ ,  $p_b$  et  $p_c$ ). Deux d'entre elles correspondent en valeur absolue aux grandeurs positives  $t_k/T$  et  $t_j/T$  (cf. Tableau 3 et Figure 82). Quant à la troisième elle est égale là aussi en valeur absolue à la somme  $t_k/T + t_j/T$ .

Ainsi pour le triangle n°2,  $-p_a = p_{32} = t_3/T$ ,  $p_c = p_{23} = t_2/T$  et  $|p_b| = |p_a| + |p_c| = 1 - t_0/T$ .

On a implanté en langage assembleur HC16 le programme qui permet, à partir des coordonnées du vecteur courant désiré, de calculer les durées d'activation et de déterminer le numéro du triangle. Il est effectué en une durée de l'ordre de 11  $\mu$ s ( 180 cycles avec une horloge à 16,78 MHz).

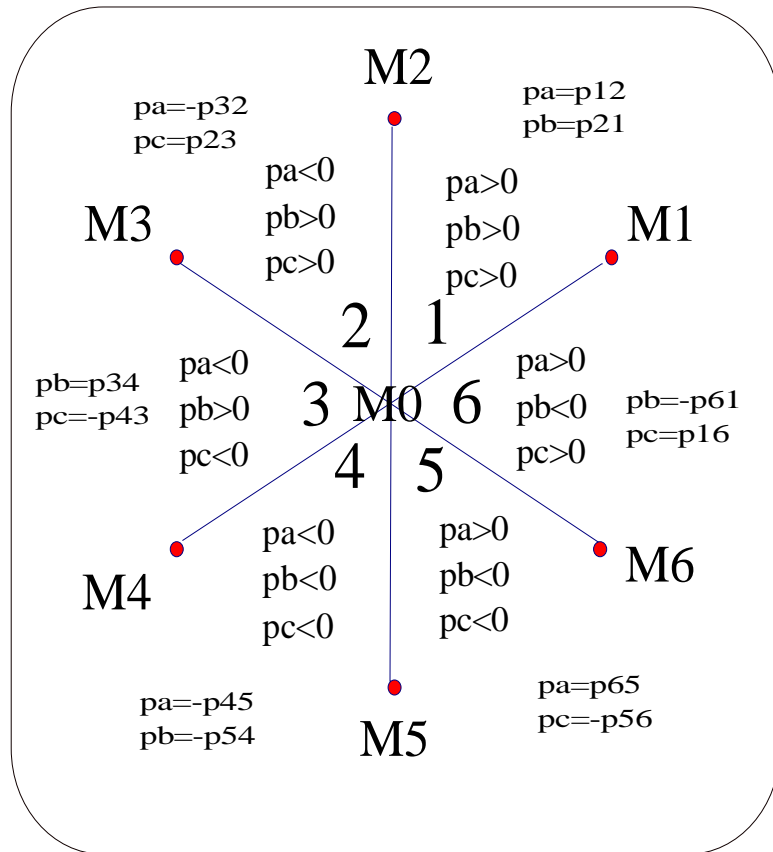


Figure 82, résultats de l'analyse du Tableau 3 en fonction de chaque triangle

### II.3. Prise en compte d'une consigne trop grande et des durées minimales de conduction

Les deux cas envisagés ont en commun de mener à un fonctionnement non linéaire de l'onduleur de courant.

#### II.3.1. Durée minimale de conduction

- Les transistors IGBT utilisés ont évidemment des durées de mise en conduction ( $t_{onmax} = 500 \text{ ns}$ ) et d'extinction ( $t_{offmax} = 1500 \text{ ns}$ ) non nulles. Dans notre cas, afin que l'approximation aux valeurs moyennes soit acceptable, on s'impose alors une durée minimale de conduction de  $4 \mu\text{s}$  (soit 3,8% de la période).

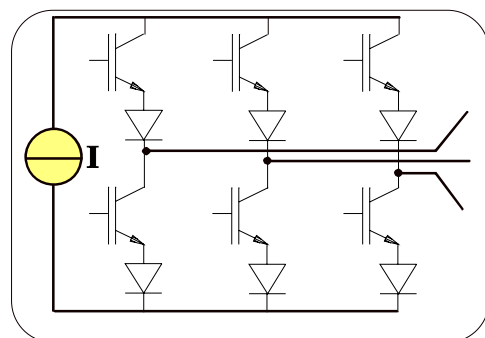


Figure 83



De ce fait lorsqu'une séquence  $M_0 M_j M_k$  est activée la zone permise pour le point  $M$  se réduit (cf. Figure 85).

Prenons par exemple en compte  $t_{kmin}$  la durée minimale d'activation du point  $M_k$ . En utilisant les résultats précédents il vient :

$$\frac{t_{kmin}}{T} = \frac{\text{Surface min}[M_j M_0 M]}{\text{Surface}[M_j M_0 M_k]} = \frac{h B}{H_s B} = \frac{h}{H_s} = \frac{2 h}{\sqrt{3} B} \text{ . (cf. Figure 85)}$$

- Pour traiter ce problème une homothétie  $f$  de centre  $G_{0kj}$  (centre de gravité du triangle équilatéral  $[M_0 M_j M_k]$ ) et de rapport  $k$  a été considérée. Elle transforme le triangle  $[M_0 M_j M_k]$  équilatéral en un autre triangle équilatéral qui délimite la zone permise  $[M_{0r} M_{jr} M_{kr}]$  (cf. Figure 84). À tout point  $M$  désiré, qu'il soit ou non dans une zone interdite, on fait correspondre un autre point  $M_r$  qui sera celui pris en compte effectivement lors du calcul des durées de conduction :

$$M_r = f(M) \text{ telle que } \overrightarrow{G_{0kj}M_r} = k \overrightarrow{G_{0kj}M} \text{ avec (cf. Figure 84),}$$

$$k = \frac{\|\overrightarrow{G_{0jk}M_{0r}}\|}{\|\overrightarrow{G_{0jk}M_0}\|} = \frac{\|\overrightarrow{G_{0jk}M_0}\| - \|\overrightarrow{M_0M_{0r}}\|}{\|\overrightarrow{G_{0jk}M_0}\|} = 1 - \frac{h/\sin 30^\circ}{\frac{2}{3}\|\overrightarrow{HM_0}\|} = 1 - \frac{3h}{\frac{\sqrt{3}}{2}B} = 1 - 2\sqrt{3} \frac{h}{B} = 1 - 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{3} t_{min}}{2 T}$$

soit :

$$k = 1 - 3 \frac{t_{min}}{T}$$

On peut en déduire les coordonnées de  $M_r$  dans la base  $(\overrightarrow{M_0M_k}, \overrightarrow{M_0M_j})$  :

$$\overrightarrow{M_0M_r} = \left[ \frac{t_{min}}{T} + \left(1 - \frac{3 t_{min}}{T}\right) p_{kj} \right] \overrightarrow{M_0M_k} + \left[ \frac{t_{min}}{T} + \left(1 - \frac{3 t_{min}}{T}\right) p_{jk} \right] \overrightarrow{M_0M_j}$$

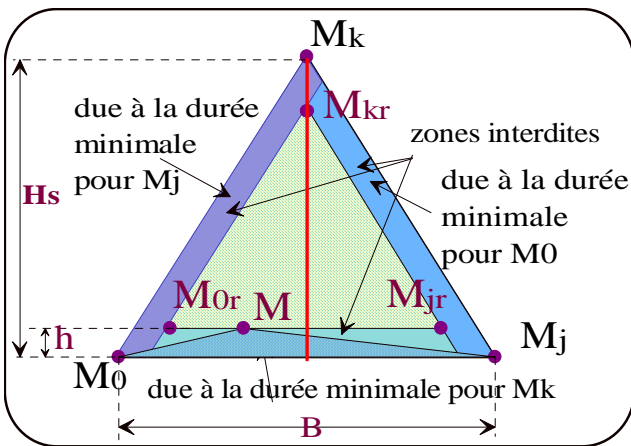


Figure 85

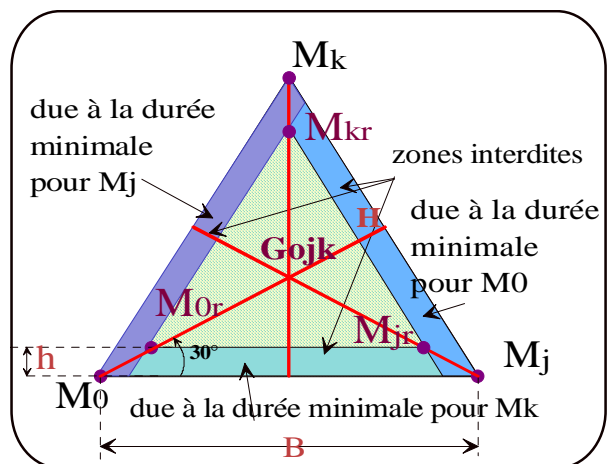


Figure 84

démonstration :

$$\overrightarrow{M_0M_r} = \overrightarrow{M_0G_{0kj}} + \overrightarrow{G_{0kj}M_r} = \overrightarrow{M_0G_{0kj}} + k \overrightarrow{G_{0kj}M} = (1-k) \overrightarrow{M_0G_{0kj}} + k \overrightarrow{M_0M} \text{ soit}$$

$$t : \overrightarrow{M_0M_r} = \frac{3 t_{\min}}{T} \overrightarrow{M_0G_{0kj}} + \left(1 - \frac{3 t_{\min}}{T}\right) \overrightarrow{M_0M} .$$

Étant donné que  $G_{0kj}$  est le centre de gravité de  $M_0 M_j$  et  $M_k$  on a :

$$\vec{0} = \frac{\overrightarrow{G_{0kj}M_j} + \overrightarrow{G_{0kj}M_k} + \overrightarrow{G_{0kj}M_0}}{3} \text{ et donc } \overrightarrow{M_0G_{0kj}} = \frac{\overrightarrow{M_0M_j} + \overrightarrow{M_0M_k}}{3} .$$

Il vient,  $\overrightarrow{M_0M_r} = \frac{t_{\min}}{T} (\overrightarrow{M_0M_j} + \overrightarrow{M_0M_k}) + \left(1 - \frac{3 t_{\min}}{T}\right) \overrightarrow{M_0M}$  soit encore :

$$\overrightarrow{M_0M_r} = \left[ \frac{t_{\min}}{T} + \left(1 - \frac{3 t_{\min}}{T}\right) p_{kj} \right] \overrightarrow{M_0M_k} + \left[ \frac{t_{\min}}{T} + \left(1 - \frac{3 t_{\min}}{T}\right) p_{jk} \right] \overrightarrow{M_0M_j}$$

*cqfd.*

Cette stratégie permet un traitement très simple du problème en évitant des discontinuités au niveau de la commande lors de l'entrée dans les « zones interdites ». Par contre, elle introduit une distorsion même lorsque M appartient à une zone permise.

### II.3.2. Prise en compte de la saturation de la commande

Supposons un vecteur courant désiré  $\overrightarrow{M_0M}$  dont la norme est telle que le point M ne soit pas à l'intérieur de l'hexagone. On considère alors une homothétie de centre  $M_0$  dont le rapport  $k_0$  est tel que  $M_{rs}$  le transformé de M appartient à la frontière de l'hexagone. Il reste à rechercher  $k_0$  tel que  $\overrightarrow{M_0M_{rs}} = k_0 \overrightarrow{M_0M}$

Lors de l'examen des projections  $p_a$ ,  $p_b$  et  $p_c$  on a vu que l'une d'entre elles correspond en valeur absolue à la somme  $t_k/T + t_j/T$ . Si elle est supérieure à 1 cela signifie que le point M n'appartient pas à l'hexagone. En effet dans le cas contraire la relation suivante est vérifiée  $t_k/T + t_j/T + t_0/T = 1$  et donc  $t_k/T + t_j/T < 1$ .

Il vient alors :

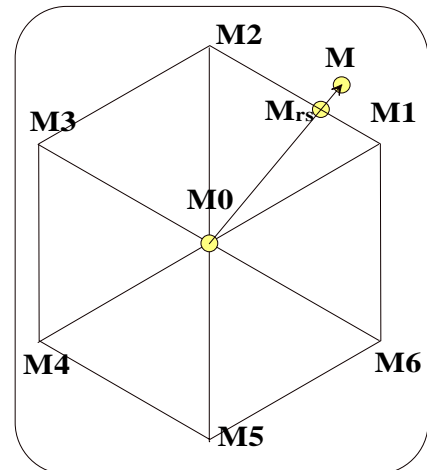


Figure 86

$$\overrightarrow{M_0 M_{rs}} = \frac{\overrightarrow{M_0 M}}{\text{Max}(|p_a|, |p_b|, |p_c|)}$$

### II.3.3. Résumé

Soit un point M désiré.

- on évalue alors le triplet  $(p_a, p_b, p_c)$  notamment les signes de  $p_a, p_b$  et  $p_c$  ;
- on en déduit le numéro du secteur auquel appartient ce point M ainsi que la somme  $t_k/T + t_j/T$  ;
  - si cette dernière est supérieure à 1 on obtient un nouveau point  $M_{rs}$  ;
  - sinon on conserve M ;
- on applique enfin à  $M_{rs}$  ou M, selon le cas, la transformation qui permet de tenir compte de la durée minimale de conduction.

La programmation en langage assembleur de la prise en compte de ces effets non linéaires requiert à peu près 150 cycles soit 9  $\mu$ s. Globalement c'est donc près de 20  $\mu$ s qui sont nécessaires à l'évaluation complète des durées de conduction, à la détermination du triangle et la prise en compte des non linéarités.

## II.4. Choix des séquences

On a trouvé les durées pendant lesquelles seront activés les différents vecteurs de la famille  $\mathbf{F}_{7t}$ . Il reste à choisir la chronologie adoptée sur une durée égale à la période T de la porteuse. On se fixe pour cela quelques contraintes à respecter :

- toute séquence débute par le point  $M_0$  (court-circuit de la source). En effet, puisque le point  $M_0$  est commun à tous les triangles, cette contrainte permet d'assurer une continuité (pas de commutation) lorsqu'on passe d'un triangle à un autre, adjacent ;
- on cherche à minimiser le nombre de commutations.

La séquence suivante est adoptée sur une période :  $M_0 M_j M_k$ . Il faut rappeler que le point  $M_0$  correspond à trois états différents des interrupteurs du modulateur. On choisira les combinaisons d'état des interrupteurs telles qu'il y ait commutation dans seulement une cellule lors du passage de  $M_0$  à  $M_j$  puis de  $M_k$  à  $M_0$ .

## II.5. Organisation matérielle pour la genèse des impulsions.

Pour la réalisation de la commande rapprochée on utilise principalement :

- un port (l'un des trois d'un circuit INTEL 8255) dans lequel le microcontrôleur vient inscrire le numéro du triangle ;
  - trois compteurs 16 bits (un circuit INTEL 8254) dont l'horloge est le signal Clk\* :
    - l'un crée un signal  $\overline{\text{Hz}}$  qui sert à définir la porteuse de la modulation de largeur d'impulsions. Sa fréquence  $f_{\text{MLI}}$  est proche de 9670 Hz ( $T = 103,4\mu\text{s}$ ) ;
    - les deux autres permettent de générer en mode monostable<sup>A</sup> les durées d'activation des vecteurs d'espace. Les signaux générés sont notés  $\overline{\text{Hu}}$  et  $\overline{\text{Hd}}$ .
  - une mémoire du type EEPROM 8 bits.
    - Quelques éléments sur les entrées<sup>B</sup>: elles proviennent des sorties des compteurs ( $\overline{\text{Hz}}, \overline{\text{Hu}}$  et  $\overline{\text{Hd}}$ ), de la sortie du port du 8255 (un mot de trois bits pour définir le numéro du triangle), de sorties de l'EEPROM (un mot de 4 bits représentant l'état actuel du modulateur) ;
- Quelques éléments d'information sur le mot de 8 bits en sortie : six bits<sup>C</sup> permettent de définir l'état des six interrupteurs du modulateur. Les deux autres bits restant sont utilisés comme suit :

l'un,  $\overline{\text{CC}}$ , permet de savoir si l'on est en court-circuit ( $\overline{\text{CC}} = 0$ ) ou non, l'autre X de distinguer les deux états de court circuit qui correspondent au même état des interrupteurs. Sur la Figure 88, on a représenté les 12 mots de sortie soient trois de plus que les 9 différents états du modulateur. Il a fallu en effet de tenir compte pour trois états relatifs au court-circuit que chacun

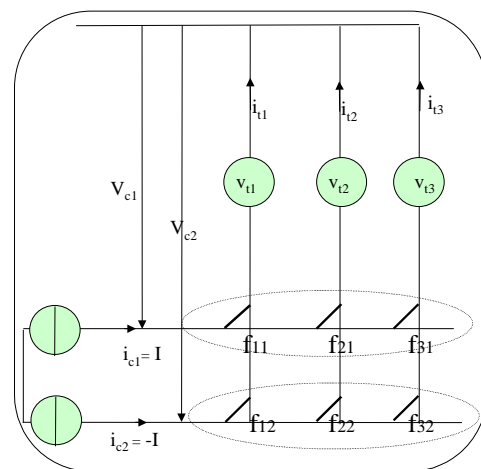


Figure 87

\* Le signal Clk a pour fréquence 2,475 MHz .

<sup>A</sup>  $\overline{\text{Hz}}$  est le signal appliqué aux entrées GATE des deux monostables du 8254.

<sup>B</sup> des bascules D sont en fait intercalées entre les sorties des composants (8255, 8254, EEPROM) et les entrées de l'EEPROM

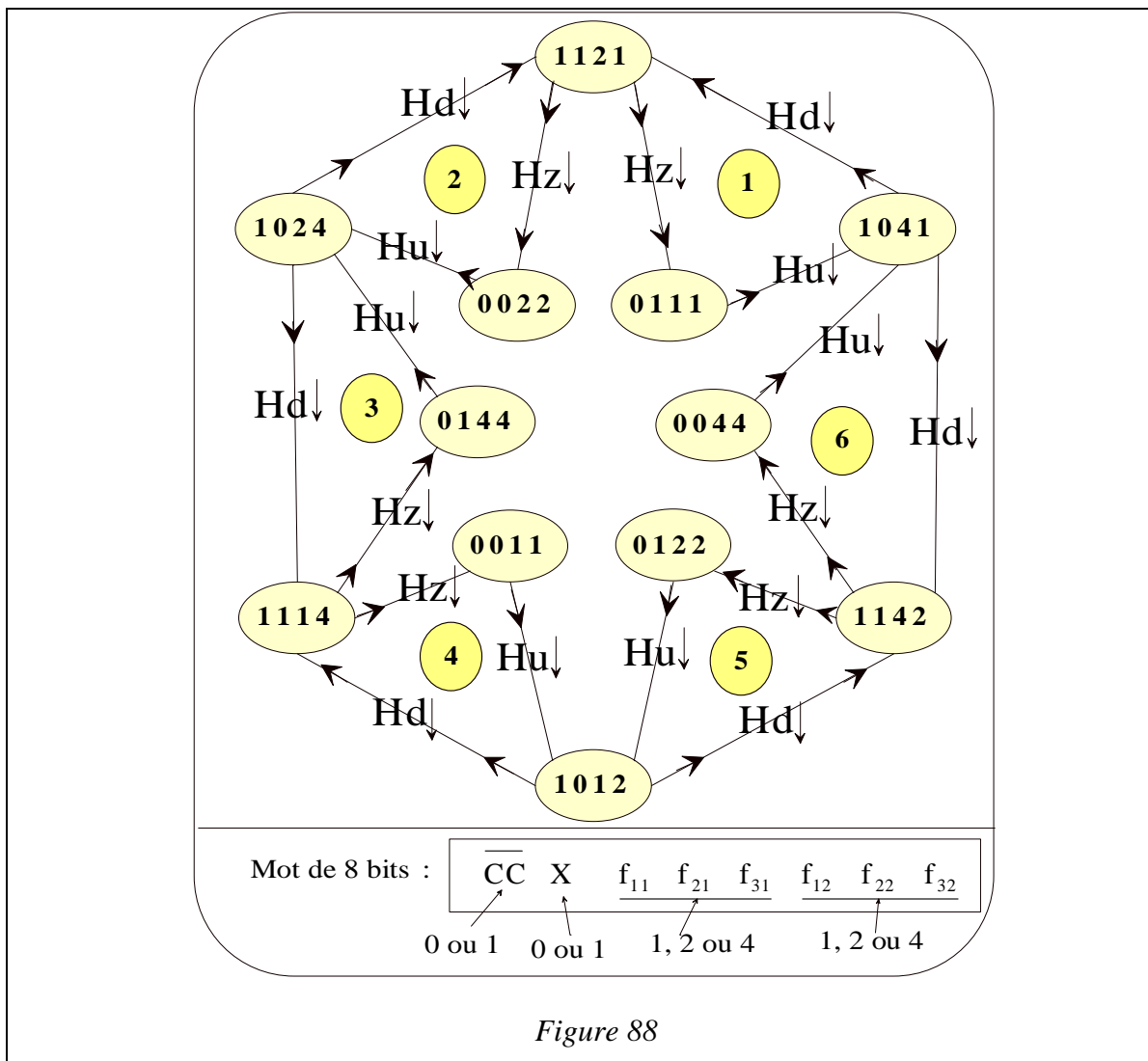
<sup>C</sup> les six bits  $f_{11}, f_{21}, f_{31}, f_{12}, f_{22}, f_{32}$  cf. Figure 87 caractérisent l'état de l'interrupteur;  $f_{ij} = 1$  s'il est fermé,  $f_{ij} = 0$  s'il est ouvert.

d'eux puisse appartenir à deux séquences distinctes (c'est le rôle du bit X).

On décrit l'information contenu dans un mot de 8 bits en sortie de l'EEPROM.

- une série de bascules D en entrée et en sortie de l'EEPROM servent d'étage tampon. Celles à l'entrée déclenchent sur front montant de l'horloge  $\overline{Hz}$  pour fournir alors le numéro du triangle délivré par le port A du 8255. Celles en sortie présentent à l'EEPROM un mot de quatre bits qui caractérise son état actuel.

*Remarque : Quelques buffers assurent la liaison entre microcontrôleur et circuits externes.*



## II.6. Chronogramme d'une période T

Avant chaque début de période sont déjà disponibles les durées de conduction ainsi que le numéro du triangle.

Le chronogramme des principaux signaux est donné Figure 89 :

- (2) Le passage à zéro de  $\overline{\text{Hz}}$  amorce le début d'une nouvelle période  $T$  ; l'état de court-circuit correspondant au triangle désiré est délivré par l'EEPROM (cf. Figure 88);
- (3) Le front montant de  $\overline{\text{Clk}}$  déclenche les bascules  $D$  en sortie de l'EEPROM. L'état de court-circuit débute alors effectivement.
- (4) Le front montant de  $\overline{\text{Hz}}$  a deux effets :
  - Les monostables chargent les durées qui permettent de définir celles d'activation des vecteurs d'espace ;
  - Les bascules  $D$  à l'entrée de l'EEPROM fournissent à cette dernière le numéro du nouveau triangle ;
- (5) Au front descendant de  $\overline{\text{Clk}}$ , les monostables commencent à décompter.
- (6) Lors du passage à zéro de  $\overline{\text{Hu}}$ , l'EEPROM change d'état (cf. Figure 88);
- (7) Le front montant de  $\overline{\text{Clk}}$  déclenche les bascules  $D$  en sortie de l'EEPROM. Le nouvel état de l'EEPROM débute alors effectivement.
- (8) Lors du passage à zéro de  $\overline{\text{Hd}}$ , l'EEPROM change d'état (cf. Figure 88);
- (9) Le front montant de  $\overline{\text{Clk}}$  déclenche les bascules  $D$  en sortie de l'EEPROM. Le nouvel état de l'EEPROM débute alors effectivement.

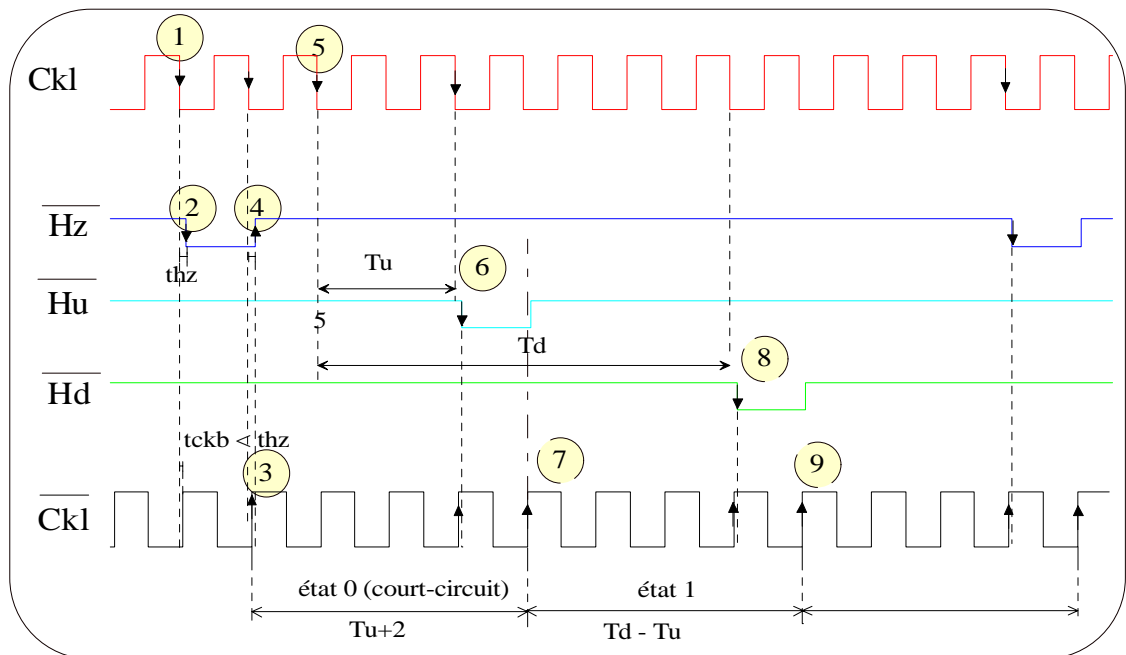


Figure 89

*Remarque :* quelques bascules D et portes logiques permettent d'assurer la compatibilité entre composants Motorola et Intel. Quelques buffers assurent la liaison entre microcontrôleur et circuits externes.

## II.7. Relevés expérimentaux

Nous présentons quelques relevés obtenus lors de l'étude de l'alimentation machine asynchrone – condensateurs. Le courant relevé n'est pas celui juste en sortie de l'onduleur mais le courant de ligne en aval des condensateurs. C'est donc, si l'on considère que tous les harmoniques de rang élevés du courant sont absorbés par les condensateurs\*, l'image moyenne du courant délivré par l'onduleur.

Voici quelques relevés du courant de ligne moteur avec le spectre correspondant :

- Consigne sinusoïdale de courant (sans saturation) (cf. Figure 90);

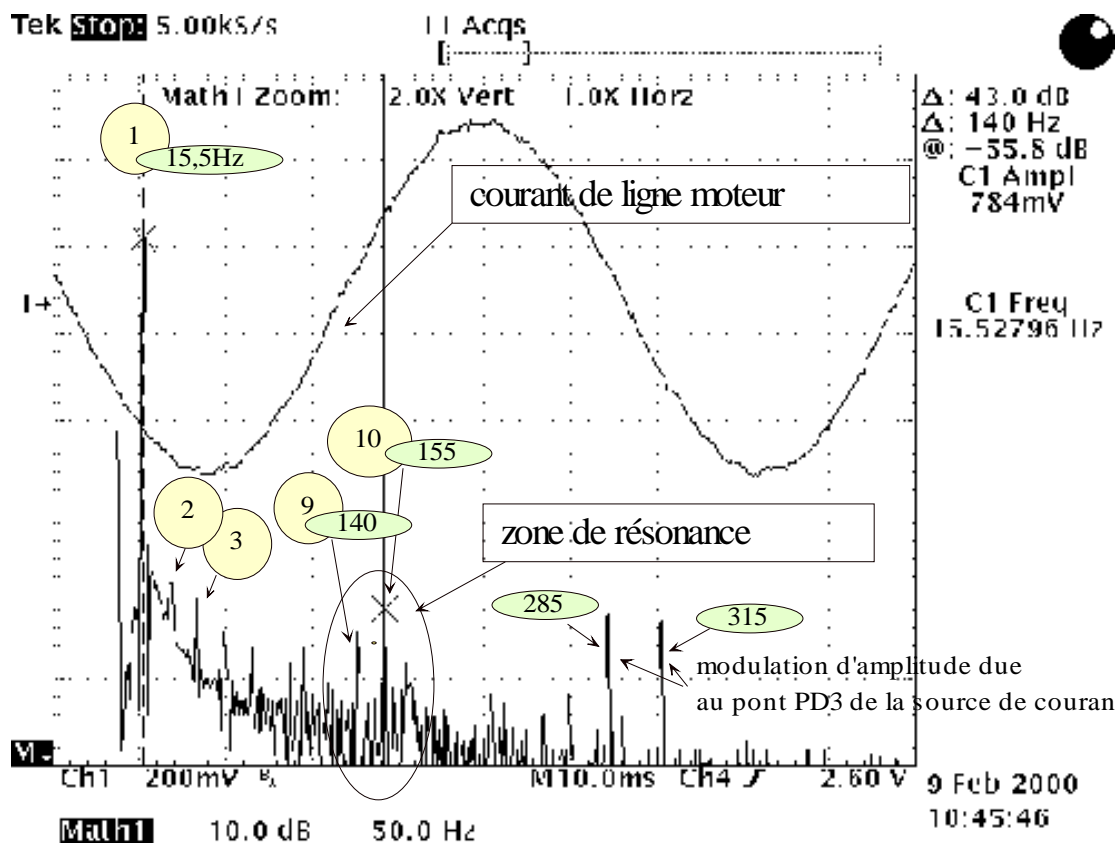


Figure 90, courant de ligne (100mV/A) dans le cas d'une consigne sinusoïdale ne menant pas à une saturation. On observe les harmoniques de rang 1,2, 3,5, 9, 10. Les harmoniques 9 et 10 appartiennent à la plage de résonance de la charge (140 et 155 Hz).

\* les condensateurs présentent au delà de 9 kHz une impédance bien plus faible que la machine et se comportent donc en filtre passe-bas.

- Consigne sinusoïdale de courant (avec saturation) (cf. Figure 91, Figure 92 et Figure 93);
- Consigne triangulaire de courant (cf. Figure 94).

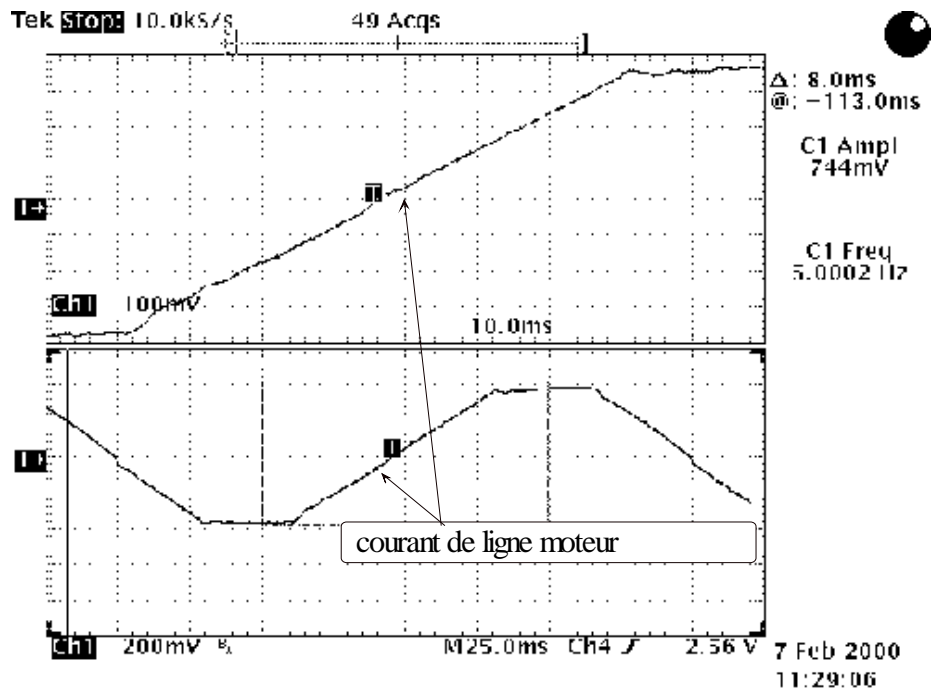


Figure 91, courant de ligne dans le cas d'une consigne sinusoïdale menant à une saturation. On décrit la frontière de l'hexagone.

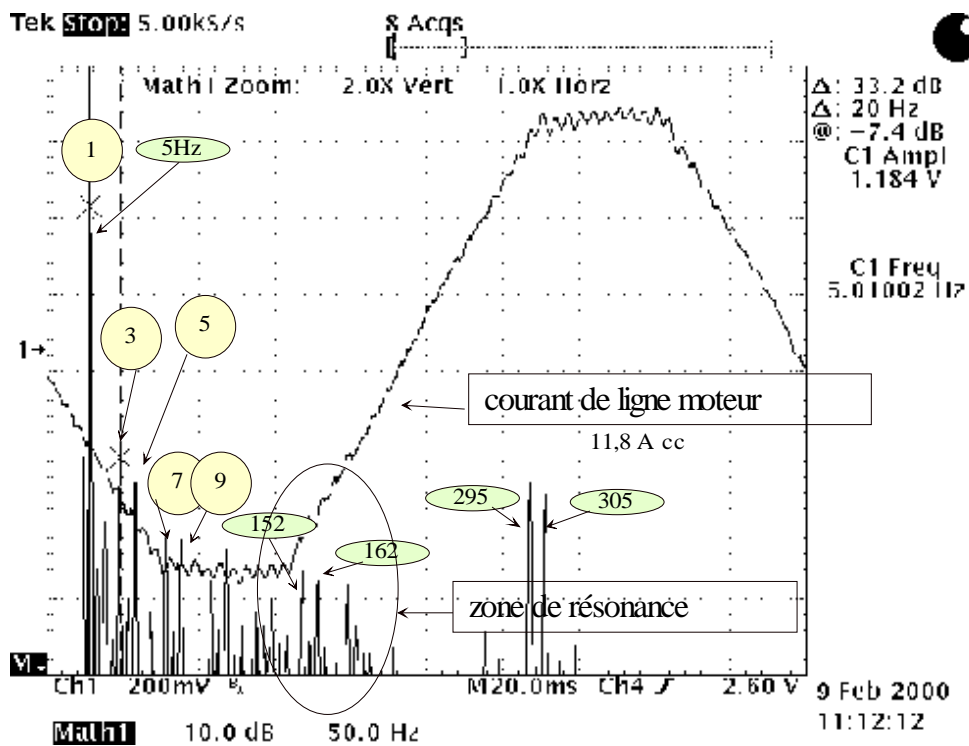


Figure 92, courant de ligne moteur avec spectre correspondant dans le cas d'une saturation de la commande.



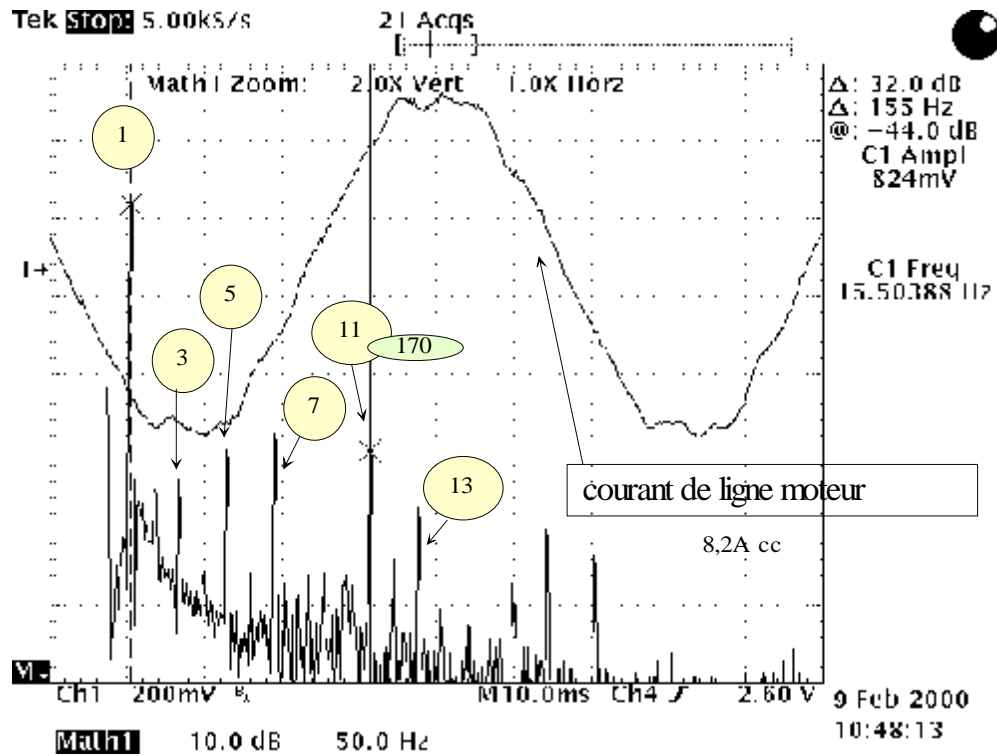


Figure 93, courant de ligne du moteur (et spectre associé) en réponse à une consigne sinusoidale à 15,5 Hz. Il y a saturation.

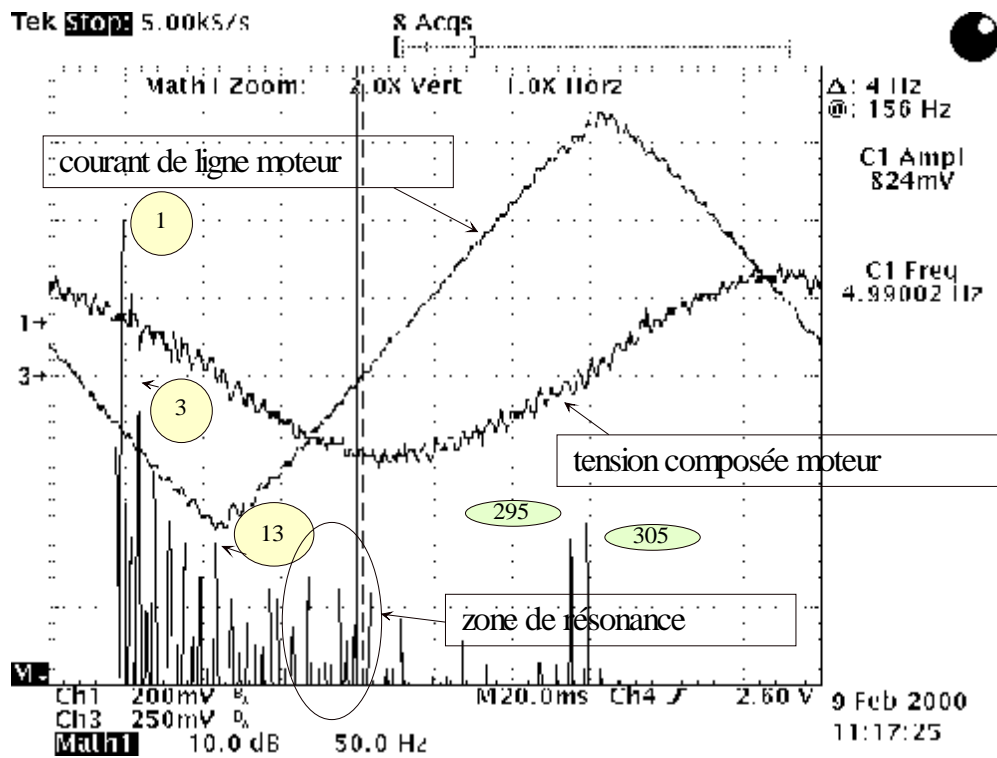


Figure 94, Courant de ligne du moteur avec son spectre et tension composée en réponse à une consigne triangulaire de courant.

## II.8. Conclusion

Dans ce chapitre on a mis en évidence comment l'usage du formalisme proposé mène pratiquement à un algorithme de commande de modulateur. Cette étude d'onduleur de courant permet également de montrer qu'il n'est pas question, comme c'est le cas pour l'onduleur de tension, d'envisager l'adjonction d'un quelconque harmonique trois ou homopolaire.

Enfin, plus généralement, l'approche vectorielle permet d'offrir des représentations graphiques, comme dans la représentation complexe, tout en proposant des méthodes de calcul adaptées aux **dimensions supérieures à deux**. Bien entendu, dans les cas simples abordés, existent des approches plus « intuitives », nécessitant moins d'outils mathématiques que ceux présentés. Notre démarche inductive a consisté à développer une méthode « générale » d'étude sur un exemple « simple ». Il reste donc à la mettre en œuvre dans des modulateurs plus complexes comme par exemple les onduleurs de tension à  $n$  bras.



## Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons proposé l'usage d'outils mathématiques qui permettent d'élaborer un formalisme vectoriel. Ce dernier bénéficie des propriétés graphiques et géométriques de la théorie des « vecteurs d'espace » tout en conservant la puissance du traitement matriciel. C'est pour la commande de systèmes polyphasés que cette approche devrait être la plus intéressante.

Pourtant, dans le chapitre 2 concernant des modulateurs d'énergie nous avons choisi volontairement de traiter deux onduleurs de tension très classiques. En effet, il est alors aisé de focaliser notre attention sur le nouvel éclairage créé par l'utilisation des concepts introduits. Il apparaît qu'il est possible de caractériser le modulateur indépendamment de ses sources et d'en déduire ainsi quelles sont ses capacités intrinsèques : par exemple un onduleur de tension deux niveaux triphasé permet de piloter une charge de « dimension trois » alors qu'un onduleur de courant triphasé, comportant pourtant autant d'interrupteurs, est limité à une charge de « dimension deux ». Par ailleurs, il est plus simple également de présenter certains calculs dans les cas familiers en montrant qu'ils conduisent aux résultats « habituels ». Ainsi, pour calculer les durées de conduction des interrupteurs, nous utilisons les notions de barycentres et de produit mixte. En dimension deux ou trois, il est encore possible de réaliser des descriptions graphiques qui permettent une représentation visuelle de ces notions. On obtient bien dans ces cas « simples » les résultats déjà établis par d'autres approches.

Après avoir traité les cas connus, il nous faudra donc dans une deuxième étape poursuivre l'exploitation du formalisme. L'étude par exemple d'onduleurs de tension comportant  $n$  bras qui alimentent une charge à  $n$  phases peut s'avérer intéressante ([19],[32],[54],[51]). Après avoir déterminé les degrés de liberté obtenus par les couplages mécaniques opérés entre phases, il faut les exploiter en élaborant des commandes optimales au sens d'un critère : par exemple, minimiser à la fois le nombre de commutations et la valeur efficace de l'ondulation de la tension sur une période de la porteuse de la M.L.I..

Au chapitre trois, c'est la machine triphasée asynchrone à cage qui nous permet, là encore donc au travers d'un exemple connu, de nous intéresser plus généralement aux machines dont les nombres de phases rotoriques et statoriques sont distinctes. Ensuite, nous avons choisi

parmi les machines polyphasées, celle dont le nombre de phases est juste suffisant pour mettre en évidence la spécificité de la machine triphasée. Même si elle n'est pour l'instant pas vraiment utilisée, l'étude de la machine pentaphasée (au stator et au rotor) nous fournit en effet des éléments intéressants sur les particularités de l'alimentation de ces charges polyphasées.

Ainsi, il est apparu que si l'on cherche à exploiter au mieux l'effet amplificateur magnétique qu'apporte l'usage de matériaux ferromagnétiques un « couplage électrique » est nécessaire. En effet, certaines composantes des courants injectés ne créent de flux que par l'intermédiaire des inductances de fuite. Une optimisation du rendement pourrait donc rechercher l'annulation de ces composantes. C'est d'ailleurs ce qui est réalisé pour la machine triphasée en réalisant un couplage « mécanique » du type triangle ou étoile sans neutre sorti : la composante homopolaire est annulée.

Là encore, on peut dégager d'autres pistes, non présentées dans ce mémoire, issues de l'exploitation du formalisme. Ainsi, dans l'optique de la réalisation de nouvelles machines, il peut être intéressant de chercher à simplifier la réalisation mécanique. Par exemple, l'utilisation d'enroulements diamétraux générerait certes des harmoniques de force magnétomotrice, mais qui pourraient être mis à profit pour créer du couple supplémentaire. Ainsi, l'exploitation l'harmonique trois pour la machine pentaphasée permettrait une augmentation de près de 10% du couple [61]. Bien sûr, la complexité dans ce cas est reportée au niveau de la commande. L'approche vectorielle peut alors faciliter la synthèse mais si on peut décomposer l'espace vectoriel associé à la machine en une somme de sous espace vectoriels orthogonaux entre eux, alors il est judicieux de considérer la machine polyphasée comme l'association de plusieurs machines, monophasées ou diphasées, **indépendantes**. On a affaire dans ce cas à un système « multi-machines ». La commande du modulateur qui lui est associé peut alors être élaborée par l'approche vectorielle développée dans ce mémoire.

## Bibliographie

- [1] **Akagi Hirofumi**, « *The State of Art of Power Electronics in Japan* », IEEE Transactions on Power Electronics, vol 13 n°2, pp 345-351, march 1998
- [2] **Amler G.**, « *A PWM Current-Sorce Inverter for high Quality Drives* », EPE Journal Vol1 n°1 july 1991
- [3] **Bausière R., Labrique, Séguier G.**, « *les convertisseurs de l'électronique de puissance : La conversion continu-continu* » tome 3 aux éditions Tec et Doc.
- [4] **Bhattacharya S., Resta L., Divan D., Novotny D.** « *Experimental Comparison of Motor Bearing Currents with PWM Hard and Soft Switched Voltage-Source Inverters* », IEEE Transactions on Power Electronics, vol 14 n°3, pp 552-561, may 1999
- [5] **Blasko V.** « *Analysis of a hybrid PWM based on modified space vector and triangle-comparison methods* », IEEE Transactions on industry applications, Vol. 33, n°3, May/june 1997
- [6] **Bouscayrol A.**, « *Structures d'alimentation et stratégies de commande pour des systèmes multimachines asynchrones*», Thèse de docteur de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, janvier 1995.
- [7] **Bouscayrol A., Pietrzak-David M., De Fornel B., Foch H.** « *Influence d'une modulation avec référence à valeur moyenne variable dans un ensemble convertisseur-machine.* » Journal de Physique III juin 1994
- [8] **Bühler H.** « *Réglage de systèmes d'électronique de puissance* » volume 3 : réseaux électriques aux presses polytechniques romandes
- [9] **Cacciato M., Consoli A., Scarcella G., Testa A.** « *A digital current control reducing common mode emissions* » Electrimacs'99 Lisboa
- [10] **Cambronne J.P., Hautier J.P.** « *Synthèse de la commande d'un onduleur de courant triphasé*» Journal de Physique III juin 1997
- [11] **Cambronne J.P., Le Moigne Ph, Hautier J.P.** « *Synthèse de la commande d'un onduleur de tension* » Journal de Physique III juin 1996 p757-777
- [12] **Chung Dae-Woong, Kim J-S, Sul S-K** « *Unified Voltage Modulation technique for real Time Three-Phase Power Conversion* » IEEE Transactions on Industry applications, Vol. 34, n°2, Mars/April 1998
- [13] **Duvaut P.** « *Traitement du signal* » aux éditions Hermes
- [14] **Flandrin P.** « *Temps - fréquence* » aux éditions Hermes collection traitement du signal.

- [15] **Flieller D.**, « *Étude de systèmes électrotechniques non linéaires échantillonnés. Application à la modélisation et à la commande de machine à réluctance variable à double saillance* », Thèse de docteur de l'Université de Paris 6, octobre 1995.
- [16] **Foch H., Forest F., Meynard T.** « *Onduleurs de tension. Structures. Principes. Applications.* » *Techniques de l'ingénieur, traité Génie Électrique. D3 176.*
- [17] **François B.**, « *Formalisme de modélisation et de synthèse des commandes appliqué aux convertisseurs statiques à structure matricielle* », Thèse de docteur de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, janvier 1996.
- [18] **François B., Cambronne J.P., Hautier J.P.** « *Caractérisation des convertisseurs matriciels : structure de l'automate de commande rapprochée* » *Journal de Physique III* mai 1996
- [19] **François B., Bouscayrol A.** « *Design and modelling of a five phase voltage source inverter for two induction motors* » *Electrimacs'99 Lisbon*
- [20] **Gateau G.**, « *Contribution à la commande des convertisseurs statiques multicellulaires série* », Thèse de docteur de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, septembre 1997.
- [21] **Grenier D.**, « *Modélisation et stratégies de commande de machines synchrones à aimants permanents à forces contre-électromotrices non-sinusoidale* », Thèse de docteur de l'École Normale Supérieure de Cachan, septembre 1994.
- [22] **Grenier D., Yala S., Louis J.P.** « *Définition d'extensions de la transformée de park pour la commande de moteurs synchrones à aimants permanents montés en surface* » *The European Physical Journal Applied Physics* 1998 n°1 p233-246
- [23] **Guillaud X., Hautier J.P.** « *Concepts de modélisation pour la commande des convertisseurs statiques* » *Journal de Physique III* avril 1994
- [24] **Habetler T., Profumo F., Pastorelli M., Tolbert L.** « *Direct Torque Control of Induction machines Using Space Vector Modulation* » , *IEEE Transactions on Industry Applications* vol 28 n°5, sep/oct 1992
- [25] **Habetler T.** « *A Space Vectro-Based Rectifier Regulator for AC/DC/AC Converters* » , *IEEE Transactions on Power Electronics* vol 8 n°1, jan 1993 p30-36
- [26] **Hautier J.P., Caron J.P.** « *Convertisseurs statiques* » *Méthodologies causale de modélisation et de commande*, aux éditions Technip
- [27] **Hava. A., Kerkman R., Lipo T.** « *Carrier-Based PWM-VSI Overmodulation Strategies : analysis, Comparison, and Design* » , *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol 13 n°4, pp674-689, july 1998

- [28] **Hava. A., Kerkman R., Lipo T.** « *Dynamic Overmodulation Characteristics of Triangle Intersection PWM Methods* », *IEEE Transactions on Industry Applications* vol 35 n°4, pp896-907, july/august 1999
- [29] **Holtz J.** « *Pulsewidth Modulation – A Survey* » - *IEEE Transactions on Industrial Electronics* vol 39 n°5, december 1992
- [30] **Holtz J.** « *Reduced Harmonics PWM Controlled Line-Side Converters for Electric Drives* » - *IEEE Transactions on Industry Applications* vol 29 n°4, july/august 1993
- [31] **Jacquot B.,** « *Conception, étude et réalisation des algorithmes de commande des systèmes de traction asynchrone pour les TGV de nouvelle génération*», Thèse de docteur de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, décembre 1995.
- [32] **Julian A., Oriti G., Lipo T.** « *Elimination of Common Mode Voltage in three phase sinusoidal Power Converters* » *IEEE Transactions on Power Electronics* vol 14 n°5, sep1999 p982-989
- [33] **Labrique F., Buyse M., Séguier G. , Bausière R.** « *les convertisseurs de l'électronique de puissance* » tome 5 « *Commande et comportement dynamique* ». aux éditions Tec et Doc.
- [34] **Le Huy H.**« *A adaptative current control Scheme for PWM Synchronous Motor Drives : analysis and Simulation* » *IEEE Transactions on Power Electronics* vol 4 n°4, jan 1989 p486-495
- [35] **Lemaire-Semail B.,** « *Contribution à la modélisation et à la commande des machines asynchrones*», *Habilitation à diriger des recherches de l'Université des Sciences et Technologies de Lille*, décembre 1997.
- [36] **Lesenne J.,** « *Contribution à l'étude des composantes relatives et à leur emploi pour l'étude analytique du moteur asynchrone alimenté par des montages à redresseurs* », *Thèse de docteur ès Sciences Physique de l'Université des Sciences et Technologies de Lille*, juin 1978.
- [37] **Letellier P.,** « *Les entraînements directs de fortes puissances et à très basses vitesses* », *La Conversion Électromécanique Directe* , 4 février 1999, ENS Cachan-SEE
- [38] **Lheonard W.**« *Control of Electrical Drives* » aux éditions Springer-Verlag
- [39] **Link P.** « *Minimizing Electric Bearing Currents in ASD Systems* » *IEEE Industry applications Magazine*, July/August 1999.
- [40] **Macdonald D., Gray W.** « *PWM Drive Related Bearing Failures* » *IEEE Industry applications Magazine*, July/August 1999.



- [41] **Martins C., Meynard T. Roboam X., Carvalho.** « *A predictive sampling scale model for direct torque control of the induction machine fed by multilevel voltage-source inverters* » *The European Physical Journal Applied Physics* 1999 n°5
- [42] **Menneron F. , Benkhoris M.F. , Guéraud A.** « *Modélisation et simulation d'une machine asynchrone double-étoile alimentée en tension pour la propulsion par POD* », *La conversion électromécanique directe* février 1999 ENS de Cachan.
- [43] **Meynard T.** « *Performances dynamiques des convertisseurs multiniveaux* », *Revue Internationale de Génie Électrique* n°1 1998
- [44] **Monmasson E., Faucher J.** « *Projet pédagogique autour de la M.L.I. vectorielle* », *Revue 3EI* n°8 mars 1997
- [45] **Moubayed N., Meybody-Tabar F., Davat B.** « *Alimentation par deux onduleurs de tension d'une machine synchrone double étoile* », *Revue Internationale de Génie Électrique* n°4 1998
- [46] **Moubayed N., Meybody-Tabar F., Davat B.** « *Study and simulation of magnetically coupled multi stator induction machine supplied by independent three phase voltage-source inverters* », *Electrimacs'99*
- [47] **Munoz A., Lipo T. Complex** « *Vector Model of the Squirrel-Cage Induction Machine Including Instantaneous Rotor Bar Currents* » *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol 35 n°6, pp 1332-1340, nov/dec 1999
- [48] **Papazian J.C. ,Rognon J.P., Roye D., Delbosc Ph.** « *Comparaison entre les différentes commandes d'un moteur asynchrone pour un véhicule électrique en vue de minimiser les pertes de l'onduleur* » *The European Physical Journal Applied Physics* 1998 n°2
- [49] **Pélissou C.,** « *Contrôle du couple d'une machine asynchrone pour la traction ferroviaire à moyenne et grande vitesse-transitions des modes de commandes et de MLI* », *Thèse de docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble*, juillet 1996
- [50] **Roger D.,** « *La machine asynchrone double étoile régimes transitoires alimentation à fréquence variable* », *Thèse de docteur de l'Université des Sciences et Technologies de Lille*, janvier 1993.
- [51] **Salem A., Kazmierkowski Marian** « *Simulink simulation of four-leg PWM inverters* » *Electrimacs'99 Lisboa*
- [52] **Séguier G., Bausière R.** « *les convertisseurs de l'électronique de puissance :La conversion continu-continu* » » tome 3 aux éditions Tec et Doc.

- [53] **Séguier G., Labrique F.** « *les convertisseurs de l'électronique de puissance : la conversion continu-alternatif* » tome 4 deuxième édition aux éditions Tec et Doc.
- [54] **Soares V., Verdelho P.** « *Simulation of current controllers for the three-leg and four-leg PWM Voltage converters* » *Electrimacs'99 Lisbon*
- [55] **Steinke J.** « *Switching Frequency Optimal PWM Control of a three-Level Inverter* » , *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol 7 n°3, pp 487-496, july 1992.
- [56] **Steinke J.** « *Use of an LC Filter to Achieve a Motor-friendly Performance of the PWM Voltage Source Inverter* » , *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol 14 n°3, pp 649-654, sept 1999.
- [57] **Sturtzer G., Flieller D., Louis J.P.** « *Extension de la transformée de Park appliquée aux moteurs synchrones à réluctances variable non sinusoidale* » *Colloque EF'99 Lille mars99*
- [58] **Tiitinen P., Pohjalainen P., Lalu J.** « *The next generation Motor Control Method : Direct Torque Control* » , *EPE Journal Vol 5 n°1 mars 1995*
- [59] **Toliyat H.A., T.A. Lipo, J.Coleman White** « *Analysis of a Concentrated Winding Induction Machine for Adjustable Speed Drive Application Part 1 (Motor Analysis)* » , *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol 6 n°4, pp679-683, 1991.
- [60] **Toliyat H.A.**, « *Analysis and Simulation of Five-Phase Variable –Speed Induction Motor Drives Under Asymmetrical Connections* » , *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol 13 n°4, pp748-756, 1998
- [61] **Toliyat H.A., Waikar S. P., Lipo T.A.**, « *Analysis and Simulation of Five-Phase Synchronous Reluctance Machines Including Third Harmonic of Airgap MMF* » , *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol 3 n°2, pp 332-339, 1998
- [62] **Vas P.** « *Electrical Machines and Drives, a Space-Vector theory approach* » Oxford Science publications
- [63] **Vilain J.P., Lesbroussard Ch.** « *Une nouvelle stratégie de modulation du vecteur d'espace pour un onduleur de tension triphasé : la modulation Delta Sigma Vectorielle* » *Journal de Physique III juin 1995*
- [64] **Zhao Y., Lipo A.** « *Space Vector PWM Control of Dual Three-Phase Induction Machine Using Space Vector Decomposition* » *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol 31 n°5, ,Sep/oct 1995







