



**HAL**  
open science

# Résultats exacts sur les modèles de boucles en deux dimensions

Yacine Ikhlef

► **To cite this version:**

Yacine Ikhlef. Résultats exacts sur les modèles de boucles en deux dimensions. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT : . tel-00268765

**HAL Id: tel-00268765**

**<https://theses.hal.science/tel-00268765v1>**

Submitted on 1 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PARIS XI – U.F.R. DES SCIENCES D'ORSAY

# Thèse de doctorat

*Spécialité :*  
Physique Théorique

*présentée par*  
**Yacine IKHLEF**

*pour obtenir le grade de*  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

*Sujet :*  
Résultats exacts sur les modèles  
de boucles en deux dimensions

*Soutenue le 27 Septembre 2007*  
*devant le jury composé de*

|                               |                           |
|-------------------------------|---------------------------|
| <b>M. Denis Bernard</b>       | <i>Examineur</i>          |
| <b>M. Jean-Michel Maillet</b> | <i>Examineur</i>          |
| <b>M. Jean-Bernard Zuber</b>  | <i>Examineur</i>          |
| <b>M. Paul Fendley</b>        | <i>Rapporteur</i>         |
| <b>M. Bernard Nienhuis</b>    | <i>Rapporteur</i>         |
| <b>M. Jesper Jacobsen</b>     | <i>Directeur de thèse</i> |
| <b>M. Hubert Saleur</b>       | <i>Membre invité</i>      |



---

**Résumé :**

En utilisant les méthodes analytiques et numériques de la Physique Statistique bidimensionnelle (matrice de transfert, invariance conforme, gaz de Coulomb, équations de Yang-Baxter, Ansatz de Bethe, Monte-Carlo), nous abordons des problèmes qui n'entrent pas dans le cadre du modèle gaussien compact : modèle de Potts antiferromagnétique critique, modèle de boucles de Brauer. Ces modèles présentent des propriétés critiques originales, comme l'apparition de degrés de liberté non-compacts. Ces propriétés apparaissent quand on introduit, dans le modèle de boucles sur réseau, des intersections entre les boucles ou une alternance des poids de Boltzmann entre les sous-réseaux. Dans le cas du modèle de Potts antiferromagnétique, nous développons l'étude de la structure issue des équations de Yang-Baxter, et nous identifions une famille d'états de Bethe associés aux degrés de liberté non-compacts. Les calculs numériques sur de grandes tailles de système permettent de conjecturer la loi d'échelle du rayon de compactification effectif. Dans le cas du modèle de Brauer avec une fugacité de boucles  $n = 0$ , nous proposons un modèle de chemin d'échappement invariant d'échelle, et nous déterminons ses propriétés critiques par des méthodes numériques. En tant qu'observable (non-locale), le chemin d'échappement caractérise les points communs et différences avec les marches aléatoires.

**Abstract :**

Using analytical and numerical methods of two-dimensional Statistical Mechanics (transfer matrix, conformal invariance, Coulomb gas, Yang-Baxter equations, Bethe Ansatz, Monte-Carlo), we tackle some problems which do not belong to the scope of the compact Gaussian model : critical antiferromagnetic Potts model, Brauer loop model. These models exhibit original critical properties, such as the appearance of non-compact degrees of freedom. These properties arise when one introduces loop intersections or staggered Boltzmann weights in the lattice loop model. In the case of the antiferromagnetic Potts model, we develop the study of the Yang-Baxter structure, and identify a family of Bethe states corresponding to the non-compact degrees of freedom. Numerical calculations for large system sizes allow us to state a conjecture about the scaling law for the effective compactification radius. In the case of the Brauer model with loop fugacity  $n = 0$ , we propose a model for a scale-invariant escape path, and we determine its critical properties by numerical methods. As a non-local observable, the escape path gives a characterization of similarities with and differences from random walks.



# Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier mon directeur de thèse, Jesper Jacobsen, ainsi que Hubert Saleur (qui a joué le rôle de codirecteur informel) pour leur disponibilité, leur pédagogie et leur enthousiasme. Ils m'ont fait profiter de leur expertise et de leur expérience, et j'ai beaucoup appris grâce à eux. J'ai fait la connaissance de Jesper lors de mon stage d'option, un an avant la thèse, et c'est au cours de ce stage que j'ai pris goût à la Physique Théorique.

Ensuite, je remercie les rapporteurs Paul Fendley et Bernard Nienhuis, ainsi que les examinateurs Denis Bernard, Jean-Michel Maillet et Jean-Bernard Zuber, d'avoir accepté ces responsabilités.

Je suis reconnaissant envers Bernard Nienhuis, avec qui j'ai pu interagir à Paris et à Amsterdam, et à Paul Pearce, qui m'a permis de participer à la conférence de Melbourne en Janvier 2007, une expérience très enrichissante, tant du point de vue des cours, des exposés, que des rencontres avec les chercheurs du domaine qui m'intéresse.

Je remercie également les laboratoires au sein desquels j'ai effectué ma thèse, le LPTMS à Orsay et le SPhT à Saclay. J'y ai reçu un très bon accueil, et j'ai pu profiter de l'ambiance stimulante qui y règne. A Saclay, j'ai eu la chance de rencontrer Constantin, un jeune plein d'énergie et d'enthousiasme. A Orsay, je ne sais par qui commencer... il y a Thierry notre défenseur du bon goût, Jérôme (comme dans la chanson), Mélanie et sa bonne humeur, Brice qui a toujours la pêche. Sur ces bonnes paroles, j'ai aussi une pensée pour Michel et son édito quotidien, et Benjamin, *mi amigo*.

Enfin, un grand merci à mes parents et à ma soeur pour leur soutien. Une pensée affectueuse à ma femme Soraya.



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Résumé/Abstract</b>   | <b>3</b>  |
| <b>Remerciements</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Table des matières</b>  | <b>8</b>  |
| <b>Introduction</b>  | <b>9</b>  |
| <b>1 Modèles statistiques bidimensionnels</b>                        | <b>13</b> |
| 1.1 Introduction : lois d'échelle et exposants de fuseau . . . . .   | 13        |
| 1.2 Modèles exactement solubles . . . . .                            | 15        |
| 1.3 Des modèles avec une limite continue non-compacte . . . . .      | 28        |
| <b>2 Matrice de transfert</b>  | <b>37</b> |
| 2.1 Formalisme de la matrice de transfert . . . . .                  | 37        |
| 2.2 Modèle gaussien . . . . .  | 43        |
| 2.3 Equations de Yang-Baxter et Ansatz de<br>Bethe . . . . .         | 49        |
| 2.4 Exemple d'Ansatz de Bethe : la chaîne XXZ . . . . .              | 67        |
| 2.5 Ansatz de Bethe du modèle de Potts antiferromagnétique . . . . . | 79        |
| <b>3 Résultats sur deux modèles à limite continue non-compacte</b>   | <b>85</b> |
| 3.1 Modèle de Potts antiferromagnétique critique . . . . .           | 85        |
| 3.2 Chemin d'échappement dans le modèle de Brauer . . . . .          | 93        |



---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>4</b> | <b>Méthodes numériques</b>   | <b>99</b>  |
| 4.1      | Diagonalisation de la matrice de transfert . . . . .                                     | 99         |
| 4.2      | La méthode de McCoy <i>et al.</i> . . . . .  | 109        |
| 4.3      | Résolution numérique des équations de Bethe . . . . .                                    | 115        |
| 4.4      | Simulations Monte-Carlo . . . . .  | 118        |
| <b>5</b> | <b>Conclusion et Perspectives</b>  | <b>127</b> |
| <b>6</b> | <b>Summary</b>   | <b>133</b> |
|          | <b>Articles</b>  | <b>139</b> |
|          | <i>Classical dimers with aligning interactions on the square lattice</i>                 | 141        |
|          | <i>Non-intersection exponents of fully packed trails on the square lattice</i> . . . . . | 167        |
|          | <i>A staggered six-vertex model with non-compact continuum limit</i>                     | 191        |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>239</b> |

# Introduction

L'étude des phénomènes critiques en deux dimensions a connu de grands progrès, notamment suite aux résultats liés à l'invariance conforme [1, 2, 3, 4]. De nombreux problèmes, comme les transitions de phase dans les systèmes ferromagnétiques [5, 6, 7], la percolation [8], les polymères [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18], les marches hamiltoniennes [16, 17, 18], les arbres couvrants et les dimères [19, 20, 21, 22, 23, 24, 76], ont été identifiés avec des modèles de boucles sans intersections sur réseau. D'une part, cette identification fournit une description des objets étendus apparaissant dans le modèle initial (par exemple, les amas de spins dans le modèle de Potts). D'autre part, ces modèles de boucles admettent une représentation en modèles de hauteurs [10], et la théorie critique associée est essentiellement un modèle gaussien compact [25, 26, 27] (éventuellement à plusieurs composantes [28, 29, 15, 17]). Ainsi, le comportement de l'énergie libre et des fonctions de corrélation (autrement dit, le spectre de la matrice de transfert) dans le problème initial est décrit par cette théorie. Dans certains cas, le spectre de la matrice de transfert en taille finie se prête à des approches rigoureuses : Ansatz de Bethe, intégrabilité [30], groupes quantiques [31], *etc.*

Certains modèles statistiques, représentant des phénomènes physiques intéressants, ne sont pas décrits par le modèle gaussien compact, et on ne connaît pas de cadre unifié pour classifier leurs propriétés critiques. Par exemple, le point critique antiferromagnétique du modèle de Potts [32, 33, 34, 77], ou les boucles denses avec intersections (modèle de Brauer [35, 36]). Leur point commun est de contenir, dans la limite continue, des degrés de liberté non-compacts (pouvant coexister avec des degrés de liberté compacts). Pour étudier ces modèles, on dispose d'outils analytiques, comme l'Ansatz de Bethe et la théorie des modèles- $\sigma$ . Ces approches permettent de formuler des conjectures solides sur la forme de la théorie critique correspondante. Des calculs numériques de grande précision (en particulier ceux basés sur l'Ansatz de Bethe [37]) étayent ces conjectures.

Le Chapitre 1 est consacré à des exemples de modèles statistiques bi-

dimensionnels sur réseau. Nous présentons quelques résultats connus sur les modèles reliés au modèle gaussien compact, en mettant l'accent sur les propriétés physiques. En contraste, des exemples de modèles moins bien compris sont exposés. Les propriétés essentiellement différentes par rapport aux précédents sont l'apparition de degrés de liberté non-compacts, et de niveaux infiniment dégénérés dans le spectre des dimensions conformes.

Le Chapitre 2 est plus technique, et décrit les méthodes analytiques utilisées dans ce travail de thèse : formalisme de la matrice de transfert, invariance conforme, modèle gaussien, équations de Yang-Baxter et Ansatz de Bethe. Nous illustrons plus précisément les méthodes de résolution sur l'exemple de la chaîne XXZ (comme limite anisotrope du modèle à six vertex homogène). Enfin, nous exposons la structure de l'Ansatz de Bethe du modèle à six vertex alterné associé au modèle de Potts antiferromagnétique critique. L'alternance des paramètres spectraux produit deux types de particules, et il apparaît une charge  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , qui échange ces deux types de particules. Ceci est remarquable, dans un modèle de vertex où une seule charge  $SU(2)$  (l'aimantation totale  $S^z$ ) est conservée.

Dans le Chapitre 3, nous exposons les nouveaux résultats obtenus au cours de ce travail de thèse, sur deux problèmes particuliers : le modèle de Potts antiferromagnétique critique, et le chemin d'échappement dans le modèle de Brauer. Sur le modèle de Potts antiferromagnétique, les principaux résultats sont :

- Le comportement asymptotique du rayon de compactification effectif dans la direction non-compacte :

$$\begin{aligned} R &\propto \ln N && \text{if } 0 < Q < 4 \\ R &\propto \sqrt{\ln N} && \text{if } Q \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où  $N$  est le nombre de sites sur la circonférence du cylindre.

- Le hamiltonien (3.1.1)-(3.1.2) dans la limite anisotrope.
- L'action explicite de la charge  $\mathbf{C}$  sur les états propres (3.1.33)-(3.1.34).
- Une proposition de méthode numérique pour déterminer la position des racines de Bethe dans d'autres secteurs.

Dans le modèle de Brauer, nous avons défini un modèle de chemin d'échappement invariant d'échelle, et proposé un diagramme de phase pour ce modèle. Nos principaux résultats numériques sont les exposants critiques de fuseau pour un nombre réduit de chemins :

---

| Nom         | Description                    | Valeur numérique |
|-------------|--------------------------------|------------------|
| $X_{(0,1)}$ | 1 boucle, 1 interface          | $0.04 \pm 0.005$ |
| $X_{(1,0)}$ | 1 brin, 1 interface            | $0.00 \pm 0.005$ |
| $X_{(0,2)}$ | 2 boucles, 2 interfaces        | $0.80 \pm 0.02$  |
| $X_{(1,1)}$ | 1 boucle, 1 brin, 2 interfaces | $0.50 \pm 0.008$ |
| $X_{(2,0)}$ | 2 brins, 2 interfaces          | $0.21 \pm 0.02$  |

et une estimation de la dimension fractale du chemin :

$$d_f \simeq 1.28$$

Enfin, dans le Chapitre 4, nous détaillons les méthodes numériques utilisées : diagonalisation de la matrice de transfert, méthode de McCoy *et al.*, méthode de Newton-Raphson, simulations Monte-Carlo.

Ce travail de thèse a donné lieu à trois publications :

F. Alet, Y. Ikhlef, J. L. Jacobsen, G. Misguich, V. Pasquier, *Classical dimers with aligning interactions on the square lattice*, Phys. Rev. **E74**, 041124 (2006)

Y. Ikhlef, J.L. Jacobsen, H. Saleur, *A staggered six-vertex model with non-compact continuum limit*, cond-mat/0612037, accepté par Nucl. Phys. B (2006)

Y. Ikhlef, J.L. Jacobsen, H. Saleur, *Non-intersection exponents of fully packed trails on the square lattice*, J. Stat. Mech. P05005 (2007)

Ces travaux conduisent à de nouvelles directions de recherche, qui prolongent ou généralisent les résultats apparaissant dans ces publications. Nous présentons quelques-unes de ces directions dans le Chapitre “Conclusion et Perspectives”.



# Chapitre 1

## Modèles statistiques bidimensionnels

### 1.1 Introduction : lois d'échelle et exposants de fuseau

Les marches aléatoires sont des problèmes facilement exprimables en termes de modèles statistiques sur réseau. Pour illustrer l'approche adoptée dans notre travail, nous prenons l'exemple des marches auto-évitantes (SAW = *self-avoiding walks*). Pour étudier ce problème, on définit un modèle sur réseau, qui code localement la contrainte d'auto-évitement. Il existe de nombreuses variantes [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] du problème des marches auto-évitantes, qui appartiennent à des classes d'universalité différentes. Les quantités qui caractérisent une classe d'équivalence sont les exposants critiques décrivant le comportement d'échelle du système. Nous sommes intéressés à obtenir la valeur exacte de ces exposants.

Définissons les exposants critiques dans le cas des SAW. Soit  $\langle R_l \rangle$  la distance moyenne entre les extrémités d'une marche de longueur fixée  $l$ , et  $\mathcal{N}_l$  le nombre de configurations de SAW de longueur  $l$ . Les exposants  $\nu, \gamma$  sont définis par les lois d'échelle [9] :

$$\langle R_l \rangle \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} l^\nu \quad (1.1.1)$$

$$\mathcal{N}_l \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} \mu^l l^{\gamma-1} \quad (1.1.2)$$

où  $\mu$  est la constante de connectivité effective. Dans les approches analytiques [10, 11], les exposants  $\nu$  et  $\gamma$  ne sont pas calculés directement : on

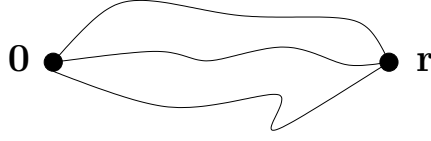


FIG. 1.1 – Représentation graphique de la fonction de corrélation de fuseau  $G^{(L)}(\mathbf{r}, \mathbf{0})$  pour  $L = 3$ .

utilise la relation entre  $\nu, \gamma$  d'une part, et les exposants de fuseau (*watermelon exponents*) d'autre part. L'exposant de fuseau  $X^{(L)}$  décrit la probabilité  $G^{(L)}(r)$  que deux points séparés d'une distance  $r$  soient reliés par  $L$  brins (voir figure 1.1) :

$$G^{(L)}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^{-2X^{(L)}} \quad (1.1.3)$$

Expliquons succinctement les relations entre  $(\nu, \gamma)$  et  $(X^{(1)}, X^{(2)})$ . On introduit le nombre de configurations  $\mathcal{N}_l(r)$ , où on fixe à la fois la longueur  $l$  et la distance bout-à-bout  $r$ . D'après (1.1.1) et (1.1.2),  $\mathcal{N}_l(r)$  est de la forme :

$$\mathcal{N}_l(r) = \mu^l l^{\gamma-1-\nu d} h\left(\frac{r}{l^\nu}\right) \quad (1.1.4)$$

où  $d = 2$  est la dimension d'espace, et  $h$  est une fonction d'échelle. Pour obtenir le comportement algébrique (1.1.3) des fonctions de corrélations, il faut introduire une fugacité  $\beta = \mu^{-1}$  par élément de longueur de la marche. Ainsi :

$$G^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \sim \int_0^\infty dl \mathcal{N}_l(r) \mu^{-l} \quad (1.1.5)$$

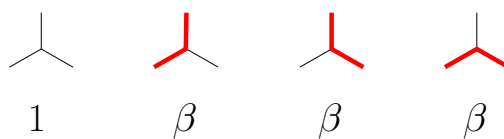
Cet argument d'échelle conduit à la relation :

$$X^{(1)} = 1 - \frac{\gamma}{2\nu} \quad (1.1.6)$$

La fonction à deux pattes  $G^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{0})$  est la probabilité que deux points pris au hasard appartiennent tous les deux à la marche. L'exposant  $X^{(2)}$  est donc relié à la dimension fractale  $d_f = \frac{1}{\nu}$  de la marche :

$$X^{(2)} = d - \frac{1}{\nu} \quad (1.1.7)$$

Ainsi, le calcul des exposants critiques  $\nu, \gamma$  se ramène à celui des exposants de fuseau  $X^{(1)}, X^{(2)}$ . En fait, les différentes méthodes de résolution exactes donnent accès, en général, à toute la série des exposants de fuseau  $X^{(L)}$ .

FIG. 1.2 – Poids de Boltzmann du modèle  $O(n)$  sur réseau hexagonal.

## 1.2 Modèles exactement solubles

### 1.2.1 Marches auto-évitantes

Dans ce paragraphe, nous exposons des résultats connus sur le problème des marches auto-évitantes. Un peu comme le modèle d'Ising en magnétisme, les marches auto-évitantes sont un archétype pour les modèles de boucles, sur lequel beaucoup de résultats analytiques sont disponibles [10, 11]. En particulier, le flot de renormalisation du paramètre extérieur  $\beta$  a une structure très différente de celle de la température dans le modèle d'Ising. Cette structure mérite d'être discutée ici, car elle apparaît également dans un modèle que nous avons étudié [78].

Pour plus de clarté, précisons le modèle sur réseau étudié. Il s'agit du modèle de boucles sur réseau hexagonal, défini par les poids de Boltzmann représentés sur la figure 1.2, et une fugacité de boucles  $n$ . Ainsi, la fonction de partition est :

$$Z(n, \beta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}} n^{N_b(\alpha)} \beta^{l(\alpha)} \quad (1.2.1)$$

où  $N_b$  est le nombre de boucles,  $l$  est la longueur totale des boucles, et la somme porte sur toutes les configurations de boucles sur le réseau. Ce modèle est couramment appelé *modèle  $O(n)$* . Il est introduit et résolu dans [10].

La marche auto-évitante unique correspond à la limite  $n \rightarrow 0$  :

$$Z_{\text{SAW}}(\beta) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z(n, \beta)}{n} \quad (1.2.2)$$

On considère un système de taille  $N$ . Supposons que les extrémités de la marche soient fixées, à une distance  $r$  l'une de l'autre ( $1 \ll r \ll N$ ). Le comportement qualitatif du système en fonction de  $\beta$  est le suivant.

- Quand  $\beta$  est très petit, les configurations de longueur minimale  $l = r$  sont favorisées. Les fluctuations de  $l$  au-dessus de la valeur minimale ont une longueur de corrélation *finie*, donc le modèle n'est pas critique.



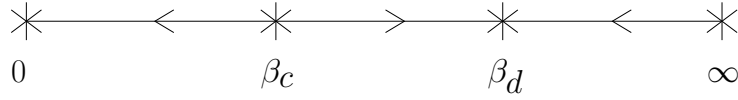


FIG. 1.3 – Flot de renormalisation de la fugacité de monomères  $\beta$  dans le modèle  $O(n)$ .  $\beta_c$  est la valeur critique de la fugacité, correspondant au point des polymères dilués.  $\beta_d$  est le point fixe qui gouverne le comportement de la phase des polymères denses. Ce diagramme est valable pour tout  $0 \leq n \leq 2$ .

| Modèle           | $X^{(L)}$                        | $\nu$         | $\gamma$        |
|------------------|----------------------------------|---------------|-----------------|
| polymères dilués | $\frac{3L^2}{16} - \frac{1}{12}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{43}{32}$ |
| polymères denses | $\frac{L^2}{16} - \frac{1}{4}$   | $\frac{1}{2}$ | $\frac{19}{16}$ |

TAB. 1.1 – Exposants critiques et exposants de fuseau des marches auto-évitantes.

- Quand  $\beta$  prend la valeur critique  $\beta_c$ , les fluctuations de longueur deviennent de l'ordre de  $r$ , et le système possède l'invariance d'échelle. Ce point critique est appelé *polymères dilués*.
- Quand  $\beta > \beta_c$ , la marche occupe une fraction finie du système. Le modèle est critique dans toute cette phase. Ce régime est appelé *polymères denses*.

Le flot de renormalisation de  $\beta$  est représenté sur la figure 1.3. Les résultats sur les exposants critiques sont résumés dans le tableau 1.1.

*Remarque.* Les résultats ci-dessus permettent de prévoir la réaction du système si on introduit des défauts permettant des intersections entre les brins. En effet, la dimension des intersections est  $X^{(4)}$ . Dans le cas des polymères dilués,  $X^{(4)} = \frac{35}{12} > 2$ , donc les intersections sont inessentiels au sens du groupe de renormalisation. En revanche, dans le cas des polymères denses,  $X^{(4)} = \frac{3}{4} < 2$ , donc l'énergie d'une intersection est un paramètre pertinent, et la présence d'intersections change la classe d'universalité.

## 1.2.2 Modèle de Potts auto-dual

### Introduction

Le modèle de Potts [5] est un modèle statistique de magnétisme. Il est défini par des degrés de liberté (*spins*) classiques, locaux, en interaction entre plus proches voisins. La fonction de partition peut être reformulée par un développement de haute température exact, pour donner un modèle d'amas : le modèle de Fortuin-Kasteleyn [6, 7]. Cette équivalence permet d'unifier dans un même modèle, des problèmes de Physique Statistique assez variés : percolation, arbres couvrants, boucles denses, modèle d'Ising, *etc.*

De plus, la formulation de Fortuin-Kasteleyn fait apparaître une *symétrie de dualité*. Dans le diagramme de phase du régime ferromagnétique, l'opération de dualité envoie la région de couplage fort vers la région de couplage faible, et *vice-versa*. Ainsi, le point *auto-dual* correspond à la transition critique du modèle de Potts ferromagnétique. En plus de cette caractérisation physique, l'intérêt du point auto-dual est qu'il est équivalent au modèle de Temperley-Lieb et au modèle à six vertex avec des poids de Boltzmann homogènes. Cette équivalence mène à la solution exacte du modèle par les méthodes de gaz de Coulomb et de l'Ansatz de Bethe.

### Définition, développement exact en haute température

Les spins du modèle de Potts sont des variables classiques  $\sigma_i$  vivant sur les sites du réseau. Chaque spin peut prendre  $Q$  valeurs :  $\sigma_i \in \{1, \dots, Q\}$ . On distingue les arêtes NO-SE (type 1) et NE-SO (type 2) : cf figure 1.4. L'énergie d'une configuration de spins et la fonction de partition correspondante sont :

$$\mathcal{E}[\{\sigma_i\}] = - \sum_{\langle ij \rangle_1} J_1 \delta_{\sigma_i \sigma_j} - \sum_{\langle ij \rangle_2} J_2 \delta_{\sigma_i \sigma_j} \quad (1.2.3)$$

$$Z_{\text{Potts}}(Q, J_1, J_2) = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\langle ij \rangle_1} e^{J_1 \delta_{\sigma_i \sigma_j}} \prod_{\langle ij \rangle_2} e^{J_2 \delta_{\sigma_i \sigma_j}} \quad (1.2.4)$$

où les symboles  $\langle \dots \rangle_1$  et  $\langle \dots \rangle_2$  désignent les liens de type 1 et 2. La fonction de partition se réécrit [6, 7] :

$$Z_{\text{FK}}(Q, v_1, v_2) = \sum_G Q^{C(G)} (v_1)^{N_1(G)} (v_2)^{N_2(G)} \quad (1.2.5)$$

où :

$$v_r \equiv e^{J_r} - 1, \quad r = 1, 2 \quad (1.2.6)$$

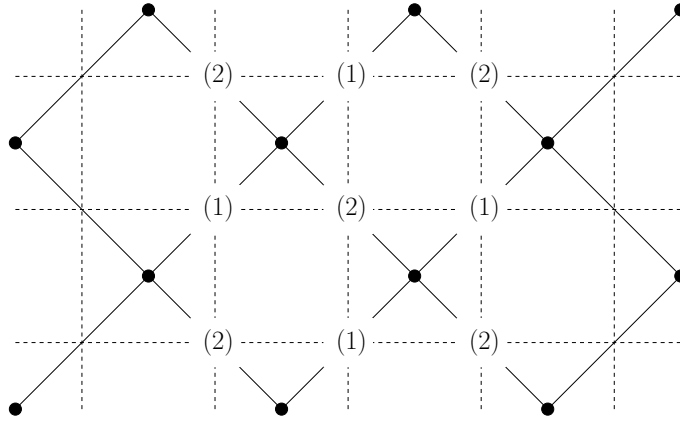


FIG. 1.4 – Réseau carré sur lequel est défini le modèle de Potts (traits pleins). Le réseau médial est représenté en traits discontinus.

et la somme porte sur tous les sous-graphes du réseau,  $C$  est le nombre de composantes connexes, et  $N_r$  est le nombre d'arêtes de type  $r$  occupées. Les configurations d'amas, munies des poids de Boltzmann apparaissant dans la somme (1.2.5), définissent le *modèle de Fortuin-Kasteleyn*. Cette formulation permet de donner au paramètre  $Q$  une valeur réelle quelconque. Le modèle a un comportement critique pour les valeurs  $0 \leq Q \leq 4$  [38]. Le diagramme de phase [38, 32] du cas isotrope  $v_1 = v_2$  est représenté sur la figure 1.5.

### Relation de dualité

On considère un réseau carré à  $N_s$  sites. Le modèle de Fortuin-Kasteleyn possède une symétrie de dualité [5]. Celle-ci a été d'abord mise en évidence dans le cas du modèle d'Ising [39]. La transformation de dualité sur les sous-graphes est définie de la manière suivante. Soit  $G$  un sous-graphe avec  $C$  composantes connexes,  $S$  cycles,  $N_1$  arêtes de type 1,  $N_2$  arêtes de type 2 (voir figure 1.4). Le graphe dual  $G'$  est un sous-graphe du réseau dual, dans lequel une arête est occupée si et seulement si elle croise une arête vide dans  $G$ . On note  $C', S', N'_r$  les valeurs correspondantes pour le sous-graphe  $G'$ . Grâce à la relation d'Euler :

$$S = C - N_s + N_1 + N_2 \quad (1.2.7)$$

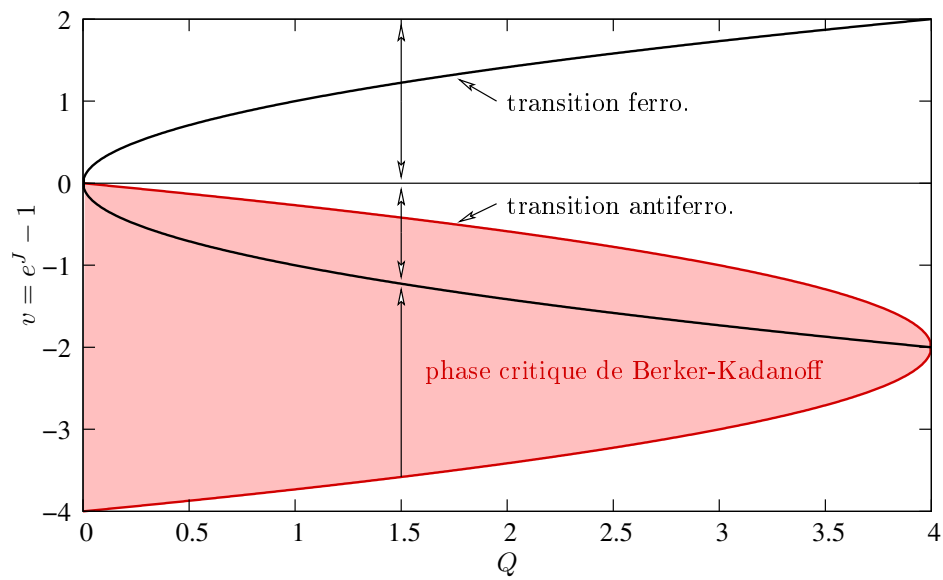


FIG. 1.5 – Diagramme de phase du modèle de Fortuin-Kasteleyn isotrope pour  $0 \leq Q \leq 4$ . Les flèches indiquent le sens du flot de renormalisation de la variable  $v$ . Les transitions critiques sont désignées d'après la formulation originale du modèle de Potts pour  $Q$  entier.

le poids de Boltzmann du graphe  $G$  dans la fonction de partition (1.2.5) s'écrit :

$$\omega(G) = Q^C v_1^{N_1} v_2^{N_2} \quad (1.2.8)$$

$$\omega(G) = \left( \frac{v_1 v_2}{Q} \right)^{N_s} Q^{C'} (v'_1)^{N'_1} (v'_2)^{N'_2} \quad (1.2.9)$$

où :

$$v'_1 = \frac{Q}{v_2}, \quad v'_2 = \frac{Q}{v_1} \quad (1.2.10)$$

Ainsi, la fonction de partition (1.2.5) vérifie l'identité :

$$Z_{FK}(Q, v_1, v_2) = \left( \frac{v_1 v_2}{Q} \right)^{N_s} Z_{FK}(Q, v'_1, v'_2) \quad (1.2.11)$$

Le point auto-dual est défini par la condition :

$$v_1 v_2 = Q \quad (1.2.12)$$

En particulier, dans le cas isotrope  $v_1 = v_2 = v$ , le point auto-dual du régime ferromagnétique est :

$$v_{AD} = \sqrt{Q} \quad (1.2.13)$$

La constante de couplage correspondante est :

$$J_{AD} = \ln(1 + \sqrt{Q}) \quad (1.2.14)$$

L'équivalence du point auto-dual (1.2.12) avec le modèle de Temperley-Lieb et le modèle à six vertex homogène (voir §1.2.3) permet de caractériser son comportement critique. Comme indiqué en introduction, le point auto-dual est le point de la transition paramagnétique/ferromagnétique du modèle de Potts. Cette transition est du second ordre pour  $0 < Q < 4$ . En particulier, cette approche donne accès aux exposants du modèle d'Ising ( $Q = 2$ ) et du modèle de Potts à trois états. Pour d'autres valeurs de  $Q$ , la formulation de Fortuin-Kasteleyn (1.2.5) permet de relier le point auto-dual (1.2.12) à d'autres problèmes de Physique Statistique, comme la percolation critique et le dénombrement des arbres couvrants.

### Modèle de Potts auto-dual à $Q = 1$ : percolation critique

Lorsque le poids d'un amas dans (1.2.5) est égal à  $Q = 1$ , on a le modèle de percolation de liens sur réseau carré [8]. Chaque lien est occupé avec une

probabilité  $p = \frac{v}{1+v}$ . La valeur critique est  $p_c = \frac{1}{2}$ , soit exactement le point auto-dual  $v = 1$ . Dans ce contexte, les exposants critiques sont définis par la divergence de la longueur de corrélation  $\xi$  et la taille moyenne des clusters  $\langle s \rangle$  au voisinage du point critique :

$$\xi \sim |p - p_c|^{-\nu} \quad (1.2.15)$$

$$\langle s \rangle \sim |p - p_c|^{-\gamma} \quad (1.2.16)$$

La relation avec le modèle gaussien (voir §2.2) permet de déterminer ces exposants critiques [40] :

$$\nu = \frac{4}{3} \quad (1.2.17)$$

$$\gamma = \frac{43}{18} \quad (1.2.18)$$

On connaît aussi des caractéristiques plus fines du modèle, comme la dimension fractale du bord d'un amas [41] :

$$d_H = \frac{7}{4} \quad (1.2.19)$$

### Modèle de Potts auto-dual à $Q \rightarrow 0$ : arbres couvrants

La relation d'Euler donne le nombre de faces internes  $S$  d'un graphe en fonction du nombre de composantes connexes  $C$ , du nombre d'arêtes  $N_b$  et du nombre de sites  $N_s$  :

$$S = C + N_b - N_s \quad (1.2.20)$$

Ainsi, la fonction de partition (1.2.5) devient :

$$Z_{FK} = v^{N_s} \sum_G \left( \frac{Q}{v} \right)^{C(G)} v^{S(G)} \quad (1.2.21)$$

Le point auto-dual (1.2.12) correspond à la limite :

$$Q \rightarrow 0 \quad (1.2.22)$$

$$v = \sqrt{Q} \quad (1.2.23)$$

Dans cette limite, la fonction de partition (1.2.21) est dominée par les configurations qui minimisent  $C$  et  $S$ . Ces configurations sont les *arbres couvrants*, c'est-à-dire les sous-graphes connexes sans cycle qui visitent tous les sites du réseau. Ainsi :

$$Z_{FK} \sim Q^{\frac{N_S+1}{2}} \mathcal{N}_{spt} \quad (1.2.24)$$

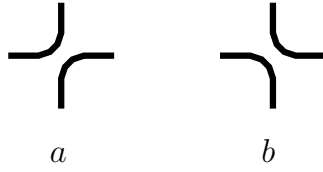


FIG. 1.6 – Les deux vertex qui définissent le modèle de boucles de Temperley-Lieb.

où  $\mathcal{N}_{spt}$  est le nombre de configurations d'arbres couvrants sur le réseau.

Ce modèle est dans la même classe d'universalité que les polymères denses. Un exemple d'exposant critique connu [42] dans ce modèle est la dimension fractale des *red bonds*, c'est-à-dire des arêtes de l'arbre qui, si elles sont supprimées, séparent l'origine de l'infini :

$$d_R = d - X^{(4)} = \frac{5}{4} \quad (1.2.25)$$

### Modèle de boucles de Temperley-Lieb

Le modèle de boucles de Temperley-Lieb est un modèle de boucles denses sans intersections sur réseau le carré. Il est défini par les poids de Boltzmann représentés sur la figure 1.6, et la fugacité  $n$  pour chaque boucle fermée. La fonction de partition est :

$$Z_{\text{boucles}}(n, a, b) = \sum_{\alpha} n^{C(\alpha)} a^{N_a(\alpha)} b^{N_b(\alpha)} \quad (1.2.26)$$

La somme porte sur toutes les configurations de boucles denses sur le réseau,  $N_a$  (*resp.*  $N_b$ ) est le nombre de vertex de type  $a$  (*resp.*  $b$ ), et  $C$  est le nombre de boucles fermées. Un exemple de configuration est donné dans la figure 1.7.

Le modèle de Fortuin-Kasteleyn (1.2.5) sur le réseau carré est équivalent au modèle de Temperley-Lieb [43] sur le réseau médial (voir figure 1.4). Les types d'arêtes 1 et 2 du réseau original correspondent aux sites des sous-réseaux 1 et 2 du réseau médial. Pour des valeurs quelconques de  $v_1, v_2$ , les poids de Boltzmann du modèle de boucles équivalent sont représentés sur la figure 1.8, avec :

$$x_r = \frac{v_r}{\sqrt{Q}}, \quad r = 1, 2 \quad (1.2.27)$$

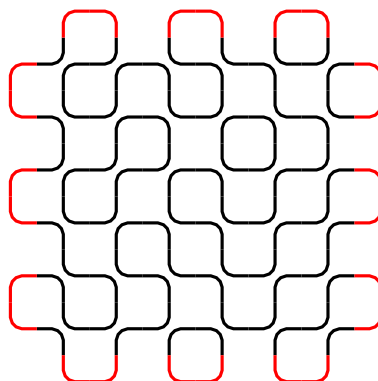


FIG. 1.7 – Exemple de configuration de boucles sur un réseau de  $6 \times 6$  sites, avec des conditions aux bords fixées.

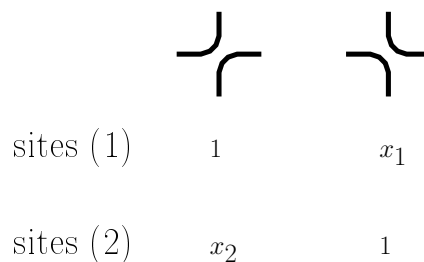


FIG. 1.8 – Poids de Boltzmann du modèle de boucles équivalent au modèle de Fortuin-Kasteleyn.

Le poids des boucles est :

$$n = \sqrt{Q} \quad (1.2.28)$$

En particulier, lorsque le modèle de Fortuin-Kasteleyn est auto-dual ( $x_1 x_2 = 1$ ), le modèle de boucles est homogène sur tout le réseau médial.

### 1.2.3 Modèle à six vertex

Dans le modèle de boucles de Temperley-Lieb, chaque boucle peut être orientée indépendamment de deux manières différentes. Posons :

$$n = 2 \cos \gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.2.29)$$

On donne à chaque boucle un poids  $e^{i\gamma}$  si elle tourne dans le sens trigonométrique, et  $e^{-i\gamma}$  si elle tourne dans le sens inverse (voir figure 1.9). Lorsque



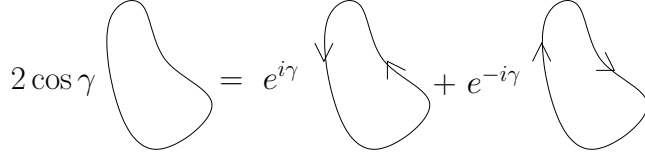


FIG. 1.9 – Orientation des boucles.

le modèle est défini sur un cylindre, les boucles se divisent en deux catégories : les boucles *contractibles*, qui peuvent être déformées continuellement en une boucle arbitrairement petite, et les boucles *non-contractibles*, qui sont les boucles qui font le tour du cylindre. Dans un premier temps, on considère une boucle contractible. A chaque vertex, la boucle tourne d'un angle  $\pm\pi/2$ . L'angle total de rotation est  $2\pi$  (*resp.*  $-2\pi$ ) si la boucle est orientée dans le sens trigonométrique (*resp.* antitrigonométrique). Donc on peut redistribuer localement le poids  $e^{\pm i\gamma}$ , en attribuant un poids  $e^{i\gamma/4}$  (*resp.*  $e^{-i\gamma/4}$ ) à chaque virage à gauche (*resp.* à droite). Les vertex de la figure 1.6, pourvus de flèches, sont interprétés [44] comme des configurations du modèle à six vertex (voir figure 1.10), avec les poids :

$$\omega_1, \dots, \omega_6 = 1, 1, x, x, e^{i\gamma/2} + xe^{-i\gamma/2}, e^{-i\gamma/2} + xe^{i\gamma/2} \quad (1.2.30)$$

Il est commode d'effectuer le changement de variables :

$$x = \frac{\sin u}{\sin(\gamma - u)}, \quad 0 \leq u \leq \gamma \quad (1.2.31)$$

En effet, le paramètre  $u$  peut être vu comme un angle géométrique (voir §2.3.7). On multiplie les poids (1.2.30) par un facteur global  $\sin(\gamma - u)$ . On obtient :

$$\omega_1, \dots, \omega_6 = \sin(\gamma - u), \sin(\gamma - u), \sin u, \sin u, e^{-i(u-\eta)} \sin \gamma, e^{i(u-\eta)} \sin \gamma \quad (1.2.32)$$

où  $\eta = \gamma/2$ . La relation entre les fonctions de partition est :

$$Z_{\text{boucles}}(n, x) = [\sin(\gamma - u)]^{-N_s} Z_{6V}(\gamma, u) \quad (1.2.33)$$

où  $N_s$  est le nombre de sites du réseau.

Les boucles non-contractibles ont un angle de rotation total égal à zéro, donc leur poids n'est pas comptabilisé correctement par cette procédure. Pour remédier à cette lacune, on introduit une ligne de coupure [25, 26] dans la direction infinie du cylindre, orientée du bas vers le haut (voir figure 1.11). Si

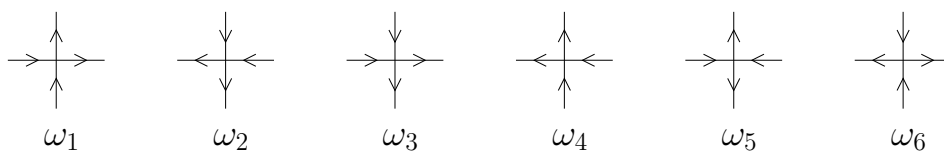


FIG. 1.10 – Les configurations du modèle à six vertex.

une boucle traverse la ligne de coupure de gauche à droite (*resp.* de droite à gauche), elle reçoit un facteur de phase, appelé *twist*, égal à  $e^{i\psi}$  (*resp.*  $e^{-i\psi}$ ). Les boucles contractibles ne sont pas affectées, car elles traversent la ligne de coupure autant de fois dans un sens que dans l'autre. Une boucle non-contractible reçoit le facteur de phase  $e^{\pm i\psi}$ , suivant son orientation. Donc la fonction de partition du modèle de boucles twisté est :

$$Z_{\text{boucles}}(n, \tilde{n}, x) = \sum_C n^{N_b(C)} \tilde{n}^{\tilde{N}_b(C)} x^{N_x(C)} \quad (1.2.34)$$

où la somme porte sur les configurations de boucles non orientées,  $N_b(C)$  est le nombre de boucles contractibles,  $\tilde{N}_b(C)$  est le nombre de boucles non-contractibles et  $N_x(C)$  est le nombre de vertex  $x$ . Les fugacités de boucles sont données par :

$$n = 2 \cos \gamma, \quad \tilde{n} = 2 \cos \psi \quad (1.2.35)$$

Les poids du modèle à six vertex correspondant sont donnés par (1.2.32) sur les colonnes  $1, \dots, N-1$ , et par :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_6 &= e^{i\psi} \sin(\gamma - u), e^{-i\psi} \sin(\gamma - u), e^{i\psi} \sin u, e^{-i\psi} \sin u, \\ &e^{-i(u-\eta+\psi)} \sin \gamma, e^{i(u-\eta+\psi)} \sin \gamma \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

sur la dernière colonne.

## 1.2.4 Dimères compacts en interaction sur réseau carré

### Dimères compacts, représentation en modèle de hauteurs

Les dimères compacts sont définis comme un coloriage des arêtes du réseau, où *chaque site doit être adjacent à exactement une arête coloriée*. Un exemple de configuration est donné sur la figure 1.12. Plusieurs méthodes de résolution [19, 20] ont été proposées pour ce modèle sans interactions. Elles permettent, en particulier, d'obtenir la densité d'énergie libre par site :

$$f = \frac{2G}{\pi} \quad (1.2.37)$$

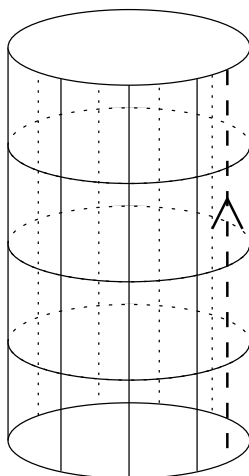


FIG. 1.11 – Réseau carré sur un cylindre. La ligne de coupure est représentée en trait discontinu.

où  $G$  est la *constante de Catalan* :

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \quad (1.2.38)$$

Ce modèle admet une représentation en hauteur. La règle définissant les hauteurs sur le réseau dual est la suivante : quand on tourne autour d'un site pair (voir figure 1.12) dans le sens trigonométrique, la hauteur reçoit un saut égal à  $\frac{3}{4}$  si l'arête traversée est occupée, et  $-\frac{1}{4}$  si elle est vide.

### Dimères en interaction

Dans le modèle ci-dessus, on introduit des interactions entre les dimères [23] :

$$Z = \sum_C \exp \left[ -\frac{H(C)}{k_B T} \right] \quad (1.2.39)$$

$$H(C) = -v [N_=(C) + N_{\parallel}(C)] \quad (1.2.40)$$

où la somme porte sur les configurations de dimères compacts, et  $N_=(C)$  (*resp.*  $N_{\parallel}(C)$ ) est le nombre de paires de dimères horizontaux (*resp.* verticaux) situés sur les côtés opposés d'une même face du réseau. Ainsi, lorsque l'énergie d'interaction  $v$  est positive, le modèle (1.2.39)-(1.2.40) favorise les

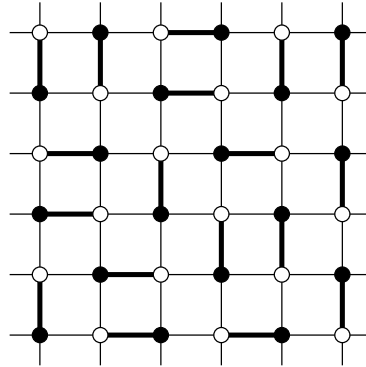


FIG. 1.12 – Exemple de configuration de dimères compacts sur le réseau carré. Les sites pairs du réseau sont représentés par des cercles pleins, et les sites impairs, par des cercles vides.

configurations de dimères possédant beaucoup de paires de dimères alignés. Cet effet énergétique entre en compétition avec l'entropie.

En utilisant la représentation en modèle de hauteurs, on peut décrire le comportement critique du modèle en interactions, en fonction de la température [23, 24, 76]. Le modèle possède une transition de phase de type Kosterlitz-Thouless, à la température critique  $T_c$ . Quand  $T < T_c$ , l'énergie libre est dominée par les configurations entièrement alignées (voir figure 1.13). Dans la phase  $T > T_c$ , l'orientation des dimères fluctue sur de grandes échelles, et le système est critique dans toute la phase. Les fonctions de corrélation se comportent algébriquement, et les exposants critiques varient continuellement avec la température.

### Solutions exactes

Dans le cas sans interactions, les solutions exactes en taille finie [19, 20], essentiellement basées sur la correspondance avec les fermions libres, peuvent être interprétées comme un Ansatz de Bethe avec une amplitude de diffusion triviale [76]. Par les méthodes standard, on obtient, en particulier, la charge centrale  $c = 1$  et certains exposants [76]. En présence d'interactions, nous avons tenté de généraliser ces résultats en diagonalisant la matrice de transfert par l' Ansatz de Bethe en coordonnées. Mais nous n'avons pas réussi à trouver une expression cohérente pour les amplitudes de diffusion sur le réseau.

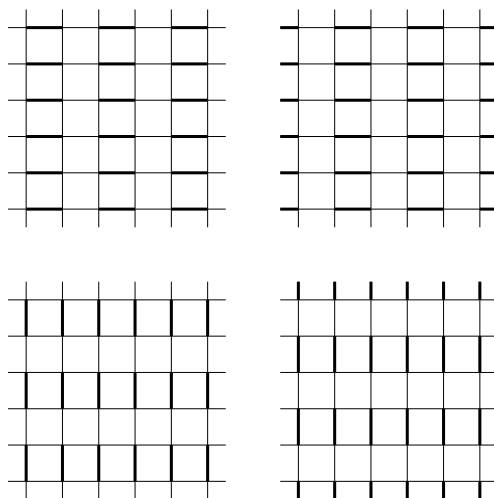


FIG. 1.13 – Configurations de dimères entièrement alignées.

## 1.3 Des modèles avec une limite continue non-compacte

### 1.3.1 Modèle de Potts antiferromagnétique critique

#### Diagramme de phase dans la région $J < 0$

Comme dans les paragraphes précédents, on utilise la notation :

$$\sqrt{Q} = 2 \cos \gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.3.1)$$

Dans le diagramme de phase du modèle de Potts (voir figure 1.5), la région antiferromagnétique  $v < 0$  contient trois lignes critiques :

- la ligne auto-duale :  $v_{AD'} = -\sqrt{Q}$
- la ligne critique antiferromagnétique :  $v_{AF} = -2 + \sqrt{4 - Q}$
- le dual de la ligne critique antiferromagnétique :  $v_{AF'} = -2 - \sqrt{4 - Q}$

D'après le flot de renormalisation, toute la phase  $v_{AF'} < v < v_{AF}$  est dans la classe d'universalité de la ligne auto-duale  $v_{AD'}$ . Les propriétés de cette ligne sont discutées dans [45, 33, 34]. Elles peuvent être déduites essentiellement du hamiltonien correspondant dans la limite anisotrope :  $-H_{XXZ}(\gamma)$  (voir équation (2.4.5)). *N.B.* : Le signe du hamiltonien peut être changé par

la transformation de similarité :

$$-H_{\text{XXZ}}(\gamma) = U^\dagger H_{\text{XXZ}}(\pi - \gamma)U \quad (1.3.2)$$

$$U \equiv \prod_{m=1}^{\frac{N}{2}} \sigma_{2m}^z \quad (1.3.3)$$

Ainsi, la limite continue de ligne auto-duale  $v_{\text{AD}'}$  est décrite par la même théorie critique que la ligne critique ferromagnétique (voir §1.2.2), avec le changement de paramètre :  $\gamma \rightarrow \pi - \gamma$ .

Sur la ligne critique antiferromagnétique, le modèle possède une transition de phase du premier ordre [34]. Cependant, les fonctions de corrélation décroissent algébriquement au point critique. La théorie critique décrivant ce point n'est pas la même que pour le point critique ferromagnétique. Par exemple, la charge centrale sur cette ligne est :

$$c = 2 - \frac{6\gamma}{\pi} \quad (1.3.4)$$

Les exposants de fuseau dans le modèle de boucles correspondant sont donnés par une expression similaire aux résultats sur les SAW (voir tableau 1.1) :

$$X^{(L)} = \frac{\gamma}{2\pi} \left[ \left( \frac{L}{2} \right)^2 - 1 \right] \quad (L \text{ pair}) \quad (1.3.5)$$

L'outil habituel d'analyse des modèles bidimensionnels - le modèle gaussien compact du §2.2 - permet de rendre compte de la discontinuité de l'énergie libre et du comportement critique des fonctions de corrélation [34]. En revanche, le modèle possède des propriétés critiques plus inhabituelles, qui n'appartiennent pas aux caractéristiques d'une telle théorie.

### Propriétés critiques et symétries

Les quantités (1.3.4)-(1.3.5) caractérisent partiellement la classe d'universalité du point critique antiferromagnétique. Pour une présentation plus complète des propriétés critiques, nous anticipons sur les résultats des §§2.5-3.1, qui sont plus techniques.

Le point critique antiferromagnétique est équivalent au modèle à six vertex intégrable, avec des paramètres spectraux alternés. La matrice de transfert  $\mathbf{t}_{6V}$  de ce modèle (sur un cylindre de circonférence  $2N$ ) commute avec l'aimantation totale  $\mathbf{S}^z$ . Dans le spectre de dimensions conformes de  $\mathbf{t}_{6V}$ , le

niveau fondamental de chaque secteur à  $S^z$  fixé est infiniment dégénéré. Ce résultat est une prédiction de l'Ansatz de Bethe correspondant à la matrice de transfert  $\mathbf{t}_{6V}$ . Autour de l'état fondamental, les racines des équations de Bethe sont de deux types : notons-les  $\lambda_j^{(1/2)}$  et  $\lambda_j^{(-1/2)}$ . Soit  $r^{(\pm 1/2)}$  le nombre de racines de chaque type. L'aimantation totale est donnée par :

$$S^z = N - (r^{(1/2)} + r^{(-1/2)}) \quad (1.3.6)$$

L'énergie de l'état fondamental à  $r^{(1/2)}$  et  $r^{(-1/2)}$  fixés est de la forme [34, 77] :

$$\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_N^{(0)} + \frac{2\pi X}{N} \quad (1.3.7)$$

où  $X$  est l'exposant "effectif" (pour le modèle à six vertex non twisté) :

$$X = \frac{g^+}{4} (N - r^{(1/2)} - r^{(-1/2)})^2 + \frac{g_N^-}{4} (r^{(1/2)} - r^{(-1/2)})^2 \quad (1.3.8)$$

avec :

$$g^+ = \frac{2\gamma}{\pi} \quad (1.3.9)$$

$$g_N^- \underset{N \rightarrow \infty}{\propto} \begin{cases} \frac{1}{(\ln N)^2} & \text{si } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\ln N} & \text{si } \gamma = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (1.3.10)$$

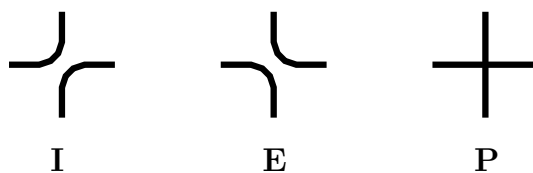
Comme la "constante de couplage"  $g_N^-$  tend vers zéro pour les grandes tailles de système, les états  $(r^{(1/2)}, r^{(-1/2)})$  tels que  $r^{(1/2)} + r^{(-1/2)} = N - S^z$  ont tous la même dimension conforme. Ainsi, ces états sont dégénérés dans le spectre des dimensions conformes. Dans ce travail de thèse, nous avons étudié la structure du spectre correspondant à l'Ansatz de Bethe, et, en particulier, les états non-symétriques, avec  $r^{(1/2)} \neq r^{(-1/2)}$  : voir §3.1 et référence [77].

Pour un nombre d'états  $Q$  quelconque, la présence de niveaux infiniment dégénérés est déduite de l'analyse de l'Ansatz de Bethe, et non pas des symétries des poids de Boltzmann sur réseau. En revanche, dans la limite  $Q \rightarrow 0$  (suivant la ligne critique antiferromagnétique), la matrice  $\mathcal{R}$  du modèle à six vertex alterné est équivalente à celle du modèle à vertex intégrable avec supersymétrie  $\text{OSP}(2|2)$  [35] :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad (1.3.11)$$

$$\mathcal{R}(u) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} -\epsilon^2 [(1-w)\mathbf{I} + w\mathbf{E} + w(1-w)\mathbf{P}] \quad (1.3.12)$$

où les paramètres spectraux  $u$  et  $w$  sont reliés par :  $u = \frac{\pi}{2} - \epsilon w$ . Les vertex correspondant à  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  dans la représentation en boucles du modèle  $\text{OSP}(2|2)$

FIG. 1.14 – Vertex du modèle de boucles  $OSP(2|2)$ .

sont représentés sur la figure 1.14. Cette identification permet, d'une part, de confirmer la conjecture [34] sur la théorie critique décrivant la limite continue du modèle (voir ci-dessous), et, d'autre part, de rendre compte du comportement asymptotique de la constante  $g_N^-$  (qui caractérise la densité des niveaux dégénérés).

### Théorie critique associée

Dans l'expression des exposants (1.3.8), chacune des deux contributions a la forme d'un exposant magnétique (ou électrique) dans un modèle gaussien. De plus, les excitations duales ont été mises en évidence [77]. Ceci permet de conjecturer [34] une théorie effective du modèle dans la limite continue : *un champ gaussien à deux dimensions  $h^+$  et  $h^-$ , avec un rayon de compactification fini pour  $h^+$  et infini pour  $h^-$* . Nous précisons la contribution à l'action dépendant de  $h^-$ , en donnant une version discrète de l'action gaussienne (2.2.2) :

$$H^-[h^-] = \frac{g_N^-}{8\pi} \sum_{\langle i,j \rangle} (h_i^- - h_j^-)^2 \quad (1.3.13)$$

$$h^- = h^- + 2\pi R^- \quad (1.3.14)$$

où  $R^-$  est fini. Pour que l'action  $H^-[h^-]$  soit une quantité finie (comparable à la contribution du champ  $h^+$ ), on doit changer l'échelle de  $h^-$  :

$$h^- \rightarrow \frac{h^-}{\sqrt{g_N^-}} \quad (1.3.15)$$

$$H^-[h^-] \rightarrow \frac{1}{8\pi} \sum_{\langle i,j \rangle} (h_i^- - h_j^-)^2 \quad (1.3.16)$$

$$R^- \rightarrow \frac{R^-}{\sqrt{g_N^-}} \quad (1.3.17)$$



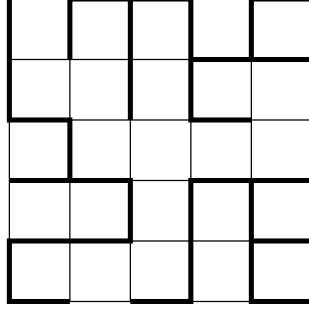


FIG. 1.15 – Exemple de forêt couvrante à trois arbres.

Ainsi, le rayon de compactification  $R^-$  se comporte comme  $\frac{1}{\sqrt{g_N}}$ , et il est infini dans la limite continue.

Les arguments permettant d'étayer cette conjecture sont les résultats numériques sur l'Ansatz de Bethe, et, dans le cas  $Q \rightarrow 0$ , l'étude de la fonction  $\beta$  du groupe de renormalisation dans le modèle  $\sigma$  non-linéaire  $OSP(2|2)$ . Ces résultats sont présentés en détail dans le §3.1.

### 1.3.2 Forêts couvrantes

#### Définition, relation avec le modèle- $\sigma$ $OSP(1|2)$

Sur le réseau carré, on appelle *forêt couvrante* un sous-graphe du réseau qui visite tous les sites, et dont les composantes connexes sont des arbres (voir figure 1.15). On définit la fonction de partition [46, 47, 48] :

$$Z_F(w) = \sum_F w^{N_t(F)} \quad (1.3.18)$$

où la somme porte sur les forêts couvrantes, et  $N_t$  est le nombre d'arbres.

Par une extension du théorème de Kirchhoff [46], la fonction de partition peut s'écrire comme une intégrale de variables de Grassmann :

$$Z_F(w) = \int \prod_i d\psi_i d\bar{\psi}_i \exp \left[ \sum_i \bar{\psi}_i \psi_i + \frac{1}{w} \sum_{i,j} \bar{\psi}_i L_{ij} \psi_j - \frac{1}{w} \sum_{\langle i,j \rangle} \bar{\psi}_i \psi_i \bar{\psi}_j \psi_j \right] \quad (1.3.19)$$

où  $\psi_i, \bar{\psi}_i$  sont des variables de Grassmann vivant sur le site  $i$ , et  $L_{ij}$  est le laplacien discret. On introduit, en chaque site, la variable bosonique  $\phi_i =$

$1 - \bar{\psi}_i \psi_i$ . Les variables  $\phi_i, \bar{\psi}_i, \psi_i$  satisfont alors la contrainte :

$$\phi_i^2 + 2\bar{\psi}_i \psi_i = 1 \quad (1.3.20)$$

La fonction de partition a la forme d'un modèle- $\sigma$  où les spins sont des vecteurs  $\mathbf{S}_i = (\phi_i, \bar{\psi}_i, \psi_i)$  vivant sur les sites du réseau :

$$Z_F(w) = \int \prod_i d\phi_i d\psi_i d\bar{\psi}_i \delta(\mathbf{S}_i^2 - 1) e^{-H[\{\mathbf{S}_i\}]} \quad (1.3.21)$$

$$H[\{\mathbf{S}_i\}] = \frac{1}{w} \sum_{\langle i,j \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - 1) \quad (1.3.22)$$

où le produit scalaire est défini comme :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}' \equiv \phi\phi' + \bar{\psi}\psi' - \psi\bar{\psi}' \quad (1.3.23)$$

L'action (1.3.22) est invariante par une rotation globale des spins  $\mathbf{S}_i$ . Ainsi, le modèle (1.3.21)-(1.3.22) possède la symétrie  $\text{OSP}(1|2)$ .

### Comportement critique

Le modèle (1.3.18) correspond à la limite  $Q \rightarrow 0$  du modèle de Potts, avec le rapport  $\frac{v}{Q}$  fixé [46] :

$$Q \rightarrow 0 \quad (1.3.24)$$

$$v = \frac{Q}{w}, \quad w \text{ fixé} \quad (1.3.25)$$

Ainsi, le comportement critique est déduit du flot de renormalisation sur le diagramme de phase de la figure 1.5, au voisinage de  $Q = v = 0$  :

- Si  $w > -\frac{1}{4}$ , le modèle n'est pas critique.
- Si  $w = -\frac{1}{4}$ , le modèle est équivalent au modèle de Potts antiferromagnétique critique avec  $Q \rightarrow 0$ .
- Si  $w < -\frac{1}{4}$ , le modèle renormalise vers le point fixe de Berker-Kadanoff.

Dans la phase  $w < -\frac{1}{4}$ , la théorie effective est donnée par la limite infrarouge du modèle- $\sigma$  (1.3.21)-(1.3.22). D'après les résultats du §1.3.1, le point critique  $w = -\frac{1}{4}$  a une charge centrale  $c = -1$ , et appartient à la classe d'universalité du modèle- $\sigma$   $\text{OSP}(2|2)$ . Or on peut montrer que la limite continue de ce dernier est la théorie *libre*  $\text{OSP}(1|2)$  définie par l'action (1.3.22).

### Relation avec le modèle $O(n)$

Un sujet d'étude abordé au cours de cette thèse a été de comprendre la relation entre le point critique  $w = -\frac{1}{4}$  et le modèle  $O(n)$  avec  $n = -1$ . Pour  $n$  entier naturel, le modèle  $O(n)$  est défini par :

$$Z_{O(n)} = \int \prod_i d^n S_i \delta(\mathbf{S}_i^2 - 1) e^{-H[\{\mathbf{S}_i\}]} \quad (1.3.26)$$

$$H_{O(n)}[\{\mathbf{S}_i\}] = -K \sum_{\langle i,j \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - 1) \quad (1.3.27)$$

où  $\mathbf{S}_i$  est un vecteur de dimension  $n$ , et  $K$  est la température inverse. Le nombre de composantes  $n$  peut être prolongé à des valeurs réelles, par un développement de haute température. En opérant une troncature adéquate du développement [9, 10, 13], on obtient un modèle de boucles sur réseau, où le poids de Boltzmann des boucles est  $n$ . Cette approche est mise en oeuvre sur le réseau hexagonal dans [10], et sur le réseau carré dans [13]. Le modèle (1.3.21)-(1.3.22) est équivalent au modèle  $O(n)$  avec  $n = -1$ , à tous les ordres perturbatifs en  $K$  [46]. Cependant, la charge centrale du point critique  $w = -\frac{1}{4}$  ( $c = -1$ ) ne correspond à aucun des points critiques identifiés dans les modèles de boucles  $O(n)$  de [10, 13].

Dans ce travail de thèse, nous avons exploré numériquement le diagramme de phase du modèle de boucles sur réseau carré [13]. Notre procédure est d'estimer la charge centrale effective  $c_{\text{eff}}$  (à partir de l'énergie libre pour des tailles successives), et de se déplacer dans le diagramme de phase en suivant les lignes de plus grande pente de  $c_{\text{eff}}$ . Ce principe vient de l'observation que les points critiques sont des points stationnaires de la charge centrale effective [49]. Ainsi, on peut espérer reconstituer un réseau de lignes de gradient de  $c_{\text{eff}}$  qui relie les points critiques du modèle de boucles. A cause de difficultés techniques (dégénérescences de valeurs propres, estimation de la dérivée, *etc.*), nous n'avons pas pu mener cette démarche à son but, qui est d'identifier de nouveaux points critiques dans le diagramme de phase.

### 1.3.3 Modèle de Brauer

Le modèle de Brauer est un modèle de boucles denses sur le réseau carré, avec intersections. Il est défini par les vertex représentés sur la figure 1.16. Chaque boucle fermée porte un poids de Boltzmann  $n$ . Comme on l'a remarqué plus haut, dans un modèle de boucles denses, la présence d'intersections change la classe d'universalité. Pour  $0 \leq n < 2$ , toute la phase

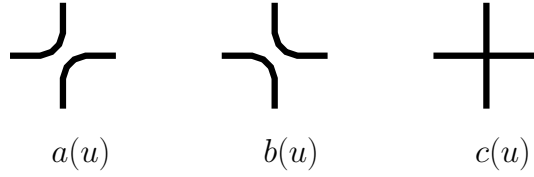


FIG. 1.16 – Les configurations de vertex définissant le modèle de Brauer sur réseau carré.

$a, b, c = 1, 1, x > 0$  est critique, et les exposants ne dépendent que de  $n$ . En particulier, la charge centrale est [36] :

$$c = n - 1 \quad (1.3.28)$$

Dans le cas d'une boucle unique ( $n = 0$ ), les exposants de fuseau sont tous nuls :  $X^{(L)} = 0$  [36].

D'autre part, pour les valeurs entières de  $n$ , le modèle de Brauer avec les poids de Boltzmann :

$$a(u), b(u), c(u) = 1 - u, u, \left(1 - \frac{n}{2}\right) u(1 - u) \quad (1.3.29)$$

est la représentation en boucles du modèle de vertex intégrable  $OSP(M|2N)$ , avec  $n = M - 2N$  [35]. Ainsi, on peut interpréter le comportement critique du modèle d'après l'étude du modèle- $\sigma$  avec la symétrie correspondante.

### 1.3.4 Modèles- $\sigma$ sur des supersphères

Le modèle- $\sigma$   $OSP(M|2N)$  est l'analogie du modèle  $O(n)$ , où le spin possède  $M$  composantes réelles et  $2N$  composantes grassmanniennes :

$$\mathbf{S} = (\phi_1, \dots, \phi_M, \bar{\psi}_1, \psi_1, \dots, \bar{\psi}_N, \psi_N) \quad (1.3.30)$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}' = \sum_{\alpha=1}^M \phi_\alpha \phi'_\alpha + \sum_{\beta=1}^N (\bar{\psi}_\beta \psi'_\beta - \psi_\beta \bar{\psi}'_\beta) \quad (1.3.31)$$

Le modèle est défini par :

$$Z_{\text{OSP}(M|2N)} = \int d\{\phi, \bar{\psi}, \psi\} \delta(\mathbf{S}^2(\mathbf{x}_i) - 1) e^{-H[\{\mathbf{S}(\mathbf{x}_i)\}]} \quad (1.3.32)$$

$$d\{\phi, \bar{\psi}, \psi\} \equiv \prod_i \left( \prod_{\alpha=1}^M d\phi_{\alpha}(\mathbf{x}_i) \prod_{\beta=1}^N d\bar{\psi}_{\beta}(\mathbf{x}_i) d\psi_{\beta}(\mathbf{x}_i) \right) \quad (1.3.33)$$

$$H[\{\mathbf{S}(\mathbf{x}_i)\}] = -\frac{1}{g_{\sigma}} \sum_{\langle i,j \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - 1) \quad (1.3.34)$$

Dans la limite continue, l'action devient :

$$H[\{\mathbf{S}(\mathbf{x})\}] = \frac{1}{2g_{\sigma}} \int d^2x \partial_{\mu} \mathbf{S} \cdot \partial_{\mu} \mathbf{S} \quad (1.3.35)$$

Dans le cas où  $M - 2N < 2$ , le modèle possède une phase de symétrie brisée, où la théorie effective est une théorie libre avec  $M - 1$  bosons et  $2N$  fermions [36]. On peut justifier la présence de cette phase en examinant l'équation  $RG$  pour la constante de couplage  $g_{\sigma}$  :

$$\frac{dg_{\sigma}}{d \ln l} = \frac{M - 2N - 2}{2\pi} g_{\sigma}^2 \quad (1.3.36)$$

où  $l$  est l'échelle de longueur. Ainsi, si  $M - 2N < 2$  et que le couplage initial est assez proche de zéro, alors  $g_{\sigma} \rightarrow 0$  à grande distance.

Sur le réseau, le développement haute température de la fonction de partition fait correspondre le modèle (1.3.32)-(1.3.33)-(1.3.34) à un modèle de boucles avec une fugacité de boucles  $n = M - 2N$ . Les détails microscopiques du modèle de boucle peuvent varier, mais la présence d'intersections est cruciale : comme les intersections sont irrelevantes dans la phase diluée (voir §1.2.1), le modèle doit représenter des boucles denses. En se basant sur cet argument et sur l'équivalence exacte avec la chaîne de spins intégrable  $\text{OSP}(M|2N)$  [35], le modèle de Brauer avec  $n = M - 2N$  a été proposé [36] comme un candidat pour la version discrète du modèle- $\sigma$  avec  $M - 2N < 2$ .

Ainsi, l'étude des modèles- $\sigma$  sur supersphère permettent de rendre compte des propriétés critiques de modèles de boucles : classe d'universalité de modèles de boucles avec intersections, apparition de degrés de liberté non-compacts (voir §3.1).

# Chapitre 2

## Matrice de transfert

### 2.1 Formalisme de la matrice de transfert

#### 2.1.1 Fonction de partition sur le cylindre

Nous introduisons le formalisme de la *matrice de transfert* pour exprimer le calcul de la fonction de partition et des fonctions de corrélations sous la forme d'un problème de valeurs propres [39]. Ce formalisme concerne les modèles statistiques définis sur un cylindre semi-infini, qui est une géométrie quasi-unidimensionnelle. Cependant, les prédictions de l'invariance conforme permettent de relier les exposants critiques d'un modèle sur le plan avec les valeurs propres de la matrice de transfert sur le cylindre.

Nous utilisons le modèle de boucles de Temperley-Lieb pour illustrer le formalisme. On considère ce modèle, défini sur un cylindre de circonférence (paire)  $N$  fixée et de longueur  $M$  tendant vers l'infini. Soit  $V_N$  l'espace vectoriel engendré par les configurations d'une ligne. Chaque vecteur de base  $|\alpha\rangle$  est associé à une configuration de ligne  $\alpha$ . Une configuration de ligne est un appariement de  $N$  points par des brins qui ne se coupent pas. Sur la figure 2.1, sont représentées les 5 configurations possibles pour une ligne de  $N = 6$  sites. Le nombre de configurations de ligne est  $\mathcal{N} = C_{N/2}$ , où les  $C_n$  sont les nombres de Catalan. Ce nombre croît exponentiellement avec la circonférence du cylindre :

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4^n n^{-3/2} \quad (2.1.1)$$

La matrice de transfert  $\mathbf{t}_N$  est une matrice  $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$  agissant sur l'espace des configurations  $V_N$ . Soit  $\alpha, \beta$  deux configurations de ligne. L'élément de

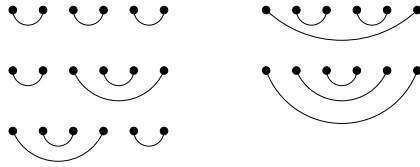


FIG. 2.1 – Les configurations de ligne du modèle de Temperley-Lieb pour  $N = 6$  sites.

| $n$ | $C_n$ | $n$ | $C_n$    |
|-----|-------|-----|----------|
| 1   | 1     | 9   | 4862     |
| 2   | 2     | 10  | 16796    |
| 3   | 5     | 11  | 58786    |
| 4   | 14    | 12  | 208012   |
| 5   | 42    | 13  | 742900   |
| 6   | 132   | 14  | 2674440  |
| 7   | 429   | 15  | 9694845  |
| 8   | 1430  | 16  | 35357670 |

TAB. 2.1 – Valeur des nombres de Catalan  $C_n$ .

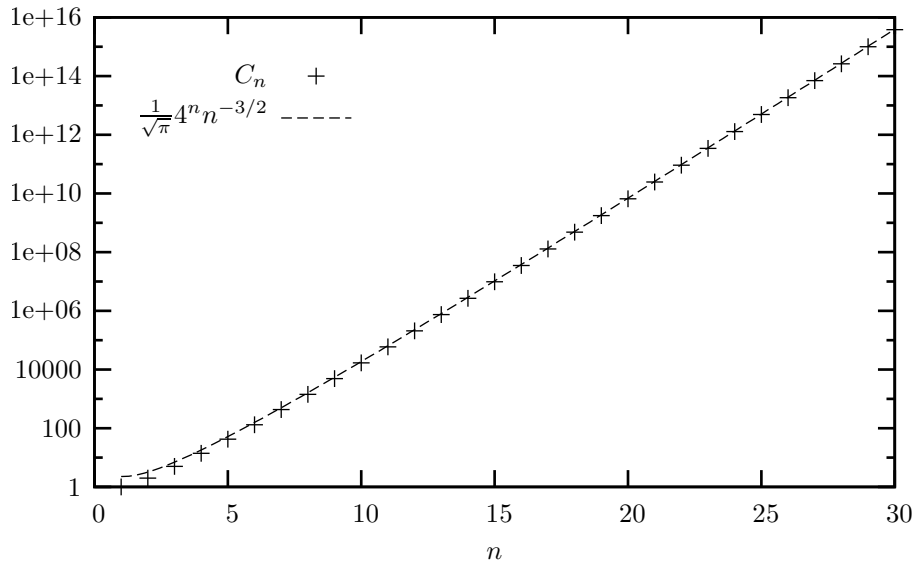


FIG. 2.2 – Comportement asymptotique des nombres de Catalan  $C_n$ .

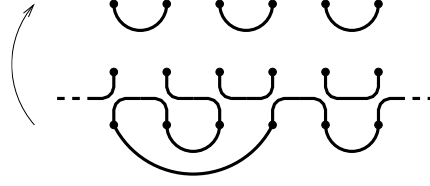


FIG. 2.3 – Action de la matrice de transfert du modèle de Temperley-Lieb pour  $N = 6$ . Les pointillés représentent les conditions aux bords périodiques.

matrice  $(\mathbf{t}_N)_{\beta\alpha}$  est la somme des poids de Boltzmann des configurations de vertex qui transforment  $\alpha$  en  $\beta$  (voir figure 2.3). La fonction de partition sur le cylindre s'écrit :

$$Z_{N,M} \equiv \sum_C W(C) \quad (2.1.2)$$

où la somme porte sur toutes les configurations de boucles sur le cylindre, et  $W(C)$  désigne le poids de Boltzmann associé à la configuration  $C$ . La fonction de partition se construit en itérant la matrice de transfert :

$$Z_{N,M} = \langle v | (\mathbf{t}_N)^M | u \rangle \quad (2.1.3)$$

Les vecteurs  $|u\rangle, |v\rangle$  décrivent les conditions aux extrémités du cylindre. On note  $|\phi^{(j)}\rangle, \Lambda_N^{(j)}$  les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice  $\mathbf{t}_N$  :

$$\mathbf{t}_N |\phi^{(j)}\rangle = \Lambda_N^{(j)} |\phi^{(j)}\rangle \quad (2.1.4)$$

$$|\Lambda_N^{(0)}| > |\Lambda_N^{(1)}| \geq |\Lambda_N^{(2)}| \geq \dots \geq |\Lambda_N^{(N-1)}| \quad (2.1.5)$$

On note  $|0\rangle \equiv |\phi^{(0)}\rangle$ . On suppose que les composantes  $\langle 0|u\rangle$  et  $\langle 0|v\rangle$  ne sont pas nulles. Dans la limite  $M \rightarrow \infty$ , la fonction de partition (2.1.2) est donnée par :

$$Z_{N,M} \underset{M \rightarrow \infty}{\propto} \left( \Lambda_N^{(0)} \right)^M \quad (2.1.6)$$

La densité d'énergie libre par unité de surface est :

$$f_N \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{NM} \ln Z_{N,M} = \frac{1}{N} \ln \Lambda_N^{(0)} \quad (2.1.7)$$

## 2.1.2 Fonctions de corrélation

On appelle  $x$  la coordonnée dans la direction finie du cylindre ( $x = 1, \dots, N$ ) et  $y$  la coordonnée dans la direction infinie. Les fonctions de cor-



rélation à deux points sur le cylindre sont de la forme :

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle A(\mathbf{r})A(\mathbf{r}') \rangle = \frac{1}{Z_{N,M}} \sum_C W(C)[A(\mathbf{r})]_C [A(\mathbf{r}')]_C \quad (2.1.8)$$

où  $A(\mathbf{r})$  est une observable locale définie sur l'ensemble des configurations de boucles sur le cylindre et, par convention,  $y > y'$ . On suppose, de plus, que les points  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  se situent à mi-hauteur du cylindre semi-infini :

$$y' = (M - y) \gg (y - y') \gg N \quad (2.1.9)$$

Soit l'opérateur  $\mathbf{A}$  correspondant à l'observable  $A(\mathbf{r})$ . On note  $\mathbf{P}$  l'opérateur impulsion dans la direction  $x$ . La correspondance formelle entre observables et opérateurs est :

$$A(\mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{t}_N)^{-y} e^{i\mathbf{P}x} \mathbf{A} e^{-i\mathbf{P}x} (\mathbf{t}_N)^y \quad (2.1.10)$$

La fonction de corrélation (2.1.8) s'écrit :

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\langle v | (\mathbf{t}_N)^{M-y} e^{i\mathbf{P}x} \mathbf{A} (\mathbf{t}_N)^{y-y'} e^{-i\mathbf{P}(x-x')} \mathbf{A} e^{-i\mathbf{P}x'} (\mathbf{t}_N)^{y'} | u \rangle}{\langle v | (\mathbf{t}_N)^M | u \rangle} \quad (2.1.11)$$

On utilise la décomposition de l'identité :

$$\mathbf{I}_{V_N} = \sum_j |\phi^{(j)}\rangle \langle \phi^{(j)}| \quad (2.1.12)$$

On note  $k^{(j)}$  l'impulsion de l'état  $\phi^{(j)}$  :

$$\mathbf{P} |\phi^{(j)}\rangle = k^{(j)} |\phi^{(j)}\rangle \quad (2.1.13)$$

La limite (2.1.9) sélectionne les composantes sur  $|0\rangle$  de  $|u\rangle$  et  $|v\rangle$  au numérateur et au dénominateur de (2.1.11) :

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq \sum_j |\langle \phi^{(j)} | \mathbf{A} | 0 \rangle|^2 \left( \frac{\Lambda_N^{(j)}}{\Lambda_N^{(0)}} \right)^{y-y'} e^{-i[k^{(j)} - k^{(0)}](x-x')} \quad (2.1.14)$$

La somme est domin e par un terme de la forme :

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq |\langle \phi^{(j)} | \mathbf{A} | 0 \rangle|^2 e^{-\frac{y-y'}{\xi_N^{(j)}}} e^{-i[k^{(j)} - k^{(0)}](x-x')} \quad (2.1.15)$$

où la longueur de corrélation  $\xi_N^{(j)}$  est donn e par :

$$\xi_N^{(j)} \equiv \left( \ln \Lambda_N^{(0)} - \ln \Lambda_N^{(j)} \right)^{-1} \quad (2.1.16)$$

On note  $\phi^{(j)}$  les opérateurs sur l'espace  $V_N$  tels que :

$$\phi^{(j)}|0\rangle = |\phi^{(j)}\rangle + \dots \quad (2.1.17)$$

où les points représentent des vecteurs propres de valeur propre inférieures à  $\Lambda_N^{(j)}$ . Ces opérateurs sont caractérisés sur le cylindre par les grandeurs  $\xi_N^{(j)}, k^{(j)}$ . Celles-ci sont reliées par l'invariance conforme aux exposants critiques de la fonction de corrélation  $\langle \phi^{(j)}(\mathbf{r})\phi^{(j)}(\mathbf{r}') \rangle$  (voir paragraphe 2.1.3).

Ajoutons une remarque spécifique aux modèles de boucles. Pour définir la fonction de corrélation de fuseau  $G_N^{(L)}$  (1.1.3) sur le cylindre, il est nécessaire d'étendre l'ensemble des configurations de ligne. Au lieu d'imposer un appariement total des  $N$  sites d'une ligne, on autorise les sites à être connectés à l'infini (voir figure 2.4). On appelle  $L$  le nombre de sites connectés à l'infini (on suppose que  $L$  est pair) dans une configuration de lignes. Sous l'action de la matrice de transfert, le nombre de sites connectés à l'infini ne peut que diminuer. Donc, dans la base des configurations classées par valeurs de  $L$ , la matrice de transfert est triangulaire supérieure par blocs :

$$\mathbf{t}_N = \begin{pmatrix} \boxed{L=0} & \times & \times & \times \\ 0 & \boxed{L=2} & \times & \times \\ 0 & 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{L=N} \end{pmatrix} \quad (2.1.18)$$

Les valeurs propres de  $\mathbf{t}_N$  sont contenues dans les blocs diagonaux, donc on peut se limiter à l'étude de ces blocs. Ceci revient à imposer que  $L$  soit conservé. La valeur propre principale  $\Lambda_N^{(L)}$  de chaque bloc donne la longueur de corrélation de la fonction de corrélation  $G_N^{(L)}$  sur le cylindre.

### 2.1.3 Conséquences de l'invariance conforme

Dans ce paragraphe, nous rappelons les relations entre les valeurs propres de la matrice de transfert et les grandeurs qui caractérisent la classe d'uni-

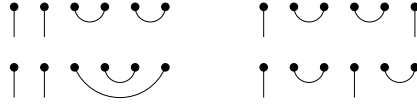


FIG. 2.4 – Quelques configurations de ligne sur  $N = 6$  sites, avec  $L = 2$  sites connectés à l’infini.

versalité : les exposants critiques  $X^{(j)}, s^{(j)}$  et la charge centrale  $c$ . Ces relations découlent de l’invariance conforme [1, 50, 51, 52]. Les conséquences de cette symétrie pour les modèles bidimensionnels sont très fortes. Pour citer quelques exemples, les modèles unitaires de charge centrale  $c < 1$  sont classifiés en une série (modèles minimaux), et de nombreux éléments de cette série sont identifiés en termes de modèles sur réseau. D’autre part, les fonctions de corrélation à plusieurs points satisfont des équations différentielles. Les cas où l’invariance conforme est démontrée mathématiquement sont rares, mais les prédictions de l’invariance conforme sur la limite continue peuvent être vérifiées par des solutions exactes.

Il existe une application conforme qui transforme le cylindre semi-infini de circonférence  $N$  vers le plan. Si on définit la coordonnée complexe  $w$  sur le cylindre, avec :

$$-\frac{N}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{N}{2} \quad (2.1.19)$$

$$-\infty < \operatorname{Im} w < \infty \quad (2.1.20)$$

Alors la transformation du cylindre vers le plan est :

$$w \rightarrow \exp\left(\frac{2i\pi w}{N}\right) \quad (2.1.21)$$

La transformation réciproque a une ligne de coupure sur l’axe réel négatif. Les corrections en taille finie de la valeur propre principale  $\Lambda_N^{(0)}$  contiennent un terme relié à la charge centrale [4] :

$$\ln \Lambda_N^{(0)} = N f_\infty + \frac{\pi c}{6N} + o(N^{-1}) \quad (2.1.22)$$

où  $f_\infty$  est la densité d’énergie libre par unité de surface dans la limite continue. Soit une observable  $\phi^{(j)}$ , avec un exposant physique  $X^{(j)}$  et un spin  $s^{(j)}$ . En géométrie plane (coordonnées cylindriques  $r, \theta$ ), la fonction à deux points se comporte comme :

$$\langle \phi^{(j)}(0) \phi^{(j)}(r, \theta) \rangle \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^{-2X^{(j)}} e^{-2is^{(j)}\theta} \quad (2.1.23)$$

Les exposants  $X^{(j)}, s^{(j)}$  sont reliés aux valeurs propres de la matrice de transfert et de l'impulsion sur le cylindre par [3] :

$$\ln \Lambda_N^{(0)} - \ln \Lambda_N^{(j)} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\pi X^{(j)}}{N} \quad (2.1.24)$$

$$k^{(j)} - k^{(0)} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\pi s^{(j)}}{N} \quad (2.1.25)$$

Dans les modèles intégrables, le paramètre spectral contrôle l'anisotropie (voir paragraphe 2.3.7). En particulier, dans la limite anisotrope, les valeurs propres  $\Lambda_N^{(j)}$  définissent les énergies du hamiltonien équivalent. L'échelle d'énergie est alors donnée par la relation de dispersion des basses excitations  $\mathcal{E} \sim v_F k$ . Les relations (2.1.22)-(2.1.24) deviennent alors [3, 4] :

$$\mathcal{E}_N^{(0)} = N e_\infty - \frac{\pi v_F c}{6N} + o(N^{-1}) \quad (2.1.26)$$

$$\mathcal{E}_N^{(j)} - \mathcal{E}_N^{(0)} \sim \frac{2\pi v_F X^{(j)}}{6N} \quad (2.1.27)$$

où  $e_\infty$  est la densité d'énergie par site dans la limite continue.

## 2.2 Modèle gaussien

### 2.2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons les propriétés du modèle gaussien “compactifié” (souvent appelé aussi *gaz de Coulomb*). Le comportement critique de ce modèle est similaire à celui du modèle  $XY$ . Il présente une transition de phase du type Kosterlitz-Thouless, avec des exposants qui varient continuellement dans la phase critique, et ces exposants *électromagnétiques* [53] sont connus exactement.

Ces résultats exacts sont exploités par la démarche suivante. Un modèle de boucles sur le réseau peut, sous certaines conditions, être traduit en un modèle de hauteur. Les contraintes microscopiques du modèle de boucles original se reflètent alors dans la structure géométrique périodique de l'espace-cible du modèle de hauteurs. Les fonctions de corrélation (principalement, les fonctions de fuseau (1.1.3)) sont interprétées comme des défauts dans la configuration de hauteur, et on en déduit leurs exposants critiques. La charge centrale effective (dépendant fortement des conditions périodiques) peut aussi être déterminée par cette méthode. La démarche est illustrée, dans ce chapitre, sur l'exemple du modèle à six vertex.

Il existe plusieurs points de vue, qui sont finalement équivalents, pour présenter cette construction. D'une part, on peut partir de l'image du *clock model*, qui est une version du modèle XY dans laquelle les spins ne peuvent prendre qu'un nombre fini d'orientations [26, 53]. Ce modèle est un point particulier du diagramme de phase du gaz de Coulomb (gaz de particules classiques en interaction coulombienne). D'autre part, on peut choisir comme point de départ la théorie de champs du boson compact (modèle gaussien sur un espace-cible compactifié) [27]. Enfin, une construction systématique de la théorie effective pour un modèle de boucles sans intersections est proposée dans [28, 29]. Elle se base uniquement sur la structure géométrique du modèle de hauteurs.

### 2.2.2 Modèle de hauteurs équivalent au modèle à six vertex

On définit un modèle de hauteurs  $h_j$  vivant sur les faces du réseau carré. Ce modèle décrit la physique d'une interface élastique bidimensionnelle dans un espace tridimensionnel. Chaque configuration du modèle à six vertex correspond à une configuration de hauteurs (si on fixe l'origine dans la direction  $h$ ). Toute paire de faces adjacentes est séparée par une flèche. Si  $h_g$  (*resp.*  $h_d$ ) est la hauteur de la face se trouvant à gauche (à droite) de la flèche, alors  $h_g = h_d + \Delta h$ . Le saut de hauteur est fixé à  $\Delta h = \pi$ , par convention. Ce modèle sera appelé dans la suite modèle SOS (*solid-on-solid*).

Les poids de Boltzmann du modèle à six vertex définissent la probabilité d'une configuration. Les configurations les plus probables sont celles qui minimisent les différences de hauteur (les configurations les plus plates). Elles sont appelées *états idéaux*. Les deux états idéaux du modèle SOS sont représentés sur la figure 2.5. La *hauteur moyenne* d'un état idéal est égale à la somme des hauteurs autour d'un vertex, divisée par quatre.

Dans le modèle sur réseau, les variables  $h_j$  ont une propriété de périodicité, qui peut être déduite des états idéaux. On part de l'état idéal  $I_1$ , avec une hauteur moyenne  $\langle h \rangle = 0$ . Dans l'état  $I_1$ , toutes les flèches autour d'une face donnée tournent dans le même sens. On définit l'opération locale sur la hauteur  $h_j$  : les quatre flèches autour de la face  $j$  sont retournées, et  $h_j$  devient  $h_j \pm 2\pi$  (suivant l'orientation originale des flèches autour de  $j$ ). Le réseau dual est bipartite : on désigne par paires/impaires les faces de chaque sous-réseau. Si on effectue l'opération sur les faces paires, on obtient l'état idéal  $I_2$  avec une hauteur moyenne  $\pi$ . On répète l'opération sur les faces impaires : on obtient à nouveau l'état  $I_1$ , avec une hauteur moyenne  $2\pi$ . Ainsi,

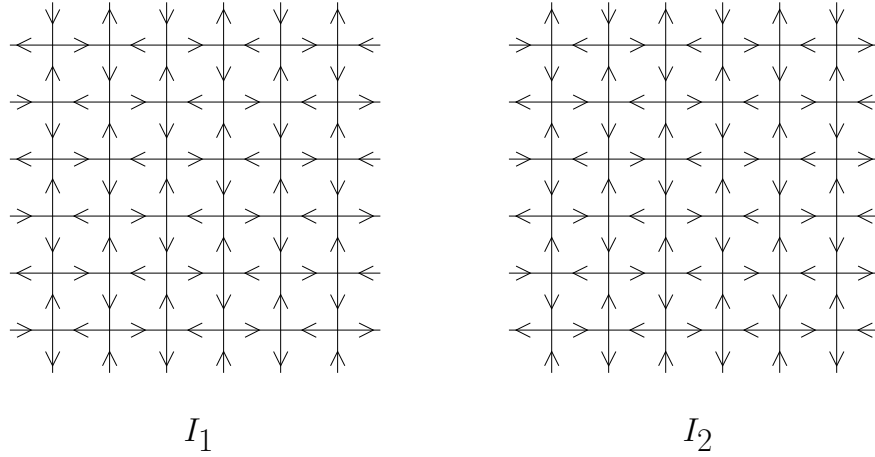


FIG. 2.5 – Etats idéaux du modèle à six vertex.

on identifie :

$$\langle h \rangle = \langle h \rangle + 2\pi \quad (2.2.1)$$

### 2.2.3 Modèle effectif

Dans la limite continue, de grands domaines du système sont dans l'un des états idéaux. Les hauteurs moyennes  $\langle h \rangle$  définissent une fonction lentement variable  $h(\mathbf{r})$ . Les fluctuations de hauteurs sont décrites par le hamiltonien effectif :

$$H[\{h(\mathbf{r})\}] = \frac{g}{4\pi} \int d^2r (\nabla h)^2 \quad (2.2.2)$$

$$h = h + 2\pi R \quad (2.2.3)$$

Le rayon de compactification est fixé par la condition (2.2.1) :  $R = 1$ . La constante de couplage  $g$  contrôle l'élasticité de la surface. Plus  $g$  est grand, plus la surface est rigide, et plus les domaines idéaux sont étendus dans le système. L'ordre à longue portée est mesuré par le comportement des fonctions de corrélations "électriques" :

$$G_e(\mathbf{r}) = \left\langle \exp \frac{ie[h(\mathbf{r}) - h(\mathbf{0})]}{R} \right\rangle \quad (2.2.4)$$

où  $e$  est un entier relatif. On note que la forme (2.2.4) respecte la périodicité des variables  $h$ . Quand  $g$  est très petit, on peut montrer que la fonction  $G_e(\mathbf{r})$

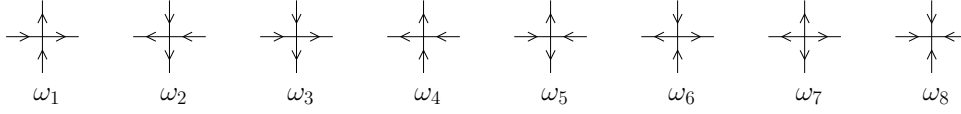


FIG. 2.6 – Configurations du modèle à huit vertex.

a une longueur de corrélation finie :

$$G_e(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\frac{r}{\xi}}, \quad \xi \underset{g \rightarrow 0}{\sim} \frac{a}{\ln \frac{1}{g}} \quad (2.2.5)$$

où  $a$  est le pas du réseau. Lorsque  $g$  est supérieur à une valeur critique  $g_c$ , la fonction  $G_e(\mathbf{r})$  décroît algébriquement :

$$G_e(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} r^{-\frac{e^2}{gR^2}}, \quad g > g_c \quad (2.2.6)$$

## 2.2.4 Transition de phase, phase critique

Le modèle (2.2.2) diffère du modèle gaussien par la condition de périodicité sur  $h$ . Cette propriété permet l'existence de défauts topologiques, appelés tourbillons (*vortex*). La destruction de l'ordre à longue portée s'interprète par l'abondance de vortex dans la phase  $g < g_c$ . Sur le réseau, les vortex sont décrits par les configurations  $\omega_7, \omega_8$  du modèle à 8 vertex (voir figure 2.6). Les vortex sont des configurations contenant une paire  $(\omega_7, \omega_8)$  à deux points éloignés. La *charge magnétique* en un point  $\mathbf{r}$  est définie par l'intégrale :

$$m(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2\pi R} \oint_{C_r} \mathbf{dl} \cdot \nabla h \quad (2.2.7)$$

où le contour  $C_r$  est un petit cercle de centre  $\mathbf{r}$ . Ainsi, la charge magnétique associée à la configuration  $\omega_7$  (*resp.*  $\omega_8$ ) est  $m = 2$  (*resp.*  $-2$ ). Le flot de renormalisation de la fugacité des vortex  $Y_m$  est représenté sur la figure 2.7. En particulier, les vortex de charge  $|m| \geq 2$  sont irrelevants pour  $g > \frac{1}{R^2}$ . Ainsi, la phase critique est  $g > g_c$ , où  $g_c = \frac{1}{R^2}$ . Dans la phase critique, les exposants critiques du modèle (2.2.2) sont de la forme [26, 27] :

$$X_{e,m} = \frac{e^2}{2gR^2} + \frac{gR^2 m^2}{2} \quad (2.2.8)$$

Cet exposant correspond à la fonction de corrélation (2.2.4), en présence d'un vortex de charge  $m$  au point  $\mathbf{0}$  et d'un vortex de charge  $-m$  au point  $\mathbf{r}$ . Les

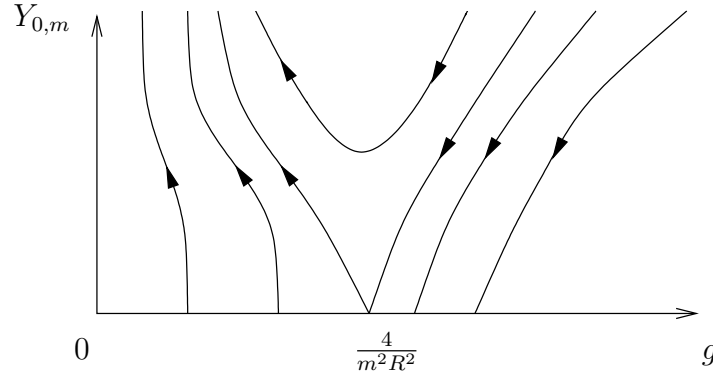


FIG. 2.7 – Flot de renormalisation de la constante de couplage  $g$  et de la fugacité  $Y_m$  d'une charge magnétique  $m$ .

exposants critiques varient continuellement avec  $g$ , et la charge centrale est égale à :

$$c = 1 \quad (2.2.9)$$

### 2.2.5 Détermination de la constante de couplage $g$

Pour commencer, on considère le modèle de boucles avec  $n = 2$ , où le modèle à six vertex équivalent ne contient pas de twist. Pour déterminer la constante de couplage, on utilise une information supplémentaire, issue de la solution exacte du modèle à huit vertex [54]. L'exposant critique correspondant à une paire  $(\omega_7, \omega_8)$  est égal à :

$$X_{\text{vortex}} = \frac{2(\pi - \gamma)}{\pi} \quad (2.2.10)$$

$$X_{\text{vortex}} = 2 \quad (\gamma = 0) \quad (2.2.11)$$

Or, comme on l'a remarqué précédemment, ceci correspond à une paire de vortex de charges  $(2, -2)$ , donc :

$$X_{\text{vortex}} = X_{0,2} \quad (2.2.12)$$

En utilisant l'expression (2.2.8) des exposants (avec  $R = 1$ ), on obtient :

$$g = 1 \quad (2.2.13)$$



### 2.2.6 Modèle de hauteur pour $n < 2$

Si  $n < 2$ , deux effets distincts modifient le modèle de hauteur effectif. D'une part, dans le bulk, le poids des boucles correspond à un terme extensif dans l'action :

$$H_b = \int d^2r i e_b \chi(\mathbf{r}) \quad (2.2.14)$$

où  $\chi(\mathbf{r})$  est la phase associée aux virages des boucles, et  $e_b$  apporte la normalisation correcte pour que la phase accumulée sur quatre virages soit  $\pm i\gamma$ . La présence du terme (2.2.14) affecte la constante de couplage  $g$ . D'après (2.2.8) et (2.2.10) :

$$g = \frac{\pi - \gamma}{\pi} \quad (2.2.15)$$

D'autre part, sur le bord du système, le twist  $\psi$  correspond au facteur :

$$\exp \frac{i\psi[h(\infty) - h(0)]}{\pi R} \quad (2.2.16)$$

dans les poids de Boltzmann. Ainsi, la fonction de partition est de la forme de  $G_{e_0}$  (2.2.4), avec :

$$e_0 = \frac{\psi}{\pi} \quad (2.2.17)$$

La charge centrale est modifiée par la présence du terme de bord (2.2.16). La charge centrale effective est :

$$c_{\text{eff}} = 1 - 12X_{-e_0,0} \quad (2.2.18)$$

$$c_{\text{eff}} = 1 - \frac{6(e_0)^2}{g} \quad (2.2.19)$$

Les exposants critiques effectifs sont :

$$(X_{e-e_0,m})_{\text{eff}} = X_{e-e_0,m} - X_{-e_0,0} \quad (2.2.20)$$

$$(X_{e-e_0,m})_{\text{eff}} = \frac{e(e-2e_0)}{2gR^2} + \frac{gR^2m^2}{2} \quad (2.2.21)$$

Pour les modèles où on ne dispose pas de solution exacte, on utilise une prescription appelée *Ansatz de boucle* [29], portant sur l'opérateur  $\chi(\mathbf{r})$ . Celui-ci se décompose en opérateurs électriques (2.2.4), et on impose que le terme le plus essentiel de ce développement soit marginal. Dans le cas du modèle à six vertex, le terme le plus essentiel correspond à la charge  $e = 2$ . D'après l'équation (2.2.21), la valeur de  $g$  (2.2.15) donne bien l'exposant  $(X_{2-e_0,0})_{\text{eff}} = 2$ .

### 2.2.7 Exposants critiques de fuseau

La fonction de corrélation de fuseau  $G^{(L)}$  correspond à une paire de vortex de charge  $m = \pm \frac{L}{2}$ . Ainsi, l'exposant critique associé est :

$$X^{(L)} = \left( X_{0, \frac{L}{2}} \right)_{\text{eff}} \quad (2.2.22)$$

$$X^{(L)} = \frac{gL^2}{8} - \frac{(e_0)^2}{2g} \quad (2.2.23)$$

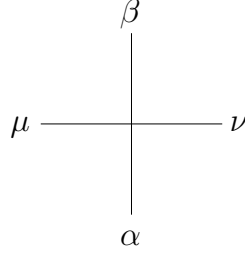
où  $g$  et  $e_0$  sont reliés aux paramètres du modèle à six vertex par (2.2.15) et (2.2.17). Ainsi :

$$X^{(L)} = \frac{(\pi - \gamma)L^2}{8\pi} - \frac{\gamma^2}{2\pi(\pi - \gamma)} \quad (2.2.24)$$

## 2.3 Equations de Yang-Baxter et Ansatz de Bethe

Dans ce chapitre, nous introduisons les équations de Yang-Baxter, qui sont des relations géométriques impliquant les poids de Boltzmann d'un modèle statistique sur réseau. Les équations de Yang-Baxter, avec la relation d'inversion [30], apparaissent comme des conditions suffisantes pour avoir une famille  $\mathbf{t}_N(u)$  de matrices de transfert qui commutent. Les matrices de transfert engendrent alors une infinité de quantités conservées : c'est la structure intégrable du modèle. Grâce à cette structure, on peut, dans de nombreux cas, construire les états propres communs de ces matrices de transfert, par la méthode de l'Ansatz de Bethe algébrique (aussi appelée "méthode de diffusion inverse quantique"). Cette méthode présente de grands avantages, liés à sa nature algébrique : elle s'adapte facilement aux hétérogénéités des paramètres spectraux, et permet d'exprimer l'action des opérateurs sur les états de Bethe.

Cette construction générale dépend du modèle considéré, mais elle suit un même schéma dans les modèles à vertex. Le modèle à six vertex est le plus simple d'entre eux, et il est utilisé pour construire des représentations plus compliquées des équations de Yang-Baxter [55]. Ainsi, nous illustrons les propriétés des modèles intégrables sur cet exemple précis. Notre présentation met l'accent sur les variations possibles du modèle, comme le choix de jauge ou les conditions périodiques twistées.

FIG. 2.8 – Matrice  $\mathbf{R}$ .

### 2.3.1 Matrice $\mathbf{R}$

Au §1.2.3, on a défini les poids de Boltzmann du modèle à six vertex :

$$\omega_1, \dots, \omega_6 = \sin(\gamma - u), \sin(\gamma - u), \sin u, \sin u, e^{-i(u-\eta)} \sin \gamma, e^{i(u-\eta)} \sin \gamma \quad (2.3.1)$$

où  $\gamma$  est le paramètre qui détermine la classe d'universalité du modèle,  $u$  est le paramètre spectral, et  $\eta$  est un paramètre de jauge (voir §2.3.11). Les poids de Boltzmann (2.3.1) peuvent être regroupés dans un objet : la matrice  $\mathbf{R}$ . Les symétries du modèle sont codées dans cette matrice.

Soit  $V = \text{vect}(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$  l'espace vectoriel des états d'une arête. Pour les arêtes horizontales, on identifie  $|\rightarrow\rangle = |\uparrow\rangle$  et  $|\leftarrow\rangle = |\downarrow\rangle$ . La matrice  $\mathbf{R}$  est un opérateur agissant sur l'espace  $V \otimes V$ . Le coefficient  $R_{\beta\nu, \mu\alpha}$  est le poids de Boltzmann de la configuration représentée sur la figure 2.8, où  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  sont les états des arêtes. Dans la base  $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$ , la matrice  $\mathbf{R}$  s'écrit :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_5 & \omega_3 & 0 \\ 0 & \omega_4 & \omega_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

Lorsque le paramètre de jauge est fixé à  $\eta = 0$  :

$$\mathbf{R}(u) = \begin{pmatrix} \sin(\gamma - u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iu} \sin \gamma & \sin u & 0 \\ 0 & \sin u & e^{iu} \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\gamma - u) \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

Les états d'une arête  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  peuvent être interprétés comme la représentation de  $\text{spin } \frac{1}{2}$  de  $\text{SU}(2)$ . Dans ce contexte, on exprimera les opérateurs en termes de matrices de Pauli. Dans la base  $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$ , les matrices de

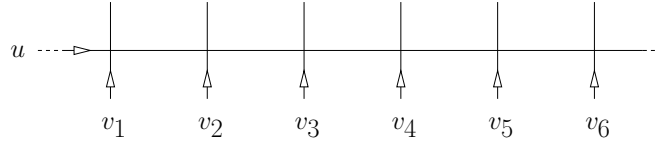


FIG. 2.9 – Matrice de transfert  $\mathbf{t}_N(u|\{v_m\})$  du modèle à six vertex hétérogène, pour un réseau de largeur  $N = 6$ . Les pointillés représentent les conditions aux bords périodiques.

Pauli s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

### 2.3.2 Matrice de transfert

Sur un réseau carré de largeur  $N$ , on fixe un paramètre spectral horizontal  $u$  et des paramètres spectraux verticaux  $v_1, \dots, v_N$ . La matrice de transfert  $\mathbf{t}_N(u|v_1, \dots, v_N)$  est construite à partir de  $N$  matrices  $\mathbf{R}$  (voir figure 2.9) :

$$(t_N)_{(\beta),(\alpha)}(u|v_1, \dots, v_N) \equiv \sum_{(\mu)} R_{\beta_1 \mu_2, \mu_1 \alpha_1}(u - v_1) \dots R_{\beta_N \mu_1, \mu_N \alpha_N}(u - v_N) \quad (2.3.5)$$

La matrice de transfert commute avec l'aimantation totale :

$$\mathbf{S}^z \equiv \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \boldsymbol{\sigma}_m^z \quad (2.3.6)$$

$$[\mathbf{t}_N(u|v_1, \dots, v_N), \mathbf{S}^z] = 0 \quad (2.3.7)$$

### 2.3.3 Algèbre de Temperley-Lieb

Si la jauge est fixée à  $\eta = 0$ , la matrice  $\mathbf{R}(u)$  se décompose sous la forme :

$$\mathbf{R}(u) = \sin(\gamma - u) \mathbf{I}_{V \otimes V} + \sin u \mathbf{E} \quad (2.3.8)$$

où  $\mathbf{E}$  est défini par sa matrice dans la base  $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$  :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

Cette matrice vérifie les relations :

$$\mathbf{E}^2 = 2 \cos \gamma \mathbf{E} \quad (2.3.10)$$

$$(\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_V) (\mathbf{I}_V \otimes \mathbf{E}) (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_V) = \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_V \quad (2.3.11)$$

$$(\mathbf{I}_V \otimes \mathbf{E}) (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_V) (\mathbf{I}_V \otimes \mathbf{E}) = \mathbf{I}_V \otimes \mathbf{E} \quad (2.3.12)$$

où  $\mathbf{I}_V$  est l'identité sur  $V$ . Ces relations sont illustrées sur la figure 2.10. L'opérateur  $\mathbf{E}$  permet de construire une représentation de l'algèbre de Temperley-Lieb [43], de la manière suivante. On définit la famille d'opérateurs agissant sur  $V_N \equiv V^{\otimes N}$  :

$$\mathbf{E}_m \equiv (\mathbf{I}_V)^{\otimes(m-1)} \otimes \mathbf{E} \otimes (\mathbf{I}_V)^{\otimes(N-m-1)}, \quad m = 1, \dots, N-1 \quad (2.3.13)$$

Les  $\mathbf{E}_m$  vérifient les relations :

$$(\mathbf{E}_m)^2 = 2 \cos \gamma \mathbf{E}_m \quad (2.3.14)$$

$$\mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m+1} \mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m \quad (2.3.15)$$

$$\mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m-1} \mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m \quad (2.3.16)$$

$$\mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m'} = \mathbf{E}_{m'} \mathbf{E}_m \quad \text{si } |m - m'| > 1 \quad (2.3.17)$$

Les relations (2.3.14) à (2.3.17) définissent l'algèbre de Temperley-Lieb [43].

### 2.3.4 Equations de Yang-Baxter et relation d'inversion

Fixons le paramètre  $\eta = 0$  dans les poids de Boltzmann (1.2.32). La matrice  $\mathbf{R}(u)$  satisfait les équations de Yang-Baxter :

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} R_{\beta_3 \beta_2, \mu_2 \mu_3}(u_2 - u_3) R_{\mu_3 \beta_1, \mu_1 \alpha_3}(u_1 - u_3) R_{\mu_2 \mu_1, \alpha_1 \alpha_2}(u_1 - u_2) = \\ & \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} R_{\beta_2 \beta_1, \mu_1 \mu_2}(u_1 - u_2) R_{\beta_3 \mu_1, \alpha_1 \mu_3}(u_1 - u_3) R_{\mu_3 \mu_2, \alpha_2 \alpha_3}(u_2 - u_3) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

où les sommes portent sur toutes les valeurs possibles de  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Pour alléger l'écriture, on note :

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_{23}(u_2 - u_3) \mathbf{R}_{13}(u_1 - u_3) \mathbf{R}_{12}(u_1 - u_2) = \\ & \mathbf{R}_{12}(u_1 - u_2) \mathbf{R}_{13}(u_1 - u_3) \mathbf{R}_{23}(u_2 - u_3) \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

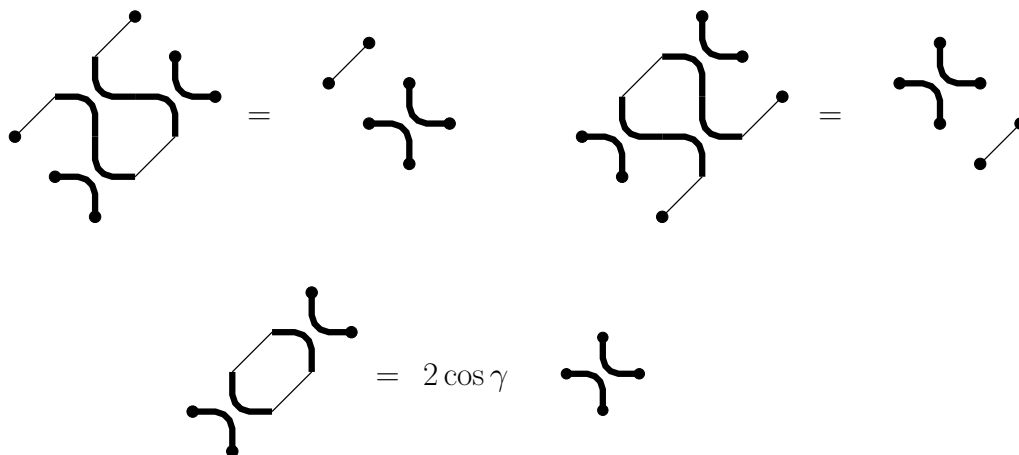


FIG. 2.10 – Relations vérifiées par l'opérateur  $\mathbf{E}$ . L'opérateur  $\mathbf{E}$  est représenté en traits épais.

Ces relations sont illustrées sur la figure 2.11. A chaque ligne  $j$  est associé le paramètre spectral  $u_j$ .

Les équations de Yang-Baxter restent valables si on associe à chaque ligne  $j$  le paramètre de jauge  $\eta_j$  :

$$\mathbf{R}_{23}(u_2 - u_3, \eta_2 - \eta_3)\mathbf{R}_{13}(u_1 - u_3, \eta_1 - \eta_3)\mathbf{R}_{12}(u_1 - u_2, \eta_1 - \eta_2) = \mathbf{R}_{12}(u_1 - u_2, \eta_1 - \eta_2)\mathbf{R}_{13}(u_1 - u_3, \eta_1 - \eta_3)\mathbf{R}_{23}(u_2 - u_3, \eta_2 - \eta_3) \quad (2.3.20)$$

D'autre part, les équations de Yang-Baxter sont compatibles avec la présence d'un twist  $\psi$  suivant une ligne de coupure parallèle à la ligne 3 (voir

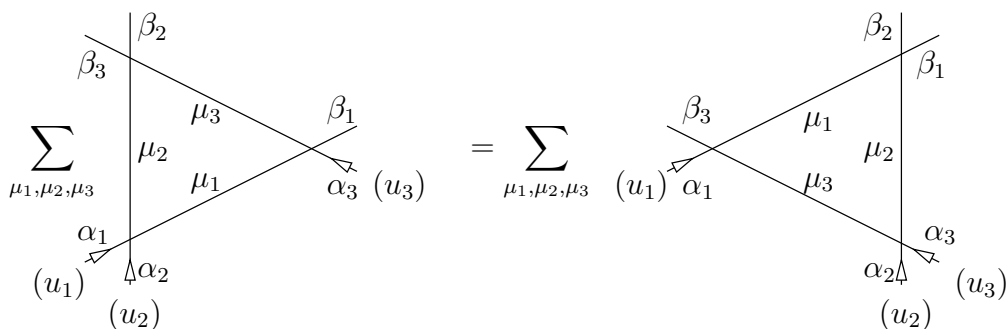


FIG. 2.11 – Relations de Yang-Baxter. Les flèches blanches indiquent le sens des paramètres spectraux  $u_1, u_2, u_3$ .

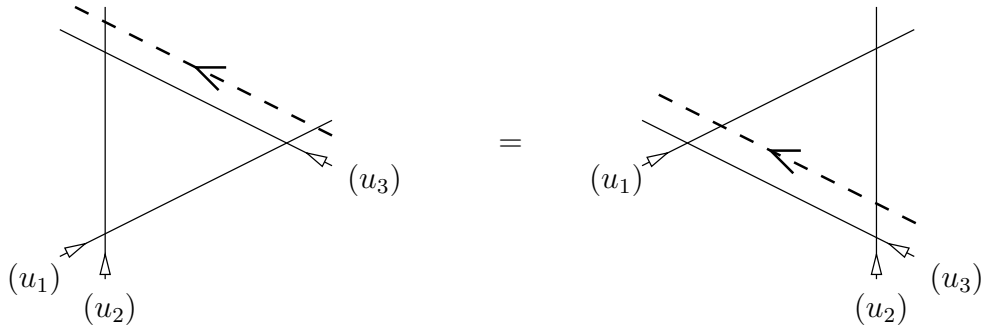


FIG. 2.12 – Relations de Yang-Baxter en présence d'un twist.

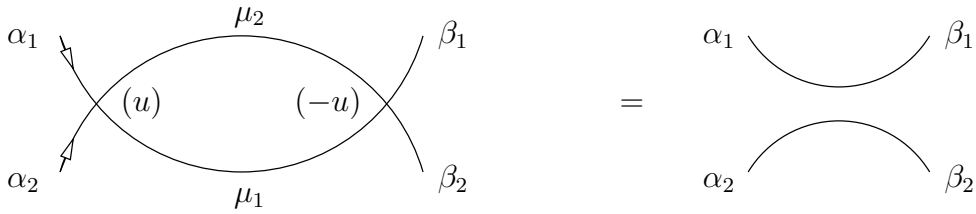


FIG. 2.13 – Relation d'inversion.

figure 2.12) :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{23}(u_2 - u_3, \psi) \tilde{\mathbf{R}}_{13}(u_1 - u_3, \psi) \mathbf{R}_{12}(u_1 - u_2) = \\ \mathbf{R}_{12}(u_1 - u_2) \tilde{\mathbf{R}}_{13}(u_1 - u_3, \psi) \tilde{\mathbf{R}}_{23}(u_2 - u_3, \psi) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

La matrice  $\mathbf{R}$  vérifie la relation d'inversion (voir figure 2.13) :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_1, \mu_2} R_{\beta_1 \beta_2, \mu_2 \mu_1}(-u, -\eta) R_{\mu_2 \mu_1, \alpha_1 \alpha_2}(u, \eta) \\ = \sin(\gamma - u) \sin(\gamma + u) \delta_{\alpha_1, \beta_1} \delta_{\alpha_2, \beta_2} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

ou, sous forme condensée :

$$\mathbf{R}_{21}(-u, -\eta) \mathbf{R}_{12}(u, \eta) = \sin(\gamma - u) \sin(\gamma + u) \mathbf{I}_{12} \quad (2.3.23)$$

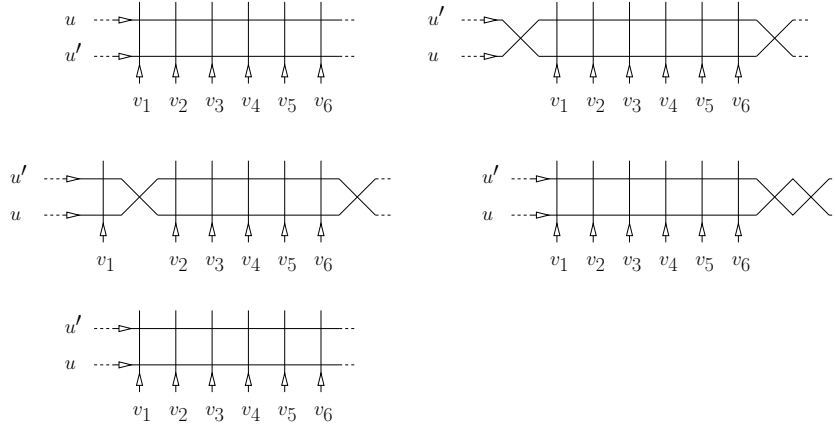


FIG. 2.14 – Commutation des matrices de transfert.

### 2.3.5 Commutation des matrices de transfert

Les équations de Yang-Baxter (2.3.19) et la relation d'inversion (2.3.23) ont pour conséquence la relation de commutation entre les matrices de transfert pour des paramètres spectraux différents :

$$[\mathbf{t}_N(u|\{v_m\}), \mathbf{t}_N(u'|\{v_m\})] = 0 \quad (2.3.24)$$

L'application des équations de Yang-Baxter qui mène à cette relation est illustrée sur la figure 2.14.

### 2.3.6 Opérateurs locaux

Comme la matrice de transfert  $\mathbf{t}_N$ , les opérateurs locaux  $\sigma_m^{x,y,z}$  s'expriment en termes de la matrice de monodromie  $\mathbf{T}$ . Cette construction a été proposée dans [56]. On introduit les notations :

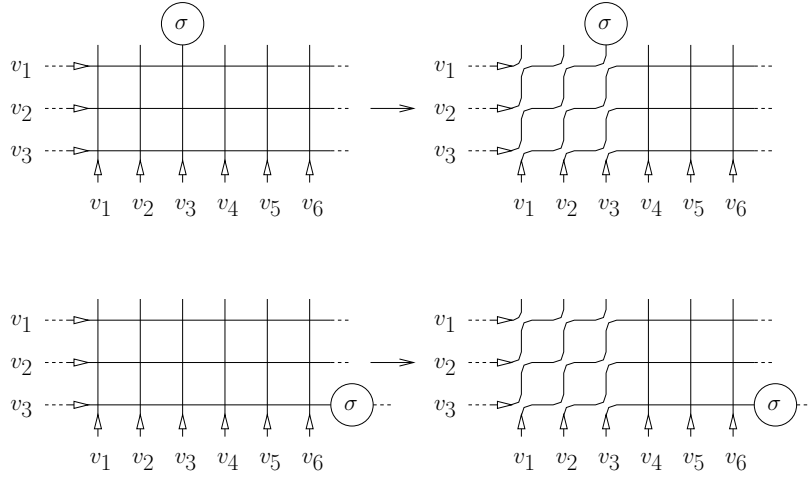
$$\sigma^{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \sigma^z) \quad (2.3.25)$$

$$\sigma^{\downarrow\downarrow} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \sigma^z) \quad (2.3.26)$$

$$\sigma^{\uparrow\downarrow} = \sigma^+ \quad (2.3.27)$$

$$\sigma^{\downarrow\uparrow} = \sigma^- \quad (2.3.28)$$



FIG. 2.15 – Illustration de l'identité (2.3.29) pour  $m = 3$ .

En utilisant la relation d'inversion (voir figure 2.15), on obtient l'expression :

$$\sigma_m^{\mu\nu} = \left[ \prod_{j=1}^{m-1} \mathbf{t}_N(v_j | \{v_{m'}\}) \right] T_{\nu\mu}(v_m | \{v_{m'}\}) \left[ \prod_{j=1}^m \mathbf{t}_N(v_j | \{v_{m'}\}) \right]^{-1} \quad (2.3.29)$$

### 2.3.7 Paramètre spectral et anisotropie

Pour expliquer le lien entre le paramètre spectral  $u$  et l'anisotropie du système, nous utilisons l'équivalence entre le modèle à six vertex *homogène* et le modèle de Potts auto-dual. Le paramètre spectral  $u$  permet de se déplacer sur la ligne auto-duale du modèle de Potts :

$$J_1 = 2 \operatorname{Argth}[\tan u \cotan \gamma] \quad (2.3.30)$$

$$J_2 = 2 \operatorname{Argth}[\tan(\gamma - u) \cotan \gamma] \quad (2.3.31)$$

Le point isotrope correspond à  $u = \gamma/2$ . Considérons la limite de grande taille du système, et faisons varier  $u$ . Le système se comporte comme si le pas du réseau dans la direction verticale avait été multiplié par le facteur  $\zeta_{\text{Potts}}$  (voir figure 2.16). Dans le cas particulier du modèle d'Ising ( $Q = 2$ ), on peut trouver [57] une observable sur le réseau qui est conjuguée au paramètre  $\zeta_{\text{Potts}}$  : c'est une version sur réseau du tenseur énergie-impulsion. Pour une valeur quelconque de  $Q$ , la solution exacte du modèle à six vertex homogène

sur le cylindre semi-infini permet le calcul du paramètre de déformation du réseau médial  $\zeta_{6V}$ . L'argument est basé sur le développement asymptotique de la valeur propre principale, en présence d'anisotropie [58] :

$$\ln \Lambda_N^{(0)}(u) = N f_\infty(u) + \sin\left(\frac{\pi u}{\gamma}\right) \frac{\pi c}{6N} + o(N^{-1}) \quad (2.3.32)$$

où  $f_\infty(u)$  est une fonction connue, et  $c$  est la charge centrale. La densité d'énergie libre par unité de surface est donnée par :

$$f_N = \frac{M \ln \Lambda_N^{(0)}(u)}{NM \zeta_{6V}(u)} \quad (2.3.33)$$

$$= \frac{f_\infty(u)}{\zeta_{6V}(u)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi u}{\gamma}\right)}{\zeta_{6V}(u)} \frac{\pi c}{6N^2} + o(N^{-2}) \quad (2.3.34)$$

or le terme d'ordre  $N^{-2}$  doit être égal à  $\frac{\pi c}{6N^2}$ , donc :

$$\zeta_{6V}(u) = \sin\left(\frac{\pi u}{\gamma}\right) \quad (2.3.35)$$

Ainsi, l'angle marqué sur la figure 2.16 est égal à  $\frac{\pi u}{\gamma}$ . D'après la figure 2.16, le paramètre de déformation du modèle de Potts est :

$$\zeta_{\text{Potts}}(u) = \tan\left(\frac{\pi u}{2\gamma}\right) \quad (2.3.36)$$

Ce résultat est en accord avec le cas  $Q = 2$  étudié dans la référence [57].

Ainsi, non seulement les matrices de transfert  $\mathbf{t}_N(u|\{\eta_m\})$  commutent pour toute valeur de  $u$ , mais leurs valeurs propres ont un comportement d'échelle similaire. Cette remarque permet d'étudier indistinctement le spectre de la matrice de transfert ou du hamiltonien, qui est défini dans la limite de grande anisotropie  $u \rightarrow 0$ . L'anisotropie du système affecte le développement asymptotique des valeurs propres par un facteur multiplicatif :

$$\ln \Lambda_N^{(j)}(u) = N f_\infty(u) + \zeta_{6V}(u) \left( \frac{\pi c}{6N} - \frac{2\pi X^{(j)}}{N} \right) + o(N^{-1}) \quad (2.3.37)$$

### 2.3.8 Ansatz de Bethe

La matrice de transfert du modèle à six vertex  $\mathbf{t}_N(u|\{v_m\})$  est une matrice de dimension  $2^N \times 2^N$ . Le problème de la diagonalisation de  $\mathbf{t}_N(u|\{v_m\})$

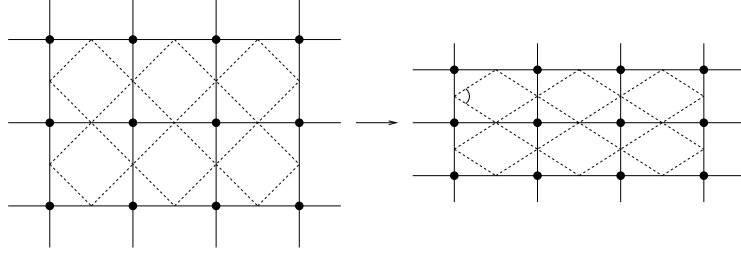


FIG. 2.16 – Déformation anisotrope du réseau carré du modèle de Potts (traits pleins) et du réseau médial (traits discontinus).

peut être ramené à la résolution d'un système non-linéaire portant, au plus, sur  $N$  inconnues. Ceci est possible grâce aux symétries du modèle, en particulier les équations de Yang-Baxter. Dans ce chapitre, nous présentons la construction des états propres par la méthode de l'ansatz de Bethe algébrique.

La matrice de transfert commute avec l'aimantation totale  $\mathbf{S}^z$ . Cette loi de conservation permet de définir les particules du modèle à six vertex : on appelle particule une flèche tournée vers le bas. En partant de l'état de référence :

$$|\uparrow\rangle \equiv |\uparrow \dots \uparrow\rangle \quad (2.3.38)$$

on construit les états propres à plusieurs particules en agissant avec un opérateur de création.

Les opérateurs de création/annihilation et la matrice de transfert sont construits à partir d'un seul objet : la *matrice de monodromie*  $\mathbf{T}(u|\{v_m\})$ . C'est une matrice de dimension  $2 \times 2$ , dont les éléments sont des opérateurs agissant sur l'espace  $V_N$ . Soit  $\mu, \nu$  deux configurations d'arêtes horizontales. L'élément de matrice  $\mathbf{T}_{\nu\mu}(u|\{v_m\})$  est l'opérateur agissant sur les arêtes verticales (voir figure 2.17), défini par son action sur une configuration de ligne  $\alpha$  :

$$(T_{\nu\mu})_{\beta\alpha}(u|\{v_m\}) = \sum_{\mu_m} R_{\beta_N\nu,\mu_{N-1}\alpha_N}(u-v_N) \dots R_{\beta_2\nu_2,\mu_1\alpha_2}(u-v_2) R_{\beta_1\nu_1,\mu_0\alpha_1}(u-v_1) \quad (2.3.39)$$

Dans la base  $(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ , on écrit la matrice de monodromie :

$$\mathbf{T}(u|\{v_m\}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(u|\{v_m\}) & \mathbf{B}(u|\{v_m\}) \\ \mathbf{C}(u|\{v_m\}) & \mathbf{D}(u|\{v_m\}) \end{pmatrix} \quad (2.3.40)$$

La matrice de transfert est donnée par la trace de la matrice de monodromie



FIG. 2.17 – Element de matrice  $\mathbf{T}_{\nu\mu}$  de la matrice de monodromie.

sur l'espace horizontal :

$$\mathbf{t}_N(u|\{v_m\}) = \mathbf{A}(u|\{v_m\}) + \mathbf{D}(u|\{v_m\}) \quad (2.3.41)$$

Pour alléger les notations, on omet dans la suite la dépendance de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  envers les paramètres spectraux verticaux  $v_m$ . Les équations de Yang-Baxter impliquent les relations de commutation entre les éléments de la matrice de monodromie :

$$[\mathbf{A}(u), \mathbf{A}(u')] = 0 \quad (2.3.42)$$

$$[\mathbf{B}(u), \mathbf{B}(u')] = 0 \quad (2.3.43)$$

$$[\mathbf{C}(u), \mathbf{C}(u')] = 0 \quad (2.3.44)$$

$$[\mathbf{D}(u), \mathbf{D}(u')] = 0 \quad (2.3.45)$$

$$\mathbf{A}(u)\mathbf{B}(u') = \frac{\sin(\gamma - u' + u)}{\sin(u' - u)}\mathbf{B}(u')\mathbf{A}(u) - \frac{e^{i(u' - u)} \sin \gamma}{\sin(u' - u)}\mathbf{B}(u)\mathbf{A}(u') \quad (2.3.46)$$

$$\mathbf{D}(u)\mathbf{B}(u') = \frac{\sin(\gamma - u + u')}{\sin(u - u')}\mathbf{B}(u')\mathbf{D}(u) - \frac{e^{i(u' - u)} \sin \gamma}{\sin(u - u')}\mathbf{B}(u)\mathbf{D}(u') \quad (2.3.47)$$

L'état de référence est état propre des opérateurs  $\mathbf{A}(u)$ ,  $\mathbf{D}(u)$  :

$$\mathbf{A}(u)|\uparrow\rangle = \prod_{m=1}^N \sin(\gamma - u + v_m)|\uparrow\rangle \quad (2.3.48)$$

$$\mathbf{D}(u)|\uparrow\rangle = \prod_{m=1}^N \sin(u - v_m)|\uparrow\rangle \quad (2.3.49)$$

A chaque configuration de vertex (figure 1.10), le flux de flèches est conservé. En conséquence, l'opérateur  $\mathbf{B}(u)$  crée une particule, tandis que l'opérateur  $\mathbf{C}(u)$  détruit une particule. Ainsi, l'état :

$$|\phi_{u_1, \dots, u_r}\rangle \equiv \mathbf{B}(u_1) \dots \mathbf{B}(u_r)|\uparrow\rangle \quad (2.3.50)$$

est un état à  $r$  particules. Il est état propre de la matrice de transfert, à condition que les paramètres  $u_1, \dots, u_r$  vérifient des relations, appelées *équations*

de Bethe. Ces relations sont obtenues en appliquant les relations de commutation (2.3.46)-(2.3.47), et en imposant que les termes non voulus s'annulent. Les équations de Bethe du modèle à six vertex sont :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \prod_{m=1}^N \frac{\sin(u_j - v_m)}{\sin(\gamma - u_j + v_m)} = - \prod_{l=1}^r \frac{\sin(u_j - u_l + \gamma)}{\sin(u_j - u_l - \gamma)} \quad (2.3.51)$$

La valeur propre associée à l'état (2.3.50) est :

$$\begin{aligned} \Lambda_N(u|\{v_m\}|\{u_j\}) &= \left[ \prod_{m=1}^N \sin(\gamma - u + v_m) \right] \left[ \prod_{j=1}^r \frac{\sin(\gamma - u_j + u)}{\sin(u_j - u)} \right] \\ &+ \left[ \prod_{m=1}^N \sin(u - v_m) \right] \left[ \prod_{j=1}^r \frac{\sin(\gamma - u + u_j)}{\sin(u - u_j)} \right] \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

### 2.3.9 Cas du modèle twisté

En présence d'une ligne de coupure avec un paramètre de twist  $\psi$ , la construction décrite ci-dessus est légèrement modifiée. Les équations de Bethe deviennent :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \prod_{m=1}^N \frac{\sin(u_j - v_m)}{\sin(\gamma - u_j + v_m)} = -e^{2i\psi} \prod_{l=1}^r \frac{\sin(u_j - u_l + \gamma)}{\sin(u_j - u_l - \gamma)} \quad (2.3.53)$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} \Lambda_N(u|\{v_m\}|\{u_j\}) &= e^{i\psi} \left[ \prod_{m=1}^N \sin(\gamma - u + v_m) \right] \left[ \prod_{j=1}^r \frac{\sin(\gamma - u_j + u)}{\sin(u_j - u)} \right] \\ &+ e^{-i\psi} \left[ \prod_{m=1}^N \sin(u - v_m) \right] \left[ \prod_{j=1}^r \frac{\sin(\gamma - u + u_j)}{\sin(u - u_j)} \right] \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

### 2.3.10 Equations de Yang-Baxter dans la base des connectivités

Les équations de Yang-Baxter et la relation d'inversion peuvent être exprimées dans la base des connectivités de boucles. La résolution des équations fonctionnelles qui en découlent permet d'identifier des points intégrables dans un modèle de boucle, sans passer par l'intermédiaire d'un modèle de vertex équivalent. Cette démarche est illustrée sur l'exemple du modèle de Temperley-Lieb et du modèle de Brauer.

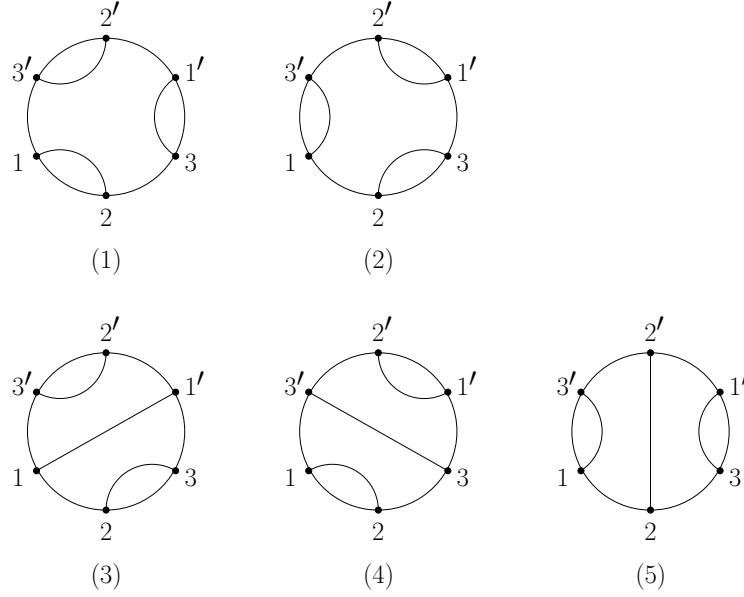


FIG. 2.18 – Les cinq configurations de connectivités sans intersections entre six points.

### Modèle de Temperley-Lieb

On numérote les arêtes extérieures du triangle comme indiqué sur la figure 2.19. Les cinq connectivités possibles entre ces arêtes sont représentées sur la figure 2.18. On écrit la matrice  $\mathbf{R}$  comme :

$$\mathbf{R}(u) = a(u)\mathbf{I} + b(u)\mathbf{E} \quad (2.3.55)$$

A chaque configuration de la figure 2.18 correspond une équation de Yang-Baxter. L'ensemble de ces équations amène le système :

$$(1) : \quad nb(u)b(v)a(u+v) + b(u)a(v)a(u+v) + a(u)b(v)a(u+v) + b(u)b(v)b(u+v) = a(u)a(v)b(u+v) \quad (2.3.56)$$

$$(2) : \quad a(u)a(v)b(u+v) = nb(u)b(v)a(u+v) + b(u)a(v)a(u+v) + a(u)b(v)a(u+v) + b(u)b(v)b(u+v) \quad (2.3.57)$$

$$(3) : \quad a(u)b(v)b(u+v) = a(u)b(v)b(u+v) \quad (2.3.58)$$

$$(4) : \quad b(u)a(v)b(u+v) = b(u)a(v)b(u+v) \quad (2.3.59)$$

$$(5) : \quad a(u)a(v)a(u+v) = a(u)a(v)a(u+v) \quad (2.3.60)$$

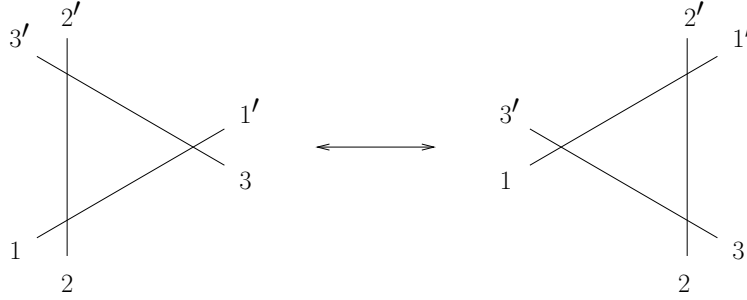


FIG. 2.19 – Numérotation des arêtes extérieures du triangle.

où on a utilisé la notation :

$$u = u_1 - u_2 \quad v = u_2 - u_3 \quad (2.3.61)$$

La relation d'inversion impose :

$$nb(u)b(-u) + a(u)b(-u) + b(u)a(-u) = 0 \quad (2.3.62)$$

$$a(u)a(-u) = \rho(u) \quad (2.3.63)$$

En éliminant les équations équivalentes ou triviales, on obtient :

$$\begin{aligned} nb(u)b(v)a(u+v) + b(u)a(v)a(u+v) + a(u)b(v)a(u+v) \\ + b(u)b(v)b(u+v) = a(u)a(v)b(u+v) \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

$$nb(u)b(-u) + a(u)b(-u) + b(u)a(-u) = 0 \quad (2.3.65)$$

Les équations (2.3.64) et (2.3.65) sont des équations fonctionnelles pour les fonctions  $a(u), b(u)$ . Toute solution correspond à un modèle de boucles intégrable. On cherche une solution du système (2.3.64)-(2.3.65) sous la forme :

$$a(u) = P(e^{2iu}) \quad (2.3.66)$$

$$b(u) = Q(e^{2iu}) \quad (2.3.67)$$

où  $P(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes :

$$P(z) = \sum_k p_k z^k \quad (2.3.68)$$

$$Q(z) = \sum_k q_k z^k \quad (2.3.69)$$

Le système devient :

$$\begin{aligned} nQ(z)Q(w)P(zw) + Q(z)P(w)P(zw) &+ \\ P(z)Q(w)Q(zw) + Q(z)Q(w)Q(zw) &= P(z)P(w)Q(zw) \end{aligned} \quad (2.3.70)$$

$$nQ(z)Q(z^{-1}) + P(z)Q(z^{-1}) + Q(z)P(z^{-1}) = 0 \quad (2.3.71)$$

Comme on peut choisir arbitrairement la normalisation des poids de Boltzmann, on fixe  $Q(0) = 1$ . Les polynômes :

$$P(z) = -e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}z \quad (2.3.72)$$

$$Q(z) = 1 - z \quad (2.3.73)$$

sont solution du système (2.3.70)-(2.3.71). Le rapport entre les poids de Boltzmann est :

$$x(u) = \frac{Q(e^{2iu})}{P(e^{2iu})} = \frac{\sin u}{\sin(\gamma - u)} \quad (2.3.74)$$

### Modèle de Brauer

Le modèle de Brauer est défini dans le paragraphe 1.3.3. Les connectivités correspondant à ce modèle sont les appariements complets. Le nombre de connectivités possibles pour  $N$  points (si  $N$  est pair) est égal à  $(N - 1)!! = 1 \times 3 \times \dots \times (N - 1)$ . Les 15 connectivités possibles autour du triangle sont représentées sur la figure 2.20. Les équations de Yang-Baxter s'écrivent :

$$\begin{aligned} a(u)a(v)b(u+v) &= nb(u)b(v)a(u+v) + b(u)a(v)a(u+v) \\ &+ a(u)b(v)a(u+v) + b(u)b(v)b(u+v) + c(u)b(v)a(u+v) \\ &+ b(u)c(v)a(u+v) + b(u)b(v)c(u+v) \end{aligned} \quad (2.3.75)$$

$$c(u)a(v)b(u+v) = b(u)c(v)b(u+v) + b(u)a(v)c(u+v) \quad (2.3.76)$$

$$a(u)a(v)c(u+v) = c(u)a(v)a(u+v) + a(u)c(v)a(u+v) \quad (2.3.77)$$

La relation d'inversion s'écrit :

$$\begin{aligned} a(u)b(-u) + b(u)a(-u) + c(u)b(-u) \\ + b(u)c(-u) + nb(u)b(-u) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.78)$$

$$a(u)c(-u) + a(-u)c(u) = 0 \quad (2.3.79)$$

$$a(u)a(-u) + c(u)c(-u) = \rho(u) \quad (2.3.80)$$

La solution de ces équations fonctionnelles est :

$$a(u), b(u), c(u) = 1 - u, \quad u, \quad \left(1 - \frac{n}{2}\right)u(1 - u) \quad (2.3.81)$$



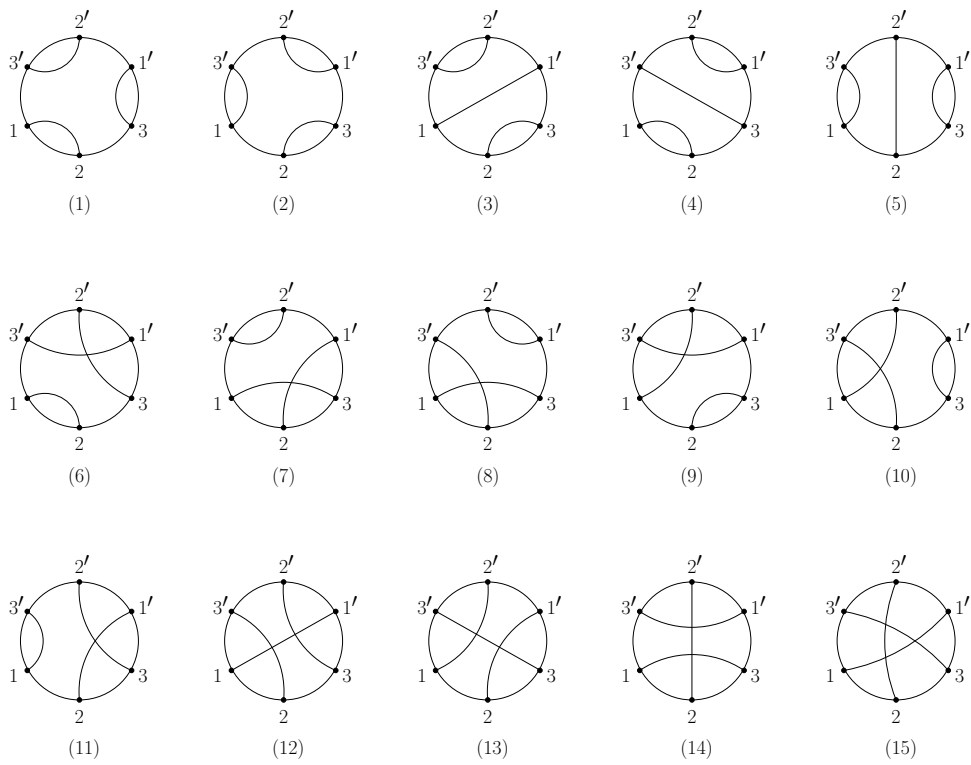


FIG. 2.20 – Les 15 configurations de connectivités avec intersections entre six points.

Ainsi, lorsque la fugacité des boucles  $n$  et le paramètre spectral  $u$  varient dans les intervalles :

$$0 \leq n < 2, \quad 0 < u < 1 \quad (2.3.82)$$

le point intégrable (2.3.81) est un modèle probabiliste. Le point isotrope est  $u = \frac{1}{2}$ .

### 2.3.11 Annexe : changement de jauge et matrices $\mathbf{R}$ twistées

#### Changement de jauge

La matrice  $\mathbf{R}(u, \eta)$  avec un paramètre de jauge  $\eta$  quelconque s'exprime en fonction de la matrice  $\mathbf{R}(u)$  avec une jauge  $\eta = 0$  :

$$R_{\beta\nu, \alpha\mu}(u, \eta) = e^{\frac{i\eta(\beta-\alpha)}{2}} R_{\beta\nu, \alpha\mu}(u) \quad (2.3.83)$$

Cette relation s'écrit sous forme d'opérateurs :

$$\mathbf{R}(u, \eta) = (e^{i\frac{\eta}{2}\sigma^z} \otimes \mathbf{I}_V) \mathbf{R}(u) (\mathbf{I}_V \otimes e^{-i\frac{\eta}{2}\sigma^z}) \quad (2.3.84)$$

Sur le réseau, on définit un paramètre de jauge horizontal  $\eta_0$  et  $N$  paramètres de jauge verticaux  $\eta_1, \dots, \eta_N$ . La matrice de transfert est contruite à partir des matrices  $\mathbf{R}(u - v_m, \eta_0 - \eta_m)$ , avec  $m = 1, \dots, N$ . Ce changement de jauge est une transformation unitaire :

$$\mathbf{t}_N(u, \eta_0 | \{v_m\}, \{\eta_m\}) = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{t}_N(u | \{v_m\}) \mathbf{U} \quad (2.3.85)$$

où :

$$\mathbf{U} = \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{m=1}^N \eta_m \sigma_m^z\right) \quad (2.3.86)$$

On note que l'opérateur  $\mathbf{U}$  est indépendant du paramètre de jauge horizontal  $\eta_0$ .

#### Matrices $\mathbf{R}$ twistées

On introduit une ligne de coupure dans la matrice de transfert, en modifiant la matrice  $\mathbf{R}$  sur le site  $N$  :

$$\begin{aligned} (t_N)_{(\beta), (\alpha)}(u | \{v_m\}, \psi) \equiv \\ \sum_{(\mu)} R_{\mu_1 \alpha_1}^{\beta_1 \mu_2}(u - v_1) \dots R_{\mu_{N-1} \alpha_{N-1}}^{\beta_{N-1} \mu_N}(u - v_{N-1}) (\tilde{R}_d)_{\mu_N \alpha_N}^{\beta_N \mu_1}(u - v_N, \psi) \end{aligned} \quad (2.3.87)$$

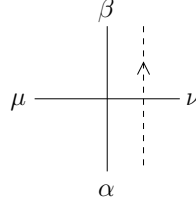


FIG. 2.21 – Matrice twistée à droite  $\tilde{\mathbf{R}}_d(u, \psi)$ .

où  $\tilde{\mathbf{R}}_d(u, \psi)$  est la matrice  $\mathbf{R}$  twistée à droite (voir figure 2.21), définie par les poids de Boltzmann :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_6 &= e^{i\psi} \sin(\gamma - u), e^{-i\psi} \sin(\gamma - u), e^{i\psi} \sin u, e^{-i\psi} \sin u, \\ &e^{-i(u+\psi)} \sin \gamma, e^{i(u+\psi)} \sin \gamma \end{aligned} \quad (2.3.88)$$

La relation entre  $\mathbf{R}(u)$  et  $\tilde{\mathbf{R}}_d(u, \psi)$  est :

$$(\tilde{R}_d)_{\mu\alpha}^{\beta\nu}(u, \psi) = e^{i\psi\nu} R_{\mu\alpha}^{\beta\nu}(u) \quad (2.3.89)$$

De même, on définit la matrice  $\tilde{\mathbf{R}}_g(u, \psi)$  twistée à gauche :

$$(\tilde{R}_g)_{\mu\alpha}^{\beta\nu}(u, \psi) = e^{i\psi\mu} R_{\mu\alpha}^{\beta\nu}(u) \quad (2.3.90)$$

Les matrices  $\tilde{\mathbf{R}}_d(u, \psi)$  et  $\tilde{\mathbf{R}}_g(u, \psi)$  sont reliées par un changement de jauge  $\eta = 2\psi$ .

Plus généralement, on considère la matrice de transfert en présence de  $N$  lignes de coupure :

$$(t_N)_{(\beta),(\alpha)}(u|\{v_m\}, \{\psi_m\}) \equiv (\tilde{R}_d)_{\mu_1\alpha_1}^{\beta_1\mu_2}(u - v_1, \psi_1) \dots (\tilde{R}_d)_{\mu_N\alpha_N}^{\beta_N\mu_1}(u - v_N, \psi_N) \quad (2.3.91)$$

Le changement de jauge  $\{\eta_1, \dots, \eta_N\}$  modifie les twists  $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$  :

$$\mathbf{t}_N(u|\{v_m\}, \{\eta_m\}, \{\psi_m\}) = \mathbf{t}_N(u|\{v_m\}, \{\psi'_m\}) \quad (2.3.92)$$

où :

$$\psi'_m = \psi_m + \frac{\eta_m - \eta_{m+1}}{2} \quad (2.3.93)$$

La transformation (2.3.93) n'affecte pas le twist total  $\psi \equiv \sum_{m=1}^N \psi_m$ . Ainsi, les matrices de transfert  $\mathbf{t}_N(u|\{v_m\}, \{0, \dots, 0, \psi\})$  et  $\mathbf{t}_N(u|\{v_m\}, \{\frac{\psi}{N}, \dots, \frac{\psi}{N}\})$  sont reliées par la transformation unitaire :

$$\mathbf{t}_N \left( u|\{v_m\}, \left\{ \frac{\psi}{N}, \dots, \frac{\psi}{N} \right\} \right) = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{t}_N(u|\{v_m\}, \{0, \dots, 0, \psi\}) \mathbf{U} \quad (2.3.94)$$

où  $\mathbf{U}$  est l'opérateur unitaire (2.3.86) associé aux paramètres de jauge :

$$\eta_m = -\frac{2m\psi}{N} \quad (2.3.95)$$

Ainsi, la matrice de transfert  $\mathbf{t}_N(u|\{v_m\}, \{0, \dots, 0, \psi\})$ , bien qu'elle ne soit pas invariante par translation, est reliée par transformation unitaire à une matrice invariante par translation. Soit  $e^{-i\mathbf{P}}$  l'opérateur de translation d'un site vers la droite. On a :

$$[\mathbf{t}_N(u|\{v_m\}, \{0, \dots, 0, \psi\}), \mathbf{U}e^{-i\mathbf{P}}\mathbf{U}^\dagger] = 0 \quad (2.3.96)$$

## 2.4 Exemple d'Ansatz de Bethe : la chaîne XXZ

### 2.4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit la structure intégrable du modèle à six vertex. Cette structure est générale, et admet les hétérogénéités de paramètres spectraux. Cependant, les propriétés du spectre de la matrice de transfert (et donc la physique du modèle) dépendent du choix des paramètres spectraux verticaux  $v_1, \dots, v_N$ . Pour décrire les méthodes d'analyse de l'Ansatz de Bethe, nous restreignons la discussion au cas du modèle à six vertex homogène (équivalent à la chaîne XXZ). Ce modèle sert de "laboratoire" pour l'introduction de méthodes analytiques. D'autre part, les états de basse énergie de l'Ansatz de Bethe peuvent être identifiés en termes d'excitations du modèle gaussien équivalent.

### 2.4.2 Limite anisotrope

Comme nous l'avons vu au §2.3.7, le paramètre spectral  $u$  contrôle l'anisotropie du modèle, et on s'attend à ce que la structure du spectre ne dépende pas de la valeur de  $u$ . En particulier, dans la limite  $u \rightarrow 0^+$ , la matrice de transfert est de la forme :

$$\mathbf{t}_N(u) \simeq \mathbf{t}_N(0) \exp \left[ -\frac{\sin \gamma}{u} \mathbf{H}_N \right] \quad (2.4.1)$$

où  $\mathbf{H}_N$  est un hamiltonien quantique agissant sur l'espace  $V_N$ . D'après la décomposition (2.3.8) de la matrice  $\mathbf{R}(u)$ , on a :

$$\mathbf{t}_N(0) = \sin^N \gamma e^{-i\mathbf{P}} \quad (2.4.2)$$

$$\mathbf{H}_N = N \cos \gamma \mathbf{I}_{V_N} - \sum_{m=1}^N \mathbf{E}_m \quad (2.4.3)$$

où  $e^{-i\mathbf{P}}$  est l'opérateur de translation d'un site à droite. Les opérateurs  $\mathbf{E}_m$  s'expriment en termes des matrices de Pauli :

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{2} [\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y - \cos \gamma (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - \mathbf{I}_{V_N}) - i \sin \gamma (\sigma_m^z - \sigma_{m+1}^z)] \quad (2.4.4)$$

Ainsi, le hamiltonien  $\mathbf{H}_N$  s'écrit :

$$\mathbf{H}_N = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^N [\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y - \cos \gamma (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z + \mathbf{I}_{V_N})] \quad (2.4.5)$$

Ce hamiltonien est appelé *chaîne de spins XXZ*.

*N.B.* : L'introduction du twist équivaut à la condition aux bords :

$$\sigma_{N+1}^\pm = e^{\pm 2i\psi} \sigma_1^\pm \quad (2.4.6)$$

### 2.4.3 Equations de Bethe, valeurs propres

#### Equations de Bethe

Il est commode d'utiliser les variables décalées  $\lambda_j$  :

$$\lambda_j = i \left( \frac{\gamma}{2} - u_j \right) \quad (2.4.7)$$

Les équations de Bethe (2.3.51) s'écrivent alors :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \exp [iNk(\lambda_j)] = (-1)^{r-1} \prod_{l=1}^r \exp [-i\Theta(\lambda_j - \lambda_l)] \quad (2.4.8)$$

où :

$$k(\lambda) \equiv -i \ln \left[ \frac{\sinh(\frac{i\gamma}{2} - \lambda)}{\sinh(\frac{i\gamma}{2} + \lambda)} \right] = f\left(\frac{\gamma}{2}, \lambda\right) \quad (2.4.9)$$

$$\Theta(\lambda) \equiv -i \ln \left[ \frac{\sinh(i\gamma + \lambda)}{\sinh(i\gamma - \lambda)} \right] = -f(\gamma, \lambda) \quad (2.4.10)$$

et où la fonction logarithme complexe est déterminée par la ligne de coupure sur l'axe réel négatif, et la fonction  $f(\gamma, \lambda)$  est définie au §2.4.7. On applique le logarithme :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad Nk(\lambda_j) = 2\pi I_j - \sum_{l=1}^r \Theta(\lambda_j - \lambda_l) \quad (2.4.11)$$

où les *entiers de Bethe*  $I_j$  obéissent à la condition :

$$I_j - \frac{r-1}{2} \in \mathbb{Z} \quad (2.4.12)$$

### Valeurs propres, énergie et impulsion

La valeur propre associée à la solution  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  est :

$$\Lambda_N(u|\{\lambda_j\}) = \sin^N(\gamma - u) \left[ \prod_{j=1}^r e^{-if(\frac{\gamma}{2}, \lambda_j + iu)} \right] + \sin^N u \left[ \prod_{j=1}^r e^{if(\frac{\gamma}{2}, \lambda_j + iu - i\gamma)} \right] \quad (2.4.13)$$

L'énergie du hamiltonien équivalent (2.4.5), l'impulsion et l'aimantation totales sont :

$$\mathcal{E}_N(\{\lambda_j\}) \equiv -\sin \gamma \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial u}(0|\{\lambda_j\}) = N \cos \gamma + \sum_{j=1}^r \epsilon(\lambda_j) \quad (2.4.14)$$

$$k_{\text{tot}}(\{\lambda_j\}) \equiv \sum_{j=1}^r k(\lambda_j) = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^r I_j \quad (2.4.15)$$

$$S^z = \frac{N}{2} - r \quad (2.4.16)$$

où l'énergie d'une particule est :

$$\epsilon(\lambda) \equiv -\sin \gamma f' \left( \frac{\gamma}{2}, \lambda \right) = -\frac{2 \sin^2 \gamma}{\cosh 2\lambda - \cos \gamma} \quad (2.4.17)$$

#### 2.4.4 Spectre en taille finie

##### Etat fondamental dans un secteur d'aimantation donnée

L'aimantation totale  $S^z$  est reliée au nombre de particules  $r$  par l'équation (2.4.16). L'état fondamental du secteur à  $S^z$  fixé est déterminé par la configuration des entiers de Bethe :

$$I_1, \dots, I_r = -\frac{r-1}{2}, -\frac{r-1}{2} + 1, \dots, \frac{r-1}{2} \quad (2.4.18)$$

##### Excitations avec des racines réelles

Dans ce paragraphe, on raisonne sur le cas  $\gamma \rightarrow 0$  (chaîne XXX). Les excitations au-dessus du fondamental (2.4.18) sont les états déterminés par d'autres configurations d'entiers de Bethe. La valeur maximale admissible pour les  $I_j$  est obtenue en faisant tendre  $\lambda_j$  vers l'infini dans l'équation de Bethe (2.4.11). Suivant cette prescription, on obtient :

$$I_{\text{max}} = \frac{1}{2}(N - r - 1) \quad (2.4.19)$$

Ainsi, toute configuration d'entiers de Bethe de la forme :

$$-I_{\max} \leq I_1 < I_2 < \dots < I_r \leq I_{\max} \quad (2.4.20)$$

détermine (de manière unique) un état excité dans le secteur  $S^z = \frac{N}{2} - r$ . On appelle  $\tilde{I}_j$  les entiers non occupés parmi les  $(2I_{\max} + 1)$  valeurs possibles. Les positions correspondantes dans l'espace des  $\lambda$  sont déterminées par les équations :

$$Nk(\tilde{\lambda}_j) = 2\pi\tilde{I}_j - \sum_{l=1}^r \Theta(\tilde{\lambda}_j - \lambda_l) \quad (2.4.21)$$

### Autres excitations

Il existe d'autres formes de solutions aux équations de Bethe (2.4.11). Par exemple, certaines solutions contiennent des paires de racines conjuguées  $(\lambda_0 + \frac{i\gamma}{2}, \lambda_0 - \frac{i\gamma}{2})$ , appelées *2-strings*. Dans la suite, nous restreignons la discussion aux solutions réelles.

## 2.4.5 Limite continue

### Etat fondamental

On considère l'état fondamental du secteur d'aimantation totale :

$$S^z = \frac{N}{2} \times y \quad (2.4.22)$$

et on prend la limite  $N \rightarrow \infty$  avec  $y$  fixé. On fait l'hypothèse que les racines  $\lambda_j$  tendent vers une distribution continue, de densité proportionnelle à  $\frac{1}{N}$  :

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{N \rho(\lambda_j)} \quad (2.4.23)$$

où  $N\rho(\lambda)d\lambda$  est le nombre de racines comprises entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ . Soit  $Q_N(y)$  la plus grande racine. Lorsque  $y$  est fixé, on a :

$$Q_N(y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} Q(y) \quad (2.4.24)$$

Ainsi, les sommes sont remplacées par des intégrales :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^r u(\lambda_j) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-Q(y)}^{Q(y)} d\lambda \rho(\lambda) u(\lambda) \quad (2.4.25)$$

Dans cette limite, les équations de Bethe (2.4.11), l'aimantation par site et l'énergie par site deviennent :

$$k'(\lambda) = 2\pi\rho(\lambda) - \int_{-Q(y)}^{Q(y)} d\mu \rho(\mu) K(\lambda - \mu) \quad (2.4.26)$$

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{2} - \int_{-Q(y)}^{Q(y)} d\lambda \rho(\lambda) \quad (2.4.27)$$

$$\frac{\mathcal{E}_N}{N} = \cos \gamma + \int_{-Q(y)}^{Q(y)} d\lambda \rho(\lambda) \epsilon(\lambda) \quad (2.4.28)$$

où :

$$k'(\lambda) = f' \left( \frac{\gamma}{2}, \lambda \right) \quad (2.4.29)$$

$$K(\lambda) \equiv \Theta'(\lambda) = -f'(\gamma, \lambda) \quad (2.4.30)$$

L'équation (2.4.26) est appelée *équation de Lieb*. Dans le secteur fondamental  $y = 0$ , on a  $Q(y) = \infty$ , et les équations (2.4.26)-(2.4.27)-(2.4.28) se résolvent en transformée de Fourier. La transformée de Fourier du noyau  $K$  est :

$$\widehat{K}(\omega) = \frac{2\pi \sinh \left( \gamma - \frac{\pi}{2} \right) \omega}{\sinh \left( \frac{\pi\omega}{2} \right)} \quad (2.4.31)$$

La solution de (2.4.26) est :

$$\widehat{\rho}^{(0)}(\omega) = \widehat{s}(\omega) \equiv \frac{1}{2 \cosh \left( \frac{\gamma\omega}{2} \right)} \quad (2.4.32)$$

$$\rho^{(0)}(\lambda) = s(\lambda) \equiv \frac{1}{2\gamma \cosh \left( \frac{\pi\lambda}{\gamma} \right)} \quad (2.4.33)$$

### Excitations élémentaires

Dans ce paragraphe, pour simplifier la discussion, on se place dans le cas  $y = 0$ . À partir de l'état fondamental (2.4.18), on introduit un trou entre les entiers de Bethe  $I_h$  et  $I_{h+1}$  :

$$I_1 = -\frac{r-1}{2} \quad (2.4.34)$$

$$I_{j+1} - I_j = 1 + \delta_{j+1,h}, \quad j = 1, \dots, r-1 \quad (2.4.35)$$

On note  $\tilde{\lambda}$  la position correspondant à l'entier  $I_h + 1$  (voir équation (2.4.21)). Dans la limite continue, les observables intensives associées à la configuration (2.4.34)-(2.4.35) s'expriment en termes des *quantités habillées*. Soit



l'observable  $A$ , définie par la fonction des racines  $a(\lambda)$  :

$$A[\rho] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) a(\lambda) \quad (2.4.36)$$

Par exemple,  $A$  peut être l'énergie ou l'impulsion par site. On peut montrer [59] que la variation de  $A$  par rapport à l'état fondamental s'écrit :

$$A[\rho] - A[\rho^{(0)}] \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{N} \tilde{a}(\tilde{\lambda}) \quad (2.4.37)$$

où  $\tilde{a}(\lambda)$  est solution de l'équation intégrale :

$$\tilde{a}(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu K(\lambda - \mu) \tilde{a}(\mu) = a(\lambda) \quad (2.4.38)$$

La fonction  $\tilde{a}(\lambda)$  est appelée *fonction habillée*. Elle tient compte de la contribution (en négatif) du trou  $\tilde{\lambda}$  à (2.4.36), et du décalage des autres racines dû à la présence du trou.

En application, on obtient l'impulsion et l'énergie habillées :

$$\tilde{k}(\lambda) = 2\pi \int_0^\lambda d\mu s(\mu) \quad (2.4.39)$$

$$\tilde{\epsilon}(\lambda) = -2\pi \sin \gamma s(\lambda) \quad (2.4.40)$$

où la fonction  $s(\lambda)$  est définie en (2.4.33). Ainsi, si  $\tilde{\lambda}$  est proche du "niveau de Fermi"  $Q(y) = \infty$ , l'énergie obéit à la relation de dispersion :

$$\tilde{\epsilon}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} v_F \tilde{k}(\lambda) \quad (2.4.41)$$

où la "vitesse de Fermi" est :

$$v_F = \frac{\pi \sin \gamma}{\gamma} \quad (2.4.42)$$

Cette dernière quantité définit l'échelle d'énergie du hamiltonien (2.4.5). En particulier, cette échelle intervient dans les termes universels (voir équations (2.1.26)-(2.1.27)) du développement asymptotique de l'énergie.

### Secteurs d'aimantation fixée

Si on fixe  $y > 0$ , alors les bornes de l'intégrale dans (2.4.25) sont finies :  $0 < Q(y) < \infty$ . Le formalisme des paragraphes précédents doit alors être

modifié : en particulier, l'équation de Lieb (2.4.26) ne se résout pas directement par transformée de Fourier. Dans ce paragraphe, nous présentons la méthode proposée dans [60, 61]. Elle permet de calculer la densité de racines et l'énergie par site dans l'état (2.4.18), avec  $y > 0$ .

On pose :

$$\left[1 + \widehat{J}(\omega)\right] \left[1 - \frac{\widehat{K}(\omega)}{2\pi}\right] = 1 \quad (2.4.43)$$

$$g(\lambda) \equiv \rho(Q + \lambda) \quad (2.4.44)$$

Les équations (2.4.26)-(2.4.27)-(2.4.28) deviennent :

$$\begin{aligned} s(Q + \lambda) &= g(\lambda) + \int_0^\infty d\mu g(\mu) J(\lambda - \mu) \\ &\quad + \int_0^\infty d\mu g(\mu) J(2Q + \lambda + \mu) \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

$$\frac{y}{2} = 2 \left[1 + \widehat{J}(0)\right] \int_0^\infty d\lambda g(\lambda) \quad (2.4.46)$$

$$\frac{\mathcal{E}_N}{N} - \frac{\mathcal{E}_N^{(0)}}{N} = -2 \int_0^\infty d\lambda g(\lambda) \tilde{\varepsilon}(Q + \lambda) \quad (2.4.47)$$

Le principe de la méthode est de définir le paramètre infinitésimal :

$$\zeta \equiv e^{-\frac{\pi Q}{\gamma}} \quad (2.4.48)$$

et de résoudre le problème à l'ordre dominant en  $\zeta$ . Si  $\lambda > 0$ , le terme source de l'équation (2.4.45) se comporte comme :

$$s(Q + \lambda) \sim \zeta e^{-\frac{\pi \lambda}{\gamma}} \quad (2.4.49)$$

Le dernier terme de (2.4.45) est d'ordre  $\frac{\zeta}{Q^2}$ . On peut le négliger, à l'ordre 1 en  $\zeta$  :

$$s(Q + \lambda) = g^{(1)}(\lambda) + \int_0^\infty d\mu g^{(1)}(\mu) J(\lambda - \mu) \quad (2.4.50)$$

L'équation (2.4.50) est du type Wiener-Hopf (2.4.84). La transformée de Fourier du terme source est  $e^{-i\omega Q} \widehat{s}(\omega)$ . Les pôles de  $\widehat{s}(\omega)$  dans le demi-plan  $\text{Im } \omega < 0$  et les résidus correspondants sont :

$$\omega_k = -\frac{i\pi(2k+1)}{\gamma}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.4.51)$$

$$\text{Res } (\widehat{s}, \omega_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{i\gamma} \quad (2.4.52)$$

De plus, on peut montrer que  $G_+(\omega) = G_-(-\omega)$ . Dans la solution (2.4.90), le pôle  $\omega_k$  donne une contribution d'ordre  $e^{-i\omega_k Q} = \zeta^{2k+1}$ . A l'ordre 1 en  $\zeta$ , on tient compte uniquement du pôle  $-\frac{i\pi}{\gamma}$  :

$$\widehat{g}_+^{(1)}(\omega) = \frac{\zeta G_+(\omega) G_- \left( -\frac{i\pi}{\gamma} \right)}{i\gamma\omega - \pi} \quad (2.4.53)$$

D'après (2.4.46) :

$$\frac{y}{2} = 2 \left[ 1 + \widehat{J}(0) \right] \widehat{g}_+(0) \quad (2.4.54)$$

$$\frac{y}{2} \sim -\frac{2}{\pi} \left[ 1 + \widehat{J}(0) \right] G_+(0) G_- \left( -\frac{i\pi}{\gamma} \right) \zeta \quad (2.4.55)$$

De même, d'après (2.4.40) et (2.4.47) :

$$\frac{\mathcal{E}_N}{N} - \frac{\mathcal{E}_N^{(0)}}{N} = 2 \sin \gamma \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega Q} \widehat{g}_+(-\omega) \widehat{s}(\omega) \quad (2.4.56)$$

L'intégrale (2.4.56) s'exprime en termes des pôles de  $\widehat{s}$  dans le demi-plan  $\text{Im } \omega < 0$  :

$$\frac{\mathcal{E}_N}{N} - \frac{\mathcal{E}_N^{(0)}}{N} = -2 \sin \gamma \times 2i\pi \sum_{\omega_k} \text{Res} \left[ e^{-i\omega Q} \widehat{g}_+(-\omega) \widehat{s}(\omega), \omega = \omega_k \right] \quad (2.4.57)$$

A l'ordre dominant ( $\zeta^2$ ), seul le pôle  $-\frac{i\pi}{\gamma}$  contribue :

$$\frac{\mathcal{E}_N}{N} - \frac{\mathcal{E}_N^{(0)}}{N} \sim \frac{2 \sin \gamma}{\gamma} G_+ \left( \frac{i\pi}{\gamma} \right) G_- \left( -\frac{i\pi}{\gamma} \right) \zeta^2 \quad (2.4.58)$$

En comparant (2.4.55) et (2.4.58), on obtient :

$$\frac{\mathcal{E}_N}{N} - \frac{\mathcal{E}_N^{(0)}}{N} \sim \frac{2\pi v_F X}{N^2} \quad (2.4.59)$$

où :

$$X = \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{\widehat{K}(0)}{2\pi} \right] (S^z)^2 \quad (2.4.60)$$

Etant donné l'expression (2.4.31) de  $\widehat{K}(\omega)$ , on a :

$$1 - \frac{\widehat{K}(0)}{2\pi} = \frac{2(\pi - \gamma)}{\pi} \quad (2.4.61)$$

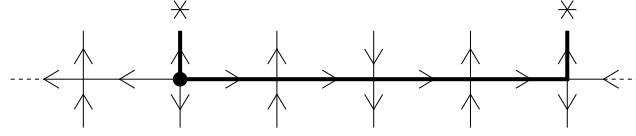


FIG. 2.22 – Insertion d'un vortex dans le modèle à six vertex. Le vortex est repéré par un point. Les trajectoires des particules manquantes sont repérées par des lignes épaisses, et leur position finale par des étoiles.

### 2.4.6 Relation avec le modèle gaussien

Dans la limite continue, on peut identifier certains des états de Bethe discutés au §2.4.4 avec des excitations électromagnétiques dans le modèle gaussien équivalent. Cette correspondance a été proposée dans [37], sur la base de calculs numériques pour de grandes tailles de système.

Premièrement, si  $0 < n \ll N$ , on considère l'état fondamental dans le secteur  $S^z = n$  :

$$I_1, \dots, I_r = -\frac{r-1}{2}, \dots, \frac{r-1}{2} \quad (2.4.62)$$

avec  $r = \frac{N}{2} - n$ . Pour  $n = 2$ , la suppression de 2 particules correspond à l'insertion d'un vertex  $\omega_7$  (voir figure 2.22), soit une charge magnétique  $m = 2$ . Plus généralement, l'état (2.4.62) correspond à la fonction de corrélation vortex-vortex de charge magnétique  $m = n$ . Ainsi, la prédiction du modèle gaussien pour l'exposant de l'état (2.4.62) est :

$$X_{0,n} = \frac{gn^2}{2} \quad (2.4.63)$$

où  $g$  est la constante de couplage du modèle gaussien. Or ce même exposant a été calculé au §2.4.5, à partir des équations de Bethe. Ainsi,  $g$  peut être déduite directement du noyau  $K(\lambda)$ , en comparant les expressions (2.4.60) et (2.4.63) :

$$g = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\widehat{K}(0)}{2\pi} \right] \quad (2.4.64)$$

Deuxièmement, en partant de l'état (2.4.62), on décale tous les  $I_j$  d'un entier  $d$  :

$$I_1, \dots, I_r = -\frac{r-1}{2} + d, \dots, \frac{r-1}{2} + d \quad (2.4.65)$$

La contrainte  $-I_{\max} \leq I_j \leq I_{\max}$  impose que  $-n \leq d \leq n$ . L'impulsion totale

de l'état (2.4.65) est :

$$k_{\text{tot}} = \pi d - \frac{2\pi}{N} nd \quad (2.4.66)$$

L'exposant radial correspondant est :

$$s_{d,n} = -nd \quad (2.4.67)$$

Ceci suggère que l'état (2.4.65) correspond à la fonction de corrélation d'une onde plane de charge  $e = d$  combinée à une paire de vortex de charges  $m = \pm n$ . Ainsi, le modèle gaussien prédit pour l'état (2.4.65) l'exposant :

$$X_{d,n} = \frac{d^2}{2g} + \frac{gn^2}{2} \quad (2.4.68)$$

## 2.4.7 Fonctions utiles

On définit la fonction  $f(\gamma, \lambda)$  :

$$f(\gamma, \lambda) \equiv -i \ln \frac{\sinh(i\gamma - \lambda)}{\sinh(i\gamma + \lambda)} \quad (2.4.69)$$

où  $0 < \gamma < \pi$ . Elle peut aussi s'écrire :

$$f(\gamma, \lambda) = 2\text{Arctan}(\tanh \lambda \cotan \gamma) \quad (2.4.70)$$

La fonction  $f(\gamma, \lambda)$  est représentée en fonction de  $\lambda$  sur la figure 2.23. La dérivée par rapport à  $\lambda$  est donnée par :

$$f'(\gamma, \lambda) \equiv \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\gamma, \lambda) = \frac{2 \sin 2\gamma}{\cosh 2\lambda - \cos 2\gamma} \quad (2.4.71)$$

On définit la transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\omega\lambda} d\lambda \quad (2.4.72)$$

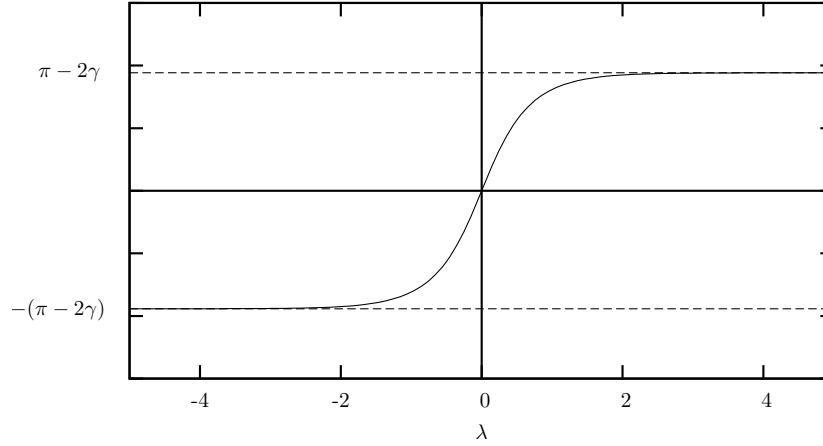
Dans ces notations, on a :

$$\widehat{\tanh}(\omega) = \frac{i\pi}{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \quad (2.4.73)$$

$$\widehat{\cosh^{-1}}(\omega) = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \quad (2.4.74)$$

La transformée de Fourier de  $f'$  est :

$$\widehat{f}'(\omega) = -2\pi \frac{\sinh\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\omega}{\sinh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \quad (2.4.75)$$

FIG. 2.23 – La fonction  $f(\gamma, \lambda)$  pour la valeur  $\gamma = \frac{\pi}{5}$ .

## 2.4.8 Méthode de Wiener-Hopf

### Equation de Wiener-Hopf sans second membre

L'équation de Wiener-Hopf sans second membre est une équation intégrale linéaire de la forme :

$$f(\lambda) + \int_0^{\infty} d\mu f(\mu) J(\lambda - \mu) = 0 \quad (2.4.76)$$

On suppose que la transformée de Fourier du noyau peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{1 + \widehat{J}(\omega)} = G_+(\omega)G_-(\omega) \quad (2.4.77)$$

où  $G_+$  (*resp.*  $G_-$ ) n'a ni pôle, ni zéro sur  $\text{Im } \omega > 0$  (*resp.*  $\text{Im } \omega < 0$ ). On décompose la fonction  $f$  en utilisant la fonction de Heaviside  $\theta$  :

$$f(\lambda) = f_+(\lambda) + f_-(\lambda) \quad (2.4.78)$$

$$f_+(\lambda) \equiv \theta(\lambda)f(\lambda), \quad f_-(\lambda) \equiv [1 - \theta(\lambda)]f(\lambda) \quad (2.4.79)$$

On applique la transformation de Fourier sur l'équation (2.4.76) :

$$\left[1 + \widehat{J}(\omega)\right] \widehat{f}_+(\omega) + \widehat{f}_-(\omega) = 0 \quad (2.4.80)$$

$$\frac{\widehat{f}_+(\omega)}{G_+(\omega)} + G_-(\omega)\widehat{f}_-(\omega) = 0 \quad (2.4.81)$$

La transformée de Fourier  $\widehat{f}_+(\omega)$  (*resp.*  $\widehat{f}_-(\omega)$ ) est analytique sur  $\text{Im } \omega > 0$  (*resp.*  $\text{Im } \omega < 0$ ). Ainsi, la fonction  $F(\omega) = \frac{\widehat{f}_+(\omega)}{G_+(\omega)} = -G_-(\omega)\widehat{f}_-(\omega)$  est analytique sur le plan complexe, donc elle est constante. La solution est :

$$\widehat{f}_+(\omega) = C G_+(\omega) \quad (2.4.82)$$

$$\widehat{f}_-(\omega) = -\frac{C}{G_-(\omega)} \quad (2.4.83)$$

où  $C$  est une constante.

### Equation de Wiener-Hopf avec second membre

La méthode décrite ci-dessus permet de résoudre l'équation avec second membre :

$$f(\lambda) + \int_0^\infty d\mu f(\mu) J(\lambda - \mu) = h(\lambda) \quad (2.4.84)$$

On pose :

$$\widehat{f}_+(\omega) = C_+(\omega) G_+(\omega) \quad (2.4.85)$$

$$\widehat{f}_-(\omega) = -\frac{C_-(\omega)}{G_-(\omega)} \quad (2.4.86)$$

où  $C_+(\omega)$  (*resp.*  $C_-(\omega)$ ) est une fonction analytique sur  $\text{Im } \omega > 0$  (*resp.*  $\text{Im } \omega < 0$ ). L'équation (2.4.84) devient :

$$C_+(\omega) - C_-(\omega) = G_-(\omega)\widehat{h}(\omega) \quad (2.4.87)$$

On utilise l'opération définie sur  $\text{Im } \omega \geq 0$  :

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega') d\omega'}{\omega - \omega' + i\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \begin{cases} f(\omega) & \text{si } f \text{ analytique sur } \text{Im } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } f \text{ analytique sur } \text{Im } \omega < 0 \end{cases} \quad (2.4.88)$$

Ainsi :

$$C_+(\omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_-(\omega')\widehat{h}(\omega') d\omega'}{\omega - \omega' + i\alpha} \quad (2.4.89)$$

On note  $\{\omega_k\}$  les pôles de  $\widehat{h}$  dans le demi-plan  $\text{Im } \omega < 0$ . La solution s'écrit en termes des résidus autour de ces pôles :

$$\widehat{f}_+(\omega) = G_+(\omega) \sum_{\omega_k} \text{Res} \left[ \frac{G_-(\omega')\widehat{h}(\omega')}{\omega' - \omega}, \omega' = \omega_k \right] \quad (2.4.90)$$

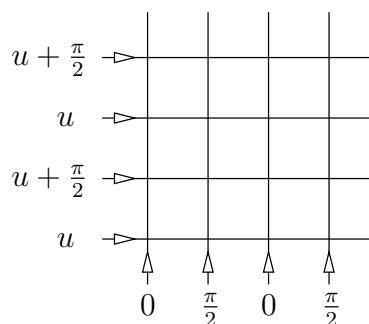


FIG. 2.24 – Structure des paramètres spectraux dans le modèle à six vertex alterné.

## 2.5 Ansatz de Bethe du modèle de Potts antiferromagnétique

### 2.5.1 Position du point critique, symétries

Le point critique antiferromagnétique du modèle de Potts (voir §1.3.1) est donné par la condition :

$$\left(x_1 + \frac{2}{\sqrt{Q}}\right) \left(x_2 + \frac{2}{\sqrt{Q}}\right) = \frac{4-Q}{Q} \quad (2.5.1)$$

Cette condition peut être paramétrée par :

$$x_1 = \frac{\sin u}{\sin(\gamma - u)}, \quad x_2 = -\frac{\cos(\gamma - u)}{\cos u}, \quad \gamma \leq u \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.5.2)$$

La transformation  $u \rightarrow u + \frac{\pi}{2}$  revient à échanger les sous-réseaux 1 et 2, donc  $u$  est défini *modulo*  $\frac{\pi}{2}$ . Le modèle à six vertex équivalent a des paramètres spectraux alternés dans les deux directions du réseau (voir figure 2.24). On désigne ce modèle comme *le modèle à six vertex alterné*. Pour tenir compte correctement du poids des boucles non-contractibles, il faut introduire un twist  $\psi = \gamma$ . On utilise les notations du §2.3, et on se place dans la jauge homogène  $\eta = 1$ . La brique élémentaire du modèle à six vertex alterné est la matrice  $\mathcal{R}(u)$ , agissant sur les doubles arêtes, et composée de quatre vertex (voir figure 2.25). La matrice  $\mathcal{R}$  possède deux quantités conservées : l'aimantation totale et la “charge”  $\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}$ , où  $\mathbf{c}$  est défini comme [33] :

$$\mathbf{c} \equiv -(\cos \gamma)^{-1} \mathbf{R} \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.5.3)$$

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{I}_V \quad (2.5.4)$$



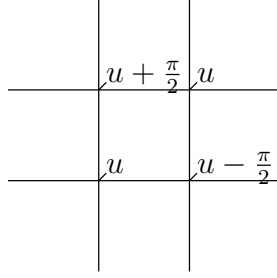


FIG. 2.25 – Matrice  $\mathcal{R}(u)$ , définissant le modèle à six vertex alterné.

La propriété (2.5.4) découle de la relation d'inversion, et la conservation de  $\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}$ , des équations de Yang-Baxter.

On considère la matrice de transfert à deux lignes  $\mathcal{T}(u)$  sur un cylindre de largeur  $2N$  sites. Donc  $\mathcal{T}(u)$  est donné par le produit de  $N$  matrices  $\mathcal{R}(u)$ . La matrice de transfert admet, comme quantités conservées :

- La translation de deux sites  $e^{-2iP}$
- L'aimantation totale  $\mathbf{S}^z$
- La charge totale  $\mathbf{C} = \mathbf{c}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{c}_N$ , où  $\mathbf{c}_j$  est l'opérateur  $\mathbf{c}$  agissant sur les spins  $\sigma_{2j}, \sigma_{2j+1}$ .

Dans la limite anisotrope  $u \rightarrow 0^-$ , la matrice de transfert s'écrit :

$$\mathcal{T}(u) \simeq \mathcal{T}(0) \left[ \mathbf{I} + \frac{2u}{\sin 2\gamma} \mathcal{H} \right] \quad (2.5.5)$$

où :

$$\mathcal{T}(0) = \left( -\frac{1}{4} \sin^2 2\gamma \right)^N e^{-2iP} \quad (2.5.6)$$

et le hamiltonien  $\mathcal{H}$  sera exprimé dans le paragraphe 3.1. Le spectre de  $\mathcal{H}$  a la même structure que  $\mathcal{T}(u)$  dans le régime  $\gamma < u < \frac{\pi}{2}$  (2.5.2).

## 2.5.2 Ansatz de Bethe

### Equations de Bethe

On introduit les paramètres spectraux décalés :

$$\alpha_j = 2iu_j - i\gamma \quad (2.5.7)$$

On obtient les équations de Bethe pour un état à  $r$  particules :

$$\left[ \frac{\sinh(\alpha_j + i\gamma)}{\sinh(\alpha_j - i\gamma)} \right]^N = -e^{2i\psi} \prod_{l=1}^r \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_l + 2i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_l - 2i\gamma)} \quad (2.5.8)$$

Les valeurs propres de la matrice de transfert à *une ligne* sont :

$$\Lambda_N(u) = \frac{1}{2^N} \left[ e^{i\psi} \sin^N 2(\gamma - u) \prod_{j=1}^r e^{if\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\alpha_j}{2} - iu\right)} + e^{-i\psi} (-\sin 2u)^N \prod_{j=1}^r e^{-if\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{\alpha_j}{2} - iu + i\gamma\right)} \right] \quad (2.5.9)$$

où la fonction  $f(\gamma, \lambda)$  est définie au §2.4.7. Les valeurs propres de  $\mathcal{T}(u)$  sont de la forme :

$$\mathcal{L}_N(u) = \Lambda_N(u) \Lambda_N\left(u + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.5.10)$$

Les énergies propres de  $\mathcal{H}$  correspondantes sont :

$$\mathcal{E}_N = -2N \cos 2\gamma + \sin 2\gamma \sum_{j=1}^r f'(\gamma, \alpha_j) \quad (2.5.11)$$

Autour de l'état fondamental, les nombres complexes  $\alpha_j$  sont disposés sur les droites  $\text{Im } \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  :

$$\alpha_j^{(q)} = \lambda_j^{(q)} + iq\pi, \quad q = \pm \frac{1}{2} \quad (2.5.12)$$

On note  $r^{(q)}$  le nombre de racines de type  $\lambda_j^{(q)}$ . Les équations de Bethe pour les variables  $\lambda_j^{(\pm \frac{1}{2})}$  sont :

$$2Nk(\lambda_j^{(q)}) = 2\pi I_j^{(q)} + 2\psi - \sum_{q'=\pm \frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{r^{(q')}} \Theta^{(q-q')}(\lambda_j^{(q)} - \lambda_l^{(q')}) \quad (2.5.13)$$

où :

$$2k(\lambda) = f\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, \lambda\right) \quad (2.5.14)$$

$$\Theta^{(0)}(\lambda) = f\left(\gamma, \frac{\lambda}{2}\right) \quad (2.5.15)$$

$$\Theta^{(\pm 1)}(\lambda) = f\left(\gamma + \frac{\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}\right) \quad (2.5.16)$$

Les entiers de Bethe  $I_j^{(\pm 1/2)}$  vérifient :

$$I_j^{(q)} - \frac{r^{(q)} - 1}{2} \in \mathbb{Z} \quad (2.5.17)$$

L'énergie et l'impulsion totales sont :

$$\mathcal{E}_N = -2N \cos 2\gamma - \sum_{q=\pm\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{r^{(q)}} \frac{2 \sin^2 2\gamma}{\cosh 2\lambda_j^{(q)} + \cos 2\gamma} \quad (2.5.18)$$

$$2k_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{N} \sum_{q=\pm\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{r^{(q)}} I_j^{(q)} \quad (2.5.19)$$

On remarque que, si  $r^{(1/2)} = r^{(-1/2)}$  et  $\lambda_j^{(1/2)} = \lambda_j^{(-1/2)}$ , alors les équations de Bethe (2.5.13) sont les mêmes que celles de la chaîne XXZ à  $N$  sites, avec le paramètre d'anisotropie :

$$\gamma_0 = \pi - 2\gamma \quad (2.5.20)$$

et le même twist  $\psi$ . L'énergie propre (2.5.18) est égale à deux fois l'énergie propre du hamiltonien  $H_{\text{XXZ}}(\gamma_0)$ .

### Limite continue

Si  $S^z$  est pair, l'état fondamental du secteur à  $S^z$  fixé est donné par la configuration d'entiers de Bethe symétrique :

$$r^{(1/2)} = r^{(-1/2)} = \frac{N - S^z}{2} \equiv r_0 \quad (2.5.21)$$

$$I_1^{(1/2)}, \dots, I_{r_0}^{(1/2)} = -\frac{r_0 - 1}{2}, \dots, \frac{r_0 - 1}{2} \quad (2.5.22)$$

$$I_1^{(-1/2)}, \dots, I_{r_0}^{(-1/2)} = -\frac{r_0 - 1}{2}, \dots, \frac{r_0 - 1}{2} \quad (2.5.23)$$

Le secteur fondamental correspond à  $S^z = 0$ . Dans la limite continue, les racines tendent vers une distribution continue sur chaque ligne :

$$\lambda_{j+1}^{(q)} - \lambda_j^{(q)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N \rho^{(q)}(\lambda_j^{(q)})}, \quad q = \pm \frac{1}{2} \quad (2.5.24)$$

Les équations intégrales sur les densités  $\rho^{(\pm \frac{1}{2})}(\lambda)$  prennent la forme matricielle :

$$2k'(\lambda)|\xi^+\rangle = 2\pi|\rho(\lambda)\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \mathbf{K}(\lambda - \mu)|\rho(\mu)\rangle \quad (2.5.25)$$

où :

$$|\rho(\lambda)\rangle = \begin{pmatrix} \rho^{(-\frac{1}{2})}(\lambda) \\ \rho^{(+\frac{1}{2})}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad |\xi^+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\xi^-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.5.26)$$

Le noyau est une matrice  $2 \times 2$  :

$$\mathbf{K}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} \Theta^{(0)}(\lambda) & \Theta^{(-1)}(\lambda) \\ \Theta^{(1)}(\lambda) & \Theta^{(0)}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.5.27)$$

Pour toute valeur de  $\lambda$ , les vecteurs propres de  $\mathbf{K}(\lambda)$  sont  $|\xi^+\rangle$  et  $|\xi^-\rangle$ . Les transformées de Fourier des valeurs propres sont :

$$\widehat{K}^+(\omega) = \frac{2\pi \sinh(\gamma_0 - \frac{\pi}{2}) \omega}{\sinh \frac{\pi\omega}{2}} \quad (2.5.28)$$

$$\widehat{K}^-(\omega) = \frac{2\pi \cosh(\gamma_0 - \frac{\pi}{2}) \omega}{\cosh \frac{\pi\omega}{2}} \quad (2.5.29)$$

On projette l'équation (2.5.25) sur  $|\xi^\pm\rangle$  : la densité de racines est identique sur les deux lignes, et égale à la densité de racines du hamiltonien  $H_{\text{Xxz}}(\gamma_0)$  :

$$\rho^{(\pm\frac{1}{2})}(\lambda) = s_0(\lambda) = \frac{1}{2\gamma_0 \cosh\left(\frac{\pi\lambda}{\gamma_0}\right)} \quad (2.5.30)$$



# Chapitre 3

## Résultats sur deux modèles à limite continue non-compacte

### 3.1 Modèle de Potts antiferromagnétique critique

#### 3.1.1 Limite anisotrope

Le hamiltonien  $\mathcal{H}$  défini dans la limite anisotrope (2.5.5) s'exprime en fonction des générateurs de Temperley-Lieb :

$$\mathcal{H} = \sum_{m=1}^{2N} \left[ -\cos 2\gamma \mathbf{I} + 2 \cos \gamma \mathbf{E}_m - (\mathbf{E}_{m+1} \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_m \mathbf{E}_{m+1}) \right] \quad (3.1.1)$$

L'interprétation de ce hamiltonien en termes de modèle de boucles ou de modèle stochastique est difficile, à cause du signe du dernier terme de (3.1.1).

Le hamiltonien  $\mathcal{H}$  peut aussi s'exprimer en termes des matrices de Pauli  $\sigma_m$  :

$$\mathcal{H} = \sum_{m=1}^{2N} \left[ -\frac{1}{2} (\sigma_m^x \sigma_{m+2}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+2}^y + \sigma_m^z \sigma_{m+2}^z) + \sin^2 \gamma \sigma_m^z \sigma_{m+1}^z + \frac{i}{2} \sin \gamma (\sigma_{m-1}^z - \sigma_{m+2}^z) (\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y) - \frac{1}{2} \cos 2\gamma \mathbf{I} \right] \quad (3.1.2)$$

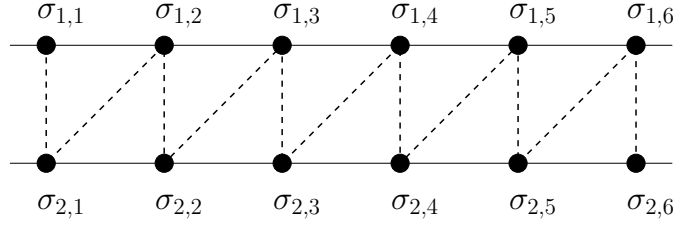


FIG. 3.1 – Deux chaînes de spins XXX en interaction. Les interactions au sein d’une chaîne sont représentées en traits pleins, et les interactions entre les deux chaînes, en traits discontinus.

On distingue les sites pairs et impairs :

$$\sigma_{1,j} \equiv \sigma_{2j-1} \quad (3.1.3)$$

$$\sigma_{2,j} \equiv \sigma_{2j} \quad j = 1, \dots, N \quad (3.1.4)$$

Le hamiltonien  $\mathcal{H}$  décrit deux chaînes XXX ferromagnétiques en interaction antiferromagnétique (voir figure 3.1) :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_{\text{int}} + \mathcal{H}_{AH} - N \cos 2\gamma \mathbf{I} \quad (3.1.5)$$

où :

$$\mathcal{H}_q = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\sigma_{q,j}^x \sigma_{q,j+1}^x + \sigma_{q,j}^y \sigma_{q,j+1}^y + \sigma_{q,j}^z \sigma_{q,j+1}^z) , \quad q = 1, 2 \quad (3.1.6)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \sin^2 \gamma \sum_{j=1}^N \left[ \sigma_{1,j}^z \sigma_{2,j}^z + \sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j+1}^z \right] \quad (3.1.7)$$

Les termes anti-hermitiens sont regroupés dans  $\mathcal{H}_{AH}$ .

### 3.1.2 Degrés de liberté “non-compacts”

#### Corrections en taille finie

Plaçons-nous dans le cas non-twisté pour simplifier la discussion. Par analogie avec le spectre de  $H_{\text{XXZ}}$ , on considère les excitations obtenues à partir de l’état fondamental en supprimant  $n^{(\pm\frac{1}{2})}$  particules et en effectuant  $d^{(\pm\frac{1}{2})}$  backscatterings sur la ligne  $\text{Im } \alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ . Les exposants critiques associés

à ces excitations sont donnés par les corrections d'ordre  $\frac{1}{N^2}$  à la densité d'énergie par site :

$$\frac{\mathcal{E}_N}{N} \simeq \frac{\mathcal{E}_N^{(0)}}{N} + \frac{2\pi v_F X_{(d),(n)}}{N^2} \quad (3.1.8)$$

où  $\mathcal{E}_N^{(0)}$  est l'énergie du fondamental. Par une extension de la méthode de Weiner-Hopf, ces corrections s'expriment en termes des valeurs propres du noyau (2.5.27) :

$$\begin{aligned} X[(d), (n)] &= \frac{1}{4g^+} \left( d^{(\frac{1}{2})} + d^{(-\frac{1}{2})} \right)^2 + \frac{g^+}{4} \left( n^{(\frac{1}{2})} + n^{(-\frac{1}{2})} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{4g^-} \left( d^{(\frac{1}{2})} - d^{(-\frac{1}{2})} \right)^2 + \frac{g^-}{4} \left( n^{(\frac{1}{2})} - n^{(-\frac{1}{2})} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

où :

$$g^\pm = \frac{1}{2} \left[ 1 - 2\pi \widehat{K}^\pm(0) \right] \quad (3.1.10)$$

Ainsi :

$$g^+ = \frac{2\gamma}{\pi}, \quad g^- = 0 \quad (3.1.11)$$

Raisonnons le cas  $d^{(\pm 1/2)} = 0$  :

$$X[(n)] = \frac{g^+}{4} \left( n^{(\frac{1}{2})} + n^{(-\frac{1}{2})} \right)^2 + \frac{g^-}{4} \left( n^{(\frac{1}{2})} - n^{(-\frac{1}{2})} \right)^2 \quad (3.1.12)$$

La constante  $g^+$  est égale à la constante de couplage de  $H_{\text{XXZ}}(\gamma_0)$ . Le fait que  $g^-$  soit nulle indique que la contribution à l'énergie par site due à l'asymétrie  $n^{(1/2)} \neq n^{(-1/2)}$  est d'ordre inférieur à  $\frac{1}{N^2}$ . Ainsi, on introduit les exposants effectifs en taille finie, définis par l'équation (3.1.8) :

$$X_N[(n)] = \frac{g^+}{4} \left( n^{(\frac{1}{2})} + n^{(-\frac{1}{2})} \right)^2 + \frac{g_N^-}{4} \left( n^{(\frac{1}{2})} - n^{(-\frac{1}{2})} \right)^2 \quad (3.1.13)$$

où  $g_N^- \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow \infty$ .

### Constante de couplage

D'après l'équation (3.1.13), comme  $g_N^-$  tend vers zéro dans la limite continue, les états :

$$(n^{(1/2)}, n^{(-1/2)}) = \left( \frac{S^z}{2}, \frac{S^z}{2} \right), \left( \frac{S^z}{2} + 1, \frac{S^z}{2} - 1 \right), \left( \frac{S^z}{2} + 2, \frac{S^z}{2} - 2 \right), \dots \quad (3.1.14)$$



ont la même dimension conforme  $X = \frac{g^+(S^z)2}{4}$ . Ainsi, le niveau fondamental du secteur à  $S^z$  fixé est infiniment dégénéré (à l'échelle des dimensions conformes). Ce niveau correspond à une excitation magnétique sur les degrés de liberté d'un modèle gaussien (2.2.2). Nous nous intéressons maintenant à la structure interne de chacun de ces niveaux. L'échelle des gaps de dimensions conformes est donnée par  $g_N^-$ .

Comme indiqué plus haut, la configuration de racines correspondant à l'exposant (3.1.13) est :

$$r^{(1/2)} = \frac{N}{2} - n^{(1/2)} \quad (3.1.15)$$

$$r^{(-1/2)} = \frac{N}{2} - n^{(-1/2)} \quad (3.1.16)$$

$$I_1^{(1/2)}, \dots, I_{r^{(1/2)}}^{(1/2)} = -\frac{r^{(1/2)} - 1}{2}, \dots, \frac{r^{(1/2)} - 1}{2} \quad (3.1.17)$$

$$I_1^{(-1/2)}, \dots, I_{r^{(-1/2)}}^{(-1/2)} = -\frac{r^{(-1/2)} - 1}{2}, \dots, \frac{r^{(-1/2)} - 1}{2} \quad (3.1.18)$$

En utilisant la méthode de Newton-Raphson pour résoudre numériquement les équations de Bethe (2.5.13), nous avons déterminé la constante effective  $g_N^-$  pour des tailles allant jusqu'à  $N = 8192$ . Ainsi, nous observons numériquement le comportement asymptotique :

$$g_N^- \underset{N \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{\ln^2 N} \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2} \quad (3.1.19)$$

$$g_N^- \underset{N \rightarrow \infty}{\propto} \frac{1}{\ln N} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \quad (3.1.20)$$

(voir figures 22 et 23 de l'article).

### Excitations duales

Suivant l'équation (3.1.9), le spectre d'excitations contient des excitations "duales" aux excitations discutées ci-dessus. Ce sont les états contenant des *backscatterings* différents sur les deux lignes  $\text{Im } \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ . Les exposants correspondants sont proportionnels à  $\frac{1}{g_N^-}$ , donc, dans la limite continue, ils n'appartiennent pas au spectre des dimensions conformes. Cependant, en taille finie, on peut estimer les exposants par la méthode exposée ci-dessus. Les résultats confirment la forme (3.1.9) des exposants.

**Interprétation dans la limite  $Q \rightarrow 0$** 

Dans la limite  $Q \rightarrow 0$  suivant la ligne critique antiferromagnétique, on rappelle que la matrice  $\mathcal{R}$  est équivalente à celle du modèle intégrable  $\text{OSP}(2|2)$  :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad (3.1.21)$$

$$u = \frac{\pi}{2} - \epsilon w \quad (3.1.22)$$

$$\mathcal{R}(u) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} -\epsilon^2 [(1-w)\mathbf{I} + w\mathbf{E} + w(1-w)\mathbf{P}] \quad (3.1.23)$$

Ainsi, ce modèle est dans la classe d'universalité du modèle- $\sigma$   $\text{OSP}(2|2)$  (voir §1.3.4).

Soit  $s$  le facteur de renormalisation. L'échelle de longueur sur le cylindre est  $l = \frac{N}{s}$ , où  $N$  est le nombre de sites sur la circonférence du cylindre. L'équation  $RG$  pour la constante de couplage est :

$$\frac{dg_\sigma}{d \ln l} = \frac{n_B - n_F - 2}{2\pi} g_\sigma^2 + O(g_\sigma^3) \quad (3.1.24)$$

où  $n_B, n_F$  sont les nombres de composantes bosoniques et fermioniques du spin  $\mathbf{S}$ . Dans ce cas,  $n_B = n_F = 2$ . Ainsi, dans la limite des grandes tailles de système, la constante de couplage se comporte comme :

$$g_\sigma \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{\ln N} \quad (3.1.25)$$

On peut montrer que, dans la limite  $g_\sigma \rightarrow 0$ , l'action euclidienne prend la forme :

$$H = \frac{1}{2} \int d^2x (2\partial_\mu \bar{\psi} \partial_\mu \psi + \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi) \quad (3.1.26)$$

$$\phi = \phi + \frac{2\pi}{\sqrt{g_\sigma}} \quad (3.1.27)$$

où  $\phi$  est un boson, et les champs  $\phi, \bar{\psi}, \psi$  n'ont pas de contrainte supplémentaire. Ainsi, le premier terme de l'action est de la forme (2.2.2) avec ( $g = \frac{1}{2}, R = 1$ ), et le second ( $g = 2\pi, R = \frac{1}{\sqrt{g_\sigma}}$ ). Les exposants (effectifs) correspondants sont :

$$X = e_1^2 + \frac{m_1^2}{4} + \frac{e_2^2}{4 \ln N} + m_2^2 \ln N \quad (3.1.28)$$

Ceci correspond à la forme (3.1.9), si on identifie les charges :

$$e_1, m_1 = \frac{d^{(1/2)} + d^{(-1/2)}}{2}, n^{(1/2)} + n^{(-1/2)} \quad (3.1.29)$$

$$e_2, m_2 = n^{(1/2)} - n^{(-1/2)}, \frac{d^{(1/2)} - d^{(-1/2)}}{2} \quad (3.1.30)$$

### 3.1.3 Action de la charge $C$ sur les états de Bethe

Comme on l'a rappelé plus haut, la matrice de transfert  $\mathcal{T}(u)$  possède les symétries :  $e^{-2iP}$ ,  $S^z$ ,  $C$ . Par construction, les états de Bethe sont états propres de  $e^{-2iP}$  et  $S^z$ . La connaissance de l'action de  $C$  sur ces états est une information importante pour comprendre la structure du spectre de  $\mathcal{T}(u)$ . Comme la dérivation n'est pas expliquée dans l'article [77], nous la détaillons ci-dessous.

En conséquence des équations de Yang-Baxter, on obtient la règle de commutation entre  $C$  et  $B(u)$  (2.3.40) :

$$CB(u) = (-1)^N B\left(u + \frac{\pi}{2}\right) C \quad (3.1.31)$$

D'autre part, l'état de référence  $|\uparrow\rangle$  est état propre de  $C$  :

$$C|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad (3.1.32)$$

On en déduit l'action de  $C$  sur l'état de Bethe à  $r$  particules (2.3.50) :

$$C|\phi_{u_1, \dots, u_r}\rangle = (-1)^{rN} |\phi_{u_1 + \frac{\pi}{2}, \dots, u_r + \frac{\pi}{2}}\rangle \quad (3.1.33)$$

Les variables décalées  $\alpha_j$  sont définies *modulo*  $2i\pi$ , donc, d'après (2.5.7) et (3.1.33), l'opérateur  $C$  échange les lignes  $\text{Im } \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  :

$$C : \alpha_1, \dots, \alpha_r \longrightarrow \alpha_1 + i\pi, \dots, \alpha_r + i\pi \quad (3.1.34)$$

Supposons que le nombre de particules  $r$  est pair. Deux cas de figure peuvent se présenter. Si la configuration de racines  $\{\alpha_j\}$  est invariante par la transformation (3.1.34), alors  $C|\phi_{u_1, \dots, u_r}\rangle = |\phi_{u_1, \dots, u_r}\rangle$ . Pour cet état, la conservation de  $C$  ne crée pas de dégénérescence supplémentaire. Au contraire, si  $\{\alpha_j\}$  n'est pas invariante par (3.1.34), les vecteurs propres de  $C$  correspondants sont :

$$|\phi_{u_1, \dots, u_r}^\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_{u_1, \dots, u_r}\rangle \pm |\phi_{u_1 + \frac{\pi}{2}, \dots, u_r + \frac{\pi}{2}}\rangle) \quad (3.1.35)$$

$$C|\phi_{u_1, \dots, u_r}^\pm\rangle = \pm |\phi_{u_1, \dots, u_r}^\pm\rangle \quad (3.1.36)$$

Les vecteurs  $|\phi_{u_1, \dots, u_r}^\pm\rangle$  ont même énergie, même aimantation totale  $S^z$  et même impulsion totale. Le seul nombre quantique qui les distingue est  $C$ .

### 3.1.4 Méthode de McCoy *et al.*

Dans toute la discussion précédente, on a utilisé l'hypothèse que les racines  $\alpha_j$  étaient situées sur les lignes  $\text{Im } \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ . La méthode de McCoy *et al.* [62, 63] est utile pour vérifier numériquement cette hypothèse, ou pour explorer des états de Bethe en dehors de ces lignes. Dans ce paragraphe, nous expliquons comment cette méthode s'adapte au cas du modèle de Potts antiferromagnétique. En particulier, si un état de Bethe  $|\phi\rangle = |\phi_{u_1, \dots, u_r}\rangle$  n'est pas symétrique par la transformation (3.1.34), alors il est dégénéré avec son homologue  $|\phi'\rangle = |\phi_{u_1+\pi/2, \dots, u_r+\pi/2}\rangle$ , et la diagonalisation numérique de la matrice de transfert  $\mathcal{T}(u)$  ne permet pas d'isoler immédiatement  $|\phi\rangle$  et  $|\phi'\rangle$ . Nous proposons une méthode simple pour résoudre ce point technique.

On suppose que le nombre de particules  $r$  est pair, et on utilise les mêmes notations que dans le chapitre 4.2. On appelle  $\widehat{\Lambda}_N(z)$  la valeur propre de  $\widehat{\mathbf{t}}_N(z)$  associée à  $|\phi\rangle$ . Ainsi :

$$\widehat{\mathbf{t}}_N(z)|\phi\rangle = \widehat{\Lambda}_N(z)|\phi\rangle \quad (3.1.37)$$

$$\widehat{\mathbf{t}}_N(z)|\phi'\rangle = \widehat{\Lambda}_N(-z)|\phi'\rangle \quad (3.1.38)$$

Le polynôme  $\widehat{\Lambda}_N(z)$  est de degré  $2N$  :

$$\widehat{\Lambda}_N(z) = \sum_{j=0}^{2N} a_j z^j \quad (3.1.39)$$

A l'étape 1 (voir paragraphe 4.2), supposons qu'on dispose d'un état propre de  $\mathcal{T}(u_0)$  qui soit une superposition des deux états de Bethe :

$$|\phi_0\rangle = \kappa_1|\phi\rangle + \kappa_2|\phi'\rangle \quad (3.1.40)$$

où  $\kappa_1, \kappa_2$  sont des coefficients *inconnus*. A cause de cette indétermination, les coefficients  $a_j$  ne sont pas obtenus directement à partir des composantes de  $\widehat{\mathbf{t}}_N(z)|\phi_0\rangle$ . Nous expliquons ci-dessous comment on peut lever l'indétermination sur  $\kappa_1, \kappa_2$ . En utilisant les projecteurs  $\frac{1}{2}(1 \pm C)$ , on construit les états propres de  $C$  appartenant au même niveau d'énergie que  $|\phi_0\rangle$  :

$$|\phi_0^\pm\rangle \equiv \frac{1}{2}(1 \pm C)|\phi_0\rangle \quad (3.1.41)$$

$$|\phi_0^\pm\rangle = \frac{1}{2}\kappa^\pm(|\phi\rangle \pm |\phi'\rangle), \quad \kappa^\pm = \kappa_1 \pm \kappa_2 \quad (3.1.42)$$

On peut trouver une configuration de ligne  $\alpha$  telle que les composantes  $\langle \alpha | \phi_0^\pm \rangle$

ne soient pas nulles. On définit les polynômes :

$$\widehat{\Lambda}_N^\pm(z) \equiv \frac{\langle \alpha | \widehat{\mathbf{t}}_N(z) | \phi_0^\pm \rangle}{\langle \alpha | \phi_0^\pm \rangle} \quad (3.1.43)$$

$$\widehat{\Lambda}_N^\pm(z) = \sum_{j=0}^{2N} a_j^\pm z^j \quad (3.1.44)$$

Ces polynômes ne sont pas des valeurs propres de  $\widehat{\mathbf{t}}_N(z)$ , mais il vont servir à reconstruire la valeur propre  $\widehat{\Lambda}_N(z)$ . En prenant la dérivée de (3.1.43) en  $z = 0$ , on obtient les identités :

$$a_1^+ = a_1 \frac{\kappa^+ \langle \alpha | \phi_0^- \rangle}{\kappa^- \langle \alpha | \phi_0^+ \rangle} \quad (3.1.45)$$

$$a_1^- = a_1 \frac{\kappa^- \langle \alpha | \phi_0^+ \rangle}{\kappa^+ \langle \alpha | \phi_0^- \rangle} \quad (3.1.46)$$

Ainsi, on définit le coefficient :

$$\sigma \equiv \left( \frac{a_1^+}{a_1^-} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.47)$$

$$\sigma = \epsilon \frac{\kappa^+ \langle \alpha | \phi_0^- \rangle}{\kappa^- \langle \alpha | \phi_0^+ \rangle} \quad (3.1.48)$$

où  $\epsilon = \pm 1$  selon la détermination de la racine carrée. On suppose dans la suite que  $\epsilon = 1$  (l'autre signe échange  $|\phi\rangle$  et  $|\phi'\rangle$ ). Le coefficient  $\sigma$  permet de trouver l'état de Bethe et la valeur propre correspondante :

$$\frac{\frac{|\phi_0^+ \rangle}{\langle \alpha | \phi_0^+ \rangle} + \sigma \frac{|\phi_0^- \rangle}{\langle \alpha | \phi_0^- \rangle}}{1 + \sigma} = \frac{|\phi\rangle}{\langle \alpha | \phi \rangle} \quad (3.1.49)$$

$$\frac{\widehat{\Lambda}_N^+(z) + \sigma \widehat{\Lambda}_N^-(z)}{1 + \sigma} = \widehat{\Lambda}_N(z) \quad (3.1.50)$$

Une fois que les coefficients  $a_j$  sont déterminés par la procédure ci-dessus, on peut appliquer normalement la suite de la méthode. La relation entre les polynômes  $\widehat{\Lambda}_N(z)$  et  $Q(z)$  est :

$$\widehat{\Lambda}_N(z)Q(z) = (-1)^N \{q^{(2N-r)}\varphi_N(q'^{-4}z^2)Q(q'^2z) + q'^r\varphi_N(z^2)Q(q'^{-2}z)\} \quad (3.1.51)$$

Le système linéaire sur les coefficients de  $Q(z)$  est :

$$\sum_{l=0}^j A_{jl} b_l \quad (3.1.52)$$

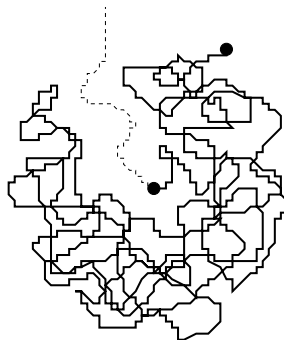


FIG. 3.2 – Marche aléatoire admettant un chemin d'échappement. La marche aléatoire est représentée en trait plein, et un chemin d'échappement, en trait discontinu.

avec :

$$A_{jl} = \begin{cases} a_{j-l} - 2(-1)^{\frac{j-l}{2}+N} C_N^{\frac{j-l}{2}} q^{(N-j+l)} \cos(N-r-j+3l)\gamma' & \text{si } j-l \text{ est pair} \\ a_{j-l} & \text{si } j-l \text{ est impair} \end{cases} \quad (3.1.53)$$

## 3.2 Chemin d'échappement dans le modèle de Brauer

### 3.2.1 Introduction

Le problème du chemin d'échappement a été défini originalement dans le contexte des marches aléatoires [64, 65]. Soit une marche aléatoire, commençant à l'origine, et de longueur  $S$ . On appelle probabilité d'échappement  $P(S)$  la probabilité pour qu'il existe un chemin  $\Gamma$  qui relie l'origine à l'infini sans croiser la trajectoire de la marche (voir figure 3.2). La probabilité  $P(S)$  décroît algébriquement :

$$P(S) \underset{S \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{S^{\zeta_1}} \quad (3.2.1)$$

avec  $\zeta_1 = \frac{1}{8}$  [65]. Notre démarche est de définir un problème analogue dans un modèle de boucles sur réseau. La motivation est, d'une part, d'identifier de nouvelles fonctions de corrélations dans les modèles de boucles, et, d'autre part, de caractériser les ressemblances et les différences entre les marches aléatoires et les modèles de boucles avec intersections dans la limite continue. La

présence d'intersections est essentielle. En effet, dans les modèles de boucles sans intersection (modèle  $O(n)$ , modèle de "Temperley-Lieb"), la probabilité d'échappement s'identifie à une fonction de corrélation magnétique pour le modèle de spins équivalent. L'exposant correspondant se déduit alors de la formulation en modèle gaussien. En revanche, le modèle de Brauer [35, 36] est un bon candidat pour définir le chemin d'échappement. Pour des raisons techniques (essentiellement, pour que le chemin  $\Gamma$  soit unique), on se restreint au cas d'une boucle unique, c'est-à-dire une fugacité de boucles  $n \rightarrow 0$ .

### 3.2.2 Résumé des résultats

On définit le modèle de Brauer sur un réseau carré de dimensions  $L \times L$ , avec des conditions aux bords "réflexives" pour la boucle. Soit  $x$  le poids de Boltzmann des intersections, et 1 le poids des autres vertex. La probabilité d'échappement  $P(L)$  est la probabilité qu'il existe un chemin  $\Gamma$  reliant le centre  $O$  du carré à un de ses côtés, sans croiser la boucle. Nos études numériques montrent que  $P(L)$  décroît exponentiellement :

$$P(L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\frac{L}{\xi}} \quad (3.2.2)$$

où  $\xi$  est une longueur de corrélation finie, dépendant du poids de Boltzmann  $x$  des intersections. Considérons l'ensemble  $\mathcal{L}$  des configurations à une boucle, admettant un chemin d'échappement  $\Gamma$ . On appelle  $l$  la longueur de  $\Gamma$ . D'après (3.2.2), il existe une énergie libre d'interface  $F_s(x)$  associée  $l$ . Ainsi, la fonction de partition de l'ensemble est dominée par les configurations où  $l$  prend la valeur minimale  $l \propto L$ . Pour obtenir un objet invariant d'échelle, on introduit une fugacité  $w$  par élément de longueur de  $\Gamma$  : lorsque  $w$  est assez grand, les fluctuations de  $l$  sont de l'ordre de la taille du système. Formellement, on étudie la fonction de partition :

$$Z(L) = \sum_{\Gamma \in \text{SAW}(L)} w^l Z_{\text{Brauer}}(L|\Gamma) \quad (3.2.3)$$

où la somme porte sur toutes les configurations de chemins auto-évitant allant de 0 à l'un des bords du carré, et  $Z_{\text{Brauer}}(L|\Gamma)$  est la fonction de partition du modèle de Brauer sur le carré, où la boucle est contrainte de ne pas croiser le chemin  $\Gamma$ .

Le modèle (3.2.3) a deux paramètres. La fugacité  $x$  contrôle le nombre d'intersections. Toute la phase  $x > 0$  du modèle de Brauer est critique, et appartient à la même classe d'universalité. Donc on s'attend à ce que le

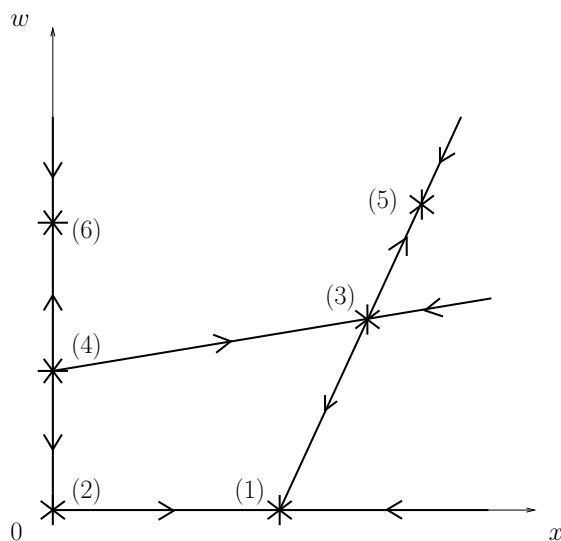


FIG. 3.3 – Diagramme de phase du modèle (3.2.3) de chemin d'échappement dans le modèle de Brauer, dans le plan  $(x, w)$ .

comportement qualitatif du modèle (3.2.3) ne dépend pas de la valeur de  $x$ . Quant au paramètre  $w$ , il contrôle la longueur du chemin  $\Gamma$ . Il joue un rôle équivalent à la fugacité de monomères  $\beta$  dans le modèle  $O(n)$ , et nous verrons que le flot de renormalisation pour  $w$  est de la même forme que celui de  $\beta$  (voir figure 1.3). Le comportement critique du modèle (3.2.3) en fonction de  $x$  et  $w$  est résumé sur le diagramme de phase 3.3. On s'intéresse principalement au point critique "Γ dilué" (3), défini par la condition  $w = w^*(x)$ .

On peut définir des variantes du problème d'échappement, en remplaçant la boucle par  $n_1$  brins ouverts et  $n_2$  boucles fermées, en gardant la fugacité de boucles  $n = 0$ . Ces objets sont séparés, dans le plan, par  $n_1 + n_2$  chemins d'échappement (interfaces). Notre méthode numérique nous a permis d'explorer toutes les possibilités avec  $n_1 + n_2 \leq 2$ . Les exposants critiques obtenus sont donnés dans le tableau 3.1. Ces résultats doivent être pris avec précaution : les énergies libres sur un cylindre de circonférence  $N$  présentent des corrections d'ordre  $\frac{1}{N^2 \ln^\alpha N}$ , et la détermination numérique des exposants critiques est imprécise sur des petites tailles de système.

L'étude des fluctuations de la longueur  $l$  par une simulation Monte-Carlo permet de vérifier les hypothèses sur le comportement d'échelle, et d'évaluer la dimension fractale du chemin  $\Gamma$  au point (3). Le résultat est :

$$d_f = 1.28 \pm 0.018 \quad (3.2.4)$$



| Nom         | Description                    | Valeur numérique |
|-------------|--------------------------------|------------------|
| $X_{(0,1)}$ | 1 boucle, 1 interface          | $0.04 \pm 0.005$ |
| $X_{(1,0)}$ | 1 brin, 1 interface            | $0.00 \pm 0.005$ |
| $X_{(0,2)}$ | 2 boucles, 2 interfaces        | $0.80 \pm 0.02$  |
| $X_{(1,1)}$ | 1 boucle, 1 brin, 2 interfaces | $0.50 \pm 0.008$ |
| $X_{(2,0)}$ | 2 brins, 2 interfaces          | $0.21 \pm 0.02$  |

TAB. 3.1 – Estimations numériques des exposants  $X_{(n_1, n_2)}$ , par diagonalisation de la matrice de transfert.

Les résultats donnés dans le tableau 3.1 et l'équation (3.2.4) sont un premier pas dans l'identification de la classe d'universalité du chemin  $\Gamma$  au point critique "dilué". Les résultats sur  $d_f$  et  $X_{(0,2)}$  et la structure du flot de renormalisation de  $w$  suggèrent que cette classe est celle des polymères dilués. Pour consolider cette hypothèse, il serait nécessaire d'examiner numériquement d'autres grandeurs universelles, comme par exemple l'angle de rotation [66, 67].

### 3.2.3 Procédures numériques

#### Algorithme Metropolis

L'ensemble statistique  $\mathcal{L}$  à simuler est défini par les contraintes sur les configurations de boucles : les configurations doivent contenir une boucle unique *et* doivent admettre un chemin d'échappement  $\Gamma$ . Les poids de Boltzmann ( $\omega$ ) sont ceux qui apparaissent dans la fonction de partition (3.2.3). Il faut donc adapter l'algorithme Metropolis pour le modèle de Brauer présenté au paragraphe 4.4.5. Le problème majeur de cet algorithme est que, si on le restreint aux configurations admettant un chemin  $\Gamma$ , aucun pas élémentaire ne peut être effectué sur les vertex où passe  $\Gamma$ , et donc celui-ci n'est jamais modifié. Ceci est résolu en effectuant le pas élémentaire non pas sur un vertex, mais sur une "plaquette" de  $2 \times 2$  vertex. Ainsi, le pas élémentaire devient :

1. Tirer uniformément une plaquette  $\Pi$  parmi  $(L - 1)^2$  possibilités.
2. Visiter la boucle pour déterminer l'appariement externe  $\bar{\alpha}(\Pi)$  des huit arêtes externes de  $\Pi$ . Il y a  $h(\alpha, \Pi)$  configurations de plaquettes compatibles avec  $\bar{\alpha}(\Pi) : \{\alpha'_1(\Pi), \dots, \alpha'_{h(\alpha, \Pi)}(\Pi)\}$ .
3. Tirer uniformément une configuration  $\alpha'_k(\Pi) \neq \alpha(\Pi)$  parmi  $[h(\alpha, \Pi) - 1]$  possibilités.

4. Vérifier si la nouvelle configuration admet encore un chemin  $\Gamma'$ . Dans le cas inverse, rejeter le pas.
5. Effectuer le pas  $\alpha(\Pi) \rightarrow \alpha'_k(\Pi)$  avec la probabilité :

$$W[\alpha(\Pi) \rightarrow \alpha'_k(\Pi)] = \min \left\{ \frac{\omega[\alpha'_k(\Pi)]}{\omega[\alpha(\Pi)]} w^{l'-l}, 1 \right\} \quad (3.2.5)$$

où  $\omega[\alpha(\Pi)]$ ,  $\omega[\alpha'_k(\Pi)]$  sont les poids de Boltzmann associés aux configurations de plaquettes, et  $l, l'$  sont les longueurs des chemins  $\Gamma, \Gamma'$ .

Pour évaluer le temps caractéristique associé aux observables de  $\Gamma$ , on définit la fonction de recouvrement des chemins :

$$S_\Gamma(\alpha, \alpha') = \frac{2 \#(\Gamma \cap \Gamma')}{l + l'} \quad (3.2.6)$$

L'étude numérique de la décroissance de  $S_\Gamma$  au cours de la simulation montre que l'algorithme parvient à "décorrélérer" les configurations en un temps raisonnable.

### Modèle de boucles "local" équivalent

La contrainte d'existence du chemin  $\Gamma$ , ainsi que le poids de Boltzmann associé  $w^l$ , sont des propriétés non-locales. Par une astuce de coloriage, elles peuvent être représentées par un modèle de boucles "local" (c'est-à-dire où le seul poids non-local est celui des boucles). L'idée est de colorier la boucle en utilisant deux couleurs. On introduit une ligne de coupure entre  $O$  et l'infini. Les règles de coloriage sont les suivantes :

1. Deux brins de couleurs différentes ne doivent pas se croiser.
2. Tout brin qui traverse la ligne de coupure change de couleur.

Toute configuration à une boucle admettant un chemin  $\Gamma$  correspond à exactement deux configurations à une boucle coloriée avec les règles ci-dessus. Le chemin  $\Gamma$  est alors formé des vertex bicolores. Les poids de Boltzmann du modèle de boucles coloriées sont représentés sur la figure 3.4.

L'intérêt est que cette astuce facilite l'implémentation numérique de la matrice de transfert. Elle pourrait aussi ouvrir la voie à des approches analytiques du problème d'échappement.

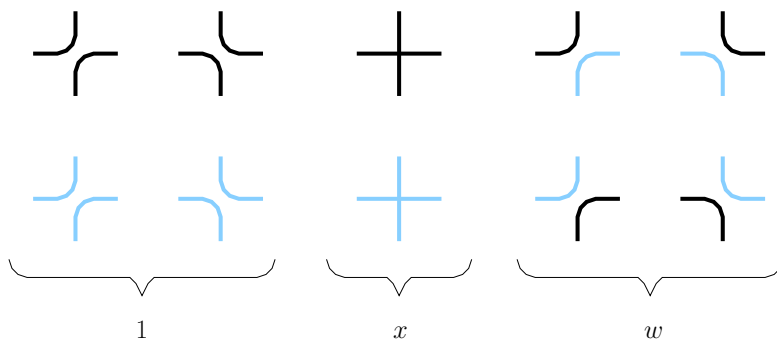


FIG. 3.4 – Poids de Boltzmann du modèle de boucles à deux couleurs.

# Chapitre 4

## Méthodes numériques

### 4.1 Diagonalisation de la matrice de transfert

#### 4.1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous détaillons les méthodes numériques de diagonalisation de la matrice de transfert. Les paragraphes 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5 décrivent des adaptations de la méthode de la puissance [68], et l'algorithme proposé aux paragraphes 4.1.6, 4.1.7 est le fruit de ce travail de thèse. Les paragraphes 4.1.8, 4.1.9 résument les adaptations spécifiques du problème de diagonalisation au cas de la matrice de transfert d'un modèle de boucles. Ces techniques ont été introduites dans [69, 70] et encore développées dans [13, 17]. Enfin, nous donnons quelques ordres de grandeur sur les capacités et les performances de l'algorithme.

#### 4.1.2 Méthode de la puissance

Comme expliqué dans la section 2.1, l'analyse des propriétés d'échelle d'un modèle statistique se ramène à l'étude des valeurs propres dominantes de la matrice de transfert. On souhaite tenir compte de *toutes* les configurations de lignes admises dans un secteur donné. Soit  $N$  le nombre de sites par ligne. En général, le nombre de configurations de lignes  $\mathcal{N}$  croît exponentiellement avec le nombre de sites :

$$\mathcal{N} \propto \alpha^N, \quad \alpha > 1 \tag{4.1.1}$$

Par exemple, dans le cas du modèle de boucles de "Temperley-Lieb" ou du modèle à six vertex,  $\alpha = 2$ . La méthode de la puissance est un algorithme de

diagonalisation adapté au problème de la matrice de transfert : d'une part, il fournit les valeurs propres dans l'ordre décroissant des modules ; d'autre part, il n'exige pas de stocker les éléments de matrice en mémoire, mais seulement des coefficients de vecteurs. Ainsi, la quantité de mémoire nécessaire est proportionnelle à  $\mathcal{N}$ , et non pas  $\mathcal{N}^2$ .

### 4.1.3 Valeur propre principale

Soit une matrice réelle  $\mathbf{t}$  à diagonaliser. On suppose que  $\mathbf{t}$  est symétrique, positive, et que les valeurs propres sont non-dégénérées :

$$\Lambda^{(0)} > \Lambda^{(1)} > \Lambda^{(2)} > \dots > \Lambda^{(\mathcal{N}-1)} \quad (4.1.2)$$

On note  $|x^{(j)}\rangle$  le vecteur propre associé à la valeur propre  $\Lambda^{(j)}$ , et on choisit la normalisation de telle sorte que la base des vecteurs propres soit orthonormée. On peut donc écrire :

$$\mathbf{t} = \sum_{j=0}^{\mathcal{N}-1} \Lambda^{(j)} |x^{(j)}\rangle \langle x^{(j)}| \quad (4.1.3)$$

Soit  $|u_0\rangle$  un vecteur initial quelconque, tel que  $\langle x^{(0)}|u_0\rangle \neq 0$ . On définit la suite de vecteurs :

$$|u_n\rangle = \frac{\mathbf{t}^n |u_0\rangle}{\|\mathbf{t}^n |u_0\rangle\|} \quad (4.1.4)$$

et la suite de réels :

$$\lambda_n = \|\mathbf{t} |u_n\rangle\| \quad (4.1.5)$$

On a :

$$\mathbf{t}^n |u_0\rangle \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \langle x^{(0)}|u_0\rangle (\Lambda^{(0)})^n |x^{(0)}\rangle \quad (4.1.6)$$

Ainsi :

$$|u_n\rangle \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} e^{i\phi} |x^{(0)}\rangle, \quad e^{i\phi} = \frac{\langle x^{(0)}|u_0\rangle}{|\langle x^{(0)}|u_0\rangle|} \quad (4.1.7)$$

$$\lambda_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \Lambda^{(0)} \quad (4.1.8)$$

L'algorithme 4.1 génère les suites  $|u_n\rangle$  et  $\lambda_n$ .

```

u      ←  rand(N)
ε      ←  2εmax

tant que ε > εmax
{
    u'   ←  t.u
    λ    ←  ||u'||
    u'   ←  u'/λ
    ε    ←  ||u' - u||
    u    ←  u'
}

```

TAB. 4.1 – Algorithme pour la valeur propre principale  $\Lambda^{(0)}$  et le vecteur propre associé. L'algorithme s'arrête quand le vecteur  $|x^{(0)}\rangle$  est déterminé avec une précision  $\epsilon_{\max}$ .

#### 4.1.4 Valeurs propres sous-dominantes

Pour obtenir les valeurs propres sous-dominantes et les vecteurs propres correspondants, on utilise la procédure de *déflation* [68]. Dans ce paragraphe, on suppose encore que la matrice  $\mathbf{t}$  est symétrique positive, avec des valeurs propres non-dégénérées. Soit  $\mathbf{P}^{(j)}$  le projecteur orthogonal sur le sous-espace vect ( $|x^{(j)}\rangle, |x^{(j+1)}\rangle, \dots, |x^{(N-1)}\rangle$ ) :

$$\mathbf{P}^{(j)} \equiv \mathbf{I} - \sum_{l=0}^{j-1} |x^{(l)}\rangle \langle x^{(l)}| \quad (4.1.9)$$

La valeur propre  $\Lambda^{(j)}$  est la valeur propre principale de la matrice  $\mathbf{P}^{(j)}\mathbf{t}$ . Pour l'obtenir, on construit  $(j+1)$  suites de vecteurs  $|u_n^{(0)}\rangle, |u_n^{(1)}\rangle, \dots, |u_n^{(j)}\rangle$  :

$$|u_{n+1}^{(l)}\rangle = \frac{\mathbf{P}_{n+1}^{(l)}\mathbf{t}|u_n^{(l)}\rangle}{\|\mathbf{P}_{n+1}^{(l)}\mathbf{t}|u_n^{(l)}\rangle\|} \quad (4.1.10)$$

$$\lambda_n^{(l)} = \|\mathbf{P}_{n+1}^{(l)}\mathbf{t}|u_n^{(l)}\rangle\| \quad (4.1.11)$$

où :

$$\mathbf{P}_n^{(l)} \equiv \mathbf{I} - \sum_{m=0}^{l-1} |u_n^{(m)}\rangle \langle u_n^{(m)}| \quad (4.1.12)$$

```

pour  $l = 0, \dots, j$ 
{
     $u(l) \leftarrow \text{rand}(\mathcal{N})$ 
     $\epsilon(l) \leftarrow 2\epsilon_{\max}$ 
}

tant que  $\max_l \{\epsilon(l)\} > \epsilon_{\max}$ 
{
    pour  $l = 0, \dots, j$ 
    {
         $u'(l) \leftarrow t.u(l)$ 
         $u'(l) \leftarrow u'(l) - \sum_{m=0}^{l-1} [u(m) \cdot u'(l)] u(m)$ 
         $\lambda(l) \leftarrow \|u'(l)\|$ 
         $u'(l) \leftarrow u'(l)/\lambda(l)$ 
         $\epsilon(l) \leftarrow \|u'(l) - u(l)\|$ 
         $u(l) \leftarrow u'(l)$ 
    }
}

```

TAB. 4.2 – Algorithme pour les valeurs propres  $\Lambda^{(0)}, \dots, \Lambda^{(j)}$  et les vecteurs propres associés, pour une matrice réelle, symétrique. L’algorithme s’arrête quand les vecteurs  $|x^{(0)}\rangle, \dots, |x^{(j)}\rangle$  sont déterminés avec une précision  $\epsilon_{\max}$ .

On peut montrer, par récurrence sur  $l$ , que la suite  $|u_n^{(l)}\rangle$  converge vers le vecteur propre  $|x^{(l)}\rangle$  (à un facteur de phase près) :

$$|u_n^{(l)}\rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{i\phi^{(l)}} |x^{(l)}\rangle \quad (4.1.13)$$

$$\lambda_n^{(l)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Lambda^{(l)} \quad (4.1.14)$$

### 4.1.5 Matrice quelconque

On considère, dans ce paragraphe, le cas d’une matrice complexe, quelconque. Lorsque la matrice  $\mathbf{t}$  n’est pas hermitienne, les vecteurs propres  $|x^{(j)}\rangle$  ne sont pas orthonormés en général. La procédure de déflation est adaptée, en introduisant les vecteurs propres à gauche  $|y^{(j)}\rangle$ . On suppose que les valeurs propres de  $\mathbf{t}$  ne sont pas dégénérées. En normalisant correctement les

vecteurs propres, on a :

$$\mathbf{t}|x^{(j)}\rangle = \Lambda^{(j)}|x^{(j)}\rangle \quad (4.1.15)$$

$$\langle y^{(j)}|\mathbf{t} = \Lambda^{(j)}\langle y^{(j)}| \quad (4.1.16)$$

$$\langle y^{(j)}|x^{(l)}\rangle = \delta_{jl} \quad (4.1.17)$$

On construit les suites de vecteurs  $|u_n^{(l)}\rangle, |v_n^{(l)}\rangle$  :

$$|u_{n+1}'^{(l)}\rangle = \mathbf{P}_{n+1}^{(l)}\mathbf{t}|u_n^{(l)}\rangle \quad (4.1.18)$$

$$|v_{n+1}'^{(l)}\rangle = (\mathbf{P}_{n+1}^{(l)})^\dagger \mathbf{t}^\dagger |v_n^{(l)}\rangle \quad (4.1.19)$$

$$\lambda_n^{(l)} = \sqrt{\langle v_{n+1}'^{(l)}|u_{n+1}'^{(l)}\rangle} \quad (4.1.20)$$

$$|u_{n+1}^{(l)}\rangle = \frac{|u_{n+1}'^{(l)}\rangle}{\lambda_n^{(l)}} \quad (4.1.21)$$

$$|v_{n+1}^{(l)}\rangle = \frac{|v_{n+1}'^{(l)}\rangle}{(\lambda_n^{(l)})^*} \quad (4.1.22)$$

$$(4.1.23)$$

où :

$$\mathbf{P}_n^{(l)} \equiv \mathbf{I} - \sum_{m=0}^{l-1} |u_n^{(m)}\rangle \langle v_n^{(m)}| \quad (4.1.24)$$

Ainsi, on a  $\langle v_n^{(j)}|u_n^{(l)}\rangle = \delta_{jl}$ , et la suite  $\lambda_n^{(l)}$  converge (au signe près) vers la valeur propre  $\Lambda^{(l)}$ .

#### 4.1.6 Valeurs propres dans un secteur d'impulsion fixée

Lorsque la matrice de transfert  $\mathbf{t}$  est invariante par translation, on peut la diagonaliser simultanément avec l'opérateur impulsion  $\mathbf{P}$ . Pour ce faire, on construit le projecteur sur le sous-espace propre d'impulsion  $k$ , et on insère ce projecteur à chaque itération de l'algorithme.

Soit  $N$  le nombre de sites d'une ligne, et  $\mathbf{Q} = e^{-i\mathbf{P}}$  l'opérateur de translation cyclique d'un site vers la droite. L'opérateur  $\mathbf{Q}$  vérifie :

$$\mathbf{Q}^N = \mathbf{I} \quad (4.1.25)$$

Ainsi, les valeurs propres de  $\mathbf{Q}$  doivent être de la forme :

$$e^{-ik}, \quad k = \frac{2\pi q}{N}, \quad q \in \mathbb{Z} \quad (4.1.26)$$



```

pour  $l = 0, \dots, j$ 
{
     $u(l) \leftarrow \text{rand}(\mathcal{N})$ 
     $v(l) \leftarrow \text{rand}(\mathcal{N})$ 
     $\epsilon(l) \leftarrow 2\epsilon_{\max}$ 
}

tant que  $\max_l \{\epsilon(l)\} > \epsilon_{\max}$ 
{
    pour  $l = 0, \dots, j$ 
    {
         $u'(l) \leftarrow t.u(l)$ 
         $u'(l) \leftarrow u'(l) - \sum_{m=0}^{l-1} [v(m) \cdot u'(l)] u(m)$ 

         $v'(l) \leftarrow t^\dagger.v(l)$ 
         $v'(l) \leftarrow v'(l) - \sum_{m=0}^{l-1} [u(m) \cdot v'(l)] v(m)$ 

         $\lambda(l) \leftarrow \sqrt{v'(l) \cdot u'(l)}$ 
         $u'(l) \leftarrow u'(l)/\lambda(l)$ 
         $v'(l) \leftarrow v'(l)/[\lambda(l)]^*$ 

         $\epsilon(l) \leftarrow \max\{\|u'(l) - u(l)\|, \|v'(l) - v(l)\|\}$ 
         $u(l) \leftarrow u'(l)$ 
         $v(l) \leftarrow v'(l)$ 
    }
}

```

TAB. 4.3 – Algorithme pour les valeurs propres  $\Lambda^{(0)}, \dots, \Lambda^{(j_{\max})}$  et les vecteurs propres associés, pour une matrice complexe quelconque. L'algorithme s'arrête quand les vecteurs  $|x^{(0)}\rangle, \dots, |x^{(j)}\rangle$  et  $|y^{(0)}\rangle, \dots, |y^{(j)}\rangle$  sont déterminés avec une précision  $\epsilon_{\max}$ .

Si  $e^{-ik}$  est valeur propre de  $\mathbf{Q}$ , alors le projecteur sur le sous-espace propre correspondant est :

$$\mathbf{p}(k) \equiv \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{ikm} \mathbf{Q}^m \quad (4.1.27)$$

Pour implanter les projecteurs  $\mathbf{p}(k)$  sur l'espace  $V$  des configurations, on utilise les classes d'équivalence de configurations *modulo*  $\mathbf{Q}^{\mathbb{Z}}$ . Soit  $C$  le nombre de classes d'équivalence. Dans la classe  $j$ , on choisit une configuration  $\alpha_j$ . La classe  $j$  s'écrit :

$$\{|\alpha_j\rangle, \mathbf{Q}|\alpha_j\rangle, \dots, \mathbf{Q}^{g_j-1}|\alpha_j\rangle\} \quad (4.1.28)$$

où  $g_j$  est l'ordre de  $\alpha_j$ . L'entier  $g_j$  est un diviseur de  $N$ . L'action de  $\mathbf{p}(k)$  sur le vecteur  $|\alpha_j\rangle$  est :

$$\mathbf{p}(k)|\alpha_j\rangle = \begin{cases} \frac{1}{g_j} \sum_{m=0}^{g_j-1} e^{ikm} \mathbf{Q}^m |\alpha_j\rangle & \text{si } e^{ikg_j} = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.29)$$

On pose :

$$|\phi_j(k)\rangle \equiv \sqrt{g_j} \mathbf{p}(k)|\alpha_j\rangle \quad (4.1.30)$$

Ainsi, l'action de  $\mathbf{p}(k)$  sur un vecteur quelconque  $|u\rangle$  est :

$$\mathbf{p}(k)|u\rangle = \sum_{j=1}^C |\phi_j(k)\rangle \langle \phi_j(k)|u\rangle \quad (4.1.31)$$

### 4.1.7 Présence d'un twist

La méthode est illustrée sur l'exemple du modèle à six vertex homogène. On se place dans le secteur d'aimantation totale fixée  $S^z$ . On note  $r = \frac{N}{2} - S^z$ .

Si on introduit une ligne de coupure sur le cylindre, le modèle n'est plus invariant par la translation cyclique  $Q$ . Cependant, on peut construire une quantité conservée, qu'on appellera pseudo-translation :

$$\tilde{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{Q} e^{i\psi(\sigma_N^z - 1)} \quad (4.1.32)$$

Le produit  $e^{i\psi\sigma_N^z} \mathbf{t} e^{-i\psi\sigma_N^z}$  correspond à la matrice de transfert dans laquelle la ligne de coupure se trouve entre les sites  $N-1$  et  $N$ . Ainsi :

$$[\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{Q}}] = 0 \quad (4.1.33)$$

```

u      ←  rand(N)
ε      ←  2εmax

tant que ε > εmax
{
  u'    ←  t.u
  u'    ←  ∑j=1C [φj(k) · u] u
  λ     ←  ||u'||
  u'    ←  u'/λ
  ε     ←  ||u' - u||
  u     ←  u'
}

```

TAB. 4.4 – Algorithme pour la valeur propre principale et vecteur propre associé, dans le secteur d'impulsion  $k$ .

On a :

$$\tilde{\mathbf{Q}}^N = e^{-2i\psi r} \mathbf{I} \quad (4.1.34)$$

Les valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{Q}}$  sont de la forme :

$$e^{-i\tilde{k}}, \quad \tilde{k} = \frac{2\pi q}{N} + \frac{2\psi r}{N}, \quad q \in \mathbb{Z} \quad (4.1.35)$$

Le projecteur sur le sous-espace propre associé à  $e^{-i\tilde{k}}$  est :

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{k}) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\tilde{k}m} \tilde{\mathbf{Q}}^m \quad (4.1.36)$$

On utilise les mêmes classes d'équivalence que dans le cas non-twisté. L'action du projecteur sur un état de base  $|\alpha_j\rangle$  est :

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{k})|\alpha_j\rangle = \begin{cases} \frac{1}{g_j} \sum_{m=0}^{g_j-1} e^{i\tilde{k}m} \tilde{\mathbf{Q}}^m |\alpha_j\rangle & \text{si } e^{i(\tilde{k} - \frac{2\psi r}{N})g_j} = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.37)$$

On pose :

$$|\tilde{\phi}_j(\tilde{k})\rangle \equiv \sqrt{g_j} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{k})|\alpha_j\rangle \quad (4.1.38)$$

L'action du projecteur sur un vecteur quelconque est :

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{k})|u\rangle = \sum_{j=1}^C |\tilde{\phi}_j(\tilde{k})\rangle \langle \tilde{\phi}_j(\tilde{k})|u\rangle \quad (4.1.39)$$

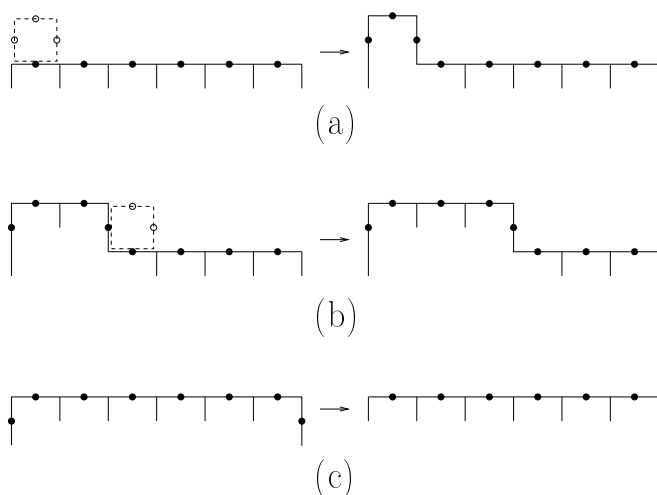


FIG. 4.1 – Action des matrices locales sur une configuration de ligne. Sur la gauche de la figure, la configuration initiale est représentée en points noirs. Les degrés de liberté qui diffèrent entre les configurations initiale et finale sont représentés en points blancs. (a) : matrice  $\tau_1$  (b) : matrice  $\tau_m$  ( $1 < m \leq N$ ) (c) : matrice  $\tau_{BC}$ .

### 4.1.8 Décomposition de la matrice de transfert

On considère un modèle statistique sur réseau carré, avec des conditions de bord périodiques dans la direction longitudinale.

L'opération centrale de la méthode de la puissance est l'application de la matrice  $\mathbf{t}_N$  à un vecteur. On décompose la matrice de transfert en  $N + 1$  matrices locales :

$$\mathbf{t}_N = \tau_{BC} \tau_N \tau_{N-1} \dots \tau_1 \quad (4.1.40)$$

La matrice locale  $\tau_m$  contient les poids de Boltzmann du vertex  $m$ . La matrice  $\tau_{BC}$  prend en compte les conditions de bord longitudinales. Les matrices intermédiaires agissent sur l'espace des configurations à  $N + 2$  sites :

$$\begin{aligned} \tau_1 &: V_N \rightarrow V_{N+2} \\ \tau_m &: V_{N+2} \rightarrow V_{N+2} \quad 1 < m \leq N \\ \tau_{BC} &: V_{N+2} \rightarrow V_N \end{aligned}$$

La décomposition est illustrée sur la figure 4.1. L'intérêt est que les matrices locales agissent sur un nombre fini de sites, et donc elles ont très peu d'éléments de matrice non-nuls dans la base des configurations de ligne. Ainsi,

l'application d'une matrice locale demande un nombre fini d'opérations, et donc le nombre d'opérations effectuées pour appliquer la matrice de transfert est proportionnel à  $N \times \mathcal{N}$ .

### 4.1.9 Matrice de transfert des modèles de boucles

Les modèles de boucles sont définis par des poids de Boltzmann non-locaux. En particulier, on associe à chaque boucle fermée la fugacité  $n$ . Pour prendre en compte ces poids non-locaux, on définit la matrice de transfert sur l'espace des connectivités entre les  $N$  sites d'une ligne. Le facteur  $n$  est inséré dans les matrices locales  $\tau_m$  (*resp.*  $\tau_{BC}$ ) lorsque le vertex (*resp.* les conditions de bord) provoquent la fermeture d'une boucle sur elle-même.

Dans certains cas, il est intéressant de distinguer le poids  $n$  des boucles contractibles, et le poids  $\tilde{n}$  des boucles non-contractibles. Remarquons qu'une boucle fermée est contractible si et seulement si elle croise la ligne de coupure un nombre pair de fois. Ainsi, on associe à chaque brin une variable  $h \in \{-1, 1\}$ . Quand un brin traverse la ligne de coupure, on applique le changement de signe :  $h \rightarrow -h$ . Une boucle fermée est contractible si et seulement si  $h = 1$ .

### 4.1.10 Ordres de grandeur

Prenons comme exemple le secteur  $S^z = 0$  du modèle à six vertex. Le bloc correspondant de la matrice de transfert est de dimension  $C_N^{\frac{N}{2}}$ . On a :

$$\mathcal{N}_N = C_N^{\frac{N}{2}} \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi N}} 2^N \quad (4.1.41)$$

L'algorithme nécessite, au minimum, de stocker en mémoire deux vecteurs de dimension  $\mathcal{N}_N$ . Si on dispose d'une mémoire de 1 Go, et que les composantes (complexes) des vecteurs sont représentées en double précision (16 octets par composante), la plus grande taille accessible en théorie est  $N = 24$ .

La table 4.5 donne le nombre d'itérations nécessaires pour le calcul de la valeur propre principale dans le secteur ( $S^z = 0, k_{\text{tot}} = 0$ ) pour  $\gamma = 0.6$ , avec une précision relative  $\epsilon = 10^{-14}$ .

| $N$ | nombre d'itérations |
|-----|---------------------|
| 2   | 6                   |
| 4   | 16                  |
| 6   | 22                  |
| 8   | 28                  |
| 10  | 34                  |
| 12  | 38                  |
| 14  | 44                  |
| 16  | 46                  |

TAB. 4.5 – Nombre d'itérations de l'algorithme de la puissance pour la valeur propre principale dans le secteur ( $S^z = 0, k_{\text{tot}} = 0$ ), pour  $\gamma = 0.6$ , avec une précision relative  $\epsilon = 10^{-14}$ .

## 4.2 La méthode de McCoy *et al.*

### 4.2.1 Description de la méthode

Soit un modèle statistique soluble par Ansatz de Bethe. On souhaite étudier la position des solutions des équations de Bethe qui correspondent à l'état fondamental et aux excitations de basse énergie. La méthode proposée dans [62, 63] utilise, comme ingrédient de départ, les vecteurs propres obtenus par un algorithme de diagonalisation, comme la méthode de la puissance. La méthode est illustrée sur le modèle à six vertex homogène.

#### *Paramétrisation*

On change la paramétrisation des poids de Boltzmann (2.3.1) du modèle à six vertex. On pose :

$$z \equiv e^{2iu} \quad (4.2.1)$$

$$q = e^{i\gamma} \quad (4.2.2)$$

$$\widehat{\omega}_1(z), \dots, \widehat{\omega}_6(z) \equiv 2ie^{iu}\omega_1(u), \dots, 2ie^{iu}\omega_6(u) \quad (4.2.3)$$

La jauge est fixée à  $\eta = 0$ . Les poids de Boltzmann  $\widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_6$  sont des polynômes de degré inférieur à un en  $z$  :

$$\widehat{\omega}_1(z), \dots, \widehat{\omega}_6(z) = q - q^{-1}z, q - q^{-1}z, z - 1, z - 1, q - q^{-1}, (q - q^{-1})z \quad (4.2.4)$$

La matrice de transfert correspondant aux poids (4.2.4) est :

$$\widehat{\mathbf{t}}_N(z) \equiv (2ie^{iu})^N \mathbf{t}_N(u) \quad (4.2.5)$$

La matrice  $\widehat{\mathbf{t}}_N(z)$  est un polynôme de degré  $N$  en  $z$ , dont les coefficients sont des opérateurs linéaires sur  $V_N$  :

$$\widehat{\mathbf{t}}_N(z) = \sum_{j=0}^N z^j \widehat{\mathbf{t}}_{N,j} \quad (4.2.6)$$

*Etape 1 : Vecteurs propres de  $\mathbf{t}_N(u_0)$ .*

Supposons que la procédure de diagonalisation de la matrice de transfert  $\mathbf{t}_N(u_0)$  (où  $u_0$  est une valeur arbitraire du paramètre spectral) renvoie un état propre  $|\phi\rangle$  qui est de la forme de l'Ansatz de Bethe :

$$|\phi\rangle = |\phi_{u_1, \dots, u_r}\rangle \quad (4.2.7)$$

où  $(u_1, \dots, u_r)$  est une solution des équations de Bethe (2.3.51). Le but de l'algorithme est de déterminer les racines de Bethe  $u_1, \dots, u_r$ . L'état  $|\phi\rangle$  est vecteur propre commun de la famille de matrices de transfert  $\{\widehat{\mathbf{t}}_N(z), z \in \mathbb{C}\}$  :

$$\widehat{\mathbf{t}}_N(z)|\phi\rangle = \widehat{\Lambda}_N(z)|\phi\rangle \quad (4.2.8)$$

*Etape 2 : Coefficients de  $\widehat{\Lambda}_N(z)$ .*

La valeur propre  $\widehat{\Lambda}_N(z)$  est un polynôme de degré  $N$  en  $z$ . Ses coefficients s'expriment en fonction des entrées des matrices  $\widehat{\mathbf{t}}_{N,j}$  et du vecteur  $|\phi\rangle$ . Soit  $\alpha$  une configuration de ligne telle que la composante  $\langle\alpha|\phi\rangle$  soit non-nulle. On a :

$$\widehat{\Lambda}_N(z) = \sum_{j=0}^N a_j z^j \quad (4.2.9)$$

$$a_j \equiv \frac{1}{\langle\alpha|\phi\rangle} \sum_{\beta} (\widehat{\mathbf{t}}_{N,j})_{\alpha\beta} \langle\beta|\phi\rangle \quad (4.2.10)$$

où la somme sur  $\beta$  porte sur toutes les configurations de ligne. Les coefficients  $a_j$  sont déterminés numériquement d'après l'équation (4.2.10).

*Etape 3 : Polynôme  $Q(z)$ .*

Soit  $Q(z)$  le polynôme défini par :

$$Q(z) \equiv \prod_{j=1}^r (z - z_j) \quad (4.2.11)$$

$$z_j \equiv e^{2iu_j} \quad (4.2.12)$$

En posant  $\gamma' \equiv \gamma - \pi$ , l'expression (2.4.13) des valeurs propres de  $\mathbf{t}_N(u)$  devient :

$$\Lambda_N(u) = \sin^N(u - \gamma') \prod_{j=1}^r \frac{\sin(u - u_j + \gamma')}{\sin(u - u_j)} + \sin^N u \prod_{j=1}^r \frac{\sin(u - u_j - \gamma')}{\sin(u - u_j)} \quad (4.2.13)$$

Soit :

$$q' \equiv e^{i\gamma'} \quad (4.2.14)$$

$$\varphi_N(z) \equiv (z - 1)^N \quad (4.2.15)$$

On a alors :

$$\widehat{\Lambda}_N(z)Q(z) = q'^{N-r} \varphi_N(q'^{-2}z)Q(q'^2z) + q'^r \varphi_N(z)Q(q'^{-2}z) \quad (4.2.16)$$

On note  $(b_j)$  les coefficients de  $Q$  :

$$Q(z) = \sum_{j=0}^r b_j z^j \quad (4.2.17)$$

A ce stade de la méthode, les coefficients de  $\widehat{\Lambda}_N$  et  $\varphi_N$  sont connus, donc l'équation (4.2.16) est équivalente à un système linéaire triangulaire inférieur sur  $(b_0, \dots, b_r)$  :

$$\forall j \in \{0, \dots, r\} \quad \sum_{l=0}^j A_{jl} b_l = 0 \quad (4.2.18)$$

où :

$$A_{jl} = a_{j-l} - 2(-1)^{j-l} C_N^{j-l} q'^{\frac{N}{2}-j+l} \cos\left(\frac{N}{2} - r - j + 3l\right) \gamma' \quad (4.2.19)$$

Si on prend  $j = 0$  dans l'équation (4.2.18), on obtient  $A_{00} = 0$ , car les  $z_j$  sont non-nuls. Ainsi, les termes diagonaux ne dépendent pas du vecteur propre considéré :

$$A_{jj} = 4q'^{\frac{N}{2}} \sin j \gamma' \sin\left(\frac{N}{2} - r + j\right) \gamma' \quad (4.2.20)$$

*Étape 4 : Racines du polynôme  $Q$ .*

Une fois que les coefficients du polynôme  $Q$  sont déterminés, on calcule ses racines par un algorithme spécialisé. Le choix de l'algorithme n'est pas crucial, car  $Q$  est toujours de degré peu élevé (voir §4.1.10). Contrairement à la méthode de Newton-Raphson présentée dans le chapitre 4.3, l'algorithme de



recherche de racines ne nécessite pas de conditions initiales particulières. Autrement dit, on ne fait aucune hypothèse préalable sur la position des racines  $z_1, \dots, z_r$  dans le plan complexe.

*Etape 5 : Entiers de Bethe.*

Connaissant les racines décalées  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , on retrouve les entiers de Bethe correspondants en utilisant les équations de Bethe (2.4.11).

## 4.2.2 Exemples de résultats

Pour visualiser les positions des particules et des trous, on représente graphiquement la *fonction de comptage*  $h_N(\lambda)$ , définie par :

$$h_N(\lambda|\lambda_1, \dots, \lambda_r) \equiv \frac{1}{2\pi} \left[ Nk(\lambda) + \sum_{j=1}^r \Theta(\lambda - \lambda_j) \right] \quad (4.2.21)$$

### Excitations particule-trou au voisinage du niveau de Fermi

On applique la méthode ci-dessus pour trouver l'état de plus basse énergie du secteur  $(S^z, k_{\text{tot}} = \frac{2\pi p}{N})$ , avec  $S^z \geq 1$  et  $-S^z \leq p \leq S^z$ . Les racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont données dans la table 4.6. Les fonctions de comptage correspondantes sont représentées sur les figures 4.2, 4.3 et 4.4. Lorsque  $0 \leq p \leq S^z$ , les entiers de Bethe de cet état sont :

$$I_1, \dots, I_r = -\frac{r-1}{2}, -\frac{r-1}{2} + 1, \dots, \frac{r-1}{2} - 1, \frac{r-1}{2} + p \quad (4.2.22)$$

Les excitations particule-trou autour des deux niveaux de Fermi  $\pm\lambda_F$  peuvent se combiner. Par exemple, l'état sous-dominant dans le secteur  $k_{\text{tot}} = 0$ , pour  $S^z \geq 2$  correspond à la configuration des états de Bethe :

$$I_1, \dots, I_r = -\frac{r-1}{2} - 1, -\frac{r-1}{2} + 1, -\frac{r-1}{2} + 2, \dots, \frac{r-1}{2} - 1, \frac{r-1}{2} + 1 \quad (4.2.23)$$

La fonction de comptage de cet état est représentée sur la figure 4.5.

### Backscattering

On se place dans le secteur  $(S^z = 1, k_{\text{tot}} = \pi - \frac{2\pi}{N})$ , et on considère l'état de plus basse énergie de ce secteur. Les racines correspondant à cet état sont

| $k_{\text{tot}}$          | $(\lambda_1, \dots, \lambda_5)$  |
|---------------------------|--|
| $\frac{2\pi}{N}$          | -1.569507e-01, -7.444546e-02, -2.686327e-03,<br>+6.875995e-02, +2.603248e-01 |
| $2 \times \frac{2\pi}{N}$ | -1.605017e-01, -7.786840e-02, -6.368775e-03,<br>+6.433122e-02, +4.411440e-01 |
| $3 \times \frac{2\pi}{N}$ | -1.661235e-01, -8.336112e-02, -1.238308e-02,<br>+5.692321e-02, +1.079980     |

TAB. 4.6 – Racines des équations de Bethe dans le secteur  $S^z = 3$ , pour  $N = 16, \gamma = 0.6$ .

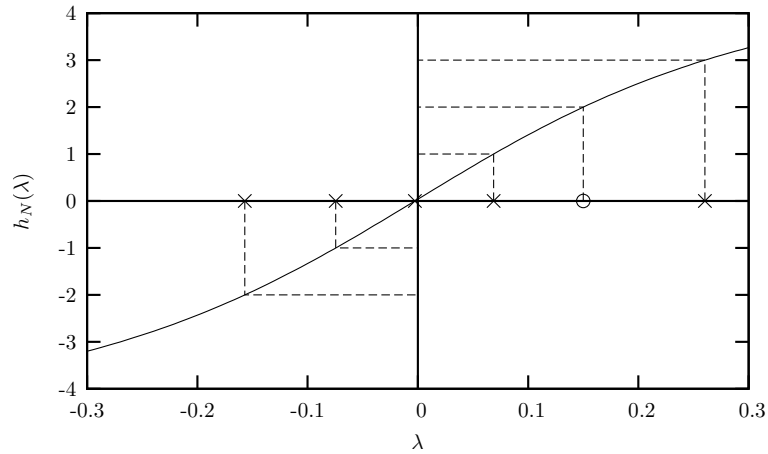


FIG. 4.2 – La fonction  $h_N(\lambda)$  correspondant à l'état  $S^z = 3, k_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{N}$ , pour  $N = 16, \gamma = 0.6$ .

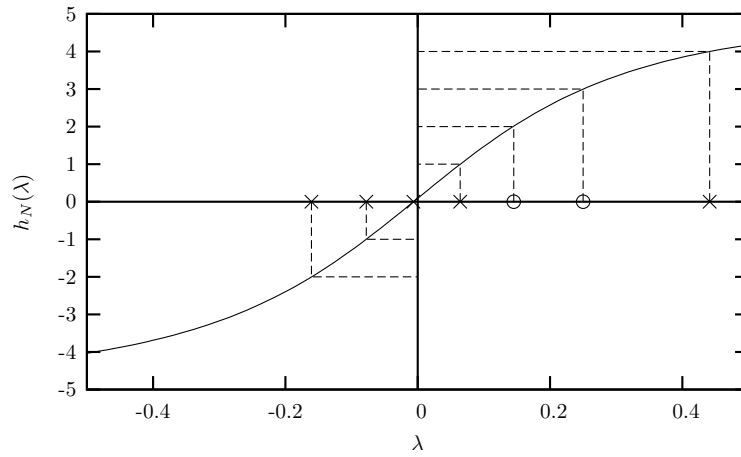


FIG. 4.3 – La fonction  $h_N(\lambda)$  correspondant à l'état  $S^z = 3, k_{\text{tot}} = 2 \times \frac{2\pi}{N}$ , pour  $N = 16, \gamma = 0.6$ .

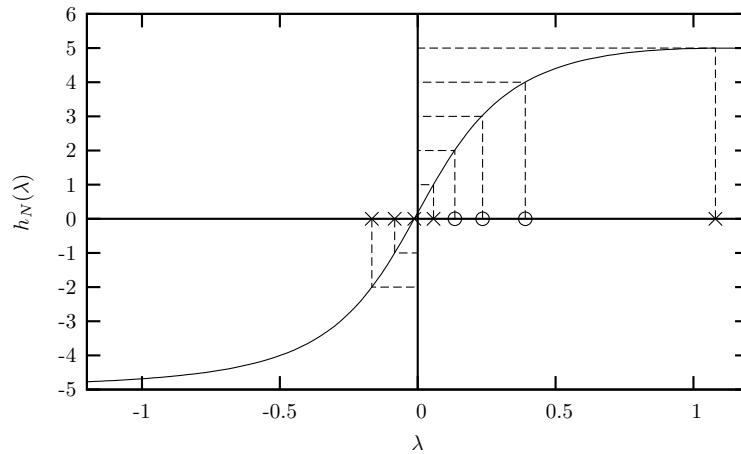


FIG. 4.4 – La fonction  $h_N(\lambda)$  correspondant à l'état  $S^z = 3, k_{\text{tot}} = 3 \times \frac{2\pi}{N}$ , pour  $N = 16, \gamma = 0.6$ .

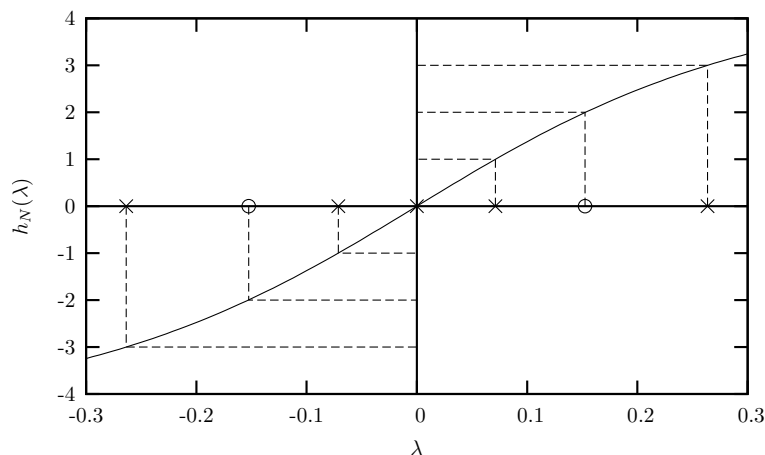


FIG. 4.5 – La fonction  $h_N(\lambda)$  correspondant à l'état sous-dominant du secteur  $S^z = 3, k_{\text{tot}} = 0$ , pour  $N = 16, \gamma = 0.6$ .

représentées sur la figure 4.6. Les entiers de Bethe sont :

$$I_1, \dots, I_r = -\frac{r-1}{2} + 1, -\frac{r-1}{2} + 2, \dots, \frac{r-1}{2} + 1 \quad (4.2.24)$$

où  $r = \frac{N}{2} - 1$ .

### Solutions complexes

On se place dans le secteur ( $S^z = 0, k_{\text{tot}} = \pi$ ). Les états de plus basse énergie de ce secteur sont représentés sur la figure 4.7.

## 4.3 Résolution numérique des équations de Bethe

### 4.3.1 Introduction

L'avantage de la méthode présentée dans le chapitre 4.2 est qu'elle ne nécessite aucune hypothèse sur la position des racines. Cependant, le point de départ de cette méthode est un vecteur propre de la matrice de transfert, exprimé dans la base des configurations de ligne. Comme la diagonalisation de la matrice de transfert demande une quantité de mémoire exponentielle en  $N$ , les tailles accessibles sont très limitées (voir §4.1.10).

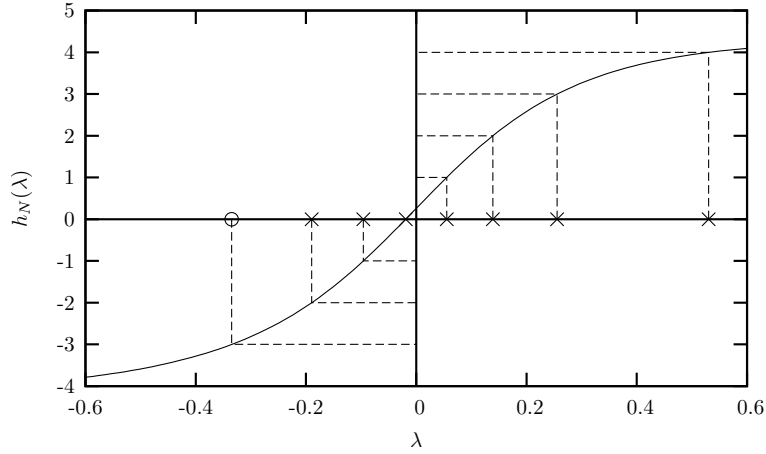


FIG. 4.6 – La fonction  $h_N(\lambda)$  correspondant à l'état  $S^z = 1, k_{\text{tot}} = \pi - \frac{2\pi}{N}$ , pour  $N = 16, \gamma = 0.6$ .

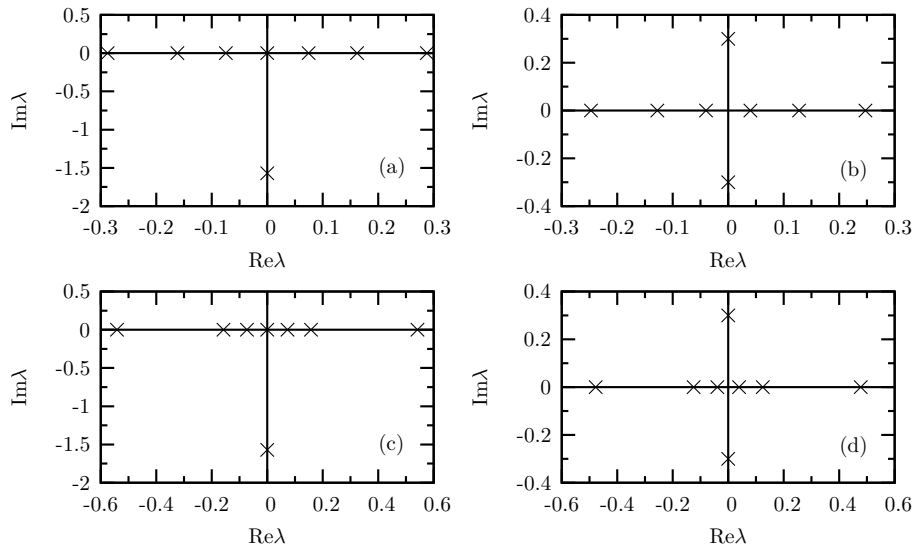


FIG. 4.7 – Les racines de Bethe correspondant aux états de plus basse énergie (dans l'ordre a,b,c,d) du secteur  $S^z = 0, k_{\text{tot}} = \pi$ , pour  $N = 16, \gamma = 0.6$ .

Les équations de Bethe elles-mêmes forment un système de  $r$  équations non-linéaires couplées, avec  $r$  inconnues  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Le nombre d'équations  $r$  est typiquement proportionnel à la taille du système  $N$ . Ainsi, la résolution directe [37] des équations de Bethe par une méthode générale de recherche de racines (méthode de Newton-Raphson [71]) permet d'atteindre des tailles beaucoup plus grandes que la méthode précédente. L'inconvénient de la méthode de Newton-Raphson est qu'elle ne fonctionne correctement que si le point initial est "proche" de la solution. Il faut donc avoir une idée *a priori* de la forme de la solution dans le plan complexe pour exploiter cette méthode.

### 4.3.2 Description de la méthode

Dans le cas de modèle à six vertex homogène, les équations de Bethe s'écrivent :

$$Nk(\lambda_j) = 2\pi I_j - \sum_{l=1}^r \Theta(\lambda_j - \lambda_l) \quad (4.3.1)$$

où :

$$k(\lambda) = f\left(\frac{\gamma}{2}, \lambda\right) \quad (4.3.2)$$

$$\Theta(\lambda) = f(\gamma, \lambda) \quad (4.3.3)$$

La méthode consiste à choisir une configuration particulière  $(I_1, \dots, I_r)$  des entiers de Bethe, et à résoudre les équations de Bethe sur les inconnues  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ .

Le modèle possède une limite "triviale"  $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , où  $\Theta(\lambda)$  est identiquement nul, donc la solution est :

$$k_j = \frac{2\pi I_j}{N} \quad (4.3.4)$$

$$\lambda_j = \text{Argth}\left(\tan \frac{\pi I_j}{N}\right) \quad (4.3.5)$$

Comme les racines  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  sont continues par rapport à  $\gamma$ , la solution (4.3.5) est un bon point de départ pour la résolution du système avec  $\gamma$  quelconque. En pratique, pour éviter les croisements de solutions au cours de l'algorithme, on utilise comme valeurs initiales :

$$(\lambda_j)_{\text{ini}} = \text{Argth}\left(\alpha \tan \frac{\pi I_j}{N}\right), \quad \alpha = 10.0 \quad (4.3.6)$$

## 4.4 Simulations Monte-Carlo

### 4.4.1 Algorithme de Metropolis

L'algorithme de Metropolis permet d'échantillonner un ensemble statistique à l'équilibre, en définissant une dynamique de Markov [72]. Soit un modèle statistique  $(\mathcal{L}, \omega)$ , défini par un ensemble de configurations  $\mathcal{L}$  sur un réseau à  $N_s$  sites, et par des poids de Boltzmann  $\omega$ . La fonction de partition est :

$$Z = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}} \omega(\alpha) \quad (4.4.1)$$

On souhaite déterminer numériquement des valeurs moyennes d'observables, de la forme :

$$\langle A \rangle \equiv \frac{1}{Z} \sum_{\alpha \in \mathcal{L}} \omega(\alpha) A(\alpha) \quad (4.4.2)$$

Si l'ensemble  $\mathcal{L}$  est défini par une contrainte non-locale, alors il est très coûteux en temps de générer *toutes* les configurations admissibles. L'algorithme de Metropolis consiste à évaluer la somme (4.4.2) au moyen d'une chaîne de Markov dont la distribution d'équilibre est la loi de probabilité  $p(\alpha) = \frac{\omega(\alpha)}{Z}$ .

On définit une chaîne de Markov en temps discret par la loi de transition  $W_{\alpha', \alpha}$ , qui vérifie :

$$\forall \alpha, \alpha' \quad W_{\alpha', \alpha} \geq 0 \quad (4.4.3)$$

$$\forall \alpha \quad \sum_{\alpha' \in \mathcal{L}} W_{\alpha', \alpha} = 1 \quad (4.4.4)$$

En partant d'une distribution initiale  $p_0$ , on itère la transition :

$$p_{n+1}(\alpha) = \sum_{\alpha' \in \mathcal{L}} W_{\alpha, \alpha'} p_n(\alpha') \quad (4.4.5)$$

D'après (4.4.4) et (4.4.5), la distribution d'équilibre  $p_\infty$  doit vérifier la condition de bilan global :

$$\sum_{\alpha' \in \mathcal{L}} [W_{\alpha', \alpha} p_\infty(\alpha) - W_{\alpha, \alpha'} p_\infty(\alpha')] = 0 \quad (4.4.6)$$

On peut montrer que la loi de probabilité  $p_n$  converge vers  $p$  si les conditions suivantes sont vérifiées.

– Bilan détaillé :

$$W_{\alpha', \alpha} p(\alpha) = W_{\alpha, \alpha'} p(\alpha') \quad (4.4.7)$$

– Ergodicité :

$$\forall \alpha, \alpha' \quad \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}), \alpha \xrightarrow{W} \alpha_1 \xrightarrow{W} \dots \xrightarrow{W} \alpha_{N-1} \xrightarrow{W} \alpha' \quad (4.4.8)$$

où le symbole  $\alpha \xrightarrow{W} \beta$  signifie que la probabilité de transition  $W_{\beta, \alpha}$  n'est pas nulle.

Etant donné une loi de probabilité définie par les poids de Boltzmann  $\omega(\alpha)$ , l'algorithme de Metropolis permet de construire une loi de transition  $W$  qui vérifie la condition de bilan détaillé (4.4.7). Supposons qu'on dispose d'une procédure de transformation élémentaire  $f$  ergodique sur l'ensemble  $\mathcal{L}$ . Pour toute configuration  $\alpha$ , il existe  $C(\alpha)$  choix possibles de transformations élémentaires  $\alpha \rightarrow \{f_1(\alpha), \dots, f_{C(\alpha)}(\alpha)\}$ . En général, ce choix correspond au site du réseau où est effectuée la transformation élémentaire. Une itération de l'algorithme de Metropolis sur la configuration  $\alpha$  consiste en deux étapes :

1. Tirer uniformément une transformation élémentaire  $\alpha \rightarrow \alpha'$  parmi  $\alpha \rightarrow \{f_1(\alpha), \dots, f_{C(\alpha)}(\alpha)\}$
2. Effectuer la transition  $\alpha \rightarrow \alpha'$  avec la probabilité :

$$W(\alpha \rightarrow \alpha') = \min \left[ \frac{\omega(\alpha')}{\omega(\alpha)}, 1 \right] \quad (4.4.9)$$

#### 4.4.2 Temps caractéristiques

La chaîne de Markov définie par l'algorithme de Metropolis est une *simulation* du modèle statistique  $(\mathcal{L}, \omega)$ , dont la finalité est de produire une estimation des valeurs moyennes d'observables  $\langle A \rangle$  (4.4.2). Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)$  une réalisation de la chaîne de Markov. On utilise l'estimateur :

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M A(\alpha_n) \quad (4.4.10)$$

Si les configurations  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)$  étaient indépendantes et réparties suivant la loi définie par les poids de Boltzmann  $\omega(\alpha)$ , on aurait :

$$\langle \bar{A} \rangle_W = \langle A \rangle \quad (4.4.11)$$

$$\langle (\bar{A} - \langle A \rangle)^2 \rangle_W = \frac{1}{M} \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \quad (4.4.12)$$

où  $\langle \dots \rangle_W$  désigne la moyenne sur les réalisations de la chaîne de Markov. La valeur propre de  $\mathbf{W}$  associée à l'état stationnaire  $p$  est zéro. La convergence



de la suite  $(p_n)$  vers la distribution d'équilibre  $p$  est déterminée par la seconde valeur propre  $\lambda_1$  de  $\mathbf{W}$ , qui définit le temps caractéristique  $\tau_{\text{eq}}$  :

$$|p_n(\alpha) - p(\alpha)| \underset{n \rightarrow \infty}{\propto} e^{-\frac{n}{\tau_{\text{eq}}}} \quad (4.4.13)$$

$$\tau_{\text{eq}} \equiv -\frac{1}{\ln \lambda_1} \quad (4.4.14)$$

La décroissance des fonctions d'auto-corrélation est gouvernée par les valeurs propres inférieures :

$$\langle [A(\alpha_n) - \langle A \rangle] [A(\alpha_{n'}) - \langle A \rangle] \rangle \underset{(n-n') \rightarrow \infty}{\propto} e^{-\frac{n-n'}{\tau_A}} \quad (4.4.15)$$

$$\tau_A \equiv -\frac{1}{\ln \lambda_A} \quad (4.4.16)$$

Pour tenir compte de ces effets, on redéfinit l'estimateur  $\bar{A}$ , en commençant l'échantillonnage à un instant  $n_0 \gg \tau_{\text{eq}}$ , et en espaçant les échantillons d'un intervalle  $\tau \gg \tau_A$  :

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M A(\alpha_{n_0+n\tau}) \quad (4.4.17)$$

On choisit comme unité de temps le "pas Monte-Carlo" (mcs = "Monte-Carlo sweep"), qui consiste en  $L^2$  pas élémentaires.

La détermination des valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_A$  nécessite une étude du spectre de la matrice de transition. Plutôt que d'entreprendre cette étude pour chaque algorithme de Metropolis et pour chaque observable (ce qui constitue un sujet de recherche en soi), on définit empiriquement les temps caractéristiques à partir d'une hypothèse simplificatrice. On désigne symboliquement les degrés de liberté locaux d'une configuration  $\alpha$  par  $\{\alpha(j), j = 1, \dots, N_s\}$ . Par exemple, dans le modèle de Potts,  $\alpha(j)$  serait la valeur du spin au site  $j$ ; dans un modèle de boucles,  $\alpha(j)$  serait le type de vertex sur le site  $j$ . La fonction de recouvrement entre deux configurations  $\alpha, \alpha'$  est définie par :

$$S(\alpha, \alpha') \equiv \frac{\#\{j | \alpha(j) = \alpha'(j)\}}{N_s} \quad (4.4.18)$$

où le symbole  $\#$  désigne le cardinal. La fonction d'auto-corrélation associée à  $S$  est :

$$\phi_n \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{S(\alpha_1, \alpha_n) - S(\alpha_1, \alpha_M)}{1 - S(\alpha_1, \alpha_M)} \quad (4.4.19)$$

*Hypothèse 1* : La fonction  $\phi_n$  décroît exponentiellement, avec un temps caractéristique  $\tau_\phi$  :

$$\phi_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\frac{n}{\tau_\phi}} \quad (4.4.20)$$

*Hypothèse 2* : Si  $A$  est une observable locale, alors la fonction d'auto-corrélation de  $A$  décroît au moins aussi vite que  $\phi$  :

$$\tau_A < \tau_\phi \quad (4.4.21)$$

Si  $A$  n'est pas locale, alors on définit une caractéristique non-locale  $H(\alpha)$  (qui peut être un sous-ensemble fluctuant dans le système), telle que  $A(\alpha)$  soit une fonction de  $H(\alpha)$ . On introduit alors une fonction de recouvrement associée à  $H$ , avec un temps de décroissance  $\tau_H$ .

### 4.4.3 Fluctuations

Pour estimer la moyenne d'une observable  $A$ , on utilise l'expression (4.4.17). Pour estimer la variance de  $A$ , on répète le procédé de moyenne :

$$\overline{\Delta A^2} \equiv \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M [A(\alpha_{n_0+n\tau})]^2 - \bar{A}^2 \quad (4.4.22)$$

$$\langle \overline{\Delta A^2} \rangle_W = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \quad (4.4.23)$$

### 4.4.4 Test d'ergodicité

En général, il est difficile de prouver l'ergodicité d'un algorithme pour un taille de système arbitraire. Cependant, il est possible de vérifier cette propriété pour des petites tailles de système. En effet, l'algorithme utilisé au paragraphe 4.1.8 pour appliquer la matrice de transfert à un vecteur, permet de calculer le nombre exact de configurations de l'ensemble  $\mathcal{L}$ . Il suffit, pour cela, de mettre tous les poids de Boltzmann à 1 dans la matrice de transfert. L'algorithme de test d'ergodicité part d'une configuration initiale, et effectue tous les pas élémentaires possibles, et stocke en mémoire les configurations générées. Puis, il répète l'opération sur toutes ces configurations, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'aucune nouvelle configuration ne soit générée. La limitation principale est la mémoire nécessaire pour stocker toutes les configurations de  $\mathcal{L}$ .

### 4.4.5 Exemple : modèle de Brauer avec $n = 0$

*Ensemble statistique.* Le modèle de Brauer est un modèle de boucles défini au paragraphe 1.3.3. On note les poids de Boltzmann (voir figure 1.16) :

$$a, b, c = 1, 1, x \quad (4.4.24)$$

On considère ce modèle sur un réseau carré de dimensions  $L \times L$  sites, et on fixe la fugacité de boucles à  $n = 0$ . Ceci revient à imposer que le système soit recouvert entièrement par une boucle unique. On utilise des conditions de bords “réflexives” (vertex rouges sur la figure 1.7). Soit  $\mathcal{L}_L$  l’ensemble des configurations à une boucle, et  $\mathcal{N}_L$  le nombre de ces configurations. Dans la limite des grandes tailles :

$$\mathcal{N}_L \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \mu^{L^2} \quad \mu \simeq 2.925 \quad (4.4.25)$$

où  $\mu$  est la connectivité effective du modèle. Comme il y a trois configurations possibles à chaque vertex, le nombre total de configurations est  $3^{L^2}$ . Ainsi, la proportion de configurations appartenant à  $\mathcal{L}_L$  décroît exponentiellement avec  $L^2$  :

$$\frac{\mathcal{N}_L}{3^{L^2}} \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{L^2} \quad (4.4.26)$$

Il est donc utile de simuler l’ensemble  $\mathcal{L}_L$  par un algorithme de Metropolis.

*Algorithme de Metropolis.* On définit le pas élémentaire au site  $j$  de la manière suivante. On désigne par  $\alpha(j)$  le type de vertex au site  $j$  (parmi  $a, b, c$  sur la figure 1.16) et  $\bar{\alpha}(j)$  l’appariement entre les quatre arêtes adjacentes au site  $j$ , défini par le reste du système. On dit que  $\alpha(j)$  et  $\bar{\alpha}(j)$  sont compatibles, si l’assemblage des deux forme une boucle unique. Ainsi, on remarque que, pour chaque appariement externe  $\bar{\alpha}(j)$ , il existe exactement deux vertex compatibles (voir figure 4.8). On en déduit l’algorithme Metropolis ci-dessous :

1. Tirer uniformément un site  $j$  parmi les  $L^2$  sites.
2. Visiter la boucle pour déterminer l’appariement externe  $\bar{\alpha}(j)$ , et en déduire l’autre type de vertex  $\alpha'(j) \neq \alpha(j)$  compatible avec  $\bar{\alpha}(j)$
3. Effectuer le pas  $\alpha(j) \rightarrow \alpha'(j)$  avec la probabilité :

$$W[\alpha(j) \rightarrow \alpha'(j)] = \min \left\{ \frac{\omega[\alpha'(j)]}{\omega[\alpha(j)]}, 1 \right\} \quad (4.4.27)$$

où  $\omega[\alpha(j)], \omega[\alpha'(j)]$  sont les poids de Boltzmann associés aux différents types de vertex.

*Résultats.* On évalue le temps d’auto-corrélation par la méthode décrite au paragraphe 4.4.2. Les résultats sont présentés sur la figure 4.9. La fonction  $\phi_n$  présente une décroissance exponentielle sur un intervalle de l’ordre de

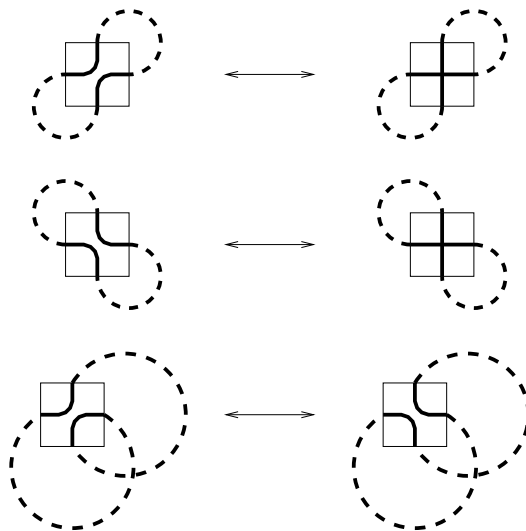


FIG. 4.8 – Pas élémentaires respectant la contrainte de la boucle unique dans le modèle de Brauer.

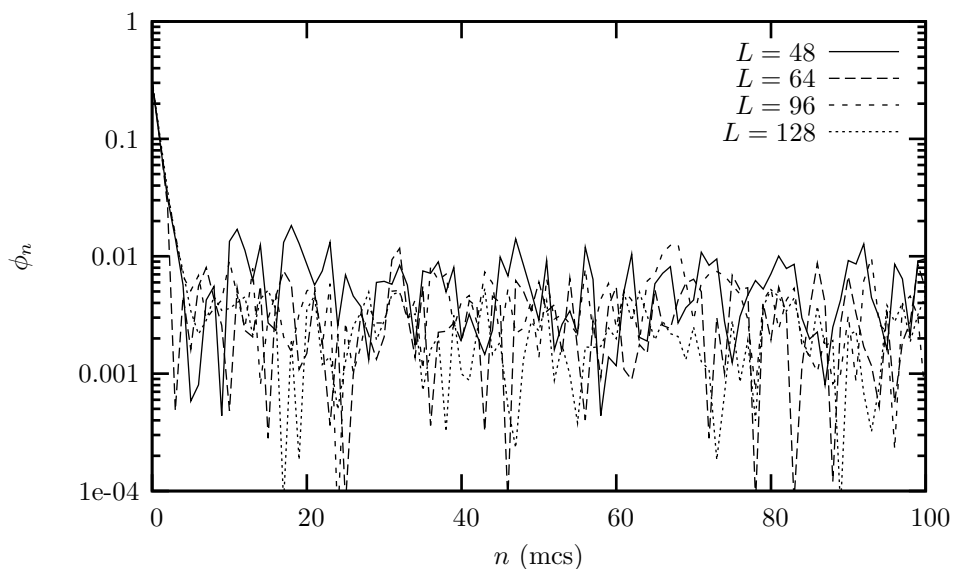


FIG. 4.9 – Fonction d'auto-corrélation  $\phi_n$  pour l'algorithme de Metropolis simulant le modèle de Brauer.

| $L$ | $\mathcal{N}_L$       | test d'ergodicité |
|-----|-----------------------|-------------------|
| 2   | 40                    | ×                 |
| 4   | 5 373 952             | ×                 |
| 6   | 4 380 037 227 741 184 |                   |

TAB. 4.7 – Énumération exacte des configurations et test d'ergodicité pour l'algorithme Metropolis simulant le modèle de Brauer.  $\mathcal{N}_l$  est le nombre de configurations à une boucle sur le réseau carré de  $L \times L$  sites.

5 mcs, avec un temps de corrélation de l'ordre de  $\tau \simeq 1.4$  mcs, pour les tailles de système considérées.

Le tableau 4.7 résume les résultats de l'énumération exacte et du test d'ergodicité pour les tailles  $L = 2, 4, 6$ .

L'algorithme permet, par exemple, d'évaluer le nombre moyen  $\langle N_c \rangle$  de vertex de type  $c$  dans le système, et de vérifier sa loi d'échelle. On fixe les paramètres de la simulation :

$$\begin{aligned} n_0 &= 100 \text{ mcs} \\ \tau &= 100 \text{ mcs} \\ M &= 100 \end{aligned}$$

Les résultats de la simulation sont présentés sur la figure 4.10. La transition de phase a lieu en  $x = 0$ . Le paramètre définit une longueur de corrélation  $\xi_x$ , qui obéit à la loi d'échelle :

$$\xi_x \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x^{-\frac{1}{y}} \quad (4.4.28)$$

où  $y$  est l'exposant du groupe de renormalisation associé au paramètre  $x$ . Comme on l'a vu dans le chapitre 1.2.1,  $y$  est l'exposant de fuseau à quatre pattes dans le modèle de polymères denses :

$$y = 2 - X^{(4)} = \frac{5}{4} \quad (4.4.29)$$

Pour un système de taille finie, la fonction de partition a la forme :

$$Z_L \sim \mu^{L^2} g\left(\frac{L}{\xi_x}\right) \quad (4.4.30)$$

où  $g$  est une fonction d'échelle. Ainsi,  $\langle N_c \rangle$  est de la forme :

$$\langle N_c \rangle = \frac{\partial \ln Z_L}{\partial x} \sim L^y h(L^y x) \quad (4.4.31)$$

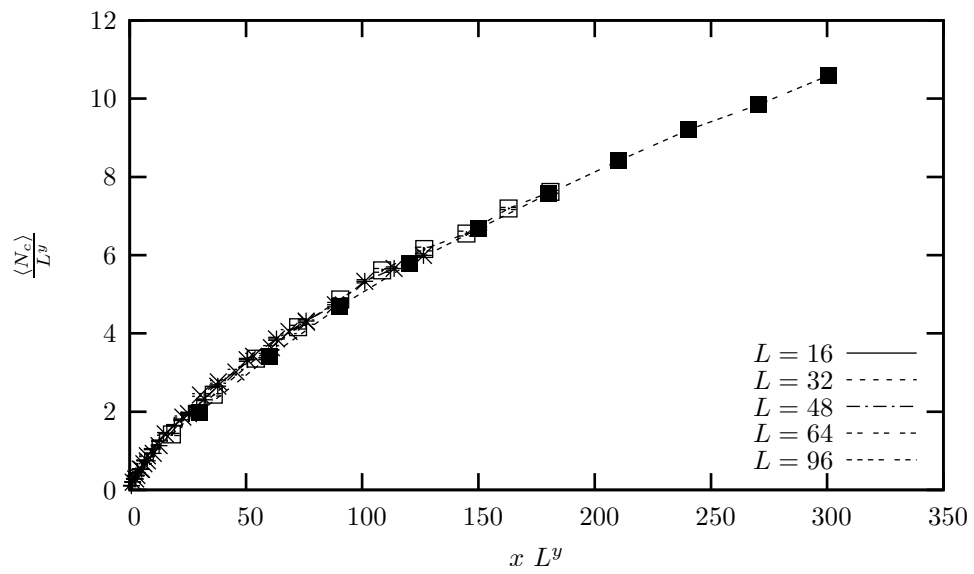


FIG. 4.10 – Nombre moyen de vertex de type  $c$  dans le modèle de Brauer, en fonction du paramètre  $x$ . L'exposant  $y$  est donné par l'équation (4.4.29). Le paramètre  $x$  varie entre 0 et 1.

La loi d'échelle (4.4.31) est vérifiée sur la figure 4.10.



# Chapitre 5

## Conclusion et Perspectives

Au cours de ce travail de thèse, nous avons utilisé différents outils de Physique Statistique bidimensionnelle pour aborder des modèles aux comportements critiques originaux. Ces modèles se caractérisent par la présence de degrés de liberté non-compacts, une propriété prédite par l'étude des modèles- $\sigma$  sur les supersphères. D'un point de vue plus physique, ces degrés de liberté se traduisent par des niveaux d'énergie infiniment dégénérés, et des fonctions de corrélations qui décroissent plus lentement qu'une loi de puissance. L'étude de modèles sur réseau, d'aspect parfois assez technique, fournit néanmoins des résultats solides, permettant d'étayer une image physique proposée pour la limite continue.

Dans le cas du modèle de Potts antiferromagnétique, l'étude de la structure Yang-Baxter et des équations de Bethe permet de formuler précisément le comportement d'échelle et les symétries associées aux degrés de liberté non-compacts. Ces propriétés sont liées à l'alternance des paramètres spectraux dans le modèle de vertex équivalent.

Certaines questions restent ouvertes, mais celles que l'on peut espérer résoudre le plus immédiatement portent sur l'Ansatz de Bethe. D'une part, en calculant numériquement les corrections en taille finie des énergies d'excitation, nous avons déterminé le comportement asymptotique de la constante de couplage  $g_N^-$ . La forme (3.1.9) des exposants ne contient que des informations sur les corrections d'ordre  $\frac{1}{N^2}$ . Dans d'autres contextes [73, 74], des méthodes analytiques ont été développées pour calculer les corrections au-delà de  $\frac{1}{N^2}$ . L'adaptation de ces méthodes au cas du modèle de Potts antiferromagnétique fournirait une validation des résultats numériques, et permettrait d'obtenir une description plus rigoureuse du spectre dans la limite continue. D'autre part, la méthode de McCoy *et al.* s'adapte facilement, "sur le papier", au



modèle de Potts antiferromagnétique (voir §3.1.4). Or, dans le cas twisté, certaines excitations observées numériquement [34] n'ont pas été interprétées en termes de racines de Bethe. La méthode McCoy pourrait permettre de faire des progrès sur cette question.

Concernant le modèle de Brauer à  $n = 0$ , nous mettons en évidence le comportement critique du chemin d'échappement  $\Gamma$ . L'étude numérique suggère la forme du diagramme de phase pour  $\Gamma$ , qui est similaire à celui des marches auto-évitantes. L'objet  $\Gamma$  est une version analogue sur réseau du chemin d'échappement dans les marches aléatoires. Cependant, les exposants critiques obtenus numériquement sont différents des résultats sur les marches aléatoires. Ainsi, le fait que le modèle sur réseau ait un nombre fini de configurations par unité de surface semble affecter la statistique des observables non-locales telles que  $\Gamma$ .

Comme on l'a fait remarquer au § 3.2.2, les résultats numériques obtenus par les différentes méthodes sont encore insuffisants pour conclure sur la classe d'universalité du chemin  $\Gamma$ . Des observables supplémentaires pourraient être calculées, comme, par exemple, l'angle de rotation autour de l'origine ou le nombre de "contacts" de  $\Gamma$  avec lui-même. Un autre piste à explorer concerne le modèle de boucles coloriées. Le modèle de Brauer avec  $n$  entier est équivalent à un modèle de vertex sur le réseau carré, avec une supersymétrie  $OSP(N|2M)$  [35]. Lorsqu'on introduit les règles de coloriage, peut-on à nouveau trouver un modèle à vertex équivalent? Ceci permettrait une approche analytique du problème : en particulier, on pourrait étudier les symétries de la matrice  $\mathbf{R}$ . Enfin, la généralisation à  $n$  quelconque, malgré les difficultés techniques (non-unicité du chemin  $\Gamma$ , ambivalence de la version coloriée) permettrait de faire le lien avec d'autres travaux, en particulier sur le cas  $n = 1$  [75].

Pour conclure, nous présentons brièvement deux problèmes en étroite relation avec les modèles discutés dans cette thèse, et qui sont l'objet de nos recherches actuelles ou futures. Ce sont des modèles statistiques basés sur un modèle à six vertex alterné. Comme nous l'avons constaté sur l'exemple du modèle de Potts antiferromagnétique, l'alternance des paramètres spectraux se reflète dans la structure des équations de Bethe : les racines se divisent en types distincts, bien qu'il n'existe qu'une loi de conservation de particules. Le défi est de comprendre les conséquences de cette structure sur les modèles statistiques ou quantiques équivalents aux modèles de vertex alternés.

#### *Modèle de Potts avec des couplages mixtes*

Dans le modèle de Potts sur réseau carré, deux conditions de criticalité

ont été identifiées [32] :

- L'auto-dualité :

$$v_1 v_2 = Q$$

Cette condition est satisfaite sur deux branches, dans les quadrants  $(v_1 > 0, v_2 > 0)$  et  $(v_1 < 0, v_2 < 0)$ . La première branche correspond au point critique ferromagnétique, et la seconde, au point fixe de la phase de Berker-Kadanoff [33].

- L'équivalence avec le modèle à six vertex alterné (avec un décalage  $\frac{\pi}{2}$  des paramètres spectraux) impose :

$$(v_1 + 2)(v_2 + 2) = 4 - Q$$

Les deux branches correspondantes sont reliées par dualité. Ainsi, nous discutons uniquement la branche qui possède des points physiques :

$$v_1 = \frac{2 \cos \gamma \sin u}{\sin(\gamma - u)}, \quad v_2 = \frac{-2 \cos \gamma \cos(\gamma - u)}{\cos u}$$

où  $\sqrt{Q} = 2 \cos \gamma$  et  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ . Dans le régime  $\gamma < u < \frac{\pi}{2}$ , on a  $v_1 < 0, v_2 < 0$ . Ce régime correspond au point critique antiferromagnétique, discuté au §3.1. En revanche, dans le régime  $0 < u < \gamma$ , les couplages sont de signe opposés :  $v_1 > 0, v_2 < 0$ .

Le modèle de Potts avec couplages mixtes  $J_1 > 0$  et  $J_2 < 0$  a une interaction ferromagnétique dans la direction (1) et antiferromagnétique dans la direction (2) (voir figure 1.4). Ce modèle est intrinsèquement anisotrope. Son diagramme de phase (dans la paramétrisation  $v_1, v_2$ ) contient la ligne critique  $v_1 > 0, v_2 < 0$  discutée ci-dessus. Remarquons que, si  $Q > 1$ , cette ligne est non-physique ( $v_2 < -1$ ). Nous appelons ce régime *ligne critique mixte non-physique*. Cependant, de même que le point fixe de Berker-Kadanoff, cette ligne pourrait décrire le comportement critique d'une région physique du diagramme de phase.

*N.B.* : Dans le cas  $Q = 2$  (modèle d'Ising), on peut aisément identifier un point critique dans le domaine physique du modèle à couplages mixtes. En effectuant un changement de variables  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$  sur les spins appropriés, on obtient la ligne critique :

$$(v_1 + 2)v_2 = -2$$

Pour un nombre d'états quelconque, il devrait exister une ligne critique similaire. Pour l'identifier, on peut envisager une étude numérique de la matrice de transfert, ou peut-être formuler une condition de criticalité basée sur l'équivalence avec un modèle de vertex intégrable.

La ligne critique mixte non-physique est équivalente, dans la limite anisotrope  $u \rightarrow 0^+$ , au hamiltonien  $\mathcal{H}' \equiv -\mathcal{H}$  (voir équation (2.5.5)). Bien qu'ils aient le même spectre global, la physique des états de basse énergie de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  est certainement bien différente.

Le hamiltonien  $\mathcal{H}'$  décrit deux chaînes XXX antiferromagnétiques en interaction :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_1 + \mathcal{H}'_2 + \mathcal{H}'_{\text{int}} + \mathcal{H}'_{AH} + N \cos 2\gamma \mathbf{I}$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_q &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\sigma_{q,j}^x \sigma_{q,j+1}^x + \sigma_{q,j}^y \sigma_{q,j+1}^y - \sigma_{q,j}^z \sigma_{q,j+1}^z) \\ \mathcal{H}'_{\text{int}} &= -\sin^2 \gamma \sum_{j=1}^N \left[ \sigma_{1,j}^z \sigma_{2,j}^z + \sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j+1}^z \right] \end{aligned}$$

et les termes anti-hermitiens sont contenus dans  $\mathcal{H}'_{AH}$ . Une piste prometteuse serait d'étudier le hamiltonien  $\mathcal{H}'$  par perturbation autour de  $\gamma = 0$ , en faisant appel à des méthodes de Matière Condensée 1D, comme la bosonisation et l'invariance conforme.

#### *Modèle à six vertex cyclique*

Le modèle à six vertex alterné correspondant au modèle de Potts antiferromagnétique critique présente des symétries et un comportement critique originaux. En particulier, la présence d'une symétrie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (la charge  $\mathbf{c}$  (2.5.3)) joue un rôle important dans la structure du spectre. Nous proposons une généralisation : un modèle à six vertex intégrable possédant une charge  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , où  $p$  est un entier naturel quelconque.

Sur un cylindre de largeur  $pN$ , on définit la matrice de transfert  $\mathcal{T}(u)$  comme le produit de  $N$  matrices  $\mathcal{R}(u)$ . La matrice  $\mathcal{R}(u)$  agit sur le produit  $V_p \otimes V_p$ , où  $V_p$  est l'espace des états de  $p$  arêtes. Les paramètres spectraux verticaux de  $\mathcal{R}(u)$  sont  $\left(0, \frac{\pi}{p}, \dots, \frac{(p-1)\pi}{p}\right)$ , et les paramètres spectraux horizontaux sont  $\left(u, u + \frac{\pi}{p}, \dots, u + \frac{(p-1)\pi}{p}\right)$  (voir figure 5.1). En particulier, si  $p = 1$ , on retrouve le modèle à six vertex homogène, et si  $p = 2$ , le modèle de Potts antiferromagnétique.

Il semble que les propriétés de symétrie (présence d'une charge  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , énergies propres communes avec  $H_{\text{XXZ}}(\gamma_0)$ , structure des équations de Bethe) se généralisent à ce modèle. De multiples développements sont envisageables à partir du modèle à six vertex cyclique : étude des équations de Bethe,

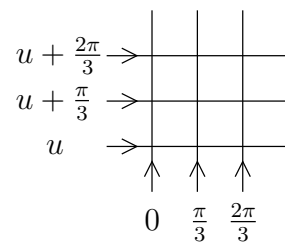


FIG. 5.1 – Matrice  $\mathcal{R}(u)$  du modèle cyclique à  $p = 3$ .

interprétation en modèle de Potts, chaîne de spins dans la limite anisotrope, théorie des champs conforme associée, *etc.*



# Chapitre 6

## Summary

The study of two-dimensional critical phenomena has known great progress, particularly thanks to results on conformal invariance [1, 2, 3, 4]. Many problems, such as phase transitions in ferromagnets [5, 6, 7], percolation [8], polymers [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18], Hamiltonian walks [16, 17, 18], spanning trees and dimers [19, 20, 21, 22, 23, 24, 76], were identified with nonintersecting loop models on a lattice. First, this identification provides us with a description of extended objects arising in the initial model (for example, spin clusters in the Potts model). Moreover, these loop models admit a height representation [10], and the associated critical theory is essentially a compact Gaussian model [25, 26, 27], which is possibly multi-dimensional [28, 29, 15, 17]. Thus, the behaviour of the free energy and correlation functions (in other words, the transfer matrix spectrum) in the initial problem is described by this theory. In some cases, the finite-size transfer matrix spectrum can be studied by rigorous approaches : Bethe Ansatz, integrability [30], quantum groups [31], *etc.*

Some statistical models, representing interesting physical phenomena, are not described by the compact Gaussian model, and no unifying framework is known to classify their critical properties. For example, the critical antiferromagnetic Potts model [32, 33, 34, 77], or dense intersecting loops (Brauer loop model [35, 36]). They have in common the existence, in the continuum limit, of non-compact degrees of freedom (which can coexist with compact ones). Analytical tools exist to study these models, such as Bethe Ansatz and  $\sigma$ -model theory. These approaches allow us to formulate strong conjectures on the form of the corresponding critical theory. High precision numerical calculations (especially those based on Bethe Ansatz [37]) support these conjectures.

Chapter 1 is dedicated to examples of two-dimensional statistical models on a lattice. We present some known results on models related to the compact Gaussian model, emphasizing physical properties. By contrast, examples of less understood models are exposed. Their essentially different properties, as compared to the previous ones, are the appearance of non-compact degrees of freedom, and infinitely degenerated levels of conformal dimensions.

Chapter 2 is more technical, and describes the analytical methods used in this PhD thesis : transfer matrix formalism, conformal invariance, Gaussian model, Yang-Baxter equations, Bethe Ansatz. We illustrate more precisely some of these on the XXZ spin chain (as the anisotropic limit of the homogeneous six-vertex model). Finally, we expose the Bethe Ansatz structure of the critical antiferromagnetic Potts model. The staggering of spectral parameters generates two kinds of particles, and there exists a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  charge, which exchanges the two kinds of particles. This is remarkable, since the vertex model has only one  $SU(2)$  conservation rule.

In Chapter 3, we expose new results obtained in this PhD thesis, on two particular models : the critical antiferromagnetic Potts model, and the escape path in the Brauer loop model. On the antiferromagnetic Potts model, the main results are :

- The asymptotic behaviour of the effective compactification radius in the non-compact direction :

$$\begin{aligned} R &\propto \ln N && \text{si } 0 < Q < 4 \\ R &\propto \sqrt{\ln N} && \text{si } Q \rightarrow 0 \end{aligned}$$

where  $N$  is the number of sites on the circumference of the cylinder.

- The Hamiltonian (3.1.1)-(3.1.2) in the anisotropic limit.
- The explicit action of the charge  $\mathbf{C}$  on the eigenstates (3.1.33)-(3.1.34).
- A suggested numerical method to locate the Bethe roots in other sectors.

In the Brauer model, we defined a scale-invariant model for the escape path, and proposed a phase diagram for this model. Our main numerical results are the watermelon critical exponents for a small number of paths :

| Name        | Description                   | Numerical value  |
|-------------|-------------------------------|------------------|
| $X_{(0,1)}$ | 1 loop, 1 interface           | $0.04 \pm 0.005$ |
| $X_{(1,0)}$ | 1 trail, 1 interface          | $0.00 \pm 0.005$ |
| $X_{(0,2)}$ | 2 loops, 2 interfaces         | $0.80 \pm 0.02$  |
| $X_{(1,1)}$ | 1 loop, 1 trail, 2 interfaces | $0.50 \pm 0.008$ |
| $X_{(2,0)}$ | 2 trails, 2 interfaces        | $0.21 \pm 0.02$  |

and an estimate of the escape path fractal dimension :

$$d_f \simeq 1.28$$

In Chapter 4, we give some details on the numerical methods we used : transfer matrix diagonalization, McCoy *et al.*'s method, Newton-Raphson method, Monte-Carlo simulations.

This PhD thesis led to three publications :

F. Alet, Y. Ikhlef, J. L. Jacobsen, G. Misguich, V. Pasquier, *Classical dimers with aligning interactions on the square lattice*, Phys. Rev. **E74**, 041124 (2006)

Y. Ikhlef, J.L. Jacobsen, H. Saleur, *A staggered six-vertex model with non-compact continuum limit*, cond-mat/0612037, accepté par Nucl. Phys. B (2006)

Y. Ikhlef, J.L. Jacobsen, H. Saleur, *Non-intersection exponents of fully packed trails on the square lattice*, J. Stat. Mech. P05005 (2007)

These works open new research directions, extending or generalizing the results appearing in these publications.

Concerning the antiferromagnetic Potts model, many questions remain open, and the ones which are most likely solvable are about the Bethe Ansatz. First, by a numerical calculation of finite-size corrections to excitation energies, we determined the asymptotic behaviour of the coupling constant  $g_N^-$ . The form (3.1.9) for the exponents contains only information on corrections of order  $\frac{1}{N^2}$ . In other contexts [73, 74], analytical methods were developed to compute corrections beyond  $\frac{1}{N^2}$ . An adaptation of these methods to the case of the antiferromagnetic Potts model would validate our numerical results, and would allow us to obtain a more rigorous description of the spectrum in the continuous limit. Second, McCoy *et al.*'s method is easily transposed to the antiferromagnetic Potts model (see §3.1.4). In the twisted case, this could help understanding some excitations observed numerically [34], in terms of Bethe roots.

In the Brauer model, as we noted in §3.2.2, the numerical results obtained by several methods are not precise enough to conclude about the universality class of the escape path. Additional observables could be computed, such as the winding angle or the number of contacts of the path with itself. Another idea to explore is the colored loop model. The Brauer model with



integer  $n$  is equivalent to an  $OSP(N|2M)$  vertex model [35]. When colors are introduced, can we still find an equivalent vertex model? This would allow for an analytical approach of the problem. Finally, the generalization to non-zero  $n$ , up to technical difficulties (nonunicity of the escape path, non-local weights in the colored version) would be a first step to establish a relation with other works, especially for  $n = 1$  [75].

To conclude, we give a short description of two models closely related to those discussed in this thesis, and which are in our current research program. These are statistical models based on a staggered six-vertex model. As we could see in the antiferromagnetic Potts case, the staggering of spectral parameters is reflected in the Bethe Ansatz structure. The challenge is to understand the consequences of this structure on statistical or quantum models exactly mapped to staggered vertex models.

#### *Potts model with mixed couplings*

In the Potts model on the square lattice, two criticality conditions were identified [32] :

- Self-duality :

$$v_1 v_2 = Q$$

This condition is satisfied on two branches, in the quadrants  $(v_1 > 0, v_2 > 0)$  and  $(v_1 < 0, v_2 < 0)$ . The first branch corresponds to the ferromagnetic critical point, and the second one, to the fixed point of the Berker-Kadanoff phase [33].

- Equivalence with the staggered six-vertex model (with a staggering  $\frac{\pi}{2}$  in spectral parameters) yields :

$$(v_1 + 2)(v_2 + 2) = 4 - Q$$

The two corresponding branches are related to each other by duality. Thus, we only discuss the branch containing physical points :

$$v_1 = \frac{2 \cos \gamma \sin u}{\sin(\gamma - u)}, \quad v_2 = \frac{-2 \cos \gamma \cos(\gamma - u)}{\cos u}$$

where  $\sqrt{Q} = 2 \cos \gamma$  and  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ . In the regime  $\gamma < u < \frac{\pi}{2}$ , one has  $v_1 < 0, v_2 < 0$ . This regime corresponds to the antiferromagnetic critical point, discussed in §3.1. In contrast, in the regime  $0 < u < \gamma$ , the couplings have opposite signs :  $v_1 > 0, v_2 < 0$ .

The Potts model with mixed couplings  $J_1 > 0$  and  $J_2 < 0$  has a ferromagnetic interaction in the direction (1) and an antiferromagnetic interaction in the direction (2) (see figure 1.4). This model is intrinsically anisotropic. Its phase diagram (in parameters  $v_1, v_2$ ) contains the mixed critical line  $v_1 > 0, v_2 < 0$  described above. Note that, if  $Q > 1$ , this line is non-physical ( $v_2 < -1$ ). We call this regime *the non-physical mixed critical line*. Nevertheless, as well as the Berker-Kadanoff fixed point, this line could describe the critical behaviour of a physical region in the phase diagram.

*N.B.* : In the case  $Q = 2$  (Ising model), there is a straightforward way to identify a critical point in the physical domain of the mixed coupling model. By performing the change of variables  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$  on appropriate spins, one gets the critical line :

$$(v_1 + 2)v_2 = -2$$

For an arbitrary value of  $Q$ , there should exist a similar critical line. In order to identify it, one can consider studying numerically the transfer matrix, or maybe formulate a criticality condition based on the equivalence with an integrable vertex model.

The non-physical mixed critical line is equivalent, in the anisotropic limit  $u \rightarrow 0^+$ , to the Hamiltonian  $\mathcal{H}' \equiv -\mathcal{H}$  (see equation (2.5.5)). Although they have the same global spectrum, the physics of the low-energy states of  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{H}'$  is certainly different.

The Hamiltonian  $\mathcal{H}'$  describes two interacting antiferromagnetic XXX spin chains :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_1 + \mathcal{H}'_2 + \mathcal{H}'_{\text{int}} + \mathcal{H}'_{AH} + N \cos 2\gamma \mathbf{I}$$

where :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_q &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\sigma_{q,j}^x \sigma_{q,j+1}^x + \sigma_{q,j}^y \sigma_{q,j+1}^y - \sigma_{q,j}^z \sigma_{q,j+1}^z) \\ \mathcal{H}'_{\text{int}} &= -\sin^2 \gamma \sum_{j=1}^N \left[ \sigma_{1,j}^z \sigma_{2,j}^z + \sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j+1}^z \right] \end{aligned}$$

and the anti-hermitian terms are contained in  $\mathcal{H}'_{AH}$ . An interesting project would be to study the Hamiltonian  $\mathcal{H}'$  as a perturbation around  $\gamma = 0$ , using methods of one-dimensional Condensed Matter Physics, such as bosonization and conformal invariance.

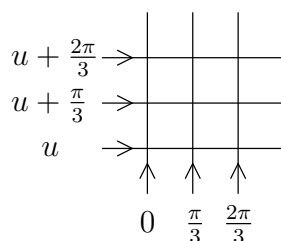


FIG. 6.1 – The  $\mathcal{R}$ -matrix of the cyclic six-vertex model for  $p = 3$ .

### *Cyclic six-vertex model*

The staggered six-vertex model corresponding to the antiferromagnetic Potts model exhibits original symmetries and critical behaviour. In particular, the presence of a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  symmetry (the charge  $\mathbf{c}$  (2.5.3)) plays an important role in the spectrum structure. We suggest a generalization of this : an integrable six-vertex model with a  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  charge, where  $p$  is any positive integer.

On a cylinder of width  $pN$ , one defines the transfer matrix  $\mathcal{T}(u)$  as the product of  $N$   $\mathcal{R}$ -matrices. The matrix  $\mathcal{R}(u)$  acts on the product  $V_p \otimes V_p$ , where  $V_p$  is the space of  $p$ -bond states. The vertical spectral parameters of  $\mathcal{R}(u)$  are  $\left(0, \frac{\pi}{p}, \dots, \frac{(p-1)\pi}{p}\right)$ , and the horizontal spectral parameters are  $\left(u, u + \frac{\pi}{p}, \dots, u + \frac{(p-1)\pi}{p}\right)$  (see figure 6.1). In particular, if  $p = 1$ , one gets back to the homogeneous six-vertex model, and if  $p = 2$ , to the antiferromagnetic Potts model.

It seems that the symmetry properties (presence of a  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  charge, common eigenvalues with  $H_{\text{XXZ}}(\gamma_0)$ , Bethe Ansatz structure) generalize to this model. Many developments are possible on the cyclic six-vertex model : study of the Bethe equations, Potts model interpretation, related spin chain, associated critical theory, *etc.*

# Articles



## Classical dimers with aligning interactions on the square lattice

F. Alet, Y. Ikhlef, J. L. Jacobsen, G. Misguich, V. Pasquier, Phys. Rev. **E74**, 041124 (2006)



## Classical dimers with aligning interactions on the square lattice

Fabien Alet,<sup>1,2,\*</sup> Yacine Ikhlef,<sup>3,2</sup> Jesper Lykke Jacobsen,<sup>3,2</sup> Grégoire Misguich,<sup>2</sup> and Vincent Pasquier<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique Théorique, UMR CNRS 5152, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse, France

<sup>2</sup>Service de Physique Théorique, URA CNRS 2306, CEA Saclay, 91191 Gif sur Yvette, France

<sup>3</sup>LPTMS, UMR CNRS 8626, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

(Received 28 July 2006; published 26 October 2006)

We present a detailed study of a model of close-packed dimers on the square lattice with an interaction between nearest-neighbor dimers. The interaction favors parallel alignment of dimers, resulting in a low-temperature crystalline phase. With large-scale Monte Carlo and transfer matrix calculations, we show that the crystal melts through a Kosterlitz-Thouless phase transition to give rise to a high-temperature critical phase, with algebraic decays of correlations functions with exponents that vary continuously with the temperature. We give a theoretical interpretation of these results by mapping the model to a Coulomb gas, whose coupling constant and associated exponents are calculated numerically with high precision. Introducing monomers is a marginal perturbation at the Kosterlitz-Thouless transition and gives rise to another critical line. We study this line numerically, showing that it is in the Ashkin-Teller universality class, and terminates in a tricritical point at finite temperature and monomer fugacity. In the course of this work, we also derive analytic results relevant to the noninteracting case of dimer coverings, including a Bethe ansatz (at the free fermion point) analysis, a detailed discussion of the effective height model, and a free field analysis of height fluctuations.

DOI: [10.1103/PhysRevE.74.041124](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.041124)

PACS number(s): 05.20.-y, 05.50.+q, 64.60.Cn, 64.60.Fr

### I. INTRODUCTION

The problem of lattice coverings by “hard” objects, and dimers in particular, is ubiquitous in classical statistical mechanics. The formulation of the problem of dimer coverings goes back to the 1930’s [1]. The combinatorial problem of finding the exact number of such coverings has been solved in the early 1960’s for planar two-dimensional (2D) lattices by means of Pfaffian techniques [2,3], which have been extended to calculate dimer-dimer and monomer (i.e., unpaired sites)-monomer correlation functions [4]. Notwithstanding the intrinsic mathematical beauty of this problem [5], it also plays a central role in statistical physics due to its relationship to Ising [3] or height models [6]. Dimer coverings of bipartite graphs in three dimensions have also been recently shown to be connected to gauge theories [7]. Dimer models have also recently regained interest because quantum dimer models (QDMs), originally introduced by Rokhsar and Kivelson [8], are among the simplest systems which exhibit ground states with topological order and fractionalization [9].

In this work, we study a model of *interacting* classical dimers on the square lattice, with an interaction that favors dimer alignment. The dimer coverings are close packed, i.e., there are no sites left uncovered by a dimer (monomers). We now describe the plan of the paper. We first introduce the model and its simple limits in Sec. II. In Sec. III we introduce the transfer matrix of the model and describe how its critical exponents in the noninteracting (infinite temperature) limit can be rederived by the Bethe ansatz technique. Unfortunately, the interacting model does not seem to be integrable by a straightforward extension of this approach. We therefore go on, in Sec. IV, to describe two complementary numerical

simulation schemes: Monte Carlo (MC) and transfer matrix (TM) calculations. The results of the MC simulations are presented in Secs. V–VII: we find that the model possesses a low-temperature crystalline phase separated by a Kosterlitz-Thouless (KT) transition [10] from a high-temperature critical phase with floating exponents. We account for all these findings in Sec. VIII, where we give a theoretical interpretation in terms of a Coulomb gas (CG) picture [11]. This mapping moreover allows one to make specific predictions on the high-temperature phase that are successfully tested with high-precision TM and MC calculations. The CG description implies that the introduction of monomers is a marginal perturbation at the KT point and hence leads to the emergence of another critical line. We study this numerically and find it to be in the Ashkin-Teller universality class; the line terminates in a tricritical point at finite temperature and monomer fugacity. The finally obtained phase diagram is presented in Fig. 1. We finally discuss the connections to other models in classical statistical physics and the implications of our findings for quantum models in Sec. IX, and conclude in Sec. X. A short account of the results presented here was given in Ref. [12].

### II. THE MODEL

We study a model of interacting close-packed dimers on the square lattice, defined in the following way:

$$Z = \sum_c \exp(-E_c/T), \quad (1)$$

$$E_c = v[(N^c(\equiv) + N^c(\parallel))].$$

The sum in the partition function  $Z$  is over all fully-packed dimer coverings of the square lattice  $c$ . To each dimer covering  $c$ , we assign the energy  $E_c$  which simply counts the

\*Electronic address: alet@irsamc.ups-tlse.fr



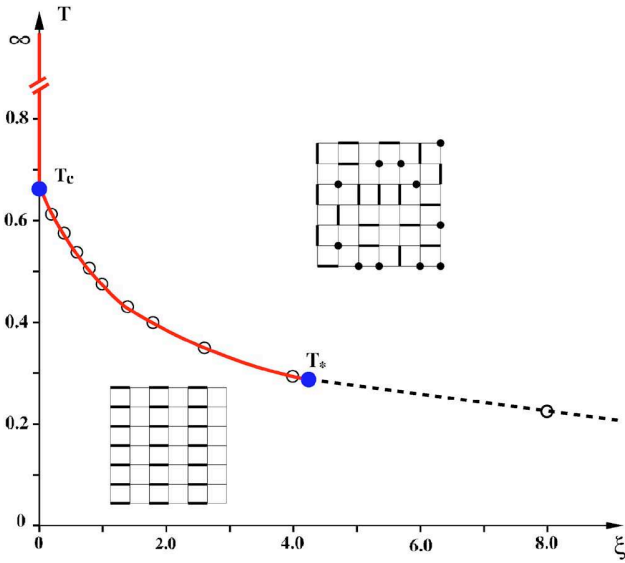


FIG. 1. (Color online) Phase diagram of the interacting dimer model in the temperature  $T$ , monomer fugacity  $\xi$  plane (see text for definitions). The solid lines represent second-order phase transition lines with continuously varying exponents. When no monomers are allowed ( $\xi=0$ ), the first critical line terminates at  $T_c=0.65(1)$  and separates the high- $T$  critical phase from a long-range order crystalline phase through a Kosterlitz-Thouless phase transition. Allowing for monomers ( $\xi \neq 0$ ) creates the second critical line separating the low  $T$  crystalline phase from a monomer-dimer (massive) liquid phase at high  $T$ . This line terminates in a multicritical point at  $T_*=0.29(2)$ , where it changes nature to become a first order line (dashed line). Simple energetic arguments (see Ref. [12]) predict that the first order transition temperature scales as  $1/[2 \ln(\xi)]$  when  $\xi \rightarrow \infty$ .

number  $N^c(\equiv) + N^c(\text{II})$  of plaquettes with parallel (horizontal or vertical) dimers in the covering  $c$ .  $|v|=1$  sets the energy scale ( $T$  is the temperature). The sign of  $v$  determines the nature of the interactions between the nearest-neighbor dimers:  $v < 0$  correspond to *aligning* interactions between dimers,  $v > 0$  favors configurations with staggered occupation of dimers. In this paper, we will consider  $v=-1$ , the so-called columnar case.

The model is illustrated in Fig. 2, where a dimer covering of the lattice is represented, and the plaquettes contributing a factor  $+v$  to the energy of this configuration are identified by a cross. It is straightforward to see that at zero temperature  $T=0$ , the configurations that minimize the energy are the four states represented in Fig. 3, where the dimers are aligned in *columns*. This fourfold degenerate ground state spontaneously breaks translation and  $\pi/2$ -rotational symmetries. The first excitation above these ground-states are obtained by flipping two parallel dimers around a plaquette; the system has a gap (it costs a finite energy  $2v$  to flip the two dimers) and the columnar order is therefore expected to subsist at (possibly small but) finite temperature.

On the other hand, the partition function at infinite temperature  $T=\infty$  is simply the unweighted sum over all possible dimer coverings of the square lattice, and the model can be solved exactly at this point [2,3]. The  $T=\infty$  point is critical,

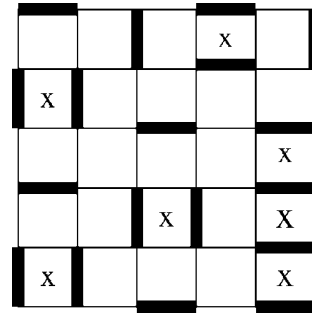


FIG. 2. Illustration of the interacting dimer model: we consider dimer coverings of the square lattice where each plaquette (marked with a cross) with a pair of parallel nearest neighbor dimers contributes  $+v$  to the energy (the energy of this dimer covering is  $7v$ ).

with correlation functions displaying an algebraic dependence with distance [4]: dimer-dimer correlation functions decay as  $1/r^2$  and monomer-monomer correlation functions as  $1/\sqrt{r}$  for large distance  $r$ . We postpone the precise definitions of these correlation functions to Sec. III below where we rederive the results for the critical exponents using another exact approach, the coordinate Bethe ansatz. Although we have not been able to solve the interacting dimer problem (finite temperature), the Bethe ansatz technique can potentially go beyond free fermion problems (contrary to the Pfaffian methods of Refs. [2–4]).

The Bethe ansatz method also serves to illustrate that the critical nature of the dimer covering problem is intimately linked to the bipartite nature of the square lattice (nonbipartite lattices present a dimer liquid behavior with a finite correlation length [9]). Unfortunately, the introduction of interactions appears to break the integrability of the model.

We end up the Introduction with some historical notes on this model. The model Eq. (1) was first introduced in the physics of liquid crystals [13] and not developed further in this context to our best knowledge. This is likely due to the fact that the quest was there to look for microscopic models where a true liquid crystal phase exists, and not a crystalline state such as the one depicted in Fig. 3. Later on, Brankov and co-workers [14] also studied the same model with Monte Carlo methods but missed the true critical behavior of this problem. In a recent publication [12] we described the physics of the undoped model and sketched the existence of a critical line with central charge  $c=1$  ending at a tricritical point at finite doping. This has then been followed by other studies, including construction of quantum models [15,16] with ground-state wave functions described by the partition function in Eq. (1), further investigations of the doped monomer case [15–17] and generalization to three-dimensional lattices [18].

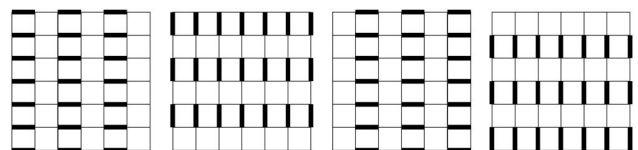


FIG. 3. The four columnar ground states.

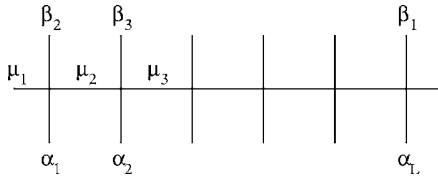


FIG. 4. The row-to-row transfer matrix.

### III. NONINTERACTING DIMERS AS FREE FERMIONS

We study dimer coverings (each site is paired with exactly one of its neighbors) of the square lattice. In this section (and only in this section), we give a fugacity  $\omega$  to each horizontal dimer, and 1 to vertical ones. This is the model of *noninteracting* dimers, solved by combinatorial methods [2–4]. We will introduce the TM of this model and we show how to compute the partition sum and the correlation functions by the Bethe ansatz method.

#### A. Transfer matrix

The partition sum of the model is

$$Z = \sum_{\text{dimer configurations}} \omega^{\text{No. of horizontal dimers}}. \quad (2)$$

On a strip of width  $L$ , we define the state of a row as the “occupation numbers”  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_L)$  of the vertical edges, where  $\alpha_i$  is equal to 1 if the  $i$ th vertical edge is occupied by a dimer, and 0 otherwise. There are  $2^L$  configurations of a row, so  $Z$  can be written as the trace of a  $2^L$ -dimensional transfer matrix  $T$ . We impose periodic boundary conditions (PBCs), i.e., the index  $i$  is considered modulo  $L$ . Given two line configurations  $\alpha$  and  $\beta$ , the matrix element  $T_{\beta\alpha}$  is the sum of the Boltzmann weights associated with the horizontal dimer configurations  $\mu$  compatible with  $\alpha$  and  $\beta$ :

$$T_{\beta\alpha} = \sum_{\mu | (\alpha, \beta)} \omega^{\mu_1 + \dots + \mu_L} \quad (3)$$

as illustrated in Fig. 4. The compatibility criterion  $\mu | (\alpha, \beta)$  can be expressed formally as follows:

$$\forall i \in \{1, \dots, L\}: \mu_i + \mu_{i+1} + \alpha_i + \beta_{i+1} = 1. \quad (4)$$

#### B. Conservation law

For convenience, we introduce a shift at each row in the numbering of columns (see Fig. 4). We call *particle* an empty even vertical edge or an occupied odd vertical edge. Let us show that the number of particles is conserved, and let us give at the same time the rules for the dynamics of the particles (see the corresponding Fig. 5).

*Particle on an even vertical edge.* If a particle sits on the vertical edge  $\alpha_{2j}$ , then  $\alpha_{2j} = 0$ . The site above this edge must be visited once, so one of the variables  $\mu_{2j}, \beta_{2j+1}, \mu_{2j+1}$  must be equal to 1. In the first (respectively, third) case, this implies that  $\beta_{2j}$  (respectively,  $\beta_{2j+2}$ ) is zero. Therefore, in the next row, there is a particle on the edge  $\beta_{2j}, \beta_{2j+1}$  or  $\beta_{2j+2}$ .

*Particle on an odd vertical edge.* If a particle sits on the vertical edge  $\alpha_{2j-1}$ , then  $\alpha_{2j-1} = 1$ . The site above this edge

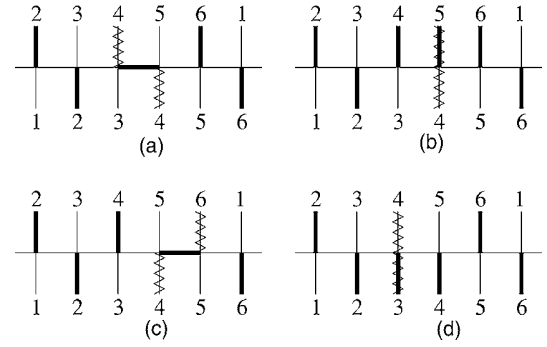


FIG. 5. Rules for the dynamics of the particles on a strip of width  $L=6$ . Particles are represented by zigzag lines. The rules are different for particles starting from an even site (a), (b), (c) and an odd site (d).

has already been visited, so  $\beta_{2j}$  must be zero: in the next row, the particle sits on the edge  $\beta_{2j}$ .

The TM is block diagonal, each block representing a sector with fixed number of particles  $n$ . We call  $T^{(n)}$  the TM block in the  $n$ -particle sector. Note that the lattice width  $L$  must be even, because, for an odd lattice width with PBC, the number of particles is not conserved.

#### C. One-particle sector

The action of  $T$  on a one-particle state  $\Phi$  is

$$(T\Phi)(2j) = \omega\Phi(2j-2) + \Phi(2j-1) + \omega\Phi(2j),$$

$$(T\Phi)(2j+1) = \Phi(2j). \quad (5)$$

We want to take advantage of the translational invariance to diagonalize  $T^{(1)}$ . Define the two-step cyclic permutation  $J$  of the sites by its action on a one-particle state  $\Phi$ :

$$(J\Phi)(x) = \Phi(x+2). \quad (6)$$

On a lattice of even width with the PBC, the operator  $J$  commutes with  $T^{(1)}$ . If  $z$  satisfies the condition  $z^2=1$ , the eigenspace of  $J$  with eigenvalue  $z^2$  is generated by the two vectors  $\Phi_z, \bar{\Phi}_z$ :

$$\Phi_z(2j) = z^{2j}, \quad \Phi_z(2j-1) = 0,$$

$$\bar{\Phi}_z(2j) = 0, \quad \bar{\Phi}_z(2j-1) = z^{2j-1}. \quad (7)$$

Note that  $\Phi_{-z} = \Phi_z$  and  $\bar{\Phi}_{-z} = -\bar{\Phi}_z$ .

More generally, let  $z$  be a complex number of modulus unity. The block of  $T^{(1)}$  in the basis  $(\Phi_z, \bar{\Phi}_z)$  is

$$\begin{bmatrix} \omega(1+z^{-2}) & z^{-1} \\ z^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

This matrix has eigenvectors  $\psi_z, \psi'_z$  with the eigenvalues  $\Lambda(z), \Lambda'(z)$  satisfying

$$\Lambda(z) + \Lambda'(z) = \omega(1+z^{-2}),$$

$$\Lambda(z)\Lambda'(z) = -z^{-2}. \quad (9)$$

One can then write

$$z = \exp(ik), \quad (10)$$

$$\Lambda(z) = \exp[h + i(\phi + \theta)], \quad (11)$$

$$\Lambda'(z) = \exp[-h + i(\phi - \theta)], \quad (12)$$

where  $k, \phi, \theta$  are real and  $h$  is nonnegative.  $\Lambda(z)$  is the eigenvalue with greatest modulus. With this parametrization, Eqs. (9) imply

$$\cosh(2h) = 1 + 2\omega^2 \cos^2 k \quad (13)$$

when  $|z|=1$ . Recalling that  $\cos k \geq 0$ , this relation can be inverted and we obtain

$$h(k) = \ln[\omega \cos k + (1 + \omega^2 \cos^2 k)^{\frac{1}{2}}] \quad (14)$$

when  $-\pi/2 \leq k \leq \pi/2$ . A useful quantity for the computation of finite-size effects is  $h'(\pi/2) = -\omega$ .

#### D. Two-particle sector, scattering amplitude

Consider the action of the TM on the two-particle vector

$$\psi_{12}(x_1, x_2) = \psi_{z_1}(x_1) \psi_{z_2}(x_2), \quad x_1 < x_2. \quad (15)$$

The TM changes the positions of the particles from  $(x_1, x_2)$  to  $(y_1, y_2)$ . For fixed positions  $y_1 < y_2$ , let us look at the initial states leading to these positions.

If  $y_2 > y_1 + 2$  or  $(y_1, y_2) = (2j-1, 2j+1)$ , then for each particle all initial states are allowed, thus

$$\begin{aligned} (T\psi_{12})(y_1, y_2) &= \sum_{x_1, x_2} \psi_{z_1}(x_1) \psi_{z_2}(x_2) T_{y_1, x_1} T_{y_2, x_2} \\ &= \Lambda(z_1) \Lambda(z_2) \psi_{z_1}(y_1) \psi_{z_2}(y_2). \end{aligned}$$

If  $(y_1, y_2) = (2j-1, 2j)$ , all initial states are allowed except  $x_1 = x_2 = 2j-2$ . One has to subtract the corresponding term in the action of the matrix  $T$ :

$$\begin{aligned} (T\psi_{12})(2j-1, 2j) &= \Lambda(z_1) \Lambda(z_2) \psi_{z_1}(2j-1) \psi_{z_2}(2j) \\ &\quad - \omega \psi_{z_1}(2j-2) \psi_{z_2}(2j-2). \end{aligned}$$

If  $(y_1, y_2) = (2j, 2j+1)$  or  $(y_1, y_2) = (2j, 2j+2)$ , all initial states are allowed except  $x_1 = x_2 = 2j$ . Similarly to the previous case,

$$\begin{aligned} (T\psi_{12})(2j, 2j+1) &= \Lambda(z_1) \Lambda(z_2) \psi_{z_1}(2j) \psi_{z_2}(2j+1) \\ &\quad - \omega \psi_{z_1}(2j) \psi_{z_2}(2j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T\psi_{12})(2j, 2j+2) &= \Lambda(z_1) \Lambda(z_2) \psi_{z_1}(2j) \psi_{z_2}(2j+2) \\ &\quad - \omega \psi_{z_1}(2j) \psi_{z_2}(2j). \end{aligned}$$

Note that all the interaction terms in  $T\psi_{12}$  are symmetric functions of the momenta  $k_1, k_2$ . As a consequence, the anti-symmetric combination

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_{z_1}(x_1) \psi_{z_2}(x_2) - \psi_{z_2}(x_1) \psi_{z_1}(x_2) \quad (16)$$

is an eigenvector of the matrix  $T$  with eigenvalue  $\Lambda(z_1) \Lambda(z_2)$ .

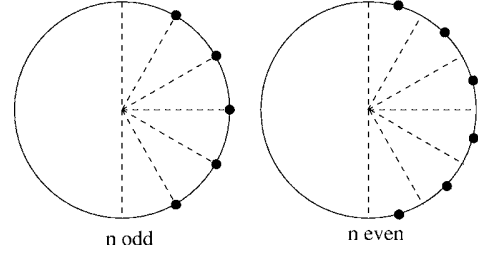


FIG. 6. Position of the vacancies for a strip of width  $L=12$ . Vacancies are represented by black points on the unit circle, in the complex  $z$  plane.

#### E. Periodic boundary conditions, position of the solutions

The analogous construction in the  $n$ -particles sector gives the eigenvectors and eigenvalues

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_P \epsilon(P) \psi_{z_{p_1}}(x_1) \cdots \psi_{z_{p_n}}(x_n), \quad (17)$$

$$\Lambda(z_1, \dots, z_n) = \Lambda(z_1) \cdots \Lambda(z_n), \quad (18)$$

where the sum is over all permutations of the integers  $1, \dots, n$  and  $\epsilon(P)$  is the signature of the permutation  $P$ . PBCs yield

$$\forall j \quad (z_j)^L = (-1)^{n-1}. \quad (19)$$

The solutions of these equations lie on the unit circle, which justifies the discussion in Sec. III C. The momenta  $k_j$  are given by

$$k_j = \frac{2\pi}{L} I_j, \quad I_j \in \mathbb{Z} \text{ } n \text{ odd,}$$

$$k_j = \frac{2\pi}{L} \left( I_j + \frac{1}{2} \right), \quad I_j \in \mathbb{Z} \text{ } n \text{ even.} \quad (20)$$

See Fig. 6 for a graphical representation of the vacancies on the unit circle. For any  $z$  on the unit circle, the TM has an eigenvalue  $\Lambda$  with modulus greater than 1. Therefore, the number of particles that maximizes the total eigenvalue of  $T$  is either the greatest even value or the greatest odd value for  $n$ . Since the  $k_j$ 's are distinct, lie in the interval  $[-\pi/2, \pi/2]$  and are spaced by  $2\pi/L$ , the maximum number of particles is  $L/2$ .

#### F. Thermodynamic limit

In this section, the discussion is restricted for simplicity to a system of width multiple of four:  $L=4p$ . According to the previous section, the leading sector is defined by the greatest eigenvalue either in the sector  $n=2p$  or in the sector  $n=2p-1$ . As will be shown in a few lines, the correct choice for the leading sector is  $n=2p$ .

For a system of finite width and infinite length, the free energy density per surface unit in the  $n$ -particles sector is defined by

$$f_L^{(n)} = \frac{1}{L} \ln \Lambda_{\max}^{(n)}, \quad (21)$$

where  $\Lambda_{\max}^{(n)}$  is the eigenvalue of  $T$  with greatest modulus in the  $n$ -particles sector. The corresponding quantity for  $L=4p$  and  $n=2p$  is

$$f_L^{(L/2)} = \frac{2}{L} \sum_{j=0}^{p-1} h \left[ (j+1/2) \frac{2\pi}{L} \right], \quad (22)$$

where the function  $h(k)$  is given by Eq. (14). When  $L$  goes to infinity, this quantity tends to the limit  $f_\infty$ :

$$f_\infty = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln[\omega \cos k + (1 + \omega^2 \cos^2 k)^{1/2}] dk \quad (23)$$

in agreement with formula (17) of Ref. [2]. In the isotropic case  $\omega=1$ ,

$$f_\infty(\omega=1) = \frac{2G}{\pi}, \quad (24)$$

where  $G$  is the Catalan constant

$$G = 1^{-2} - 3^{-2} + 5^{-2} - 7^{-2} + \dots \quad (25)$$

The asymptotic behavior of  $f_L^{(L/2)}$  is derived from the Euler-Maclaurin formula

$$f_L^{(L/2)} = f_\infty + \omega \frac{\pi}{6L^2} + o(L^{-2}). \quad (26)$$

We expect the critical point to have conformal symmetry in the isotropic case, with a central charge  $c=1$ . If one particle is removed ( $n=2p-1$ ), the solutions  $z_j$  all get shifted (see Fig. 6). The Euler-Maclaurin formula yields

$$f_L^{(L/2-1)} = f_\infty - \frac{\pi}{6L^2} h' \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{\pi} I(\pi/L) + o(L^{-2}) \quad (27)$$

with

$$I(\epsilon) = \int_{\pi/2-\epsilon}^{\pi/2} h(k) dk = -h' \left( \frac{\pi}{2} \right) \epsilon^2/2 + o(\epsilon^2). \quad (28)$$

Finally, we obtain

$$f_L^{(L/2-1)} = f_L^{(L/2)} - \frac{\pi}{2L^2} \omega + o(L^{-2}). \quad (29)$$

This proves that in the thermodynamic limit the leading sector is indeed given by  $n=2p$ . In the isotropic case, the critical exponent corresponding to the removal of one particle is  $X_1=1/4$  (see definition and discussion in Sec. IV B below). Now if two particles are removed from the leading sector, the other  $z_j$ 's are not shifted, because the number of particles remains even. The only effect is a decrease of free energy caused by the absence of the two particles

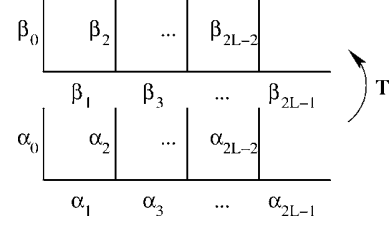


FIG. 7. The row-to-row transfer matrix for the interacting case.

$$f_L^{(L/2-2)} = f_L^{(L/2)} - \frac{2}{L} h \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{L} \right) \quad (30)$$

$$= f_L^{(L/2)} - \frac{2\pi}{L^2} \omega + o(L^{-2}). \quad (31)$$

In the isotropic case, the critical exponent corresponding to this process (see again Sec. IV B below) is  $X_2=1$ .

### G. Introducing interactions

A TM for the interacting model Eq. (1) can be written down by generalizing the working of Sec. III A. To this end, the basis states ( $\alpha$ ) must encode not only the occupation numbers of a row of vertical edges (as before), but also the occupation numbers of the preceding row of horizontal edges, as shown in Fig. 7.

The transfer matrix  $T$  is most easily defined by giving its sparse matrix decomposition

$$T = T_2 T_1, \quad T_k = \prod_{i=0}^{L-1} T_k^{(i)}, \quad (32)$$

where the matrix  $T_1^{(i)}$  encodes the interactions at plaquette  $i$  and  $T_2^{(i)}$  imposes the dimer constraint at vertex  $i$ . More precisely,  $T_1^{(i)}$  evolves  $\alpha_{2i+1}$  into  $\beta_{2i+1}$  and has matrix elements (we set  $W \equiv e^{-v/T}$ )

$$T_1^{(i)}(\alpha_{2i}\alpha_{2i+1} | \beta_{2i+1}\alpha_{2i+2}) = W(\alpha_{2i}\alpha_{2i+2} + \alpha_{2i+1}\beta_{2i+1}),$$

whereas  $T_2^{(i)}$  evolves  $\alpha_{2i}$  into  $\beta_{2i}$  and has matrix elements

$$T_2^{(i)}(\beta_{2i-1}\alpha_{2i} | \beta_{2i}\beta_{2i+1}) = \delta_{\beta_{2i-1}+\alpha_{2i}+\beta_{2i}+\beta_{2i+1}, 1}.$$

We have attempted to diagonalize  $T$  using the Bethe ansatz method, using a straightforward generalization of the working exposed in the preceding subsections but we failed to obtain a consistent determination of the scattering amplitudes  $S(z_i, z_j)$ . Most likely, this means that the interacting dimer model is not integrable. In the remainder of the paper, we therefore study the model using numerical and (non-rigorous) field theoretical methods.

## IV. NUMERICAL METHODS

Our numerical methods consist in MC simulations and exact diagonalization of the TM. We now describe these two methods in turn.

### A. Monte Carlo calculations

We use a MC directed-loop (or directed-“worm”) algorithm [19]. This method allows one to make nonlocal moves in the dimer configurations by changing the positions of dimers along a closed loop, which can be quite large. This results in small autocorrelation times in the MC process, and permits one to treat large systems (up to  $512 \times 512$  in this study). Moreover, the directed-loop algorithm captures the physics of test defects (monomers) in the dimer configuration as we discuss below. The algorithm indeed allows one to calculate monomer-monomer correlation functions; conversely, this indicates that the performance of the algorithm is dictated by the physical properties of test monomers in the different physical phases.

For the sake of completeness, we briefly describe below the algorithm following Ref. [19] and specifying minor details where our specific implementation differs. One MC sweep of the algorithm consists of the three following steps:

(1) The worm, which can be seen as constituted by two monomers (head and tail), is initially placed on top of a dimer configuration at a random site  $i=i_0$ .

(2) The site  $i$  is connected to a neighboring site  $j$  by a dimer in the background configuration [this dimer is noted  $(i,j)$ ]. The head of the worm is moved to  $j$  and the dimer  $(i,j)$  is removed, leaving the site  $j$  with no dimer attached to it. Out of the four neighbors of  $j$ , one (which we call  $k$ ) is selected according to a local detailed balance rule (see below). A dimer is put between  $j$  and  $k$ .

(3) If  $k=i_0$ , the worm is finished and we are left with a new valid dimer configuration. Otherwise, we rename  $i=k$  and go back to step 2.

How does the worm, sitting at site  $j$  (and coming from site  $i$ ), choose the site  $k$  where a dimer will be put in step 2? For this, we consider the *weights*  $w_{(ij)}$  (respectively,  $w_{(jk)}$ ) contributed to the partition function by a dimer located between sites  $i$  and  $j$  (respectively,  $j$  and  $k$ ). In the model of Ref. [19], each dimer is given a certain fugacity and thus contributes solely a certain weight to the partition function. In our model, the weight of a dimer  $(i,j)$  is given by  $w_{(ij)} = \exp(-v \cdot N_{ij}/T)$  where  $N_{ij} \in \{0,1,2\}$  is the number of nearest neighbors parallel to the dimer  $(i,j)$ . Once these weights are known, the probability  $P[(i,j) \rightarrow (j,k)]$  to select a given site  $k$  is imposed to satisfy a local detailed balance rule:

$$P[(i,j) \rightarrow (j,k)]w_{(ij)} = P[(j,k) \rightarrow (i,j)]w_{(jk)}. \quad (33)$$

This leads to a set of equations (“directed-loop” equations [19]) corresponding to all the possible values of local dimer configurations and the corresponding numbers  $N_{ij}$ . These equations are underdetermined, and we impose by experience [20,21] to minimize the bounce processes  $P[(i,j) \rightarrow (j,i)]$ , i.e., the case where the site  $k$  is chosen to be the origin site  $i$  (the worm backtracks in its own path, which is *a priori* quite useless). For the specific model of Ref. [19], a solution minimizing the bounce probabilities and satisfying the local detailed balance equation was found analytically. More generally, such a solution can always be found numerically with linear programming techniques [21]. Please note that at  $T=\infty$ , the worm simply performs a random walk in the

dimer configuration (more precisely, all the even steps in the walk are purely random, the odd ones are dictated by the underlying dimer configuration).

Taking a snapshot of the configuration during the worm construction shows that two test monomers have been inserted in the dimer configuration, and thus connect the behavior of the worm to the monomer correlation function. The fact that the worm walk is *locally* detailed balance actually imposes the histogram of the distance  $\mathbf{r}$  between the worm’s head and tail to be proportional (up to a small correction factor) to the monomer-monomer correlation function  $M(\mathbf{r})$  (see precise definition in Sec. VII). The proof of this statement can be worked out along the lines of Ref. [21]. The only subtlety is the following: the measurement of the correlation function is made at step 2, before the selection of the next site  $k$ . Since all the future dimer positions  $(j,k)$  are not equivalent (they will contribute differently to the partition function) and since the next dimer position is not yet decided, we have to correct the monomer-monomer correlation estimator by the inverse of the total weight contributed by all possible future positions, i.e., we increment the estimator of  $M(\mathbf{r})$  (with  $\mathbf{r}$  the position difference vector between sites  $i_0$  and  $j$ ) by  $W_j^{-1}$  where  $W_j = \sum_k w_{(jk)}$ . If all future position dimers are equivalent (as in the model of Ref. [19]), this factor is constant, and we can just simply identify the histogram of the distance  $\mathbf{r}$  between the worm’s head and tail to  $M(\mathbf{r})$ .

The worm algorithm therefore possesses the nice feature of being able to calculate  $M(\mathbf{r})$ , *even if monomers are not allowed in the model*. This also indicates that the worm algorithm performances is bound to follow the physics of monomers: if the monomers are confined, the worms will be short, resulting in a merely local algorithm—which is known to display poor performances (for example, ergodicity problems). If the monomers are deconfined, worms will be long and will update a massive number of dimers—resulting in small autocorrelation times.

The technical details of the MC calculations are as follows: simulations were performed on  $N=L \times L$  samples, up to  $L=160$  for the full  $T$  range, and up to  $L=512$  for correlation functions for a few chosen temperatures. PBCs are assumed. Each MC sweep is constituted by a number of worms such that all the links of the lattice are visited once on average by a worm. For each parameter set, a total between  $10^6$  and  $10^7$  sweeps was performed.

### B. Transfer matrix calculations

The TM for the interacting dimer model was defined above in Sec. III G. We shall henceforth suppose that the width  $L$  of the lattice strip is even; the periodic boundary conditions in the  $L$  direction are then compatible with the bipartiteness of the lattice. By virtue of the conservation law established in Sec. III B, the TM has a block diagonal structure, with each block corresponding to a fixed number of particles. It is convenient to define a “charge”  $Q$  corresponding to each block, as  $Q=L/2-n$ , where  $n$  is the number of particles. Also, we label the eigenvalues  $\Lambda_k^Q$  within each block in order of decreasing norm:  $|\Lambda_1^Q| \geq |\Lambda_2^Q| \geq \dots$

### 1. Correlation functions

For entropic reasons, the largest eigenvalue must be located in the  $Q=0$  block  $\Lambda_{\max}=\Lambda_1^0$ . By the Perron-Frobenius theorem, it corresponds to the unique eigenvector in which all entries are non-negative. Consider first a dimer covering of a strip of size  $L \times M$ , with free (respectively, periodic) boundary conditions in the  $M$  (respectively,  $L$ ) direction. Only the TM eigenvalues of the  $Q=0$  block will contribute to the corresponding partition function  $Z$ . Let us now modify the problem by marking  $Q_0 > 0$  vertices of the even sublattice in the bottom row, and  $Q_0$  vertices of the odd sublattice in the top row. In the modified problem, dimers are required to cover all unmarked vertices and none of the marked vertices. The TM eigenvalues contributing to the modified partition function  $Z_{Q_0}$  are then exactly those of the  $Q=Q_0$  block. (For  $Q_0 < 0$ , interchange the two sublattices and change the sign of  $Q_0$ .)

Physically, the marked vertices can be interpreted as monomer defects in the surrounding dimer environment. The ratios  $C_{Q_0}(M) \equiv Z_{Q_0}/Z$  define (unnormalized) correlation functions, measuring the correlations between the two groups of monomers, separated by a distance  $M$ . For  $M \gg L$  the correlations decay exponentially as  $C_{Q_0}(M) \sim (\Lambda_1^{Q_0}/\Lambda_1^0)^M$ .

If the system enjoys conformal invariance, this corresponds to an algebraic decay in the plane. More precisely, define the free energies per unit area as  $f_k^Q = L^{-1} \ln \Lambda_k^Q$ . The finite-size dependence [22]

$$f_1^0 - f_1^{Q_0} = \frac{2\pi X_{Q_0}}{L^2} + o(L^{-2}) \quad (34)$$

then defines a critical exponent  $X_{Q_0}$  whose interpretation reads as follows: let  $C_N$  be a dimer covering of an  $N \times N$  square with free boundary conditions (planar geometry), with two small regions of  $Q_0$  monomer defects, each region corresponding to a definite sublattice as above. Suppose that each region has an extent of the order of the lattice spacing and is far from the boundaries. Then the probability that the two regions are separated by a distance  $r$  satisfying  $1 \ll r \ll N$  is proportional to  $r^{-2X_{Q_0}}$ .

The corresponding conformal field theory (CFT) is further characterized by its central charge  $c$ , which is related to the finite-size dependence of  $\Lambda_{\max}$  as follows [23]:

$$f_1^0 = f_\infty + \frac{\pi c}{6L^2} + o(L^{-2}), \quad (35)$$

where  $f_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} f_1^0$  is the bulk free energy. While  $X_1$  determines the leading monomer-monomer correlation function, the leading dimer-dimer correlation can be obtained from Eq. (34) by replacing  $f_1^{Q_0}$  by  $f_2^0$ .

### 2. Numerical procedure

The leading eigenvalue of a given block  $Q$  is obtained by an iterative procedure (the so-called power method [24]) in which the relevant TM block  $T_Q$  is multiplied onto a vector of weights which is indexed by the basis states of that block. This vector can be taken initially as a single arbitrary basis

TABLE I. Dimensions of the various blocks  $T_Q$  of the transfer matrix, as functions of the strip width  $L$ .

| $L$         | 2 | 4  | 6  | 8   | 10   | 12    | 14    | 16     | 18      |
|-------------|---|----|----|-----|------|-------|-------|--------|---------|
| $\dim(T_0)$ | 4 | 16 | 76 | 384 | 2004 | 10672 | 57628 | 314368 | 1728292 |
| $\dim(T_1)$ | 1 | 8  | 48 | 272 | 1520 | 8472  | 47264 | 264224 | 1480608 |
| $\dim(T_2)$ |   | 1  | 12 | 96  | 660  | 4224  | 26012 | 156608 | 929700  |
| $\dim(T_3)$ |   |    | 1  | 16  | 160  | 1304  | 9520  | 65056  | 426000  |
| $\dim(T_4)$ |   |    |    | 1   | 20   | 240   | 2268  | 18688  | 141156  |

state, which is known to belong to the block  $Q$ . The eigenvalue  $\Lambda_1^Q$  is then related to the asymptotic growth of the norm of the iterated vector.

This procedure has multiple practical advantages: (i) only the iterated vector, and not  $T_Q$  itself, needs to be stored in memory, (ii) using the factorization (32) one can take advantage of sparse matrix techniques, so that one iteration is performed in time  $\sim L \dim(T_Q)$ , (iii) the complete state space corresponding to  $T_Q$  is automatically generated in the iterative process. To store and access the weights in an efficient manner (i.e., in constant time), standard hashing techniques are employed.

To obtain higher eigenvalues,  $\Lambda_k^Q$  with  $k \geq 2$ , one can similarly iterate a set of vectors which is kept mutually orthogonal at the end of each iteration [24]. Alternatively, one can in some cases use the symmetry of the corresponding eigenvectors. As an example of this, note that the eigenvectors corresponding to  $\Lambda_1^0$  (respectively,  $\Lambda_2^0$ ) are even (respectively, odd) upon shifting the lattice by one unit in the horizontal direction.

The computational effort needed to obtain the largest eigenvalue can be judged from Table I which shows the size of the block  $T_0$  for various strip widths  $L$ . Note that these numbers increase much slower than the naive estimate  $4^L$ , that one would obtain by considering the possible occupation numbers while ignoring the dimer constraint and the value of  $Q$ . We limited the present study to  $L_{\max}=18$ , although a couple of more sizes could have easily been obtained.

The values of  $\dim(T_Q)$  can easily be obtained analytically using generating function techniques. The result is that  $\dim(T_Q)$  for a given (even) value of  $L$  is the coefficient in the term  $q^Q$  in the polynomial expansion of

$$\left( \frac{1+4q+q^2+(1+q)\sqrt{1+6q+q^2}}{2q} \right)^{L/2} + \left( \frac{1+4q+q^2-(1+q)\sqrt{1+6q+q^2}}{2q} \right)^{L/2}. \quad (36)$$

The dimension  $\dim(T) = \sum_{Q=-L/2}^{L/2} \dim(T_Q)$  of the total TM is then simply

$$\dim(T) = (1+\sqrt{2})^L + (1-\sqrt{2})^L. \quad (37)$$

This is also the dimension of the (unique block of the) TM when monomers are allowed; see Sec. VIII B 3 below.

## V. COLUMNAR ORDER AT LOW TEMPERATURE

### A. Possible crystalline orderings

We present here MC results concerning the nature of the low- $T$  phase. From the energy form, we expect at low- $T$  a proliferation of plaquettes containing parallel dimers. A natural expectation is to have a single low- $T$  phase breaking the same symmetries as the ground states in Fig. 3: we refer to such an order breaking both translation and  $\pi/2$  rotation symmetries as columnar order. On the other hand, from our knowledge of QDM, we know that another type of order could also be stabilized: plaquette order. We describe more precisely this order below. As to discriminate which kind(s) of phase(s) is (are) found at low  $T$  in the dimer model Eq. (1), we will introduce three different order parameters.

#### 1. Description of plaquette ordering

The QDM on the square lattice is believed to have some plaquette long-ranged order in some finite region of parameter space at  $T=0$ . In such a symmetry broken phase, one quarter of the square plaquettes are spontaneously selected to host a pair of (quantum-mechanically) resonating dimers. The resulting state breaks translation invariance but is invariant under  $\pi/2$  rotation with respect to the center of any plaquette (see Ref. [25] for an illustration). In the quantum system, a plaquette phase has a (slightly) higher potential energy than a columnar crystal, but the stronger dimer resonances lower the plaquette state energy through the kinetic terms of the quantum Hamiltonian. Of course, in our classical model, kinetic terms are absent. Still, the thermal fluctuations of the dimer locations around each “flippable” plaquette allow to gain some entropy (compared to that of a columnar crystal) and lower the free energy. The competition between entropy and potential energy in the classical system is analogous to that between kinetic and potential terms in the QDM. As the plaquette phase is likely to be realized at  $T=0$  in the QDM, it is *a priori* also a natural candidate in the (finite temperature) phase diagram of the classical model.

In a plaquette phase, two distant flippable plaquettes are almost uncorrelated: if the first one is dimerized, say, horizontally, the second can be found in both states with equal probability (hence the  $\pi/2$  rotation symmetry). This is not true for nearby—and necessarily correlated—plaquettes, thus defining some finite correlation length. A columnar state can be viewed as a plaquette phase in which this plaquette-plaquette correlation length has grown to infinity so that all the plaquettes of the lattice simultaneously adopt the same orientation. A typical plaquette configuration is displayed in Fig. 8. The plaquette phase breaks translational symmetry but not  $\pi/2$ -rotational symmetry. A possible scenario (eventually ruled out by the numerical results, see below) could therefore be melting of the columnar crystal through an intermediate plaquette phase with partial restoration of the rotation symmetry.

#### 2. Order parameters

*Complex columnar order parameter.* We first use the definition (proposed in Ref. [26]) of a complex columnar order parameter  $\Psi_{\text{col}}(\mathbf{r})$  at site  $\mathbf{r}$

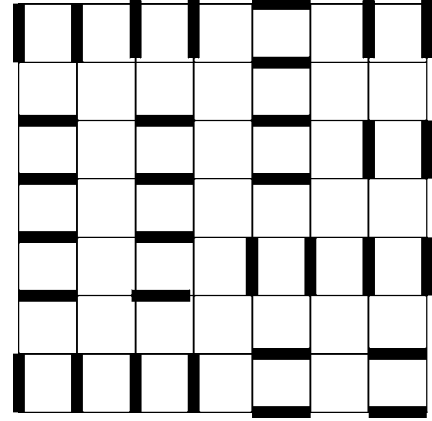


FIG. 8. A typical plaquette configuration.

$$\Psi_{\text{col}}(\mathbf{r}) = (-)^{r_x}[\hat{n}(\mathbf{r} + \mathbf{x}/2) - \hat{n}(\mathbf{r} - \mathbf{x}/2)] + i(-)^{r_y}[\hat{n}(\mathbf{r} + \mathbf{y}/2) - \hat{n}(\mathbf{r} - \mathbf{y}/2)], \quad (38)$$

where  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  are unit vectors, and  $\hat{n}$  is the dimer bond occupation number [i.e.,  $\hat{n}(\mathbf{r} + \mathbf{x}/2)$  is 1 if there's a dimer between site  $\mathbf{r}$  and site  $\mathbf{r} + \mathbf{x}$ ]. We define the associated columnar susceptibility as

$$\chi_{\text{col}} = \frac{4}{L^2} \left( \left\langle \left| \sum_{\mathbf{r} \in A} \Psi_{\text{col}}(\mathbf{r}) \right|^2 \right\rangle - \left\langle \left| \sum_{\mathbf{r} \in A} \Psi_{\text{col}}(\mathbf{r}) \right| \right\rangle^2 \right), \quad (39)$$

where the sums are taken only over the sublattice  $A$ . Another interesting quantity is the columnar Binder [27] cumulant

$$B_{\text{col}} = 1 - \frac{\langle |\Psi|^4 \rangle}{2 \langle |\Psi|^2 \rangle^2}. \quad (40)$$

This Binder cumulant saturates to 1/2 for a long-range ordered phase, and scales to 0 in the thermodynamic limit for a phase with no long-range order, due to the Gaussian nature of the fluctuations of this order parameter. As was already noted in Ref. [25], this order parameter (and associated quantities) is sensitive to translation symmetry breaking and a nonzero expectation value detects both columnar and plaquette ordering. Looking at the phase of  $\Psi_{\text{col}}$  can in principle discriminate between the two phases: however, the phase turns out to be a noisy observable in our simulations and has no practical use. We will therefore use other indicators.

*Dimer rotation symmetry breaking.* At sufficiently high temperatures, the system is symmetric under  $\pi/2$  rotations so that the average number of vertical dimers is equal to the average number of horizontal ones. This also holds in a plaquette phase, but is no longer true for a columnar state. A convenient way of monitoring the  $\pi/2$ -rotation symmetry [25] is the dimer symmetry breaking

$$D = 2/L^2 |N^c(\underline{\quad}) - N^c(\mathbf{I})|, \quad (41)$$

where  $N^c(\underline{\quad})$  [respectively  $N^c(\mathbf{I})$ ] is the number of horizontal (respectively, vertical) dimers in the configuration  $c$ . Normal

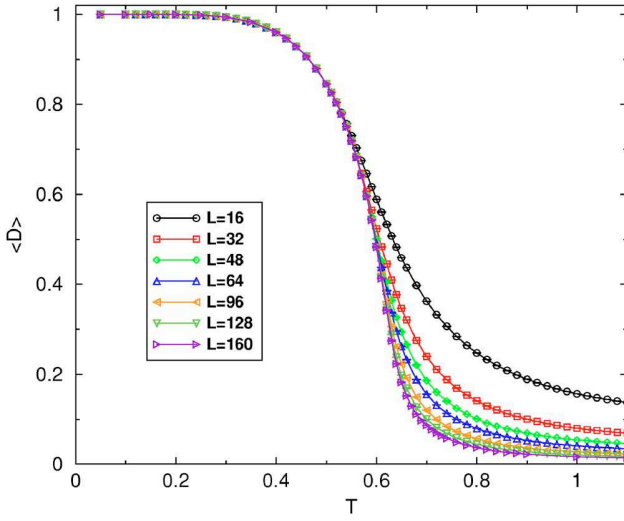


FIG. 9. (Color online) Dimer symmetry breaking order parameter  $\langle D \rangle$  versus temperature  $T$  for different system sizes.

ization is such that  $D=1$  in the pure columnar states of Fig. 3. It is also useful to define the corresponding susceptibility  $\chi_D = L^2(\langle D^2 \rangle - \langle D \rangle^2)$  and Binder cumulant  $B_D = 1 - \langle D^4 \rangle / (3\langle D^2 \rangle^2)$ .

*Plaquette order parameter.* To discriminate positively the plaquette phase, we also use the following plaquette order parameter:

$$P = 2/L^2 \left| \sum_{\mathbf{p}} (-)^{p_x + p_y} v_{\mathbf{p}} \right|, \quad (42)$$

where the sum is over all plaquettes of the lattice with coordinates  $\mathbf{p}=(p_x, p_y)$ , and  $v_{\mathbf{p}}=1$  if the plaquette with coordinates  $\mathbf{p}$  contains two parallel dimers ( $v_{\mathbf{p}}=0$  otherwise). This quantity can also be seen as a generalized energy at wave vector  $(\pi, \pi)$ . The staggered factor  $(-)^{p_x + p_y}$  is essentially constant in a pure plaquette state, and makes the sum vanish in a columnar state. The expectation value  $\langle P \rangle$  of the plaquette order parameter is then 0 in the columnar phase, and saturates to a finite value in the thermodynamic limit in a plaquette phase. The associated plaquette susceptibility is  $\chi_P = L^2(\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2)$  and plaquette Binder cumulant  $B_P = 1 - \langle P^4 \rangle / (3\langle P^2 \rangle^2)$ .

## B. Numerical results

### 1. Dimer rotation symmetry breaking

The expectation value  $\langle D \rangle$  is displayed versus  $T$  in Fig. 9 and clearly saturates to its maximum values at low  $T$ . The curves for different system sizes start to differ at a temperature around  $T \sim 0.6$  and in order to detect more finely the critical temperature  $T_c$ , we use the corresponding susceptibility  $\chi_D$  and Binder cumulant  $B_D$ .

$\chi_D$  shows a pronounced peak around  $T \sim 0.63$  (see Fig. 10), signaling the onset of long-range order. Noticing that the temperature at which the susceptibility peaks slightly drifts

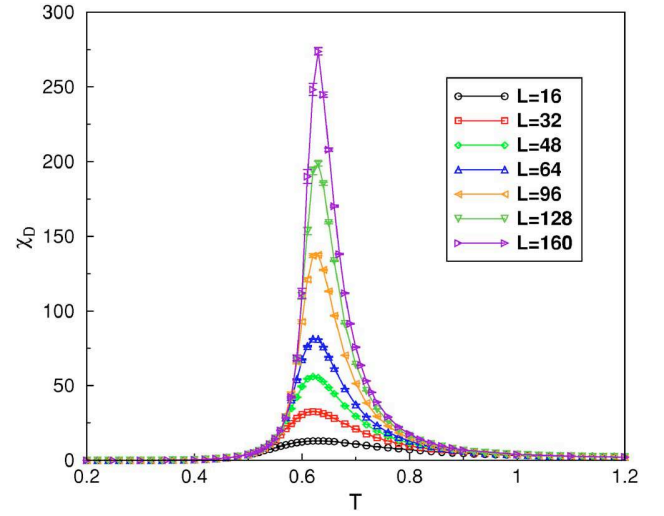


FIG. 10. (Color online) Dimer symmetry breaking susceptibility  $\chi_D$  versus temperature  $T$  for different system sizes.

when increasing system size, we defer an estimation of  $T_c$  in favor of the Binder cumulant, which is known to allow accurate determinations of  $T_c$ .

The Binder cumulant  $B_D$  saturates in the thermodynamic limit to  $2/3$  at low  $T$  (see Fig. 11) and we observe a crossing of the curves for different system sizes for both cumulants at a unique temperature  $T_c$ , signaling the entrance into the low  $T$  columnar phase. The critical temperature is estimated from this curve to be  $T_c = 0.65(1)$ . The results of this section also indicate that plaquette order is not present below  $T_c$ , but leave open the possibility of a plaquette phase at higher  $T$ .

### 2. Plaquette correlations

The expectation value of the plaquette order parameter  $\langle P \rangle$  shows a nonmonotonous behavior as a function of  $T$  (see Fig. 12), with an order parameter peaking close to  $T_c$

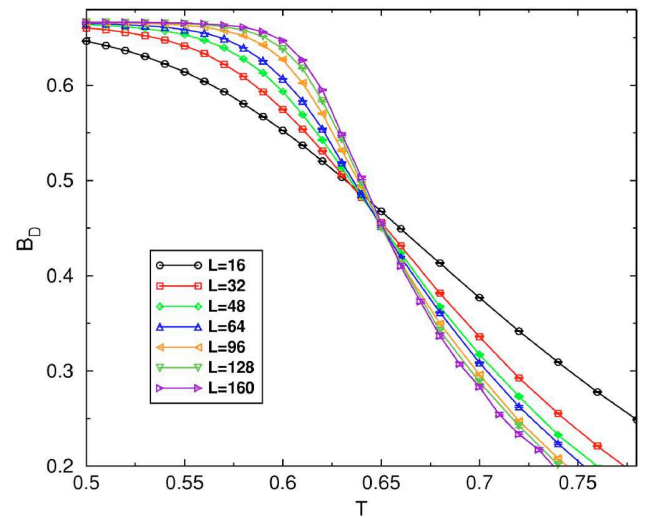


FIG. 11. (Color online) Dimer symmetry breaking Binder cumulant  $B_D$  versus temperature  $T$  for different system sizes.



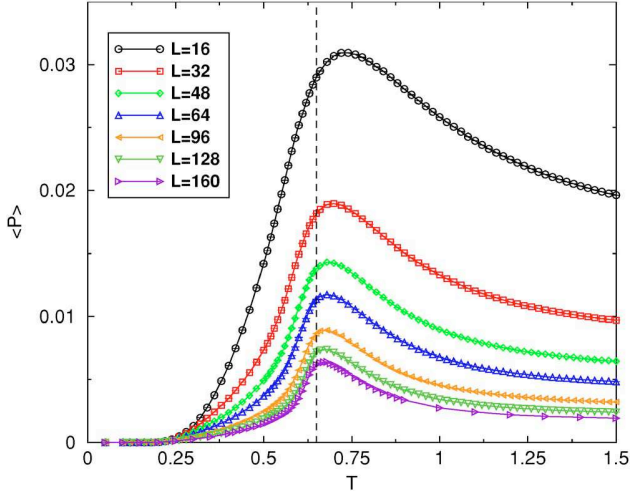


FIG. 12. (Color online) Plaquette order parameter  $\langle P \rangle$  versus temperature  $T$  for different system sizes. The dashed line denotes  $T_c=0.65(1)$  as estimated by the dimer symmetry breaking Binder cumulant.

$\sim 0.65$  from above for all system sizes. One also immediately notes that  $\langle P \rangle$  has overall small values and decreases with system size. The plaquette susceptibility  $\chi_P$  peaks slightly above  $T_c$  (see Fig. 13): we interpret this as plaquette correlations being the strongest just before the entrance into the columnar phase. Even though the  $\chi_P$  values are very small values as compared to other typical susceptibilities (see, for example, Fig. 10), long-range plaquette order could survive in the thermodynamic limit. This is clearly ruled out by the behavior of the plaquette Binder cumulant (see Fig. 14) which is nonmonotonous as well:  $B_P$  starts to rise from its high- $T$  zero value when decreasing temperature and suddenly drops down to zero at a temperature slightly above  $T_c$ . This excludes long-range plaquette order.

We conclude that (strong) plaquette correlations are present, start to develop as one decreases  $T$ , peak just above

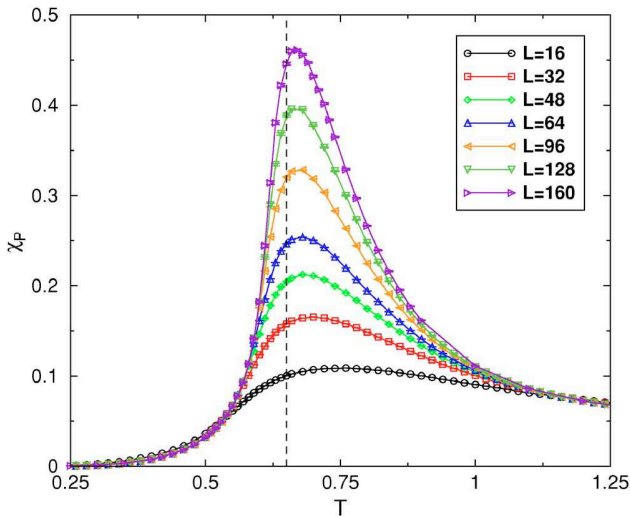


FIG. 13. (Color online) Plaquette susceptibility  $\chi_P$  versus temperature  $T$  for different system sizes. The dashed line denotes  $T_c = 0.65(1)$ .

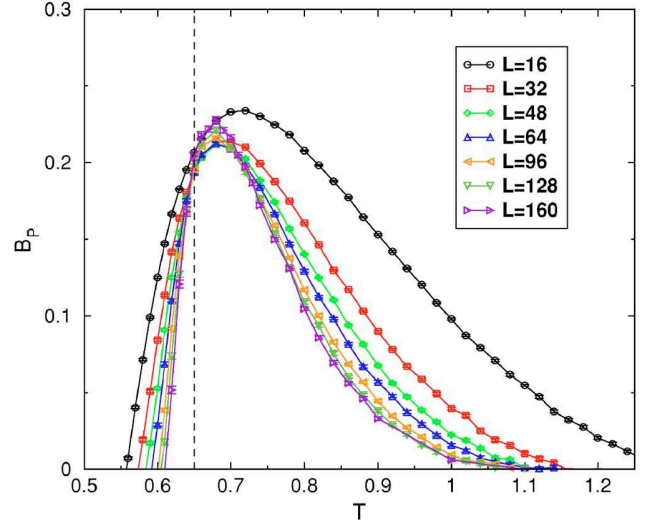


FIG. 14. (Color online) Plaquette Binder cumulant  $B_P$  versus temperature  $T$  for different system sizes. The dashed line denotes  $T_c=0.65(1)$ .

$T_c$ , but do not form a true thermodynamic phase as they are suddenly overtaken by columnar order. However, as we show in the next section, these correlations possibly “pollute” the finite-size behavior of the complex columnar order parameter.

### 3. Complex columnar order parameter

The columnar order parameter  $\langle |\Psi_{\text{col}}| \rangle = \frac{2}{L^2} \langle |\sum_{\mathbf{r} \in A} \Psi_{\text{col}}(\mathbf{r})| \rangle$  is displayed in Fig. 15 for different system sizes (from  $L=16$  to  $L=160$ ). One clearly sees order setting in at low  $T$ , and the curves for different  $L$  start to separate roughly around  $T \sim 0.6$ . To determine more precisely the critical point, we inspect the behavior of the columnar susceptibility [Eq. (39) and Fig. 16] and Binder cumulant [Eq. (40) and Fig. 17].

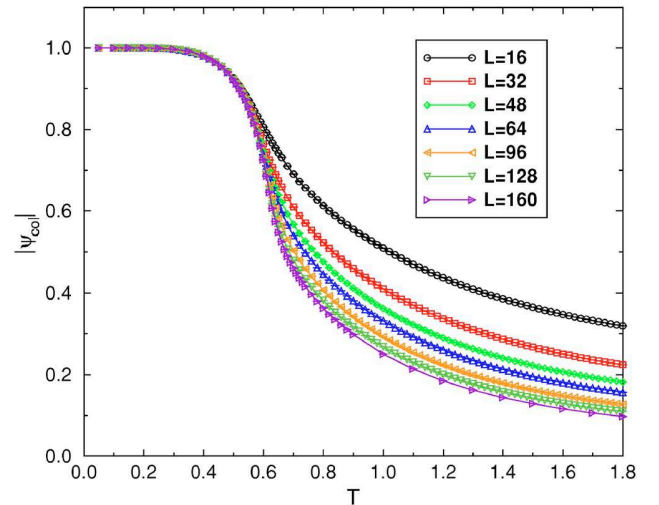


FIG. 15. (Color online) Columnar order parameter  $\langle |\Psi_{\text{col}}| \rangle$  as a function of temperature  $T$  for different system sizes.

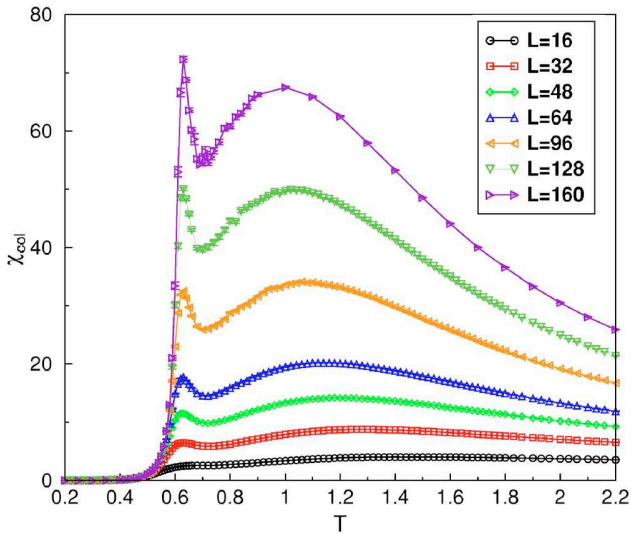


FIG. 16. (Color online) Columnar susceptibility  $\chi_{\text{col}}$  as a function of temperature  $T$  for different system sizes.

The columnar susceptibility has an unexpected behavior. It exhibits two peaks: the first is quite sharp and localized around  $T \sim 0.63$ , and the second is much broader around  $T \sim 1$ . It is also to be noted that whereas for small system sizes ( $L \leq 96$ ), the first peak is smaller than the second one, the tendency is inverted for the two largest system sizes. This could mean that the second peak actually saturates to a finite value in the thermodynamic limit. Another possible scenario is that the two peaks merge, which is not unlikely noticing that the positions of the maximum of the second peaks shift toward lower  $T$  when increasing  $L$ . Unfortunately, the currently available system sizes do not allow us to draw definitive conclusions on the scaling behaviour of  $\chi_{\text{col}}$ .

The columnar Binder cumulant (Fig. 17) also displays unusual features: a very flat pseudocrossing of the curves for different  $L$  is observed around  $T \sim 1.8$  (see zoom on left inset

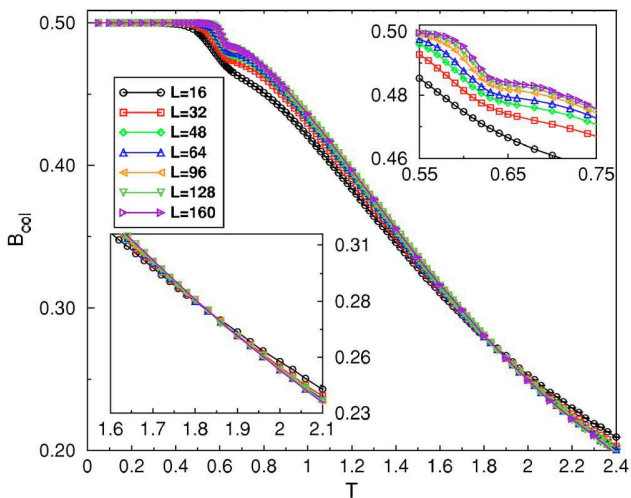


FIG. 17. (Color online) Columnar Binder cumulant  $B_{\text{col}}$  as a function of temperature  $T$  for different system sizes. Right inset: Anomaly near  $T \sim 0.63$ . Left inset: Pseudocrossing around  $T \sim 1.8$ .

of Fig. 17) and a marked anomaly around  $T \sim 0.63$  (see zoom on right inset). A crossing of curves corresponding to different system sizes for a Binder cumulant usually denotes a transition to a long-range ordered phase. However, the crossing observed here is very flat and it is actually almost impossible within the statistical accuracy to locate a single crossing point for the three largest samples. The anomaly around  $T \sim 0.63$  is particularly singular and we are not aware of such a behavior being reported for a Binder cumulant in the literature. The fact that two singularities are observed both in  $\chi_{\text{col}}$  and  $B_{\text{col}}$  could be interpreted at first glance as signs of an intermediate phase. However, given our previous findings of strong but no long-range ordered plaquette correlations, it appears likely that the second feature at high  $T$  actually disappears in the thermodynamic limit, whereas the first one around  $T \sim 0.63$  subsists. Indeed, whereas both the columnar susceptibility and Binder cumulant are marked at the lowest temperature, the temperature at which  $\chi_{\text{col}}$  peaks is different from the one at which  $B_{\text{col}}$  shows a crossing.

We believe that the plaquette correlations found in Sec. V B 2 affect the finite size behavior of other observables and are in particular responsible for the behaviors observed in the columnar susceptibility and Binder cumulant. The fact that strictly speaking,  $\chi_P$  does not peak where the second peak in  $\chi_{\text{col}}$  is present (even though the latter drifts with system size) might indicate that other types of correlations are also present above  $T_c$ . In conclusion of this section, we find that the model Eq. (1) shows a unique transition to a columnar order at  $T_c = 0.65(1)$  with no intermediate phase, but with strong plaquettes correlations above  $T_c$ .

## VI. NATURE OF THE PHASE TRANSITION

The model (1) displays a phase transition at  $T_c = 0.65(1)$  separating a low  $T$  columnar phase from a high  $T$  phase (that we will describe more carefully in Sec. VII). We now investigate the nature of this phase transition.

### A. Energy cumulant

We first plot in Fig. 18 the behavior versus temperature  $T$  of the energy cumulant [28]

$$V = 1 - \frac{\langle E^4 \rangle}{3\langle E^2 \rangle^2}. \quad (43)$$

In both a disordered and in an ordered phase, this cumulant saturates to  $2/3$  in the thermodynamic limit [28]. This is also the case at the critical point for a second order phase transition (even though the energy distribution is not Gaussian), whereas for a first order transition, it admits a nontrivial minimum (different from  $2/3$ ) in the thermodynamic limit [28]. We are not aware of any predictions for a KT transition.

Our results for  $V(T)$  show a clear dip close to the critical temperature  $T_c = 0.65(1)$  for all system sizes, but this minimum scales to  $2/3$  in the thermodynamic limit as can be clearly seen in the inset of Fig. 18. These results exclude a first order transition.

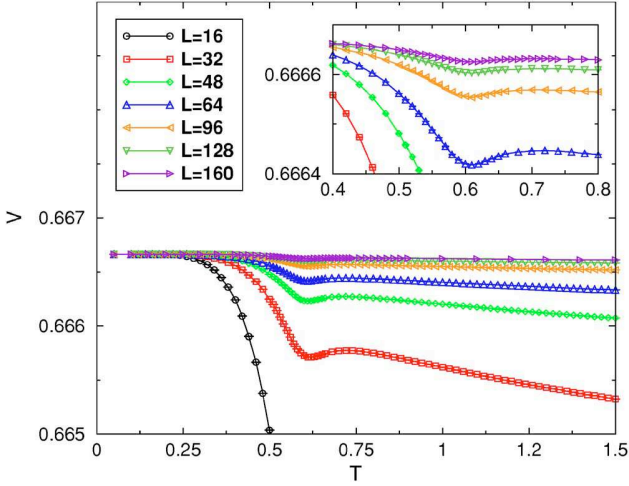


FIG. 18. (Color online) Energy cumulant  $V$  versus temperature  $T$  for different system sizes. Inset: zoom on the large size samples.

### B. Specific heat

We now consider the second cumulant of the energy, i.e., the specific heat per site, defined as

$$\frac{C_v}{N} = \frac{1}{N} \frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{T^2}. \quad (44)$$

The specific heat per site shows a pronounced peak which does not diverge in the thermodynamic limit (see Fig. 19 and its inset). We can see that this peak is located at a temperature  $T \sim 0.59$  different from the critical temperature  $T_c = 0.65(1)$ , denoted by a dashed line in Fig. 19. For a second-order phase transition, we would have expected either a divergence of the specific heat at  $T_c$  (if the critical exponent  $\alpha > 0$ ) or a cusp (for  $\alpha < 0$ ). Our results show that  $C_v$  is completely featureless at  $T_c$ : this is typical of a Kosterlitz-Thouless transition. We will see in the following sections

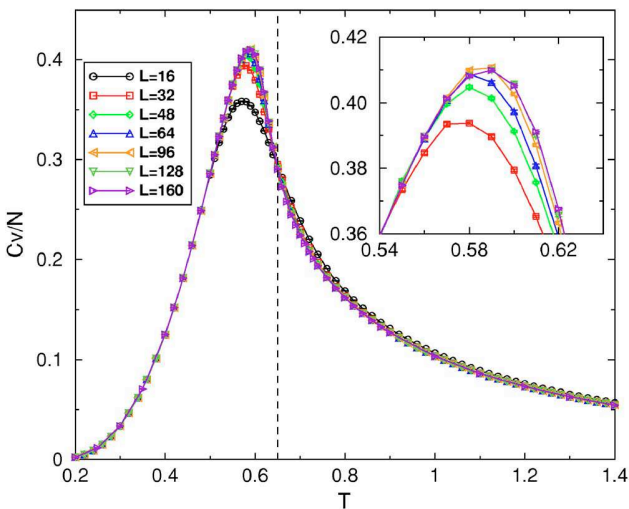


FIG. 19. (Color online) Specific heat per site  $C_v/N$  versus temperature  $T$  for different system sizes. The dashed line indicates  $T_c = 0.65(1)$ . Inset: zoom on the specific heat peak.

that this is naturally expected noticing the nature of the high-temperature phase that we now address.

## VII. HIGH-TEMPERATURE PHASE

It was demonstrated more than 40 years ago that the  $T = \infty$  point of our model (which is the classical dimer covering of the square lattice) is critical: the system possesses correlations functions that decay algebraically with distance [4]. In this section we consider the fate of various correlation functions in the whole high- $T$  region  $]T_c, \infty[$ .

### A. Dimer-dimer correlation functions

We have calculated two types of dimer-dimer correlation functions in the MC simulations. Both types concern dimers which are chosen for simplicity in the same orientation. We take horizontal dimers without loss of generality. The first correlator which we dub “longitudinal” is the connected correlation function of two horizontal dimers on the same row separated by a distance  $x$ :

$$G^l(x) = \langle \hat{n}_-(\mathbf{r}) \hat{n}_-[\mathbf{r} + (x, 0)] \rangle - 1/16, \quad (45)$$

where  $\hat{n}_-(\mathbf{r}) = 1$  for a horizontal dimer at site  $\mathbf{r}$ , and 0 otherwise. The constant  $1/16$  stands for the dimer density squared. The second one is the “transverse” correlation function of two dimers separated by a distance  $x$  on the same column

$$G^t(x) = \langle \hat{n}_-(\mathbf{r}) \hat{n}_-[\mathbf{r} + (0, x)] \rangle - 1/16. \quad (46)$$

At  $T = \infty$ , the exact calculations of Ref. [4] give the asymptotic results

$$G^l(x) \sim (-)^x \frac{1}{\pi^2 x^2} + O(x^{-3}) \quad (47)$$

and

$$G^t(x) \sim \frac{1}{\pi^2 x^2} + O(x^{-3}), \quad x \text{ odd}, \quad (48)$$

$$\sim -\frac{1}{\pi^2 x^4} + O(x^{-6}), \quad x \text{ even}. \quad (49)$$

For all finite  $T \geq T_c$ , we find that the longitudinal correlation function  $G^l(x)$  remains staggered, and that it decays algebraically, with a decay exponent  $\alpha_d$  that varies continuously with the temperature  $T$ :

$$G^l(x) \sim (-)^x A(T) x^{-\alpha_d(T)} \quad (50)$$

for large  $x$  [with  $A(T)$  an amplitude]. In Fig. 20, we represent  $(-)^x G^l(x)$  for four different  $T = 1, 2, 3$  and  $T = \infty$  on a log-log scale to emphasize the power-law decay. The algebraic decays are eventually cut around  $L/2$  due to the PBC (system size is here  $L = 512$ ). The value of the decay exponent  $\alpha_d(T)$  can be estimated from these plots, however the symmetry around  $L/2$  due to the PBC makes a high-precision determination of the exponent difficult, since it would depend on the range of distances used in the fit. We will use alternative

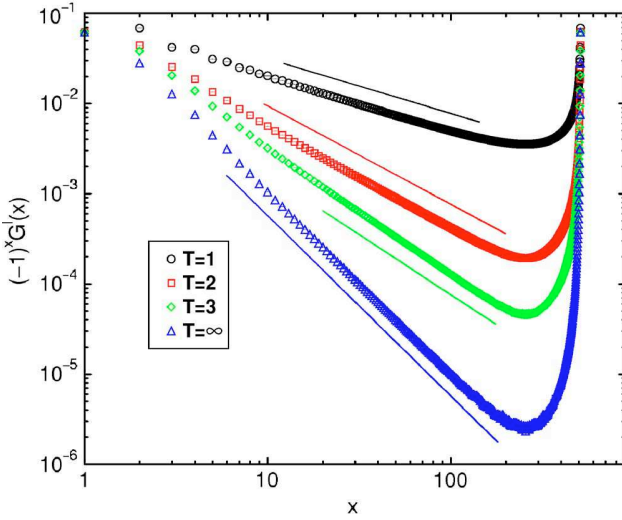


FIG. 20. (Color online) Staggered longitudinal dimer-dimer correlation function  $(-1)^x G^l(x)$  versus distance  $x$  between dimers for four different temperatures  $T$  (log-log scale). The straight lines correspond to decay exponents  $\alpha_d(T)$  calculated in Sec. VIII.

methods (TM calculations and winding fluctuations) in Sec. VIII to estimate decay exponents. To show that the different ways of estimating the decay exponents are consistent, we have plotted in Fig. 20 lines corresponding to the decay exponents found in Sec. VIII [at  $T=\infty$ , we take the exact result  $\alpha_d(T=\infty)=2$ ]. These lines are in perfect agreement with the first part of the correlation function  $(-1)^x G^l(x)$  which is not affected by the periodicity.

In Fig. 21, we plot the transverse correlation function  $G^t(x)$  for the same  $T$ . We also find here a power-law decay with the same exponent  $\alpha_d(T)$  as for the longitudinal corre-

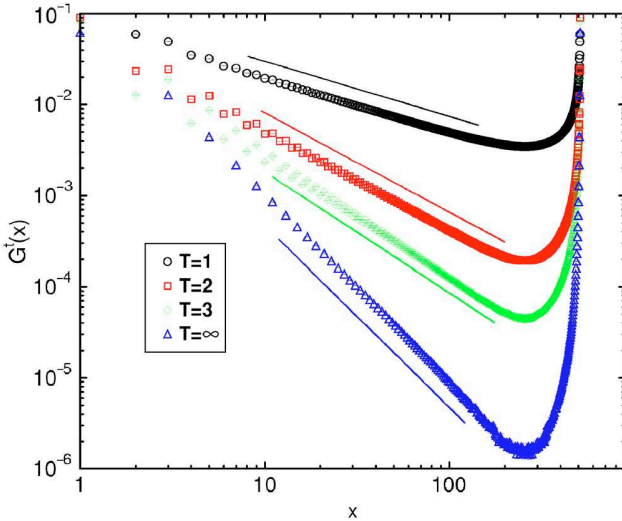


FIG. 21. (Color online) Transverse dimer-dimer correlation function  $G^t(x)$  versus distance  $x$  between dimers for four different temperatures  $T$  (log-log scale). The straight lines correspond to decay exponents  $\alpha_d(T)$  calculated in Sec. VIII. For the  $T=\infty$  curve, the results for even  $x$  have been omitted [as they are negative—see Eq. (49)].

lation function [ $(-1)^x G^l(x)$  and  $G^l(x)$  essentially coincide for large  $x$ ]. Small deviations can, however, be found at small distances (see  $x < 10$  in Fig. 21), where the data for odd or even  $x$  do not exactly coincide. This odd/even distinction is already present in the  $T=\infty$  case—see Eqs. (48) and (49). We find that  $G^t(x)$  is well fitted by the expression

$$G^t(x) \sim A(T)x^{-\alpha_d(T)}, \quad x \text{ odd}, \quad (51)$$

$$\sim A(T)x^{-\alpha_d(T)} + B(T)x^{-\omega(T)}, \quad x \text{ even}, \quad (52)$$

where  $A(T)$  is the same amplitude as the one found for the longitudinal correlation function,  $B(T)$  is a negative constant and  $\omega(T)$  is a subleading correction exponent for even  $x$ . Our data are compatible with  $\omega(T) \sim 2$ .

### B. Monomer-monomer correlation function

In addition to dimer-dimer correlation functions, it is useful to consider the correlator between monomers, which are defined as sites not paired to any neighboring site by a dimer. Monomers are by definition absent in the model, however, we can calculate the properties of two test monomers in a background of dimers by considering the monomer-monomer correlation function [4, 19, 29]

$$M(\mathbf{x}) \sim Z(\mathbf{x}), \quad (53)$$

where  $Z(\mathbf{x})$  denotes the number of possible configurations where the two test monomers are separated by a vector  $\mathbf{x}$ . Note that this is exactly the correlation function  $C_{Q_0}(M)$  defined in the TM Sec. IV B (we changed notations from  $M$  to  $\mathbf{x}$  and  $C_{Q_0}$  to  $M$  for consistency with previous works). For a bipartite lattice such as the square lattice,  $M(\mathbf{x})=0$  if monomers are located on the same sublattice. From now on, we will consider only monomers on opposite sublattices. To simplify calculations, we focus on the case  $\mathbf{x}=(x, 0)$  (two monomers on the same row). The proportionality constant is taken such that  $M(1)=1$  [4, 19].

At  $T=\infty$ , the exact result  $M(x) \sim x^{-1/2}$  holds in the thermodynamic limit [4]. At finite  $T$ , we can estimate  $M(x)$  with high-precision thanks to the worm algorithm (see Sec. IV A). Results for  $M(x)$  are displayed versus  $x$  on a log-log scale in Fig. 22 for the four temperatures used for the dimer-dimer correlation functions: we also observe here power laws, with an exponent  $\alpha_m(T)$  that appears to vary continuously with  $T$ :

$$M(x) \sim x^{-\alpha_m(T)}. \quad (54)$$

For the same technical reasons as for the dimer-dimer correlation functions, we do not estimate directly from this plot the values of  $\alpha_m(T)$ , as the error bars would be too large. We will obtain precise estimates of  $\alpha_m(T)$  in Sec. VIII, which we already display as straight lines in Fig. 22 to show the good agreement with the real-space measures of  $M(x)$ . As will be understood, we note that whereas  $\alpha_d(T)$  decreases when lowering  $T$ ,  $\alpha_m(T)$  increases (this can be clearly seen with the identical color chart of Figs. 20–22).

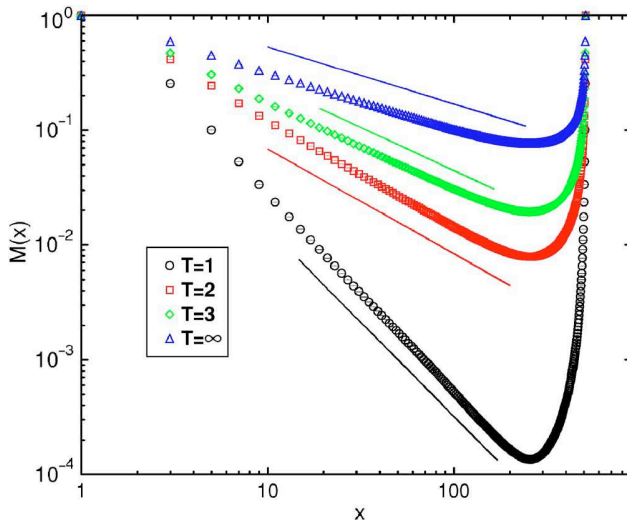


FIG. 22. (Color online) Monomer-monomer correlation function  $M(x)$  versus distance  $x$  between monomers for four different temperatures ( $T$  log-log scale). The straight lines correspond to decay exponents  $\alpha_m(T)$  calculated in Sec. VIII. For the  $T=\infty$  curve, we used the exact result  $\alpha_m(T=\infty)=1/2$ .

### VIII. THEORETICAL INTERPRETATION

We recapitulate the MC results on the finite- $T$  behavior of the interacting dimer model Eq. (1) with  $v < 0$ : we observe a transition from a high- $T$  critical phase with continuously varying critical exponents to a low- $T$  crystalline phase of dimers. Even though other types of correlations are present (such as plaquette correlations), there is no intermediate phase in between. The transition is found to be of KT type. The existence of the high- $T$  critical phase, the floating exponents, the KT transition and the dimensionality  $d=2$  of the problem naturally suggest CG physics [11]. In the following, we will indeed describe the (nonexact) mapping of the interacting dimer model to a CG that will account for all the above findings. Moreover, thanks to results of CFT and the use of TM calculations, we will be able to determine with high-precision the critical exponents  $\alpha_d(T)$  and  $\alpha_m(T)$ , and the associated CG constant.

The following section will also have the advantage of reconciling different points of view on the model Eq. (1). Readers familiar with height models will find an alternative derivation of the effective height action for dimer configurations. For readers familiar with CG physics, the TM calculations presented here will allow a high precision test of the CG predictions, with a precision probably not reachable in other models. For readers interested in the dimer enumeration problem at  $T=\infty$ , an interesting relationship between dimer winding numbers fluctuations and CG constant will be derived in passing. Finally, for readers coming from the quantum condensed matter community, these results have profound implications for the high- $T$  regime of QDM, as will be discussed in Sec. IX.

#### A. Mapping to a Coulomb gas

##### 1. Height model

To obtain a CG picture of the interacting dimer model, we first use a height description of dimer configurations [6].

Each plaquette of the square lattice is assigned a real-valued height  $z$  in the following way: going counterclockwise around an even (respectively odd) site on the square lattice,  $z$  changes by  $+3/4$  if the bond crossed is occupied by a dimer and by  $-1/4$  if it is empty (respectively  $-3/4$  and  $+1/4$ ). These units are chosen such that a monomer on the even (respectively odd) sublattice corresponds to a dislocation of 1 (respectively,  $-1$ ) in the height. To fix the absolute height, one fixes the plaquette at the origin to have, say,  $z(0)=0$ . By integrating out the short distance fluctuations of  $z(r)$ , one obtains an effective action  $S_{\text{eff}}[h]$  for the coarse-grained height  $h(r)$ , defined in the continuum, which corresponds to the long-wavelength modes of  $z(r)$ .

*Locality.* The form of this effective action is constrained by the fact that the microscopic model is local in terms of the dimer degrees of freedom. Consider a finite area  $A$  of the system and some fixed coarse-grained height  $h(r)$  for  $r \in A$ . The associated free energy [obtained by summing over all microscopic dimer configurations compatible with the given  $h(r)$ ] should not depend on the dimer positions outside  $A$ . However, by shifting the dimers along a closed loop, the dimer configuration inside is unchanged but the microscopic height  $z(r)$  is uniformly shifted by  $+1$  (or  $-1$ ) for all the plaquettes located inside the loop (and so for the coarse grained height  $h$ ). Doing so for a large loop surrounding  $A$ , one therefore shows that  $S_{\text{eff}}$  must satisfy  $S_{\text{eff}}[h]=S_{\text{eff}}[h+1]$  for any physical  $h$ .

*$\pi/2$  rotation symmetry.* Consider a large but finite square area  $A$  of the lattice with linear even size  $L$ . Outside  $A$ , the dimers are assumed not to cross the boundary of  $A$ . Let  $z(r)=z_0+d(r)$  be the height inside  $A$  and  $z_0$  the height of the, say, lower left corner of  $A$  [30]. Whatever the dimer locations inside  $A$  (compatible with the constraint above), one can move the dimers inside  $A$  by a  $\pi/2$  rotation  $\mathcal{R}$  with respect to its central plaquette.  $z$  is unchanged outside  $A$  but for  $r \in A$  the height is changed to  $z'(r)=z_0-d[\mathcal{R}(r)]$ . Now we take a smooth height profile  $h(r \in A)$  and evaluate the associated free energy  $S_{\text{eff}}[h]$  by summing over all microscopic dimerizations giving the same coarse grained height  $h$ . By the rotation described above, we know that another height  $h'(r)=-h(\mathcal{R}(r))$  corresponds to the same set of dimerizations of  $A$ , up to a rotation. Because  $\mathcal{R}$  is a symmetry of the lattice and of the dimer-dimer interactions, both  $h$  and  $h'$  must have the same free energy and we get  $S_{\text{eff}}[h]=S_{\text{eff}}[-h]$ . Here we ignored boundary effects at the edge of  $A$ , which should be negligible for a large enough area.

*Translation symmetry.* In addition to the assumption that no dimer crosses the boundary of  $A$ , we assume that some dimers occupy all the vertical bonds on the right side of  $A$  (shaded dimers in the left panel of Fig. 23). One can shift the dimers of  $A$  by one lattice spacing to the right provided that the column of dimers on the right side of  $A$  is put back on the left side after the translation (shaded dimers in the right panel of Fig. 23). If the height inside  $A$  is  $z(r)=z_0+d(r)$ , the new height after the translation is  $z'(r)=z_0-\frac{1}{4}-d(r-1)$ . As before,  $z_0$  is the height of the lower left corner of  $A$  before the move (and  $z_0-\frac{1}{4}$  after the translation). Again, we evaluate the free energy  $S_{\text{eff}}[h]$  associated to a smooth height profile by summing over all microscopic dimerizations giving the

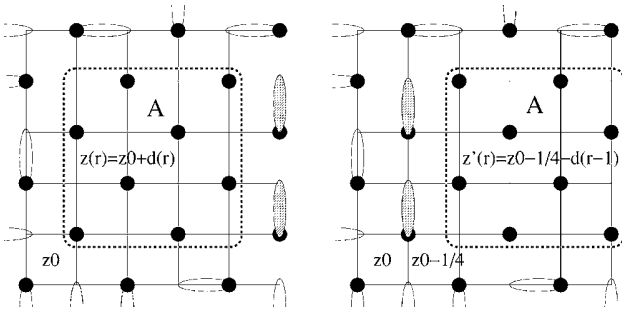


FIG. 23. Assuming that the column of sites located immediately to the right side of the area  $A$  is occupied by vertical dimers (shaded) and that no dimer crosses the boundary of  $A$  (dashed line), one can shift the whole area by one lattice spacing to the right. The vertical dimers are then moved to the left side. Such a “local” translation changes the height profile inside  $A$  from  $z(r) = z_0 + d(r)$  to  $z'(r) = z_0 - \frac{1}{4} - d(r)$ . The change  $d(r) \rightarrow -d(r)$  reflects the fact that the two sublattices are exchanged inside  $A$ .  $z_0$  is the height at the lower left corner of  $A$  before the translation.

coarse-grained height  $h$ . From the “local translation” above, one shows that the smooth height  $h'(r) = -\frac{1}{4} - h(r-1) \simeq -\frac{1}{4} - h(r)$  corresponds to the same set of dimerizations of  $A$ , but shifted by one lattice spacing. Because of the translation invariance of the model, both coarse-grained height profiles therefore have the same free energy  $S_{\text{eff}}[h] = S_{\text{eff}}[-h - \frac{1}{4}]$ . As before we ignored boundary effects at the edge of  $A$ . We also neglected the variations of  $h$  at the lattice spacing scale:  $h(r) \simeq h(r+1)$ . This is natural for a smooth height, obtained from a microscopic (and discrete)  $z(r)$  by filtering out short wavelength modes.

From the discussion above, it appears that lattice symmetries of the dimer model implies not only spatial symmetries for the effective height model but also some periodicity of the free energy in the height space. A similar result was previously obtained by Henley and co-workers using the concept of “ideal states” [31].

Combining the constraints of translation and rotation symmetries, we get that  $h \rightarrow -h$  and  $h \rightarrow h + \frac{1}{4}$  should keep the effective action invariant. This shows that the only allowed “potential” terms are  $\cos(2\pi p h)$  with  $p$  an integer multiple of 4. As only long-wavelength modes ( $k \ll 1$ ) are kept in a coarse-grained height, only terms with a minimal number of space derivatives are important. This naturally leads to an “elastic” term  $(\nabla h)^2$ . We eventually get a sine-Gordon model for the coarse-grained height

$$S_{\text{eff}} = \int d\mathbf{r} \left[ \pi g |\nabla h(\mathbf{r})|^2 + \sum_{p=4,8,12,\dots} V_p \cos[2\pi p h(\mathbf{r})] \right]. \quad (55)$$

So far we only invoked symmetry arguments to constrain the form of the effective action. It turns out that the elastic and potential terms with  $p=4$  have a simple physical interpretation in terms of the dimer model. The gradient term favors “flat” heights. There are indeed more dimer configurations corresponding to a flat average height than a tilted

one. This comes from the fact that a dimer shift along a closed loop is possible only if the height is constant (up to small discretization effect) along the loop. Thus, there is more room for dimer moves if the average slope is small (in which case there are many small “iso- $h$ ” loops available) than if the slope is large (fewer “iso- $h$ ” curves). As for the  $\cos(8\pi h)$  terms, it has four minima ( $h = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ ) which precisely coincide with the average height of the four columnar configurations (ground states) which minimize the dimer-dimer interaction energy (see Fig 3). The model therefore describes a combination of entropy and energy (locking) effects.

It is a standard result [32] that in 2D the relevance in the renormalization group (RG) sense of the cosine term depends on the period and on the stiffness constant  $g$  [33]. The cosine term is relevant (and locks the height) if  $g > p^2/4$  whereas it renormalizes to zero when  $g < p^2/4$ . In the latter case the long-distance theory is a free field (elastic term only) and the system is critical (“rough” in the height model terminology). The transition between the two phases is of the KT type. For completeness, this classic RG calculation is reproduced in Appendix A.

## 2. Coulomb gas

It is well known that the sine-Gordon model is equivalent to a (low-density) one-component CG [11]. This standard mapping is reproduced in Appendix B. This point of view has the advantage (over the sine-Gordon model described above) that it provides a framework to understand the role of the (here suppressed) monomers in the model, as well as other operators or correlations.

In the mapping from the sine-Gordon model to a CG model, the height field is conjugate to the electric charge density. Similarly, it can be shown that magnetic charges correspond to topological defects (dislocations) in the height. A dual magnetic charge  $m=1$  (respectively,  $m=-1$ ) corresponds to a dislocation in the height field, which can be inserted “by hand” through the inclusion of monomers on the even (resp. odd) sublattice or through appropriate boundary conditions (see the discussion in Sec. IV B). The exponent [34] associated to the insertion of a particle with electromagnetic charge  $(e, m)$  is given by [11]

$$\alpha(e, m) = e^2/g + gm^2, \quad (56)$$

where  $g$  is the CG coupling constant. The normalization of  $g$  and of the height field in Eq. (55) have been chosen such that  $e$  and  $m$  are integers and that standard expressions [11] for  $g$  are recovered.

In the CG picture, inserting an electric charge  $e$  is implemented by a vertex operator  $V_e(\mathbf{r}) = \exp[2i\pi e h(\mathbf{r})]$ : appearing in the Fourier expansion of any operator periodic in the coarse-grained field. Such a term with  $e=1$  actually appears as a continuum limit contribution in the definition of the dimer operator [35]: this allows one to identify the continuum limit of the dimer number as an operator with electric charge  $e=1$ . To magnetic charges (monomers) correspond dual operators  $\tilde{h}(\mathbf{r})$ ; however the fugacity for these magnetic charges is fixed to zero as we consider close-packed dimers.

The dimer-dimer correlation function decays with an exponent related to the dimension of the  $e=1$  operator  $\alpha_d = \alpha(1,0) = 1/g$  and the monomer-monomer correlation function decays with the exponent  $\alpha_m = \alpha(0,1) = g$ . This leads in particular to the prediction  $\alpha_d = 1/\alpha_m$ , independently of  $T$  [12].

The effective coupling constant  $g(T)$  varies with  $T$  to account for the continuously varying exponents. It can be calculated via the above mentioned relations with decay exponents or via fluctuations of winding numbers (see Sec. VIII C). As usual in a CG description, it is useful to have an external exact result to fix the coupling constant: here the calculations of Refs. [2,4] give  $g(T=\infty) = 1/2$ .

Another insight of the CG picture is about the relevance of the locking potential  $V_p$  in Eq. (55): the identification with the vertex operator of an electric charge  $p$  immediately indicates [11] that it will become relevant for  $g \geq g_c(p) = \frac{L^2}{4}$  (this is the same result as obtained within the RG of Appendix A). In our model,  $p=4$  and  $g$  thus increases from  $1/2$  at  $T=\infty$  to  $g(T_c) = g_c(p=4) = 4$  at the critical point. This also means that locking potential terms with higher values of  $p$  will always be less relevant and can be ignored in the present model.

We finally note that an equivalent route leading to the same CG model is to consider the low- $T$  phase. The system has a fourfold ground-state degeneracy. At low  $T$ , a finite system is mainly composed of large domains where all the dimers are aligned in one of the four possible columnar states of Fig. 3. One can associate to each domain orientation a  $q=4$  “clock spin.” One could therefore naively expect a transition in the 2D  $q=4$  state clock model universality class. The  $q$ -state clock model is well known to map to a CG with (unconstrained) integer magnetic charges and electric charges multiples of  $q$  [11]. The key point here is that due to the absence of monomers in our model, there cannot be isolated points (sites) around which this clock spin can make a  $2\pi$  rotation passing by the four possible ground states. This is nicely illustrated in another context in Ref. [36]. In other words, we are considering a  $q=4$  state clock model with no topological defects. Magnetic charges are therefore absent in the associated CG and we arrive at the same CG picture described above: electric charges can only be multiples of 4 and magnetic charges are absent.

## B. Transfer matrix calculations

TM calculations are perfectly suited to validate this CG scenario, thanks to the conformal invariance results (34) and (35).

### 1. Fundamental exponents

In Fig. 24, we show the finite-size estimates of the central charge  $c$  as a function of  $W \equiv e^{-v/T}$ . The results shown are three-point fits based on Eq. (35) with a  $1/L^4$  correction added. Indeed, such a non-universal correction is predicted by conformal invariance, and is known to greatly improve the rate of convergence. The data show a clear  $c=1$  plateau for  $1 \leq W \leq W_c$ , where we estimate  $W_c = 4.5(1)$  from the intersections of the curves. For  $W > W_c$  the curves level off to

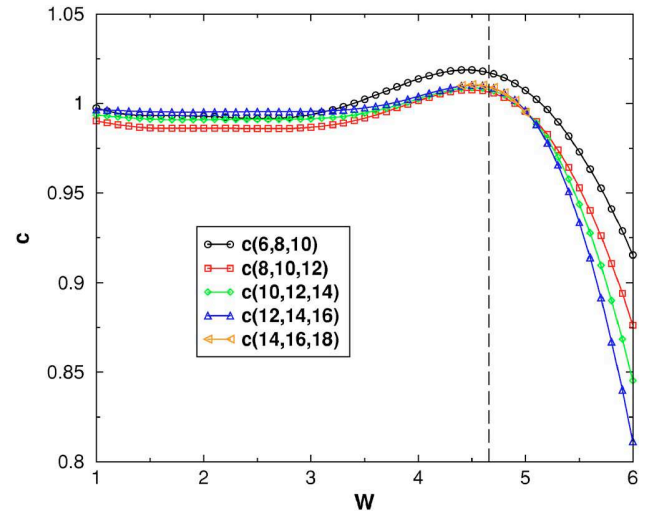


FIG. 24. (Color online) Three-point fits  $c(L-4, L-2, L)$  for the central charge, as a function of  $W$ . The dashed line indicates  $T_c$  as found by the Monte Carlo simulations.

zero, with the drop getting sharper with increasing strip width  $L$ : this signals the transition to noncritical behavior. The estimate of  $W_c$  is in perfect agreement with the MC estimate of  $T_c$ .

In Fig. 25 we show the finite-size estimates of the monomer exponent  $X_1 = \alpha_m/2$  as a function of  $W$ . The results shown are two-point fits based on Eq. (34) for  $Q_0=1$  with, once again, a  $1/L^4$  correction added. The agreement with the result  $X_1 = 1/4$  (see Sec. III F) for  $W=1$  is very clear. Within the critical region  $W \in [1, W_c]$ , the data can readily be extrapolated to the thermodynamic limit  $L \rightarrow \infty$ , and one finds that  $X_1$  is a monotonically increasing function of  $W$  that eventually takes the value  $X_1(W_c) = 2$ . So the monomer perturbation is marginal at  $W_c$  and relevant in the critical region, as predicted by the CG. For  $W > W_c$  the extrapolation in  $L$  of the numerical data does not work well, as could be expected

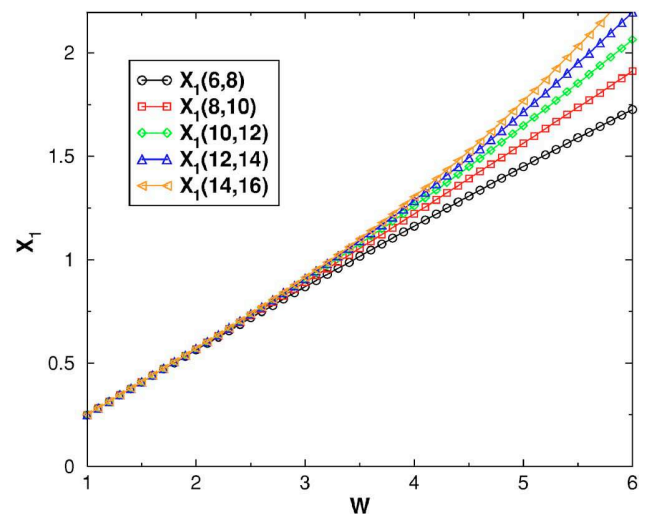


FIG. 25. (Color online) Two-point fits  $X_1(L-2, L)$  for the monomer exponent, as a function of  $W$ .

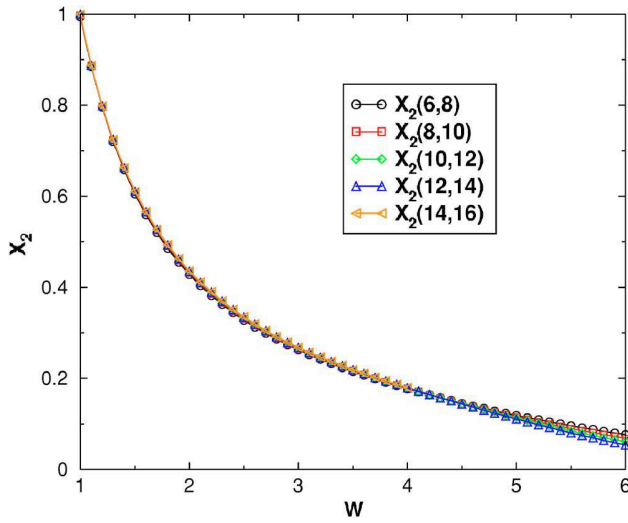


FIG. 26. (Color online) Two-point fits  $X_2(L-2, L)$  for the dimer exponent, as a function of  $W$ .

from the noncritical behavior predicted in this region.

Figure 26 shows the finite-size estimates of the dimer exponent  $X_2 = \alpha_d/2$  as a function of  $W$ , based on the first two eigenvalues in the  $Q=0$  block. There is an excellent agreement with the result  $X_2=1$  (see Sec. III F) for  $W=1$ . Inside the critical region  $W \in [1, W_c]$ , the data decrease monotonically, and one has to a very good precision  $X_1 X_2 = 1/4$  independently of  $W$ , confirming the CG scenario involving only a single coupling constant  $g$ . An estimate for the location of the critical point  $W_c$  can be obtained from the crossings of the curves, and is consistent with the one given above.

### 2. Higher dimer exponents

To analyze the agreement with the CG scenario in more detail, we show in Fig. 27 the exponents  $X$  obtained from the

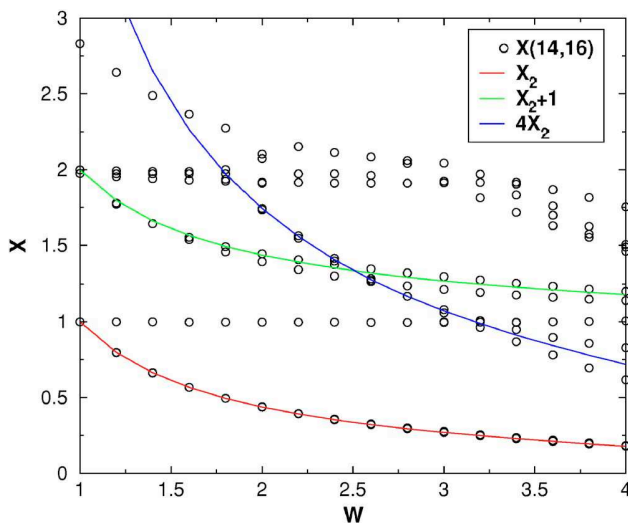


FIG. 27. (Color online) Two-point fits  $X(14, 16)$  for the first 15 exponents in the  $Q=0$  block, as functions of  $W$ . All observed exponents are simply related to the fundamental dimer exponent  $X_2$ .

first 15 gaps in the  $Q=0$  block. The first of these coincides with the fundamental dimer exponent  $X_2$  discussed above. This level exhibits a twofold degeneracy which is almost exact at finite size. The identity operator is observed to have descendants at level 1 and 2 (i.e., operators with constant  $X=1$  and  $X=2$ ), in agreement with CFT.

More interestingly, all other exponents appear to be of the form  $p^2 X_2 + q$ , for integers  $p \geq 2$  and  $q \geq 0$ . In the CG scenario, this is accounted for by operators of electric charge  $p$  times that of the fundamental one, and their descendants. Inevitably, these higher operators are slightly less well determined in finite size, and the splittings of the degeneracies which would be exact in the thermodynamic limit are somewhat larger. In the figure, we have shown in solid line style the finite-size data for  $X_2$  (corresponding to  $p=1$ ),  $X_2+1$  (its first descendant), and  $4X_2$  (the  $p=2$  electric exponent). The agreement with the numerical data is very fine. To summarize, the data of Fig. 27 provide strong evidence that the CG description of the model is correct and complete.

### 3. Including monomers

The generalization of the dimer model to finite monomer fugacity was first studied by TM calculations in the grand canonical ensemble in Ref. [12]. We give here a more detailed analysis. We also mention a very recent work by Papanikolaou, Luijten, and Fradkin [17] who independently consider the finite doping transition in this model.

The monomer exponent  $X_1$  is RG relevant (i.e.,  $X_1 < 2$ ) for  $1 \leq W < W_c$ . This means that the critical phase of the close-packed dimer model is unstable toward doping with monomers. We have verified numerically that there is no critical behavior for  $W \in [1, W_c)$  and finite monomer fugacity  $\xi$ . This means that the RG flow will be toward the trivial noncritical fixed point at  $\xi = \infty$ .

However,  $X_1$  is marginal ( $X_1=2$ ) exactly at  $W=W_c$ , and thus one may suspect, as announced in Ref. [12], that allowing for a finite monomer density will produce another critical line emerging from  $W_c$ . To test this suspicion, we have adapted the TM to accommodate for monomers with Boltzmann weight  $\xi$ . The weight of a pair of aligned dimers is still  $W = e^{-v/T}$  with  $v = -1$ .

Despite of this modification the basis states can still be described in terms of the edge occupation numbers introduced in Sec. III G. The main difference is in the dimer constraint: if a vertex is occupied by a monomer, none of its four incident edges may be occupied by a dimer. It should be noted that allowing for monomers will couple the different blocks  $T_Q$  of the TM. Accordingly, the dimension  $\dim(T)$  of the modified TM is larger than in the pure dimer case for which one could diagonalize sector by sector. We have therefore restricted the study of the monomer-doped model to widths  $L \leq 16$ . The analytic expression for  $\dim(T)$  has been given in Eq. (37) above.

In Fig. 28 we show rough scans of the effective central charge  $c_{\text{eff}}$  as a function of  $T$ , for various values of  $\xi$  and rather small sizes  $L$ . We observe that for each value of  $\xi$ , there exists a temperature  $T(\xi)$  for which  $c_{\text{eff}}$  goes through a maximum. The finite-size corrections to  $T(\xi)$  are found to be very small. We interpret the curve  $T(\xi)$  as a line of fixed



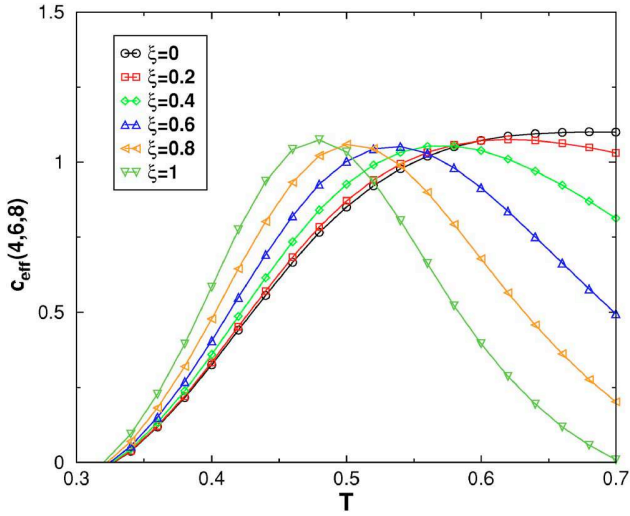


FIG. 28. (Color online) Temperature scans of the effective central charge  $c_{\text{eff}}(4,6,8)$  for various values of the monomer weight  $\xi$ .

points which correspond to the phase transition between high and low monomer density.

As the maximum in  $c_{\text{eff}}$  becomes sharper with increasing system size (not shown), the fixed points  $T(\xi)$  are RG unstable to small variations in the parameters  $(\xi, T)$ . This means that points on the low- $\xi$  side of the transition will renormalize toward vanishing monomer density, but this phase will be noncritical (crystalline phase) since the temperature is lower than the critical temperature in the pure dimer model. Points on the high- $\xi$  side of the transition will renormalize toward infinite  $\xi$  as before. Note that when  $\xi$  increases,  $T(\xi)$  decreases. This was to be expected, since when the dimers are diluted by more and more monomers, it becomes harder for them to align at a given temperature.

We have determined  $T(\xi)$  by taking these temperature scans of Fig. 29 to larger sizes (up to  $L=16$ ) and carefully studying the finite-size effects. Our final results for the phase transition temperatures are given in Table II.

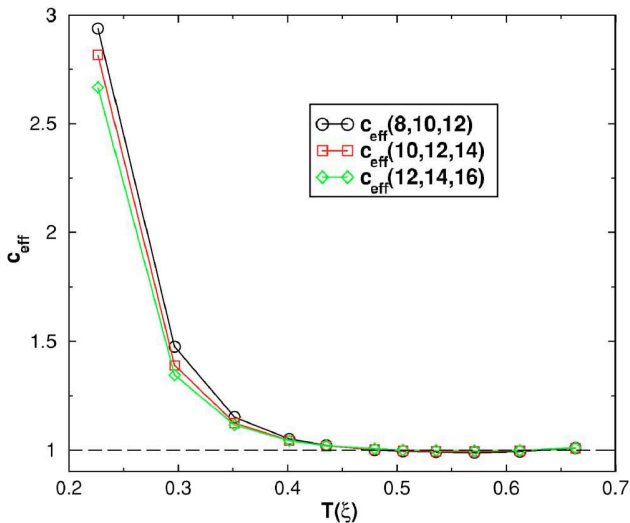


FIG. 29. (Color online) The effective central charge as a function of  $T(\xi)$ . The dashed line denotes  $c_{\text{eff}}=1$ .

TABLE II. Phase transition temperature  $T(\xi)$  in the model where monomers are allowed with a weight  $\xi$ . The error bar on the values of  $T(\xi)$  is of the order  $\pm 0.0002$ .

|          |        |        |        |        |        |        |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\xi$    | 0.0    | 0.2    | 0.4    | 0.6    | 0.8    | 1.0    |
| $T(\xi)$ | 0.6635 | 0.6125 | 0.5710 | 0.5360 | 0.5055 | 0.4795 |
| $\xi$    | 1.4    | 1.8    | 2.6    | 4.0    | 8.0    |        |
| $T(\xi)$ | 0.4355 | 0.4015 | 0.3515 | 0.2970 | 0.2265 |        |

To determine whether the phase transition curve  $T(\xi)$  corresponds to a critical behavior, we show in Fig. 29 the effective central charge as a function of  $T(\xi)$  for several different system sizes. We observe that there exists a temperature  $T_*$  such that  $c \approx 1$  for  $T(\xi) > T_*$ . Determining  $T_*$  from this figure is a little delicate, since even for the lowest value of  $T$  shown, the finite-size effects are such that  $c_{\text{eff}}$  decreases with increasing  $L$ . We can, however, give a first rough estimate

$$T_* = 0.35 \pm 0.05. \quad (57)$$

We interpret the role of  $T_*$  as follows: For  $T > T_*$ , the curve  $T(\xi)$  describes a line of second-order (continuous) phase transitions with  $c=1$ , whereas for  $T < T_*$  the phase transition becomes first order (discontinuous). This means that  $(\xi_*, T_*)$  is a tricritical point. The tricritical nature of this point is further corroborated by an easy domain-wall argument showing that the transition at  $T=0$  is necessarily discontinuous [12].

To determine the universality class of the critical part of the curve  $T(\xi)$ , we show in Fig. 30 estimates for the lowest four scaling dimensions (denoted  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ ) as functions of  $T(\xi)$ . A conspicuous feature is that  $x_1 \approx 1/8$  is almost independent of  $T(\xi)$ , and that  $x_2$  is almost degenerate with  $x_1$ . The existence of a constant exponent  $x=1/8$  (first noted in Ref. [12]) and other interaction-dependent exponents, is

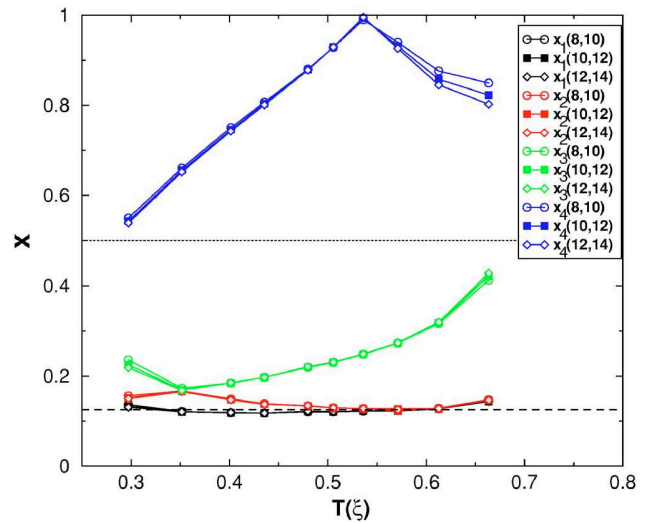


FIG. 30. (Color online) The lowest four scaling dimensions  $x(L-2, L)$  along the critical curve  $T(\xi)$ . The dashed and dotted lines denote the values  $x=1/8$  and  $1/2$ , respectively.

characteristic of the two-dimensional Ashkin-Teller [37] (AT) model. We therefore conjecture that the critical curve  $T(\xi)$  is in the universality class of the AT model.

To test this conjecture and make it more precise, we recall some facts about the isotropic, self-dual AT model, following section 12.9 of Baxter's book [38]. The AT model is originally defined in terms of two Ising models, each with coupling constant  $K$ , that interact via a four-spin (energy-energy) coupling  $K_4$ . Defining  $\omega_1 = \exp(-K_4)$  and  $\omega_3 = \exp(K_4 - 2K)$ , one finds, after a long series of transformations, that the model is equivalent to a six-vertex model with parameters  $a = b = \sqrt{2}\omega_1$  and  $c = \sqrt{2}(\omega_1 + \omega_3)$ . The anisotropy parameter  $\Delta$  of the corresponding XXZ spin chain reads

$$\Delta = 1 - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 = 1 - 2 \cos^2 \left( \frac{\pi y}{4} \right), \quad (58)$$

where the second equality parametrizes only the critical regime  $|\Delta| \leq 1$ , through the parameter  $y \in [0, 2]$ . We note that  $y=0$  corresponds to a KT transition. The original couplings,  $K$  and  $K_4$ , are only real and finite for  $y \in [0, 4/3]$ , but from the point of view of the six-vertex model nothing special happens at  $y=4/3$ . The critical exponents of the AT model differ subtly from those of the equivalent six-vertex model. There are two magnetic-type exponents, which in our notation read  $x_H^{(1)} = 1/8$  and  $x_H^{(2)} = \frac{1}{8-4y}$ , and a temperaturelike exponent  $x_t = \frac{1}{2-y}$ .

We now claim that the critical line  $T(\xi)$  corresponds to the AT model with  $y \in [0, 3/2]$ . Moreover, we identify  $x_1 = x_2$  of Fig. 30 with  $x_H^{(1)}$  in the AT model,  $x_3$  with  $x_H^{(2)}$ , and  $x_4$  with  $x_t$  (the latter identification is only on the low- $T$  side of the level crossing visible in the figure; for higher  $T$  we identify  $x_t$  with the analytic continuation of  $x_4$ ). The parameter  $y$  is an (unknown) increasing function of  $T$ , taking the values  $y=0$  at  $T=T_*$  and  $y=3/2$  at  $T=T_c$ .

Using Fig. 30, we can now identify  $T_*$  either from  $x_3 = 1/8$  or from  $x_4 = 1/2$ . These two determinations are consistent, but the latter leads to the best final estimate of the tricritical point

$$T_* = 0.29 \pm 0.02, \quad (59)$$

more precise than the first estimates of Eq. (57) and of Ref. [12]. For  $y=0$ , the original couplings of the AT model satisfy  $K=K_4$ , meaning that the two constituent Ising models couple strongly so as to give a single four-state Potts model. We conclude that the transition at  $T_*$  is in the universality class of the critical ferromagnetic four-state Potts model. Note that this identification is consistent both with the tricritical nature of the transition, and with the existence of a RG marginal direction in the Potts model [39].

Meanwhile, for  $y=3/2$  we have  $x_H^{(1)} = 1/8$  and  $x_H^{(2)} = 1/2$ . This is in nice agreement with the values of the first two electric-type exponents as obtained from the CG of the pure dimer model at  $T=T_c$ . Moreover,  $x_t=2$  becomes marginal and can be identified with the monomer operator, which is responsible for the transition.

As a last check of the AT identification, consider the point  $y=1$ , where  $K_4=0$  and  $K = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$ , so that the model decouples into two non-interacting critical Ising models.

Here one has  $x_H^{(2)} = 2x_H^{(1)} = 1/4$  and  $x_t=1$ . One can verify from Fig. 30 that this indeed happens at the same temperature  $T_{\text{Ising}} \approx 0.54$ .

The analysis presented in this section is in agreement with the results of Ref. [17].

### C. Winding number fluctuations and Coulomb gas constant

In this section, we derive an analytical relation between the coupling constant  $g$  of the CG in the high- $T$  region and the fluctuations of dimer winding numbers (to be defined below). As winding number fluctuations are easily accessible in MC simulations, this allows for an independent calculation of the CG coupling constant that can be compared with TM calculations.

Orienting the dimers from the odd sublattice toward the even sublattice defines a fictitious "magnetic field"  $\vec{B}$  on each bond [7]. Because each site has exactly one dimer, the lattice divergence of this magnetic field is  $\text{div } \vec{B} = 1$  (respectively,  $-1$ ) on the even (respectively, odd) sublattice. As a consequence (Gauss law), the flux of  $\vec{B}$  through a contractible loop (with as many sites from each sublattice) is zero in any dimer covering [40]. However, the fluxes  $W_x$  and  $W_y$  through the two (noncontractible) cycles winding around the torus are two nontrivial integers. In the following, we denote  $P(W_x, W_y)$  the probability to observe a dimer configuration with winding numbers  $W_x, W_y$ .

In the continuum limit, this probability can be obtained in the high- $T$  regime where the dimer configurations are coarse-grained into a free field [41]. In the height representation of Sec. VIII A 1, the field  $h$  is defined by the integral of its derivative. The winding number across a cycle is given by this integral along the cycle. The probability  $P(W_x, W_y)$  is the ratio of the partition function restricted to fields having winding numbers equal to  $W_x, W_y$  across the two cycles of the torus:  $Z_{W_x, W_y}$ , divided by the total partition function  $\sum_{W_x, W_y \in \mathbb{Z}} Z_{W_x, W_y}$ .

This ratio can be evaluated as follows: one separates the height field into a classical and a fluctuating part  $h = h_{\text{cl}} + \delta$  where  $h_{\text{cl}}$  is the solution of the equations of motion (a harmonic function) carrying the two winding numbers  $W_x, W_y$ , and  $\delta$  is a fluctuating field with no discontinuity.  $h_{\text{cl}}$  being a solution of the equations of motion, the crossed term disappears from the action and the free part of the action (55) is the sum of a classical part and a fluctuating part which does not depend on the winding numbers. As a result, the partition function  $Z_{W_x, W_y}$  factorizes into a classical part  $Z_{W_x, W_y}^{\text{cl}}$  and a fluctuating part  $Z'$ , which being independent of the winding number, factorizes out of the probability  $P(W_x, W_y)$ .

On a square torus of size  $L_x, L_y$ , the classical height configurations are given by

$$h(x, y) = x \frac{W_x}{L_x} + y \frac{W_y}{L_y}, \quad (60)$$

and the probability is obtained by substituting this field in the expression of the Boltzmann weight

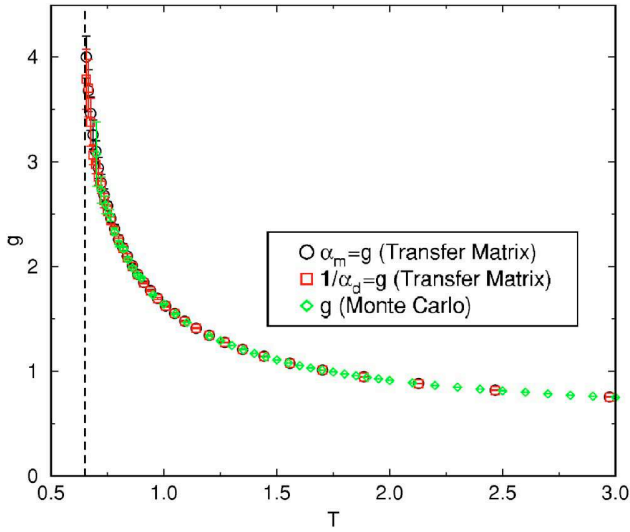


FIG. 31. (Color online) Coulomb gas coupling constant  $g$  as a function of temperature  $T$  obtained via TM (through exponents  $X_1$  and  $X_2$ —see Sec. VIII B 1) and MC calculations [thanks to Eq. (62)].

$$P(W_x, W_y) = \frac{e^{-\pi g[(W_x/L_x)^2 + (W_y/L_y)^2]L_x L_y}}{\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi g[(n/L_x)^2 + (m/L_y)^2]L_x L_y}}. \quad (61)$$

The quadratic fluctuation of the winding number across the direction  $x$  is thus given by

$$\langle W_x^2 \rangle = \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 e^{-\pi g n^2 (L_y/L_x)}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi g n^2 (L_y/L_x)}}. \quad (62)$$

In the high- $T$  phase of the dimer model, short-distance properties are of course *not* described by a free height field. However, a local dimer move cannot change the winding number and we expect that the precise (non-Gaussian) nature of the local fluctuations will not affect winding number observables.  $\langle W_x^2 \rangle$  is related to (fluctuations of) the global slope of the height profile. It can be expressed using the Fourier modes  $|k| \ll 1$  of the height field only [31] and these are precisely those described by the Gaussian action.

In the noninteracting case ( $T = \infty$ ), where  $g = 1/2$ , Eq. (62) has recently been derived using the Pfaffian expression of the partition function by Boutillier and de Tilière [42]. For other values of  $T$ , it allows one to calculate through MC simulations the temperature dependence of the coupling constant  $g$ , which can be compared with the one obtained from dimer and monomer exponents calculated via the TM (see Sec. VIII B 1). The temperature dependence of  $g(T)$  obtained by the three methods match perfectly as can be seen in Fig. 31, where the three curves basically overlap. The value of  $g$  at  $T_c$  (denoted by a dashed line in the figure) is  $g_c = g(T_c) = 4.0(2)$ , in agreement with the CG prediction  $g_c = 4$ . The CG analysis and the free field calculation (62) are therefore entirely validated.

## IX. DISCUSSION

### A. Connection to other classical models

With the interpretation of Sec. VIII A 2, the interacting classical dimer model is naturally related to other scalar-field models displaying a CG behavior [11]. Even if it is not probably exactly solvable, its definition puts it among the most simple ones, along with the  $XY$  or six-vertex models. Moreover, it can be quite naturally extended (e.g., by changing the sign of interactions, going to other geometries), which allows one to test various features of the CG.

The model (1) also admits a height description (Sec. VIII A 1), which relates it to a variety of spin and solid-on-solid models (see Ref. [31], and references therein) which display the same physical behavior. We believe this interacting dimer model offers several advantages over these models: (i) its definition is quite simple and natural, (ii) it admits two exact points (at zero and infinite temperature), (iii) very efficient numerical simulations are possible (thanks to the directed-loop algorithm [19] for the MC simulations and to the relative small size of the configuration space for the TM calculations).

Concerning numerical simulations of heightlike models, we find that the height description is not strictly necessary to obtain reliable numerical results (as opposed to Ref. [31(c)]). Henley and co-workers [31] find the height representation particularly useful because it allows for example, to calculate the stiffness (or CG) constant  $g$  via the long-wave lengths fluctuations of the Fourier transform of the height field. We have proposed here an alternative method to obtain  $g$  via the fluctuations of the winding number (see Sec. VIII C), which has the advantage of not involving any fitting procedure.

Concerning the physics of classical dimers, the analysis presented here can probably be extended to the recent results of Sandvik and Moessner [19] on noninteracting models with longer-range dimers. For models with dimers allowed between next-nearest neighboring sites, the bipartite nature of the lattice is lost and the (dislocation-free) height mapping no longer valid: correlations become exponential. For models with a fraction of dimers allowed between fourth nearest neighbors, both bipartiteness and height descriptions are present: the system stays critical. There, Ref. [19] finds that the monomer-monomer decay exponent continuously varies (from  $\alpha_m = 1/2$  to  $\alpha_m = 1/9$ ) with the fraction (fugacity  $w_4$ ) of longer-range dimers: this is naturally explained in our framework by considering the variation of the CG constant  $g$  with  $w_4$ —which in turns controls the monomer-monomer decay exponent. It also found that the dimer-dimer correlation keeps its  $1/r^2$  behavior. This last finding was accounted for in Ref. [19] by considering the “dipolar” terms in the dimer-dimer correlation functions. The corresponding part of the dimer-dimer correlation function continues to vary as  $r^{-2}$  whereas the vertex contribution [35] scales as  $r^{-1/g(w_4)}$ . The long-distance behavior observed in the numerics is therefore dominated by the largest exponent between both; here it is 2. This is reminiscent of spin-spin correlation functions of the  $XXZ$  quantum spin chain [43] where the uniform part of the  $\langle S^z(0)S^z(r) \rangle$  correlation function decays as  $1/r^2$  whereas the staggered part decays as  $1/r^{f(\Delta)}$  where  $f$  is a continuous function of the anisotropy parameter  $\Delta$ .

Finally, we remind the reader that the interacting dimer model Eq. (1) was introduced in the context of liquid crystal physics. By means of a low- $T$  expansion, Poland and Swaminathan estimated in Ref. [13(b)] the transition temperature to be  $T_c=0.61(1)$ , quite close to the actual result. However, they incorrectly stated at that time that the transition was Ising-like (second order) and did not realize the critical nature of the high- $T$  phase.

### B. Implications for finite temperature properties of the quantum dimer model on the square lattice

The classical model naturally offers informations about the finite- $T$  properties of QDM [8], where quantum effects are not dominant. In particular, the critical phase found in our model should be present in all the high- $T$  phase diagram of the QDM: indeed, the rough nature of this phase was shown to be intimately tied to the dimer hardcore constraint and not to the details of fluctuations (thermal or quantum). We note in passing that, as in the classical case, doping the QDM with monomers (static or mobile) will immediately destroy this critical phase [29]. We also think that the finite- $T$  melting of the columnar phase will proceed via a KT transition as described here everywhere in the phase diagram of the QDM (presumably, this is also the case for the melting of the plaquette phase). We note that these findings are in contrast to the finite- $T$  phase diagram of the QDM proposed by Leung and co-workers [25], who speculated that the columnar crystal would melt in two steps (with an intermediate plaquette phase), even in the classical limit.

The  $T=0$  phase diagram of the QDM is usually accepted as this [25,44,45] (with the standard notation of  $t$  for the kinetic energy gained by flipping a plaquette): for large negative  $v/t$ , the system is in a columnar phase. Increasing  $v/t$ , the QDM experiences a quantum phase transition to a plaquette phase at a quite uncertain value of  $v/t$  (see discussion below). The plaquette phase ends up at the Rokhsar-Kivelson (RK) multicritical point  $v/t=1$ , where the correlation functions display algebraic quasi-long-range order [8]. For  $v/t>1$ , the system is in the staggered phase.

We are now armed to connect this phase diagram to our finite- $T$  results for  $t=0$  and draw our proposed  $(v/t, T/|v|)$  schematic phase diagram (see Fig. 32). We believe the critical phase present in the whole high- $T$  region extends down to low temperatures at the RK point. This critical phase can be parametrized by the CG coupling constant  $g$ , and we draw lines of iso- $g$  in this region. The line  $g=4$  denotes the boundary between the high- $T$  phase and the columnar phase (and presumably to the plaquette phase as well), corresponding to the expected KT transition. As the transition from the plaquette to the columnar phase is expected on general grounds to be first order at  $T=0$ , we expect the transition to subsist at finite temperature. On the right hand side of the phase diagram, the rough phase will give rise to the staggered phase at low temperatures via a vanishing of the CG constant  $g \rightarrow 0$ . First results indicate that the transition is here first order [15,46]. Finally, we conjecture that all iso- $g$  lines meet at the RK point ( $T=0, v/t=1$ ) (see Fig. 32), consistent with the multicritical nature of the RK point [35]. Even

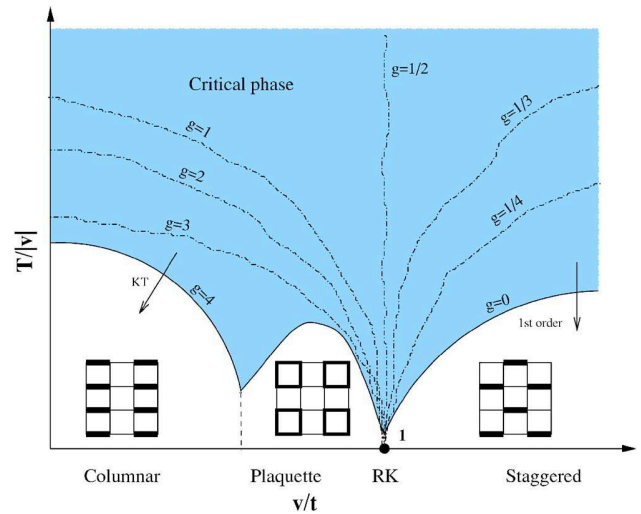


FIG. 32. (Color online) Schematic finite-temperature phase diagram of the quantum dimer model on the square lattice. The different crystals (columnar, plaquette and staggered) all melt into a high temperature critical phase (denoted in blue) with algebraic correlations characterized by a Coulomb gas constant  $g$ . See text for details.

though numerically difficult (see discussion below), it would be very interesting to test these predictions, especially in the vicinity of the RK point.

We now make a remark on the existence of the plaquette phase. We first note that our classical model is amenable to large-scale simulations, which is not the case of the QDM. Numerical simulations of the QDM are indeed very difficult: exact diagonalizations [25,26] are limited to small sizes (at most  $10 \times 10$  lattices) and even if the sign problem is absent in the QDM, quantum Monte Carlo (QMC) calculations are notoriously hard. Some progresses have, however, recently been made in the Green function QMC formulation [44,45,47]. These difficulties could have important consequences for the plaquette phase: indeed, we saw that plaquette correlations were important in our model and altered finite-size behavior, even on systems as large as  $160 \times 160$ . This is an indication that the plaquette phase in the QDM could as well just disappear in the thermodynamic limit. This is not so unlikely noticing that the critical point separating the columnar and plaquette phase was first reported [25] to be at  $v/t \sim -0.2$ , and then presumably around  $v/t=0.60(5)$  when larger samples were available [44,45]: this indicates that the plaquette phase extent actually shrinks when increasing system size.

## X. CONCLUSION

In this work, we studied a model of interacting close-packed dimers on the square lattice, where the interaction tends to align neighboring dimers. The ground-state constitutes of dimers aligned in column and is fourfold degenerate. The  $T=\infty$  point is the dimer coverings enumerating problem, and displays algebraic correlations. With the help of MC and TM simulations, we could show that the low- $T$  crystalline

columnar phase leaves place to a high- $T$  critical phase, with floating decay exponents of the correlation functions. The transition takes place at  $T_c=0.65(1)$  and is of the KT type. Via a height description of the dimer configurations, we determined the effective continuum theory with a competition between a stiffness term which favors rough height profiles (critical phase for the dimers), and a locking potential favoring heights to be locked on four particular values (forcing the dimers to align in one of the four columnar ground states). This description is equivalent to a CG of electric charges, and the locking potential is in this picture associated with the vertex operator of  $e=4$  electric charges. This allows one to interpret all the numerical results obtained in the high- $T$  phase in terms of the CG coupling constant  $g$ , which we calculate numerically with high precision. The transition is understood in the CG language as a proliferation of  $e=4$  electric charges. This model is probably one of the simplest versions of a CG with floating exponents. Finally, we have established that doping the dimer model with monomers produces another critical line emanating from the KT point. There is strong numerical evidence that this line is in the universality class of the Ashkin-Teller model. The AT line terminates in a tricritical point at finite  $T_*=0.29(2)$ , in the four-state Potts universality class. Below  $T_*$  the transition goes first order. In addition to their relevance to other classical models, the results of this work also have important implications for QDM on bipartite lattices (see Sec. IX). In particular, it indicates that their high- $T$  phase is also critical, and we conjecture that this criticality extends down to the RK point.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We thank C. Boutillier, E. Fradkin, C. L. Henley, W. Krauth, R. Moessner, D. Poilblanc, P. Pujol, A. Ralko, and O. Syljuåsen for fruitful discussions and gratefully acknowledge Frédéric Mila and Matthias Troyer for their participation at an early stage of this work. F.A. is supported by the French ANR program. The MC simulations were performed on the Gallega cluster at SPHT using the ALPS libraries [48].

#### APPENDIX A: PERTURBATIVE RENORMALIZATION GROUP FOR THE 2D SINE-GORDON MODEL

We follow here the presentation given by Levitov [49]. We write the energy of the sine-Gordon model as

$$E = \int d^D r \left[ \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \lambda \cos(\beta \Phi) \right]. \quad (\text{A1})$$

We introduce two cutoffs  $\Lambda$  and  $\Lambda'$  in momentum space so that the field  $\Phi$  splits into fast and slow components

$$\Phi(k) = \Phi(k)^> + \Phi(k)^<, \quad (\text{A2})$$

where  $\Phi(k)^>$  (fast) is nonzero only if  $\Lambda' \leq |k| \leq \Lambda$  and  $\Phi(k)^<$  (slow) is nonzero only if  $0 \leq |k| < \Lambda'$ .

As usual we integrate over the fast component  $\Phi^>$  to obtain a renormalized energy for the slow degrees of freedom

$$e^{-E^{\Lambda'}(\Phi^<)} = \int \mathcal{D}[\Phi^>] e^{-E(\Phi^< + \Phi^>)}. \quad (\text{A3})$$

It is simple to see that the elastic part of the energy does not couple the slow and fast components

$$(\nabla \Phi)^2 = (\nabla \Phi^>)^2 + (\nabla \Phi^<)^2 \quad (\text{A4})$$

so that we have

$$\begin{aligned} e^{-E^{\Lambda'}(\Phi^<)} &= e^{-(1/2) \int d^D r (\nabla \Phi^<)^2} \int \mathcal{D}[\Phi^>] \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^D r (\nabla \Phi^>)^2 + \lambda \int d^D r \right. \\ &\left. \times \cos[\beta(\Phi^> + \Phi^<)]\right). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

In the limit where the cosine term can be treated perturbatively we have

$$\begin{aligned} &e^{-E^{\Lambda'}(\Phi^<) + (1/2) \int d^D r (\nabla \Phi^<)^2} \\ &\simeq \int \mathcal{D}[\Phi^>] e^{-(1/2) \int d^D r (\nabla \Phi^>)^2} \\ &\times \prod_r (1 + \lambda \cos \beta[\Phi^>(r) + \Phi^<(r)]) \\ &\sim \prod_r (1 + \lambda \langle \cos \beta[\Phi^>(r) + \Phi^<(r)] \rangle_{\Phi^>}) \\ &\sim \exp\left(\lambda \langle \int d^D r \cos \beta[\Phi^>(r) + \Phi^<(r)] \rangle_{\Phi^>}\right), \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

and finally

$$\begin{aligned} E^{\Lambda'}(\Phi^<) &\simeq \frac{1}{2} \int d^D r (\nabla \Phi^<)^2 + \lambda \\ &< \int d^D r \cos \beta[\Phi^>(r) + \Phi^<(r)] \rangle_{\Phi^>}, \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

where  $\langle \dots \rangle_{\Phi^>}$  is an expectation value with respect to the (Gaussian) weight  $e^{-(1/2) \int d^D r (\nabla \Phi^>)^2}$ . This expectation value can be computed in the following way:

$$\langle \cos \beta[\Phi^>(r) + \Phi^<(r)] \rangle_{\Phi^>} = \frac{1}{2} e^{i\beta\Phi^<(r)} \langle e^{i\beta\Phi^>(r)} \rangle_{\Phi^>} + \text{H.c.} \quad (\text{A8})$$

and

$$\begin{aligned} \langle e^{i\beta\Phi^>(r)} \rangle_{\Phi^>} &\sim \int \mathcal{D}[\Phi^>] \exp\left(\int_{\Lambda' < |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \right. \\ &\left. \times \left\{ -\frac{k^2}{2} \Phi_k^> \Phi_{-k}^> + i\beta \Phi_k^> e^{ikr} \right\}\right). \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

The last expression is a product of Gaussian integrals. The result is

$$\langle e^{i\beta\Phi^>(r)} \rangle_{\Phi^>} \sim \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \int_{\Lambda' < |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2}\right). \quad (\text{A10})$$

Combining this result with Eqs. (A7) and (A8) we get

$$E^{\Lambda'}(\Phi^<) \approx \frac{1}{2} \int d^D r (\nabla\Phi^<)^2 + \lambda^* \int d^D r \cos \beta[\Phi^<(r)] \quad (\text{A11})$$

with

$$\lambda^* = \lambda \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} \int_{\Lambda' < |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2}\right). \quad (\text{A12})$$

If  $D=2$  we have

$$\int_{\Lambda' < |k| < \Lambda} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'} \quad (\text{A13})$$

and thus

$$\lambda^* = \lambda \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{\beta^2/(4\pi)}. \quad (\text{A14})$$

The elastic term is of the order of  $\Lambda^2$  for  $\Phi^>$  and of order  $\Lambda'^2$  for  $\Phi^<$ . By integrating out  $\Phi^>$ , the importance of the elastic term has been reduced by a factor  $(\frac{\Lambda'}{\Lambda})^2$ . The strength of the cosine potential relative to the elastic terms has thus been multiplied by

$$\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda}\right)^{\beta^2/(4\pi)-2} \quad (\text{A15})$$

when going from  $E$  to  $E^{\Lambda'}$ . Thus, we find that the cosine term is irrelevant if  $\beta^2 > 8\pi$ . On the other hand, the systems goes into a locked phase when  $\beta^2 < 8\pi$ .

To make contact with Eq. (55), we take the following normalization:

$$E = \int d^D r [\pi g (\nabla h)^2 + V_p \cos(2\pi p h)] \quad (\text{A16})$$

and we find that it is equivalent to Eq. (A1) provided  $\beta = p\sqrt{\frac{2\pi}{g}}$ . With this normalization, the cosine term is relevant when  $g > p^2/4$ . For  $p=4$  (relevant for the square lattice dimer model), we obtain that the cosine is relevant when the stiffness  $g$  exceeds  $g_c=4$ .

## APPENDIX B: MAPPING OF THE ONE-COMPONENT COULOMB GAS TO THE SINE-GORDON MODEL

This derivation is a slightly more detailed version of the argument presented in Chap. 4 of Polyakov's book [50]. We start from a system of charges interacting with a Coulomb potential  $V(r)$ :

$$Z = \sum_N \frac{\xi^N}{N!} \sum_{\{q_a\}} \sum_{\{r_a\}} \exp\left(-\sum_{a \neq b} q_a q_b V(r_a - r_b)\right), \quad (\text{B1})$$

where  $N$  is the number of charges,  $\xi$  their fugacity,  $r_a$  ( $a=1 \dots N$ ) their coordinates on a  $D$ -dimensional cubic lattice (with unit lattice spacing), and  $q_a \in \mathbb{Z}$  their charges.

We write the interaction in momentum space

$$\sum_{a \neq b} q_a q_b V(r_a - r_b) = \sum_{r, r'} q(r) q(r') V(r - r') \quad (\text{B2})$$

$$= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} q(k) q(-k) V(k), \quad (\text{B3})$$

where

$$q(r) = \sum_{a=1}^N q^a \delta(r - r_a) \quad (\text{B4})$$

is the charge density at  $r$  and the Coulomb potential is

$$V(k) = \frac{K}{4k^2}. \quad (\text{B5})$$

We decouple the charges (Hubbard-Stratonovich) by introducing a real scalar field  $\chi(r)$ :

$$Z = \sum_N \frac{\xi^N}{N!} \sum_{\{q_a\}} \sum_{\{r_a\}} \int \mathcal{D}[\chi(r)] \times \exp\left(-\frac{1}{K} \sum_r [\nabla\chi(r)]^2 + i \sum_i q(r_i) \chi(r_i)\right). \quad (\text{B6})$$

Then we will perform the summation over the particle degrees of freedom: their number  $N$ , their charges  $q^a$  and locations  $r_a$ . This is just a sum over the charge density  $q(r)$ :

$$\sum_{N, \{q_a\}, \{r_a\}} \frac{1}{N!} = \sum_{\{q(r)\}}. \quad (\text{B7})$$

In the limit of small fugacity  $\xi \ll 1$ , configurations with  $|q(r)| > 1$  are exponentially suppressed, and we can keep only  $q(r) \in \{-1, 0, 1\}$ . The number of particles is thus  $N = \sum_r q(r)^2$ . We have to evaluate

$$\sum_{q(r) \in \{-1, 0, 1\}} \xi^{\sum_r q(r)^2} e^{i \sum_r \chi(r) q(r)} \quad (\text{B8})$$

$$= \prod_r \left( \sum_{q=-1}^1 \xi^{q^2} e^{i\chi(r)q} \right) \quad (\text{B9})$$

$$= \prod_r [1 + 2\xi \cos \chi(r)] \quad (\text{B10})$$

$$\approx \exp\left(2\xi \sum_r \cos \chi(r)\right). \quad (\text{B11})$$

In the limit  $\xi \ll 1$ , the partition function is that of the sine-Gordon model

$$Z \approx \int \mathcal{D}[\chi(r)] \exp\left(-\frac{1}{K} \sum_r [\nabla\chi(r)]^2 + 2\xi \sum_r \cos \chi(r)\right). \quad (\text{B12})$$

- [1] J. K. Roberts, Proc. R. Soc. London, Ser. A **152**, 464 (1935); R. H. Fowler and G. S. Rushbrooke, Trans. Faraday Soc. **33**, 1272 (1937).
- [2] P. W. Kasteleyn, Physica (Amsterdam) **27**, 1209 (1961); H. N. V. Temperley and M. E. Fisher, Philos. Mag. **6**, 1061 (1961).
- [3] M. E. Fisher, Phys. Rev. **124**, 1664 (1961).
- [4] M. E. Fisher and J. Stephenson, Phys. Rev. **132**, 1411 (1963).
- [5] R. Kenyon, math.CO/0310326, and references therein.
- [6] H. W. J. Blöte and H. J. Hilhorst, J. Phys. A **15**, L631 (1982); B. Nienhuis, H. J. Hilhorst, and H. W. J. Blöte, *ibid.* **17**, 3559 (1984).
- [7] D. Huse *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 167004 (2003).
- [8] D. S. Rokhsar and S. A. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **61**, 2376 (1988).
- [9] R. Moessner and S. L. Sondhi, Phys. Rev. Lett. **86**, 1881 (2001); G. Misguich, D. Serban, and V. Pasquier, *ibid.* **89**, 137202 (2002); R. Moessner, S. L. Sondhi, and E. Fradkin, Phys. Rev. B **65**, 024504 (2002); D. A. Ivanov, *ibid.* **70**, 094430 (2004).
- [10] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973); V. L. Berezinskii, Sov. Phys. JETP **32**, 493 (1971).
- [11] B. Nienhuis, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J. L. Lebowitz (Academic, London, 1987), Vol. 11.
- [12] F. Alet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 235702 (2005).
- [13] O. J. Hellmann and E. Præstgaard, Chem. Phys. **24**, 119 (1977); D. Poland and P. K. Swaminathan, J. Chem. Phys. **71**, 1926 (1979).
- [14] J. G. Brankov, V. B. Velichkov, and V. B. Priezhev, J. Mol. Liq. **53**, 15 (1992); J. G. Brandkov and R. A. Karamikhova, Physica A **162**, 298 (1990).
- [15] C. Castelnovo *et al.*, Phys. Rev. B **73**, 144411 (2006); e-print cond-mat/0602237.
- [16] D. Poilblanc *et al.*, Phys. Rev. B **74**, 014437 (2006).
- [17] S. Papanikolaou, E. Luijten, and E. Fradkin, e-print cond-mat/0607316.
- [18] F. Alet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **97**, 030403 (2006).
- [19] A. W. Sandvik and R. Moessner, Phys. Rev. B **73**, 144504 (2006).
- [20] O. F. Syljuåsen and A. W. Sandvik, Phys. Rev. E **66**, 046701 (2002).
- [21] F. Alet and E. S. Sørensen, Phys. Rev. E **68**, 026702 (2003).
- [22] J. L. Cardy, J. Phys. A **17**, L385 (1984).
- [23] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy, and M. P. Nightingale, Phys. Rev. Lett. **56**, 742 (1986); I. Affleck, *ibid.* **56**, 746 (1986).
- [24] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem* (Oxford University Press, Oxford, 1988).
- [25] P. W. Leung, K. C. Chiu, and K. J. Runge, Phys. Rev. B **54**, 12938 (1996).
- [26] S. Sachdev, Phys. Rev. B **40**, 5204 (1989).
- [27] K. Binder, Z. Phys. B: Condens. Matter **43**, 119 (1981).
- [28] M. S. S. Challa, D. P. Landau, and K. Binder, Phys. Rev. B **34**, 1841 (1986).
- [29] W. Krauth and R. Moessner, Phys. Rev. B **67**, 064503 (2003).
- [30] The four corners in fact have the same height.
- [31] J. Kondev and C. L. Henley, Phys. Rev. B **52**, 6628 (1995); Nucl. Phys. B **464**, 540 (1996); C. Zeng and C. L. Henley, Phys. Rev. B **55**, 14935 (1997); R. Raghavan, C. L. Henley, and S. L. Arouh, J. Stat. Phys. **86**, 517 (1997).
- [32] S. Coleman, Phys. Rev. D **11**, 2088 (1975).
- [33]  $g$  is related to the stiffness constant  $K$  used in Ref. [31] by  $g=8K/\pi$ .
- [34] By exponent, we denote the actual exponent of a charge-charge correlation function, not the scaling dimension  $X(e,m)$  of the electromagnetic operator. We have the simple relation  $\alpha(e,m)=2X(e,m)$ .
- [35] E. Fradkin *et al.*, Phys. Rev. B **69**, 224415 (2004).
- [36] M. Levin and T. Senthil, Phys. Rev. B **70**, 220403 (2004).
- [37] J. Ashkin and E. Teller, Phys. Rev. **64**, 178 (1943).
- [38] R. J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **26**, 832 (1971); *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, New York, 1982).
- [39] B. Nienhuis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **43**, 737 (1979).
- [40] If monomers (magnetic charges) were allowed, the flux would count the number of monomers on the even sublattice (magnetic charge +1) minus the number of monomers on the odd sublattice (charge -1).
- [41] S. K. Yang, Nucl. Phys. B **285**, 183 (1987); P. Di Francesco, H. Saleur, and J.-B. Zuber, J. Stat. Phys. **49**, 57 (1987).
- [42] C. Boutillier and B. de Tilière, math.PR/0608600.
- [43] A. Luther and I. Peschel, Phys. Rev. B **12**, 3908 (1975).
- [44] O. F. Syljuåsen, Int. J. Mod. Phys. B **19**, 1973 (2005). Phys. Rev. B **71**, 020401(R) (2005).
- [45] O. F. Syljuåsen, Phys. Rev. B **73**, 245105 (2006).
- [46] The MC simulations are difficult in this case, and for  $v/t \rightarrow \infty$  a transition happening only at  $T=0$  cannot be excluded. This would reduce the occupation of the phase diagram by the staggered phase to a simple  $T=0$  line.
- [47] A. Ralko *et al.*, Phys. Rev. B **71**, 224109 (2005).
- [48] F. Alet *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. Suppl. **74**, 30 (2005); M. Troyer, B. Ammon, and E. Heeb, Lect. Notes Comput. Sci. **1505**, 191 (1998); see <http://alps.comp-phys.org>
- [49] L. Levitov, see <http://www.mit.edu/~levitov/8.334/>
- [50] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings* (Harwood, Amsterdam, 1987).

## Non-intersection exponents of fully packed trails on the square lattice

Y. Ikhlef, J.L. Jacobsen, H. Saleur, J. Stat. Mech. P05005 (2007)





# Non-intersection exponents of fully packed trails on the square lattice

Yacine Ikhlef<sup>1,2</sup>, Jesper Jacobsen<sup>1,2</sup> and Hubert Saleur<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> LPTMS, Université Paris-Sud, Bâtiment 100, Orsay F-91405, France

<sup>2</sup> Service de Physique Théorique, CEA Saclay, Gif sur Yvette F-91191, France

<sup>3</sup> Department of Physics and Astronomy, University of Southern California, Los Angeles, CA 90089, USA

E-mail: [yacine.ikhlef@u-psud.fr](mailto:yacine.ikhlef@u-psud.fr), [jesper.jacobsen@u-psud.fr](mailto:jesper.jacobsen@u-psud.fr) and [saleur@cea.fr](mailto:saleur@cea.fr)

Received 22 February 2007

Accepted 10 April 2007

Published 8 May 2007

Online at [stacks.iop.org/JSTAT/2007/P05005](http://stacks.iop.org/JSTAT/2007/P05005)

[doi:10.1088/1742-5468/2007/05/P05005](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2007/05/P05005)

**Abstract.** Fully packed trails on the square lattice are known to be described, in the long distance limit, by a collection of free non-compact bosons and symplectic fermions, and thus exhibit some properties reminiscent of Brownian motion, like vanishing fuseau exponents. We investigate in this paper the situation for their non-intersection exponents. Our approach is purely numerical, and based both on transfer matrix and Monte Carlo calculations. We find some evidence for non-intersection exponents given by CFT formulae similar to the Brownian case, albeit slightly different in their details.

**Keywords:** loop models and polymers, classical Monte Carlo simulations, classical phase transitions (theory), other numerical approaches

**ArXiv ePrint:** [cond-mat/0612258](http://arxiv.org/abs/cond-mat/0612258)

---

**Contents**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introduction</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2. Brauer loop model on the square lattice</b>                        | <b>4</b>  |
| <b>3. Definition of a fluctuating interface</b>                          | <b>5</b>  |
| <b>4. Phase diagram</b>  | <b>6</b>  |
| <b>5. Transfer matrix formulation</b>                                    | <b>8</b>  |
| 5.1. Mapping from the plane onto the cylinder . . . . .                  | 8         |
| 5.2. Transfer matrix for the loop model . . . . .                        | 8         |
| 5.3. Definition of an interface on the cylinder . . . . .                | 9         |
| 5.4. A local model for the interface weight . . . . .                    | 10        |
| 5.5. Other partition sums . . . . .                                      | 11        |
| 5.6. Numerical results . . . . .   | 11        |
| <b>6. Monte Carlo simulation on a square</b>                             | <b>13</b> |
| 6.1. Metropolis procedure for the loop model . . . . .                   | 13        |
| 6.2. Metropolis procedure for the loop model with an interface . . . . . | 13        |
| 6.3. Characteristic times . . . . .                                      | 14        |
| 6.4. Ergodicity . . . . .  | 16        |
| 6.5. Numerical results . . . . .   | 16        |
| 6.6. Scaling laws for the interface . . . . .                            | 17        |
| <b>7. Conclusion</b>   | <b>19</b> |
| <b>Acknowledgments</b>   | <b>20</b> |
| <b>Appendix. Ideas for generalizations to <math>n \neq 0</math></b>      | <b>20</b> |
| <b>References</b>  | <b>21</b> |

---

**1. Introduction**

The study of conformally invariant random curves embedded in two-dimensional space has a long history in theoretical physics and probability theory. Recently the subject has gained new momentum due to the advent of a set of rigorous methods known under the name of stochastic Loewner evolution (SLE).

Two classes of random curves have been especially well studied. In the first class one finds self-avoiding and mutually avoiding curves, which come in several variants depending on their precise microscopic definition, and in particular whether they occupy a finite fraction of space in the continuum limit. These curves admit a height representation (roughly speaking, using the curves as level lines of the height) and as such are amenable to the use of Coulomb gas (CG) techniques. Also, the corresponding (twisted) vertex models can be studied as quantum spin chains, i.e. using Bethe ansatz (BA). As a result, the bulk critical behaviour of self-avoiding curves is very well understood, whereas important questions regarding their surface behaviour still remain open [1]. Many of the

exact results obtained by the CG route have recently been confirmed, or extended, by the SLE approach.

The second example of random curves is that of Brownian motion, which is best studied directly in the continuum limit. Profound links exist between this and the foregoing case, via the use of SLE [2] or quantum gravity [3] methods. To give but one example, the external hull of the Brownian curve turns out to be in the universality class of the (standard, dilute) self-avoiding walk [3]. On a microscopic level, however, there are two crucial differences. First, a Brownian motion can intersect itself, making the application of height mappings and CG techniques break down. Second, it can pass through the same site an infinite number of times, making it more difficult to use the BA approach<sup>4</sup>.

As a result, up to this day, the non-intersection exponents for Brownian motion, which were identified by Duplantier and Kwon [5, 3] twenty years ago, and whose values were rigorously established recently [2], cannot be derived using the BA or variants of the CG method applied directly to a suitable discrete lattice model in flat space.

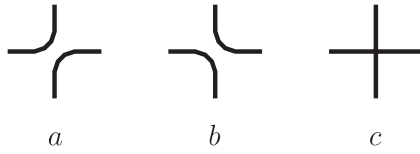
The present work started with the recent discovery of lattice models that bear a close resemblance to Brownian motion, yet are tractable by the usual techniques. These models are what are sometimes called *dense trails*, and can be obtained by allowing self-intersections as well as mutual intersections in a dense loop gas, while still requiring that the curves pass through each lattice link (resp. site) once (resp. twice) at the most. The introduction of such intersections is well known not to change the universality class in the dilute case, but—surprisingly maybe—does affect it profoundly in the dense case (for an early discussion see [6]). It was argued in particular in [7] that, for such a model with a loop fugacity  $n < 2$ , all the fuseau exponents vanish exactly and the corresponding correlation functions are described by non-compact bosonic fields, exactly like in the pure Brownian case. This was checked analytically and numerically in the case of fully packed trails (also called *Brauer loop model*) [8, 7].

It is of course tempting to ask how close fully packed trails and Brownian motion actually are, and a natural route to investigate this question is to study the non-intersection exponents.

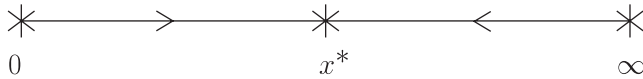
Fully packed trails, or Brauer loop models, depend among other things on the fugacity  $n$  of loops. We will concentrate here on the case  $n = 0$  (hence, of a single trail), but notice that the case  $n = 1$  has recently been studied numerically by Kager and Nienhuis [9]. These authors found that the hull distribution was compatible with that of a reflected Brownian motion. In our work, we define a scale-invariant ‘escape path’  $\Gamma$  within a Brauer loop model with fugacity  $n = 0$ . Our main findings are that, while the fractal dimension of  $\Gamma$  agrees (marginally) with that of the self-avoiding walk, the non-intersection exponents are definitely different from those of [5, 2], though they might well be given exactly by a related formula.

The paper is organized as follows. In section 2 we define precisely the model of fully packed trails to be studied, and in section 3 we introduce the escape path  $\Gamma$  and discuss how it can be made scale invariant. A qualitative phase diagram is established in section 4. Finally, the non-intersection exponents and the scaling properties of  $\Gamma$  are

<sup>4</sup> We note that there has been some important progress recently [4] in the study of Bethe ansatz for statistical mechanics systems with an infinite number of degrees of freedom per site in relation to quantum spin chains on non-compact groups.



**Figure 1.** The three allowed vertices in the Brauer loop model, with weights  $1, 1, x$ .



**Figure 2.** Renormalization flow of the loop model, for the parameter  $x$ .

measured using transfer matrix (section 5) and Monte Carlo (section 6) techniques. We give our conclusions in section 7.

## 2. Brauer loop model on the square lattice

We consider, on the square lattice, the *Brauer loop model* defined by the three vertices  $a$ ,  $b$  and  $c$ , shown in figure 1. The local Boltzmann weights are given by:

$$\omega_a, \omega_b, \omega_c = 1, 1, x. \tag{1}$$

We give an additional weight  $n$  for each closed loop.

The renormalization flow for the parameter  $x$  is shown in figure 2. The fixed point  $x = 0$  corresponds, for  $-2 \leq n \leq 2$ , to the low-temperature phase of the  $O(n)$  model [10]. The fixed point  $x^*$  attracts, for integer [7] and presumably also real values of  $n$ , all the points in the phase  $x > 0$ . This phase contains an integrable point  $x_{\text{int}} = (1 - n/2)/2$  [8]. At this particular value of  $x$ , the  $R$  matrix (expressed in the connectivity basis) satisfies the Yang–Baxter equations for any real value of  $n$ .

The goal of this paper is to study the non-intersection properties of the Brauer loop model. Recall that in the Brownian case, the simplest such property is the disconnection exponent, which governs the probability that the origin of a single Brownian path remains accessible from infinity without the path being crossed. Let us recall some of the well established results in this case. If one considers a random walk of length  $S$ , the origin stays connected to infinity with probability  $P(S) \sim S^{-\zeta_1}$ , with  $\zeta_1 = 1/8$ . One can also imagine growing the walk until it reaches the circle of radius  $R$ , and ask the probability with which it has left the origin connected to infinity, in which case  $P(R) \sim R^{-2\zeta_1}$ . Finally, one can consider a two-point correlation function defined as the weighted sum [5] over all walks going from the origin to a point  $\mathbf{r}$  for which either extremity remains connected to infinity. When the monomer fugacity equals the critical value,  $G(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-2x_1}$  with  $x_1 = 2\zeta_1 = 1/4$ .

By analogy, we define an *interface* as a line (of arbitrary length) that the Brauer loops are not allowed to cross. In particular, we address the following problems:

- (1) Define the above loop model on a finite lattice of  $N$  sites. Let the origin  $0$  be a point inside the lattice and  $\mathbf{r}$  a point on the boundary of the lattice. Let  $P(\mathbf{r})$  be the

probability that there exists an interface going from the origin to the point  $\mathbf{r}$ . How does  $P(\mathbf{r})$  decay when  $r = |\mathbf{r}|$  goes to infinity?

- (2) When this interface exists, it is, by definition, a self-avoiding walk—for easy reference we henceforth refer to it as  $\Gamma$ . The original loop system around  $\Gamma$  acts like an environment, affecting its geometrical properties. What is the universality class of  $\Gamma$ ?

### 3. Definition of a fluctuating interface

It turns out that in the Brauer loop model with a single loop, for any  $x > 0$ , the probability  $P(\mathbf{r})$  behaves as:

$$P(\mathbf{r}) \sim \exp(-r/\xi) \tag{2}$$

where  $\xi$  is a length scale depending on  $x$ . This behaviour is profoundly different from the one of Brownian motion, where the probability  $P(\mathbf{r})$  for a long Brownian trajectory decays algebraically (a consequence of subadditivity arguments [11]). This indicates that, without modification, the interfaces in the Brauer model at  $n = 0$  do not have interesting scaling properties.

Let us see more explicitly why such behaviour arises. Define three partition functions  $Z_0(N)$ ,  $Z'(N|0, \mathbf{r})$  and  $Z_0(N|\Gamma)$  as follows.

- Let  $Z_0(N)$  be the partition sum of the loop model for  $N$  sites.
- Let  $Z'(N|0, \mathbf{r})$  be the partition sum of the loop model with the constraint that there exists an interface not crossed by the loop, going from 0 to  $\mathbf{r}$ . When a loop configuration admits an interface  $\Gamma$ , then this interface is unique (or else there would be several loops). Thus, one can rewrite the sum  $Z'(N|0, \mathbf{r})$  by grouping the terms corresponding to the same interface  $\Gamma$ :

$$Z'(N|0, \mathbf{r}) = \sum_{\Gamma \in \text{SAW}(0, \mathbf{r})} Z_0(N|\Gamma) \tag{3}$$

where  $\text{SAW}(0, \mathbf{r})$  is the set of all self-avoiding walks with ends fixed to 0 and  $\mathbf{r}$ , and  $Z_0(N|\Gamma)$  is the partition sum of the loop model with the interface defined by the self-avoiding walk configuration  $\Gamma$ .

Consider the presence of an effective interface energy in  $Z_0(N|\Gamma)$ :

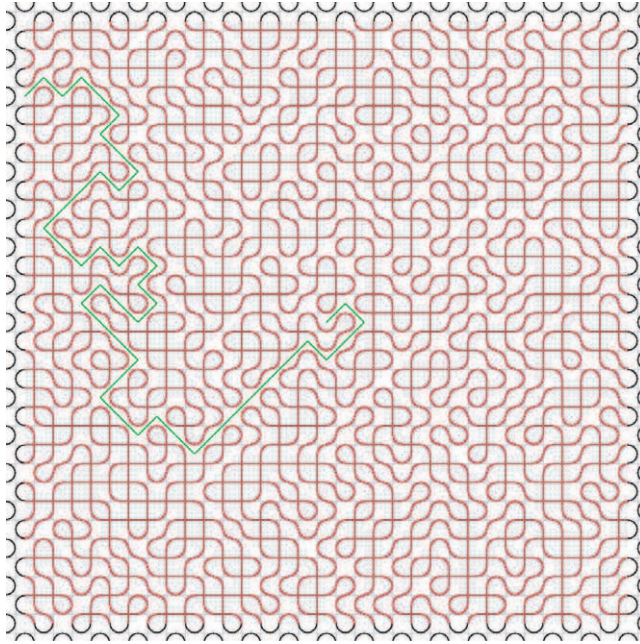
$$Z_0(N|\Gamma) \sim Z_0(N) \exp[-l \times F_s(x)] \tag{4}$$

where  $l$  is the length of  $\Gamma$  and  $F_s$  is a free energy per unit of length of  $\Gamma$ . The number of self-avoiding walk configurations of length  $l$  is approximately  $(\mu_{\text{SAW}})^l$ , where  $\mu_{\text{SAW}} = 2.6381(5)$  [12] is the connectivity constant of self-avoiding walks on the square lattice. If the quantity  $(F_s - \log \mu_{\text{SAW}})$  is positive, then the behaviour of  $Z'(N|0, \mathbf{r})$  is governed by configurations where the interface has minimal length:

$$l \simeq r \tag{5}$$

$$Z'(N|0, \mathbf{r}) \sim Z_0(N) \exp[-(F_s - \log \mu_{\text{SAW}})r]. \tag{6}$$

This accounts for the exponential behaviour of  $P(\mathbf{r}) = Z'(N|0, \mathbf{r})/Z_0(N)$ .



**Figure 3.** A typical configuration contributing to the partition sum  $Z(N|0, \mathbf{r})$ .

In order to define a scale-invariant interface, we need to allow its length  $l$  to develop large fluctuations. A simple way to do this is to introduce an additional Boltzmann weight  $w^l$ , where  $l$  is the length of  $\Gamma$ . Thus, we are interested in the study of the partition function:

$$Z(N|0, \mathbf{r}) \equiv \sum_{\Gamma \in \text{SAW}(0, \mathbf{r})} w^l Z_0(N|\Gamma). \quad (7)$$

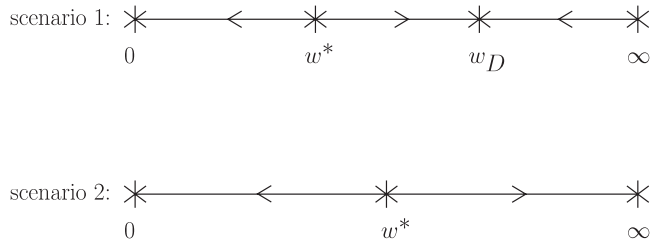
This function contains two external parameters:  $x$ , the fugacity of a crossing in the loop model defined by  $Z_0(N|\Gamma)$ , and  $w$ , that controls the length  $l$  of the interface  $\Gamma$ . A typical configuration contributing to the partition sum (7) is shown in figure 3.

#### 4. Phase diagram

Using renormalization group arguments and anticipating our numerical and analytical results, we try to give a consistent picture of the phase diagram of the model defined by equation (7).

Let us fix the value of  $x \geq 0$  and observe the system as we vary  $w$ . In this picture, the interface  $\Gamma$  is a self-avoiding walk, with its self-interactions induced by the surrounding loop model. According to equation (4), we expect a phase transition at  $w^*(x) = \exp[F_s(x)]/\mu_{\text{SAW}}$ .

Note that it may be possible to check the previous relation. We can compute numerically the value of  $w^*$ . If we could also compute independently the value of  $F_s$ , then we would be able to compare these values with the connectivity constant  $\mu_{\text{SAW}}$ , which is a well-known constant [12].



**Figure 4.** Two scenarios for the flow diagram of the parameter  $w$ . Numerical studies suggest that scenario 1 is correct.

Given  $w^*$ , the qualitative behaviour of the system as a function of  $w$  is expected to be as follows:

- If  $w < w^*$ , the behaviour of  $Z(N|0, \mathbf{r})$  is governed by configurations where the interface has minimal length: this phase is ‘non-critical’ from the point of view of the interface. The statement (2) amounts to the inequality:  $w^* > 1$ , for every  $x > 0$ . In the phase  $w < w^*$ , the interface acts as a non-fluctuating boundary for the loop model. So we expect the points of this phase to flow towards one of the fixed points described in section 2.
- If  $w = w^*$ , the interface length  $l$  fluctuates above its minimal value  $r$ , with fluctuations of the order of the system size. It is a fractal object, with Hausdorff dimension  $1 < d_f \leq 2$ . We call this point the ‘ $\Gamma$ -dilute’ critical point.
- If  $w > w^*$ , two scenarios, illustrated in figure 4, are possible *a priori*. In scenario 1, there exists a fixed point  $w_D$  such that  $w^* < w_D < \infty$ , and the whole phase flows towards it. In scenario 2, no such fixed point exists, and the whole phase flows towards the point  $w = \infty$ . Numerical studies suggest that scenario 1 is correct.

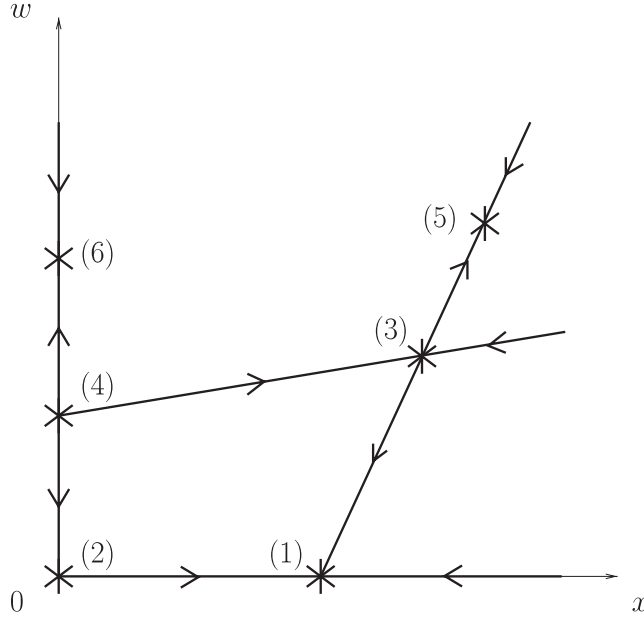
This behaviour with respect to  $w$  is very similar to the one of ordinary self-avoiding walks when driven into the dense phase by a large monomer fugacity [13]. The interface  $\Gamma$  plays the role of the single chain, and the parameter  $w$  is the monomer fugacity for the chain  $\Gamma$ .

To summarize, the phase diagram is given in figure 5. The points (1) and (2) are the critical points of the intersecting loop model with a fixed boundary. The point (3) (resp. (4)) is the ‘ $\Gamma$ -dilute’ point for  $x > 0$  (resp.  $x = 0$ ). The point (5) (resp. (6)) is the ‘ $\Gamma$ -dense’ point for  $x > 0$  (resp.  $x = 0$ ). The line passing through (3) and (4) has the equation  $w = w^*(x)$ .

Let us focus on the critical point (4). Since  $x = 0$ , only vertices of type  $a$  and  $b$  are allowed, and the point (4) is equivalent to the  $Q$ -state Potts model on the square lattice, in a particular limit: in the Fortuin–Kasteleyn formulation, a cluster has fugacity  $Q \rightarrow 0$  and a bond has fugacity  $v = \sqrt{Q}$ . The leading term of the partition sum describes equiprobable spanning trees. In this context, the interface  $\Gamma$  is exactly the set of *red bonds* of the spanning tree (the red bonds are the bonds of the spanning tree which disconnect 0 from  $\mathbf{r}$  if removed). The fractal dimension of this object is  $5/4$  [14, 15].

The point (2) is just equivalent to the  $Q$ -state Potts model in the limit described above, with a fixed cut line uncrossed by the loop.





**Figure 5.** Phase diagram of the model with  $n = 0$ , in the  $x$ - $w$  plane.

## 5. Transfer matrix formulation

### 5.1. Mapping from the plane onto the cylinder

In order to estimate partition sums such as  $Z_0(N)$ ,  $Z(N|0, \mathbf{r})$  on a cylinder of fixed width  $L$  and length  $M \rightarrow \infty$ , we compute the leading eigenvalues of the transfer matrix. Denote them  $\Lambda_L^{(0)}, \Lambda_L^{(1)}, \Lambda_L^{(2)}, \dots$  in decreasing order of modulus. Then the eigenvalue  $\Lambda_L^{(i)}$  defines the free energy density by surface unit  $f_L^{(i)}$  in the following way:

$$Z_{\text{cyl}}^{(i)}(M, L) \sim \left(\Lambda_L^{(i)}\right)^M \tag{8}$$

$$f_L^{(i)} = \frac{1}{ML} \log Z_{\text{cyl}}^{(i)}(M, L) \sim \frac{1}{L} \log \Lambda_L^{(i)}. \tag{9}$$

For conformally invariant models, finite-size corrections to  $f_L^{(i)}$  give access to the central charge  $c$  and to the operator dimensions  $X^{(i)}$  [16, 17]:

$$f_L^{(0)} = f_\infty + \frac{\pi c}{6L^2} + o(L^{-2}) \tag{10}$$

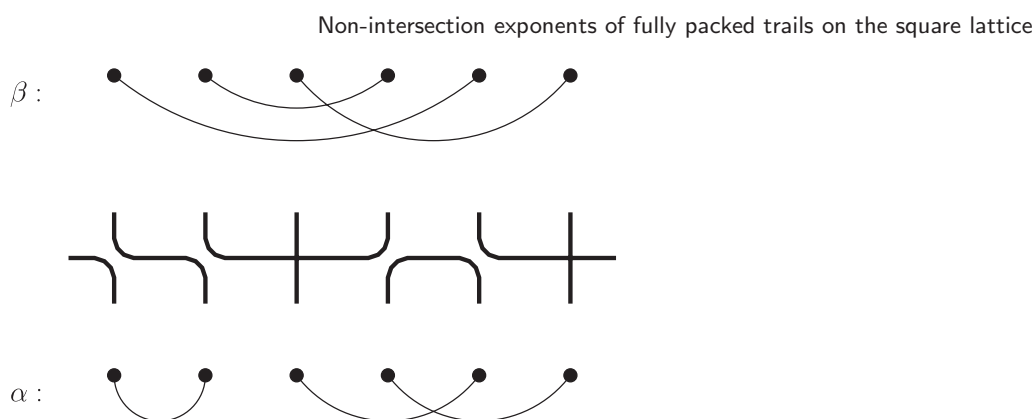
$$f_L^{(0)} - f_L^{(i)} = \frac{2\pi X^{(i)}}{L^2} + o(L^{-2}) \tag{11}$$

where the dimensions are defined in plane geometry by:

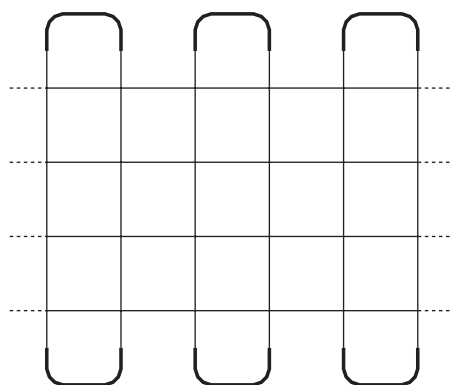
$$Z_{\text{pl}}^{(i)}(0, \mathbf{r})/Z_{\text{pl}}^{(0)} \sim 1/r^{2X^{(i)}}. \tag{12}$$

### 5.2. Transfer matrix for the loop model

Our convention is a transfer matrix  $T_L$  acting in the vertical direction, from bottom to top. Let the width  $L$  of the cylinder be an even integer. Consider the strands living on



**Figure 6.** An example term in the matrix element  $T_{\beta\alpha}$  of the transfer matrix.



**Figure 7.** Closing of the loop at the two boundaries of the strip. Dashed lines indicate periodic boundary conditions.

the vertical edges of the lattice. A *row configuration* is a pairing of these strands. There are  $(L - 1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (L - 1)$  pairings of  $L$  objects. If  $\alpha$  and  $\beta$  are two row configurations, then the matrix element  $(T_L)_{\beta\alpha}$  is the total Boltzmann weight of  $L$ -vertex configurations that map  $\alpha$  to  $\beta$  (see figure 6). This Boltzmann weight includes a factor  $n$  each time a loop is closed.

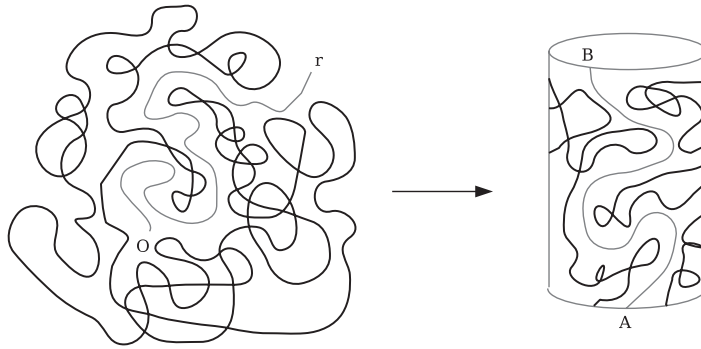
On a cylinder of length  $M$ , the partition sum is given by:

$$Z_{0,\text{cyl}}(M, L) = \langle \alpha_{\text{out}} | (T_L)^M | \alpha_{\text{in}} \rangle \sim \left( \Lambda_L^{(0)} \right)^M \quad (13)$$

where  $|\alpha_{\text{in}}\rangle$  and  $|\alpha_{\text{out}}\rangle$  are two particular vectors coding the closing of the loop at each extremity of the cylinder. For example, one may choose to close the loop as illustrated in figure 7.

### 5.3. Definition of an interface on the cylinder

Let  $\Gamma$  be an interface connecting a point  $A$  on the bottom circle of the cylinder to a point  $B$  on the top circle of the cylinder (see figure 8). Let  $Z_{0,\text{cyl}}(M, L|\Gamma)$  be the partition sum of the loop model constrained by the interface  $\Gamma$ .



**Figure 8.** Mapping of the interface problem from the plane to the cylinder.

Define, as in equation (7), the partition sum  $Z_{\text{cyl}}(M, L)$ :

$$Z_{\text{cyl}}(M, L) \equiv \sum_{\Gamma} w^l Z_{0, \text{cyl}}(M, L | \Gamma). \quad (14)$$

Note that the vector  $(T_L)^M |\alpha_{\text{in}}\rangle$  may contain components on configurations which admit several interfaces. This is because connectivity states are defined by unclosed loop segments. In contrast, the final scalar product (13) contains only contributions from single closed loop configurations admitting exactly one interface.

An analogue observation can be done in the plane geometry. Suppose the system is defined on a finite square of  $N = L^2$  sites. A given loop configuration contributing to the partition sum  $Z(N|0, \mathbf{r})$  admits one and only one interface  $\Gamma$  going from 0 to a point of the boundary. But if one considers the subsystem contained in a smaller square centred on 0 and of side  $L' < L$ , one may find several interfaces going from the origin to a point of the smaller square.

#### 5.4. A local model for the interface weight

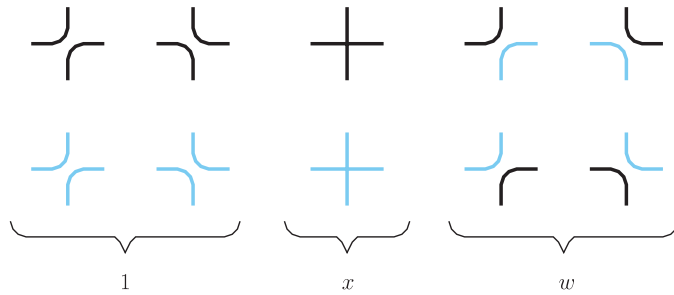
The existence of the interface  $\Gamma$  and its weight  $w^l$  are non-local features, which can fortunately be expressed by local constraints on a coloured loop model with loop fugacity  $n = 0$ . The loops may take two colours, according to the rules:

- vertices of type (a) and (b) involve two strands of any colours, but vertices of type (c) must involve two strands of the same colour;
- the vertex weights are those given in figure 9;
- a strand must change its colour when it crosses a seam going along the cylinder.

The loop model defined by these rules satisfies the following properties:

- every coloured loop configuration on the cylinder admits exactly one interface;
- if a loop configuration admits a unique interface, then it can be coloured in exactly two ways;
- the interface length  $l$  is equal to the number of vertices which involve two different colours.

Thus the partition function of the coloured loop model is equal (up to a constant factor) to the partition function  $Z_{\text{cyl}}(M, L)$ .



**Figure 9.** Vertex weights in the coloured loop model.

### 5.5. Other partition sums

In the previous discussion we described the partition sum of one loop with one interface. However, the coloured loop model allows us to compute partition sums with up to two interfaces, and/or containing open trails.

The trick used to impose the presence of two interfaces is simply to eliminate the colour change across the infinite seam.

Open trails are introduced in a standard way into the connectivity basis, by adding states where one or more points are connected to a ‘virtual’ partner. The additional rule is that these points cannot be connected with each other.

Denote  $n_1$  the number of open trails and  $n_2$  the number of closed loops. The cylinder circumference  $L$  must have the same parity as  $n_1$ . The partition sums which we are able to reach with the coloured loop model have  $n_1 + n_2 \leq 2$  interfaces. The corresponding physical exponent is denoted  $X_{(n_1, n_2)}$ .

### 5.6. Numerical results

Our numerical procedure is to diagonalize the transfer matrix of the coloured loop model, using the power method. Define the exponent  $X_{(0,1)}$  by:

$$\frac{Z_{\text{pl}}(N|0, \mathbf{r})}{Z_{0, \text{pl}}(N)} \sim \frac{1}{r^{2X_{(0,1)}}}. \quad (15)$$

Using equation (11), we define the finite-size estimates  $X_{(0,1)}(L)$  by:

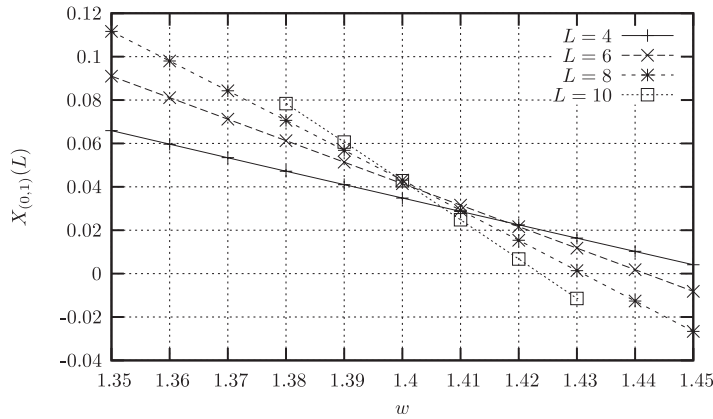
$$X_{(0,1)}(L) \equiv \frac{L^2}{2\pi} \left( f_L^{(0)} - f_{L, (0,1)} \right). \quad (16)$$

These estimates are also useful to determine the position of the critical point  $w^*$ . Indeed, consecutive estimates  $X_{(0,1)}(L)$  and  $X_{(0,1)}(L + 2)$  coincide at  $w = w^*(L, L + 2)$ , and—by analogy with standard phenomenological renormalization group methods—we expect this value to converge to  $w^*$  when  $L$  is large. This method is illustrated in figure 10. The resulting critical line is plotted in figure 11.

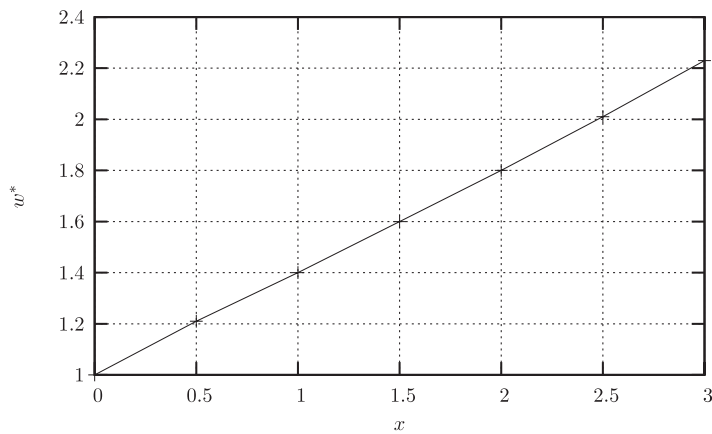
Following a similar method, we define the general exponent  $X_{(n_1, n_2)}$  by comparing the free energy  $f_{L, (n_1, n_2)}$  with the free energy associated with the greatest eigenvalue for the same system width:

$$X_{(n_1, n_2)}(L) \equiv \frac{L^2}{2\pi} \left( f_L^{(0)} - f_{L, (n_1, n_2)} \right). \quad (17)$$

Non-intersection exponents of fully packed trails on the square lattice



**Figure 10.** Estimates of the exponent  $X_{(0,1)}$  for  $x = 1$ .



**Figure 11.** Position of the critical point  $w^*$  as a function of  $x$ . The values were obtained for width  $L = 8, 10$ . The curve is very well approximated by the formula:  $w^* = 1 + 0.4x$ .

**Table 1.** Estimates of the exponents  $X_{(n_1, n_2)}$  by transfer-matrix diagonalization.

| Name        | Description                   | Numerical        | Formula (18) |
|-------------|-------------------------------|------------------|--------------|
| $X_{(0,1)}$ | 1 loop, 1 interface           | $0.04 \pm 0.005$ | 0            |
| $X_{(1,0)}$ | 1 trail, 1 interface          | $0.00 \pm 0.005$ | -0.06        |
| $X_{(0,2)}$ | 2 loops, 2 interfaces         | $0.80 \pm 0.02$  | 0.67         |
| $X_{(1,1)}$ | 1 loop, 1 trail, 2 interfaces | $0.50 \pm 0.008$ | 0.44         |
| $X_{(2,0)}$ | 2 trails, 2 interfaces        | $0.21 \pm 0.02$  | 0.25         |

Note that  $f_L^{(0)}$  is the free energy of one unconstrained loop (resp. trail) when  $L$  is even (resp. odd).

The error bars are given by the spacing of the consecutive intersections of the finite-size estimates. The results are compared with the empirical formula:

$$X_{(n_1, n_2)} = \frac{m^2 - 1}{12}, \quad m = \frac{3}{2}n_1 + 2n_2 - 1 \tag{18}$$

to be discussed in the last section.

One must consider these results cautiously, because in the loop model, logarithmic corrections appear in quantities such as  $f_L^{(0)}$ .

## 6. Monte Carlo simulation on a square

In order to access directly some geometrical features of the model, we simulate it by a Monte Carlo procedure [18] on an  $L \times L$  square lattice. First, we describe a Metropolis procedure used for the loop model defined by the partition sum  $Z_0(N)$ . Then, we modify slightly this procedure to simulate the ensemble defined by  $Z(N|0, \mathbf{r})$ . We discuss the main aspects of the algorithm: detailed balance, ergodicity and autocorrelation times. At the end, we give some numerical results obtained by this method.

### 6.1. Metropolis procedure for the loop model

The statistical ensemble of interest is the set of loop configurations consisting of *exactly one loop* on an  $L \times L$  square lattice. Each loop configuration  $\mathcal{L}$  is given the Boltzmann weight  $\Pi(\mathcal{L}) = x^{N_c}$ , where  $N_c$  is the number of crossings of the loop with itself. The boundary of the square consists of ‘frozen’ vertices, as shown in figure 3.

The idea of the algorithm is to modify locally the system without violating the one-loop constraint. Let us denote  $P_{ij}$  the  $2 \times 2$  ‘plaquette’ consisting of the vertices  $\{(i, j), (i + 1, j), (i, j + 1), (i + 1, j + 1)\}$ , and  $\beta_{ij}$  the state of these four vertices. Every plaquette has eight ‘external legs’. Outside  $P_{ij}$ , the loop connects these legs with each other. Fixing this external connectivity—call it  $\alpha$ —defines the set  $B_\alpha$  of plaquette configurations  $\beta$  respecting the one-loop constraint when adjoined with  $\alpha$ .

An elementary iteration consists of four steps:

- (1) Pick uniformly a plaquette  $P$  among  $(L - 1) \times (L - 1)$  possibilities. The state of the plaquette is denoted  $\beta$ .
- (2) Visit the loop to determine the external connectivity  $\alpha$  of the legs of  $P$ .
- (3) Pick uniformly a configuration  $\beta'$  from  $B_\alpha$ .
- (4) Perform the local change  $\beta \rightarrow \beta'$  on  $P$  with probability:

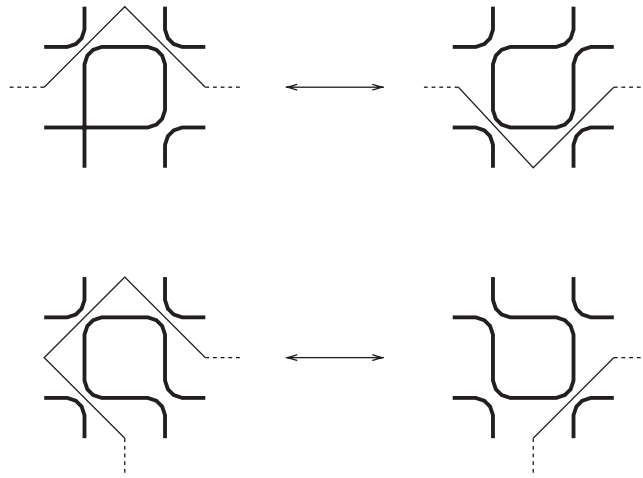
$$W(\beta \rightarrow \beta') = \begin{cases} \frac{\Pi(\beta')}{\Pi(\beta)} & \text{if } \Pi(\beta') < \Pi(\beta) \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (19)$$

This algorithm satisfies the detailed balance condition for the probability distribution  $\Pi(\mathcal{L})$  on the set of one-loop configurations:

$$\forall \mathcal{L}, \mathcal{L}' \quad \Pi(\mathcal{L})W(\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}') = \Pi(\mathcal{L}')W(\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}). \quad (20)$$

### 6.2. Metropolis procedure for the loop model with an interface

Consider next the statistical ensemble of one-loop configurations admitting an interface  $\Gamma$  that connects the centre  $O$  of the square to a point  $\mathbf{r}$  on the boundary of the square (see figure 3). Each loop configuration is given the weight  $\Pi(\mathcal{L}) = x^{N_c} w^l$ , where  $N_c$  is the number of crossings of the loop with itself and  $l$  is the length of the interface  $\Gamma$ . The above Metropolis procedure can be adapted to simulate this ensemble, and is defined by



**Figure 12.** Two examples of plaquette flips which alter locally the interface  $\Gamma$  ( $\Gamma$  is represented as a thin line).

the elementary iteration:

- (1) Pick uniformly a plaquette  $P$  among  $(L - 1) \times (L - 1)$  possibilities. The state of the plaquette is denoted  $\beta$ .
- (2) Visit the loop to determine the external connectivity  $\alpha$  of the legs of  $P$ .
- (3) Pick uniformly a configuration  $\beta'$  from  $B_\alpha$ . This defines a new loop configuration.
- (4) Test whether the new loop configuration still admits an interface. If it is the case, denote  $l'$  the length of the new interface. If not, reject the step and skip to a new iteration.
- (5) Perform the local change  $\beta \rightarrow \beta'$  on  $P$  with probability:

$$W(\beta \rightarrow \beta') = \begin{cases} \frac{x^{N_c(\beta')} w^{l'}}{x^{N_c(\beta)} w^l} & \text{if } x^{N_c(\beta')} w^{l'} < x^{N_c(\beta)} w^l \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

This algorithm is able to modify locally the interface, when the plaquette picked at step 1 is close to the interface. Examples of this process are given in figure 12.

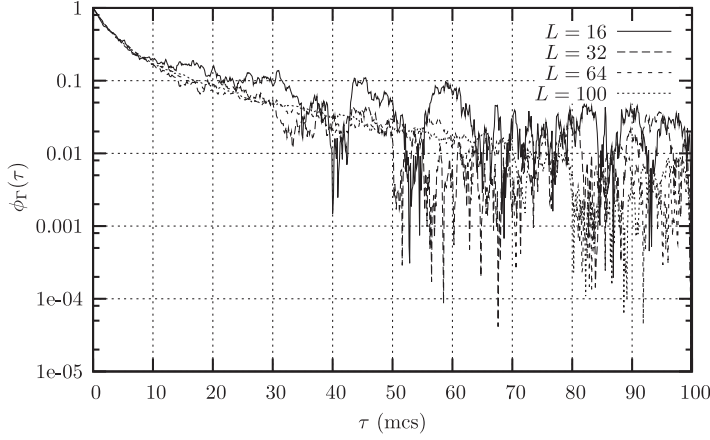
### 6.3. Characteristic times

The Metropolis algorithm described above defines a Markov chain on the set of one-loop configurations with an interface:  $(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_K)$ . We are interested in the calculation of an observable:

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_{\mathcal{L}} \Pi(\mathcal{L}) A(\mathcal{L})}{\sum_{\mathcal{L}} \Pi(\mathcal{L})} \quad (22)$$

where the sums are over one-loop configurations with an interface. The Markov chain is used to build an estimator for this quantity:

$$\bar{A}_{k_0, Q, \tau} = \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} A(\mathcal{L}_{k_0+q\tau}). \quad (23)$$



**Figure 13.** Auto-correlation function  $\phi_{\Gamma}(\tau)$  for parameters  $x = 1$ ,  $w = 2$ . The initial time was set to  $k_0 = 100$  mcs.

If the configurations  $\mathcal{L}_k$  were independent and obeyed the equilibrium distribution  $\Pi(\mathcal{L})$ , then the first two moments of the estimator  $\bar{A}_{k_0, Q, \tau}$  would be:

$$\langle \bar{A}_{k_0, Q, \tau} \rangle = \langle A \rangle \quad (24)$$

$$\langle [\bar{A}_{k_0, Q, \tau} - \langle A \rangle]^2 \rangle = \frac{1}{Q} \langle [A - \langle A \rangle]^2 \rangle \quad (25)$$

where the brackets denote averaging with respect to the distribution  $\Pi(\mathcal{L})$ . The parameters introduced in equation (23) play the following roles:

- The initial time  $k_0$  is the number of configurations to discard at the beginning of the Markov chain. Indeed, the first configurations do not obey the equilibrium distribution  $\Pi(\mathcal{L})$ . The value of  $k_0$  must be greater than the *equilibration time* of the observable  $A$  under the process.
- The time interval  $\tau$  allows us to discard redundant information arising from non-independent configurations  $\mathcal{L}_k$ ,  $\mathcal{L}_{k+1}$ , etc. [19]. One has to choose a value  $\tau$  greater than the *auto-correlation time* of the observable  $A$  under the process.
- The number of samples  $Q$  controls the accuracy of the estimator. If the interval  $\tau$  is large enough, the error on  $\langle A \rangle$  is proportional to  $Q^{-1/2}$ .

In order to determine the equilibration time and the auto-correlation time for the observables of interest, we make a specific hypothesis. The observables we want to compute depend only on the interface. We define the ‘interface overlap function’:

$$S_{\Gamma}(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = 2 \times \frac{\text{length of } (\Gamma \cap \Gamma')}{l + l'}. \quad (26)$$

The hypothesis is that characteristic times for observables depending only on the interface are bounded by a typical timescale associated with the decay of  $S_{\Gamma}(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{\tau})$  as a function of  $\tau$ . This decay is well described by the auto-correlation function:

$$\phi_{\Gamma}(\tau) = \frac{S_{\Gamma}(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{\tau}) - S_{\Gamma}(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_K)}{1 - S_{\Gamma}(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_K)}, \quad K \rightarrow \infty. \quad (27)$$

This function is plotted in figure 13. The time unit used for plotting is one Monte Carlo sweep (mcs), corresponding to  $L^2$  elementary iterations of the Metropolis algorithm.



**Table 2.** Ergodicity check of the Metropolis algorithms for small system sizes.

| $L$ | $\mathcal{N}_{1 \text{ loop}}$ | $\mathcal{N}_{1 \text{ loop}, 1 \text{ interface}}$ | Ergodicity checked |
|-----|--------------------------------|---|--------------------|
| 2   | 40                             | 32  | ×                  |
| 4   | 5 373 952                      | 3 072 000   | ×                  |
| 6   | 4 380 037 227 741 184          | 1 705 236 234 240 000                               |                    |

### 6.4. Ergodicity

The Markov chain  $(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots)$  defined by the Metropolis procedure converges to the equilibrium distribution  $\Pi(\mathcal{L})$  under two conditions: detailed balance and ergodicity. A Markov process is said to be ergodic if and only if for any pair of configurations  $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ , there exists a path of transitions, going from  $\mathcal{L}$  to  $\mathcal{L}'$ , with non-zero transition probability:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \dots \mathcal{L}_k \rightarrow \mathcal{L}'. \quad (28)$$

For the two versions of the algorithm, we do not have any proof of ergodicity for a system of arbitrary size. Nevertheless, we have been able to check exactly the ergodicity property for systems of size  $L = 2, 4$ . The transfer-matrix algorithm is used to count the number of allowed configurations for small width  $L$ . The Metropolis algorithm is modified to visit every configuration obtained by a sequence of local changes, starting from an arbitrary configuration. We find that every allowed configuration is reached by the process. Table 2 gives the number of one-loop configurations on a  $L \times L$  square, for the two cases.

### 6.5. Numerical results

Using Monte Carlo simulations for various system sizes  $L = 16, \dots, 128$ , with the parameters:

$$\begin{aligned} k_0 &= 100 \text{ mcs} \\ \tau &= 100 \text{ mcs} \\ Q &= \begin{cases} 1000 \text{ samples} & \text{for } L < 128 \\ 100 \text{ samples} & \text{for } L = 128 \end{cases} \end{aligned}$$

we estimate the average length  $\langle l \rangle$  of the interface  $\Gamma$ , and its fluctuations. We obtain an evidence (see figures 14 and 15) for the scaling laws:

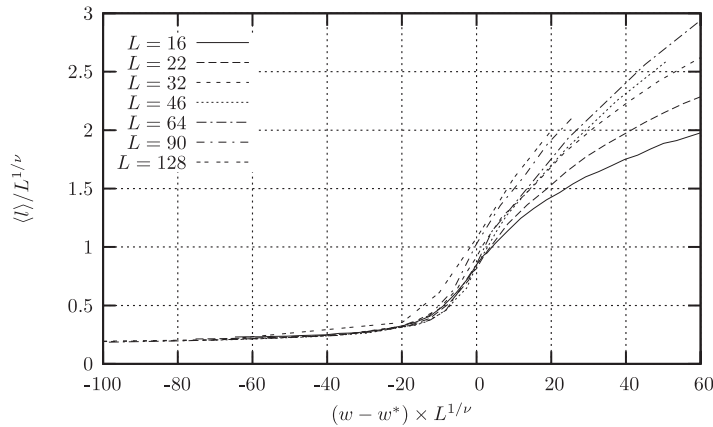
$$\langle l \rangle = L^{1/\nu} H_1([w - w^*(L)]L^{1/\nu}) \quad (29)$$

$$\langle \Delta l^2 \rangle = \langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2 = L^{2/\nu} H_2([w - w^*(L)]L^{1/\nu}) \quad (30)$$

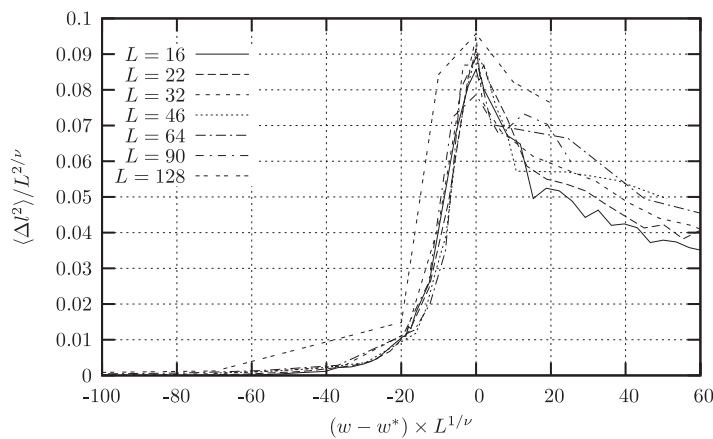
where  $w^*(L)$  is the ‘finite-size critical point’, and  $H_1, H_2$  are scaling functions. The function  $H_1(u)$  is increasing on the real line and the function  $H_2(u)$  has a maximum at  $u = 0$ . We define  $w^*(L)$  as the value of the parameter  $w$  which maximizes the fluctuation amplitude  $\langle \Delta l^2 \rangle$ . The maximum of the quantity  $\langle \Delta l^2 \rangle$  is expected to follow the scaling law:

$$\langle \Delta l^2 \rangle_{\max} \propto L^{2/\nu}. \quad (31)$$

Non-intersection exponents of fully packed trails on the square lattice



**Figure 14.** Mean length  $\langle l \rangle$  of the interface, as a function of  $w$ , for  $x = 1$ . The parameters  $\{w^*(L)\}$  and  $\nu$  are determined by the maximum of  $\langle \Delta l^2 \rangle$  (see figure 16).



**Figure 15.** Fluctuations of the length  $l$  of the interface, as a function of  $w$ , for  $x = 1$ . The parameters  $\{w^*(L)\}$  and  $\nu$  are determined by the maximum of  $\langle \Delta l^2 \rangle$  (see figure 16).

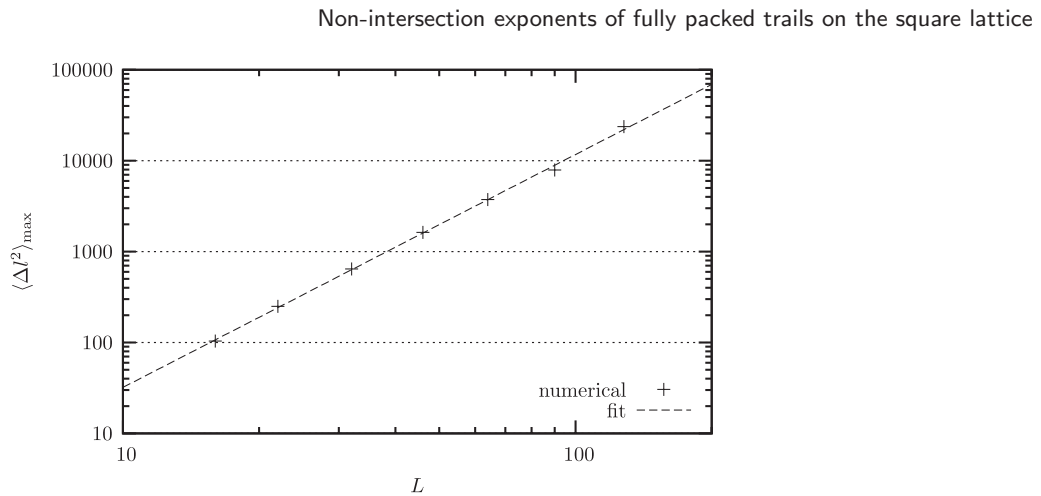
This scaling law is confirmed by the numerical simulation, as shown in figure 16. The numerical fit leads to:

$$1/\nu = 1.28 \pm 0.018. \tag{32}$$

### 6.6. Scaling laws for the interface

We interpret the scaling laws for the length  $l$  of the interface, using the scaling hypothesis for the partition function, close to the critical point  $w = w^*$ . Suppose that the partition function  $Z(N|0, \mathbf{r})$  is a two-point correlation function in some critical field theory. In this theory, the correlation length  $\xi$  is related to the deviation from the critical point by:

$$\xi \propto |w - w^*|^{-\nu}. \tag{33}$$



**Figure 16.** Maximum value of the fluctuations of the length  $l$  of the interface, as a function of the system size  $L$ . The linear fit gives  $\langle \Delta l^2 \rangle_{\max} \propto L^{2/\nu}$ , with  $1/\nu = 1.28$ .

The function  $Z(N|0, \mathbf{r})$  defines the anomalous dimension  $\eta$ :

$$Z(N|0, \mathbf{r}) = \frac{1}{r^{d-2+\eta}} g(r/\xi) \quad (34)$$

where  $d = 2$  is the space dimension, and  $g$  is a scaling function. The partition function  $Z(N|0, \mathbf{r})$  is also the generating function for the length  $l$  of the interface going from 0 to  $\mathbf{r}$ :

$$\langle l \rangle = \frac{\partial \log Z(N|0, \mathbf{r})}{\partial \log w} = r^{1/\nu} h_1(r/\xi) \quad (35)$$

$$\langle \Delta l^2 \rangle = \frac{\partial^2 \log Z(N|0, \mathbf{r})}{\partial (\log w)^2} = r^{2/\nu} h_2(r/\xi) \quad (36)$$

where the scaling functions  $h_1, h_2$  can be expressed in terms of the function  $g$ . So, in particular, the fractal dimension of the interface at the critical point is  $d_f = 1/\nu = 1.28$ .

This result can be compared with the transfer-matrix calculations of the exponents  $X_{(n_1, n_2)}$ . As for the case of polymers [10, 13], the thermal exponent  $\nu$  is related to the ‘two-leg exponent’  $X_{(0,2)}$ :

$$X_{(0,2)} = 2 - \frac{1}{\nu}. \quad (37)$$

Indeed, the exponent  $X_{(0,2)}$  corresponds to the insertion of two interfaces. According to this argument, the estimated value of  $X_{(0,2)}$  (see table 1) gives a fractal dimension:

$$d_f = 1.2 \pm 0.02. \quad (38)$$

This estimate of  $\nu$  is only marginally compatible with (32), but this was to be expected given the difficulty in estimating reliable error bars within the transfer matrix method.

## 7. Conclusion

In Brownian motion, the fractal dimension of the boundary is known to be  $D_f = 1/\nu = 4/3$ , a celebrated conjecture of Mandelbrot's, established rigorously by Lawler *et al* [2]<sup>5</sup>. At the critical value of  $w$  where the interface is allowed to grow in our fully packed trail model, the result (32) is quite close to this value. Since by construction  $\Gamma$  is self-avoiding, and since few universality classes are known for self-avoiding walks (even though the background of trails induces non-local interactions in  $\Gamma$ ) it is tempting to speculate that our  $\nu = 3/4$  indeed.

In the context of Brownian motion, the problem closest to ours is the problem of non-intersections of packets of walks. We shall restrict to situations with packets made of one or two walks only. Suppose we have  $n_1$  walks and  $n_2$  pairs of walks, and suppose we demand that no intersection occurs between either sets, while for each pair of walks in the set  $n_2$ , intersections are allowed. The exponent is then known to be [2]:

$$x = 2\zeta(n_1, n_2) = \frac{m^2 - 1}{12} \quad (39)$$

where:

$$m = 2n_1 + 3n_2. \quad (40)$$

One recovers the usual case of non-intersection exponents when  $n_2 = 0$ ,  $n_1 \equiv L$  in Duplantier's notations [3] (not to be confused with  $L$ , the system size in this paper).

Assuming (without clear justification) that similar properties might hold for the non-intersection exponents of trails, we found that the following empirical formula:

$$x = \frac{m^2 - 1}{12}, \quad m = \frac{3}{2}n_1 + 2n_2 - 1 \quad (41)$$

gives a decent fit to our data, as mentioned in section 5.6.

Recall that the numerical data used to obtain this conjecture are affected by very bad convergence properties. An analytical approach and further numerical confirmation are needed to make progress on the problem. For example, one may think of attacking the problem using quantum gravity methods.

An important point concerns the value of  $n$  (the loop fugacity) that is best suited for comparison with Brownian motion. We chose in this paper  $n = 0$  mostly by analogy with the usual SAW case, but notice that formally the corresponding central charge is  $c = -1$  [7]. This might not be the best choice, since non-intersection exponents such as (39) appear in a CFT with  $c = 0$  [5, 3]. On the other hand, the value  $c = -1$  is really a property of the 'bulk' of dense trails, and it is not excluded that their frontiers might be described by a different CFT. In fact, it might well be that non-intersection exponents are independent of the value of  $n$ —after all, the dense trail models with  $n < 2$  have properties which, in many respects, are independent of  $n$  (such as the fuseau exponents, which are all vanishing [7]). Some thoughts on the proper generalization of the lattice model needed to deal with the case  $n \neq 0$  are presented in the appendix below. We hope to get back to this question soon.

<sup>5</sup> We note that in this case there is no microscopic duality between the non-intersecting Brownian walk and any sort of 'interface', since the Brownian walk is not forced to fill up space. It would be interesting to see if any such interface can be defined.

## Acknowledgments

One of the authors (YI) thanks B Nienhuis and W Kager for their hospitality at the ITFA, and for interesting discussions on generalizations to  $n \neq 0$ . Discussions with M Bauer, B Duplantier and S Majumdar (from whom we learned about the known results on the point (4) of figure 5) are also gratefully acknowledged.

## Appendix. Ideas for generalizations to $n \neq 0$

In the planar geometry, when  $n$  is non-zero, several loops are allowed to cover the lattice, so the interface defined in section 3 is no longer unique.

In the case  $n = 0$ , the colouring of loops with two colours was used in section 5 to express with local weights the existence of an interface. When  $n$  is non-zero, this trick can inspire some generalizations of the problem. These are best defined on a cylinder.

Let  $Z_{\text{col}}$  be the partition sum of the model defined by the vertices weights of figure 9, and the non-local weight  $n$  for each closed loop. Given a particular configuration  $\mathcal{L}$  consisting of several uncoloured loops, the model allows several colourings of  $\mathcal{L}$ . Intersections among the loops of  $\mathcal{L}$  define a partition into *packets* of mutually intersecting loops. Packets may be coloured independently in two ways, but loops belonging to the same packet must have the same colour. Thus, the number of such objects appears in the partition sum:

$$Z_{\text{col}}(M, L) = \sum_{\mathcal{L}} \left( \prod_i w_i \right) n^{\#\text{loops}} 2^{\#\text{packets}} \quad (\text{A.1})$$

where the sum is over uncoloured loop configurations and the first factor stands for the local weights of figure 9.

If a change of colours is imposed when the boundary is crossed, then no packet is allowed to wrap around the cylinder. This is equivalent to the existence of an interface as defined in figure 8. So, like in the case  $n = 0$ , this model is able to express locally the existence of an interface. Unfortunately, we have not been able to define a unique interface, so we cannot control its length  $l$  like in the previous case.

A special case is when  $x = 0$ . Then a packet is identical to a loop and the partition sum becomes:

$$Z_{\text{col}}(M, L) = \sum_{\mathcal{L}} \left( \prod_i w_i \right) (2n)^{\#\text{loops}} \quad (x = 0). \quad (\text{A.2})$$

Note that this model contains the Potts model as a particular case, when  $w = 1$ .

The form (A.1) of the partition sum of the coloured loop model suggests another generalization of the previous models, obtained by introducing a second non-local weight  $m$  for each packet of closed loops:

$$Y(x, n, m) = \sum_{\mathcal{L}} x^{\#\text{crossings}} n^{\#\text{loops}} m^{\#\text{packets}} \quad (\text{A.3})$$

where the sum is over uncoloured loop configurations.

*NB:* In section 3, we saw that when  $(n, m) = (0, 2)$ , the model with an interface is not critical. However, it may be possible to define a limit  $n \rightarrow 0$  for the partition sum (A.3), which defines a critical model with an interface.

## References

- [1] Jacobsen J L and Saleur H, *Conformal boundary loop models*, 2006 Preprint [math-ph/0611078](#)
- [2] Lawler G F, Schramm O and Werner W, 2001 *Acta Math.* **187** 237–73 [[math.PR/9911084](#)]
- [3] Duplantier B, 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5489
- [4] Derkachov D E, Korchemsky G P and Manashov A N, 2003 *J. High Energy Phys.* **JHEP10(2003)053** and references therein
- [5] Duplantier B and Kwon K-H, 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2514
- [6] Cao M S and Cohen E G D, 1997 *J. Stat. Phys.* **87** 147 [[cond-mat/9608159](#)]
- [7] Jacobsen J L, Read N and Saleur H, 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 090601 [[cond-mat/0205033](#)]
- [8] Martins M J, Nienhuis B and Rietman R, 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 504 [[cond-mat/9709051](#)]
- [9] Kager W and Nienhuis B, 2006 *J. Stat. Mech.* **P08004** [[cond-mat/0606370](#)]
- [10] Nienhuis B, 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1062
- [11] Lawler G F, 1996 *Intersections of Random Walks* (Boston, MA: Birkhäuser)
- [12] Jensen I, 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 5503
- [13] Duplantier B and Saleur H, 1987 *Nucl. Phys. B* **290** 291
- [14] Coniglio A, 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 3054
- [15] Duplantier B and Saleur H, 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2325
- [16] Blöte H W J, Cardy J L and Nightingale M P, 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 742  
Affleck I, 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 746
- [17] Cardy J L, 1984 *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** L385
- [18] Binder K and Heermann D W, 1988 *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics* (Berlin: Springer)
- [19] Sokal A D, *Monte Carlo methods in statistical mechanics: foundations and new algorithms*, 1997 *Functional Integration: Basics and Applications (1996 Cargèse Summer School)* ed C DeWitt-Morette, P Cartier and A Folacci (New York: Plenum) pp 131–92  
[http://www.math.nyu.edu/faculty/goodman/teaching/Monte\\_Carlo/Sokal.ps](http://www.math.nyu.edu/faculty/goodman/teaching/Monte_Carlo/Sokal.ps)



## A staggered six-vertex model with non-compact continuum limit

Y. Ikhlef, J.L. Jacobsen, H. Saleur, [cond-mat/0612037](#), accepté par Nucl. Phys. B (2006)





# A staggered six-vertex model with non-compact continuum limit

Yacine Ikhlef<sup>1,2</sup>, Jesper Jacobsen<sup>1,2</sup> and Hubert Saleur<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> LPTMS, Université Paris-Sud, Bâtiment 100,  
Orsay, 91405, France

<sup>2</sup> Service de Physique Théorique, CEA Saclay,  
Gif Sur Yvette, 91191, France

<sup>3</sup> Department of Physics and Astronomy, University of Southern California,  
Los Angeles, CA 90089, USA

December 1, 2006

## Abstract

The antiferromagnetic critical point of the Potts model on the square lattice was identified by Baxter [1] as a staggered integrable six-vertex model. In this work, we investigate the integrable structure of this model. It enables us to derive some new properties, such as the Hamiltonian limit of the model, an equivalent vertex model, and the structure resulting from the  $Z_2$  symmetry. Using this material, we discuss the low-energy spectrum, and relate it to geometrical excitations. We also compute the critical exponents by solving the Bethe equations for a large lattice width  $N$ . The results confirm that the low-energy spectrum is a collection of continua with typical exponent gaps of order  $(\log N)^{-2}$ .

## 1 Introduction

Our understanding of  $1 + 1$  conformal field theories with non compact target spaces has improved a great deal in the last few years, thanks to the use of geometrical methods [2], and ideas from string theory [3]. The topic is of the highest interest in the context of the AdS/CFT duality.

Theories with non compact target spaces also play an important role in statistical mechanics. A sophisticated example of this role occurs in the supersymmetric approach to phase transitions for non interacting disordered electronic systems, where the universality class of the transition between plateaux of the integer quantum Hall effect is related with the IR limit of a non compact  $1 + 1$  supersigma model at  $\theta = \pi$  [4]. A more basic example is provided by Brownian motion and subtle properties thereof, such as the (non) intersection exponents [5]. In both cases, the non compactness of the target space occurs because the electron trajectories or the random path can visit a given site (edge) an infinite number of times. This is in sharp contrast with self avoiding models for which almost everything is by now understood, and related with ordinary CFTs (essentially, a twisted free boson).

An obvious strategy to tackle the physics of models with non compact target spaces is to start with a lattice model having an infinity of degrees of freedom per site/link. For instance, it is easy to generalize the usual XXX chain to a non compact representation of  $SL(2, R)$ , and try to use the standard tools of Bethe ansatz, Baxter Q-operator, etc, to obtain properties such as gaplessness and critical exponents. Despite some serious progress in this direction [6], the problem is far from being closed.

Another strategy is based on the observation that a non compact continuum limit may well arise from a lattice model with finite number of degrees of freedom per site/link if the non unitarity is strong enough. The two families of examples exhibited so far involve models with supergroup symmetries—either models with  $OSP(m|2n)$  symmetries (such as intersecting loop models) [7] which, in their Goldstone phases can be described in the IR by a collection of free bosons and symplectic fermions, or the  $SU(1|2)$  integrable spin chain with alternating 3 and  $\bar{3}$  representations, which was found to be described by the  $SU(2|1)$  WZW model at  $k = 1$  [8]. In both cases, a *continuous spectrum of critical exponents* is found, and the target space does exhibit some non compact directions indeed.

The examples of Brownian motion and self intersecting dense curves should convince the reader that non compact target spaces are more common and useful than might have been surmised a few years ago. In a recent paper, we found [9] that the antiferromagnetic Potts model on the square lattice for  $Q$  continuous has critical properties seemingly involving a twisted non compact boson. This conclusion was based on some numerical and analytical evidence, and implied that the well known six-vertex model itself might exhibit such an exotic continuum limit if properly staggered. The purpose of this paper is to discuss these results further, and put them on considerably firmer grounds.

Indeed, the evidence for a continuous spectrum of critical exponents is not so easy to obtain from studies of a finite lattice model. What was really established so far in [7, 8, 9] was that low energy levels appeared with extremely high degeneracies in the limit of long chains, and that naive calculations of finite size corrections indicated truly infinite degeneracies. This was—thanks to complementary arguments, such as mappings onto sigma models, or abstract construction of WZW theories on supergroups—interpreted as strong indications for a continuous spectrum in the scaling limit. Direct evidence was however missing, together with estimates of the measure of integration on the continuous spectrum, if any. These issues will be resolved here.

The paper is organized as follows. In section 2, the critical antiferromagnetic Potts model and the related staggered six-vertex model are defined. Symmetries and limiting cases are studied. It is shown in particular that the model coincides with the  $OSP(2|2)$  model of [7] in one limit, and the  $SO(4)$  model in another. In section 3, the solution of the model using the Bethe ansatz is discussed. In section 4, a detailed analysis of the spectrum of conformal exponents from the Bethe equations is carried out. Very accurate evidence for the existence of a continuous spectrum is obtained, together with some information on the measure. This information is used in section 5 to relate the results to theoretical expectations, in particular those of the supersphere sigma model of [10]. Elements for a physical interpretation of the continuous spectrum are proposed in section 6. Conclusions are gathered in section 7.

## 2 The staggered six-vertex model and its integrable structure

### 2.1 The general integrable six-vertex model

On the square lattice  $\mathcal{L}'$  of  $2N$  vertical lines and  $M$  horizontal lines, associate the complex number  $v(J)$  to the  $J$ -th vertical line, and  $h(I)$  to the  $I$ -th horizontal line (see figure 1). The parameters  $v(J)$  and  $h(I)$  are called *line rapidities*. On this lattice, define the general inhomogeneous six-vertex model with local weights given in terms of the difference  $u_{IJ} = h(I) - v(J)$ . The weights that satisfy the Yang-Baxter equations are obtained by taking equations (1.5)–(1.6) of ref. [11] and performing the substitution :

$$t, \rho(I), \sigma(J), \kappa(I, J) \rightarrow e^{i\gamma}, e^{i\gamma-2ih(I)}, e^{2iv(J)}, \frac{i}{2}e^{ih(I)-iv(J)-i\gamma} \quad (1)$$

$$\alpha(I, J), \beta(I, J), \gamma(I, J) \rightarrow 1, 1, \lambda_{IJ} \quad (2)$$

Thus, the weights of the inhomogeneous integrable six-vertex model (see figure 2) are :

$$\begin{aligned} \omega_1(I, J), \dots, \omega_6(I, J) = & \sin(\gamma - u_{IJ}), \sin(\gamma - u_{IJ}), \sin u_{IJ}, \sin u_{IJ}, \\ & \lambda_{IJ} e^{-iu_{IJ}} \sin \gamma, (\lambda_{IJ})^{-1} e^{iu_{IJ}} \sin \gamma \end{aligned} \quad (3)$$

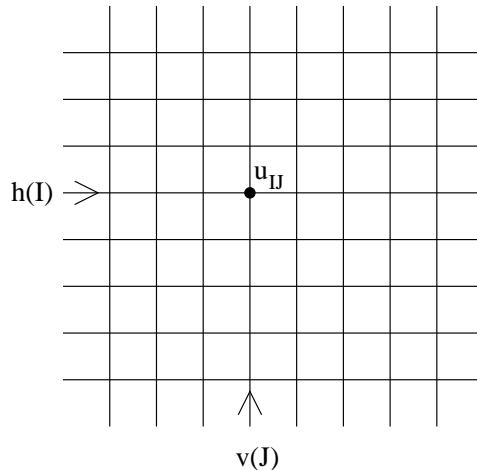


Figure 1: The spectral parameter  $u_{IJ}$  defined by the line rapidities.

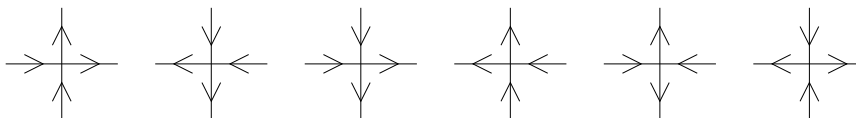


Figure 2: The allowed configurations of the six-vertex model.

The parameters  $\lambda_{IJ}$  must satisfy the additional condition :

$$\lambda_{I,J+1}\lambda_{I+1,J} = \lambda_{I,J}\lambda_{I+1,J+1} \quad (4)$$

The parameters  $\lambda_{IJ}$  do not alter the eigenvalues of the transfer matrix, thus they play the role of gauge parameters. The parameter  $\Delta$  has the value :

$$\Delta = -\cos\gamma \quad (5)$$

## 2.2 The staggered six-vertex model associated to the critical antiferromagnetic Potts model

The anisotropic Potts model on the square lattice  $\mathcal{L}$  is defined by the partition function :

$$Z_{\text{Potts}} = \sum_{\{s_i\}} \prod_{\langle ij \rangle \text{ even}} \exp[J_1 \delta(s_i, s_j)] \prod_{\langle ij \rangle \text{ odd}} \exp[J_2 \delta(s_i, s_j)] \quad (6)$$

where each spin  $s_i$  lives on a vertex of  $\mathcal{L}$  (white circles), and each coupling factor is associated to an edge of  $\mathcal{L}$  (dotted lines). The spin  $s_i$  can take  $Q$  distinct values. The sum is over all spin configurations, and each product corresponds to one type of edge of  $\mathcal{L}$ .

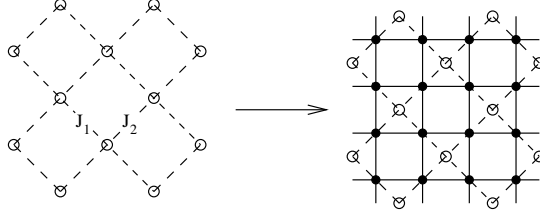


Figure 3: The square lattice  $\mathcal{L}$  (dotted lines and white circles) and its medial lattice  $\mathcal{L}'$  (full lines and black circles).

When the couplings  $J_1$  and  $J_2$  are negative, the model is antiferromagnetic. In this domain, the critical line separating the paramagnetic and antiferromagnetic phases is given by the condition :

$$(e^{J_1} + 1)(e^{J_2} + 1) = 4 - Q \quad (7)$$

The model defined by eq. (6) on the square lattice  $\mathcal{L}$  can be mapped to a six-vertex model on the square lattice  $\mathcal{L}'$ . This lattice is represented in full lines and black circles, and is called the medial lattice of  $\mathcal{L}$  (see figure 3). The weights of this six-vertex model depend on the parameters  $J_1$ ,  $J_2$  and  $Q$ . We use the notations :

$$\sqrt{Q} = 2 \cos \gamma \quad (8)$$

$$x_1 = \frac{e^{J_1} - 1}{\sqrt{Q}}, \quad x_2 = \frac{e^{J_2} - 1}{\sqrt{Q}} \quad (9)$$

The equivalent six-vertex model has weights  $\omega_1, \dots, \omega_6$  on the even vertices and  $\omega'_1, \dots, \omega'_6$  on the odd vertices, where :

$$\omega_1, \dots, \omega_6 = 1, 1, x_1, x_1, e^{i\gamma/2} + x_1 e^{-i\gamma/2}, e^{-i\gamma/2} + x_1 e^{i\gamma/2} \quad (10)$$

$$\omega'_1, \dots, \omega'_6 = x_2, x_2, 1, 1, e^{-i\gamma/2} + x_2 e^{i\gamma/2}, e^{i\gamma/2} + x_2 e^{-i\gamma/2} \quad (11)$$

The parameter  $\Delta$  is independent of the parameters  $x_1$  and  $x_2$  :

$$\Delta = \frac{\omega_1 \omega_2 + \omega_3 \omega_4 - \omega_5 \omega_6}{2\omega_1 \omega_3} = \frac{\omega'_1 \omega'_2 + \omega'_3 \omega'_4 - \omega'_5 \omega'_6}{2\omega'_1 \omega'_3} = -\cos \gamma \quad (12)$$

The criticality condition (7) can be parametrized by :

$$x_1 = \frac{\sin u}{\sin(\gamma - u)}, \quad x_2 = -\frac{\cos(\gamma - u)}{\cos u} \quad (13)$$

When this condition is satisfied, the weights (10)–(11) of the Potts model correspond to a particular case of the integrable six-vertex model (3). The rapidity  $v(J)$  is equal to 0 (resp.  $\pi/2$ ) when  $J$  is even (resp. odd). The rapidity  $h(I)$  is equal to  $u$  (resp.  $u + \pi/2$ ) when  $I$  is even (resp. odd). This configuration of the line rapidities is shown in figure 4. The gauge parameter is set to  $\lambda = e^{i\gamma/2}$  at every vertex. Thus, the partition function of the Potts model at the antiferromagnetic critical point is described by the two-row transfer matrix of the integrable six-vertex model with the above choice of the rapidities. We call this matrix  $\mathcal{T}(u)$  (see figure 5).

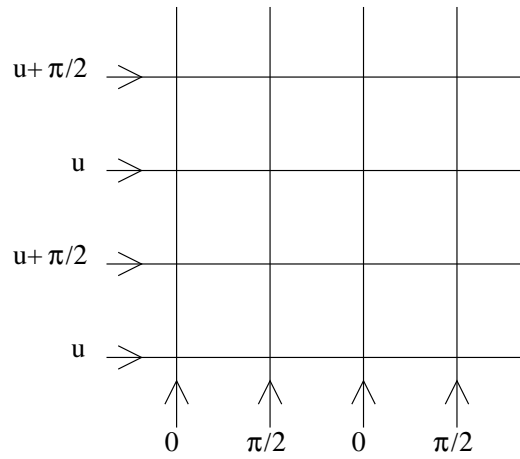


Figure 4: The line rapidities corresponding to the antiferromagnetic critical point of the Potts model

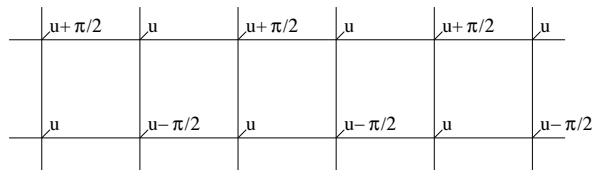


Figure 5: The transfer matrix  $\mathcal{T}(u)$ . The value next to each vertex is the spectral parameter  $u_{I,J}$ .

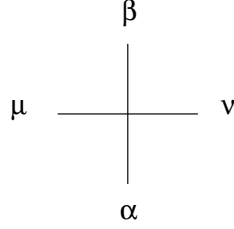


Figure 6: The  $R$  matrix of the six-vertex model.

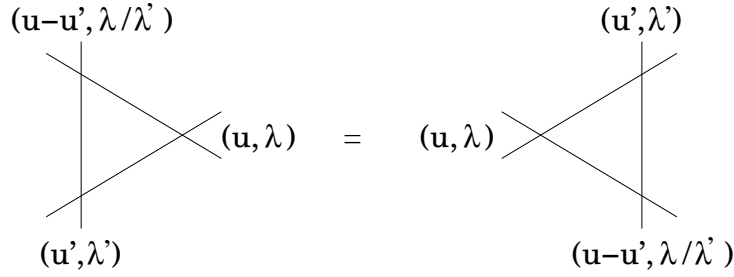


Figure 7: The Yang-Baxter relation for the six-vertex  $R$ -matrix.

## 2.3 The $\mathcal{R}$ -matrix and the thirty-eight-vertex model

### 2.3.1 Building block : the $R$ -matrix of the six-vertex model

*Definition.* The  $R$ -matrix of the integrable six-vertex model is defined by its matrix element  $R_{\alpha\mu}^{\nu\beta}$  equal to the Boltzmann weight of the configuration shown in fig. 6. Let  $V$  be the Hilbert space generated by the vectors  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ . Then the  $R$ -matrix is a linear operator mapping the space  $V_\mu \otimes V_\alpha$  onto  $V_\beta \otimes V_\nu$ . The matrix elements of the  $R$ -matrix with spectral parameter  $u_{IJ} = u$  and gauge parameter  $\lambda_{IJ} = \lambda$  are the Boltzmann weights (3). In the basis  $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$ , the  $R$ -matrix is :

$$R(u, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\gamma - u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda e^{-iu} \sin \gamma & \sin u & 0 \\ 0 & \sin u & \lambda^{-1} e^{iu} \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\gamma - u) \end{pmatrix} \quad (14)$$

*Symmetries.* The  $R$ -matrix satisfies the Yang-Baxter equations shown in fig. 7 and the inversion relation :

$$R(u, \lambda)R(-u, \lambda^{-1}) = \sin(\gamma - u) \sin(\gamma + u) \mathbb{1} \quad (15)$$

It also has the symmetry property :

$$R(u + \pi, \lambda) = -R(u, \lambda) \quad (16)$$

The  $R$ -matrix preserves the total magnetization :

$$\sigma_\mu^z + \sigma_\alpha^z = \sigma_\beta^z + \sigma_\nu^z \quad (17)$$

*Relation to the Temperley-Lieb algebra.* When the gauge is set to  $\lambda = 1$ , the  $R$ -matrix can be written in terms of the Temperley-Lieb generator  $E$  :

$$R(u, 1) = \sin(\gamma - u) \mathbb{1} + \sin u E \quad (18)$$

where :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

In the Hilbert space of row configurations  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_{2N}$ , define the operators :

$$E_m \equiv \mathbb{1}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{m-1} \otimes E \otimes \mathbb{1}_{m+2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{2N}, \quad m = 1 \dots 2N \quad (20)$$

with a non-trivial action on the space  $V_m \otimes V_{m+1}$ . This family of operators satisfy the Temperley-Lieb algebra :

$$(E_m)^2 = \sqrt{Q} E_m \quad (21)$$

$$E_m = E_m E_{m+1} E_m = E_m E_{m-1} E_m \quad (22)$$

$$E_m E_{m'} = E_{m'} E_m \quad \text{if } |m - m'| > 1 \quad (23)$$

The operators  $E_m$  can be expressed in terms of the Pauli matrices :

$$E_m = \frac{1}{2} [\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y - \cos \gamma (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - \mathbb{1}) - i \sin \gamma (\sigma_m^z - \sigma_{m+1}^z)] \quad (24)$$

or, in a more compact form :

$$E_m = \sigma_m^+ \sigma_{m+1}^- + \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+ + \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \sigma_m^z \sigma_{m+1}^z) e^{-i\gamma \sigma_m^z} \quad (25)$$

### 2.3.2 The $\mathcal{R}$ -matrix. Conservation laws.

The six-vertex model defined in section 2.2 is not homogeneous, and the transfer matrix  $\mathcal{T}(u)$  is built using  $R$ -matrices with different values of  $u_{IJ}$ . One can construct a homogeneous model by considering the  $\mathcal{R}$ -matrix, acting on double-edges. The double-edges live in the Hilbert space :

$$\mathcal{V} \equiv V \otimes V \quad (26)$$

The  $\mathcal{R}$ -matrix acts on the product space  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ .

As a consequence of the magnetization conservation by  $R$ , the  $\mathcal{R}$ -matrix also preserves the total magnetization :

$$\sigma_{\mu_1}^z + \sigma_{\mu_2}^z + \sigma_{\alpha_1}^z + \sigma_{\alpha_2}^z = \sigma_{\beta_1}^z + \sigma_{\beta_2}^z + \sigma_{\nu_1}^z + \sigma_{\nu_2}^z \quad (27)$$

When the gauge parameter is set to  $\lambda = 1$ , another conserved quantity can be constructed. Start from the operator  $c$  :

$$c \equiv -(\cos \gamma)^{-1} R(\pi/2, 1) = (\cos \gamma)^{-1} R(-\pi/2, 1) \quad (28)$$



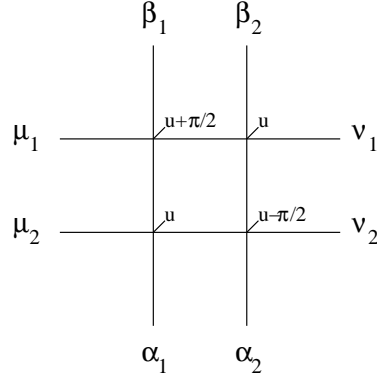


Figure 8: The matrix  $\mathcal{R}(u)$ , defining the antiferromagnetic critical point of the Potts model.

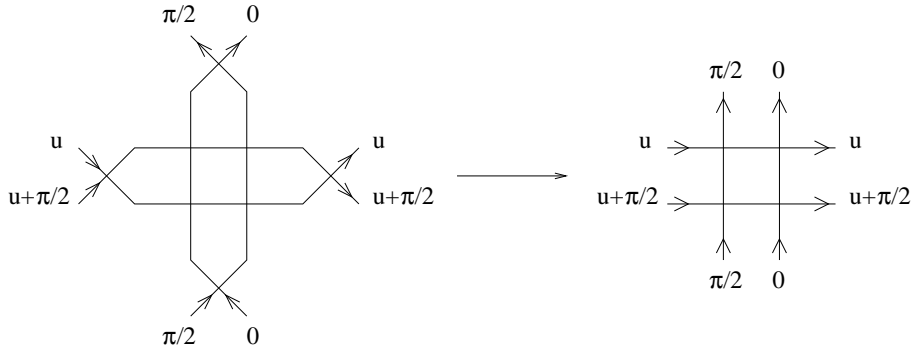


Figure 9: A graphical representation of the identity :  $(c \otimes c)^{-1} \mathcal{R}(c \otimes c) = \mathcal{R}$ .

This operator can be expressed in terms of the Temperley-Lieb generator :

$$c = \mathbb{1} - (\cos \gamma)^{-1} E \tag{29}$$

According to the inversion relation (15), this operator has the property :

$$c^2 = \mathbb{1} \tag{30}$$

The  $\mathcal{R}$ -matrix obeys the conservation rule :

$$[\mathcal{R}(u), c \otimes c] = 0 \tag{31}$$

This is a consequence of the Yang-Baxter equations and the inversion relation, as shown in fig. 9.

The eigenvectors of the operator  $c$  are :

$$|0\rangle = (2 \cos \gamma)^{-1/2} \left( e^{i\gamma/2} |\uparrow\downarrow\rangle - e^{-i\gamma/2} |\downarrow\uparrow\rangle \right) \quad (32)$$

$$|\bar{0}\rangle = (2 \cos \gamma)^{-1/2} \left( e^{-i\gamma/2} |\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\gamma/2} |\downarrow\uparrow\rangle \right) \quad (33)$$

$$|+\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \quad (34)$$

$$|-\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \quad (35)$$

The eigenspace associated to the eigenvalue 1 is  $\{|+\rangle, |-\rangle, |0\rangle\}$ , and the eigenspace associated to the eigenvalue  $-1$  is  $\{|\bar{0}\rangle\}$ .

### 2.3.3 Mapping to the 38-vertex model

The coefficients of the  $\mathcal{R}$ -matrix in the basis :

$$(|+\rangle, |-\rangle, |0\rangle, |\bar{0}\rangle) \otimes (|+\rangle, |-\rangle, |0\rangle, |\bar{0}\rangle) \quad (36)$$

define the Boltzmann weights of a 38-vertex model on the square lattice (see figure 10). In this vertex model, each edge carries an arrow or a thick line. The state  $|+\rangle$  (*resp.*  $|-\rangle$ ) is represented by an up or right (*resp.* down or left) arrow. The state  $|0\rangle$  is represented by an empty edge, and the state  $|\bar{0}\rangle$  by a thick line. Setting :

$$\gamma_0 = \pi - 2\gamma \quad (37)$$

$$u_0 = -2u \quad (38)$$

$$a_0, b_0, c_0 = \sin(\gamma_0 - u_0), \sin u_0, \sin \gamma_0 \quad (39)$$

the weights of the 38-vertex model read :

$$\begin{aligned}
a_1^{(1)} &= a_1^{(8)} = -\frac{1}{4} [(c_0)^2 + a_0 b_0] \\
a_1^{(2)} &= a_1^{(4)} = \frac{1}{4} b_0 c_0 \\
a_1^{(3)} &= a_1^{(5)} = \frac{1}{4} a_0 c_0 \\
a_1^{(6)} &= a_1^{(7)} = -\frac{1}{4} a_0 b_0 \\
a_2^{(1)} &= a_4^{(1)} = -\frac{1}{4} e^{-2iu} a_0 c_0 \\
a_2^{(2)} &= a_4^{(2)} = \frac{1}{4} a_0 c_0 \\
a_3^{(1)} &= a_5^{(1)} = -\frac{1}{4} e^{2iu} a_0 c_0 \\
a_3^{(2)} &= a_5^{(2)} = \frac{1}{4} a_0 c_0 \\
a_6^{(1)} &= a_8^{(1)} = \frac{1}{4} e^{-i(\gamma-2u)} b_0 c_0 \\
a_6^{(2)} &= a_8^{(2)} = \frac{1}{4} e^{i\gamma} b_0 c_0 \\
a_7^{(1)} &= a_9^{(1)} = \frac{1}{4} e^{i(\gamma-2u)} b_0 c_0 \\
a_7^{(2)} &= a_9^{(2)} = \frac{1}{4} e^{-i\gamma} b_0 c_0 \\
a_{10}^{(1)} &= a_{11}^{(1)} = a_{12}^{(1)} = a_{13}^{(1)} = -\frac{1}{4} a_0 b_0 \\
a_{10}^{(2)} &= a_{11}^{(2)} = a_{12}^{(2)} = a_{13}^{(2)} = -\frac{1}{4} a_0 b_0 \\
a_{14} &= a_{15} = -\frac{1}{4} (a_0)^2 \\
a_{16} &= a_{17} = -\frac{1}{4} (b_0)^2 \\
a_{18} &= \frac{1}{4} e^{-2iu} c_0 (b_0 - a_0) \\
a_{19} &= \frac{1}{4} e^{2iu} c_0 (b_0 - a_0)
\end{aligned}$$

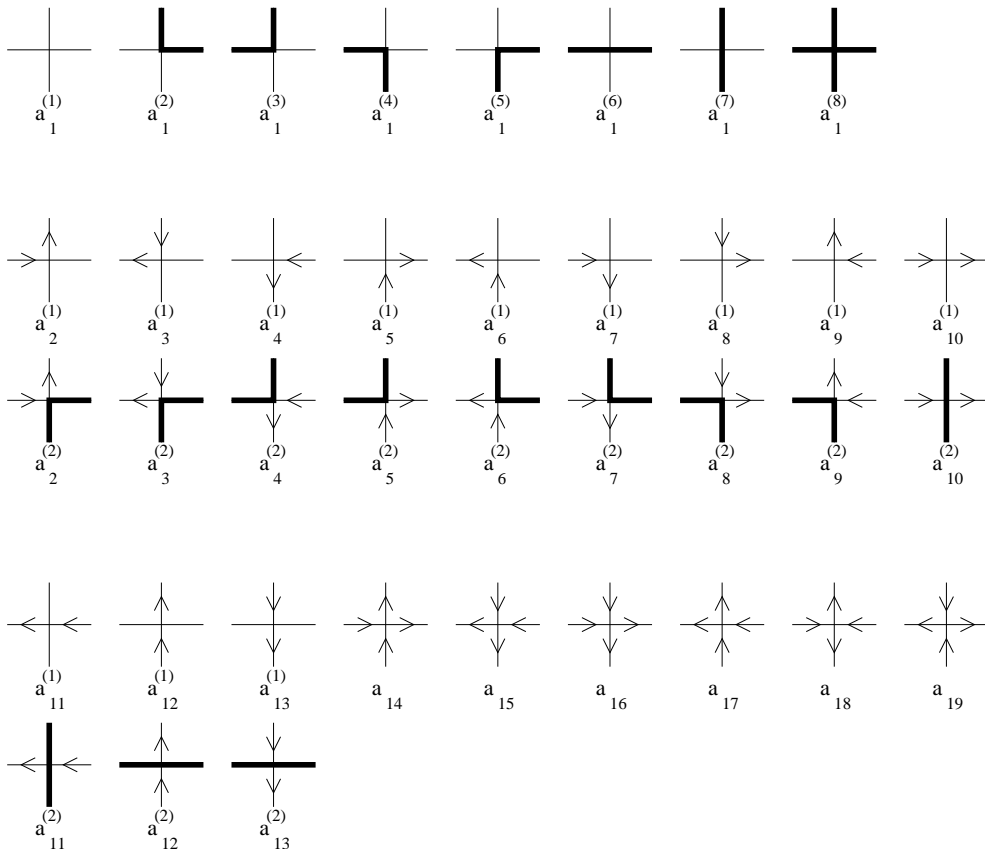


Figure 10: The 38-vertex model

### 2.3.4 The limit $\gamma \rightarrow \pi/2$

If the parameter  $\gamma$  is set to  $\pi/2$  and the spectral parameter  $u$  is fixed, then the weights of the 38-vertex model are equal to zero, except :

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= a_1^{(8)} = a_1^{(6)} = a_1^{(7)} = \frac{1}{4} \sin^2 2u \\ a_{10}^{(1,2)} &= a_{11}^{(1,2)} = a_{12}^{(1,2)} = a_{13}^{(1,2)} = \frac{1}{4} \sin^2 2u \\ a_{14} &= a_{15} = a_{16} = a_{17} = -\frac{1}{4} \sin^2 2u \end{aligned}$$

The  $\mathcal{R}$ -matrix is proportional to the ‘‘graded permutation’’  $P$  :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4} \sin^2 2u P \quad (\gamma \rightarrow \pi/2, u \text{ fixed}) \quad (40)$$

$$P|j\rangle|k\rangle = (-1)^{g_j g_k} |k\rangle|j\rangle, \quad j, k \in \{0, \bar{0}, +, -\} \quad (41)$$

$$g_0, g_{\bar{0}}, g_+, g_- = 0, 0, 1, 1 \quad (42)$$

This trivial limit can be avoided by scaling the spectral parameter as :

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \epsilon, \quad u = \frac{\pi}{2} + \epsilon w \quad (43)$$

where  $\epsilon \rightarrow 0^-$  and  $w$  is fixed. In this rescaled limit, the Boltzmann weights are proportional to  $\epsilon^2$ .

Note that the states  $|0\rangle, |\bar{0}\rangle$  become degenerate, but the following combinations remain non-degenerate :

$$|0\rangle + i|\bar{0}\rangle = e^{i\pi/4} [\tan(-\epsilon/2)]^{-1/2} (|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle) \quad (44)$$

$$|0\rangle - i|\bar{0}\rangle = e^{-i\pi/4} [\tan(-\epsilon/2)]^{1/2} (|\uparrow\downarrow\rangle - i|\downarrow\uparrow\rangle) \quad (45)$$

Denote  $\tilde{a}_i^{(j)}$  the matrix elements of  $\tilde{\mathcal{R}} \equiv \mathcal{R}/(-\epsilon^2)$  in the basis  $(|0\rangle, |\bar{0}\rangle, |+\rangle, |-\rangle)$ . One gets :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1^{(1)} &= \tilde{a}_1^{(8)} = (1 + w - w^2) \\ \tilde{a}_1^{(2)} &= \tilde{a}_1^{(4)} = w \\ \tilde{a}_1^{(3)} &= \tilde{a}_1^{(5)} = \tilde{a}_2^{(1,2)} = \tilde{a}_3^{(1,2)} = \tilde{a}_4^{(1,2)} = \tilde{a}_5^{(1,2)} = (1 - w) \\ \tilde{a}_1^{(6)} &= \tilde{a}_1^{(7)} = \tilde{a}_{10}^{(1,2)} = \tilde{a}_{11}^{(1,2)} = \tilde{a}_{12}^{(1,2)} = \tilde{a}_{13}^{(1,2)} = w(1 - w) \\ \tilde{a}_6^{(1,2)} &= \tilde{a}_8^{(1,2)} = iw \\ \tilde{a}_7^{(1,2)} &= \tilde{a}_9^{(1,2)} = -iw \\ \tilde{a}_{14} &= \tilde{a}_{15} = (1 - w)^2 \\ \tilde{a}_{16} &= \tilde{a}_{17} = w^2 \\ \tilde{a}_{18} &= \tilde{a}_{19} = (1 - 2w) \end{aligned}$$

These weights can be related to an integrable loop model with  $OSP(2|2)$  symmetry. Indeed, the matrix  $\tilde{\mathcal{R}}$  can be expressed as a combination of the identity, the permutation operator  $P$  defined in equation (41), and the Temperley-Lieb operator  $E$ . The latter is defined in tensor notation as a contraction of the spaces  $\mathcal{V}_\mu, \mathcal{V}_\alpha$  and  $\mathcal{V}_\beta, \mathcal{V}_\nu$  (see figure 8) :

$$E_{\alpha\mu}^{\nu\beta} = J_{\nu\beta}(J^\dagger)_{\alpha\mu} \quad (46)$$

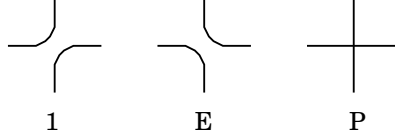


Figure 11: The three allowed vertices of the dense intersecting loop model.

where  $J$  is the bilinear form in the basis  $(|0\rangle, |\bar{0}\rangle, |+\rangle, |-\rangle)$  :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^\dagger J = J J^\dagger = \mathbb{1} \quad (47)$$

By construction, the operator obeys the Temperley-Lieb algebraic relations (21), (22), (23), with :

$$E^2 = \text{Tr}(J^* J) E = 0 \quad (48)$$

In the block  $\{|0\rangle \otimes |0\rangle, |\bar{0}\rangle \otimes |\bar{0}\rangle, |+\rangle \otimes |-\rangle, |-\rangle \otimes |+\rangle\}$ , the matrix of the operator  $E$  is :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -i & i \\ 1 & 1 & -i & i \\ -i & -i & -1 & 1 \\ i & i & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

The matrix  $\tilde{\mathcal{R}}$  is equal to :

$$\tilde{\mathcal{R}} = (1 - w)\mathbb{1} + wE + w(1 - w)P \quad (50)$$

These weights define an integrable loop model [12], with three allowed vertices, and a loop fugacity  $q = 0$ . The graphical correspondence is shown in figure 11. Note that according to equation (13), the Potts model is isotropic when  $u = \gamma/2 + \pi/4$ , which is equivalent to  $w = 1/2$ . This is also the isotropic point of the loop model (50).

We conclude that, in the limit  $\gamma \rightarrow \pi/2$ , the staggered six-vertex model coincides with the  $OSP(2|2)$  integrable model. In this limit, the arrows represent the fermionic coordinates, and the thin and thick lines the bosonic ones. The equivalence in the boundary conditions has to be treated with some care however: the periodic vertex model corresponds to the antiperiodic sector of the  $OSP$  system, with an effective central charge  $c_{\text{eff}} = 1 + (-2) - 24 \times (-1/8) = 2$ . This means that the  $OSP$  symmetry is broken in the periodic vertex model, where the fermions are twisted - *i.e.* they become a complex (Dirac) fermion instead of symplectic fermions.

### 2.3.5 The limit $\gamma \rightarrow 0$

The approach for this limit is similar to the case  $\gamma \rightarrow \pi/2$ . Consider the following limit :

$$\gamma = \epsilon, \quad u = -w\epsilon \quad (51)$$

where  $\epsilon \rightarrow 0^+$  and  $w$  is fixed. It is convenient to perform the change of basis :

$$|\tilde{0}\rangle = i|0\rangle \quad (52)$$

$$|\tilde{\bar{0}}\rangle = i|\bar{0}\rangle \quad (53)$$

$$|\tilde{+}\rangle = |+\rangle \quad (54)$$

$$|\tilde{-}\rangle = |-\rangle \quad (55)$$

Define a transformation of the  $\mathcal{R}$ -matrix that does not affect the partition function : the Boltzmann weights of the vertices are multiplied by  $(-1)$  for each  $\pi/2$ -turn of the thick lines (the weight  $a_1^{(8)}$  is not affected). Since the number of such turns is even for every thick polygon on the lattice, the partition function is invariant under this transformation.

Denote  $\tilde{a}_i^{(j)}$  the matrix elements of the (rescaled) resulting matrix  $\tilde{\mathcal{R}} \equiv \mathcal{R}/(-\epsilon^2)$  in the basis  $(|\tilde{0}\rangle, |\tilde{\bar{0}}\rangle, |\tilde{+}\rangle, |\tilde{-}\rangle)$ . One gets :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1^{(1)} &= \tilde{a}_1^{(8)} = (1 + w + w^2) \\ \tilde{a}_1^{(2)} &= \tilde{a}_1^{(4)} = -w \\ \tilde{a}_1^{(3)} &= \tilde{a}_1^{(5)} = \tilde{a}_2^{(1,2)} = \tilde{a}_3^{(1,2)} = \tilde{a}_4^{(1,2)} = \tilde{a}_5^{(1,2)} = (1 + w) \\ \tilde{a}_1^{(6)} &= \tilde{a}_1^{(7)} = \tilde{a}_{10}^{(1,2)} = \tilde{a}_{11}^{(1,2)} = \tilde{a}_{12}^{(1,2)} = \tilde{a}_{13}^{(1,2)} = w(1 + w) \\ \tilde{a}_6^{(1,2)} &= \tilde{a}_8^{(1,2)} = -w \\ \tilde{a}_7^{(1,2)} &= \tilde{a}_9^{(1,2)} = -w \\ \tilde{a}_{14} &= \tilde{a}_{15} = (1 + w)^2 \\ \tilde{a}_{16} &= \tilde{a}_{17} = w^2 \\ \tilde{a}_{18} &= \tilde{a}_{19} = 1 \end{aligned}$$

The corresponding loop model is constructed with two generators  $P$  and  $E$ . The permutation operator  $P$  is defined as :

$$P_{\beta\nu\mu\alpha} = \delta_{\beta\alpha}\delta_{\nu\mu} \quad (56)$$

The Temperley-Lieb operator  $E$  with parameter  $\sqrt{Q} = 4$  is built using the simple contraction :

$$E_{\beta\nu\mu\alpha} = J_{\nu\beta}J_{\alpha\mu} \quad (57)$$

where :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \mathbb{1} \quad (58)$$

The matrix  $\tilde{\mathcal{R}}$  is equal to :

$$\tilde{\mathcal{R}} = (1 + w)\mathbb{1} - wE + w(1 + w)P \quad (59)$$

These are the integrable weights of the loop model defined in [12] with a loop fugacity  $q = 4$ . Note that, in this regime, the Potts model is anisotropic for any value of  $w$ . The loop model itself is isotropic when  $w = -1/2$  : the relative weight for loop crossings is then equal to  $-1/2$ . Following [12], this model is a graphical version of the  $SO(4)$  integrable model based on the vector representation. Using that  $so(4) = sl(2) + sl(2)$  one can expect it to decouple into two copies of the isotropic six-vertex model or XXX spin chain, a feature we will confirm when discussing the associated hamiltonian or Bethe equations.

## 2.4 Transfer matrices

In this section, we set the gauge to  $\lambda = 1$ , so that the transfer matrices can be related to the generators of the Temperley-Lieb algebra.

*One-row transfer matrix.* The two-row transfer matrix  $\mathcal{T}(u)$  is the product of two one-row transfer matrices :  $\mathcal{T}(u) = T(u + \pi/2) T(u)$ . (see fig. 5). As a consequence of the Yang-Baxter equations and the inversion relation, when periodic boundar conditions are imposed in the horizontal direction, the one-row transfer matrices commute :

$$[T(u), T(u')] = 0 \quad (60)$$

The one-row transfer matrices have the property :

$$T(u + \pi/2) = (-1)^N e^{iP} T(u) e^{-iP} \quad (61)$$

Define the operator  $e^{-iP}$  as the shift of all vertical edges by one site to the right. The operator  $c$  defined by equation (28) is used to build a conserved quantity of the transfer matrix. Denoting  $c_m$  the charge operator acting on the space  $V_m \otimes V_{m+1}$ , the global charge is :

$$C \equiv c_1 \times c_3 \times \cdots \times c_{2N-1} \quad (62)$$

$$C^2 = \mathbb{1} \quad (63)$$

If  $u = 0$ , the transfer matrices  $T(u), T(u + \pi/2)$  become :

$$T(0) = \left( \frac{1}{2} \sin 2\gamma \right)^N e^{-iP} C \quad (64)$$

$$T(\pi/2) = \left( -\frac{1}{2} \sin 2\gamma \right)^N C e^{-iP} \quad (65)$$

The matrices (62), (64), (65) are represented in figure 12.

*Conservation laws for  $\mathcal{T}$ .* As a consequence of the conservation of the total magnetization and the ‘‘charge’’  $c$  by the  $\mathcal{R}$ -matrix, the transfer matrix  $\mathcal{T}$  preserves the total magnetization :

$$S = \frac{1}{2} (\sigma_1^z + \cdots + \sigma_{2N}^z) \quad (66)$$

and the ‘‘charge’’  $C$  defined above. Since  $\mathcal{T}(u)$  also commutes with the transfer matrix  $T(0)$ ,  $\mathcal{T}(u)$  is invariant under the action of the one-site shift operator  $e^{-iP}$ .

## 2.5 Hamiltonian limit of the transfer matrix

To compute the derivative of the matrix  $T(u)$  at the points  $u = 0, u = \pi/2$ , it is convenient to write this matrix in terms of the  $R$ -matrix :

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_{2N}}^{\beta_1 \dots \beta_{2N}}(u) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{2N}} R_{\alpha_1 \mu_1}^{\mu_2 \beta_1}(u) R_{\alpha_2 \mu_2}^{\mu_3 \beta_2}(u - \pi/2) \dots R_{\alpha_{2N-1} \mu_{2N-1}}^{\mu_{2N} \beta_{2N-1}}(u) R_{\alpha_{2N} \mu_{2N}}^{\mu_1 \beta_{2N}}(u - \pi/2)$$

Denote by  $\delta$  the derivative with respect to  $u$ . According to eq. (18) :

$$\delta R(u) = -\cos(\gamma - u) \mathbb{1} + \cos u E \quad (67)$$



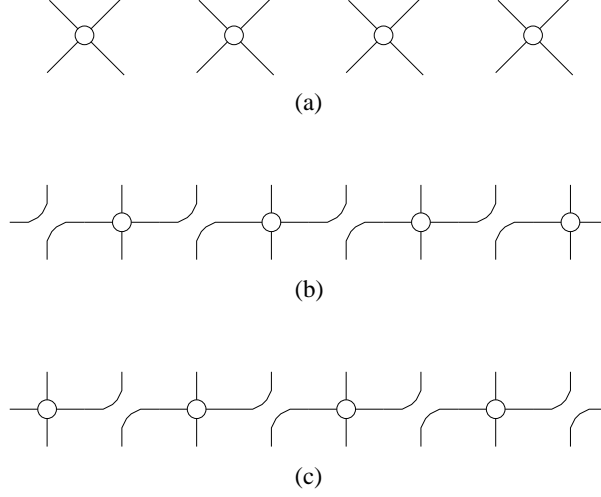


Figure 12: Diagrams defining the transfer matrices  $C$  (a),  $e^{-iP}C$  (b) and  $Ce^{-iP}$  (c), for  $N = 4$ . The white circles represent  $c$  operators.

Differentiating the previous expression yields :

$$\delta T(0) = \left( \frac{1}{2} \sin 2\gamma \right)^{N-1} \sum_{j=1}^N (-\cos^2 \gamma t_{2j-1} + \sin^2 \gamma t_{2j}) \quad (68)$$

where the matrices  $t_{2j-1}$  and  $t_{2j}$  are defined by the diagrams on fig. 13. Using the graphical representation of the matrices  $T(0)$ ,  $t_{2j-1}$ ,  $t_{2j}$  in figures 12–13 and the property (30), one gets the intermediate results :

$$[T(0)]^{-1} t_{2j-1} = \left( \frac{1}{2} \sin 2\gamma \right)^{-1} c_{V_{2j-3} \otimes V_{2j-2}} c_{V_{2j-2} \otimes V_{2j-1}} c_{V_{2j-3} \otimes V_{2j-2}} \quad (69)$$

$$[T(0)]^{-1} t_{2j} = \left( \frac{1}{2} \sin 2\gamma \right)^{-1} c_{V_{2j-1} \otimes V_{2j}} \quad (70)$$

The Hamiltonians  $H_1, H_2$  are defined as the logarithmic derivatives of the transfer matrix  $T(u)$  at the points  $u = 0, \pi/2$ .

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv \frac{1}{2} \sin 2\gamma [T(0)]^{-1} \delta T(0) \\ &= \sum_{j=1}^N [-\cos 2\gamma \mathbb{1} + \cos \gamma (E_{2j-1} + E_{2j}) - (E_{2j} E_{2j-1} + E_{2j-1} E_{2j})] \end{aligned} \quad (71)$$

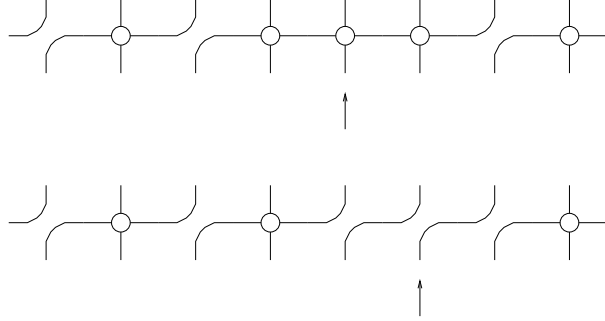


Figure 13: Diagrams defining  $t_{2j-1}$  and  $t_{2j}$  of eq. (68), for  $N = 4$  and  $j = 3$ . The white circles represent  $c$  operators. The arrow points to the vertex that differs from  $T(0)$ .

Using eq. (61),

$$\begin{aligned}
H_2 &\equiv \frac{1}{2} \sin 2\gamma [T(\pi/2)]^{-1} \delta T(\pi/2) \\
&= e^{iP} H_1 e^{-iP} \\
&= \sum_{j=1}^N [-\cos 2\gamma \mathbb{1} + \cos \gamma (E_{2j} + E_{2j+1}) - (E_{2j+1} E_{2j} + E_{2j} E_{2j+1})]
\end{aligned} \tag{72}$$

The Hamiltonian associated with the two-row transfer matrix  $\mathcal{T}(u)$  is defined as :

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{2} \sin 2\gamma [\mathcal{T}(0)]^{-1} \delta \mathcal{T}(0) \tag{73}$$

According to the commutation relations (60),

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= H_1 + H_2 \\
&= \sum_{m=1}^{2N} [-\cos 2\gamma \mathbb{1} + 2 \cos \gamma E_m - (E_{m+1} E_m + E_m E_{m+1})]
\end{aligned} \tag{74}$$

Note that the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is the sum of two commuting parts :

$$\mathcal{H} = H_1 + H_2, \quad [H_1, H_2] = 0 \tag{75}$$

A consistent decomposition of the momentum operator is :

$$e^{-2iP} = (e^{-iP} C) \times (C e^{-iP}) = (C e^{-iP}) \times (e^{-iP} C) \tag{76}$$

Indeed, the operators  $H_1, H_2, (e^{-iP} C), (C e^{-iP})$  all commute with one another.

Using the expression (25) of the Temperley-Lieb generators, the Hamiltonian (74) is expressed in terms of Pauli matrices :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{m=1}^{2N} \left[ -(\sigma_m^+ \sigma_{m+2}^- + \sigma_m^- \sigma_{m+2}^+) + \sin^2 \gamma \sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - \frac{1}{2} \sigma_m^z \sigma_{m+2}^z \right. \\ & \left. + i \sin \gamma (\sigma_{m-1}^z - \sigma_{m+2}^z)(\sigma_m^+ \sigma_{m+1}^- + \sigma_m^- \sigma_{m+1}^+) - \frac{1}{2} \cos 2\gamma \mathbb{1} \right] \end{aligned} \quad (77)$$

In the limit  $\gamma \rightarrow 0$ , the Hamiltonian (77) describes, as expected from the  $SO(4)$  identification, two decoupled ferromagnetic XXX spin-chains :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\vec{\sigma}_{2j-1} \cdot \vec{\sigma}_{2j+1} + \mathbb{1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\vec{\sigma}_{2j} \cdot \vec{\sigma}_{2j+2} + \mathbb{1}) \quad (\gamma = 0) \quad (78)$$

### 3 Bethe equations, Bethe states and eigenvalues

When periodic conditions are imposed in the horizontal direction, the staggered six-vertex model is solvable by Bethe ansatz [11]. We call  $r$  the total number of particles.

#### 3.1 Bethe equations for two types of particles

The Bethe ansatz equations are :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \exp [2iNk(\alpha_j)] = - \prod_{l=1}^r \exp [-i\phi(\alpha_j, \alpha_l)] \quad (79)$$

The one-particle momentum and the scattering amplitude are given by :

$$\exp [2ik(\alpha)] = \frac{\sinh(\alpha + i\gamma)}{\sinh(\alpha - i\gamma)} \quad (80)$$

$$\exp [i\phi(\alpha, \alpha')] = \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha - \alpha' - 2i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha - \alpha' + 2i\gamma)} \quad (81)$$

The roots  $\alpha_j$  describing the ground state and the physical excitations are expected to sit on the two lines  $\text{Im}(\alpha) = \pm\pi/2$ . Define two types of particles :

$$\alpha_j^+ = \lambda_j + i\pi/2, \quad j = 1, \dots, r_+ \quad (82)$$

$$\alpha_j^- = \mu_j - i\pi/2, \quad j = 1, \dots, r_- \quad (83)$$

The one-particle momenta are :

$$\exp [2i\tilde{k}(\lambda)] \equiv \exp \left[ 2ik \left( \lambda \pm i\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\cosh(\lambda + i\gamma)}{\cosh(\lambda - i\gamma)} \quad (84)$$

The scattering amplitude between two particles of the same type is :

$$\exp [i\phi_1(\lambda, \lambda')] \equiv \exp \left[ i\phi \left( \lambda \pm i\frac{\pi}{2}, \lambda' \pm i\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\sinh \frac{1}{2}(\lambda - \lambda' - 2i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\lambda - \lambda' + 2i\gamma)} \quad (85)$$

The scattering amplitude between two particles of different types is :

$$\exp[i\phi_{-1}(\lambda, \lambda')] \equiv \exp\left[i\phi\left(\lambda \pm i\frac{\pi}{2}, \lambda' \mp i\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\cosh\frac{1}{2}(\lambda - \lambda' - 2i\gamma)}{\cosh\frac{1}{2}(\lambda - \lambda' + 2i\gamma)} \quad (86)$$

Define the shifted scattering amplitudes as odd functions of  $(\lambda - \lambda')$  :

$$\exp[i\Theta_1(\lambda, \lambda')] = -\exp[i\phi_1(\lambda, \lambda')] \quad (87)$$

$$\exp[i\Theta_{-1}(\lambda, \lambda')] = \exp[i\phi_{-1}(\lambda, \lambda')] \quad (88)$$

The Bethe equations (79) split into two sets :

$$\forall j \in \{1, \dots, r_+\} \quad e^{2iN\tilde{k}(\lambda_j)} = (-1)^{r_+-1} \prod_{l=1}^{r_+} e^{-i\Theta_1(\lambda_j, \lambda_l)} \prod_{l=1}^{r_-} e^{-i\Theta_{-1}(\lambda_j, \mu_l)} \quad (89)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, r_-\} \quad e^{2iN\tilde{k}(\mu_j)} = (-1)^{r_--1} \prod_{l=1}^{r_+} e^{-i\Theta_{-1}(\mu_j, \lambda_l)} \prod_{l=1}^{r_-} e^{-i\Theta_1(\mu_j, \mu_l)} \quad (90)$$

Take the logarithm of equations (89)–(90) :

$$\forall j \in \{1, \dots, r_+\} \quad 2N\tilde{k}(\lambda_j) = 2\pi I_j^+ - \sum_{l=1}^{r_+} \Theta_1(\lambda_j, \lambda_l) - \sum_{l=1}^{r_-} \Theta_{-1}(\lambda_j, \mu_l) \quad (91)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, r_-\} \quad 2N\tilde{k}(\mu_j) = 2\pi I_j^- - \sum_{l=1}^{r_+} \Theta_{-1}(\mu_j, \lambda_l) - \sum_{l=1}^{r_-} \Theta_1(\mu_j, \mu_l) \quad (92)$$

The ‘‘Bethe integers’’  $I_j^\pm$  follow the following rules : if  $r_+$  (*resp.*  $r_-$ ) is even, then all the  $I_j^+$  (*resp.*  $I_j^-$ ) are half-odd integers; if  $r_+$  (*resp.*  $r_-$ ) is odd, then all the  $I_j^+$  (*resp.*  $I_j^-$ ) are integers. Summing equations (91)–(92) over  $j$  and recalling that the functions  $\Theta_{\pm 1}$  are odd, one relates the total momentum to the Bethe integers :

$$k_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^{r_+} \tilde{k}(\lambda_j) + \sum_{j=1}^{r_-} \tilde{k}(\mu_j) = \frac{\pi}{N} \left( \sum_{j=1}^{r_+} I_j^+ + \sum_{j=1}^{r_-} I_j^- \right) \quad (93)$$

The one-particle momenta and the scattering amplitudes can be written :

$$\tan\left[\tilde{k}(\lambda)\right] = \tanh\lambda \tan\gamma \quad (94)$$

$$\tan\left[\frac{\Theta_1(\lambda, \lambda')}{2}\right] = \tanh\frac{1}{2}(\lambda - \lambda') \cotan\gamma \quad (95)$$

$$\tan\left[\frac{\Theta_{-1}(\lambda, \lambda')}{2}\right] = -\tanh\frac{1}{2}(\lambda - \lambda') \tan\gamma \quad (96)$$

### 3.2 Bethe states

*Form of the Bethe states.* The one-particle states  $\varphi_\alpha$  are “inhomogeneous plane-waves”, represented in real space as :

$$\varphi_\alpha(2m-1) = \cosh \frac{1}{2}(\alpha - i\gamma) e^{2ik(\alpha)m} \quad (97)$$

$$\varphi_\alpha(2m) = -\sinh \frac{1}{2}(\alpha + i\gamma) e^{2ik(\alpha)m} \quad (98)$$

with  $m = 1, \dots, N$  defines the position of the particle. The general Bethe state is given by the linear combination :

$$\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}(x_1, \dots, x_r) = \sum_P A_{p_1, \dots, p_r} \varphi_{\alpha_{p_1}}(x_1) \dots \varphi_{\alpha_{p_r}}(x_r) \quad (99)$$

where the sum is over all permutations  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  of the integers  $1, \dots, r$ , and  $x_1, \dots, x_r$  are the positions of the particles. The coefficients  $A_{p_1, \dots, p_r}$  are given in terms of the scattering amplitudes  $s_{j,l}$  :

$$A_{p_1, \dots, p_r} = \epsilon_P \prod_{i < j} s_{p_j, p_i} \quad (100)$$

$$s_{j,l} = \sinh \frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_l - 2i\gamma) \quad (101)$$

where  $\epsilon_P$  is the signature of the permutation  $\{p_1, \dots, p_r\}$ . In particular, when the roots  $\alpha_j$  sit on the two lines  $\text{Im}(\alpha) = \pm\pi/2$ , we introduce another notation for the Bethe state :

$$\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_+} | \mu_1, \dots, \mu_{r_-}) \equiv \varphi_{\lambda_1 + i\pi/2, \dots, \lambda_{r_+} + i\pi/2, \mu_1 - i\pi/2, \dots, \mu_{r_-} - i\pi/2} \quad (102)$$

*Symmetries.* By construction, the states  $\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$  are antisymmetric under the exchange of the  $\alpha_j$ . A shift  $\alpha_j \rightarrow \alpha_j + 2i\pi$  results in a phase factor :

$$\varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j + 2i\pi, \dots, \alpha_r} = (-1)^r \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_r} \quad (103)$$

*Action of  $C$ .* The action of the operator  $C$  on the Bethe states is a shift  $\alpha_j \rightarrow \alpha_j + i\pi$  :

$$C \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = (-i)^r \varphi_{\alpha_1 + i\pi, \dots, \alpha_r + i\pi} \quad (104)$$

The operator  $C$ , acting on the states (102), exchanges the two lines :

$$C \varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_+} | \mu_1, \dots, \mu_{r_-}) = e^{\frac{i\pi}{2}(r_+ - r_-)} \varphi(\mu_1, \dots, \mu_{r_-} | \lambda_1, \dots, \lambda_{r_+}) \quad (105)$$

A special class of states (to be discussed in section 3.5) is defined by the following constraint on the Bethe integers :

$$r_+ = r_- = r \quad (106)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \quad I_j^+ = I_j^- = I_j \quad (107)$$

These states are eigenvectors of the operator  $C$ , with eigenvalue one :

$$C\varphi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r | \lambda_1, \dots, \lambda_r)} = \varphi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r | \lambda_1, \dots, \lambda_r)} \quad (108)$$

The other eigenvectors of  $C$  are given by the linear combinations :

$$\varphi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_+} | \mu_1, \dots, \mu_{r_-})}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \varphi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_+} | \mu_1, \dots, \mu_{r_-})} \pm e^{\frac{i\pi}{2}(r_+ - r_-)} \varphi_{(\mu_1, \dots, \mu_{r_-} | \lambda_1, \dots, \lambda_{r_+})} \right) \quad (109)$$

$$C\varphi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_+} | \mu_1, \dots, \mu_{r_-})}^{\pm} = \pm \varphi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{r_+} | \mu_1, \dots, \mu_{r_-})}^{\pm} \quad (110)$$

*Action of the shift operator.* The shift operator  $e^{-iP}$  has a similar action on the Bethe states :

$$e^{-iP} \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} = \left[ \prod_{j=1}^r i e^{-ip_1(\alpha_j + i\pi)} \right] \varphi_{\alpha_1 + i\pi, \dots, \alpha_r + i\pi} \quad (111)$$

where :

$$\exp[ip_1(\alpha)] = \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha + i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha - i\gamma)} \quad (112)$$

### 3.3 Eigenvalues

The eigenvalue of the transfer matrix  $\mathcal{T}(u)$  associated to the Bethe state  $\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$  is :

$$\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_r | u) = \mu(\alpha_1, \dots, \alpha_r | u) \mu(\alpha_1 + i\pi, \dots, \alpha_r + i\pi | u) \quad (113)$$

where

$$\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_r | u) \equiv (i/2)^N \times \left\{ [\sin 2(u - \gamma)]^N \prod_{j=1}^r \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha_j - 2iu - i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha_j - 2iu + i\gamma)} + (\sin 2u)^N \prod_{j=1}^r \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha_j - 2iu + 3i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha_j - 2iu + i\gamma)} \right\} \quad (114)$$

In the limit  $u \rightarrow 0$ , the energy of the state  $\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$  is defined as :

$$\mathcal{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \frac{1}{2} \sin 2\gamma \frac{\partial \log \Lambda}{\partial u}(\alpha_1, \dots, \alpha_r | 0) \quad (115)$$

$$= -2N \cos 2\gamma + \sum_{j=1}^r \frac{2 \sin^2 2\gamma}{\cosh 2\alpha_j - \cos 2\gamma} \quad (116)$$

By construction, the state  $\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$  is an eigenvector of the Hamiltonian  $\mathcal{H}$ , with eigenvalue  $E(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ .

### 3.4 Reminder : the homogeneous six-vertex model

Consider the homogeneous six-vertex model defined by the  $R_0(u_0)$  matrix given in equation (14), with parameter  $\gamma_0$ , on a lattice of width  $N$ .

In the anisotropic limit  $u_0 \rightarrow 0$ , the logarithmic derivative of the transfer matrix  $T_0(u_0)$  is equal to the XXZ Hamiltonian :

$$H_0 \equiv -\sin \gamma_0 [T_0(0)]^{-1} \frac{\partial T_0}{\partial u_0}(0) \quad (117)$$

$$= \sum_{m=1}^N (\cos \gamma_0 - E_m^0) \quad (118)$$

where the operator  $E_m^0$  is a generator of the Temperley-Lieb algebra with parameter  $\gamma_0$ , like in equation (24):

$$E_m^0 = \frac{1}{2} [\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y - \cos \gamma_0 (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - \mathbb{1}) - i \sin \gamma_0 (\sigma_m^z - \sigma_{m+1}^z)] \quad (119)$$

On a lattice with periodic boundary conditions, the system is solvable by Bethe ansatz. The Bethe equations for  $r$  particles are :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \exp [iNk_0(\lambda_j)] = - \prod_{l=1}^r \exp [-i\phi_0(\lambda_j, \lambda_l)] \quad (120)$$

where the one-particle momentum and the scattering amplitude are :

$$\exp [ik_0(\lambda)] = \frac{\sinh(\frac{i}{2}\gamma_0 - \lambda)}{\sinh(\frac{i}{2}\gamma_0 + \lambda)}, \quad (121)$$

$$\exp [i\phi_0(\lambda, \lambda')] = \frac{\sinh(\lambda - \lambda' + i\gamma_0)}{\sinh(\lambda - \lambda' - i\gamma_0)} \quad (122)$$

The associated eigenvalue of the transfer matrix  $T_0(u_0)$  is :

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\lambda_1, \dots, \lambda_r | u_0) = & [\sin(\gamma_0 - u_0)]^N \prod_{j=1}^r \left( -\frac{\sinh(\lambda_j + iu_0 + \frac{i}{2}\gamma_0)}{\sinh(\lambda_j + iu_0 - \frac{i}{2}\gamma_0)} \right) \\ & + (\sin u_0)^N \prod_{j=1}^r \left( -\frac{\sinh(\lambda_j + iu_0 - \frac{3i}{2}\gamma_0)}{\sinh(\lambda_j + iu_0 - \frac{i}{2}\gamma_0)} \right) \end{aligned} \quad (123)$$

### 3.5 Common eigenvalues between the staggered and homogeneous six-vertex models

If the parameters of the staggered and the homogeneous six-vertex models are related by :

$$\gamma_0 = \pi - 2\gamma \quad (124)$$

$$u_0 = -2u \quad (125)$$

then one has the relations :

$$\exp [2i\tilde{k}(\lambda)] = \exp [ik_0(\lambda)] \quad (126)$$

$$\phi_1(\lambda, \lambda') + \phi_{-1}(\lambda, \lambda') = \phi_0(\lambda, \lambda') \quad (127)$$

These relations suggest that the states :

$$\varphi_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r | \lambda_1, \dots, \lambda_r)} \quad (128)$$

have properties described by the homogeneous six-vertex model. The states (128) are obtained as the solution of the Bethe equations (91)–(92) when the Bethe integers on the two lines are the same :

$$r_+ = r_- = r \quad (129)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \quad I_j^+ = I_j^- = I_j \quad (130)$$

As a consequence of relations (126)–(127), the Bethe equations (91)–(92) are equivalent to the Bethe equation (120) for the homogeneous six-vertex model. Moreover, the eigenvalue of the transfer matrix  $T(u)$  can be written in terms of the eigenvalue (123) :

$$\Lambda \left( \lambda_1 + i\frac{\pi}{2}, \lambda_1 - i\frac{\pi}{2}, \dots, \lambda_r + i\frac{\pi}{2}, \lambda_r - i\frac{\pi}{2} | u \right) = (-1/4)^N [\Lambda_0(\lambda_1, \dots, \lambda_r | u_0)]^2 \quad (131)$$

As a consequence, in the anisotropic limit, the energies  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}_0$  of the Hamiltonians  $\mathcal{H}$ ,  $H_0$  are related by :

$$\mathcal{E} \left( \lambda_1 + i\frac{\pi}{2}, \lambda_1 - i\frac{\pi}{2}, \dots, \lambda_r + i\frac{\pi}{2}, \lambda_r - i\frac{\pi}{2} \right) = 2\mathcal{E}_0(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \quad (132)$$

The total momenta are equal :

$$k_{\text{tot}} = k_{0,\text{tot}} \quad (133)$$

## 4 Finite-size study of the Bethe equations

### 4.1 Reminder : the XXZ spin-chain Hamiltonian.

#### 4.1.1 Definition

The XXZ Hamiltonian (118) on a lattice of width  $N$  can be written :

$$H_0 = -1/2 \sum_{m=1}^N \left[ \sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y - \cos \gamma_0 (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z + \mathbb{1}) \right] \quad (134)$$

$$0 \leq \gamma_0 \leq \pi \quad (135)$$

with periodic boundary conditions :

$$\sigma_{N+1}^\mu = \sigma_1^\mu \quad (136)$$

#### 4.1.2 Ground state

The ground state of the Hamiltonian (134) is given by the symmetric “half-filled Fermi sea” in the sector with  $r = N/2$  particles. Consider one of the particle-hole excitations around the Fermi momenta  $\pm k_F$  :

$$k_F - k_0/2 \rightarrow k_F + k_0/2 \quad (137)$$

$$-k_F + k_0/2 \rightarrow -k_F - k_0/2 \quad (138)$$



These excited states have total momentum  $\pm k_0$ . In the thermodynamic limit  $N \rightarrow \infty$  with the ratio  $r/N$  fixed, the Bethe equations (120) give a linear integral equation for the density of particles. Solving this equation gives access to the dispersion relation of the excitations (137)–(138) :

$$\mathcal{E}_0(k_0) \simeq v_0 |k_0|, \quad v_0 = \frac{\pi \sin \gamma_0}{\gamma_0} \quad (139)$$

This shows that, in the thermodynamic limit, the spectrum has no finite gap above the ground state. This is an indication that the equivalent (1+1)-dimensional quantum field theory is conformally invariant. The velocity  $v_0$  appears in the finite-size determination of the central charge :

$$\mathcal{E}_{0,\text{gr}}(N) = N e_{0,\infty} - \frac{\pi v_0 c}{6N} + o(N^{-1}) \quad (140)$$

The central charge of the Hamiltonian  $H_0$  is  $c = 1$ . The energy density per site is :

$$e_{0,\infty} = \cos \gamma_0 - 2 \sin^2 \gamma_0 \int_0^\infty \frac{dx}{\cosh(\pi x) [\cosh(2\gamma_0 x) - \cos \gamma_0]} \quad (141)$$

### 4.1.3 Low-lying excitations

A class of Bethe states are low-lying excitations, with energies :

$$\mathcal{E}_0(N) = \mathcal{E}_{0,\text{gr}}(N) + \frac{2\pi v_0 x}{N} + o(N^{-1}) \quad (142)$$

where  $x$  is called the physical exponent. We describe the primary states, and then their descendants. In the sector with  $r = N/2 - n$  particles, the lowest-energy state is given by the distribution of the Bethe integers which is symmetric around zero. In the same sector, denote by  $\{n, m\}$  the state obtained after  $m$  backscatterings from the left Fermi level to the right Fermi level :

$$I_1, \dots, I_r = -\frac{r-1}{2} + m, \dots, \frac{r-1}{2} + m \quad (143)$$

The physical exponents of this class of states are :

$$x_{n,m}^{(0)} = n^2 \frac{g}{2} + m^2 \frac{1}{2g}, \quad g = \frac{\pi - \gamma_0}{\pi} \quad (144)$$

Descendant states are obtained by performing particle-hole excitations on the above states. For example, starting from the ground state distribution and setting  $I_r$  to  $(r+1)/2$ , one obtains a state with physical exponent  $x = 1$ .

## 4.2 Ground state of the Hamiltonian $\mathcal{H}$

In this section, the ground state of the Hamiltonian (74), corresponding to the anisotropic limit of the staggered six-vertex model, is discussed. The system width  $N$  is assumed to be even. The case of an odd system width  $N$  will be discussed in section 4.4. The ground state of the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is given by the symmetric distribution of the Bethe integers in the sector  $r_+ = r_- = N/2$  :

$$I_1^+, \dots, I_{N/2}^+ = -\frac{N/2-1}{2}, -\frac{N/2-1}{2} + 1, \dots, \frac{N/2-1}{2} \quad (145)$$

$$I_1^-, \dots, I_{N/2}^- = -\frac{N/2-1}{2}, -\frac{N/2-1}{2} + 1, \dots, \frac{N/2-1}{2} \quad (146)$$

Note that this state has twice the energy of the ground state of  $H_{\text{XXZ}}$ .

Consider the double particle-hole excitation obtained by performing the transformation (137) on both Fermi seas. This excitation is of the type (129)–(130), and therefore, using equations (139), (133) and (132) its momentum and energy are :

$$k = k_0 \quad (147)$$

$$\mathcal{E}(k) \simeq 2 v_0 |k_0| \quad (148)$$

Thus, the rapidity of the particle-hole excitations around the ground state of the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is :

$$v = 2 v_0 \quad (149)$$

Compare the asymptotic behaviors of the finite-size ground state energies for Hamiltonians  $H_0, \mathcal{H}$  :

$$\mathcal{E}_{0,\text{gr}}(N) = N e_{0,\infty} - \frac{\pi v_0}{6N} + o(N^{-2}) \quad (150)$$

$$\mathcal{E}_{\text{gr}}(2N) = 2N e_{0,\infty} - \frac{\pi c v}{6 \times 2N} + o(N^{-2}) \quad (151)$$

As a consequence of the identities (132) and (148), the central charge of Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is  $c = 2$ . The energy density per site of Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is :

$$e_{\infty} = e_{0,\infty} \quad (152)$$

### 4.3 Low-energy spectrum of the Hamiltonian $\mathcal{H}$

#### 4.3.1 Bethe excitations

The excitations considered are combinations of particle and backscattering excitations on the Bethe integers  $I_j^+, I_j^-$ . Denote  $\varphi_{(n_+, n_-), (m_+, m_-)}$  the Bethe state defined by the numbers of particles :

$$r_+ = N/2 - n_+ \quad (153)$$

$$r_- = N/2 - n_- \quad (154)$$

and the Bethe integers :

$$I_1^+, \dots, I_{r_+}^+ = -\frac{r_+ - 1}{2} + m_+, \dots, \frac{r_+ - 1}{2} + m_+ \quad (155)$$

$$I_1^-, \dots, I_{r_-}^- = -\frac{r_- - 1}{2} + m_-, \dots, \frac{r_- - 1}{2} + m_- \quad (156)$$

The states described in section 3.5 are of the type  $\varphi_{(n,n), (m,m)}$ . Their physical exponents are :

$$x_{(n,n), (m,m)} = 2 x_{n,m}^{(0)} = n^2 g + m^2 \frac{1}{g} \quad (157)$$

where

$$g = 2\gamma/\pi \quad (158)$$

The analytical study [9] of the thermodynamic limit of the Bethe equations suggests the following general form for the physical exponents :

$$x_{(n_+,n_-),(m_+,m_-)} = \frac{1}{4}g(n_+ + n_-)^2 + \frac{1}{4g}(m_+ + m_-)^2 + \frac{1}{4}K(\gamma, N)(n_+ - n_-)^2 + \frac{1}{4K(\gamma, N)}(m_+ - m_-)^2 \quad (159)$$

where the coupling constant  $K(\gamma, N)$  tends to zero as  $N$  goes to infinity. One of the key questions is to determine the way this constant actually vanishes.

### 4.3.2 General structure of the low-energy spectrum

Note that the states with  $m_+ \neq m_-$  are not part of the low-energy spectrum. Thus, in the following, the discussion will concern only the states with  $m_+ = m_- = m$ . For these states, the total magnetization and the total momentum read :

$$S = n_+ + n_- \quad (160)$$

$$k_{\text{tot}} = \frac{\pi}{N}m(N - n_+ - n_-) \quad (161)$$

Equation (159) determines the structure of the low-energy spectrum. The quantities  $(n_+ + n_-)$  and  $m$  define a sector of given total spin  $S$  and total momentum  $k_{\text{tot}}$ . We call “floor states” the lowest-energy states of these sectors. These are the states  $\varphi_{(n,n),(m,m)}$  and  $\varphi_{(n+1,n),(m,m)}^\pm$ , where  $n, m$  are integers. The physical exponents of the floor states are finite in the limit  $N \rightarrow \infty$  :

$$x_{(n,n),(m,m)} = gn^2 + \frac{m^2}{g} \quad (162)$$

$$x_{(n+1,n),(m,m)} = \frac{g}{4}(2n+1)^2 + \frac{m^2}{g} + \frac{K(\gamma, N)}{4} \quad (163)$$

Note that the states  $\varphi_{(n,n),(m,m)}$  are those described in section 3.5. Within each sector, higher energy states are obtained, starting from the floor state, by “moving”  $n'$  particles from the line  $\text{Im}(\alpha) = \pi/2$  to the line  $\text{Im}(\alpha) = -\pi/2$  (or the reverse). The physical exponent of the resulting state differs from the floor exponent by a quantity proportional to the coupling constant  $K(\gamma, N)$  :

$$x_{(n+n',n-n'),(m,m)} = x_{(n,n),(m,m)} + (n')^2 K(\gamma, N) \quad (164)$$

$$x_{(n+n'+1,n-n'),(m,m)} = x_{(n+1,n),(m,m)} + n'(n'+1)K(\gamma, N) \quad (165)$$

Thus, if the constant  $K$  indeed vanishes in the limit  $N \rightarrow \infty$ , the gaps between the floor state and the higher states in the sector should also vanish. The structure of the spectrum is illustrated in figure 14.

Numerical calculations are used to confirm the form (159) of the physical exponents, and to determine the scaling law for  $K(\gamma, N)$ .

### 4.3.3 Numerical calculation of the physical exponents

*Numerical procedure.* When the Bethe integers  $I_j^\pm$  are fixed according to equations (155)–(156), the Bethe equations (91)–(92) are a set of non-linear equations for the variables  $\lambda_j, \mu_j$ . These equations can be solved numerically,

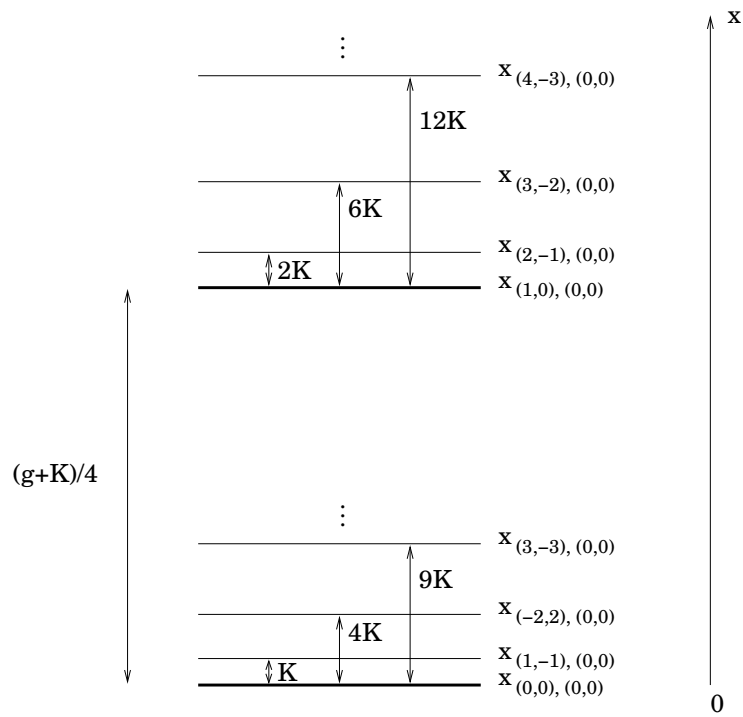


Figure 14: The first levels of the fundamental sector ( $n_+ + n_- = 0, m = 0$ ) and the sector defined by ( $n_+ + n_- = 1, m = 0$ ). The floor states (including the ground state) are represented by bold lines. The energies are rescaled as physical exponents.

using the multidimensional Newton-Raphson method [13]. The following starting point for the algorithm was found empirically to lead to a good convergence :

$$\lambda_j^{\text{init}} = \text{Arctanh} \left[ \frac{\tan(\pi I_j^+ / N)}{U} \right] \quad (166)$$

where the additional parameter is set to  $U = 10$ . The exponents are then estimated, relatively to the ground state, or to the floor state, using :

$$\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_{\text{gr}} \sim \frac{2\pi v}{2N} x_a \quad (167)$$

$$\mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b \sim \frac{2\pi v}{2N} (x_a - x_b) \quad (168)$$

where  $a, b$  denote any states of the spectrum.

*Results for the floor exponents.* These are shown in figures 15–17. These results agree with the form (159).

*Results for the gaps inside a given sector.* These gaps are given in equations (164)–(165), as a function of the integer  $n'$  and the coupling constant  $K(\gamma, N)$ . The first step is to check the dependence on  $n'$ . See figures 18–21.

*Results for the coupling constant.* Equations (164)–(165) relate the gaps within a given sector to the coupling constant  $K(\gamma, N)$ . These are used to determine the scaling law of this quantity. Theoretical arguments (see section 5) predict the following form :

$$K \simeq \frac{A}{[B + \log N]^p} \quad (169)$$

where the exponent  $p$  may take the values  $p = 1, 2$ . The exponent  $p$  is estimated numerically, assuming that  $K$  behaves as equation (169) (see figure 22). A crossover is observed between the behaviours :

$$K(\gamma, N) \simeq \frac{A(\gamma)}{[B(\gamma) + \log N]^2} \quad (\gamma < \pi/2) \quad (170)$$

$$K(\pi/2, N) \simeq \frac{A'}{B' + \log N} \quad (171)$$

The factor  $A(\gamma)$  in the scaling law (170) is estimated numerically by eliminating the term  $B(\gamma)$  between two system widths. The finite-size estimators are defined as :

$$A(\gamma, N_1, N_2) \equiv \left\{ \frac{\log(N_1/N_2)}{[K(\gamma, N_1)]^{-1/2} - [K(\gamma, N_2)]^{-1/2}} \right\}^2 \quad (172)$$

The numerical results (see figure 23) allow us to conjecture the following form for the factor  $A(\gamma)$  :

$$A(\gamma) = \frac{5\gamma}{\pi - 2\gamma} \quad (173)$$

The correction term  $B(\gamma)$  depends on the sector considered.

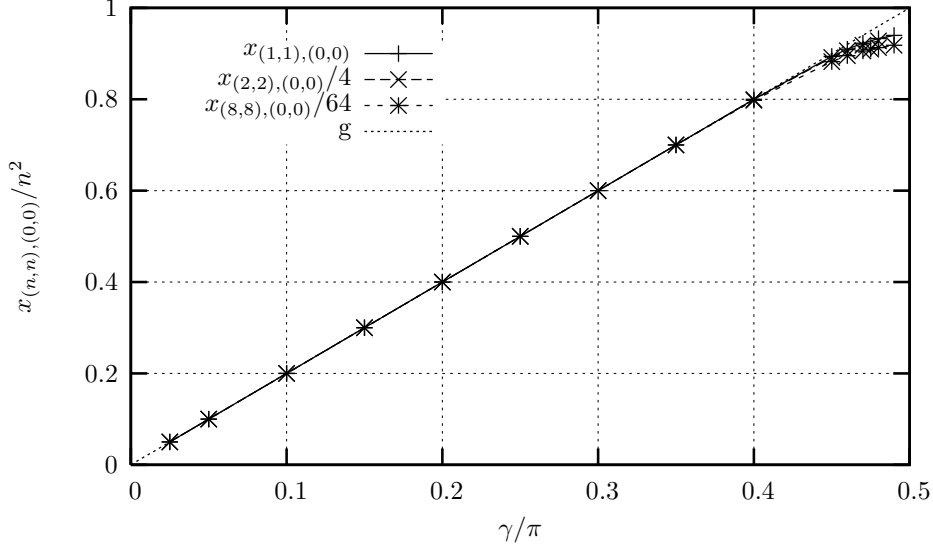


Figure 15: The floor exponents  $x_{(n,n),(0,0)}$  as functions of  $\gamma$ , for a system width  $N = 1024$ . The expected values are  $x_{(n,n),(0,0)} = gn^2$  (equation (162)).

Each sector determines a specific scaling law for  $K(\gamma, N)$ , and these determinations can be compared. In addition, the coupling constant  $K(\gamma, N)$  appears in the expression of “infinite physical exponents” :

$$x_{(n,n),(1,-1)} - x_{(n,n),(0,0)} = \frac{1}{K(\gamma, N)} \quad (174)$$

The results are shown in figure 24.

#### 4.4 The case $N$ odd

When the system width  $N$  is odd, the structure of the spectrum exhibits some differences from the case  $N$  even.

The general formula for the finite-size corrections is identical to the formula for  $N$  even :

$$\mathcal{E}_{(n_+,n_-),(m_+,m_-)}(2N) = 2Ne_\infty - \frac{\pi v}{6 \times 2N} \times 2 + \frac{2\pi v}{2N} x_{(n_+,n_-),(m_+,m_-)} + o(N^{-1}) \quad (175)$$

where the exponent  $x_{(n_+,n_-),(m_+,m_-)}$  is given by equation (159). The subtlety is that equations (153)–(154) imply that  $n_+, n_-$  are half-odd integers.

The lowest-energy states of the spectrum (175) are  $\varphi_{(1/2,-1/2),(0,0)}^\pm$ . Note that these states belong to the sector  $S = 0$ , and are the most closely packed to the imaginary  $\alpha$  axis in this sector. The energy of the ground state is :

$$\mathcal{E}_{\text{gr}}(2N) = 2Ne_\infty - \frac{\pi v}{6 \times 2N} \times \tilde{c} + o(N^{-1}) \quad (176)$$

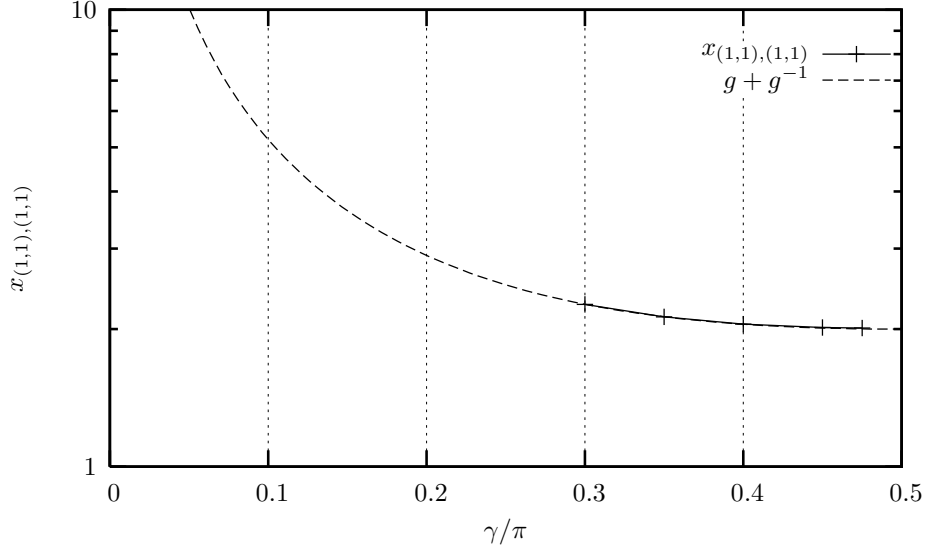


Figure 16: The floor exponent  $x_{(1,1),(1,1)}$  as a function of  $\gamma$ , for a system width  $N = 512$ . The expected value is  $x_{(1,1),(1,1)} = g + g^{-1}$  (equation (162)).

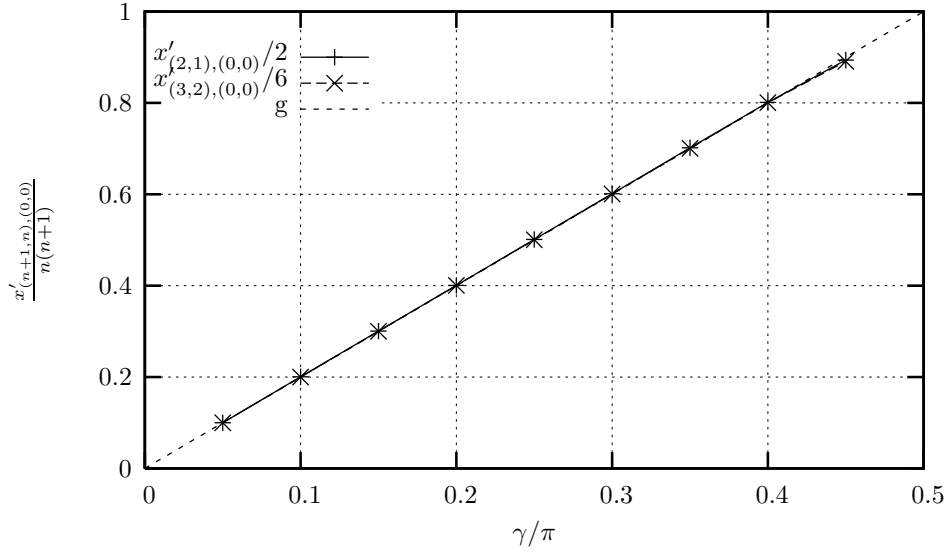


Figure 17: The floor exponent  $x'_{(n+1,n),(0,0)} \equiv x_{(n+1,n),(0,0)} - x_{(1,0),(0,0)}$  as a function of  $\gamma$ , for a system width  $N = 1024$ . The expected value is  $x'_{(n+1,n),(0,0)} = gn(n+1)$  (equation (163)).

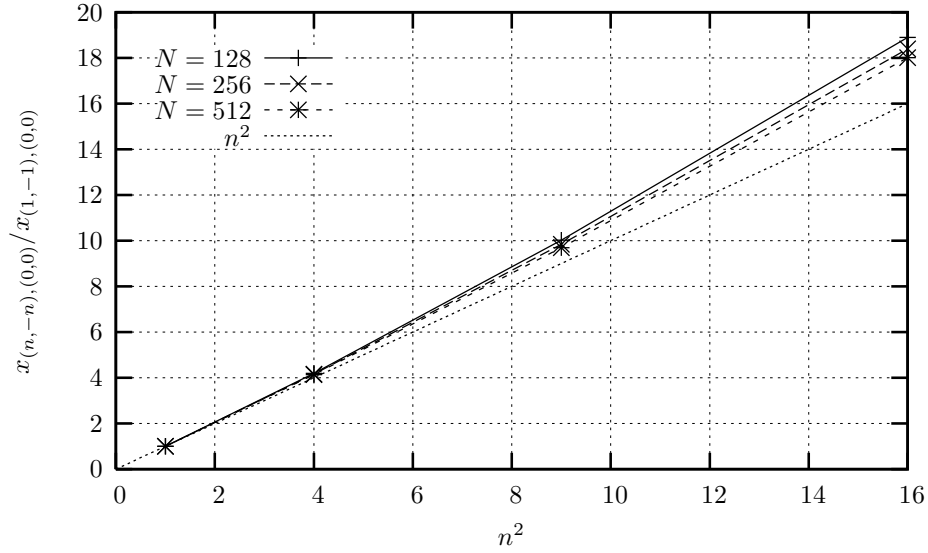


Figure 18: The exponent  $x_{(n,-n),(0,0)}$  as a function of  $n$ , for parameter  $\gamma = 0.3\pi$ . The expected values are  $x_{(n,-n),(0,0)} = K(\gamma, N) n^2$  (equation (164)).

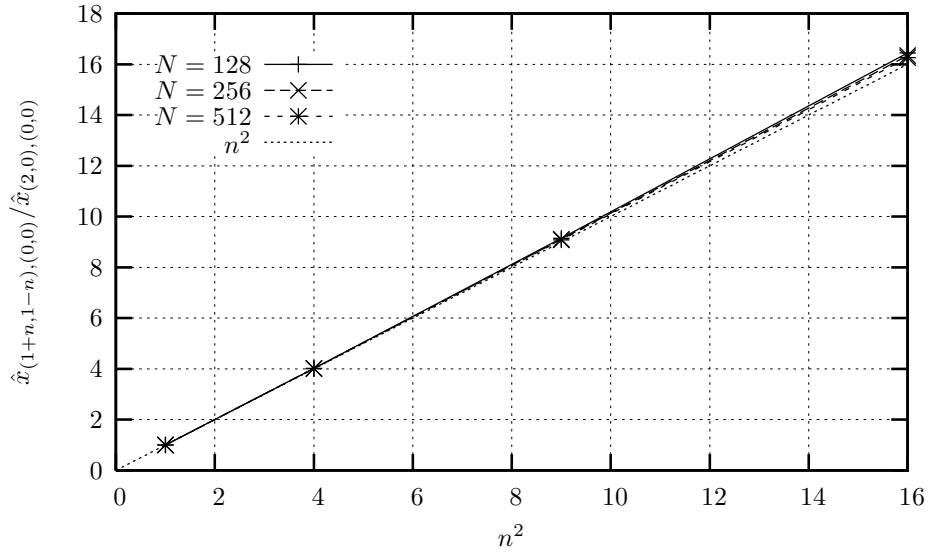


Figure 19: The exponent  $\hat{x}_{(1+n,1-n),(0,0)} \equiv x_{(1+n,1-n),(0,0)} - x_{(1,1),(0,0)}$  as a function of  $n$ , for parameter  $\gamma = 0.3\pi$ . The expected values are  $\hat{x}_{(1+n,1-n),(0,0)} = K(\gamma, N) n^2$  (equation (164)).



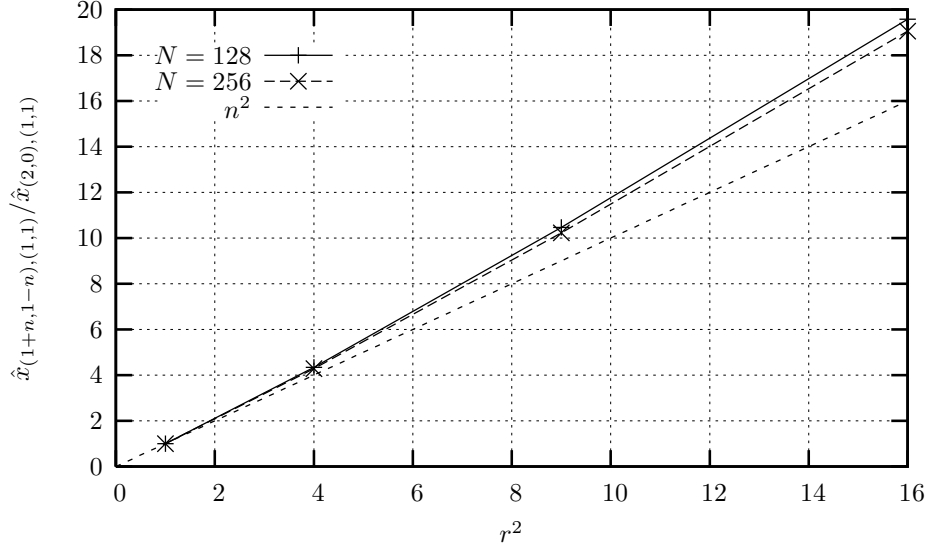


Figure 20: The exponent  $\hat{x}_{(1+n, 1-n), (1,1)} \equiv x_{(1+n, 1-n), (1,1)} - x_{(1,1), (1,1)}$  as a function of  $n$ , for parameter  $\gamma = 0.4\pi$ . The expected values are  $\hat{x}_{(1+n, 1-n), (1,1)} = K(\gamma, N) n^2$  (equation (164)).

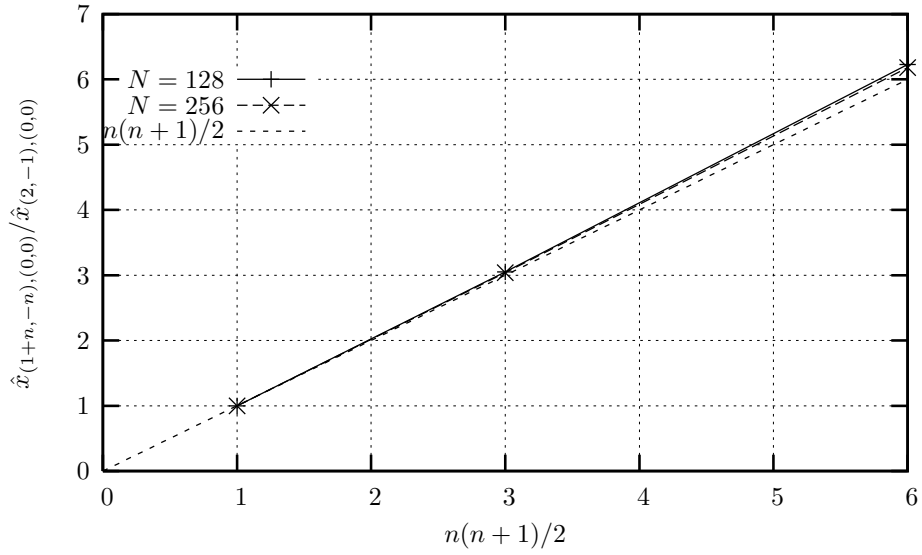


Figure 21: The exponent  $\hat{x}_{(1+n, -n), (0,0)} \equiv x_{(1+n, -n), (0,0)} - x_{(1,0), (0,0)}$  as a function of  $n$ , for parameter  $\gamma = 0.3\pi$ . The expected values are  $\hat{x}_{(1+n, -n), (0,0)} = K(\gamma, N) n(n+1)$  (equation (165)).

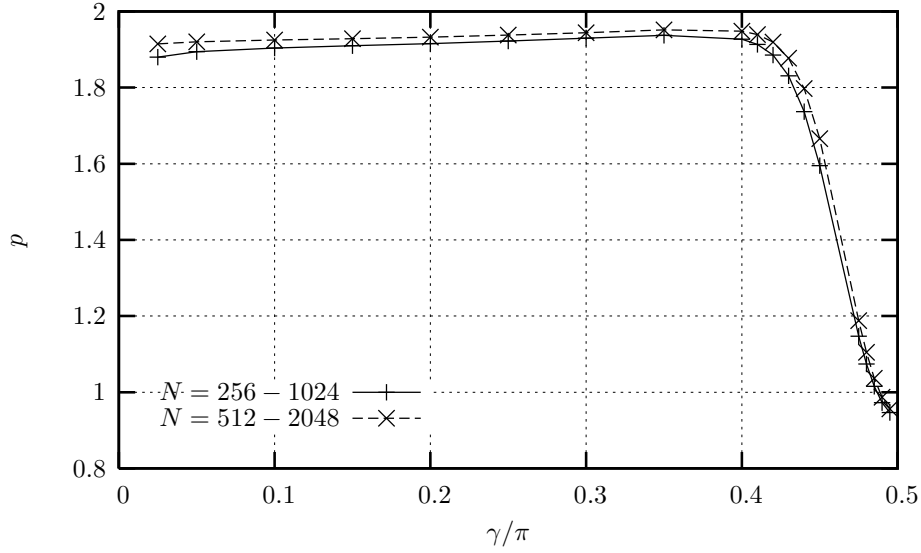


Figure 22: Estimation of the exponent  $p$  in the scaling law (169). The estimator for  $p$  is obtained by eliminating the unknowns  $A, B$  from the equations  $\log K(\gamma, N) = \log A - p \log(B + \log N)$ , for three system widths. The estimators converge slowly to  $p = 2$  for  $\gamma < \pi/2$ , and to  $p = 1$  for  $\gamma = \pi/2$ .

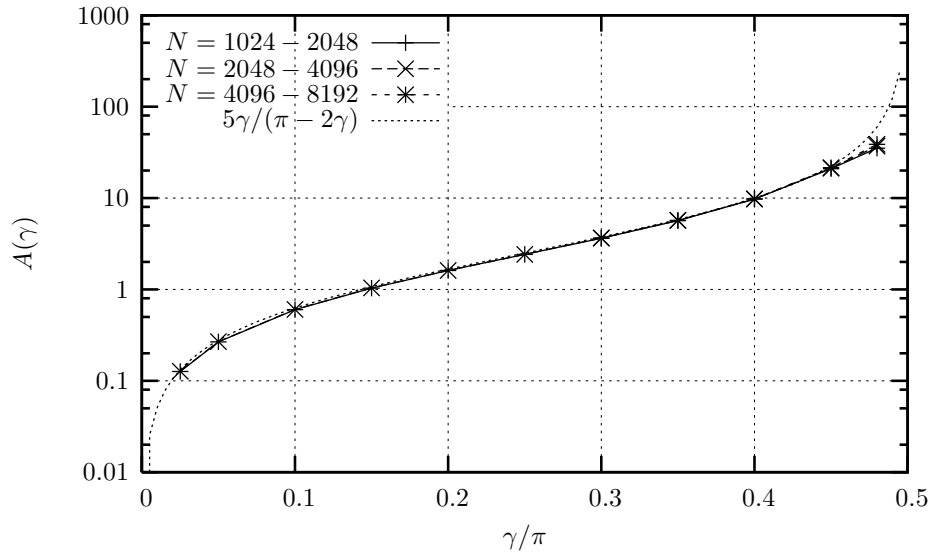


Figure 23: Determination of the factor  $A(\gamma)$  in the scaling law (170), using a numerical estimation of exponent  $x_{(1,-1),(0,0)}$ .

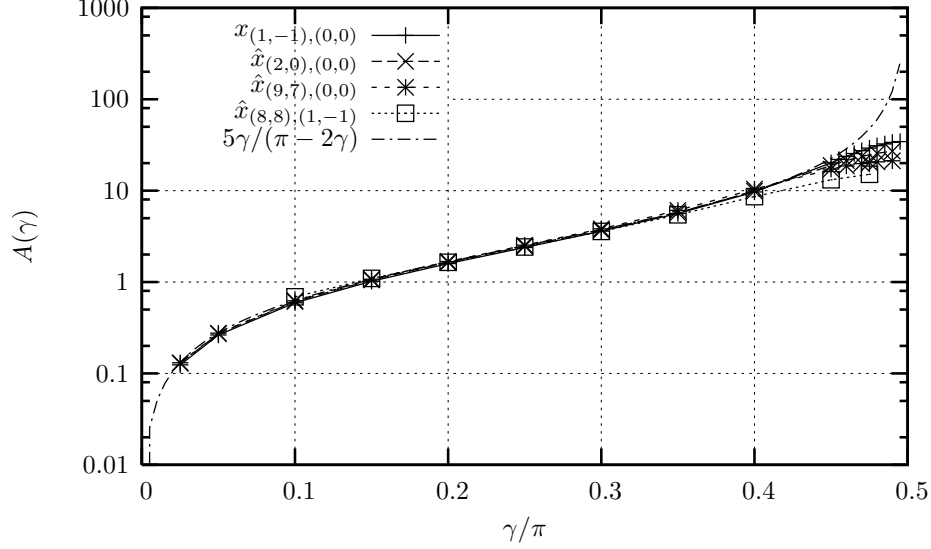


Figure 24: Various determinations of the factor  $A(\gamma)$ , for system widths  $N = 256 - 512$ .

where the effective central charge is :

$$\tilde{c} = 2 - 12x_{(1/2,-1/2),(0,0)}, \quad x_{(1/2,-1/2),(0,0)} = \frac{K(\gamma, N)}{4} \quad (177)$$

The effective central charge is estimated numerically using equation (176) and the exact expression (141) of the energy density  $e_\infty$  (see figure 25). The scaling law for the coupling constant  $K(\gamma, N)$  is consistent with equation (170). It is convenient to define the physical exponents of the excited states with respect to the ground state :

$$\tilde{x}_{(n_+,n_-),(m_+,m_-)} \equiv x_{(n_+,n_-),(m_+,m_-)} - x_{(1/2,-1/2),(0,0)} \quad (178)$$

The physical exponents of the floor states are :

$$\tilde{x}_{(n+1/2,n-1/2),(m,m)} = gn^2 + \frac{m^2}{g} \quad (179)$$

$$\tilde{x}_{(n-1/2,n-1/2),(m,m)} = \frac{g}{4}(2n-1)^2 + \frac{m^2}{g} - \frac{K}{4} \quad (180)$$

In particular, the states  $\varphi_{(-1/2,-1/2),(0,0)}$ ,  $\varphi_{(1/2,1/2),(0,0)}$  have an energy which is twice that of the degenerate ground state of the XXZ spin-chain (134) with an odd lattice width [14]. These two states appear as excited states of the Hamiltonian  $\mathcal{H}$ .

The gaps inside a given sector are :

$$\tilde{x}_{(n+n'+1/2,n-n'-1/2),(m,m)} = \tilde{x}_{(n+1/2,n-1/2),(m,m)} + Kn'(n'+1) \quad (181)$$

$$\tilde{x}_{(n+n'-1/2,n-n'-1/2),(m,m)} = \tilde{x}_{(n-1/2,n-1/2),(m,m)} + K(n')^2 \quad (182)$$

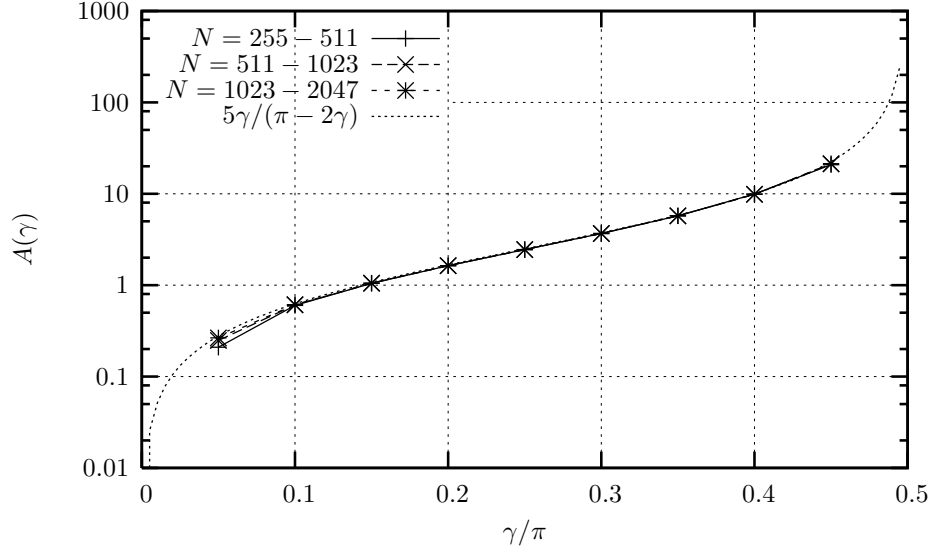


Figure 25: Determination of the factor  $A(\gamma)$  in the scaling law (170) by the effective central charge  $\tilde{c}$  for  $N$  odd.

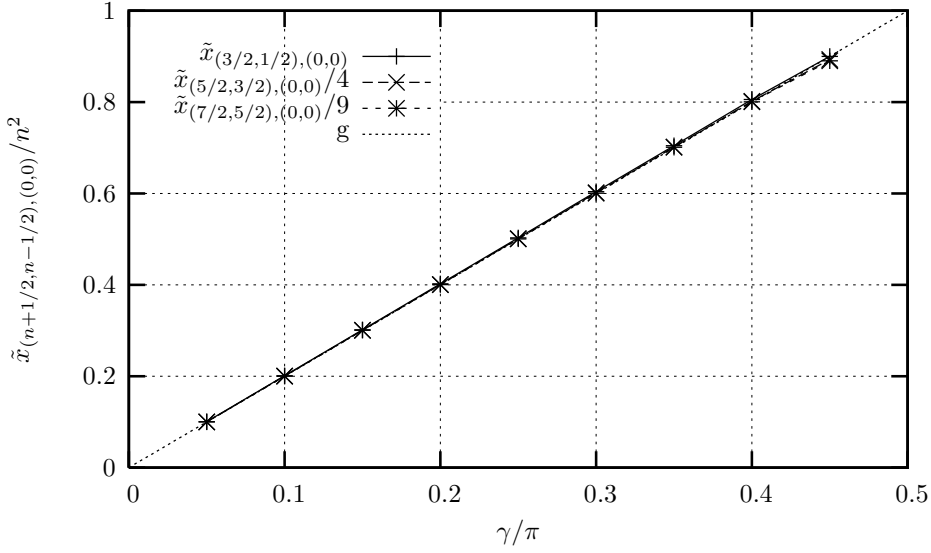


Figure 26: The floor exponents  $\tilde{x}_{(n+1/2, n-1/2), (0,0)}$  as functions of  $\gamma$ , for a lattice width  $N = 1023$ . The expected values are  $\tilde{x}_{(n+1/2, n-1/2), (0,0)} = gn^2$  (equation (179)).

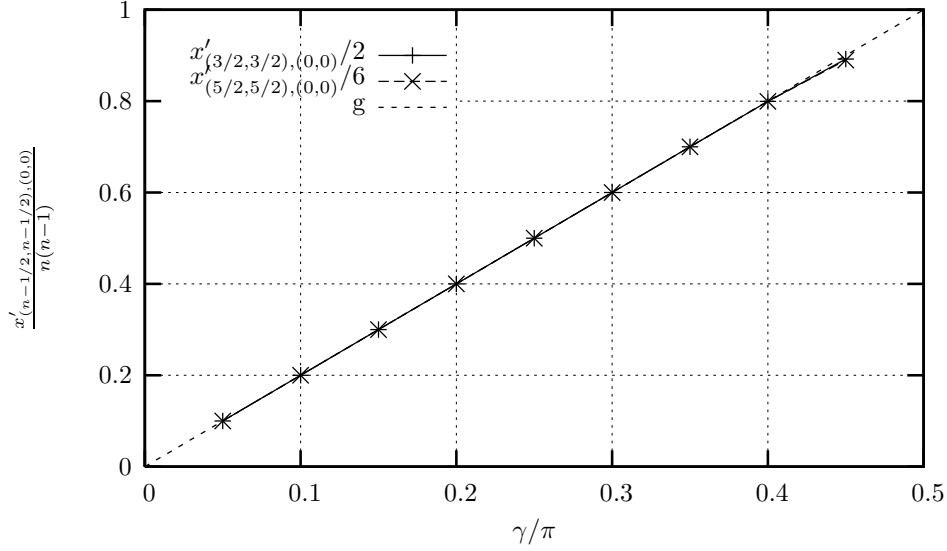


Figure 27: The floor exponents  $x'_{(n-1/2, n-1/2), (0,0)} \equiv \tilde{x}_{(n-1/2, n-1/2), (0,0)} - \tilde{x}_{(1/2, 1/2), (0,0)}$  as functions of  $\gamma$ , for a lattice width  $N = 1023$ . The expected values are  $x'_{(n-1/2, n-1/2), (0,0)} = gn(n-1)$  (equation (180)).

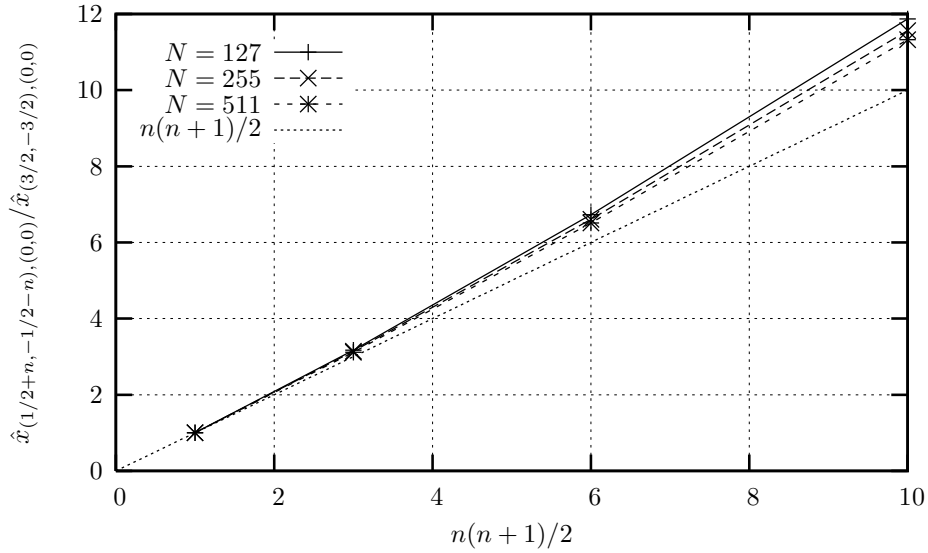


Figure 28: The exponent  $\hat{x}_{(1/2+n, -1/2-n), (0,0)} \equiv \tilde{x}_{(1/2+n, -1/2-n), (0,0)} - \tilde{x}_{(1/2, -1/2), (0,0)}$  as a function of  $n$ , for parameter  $\gamma = 0.3\pi$ . The expected values are  $\hat{x}_{(1/2+n, -1/2-n), (0,0)} = K(\gamma, N) n(n+1)$  (equation (181)).

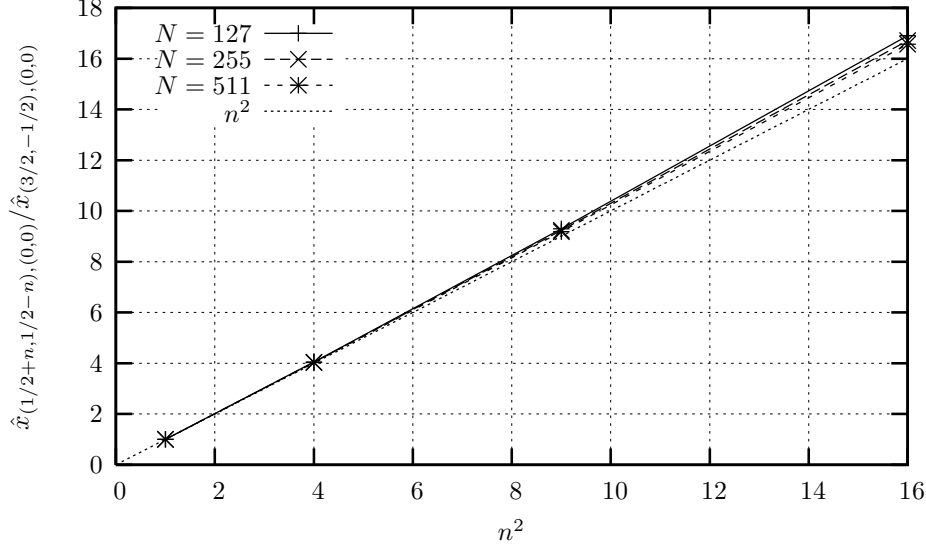


Figure 29: The exponent  $\hat{x}_{(1/2+n, 1/2-n), (0,0)} \equiv \tilde{x}_{(1/2+n, 1/2-n), (0,0)} - \tilde{x}_{(1/2, 1/2), (0,0)}$  as a function of  $n$ , for parameter  $\gamma = 0.3\pi$ . The expected values are  $\hat{x}_{(1/2+n, -1/2-n), (0,0)} = K(\gamma, N) n^2$  (equation (182)).

## 5 Interpretation and relation to non-linear sigma models

As discussed in section 2, the limit  $\gamma \rightarrow \pi/2$  of the staggered six-vertex model coincides with a particular point of the  $OSP(2|2)$  loop model of [7]. This is a good starting point to understand the emergence of a continuous spectrum of critical exponents.

### 5.1 A reminder on intersecting loop models and Goldstone phases

It turns out that the Mermin Wagner theorem forbidding the spontaneous breaking of a continuous symmetry in two dimensions does not hold for supergroups (because of the lack of unitarity), and that models with orthosymplectic  $OSP(m|2n)$  symmetry do exhibit a low temperature phase with spontaneous broken symmetry provided  $m - 2n < 2$ . More precisely, consider the non linear sigma model with target space the supersphere  $S^{m, 2n} = OSP(m|2n)/OSP(m-1|2n)$ , a “supersymmetric” extension of the usual  $O(N)$  sigma model. Use as coordinates a real scalar field :

$$\phi \equiv (\phi_1, \dots, \phi_m, \psi_1, \dots, \psi_{2n}) \quad (183)$$

and the invariant bilinear form

$$\phi \cdot \phi' = \sum \phi_a \phi'_a + \sum J_{\alpha\beta} \psi_\alpha \psi'_\beta \quad (184)$$

where  $J_{\alpha\beta}$  is the symplectic form which we take consisting of diagonal blocks :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . The unit supersphere is defined by the constraint :

$$\phi \cdot \phi = 1 \quad (185)$$

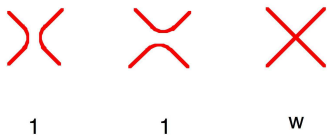


Figure 30: Interaction vertices in the  $OSP(m|2n)$  symmetric sigma model on the square lattice.

The action of the sigma model (conventions are that the Boltzmann weight is  $e^{-S}$ ) reads :

$$S = \frac{1}{2g_\sigma} \int d^2x \partial_\mu \phi \cdot \partial_\mu \phi \quad (186)$$

The perturbative  $\beta$  function depends only on  $m - 2n$  to all orders :

$$\beta(g_\sigma) = (m - 2n - 2)g_\sigma^2 + O(g_\sigma^3) \quad (187)$$

The model for  $g_\sigma$  positive thus flows to strong coupling for  $m - 2n > 2$ . Like in the ordinary sigma models case, the symmetry is restored at large length scales, and the field theory is massive. For  $m - 2n < 2$  meanwhile, the model flows to weak coupling, and the symmetry is spontaneously broken. One expects this scenario to work for  $g_\sigma$  small enough, and the Goldstone phase to be separated from a non perturbative strong coupling phase by a critical point.

It is easy to suggest lattice models whose long distance physics is described by the supersphere sigma models. It was shown in [7] that simply taking a square lattice with the fundamental representation of the  $OSP(m|2n)$  on each link and Heisenberg coupling at every vertex would suffice. More generally, it is convenient to represent the link states by lines carrying a label  $a = 1, \dots, m$  or  $\alpha = 1, \dots, 2n$  and express the interactions in terms of the three invariant tensors of the algebra, corresponding to the three diagrams in figure 30.

A trivial rescaling of the partition function and isotropy of the model allows one to set the first two weights equal to 1. The remaining weight is a free bare parameter. It was found in [7] that for *any*  $w > 0$  and  $m - 2n < 2$  the lattice model is indeed described at large distance by the UV limit of the sigma model, ie a set of  $m - 1$  free uncompactified bosons and  $n$  pairs of symplectic fermions, with a central charge  $c = m - 2n - 1$ . The value  $w = 0$  is critical, and was argued in [7, 15] to correspond to the critical point of the sigma model. Note that for  $m - 2n$  fixed, there exists a particular value of the crossing weight  $w$  where the model is integrable, and coincides with the one in [12].

Of course, the geometrical representation of the invariant tensors allows for a full geometrical formulation of the model, that can then be extended to values of  $m, n$  not integer. The model so obtained is made of loops covering every link of the lattice, and possibly self-intersecting once on the vertices, with a fugacity  $m - 2n$ , and a weight  $w$  per crossing. The continuum limit was found to be a naive extrapolation from the results at  $m, n$  integer. Note that this model differs from the usual formulation of the  $Q$ -state critical Potts model with  $m - 2n \equiv \sqrt{Q}$  only in that crossings are allowed. This however changes the universality class deeply. For instance, all the  $L$ -leg operators which have non trivial,  $Q$ -dependent scaling dimensions in the Potts model for  $-2 \leq \sqrt{Q} \leq 2$ , now have logarithmic correlators with vanishing effective dimension. This is because the symmetry being spontaneously broken the fundamental field has non vanishing expectation value, and thus the fields  $\phi_a$  do exist in the conformal field theory, unlike in the case of a compact boson.

[Paths that can self intersect at a vertex but not at a bond are called *trails* in the literature, and “bond self avoiding models” by contrast with “site self avoiding”. The case  $m - 2n = 0$  we consider below would correspond

to “fully packed trails”. People have considered ordinary (dilute) trails which are in the same universality class as dilute SAW and trails at the theta point. Those have been shown to be in the same universality class as “growing self avoiding trails”, themselves a particular case of the trajectory of a particle moving on a lattice with random distribution of scattering rotators. See [16, 17]. In the context of such trajectories, it has been remarked already that when one dilutes the set of random rotators from maximum concentration  $C_L = C_R = 1/2$  (i.e., add intersections), the exponents change.]

## 5.2 Coupling constant and physical exponents of the $OSP(2|2)$ model

We now specialize to the case of interest here, the  $OSP(2|2)$  model. The UV limit is easy to understand. We can parametrize the supersphere

$$(\phi_1)^2 + (\phi_2)^2 + 2\psi_1\psi_2 = 1 \quad (188)$$

by setting

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \cos \phi (1 - \psi_1\psi_2) \\ \phi_2 &= \sin \phi (1 - \psi_1\psi_2), \quad \phi \equiv \phi + 2\pi \end{aligned} \quad (189)$$

The action then reads

$$S = \frac{1}{2g_\sigma} \int d^2x [(\partial_\mu \phi)^2 (1 - 2\psi_1\psi_2) + 2\partial_\mu \psi_1 \partial_\mu \psi_2 - 4\psi_1\psi_2 \partial_\mu \psi_1 \partial_\mu \psi_2] \quad (190)$$

The coupling  $g_\sigma > 0$  flows to zero at large distances. On the other hand, we can absorb it by rescaling all fields so the action reads

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x [(\partial_\mu \phi)^2 (1 - 2g_\sigma \psi_1\psi_2) + 2\partial_\mu \psi_1 \partial_\mu \psi_2 + 4g_\sigma \psi_1\psi_2 \partial_\mu \psi_1 \partial_\mu \psi_2] \quad (191)$$

where now  $\phi$  has a different radius,  $\phi \equiv \phi + \frac{2\pi}{\sqrt{g_\sigma}}$ . We see that as  $g_\sigma \rightarrow 0$  all interaction terms disappear and we get a free boson  $\phi$  together with a pair of free symplectic fermions  $\psi_{1,2}$ . Moreover the radius of compactification goes to infinity in that limit, so the boson  $\phi$  appears as non compact.

This holds in the true large distance limit. At intermediate scales, we can use the RG equation for the coupling [18]

$$\frac{dg_\sigma}{d \log l} = \frac{m - 2n - 2}{2\pi} g_\sigma^2 = -\frac{1}{\pi} g_\sigma^2 \quad (192)$$

Writing more generally

$$\frac{dg_\sigma}{d \log l} = -\alpha g_\sigma^2 \quad (193)$$

we see that  $g_\sigma$  approaches its vanishing large distance value as

$$\frac{1}{g_\sigma} = \frac{1}{g_\sigma^0} + \alpha \log(l/l_0) \simeq \alpha \log(l/l_0) \quad (194)$$

Here,  $l$  is a characteristic dimensionless scale ratio, roughly of the order of the ratio of the scale at which one is observing the physics to the lattice cut-off. On the cylinder,  $l$  can be identified with the width in lattice units,  $l = N$ .

In the limit of large  $l$ , we can estimate more precisely the contribution to the spectrum coming from the boson  $\phi$ . Recall that for a free bosonic theory where the action is normalized as  $S = \frac{1}{8\pi} \int (\partial_\mu X)^2$  and the field compactified as  $X \equiv X + 2\pi R$ , the spectrum of dimensions [19] is

$$\Delta + \bar{\Delta} = \frac{e^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{4} \quad (195)$$



Matching the normalization gives  $R^2 = 4\pi/g_\sigma$  in our case, and thus we expect the scaled gaps coming from the bosonic degrees of freedom to read, at large distances :

$$\Delta + \bar{\Delta} = \frac{e^2}{4\pi\alpha \log(l/l_0)} + m^2\pi\alpha \log(l/l_0) \quad (196)$$

In the limit  $l \rightarrow \infty$  the dimensions become degenerate and the spectrum can be considered as a continuum starting above  $\Delta + \bar{\Delta} = 0$ . To emphasize the latter point, consider the contribution to the partition function coming from the  $\phi$  degrees of freedom. The system is defined on a torus of periods  $l$  and  $l'$ , with  $l'/l = \tau$ . Denote  $q = \exp(2i\pi\tau)$ .

$$\begin{aligned} Z_\phi &= \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \sum_{e,m} q^{(e/R+mR/2)^2/2} \bar{q}^{(e/R-mR/2)^2/2} \\ &= \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\text{Im } \tau} \eta\bar{\eta}} \sum_{m,m'} \exp\left(-\frac{\pi R^2 |m\tau - m'|^2}{2 \text{Im } \tau}\right) \\ &\underset{R \rightarrow \infty}{\approx} \frac{R}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\text{Im } \tau} \eta\bar{\eta}} \end{aligned} \quad (197)$$

where  $\eta = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = q^{1/24} P(q)$ . Observe now that one can write :

$$\frac{1}{\sqrt{\text{Im } \tau} \eta\bar{\eta}} = 4 \int_0^\infty \frac{q^{s^2} \bar{q}^{s^2}}{\eta\bar{\eta}} ds \quad (198)$$

which can be interpreted as an integral over a continuum of critical exponents  $\Delta = \bar{\Delta} = s^2$ . In the partition function (197),  $R$  plays the role of the density of levels, and is proportional to the (diverging) size of the target space.

Going back to the specific case of the  $OSP(2|2)/OSP(1|2)$  model, we set  $\alpha = 1/\pi$ . We get the radius  $R^2 = 4 \log(l/l_0)$ , and the contribution of the free boson  $\phi$  to the spectrum is :

$$\Delta + \bar{\Delta} = \frac{(e_2)^2}{4 \log(l/l_0)} + (m_2)^2 \log(l/l_0) \quad (199)$$

with  $e_2, m_2$  arbitrary integers. Suppose now we consider the sigma model with a combination of periodic and antiperiodic boundary conditions for the symplectic fermions. These get untwisted, and add to  $Z_\phi$  the discrete spectrum of a free boson at the free fermion point, which is given by equation (195) with a radius  $R^2 = 1$ . The quantum numbers associated to the fermions will be denoted  $e_1, m_1$ . Thus we expect :

$$\Delta + \bar{\Delta} = (e_1)^2 + \frac{(m_1)^2}{4} + \frac{(e_2)^2}{4 \log(l/l_0)} + (m_2)^2 \log(l/l_0) \quad (200)$$

We can now compare with formula (159). It is not entirely clear how constrained the quantum numbers might be in the lattice realization we are considering. But observe that finite scaled gaps occur for  $m_+ = m_- = m$  and converge to

$$x = \frac{m^2}{g} + \frac{1}{4}g(n_+ + n_-)^2 + \frac{1}{4}K(\gamma, N)(n_+ - n_-)^2 \quad (201)$$

When  $\gamma$  tends to  $\pi/2$ , equations (158) and (171) give the coupling constants :

$$g = 1, \quad K(\pi/2, N) \sim \frac{A'}{\log N} \quad (202)$$

The numerical results are compatible with  $A' = 1$ . This suggests the identifications :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}(m_+ + m_-) = m \\ m_1 &= n_+ + n_- \\ \\ e_2 &= n_+ - n_- \\ m_2 &= \frac{1}{2}(m_+ - m_-) = 0 \end{aligned}$$

Note that the quantum numbers are (weakly) correlated : the integers  $m_1, e_2$  are such that  $(m_1 + e_2)$  is even.

### 5.3 Interpretation of the staggered six-vertex model for $\gamma < \pi/2$

In preparation for the subsequent discussion, we will denote the effective (square) radius of the non compact boson by  $(R_2)^2$  (equal to  $4 \log(l/l_0)$  for  $\gamma = \pi/2$ ) and the radius of the compact boson by  $(R_1)^2$  (equal to 1 for  $\gamma = \pi/2$ ). Away from  $\gamma = \pi/2$ , it would be reasonable to try and interpret our results in terms of a deformation of the supersphere sigma model. Several scenarios are *a priori* possible. From the numerical results, the compact direction clearly has a modified radius which becomes :

$$(R_1)^2 = g = \frac{2\gamma}{\pi} \quad (203)$$

As for the non compact direction, a first possibility would be to consider a constant  $\alpha(\gamma)$  in the foregoing discussion. Although it provides reasonable results, much better fits are obtained with a radius going like  $\log(l/l_0)$  for  $\gamma \neq \pi/2$ ; specifically, we find :

$$(R_2)^2 = \frac{\pi - 2\gamma}{5\gamma} [\log(l/l_0)]^2 \quad (204)$$

Note that this becomes ill-defined as  $\gamma$  tends to  $\pi/2$ , where there is crossover to a behaviour linear in  $\log(l/l_0)$ .

The most naive interpretation of the corresponding target space would be a torus with one period diverging like  $\log(l/l_0)$  in the scaling limit. This is reminiscent of results on the sausage model [20] which is a deformation of the usual sphere sigma model. There however, the theory instead of being massless in the IR is massless in the UV, while the target space in that limit is asymptotically a cigar. The dependence of the cigar dimensions on the RG scale and the anisotropy parameter are however reminiscent of ours; in particular the ‘‘long dimension’’ goes as the logarithm of the RG coordinate in both cases.

Another, more suggestive interpretation, can be obtained if we consider the partition function of our model on the torus. Set  $\gamma = \pi/t$  so  $(R_2)^2 = \frac{t-2}{5} [\log(l/l_0)]^2$ . Using the continuum representation (197) and reabsorbing the  $t - 2$  prefactor that comes from the dependence of  $R_2$  upon  $t$  into the continuously varying exponents we obtain the partition function :

$$Z \propto \frac{\log(l/l_0)}{(\eta\bar{\eta})^2} \sum_{e, m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} ds q^{\frac{s^2}{t-2} + \frac{(m-te)^2}{4t}} \bar{q}^{\frac{s^2}{t-2} + \frac{(m+te)^2}{4t}} \quad (205)$$

where the proportionality constant is a presumably non universal quantity, independent of  $t$ , equal approximately to  $1/\sqrt{10}$ . Observe now that  $\frac{2(t+1)}{t-2} - \frac{24}{4(t-2)} = 2$  so the conformal weights can be written as well, with respect to  $c = \frac{2(t+1)}{t-2}$ , as :

$$h = \frac{s^2 + \frac{1}{4}}{t-2} + \frac{(m \mp te)^2}{4t} \quad (206)$$

This coincides with the contribution of the continuous representations to the spectrum of the Euclidian black hole CFT  $SL(2, R)/U(1)$  coset model [21].

It might be useful here to give some quick reminders for the spectrum of this model. The central charge for level  $k$  is :

$$c_{\text{BH}} = \frac{2(k+1)}{k-2} \quad (207)$$

Normalizable operators come in two kinds. There is the ones (delta functions normalizable) associated with the principal continuous series  $j = -\frac{1}{2} + is$  with conformal weight :

$$h = -\frac{j(j+1)}{k-2} + \frac{(n \pm kw)^2}{4k} = \frac{s^2 + \frac{1}{4}}{k-2} + \frac{(n \pm kw)^2}{4k} \quad (208)$$

and the ones coming from the discrete series. They have  $j \in [\frac{1-k}{2}, -\frac{1}{2}]$  together with rules relating allowed values to  $w, n$ . The net result is that these fields all have dimensions larger than the bottom of (208). Note that the identity field  $h = 0$  is not among the normalizable states, which is consistent with the fact that we do not observe (after the obvious identification  $k \equiv t$ )  $c_{\text{BH}}$  in the lattice model but  $c_{\text{BH}} - 24\frac{1}{4(k-2)} = 2$ .

Of course the partition function of the Euclidian black hole theory should naively be infinite since it involves infinite dimensional representations of  $SL(2)$ . The introduction of a Liouville wall at finite distance in the target space [22] gives a density of states  $\rho(s) \propto \log \epsilon$  to leading order, which agrees with our results provided we identify  $\epsilon \equiv l/l_0$ , and thus the size of the system (it would certainly be interesting to investigate the subleading behaviour, which depends on  $s$ , in the lattice data).

Finally, we note that in [22], the sum (4.17) implies some combinatorial constraints on the descendants, which we have not studied in the lattice model.

Note that further twisting and reduction of the vertex model gives rise to parafermionic theories, which are themselves cosets  $SU(2)/U(1)$ . It is not clear how this might be related to the identification of the untwisted vertex model with  $SL(2, R)/U(1)$ .

## 6 Geometrical interpretation of the critical exponents

For the  $OSP(m|2n)$  models in their Goldstone phases, the continuous spectrum of critical exponents has its origin (like in the case of a pure non compact boson) in the existence of infinitely many operators with vanishing scaling dimension (the powers of  $\phi$  in the case of the non compact boson), which in itself is a consequence of the spontaneously broken symmetry [7]. An obvious question is whether a similar interpretation exists for our model.

Some insight can be gained by considering the limit  $\gamma \rightarrow \pi/2$  which is related to the  $OSP(2|2)$  model. In the latter, exponents of the order parameter are related with geometrical correlations of the degrees of freedom carrying lines, and therefore it is tempting to ask whether this might hold away from the limit point as well. Before discussing this, it is important to notice that the staggered six-vertex model at  $\gamma = \pi/2$  (and the equivalent 38-vertex model) with periodic boundary conditions correspond, strictly speaking, to the model of [7, 10] where the  $OSP$  symmetry is broken by the boundary. This is the reason why the spectrum of conformal weights contains a compact boson with  $(R_1)^2 = 1$ , and thus non trivial, finite exponents. Within the geometrical interpretation to be discussed below, this will correspond to the existence of some correlators having non trivial weights, while others do behave as in [7].

Let us now be more specific. As shown in section 2.3, summing on  $2 \times 2$  vertex blocks and choosing the right basis, the staggered six-vertex model is equivalent to the 38-vertex model. Any lattice configuration within this model is completely covered by polygons of three different types : oriented lines, bare thin lines and bare thick lines. The particular point  $\gamma = \pi/2$ , as well as our discussion on Goldstone phases, suggests to consider geometrical correlations associated with these lines.

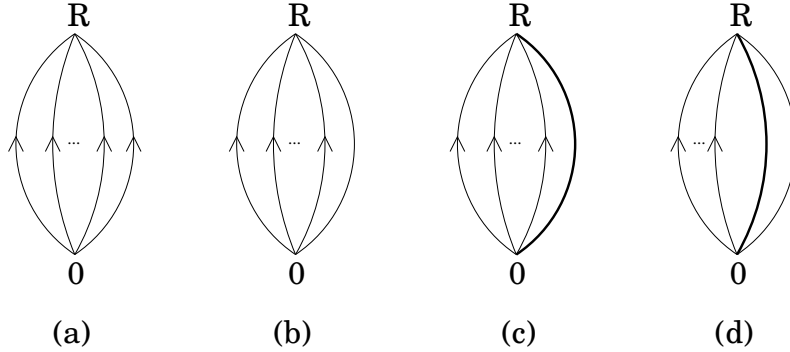


Figure 31: Some “watermelon” correlation functions. (a): no bare line, (b)-(c): one bare line, (d): one thin line and one thick line.

### 6.1 Correlation functions with no thin or thick line

Consider first the watermelon correlation function (as illustrated on the figure 31) consisting of a forced even number  $2r$  of positively-oriented lines (that is, we force  $2r$  such lines to propagate through the system, on top of fluctuating numbers of positively and negatively oriented lines in equal number and bare lines). The critical exponent of this correlation function is given by the lowest-energy state in the sector with fixed total spin  $S = 2r$  and  $C = 1$ . According to equation (159), this state is  $\varphi_{(r,r),(0,0)}$ . According to equation (105), this is an eigenstate of the operator  $C$ , with eigenvalue one.

### 6.2 Correlation functions with one thin or thick line

Consider the correlation function consisting of a forced odd number  $2r - 1$  of positively-oriented lines, along with one bare (thin or thick) line. The critical exponent of the correlation function with a thin (resp. thick) line is given by the lowest-energy state in the sector with fixed total spin  $S = 2r - 1$  and  $C = 1$  (resp.  $C = -1$ ). Both states  $\varphi_{(r,r-1),(0,0)}^{\pm}$  have the physical exponent  $x_{(r,r-1),(0,0)}$ . Thus, the correlation functions with one thin or thick line have the same exponent  $x_{(r,r-1),(0,0)}$ .

### 6.3 Correlation functions with one thin line and one thick line

Consider the correlation function consisting of a forced even number  $2r$  of positively-oriented lines, along with one thin line and one thick line. The critical exponent of this correlation function is given by the lowest-energy state in the sector with fixed total spin  $S = 2r$  and  $C = -1$ . This state is  $\varphi_{(r+1,r-1),(0,0)}^-$ , with physical exponent  $x_{(r+1,r-1),(0,0)}$ .

In the particular case  $r = 0$ , this exponent becomes :

$$x_{(1,-1),(0,0)} = K(\gamma, N) \tag{209}$$

This exponent vanishes in the thermodynamic limit. So the two-leg correlation function consisting of one thin line and one thick line belongs to the continuous subspectrum associated to the ground state.

## 6.4 Interpretation

The physical interpretation we suggest for the continuum limit of the 38-vertex model is thus the following. The arrow degrees of freedom can be treated like the usual domain boundaries for a RSOS model which renormalizes, at large distances, to a compactified free bosonic field with radius  $R_1$ . A correlation function involving a certain number  $S$  of positively oriented lines corresponds for this bosonic field to a magnetic or vortex operator, whose physical exponent is given by  $x = gS^2/4$ .

Meanwhile, correlators involving in addition thin and thick lines as well have, in the thermodynamic limit, exponents entirely determined from the contribution of the arrow degrees of freedom.<sup>1</sup> Thin and thick lines correspond thus to operators with vanishing exponents and (presumably) logarithmic correlators, and behave similarly to the crossing lines in the models of [7].

## 7 Conclusion, open problems

First and foremost, we believe this work puts on firm ground the existence of a continuous spectrum of critical exponents in a model with a finite number of lattice degrees of freedom per site (link), justifying fully the conclusions of [7, 8].

It is truly remarkable that a proper staggering of the simple six-vertex model could give rise to such interesting behaviour: obvious directions for future work are plenty, and include an analytic derivation of the coupling constant  $K$ , a better understanding of the relationship with  $SL(2, R)/U(1)$ , and of the effect of the various twist and truncations necessary to produce the Potts and RSOS versions of this model.

It should also be possible to generalize the problem to some higher spin version. Some comments on Bethe equations are in order here. Recall that the usual source term for these equations reads, in the case of spin  $1/2$  :

$$\left( \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha - i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha + i\gamma)} \right)^N \quad (210)$$

One might think of changing it through real heterogeneities  $\pm\Lambda$ , leading to equations which have been used a great deal in the study of massive deformations [23] :

$$\left( \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha - \Lambda - i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha - \Lambda + i\gamma)} \right)^{N/2} \left( \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha + \Lambda - i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha + \Lambda + i\gamma)} \right)^{N/2} \quad (211)$$

One could also think of changing it through imaginary heterogeneities. The simplest case would correspond to adding “string heterogeneities”, i.e., for the simplest case of the two string, formally  $\Lambda = i\gamma$ . Clearly however half the modified source terms cancel out, leaving :

$$\left( \frac{\sinh \frac{1}{2}(\alpha - 2i\gamma)}{\sinh \frac{1}{2}(\alpha + 2i\gamma)} \right)^N \quad (212)$$

---

<sup>1</sup>A subtle remark is in order here. Recall the conserved quantities of the 38-vertex model : the total spin and the value of operator  $C$ . In geometrical terms, this means that the *total* arrow flow is conserved, whereas only the *parity* of the number of thick lines is conserved. To define a correlation function with more than one thick lines within the 38-vertex partition function, it is necessary to define the transfer matrix on a non-local Hilbert space (so that the transfer matrix keeps track of the connectivity of the thick lines). In this framework, three interpretations are possible for the vertex  $a_1^{(8)}$ . The behaviour of the correlation functions is likely to depend on the “splitting” of this vertex into the three possible connectivities, though we believe that the behaviour is universal, in agreement with this conclusion. We did not enter into these technicalities here, and simply described the correlation functions which are not affected by this problem.

which is nothing but the source term for a spin one chain. In general, heterogeneities of the type p-string will lead to the equations for the spin  $p/2$  chain. The other natural possibility would be to add heterogeneities of the anti-string type, ie  $\Lambda = i\pi$ . Up to a shift  $\alpha \rightarrow \alpha + i\pi$ , this produces however the initial equations, and is well known to simply change the Hamiltonian from ferromagnetic to antiferromagnetic. The possibility we encountered in this paper consists in adding heterogeneities right in the middle of the “physical strip”, at  $\Lambda = i\pi/2$ . Note that the higher spin generalization is obvious by changing  $i\gamma$  to  $2si\gamma$  everywhere.

It is also fascinating that the model should interpolate between  $OSP(2/2)$  and  $SO(4)$  symmetries when  $\gamma$  goes from  $\pi/2$  to zero. This suggests the existence of a possible quantum group symmetry all along the line, which we have unfortunately not yet been able to identify.

## References

- [1] R.J. Baxter, Proc. R. Soc. Lond. A **383**, 43 (1982).
- [2] V. Schomerus, Phys. Rep. **431**, 29 (2006).
- [3] J. Maldacena and H. Ooguri, J. Math. Phys. **42**, 2929 (2001).
- [4] M. R. Zirnbauer, *Conformal field theory of the integer quantum Hall plateau transition*, hep-th/9905054.
- [5] B. Duplantier, Phys. Rep. **184**, 229 (1989).
- [6] A.V. Belitsky, S.E. Derchakov, G.P. Korchemsky and A.N. Manashov, *Baxter Q-operator for graded  $SL(2|1)$  spin chain*, hep-th/0610332.
- [7] J.L. Jacobsen, N. Read and H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **90**, 090601 (2003).
- [8] F. Essler, H. Frahm and H. Saleur, Nucl. Phys. B **712**, 513 (2005).
- [9] J.L. Jacobsen and H. Saleur, Nucl. Phys. B **743**, 207 (2006).
- [10] J.L. Jacobsen and H. Saleur, Nucl. Phys. B **716**, 439 (2005).
- [11] R.J. Baxter, Studies in Appl. Math. **50**, 51 (1971).
- [12] M. J. Martins, B. Nienhuis and R. Reitman, Phys. Rev. Lett. **81**, 504 (1998).
- [13] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2nd edition (Cambridge University Press, 1992).
- [14] F.C. Alcaraz, M.N. Barber and M.T. Batchelor, Ann. Phys. **182**, 280 (1988).
- [15] N. Read and H. Saleur, Nucl. Phys. B **613**, 409 (2001).
- [16] A.I. Owczarek and T. Prellberg, J. Stat. Phys. **79**, 951 (1995).
- [17] M.S. Cao and E.G.D. Cohen, J. Stat. Phys. **87**, 147 (1997).
- [18] E. Abdalla, M.C.B. Abdalla and K.D. Rothe, *Non-perturbative methods in two-dimensional quantum field theory* (World Scientific, 1991).
- [19] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal field theory* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [20] V. Fateev, E. Onofri and A.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **406**, 521 (1993).
- [21] R. Dijkgraaf, H. Verlinde and E. Verlinde, Nucl. Phys. B **371**, 269 (1992).
- [22] A. Hanany, N. Prezas and J. Troost, JHEP **04**, 014 (2002).
- [23] See for instance: C. Destri and H. de Vega, Nucl. Phys. B **438**, 413 (1995); N. Yu Reshetikhin and H. Saleur, Nucl. Phys. B **419**, 507 (1994).

# Bibliographie

- [1] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B241**, 333 (1984)
- [2] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, Phys. Rev. Lett. **52**, 1575 (1984)
- [3] J.L. Cardy, J. Phys. **A 17**, L385 (1984)
- [4] H.W.J. Blöte, J.L. Cardy and M.P. Nightingale, Phys. Rev. Lett. **56**, 742 (1986)  
I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **56**, 746 (1986)
- [5] R. B. Potts, Proc. Camb. Phil. Soc. **48**, 106 (1952)
- [6] P. W. Kasteleyn, C. M. Fortuin, J. Phys. Soc. Jpn. Suppl. **26**, 11 (1969)
- [7] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, Physica **57**, 536 (1972)
- [8] D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor & Francis, London-Philadelphia (1985)
- [9] P.G. de Gennes, *Scaling concepts in polymer physics*, Cornell University (1979)
- [10] B. Nienhuis, Phys. Rev. Lett. **49**, 1062 (1982)
- [11] B. Duplantier, H. Saleur, Nucl. Phys. **B290**, 291 (1987)
- [12] M.T. Batchelor, H.W.J. Blöte, Phys. Rev **B39**, 2391 (1989)
- [13] H.W.J. Blöte, B. Nienhuis, J. Phys. **A22**, 1415 (1989)
- [14] M.T. Batchelor, B. Nienhuis, S.O. Warnaar, Phys. Rev. Lett. **62**, 2425 (1989)  
B. Nienhuis, Int. J. Mod. Phys. **B4**, 929 (1990)
- [15] J. Kondev, J. de Gier, B. Nienhuis, J. Phys. **A29**, 6489 (1996)
- [16] M.T. Batchelor, H.W.J Blöte, B. Nienhuis, C.M. Yung, J. Phys. **A29**, L399 (1996)
- [17] J.L. Jacobsen, J. Kondev, Nucl. Phys. **B532**, 635 (1998)  
D. Dei Cont, B. Nienhuis, J. Phys. **A37**, 3085 (2004)  
J.L. Jacobsen, P. Zinn-Justin, J. Phys. **A37**, 7213 (2004)



- [18] J.L. Jacobsen, J. Kondev, Phys. Rev. Lett. **92**, 210601 (2004)  
J.L. Jacobsen, J. Kondev, Phys. Rev. **E69**, 066108 (2004)
- [19] P. W. Kasteleyn, Physica **27**, 1209 (1961)
- [20] M. E. Fisher, Phys. Rev. **124**, 1664 (1961)
- [21] M. E. Fisher, J. Stephenson, Phys. Rev. **132**, 1411 (1963)
- [22] M. E. Fisher, J. Math. Phys **7**, 1776 (1966)
- [23] F. Alet, J. L. Jacobsen, G. Misguich, V. Pasquier, F. Mila, M. Troyer, Phys. Rev. Lett. **94**, 235702 (2005)
- [24] F. Alet, G. Misguich, V. Pasquier, R. Moessner, J. L. Jacobsen, Phys. Rev. Lett. **97**, 030403 (2006)
- [25] V.I.S. Dotsenko, V.A. Fateev, Nucl. Phys. **B240**, 312 (1984)
- [26] B. Nienhuis, *in Phase Transitions and Critical Phenomena* **11**, C. Domb, J.L. Lebowitz, *ed.* (1987)
- [27] Ph. Di Francesco, H. Saleur, J.B. Zuber, J. Stat. Phys. **49**, 57 (1987)
- [28] J. Kondev, cond-mat/9607181 (1996)
- [29] J. Kondev, Phys. Rev. Lett. **78**, 4320 (1997)
- [30] R. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London (1982)
- [31] V. Pasquier, H. Saleur, Nucl. Phys. **B330**, 523 (1990)
- [32] R. J. Baxter, Proc. Roy. Soc. Lond. **A 383**, 43 (1982)
- [33] H. Saleur, Nucl. Phys. **B360**, 219 (1991)
- [34] J.L. Jacobsen, H. Saleur, Nucl. Phys. **B743**, 207 (2006)
- [35] M.J. Martins, B. Nienhuis, R. Rietman, Phys. Rev. Lett. **81**, 504 (1998)
- [36] J.L. Jacobsen, N. Read, H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **90**, 090601 (2003)
- [37] F.C. Alcaraz, M.N. Barber, M.T. Batchelor, Ann. Phys. **182**, 280 (1988)
- [38] R. J. Baxter, J. Phys. **C6**, L445 (1973)
- [39] G.H. Wannier, Rev. Mod. Phys. **17**, 50 (1945)
- [40] M. den Nijs, Phys. Rev. **B27**, 1674 (1983)
- [41] B. Duplantier, H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **58**, 2325 (1987)
- [42] A. Coniglio, Phys. Rev. Lett. **62**, 3054 (1989)

- [43] H.N.V Temperley, E.H. Lieb, Proc. Roy. Soc. London **A322**, 251 (1971)
- [44] R. J. Baxter, S. B. Kelland, F. Y. Wu, J. Phys. **A9**, 397 (1976)
- [45] H. Saleur, Commun. Math. Phys. **132**, 657 (1990)
- [46] S. Caracciolo, J. L. Jacobsen, H. Saleur, A. Sokal, A. Sportiello, Phys. Rev. Lett. **93**, 080601 (2004)
- [47] J.L. Jacobsen, J. Salas, A.D. Sokal, J. Stat. Phys. **119**, 1153 (2005)
- [48] J.L. Jacobsen, H. Saleur, Nucl. Phys. **B716** 439 (2005)
- [49] J.L. Cardy, *Scaling and renormalization in Statistical Physics*, Cambridge University Press (1996)
- [50] J.L. Cardy, *in Phase Transitions and Critical Phenomena 11*, C. Domb, J.L. Lebowitz, ed. (1987)
- [51] Vl. S. Dotsenko, *Série de cours sur la théorie conforme*, <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092929> (2004)
- [52] Ph. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag, New York (1997)
- [53] E. Fradkin, L.P. Kadanoff, Nucl. Phys. **B170**, 1 (1980)
- [54] R.J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **26**, 832 (1971)
- [55] S.O. Warnaar, M.T. Batchelor, B. Nienhuis, J. Phys. **A25**, 3077 (1992)
- [56] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, [math-ph/9807020](http://arxiv.org/abs/math-ph/9807020) (1998)
- [57] L. Kadanoff, H. Ceva, Phys. Rev. **B3**, 3918 (1971)
- [58] A. Klümper, M.T. Batchelor, P.A. Pearce, J. Phys. **A24**, 3111 (1991)
- [59] H.J. de Vega, F. Woynarovitch, Nucl. Phys. **B251**, 439 (1985)
- [60] C.N. Yang, C.P. Yang, Phys. Rev. **150**, 321 (1966)
- [61] C.N. Yang, C.P. Yang, Phys. Rev. **150**, 327 (1966)
- [62] G. Albertini, S. Dasmahapatra, B.M. McCoy, Int. J. Mod. Phys. **A7**, Suppl. **1A**, 1 (1992)
- [63] K. Fabricius, B.M. McCoy, J. Stat. Phys. **103**, 647 (2001)
- [64] B. Duplantier, K.H. Kwon, Phys. Rev. Lett. **61**, 2514 (1988)
- [65] B. Duplantier, Proc. Symposia Pure Math. **72** part 2, 365, AMS, Providence, R.I. (2004)
- [66] M. E. Fisher, V. Privman, S. Redner, J. Phys. **A 17**, L569 (1984)

- 
- [67] B. Duplantier, H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **60**, 2343 (1988)
  - [68] J. H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford (1965)
  - [69] H.W.J. Blöte, M.P. Nightingale, B. Derrida, J. Phys. **A14**, L45 (1981)
  - [70] H.W.J. Blöte, M.P. Nightingale, Physica **A112**, 405 (1982)
  - [71] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2nd edition, Cambridge University Press (1992)
  - [72] K. Binder, D.W. Heermann, *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, 3rd edition, Springer (1997)
  - [73] F. Woynarovitch, H.P. Ecker, J. Phys. **A20**, L97 (1987)
  - [74] H.J. de Vega, F. Woynarovitch, J. Phys. **A23**, 1613 (1990)
  - [75] W. Kager, B. Nienhuis, J. Stat. Mech. P08004 (2006)
  
  - [76] F. Alet, Y. Ikhlef, J. L. Jacobsen, G. Misguich, V. Pasquier, Phys. Rev. **E74**, 041124 (2006)
  - [77] Y. Ikhlef, J.L. Jacobsen, H. Saleur, cond-mat/0612037, accepté par Nucl. Phys. B (2006)
  - [78] Y. Ikhlef, J.L. Jacobsen, H. Saleur, J. Stat. Mech. P05005 (2007)