



**HAL**  
open science

# Les Équations Différentielles en Mathématiques et en Physique: Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir

Aysegul Saglam-Arslan

► **To cite this version:**

Aysegul Saglam-Arslan. Les Équations Différentielles en Mathématiques et en Physique: Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir. domain\_stic.educ. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT: . tel-00271402

**HAL Id: tel-00271402**

**<https://theses.hal.science/tel-00271402>**

Submitted on 9 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

**THESE**

Pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Ecole doctorale de Mathématiques et Informatique- Sciences de Technologies de  
l'Information

Présentée et soutenue publiquement par

*Ayse SAGLAM*

*Le 29 octobre 2004*

---

**Les Équations Différentielles en Mathématiques et en  
Physique**

Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports  
personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir

---

**Composition de jury :**

**CHAACHOUA** Abdelhamid, Maître de Conférences, Grenoble, *co-directeur de thèse*

**DORIER** Jean-Luc, Professeur des Universités, Lyon, *président*

**DUFAYARD** Jean, Professeur des Universités, Grenoble, *directeur de thèse*

**DUMON** Alain, Professeur des Universités, Aquitaine, *rapporteur*

**LACROIX** Daniel, Professeur agrégé de Physique, Grenoble, *co-directeur de thèse*

**SCHNEIDER** Maggy, Professeur des Universités, Namur, *rapporteur*

Thèse préparée au sein de Laboratoire Interdisciplinaire de Didactique des Sciences Expérimentales et  
des Technologies (LIDSET)



N° Attribué par la bibliothèque



UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

**THESE**

Pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Ecole doctorale de Mathématiques et Informatique- Sciences de Technologies de  
l'Information

Présentée et soutenue publiquement par

*Ayse SAGLAM*

*Le 29 octobre 2004*

---

**Les Équations Différentielles en Mathématiques et en  
Physique**

Étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports  
personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir

---

**Composition de jury :**

**CHAACHOUA** Abdelhamid, Maître de Conférences, Grenoble, *co-directeur de thèse*

**DORIER** Jean-Luc, Professeur des Universités, Lyon, *président*

**DUFAYARD** Jean, Professeur des Universités, Grenoble, *directeur de thèse*

**DUMON** Alain, Professeur des Universités, Aquitaine, *rapporteur*

**LACROIX** Daniel, Professeur agrégé de Physique, Grenoble, *co-directeur de thèse*

**SCHNEIDER** Maggy, Professeur des Universités, Namur, *rapporteur*

Thèse préparée au sein de Laboratoire Interdisciplinaire de Didactique des Sciences Expérimentales et  
des Technologies (LIDSET)



N° Attribué par la bibliothèque



*à ma maman qui m'a appris l'amour tout en m'aimant autant...*



## remerciements

C'est un grand plaisir d'être au moment de remercier ceux et celles qui étaient avec moi tout au long de ces années soit en m'aidant vraiment soit simplement en me demandant de temps en temps "*ça se passe bien avec ta thèse ?*".

Je tiens à remercier sincèrement madame Maggy Schneider et monsieur Alain Dumon qui m'ont fait l'honneur d'avoir bien voulu rapporter sur mon travail. Je remercie également monsieur Jean Luc Dorier pour avoir accepté de faire partie du jury et de l'avoir présidé. Merci encore pour ses remarques intéressantes et surtout pour son amitié.

Je tiens également à remercier mes directeurs de thèse d'avoir bien voulu accepter de diriger ce travail tout en m'accordant leurs confiances. J'ai des pensées particulières pour chacun d'eux sans doute...

Merci à Jean qui a su m'accorder généreusement son temps pendant toute la rédaction et m'a aidé à structurer mes idées par ses questionnes constructives.

Un grand merci à Daniel pour ses conseils, son aide et ses idées originales. Les moments passés à la recherche des éléments de réponses à mes questions sont inoubliables pour moi.... Celles-ci ont souvent débouché sur des discussions à la fois très riches et philosophiques. Il m'a toujours laissé ma liberté sans m'imposer son point de vue tout en me disant "*c'est ta thèse Ayşe, c'est toi qui vas la soutenir*".

Mille merci à Hamid pour m'avoir conduit vers le monde de la merveille où se réunissent mes deux passions : maths et physique. En m'ouvrant la porte d'un tel monde, il s'est trouvé tout naturellement dans mon travail qui a été suivi, par lui, jusqu'au bout malgré certains obstacles. Sa méthode, ses aides, ses idées et ses remarques m'étaient essentielles...

Je tiens à remercier aussi le Ministère d'Education Turc d'avoir financé ce travail de thèse durant toutes ces années.

Un grand merci à tous les enseignants et à tous les étudiants de l'Université Joseph Fourier pour leurs contributions à ce travail.

Je dois remercier très vivement l'ensemble du laboratoire LIDSET qui m'ont accueilli dans une ambiance chaleureuse et très sympa. J'ai gravé des bons souvenirs sur mon "cerveaux" et sur mon "cœur" concernant la disponibilité et les aides de Herminia en tant que directrice de laboratoire, les disputes (!) inoubliables avec Claire, la volonté d'aide de Isabelle Girault et le plaisir de partager mon bureau avec Cédric.

Sans doute j'ai des pensées très particulières pour Hang. J'oublierai jamais les moments qu'on a passés ensemble sur les pelouses, dans le couloir, au bureau, au téléphone et "les choses" qu'on a



partagées.... Merci de me soutenir, de m'encourager, de m'écouter parfois sans dire même "un seul mot"...

Je remercie aussi Claude dont les remarques lors de la première journée de thésards m'ont été nécessaires pour réorienter mon travail. Merci également de m'avoir aidé durant la rédaction finale de la thèse et d'avoir réagi sur mon travail sans manquer à m'encourager.

Je tiens à remercier également Denise Grenier pour ses remarques et ses conseils précieux sur mon travail.

Je remercie chaleureusement tous mes amis dont j'ai ressenti la présence d'une façon ou l'autre. Je ne pourrais pas les citer un par un mais j'aimerais qu'ils sachent que je les ai pas oubliés. Notamment merci à Nuray pour son soutien, ses encouragements qui venaient "par e-mail" ou "par téléphone" durant toutes ces années difficiles... Comme je te dis "*je t'oublierai pas (!)*".

Je ne pourrais pas finir cette cérémonie précieuse sans remercier l'ensemble de ma famille de m'avoir respecté et soutenu dans toutes mes décisions et notamment en ce qui concerne le fait de faire une thèse à l'étranger. Merci maman, merci papa d'être toujours "parfaits" pour moi.

Enfin à mon merveilleux époux, Salahattin, pour avoir patiemment "supporté" mes stressés, mes absences, pour ses encouragements mais aussi pour ses aides. Je ne pourrais pas oublier les moments qu'on a passés ensemble à la bibliothèque municipale les week-ends, à la table qui se trouve au plus joli coin de salle de séjour, devant les ordinateurs des heures et des heures. Tu sais j'attends impatiemment la petite sœur de ma petite fille qui s'appellera probablement "*les équations différentielles...approche qualitative*". *The life is difficult! Isn't it ?*





*Table des matières*

*PARTIE A*

*Problématique et Méthodologie*

<b>Chapitre A<sub>1</sub>: Introduction à la problématique</b> .....	<b>5</b>
<b>1. Relations mathématiques/physique</b> .....	<b>5</b>
<b>2. Modèles et modélisation</b> .....	<b>5</b>
2.1. Le modèle .....	6
2.2. Le processus de modélisation .....	8
2.3. Les démarches de construction du modèle .....	8
<b>3. Aperçu des travaux existant sur les équations différentielles</b> .....	<b>9</b>
3.1. La prédominance de l'approche algébrique dans l'enseignement actuel .....	9
3.2. La place de la modélisation dans l'enseignement des équations différentielles .....	10
3.3. Les études visant l'évolution de l'enseignement .....	10
3.4. Notre position .....	11
<b>4. Statuts de la notion d'équation différentielle</b> .....	<b>11</b>
4.1. Objet "équation différentielle" .....	12
4.2. Modèle "équation différentielle" .....	12
4.2.1. Les équations différentielles dans la modélisation passive.....	12
4.2.2. Les équations différentielles dans la modélisation active.....	13
4.3. Analyse du statut des équations différentielles dans l'enseignement actuel .....	13
4.3.1. Les équations différentielles en mathématiques .....	14
4.3.2 Les équations différentielles en physique.....	15
4.3.3. Conclusion .....	16
<b>Chapitre A<sub>2</sub> : De l'objet de l'étude au plan de l'étude</b> .....	<b>17</b>
<b>1. Introduction à notre objet d'étude</b> .....	<b>17</b>
<b>2. Reformulation de l'objet d'étude dans le cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique</b> .....	<b>18</b>
<b>3. Organisation de la recherche</b> .....	<b>20</b>
3.1. Etude épistémologique .....	20
3.2. Etude des rapports institutionnels .....	21
3.3. Etude des rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle .....	21
3.4. Organigramme de la thèse .....	22

## PARTIE B

<b>Chapitre B : Aperçu épistémologique du concept d'équation différentielle.....</b>	<b>25</b>
<b>Introduction.....</b>	<b>25</b>
<b>1. Naissance du concept d'équations différentielles.....</b>	<b>26</b>
1.1. Du calcul différentiel aux équations différentielles.....	26
1.2. Problèmes initiaux.....	28
1.2.1. Problème "inverse tangente".....	28
1.2.2. Problème "isochrone".....	30
1.2.3. Problème "brahystochrone".....	32
<b>2. L'évolution du concept d'équation différentielle.....</b>	<b>34</b>
<b>Conclusion.....</b>	<b>36</b>

## PARTIE C

### *Rapports Institutionnels des Etudiants de Première Année de l'Université aux Equations Différentielles*

<b>Introduction et méthodologie.....</b>	<b>41</b>
<b>Chapitre C<sub>1</sub> : Etude des caractéristiques de l'enseignement de l'objet équation différentielle en classe de Terminale S.....</b>	<b>47</b>
<b>1. Etude des manuels de mathématiques de la classe de terminale.....</b>	<b>47</b>
1.1. Analyse écologique des manuels.....	47
a. Manuel "Terracher".....	47
b. Manuel "Fractale".....	48
1.2. Analyse praxéologique des manuels.....	49
a. Manuel "Terracher".....	49
b. Manuel "Fractale".....	53
<b>2. Etude des manuels de physique de la classe de terminale.....</b>	<b>55</b>
2.1. Analyse écologique des manuels.....	55
2.2. Analyse praxéologique des manuels.....	55
a. Manuel "Nathan".....	55
b. Manuel "Durandau".....	59
<b>3. Conclusion sur l'étude des manuels de la classe de Terminale S.....</b>	<b>60</b>

**Chapitre C<sub>2</sub> : Etude de caractéristiques de l'enseignement de l'objet équation différentielle au niveau de DEUG 1<sup>ère</sup> année..... 63**

<b>1. Etude de l'enseignement du concept d'équation différentielle en mathématiques .....</b>	<b>63</b>
1.1. Présentation générale du cours magistral.....	63
1.2. Analyse praxéologique des exercices proposés.....	64
a. Détermination des différents types de tâches .....	64
b. Détermination des praxéologies associés.....	66
1.3. Analyse des séances des travaux dirigés.....	76
a. Détermination des différents types de tâches traités.....	77
b. Détermination des praxéologies associés.....	79
<b>2. Étude de l'enseignement du concept d'équation différentielle en physique.....</b>	<b>81</b>
2.1. Présentation générale.....	81
2.2. Analyse praxéologique des feuilles de travaux dirigés.....	81
a. Détermination des différents types de tâches .....	82
b. Détermination des praxéologies associés.....	83
2.3. Analyse des séances des travaux dirigés.....	88
<b>3. Conclusion.....</b>	<b>90</b>

**PARTIE D**

***Rapports Personnels des Etudiants de Première Année de l'Université aux Equations Différentielles***

***Introduction..... 95***

***Chapitre D<sub>1</sub> : Rapport des étudiants "aux équations différentielles" en tant qu'objet..... 97***

<b>Introduction .....</b>	<b>97</b>
<b>1. Les analyses de l'Exercice 1.....</b>	<b>99</b>
1.1. Analyse a priori de l'exercice .....	99
1.1.1. Présentation de l'exercice.....	99
1.1.2. Réponses attendues a priori.....	104
1.2. Analyse a posteriori de l'exercice .....	108
1.2.1 Classement global des réponses.....	109
1.2.2. Analyse des réponses des étudiants .....	111
<b>2. Les analyses de l'Exercice 2.....</b>	<b>117</b>
2.1. Analyse a priori de l'exercice .....	117
2.1.1. Présentation de l'exercice.....	117
2.1.2. Analyse a priori de la Question 1.....	118
2.1.3. Analyse a priori de la Question 2.....	120

2.1.4. Analyse a priori de la Question 3 .....	123
2.2. Analyse a posteriori de l'exercice .....	125
2.2.1. Analyse a posteriori de la Question 1 .....	125
a. Résultats globaux .....	125
b. Interprétation des réponses .....	125
2.2.2. Analyse a posteriori de la Question 2 .....	127
a. Résultats globaux .....	127
b. Interprétation des réponses obtenues .....	127
2.2.3. Analyse a posteriori de la Question 3 .....	134
a. Résultats globaux .....	134
b. Interprétation des réponses obtenues .....	135
<b>3. Les analyses de l'Exercice 3 .....</b>	<b>137</b>
3.1. Analyse a priori de l'exercice .....	137
3.1.1 Présentation de l'exercice .....	137
3.1.1.1. Analyse a priori de la Question 1 .....	138
3.1.1.2. Analyse a priori de la Question 2 .....	139
3.2. Analyse a posteriori de l'exercice .....	140
3.2.1. Résultats globaux .....	140
3.2.2. Analyse a posteriori de la Question 1 .....	141
3.2.3. Analyse a posteriori de la Question 2 .....	143
<b>Conclusion .....</b>	<b>146</b>
<b><i>Chapitre D<sub>2</sub> : Rapports des étudiants aux "équations différentielles" en tant que modèle</i></b>	<b>151</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>151</b>
<b>1. Les analyses de l'Exercice 1 .....</b>	<b>153</b>
1.1. Analyse a priori de l'exercice .....	153
1.1.1. Présentation de l'exercice .....	153
1.1.2. Analyse a priori de la Question 1 .....	155
1.1.3. Analyse a priori de la Question 2 .....	157
1.1.4. Analyse a priori de la Question 3 .....	158
1.2. Analyse a posteriori de l'exercice .....	160
1.2.1. Analyse a posteriori de la Question 1 .....	160
a. Résultats globaux .....	160
b. Interprétation des réponses des étudiants .....	160
1.2.2. Analyse a posteriori de la Question 2 .....	162
a. Résultats globaux .....	162
b. Interprétation des réponses .....	163
1.2.3. Analyse a posteriori de la Question 3 .....	165

a. Résultats globaux.....	165
b. Interprétation des réponses.....	165
<b>2. Les analyses de l'Exercice 2.....</b>	<b>169</b>
2.1. Analyse a priori de l'exercice.....	169
2.1.1. Présentation de l'exercice.....	169
2.1.2. Analyse a priori de la Question 1.....	170
2.1.3. Analyse a priori de la Question 2.....	171
2.1.4. Analyse a priori de la Question 3.....	173
2.1.5. Analyse a priori de la Question 4.....	174
2.2. Analyse a posteriori de l'exercice.....	174
2.2.1. Analyse a posteriori de la Question 1.....	174
a. Résultats globaux.....	174
b. Interprétation des réponses.....	175
2.2.1. Analyse a posteriori de la Question 2.....	177
a. Résultats globaux.....	177
b. Interprétation des réponses.....	177
2.2.3. Analyse a posteriori de la Question 3.....	180
a. Résultats globaux.....	180
b. Interprétation des réponses.....	180
2.2.4. Analyse a posteriori de la Question 4.....	182
a. Résultats globaux.....	182
b. Interprétation des réponses.....	182
<b>Conclusion.....</b>	<b>184</b>
<b><i>Chapitre D<sub>3</sub> : Typologie des rapports personnels des étudiants aux équations différentielles</i></b>	<b><i>187</i></b>
<b>Introduction.....</b>	<b>187</b>
<b>1. Différents modèles de rapports personnels.....</b>	<b>187</b>
<b>2. Etude des différents rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle ...</b>	<b>189</b>
2.1. Méthodologie d'analyse.....	189
2.2. Interprétation des réponses d'étudiants.....	189
2.2.1. Le groupe "RC".....	190
2.2.2. Le groupe "RS".....	194
2.2.3. Le groupe "RM".....	196
2.2.4. Le groupe "RN".....	199
<b>Bilan de l'étude des rapports personnels d'étudiants aux équations différentielles.....</b>	<b>202</b>



*PARTIE E*

*Conclusion et Bibliographie*

*Chapitre E<sub>1</sub> : Conclusion générale* ..... 209

    1. Résultats principaux de l'étude ..... 209

    2. Perspectives ..... 215

*Chapitre E<sub>2</sub> : Références Bibliographiques* ..... 219

*ANNEXES*

*Annexes A* ..... 227

*Annexes B* ..... 235

*Annexes C* ..... 241

*Annexes D* ..... 249

# *PARTIE A*

## *Problématique et méthodologie*

*Chapitre A<sub>1</sub> : Introduction à la problématique*

*Chapitre A<sub>2</sub> : De l'objet d'étude au plan d'étude*



# Chapitre A<sub>1</sub> : Introduction à la problématique

## 1. Relations mathématiques/physique

Le rapport entre les mathématiques et la physique relève d'une problématique d'ordre philosophique et épistémologique. Depuis longtemps des mathématiciens et des physiciens ont eu différentes positions sur ce rapport. L'idée prétendant que les mathématiques constituent le langage de la physique, est l'une des explications données sur le problème des relations entre ces deux disciplines. A ce propos Poincaré déclare que :

"Toutes les lois sont tirées de l'expérience, mais, pour les énoncer, il faut une langue spéciale ; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis. Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques ; elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler". (Poincaré, 1910).

Bien que ce langage soit utile pour exprimer les situations physiques il est cependant essentiel de remarquer qu'il induit une réduction du système réel. Il s'agit ainsi de trouver un point d'équilibre lors du passage du système à la formule reposant sur les couples : expérience-théorie, phénomènes-lois etc. On peut commencer par remarquer que les mathématiques permettent de décrire les phénomènes physiques et que les sciences physiques permettent de donner du sens aux concepts mathématiques. Cela revient à caractériser ce rapport comme *un rapport réciproque* entre deux disciplines complémentaires. Bien entendu, un phénomène physique ne se réduit pas aux concepts mathématiques qu'il contient mais il se traduit à l'aide de ces derniers. Ce point de vue rejoindrait celui consistant à considérer les mathématiques comme des modèles de phénomènes physiques.

Il y a un concept mathématique qui vit depuis presque quatre siècles et qui assume remarquablement le rôle de modèle pour des phénomènes physiques: celui d'équation différentielle. C'est ce concept qui a attiré particulièrement notre attention dans ce travail.

## 2. Modèles et modélisation

Ce paragraphe s'intéresse au processus de modélisation des phénomènes physiques et se penche sur les démarches mises en jeu dans la construction des modèles. La complexité des phénomènes physiques qui ne permet pas de travailler directement sur la réalité et la volonté de relier les objets mathématiques aux expériences pour leur donner du sens, nous ont amené à attribuer au processus de modélisation une place importante dans notre travail.

## 2.1. Le modèle

### *Différentes définitions du modèle*

Dès qu'on s'intéresse à la modélisation, on remarque la difficulté qu'il y a pour définir le modèle. Examinons certaines définitions attribuées au concept de modèle avant de préciser le point de vue que nous adopterons dans notre recherche :

Une définition de ce terme au sens le plus large est trouvée dans l'Encyclopaedia Universalis :

"Le modèle est d'abord la "maquette", l'objet réduit et maniable qui reproduit en lui, sous une forme simplifiée, "miniaturisée", les propriétés d'un objet de grandes dimensions, qu'il s'agisse d'une architecture ou d'un système mécanique ; l'objet réduit peut être soumis à des mesures, des calculs, des tests physiques qui ne sont pas appliqués commodément à la chose reproduite. De là, le terme a acquis une vaste portée méthodologique, pour désigner toutes les figurations ou reproductions qui servent les buts de la connaissance".

Dans le langage courant, le modèle peut prendre, selon les contextes et les situations envisagés, des sens variés. Drouin (1988) propose trois sens différents: "modèle à imiter" (l'enfant modèle, le modèle d'un peintre...), "modèle copie" (un exemplaire, une illustration d'une catégorie...) et "modèle catégorie" (un modèle représente toute une catégorie de vêtement semblable)

Compte tenu de ce constat nous nous attendons à ce que cette variété de sens du modèle soit toujours présente dans le discours scientifique :

Pour Johsua et Dupin (1993) :

" le modèle relève entièrement du domaine théorique où une "représentation" d'une situation cible est construite. Cette représentation n'est pas une "description", même simplifiée, du domaine cible, mais une construction théorique, comprenant des notions de base définies les unes par rapport aux autres, au moyen d'énoncés qui introduisent entre elles des relations".

Une autre définition, moins générale, est celle de Pavé (1994) :

"Un modèle est une représentation symbolique de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel, c'est-à-dire une expression ou une formule écrite suivant les règles du système symbolique [...]".

Avant de poursuivre notre étude, il nous a paru indispensable de définir notre position par rapport à ces différentes définitions tout en précisant ce que signifie ce terme pour notre recherche. Dans notre recherche nous considérons un modèle comme :

*une structure construite pour représenter des phénomènes réels. Cette structure possède deux aspects complémentaires : un aspect lexical, pour lequel les symboles mathématiques sont mis en avant et les références au système sont ignorées et un aspect sémantique qui tient compte de ces derniers.*

Cela implique que, parmi tous les modèles possibles nous retenions, dans le cadre de cette recherche, un seul type de modèle : le modèle mathématique et, plus particulièrement, le modèle "équation différentielle". Ce modèle est une représentation de la réalité établie qui doit permettre de prévoir les valeurs de certaines variables difficilement accessibles ou les valeurs futures d'autres variables.

### ***Validation du modèle***

Les recherches réalisées dans le domaine de la modélisation sont d'accord sur le fait que pour le même phénomène il existe plusieurs modèles et que chacun d'eux ne prétend expliquer qu'une partie de ce phénomène. C'est sur ce point que Bachelard (1979) attire l'attention quand elle écrit :

"[...] loin de fonctionner comme une copie, le modèle fonctionne comme un opérateur sélectif. Il représente non pas les propriétés du réel mais seulement certaines propriétés".

La pertinence du choix du modèle dépend des questions qu'on se pose dans le système d'étude. Le fait de choisir un modèle parmi les autres n'impose pas de chercher la ressemblance la plus large et la plus fidèle du modèle au réel, mais plutôt la meilleure adéquation entre la partie du domaine de réalité où le problème se pose, et les connaissances mises à disposition par le modèle choisi (Di Martino, et al., 1995).

L'extrait suivant emprunté à Chevallard, affine encore cette idée :

"[...] le] modèle, comme toujours dans l'activité scientifique, n'est pas l'image la plus complète possible du réel. Tout au contraire, il en fournit une image (volontairement) appauvrie, et c'est ce qui fait sa force" (Chevallard, 1989a).

L'intérêt essentiel est que chaque modèle n'opère que sur une partie limitée ou localisée de la réalité. A ce propos, un point délicat, toujours présent dans la modélisation, mérite d'être évoqué : la validation du modèle, c'est-à-dire l'évaluation du degré d'approximation des résultats théoriques obtenus par rapport aux valeurs expérimentales. Si, compte tenu de la précision des résultats, les deux valeurs obtenues sont en accord l'une avec l'autre, ceci atteste que le modèle représente correctement le système étudié (Blanchard et al., 1996). Le modèle est donc indissociable de la classe de situations expérimentales qu'il est censé traiter.

### ***Caractéristiques du modèle***

Une situation réelle peut être représentée en effet dans différents systèmes -à l'aide de symboles algébriques, de graphiques, de schémas- s'inscrivant chaque fois dans les différents types de modèles. Quelles sont les caractéristiques d'un modèle ?

- > Le modèle est *calculable* : ceci doit être pris non dans le sens limitatif de l'algèbre ou de l'analyse, mais dans le sens plus large où des inférences maîtrisées peuvent être produites à partir des relations de base du modèle,
- > Le modèle est *explicatif* : il permet de mettre en relation des phénomènes complexes et ainsi de construire des espaces de sens, où l'on peut organiser de nouvelles connaissances,

- > Il est *prédictif*: il permet de fournir des valeurs proches de celles mesurées expérimentalement,
- > Le modèle doit être *pertinent* par rapport à son objet,
- > Le modèle doit être *cohérent* avec les autres modèles qui représentent le même système et avec ce qu'on sait par ailleurs. (Dupin, 1995).

## 2.2. Le processus de modélisation

Dans le champ de la didactique, où s'inscrit ce travail, le processus de modélisation se trouve au centre de plusieurs recherches même si celles-ci ont abordé ce processus de façons différentes.

En nous basant sur les travaux existants surtout ceux de Chevallard (1989a), nous pouvons distinguer trois étapes dans un processus de modélisation:

*La première étape* importante est la définition du système. Cette définition est déjà une sorte d'abstraction et de simplification de la situation réelle. Certains choix sont faits en fonction des questions initialement posées. Par exemple si on s'intéresse à l'évolution d'un système au cours du temps il faut tout d'abord définir les variables pertinentes et les aspects qui peuvent être négligés par rapport au problème étudié.

*La deuxième étape* est la construction ou la formalisation du modèle et le travail dans le modèle construit. Dans notre cas, cela nécessite de représenter le modèle grâce aux symboles mathématiques qui nous permettent d'établir des relations entre les variables définies dans la première étape.

Enfin *la troisième étape* consiste à revenir au problème pour traduire les résultats obtenus en leur donnant du sens et en les validant dans la situation réelle en fonction des réponses apportées aux questions initiales.

La modélisation se caractérise particulièrement en tant qu'activité d'élaboration de modèle passant par le choix de grandeurs ou des paramètres particuliers (objet homogène, force négligeable, relation linéaire dans un domaine, etc.) et la relation construite entre ces derniers. Ainsi cette activité mérite, pour nous, d'être évoquée d'une façon détaillée. Ceci est le sujet de paragraphe suivant (paragraphe 2.3).

## 2.3. Les démarches de construction du modèle

A la lumière des recherches faites en sciences physiques sur la modélisation des systèmes réels - Guillon (1995), Winther (1993) -, il est intéressant de distinguer deux démarches de construction d'un modèle mathématique. Pour cela nous proposons la figure 1 ci-dessous en nous inspirant du travail de Guillon (1995) :

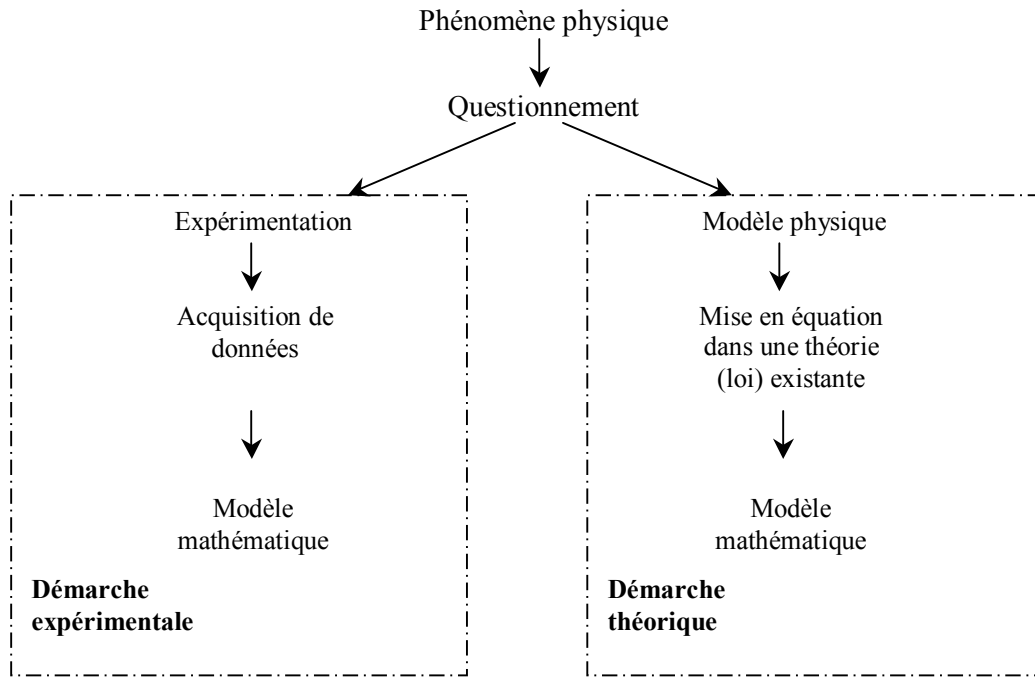


Figure 1 : Présentation de deux démarches de la construction d'un modèle mathématique

Une première démarche appelée *démarche expérimentale*, implique l'acquisition des données à partir d'une expérimentation, alors qu'une deuxième, appelée *démarche théorique*, nécessite de mettre en équation le système dans une théorie existante en se basant sur les connaissances théoriques. Ce point de vue apporte une distinction notable entre les démarches suivies lors de la modélisation d'un système.

Nous montrerons, dans les différentes parties de ce travail de thèse, l'intérêt de nous interroger sur ces deux démarches de construction du modèle.

### 3. Aperçu des travaux existant sur les équations différentielles

Nous reprenons ci-dessous, de façon non exhaustive, des travaux se plaçant d'un point de vue didactique sur l'enseignement des équations différentielles.

#### 3.1. La prédominance de l'approche algébrique dans l'enseignement actuel

Les travaux français les plus connus de didactique des mathématiques relatifs aux équations différentielles, sont ceux de Artigue. L'un de ses travaux, qui porte sur l'enseignement actuel de cette notion en 1<sup>er</sup> cycle de l'université, amène à deux constats importants : cet enseignement favorise exclusivement l'approche algébrique et il ne prend pas en compte le processus de modélisation pourtant essentiel dans ce domaine (Artigue, 1989). L'auteur résume cette idée ainsi :



"C'est enfin un enseignement très algorithmisé vu la réduction opérée, plutôt facile à la fois pour les enseignants et les étudiants, mais sans réel enjeu malgré l'importance mathématique du domaine" (Artigue, 1989).

Il faut bien signaler que la France n'est pas le seul pays où l'enseignement de cette notion est réservé à l'approche algébrique. Par exemple, Rasmussen, dans son travail de 1998, met également l'accent sur la prédominance de cette approche dans l'enseignement des équations différentielles aux Etats-Unis.

### 3.2. La place de la modélisation dans l'enseignement des équations différentielles

Dans son travail de mémoire de DEA Rodriguez (2003) a cherché à mettre en œuvre les caractéristiques de l'enseignement actuel de Terminale S (après les derniers changements de programme) en se penchant particulièrement sur le processus de la modélisation à l'aide des équations différentielles. Elle montre que la notion d'équation différentielle sert à introduire la fonction exponentielle et à modéliser des situations issues des sciences expérimentales (physique, chimie etc.). Bien que cette notion soit très utile pour modéliser des systèmes, Rodriguez met l'accent sur l'écart observé entre la démarche de modélisation établie (savoir savant) dans laquelle elle distingue six étapes - réalité, modèle pseudo-concret, modèle mathématique, étude mathématique, confrontation modèle-réalité, généralisation et prévision-, et la démarche transposée dans les manuels et programmes (savoir à enseigner) dans lesquels interviennent seulement les trois étapes : modèle mathématique, étude mathématique et confrontation modèle-réalité.

### 3.3. Les études visant l'évolution de l'enseignement

Au cours des années 80, Artigue présente des travaux se situant dans une perspective développementale. Bien que, historiquement, la théorie des équations différentielles connaisse trois approches -algébrique, numérique et qualitative- c'est la première approche qui a dominé pendant un certain temps et domine actuellement. Ainsi cette prédominance de l'approche algébrique dans le domaine des mathématiques conduit Artigue à réfléchir sur la viabilité d'une autre approche, et plus particulièrement de l'approche qualitative dans l'enseignement universitaire. Afin de vérifier cette viabilité, Artigue identifie tout d'abord les contraintes<sup>1</sup> qui pèsent sur l'enseignement et élabore ensuite des situations permettant une étude qualitative à l'aide des dispositifs informatiques. L'un des résultats obtenus montre que la résolution géométrique des équations différentielles est accessible

---

<sup>1</sup>Des contraintes épistémologiques : relatives aux caractéristiques du savoir en jeu : la longue domination du cadre algébrique, le développement tardif et relativement autonome de l'étude qualitative, l'élémentarisation relativement récente de la théorie géométrique, le statut utilitaire et palliatif de la résolution numérique approchée.

Des contraintes cognitives : La difficulté des mathématiques liées à une perspective non empirique dans le cadre algébrique, la mobilité de point de vue nécessaire à l'approche qualitative, le niveau de maîtrise en analyse requis par les justifications dans les cadres numériques et géométriques

Des contraintes didactiques : La tentation de la réduction algorithmique, le statut infra-mathématique du cadre graphique, le mythe de la résolution complète

même à des étudiants débutants. D'un autre côté Rasmussen (1998), Chau & Pulivina (1999), Hubbard & West (1999) se sont focalisés également sur l'adaptation de l'approche qualitative dans l'enseignement des équations différentielles.

De leurs côtés, certains physiciens (Serra (1999), Winther (1996), Raballand (1996), en se basant sur le fait que les méthodes de résolution algébrique des équations différentielles sont très compliquées et souvent non connues par les élèves, cherchent à mettre à la disposition des élèves des instruments informatiques qui permettent en particulier l'enseignement de méthodes de l'analyse numérique. Ils ne vérifient cependant pas la viabilité de l'approche numérique par une étude expérimentale.

Plus récemment, conformément au dernier changement du programme de Terminale S qui impose explicitement aux professeurs des mathématiques et de physique-chimie de travailler en concertation sur le sujet des équations différentielles, Winther (2003) réalise une recherche avec la participation de plusieurs professeurs de lycée afin de proposer quelques pistes qui facilitent la mise en œuvre de cette interdisciplinarité. Dans ce travail commun, il s'agit particulièrement de faire intervenir la méthode d'Euler dans l'enseignement des équations différentielles, méthode qui permet de s'interroger sur les paramètres influant sur la dérivée d'une grandeur physique.

### 3.4. Notre position

La plupart des chercheurs s'intéressant à l'enseignement des équations différentielles soulignent, nous l'avons vu, la prédominance et la complexité de l'approche algébrique. Ils cherchent alors souvent à mettre en œuvre les deux autres approches en adaptant des supports de nouvelle technologie à l'enseignement.

Il semble que l'on se trouve face à une absence de recherches prenant en compte l'enseignement des équations différentielles dans les deux disciplines Mathématiques et Physique et ses effets chez les apprenants. Ainsi notre attention s'est-elle portée dans un premier temps sur ce domaine.

## 4. Statuts de la notion d'équation différentielle

Les équations différentielles représentent un domaine extrêmement puissant de l'analyse mathématique. On les rencontre dans absolument tous les domaines, que ce soit en mécanique, en électronique, en économie etc.

Examinons successivement, dans le paragraphe 4.1, l'équation différentielle comme objet mathématique et puis, dans le paragraphe 4.2, comme modèle de situations physiques.

## 4.1. Objet "équation différentielle"

L'équation différentielle est un objet sur lequel l'apprenant est amené à travailler au niveau de la recherche de solutions. La résolution des équations différentielles peut être abordée à l'aide de trois approches : l'approche algébrique, l'approche numérique et l'approche qualitative.

Résumons, sans entrer dans les détails, le fonctionnement de chacune de ces approches.

*Les méthodes algébriques* de résolution d'équations différentielles sont les plus connues et les plus répandues depuis leur apparition dans le monde des mathématiques. Ces méthodes donnent des solutions exactes sous la forme des formules explicites, d'expressions finies, de développements en séries ou d'expressions intégrales. Cependant ces méthodes ne sont pas suffisantes pour résoudre tous les types d'équations différentielles ; il existe, en effet, plusieurs types d'équations différentielles et chacun d'eux implique une méthode de résolution particulière.

Cette insuffisance nécessite l'intervention de nouvelles méthodes : les méthodes numériques et graphiques. *Les méthodes numériques* permettent presque toujours d'approximer la solution d'une équation donnée vérifiant une condition initiale donnée. Il existe plusieurs de ces méthodes, dont les plus connues sont la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta .

Pour résoudre une équation différentielle d'ordre peu élevé, on peut utiliser aussi une construction graphique. *La méthode graphique* de base est celle des isoclines. Elle s'applique directement aux équations du premier ordre que l'on peut écrire sous la forme :  $y'(x) = f(x, y)$  ( $E$ ). Une fonction  $y$  est la solution de ( $E$ ) si en tout point  $(x, y(x))$ , la tangente à la courbe représentative a pour pente  $f(x, y(x))$ . On peut alors calculer, pour tout point du plan, la valeur numérique de  $f(x, y(x))$  ce qui permet la construction de la courbe. Cette méthode donne rapidement un aperçu du comportement des solutions, et plus précisément de leurs comportements à long terme.

## 4.2. Modèle "équation différentielle"

Dans le domaine de la physique, notre objet d'étude (les équations différentielles) est considéré en tant que modèle utilisable pour décrire les phénomènes étudiés, expliquer leurs relations et prévoir leur évolution.

Dans ce paragraphe, nous mettrons l'accent sur deux utilisations générales des équations différentielles dans le domaine de la physique: l'équation différentielle dans la *modélisation passive* et l'équation différentielle dans *la modélisation active*.

### 4.2.1. Les équations différentielles dans la modélisation passive

L'utilisation des équations différentielles dans la *modélisation passive* masque presque toutes les caractéristiques du processus de modélisation. Voici un exemple tiré d'un manuel d'université :

Un circuit se compose d'un condensateur de capacité  $C$  et d'une résistance  $R$  en série, alimentés par une force électromotrice  $V$ .

a) Si  $q$  est la charge emmagasinée par le condensateur,  $q(t)$  vérifie :  $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$

Calculer  $q(t)$  sachant que la charge initiale du condensateur est nulle et  $V$  constante.

b) Pour le même circuit, on s'intéresse au courant  $i(t)$ . Il vérifie :  $R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dV}{dt}$

Calculer  $i(t)$  sachant qu'à l'instant 0 le courant est  $I_0$  et que  $V(t) = V_0 \cdot \sin \omega t$

Ce sont des exercices où la modélisation a été effectuée en amont de l'énoncé. Pour un tel exercice, à première vue, on s'aperçoit que le contexte physique n'a aucune importance. Il faut essentiellement résoudre des équations différentielles linéaires avec second membre. Cependant on peut constater deux différences par rapport à un exercice classique de mathématiques:

- > l'équation "physique" comporte de multiples paramètres (résistance, condensateur..) qui perturbent la simplicité de l'équation,
- > il est possible d'interpréter physiquement les solutions obtenues.

#### 4.2.2. Les équations différentielles dans la modélisation active

Ce type d'utilisation ne contient plus des exercices de mathématiques "déguisés", mais des exercices de physique demandant une interprétation de l'énoncé et nécessitant de comprendre le vocabulaire employé. On précise d'abord les phénomènes étudiés par des variables qui se rapportent aux grandeurs considérées, puis on cherche à établir des relations entre ces variables. L'exercice suivant illustre ce processus :

Soit  $h = y(t)$  la trajectoire d'un objet lancé sans vitesse initiale  $v_0$  depuis le haut de la tour Eiffel dont la hauteur est estimée à 300 m. (Le frottement de l'air est négligé).

Calculer la hauteur de l'objet au moment  $t = 4s$  ?

Ce type de situation permet de rendre compte de certaines propriétés du système réel -l'objet réalise un mouvement- sur lequel s'exercent certaines lois théoriques permettant de mettre en relation les paramètres en question.

#### 4.3. Analyse du statut des équations différentielles dans l'enseignement actuel

Pour démarrer notre travail nous nous sommes focalisés sur le niveau le plus élémentaire de l'enseignement des équations différentielles, en vue de caractériser la première rencontre des

apprenants avec cet objet. Cette idée nous a amené à nous intéresser à l'enseignement en classe de Terminale.

Lorsqu'on s'intéresse à l'enseignement d'un concept, l'une des premières références est le programme. En effet celui-ci précise les caractéristiques générales de cet enseignement. Ainsi pour relever les "conditions de vie" de l'objet "équation différentielle" dans les deux disciplines, nous analyserons rapidement les programmes officiels de la classe Terminale scientifique.

L'analyse des programmes doit nous permettre de mettre en évidence le système de conditions et de contraintes auxquelles les élèves sont soumis. Ensuite, nous ferons une analyse rapide<sup>1</sup> des manuels avec comme objectif de relever les places occupées par les équations différentielles et de mieux cerner les caractéristiques de l'enseignement de cet objet.

#### 4.3.1. Les équations différentielles en mathématiques

Dans les programmes officiels (1998) de l'enseignement obligatoire de mathématiques au niveau du lycée, et particulièrement ceux qui correspondent à la série scientifique (S), l'étude des équations différentielles ne constitue pas un chapitre à part entière, mais se trouve dans la partie destinée à l'étude *des fonctions usuelles* (pour plus de détails cf. Annexes A<sub>1</sub>).

Sont étudiés seulement deux types d'équations différentielles :  $y' = ay$  et  $y'' + \omega^2 y = 0$ . Le premier type est utile pour illustrer l'étude des *fonctions logarithmes et exponentielles* tandis que le deuxième type est intéressant pour étudier les *fonctions circulaires, sinus, cosinus et tangente*.

Parallèlement au programme officiel les manuels scolaires limitent l'étude des équations différentielles à ces deux types d'équations différentielles. L'élève a à sa disposition une définition d'une équation différentielle donnée comme "*une relation entre une fonction et ses dérivées successives, et qui est réalisée sur un intervalle*"<sup>2</sup> et est confronté à certaines situations, issues d'autres disciplines, qui montrent le domaine d'utilisation des équations différentielles.

Les auteurs des manuels examinés<sup>3</sup> distinguent trois types d'exercices :

- > Dans de nombreux exercices, on demande de trouver la solution complète qui satisfait une équation différentielle donnée,
- > Dans d'autres exercices, on demande de vérifier qu'une fonction donnée est la solution de l'équation différentielle étudiée,
- > Enfin, dans certains cas on demande d'étudier l'évolution d'un phénomène au cours du temps ( $t$ ).

Nous ne détaillerons pas ici le contenu des choix des auteurs de chaque manuel en ce qui concerne l'étude des équations différentielles mais nous évoquerons un exercice<sup>4</sup> qui met en évidence les caractéristiques générales de cet enseignement :

<sup>1</sup> Cette analyse sera détaillée ultérieurement

<sup>2</sup> Terracher (1998)

<sup>3</sup> Fractale(1998), Terracher (1998)

<sup>4</sup> L'exercice est emprunté au manuel Terracher (1998)

Soit l'équation différentielle ( $E$ ):  $2y' + y = 0$

1. Déterminer la solution générale de ( $E$ )
2. Dans chacun des cas proposés, déterminer la ou les solutions de ( $E$ ) vérifiant la condition donnée :

a.  $f(1) = 1$  ;

b.  $f(2) = (f(1))^2$

c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On voit, à travers le contenu général de cet exercice, que l'enseignement des équations différentielles se réduit aux méthodes de résolution algébrique.

#### 4.3.2 Les équations différentielles en physique

Le programme officiel de 1996 fait intervenir l'objet équation différentielle comme un "modèle" qui permet d'étudier les mouvements oscillants. Il est prévu d'étudier deux types d'équations différentielles : le premier type,  $x'' + \omega^2 x = 0$ , est utile pour modéliser le ressort linéaire horizontal et le circuit  $LC$ , et le deuxième type,  $x'' + Ax' + \omega^2 x = 0$ , est introduit pour étudier le comportement des oscillateurs mécaniques à frottement visqueux ainsi que les oscillations amorties du circuit  $RLC$  (Pour plus de détails cf. Annexes A<sub>1</sub>).

Conformément à ce qui est prévu par le programme, le concept d'équation différentielle est considéré, dans les manuels scolaires, comme un modèle des systèmes oscillants. L'élève commence par étudier une fonction sinusoïdale du temps sous la forme  $x = a \cdot \cos(\omega_0 t)$ , ensuite il lui est proposé des activités régies par les équations différentielles.

L'établissement d'équations différentielles décrivant des pendules élastiques horizontaux et des circuits  $LC$  joue le rôle principal comme le montre l'exercice suivant<sup>1</sup> :

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort à spires non jointives de constante de raideur  $k$  dont une extrémité est fixée à un solide  $S$  de dimensions telles qu'il peut être assimilé à un solide ponctuel de masse  $m$ . Dans cette expérience on néglige tous les frottements. Le plan sur lequel se déplace le solide  $S$  est horizontal. La position du centre d'inertie  $G$  est donnée par le vecteur position  $\overrightarrow{OG} = x \cdot \vec{i}$ .

a. Indiquer sur le schéma les forces appliquées à  $S$  lors que l'on a  $\overrightarrow{OG} = x \cdot \vec{i}$

b. Etablir l'équation différentielle du mouvement de  $S$ ,

c. Calculer la pulsation propre  $\omega_0$  et la période  $T_0$  de l'oscillateur.

Nous pouvons donc affirmer qu'il existe trois types de problèmes concernant l'application des équations différentielles en physique :

<sup>1</sup> L'exercice est emprunté au manuel Durandea (1999)

- > les exercices qui portent sur l'établissement de l'équation différentielle,
- > les exercices nécessitant de vérifier si une fonction donnée est la solution de l'équation différentielle du système étudié,
- > les exercices visant à trouver spécifiquement la période propre de l'oscillateur.

#### 4.3.3. Conclusion

Concernant l'enseignement mathématique à propos de notre objet d'étude, nous avons noté que la tâche de modélisation est complètement abandonnée malgré l'importance des équations différentielles pour les autres domaines. Cela revient à dire que cet enseignement reste limité aux mathématiques. De plus cette limitation est renforcée par le monopole de l'approche algébrique qui entraîne la limitation de l'étude des équations différentielles aux équations linéaires.

Cependant, l'analyse des manuels de physique de la classe de Terminale, prenant en compte notre étude réalisée dans le paragraphe 2.2 de ce chapitre concernant le processus de modélisation, a montré que la deuxième étape de ce processus, celle de "construction du modèle et de travail dans le modèle", occupe une place très importante dans l'enseignement de la physique.

On peut aussi noter que la recherche du modèle équation différentielle des phénomènes physiques porte quasi-exclusivement sur une seule démarche purement théorique s'appuyant sur certaines lois de la physique (ex : la loi fondamentale de la dynamique, la loi des mailles).

# Chapitre A<sub>2</sub> : De l'objet de l'étude au plan de l'étude

## 1. Introduction à notre objet d'étude

A partir de différents travaux en didactique des mathématiques nous avons montré (Chapitre A<sub>1</sub>, paragraphe 3.1) que l'enseignement des équations différentielles au niveau de la première année de l'université, se limite aux mathématiques et est dominé par l'approche algébrique. Cette prédominance conduit les chercheurs à adopter de nouvelles méthodes de résolution pour diminuer les effets indésirables de cette approche. Nous avons noté également que les travaux en didactique de la physique se focalisent aussi sur l'adaptation des méthodes numériques dans l'enseignement de la physique. Ces recherches nous ont montré l'existence d'un domaine vierge qui porte sur l'enseignement du concept d'équation différentielle dans les deux disciplines et donc sur le rapport entre les mathématiques et la physique, qui se partagent l'enseignement de ce concept.

Ceci nous a conduit à mettre en évidence les différents statuts du concept dans ces deux disciplines, et à en regarder le fonctionnement dans l'enseignement actuel, au niveau du lycée, lors de la première rencontre avec le concept. En mathématiques, ce statut implique de connaître certaines formules de la résolution algébrique des équations différentielles linéaires. Ainsi, on commence par enseigner des méthodes de résolution avant de faire étudier le concept à proprement parler. Dans l'enseignement de la physique, ce concept joue un rôle important en tant que modèle lors de l'étude des différents systèmes. Cependant nous avons observé que l'établissement de ce modèle mathématique<sup>1</sup> est fortement lié aux connaissances théoriques. Ces remarques nous montrent à quel point les deux enseignements sont insuffisants.

En vue d'élargir l'objet de notre étude, nous avons décidé d'examiner, *au niveau de l'enseignement universitaire, les conditions d'apprentissage du concept d'équation différentielle dans le cadre de son enseignement dans les deux disciplines.*

Nous nous plaçons, pour ce faire, dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique développée par Chevallard (1989).

---

<sup>1</sup> Notons qu'au cours de ce travail le terme "modèle mathématique" signifie, pour nous, le "modèle équation différentielle".



## 2. Reformulation de l'objet d'étude dans le cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique

Une des premières notions fondamentales sur lesquels s'appuie essentiellement la théorie anthropologique de la didactique est celle d'*objet* : nous nous intéressons ici à l'objet équation différentielle "*ED*".

Une autre notion fondamentale est celle de *rapport personnel* d'un individu *x* à un objet de savoir. Cette notion est défini par Chevallard comme suit :

" le rapport personnel relève notamment de tout ce que l'on croit ordinairement pouvoir dire en termes de "savoir", de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d'"images mentales", de "représentation" [...]" (Chevallard, 1989b)

En effet le rapport personnel d'un individu *x*, ici d'un étudiant, aux équations différentielles, qui peut se noter comme  $R(x, ED)$ <sup>1</sup>, désigne le système de toutes les interactions que *x* peut avoir avec l'objet *ED*, par exemple quand il manipule *ED* pour la résoudre, quand il l'utilise pour résoudre un problème de physique etc.

Pour expliquer la formation et l'évolution du rapport personnel d'une personne à un objet Chevallard introduit une autre notion fondamentale, celle d'*institution*. Une institution est un dispositif social "*qui permet – et impose – à ses sujets (personnes), la mise en jeu de manières de faire et de penser propres*". D'une façon générale, le rapport institutionnel met l'accent sur ce qui se fait avec l'objet et explique comment l'objet doit être mis en oeuvre ou encore, en termes plus imagés, il est ce qui apparaît quand on observe le "destin" de l'objet dans l'institution (Chevallard, 1989b).

Vouloir analyser, *au niveau de l'enseignement universitaire, les conditions d'apprentissage du concept d'équation différentielle dans le cadre de son enseignement dans les deux disciplines mathématiques et en physique*, nous conduit, dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique, à rechercher les caractéristiques du rapport personnel à l'objet *ED* des étudiants de première année de DEUG.

Pour cela, nous nous intéresserons aux deux institutions : l'institution mathématique *I* et l'institution physique *I'*. En effet, le rapport personnel des étudiants à l'objet *ED* change par leur entrée dans certains travaux dont l'objet *ED* est constitutif, et qui vivent dans les deux institutions *I* et *I'*. De plus, le rapport personnel de *x* à *ED* étant le résultat de l'histoire d'assujettissements institutionnels passés et présents, nous serons conduits à étudier, au sein de *I* et de *I'*, les rapports institutionnels à *ED* en classe de Terminale et en première année d'université.

---

<sup>1</sup>  $R(x, ED)$  : Rapport d'une personne (*x*) à l'objet Equation Différentielle

Nous proposons ci-dessous la figure 2 qui schématise les relations entre l'ensemble des rapports institutionnels d'un étudiant et son rapport personnel à l'objet équation différentielle :

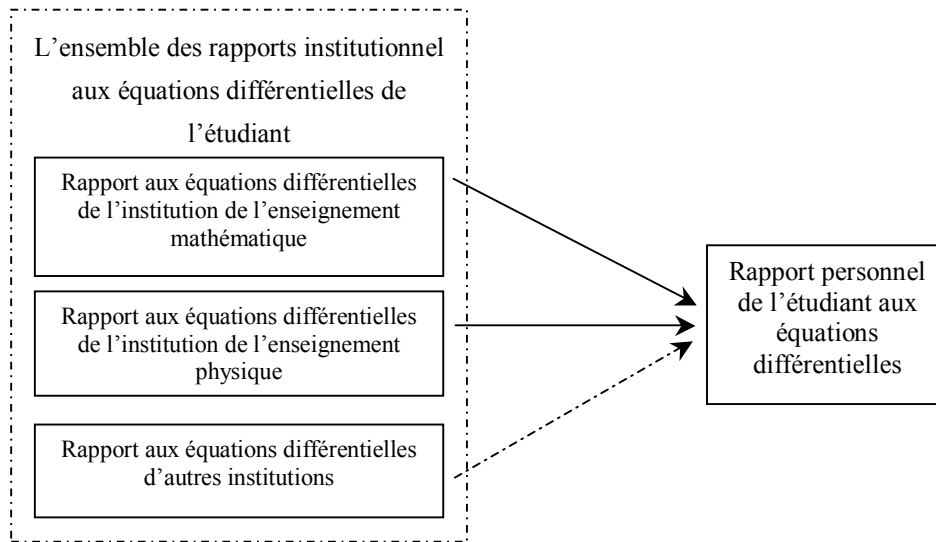


Figure 2 : Représentation de la relation entre le rapport institutionnel d'un étudiant aux équations différentielles et son rapport personnel

Les relations qui seront traitées particulièrement dans ce travail de thèse sont désignées par les deux flèches en trait plein alors que la flèche en pointillés concerne une relation qui ne sera pas traitée ici.

### ***Questions et hypothèses de recherche***

Dans ce travail de thèse, nous allons chercher les éléments de réponses aux deux questions suivantes :

***Question 1:*** *Quels sont les choix didactiques de l'enseignement des équations différentielles dans l'institution mathématiques?*

*Quels sont les effets de ces choix sur la construction des savoirs des étudiants ?*

***Question 2:*** *Quelles sont les caractéristiques du processus de modélisation, associé aux équations différentielles, dans l'institution physique ?*

*Quel rôle les équations différentielles peuvent-elles jouer, pour les étudiants, dans l'institution physique ? Celui d'un modèle qui représente effectivement des systèmes physiques ? Ou bien celui d'un outil qui facilite l'étude de ces systèmes physiques ?*

Nous formulons les hypothèses de recherche suivantes que nous mettrons à l'épreuve :

**Hypothèse de recherche 1** : *La prédominance de la résolution algébrique en mathématiques est une contrainte pour la vie de la notion d'équation différentielle et conduit les étudiants à faire porter l'accent sur cette résolution. Il en résulte que lorsque les étudiants sont confrontés à d'autres tâches que la résolution algébrique, ils rencontrent des difficultés notables.*

**Hypothèse de recherche 2** : *La force du contrat institutionnel en physique entraîne, chez les étudiants, la réduction du processus de modélisation à l'aide des équations différentielles à une étude algorithmique qui facilite leurs tâches mais conduit à une perte de sens.*

### 3. Organisation de la recherche

Dans ce paragraphe nous présenterons le plan de notre recherche. Nous l'avons scindé en trois grandes parties : une analyse des conditions d'émergence des équations différentielles, une analyse institutionnelle de l'enseignement des équations différentielles en mathématiques et en physique, et enfin une analyse des pratiques des étudiants.

#### 3.1. Etude épistémologique

Les travaux antérieurs et l'étude des manuels nous permettent d'identifier les fonctionnements généraux des équations différentielles dans l'enseignement des deux disciplines et de relever l'importance des différentes approches dans l'enseignement des équations différentielles. Mais ces travaux ne nous renseignent pas sur d'autres types de démarches possibles (différentes de la démarche théorique) et sur les conditions sous lesquelles celles-ci peuvent être utilisées dans la construction du modèle "équation différentielle".

En vue de découvrir d'autres types de démarches pour la construction de ce modèle, nous avons été conduits à élargir notre étude en utilisant l'hypothèse de travail suivante :

*Une analyse épistémologique devrait nous permettre d'établir un parallèle entre le fonctionnement historique des équations différentielles et leur fonctionnement dans l'enseignement moderne afin d'en tirer éventuellement des réponses aux questions qui se posent aujourd'hui dans l'enseignement des équations différentielles.*

Une première entrée dans la **Partie B** de notre recherche consiste en l'étude des différents problèmes posés lors de la naissance des équations différentielles. Dans cette étude nous repérons les contraintes et conditions de l'émergence du concept d'équation différentielle, tout en mettant en avant son étroite relation avec différentes disciplines.

Cette étude met en évidence les caractéristiques du fonctionnement des équations différentielles dans la modélisation des différents systèmes mécaniques et géométriques. Elle montre ainsi l'existence

d'une autre démarche (que la démarche théorique) qui présente les mêmes caractéristiques que la démarche expérimentale (cf. 2.3 du Chapitre A<sub>1</sub>). Cela nous conduit à la question suivante :

$Q_B^1$  : *Cette démarche historique trouve-t-elle une vie dans l'enseignement universitaire ?*

### 3.2. Etude des rapports institutionnels

Revenant sur l'objet central de cette étude, nous décrivons, dans la **Partie C**, les rapports institutionnels des étudiants aux équations différentielles dans les deux institutions, *I* et *I'* et nous répondons à la question suivante :

$Q_C^2$  : *Quelles sont les caractéristiques de l'ensemble des rapports institutionnels (en mathématiques et en physique) à l'objet équation différentielle?*

Pour apporter des éléments de réponses à cette question, nous analysons tout d'abord des manuels de Terminale S, afin de mieux cerner les conditions de la première rencontre des étudiants avec l'objet "équation différentielle".

Ensuite, une analyse, en première année de DEUG, des polycopiés de cours magistraux et des feuilles de travaux dirigés de mathématiques et d'électrocinétique<sup>3</sup>, nous permet, d'une part de vérifier la continuité des contraintes repérées par l'analyse des manuels, d'autre part de repérer éventuellement d'autres contraintes. Ces derniers points sont complétés par l'observation du cours magistral des deux disciplines et des séances de travaux dirigés.

### 3.3. Etude des rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle

Dans la **Partie D**, nous complétons les études précédentes par la caractérisation des rapports personnels des étudiants à propos de l'objet équation différentielle. Pour cela nous concevons deux dispositifs expérimentaux que nous faisons fonctionner auprès des étudiants de DEUG Sma (filiale Sciences de la Matière) de première année. Dans ces dispositifs, nous tentons de faire vivre les deux statuts du concept d'équation différentielle (l'objet et le modèle).

Il s'agit pour nous de répondre aux questions suivantes:

$Q_{D1}^4$  : *Quelles sont les caractéristiques du rapport personnel des étudiants à l'objet équation différentielle ? et notamment quel est le degré d'adéquation entre le rapport personnel et le rapport institutionnel (de deux institutions) à l'objet en question ?*

$Q_{D2}$  : *Quelles sont les difficultés spécifiques des étudiants qui résultent des choix de deux institutions ?*  
(Les méthodologies spécifiques à chaque étude sont présentées au début de chacun des chapitres.)

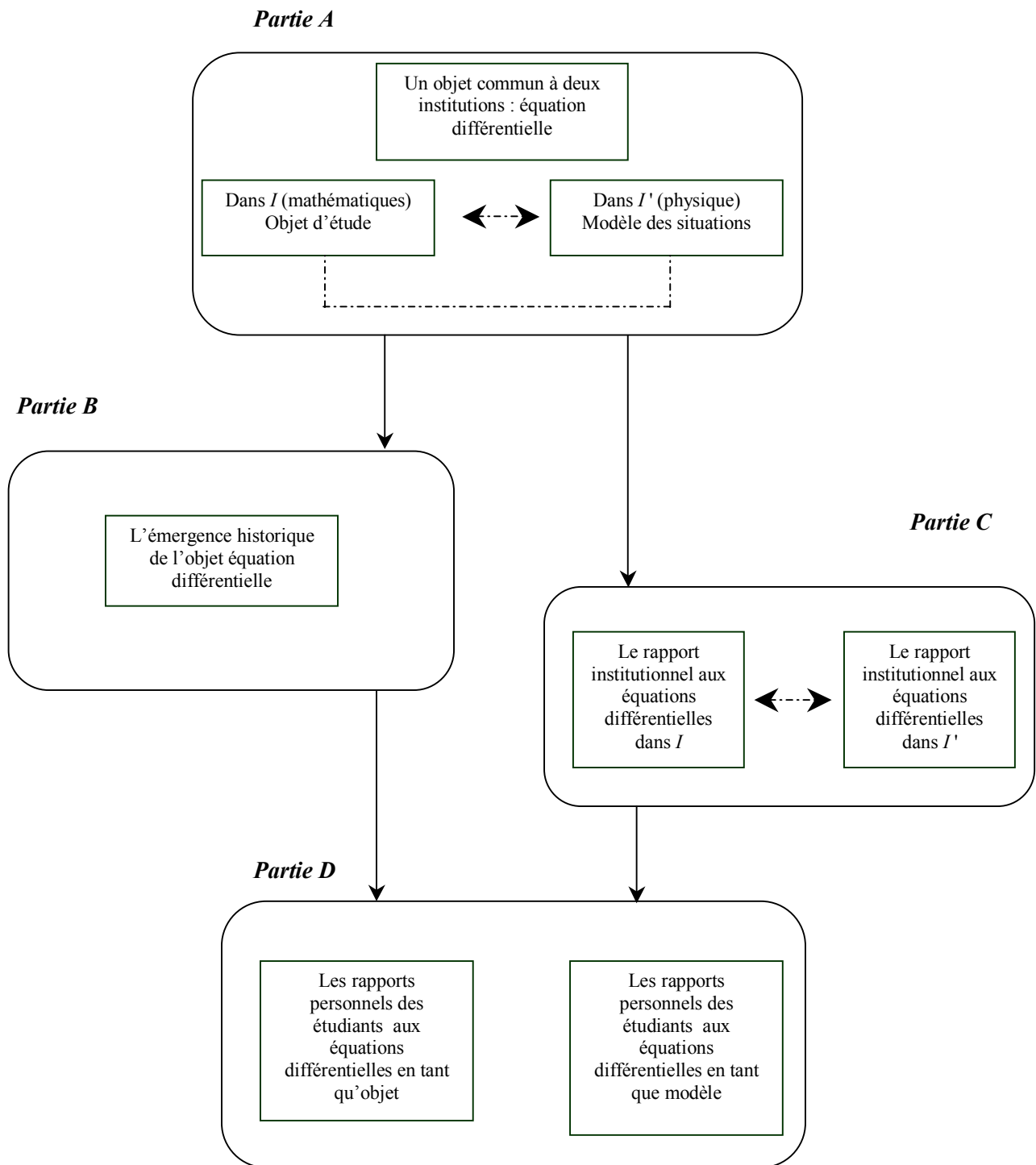
<sup>1</sup> Puisqu'il s'agit des questions qui sont formulées à l'aide de l'étude épistémologique réalisée dans la partie B de cette recherche, nous utilisons la notation  $Q_{Bi}$ .

<sup>2</sup> Le fait de la reformuler dans cette étape de l'étude (partie C), nous permet d'utiliser la notation suivante :  $Q_{Ci}$ .

<sup>3</sup> Rappelons que, à ce niveau, l'électrocinétique est le seul domaine de la physique où sont enseignées les équations différentielles.

<sup>4</sup> Le fait de les reformuler dans cette étape de l'étude (partie D), nous permet d'utiliser la notation suivante :  $Q_{Di}$ .

### 3.4. Organigramme de la thèse



## *PARTIE B*

*Chapitre B : Aperçu épistémologique du concept d'équation différentielle*



# Chapitre B : Aperçu épistémologique du concept d'équation différentielle

*"C'est du besoin de modélisation que sont nées les mathématiques en Mésopotamie ou dans l'Égypte ancienne",*

André Pichot, *La naissance de la science*

## Introduction

Rappelons tout d'abord que dans la partie précédente (cf. chapitre A<sub>1</sub>, paragraphe 4) nous avons mis l'accent sur deux statuts du concept d'équation différentielle : équation différentielle "objet" d'étude et équation différentielle "modèle". Pour ce statut de modèle, la physique a été choisie comme discipline privilégiée permettant d'étudier le fonctionnement des équations différentielles dans un travail de modélisation.

Nous avons insisté ainsi sur deux points essentiels :

- en mathématiques, l'enseignement des équations différentielles (objet) est enfermé quasi-exclusivement dans cette discipline et ignore la relation qui peut exister avec d'autres disciplines,
- en physique, la construction du modèle équation différentielle est restreinte à une démarche théorique.

L'objet de cette partie B est donc définir la relation entre cet objet et d'autres disciplines, de connaître le fonctionnement des équations différentielles dans le travail de modélisation et ainsi de relever d'autres types de démarches possibles à propos de l'établissement des équations différentielles. Notons à ce propos que l'étude réalisée (cf. chapitre A<sub>1</sub>, paragraphe 4.3) à propos de l'enseignement actuel n'a pas pu nous renseigner sur d'autres types de démarches possibles. Ainsi, notre attention se portera-t-elle particulièrement sur une étude épistémologique en vue de mettre en évidence les conditions de la naissance du concept d'équation différentielle ainsi que son évolution historique. Nous souhaitons plus particulièrement connaître les caractéristiques de ce concept en tant que modèle à l'époque de son émergence, et comprendre le rôle joué par la physique dans l'évolution de ce concept.

*Quel est l'intérêt d'intégrer d'une telle étude dans notre travail ?*

Nous répondrons à cette question en mettant en avant la relation entre épistémologie et didactique :



Si une notion est aujourd'hui contenue entièrement dans une définition ou dans un théorème, il est évident qu'elle ne va pas de soi pour autant. En effet il lui a fallu plusieurs siècles pour apparaître, s'affirmer et être enseignée (Cornu, 1983).

L'analyse épistémologique met bien en évidence l'évolution au cours du temps d'une notion, sa dépendance des domaines concernés et le niveau d'élaboration des objets qu'elle manipule. Cette analyse épistémologique permet également de connaître les différences existant entre "savoir savant" et "savoir enseigné" (Artigue, 1990). Une telle analyse, en nous permettant de comprendre ce qui gouverne l'évolution de la connaissance scientifique, nous aide à prendre conscience de la distance qui sépare les deux systèmes (savoir savant et savoir enseigné).

L'étude historique permet de connaître les conditions dans lesquelles s'est développée une notion. En effet, une notion ne peut pas apparaître et se développer toute seule ; elle est forcément liée à d'autres notions. L'idée selon laquelle les objets mathématiques sont souvent apparus pour répondre aux besoins d'autres disciplines montre que le champ conceptuel dans lequel se trouve une notion mathématique dépasse le cadre de cette discipline. C'est pourquoi un regard sur l'époque où est apparue la notion d'équation différentielle nous apportera un éclairage sur les problématiques ayant accompagné cette apparition. Cette notion, comme la plupart des notions en mathématiques, s'est construite progressivement en tant qu'outil pour résoudre divers problèmes.

Dans le développement historique de la résolution de problèmes, on cherche en général à introduire un outil en se basant sur les concepts déjà existants. On se focalise ensuite sur les caractéristiques et le développement de cet outil. C'est à partir de cette étape qu'il devient "un objet mathématique". L'étude historique permet donc, d'une part, de relever les problèmes qui lui ont donné naissance et d'autre part de connaître les étapes de l'évolution d'une notion.

## 1. Naissance du concept d'équations différentielles

### 1.1. Du calcul différentiel aux équations différentielles

L'objet équation différentielle tel que les mathématiciens le connaissent actuellement a été mis en place progressivement depuis quatre siècles. Gottfried W. Leibniz (1646-1716) appelle d'une façon générale "*équation différentielle*" une équation  $y = f(x)$  où intervient au moins une fonction dérivée de  $f$  (dérivée première :  $f'$ , dérivée seconde :  $f''$ ) (Bossut, 1810).

On peut trouver diverses formes d'utilisation des équations différentielles. Mais au-delà de ces formes, il faut absolument saisir le concept de "*calcul différentiel*", qui joue un rôle central dans l'émergence des équations différentielles. Bien que plusieurs mathématiciens se soient intéressés à ce concept depuis longtemps, celui-ci ne trouve son autonomie que lors de la dernière moitié de 17<sup>ème</sup> siècle, (Bessot et al., 1999) avec les travaux de Newton et Leibniz que nous détaillons ci-dessous.

La principale question qui se posait à cette époque se centrait sur la théorie générale des courbes et leurs propriétés. Afin de diminuer les erreurs et les méprises apparaissant dans la résolution de certains problèmes rencontrés, les scientifiques avaient été conduits à introduire "le calcul différentiel".

Dans l'*Encyclopédie de Diderot et d'Alembert*, ce concept est défini de la manière suivante :

"Le calcul différentiel est une quantité différentielle (ou simplement *différentielle*), une quantité infiniment petite, ou moindre que toute grandeur assignable. On l'appelle différentielle ou quantité différentielle, parce qu'on la considère ordinairement comme la différence infiniment petite de deux quantités finies, dont l'une surpasse l'autre infiniment peu". [1]

**Isaac Newton** (1642-1727) considérait qu'il s'agissait de l'accroissement momentané d'une quantité ; il l'appel fluxion. En effet il avait une vision cinématique de l'analyse selon laquelle "*une courbe n'est pas une juxtaposition de points, mais le trajet d'un point en mouvement*" (Cornu, 1983). Cette approche lui a permis de se poser le problème du mouvement instantané et de calculer des dérivées et des intégrales en utilisant "*le taux de variation instantané*". Dans son ouvrage "*La méthode des fluxions et des suites infinies*"<sup>1</sup>, Newton développe la transformation des données entre la vitesse et la longueur de l'espace.

En effet son calcul des fluxions est une comparaison entre des vitesses de variation. Les *quantités Fluentes* qui sont considérées comme des quantités augmentées régulièrement et indéfiniment, sont représentées par Newton à l'aide des dernières lettres de l'alphabet  $v, x, y$  et  $z$ . Ainsi, pour les vitesses de  $x, y, z$  il met un point sur ces lettres:  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ .

La méthode de Newton porte sur les notions évidentes du mouvement :

"Lorsqu'un corps se meut uniformément, la vitesse qu'il a à chaque instant est la même ; mais il en est autrement d'un corps qui se meut d'un mouvement accéléré ; qui tombe, par exemple, en vertu de sa pesanteur. Ce corps a une vitesse différente à chaque instant, et cette vitesse est celle avec laquelle il continuerait de se mouvoir, si la pesanteur ou la force qui l'accélère cessait d'exercer sur lui son action. Il en est de même du mouvement retardé ; la vitesse en chaque point de l'espace parcouru par un mouvement semblable, est celle avec laquelle le corps continuerait à se mouvoir, si la cause retardatrice cessait d'agir. La vitesse d'un corps mû d'un mouvement, soit accéléré, soit retardé, pourrait être mesurée par l'espace que ce corps parcourrait dans un certain temps donné, son mouvement cessant d'être altéré par l'action de la cause qu'on a dit ci-dessus". (Montucla, 1968).

Cette méthode indique que toute courbe peut représenter deux mouvements : le premier est celui de l'ordonnée et le deuxième est celui de l'abscisse.

**Gottfried W. Leibniz** (1646-1716) parle de *calcul différentiel*, en considérant les grandeurs infiniment petites comme des différences de quantités finies. Cette considération le conduit à exprimer ces

---

<sup>1</sup> Newton, 1671, (trad. fr.1740) Traduit par Buffon de: The method of fluxions and infinite series

différences en utilisant la lettre  $d$  : ainsi la différentielle de  $x$  est exprimée par  $dx$ , celle de  $y$  par  $dy$ . (Bossut, 1810). Leibniz présente, dans son premier travail édité en 1684 dans les Acta Eruditorum, les règles générales de la différentiation (l'addition, la soustraction, la multiplication et la division).

"Addition et Soustraction : si  $v = z - y + w + x$  [...]  $dv$  sera égal  $dz - dy + dw + dx$

Multiplication :  $d(xv)$  égal  $x dv + v dx$  [...]

Enfin la division :  $d \frac{v}{y}$  ou (en posant  $z$  égal à  $\frac{v}{y}$ ),  $dz$  égal  $\frac{\pm v dy \mp y dv}{yy}$  " (Leibniz, 1684, trad.

fr. 1989)

Une fois que ce concept a acquis son autonomie, on a commencé à l'utiliser dans divers problèmes. En effet, avant l'intervention du calcul différentiel, les scientifiques n'avaient pas su trouver de solution aux problèmes rencontrés au 17<sup>ème</sup> siècle. Ce calcul leur a permis de résoudre ce type de problèmes d'où l'émergence des équations différentielles.

## 1.2. Problèmes initiaux

Après un rapide survol historique de notion de calcul différentiel, nous étudierons les principaux problèmes qui donnent naissance à la théorie des équations différentielles.

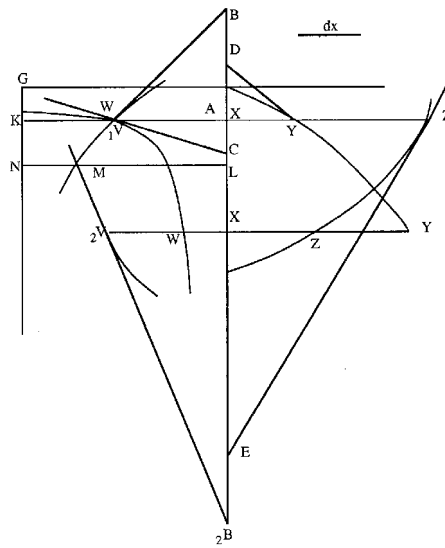
Il nous a paru important de savoir comment ce concept d'équation différentielle, qu'on emploie en mathématiques et qu'on utilise dans divers domaines de façon courante, est né, de quels problèmes il est issu et quelles sont les étapes de son élaboration.

Nous allons donc ici étudier les caractéristiques du modèle "équation différentielle" en remontant au 17<sup>ème</sup> siècle, époque à laquelle ce concept a émergé. Pour cela nous nous appuierons sur certains problèmes rencontrés à cette époque.

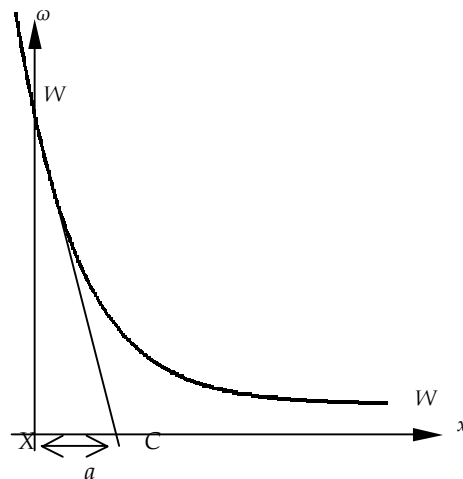
### 1.2.1. Problème "inverse tangente"

En 1638, F. De Beaune propose quelques problèmes nommés "inverses des tangentes" à la sagacité des mathématiciens (Wanner, 1988). Il s'agit de trouver une courbe représentée à l'aide d'une propriété tangentielle. Leibniz est le premier parmi plusieurs scientifiques qui tentaient de résoudre ce problème à avoir publié sa solution en 1684 dans Acta Eruditorum. Voici le problème original et la solution proposée par Leibniz :

"Trouver la courbe  $WW$  (présentée dans la figure suivante) telle qu'en traçant la tangente  $WC$  jusqu'à l'axe,  $XC$  soit toujours égal à un même segment constant  $a$ " (Leibniz 1684, trad. fr. 1989)



Afin de faciliter la lecture de la figure précédente nous proposons la figure suivante qui simplifie celle première :



Il s'agissait de représenter une courbe à partir de ses caractéristiques : sous-tangente constante en chaque point. Leibniz a raisonné de la façon suivante :

"J'imaginai [...] pour toutes les courbes, un triangle que j'appelai caractéristique, dont les côtés fussent indivisibles (ou, pour parler mieux, infiniment petits), c'est-à-dire des quantités différentielles ; [...]" (Leibniz, 1684, (trad. fr. 1989).

Ce triangle, caractéristique pour le problème dont l'analyse est en cours, est semblable au triangle  $WXC$ . Ceci lui permit d'en déduire une relation du type :  $\frac{XW}{XC} = \frac{d\omega}{dx}$  et d'obtenir (en considérant que les  $x$ , ou  $AX$ , croissent uniformément, autrement dit " $dx$ " constant, à savoir égal à " $b$ ") l'équation différentielle suivante :

$$\omega = \frac{a}{b} . d\omega .$$

A la fin de sa résolution, il définit la courbe cherchée  $WW$  comme une courbe logarithmique.

Comment Leibniz a-t-il pu aboutir à cette équation différentielle ? La réponse se trouve vraisemblablement dans l'application du calcul différentiel. D'une façon générale, Leibniz considère que chaque petit intervalle de la courbe cherchée correspond à un déplacement sur deux axes: horizontal et vertical. Sa résolution montre qu'il définit un petit triangle en chaque point de la courbe. Les propriétés des triangles semblables permettent ensuite d'aboutir à une relation qui se transforme en une équation différentielle.

Une confirmation que c'est effectivement la méthode de Thalès qui était utilisée par Leibniz se trouve dans le travail de Harrier et al. (2001).

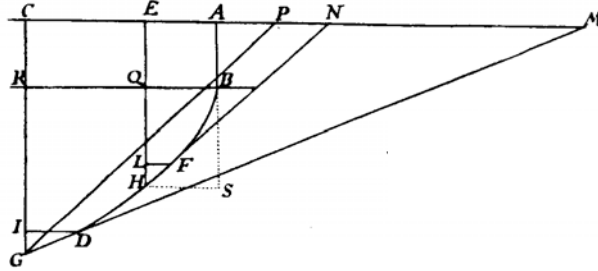
### 1.2.2. Problème "isochrone"

Un autre problème remarquable, est celui de l'"isochrone", proposé par Leibniz en 1687 :

"Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformément, et approche également de l'horizon en temps égaux ". (Leibniz, 1687 (cité par Blay, 1992)).

Notons qu'il s'agit d'une variété de solutions proposées par plusieurs scientifiques. Nous ne travaillons ici que sur celle proposée par Jacques Bernoulli en 1690. Dans la solution de Bernoulli on rencontre encore des triangles semblables. Sa solution se scinde en deux étapes bien distinctes : *une première* a pour objet de ramener le problème physique à un problème de géométrie et *une deuxième* comprend la résolution de cette question de géométrie à l'aide du calcul différentiel. Voici la solution proposée par Bernoulli :

Bernoulli se concentre tout d'abord sur la condition qui impose que "le corps descende avec une vitesse verticale constante". Pour cela il suppose qu'un point pesant est abandonné en  $A$  sans vitesse initiale (cf. figure suivante). Ensuite il définit  $BFG$  comme la courbe que le point pesant doit décrire en arrivant en  $B$  avec la vitesse acquise au cours de la chute  $AB$ . Ce point s'approche ou s'éloigne de l'horizon avec un mouvement tel que des espaces parcourus soient égaux pour des temps égaux. (Blay, 1992).



En s'appuyant tout d'abord sur la loi de la chute des graves de Galilée, Bernoulli établit deux relations correspondant respectivement à la vitesse acquise par le point pesant en point  $H$  et à la vitesse finale qu'il a au point  $G$  (cf. figure précédente). La combinaison des deux relations obtenues et la considération des triangles semblables l'amènent à la relation suivante :

$$\frac{CG}{EH} = \frac{GM^2}{GP^2}.$$

Sur le schéma, il appelle  $v_G$  et  $v_H$  les "vitesses acquises en  $G$  et  $H$ " par un point pesant tombant en chute libre "de la même ligne horizontale  $AC$  suivant les droites  $CG$  et  $EH$ ". Il continue, d'après la loi chute des graves de Galilée qui permet une résolution en passant par la géométrie :

$$\frac{v_G^2}{v_H^2} = \frac{CG}{EH}.$$

Cette loi permet de remplacer dans toutes les démonstrations le rapport des carrés des vitesses par celui des longueurs.

Dans sa solution, Jacques Bernoulli suppose sans l'expliquer que la vitesse le long des segments rectilignes infiniment petits  $FH$  et  $DG$  est constante (cf. figure), et donc, puisque ces segments sont parcourus dans le même intervalle de temps, il suppose que :

$$\frac{v_G}{v_H} = \frac{DG}{FH}.$$

A l'aide de cette nouvelle relation, il remplace dans toutes les démonstrations le rapport des vitesses par celui des longueurs. Par conséquent, la combinaison de ces deux relations rend possible, l'élimination de la vitesse ;

il résulte la relation suivante :

$$\frac{CG}{EH} = \frac{DG^2}{FH^2}.$$

En mobilisant certaines règles de la géométrie pure (ex : les triangles semblables, ...) il trouve finalement la

relation suivante : D'où

$$\frac{CG}{EH} = \frac{GM^2}{GC^2} \cdot \frac{HE^2}{NH^2} \Rightarrow \frac{CG}{EH} = \frac{GM^2}{GP^2}.$$

Bernoulli intègre ensuite le calcul différentiel dans le problème et finalement trouve que l'équation

différentielle, du type :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 y - a^3}}{\sqrt{a^3}} \quad (\text{où } a = CG, b = GM, x = AE, dx = LF, y = EH \text{ et } dy = HL)$$

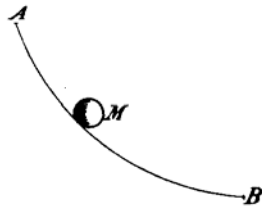
représente la courbe cherchée. (Blay, 1992) (pour plus de détails se rapporter à l'annexe n° 1 de la partie B).

Il a été observé explicitement que la solution de Bernoulli témoigne d'une combinaison parfaite entre la géométrie et la mécanique.

### 1.2.3. Problème "brahystochrone"

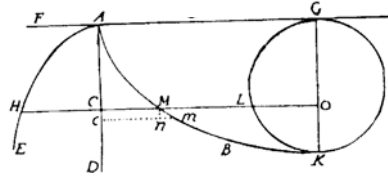
Parmi tous les problèmes posés au 17<sup>ème</sup> siècle, il existait un problème qui a occupé une place importante pendant longtemps. Il s'agit de problème "Brahystochrone", qui s'énonce ainsi :

"Trouver la courbe plane  $AMB$  (définie par figure suivante) qu'un point pesant  $M$  doit parcourir pour descendre sans vitesse initiale d'un point  $A$  à un point  $B$  dans le temps le plus bref." (J. Bernoulli 1696 cité par Blay 1992)



La solution de ce problème qui a l'air simple a priori, soulève en fait des difficultés sur lesquelles se sont penchés plusieurs scientifiques. Nous illustrons l'une des solutions proposées par les scientifiques, celle de Jean Bernoulli lui-même :

Bernoulli redéfinit la courbe cherchée par la figure suivante :



Pour démarrer sa solution il s'appuie sur le principe de Fermat qui dit que

"un rayon de lumière, passant d'un milieu moins dense ou plus rare dans un milieu plus dense, se rompt par rapport à la perpendiculaire, en sorte que le rayon procédant continuellement de la source de lumière vers le point éclairé emploie le moins de temps possible". (Chabert, 1993).

Fermat déduit de ce principe que les sinus d'incidence et de réfraction sont proportionnels aux vitesses avec lesquelles la lumière se déplace dans les deux milieux : le rayon suit le chemin qui satisfait partout à la loi de réfraction :  $\frac{v}{\sin \alpha} = a$  ( $\alpha$  est l'angle que la tangente fait avec la verticale et il est proportionnel à la vitesse  $v$ ).

Dans cette solution la courbe cherchée  $AMB$  (cf. figure citée ci-dessus) correspondant au trajet le plus rapide pour aller de  $A$  en  $B$ , est la courbe décrite par le rayon lumineux.

En définissant chaque élément de cette figure, Bernoulli pose:  $AC = x$ ,  $CH = t$ ,  $CM = y$ ,  $Cc = dx$ ,  $nm = dy$  et  $Mm = dz$  et écrit en  $M$  :  $\sin \alpha = \frac{dy}{dz}$  il donne ainsi l'équation différentielle décrivant une telle courbe :

$$dy = \frac{v dx}{\sqrt{a^2 - v^2}}.$$

Il caractérise enfin la courbe *brachistochrone* comme une cycloïde ordinaire dont le cercle  $GLK$  a roulé sur  $AB$  à partir de la position initiale  $A$ . (cf. l'annexe n° 2 de la partie B pour la solution détaillée)

La difficulté de résoudre des problèmes de mécanique qui nécessitent une mathématisation des propriétés des systèmes était toujours présente. C'est pour cela que dans sa solution, Bernoulli fait fonctionner à la fois deux domaines de la physique aujourd'hui distincts : optique et mécanique tout en intégrant les lois de l'optique dans un problème de mécanique.

A travers ces exemples on observe une diversité de méthodes de résolution de chaque type de problèmes. On constate ainsi que l'établissement d'une équation différentielle est l'aboutissement de démarches différentes de la démarche théorique qui utilise des lois bien connues.



## 2. L'évolution du concept d'équation différentielle

Bien que l'apparition du calcul différentiel ait permis aux scientifiques de 17<sup>ème</sup> siècle de résoudre certains problèmes de la géométrie et de la mécanique, autrement dit de les modéliser par des équations différentielles, ces scientifiques ont bientôt constaté que la résolution de ces dernières était difficile. Depuis cette époque, se pose une question qui occupe une place importante dans le domaine de mathématiques : Comment peut-on résoudre les différents types d'équations différentielles ?

Rappelons que les différents types d'équations différentielles sont apparus quasi-exclusivement à travers des phénomènes réels liés en général à la physique. On peut d'ailleurs constater un va-et-vient perpétuel entre les phénomènes physiques et les équations différentielles.

Il est possible ainsi d'examiner cette question tout en scindant l'histoire de la genèse de la notion d'équations différentielles en trois grandes périodes :

**La première période** est marquée par les écrits de Newton et de Leibniz, sur la résolution des équations différentielles. Newton étudie celles-ci dans son traité sur le calcul différentiel en 1671 et les résout par intégration et développement en séries. Il affirme qu'il est possible de résoudre toutes les équations différentielles à l'aide de cette méthode. La méthode proposée par Newton consiste à exprimer la solution de l'équation sous forme d'une série qui est la somme d'une infinité de termes. Les coefficients de la série sont déterminés par récurrence, l'un après l'autre, à partir de l'équation et des conditions initiales (Harrier, et al., 1987).

De son côté Leibniz découvre en 1691 la méthode d'intégration des équations différentielles à variables séparées. Il intègre ainsi les équations différentielles homogènes du premier ordre et ensuite les équations linéaires du premier ordre : Si l'équation est de la forme  $A(x) = y'.B(x)$ , on la ramène à l'égalité de deux différentielles, l'une en  $x$ , l'autre en  $y$ , et on intègre les deux membres (Bossut, 1810). Le théorème fondamental de l'analyse et du calcul intégral introduit lors de cette première période, n'est utile que dans certaines circonstances, notamment lorsqu'il s'agit des équations différentielles à variables séparées.

Ces premières tentatives des inventeurs du calcul différentiel sont suivies par la généralisation de cette théorie et l'apparition de nouvelles méthodes de résolution que nous avons considérées dans **la deuxième période** :

Au cours de 18<sup>ème</sup> siècle, plusieurs mathématiciens (J. Bernoulli (1654-1705), J. F. Riccati (1676-1754), et al.) ont cherché des techniques pour analyser et résoudre plusieurs types d'équations. Cependant, la plupart des équations n'avaient pas encore été résolues et un mathématicien, L. Euler (1707-1783), remarque que le développement des équations différentielles fait apparaître un besoin de nouvelles méthodes pour aborder les familles de solutions de nombreux types d'équations. Euler

réalise des travaux importants dans ce domaine tout en y intégrant le concept de fonction. Il est le premier à comprendre les propriétés et les rôles des fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, et de beaucoup d'autres fonctions élémentaires. En 1739, il développe la méthode de variation des paramètres. Ses travaux incluent également l'utilisation des approximations numériques et l'élaboration des méthodes numériques, qui fournissent des solutions approximatives pour presque toutes les équations. Euler continue ensuite ses travaux en les appliquant à la mécanique, ce qui le conduit à des modèles et donc aux équations différentielles [2].

Après Euler, certains mathématiciens se sont servis de ses méthodes. D. Bernoulli (1700-1789) les a utilisées pour étudier les oscillations et les équations qui donnent ce genre de solutions. Il en est de même pour J. L. Lagrange (1736-1813) et P. S. Laplace (1749-1827). Lagrange a suivi les méthodes d'Euler pour étudier particulièrement des équations décrivant le problème à trois corps et l'énergie potentielle associée. Quant à Laplace, il a travaillé sur la stabilité du système solaire en utilisant des techniques numériques.

Après les premières tentatives de résolutions numériques (les travaux d'Euler), l'histoire de la théorie des équations différentielles témoigne du développement de nouvelles méthodes numériques. L'une de ces méthodes a été développée par C. Runge (1856-1927) pour résoudre les équations qui sont apparues dans son étude des spectres atomiques. Cette méthode fait partie des méthodes les plus connues et les plus utilisées actuellement, sous le nom des "méthodes de Runge-Kutta". [2]

L'apparition des méthodes numériques n'était pas suffisante pour résoudre certains types d'équations différentielles. Ainsi *une troisième période* qui se situe à la deuxième moitié du 19<sup>ème</sup> siècle débute par l'apparition d'un nouvel obstacle, la résolution des équations différentielles non-linéaires. Le franchissement de cet obstacle est à l'origine de l'émergence d'une nouvelle approche nommée "qualitative". Cette approche est introduite par les travaux de H. Poincaré (1854-1912) qui a ouvert une nouvelle piste pour la résolution des équations différentielles non linéaires.

Poincaré propose une étude globale, dans laquelle il tente d'analyser le comportement des intégrales dans tout le plan. En effet selon Poincaré la méthode d'intégration à l'aide de séries n'est pas suffisante pour résoudre des équations différentielles de la mécanique et d'autres domaines de la physique. C'est la raison pour laquelle il était indispensable de développer des méthodes différentes des méthodes algébriques.

La plupart de travaux de Poincaré contiennent l'utilisation et l'analyse des équations différentielles. Dans la mécanique céleste il a maîtrisé la stabilité des orbites et a lancé la théorie qualitative d'équations différentielles non-linéaires.

A ce propos Poincaré énonce que :

[...] l'étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent ainsi s'y ramener. Prenons pour exemple le problème de trois corps : ne peut-on se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera indéfiniment, ou bien s'il restera comprise entre certaines limites ? ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque, faire voir que le plus grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites ? (Poincaré, 1932, cité par Bottazini, 2000)

Un tel problème qui porte sur le mouvement de  $n$  points matériels, s'attirant mutuellement en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré des distances peut en effet se caractériser comme un paradoxe :

"[...] la loi de Newton est l'une des plus simples,  $f = mm' / r^2$ , mais la solution de l'équation du mouvement de  $n$  corps dans un référentiel a défié depuis longtemps les mathématiciens. Dans le cas  $n = 2$ , les solutions sont connues : la trajectoire du premier corps par rapport au second est une conique. Déjà pour  $n = 3$ , le problème devient particulièrement difficile". (Ramunni, 1991)

Poincaré présente en 1889 la solution de ce problème à trois corps ou plus généralement à  $n$  corps sur lequel il a travaillé lors de son étude qualitative des équations différentielles. Dans sa solution il trouve que trois corps obéissant à la gravitation universelle de Newton ont une trajectoire qui dépend fortement des conditions initiales. Beaucoup de résultats de son travail seront à l'origine de nouvelles manières de penser, comme l'analyse des séries divergentes et les équations différentielles non linéaires.

## Conclusion

Nous avons tenté de réaliser une analyse historique avec plusieurs objectifs :

- Dégager les caractéristiques de fonctionnement des équations différentielles,
- Étudier les problématiques associées,
- Mettre en évidence les étapes historiques de l'évolution et les facteurs de progrès,
- Chercher les relations avec d'autres disciplines qui ont marqué l'histoire du concept d'équations différentielles,

L'analyse développée dans le paragraphe 1 et le survol historique décrit dans le paragraphe 2 permettent de dégager des résultats suivants :

- > Notre analyse des problèmes qui se sont posés lors de *la naissance* des équations différentielles et de leur résolution nous a montré dans quelles circonstances la notion d'équations différentielles a trouvé une vie. Nous avons observé ainsi qu'elle est née comme un modèle qui permet de résoudre certains problèmes. En effet tous les problèmes analysés précédemment (cf. paragraphe 1.2) nécessitait de décrire certaines courbes pour les quelles on connaît une ou plusieurs propriétés. Ceci correspond en effet aux deux étapes du processus de modélisation : une première qui nécessite de définir le système à modéliser et une deuxième qui implique de construire un modèle. Cependant compte tenu des sources aux quelles nous avons pu accéder pour cette analyse, il est quasiment impossible de discuter la troisième étape de ce processus.

En nous focalisant sur la résolution des problèmes posés nous avons noté que quelles que soient les méthodes suivies par tel ou tel mathématicien il y avait au moins un point commun : la tracé de la courbe à partir des propriétés données. Ceci montre, explicitement, que les méthodes utilisées pour construire un modèle mathématique sont sensiblement identiques à la démarche expérimentale (cf. partie A, paragraphe 2.3) qui nécessite souvent de travailler sur une courbe expérimentale.

- > Le survol historique nous a montré à quel point les problèmes issus d'autres disciplines étaient importants pour l'évolution de la théorie des équations différentielles. Il est certes hors de doute que, depuis sa naissance, le développement de la théorie des équations différentielles est en relation étroite avec le développement de la mécanique, de l'astronomie et d'autres domaines de la physique. Si les équations différentielles apparaissent d'abord dans le travail de modélisation il faut ensuite aborder une autre étape, celle de leur résolution, c'est à dire la recherche de la fonction inconnue. Notre analyse montre ainsi que depuis quatre siècles la nécessité de comprendre le monde réel a forcé les mathématiciens à répondre à des questions spécifiques qui amènent souvent à une équation différentielle. Cela montre que les problèmes issus d'autres disciplines, particulièrement des sciences physiques, ont joué un rôle très important tout au long de l'histoire des équations différentielles.

A ce propos nous pouvons nous questionner sur l'importance du savoir-faire ancien qui semble largement méconnu aujourd'hui. Il nous faut surtout retenir, pour notre sujet d'étude, la méthodologie générale des constructions du modèle, autrement dit de l'établissement des équations différentielles. Il va de soi que les contraintes de la genèse historique et celles d'une genèse scolaire sont bien différentes. C'est pourquoi il serait difficile de tenter de faire passer les élèves/étudiants par un cheminement analogue au cheminement historique pour étudier les équations différentielles. On peut cependant supposer que, dans ce cas particulier, l'étude des équations différentielles peut commencer à se développer à l'aide d'un point de vue interdisciplinaire et que la construction du modèle équation différentielle peut s'appuyer aussi sur les démarches expérimentales.



## *PARTIE C*

*Rapports institutionnels des étudiants de première année  
de l'université aux équations différentielles*

*Chapitre C<sub>1</sub> : Etude des caractéristiques de l'enseignement de l'objet  
équation différentielle en classe de Terminale S*

*Chapitre C<sub>2</sub> : Etude des caractéristiques de l'enseignement de l'objet  
équation différentielle au niveau de DEUG 1<sup>ère</sup> année*



## Introduction et méthodologie

*"Ce qui est objet d'enseignement n'a que la force  
que lui prête celui qui est enseigné"*

Francisco Sanchez, *Il n'est Science de Rien*

Aucune des notions (plus généralement la science elle-même) n'est pas fabriquée pour être enseignée mais elles sont nécessaires pour comprendre essentiellement le monde (Sanchez, 1581 trad. fr. 1984). Comme une notion ne peut jamais être enseignée telle quelle, selon les intérêts et les contraintes d'une société, en l'occurrence d'une institution scolaire, elle peut se présenter différemment et possède différentes valeurs. Cette troisième partie de notre travail s'intéresse donc aux différentes valeurs attribuées à l'objet équation différentielle par les institutions scolaires.

Rappelons tout d'abord que notre problème de départ portait essentiellement sur les contraintes d'enseignement et d'apprentissage du concept d'équation différentielle en première année d'université. Lors de la transformation de notre premier questionnement en problématique de recherche nous nous sommes placés dans une perspective anthropologique (cf. paragraphe 2, chapitre A<sub>2</sub>) où notre première réflexion s'est manifestée par une tentative de décrire les rapports institutionnels et les rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle. A ce propos, rappelons que, dans la partie A, en nous inspirant de travaux de Chevallard, l'accent a été mis particulièrement sur la relation entre ces deux types de rapport. En effet les connaissances des étudiants se forment sous la contrainte des savoirs enseignés.

Ainsi, cette troisième partie a pour but de décrire le rapport institutionnel des étudiants (en mathématiques et en physique) à l'objet équation différentielle. Nous nous sommes questionnés sur les éléments à l'aide desquels il est possible de décrire ce rapport institutionnel. A ce propos, Chaachoua (1997) déclare que :

" Pour déterminer le rapport institutionnel, on peut procéder à l'analyse des programmes, des manuels et/ou d'une réalisation effective dans une classe [...]."

En effet les programmes désignent les objets de savoir à enseigner et ils définissent plus précisément les attentes de l'institution à propos de ces objets de savoir. Cependant l'analyse des programmes n'est pas suffisante pour décrire le rapport institutionnel, ce que Mensouri (1994) explique par deux raisons :

" La première est que les programmes ne constituent pas un texte de savoir, mais seulement un discours sur un hypothétique texte de savoir [...],

La deuxième raison est que, même en disposant d'un certain texte de savoir, toutes les pratiques à propos des objets de savoir figurant dans ce texte ne peuvent pas être citées "



et il signale que :

"Les manuels sont ainsi incontournables pour celui qui veut faire une analyse fine du rapport institutionnel".

Etant donnée l'absence de programmes officiels en DEUG et de manuels utilisés systématiquement au niveau national, nous prenons comme hypothèse de travail pour notre étude que *le rapport institutionnel des étudiants peut être approché par l'analyse des manuels de terminale (de mathématiques et de physique), et par l'analyse du corpus des données (polycopiées des cours magistraux, feuilles de travaux dirigées, observation des classes) de deux institutions (Mathématiques et Physique) de la première année de DEUG.*

Quels liens y a-t-il entre les rapports institutionnels des étudiants et l'analyse des manuels de terminale ? Nous considérons en effet que les manuels sont des terrains privilégiés pour connaître les caractéristiques de la première rencontre officielle des étudiants avec les équations différentielles. Notre analyse des programmes de classe de terminale S (Parti A, paragraphe 4.3) nous avait donné un premier aperçu de l'enseignement des équations différentielles en Mathématiques et en Physique. Le fait de travailler avec les étudiants qui ont étudié les manuels scolaires avant le dernier changement de programme (de 2001) nous a conduits à analyser les manuels édités avant ce changement de programme. Cette analyse nous permettra d'identifier le fonctionnement de l'objet équation différentielle dans deux institutions en classe de terminale S.

Au niveau de l'université<sup>1</sup> nous avons pris en compte deux institutions particulières: "mathématiques" et "électrocinétique". Comme nous l'avons évoqué dans la partie problématique, nous avons limité le domaine d'utilisation du modèle équation différentielle à la branche "électrocinétique" des sciences physiques. Ce choix a été fait en fonction de deux raisons : d'abord la volonté de trouver une continuité entre l'enseignement au niveau de l'objet équation différentielle sur deux niveaux : la classe de terminale et la première année d'université. A ce propos nous avons noté qu'en Physique, la modélisation des oscillations électriques et mécaniques est le seul chapitre dans lequel on fait appel à l'objet équation différentielle ce qui nous a conduits à nous orienter vers l'une de ces deux branches des sciences physiques. La deuxième raison est que l'électrocinétique est le seul domaine de la physique permettant d'enseigner explicitement les équations différentielles en première année de l'Université Joseph Fourier.

Après avoir choisi un terrain favorable pour définir le rapport institutionnel des étudiants à l'objet équation différentielle, nous nous placerons dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique de Chevallard (approche écologique du savoir et approche praxéologique) pour conduire cette étude. Nous présentons brièvement ces deux approches :

---

<sup>1</sup> Université Joseph Fourier DEUG première année (section science de la matière).

<sup>1</sup> Université Joseph Fourier DEUG première année section science de la matière.

Dans une institution donnée un objet de savoir se trouve en interaction avec d'autres objets institutionnels qui constituent des conditions écologiques de la vie de cet objet.

"L'étude du rapport institutionnel revient ainsi à l'identification des conditions et des contraintes (réalisées à travers les situations didactiques que sont les différents états du système didactique), de leurs effets (de genèse, d'évolution, de stabilisation) [...] et aussi à l'identification des conditions sous lesquelles un tel rapport institutionnel peut se mettre en place dans le type de système didactique considéré". (Chevallard 1989 cité par Le Van, 2001)

**Le point de vue de l'écologie** du savoir nous apporte des éléments qui peuvent être considérés comme un premier outil d'analyse. Notons que nous reprenons particulièrement deux notions de cette approche : la notion de niche et celle d'habitat. Rajonson (1988) définit ces deux notions :

"les différents lieux où l'on pourra trouver tel être mathématique [...] seront appelés ses habitats. L'habitat est au fond l'adresse de l'être mathématique considéré [...],  
Ce que nous nommerons niche (écologique) en revanche est relatif à la place fonctionnelle qu'occupe dans un habitat donné, l'être mathématique étudié. On peut définir la niche [...] comme étant la "profession", l'art et la manière de vivre de l'être considéré".

En lien avec la notion d'écologie du savoir, nous nous sommes posés les questions suivantes : Quels sont "les habitats" ou "les différents lieux" de vie du concept équation différentielle en Mathématiques et en Physique ? Quelles sont "les niches écologiques", ou "les fonctions" occupées par les équations différentielles dans ces deux disciplines ?

Ce premier questionnement nous permettra d'avoir un premier indice du rapport à l'objet d'étude. Cependant **la notion de praxéologie** propose une méthode d'analyse plus détaillée des caractéristiques de l'enseignement d'un objet de savoir dans une institution précise :

"Le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position [...]". (Bosch et Chevallard, 1999).

Selon la notion de praxéologie introduite par Chevallard (1998) toute activité d'une personne qui occupe une place dans une institution peut se présenter dans un système de tâches. Ainsi on désignera par **T** un *type de tâche*, comme "corriger un texte écrit en anglais", "résoudre une équation différentielle du premier ordre" etc.

En praxéologie, l'existence d'une tâche T rend nécessaire la définition d'une manière de l'accomplir, de la réaliser ; on donnera à cette "manière de faire" le nom de *technique*,  $\tau$ .

Toute technique  $\tau$ , pour pouvoir s'appliquer est assujettie à un discours rationnel, nommé *technologie*  $\theta$ , qui prend en charge les trois fonctions suivantes :

- ce discours doit justifier la technique  $\tau$  tout en assurant qu'elle permet d'accomplir les types de tâches T,
- il doit expliquer, rendre intelligible et éclairer la technique,
- il doit permettre de produire la technique.

Enfin cette technologie  $\theta$  peut être soumise à une *théorie*  $\Theta$ . Cette dernière a pour but d'expliquer et de justifier la technologie en question.

En lien avec la notion de praxéologie, nous nous posons les questions suivantes :

Quels types de tâches caractérisant l'étude du concept d'équation différentielle sont-ils abordés ? Quelles sont les techniques les accompagnant ? Quels sont les discours technologiques qui justifient, expliquent ces techniques ? Existe-t-il des théories expliquant cette technologie ?

Pour mener une analyse praxéologique, au niveau de la première année de l'université, nous nous sommes appuyés à la fois sur les feuilles de travaux dirigés qui nous permettent, dans un premier temps, de définir les tâches proposées aux étudiants, sur les photocopiés des cours afin de relever les techniques associées à ces tâches et enfin sur les notes des cours magistraux (prises par nous-même lors de l'observation des classes) qui nous permettent de décrire les éléments de la technologie justifiant ces techniques et la théorie si elle existe.

En vue de compléter cette analyse nous nous sommes aussi focalisés sur ce qui est réalisé concrètement lors des séances de travaux dirigés. Comme nous l'avons déjà développé dans la partie A de ce travail, les rapports personnels des sujets, en l'occurrence des étudiants, se construisent sous l'effet de plusieurs interactions existantes (cours suivis, ouvrages étudiés, pratiques réalisées etc.). Considérant que les rapports institutionnels des étudiants ne se limitent pas à ce qui est prévu théoriquement, nous avons décidé d'analyser les séances de travaux dirigés. Nous avons alors étudié les rapports institutionnels des étudiants en fonction des déroulements des séances de travaux dirigés sans nous questionner sur les pratiques des enseignants. A ce propos, il est possible de distinguer deux types de savoirs enseignés qui jouent des rôles importants dans la formation des rapports personnels des étudiants : d'une part le savoir écrit dans les photocopiés du cours et dans les fiches de travaux dirigés (distribués par le responsable des modules universitaires), d'autre part, le savoir transmis en travaux dirigés par les enseignants. Ceci nous a permis de conclure que les systèmes de contraintes dans lesquels le responsable du module et les enseignants effectuent leurs choix ne sont pas de même nature.

### ***Plan de la Partie C :***

Pour caractériser l'ensemble des rapports institutionnels (dans deux institutions) des étudiants de première année de l'université à l'objet équation différentielle et les liens entre ces rapports, nous mènerons nos analyses sur les objets suivants :

- > Etude des caractéristiques de la première rencontre officielle avec l'objet équation différentielle : analyse des manuels de mathématiques et de physique de la classe de terminale S. (Chapitre C1)
- > Etude de l'évolution du rapport à l'objet équation différentielle : analyse des feuilles de travaux dirigées, des photocopiées et des notes prises lors de l'observation en classe (les cours magistraux -au total 15 séances dont 10 en mathématiques et 5 en électrocinétique- et les travaux pratiques -au total 54 séances dont 30 en mathématiques et 24 en électrocinétique-). (Chapitre C2)



# Chapitre C<sub>1</sub> : Etude des caractéristiques de l'enseignement de l'objet équation différentielle en classe de Terminale S

## 1. Etude des manuels de mathématiques de la classe de terminale

### 1.1. Analyse écologique des manuels

#### a. Manuel "Terracher"

Un seul chapitre intitulé<sup>1</sup> "*Fonction exponentielles et puissances. Equations différentielles*" consacre une courte partie à l'enseignement des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre. L'organisation des chapitres de cet ouvrage nous permet de détecter les rubriques "cours", "travaux pratiques", "applications du cours", "exercices et problèmes".

#### "Cours"

Dans cet ouvrage le cours se scinde en trois parties comme suit.

- > La partie *introduction*, visant à présenter le concept d'équation différentielle, commence par une définition courte du type : "[...] *une équation différentielle que l'on peut présenter sommairement comme une relation entre une fonction et ses dérivées successives, et qui est réalisée sur un intervalle*" (Terracher, 1998.p. 160). Cette définition est suivie par la présentation de deux situations réelles menant à une équation différentielle. Cette introduction aboutit à un point de vue mathématique de l'étude, point de vue qui se formule de la façon suivante :
  - "Une fonction solution sur un intervalle  $I$  de l'équation différentielle  $y' = ay$  est une fonction  $f$ , dérivable sur  $I$  telle que  $f'(x) = af(x)$  pour tout  $x$  de  $I$ . (sans précision, on considère que  $I = \mathbb{R}$ ).
  - Résoudre l'équation différentielle  $y' = ay$ , c'est trouver toutes les solutions". (Ibid. p. 160.)
- > La deuxième partie est consacrée à l'étude de la *résolution de l'équation différentielle* du type  $y' = ay$ . Cette étude a pour but de montrer que les fonctions solutions de ce type d'équations différentielles sont des fonctions exponentielles. Un exemple est donné pour montrer que les fonctions exponentielles vérifient ce type d'équations différentielles.
- > Enfin la troisième partie se centre sur la *résolution de l'équation différentielle* du type  $y'' + \omega^2 y = 0$ . Comme déjà observé dans la partie précédente, on démontre que les fonctions solutions de ce type d'équations sont des fonctions trigonométriques.

---

<sup>1</sup> Pour la structure du chapitre cf. Annexes C

### "Exercices et Problèmes non résolus"

Dans ce chapitre, où les auteurs visent principalement à introduire les fonctions exponentielles, le nombre d'exercices relatifs à notre objet d'étude reste limité. Il nous a paru intéressant de mettre en évidence la proportion de ce type d'exercices par rapport au nombre d'exercices proposés dans ce chapitre. Nous avons identifié 38 exercices qui abordent les équations différentielles parmi les 152 exercices du chapitre.

### b. Manuel "Fractale"

Dans cet ouvrage, le concept d'équation différentielle est présenté dans deux chapitres<sup>1</sup> : Le chapitre 2 intitulé "Calcul différentiel, Primitives" traite des équations différentielles linéaires du second ordre et le chapitre 5 "Fonction exponentielle", des équations différentielles linéaires du premier ordre.

Tout au long de ce manuel, on trouve systématiquement les rubriques suivantes : "Activités préparatoires", "Cours", "Travaux pratiques", "Exercices résolus", "Le jour de Bac" et "Exercices et problèmes".

#### "Activités préparatoires"

Les activités préparatoires du chapitre 2 portent essentiellement sur "fonction composée et dérivée", alors que le contenu comporte quatre sujets principaux : Dérivée d'une fonction composée, Dérivées successives, Inégalité des accroissements finis et Primitives d'une fonction sur un intervalle. L'étude associée aux équations différentielles du type  $y'' + \omega^2 y = 0$  constitue l'une des sous-parties de la partie appelée "dérivées successives".

Dans la rubrique "Activités préparatoires" du chapitre 5, l'élève est amené, d'une part à étudier la définition et les propriétés de la fonction exponentielle et d'autre part les équations différentielles du type  $y' = ay$ . Cela implique que, contrairement à l'étude des équations différentielles du second ordre, l'étude du premier ordre constitue une partie indépendante du chapitre.

#### "Cours"

L'étude essentielle de ces deux types d'équations différentielles est axée sur la présentation de la fonction solution précisée par le programme officiel. Les auteurs se sont contentés de donner la forme générale de la fonction solution de ce type d'équations différentielles en faisant référence au programme officiel ; ils donnent également un exemple dans lequel l'élève a la possibilité de constater l'identification des constantes de la fonction solution.

---

<sup>1</sup> Pour la structure des chapitres cf. Annexes C"

"Exercices et problèmes non résolus"

Nous avons recensé ici au total 6 exercices amenant les élèves à travailler sur les équations différentielles linéaires du second ordre parmi 82 exercices du chapitre "Calcul différentiel et primitive".

Et dans le chapitre 5 intitulé "Fonction exponentielle", où nous avons répertorié au total 119 exercices laissés à la charge des élèves, seulement 19 exercices sont consacrés aux équations différentielles du premier ordre.

## 1.2. Analyse praxéologique des manuels

### a. Manuel "Terracher"

#### *1° Détermination des différents types de tâches*

Pour ce manuel, l'analyse des caractéristiques des exercices et des problèmes non résolus, nous permet de proposer un tableau récapitulatif présentant à la fois les différents types de tâches observés et le taux de répétitivité de chacun de ces types de tâches.

Notons qu'il s'agit au total de 87 tâches observées dans 38 exercices non résolus.

Types de tâches	Taux de répétition
T <sub>1</sub> : Trouver la famille de solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	29,8%
T <sub>2</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du premier ordre	10,4%
T <sub>3</sub> : Trouver la famille de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre	19,6%
T <sub>4</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du second ordre	4,6% (3 tâches)
T <sub>5</sub> : Vérifier si une famille de fonctions est bien la solution d'une équation différentielle donnée	19,6%
T <sub>6</sub> : Tracer la courbe solution d'une équation différentielle	2,3% (2 tâches)
T <sub>7</sub> : Etudier un problème conduisant à une équation différentielle	1,1% (1 tâche)
T <sub>8</sub> : Résoudre un problème décrit par une équation différentielle	12,6%

Tableau 1 : Présentation des différents types de tâches observés

A partir des informations citées dans ce tableau 1, il est possible de catégoriser ces types de tâches de la façon suivante : la première catégorie concerne des types de tâches relatifs à la résolution algébrique



d'une équation différentielle ( $T_1, T_2, T_3, T_4$  et  $T_5$ ). On constate que la part prise par cette catégorie est assez importante (84 % des tâches proposées dans le manuel analysé). La deuxième catégorie concerne des types de tâches relatifs au travail de modélisation passive/active ( $T_7$  et  $T_8$ ) et représente 13,7 % des tâches. Finalement la dernière catégorie se caractérise par un seul type de tâches ( $T_6$ ) lié au changement de représentation et elle comprend seulement 2,3% des tâches proposées.

## 2° Détermination des praxéologies associées

Suivant la méthode classique permettant de mener une analyse visant à connaître les éléments praxéologiques associés à ces types de tâches nous nous sommes intéressés aux exercices résolus dans le manuel.

On observe que les deux types de tâches  $T_6$  et  $T_7$  ne sont pas abordés dans les exercices résolus. Nous nous bornons donc, dans ce paragraphe, à l'étude des autres types de tâches.

⇒  $T_1$  : Trouver la famille de solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Ce type de tâches se compose de deux sous-types de tâches : un premier sous-type concerne les équations différentielles linéaires du premier ordre sans second membre ( $y' = ay$ ) et un deuxième les équations différentielles avec second membre ( $y' = ay + \varphi$ ).

Étudions ces deux sous-types de tâches tout en mettant en évidence les techniques permettant de les résoudre ainsi que les éléments de la technologie vérifiant ces techniques.

→ les tâches relatives à la résolution algébrique des équations différentielles du type : ( $y' = ay$ ), portent sur une seule technique. Cette technique annonce que les fonctions solutions de ce type d'équations différentielles, doivent être sous la forme suivante :  $x \mapsto C.e^{ax}$  ( $a$  est une constante réelle quelconque).

Bien qu'il ne soit pas détaillé, le discours technologique justifiant cette unique technique peut aider les élèves à mieux comprendre cette dernière. Le discours en question a deux fonctions : d'abord de vérifier que la fonction proposée -  $x \mapsto C.e^{ax}$  - est bien la solution de l'équation différentielle en question et ensuite de montrer que  $C$  est une constante réelle quelconque. Illustrons ce discours par un extrait du manuel:

"Démonstration :

$$y' = ay \quad (1)$$

- Posons  $y(x) = Ce^{ax}$ ; alors  $y'(x) = aCe^{ax}$  et il est clair que la fonction  $y$  est solution de l'équation différentielle :  $y' = ay$ .

- Soit à présent une fonction dérivable sur  $\mathfrak{R}$  et vérifiant (1),

On considère la fonction auxiliaire  $z : x \mapsto e^{-ax}y(x)$ .

$z$  est dérivable sur  $\mathfrak{R}$  et  $z'(x) = -ae^{-ax}y(x) + e^{-ax}y'(x)$ ,

soit encore  $z'(x) = e^{-ax}[y'(x) - ay(x)] = 0$ , puisque  $y' = ay$ .

Il en résulte que  $z$  est une fonction constante sur  $\mathfrak{R}$  : il existe  $C$  tel que  $z(x) = C$ .

Comme  $y(x) = e^{ax}z(x)$ , il en résulte que  $y(x) = Ce^{ax}$ , d'où le résultat annoncé." (Terracher, 1998, p.161)

→ les tâches liées à la résolution des équations différentielles du type :  $y' = ay + \varphi$ , nécessitent de trouver une solution particulière, après avoir résolu l'équation différentielle sans second membre.

La technique permettant d'aboutir à la réponse finale se compose de deux sous-types de tâches : "vérifier que la fonction  $g(x)$  (qui doit représenter probablement l'une des solutions particulières de l'équation différentielle étudiée), fournie (dans l'exercice proposé) est bien la solution de l'équation différentielle étudiée" et "trouver la solution générale de cette équation différentielle".

On observe qu'une solution particulière est fournie explicitement dans ce genre d'exercices. Ceci montre que le but essentiel est de faire trouver à l'élève la solution générale de ce type d'équations différentielles tout en additionnant une solution particulière donnée à la solution de l'équation homogène.

⇒ T<sub>2</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du premier ordre

Les exercices résolus traitant de ce type de tâches montrent que sa résolution nécessite tout d'abord de trouver la famille de fonctions solutions vérifiant l'équation différentielle étudiée, autrement dit d'accomplir T<sub>1</sub> et ensuite de trouver la solution unique vérifiant les conditions initiales. Ayant traité précédemment T<sub>1</sub>, nous nous focalisons ici sur la recherche d'une seule solution. Cette recherche nécessite de définir la constante qui se trouve dans la fonction solution obtenue. On observe que, dans cet ouvrage, la technique et la technologie se présentent de la façon suivante :

" Il existe une unique solution de l'équation différentielle  $y' = ay$  vérifiant la condition initiale :

$$y(x_0) = y_0 \text{ (où } x_0 \text{ et } y_0 \text{ sont des réels donnés).}$$

Il s'agit de la fonction :  $x \rightarrow y_0 e^{a(x-x_0)}$  " (Ibid., p.161)

⇒ T<sub>3</sub> : Trouver la famille de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre

La résolution de ce type de tâches, autrement dit la résolution de l'équation différentielle du type  $y'' + \omega^2 y = 0$  se ramène à une seule technique qui vise à montrer que les fonctions solutions vérifiant ce type d'équations différentielles doivent se présenter sous la forme suivante :  $x \rightarrow A \cos \omega x + B \sin \omega x$ . Voici un extrait représentant cette unique technique :

"Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E3)  $y'' + \omega^2 y = 0$  ( $\omega \neq 0$ ) sont les fonctions :  $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$  " (Ibid. p.162)

Le discours cité ci-dessous montrant que la fonction proposée est bien la solution de cette équation différentielle justifie cette technique.

"Si  $y(x) = \cos \omega x$ , on a :  $y'(x) = -\omega \sin \omega x$  et  $y''(x) = -\omega^2 \cos \omega x = -\omega^2 y(x)$ ,

Ce qui montre que  $x \mapsto \cos \omega x$  est solution de (E3)

La vérification est analogue pour  $x \mapsto \sin \omega x$

Une simple remarque achève alors cette étape : la somme de deux fonctions vérifiant (E3) et le produit par un réel d'une fonction vérifiant (E3) sont encore des fonctions vérifiant (E3). Donc  $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$  vérifie (E3)". (Ibid. p. 162)

⇒ T<sub>4</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du second ordre

L'unique technique permettant de résoudre ce type de tâches comporte les mêmes caractéristiques que la technique utilisée pour résoudre le type de tâches T<sub>2</sub>. D'une façon générale il faut déterminer les valeurs des constantes (*A* et *B*) qui se présentent dans la fonction solution proposée en faisant référence aux conditions initialement données.

⇒ T<sub>5</sub> : Vérifier qu'une fonction solution est la solution d'une équation différentielle donnée

Ce type de tâches est l'un des plus souvent proposés dans le manuel analysé. L'exécution de ce type tâche nécessite d'injecter la fonction proposée dans l'équation différentielle étudiée et de vérifier qu'elle satisfait cette dernière. Cette façon de faire est donc fortement liée à la recherche de la première et seconde dérivée d'une fonction donnée.

⇒ T<sub>8</sub> : Résoudre un problème décrit par une équation différentielle

Les exercices relatifs à ce type de tâches sont toujours similaires mais conduisent à l'étude des différents types d'équations différentielles. 72% de ces tâches portent sur les équations différentielles linéaires du premier ordre (une moitié avec second membre et l'autre moitié sans second membre) et seulement 28% font intervenir des situations décrites par une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre.

Bien que ces tâches fassent référence à une situation issue d'autres disciplines, elles portent essentiellement sur la recherche de la famille de solutions vérifiant l'équation différentielle proposée.

Citons un exemple tiré du manuel pour mieux expliquer ce propos :

"On note  $f(t)$  le nombre d'atomes de carbone 14 existant à l'instant  $t$  dans un échantillon de matière organique. On montre que la fonction  $f$  vérifie, pour tout réel  $t$  :

$$f'(t) = -k f(t) \text{ et } f(0) = N_0$$

où  $k$  est un réel strictement positif (constante radioactive de l'élément).

1) Donner l'expression de  $f(t)$  en fonction de  $N_0$ ,  $k$  et  $t$ " (Ibid. p.170).

Cet exemple montre explicitement que ce type de tâches ne se distingue pas beaucoup de ceux concernant la recherche des fonctions solutions d'une équation différentielle. La technique présentée pour trouver les solutions d'une équation différentielle reste valable pour accomplir ce type de tâches. Bien que la tâche initiale s'inscrive dans un système extra-mathématique, les autres éléments de l'organisation praxéologique s'inscrivent dans le domaine mathématique.

Il est à noter que la résolution d'un tel problème ne s'arrête pas à la résolution de l'équation différentielle. Dans plusieurs cas, l'exercice continue par une autre question comme par exemple :

"On appelle période (ou demi-vie) de l'élément radioactif, le temps  $T$  au bout duquel la moitié des atomes se sont désintégrés. Sachant que  $k = 1,238 \cdot 10^{-4}$  et que  $t$  est évalué en années, déterminer la demi-vie du carbone 14" (Ibid, p. 170).

Ceci conduit en général à de simples calculs mathématiques dont certains exercices résolus montrent explicitement la méthode de résolution.

### b. Manuel "Fractale"

Nous avons répertorié 48 tâches dans 25 exercices, au sein de deux chapitres, relatifs aux équations différentielles linéaires du premier et du second ordre. Voici le tableau récapitulatif résumant la répartition des types de tâches proposés dans ce deuxième manuel :

Types de tâches	Taux de répétition
T <sub>1</sub> : Trouver la famille de solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	20,8%
T <sub>2</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du premier ordre	25%
T <sub>4</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du second ordre	6,4%
T <sub>5</sub> : Vérifier si une famille de fonctions est bien la solution d'une équation différentielle donnée	33,3%
T <sub>6</sub> : Tracer la courbe solution d'une équation différentielle	4,1% 2 tâches
T <sub>7</sub> : Etudier un problème conduisant à une équation différentielle	2,1% 1 tâche
T <sub>8</sub> : Résoudre un problème décrit par une équation différentielle	8,3%

Tableau 2 : Présentation des différents types de tâches observés

Notons rapidement les premières conclusions suivantes :

- > conformément aux résultats obtenus lors de l'analyse du manuel précédent, on observe que les types de tâches (T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>4</sub> et T<sub>5</sub>) relatifs à la résolution algébrique d'une équation différentielle sont très majoritaires (85,5 %) devant les autres types de tâches (la part prise par les types de tâches relatifs au travail de modélisation est 10,4% et celle prise par les types de tâches liés au changement de représentation de 4,1%).
- > une nette différence entre les deux manuels analysés est la disparition de l'un de types de tâches identifiés précédemment, T<sub>3</sub> "trouver la famille de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre".
- > les tâches de type T<sub>8</sub> sont centrées beaucoup plus souvent par rapport au manuel précédent sur les phénomènes physiques. Certes, ces phénomènes portent sur une modélisation de type passif qui ne demande à l'élève que de comprendre l'énoncé de l'exercice et de considérer que

l'équation différentielle donnée représente une situation, probablement, réelle. Comme dans le manuel précédent, il s'agit à nouveau de trouver la fonction solution de ces équations différentielles. En fait, ce type de tâches a l'avantage de donner à l'élève des idées à propos des domaines d'utilisation de l'objet équation différentielle.

## 2. Etude des manuels de physique de la classe de terminale

### 2.1. Analyse écologique des manuels

Nous analysons ci-dessous deux manuels de Physique (Nathan 1999, Durandau 1999) édités avant le dernier changement de programme scolaire. Dans ces deux manuels, conformément au programme officiel, le concept d'équation différentielle n'est étudié que dans un seul chapitre<sup>1</sup> centré sur la modélisation des oscillateurs. Il s'agit de deux parties centrales qui constituent la partie "cours" du chapitre. Une première partie est consacrée à l'étude des oscillateurs libres non amortis alors que la deuxième partie se centre sur les oscillateurs amortis. Notons que ces deux parties concernent les oscillateurs électriques et mécaniques.

Au niveau de la structure générale, les deux manuels comportent presque les mêmes rubriques. On trouve en amont du cours certains paragraphes introduisant le sujet traité dans le chapitre et en aval, les rubriques "activités expérimentales", "BAC exercices résolus" et "exercices".

Certaines de ces rubriques servent clairement à mettre en relation des techniques ou des résultats de cours. Ainsi, la sous rubrique "Essentiel" permet aux élèves d'acquérir rapidement l'outillage technique dont ils ont besoin pour résoudre les exercices proposés à la fin du chapitre.

Il sera alors intéressant d'analyser dans l'environnement d'exercices et de problèmes de cet unique chapitre, les caractéristiques de l'enseignement du modèle "équation différentielle" en physique.

### 2.2. Analyse praxéologique des manuels

#### a. Manuel "Nathan"

##### **1° Résultats globaux**

Nous donnons tout d'abord quelques informations à propos des exercices proposés dans ce manuel. Nous avons comptabilisé au total 11 exercices non résolus, dont 6 portent sur l'étude d'un circuit électrique et font appel explicitement au modèle équation différentielle. On constate qu'en général deux types d'équations,  $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ ,  $\ddot{z} + A\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ , sont apparus dans la modélisation des systèmes physiques.

##### **2° Détermination des différents types de tâches**

Nous avons répertorié, au total 19 tâches au sein de 6 exercices non résolus qui nécessitent d'étudier certains circuits électriques amortis et non amortis. Ces tâches se classent en 4 types que nous recensons dans un tableau (Tableau 3) ci-après tout en mettant en scène le nombre d'apparition de chacun d'eux :

---

<sup>1</sup> La structure générale des chapitres étudiés, pour chacun des manuels, est présente dans l'annexe de cette partie.

Les types de tâches observés	La quantité
T <sub>1</sub> : Etudier l'évolution de la charge dans un circuit conduisant à une équation différentielle linéaire du 2 <sup>nd</sup> ordre	5
T <sub>2</sub> : Représenter graphiquement l'évolution de la charge/ du courant d'un circuit étudié	1
T <sub>3</sub> : Etudier les échanges énergétiques dans le circuit étudié	5
T <sub>4</sub> : Trouver la pulsation propre et/ou la période propre du circuit	8
TOTAL	19

Tableau 3 : Répartition générale des différents types de tâches détectés

Les caractéristiques des types de tâches énumérés dans ce tableau peuvent se classer en deux catégories : une première catégorie consiste en un seul type de tâches, T<sub>1</sub>, en relation directe avec une équation différentielle. La deuxième catégorie regroupe les autres types de tâches qui ont une relation implicite avec une équation différentielle, autrement dit les types de tâches reliés en général à la fonction solution de cette dernière. A ce propos, on constate que la deuxième catégorie est majoritaire (14 versus 5, sur 19).

### **3° Détermination des praxéologies associées**

Nous nous proposons d'étudier, à présent, tous les types de tâches répertoriés en relevant les techniques d'exécution de ces tâches et en identifiant les éléments de la technologie justifiant ces techniques à l'aide d'exercices résolus de ce manuel. Signalons tout d'abord que deux de ces types de tâches, T<sub>2</sub> (Représenter graphiquement l'évolution de la charge/ du courant d'un circuit étudié) et T<sub>3</sub> (Trouver l'énergie magnétique et/ou électrique associée au circuit), ne sont pas abordés dans les exercices résolus. Ceci indique l'absence d'une organisation praxéologique associée à ces types de tâches.

Lors de cette analyse, s'il s'agit de types de tâches ou sous-types de tâches déjà rencontrés dans l'analyse des manuels de mathématiques, nous les évoquerons en faisant une comparaison entre les techniques détectées dans chacune des deux institutions. En effet cette comparaison est nécessaire pour relever les ressemblances et éventuellement les différences entre l'enseignement dans les deux institutions au niveau du traitement des mêmes types de tâches.

⇒ T<sub>1</sub> : Etudier l'évolution de la charge d'un circuit électrique conduisant à une équation différentielle linéaire du 2<sup>nd</sup> ordre :

La technique permettant d'accomplir ce type de tâche se scinde en trois sous-types de tâches :

T<sub>1a</sub> : Etablir l'équation différentielle représentant le circuit électrique,

T<sub>1b</sub> : Résoudre l'équation différentielle établie,

T<sub>1c</sub> : Trouver l'expression de la charge à un instant donné.

Chacun de ces sous-types de tâches s'inscrit dans une organisation praxéologique que nous décrivons de la façon suivante :

→ T<sub>1a</sub> : Etablir l'équation différentielle du système

Deux techniques sont à la disposition des élèves pour exécuter ce sous-type de tâches :

Une première technique porte sur l'application de la loi des tensions aux bornes du circuit étudié. A ce propos citons le texte intégral de ce manuel :

"Considérons le circuit (L, C) (fig. 6).

Les tensions s'écrivent :

$$u_C = \frac{q}{C} \text{ aux bornes du condensateur,}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ avec } i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \text{ aux bornes de la bobine.}$$

La somme des tensions est nulle, ce qui conduit à :

$$u_C + u_L = \frac{q}{C} + L\dot{q} = 0$$

$$\text{d'où } \frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0 .$$

L'équation obtenue est l'équation différentielle de l'oscillateur électrique non amorti" (Nathan, p.218).

L'émergence historique de l'objet équation

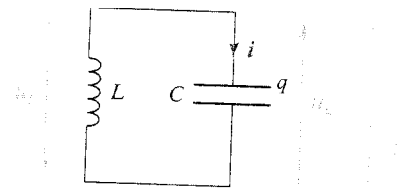


Fig. 6. Circuit (L, C) équivalent au circuit (R, L, C) entretenu de la figure 4.

Bien qu'une grande partie des exercices résolus concernant les oscillations électriques se centrent exclusivement sur cette technique, le troisième élément de la notion de praxéologie (technologie), qui doit justifier cette technique n'est pas présenté explicitement dans cet ouvrage.

Quant à la deuxième technique permettant de résoudre ce sous-type de tâches, elle est construite à partir de la loi de conservation de l'énergie.

"L'énergie de l'oscillateur électrique non amorti est la somme de l'énergie magnétique

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L i^2 \text{ et de l'énergie électrique } E_{el} = \frac{1}{2} C u_c^2 . \text{ L'énergie totale } E_{elmag} = E_{mag} + E_{el} \text{ est}$$

constante ; sa dérivée par rapport au temps est donc nulle.

$$\frac{dE_{elmag}}{dt} = \frac{dE_{mag}}{dt} + \frac{dE_{el}}{dt} = 0 \text{ " (Ibid. p.219)}$$

Cette dernière conduit à une autre relation à partir de laquelle est déduite l'équation différentielle du système :



$$" \frac{dE_{\text{emag}}}{dt} = Li\ddot{q} + i \frac{q}{C} = i(L\ddot{q} + \frac{q}{C}) = 0$$

- la solution  $i = 0$  ne convient pas puisqu'elle suppose que l'oscillateur électrique non amorti n'oscille pas.

- la solution  $L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$  permet de retrouver l'équation du mouvement de l'oscillateur électrique

non amorti :  $\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$ . " (Ibid. p219).

Nous ne trouvons aucune explication portant sur l'utilité et/ou l'efficacité de cette technique par rapport à la technique précédente.

→ T<sub>1b</sub> : Résoudre l'équation différentielle établie

La seule technique observée dans les manuels de Physique qui permet d'accomplir ce type de tâches est la suivante :

"On démontre en mathématiques que la fonction  $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation différentielle  $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ " (Ibid., p.219).

L'accomplissement de ce type de tâches repose donc sur les connaissances mathématiques que l'élève doit connaître par cœur.

→ T<sub>1c</sub> : Trouver la valeur de la charge à un moment donné

Comme nous l'avons montré dans l'analyse des manuels mathématiques, après avoir trouvé la forme des fonctions solutions, l'élève doit appliquer à la solution trouvée les conditions initiales données pour compléter la résolution de ce type de tâches.

⇒ T<sub>4</sub> : Trouver la pulsation/période propre du circuit

Il n'existe qu'une seule technique permettant d'accomplir ce type de tâches. Celle-ci porte sur les connaissances théoriques vérifiant les relations suivantes :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  ,  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  .

Le discours qui justifie cette technique s'appuie en fait sur deux représentations différentes de la même équation différentielle : une première est celle trouvée en fonction de la loi de la conservation de l'énergie que nous montrons de la façon suivante.

"Equation différentielle (de l'oscillateur électrique non amorti) établie à partir de la loi de conservation de l'énergie :

$$[...]\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$
 " (Ibid., p.219).

Sur la même page, on constate un peu plus loin que la vérification de la fonction fournie comme solution de ce type d'équation différentielle permet de donner une nouvelle forme de cette équation

différentielle et d'en déduire les relations précédentes. Nous illustrons ce propos à l'aide de l'extrait suivant :

"Nous vérifions que l'expression  $q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation différentielle :  $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ ,

En comparant les deux expressions de l'équation différentielle, on établit l'expression  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  de la pulsation propre, puis celle de la période propre :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$  " (Ibid. p.219)

Les exercices qui portent sur ce type de tâches impliquent de connaître les expressions de la pulsation propre ou de la période propre. Les tâches proposées ne nécessitent donc pas de construire ou de connaître les deux formes d'équation différentielle d'un système oscillant mais uniquement de réaliser un calcul simple pour aboutir à une réponse correcte.

#### b. Manuel "Durandeaun"

Nous présentons ici certains résultats sans réaliser une analyse détaillée comme précédemment.

Parmi 17 exercices non résolus nous en avons comptabilisés 10, dont 5 portent sur les problèmes d'électrocinétique qui sont liés aux équations différentielles linéaires du second ordre.

On constate que l'étude des oscillations électriques libres et amorties fait référence principalement aux mêmes types d'équations différentielles que ceux du manuel précédent.

Au sein d'un seul chapitre de ce manuel, nous avons répertorié, au total, 11 tâches relatives aux problèmes d'électrocinétique conduisant à une équation différentielle (Tableau 4).

Les types de tâches observés	La quantité
T <sub>1</sub> : Etudier l'évolution de la charge du circuit	5
T <sub>2</sub> : Représenter graphiquement l'évolution de la charge du circuit	1
T <sub>3</sub> : Trouver l'énergie magnétique et/ou énergie électrique du circuit	2
T <sub>4</sub> : Trouver la pulsation propre et/ou période propre du circuit	3
Total	11

Tableau 4 : Répartition générale des différents types de tâches observés

Par comparaison avec les résultats de l'analyse du manuel précédent, on constate certaines différences :

- > Une première différence est la diminution importante du nombre des tâches du type T<sub>4</sub> (3 versus 8).
- > Une deuxième différence apparaît au niveau des techniques proposées (une première technique favorise l'application de la loi des mailles et une deuxième utilise la loi de conservation de l'énergie) permettant d'établir l'équation du circuit étudié (T<sub>1a</sub>). On note que dans ce manuel certains exercices (20% des exercices proposés) nécessitent d'accomplir ce sous-type de tâches à l'aide des deux techniques disponibles.

### 3. Conclusion sur l'étude des manuels de la classe de Terminale S

Il s'agissait, dans ce chapitre, d'étudier les caractéristiques de la première rencontre des élèves avec notre l'objet d'étude. Pour cela nous avons pris en compte les deux statuts de ce dernier : l'objet équation différentielle et le modèle équation différentielle. D'où notre premier questionnement :

*Quels sont "les habitats" ou "les différents lieux" de vie du concept d'équation différentielle en Mathématiques et en Physique ? Quelles sont "les niches écologiques", ou "les fonctions" occupées par les équations différentielles dans ces deux disciplines ?*

Nous avons résumé dans le Tableau 5, ci-dessous certains éléments de réponse à ce questionnement :

Mathématique	Physique (Electricité)
Fonctions exponentielles et primitives	Modélisation des oscillateurs
$y' = ay$ $y' = ay + \varphi$	
$y'' + \omega^2 y = 0$  $y'' + \omega^2 y = \varphi$	Electricité $\ddot{q} + \omega_0^2 .q = 0$  $\ddot{q} + A\dot{q} + \omega_0^2 .q = 0$

Tableau 5 : Présentation des différents types d'équations différentielles étudiés en classe de terminale

En conformité avec le programme scolaire nous avons montré qu'en mathématiques l'objet équation différentielle n'est pas traité dans un chapitre à part, mais fait partie d'un (des) chapitre(s) sur "fonctions exponentielles et primitives". Cet enseignement porte exclusivement sur deux types d'équations différentielles linéaires, premier ordre et second ordre.

Par contre, en physique le seul chapitre qui concerne cet objet d'étude est celui portant sur la modélisation des oscillateurs (mécaniques et électriques). Un seul type d'équations différentielles, à savoir, linéaire du second ordre, est abordé dans cette institution.

Pour une analyse plus fine, au sujet de traitement de ces équations différentielles, nous avons formulé ainsi notre deuxième questionnement :

Quels types de tâches caractérisant l'étude du concept d'équation différentielle sont abordés ?  
 Quelles sont les techniques les accompagnant ? Quels sont les discours technologiques qui justifient, expliquent ces techniques ? Existe-t-il des théories expliquant cette technologie ?

Au sujet des types de tâches proposés dans les manuels de terminale, nous en avons recensé 12 au total (dont 8 en Mathématiques et 4 en Physique).

**En Mathématiques**, une classification est faite entre les différents types de tâches qui apparaissent dans les manuels ; nous avons relevé trois catégories de types de tâches qui caractérisent explicitement l'étude de l'objet équation différentielle dans cette institution :

- > une grande partie des types de tâches portent sur la résolution algébrique d'une équation différentielle. Nous avons constaté, le plus souvent, l'existence d'une seule technique pour exécuter chacun de ces types de tâches et l'absence presque totale de la technologie qui justifie cette technique,
- > les types de tâches relatifs au processus de modélisation occupent le second rang de fréquence d'apparition. Leur résolution a montré qu'ils se distinguent peu de ceux relatifs à une simple résolution algébrique. Il est à noter que le travail de modélisation a complètement disparu,
- > le type de tâches relatif à un changement de registre ou de représentation est très minoritaire par rapports aux autres. Il est à noter ainsi qu'aucune technique n'apparaît dans les manuels analysés.

**En physique**, le regroupement en 4 types de tâches (Tableau 4) a montré qu'il s'agit majoritairement de tâches relatives au domaine d'utilisation des équations différentielles et surtout de leur solutions. Nous pouvons classer chacun de ces types de tâches selon les trois phases du processus de modélisation<sup>1</sup> défini dans la partie théorique de cette thèse (chapitre A<sub>1</sub>, paragraphe 2.2). Par rapport à cette classification, nous avons observé que tous les types de tâches proposés s'inscrivent dans la deuxième phase de ce processus dont une petite minorité porte sur la construction du modèle mathématique et la majorité sur certaines études faites dans ce modèle. Concernant les autres éléments de l'organisation praxéologique, nous avons constaté, le plus souvent, l'existence une seule technique

---

<sup>1</sup> Trois phases du processus de modélisation

Phase 1 : définition du système,

Phase 2 : construction ou la formalisation du modèle et le travail dans le modèle construit,

Phase 3 : étude du problème initial pour traduire les résultats obtenus en leur donnant du sens et en les validant dans la situation réelle en fonction des réponses apportées aux questions initiales.

mobilisée pour exécuter chacun des types de tâches rencontrés et l'absence de discours technologique et théorique.

Parallèlement à la place attribuée, dans ce travail, au processus de modélisation, notre intérêt a porté particulièrement sur les techniques utilisées lors de la construction du modèle mathématique. Dans l'institution physique, nous avons constaté qu'en général, des techniques portant sur les lois de la physique sont mobilisées sans justification technologique. A ce propos, notons que les manuels analysés permettent d'algorithmiser la recherche du modèle représentant les circuits électriques tout en la rapportant à l'application de certaines lois de la physique.

Ce chapitre nous a permis de caractériser la première rencontre officielle avec notre objet d'étude. Ceci nous a conduit à ajouter les questions suivantes :

1. L'analyse des manuels de terminale nous a montré que les exercices proposés conduisent l'élève à développer son automatisme en vue de répondre à des attentes précises. Au niveau de DEUG s'agit-il des pratiques qui permettent à l'étudiant de développer un tel automatisme?
2. En lien avec l'interrogation précédente, quel est le niveau de prise en compte, dans le supérieur, des différents types de tâches et des techniques lors de l'enseignement des équations différentielles?
3. L'institution universitaire tient-elle compte des pratiques effectives de l'enseignement secondaire en ce qui concerne particulièrement l'enseignement des équations différentielles dans les deux institutions mathématiques et physique du lycée ?

# Chapitre C<sub>2</sub> : Etude de caractéristiques de l'enseignement de l'objet équation différentielle au niveau de DEUG 1<sup>ère</sup> année

## 1. Etude de l'enseignement du concept d'équation différentielle en mathématiques

### 1.1. Présentation générale du cours magistral

L'enseignement de l'objet équation différentielle constitue une partie importante du programme de première année de DEUG S<sub>Ma</sub> (filière Sciences de la Matière). Il s'étend sur dix séances de 90 minutes. Il s'agit principalement de trois chapitres : le premier vise à introduire le concept d'équations différentielles, le deuxième se focalise particulièrement sur les équations différentielles linéaires du premier ordre et le troisième se centre sur l'étude des équations différentielles linéaires du second ordre. Tableau 6 résume la répartition globale des séances par chapitre :

Introduction aux équations différentielles	Equations différentielles linéaires du premier ordre	Equations différentielles linéaires du second ordre
1 séance	4 séances	3 séances

Tableau 6 : Distribution générale des séances selon les chapitres enseignés

Ces séances de cours magistral s'appuient sur les polycopiés distribués aux étudiants : on peut remarquer que l'enseignant détaille rarement ce qui figure dans ces derniers.

Le premier chapitre consiste en une présentation générale qui porte essentiellement sur la représentation algébrique des équations différentielles. La rubrique intitulée "classification des équations différentielles" qui suit cette présentation a pour but de présenter les différents types d'équations différentielles (équations différentielles linéaires, non-linéaires et autres types d'équations différentielles). Suite à cette présentation rapide des types d'équations différentielles, l'enseignant annonce le contenu général du cours :

"On va traiter uniquement celles qu'on sait intégrer c'est-à-dire donner une formule pour la solution". (CM-1<sup>1</sup>)

Conformément aux objectifs fixés, dès la première séance consacrée au deuxième chapitre, on se restreint à l'étude des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre et l'enseignement porte intégralement sur les méthodes de résolution de ces dernières.

<sup>1</sup> Nous utilisons chaque fois, la notation CM-i pour montrer ce qui est écrit par l'enseignant pendant ième séance au tableau.

## 1.2. Analyse praxéologique des exercices proposés

Restant fidèle à la méthode d'analyse utilisée dans le chapitre précédent, (Chapitre C<sub>1</sub>) nous définissons les organisations praxéologiques observées dans cette institution. Notons que, pour recenser les types de tâches relatifs à l'objet équation différentielle nous faisons appel aux exercices proposés au sein des feuilles de travaux dirigés<sup>1</sup>, et pour décrire les techniques permettant de les exécuter et les technologies associées à ces dernières, nous faisons appel aux exercices résolus lors des cours magistraux et/ou lors des séances des travaux dirigés.

Il existe toutefois des exercices qui ne peuvent être classés dans le cadre de l'analyse praxéologique : nous avons choisi de les écarter de notre étude. Ce sont les exercices des deux types suivants :

- > exercices très courts dont la réponse ne porte pas exactement sur des techniques précises :
  - Est-ce qu'un calcul de primitives est un cas particulier d'intégration d'une équation différentielle ?
  - Oui    Non
  
- > exercices qui demandent de compléter une phrase donnée :
  - Complétez : la **solution générale** de l'équation (E) l'équation  $y''(x) + py'(x) + qy(x) = g(x)$  sur un intervalle  $I$  où  $g$  est continue, où  $p$  et  $q$  sont des constantes réelles est .....

### a. Détermination des différents types de tâches

Au sein des feuilles de travaux dirigés, nous avons recensé 117 tâches dans 53 exercices. Ces tâches nous ont permis de détecter 12 types différents que nous décrivons ci-dessous tout en mettant en évidence la répartition générale qui en découle. Notons que, afin de repérer les types de tâches trouvés à la fois dans les deux niveaux (terminale et première année de DEUG), nous utiliserons les mêmes codages dans les deux tableaux (Tableau 1 cité dans paragraphe 1.1 et le suivant (Tableau 7)) et pour la présentation des types de tâches similaires. Ainsi le fait d'avoir défini 8 types de tâches au niveau de terminale nous conduit à écrire les nouveaux types de tâches apparaissant en DEUG à partir du codage T<sub>9</sub>. (Tableau 7 représente le taux d'apparition de chaque type de tâches rencontrés en DEUG).

---

<sup>1</sup> Pour une illustration cf. Annexes C

Types de tâches	Taux d'apparition
T <sub>1</sub> : Trouver la famille des fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	37,6%
T <sub>2</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du premier ordre	2,6%
T <sub>3</sub> : Trouver la famille des fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre	25,7%
T <sub>5</sub> : Vérifier si une famille de fonctions est bien la solution d'une équation différentielle	1,7%
T <sub>6</sub> : Tracer la courbe solution d'une équation différentielle	0,8% 1 tâche
T <sub>8</sub> : Résoudre un problème décrit par une équation différentielle	6,8%
T <sub>9</sub> : Démontrer que deux solutions données d'une équation différentielle linéaire du second ordre sont indépendantes	3,4%
T <sub>10</sub> : Choisir le champ des vecteurs d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	3,4%
T <sub>11</sub> : Trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle dont le portrait de phase est connu	1,7%
T <sub>12</sub> : Etudier le comportement de la fonction solution d'une équation différentielle dont le champ des vecteurs tangents est connu	3,4%
T <sub>13</sub> : Trouver une équation différentielle dont la famille des solutions est connue	5,2%
T <sub>14</sub> : Préciser la nature d'une équation différentielle	7,7%

Tableau 7 : Répartition générale des différents types de tâches rencontrés en DEUG Sma

La comparaison avec le premier tableau (Tableau 1) d'analyse des types de tâches rencontrées dans l'institution mathématique en terminale montre l'absence, en DEUG, des 2 types de tâches T<sub>4</sub> (Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du second ordre) et T<sub>7</sub> (Etudier un problème conduisant à une équation différentielle). On note également l'apparition de 6 nouveaux types de tâches (T<sub>9</sub> à T<sub>14</sub>).

A partir de ce tableau, on observe que les types de tâches les plus fréquents (71%) sont relatifs à la résolution algébrique d'une équation différentielle linéaire (T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>5</sub> et T<sub>9</sub>) et que les types de tâches (T<sub>6</sub>, T<sub>10</sub>, T<sub>11</sub>, T<sub>12</sub>) relatifs aux différents registres sémiotiques (symbolique et graphique) au sens de Duval (1993), viennent en deuxième lieu (9,3%). Chacun des autres types de tâches (T<sub>8</sub>, T<sub>13</sub>, T<sub>14</sub>), dont T<sub>8</sub> auquel nous nous intéressons particulièrement, sont minoritaires.



## b. Détermination des praxéologies associés

Pour mieux exploiter les résultats donnés dans le tableau précédent, il convient d'analyser les types de tâches tout en déterminant les techniques permettant de les accomplir et les éléments de la technologie justifiant ces techniques.

Rappelons que pour mener une telle analyse nous nous focalisons particulièrement sur les exercices résolus en cours magistraux ou en séances des travaux dirigés. Le tableau (Tableau 8) suivant montre quels types de tâches sont traités dans les exercices résolus et résume l'existence ou éventuellement l'absence des techniques et des technologies associées à ces types de tâches. La justification de ce tableau sera faite dans les pages qui suivent.

T <sub>i</sub>	Technique		Technologie	
	CM	TD	CM	TD
T <sub>1</sub>	X	X	X	∅
T <sub>2</sub>	X	X	∅	∅
T <sub>3</sub>	X	X	X	∅
T <sub>5</sub>	X	∅	∅	∅
T <sub>6</sub>	X	X	∅	∅
T <sub>8</sub>	X	X	∅	∅
T <sub>9</sub>	X	∅	X	∅
T <sub>10</sub>	X	X	∅	∅
T <sub>11</sub>	X	X	X	∅
T <sub>12</sub>	X	∅	∅	∅
T <sub>13</sub>	∅	X	∅	∅
T <sub>14</sub>	X	X	X	∅

Tableau 8 : Présentation des techniques et des technologies associées aux différents types de tâches

Légende :

CM : Cours magistraux

TD : Travaux dirigés

X : Présente

∅ : Absente

Nous présentons maintenant notre analyse pour chacun de ces types de tâches :

⇒ T<sub>1</sub> : Trouver la famille de fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre du type  $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$  (E).

Ce type de tâches se présente sous deux formes : une première nécessite de résoudre tout simplement les équations différentielles proposées (sur  $\mathfrak{R}$ ), alors que la deuxième nécessite de les résoudre sur certains intervalles donnés ( $I_1, I_2, \dots$ ). Nous nous contenterons d'analyser les techniques et les technologies associées à ce type de tâche sans évoquer les cas particuliers.

La technique qui permet de résoudre ce type d'équations différentielles est donnée par un théorème selon lequel la solution de ce type d'équations différentielles est la somme de la solution de l'équation homogène associée ( $E_0$ ) et d'une solution particulière ( $E$ ) de l'équation différentielle étudiée.

Notons ci-dessous le discours de l'enseignant expliquant cette technique :

"1° Soit  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de ( $E$ ) sur  $I$

$$ay_1' + by_1 = g \quad (\text{égalité vraie pour tout } x \text{ de } I)$$

$$ay_2' + by_2 = g$$

$$\Rightarrow a(y_1' - y_2') + b(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 \text{ est solution de } (E_0)$$

En notant,  $S_0 = \{\text{solutions de } (E_0) \text{ sur } I\}$  et  $S = \{\text{solutions de } (E) \text{ sur } I\}$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \in S \\ y_2 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 - y_2 \in S_0$$

soit  $y_p$  une solution de ( $E$ ) (s'il en existe une)

$$\text{soit } y_1 \in S, y_1 = \underbrace{y_1 - y_p}_{\in S_0} + y_p \text{ d'où } S \subset \{y_p + y_0 / y_0 \in S_0\} \text{ (CM-2)}$$

La vérification du résultat proposée par l'enseignant est la suivante :

"2° Montrons l'inclusion réciproque :

soit une fonction de la forme  $y_p + y_0$  avec

$$ay_0' + by_0 = 0 \quad (E_0) \quad \Rightarrow a(y_p' + y_0') + b(y_p + y_0) = g \Rightarrow y_p + y_0$$

$$ay_p' + by_p = g \quad (E)$$

$$\text{Conclusion finale: } S = \{y_p + y_0 / y_0 \in S_0\} = y_p + S_0 \text{ (CM-2)}$$

L'ensemble de ces discours justifie explicitement la technique proposée afin de résoudre ce type de tâches. Notons que cette technique consiste en deux sous-types de tâches qui s'inscrivent chacun dans les organisations praxéologiques  $T_{1a}$ : intégrer  $E_0$  (l'équation homogène) associée à  $E$  (l'équation différentielle à résoudre) et  $T_{1b}$ : trouver une solution particulière de  $E$ .

*Le premier sous type de tâches* peut être exécuté à l'aide d'une simple technique qui amène l'étudiant à savoir que les fonctions solutions vérifiant ce type d'équation différentielle homogène doivent se présenter de la façon suivante :  $x \mapsto C.e^{\alpha x}$

On observe que cette technique a été justifiée de deux façons.

Une première est exposée dans le discours de l'enseignant correspondant à la recherche des fonctions solutions satisfaisant les équations différentielles linéaires du premier ordre sans second membre. Ce discours permet en effet d'observer chaque étape de la résolution algébrique et ainsi d'arriver à la conclusion que la famille des solutions de ce type d'équations différentielles doit être sous la forme:  $x \mapsto C.e^x$ . Une partie de ce discours est présentée ci-dessous :

"Recherche des solutions de  $(E_0) y' = y$

Soit  $y$  une solution de  $(E_0)$  qui ne s'annule pas sur  $\mathfrak{R}$

$$\forall x \in \mathfrak{R} \quad y'(x) = y(x)$$

$$\forall x \in \mathfrak{R} \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = 1 \quad (\text{car } \forall x \in \mathfrak{R} \quad y(x) \neq 0)$$

$$\exists k \in \mathfrak{R} \quad \forall x \in \mathfrak{R} \quad \ln|y(x)| = x + k$$

$$\exists k \in \mathfrak{R} \quad \forall x \in \mathfrak{R} \quad |y(x)| = e^{x+k}$$

$$\forall x \in \mathfrak{R} \quad (y(x) = e^{x+k} \text{ ou } y(x) = -e^{x+k})$$

Les solutions de  $(E_0) y' = y$  qui ne s'annulent pas sur  $\mathfrak{R}$  sont exactement les fonctions  $x \mapsto C.e^x$ . (CM-2)

Dans cette solution on suppose que la lettre  $C$  représente une constante. Cette supposition a été vérifiée explicitement:

"Soit  $S_0$  {solutions de  $E_0$  sur  $\mathfrak{R}$  }

On a vu :  $\{x \mapsto C.e^{ax} / C \in \mathfrak{R}\} \subset S_0$

Pour montrer l'égalité il reste à montrer l'inclusion réciproque : soit  $y$  une solution quelconque de  $(E_0)$ .

On va montrer que :  $\exists C \in \mathfrak{R} \quad \forall x \in \mathfrak{R} \quad y(x) = C.e^x \Rightarrow C.e^x \Rightarrow C = y(x).e^{-x}$ .

Notons  $C(x) = y(x).e^{-x}$  (changement de fonction inconnue)

[...]  $\forall x \in \mathfrak{R} \quad C'(x) = 0$ ". (CM-2)

L'enseignant généralise ce résultat pour le même type d'équations différentielles en notant que :

"Plus généralement ; l'équation différentielle  $(E_0) y'(x) = \alpha y(x)$  (avec  $\alpha \in \mathfrak{R}$ ) admet pour ensemble de solution sur  $\mathfrak{R} \quad S_0 = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \mapsto C.e^{\alpha x} / C \in \mathfrak{R}\}$ " (CM- 2)

Une deuxième façon de justifier cette technique est observée lors de l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre. Cette fois-ci l'enseignant fait appel aux primitives qui permettent de décrire la forme de la famille de solutions de l'équation différentielle homogène associée à cette équation. L'enseignant attire l'attention des étudiants sur les coefficients variables apparaissant dans l'équation différentielle à résoudre. Citons un extrait du discours de l'enseignant :

" $(E_0) \quad \forall x \in I \quad a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$  ( $a, b$  continues sur  $I$  et  $a$  s'annule pas sur  $I$ )

Recherche des solutions de  $(E_0)$  qui ne s'annulent jamais sur  $I$ .

$$y \text{ solution de } (E_0) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad y'(x) = -\frac{b(x)}{a(x)} y(x)$$

$$(\text{Comme } \forall x \in I \quad y(x) \neq 0) \Leftrightarrow \forall x \in I \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{b(x)}{a(x)} \quad (\text{on peut prendre la primitive)". (CM-3)$$

Ce discours montre que les solutions d'une telle équation différentielle peuvent s'écrire sous la forme suivante :  $S_0 = \{C.e^{-\varphi} / C \in \mathfrak{R}\}$   $\varphi$  est une primitive de  $-\frac{b}{a}$  sur  $I$ .

Le deuxième sous-type de tâche, "trouver une solution particulière de  $E$ ", est exécuté en employant deux techniques : la première porte sur la recherche d'une solution qui peut avoir la même forme que le second membre de l'équation différentielle proposée et la deuxième passe par l'application de la méthode de variation de la constante.

La première technique conduit à examiner tout d'abord si l'équation différentielle étudiée admet une solution particulière de la même forme que le second membre de cette dernière. Pour rendre accessible cette méthode, l'enseignant développe une étude concernant quelques exemples dont certains admettent une solution particulière constante, alors que d'autres n'en admettent pas. L'existence de ces dernières conduit l'étude à l'interprétation du "principe de superposition". L'application de ce principe nécessite de trouver deux ou plusieurs solutions particulières, puis de les additionner en vue d'aboutir à une seule. Pour montrer la validité de cette technique l'enseignant propose la discussion suivante :

$$\begin{aligned} &\text{"Une solution particulière } y_P \text{ de } (E) \text{ est : } \alpha_1 y_{P_1} + \alpha_2 y_{P_2} \\ &\text{Où } \alpha y_{P_1} \text{ est une solution particulière de } (E_1) : ay' + by = g_1 \\ &\quad \alpha y_{P_2} \text{ est une solution particulière de } (E_2) : ay' + by = g_2 \\ &\text{en effet ; } \alpha_1 \cdot (ay'_{P_1} + by_{P_1}) = g_1 \cdot \alpha_1 \\ &\quad \alpha_2 \cdot (ay'_{P_2} + by_{P_2}) = g_2 \cdot \alpha_2 \end{aligned}$$

---


$$a(\alpha_1 y'_{P_1} + \alpha_2 y'_{P_2}) + (\alpha_1 y_{P_1} + \alpha_2 y_{P_2}) = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$$

donc  $\alpha y_{P_1} + \alpha y_{P_2}$  est la solution de  $(E)$  ". (CM-3)

La deuxième technique, énoncée comme la méthode la plus sûre pour trouver une solution particulière, porte sur l'application de la méthode de variation de la constante. Cette technique nécessite une bonne maîtrise du calcul intégral et/ou de la recherche des primitives. Bien qu'elle soit appliquée à certaines équations différentielles, aucun discours ne l'a justifiée.

$\Rightarrow T_2$  : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle

Notons que l'étude de ce type de tâches concerne à la fois celles qui portent sur un problème de Cauchy et celles qui se centrent sur la recherche d'une seule solution d'une équation différentielle ordinaire. En effet l'exécution de ce type de tâches nécessite strictement de trouver la famille de solutions puis d'appliquer les conditions initiales en vue d'aboutir à une réponse complète. A ce propos le type de tâche  $T_1$  devient un des sous-types de tâche qui constituent la technique nécessaire à  $T_2$ .

Ainsi après avoir trouvé la famille de fonctions solutions de l'équation différentielle proposée, on terminera cette tâche par un simple calcul mathématique.

⇒ T<sub>3</sub> : Trouver la famille de fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre de type :  $y''(x) + py'(x) + qy(x) = g(x)$

Nous n'avons observé qu'une technique permettant d'accomplir ce type de tâches ; celle-ci est présentée par l'enseignant de la façon suivante :

" $\forall x \in I$   $y''(x) + py'(x) + qy(x) = g(x)$  (E) équation complète. Avec  $(p, q) \in \mathfrak{R}^2$  et  $(g)$  continue sur  $I$ .

Corollaire : la solution générale de (E) sur  $I$  = la solution générale de  $(E_0)$  sur  $I$  + une solution particulière de (E) sur  $I$ ". (CM-6)

Cette technique est vérifiée par un discours identique à celui qui a servi à l'introduction de ce corollaire lors de l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre. Notons qu'elle se ramène à deux sous-types de tâches : T<sub>3a</sub> : "Trouver la solution générale de l'équation homogène associée  $(E_0)$  " et "T<sub>3b</sub> : trouver une solution particulière de (E) ". Nous détaillons à présent chacun de ces sous-types de tâches tout en mettant en scène les éventuelles techniques évoquées et les éléments technologiques associés.

Une seule technique permet de résoudre *le premier sous type de tâche*. Elle nécessite de connaître trois formes de solutions de l'équation homogène  $(E_0)$  que l'enseignant présente de la façon suivante :

"→  $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$  avec  $\Delta = p^2 - 4q > 0$

$r^2 + pr + q = 0$  le trinôme du second degré admet deux racines réelles simples,

$\{x \in \mathfrak{R} \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} / (C_1, C_2) \in \mathfrak{R}^2\} \subset S_0$

→  $\Delta = 0$ ,  $r_0$  racine double de  $r^2 + pr + q = 0$

l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  sur  $\mathfrak{R} = \{x \in \mathfrak{R} \mapsto (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x} / (C_1, C_2) \in \mathfrak{R}^2\}$

→  $\Delta < 0$ ,  $\alpha + i\beta$  les racines complexes de  $r^2 + pr + q = 0$

$S_0 = \{x \in \mathfrak{R} \mapsto e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) / (C_1, C_2) \in \mathfrak{R}^2\}$ " (CM-6)

Chacune de ces formes est discutée d'une façon détaillée en vue de justifier et de démontrer que les solutions données vérifient bien l'équation différentielle correspondante. Notons que, lors de la présentation des solutions d'une équation différentielle pour laquelle  $\Delta = p^2 - 4q > 0$ , l'enseignant explique tout d'abord l'utilisation et l'obtention de l'équation caractéristique en faisant référence à la forme des solutions des équations différentielles linéaires du premier ordre, telle que  $y' = ay$ . Ceci implique de rechercher les solutions de  $(E_0)$  sous la forme d'une fonction exponentielle. La raison expliquant une telle recherche a été résumée par l'enseignant de la façon suivante :

"La fonction exponentielle est infiniment dérivable sur  $\mathfrak{R}$ ". (CM-6)

On constate qu'une grande partie de discours de l'enseignant porte, à ce propos, sur la démonstration de la recherche des fonctions solutions vérifiant ce type d'équations différentielles. Pour cela l'enseignant fait appel à la méthode de changement de fonction inconnue qui lui permettra de retrouver la forme de l'ensemble des solutions de ce type d'équations différentielles (pour le cas où  $\Delta = p^2 - 4q > 0$ ). Pour réaliser cette démonstration il démarre de la façon suivante :

"Détermination de toutes les solutions de ( $E_0$ )

$$u_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$$

changement de fonction inconnue :  $y(x) = z(x) \cdot e^{r_1 x}$ . (CM-6)

Ce changement de fonction -  $y(x)$  par  $z(x) \cdot e^{r_1 x}$  - dans l'équation différentielle ( $E_0$ ) permet de travailler sur une autre équation différentielle du type  $z''(x) + z'(x)[2r_1 + p] = 0$ . Un deuxième changement de fonction -  $z'(x)$  par  $\varphi(x)$  -, permet alors de trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre. En résolvant cette dernière à l'aide des méthodes disponibles, l'enseignant arrive à montrer que l'ensemble des fonctions doit s'écrire de la façon suivante :  $S_0 = \{x \in \mathfrak{R} \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} / (C_1, C_2) \in \mathfrak{R}^2\}$ .

Notons que la résolution de ce type d'équations différentielles pour les deux autres cas ( $\Delta = 0$  et  $\Delta < 0$ ) est faite en se basant sur le travail résumé ci-dessus.

Nous avons énuméré deux techniques permettant de résoudre *le deuxième sous type de tâche*, trouver une solution particulière de ( $E$ ): La première, la plus souvent utilisée lors de la résolution des exercices, nécessite d'analyser la forme du second membre de l'équation différentielle proposée. Résumons cette technique en nous appuyant sur l'interprétation de l'enseignant responsable du cours:

"  $\rightarrow$  cas où second membre est un polynôme

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = A(x) \text{ avec } A \text{ polynôme}$$

admet une solution particulière de type polynôme de même degré que  $A$  dès que  $q \neq 0$ " (CM-8)

Après avoir montré aux étudiants la forme de la solution particulière pour les cas où  $q = 0$  ou  $q = 0 = p$  à l'aide des exemples choisis, l'enseignant fournit le tableau suivant :

"

$q \neq 0, r^2 + pr + q = 0$ (0 n'est pas racine)	Polynôme de même degré que $A$
$q = 0$ et $p \neq 0, r^2 + pr = 0$ (0 racine simple)	$x$ . polynôme de même degré que $A$
$q = 0 = p, r^2 = 0$ (0 racine double)	$x^2$ . polynôme de même degré que $A$

"(CM- 8)

Il s'agit là des techniques qui permettent aux étudiants de trouver facilement une solution particulière de l'équation différentielle. En dehors des exemples donnés, aucun discours n'explique l'utilisation de l'ensemble de ces techniques.

L'application de la méthode de variation des constantes est la deuxième technique permettant de trouver une solution particulière de ce type d'équations différentielles. Cette technique est évoquée, sans entrer dans les détails de la façon suivante :

"Il existe une méthode de variation des constantes :

$$y(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$$

avec  $0 = C_1'(x)u_1(x) + C_2'(x)u_2(x)$ " (CM-8)

⇒ T<sub>5</sub> : Vérifier si une famille des fonctions donnée est bien la solution d'une équation différentielle connue

Nous n'avons relevé qu'une seule technique permettant d'exécuter ce type de tâches. Cette technique nécessite de dériver la fonction donnée selon l'ordre de l'équation différentielle proposée et de l'injecter dans l'équation différentielle en question.

⇒ T<sub>6</sub> : Tracer la courbe solution d'une équation différentielle

La technique nécessaire pour accomplir ce type de tâche, qui peut être qualifiée de qualitative, nécessite tout d'abord de calculer les valeurs initiales et les valeurs limites puis de faire appel à la forme d'une fonction de référence (par exemple la fonction exponentielle). Nous pensons que, le fait de s'intéresser à une technique familière aux étudiants peut expliquer l'absence de discours détaillant cette façon de faire.

⇒ T<sub>8</sub> : Résoudre un problème (issu d'autres disciplines) décrit par une équation différentielle

Toutes les tâches se classant dans cette catégorie portent sur les équations différentielles linéaires du premier ordre. On constate par ailleurs que ces tâches portent toujours sur une modélisation passive où l'étudiant doit uniquement remplacer les valeurs correspondant à une situation réelle dans une équation différentielle donnée. L'exercice suivant représente explicitement ce type de tâches :

"Un corps radioactif se désintègre à une vitesse proportionnelle à la quantité  $N(t)$  de matière présente à l'instant  $t$ , c'est-à-dire suivant la loi :  $\frac{dN}{dt}(t) = -kN(t)$  avec une constante d'intégration  $k > 0$ .

Ecrivez  $N(t)$  en fonction de  $t$ ,  $k$  et de la quantité  $N_0$  de matière à l'instant initial  $t_0$ ".

Bien que ce genre d'exercice ne se distingue pas trop d'un exercice classique de mathématiques, on note une nette différence dans l'étude qui suit la résolution de l'équation différentielle. En effet, ce type d'exercice nécessite de trouver (à un instant donné), le statut du système étudié. La deuxième partie de l'exercice cité ci-dessus sera utile pour mieux expliquer ce point:

"Sachant qu'en 1970 (respectivement en 1980), la radioactivité est la moitié (respectivement le quart) de ce qu'elle était au départ, déterminez le temps  $T$  de demi-vie de ce corps, défini par

$$\forall x \in \mathfrak{R} \quad N(t+T) = \frac{N(t)}{2}$$

Donnez la date  $t_0$  du début de la désintégration de ce corps".

La résolution de ce type de tâches implique exclusivement de trouver la forme des fonctions solutions de l'équation différentielle donnée et d'appliquer les conditions initiales pour aboutir à la réponse finale.

⇒T<sub>9</sub> : Démontrer que deux solutions données d'une équation différentielle linéaire du second ordre sont indépendantes

Les techniques permettant de résoudre ce type de tâches font partie de la technologie justifiant les techniques utilisées afin de résoudre les tâches du type T<sub>3</sub>. Celles-ci nécessitent en effet une étude plus approfondie qu'une simple résolution des équations différentielles du type :  $y''(x) + py'(x) + qy(x) = g(x)$ .

Remarquons qu'une partie des exercices, notés comme facultatifs et proposés pour une meilleure compréhension du cours, conduisent les étudiants à se pencher sur les démonstrations faites lors de l'interprétation des caractéristiques de la famille des solutions générales de ce type d'équations différentielles. Pour mieux comprendre ce type de tâches, illustrons par l'exemple suivant:

"13. Fonctions linéairement indépendantes

Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux nombres réels distincts.

En revenant à la définition de l'indépendance, montrez que les fonctions

$$u_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$$

$$u_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$$

sont linéairement indépendantes sur  $\mathfrak{R}$ ."

La technique qui permet d'exécuter cette tâche se trouve dans la partie du cours où l'enseignant cherche à montrer la "famille génératrice de  $S_0$ " et "l'indépendance de la famille  $\{u_1, u_2\}$ ", partie intitulée "un peu d'algèbre linéaire".

La résolution d'un tel type de tâches nécessite de réaliser une série de calculs algébriques comme dans ce qui suit :

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0$$

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{R} C_1(x)u_1 + C_2(x)u_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{R} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{R} C_1 + C_2 e^{(r_2 - r_1)x} = 0 (*)$$

par dérivation on trouve  $C_2 = 0$  puis en revenant à l'équation (\*),  $C_1 = 0$

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0 \Rightarrow (C_1, C_2) = (0, 0)$$

Définition : la famille  $\{u_1, u_2\}$  est dite libre ( $u_1, u_2$  sont linéairement indépendantes)

$$\text{Si } C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

[  $u_1, u_2$  ne sont pas proportionnelles]" (CM-6)

A partir de cet extrait, on peut noter que technique et technologie apparaissent comme imbriquées.

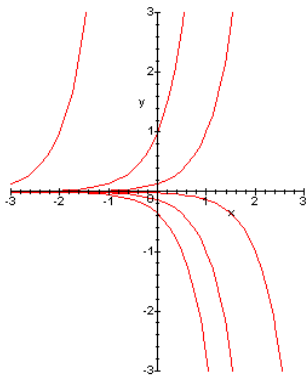
⇒ T<sub>10</sub> : Choisir le champ des vecteurs d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Une seule technique graphique est introduite en vue d'accomplir ce type de tâches. Cette technique se centre sur la définition de la valeur de la dérivée. Nous citons ci-dessous un extrait emprunté au discours de l'enseignant du cours magistral. Ce discours, qui a été recueilli lors de la recherche de la famille des fonctions solutions d'une équation différentielle du type :  $y' = \alpha y$ , porte sur trois figures

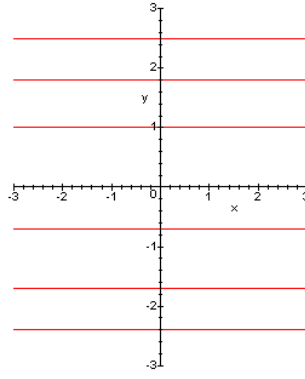


(présentées ci-dessous) qui représentant la forme du champs des vecteurs tangents de l'équation différentielle en question selon le signe de  $\alpha$ .

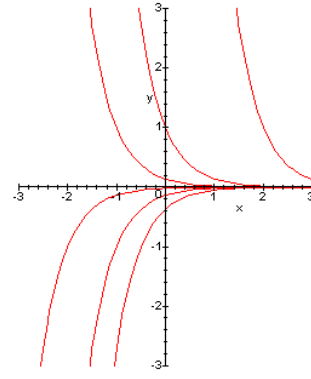
"...l'équation différentielle (E<sub>0</sub>)  $y' = \alpha y$  (avec  $\alpha \in \mathfrak{R}$ ) admet pour l'ensemble de solution sur  $\mathfrak{R}$   
 $S_0 = \{x \in \mathfrak{R} \mapsto C.e^{\alpha x} / C \in \mathfrak{R}\}$



$\alpha > 0$



$\alpha = 0$



$\alpha < 0$

"(CM-1)

Notons que les éléments technologiques qui peuvent justifier cette technique sont totalement absents.

$\Rightarrow T_{11}$  : Trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle dont le portrait de phase est connu

Ce type de tâches conduit l'étudiant à trouver la forme de la solution générale d'une équation différentielle. Pour résoudre une telle tâche il doit faire appel au discours de l'enseignant à propos de la recherche de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène. En effet ce discours donne la possibilité de conclure que, si toutes les solutions d'une équation différentielle ont la même forme, la représentation algébrique de l'ensemble de ces solutions peut être obtenue à partir d'une seule fonction multipliée par une constante  $C$ .

$\Rightarrow T_{12}$  : Etudier le comportement de la fonction solution d'une équation différentielle

Ce type de tâches est proposé en général après avoir demandé de trouver le champ des vecteurs tangents associé à une équation différentielle. Deux techniques peuvent être utilisées:

- Une technique graphique qui passe par la lecture du graphique qui représente le champ des vecteurs tangents associé à l'équation différentielle.
- Une technique algébrique qui nécessite de calculer la valeur limite de la fonction solution de l'équation différentielle proposée.

Aucun discours de l'enseignant n'a justifié ces deux techniques d'une façon détaillée.

⇒ T<sub>13</sub> : Trouver une équation différentielle dont la famille des solutions est connue

Pour concrétiser ce type de tâches, citons un exemple:

"Trouvez une équation différentielle dont l'ensemble des solutions sur  $\mathfrak{R}$  soit exactement

$$\{x \mapsto Ce^{\frac{1}{x^2+1}} / C \in \mathfrak{R}\}."$$

Une seule technique permet de résoudre ce type de tâche. Elle nécessite d'exprimer la(les) constante(s) en fonction de  $y$  (la fonction) et de  $x$  (la variable indépendante), puis de la(les) dériver en vue d'aboutir à l'équation différentielle cherchée : il s'agit de l'étude inverse de la résolution algébrique d'une équation différentielle.

⇒ T<sub>14</sub> : Préciser la nature d'une équation différentielle

Ce type de tâches est le seul qui nécessite de travailler sur les équations différentielles non linéaires. En effet, 55% des tâches proposées portent sur les équations différentielles linéaires et 45% sont centrées sur les équations différentielles non-linéaires.

En s'appuyant sur les exercices résolus portant sur ce type de tâches, on observe que la technique qui lui est associée se ramène aux deux sous-types de tâches suivants T<sub>14a</sub> : Déterminer si une équation différentielle donnée est linéaire ou non et T<sub>14b</sub> : Préciser l'ordre de l'équation différentielle proposée. Évoquons ci-dessous les techniques disponibles pour accomplir ces sous-types de tâches :

→ T<sub>14a</sub> : Déterminer si une équation différentielle donnée est linéaire ou non

Il n'existe qu'une seule technique associée ; on peut la décrire de la façon suivante :

" Une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  est une équation différentielle de la forme :

$$\forall x \in I a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0y(x) = \varphi(x) ". \text{ (CM-1)}$$

On constate que cette technique porte sur la forme générale des équations différentielles linéaires. Nous avons constaté la présence d'exemples visant à attribuer un rôle opérationnel à cette forme. Voici quelques exemples donnés par l'enseignant du cours :

"

$$\frac{dP}{dt}(t) = \gamma(P_\infty - P(t))P(t)$$

$$\frac{dP}{dt}(t) = \gamma P_\infty - \gamma P(t)^2$$

Pas linéaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \sin \theta(t) = 0 " \text{ (CM-1)}$$

Pas linéaire

On observe que le concept de linéarité n'est pas détaillé explicitement dans le cours. Ainsi l'étudiant doit connaître par cœur la forme des équations différentielles linéaires pour pouvoir répondre à ce type

d'exercice. Ceci nous permet de caractériser l'enseignement réalisé à ce propos comme un enseignement ostensif (Bosch et Chevillard, 1999).

→ T<sub>14b</sub> : Préciser l'ordre d'une équation différentielle

Nous n'avons identifié qu'une seule technique permettant d'accomplir ce sous-type de tâches. Cette technique nécessite de connaître la définition suivante (tirée de discours de l'enseignant) :

"L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre le plus grand des dérivées successives de  $y$  (fonction inconnue) qui apparaissent dans l'équation" (CM-1).

L'enseignant donne quelques exemples, sur les équations différentielles linéaires et non linéaires, pour rendre accessible cette technique. En voici deux :

$$" m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = -kx(t) \text{ ordre } 2$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2}(t) + \sin \theta(t) = 0 \text{ ordre } 2 " \text{ (CM-1).}$$

On observe que ce type de tâches est traité d'une façon générale en vue de présenter aux étudiants l'ensemble de la théorie des équations différentielles.

### 1.3. Analyse des séances des travaux dirigés

Précisons tout d'abord que nous n'avons pas fait le choix d'analyser en détail toutes les séances de travaux dirigés mais que nous voulons simplement mettre en évidence les différences entre les choix d'exercices travaillés, autrement dit des tâches réalisées.

Notons que chaque enseignant (qui a la charge d'un ou deux groupes d'étudiants) a une méthode propre pour diriger ses séances et que cette méthode joue probablement un rôle important dans la formation des rapports personnels des étudiants. C'est la raison pour laquelle nous analysons les groupes dirigés par le même enseignant comme une seule groupe d'étudiants. Nous n'avons donc observé que cinq groupes d'étudiants, dirigés au total par trois enseignants. Chacun de ces enseignants avait des choix différents à propos de déroulement des séances et des exercices sélectionnés. Dans ce qui suit, nous chercherons à connaître, pour chaque groupe d'étudiants, le taux d'accomplissement de chaque type de tâches répertorié ci-dessus et la conformité entre les techniques prônées par le responsable du module et celles mobilisées par ces enseignants.

Pour cela, nous avons effectué, durant l'enseignement des équations différentielles, une observation des séances des travaux dirigés de trois Enseignants de Mathématiques pour lesquels nous utilisons les codages suivant dans cette analyse : EM1, EM2 et EM3.

En prenant en compte la problématique de notre recherche, résumons ci-dessous l'ensemble des questions qui guide notre analyse des pratiques des enseignants :

Quel est le taux de traitement de chacun des types des tâches notés dans notre tableau d'analyse ?  
Quelles sont les techniques associées à ces tâches ? Quelles sont les contraintes et les conditions pesant sur le choix méthodologique ?

a. Détermination des différents types de tâches traités

Le Tableau 9 ci-dessous résume le taux de répétition de chacun de type de tâches selon les enseignants responsables des travaux dirigés :

Types de tâches	EM1	EM2	EM3	Taux de proposition des types de tâches
T <sub>1</sub> : Trouver la famille des fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	35,2%	33,3%	23%	37,6%
T <sub>2</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du premier ordre	3,3%	4,7%	14,2%	2,6%
T <sub>3</sub> : Trouver la famille des fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre	10,5%	9,5%	0	25,7%
T <sub>5</sub> : Vérifier si une famille de fonctions est bien la solution d'une équation différentielle	0	0	0	1,7%
T <sub>6</sub> : Tracer la courbe solution d'une équation différentielle	2,7%	0	14,2%	0,8% 1 tâche
T <sub>8</sub> : Résoudre un problème décrit par une équation différentielle	5,4%	9,5%	5,8%	6,8%
T <sub>9</sub> : Démontrer que deux solutions données d'une équation différentielle linéaires du second ordre sont indépendantes	0	0	0	3,4%
T <sub>10</sub> : Choisir le champ de vecteurs d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	10,5%	7,2%	8,5%	3,4%
T <sub>11</sub> : Trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle dont le portrait de phase est connu	8,1%	7,2%	2,8%	1,7%
T <sub>12</sub> : Etudier le comportement de la fonction solution d'une équation différentielle dont le champ des vecteurs tangents est connu	0	0	0	3,4%
T <sub>13</sub> : Trouver une équation différentielle dont la famille des solutions est connue	0	7,2%	5,8%	5,2%
T <sub>14</sub> : Préciser la nature d'une équation différentielle	24,3%	21,4%	25,7%	7,7%
Nombres de tâches	37	42	35	117

Tableau 9 : Répartition des types de tâches observés en fonction des enseignants

L'un des premiers résultats à tirer de ce tableau porte sur l'accomplissement majoritaire de deux types de tâches (T<sub>1</sub> et T<sub>14</sub>) par les trois enseignants. A ce propos on note, à la fois, une similitude forte entre le taux de proposition du type de tâche T<sub>1</sub> et son accomplissement par chaque enseignant et une contradiction à propos de T<sub>14</sub>. En effet ce dernier type de tâches, qui est l'un de ceux minoritairement proposés dans les feuilles de travaux dirigés, apparaît comme le deuxième type de tâches le plus souvent proposé par les enseignants. Cette contradiction peut s'expliquer par la diminution du nombre total de tâches prises en charge par les enseignants par rapport au nombre de tâches proposées dans les feuilles de travaux dirigés.

Un deuxième résultat est la non prise en compte de trois types de tâches (T<sub>5</sub>, T<sub>9</sub>, T<sub>12</sub>) par les trois enseignants.

Un troisième résultat montre que le premier groupe des types de tâches (T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>5</sub> et T<sub>9</sub>), précédemment décrit comme relatif à la résolution algébrique d'une équation différentielle, est ici encore majoritaire dans les pratiques des enseignants.

### b. Détermination des praxéologies associés

Analysons dans ce paragraphe le degré de conformité entre les techniques utilisées par chacun de ces trois enseignants, lors de l'exécution des types de tâches énumérés ci-dessus, et celles étudiées pendant les cours magistraux.

⇒ Analyse des caractéristiques de séances dirigées par EM1

Notre tableau récapitulatif (Tableau 9) cité ci-dessus montre que 8 types de tâches issus des feuilles de travaux dirigés sont traités par cet enseignant. Ceci met l'accent sur le fait que les exercices choisis s'appuient intégralement sur les fiches de travaux dirigés distribués par le responsable du module.

Malgré une conformité générale observée au niveau des techniques mobilisées afin d'accomplir les types de tâches traités, on note certaines différences.

Première différence lors de la recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire (du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>nd</sup> ordre) l'enseignant, préfère, à chaque fois, proposer une forme de fonctions proche de la solution cherchée. Pour mieux expliquer ce propos, citons un extrait comportant un exercice et les conseils de cet enseignant à propos de la résolution de ce dernier :

L'exercice proposé :

"8. Intégrez les équations différentielles suivantes sur  $\mathfrak{R}$

a)  $y'(x) + y(x) = x^2 + 5$

b)  $y'(x) + y(x) = e^{3x}$

c)  $y'(x) + y(x) = e^{-x}$  "

Discours de l'enseignant :

"a) substituer  $y = a + bx + cx^2$

b) substituer  $y = a.e^{3x}$

c) substituer  $y = a.x.e^{-x}$  (puisque  $e^{-x}$  est solution de l'équation homogène)" (TD-2<sup>1</sup>).

---

<sup>1</sup> Nous utilisons la notation TD-i en vue de montrer au cours de quelle séance s'est passé le discours (de l'enseignant concerné) cité

Tenant compte de la ressemblance notable entre les trois équations différentielles citées ci-dessus, on fait l'hypothèse qu'un tel exercice a pour but d'entraîner les étudiants à la recherche d'une solution particulière, recherche grandement facilitée par l'initiative de l'enseignant.

Deuxième différence lors de la résolution du type de tâches T<sub>10</sub> (Choisir le champ des vecteurs d'une équation différentielle linéaire du premier ordre). D'après notre analyse faite ci-dessus (cf. paragraphe 1.2), il est à noter que seule une technique à caractère graphique, permettant de résoudre ce type de tâche, était traitée dans le cours magistral. Notre observation des séances de EM1 nous a permis de noter l'existence d'une deuxième technique qui passe exclusivement par la résolution algébrique de l'équation différentielle étudiée (technique algébrique).

⇒ L'analyse des caractéristiques des séances dirigées par l'enseignant EM2 :

Les exercices choisis par ce deuxième enseignant s'appuient intégralement, comme pour EM1, sur les exercices préparés par le responsable du module. Cinq types de tâches issus des feuilles de travaux dirigés ne sont pas traités par cet enseignant. Une analyse faite sur l'accomplissement des autres types de tâches met en évidence un seul point différent par rapport à ce qui est enseigné dans les cours magistraux : il concerne T<sub>10</sub>. On constate que cet enseignant préfère alors justifier par la technique algébrique évoquée ci-dessus les réponses données à l'aide de l'unique technique (graphique) énoncée dans le cours magistral. Comme chez l'enseignant EM1, ces deux techniques sont mises en parallèle lors de l'accomplissement de ce type de tâches.

⇒ L'analyse des caractéristiques des séances dirigées par l'enseignant EM3 :

Contrairement au cas des deux enseignants précédents, les exercices abordés par EM3 ne correspondent pas généralement à ceux proposés par le responsable du module. Ce choix se manifeste par l'intervention d'exercices comportant à la fois les types de tâches T<sub>2</sub> et T<sub>6</sub>. L'augmentation du taux d'accomplissement de T<sub>6</sub> par rapport au taux de proposition confirme ce propos. Voici un exemple de ce type d'exercices proposés par cet enseignant :

"Exemple :  $y' = (y + 1)^2$

Résoudre l'équation différentielle ? L'équation différentielle possède-t-elle une solution  $y$  telle que  $y(0) = 2, y(0) = -4$  ? Tracer leurs représentations graphiques ? " (TD-3).

Les techniques utilisées pour exécuter les tâches proposées par un tel exercice ne se distinguent pas de celles étudiées dans les cours magistraux.

## 2. Étude de l'enseignement du concept d'équation différentielle en physique

### 2.1. Présentation générale

L'enseignement des circuits électriques fait partie d'un module qui se trouve dans le programme de première année de l'Université Joseph Fourier (filière Sma).

Cet enseignement dure cinq séances de 90 minutes. Il s'agit de deux grands chapitres : le premier est centré sur l'étude "des circuits électriques en régime transitoire" (2 séances), le deuxième étudie "des circuits électriques en régime forcé alternatif" (3 séances).

Dans le premier chapitre, notre objet d'étude prend vie dans le travail de modélisation des circuits  $RL$  et  $RLC$  alors que ce n'est pas le cas pour le deuxième.

L'intérêt de faire appel au concept d'équations différentielles dans cet enseignement apparaît dans le discours de l'enseignant lors de l'étude de "l'installation du courant électrique dans une bobine" :

"Nous étudions maintenant un circuit électrique constitué par une résistance électrique passive  $R$  mise en série avec une bobine de résistance électrique  $r$  et de self inductance  $L$ .

Comment le courant électrique s'installe-t-il au cours du temps<sup>1</sup> lorsqu'on connecte brutalement ce circuit, à un générateur, de force électromotrice  $E$ , de résistance interne  $R_g$  très petite devant  $R$  en fermant un interrupteur  $K$  ?

Le courant cherché  $i(t)$  est la solution de l'équation différentielle établie." (CM-1).

Ce discours montre qu'on représente un circuit électrique à l'aide d'une équation différentielle en vue de connaître l'évolution du système au cours du temps.

### 2.2. Analyse praxéologique des feuilles de travaux dirigés

Pour mener une telle analyse, nous suivons la méthode déjà utilisée au cours de cette partie, pour connaître d'une part les types de tâches proposés et d'autre part les autres éléments de l'organisation praxéologique associés à ces derniers : nous faisons appel aux exercices non résolus en vue de définir les différents types de tâches et aux exercices résolus afin d'identifier les techniques et les technologies associées à ces derniers.

Contrairement aux exercices étudiés dans l'institution mathématique, il s'agit ici de problèmes longs dont chacun est étudié lors d'une séance de travaux dirigés<sup>2</sup>. Résumons rapidement le contenu de chacune des feuilles de travaux dirigés.

*Une première feuille d'exercices* est centrée sur la mise en équation d'un circuit électrique  $RC$  à partir des lois sur les tensions et les courants. *Une deuxième feuille d'exercices* vise à apprendre à manipuler les solutions des équations différentielles du second ordre associées un circuit  $RLC$ . *La troisième feuille* se centre sur l'étude de la réponse d'un circuit  $RC$  alimenté par un générateur de tension

<sup>1</sup> C'est nous qui soulignons

<sup>2</sup> Pour une illustration cf. Annexes C



périodique. *La quatrième feuille* se focalise sur l'étude de la réponse d'un circuit *RC* alimenté par un générateur de tension sinusoïdale. *La cinquième feuille de travaux dirigés* vise à faire étudier le comportement en fréquence de composants *R*, *L* ou *C* non idéaux alimentés par un générateur de tension sinusoïdale. Et enfin *la sixième feuille* conduit à étudier les courbes de gain et filtres.

#### a. Détermination des différents types de tâches

Nous avons recensé au total 6 types de tâches relatives aux équations différentielles dans 6 feuilles de travaux dirigés concernant les exercices non résolus. Pour mieux observer la continuité entre les types de tâches détectées dans les deux niveaux (classe de terminale et 1<sup>ère</sup> année de l'université) nous avons choisi de conserver les mêmes codages utilisés dans l'étude des manuels de Physique (cf. paragraphe 2.2 de Chapitre C1) et de représenter les types de tâches nouveaux par de nouveaux codages.

Les types de tâches observés	Nombre d'apparition
T <sub>1</sub> : Etudier l'évolution de la charge électrique d'un circuit décrit par une équation différentielle linéaire du second ordre	1
T <sub>2</sub> : Représenter graphiquement l'évolution de la charge d'un circuit décrit par une équation différentielle linéaire du 2 <sup>nd</sup> ordre	1
T <sub>3</sub> : Etudier les échanges énergétiques dans le circuit étudié	2
T <sub>5</sub> : Etudier l'évolution de la charge électrique d'un circuit conduisant à une équation différentielle linéaire du premier ordre	1
T <sub>6</sub> : Représenter graphiquement l'évolution de la charge (ou du courant) d'un circuit décrit par une équation différentielle linéaire du 1 <sup>ère</sup> ordre	2
T <sub>7</sub> : Montrer qu'un circuit se comporte comme un circuit intégrateur si $RC \gg T$	2
TOTAL	9

Tableau 10 : Répartition générale des types de tâches détectés

Le Tableau 10 témoigne, d'une part, de la disparition de l'un des types de tâches (T<sub>4</sub>, décrit à partir des manuels analysés) et l'apparition de trois autres types de tâches (T<sub>5</sub>, T<sub>6</sub> et T<sub>7</sub>). Comme nous l'avons vu précédemment, tous ces types de tâches se scindent en deux groupes : ceux relatifs explicitement à une équation différentielle (T<sub>1</sub>, T<sub>5</sub> et T<sub>7</sub>) et ceux relatifs à la fonction solution d'une équation différentielle représentant un circuit (T<sub>2</sub> et T<sub>3</sub> et T<sub>6</sub>).

b. Détermination des praxéologies associés

Nous nous proposons à présent d'analyser les techniques associées à ces types de tâches et éventuellement les éléments de la technologie vérifiant ces dernières.

⇒T<sub>1</sub> : Étudier l'évolution de l'intensité de la charge d'un circuit électrique décrit par une équation différentielle linéaire du second ordre

En conformité avec l'étude faite en classe de terminale, on observe que l'unique technique permettant de résoudre ce type de tâches fait appel à deux sous-types de tâches T<sub>1a</sub> : Établir l'équation différentielle, et T<sub>1b</sub> : Résoudre l'équation différentielle établie.

Chacun de ces sous-types de tâches s'inscrit dans une organisation praxéologique que nous analysons ci-dessous :

→ T<sub>1a</sub> : Établir l'équation différentielle

L'unique technique notée dans l'analyse des manuels de terminale pour établir l'équation différentielle d'un circuit RLC, passe par l'une des lois de Kirchoff : "dans un circuit électrique fermé, à chaque instant, la chute de tension est nulle" : celle-ci est toujours valable pour exécuter ce type de tâches. Montrons ci-dessous l'application de cette technique par l'enseignant dans le cours magistral.

"Equation différentielle associée au circuit RLC :

$$\sum R.i(t) - E = 0 \text{ le long d'une maille}$$

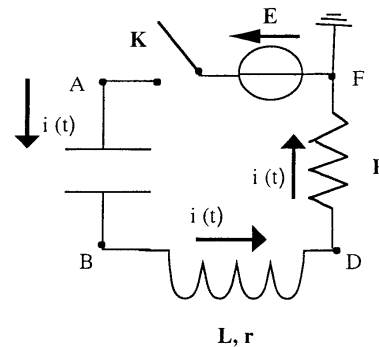
$$u_{AB}(t) + u_{BD}(t) + u_{DF}(t) + u_{FA}(t) = 0$$

$$\frac{q(t)}{C} + (R_L.i(t) - (-L \frac{di}{dt})) + R.i(t) - E = 0$$

$$\frac{q(t)}{C} + L \frac{di}{dt} + (R_L + R)i(t) = E$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R_T}{L} \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{LC} q(t) = E "$$

(CM-1)



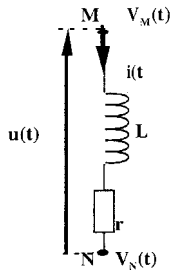
Le discours de l'enseignant expliquant cette technique s'appuie exclusivement sur l'écriture des conventions récepteurs de chacun des composants du circuit. Nous l'illustrons comme ci-dessous :

"Conventions pour les dipôles

Convention récepteur  $\delta\omega > 0$  (l'énergie reçoit  $|\delta\omega|$ )

$\delta\omega < 0$  (l'énergie fournit  $|\delta\omega|$ )

a. Cas d'une résistance

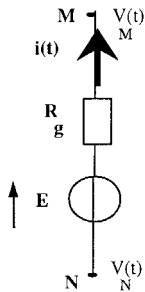


Cas d'une résistance :

$$V_{MN} = V_M(t) - V_N(t) > 0$$

$$V_{MN} = R \cdot i(t)$$

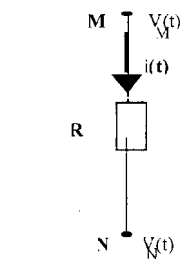
b. Cas d'un générateur  
f.e.m  $E$  (ou  $e(t)$ )



$$V_{NM}(t) = V_N(t) - V_M(t) > 0$$

$$V_{NM}(t) = R_g \cdot i(t) - E$$

c. Cas d'une bobine



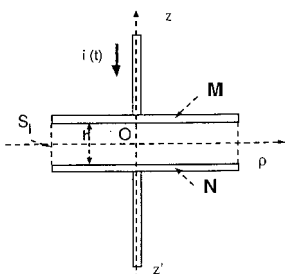
$$V_M(t) - V_N(t) = R_L \cdot i(t) - (E')$$

$E'$  = f.c.e.m (force contre électromotrice)

$$= -L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$V_M(t) - V_N(t) = R_L \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}(t)$$

d. Cas d'un condensateur



$$q_N(t) = -|q_m(t)|$$

$$q(t) = C \cdot [V_M(t) - V_N(t)]$$

si  $V_M(t) > V_N(t)$ ,  $q_M(t) > 0$

"(CM-1).

Les éléments technologiques qui doivent, d'une part montrer l'utilité de la technique proposée, d'autre part rendre intelligible cette dernière, ne sont pas développés dans le cours. Cette technologie doit

s'appuyer à la fois sur la théorie des équations différentielles et sur la loi d'additivité des différences de tensions.

→T<sub>1b</sub> : Résoudre l'équation différentielle établie

On relève la ressemblance notable entre ce type de tâche et celui analysé dans les exercices mathématiques à propos de la résolution des équations différentielles du second ordre. La résolution se fait à l'aide des techniques étudiées en mathématiques en gardant à l'esprit que l'équation différentielle représente un circuit électrique. Rappelons que cette technique se scinde en deux sous-types de tâches : *trouver la fonction solution de l'équation homogène associée à l'équation différentielle du circuit puis chercher une solution particulière de cette dernière.*

L'exécution du *premier sous type de tâches* implique tout d'abord d'écrire l'équation caractéristique de cette équation différentielle ; on observe la même technique que celle notée dans l'institution mathématique. Il faut ensuite trouver la forme de la solution générale de l'équation différentielle en question. Cette étape, contrairement à ce qui est observé dans l'institution mathématique, nécessite de connaître "physiquement" ce que signifie la valeur de  $\Delta$  pour le régime précisé dans l'exercice proposé. Rappelons qu'il s'agit de trois régimes : *régime critique, régime pseudo-périodique et régime apériodique.* Pour mettre en évidence la relation entre la valeur de  $\Delta$  et ces derniers, citons un extrait de discours de l'enseignant :

"Le régime apériodique correspond aux valeurs de  $L$ ,  $R$  et  $C$  pour lesquelles l'équation caractéristique  $Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0$  possède deux racines réelles, ce qui se produit si le discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac$  est positif, avec dans le cas présent :  $a = L, b = R, c = \frac{1}{C}$ .  $R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$ . Alors les

racines réelles s'écrivent :  $x_1 = \frac{-R + \sqrt{(\Delta)}}{2L}$  et  $x_2 = \frac{-R - \sqrt{(\Delta)}}{2L}$ ". (CM-2)

Finalement, après avoir défini les deux racines de l'équation caractéristique, il suffit de faire appel à la forme de la fonction solution correspondant à l'étude faite :  $t \rightarrow A_1 \cdot e^{x_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{x_2 \cdot t}$  pour aboutir à la résolution de ce premier sous-type de tâches.

Il n'existe qu'une seule technique permettant d'exécuter *la deuxième sous-type de tâches*. Cette technique nécessite de connaître la valeur de la charge quand le temps augmente jusqu'à l'infini. Voici le discours de l'enseignant noté à ce propos :

"Si on attend suffisamment longtemps pour que le régime transitoire soit terminé alors le condensateur est totalement chargé et  $Q(t) = \text{constante}$ .

Une solution particulière évidente est :  $Q(\infty) = CE$ ". (CM-2)

Cette technique présente les mêmes caractéristiques que celle, observée dans l'institution mathématique : recherche d'une solution constante

⇒ T<sub>2</sub> : Représenter graphiquement l'évolution de la charge d'un circuit décrit par une équation différentielle linéaire du 2<sup>nd</sup> ordre

L'unique technique observée dans cette institution a les mêmes caractéristiques que celles mobilisées dans l'institution mathématique en vue de tracer le graphe d'une fonction solution des équations différentielles. Cette technique comporte cette fois-ci trois étapes : trouver une seule solution vérifiant les conditions initiales données, calculer la valeur limite de cette solution et faire appel à la forme d'une fonction connue (exponentielle, sinusoïdale etc.).

⇒ T<sub>3</sub> : Etudier les échanges énergétiques du circuit étudié

Citons ci-dessous un exemple représentatif de ce type de tâches:

"On rappelle que l'énergie emmagasinée dans un condensateur peut s'écrire  $E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C}$  et l'on

va chercher à comparer cette énergie emmagasinée dans le condensateur au cours du temps à l'énergie qui aura été dissipée par effet joule à travers la résistance.

- Sachant que l'énergie dissipée dans la résistance depuis la fermeture de l'interrupteur peut s'écrire  $\int_0^{\infty} R.i^2(t)dt$  calculer l'énergie totale dissipée dans la résistance pendant la charge du

condensateur." (CM- 3)

On constate que la recherche de la forme définitive de l'énergie (emmagasinée ou dissipée), autrement dit la technique de résolution de ce type de tâches, est explicitée dans l'énoncé de l'exercice proposé. On observe que cette technique nécessite de faire appel soit à l'équation algébrique de la charge ( $q(t)$ ), qui est la fonction solution de l'équation différentielle du circuit, soit à celle du courant électrique ( $i(t)$ ) pour répondre aux questions posées. Il suffit alors de réaliser certains calculs algébriques pour aboutir à une réponse finale.

⇒ T<sub>5</sub> : Etudier l'évolution de la charge électrique d'un circuit décrit par une équation différentielle linéaire du premier ordre

Comme le premier type de tâche analysé ci-dessus, la technique permettant de résoudre ce type de tâches se ramène à T<sub>5a</sub> : Trouver l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur, suivie de T<sub>5b</sub> : Résoudre l'équation différentielle établie.

Analysons en détail chacun de ces sous-types de tâches :

→ T<sub>5a</sub> : Trouver l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur

Nous n'avons recensé qu'une seule technique permettant de résoudre ce type de tâches. Cette technique, passant par l'application de la loi des mailles au circuit étudié, est identique à celle détaillée lors de l'analyse de T<sub>1</sub> (plus particulièrement de T<sub>1a</sub>). Cette unique étape permettant de mettre en relation les différentes tensions du circuit étudié conduit directement à une équation différentielle, par

exemple du type :  $R \frac{dq}{dt}(t) + \frac{q}{C}(t) - E = 0$ . Parallèlement à ce qui est observé précédemment, on note que la technologie associée à cette technique n'est pas développée dans cette institution (physique).

→ T<sub>5b</sub> : Résoudre l'équation différentielle établie

La résolution de ce sous-type de tâches est introduite de la façon suivante :

"C'est un problème de Mathématiques, nous vous demandons d'en accepter la solution.

La solution générale d'une équation différentielle avec un second membre constant est la somme de la solution générale de la même équation différentielle sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre." (CM-1)

Comme nous l'avons déjà noté dans l'analyse faite précédemment (paragraphe 1.2.), cette technique comporte deux sous-types de tâches : "trouver la solution générale de l'équation différentielle homogène associée" et "trouver une solution particulière de l'équation différentielle du circuit étudié". Notons que ces deux sous-types de tâches sont exécutés à l'aide des techniques étudiées dans le cours de mathématiques, sans entrer vraiment dans les détails. Cependant la résolution du deuxième sous-type de tâches, qui porte plutôt sur la recherche d'une solution particulière constante, nous permet de constater une autre façon d'appliquer la technique en question :

Le discours de l'enseignant, lors de l'étude "des régimes électrique dans un circuit  $R, L$ ", nous explique cette technique :

"Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre  $L \frac{di(t)}{dt} + (R + r)i(t) = E$ . Cette solution est évidente, car il suffit d'attendre suffisamment longtemps pour que le courant circulant dans le circuit finisse par devenir constant, ne plus varier et valoir tout simplement  $I_0 = \frac{E}{(R + r)}$ , c'est une solution particulière recherchée." (CM-1)

⇒ T<sub>6</sub> : Représenter graphiquement l'évolution de la charge (ou du courant) d'un circuit décrit par une équation différentielle linéaire du 1<sup>ère</sup> ordre

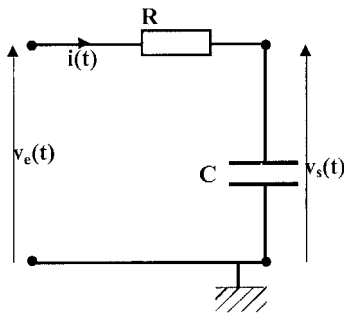
D'une façon générale, on constate que l'accomplissement de ce type de tâches nécessite de connaître les expressions algébriques de la charge (ou du courant) qui traverse le circuit. En effet ces expressions se présentent de façon générale sous la forme de fonctions solutions de l'équation différentielle du circuit étudié. On voit ainsi que ce type de tâches se ramène à un autre type de tâches portant sur la représentation graphique d'une fonction quelconque. A ce propos la technique évoquée lors de l'analyse de T<sub>2</sub> peut permettre d'accomplir ce type de tâches.

⇒ T<sub>7</sub> : Montrer qu'un circuit se comporte comme un circuit intégrateur si  $RC \gg T$

On constate qu'il s'agit des tâches inhabituelles où l'équation différentielle du système n'est pas demandée explicitement.

Voici une question représentative tiré des feuilles de travaux dirigés :

"



Sans utiliser les notations complexes non nécessaires ici, écrire la relation entre les tensions à un instant  $t$  (la loi de la maille unique<sup>1</sup>), en ne faisant apparaître que les tensions  $v_e(t)$ ,  $v_s(t)$  (et la dérivée de l'une d'entre elles par rapport au temps)." (TD-n°3)

L'énoncé de l'exercice proposé donne explicitement la technique nécessaire (écrire la loi des mailles) pour exécuter ce type de tâche. L'application de cette technique conduit donc directement à une équation différentielle représentant le système étudié. La façon de faire est décrite ci-dessous en s'appuyant sur les exercices résolus par l'enseignant :

"La loi des mailles nous donne, à l'instant  $t$  :

$$v_R(t) + v_C(t) = v_e(t)$$

$$v_C(t) = v_s t = \frac{q(t)}{C} \text{ et } v_R(t) = R.i(t) = R.\frac{dq(t)}{dt} = CR.\frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$\text{d'où } RC.\frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t)$$

$$\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_s(t) = \frac{v_e(t)}{RC} \text{ " (CM-4).}$$

Cet extrait montre que ce type de tâche conduit implicitement vers la recherche du modèle équation différentielle du système étudié.

### 2.3. Analyse des séances des travaux dirigés

Selon la méthodologie générale de ce travail, pour mener une telle analyse nous avons effectué une observation des séances des travaux dirigés de quatre Enseignants de Physique (EP1, EP2, EP3 et EP4) lors de l'enseignement des équations différentielles.

Comme nous l'avons signalé dans le paragraphe précédent (paragraphe 2.2), il s'agit en électrocinétique de résoudre des problèmes longs et donc peu nombreux. Parallèlement à ce constat, nous avons remarqué que chaque enseignant observé au cours des séances de travaux dirigés, a tendance à traiter chacune des tâches proposées dans les fiches d'exercices. Quant aux techniques mobilisées pour exécuter ces tâches, elles sont exclusivement conformes à celles enseignées dans les

<sup>1</sup> C'est nous qui soulignons

cours magistraux. Il nous a donc paru inutile d'analyser ici chacun des types de tâches résolus par ces enseignants.

Cependant notre observation des classes des travaux dirigées a montré l'existence d'un autre type de tâches, non proposé explicitement dans les feuilles d'exercices, T<sub>8</sub> : discuter l'évolution du courant qui traverse le circuit. Ce type de tâches apparaît dans les pratiques de deux enseignants (EP1 et EP3) pour qui le travail de modélisation ne s'arrête pas à l'écriture de l'équation algébrique de l'évolution du système au cours du temps ; il s'inscrit dans la troisième phase du travail de modélisation qui nécessite de retourner au système réel.

On observe que ces deux enseignants restent fidèles, dans leurs choix des circuits, au type de circuit proposé dans les feuilles d'exercices, mais pas à l'ordre des questions posées : ils traitent intégralement les questions posées en découpant leur séance selon les différentes phases du processus de modélisation. Ils proposent tout d'abord aux étudiants de construire le modèle qui représente du circuit proposé, ensuite de trouver certaines paramètres du système à l'aide de ce modèle (l'équation qui représente l'évolution du système au cours du temps, l'énergie électrostatique ou cinétique etc.) et enfin de discuter le système modélisé à partir des données obtenues.

Quant à EP2 et EP4, ils exécutent exactement les tâches énumérées dans les feuilles de travaux dirigés, en suivant strictement l'ordre des questions posées.

Notons que la méthode mise en œuvre par EP2 et EP4 risque de ne pas permettre de terminer complètement l'étude des circuits proposés. Nous avons constaté l'absence de discussions à propos du système étudié, précisément à cause du manque du temps.



### 3. Conclusion

Pour étudier des caractéristiques de l'enseignement de l'objet équation différentielle au niveau universitaire nous nous sommes focalisés particulièrement sur une analyse praxéologique des exercices proposés aux étudiants. Rappelons notre questionnement :

*Quels types de tâches caractérisant l'étude du concept d'équation différentielle sont abordés ?  
Quelles sont les techniques qui les accompagnent ? Quels sont les discours technologiques qui justifient, expliquent ces techniques ? Existe-t-il des théories expliquant cette technologie ?*

Comme nous avons discuté d'une façon détaillée chacune de ces questions au cours de ce chapitre, nous préférons ne pas les traiter une par une mais donner quelques résultats tirés de l'étude faite :

- > En mathématiques, nous avons regroupé les différents types de tâches en trois catégories : une première concerne les types de tâches relatifs à la résolution algébrique d'une équation différentielle linéaire du premier et du second ordre, une deuxième comprend les types relatifs aux différents registres sémiotiques (algébrique et graphique) et une troisième rassemble les autres types de tâches.

Malgré la présence de plusieurs types de tâches, compte tenu des pratiques des enseignants et des exercices proposés aux étudiants, il est possible de dire que les types de tâches relatives à la résolution algébrique des équations différentielles linéaires sont ceux qui caractérisent l'enseignement actuel. Ceci signifie que le contenu de l'enseignement des équations différentielles est limité quasi exclusivement à ces types d'équations différentielles avec une prédominance de la résolution algébrique dans l'application de techniques de résolution. Ces techniques sont généralement justifiées et rendues intelligibles par les discours explicatifs du responsable du module.

Nous avons constaté que les autres types de tâches, minoritaires par rapport à ceux relatifs à la résolution algébrique des équations différentielles, sont traités souvent à l'aide d'une seule technique qui n'est pas toujours discutée.

- > En Physique (électrocinétique), nous avons classé les types de tâches rencontrés en deux groupes en tenant compte des caractéristiques du processus de modélisation : un premier groupe comprend ceux liés à la construction du modèle (l'établissement de l'équation différentielle), un deuxième concerne les types relatifs aux études réalisées sur ce modèle. Ceci indique que l'étude proprement dite du système modélisé est laissée implicitement à la charge des étudiants. Il est également à noter que tous les types de tâches sont réalisés souvent à l'aide d'une seule technique. A ce propos on peut noter l'existence d'une seule technique, l'application de la loi d'additivité des tensions aux circuits, qui permet d'exécuter le type de tâches relatif à l'établissement de l'équation différentielle du système.

La comparaison des caractéristiques de cet enseignement universitaire avec celles de l'enseignement secondaire nous a permis de noter les résultats suivants :

- > En conformité avec les caractéristiques de la première rencontre avec le concept d'équation différentielle, presque tous les exercices ont des façons fort similaires de traiter les équations différentielles : En effet en mathématiques les étudiants sont invités, très souvent, à trouver la famille de fonctions solutions des équations différentielles linéaires et en physique, à étudier l'évolution d'un circuit électrique décrit à l'aide d'une équation différentielle. Ces façons de faire permettent une réflexion sur les démarches algorithmiques et le développement des automatismes à propos des attentes institutionnelles.
- > Si, au niveau de la classe de terminale, la recherche de la solution générale de deux types d'équations différentielles linéaires est faite à l'aide certaines fonctions connues, sans réaliser une résolution complète, la transition du lycée à l'université est surtout marquée par l'apparition des techniques de résolution algébrique.



## *PARTIE D*

*Rapports personnels des étudiants de première année de  
l'université aux équations différentielles*

*Chapitre D<sub>1</sub> : Rapports des étudiants aux équations différentielles en  
tant qu'objet*

*Chapitre D<sub>2</sub> : Rapports des étudiants aux équations différentielles en  
tant que modèle*

*Chapitre D<sub>3</sub> : Typologie des rapports personnels des étudiants aux  
équations différentielles*



# Introduction

## Objectif général

Ayant une problématique qui porte sur les contraintes d'enseignement et d'apprentissage du concept d'équations différentielles, nous nous sommes intéressés dans cette partie de notre travail, aux rapports personnels des étudiants à ce concept.

Chevallard (1989b) définit le rapport personnel à un objet de savoir comme suit:

"Un individu X ne peut avoir, à un objet de savoir donné,  $O^S$ , qu'un *rapport personnel*, lequel est un émergent d'un système de relations institutionnelles (telle la relation didactique), relations ternaires où l'individu X entre avec l'objet de savoir  $O^S$  et un ou des agents de l'institution I.

De ce rapport personnel relève notamment tout ce que l'on croit ordinairement pouvoir dire –en termes de "savoir, de "savoir-faire", de "conceptions", de "compétences", de "maîtrise", d'"images mentales", de "représentations", d'"attitudes", de "fantasme", etc.- de X à propos de  $O^S$ . [...] Le concept de rapport (personnel) à un (objet de) savoir apparaît ainsi comme englobant les aspects fragmentaires en lesquels on le dissocie ordinairement. "

Étant donné un objet de savoir  $O$  (l'équation différentielle) qui a une existence au sein de deux institutions  $I$  (l'institution mathématique) et  $I'$  (l'institution physique : électrocinétique), l'évolution du rapport à  $O$  dans  $I$  vers un rapport dans  $I'$  conduit le sujet à modifier son rapport, au départ conforme au rapport de l'institution  $I$ . Dès lors l'objet  $O$  n'existe plus en lui-même, mais émerge dans chaque institution par des pratiques institutionnelles qui se définissent comme un système de tâches.

Dans la partie précédente nous avons particulièrement analysé ce système de tâches dans l'ensemble des techniques associées et des éléments de la technologie justifiant ces techniques. En effet une telle étude est fondamentale dans la formation des rapports personnels.

Nous étudions maintenant les rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle sous les contraintes et les conditions des rapports institutionnels. Dans ce travail, nous avons fait le choix de décrire les rapports personnels des étudiants, essentiellement en fonction de leurs conceptions<sup>1</sup> à propos de l'objet équation différentielle et de leur aptitude à mobiliser des techniques étudiées dans les deux institutions pour résoudre les tâches proposées relativement à deux statuts de cet objet.

Nous nous proposons ainsi de décrire ces rapports, à travers l'étude des réponses fournies par des étudiants en DEUG Sma première année de l'Université Joseph Fourier à deux tests portant particulièrement sur les équations différentielles. Nous étudions les rapports personnels des étudiants en apportant des éléments de réponse aux deux questions suivantes :

---

<sup>1</sup> Le mot de conception s'utilise dans ce travail au sens générale.

- > *Quelles sont les caractéristiques du rapport personnel des étudiants à l'objet équation différentielle ? Quel est le degré d'adéquation entre le rapport personnel et le rapport institutionnel (de deux institutions) à l'objet en question ?*
- > *Quelles sont les difficultés spécifiques des étudiants résultant des choix faits dans les deux institutions ?*

### ***Méthodologie de travail***

Pour permettre une analyse des rapports personnels des étudiants se formant dans ces deux institutions, il nous faut construire des tâches présentes à la fois dans les deux institutions. C'est pour cela que nous avons choisi de proposer deux tests a priori différents, mais en relation réciproque, issus des deux institutions -mathématique et électrocinétique- .

Lors de notre expérimentation soixante étudiants ont subi les tests proposés. Le fait de nous intéresser aux rapports personnels des étudiants formés dans l'environnement de deux institutions nous a conduit à analyser particulièrement les copies de cinquante étudiants ayant répondu aux deux tests proposés. Nous avons réalisé notre expérimentation un mois avant les examens finaux : les étudiants étaient prévenus que ces tests étaient à considérer comme des "examens blancs" leur permettant de s'entraîner pour l'examen.

Les deux tests étaient proposés consécutivement et les étudiants ont répondu pendant 90 minutes à chacun de ces deux tests.

La partie qui suit se compose de trois chapitres :

- > le premier se focalise sur les rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle (par l'analyse des réponses des étudiants au test proposé en mathématiques)
- > le deuxième porte sur les rapports personnels des étudiants au *modèle* équation différentielle (à partir de l'analyse des réponses données au test proposé en électrocinétique)
- > le dernier chapitre se focalise sur la caractérisation des différents modèles de rapports personnels observés chez les étudiants.

# Chapitre D<sub>1</sub> : Rapport des étudiants "aux équations différentielles" en tant qu'objet

## Introduction

### Objectif général et présentation du test proposé

L'objectif de ce chapitre est de caractériser les rapports personnels des étudiants aux équations différentielles dans l'institution mathématique. La méthodologie adoptée consiste à proposer aux étudiants un test qui comporte trois exercices. Pour préparer ces exercices nous nous sommes appuyés sur les caractéristiques du rapport institutionnel mathématique dégagées dans la Partie C de cette thèse.

Notons ci-dessous les quatre constats, relatifs aux caractéristiques décrites, qui nous aident à construire le test :

C1 : Nous avons constaté que l'enseignement de l'objet équation différentielle se concentre quasi-exclusivement sur la résolution de certains types d'équations différentielles linéaires. Nous avons aussi constaté que cet enseignement ne ménageait pas de temps pour définir ce qu'est une équation différentielle, ni sa nature (linéaire ou non et son ordre); ces indications sont données à l'aide d'exemples. Nous voulons donc définir les effets de cet enseignement, qui privilégie particulièrement les équations différentielles linéaires, sur les conceptions des étudiants. Ainsi nous nous sommes posés la question suivante :

*Q1 : Quelles sont les conceptions des étudiants à propos de l'objet équation différentielle ?*

Le premier exercice du test proposé a pour but de répondre à cette question.

C2 : Nous avons aussi constaté non seulement que cet enseignement se réduit à la résolution des équations différentielles, mais encore que cette résolution se limite aux méthodes algébriques, tout en ignorant les autres modes de résolution (numérique et qualitative). A ce propos nous avons observé qu'en mathématique l'étude d'une équation différentielle se limite à la recherche de la famille de solutions de cette dernière. Ce deuxième constat nous a conduit à nous poser les trois questions suivantes :

*Q2 : Compte tenu des caractéristiques de l'enseignement actuel, serait-il possible de tester la viabilité d'une autre approche qu'algébrique, par exemple l'approche qualitative, en rendant difficile le recours à la première et en conduisant les étudiants vers la deuxième ?*

Les deux premières questions du deuxième exercice proposé dans le test visent particulièrement à répondre à cette question.



*Q3 : Compte tenu de l'importance attachée à la résolution algébrique des équations différentielles, les étudiants sont-ils capables d'appliquer correctement les techniques algébriques étudiées (dans cette institution) ?*

Deux questions (dont l'une s'inscrit dans l'exercice 2 et l'autre dans l'exercice 3) de notre test ont été préparées afin d'apporter des éléments de réponse à cette troisième question.

*Q4 : La prédominance du types de tâches, qui portent sur les calculs algébriques lors de l'étude des équations différentielles, peut-elle conduire les étudiants à méconnaître d'autres types de tâches relatifs aux équations différentielles ?*

Notons que la deuxième question de l'exercice 2 nous est utile aussi pour répondre à cette quatrième question.

C3 : Nous avons constaté que cet enseignement représente majoritairement les équations différentielles dans le registre symbolique et par conséquent il ne donne pas aux étudiants la possibilité de travailler dans un autre registre. Ce constat nous a conduit à nous poser les questions suivantes :

*Q5 : Les étudiants sont-ils capables d'identifier correctement la représentation graphique d'une équation différentielle dont la représentation symbolique est connue ? Si oui quels types de connaissances sont-elles mobilisées ? Si non, quelles sont les difficultés que les étudiants rencontrent à ce propos ?*

Nous traiterons cette question selon les réponses obtenues à la troisième question de l'exercice 2 du test proposé.

*Q6 : L'utilisation des mêmes symboles algébriques en vue de représenter des équations différentielles est-elle capable d'engendrer des effets notables dans le travail des étudiants ?*

Cette question trouvera des éléments de réponse à travers de l'analyse des productions des étudiants obtenues, d'une part, à l'exercice 1 et d'autre part à l'exercice 3.

C4 : Un autre constat attire particulièrement notre attention : cet enseignement est centré quasi-exclusivement en mathématiques tout en ignorant la forte relation avec les problèmes réels. A ce propos nous nous posons la question suivante :

*Q7 : Quels sont les comportements des étudiants face à une tâche qui nécessite d'associer une équation différentielle à une situation réelle, par exemple au fonctionnement d'un circuit électrique ?*

Nous visons à répondre à cette question à l'aide des réponses obtenues à la deuxième question de l'exercice 3.

**Déroulement de l'analyse**

L'analyse que nous donnons se scinde en deux parties : une *analyse a priori* qui vise, d'une part, à présenter chacune des tâches proposées et d'autre part à prévoir les réponses attendues selon les techniques permettant de résoudre les tâches en question et une *analyse a posteriori* des réponses obtenues à l'exercice proposé. Notons que, lors de cette dernière, en vue de ne pas perdre le fil conducteur de l'analyse, nous préférons nous contenter de détailler les erreurs qui sont dans notre domaine d'intérêt et évoquer les autres.

**1. Les analyses de l'Exercice 1****1.1. Analyse a priori de l'exercice****1.1.1. Présentation de l'exercice****1° Nature de l'exercice proposé**

Ce premier exercice vise à répondre intégralement à la première question : "quelles sont les conceptions des étudiants à propos de l'objet équation différentielle ?", et partiellement à la sixième question : "l'utilisation des mêmes symboles algébriques en vue de représenter des équations différentielles est-elle capable d'engendrer des effets notables dans le travail des étudiants ?". Il est formé par six expressions algébriques et comporte deux tâches :

Exercice 1 :

Préciser pour chacune des expressions suivantes si elle représente une équation différentielle ou non et préciser-en la nature ? Pourquoi ?

a.  $x^2 y' + (1 + \sin x)y + 5x = 0$

b.  $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2 x}{dt^2} = \cos t$

c.  $(y''')^{1/2} + y' = 0$

d.  $(\cos x)' + x = 0$

e.  $f'(x) = 0$

f.  $(e^t)' = 0$

Compte tenu de la question qui se pose en premier lieu lors de la caractérisation des rapports personnels des étudiants, le but de cet exercice est de repérer les conceptions des étudiants à propos de l'objet équation différentielle. Dans cet exercice l'étudiant doit exécuter tout d'abord les tâches suivantes :

T<sub>1</sub> : *identifier les expressions représentant une équation différentielle*

T<sub>2</sub> : *préciser la nature des équations différentielles identifiées*

Ensuite il doit justifier les réponses données à ces deux tâches. Le fait de demander de justifier les réponses données vise, d'une part, à repérer les techniques utilisées pour accomplir ces tâches, d'autre part, à connaître les éléments technologiques disponibles chez l'étudiant.

**2° Trois variables didactiques retenues pour le choix des expressions proposées :**

Lors du choix des expressions proposées, nous avons répertorié trois variables didactiques que nous détaillons de la façon suivante :

*Une première variable didactique (V1) concerne l'incertitude liée à la variable indépendante<sup>1</sup>*

Nous avons le choix entre trois possibilités :

**V1<sub>1</sub>** : la variable indépendante est connue par l'énoncé de l'exercice proposé.

**V1<sub>2</sub>** : la variable indépendante est connue par l'écriture algébrique de l'équation différentielle proposée ( $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dt} \dots$ )

**V1<sub>3</sub>** : la variable indépendante n'est pas connue ( $y', f', \dots$ )

L'étude des rapports institutionnels des étudiants montre que les exercices traités n'indiquent jamais explicitement les rôles joués (comme fonction ou variable) par les symboles algébriques ( $x, y, t \dots$ ) qui se trouvent dans une équation différentielle. Ceci nous a conduit, lors de la préparation des expressions algébriques, d'une part à éliminer le premier cas, d'autre part à définir des règles, qui peuvent être qualifiées comme règles du contrat, permettant à l'étudiant d'identifier la fonction et la variable. Nous écrivons ainsi les règles en question :

**R1** : la présence du signe de la dérivation ( $' , d \dots$ ) devant un symbole indique que ce symbole représente une fonction.

**R2** : si dans la relation, il y a deux symboles dont un est une fonction alors le deuxième est la variable.

**R3** : s'il n'y a qu'un seul symbole et si ce symbole représente une fonction alors la variable peut être n'importe quel symbole.

*Une deuxième variable didactique (V2) caractérise la représentation de la dérivée dans les expressions proposées*

Par référence aux pratiques habituelles de l'enseignement repérées dans des exercices issus de fiches de travaux dirigés et de manuels, nous pouvons déclarer trois types de représentation de la dérivée :

Etant donnée une fonction inconnue ( $f, y, i \dots$ )

**V2<sub>1</sub>** : la dérivée est représentée par le symbole prime ( $f', i', y' \dots$ )

**V2<sub>2</sub>** : la dérivée peut être représentée par un point sur la fonction inconnue ( $\dot{f}, \dot{i}, \dot{y}$ )

---

<sup>1</sup> Variable indépendante : variable qui influence la variable dépendante (Variable dépendante : variable qui réagit aux variations d'une autre variable)

$V_3$  : la dérivée est représentée en fonction du symbole de calcul différentiel ( $\frac{df}{d}$ ,  $\frac{dy}{d}$ ,  $\frac{di}{d}$  ...).

Cette écriture doit montrer explicitement par rapport à quelle variable il faut dériver la fonction.

Prenant en compte la ressemblance entre les deux premiers types et l'utilisation rare du type  $V_2$ , nous avons décidé pour cet exercice de ne prendre en compte que les types  $V_1$  et  $V_3$ .

*Une troisième variable didactique ( $V_3$ ) concerne la nature des équations différentielles proposées*

En effet nous avons repéré trois caractéristiques essentielles précisant la nature des équations différentielles :

$V_1$  : la linéarité de l'équation différentielle (linéaire-L/non-linéaire -NL)

$V_2$  : le type de l'équation différentielle (sans second membre- SSM/ avec second membre – ASM)

$V_3$  : l'ordre de l'équation différentielle

Pour pouvoir proposer aux étudiants des équations différentielles variées, nous avons décidé d'utiliser au maximum les variables didactiques évoquées précédemment lors du choix fait à propos des expressions proposées.

### ***3° Présentation des expressions proposées :***

Le tableau 11 présente les caractéristiques des expressions proposées en fonction de trois variables didactiques définies ci-dessus :

Variable → Expressions ↓	V1	V2	V3		
$x^2 y' + (1 + \sin x)y + 5x = 0$	Variable inconnue	Symbole (')	Linéaire	ASM	1 <sup>ère</sup> ordre
$\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$	Variable connue	Symbole du calcul différentiel	Linéaire	ASM	2 <sup>nd</sup> ordre
$(y''')^{1/2} + y' = 0$	Variable inconnue	Symbole (')	Non linéaire	SSM	3 <sup>ème</sup> ordre
$(\cos x)' + x = 0$ $(-x' \cdot \sin x + x = 0)$	Variable inconnue	Symbole (')	Non linéaire	ASM	1 <sup>ère</sup> ordre
$f'(x) = 0$	Variable connue	Symbole (')	Linéaire	SSM	1 <sup>ère</sup> ordre
$(e^t)' = 0$ $(t^t \cdot e^t = 0)$	Variable inconnue	Symbole (')	Non linéaire	SSM	1 <sup>ère</sup> ordre

Tableau 11 : Présentation des expressions algébriques proposées selon trois variables didactiques

Légende:

SSM : Sans second membre

ASM : Avec second membre

**Item (a) :** La première expression est présentée de la manière suivante :  $x^2 y' + (1 + \sin x)y + 5x = 0$ . Cette expression met à l'épreuve les connaissances des étudiants sur les équations différentielles linéaires du premier ordre. Elle est donnée sous une forme très connue, en fonction des symboles les plus familiers pour les étudiants. Bien qu'il existe deux symboles, dont un représente la fonction, la variable de dérivation n'est pas explicitée. Cela suppose que son identification repose sur les règles du contrat didactique que nous avons citées plus haut. Ainsi l'existence de deux variables  $x$  et  $y$  –suivant la règle *RI-* et le fait que le symbole (') porte sur  $y$  amène à faire l'hypothèse que la fonction peut être sous la forme :  $y(x)$ . Une fois que les rôles des symboles algébriques sont attribués, il est facile de rechercher une relation entre une fonction et ses dérivées successives pour interpréter cette expression comme une équation différentielle.

**Item (b) :** Nous voulons évaluer, dans ce cas, les savoirs opérationnels des étudiants sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Pour cela nous avons proposé l'expression suivante :  $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$ . En restant dans le registre symbolique nous avons fait appel à une forme très connue de l'institution physique au niveau de la représentation de la dérivée et au niveau des symboles

utilisés. Son écriture montre explicitement les rôles des symboles en tant que fonction et variable de dérivation. Il n'y a donc aucune ambiguïté au niveau de l'attribution de leur rôle aux symboles.

**Item (c) :** Pour mettre à l'épreuve les savoirs des étudiants à propos des équations différentielles non-linéaires nous avons fait le choix de proposer l'équation suivante:  $(y''')^{1/2} + y' = 0$ . Bien que l'application de la règle R2 puisse amener l'étudiant à identifier le symbole  $y$  comme la fonction inconnue il n'est pas facile de connaître la variable de dérivation. Selon notre analyse sur les rapports institutionnels des étudiants, il est possible de faire l'hypothèse qu'une grande partie de ceux-ci arrivent à imaginer une fonction, de type :  $y(x)$ , en faisant référence aux exercices proposés dans l'enseignement actuel.

**Item (d) :** Nous avons constaté que, à partir des exercices proposés en mathématiques, le symbole  $x$  joue en général le rôle d'une variable indépendante. Ainsi pour mettre en évidence l'effet du contrat, nous avons proposé l'expression suivante:  $(\cos x)' + x = 0$ . Notons que cette écriture présente des ambiguïtés au niveau de la représentation du symbole utilisé. Nous proposons ainsi deux façons différentes permettant d'étudier cette expression :

- Méthode 1 : soit le symbole "x" est considéré comme une variable indépendante, et il est évident que l'on a une relation, telle que " $-\sin x + x = 0$ ", qui ne représente pas une équation différentielle. Une telle proposition de réponse nous donnera la possibilité d'observer l'effet du contrat institutionnel sur les réponses des étudiants.
- Méthode 2 : soit ce symbole est considéré comme une fonction inconnue, par exemple sous une forme  $x(t)$ ; l'expression devient alors une équation différentielle telle que " $-x'(t)\sin x(t) + x(t) = 0$ ". Contrairement au comportement précédent, une réponse de ce type signifierait la tendance des étudiants à transférer les savoirs acquis en physique dans le domaine mathématique. En effet, la fonction considérée,  $x(t)$ , intervient en général en physique mais pas en mathématiques. D'après la définition générale des équations différentielles, l'expression obtenue représente donc une équation différentielle.

**Item (e) :** A ce niveau nous avons proposé l'expression suivante :  $f'(x) = 0$ . Cette expression ne représente aucune ambiguïté au niveau de la représentation: cette écriture est conforme à l'un des choix de l'enseignement actuel. Comme la fonction et la variable de dérivation sont explicitées, il suffit d'utiliser la définition des équations différentielles pour l'identifier comme une équation différentielle.

**Item (f) :**  $(e^t)' = 0$  Cette dernière expression a des propriétés similaires à celles de l'expression proposée dans l'item (d). Elle présente des ambiguïtés à propos du rôle attribué au symbole  $t$ . Appliquons alors les deux méthodes possibles évoquées précédemment (dans l'analyse de l'item (d)) :

- Méthode 1 : Si le symbole "t" est considéré comme une variable, comme on le trouve souvent dans l'enseignement de la Physique, alors l'expression proposée devient une relation absurde en terme de mathématiques :  $e^t = 0$ .
- Méthode 2 : Si ce symbole est considéré comme une fonction telle que  $t(x)$ , l'expression représente alors une équation différentielle :  $t'.e^t = 0$

### 1.1.2. Réponses attendues a priori

A présent, nous allons énumérer les définitions nécessaires pour répondre à l'exercice proposé :

⇒ Equation différentielle

On définit généralement une équation différentielle de la manière suivante : *Une équation différentielle est une relation en terme d'équation, entre une fonction et ses dérivées.* Ainsi, étant donné une fonction  $F$ , nous appelons équation différentielle toute relation de la forme :

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1)$$

Entre la variable  $x$ , la fonction  $y(x)$  et l'une de ses dérivées  $y^{(n)}$ .

⇒ *Equations linéaires*

On appelle équation différentielle linéaire, une équation de la forme :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0y(x) = \varphi(x) \quad (2)$$

dans laquelle les fonctions  $a_n(x)$ ,  $a_{n-1}(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_0$  et  $\varphi(x)$  sont supposées continues sur un même sous-ensemble  $I$  de  $\mathfrak{R}$ . Il est à noter que le mot "linéaire" concerne uniquement la dépendance par rapport à  $y$ , les éléments  $a_n(x)$  et  $\varphi(x)$  n'ont pas à être linéaires en  $x$ .

On dira qu'une équation différentielle linéaire de  $\mathfrak{R}^n$ ,

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0y(x) = \varphi(x) \quad (2)$$

est homogène si  $\varphi(x)=0$ , et non homogène si  $\varphi(x)\neq 0$ . Dans ces cas l'équation,

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0y(x) = 0 \quad (3)$$

est appelée équation homogène associée.

⇒ *Ordre d'une équation différentielle*

L'équation différentielle (1) est dite d'ordre  $\leq n$ . Cela suppose que l'ordre d'une équation différentielle est l'ordre le plus grand des dérivées successives de la fonction inconnue qui apparaissent dans l'équation.

L'analyse développée dans ce paragraphe se réfère à la fois aux analyses préalables (notamment celles qui sont conduites à partir de l'étude des rapports institutionnels) et aux objectifs fixés pour l'expérimentation.

La structure de cette analyse a priori nous permet de décrire les observables aptes à repérer les différentes conceptions attachées à l'objet équation différentielle :

- > la représentation d'une équation différentielle et l'identification faite par les étudiants,
- > la référence à la nature des équations différentielles. Celle-ci se scinde en deux parties:
  - linéarité des équations différentielles
  - ordre des équations différentielles

Nous évoquons à présent les réponses attendues pour chaque expression proposée en faisant la mise en relation avec les trois observables cités ci-dessus :

⇒ ***Les réponses attendues à propos de l'identification des équations différentielles***

*La réponse type 1.1. concerne des conceptions correctes à propos de l'objet équation différentielle :*

Dans cette catégorie se trouvent les réponses correctes pouvant être données par l'application de la définition du concept d'équation différentielle.

Dans ce cas, l'étudiant pourra assimiler quatre expressions proposées par les items (a), (b), (c) et (e) à des équations différentielles.

Cependant l'étude de deux autres expressions ( $(\cos x)' + x = 0$  et  $(e^t)' = 0$ ) nécessite d'attribuer un rôle (en tant que fonction ou variable indépendante) aux symboles mathématiques avant d'aboutir à la réponse finale. Cela signifie que l'étudiant doit découvrir lui-même le rôle de ces symboles. Nous voyons trois réponses possibles :

- soit l'étudiant considère chacun de ces deux symboles "x et t" comme une variable indépendante et il en déduit qu'elles ne représentent pas une équation différentielle,
- soit l'étudiant traite ces deux symboles comme des fonctions et il résulte que ces deux expressions représentent une équation différentielle,
- ou bien l'étudiant peut développer sa propre méthode qui le conduit à changer la présentation de l'expression en faisant appel à une autre fonction. Pour mieux expliquer cela travaillons sur l'équation (d) : il est possible que l'étudiant associe  $\cos x$  à une fonction quelconque, comme  $y(x)$ , ce qui donne une équation différentielle telle que:  $y'(x) + x = 0$ . Bien qu'un tel comportement montre l'application correcte de la définition des équations différentielles, il met en évidence l'une des difficultés des étudiants au niveau du sens donné aux symboles mathématiques. Car une telle acception attribue toujours le rôle de variable au symbole  $x$  ce qui amène l'expression à une équation telle que :  $-\sin x + x = 0$ .

*La réponse type 1.2. est la manifestation d'une conception selon laquelle, dans une équation différentielle, il doit exister une fonction inconnue et l'une de ses dérivées :*

Un étudiant ayant une telle conception cherchera dans chaque expression une fonction inconnue et au moins l'une de ses dérivées sans prendre en compte que un ou plusieurs coefficients peuvent être nuls. Dans un tel cas, l'étudiant n'identifie que l'expression (a) parmi les quatre (a, b, c et e) comme une équation différentielle. Les réponses négatives données aux trois autres items pourraient être justifiées



par l'existence d'une telle conception. Quant aux deux autres expressions ( $d$  et  $f$ ), nous nous proposons d'étudier les réponses possibles en fonction de trois possibilités citées ci-dessus :

- Si l'étudiant considère les symboles ( $x$  et  $t$ ) qui interviennent dans les expressions ( $d$ ) et ( $f$ ) comme des variables, il ne les identifiera pas à des équations différentielles.
- Si l'étudiant considère chacun de ces deux symboles comme une fonction, il identifiera les expressions ( $d$ ) et ( $f$ ) à des équations différentielles. En effet, elles se composent d'une fonction inconnue et de sa première dérivée.
- Enfin, si l'étudiant fait référence au changement de fonction (en écrivant  $\cos x \Rightarrow y(x)$ , et/ou  $e^t \Rightarrow f(t)$  par exemple) ces deux expressions deviennent des équations différentielles qui ne contiennent que la première dérivée d'une fonction inconnue. Le risque est grand de ne pas les identifier à des équations différentielles.

*La réponse type 1.3. concerne d'une conception selon laquelle les équations différentielles ne peuvent être que linéaires :*

Dans ce cas l'étudiant fait appel à la forme générale des *équations différentielles linéaires* :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = \varphi(x)$$

L'étudiant comprend que cette forme représente les équations différentielles linéaires mais il réduit l'ensemble des équations différentielles à ces dernières. Cette conception peut être la manifestation de trois règles implicites:

- > Le degré de dérivation doit être égal à un nombre entier  $n$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ),
- > La fonction inconnue doit être linéaire,
- > Le coefficient de l'une des dérivées doit être différent de zéro.

Selon cette conception, les expressions ( $a$ ,  $b$  et  $e$ ) seraient considérées comme des équations différentielles mais l'expression ( $c$ ) serait rejetée. Des réponses peuvent être données pour les deux autres expressions ( $(\cos x)' + x = 0$  et  $(e^t)' = 0$ ); nous les analysons sous trois angles différents :

- si l'étudiant considère les symboles " $x$  et  $t$ " comme des variables indépendantes, il n'identifie pas ces deux expressions à des équations différentielles.
- si l'étudiant attribue à " $x$  et  $t$ " le rôle d'une fonction, on aboutit à la même conclusion. En effet, sous cette condition ces deux expressions représentent des équations différentielles non linéaires.
- enfin, si l'étudiant redéfinit les expressions proposées à l'aide d'une autre fonction ( $\cos x \Rightarrow y(x)$ , ou  $e^t \Rightarrow f(t)$  par exemple), il les aborde comme des équations différentielles.

*La réponse type 1.4. concerne une conception qui associe la présence du symbole de dérivation aux équations différentielles :* Indépendamment des caractéristiques des expressions proposées nous nous attendons à ce qu'un étudiant ayant une telle conception identifie toutes les expressions proposées à des équations différentielles.

*Autres types de réponses* : Dans les paragraphes précédents nous avons tenté de prévoir toutes les réponses possibles. Néanmoins on peut penser que l'on trouvera des réponses qui ne sont classées dans aucun des cas cités ci-dessus; nous classerons toutes ces réponses dans une catégorie à part.

⇒ ***Les réponses attendues à propos de la "linéarité" des équations différentielles***

Dans ce paragraphe nous essayons d'identifier les éventuelles conceptions des étudiants sur la linéarité des équations différentielles. Notons que lors du classement des réponses possibles nous travaillons sur le cas où toutes les expressions sont identifiées à des équations différentielles.

*La réponse type 2.1. concerne la conception correcte à propos de la linéarité des équations différentielles:* Si l'étudiant connaît la définition de la linéarité par son opérationnalité il identifie facilement les équations différentielles étudiées comme linéaires ou non linéaires. Ainsi nous nous attendons à ce qu'un tel étudiant identifie les trois items (a), (b) et (e) à des équations différentielles linéaires et les trois autres (c), (d) et (f) à des équations différentielles non linéaires.

*La réponse type 2.2. se manifeste comme une conception qui réduit les équations différentielles non linéaires à celles comportant une fonction trigonométrique et/ou une puissance :* à ce propos notons que notre analyse des rapports institutionnels faite dans la partie précédente nous a permis de définir une telle conception. Etant donné que l'enseignement actuel n'évoque que ces deux types d'équation différentielle non-linéaire, nous nous attendons à ce qu'un étudiant limitant ses connaissances à celles acquises dans l'enseignement actuel risque d'avoir une telle conception. Cette conception peut amener l'étudiant à identifier les expressions (a, b, e et f) à des équations différentielles linéaires et les autres à des équations différentielles non linéaires. En effet un tel comportement peut se relever dans la réponse donnée à l'item (f), car celui-ci propose (dans le cas où  $t$  est considéré comme une fonction inconnue) d'étudier une équation différentielle non familière aux étudiants, comme :  $t \cdot e^t = 0$ .

*La réponse type 2.3. peut concerner une conception selon laquelle une équation différentielle linéaire ne doit comporter que des variables indépendantes linéaires :* cela signifie que l'étudiant ayant une telle conception applique la propriété de linéarité (Réponse type 2.2) à la fois au niveau de la fonction et de la variable de dérivation. Un tel comportement amène donc l'étudiant à qualifier de non linéaires des équations différentielles linéaires qui comportent des éléments trigonométriques au niveau de la variable. Ainsi nous nous attendons à ce que les expressions (a, b, c et d) soient identifiées à des équations différentielles non linéaires et les deux autres expressions (e et f) à des équations linéaires.

*Autres types de réponses* : Comme nous l'avons fait dans le premier paragraphe, nous regroupons les réponses diverses dans une catégorie à part.

⇒ **Les réponses attendues à propos de l'identification de "l'ordre" d'une équation différentielle**

En troisième lieu nous nous intéresserons aux réponses possibles pouvant être données afin de préciser l'ordre d'une équation différentielle qu'elle soit linéaire ou non.

*La réponse type 3.1. concerne la conception correcte à propos de l'ordre d'une équation différentielle; l'ordre le plus grand des dérivées successives de la fonction* : un étudiant ayant une telle conception identifiera probablement les expressions (a, d, e et f) à des équations différentielles du premier ordre, l'expression (b) à du second ordre et l'expression (c) à du troisième ordre.

*La réponse type 3.2. est la manifestation d'une conception selon laquelle l'ordre de la dérivée, qui se place en premier dans l'équation différentielle, est l'ordre de cette équation différentielle.* Un tel comportement implique que les équations différentielles présentées dans les items (a, b, d, e et f) sont des équations du premier ordre et celle présentée dans l'item (c) une équation du troisième ordre.

*La réponse type 3.3. se manifeste comme une conception impliquant que le plus haut degré, soit des dérivées soit des puissances, détecté dans une équation différentielle, est l'ordre de cette équation.* Supposons qu'un étudiant ayant une telle conception identifie les deux premières expressions à des équations différentielles du second ordre, la troisième expression à du troisième ordre et les autres expressions (d, e et f) à du premier ordre, cela montrera qu'il ne connaît pas la différence entre le degré de dérivation d'une fonction et la puissance d'un symbole.

*Autres type de réponse* : Il est évident que l'on rencontrera des étudiants ayant donné des réponses non attendues. Nous classerons ces étudiants dans une catégorie à part.

## 1.2. Analyse a posteriori de l'exercice

Dans le paragraphe précédent nous avons dégagé plusieurs types de réponses interprétables (paragraphe 1.1.2). Ils correspondent en effet à des conceptions pouvant être éventuellement observées chez les étudiants. Nous nous attendons à plusieurs réponses possibles issues des différentes tentatives d'adaptation des savoirs antérieurs.

Nous conduirons notre analyse en deux temps : d'abord un recensement sommaire avec classement, par cas des réponses des étudiants, ensuite un rapprochement entre les types de réponses. Nous nous proposons donc de mener une analyse fine sur deux axes : le premier axe est lié aux conceptions des étudiants à propos de l'objet équation différentielle. L'analyse réalisée dans ce premier axe est organisée en effet autour de la première observable "représentation d'une équation différentielle et l'identification faite par les étudiants". Cependant, en tenant compte de la relation importante entre cette observable et deux autres – qui sont liées à la nature des équations différentielles-, nous analyserons les données en fonction de l'ensemble de ces observables.

Le deuxième axe est lié aux effets de contrat observés dans le travail des étudiants conformément au rapport institutionnel à l'objet équation différentielle.

### 1.2.1 Classement global des réponses

Le tableau 12 ci-dessous permet d'avoir un aperçu général à propos des réponses des étudiants données à ce premier exercice en se référant au classement des réponses attendues dans l'analyse a priori (cf. paragraphe 1.1.2):

Linéarité des équations différentielles ↓	Identification Equation différentielle ⇒ ----- Identification de l'ordre de l'équation diff. ↓	<u>Type 1.1</u> Réponse correcte	<u>Type 1.2</u> Equation différentielle = une fonction+une dérivée	<u>Type 1.3</u> Restriction des réponses aux équations linéaires	<u>Type 1.4</u> L'existence de dérivées → existence équation différentielle	<u>Autres</u>
<u>Type 2.1</u> : Réponse correcte sur la linéarité	<u>3.1</u> Réponse correcte	11	3	17		
	<u>3.2</u> Première dérivée=ordre	1		3		
	<u>3.3</u> Puissance = ordre			1		
	<u>Autres</u>					
<u>Type 2.2</u> : 2 types d'éq diff. non linéaire -Fonction trigo. - Puissance	<u>3.1</u> Réponse correcte				1	
	<u>3.2</u> Première dérivée=ordre					
	<u>3.3</u> Puissance = ordre					
	<u>Autres</u>					
<u>Type 2.3</u> : Linéarité niveau variable	<u>3.1</u> Réponse correcte				1	
	<u>3.2</u> Première dérivée=ordre					
	<u>3.3</u> Puissance = ordre					
	<u>Autres</u>					
<u>Autres</u>	<u>3.1</u> Réponse correcte	1	2		1	4
	<u>3.2</u> Première dérivée=ordre					
	<u>3.3</u> Puissance = ordre					
	<u>Autres</u>					1
	<b>TOTAL = 47</b>	<b>13</b>	<b>5</b>	<b>21</b>	<b>3</b>	<b>5</b>

Tableau 12 : Présentation des réponses des étudiants en fonction de réponses attendues

Ce tableau donne la répartition des réponses des étudiants par rapport aux trois observables définies pour cet exercice. Nous constatons que presque tous les étudiants présents (47 sur 50) ont donné des réponses à ce premier exercice.

### 1.2.2. Analyse des réponses des étudiants

Exploitions les réponses obtenues selon nos deux axes d'analyse mentionnés ci-dessus (axe 1 : conceptions des étudiants et axe 2 : effets du contrat institutionnel):

#### **AXE 1 : Les conceptions des étudiants à propos de l'objet équation différentielle**

*Type 1.1 :* Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et l'une de ses dérivées successives

Comme on peut l'observer à partir du tableau cité ci-dessus seulement une petite partie des étudiants (13 sur 47) ont identifié correctement les expressions proposées. Pour interpréter les réponses de ces étudiants, nous prendrons en compte le classement fait par le Tableau 12:

*Type (1.1, 2.1, 3.1) :* Cette catégorie comprend 11 étudiants qui ont des connaissances pertinentes en ce qui concerne le concept de la linéarité et l'ordre des équations différentielles. Ces étudiants ont indiqué explicitement, pour chaque expression assimilée à une équation différentielle, si elle était linéaire ou non ainsi que son ordre.

Notons que tous ces étudiants ont fourni des réponses semblables pour les expressions (*a, b, c, e*) tout en les identifiant à des équations différentielles. Quant aux réponses données aux deux autres items (*d* et *f*), une grande majorité (9 sur 10) des étudiants ne les ont pas identifiés comme équation différentielle.

Parallèlement à ce qui est prévu dans l'analyse a priori, deux autres étudiants, en faisant référence à la méthode de changement de fonction (par exemple :  $y(x), f(t)...$ ) les ont identifiés à des équations différentielles. Citons un exemple :

"d.  $(\cos x)' + x = 0$  oui c'est une équation différentielle.  $y(x) = \cos x$  alors la forme  $y'(x) + x = 0$ " (Aurélie, E19)

Bien que tous ces étudiants soient capables de reconnaître les équations différentielles, neuf parmi eux ne tentent pas de justifier les réponses données. Deux autres étudiants (Steven, E16 et Amandine, E40) ont essayé de justifier seulement les réponses données aux items (*a, b, e*) dans lesquels on a traité des équations différentielles linéaires. Pour cela ils ont fait appel explicitement à la forme générale de ce type d'équations différentielles.

L'absence observée au niveau de la justification, chez une grande partie des étudiants, montre que même si les savoirs acquis sont opérationnels pour une étude qui nécessite l'identification des expressions, les étudiants n'arrivent pas à les exprimer.

*Type (1.1, 2.1, 3.2)* : Cette catégorie ne comprend qu'un seul étudiant (Nicolas, E49). On observe que cet étudiant a travaillé seulement sur les quatre premières expressions ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ ) et les a identifiées à des équations différentielles. Notons qu'aucune technique n'est détectée dans sa copie, qui justifie les réponses données. Conformément aux ambiguïtés notées à propos de l'expression  $d$ , il a suivi le même chemin qu'Aurélië à qui nous avons emprunté l'exemple cité ci-dessus.

Concernant l'accomplissement de la deuxième tâche de l'exercice (préciser la nature de l'équation différentielle identifiée), on observe qu'il arrive à identifier une équation différentielle comme linéaire ou non linéaire. Cependant on observe aussi que, pour cet étudiant, l'ordre de la dérivée qui occupe la première place est l'ordre de l'équation différentielle étudiée. Voici un exemple représentatif :

"b.  $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$ , c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre". (Nicolas, E49)

Nous voyons deux possibilités pouvant engendrer un tel comportement : soit cet étudiant n'attache pas d'importance à l'ordre de l'équation différentielle et commet une faute venant de manque d'attention, soit cette propriété ne lui est pas connue.

*Type (1.1, Autres, 3.1)* : Il s'agit d'un seul étudiant (Romain, E20) se classant dans cette catégorie. Pour cet étudiant les expressions  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e$  représentent des équations différentielles et les autres non. Cet étudiant a essayé de justifier uniquement les réponses qui identifient les équations différentielles linéaires. Cependant, notons que, à aucun moment, il n'a distingué les équations différentielles linéaires ou non-linéaires. Cela revient à dire que cette propriété n'est pas opérationnelle ou n'est pas connue de cet étudiant. Il a pu cependant exprimer sans difficulté l'ordre de chaque équation différentielle définie.

**Type 1.2** : Une équation différentielle doit comporter une fonction et l'une de ses dérivées

D'une façon floue cinq étudiants cherchent dans chaque expression proposée une fonction inconnue et l'une de ses dérivées en vue de l'identifier comme une équation différentielle. Bien que ces étudiants aient donné différentes réponses à propos des expressions représentant une équation différentielle il est possible de déceler certains indices qui permettent de conclure qu'ils peuvent avoir une telle conception. Citons ci-dessous deux réponses données par l'un de ces étudiants:

"e.  $f'(x) = 0$  n'est pas une équation différentielle car il s'agit d'une dérivée seulement. Elle ne répond en aucun cas à la définition d'une équation différentielle.

f.  $(e')' = 0$  n'est pas une équation différentielle car on n'a pas "l'originale de la fonction".

(Khalid, E4)

Analysons à présent les réponses obtenues en fonction des regroupements faits dans le Tableau 12 :

*Type (1.2, 2.1, 3.1)* : On observe que la définition de la linéarité et de l'ordre d'une équation différentielle sont connues correctement par trois étudiants se classant dans cette catégorie.

*Types (1.2, Autres, 3.1)* : Deux autres étudiants sont classés dans cette deuxième catégorie. Bien que ces étudiants aient précisé correctement l'ordre de chaque équation différentielle, ils n'ont pas cherché à l'identifier comme linéaire ou non linéaire. Ceci signifie que le concept de linéarité n'est pas connu de ces étudiants.

**Type 1.3** : Les équations différentielles se limitent aux équations linéaires

Nous avons constaté que pour une partie importante des étudiants (21 sur 47), l'ensemble des équations différentielles se réduit aux équations linéaires. Nous avons généralement observé des réponses similaires chez ces étudiants : les expressions  $(a, b, e)$  représentent une équation différentielle alors que les autres expressions n'en représentent pas.

Les réponses données par 6 étudiants montrent explicitement qu'ils ont fait appel à la forme générale des équations différentielles linéaires en vue de choisir les expressions qui représentent une équation différentielle. Citons un exemple représentatif :

"a.  $x^2 y' + (1 + \sin x)y + 5x = 0$  est une équation différentielle. Car elle est de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = g(x)$$

c.  $(y''')^{1/2} + y' = 0$ , non ce n'est pas une équation différentielle" (Lise, E39)

Les autres étudiants (15) se contentent d'identifier les expressions proposées sans expliciter la technique utilisée. Voici un exemple représentatif de ce genre des réponses :

"a.  $x^2 y' + (1 + \sin x)y + 5x = 0$  représente une équation différentielle

b.  $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$  c'est une équation différentielle". (Guelle, E13)

Prenant en compte les groupements faits dans le Tableau 12, nous présentons les réponses données par ces étudiants en trois catégories :

*Type (1.3, 2.1, 3.1)* : Cette première catégorie comporte 15 étudiants qui ont précisé chaque fois qu'il s'agit d'une équation différentielle linéaire et qui ont identifié correctement son ordre.

*Type (1.3, 2.1, 3.2)* : Les réponses données par les 3 étudiants se classant dans cette deuxième catégorie signalent l'existence d'une conception à propos de l'ordre d'une équation différentielle. Selon cette conception l'ordre de la dérivée qui se place en premier dans la représentation algébrique d'une équation différentielle est l'ordre de cette équation différentielle. Citons à ce propos un exemple de ce genre de réponse :

"b.  $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$ , Linéaire du premier degré." (Cecile, E48).



*Type (1.3, 2.1, 3.3)* : Cette troisième catégorie comprend un seul étudiant pour qui le plus grand nombre, qu'il soit la puissance ou la dérivée de la fonction, s'identifie à l'ordre de l'équation différentielle étudiée. Citons un exemple pour illustrer ce propos :

"a.  $x^2 y' + (1 + \sin x)y + 5x = 0$  est une équation différentielle du second ordre". (Steven, E24)

**Type 1.4** : Toutes les expressions comportant le symbole de dérivée représentent des équations différentielles

Cette conception permet de caractériser l'ensemble des équations différentielles par le signe de dérivée. Ainsi trois étudiants ont identifié sans justification toutes les expressions proposées à des équations différentielles. Voici un extrait représentatif des réponses de ces étudiants :

"a. Equation différentielle de degré 1 car la fonction  $y$  est au plus dérivée au premier degré.

d. Equation du premier degré. Le terme de plus au degré est  $(\cos x)'$ . Elle n'est plus homogène car on a le cosinus du premier degré. Le second terme est nul.

f. équation différentielle du premier degré homogène de la forme  $ax' + bx = 0$  avec  $b = 0$ ."

(Nicolas, E10)

*Type (1.4, 2.2, 3.1)* : un seul étudiant (Marklis, E41) s'inscrit dans cette catégorie. On observe qu'il limite le concept de linéarité à l'absence de fonctions trigonométriques ou de puissances. Voici la réponse donnée par cet étudiant nous permettant d'en déduire ce constat :

"f.  $(e')' = 0 \Rightarrow t'.e' = 0$  linéaire homogène 1<sup>ère</sup> ordre" (Marklis, 41)

*Type (1.4, 2.3, 3.1)* : un seul étudiant (Maximo, E27) a donné des réponses qui permettent de le classer dans cette catégorie. Bien que cet étudiant n'ait aucune difficulté pour connaître l'ordre d'une équation différentielle on constate que la linéarité d'une telle équation n'est pas connue correctement. Pour lui, une équation différentielle linéaire doit être linéaire au niveau de la fonction et de la variable indépendante. Citons sa réponse donnée à l'item b:

"b.  $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$ . Oui mais, ce n'est pas une équation linéaire car il y a  $\cos t$ ".

*Type (1.4, Autres, 3.1)* : Notons que le seul étudiant de cette catégorie (Nicolas, E10) n'identifie jamais les équations différentielles linéaires/non linéaires. Ceci peut signifier soit des lacunes au niveau des techniques permettant d'identifier une équation différentielle comme linéaire ou non linéaire soit une incompréhension de la tâche proposée. On observe cependant qu'il arrive à identifier correctement l'ordre d'une équation différentielle.

#### **Autres types de réponses :**

Nous avons compté 5 étudiants qui ne sont pas classés dans ces 4 catégories définies en fonction des éventuelles conceptions à propos du concept d'équations différentielles. Selon notre tableau d'analyse (Tableau 12) ces étudiants se classent en deux groupes que nous détaillons ci-dessous :

*Type (Autres, Autres, 3.1)* : 4 étudiants se sont classés dans cette première catégorie. Concernant le concept de linéarité on constate qu'aucun de ces étudiants n'a précisé si les équations différentielles choisies étaient linéaires ou non. Cependant on constate qu'ils sont tous capables d'identifier correctement l'ordre de chacune des équations différentielles définies.

On observe que, malgré les différentes réponses données aux 5 expressions proposées, ces 4 étudiants ont fourni le même type de réponse à l'item (b). Cette réponse peut dénoter des ambiguïtés importantes à propos de la représentation algébrique d'une équation différentielle, comme l'exemple représentatif ci-dessous:

"b.  $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$  car elle dépend de 2 variables. En l'occurrence  $x$  et  $t$ . or une ED ne doit dépendre que d'une seule variable." (Michel, E34).

Cet exemple montre que, ces étudiants, malgré la représentation explicite de la fonction et de la variable dans cette équation différentielle, ont tendance à considérer que les symboles ( $x$  et  $t$ ) représentent des variables indépendantes. Cela revient à dire que, les trois règles du contrat évoquées dans l'analyse a priori sont moins efficaces face à une telle habitude acquise dans l'institution mathématique où ces deux symboles sont utilisés en vue de représenter exclusivement des variables indépendantes.

*Type (Autres, Autres, Autres)* : Un seul étudiant (Chouki, E8) étant classé dans cette catégorie a mis l'accent sur l'existence d'une autre conception selon laquelle une équation différentielle doit être du premier ou du second ordre. Citons l'une des réponses donnée par cet étudiant :

"c.  $(y''')^{1/2} + y' = 0$ . N'est pas une équation différentielle car elle n'est ni du premier ordre ni du second" (Chouki, E8).

Le fait que l'enseignement actuel ne s'intéresse qu'à ces deux types d'équations différentielles est peut être la seule raison qui conduit cet étudiant à donner une telle réponse.

On observe que cet étudiant ne cherche jamais à préciser la nature (linéaire/non-linéaire et 1<sup>ère</sup>, 2<sup>nd</sup> ordre etc.) des équations différentielles identifiées.

## **AXE 2 : Les effets du contrat institutionnel sur les représentations des équations différentielles**

En nous inspirant des pratiques de l'enseignement actuel de l'objet équation différentielle, nous voulons dégager l'effet du contrat algébrique, qui attribue souvent le même rôle aux mêmes symboles algébriques (en mathématique :  $x \rightarrow$  variable indépendante, en physique :  $x \rightarrow$  fonction,  $t \rightarrow$  variable indépendante), dans la représentation des équations différentielles. A ce propos nous faisons l'hypothèse que la présentation faites à l'aide de quelques symboles algébriques peut poser des

problèmes aux étudiants cherchant à saisir le sens attribué à ces symboles et/ou peut les conduire à faire uniquement référence aux équations différentielles étudiées et à rester ainsi dans un cadre limité.

Pour vérifier cette hypothèse et détecter l'effet de ce contrat nous avons proposé deux expressions ( $d$  et  $f$ ) pour lesquelles les rôles joués par ces symboles ne sont pas connus. Pour analyser les réponses obtenues à ces expressions, nous avons intégré deux points de vue méthodologiques : dans un premier temps nous sommes intéressés aux réponses dans lesquelles les rôles attribués à ces symboles sont explicités par les étudiants. A ce propos citons un exemple:

" $f. (e^t)' = 0$ . Non.  $t$  est une variable et non une fonction." (Benoit, E12)

Dans un deuxième temps nous sommes intéressés aux réponses qui n'explicitent pas le rôle attribué à ces concepts mais qui nous permettent d'en déduire ce rôle. Voici deux exemples représentatifs :

Exemple 1 : " $f. (e^t)' = 0$  ce n'est pas une équation différentielle car  $(e^t)'$  et  $e^t > 0$ , donc jamais nulle. Cette équation est impossible." (Guelle, E13)

Exemple 2 : " $f. [...] c'est une équation différentielle d'après (e) où  $f'(t) = 0$  avec  $f: t \rightarrow e^t$ ." (Sarah, E3)$

En effet les réponses données aux expressions ( $d, f$ ) vérifient notre hypothèse énoncée ci-dessus. En analysant les réponses obtenues, on peut en conclure que le symbole " $t$ " (pour 35 étudiants sur 45 ayant donné une réponse à cet item) et le symbole " $x$ " (pour 31 étudiants sur 43 ayant attribué une réponse à cet item), ne peuvent jamais représenter une fonction inconnue dans une expression algébrique.

Ce choix fait par les étudiants montre que, souvent, la représentation des équations différentielles par des symboles identiques les conduit à rester dans un domaine d'application fermé.

## 2. Les analyses de l'Exercice 2

### 2.1. Analyse a priori de l'exercice

#### 2.1.1. Présentation de l'exercice

A la suite de notre étude du rapport institutionnel des étudiants à l'objet équations différentielles en mathématiques, nous nous sommes posés six questions dont quatre seront traitées dans ce paragraphe. Nous allons donc chercher à apporter des éléments de réponse à ces questions à l'aide d'une analyse fine des productions des étudiants. Rappelons ci-dessous ces questions :

*Q2 : Compte tenu des caractéristiques de l'enseignement actuel, serait-il possible de tester la viabilité d'une autre approche qu'algébrique, par exemple l'approche qualitative, en rendant difficile le recours à la première et en conduisant les étudiants vers la deuxième ?*

*Q3 : Compte tenu de l'importance attachée à la résolution algébrique des équations différentielles, les étudiants sont-ils capables d'appliquer correctement les techniques algébriques étudiées dans cette institution ?*

*Q4 : La dominance du types de tâches, qui portent sur les calculs algébriques lors de l'étude des équations différentielles, peut-elle conduire les étudiants à méconnaître d'autres types de tâches relatifs aux équations différentielles ?*

*Q5 : Les étudiants sont-ils capables d'identifier correctement la représentation graphique d'une équation différentielle dont la représentation symbolique est connue ? Si oui quels types de connaissances sont-ils mobilisés ? Si non, quelles sont les difficultés que les étudiants rencontrent à ce propos ?*

Cet exercice se compose au total de trois questions. Ces questions impliquent une confrontation des techniques algébriques dominantes dans l'enseignement actuel avec les techniques qualitatives. Cette confrontation nous est essentiellement utile pour observer la prédominance de l'étude algébrique des équations différentielles chez les étudiants. En particulier nous voulons voir si le travail purement algébrique auquel sont incités les étudiants va rester en accord avec des résultats généraux du cours tels que : "l'accomplissement d'une tâche relative à une équation différentielle passe par la résolution algébrique de cette dernière".

Cet exercice a été présenté de la manière suivante :

Exercice 2 :

Q1 : Tracer le graphique de la fonction  $g(x)$  définie par  $g(x) = 3$  si  $0 \leq x \leq 1$  et  $g(x) = 2e^{1-x} + 1$  si  $x \geq 1$ .

Q2 : Etudier le comportement de la fonction solution  $y(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  pour l'équation différentielle :

$$y'(x) = -y(x) + g(x) \text{ satisfaisant } y(2) = 4.$$

Q3 : Laquelle de ces figures représente le champ des vecteurs tangents associé à l'équation différentielle ci-dessus ? Justifier votre réponse ?

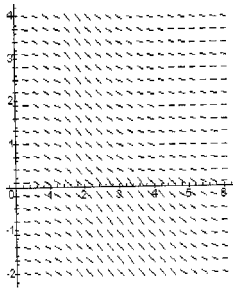


Figure 1

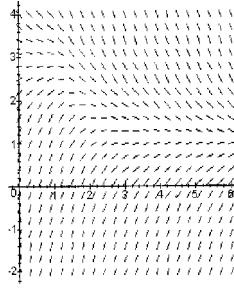


Figure 2

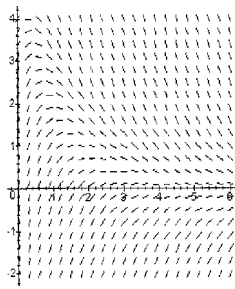


Figure 3

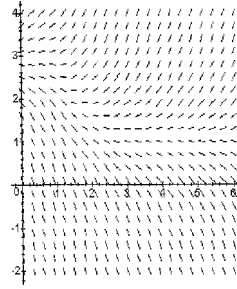


Figure 4

Notons que cet exercice requiert les connaissances basiques acquises dès la classe de terminale S, mais se présente ici d'une façon inhabituelle offrant ainsi aux étudiants la possibilité de faire un aller-retour entre les questions posées.

Pour réaliser une analyse fine, nous nous proposons de détailler chacune des questions posées :

2.1.2. Analyse a priori de la Question 1

**1° Description de la question**

La tâche de "tracer le graphique d'une fonction définie sur deux intervalles" est une activité préparatoire à la deuxième question de cet exercice. Au delà d'être une activité préparatoire les graphiques proposés par les étudiants doivent nous permettre d'une part de connaître le taux de réussite des étudiants en ce qui concerne une tâche de conversion (représentation graphique d'une fonction donnée) et d'autre part de repérer les erreurs apparaissant lors du passage d'un registre à l'autre : du registre symbolique au registre graphique.

**2° Etude mathématique de la question et des réponses attendues**

En s'appuyant sur les savoirs antérieurs des étudiants nous avons recensé deux techniques permettant de résoudre la tâche proposée :

⇒ Technique numérique

La tâche de tracer le graphique d'une fonction quelconque (en l'occurrence de celle définie :  $g(x) = 3$  si  $0 \leq x \leq 1$   $g(x) = 2e^{1-x} + 1$  si  $1 \leq x \leq \infty$ ) se rencontre dès la classe de seconde dans le cadre numérique.

Pour accomplir cette tâche l'institution est en mesure de forger une technique<sup>1</sup> conduisant :

- à construire un tableau de valeurs, de la façon suivante (figure 3):

$x$	1	2	3	...	...	$+\infty$
$g(x)$	3	$\frac{2}{e} + 1$	$\frac{2}{e^2} + 1$			1

Figure 3: Tableau de valeur de la fonction  $g(x)$

- à placer les points correspondants dans le repère et à relier ces points en "lissant" la courbe. Les réponses, données en prenant en compte cette technique numérique, doivent porter sur certaines valeurs de la fonction " $g(x)$ " pour certains " $x$ " choisis au hasard et les associer sur *un repère cartésien* en vue de connaître le graphique de la fonction en question.

⇒ Technique algébrique

Cette technique est la technique la plus connue permettant de représenter graphiquement des fonctions algébriques. Quatre sous-types de tâches se succèdent pour aboutir au graphique demandé en fonction de cette technique.

$T_1$  : On cherche à vérifier qu'il s'agit d'une fonction continue sur les deux intervalles

Comme la fonction  $g(x)$  admet une valeur à gauche et une valeur à droite en 1, il faut tester l'égalité entre ces deux valeurs :

$$g(x) = 3 \text{ si } 0 \leq x \leq 1$$

$$g(1) = 2e^{1-x} + 1 = 3, \text{ si } 1 \leq x \leq \infty$$

cette égalité montre que  $g(x)$  est continue en 1.

$T_2$  : On identifie la variation de la courbe à l'aide de la première dérivée de la fonction

$$g'(x) = -2 e^{1-x}$$


	1	$x$	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$			

Figure 4: Présentation de tableau de variation de la fonction  $g(x)$

La courbe de la fonction  $g(x)$  est donc strictement décroissante (figure 4).

<sup>1</sup> Emprunté au manuel mathématiques de seconde, Breal 2000

$T_3$  : On définit les branches infinies à l'aide du calcul de limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

ce résultat montre que la fonction  $g(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers l'infini.

$T_4$  : On identifie l'allure de la courbe représentative de cette fonction sur le deuxième intervalle à l'aide de la dérivée seconde de la fonction  $g(x)$ ,

$$g(x) = 2.e^{1-x} + 1$$

$$g'(x) = -2.e^{1-x} \text{ et } g''(x) = 2.e^{1-x}$$

En prenant en compte tous les résultats obtenus, on peut proposer la courbe de la figure 5:

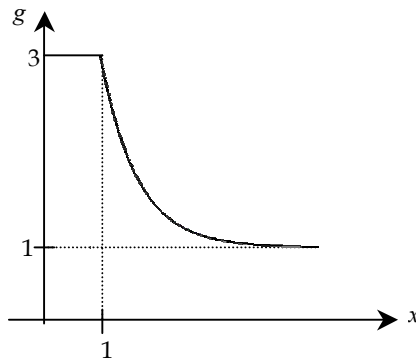


Figure 5: Présentation graphique de la fonction  $g(x)$

Selon notre analyse de l'enseignement actuel, nous nous attendons à ce que cette deuxième technique soit plus utilisée que la technique numérique par une grande partie des étudiants.

### 2.1.3. Analyse a priori de la Question 2

#### **1° Description de la question**

La deuxième question de cet exercice relève du type de tâche suivant: "étudier le comportement d'une fonction solution  $y(x)$  à l'infini".

Formulons deux hypothèses qui ont présidé au choix des questions posées :

→ La technique algébrique apparaît comme le seul moyen d'étudier le comportement d'une fonction représentée par une équation différentielle,

→ L'effet du contrat institutionnel peut conduire les étudiants à réaliser une seule tâche, à savoir "résoudre l'équation différentielle proposée" au lieu d'accomplir la tâche essentielle : "étudier le comportement de la fonction  $y(x)$ ".

#### **2° Etude mathématique de la question et les réponses attendues**

Notons une certaine diversité des techniques possibles pour répondre à cette question: il s'agit de la technique qualitative et de la technique algébrique. Détaillons à présent ces deux techniques :

⇒ Technique qualitative

Même si l'étude du comportement d'une fonction définie par une équation différentielle conduit quasi-exclusivement vers une étude algébrique, la proposition de la première question peut amener l'étudiant à réaliser une étude qualitative.

Cette première technique peut être considérée comme l'ensemble de trois sous-types de tâches :

*T<sub>1</sub> : On définit l'équation différentielle à étudier*

Pour connaître le comportement de la fonction  $y(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini, il suffit de prendre en compte la valeur de  $g(x)$  pour  $x \geq 1$ , où l'équation différentielle est définie sous la forme suivante :  
 $y'(x) = -y(x) + 2.e^{1-x} + 1$

*T<sub>2</sub> : On fractionne le plan cartésien à l'aide de l'isocline zéro*

L'isocline zéro peut être trouvée de la façon suivante :

$$y'(x) = 0 \text{ alors } 0 = -y(x) + 2.e^{1-x} + 1$$

$$\text{d'où } y(x) = 2.e^{1-x} + 1$$

La courbe qui représente cette fonction doit être de la même forme que le graphe tracé à la Question 1 pour l'intervalle  $[1 ; \infty[$ . La figure suivante permet alors de connaître l'isocline zéro de cette équation différentielle (graphe de la figure 6):

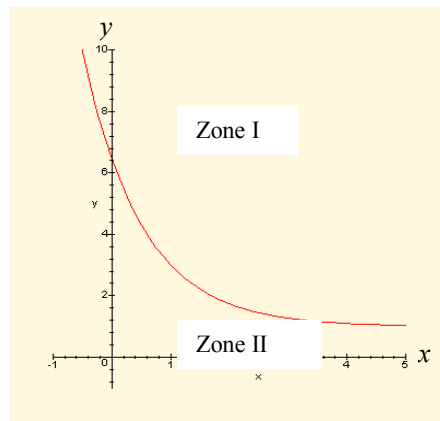


Figure 6: Présentation de l'isocline zéro de l'équation différentielle proposée

*T<sub>3</sub> : On détermine le comportement de la fonction  $y(x)$  définie par une équation différentielle du premier ordre*

Pour accomplir cette tâche on s'intéresse au signe de la première dérivée de la fonction  $y(x)$  :

$$y'(x) = -y(x) + 2.e^{1-x} + 1$$

On peut construire un tableau de variation comme ci-dessous (figure 7):



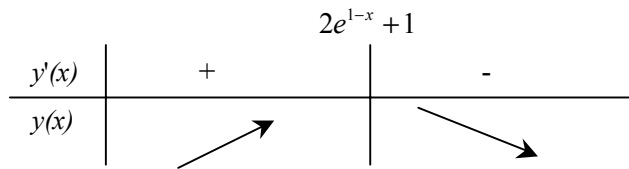


Figure 7: Tableau de variation des courbes solutions de l'équation différentielle proposée

La fonction  $y(x)$  est croissante dans la zone où  $y(x) \leq 2e^{1-x} + 1$  (zone II) et décroissante dans la zone I.

On dispose ainsi de trois tâches constituant la technique qualitative permettant de conclure que la fonction  $y(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers l'infini et qu'elle est décroissante.

⇒ Technique algébrique

La technique algébrique fait partie du contrat existant entre étudiants et enseignants et concernant la résolution des équations différentielles; elle est la technique préférentielle permettant de résoudre une équation différentielle linéaire.

Cette technique se divise en cinq sous-types de tâches:

$T_1$  : On définit l'équation différentielle en prenant en compte l'intervalle où il faut étudier le comportement de la fonction  $y(x)$

On peut remarquer que pour connaître le comportement de la fonction  $y(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini il est suffisant de prendre en compte la valeur de  $g(x)$  pour  $x \geq 1$ . L'équation différentielle à étudier est la suivante:  $y'(x) = -y(x) + 2e^{1-x} + 1$

$T_2$  : On cherche la solution générale de l'équation différentielle

En général, il existe deux façons d'appliquer la même technique permettant de trouver la solution générale d'une équation différentielle linéaire sans second membre :

→ Une première façon est basée sur la recherche de la solution homogène de l'équation différentielle au moyen du calcul intégral.

→ Une deuxième façon implique la recherche de la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation différentielle sans réaliser explicitement le calcul intégral.

Ces deux façons de faire permettent de trouver que la solution de l'équation homogène s'écrit sous la forme suivante :  $S_0 = \{x \in I \rightarrow C.e^{-x} / C \in \mathfrak{R}\}$

$T_3$  : On cherche une solution particulière de l'équation différentielle

Notre étude des rapports institutionnels permet de répertorier deux techniques permettant d'aboutir à cette solution :

→ La première technique applique la méthode de la variation de la constante. En effet elle est reconnue par les étudiants comme la méthode la plus pertinente qui permette de connaître correctement cette solution.

→ La deuxième technique consiste à proposer une fonction ayant la même forme que le second membre de l'équation différentielle étudiée. Cette méthode est souvent indiquée dans l'enseignement actuel dans le cas de solutions constantes ou de solutions de la forme de polynômes du premier ou second degré.

Ces deux techniques peuvent amener l'étudiant à donner une solution particulière et à écrire la solution générale de l'équation différentielle étudiée de la façon suivante:

$$S = \{x \in I \rightarrow C.e^{-x} + 2.x.e^{1-x} + 1 / C \in \mathfrak{R}\}$$

*T<sub>4</sub> : On cherche la solution satisfaisant les conditions initiales données par l'énoncé*

Comme nous l'avons noté précédemment (Chapitre C<sub>2</sub>, paragraphe 1.2) ce type de tâches porte sur un simple calcul mathématique qui permet de définir une seule solution qu'on peut écrire de la façon suivante :  $S = \{x \in I \rightarrow (3e^2 - 4e).e^{-x} + 2x e^{1-x} + 1\}$ .

*T<sub>5</sub> : On calcule la limite*

Pour connaître le comportement de la fonction solution au voisinage de  $+\infty$  il faut calculer la limite :  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = (3e^2 - 4e).e^{-x} + 2x e^{1-x} + 1 = 1$

L'accomplissement de ces différentes tâches permet de conclure que la fonction  $y(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers l'infini et qu'ainsi les fonctions solutions sont décroissantes.

Nous nous attendons à ce que cette deuxième technique soit préférée par une grande partie des étudiants parallèlement au choix didactique de l'enseignement actuel.

#### 2.1.4. Analyse a priori de la Question 3

##### **1° Description de la question**

La troisième question de cet exercice s'accompagne de quatre figures présentées afin de tester la mobilisation des connaissances des étudiants à propos de l'identification de la représentation graphique d'une équation différentielle.

La tâche d'identification du champ des vecteurs tangents d'une équation différentielle est rarement présentée dans l'enseignement actuel. Il en est de même des techniques pour accomplir cette tâche. Les réponses des étudiants à cette question doivent nous permettre de connaître leurs aptitudes face à une tâche moins courante et ainsi les difficultés rencontrées lors du passage d'une représentation à une autre représentation dans le cas d'une équation différentielle.

**2° Etude mathématique de la question et les réponses attendues :**

Nous avons recensé au total trois techniques qui peuvent amener l'étudiant à une réponse correcte :

⇒ Technique qualitative

Cette technique nécessite de faire appel à l'isocline zéro qui a été tracée précédemment lors de la résolution de la Question 1 de cet exercice. En effet elle peut se résumer aux deux règles suivantes :

- > Si l'isocline zéro de l'un des graphes proposés n'a pas la même forme que l'isocline zéro de l'équation différentielle il faut éliminer ce graphe,
- > Si l'isocline zéro a la même forme que celle de l'énoncé, cela signifie que le graphe répond à la question.

⇒ Technique algébrique

Une deuxième technique se base sur une étude algébrique qui nécessite de faire appel à une seule fonction solution de l'équation différentielle proposée (probablement celle trouvée lors de la résolution de la Question 2 de cet exercice). Les deux règles ci-dessous montrent comment s'applique cette technique :

- > Si l'un des graphes proposés n'a pas la même valeur limite que la fonction solution trouvée il faut l'éliminer,
- > Mais s'il a la même valeur limite que cette fonction solution, il répond à la question.

⇒ Technique numérique

Cette dernière technique nécessite d'identifier le comportement (croissant, décroissant) des fonctions solutions pour certains points choisis arbitrairement et de comparer les valeurs aux figures proposées. Cette technique se présente sous la forme de calculs numériques (par exemple : Prenons le point (1; 2) :  $y'(1) = 1 \Rightarrow y'(1) > 0$ . Ceci montre que la solution qui passe par ce point est strictement croissante). Voici les deux règles formulant cette technique :

- > Si les valeurs calculées pour plusieurs points choisis ne sont pas conformes aux valeurs correspondant à ces mêmes points observés sur un graphe, on peut éliminer ce graphe,
- > Si ces valeurs calculées sont conformes à celles observées sur le graphe, celui-ci répond à la question.

Nous nous attendons à ce qu'une grande partie des étudiants mobilisent la deuxième technique présentée ci-dessus en vue de répondre à cette question.

## 2.2. Analyse a posteriori de l'exercice

### 2.2.1. Analyse a posteriori de la Question 1

Pour construire cette partie de notre analyse, nous avons tenté d'identifier les techniques employées par les étudiants afin de mettre en évidence l'effet du contrat et de connaître particulièrement leurs aptitudes à passer du registre symbolique au registre graphique.

#### a. Résultats globaux

Nous avons particulièrement examiné la technique utilisée pour tracer le graphe cherché et la cohérence entre les deux représentations de la fonction étudiée. Sur ce point, nous avons observé une autre technique que celles évoquées dans notre analyse a priori : la technique qualitative. Voici le tableau 13 qui résume les réponses des étudiants :

Technique associée	Effectif / Réussite
Technique algébrique	15 / 13
Technique numérique	2 / 1
Technique qualitative	31 / 24

Tableau 13 : Présentation des réponses obtenues selon les techniques utilisées

La quasi totalité des étudiants (96%) fournissent un graphe pour la fonction proposée. Cependant un certain nombre s'expriment au niveau des techniques utilisées : une partie importante des étudiants (64,6%) parmi ceux qui ont abordé cette question estiment qu'il s'agit d'une fonction de référence et trace le graphe de la fonction  $g(x)$  en faisant référence aux savoirs acquis, 31,2% fournissent des graphiques en faisant référence à la technique algébrique et seulement 4,2% font appel à la technique numérique afin d'accomplir la tâche proposée.

#### b. Interprétation des réponses

Pour interpréter les réponses obtenues à la question posée, nous les regroupons en fonction de la technique mobilisée.

⇒ Etudes algébriques

Nous avons constaté que 15 étudiants sur 48 ont utilisé la technique algébrique décrite ci-dessus pour tracer le graphe de la fonction  $g(x)$ . Cependant on observe qu'ils ont tous appliqué partiellement cette technique en se focalisant particulièrement sur deux sous types de tâches  $T_2$  (identifier la variation de la courbe) et  $T_3$  (trouver la valeur limite de la fonction) tout en ignorant les deux autres sous-types de tâches formant cette technique algébrique ( $T_1$  : vérifier la continuité de la fonction étudiée et  $T_4$  : identifier l'allure de la courbe cherchée). Ce comportement nous semble fortement lié aux pratiques des enseignants de l'institution.

Nous observons qu'une grande majorité de ces étudiants (13 sur 15) ont fourni des graphes ayant la forme correcte alors que deux étudiants ont commis des erreurs soit au niveau du calcul de la limite soit au niveau de la continuité de la fonction  $g(x)$ . Voici un exemple représentatif :

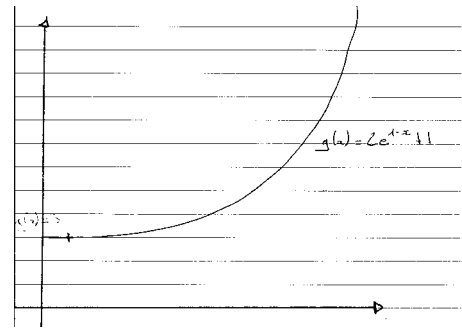
$$"g(x) = 2.e^{1-x} + 1 \text{ si } x \geq 1 \text{ et } g'(x) = 2 \cdot -1 \cdot e^{1-x} = -2 \cdot e^{1-x}$$

$$g'(1) = -2 \cdot e^0 = -2 \text{ et } g(1) = 2 \cdot e^0 + 1 = 3$$

$$g'(x) = \infty \text{ car } 1 - x \rightarrow -\infty \text{ alors } e^{-\infty} \rightarrow \infty$$

par conséquent, vu que  $g'(x)$  croit alors que  $g(x) \rightarrow \infty$

$x$	1	$\infty$
$g'(x)$	-2	+
$g(x)$	3	



" (Michel, E9)

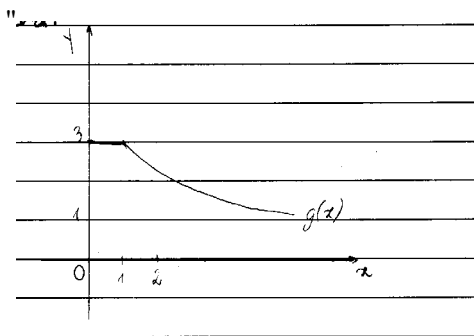
Cet extrait montre que Michel a commis une erreur lors de la recherche de la valeur limite de la fonction  $g(x)$  en conséquence il a fourni un graphe erroné.

⇒ Etudes numériques

Deux étudiants ont tenté d'appliquer la technique numérique pour tracer le graphe cherché. L'un de ces deux étudiants a pu le tracer correctement alors que l'autre étudiant n'a pas pu achever son calcul et, par conséquent, n'a pas proposé de graphe.

⇒ Etudes qualitatives

Il s'agit de réponses où les étapes permettant d'accomplir la tâche proposée ne sont pas explicitées. Nous avons considéré ce type d'étude comme une étude qualitative nécessitant de faire appel à une fonction de référence. Nous présentons ci-dessous un exemple:



" ( Anne-Claire, E29)

On observe que cet étudiant a tracé correctement le graphique de la fonction  $g(x)$  sans réaliser (sur sa copie) explicitement aucun calcul algébrique ni numérique.

Les résultats obtenus montrent que la technique qualitative remplace notamment la technique algébrique lors de l'accomplissement d'une tâche familière. L'une des principales raisons de ce type de réponses pourrait découler des enjeux mathématiques institutionnels sous-jacents à la tâche proposée.

A propos de l'exactitude des graphes proposés, on observe qu'une grande majorité des étudiants (24 sur 31) ont réussi à tracer correctement le graphe cherché.

Les autres étudiants ont proposé des graphes erronés : 2 étudiants ont proposé des graphes où la fonction  $g(x)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers l'infini, 2 autres étudiants ont proposé des graphes croissants en supposant que  $g(x)$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers l'infini. Enfin, trois autres étudiants ont proposé des graphes qui ne sont pas continus en 1.

### 2.2.2. Analyse a posteriori de la Question 2

#### a. Résultats globaux

Voici le tableau 14 représentant les réponses des étudiants selon les deux techniques décrites dans l'analyse a priori :

Technique associée	Effectif / Réussite
Technique qualitative	0
Technique algébrique	45 / 10

Tableau 14 : Présentation des réponses des étudiants selon les deux techniques possibles

Le premier résultat important à signaler tient dans le fait que tous les étudiants qui tentent de résoudre la tâche proposée ont fait appel à la technique algébrique.

Par ailleurs on constate aussi que moins d'un tiers des étudiants ont réussi à accomplir correctement cette tâche en utilisant cette technique algébrique.

#### b. Interprétation des réponses obtenues

Comme nous l'avons observé dans le Tableau 14, une seule technique a été mobilisée par les étudiants. Cependant ce choix n'a pas conduit tous les étudiants à donner les réponses identiques. Pour mieux caractériser les réponses fournies, nous les classons en fonction des sous-types de tâches accomplis par les étudiants, dans la mise en œuvre de cette technique algébrique. Rappelons qu'il s'agissait de 5 sous-types de tâches tels que : "T<sub>1</sub> : Ecrire la forme de l'équation différentielle en tenant compte de la question proposée", "T<sub>2</sub> : Trouver la solution générale", "T<sub>3</sub> : Trouver une solution particulière", "T<sub>4</sub> : Appliquer les conditions initiales" et "T<sub>5</sub> : Calculer la limite".

Cette classification nous permet de réaliser une analyse assez fine tout en détaillant la mise en œuvre de chacun de ces sous-types de tâches par ces étudiants: nous avons détecté trois types d'études que nous définissons ci-dessous à l'aide des caractéristiques communes observées:

- > Groupe n°1 : Chacune des études s'inscrivant dans ce groupe met en oeuvre tous les sous-types de tâches décrits précédemment. Ces études se résument à l'application intégrale de la technique choisie.
- > Groupe n°2 : Toutes les études classées dans ce groupe montrent des tentatives pour accomplir la tâche initiale décrite dans la question (à savoir, étudier le comportement de la fonction  $y(x)$  à l'infini) même si les étapes successives ne sont pas réalisées. On constate donc une application partielle de la technique choisie.
- > Groupe n°3 : Les études classées dans ce dernier groupe visent particulièrement à résoudre algébriquement l'équation différentielle proposée tout en ignorant la tâche initiale. Bien que ce type d'études mette l'accent sur l'application partielle de la technique choisie, il montre aussi la réduction de la tâche initialement proposée à la résolution algébrique de l'équation différentielle en question.

Le tableau 15 présente la répartition générale des réponses obtenues selon ces trois groupes :

	Les sous-types de tâches accomplies	Effectif
GROUPE 1	Définir l'équation différentielle	15
	Trouver la solution générale de l'équation différentielle	15
	Trouver une solution particulière	15
	Appliquer les conditions initiales	15
	Calculer la limite	15
Effectif	15 étudiants	
GROUPE 2	Définir l'équation différentielle	2
	Trouver la solution générale de l'équation différentielle	13
	Trouver une solution particulière (1 <sup>er</sup> intervalle)	10
	Trouver une solution particulière (2 <sup>ème</sup> intervalle)	12
	Appliquer les conditions initiales	9
	Calculer la limite	13
Effectif	13 étudiants	
GROUPE 3	Définir l'équation différentielle	4
	Trouver la solution générale	17
	Trouver une solution particulière (1 <sup>er</sup> intervalle)	8
	Trouver une solution particulière (2 <sup>ème</sup> intervalle)	12
	Appliquer les conditions initiales	12
Effectif	17 étudiants	

Tableau 15 : Présentation des réponses obtenues selon les caractéristiques des études fournies

Analysons maintenant les caractéristiques des études de chaque de ces trois groupes :

⇒ **Groupe 1**

Conformément à la technique algébrique développée ci-dessus, lors de l'accomplissement de la tâche proposée, un tiers des étudiants ont réalisé tous les sous-types de tâches qui composent cette technique. Nous prenons soin d'examiner les réponses obtenues par une analyse détaillée qui permet de connaître le degré de validité des réponses données et les techniques associées pour résoudre ces différents sous-types de tâches.

→ *Définir l'équation différentielle (T<sub>1</sub>)*

Concernant T<sub>1</sub>, on observe que seulement 2 étudiants sur 15 l'ont accompli explicitement en écrivant la forme de l'équation différentielle proposée pour le deuxième intervalle, alors que les autres l'ont accompli implicitement sans entrer dans le détail.



→ *Trouver la solution générale de l'équation différentielle (T<sub>2</sub>)*

Cette tâche a été accomplie correctement par tous les étudiants se classant dans ce groupe. Parmi eux, 9 étudiants ont donné une solution détaillée tout en mettant en oeuvre les étapes du calcul intégral alors que les autres, suivant les habitudes acquises, ont effectué cette résolution sans faire appel explicitement à ce calcul.

→ *Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (T<sub>3</sub>)*

Rappelons que deux techniques, abordées dans notre analyse a priori, permettent de résoudre ce type de tâche. On observe qu'une grande majorité des étudiants (10 sur 15) a appliqué la méthode de variation de la constante afin de trouver une solution particulière vérifiant l'équation différentielle en question. On constate ainsi que seulement 6 étudiants sur ces 10 ont accompli correctement cette tâche alors les autres ont fourni des réponses erronées.

Trois autres étudiants ayant fait appel à la deuxième technique qui nécessite de chercher une solution particulière de la même forme que le second membre de l'équation différentielle ont trouvé une solution correcte.

Enfin deux étudiants ont développé leur propre technique en considérant le second membre de l'équation différentielle comme une solution particulière de cette dernière. Voici un exemple représentatif de ce type de réponse :

$$"y'(x) = -y(x) + g(x)$$

$$y(2) = 4$$

$$\text{Une solution particulière : } y(x) = g(x)$$

$$\text{La solution de l'équation homogène : } S = \{ \forall x \in \mathbb{R} / (4 - e^{-2})e^{-x} + g(x) \}$$

$S$  tend vers  $g(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , et  $g(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $S$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ ". (Steven, E24)

→ *Application des conditions initiales (T<sub>4</sub>)*

Face à une tâche classique, seulement 7 étudiants sur 15 ont réussi à identifier correctement la constante d'intégration en appliquant les conditions initiales données. Deux étudiants parmi ceux qui ont résolu correctement l'équation différentielle n'ont pas pu accomplir correctement cette tâche.

Les autres réponses erronées (6 réponses) sont liées à la résolution incorrecte de cette équation différentielle.

→ *La recherche de la valeur limite (T<sub>5</sub>)*

On constate qu'au total 7 étudiants arrivent à résoudre correctement cette tâche et à exprimer ainsi que la fonction  $y(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers l'infini. On note que ces étudiants sont ceux qui arrivent à résoudre d'une façon correcte tous les autres sous types de tâches précédemment analysés. Les autres étudiants ayant donné réponses erronées auparavant n'ont pas pu accomplir correctement cette tâche.

⇒ **Groupe 2**

L'exemple suivant est utile pour montrer les caractéristiques générales des réponses données par les étudiants s'inscrivant dans ce deuxième groupe :

"On a  $y'(x) = -y(x) + g(x) \Rightarrow y'(x) + y(x) = g(x)$  c'est un problème de Cauchy-Lipshitz.

$$y(2) = 4 \text{ et } y'(2) = 0$$

solution générale de l'équation homogène  $y'(x) + y(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -1 \Leftrightarrow \ln y(x) = -x + \text{cte} \Leftrightarrow y(x) = k \cdot e^{-x}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} k e^{-x} = 0 \text{ " (Mathieu, E22)}$$

On observe que dans cette réponse Mathieu se focalise particulièrement sur T<sub>2</sub> et T<sub>5</sub> en ignorant tous les autres sous-types de tâches. Cet exemple représentatif montre explicitement qu'il s'agit d'études qui ne comportent pas tous les sous types de tâches composant la technique algébrique évoquée dans notre analyse a priori. Détaillons ces types de réponses, en les classant en quatre catégories selon les sous-types de tâches accomplis :

***Sept étudiants tentent de donner une réponse en ignorant le premier sous-type de tâche tel que : "définir l'équation différentielle"***. Cette lacune montre que la résolution de l'équation différentielle était réalisée par ces étudiants d'une façon algorithmique sur deux intervalles.

Détaillons ci-dessous le traitement des autres sous-types de tâches par ces étudiants :

→ *Trouver la solution générale de l'équation différentielle (T<sub>2</sub>)*

Il convient certes de reconnaître que l'équation homogène associée à l'équation différentielle a été résolue correctement par tous ces étudiants. Parmi ces étudiants, cinq ont réalisé une résolution détaillée alors que les autres ont préféré donner la solution sans entrer dans les détails.

→ *Trouver une solution particulière de l'équation différentielle (T<sub>3</sub>)*

On observe une réussite notable chez ces étudiants à propos de la recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle définie sur le premier intervalle.

Cependant, seulement 3 étudiants ont réussi à trouver une solution particulière de l'équation différentielle sur le deuxième intervalle en faisant appel à la méthode de variation de la constante. Trois autres étudiants employant cette même technique n'ont pas pu trouver correctement cette solution. Et un étudiant a considéré que le second membre de l'équation étudiée était une solution particulière de cette dernière.

Ces résultats médiocres pourraient provenir de la complexité de l'équation différentielle définie sur le deuxième intervalle ; cette complexité n'a sans doute pas permis à 4 étudiants d'aboutir à la solution correcte de l'équation.

→ *Appliquer des conditions initiales (T<sub>4</sub>)*

Nous avons noté une diversité, chez ces 7 étudiants, à propos de l'accomplissement de ce quatrième sous-type de tâches : 6 étudiants ont réussi à appliquer correctement les conditions initiales données à la famille de solution de l'équation différentielle étudiée. Un seul étudiant a commis une erreur importante en appliquant les conditions initiales à la solution de l'équation homogène associée à l'équation différentielle.

→ *Calculer la limite (T<sub>5</sub>)*

On observe que les études réalisées par trois étudiants se ramènent assez aisément à une réponse correcte. Alors que les autres étudiants n'ont pas pu fournir une réponse correcte à la suite d'erreurs commises lors de la recherche de la solution générale de l'équation différentielle.

***Deux étudiants cherchant à accomplir la tâche initialement proposée ignorent la recherche de la solution satisfaisant les conditions initiales.*** Leurs façons de faire confirment l'effet du contrat actuel de l'enseignement mathématique qui nécessite particulièrement, lors de la résolution d'une équation différentielle, de trouver la solution générale de cette dernière. En effet ces études concernent 4 sous-types de tâches (T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub> et T<sub>5</sub>).

Même si ces deux étudiants ont réussi à trouver la solution de l'équation homogène, aucun parmi eux n'a pas pu proposer une solution particulière vérifiant l'équation différentielle. L'un de ces étudiants a employé la deuxième technique (qui consiste à proposer une fonction ayant la même forme que le second membre de l'équation différentielle étudiée) pour trouver cette solution et a échoué dans sa tentative. L'autre étudiant, ayant considéré le second membre de l'équation différentielle comme la solution particulière de cette dernière, a réussi à donner une réponse vérifiant que la fonction  $y(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers l'infini. Même si ce résultat peut permettre d'expliquer correctement le comportement de la fonction  $y(x)$ , il n'est qu'une coïncidence permettant de trouver la même limite que la solution correcte.

***Trois étudiants se focalisent sur la tâche essentielle de la question posée en négligeant deux sous-types de tâches de la technique appliquée.*** Ces étudiants estiment que pour étudier le comportement de la fonction  $y(x)$  il faut résoudre l'équation différentielle sur deux intervalles et calculer la limite. Ainsi ils tentent de résoudre les tâches suivantes : "T<sub>2</sub> : trouver la solution générale de l'équation différentielle", "T<sub>3</sub> : trouver une solution particulière de cette équation dans chacun de deux intervalles", "T<sub>5</sub> : calculer la limite".

Malgré la réussite observée chez ces étudiants dans la recherche de la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation différentielle et d'une solution particulière sur le premier intervalle, aucun d'entre eux n'a réussi à trouver correctement une solution particulière sur le deuxième intervalle. On constate aussi que tous ces étudiants ont appliqué la méthode de variation de la constante afin de trouver cette solution particulière.

Finalement les solutions erronées ne leur ont pas permis de trouver la valeur limite correcte.

*Un étudiant ne réalise que deux des sous-types de tâches composant la technique algébrique :* "T<sub>2</sub> : trouver la solution générale de l'équation différentielle" et "T<sub>5</sub> : calculer la limite de la fonction solution de cette dernière". Il développe sa propre méthode qui lui permet d'étudier le comportement de la fonction  $y(x)$  à partir de la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation différentielle étudiée. Une telle étude montre une méconnaissance de la résolution complète de ce type d'équations différentielles et/ou une incompréhension de la question posée.

### ⇒ Groupe 3

Rappelons que les études classées dans cette dernière catégorie ont pour but essentiel de résoudre l'équation différentielle proposée. Citons un exemple qui représente les réponses se classant dans cette catégorie :

$$"y'(x) = -y(x) + g(x) \text{ avec } y(2) = 4$$

$$y'(x) + y(x) = 0 \text{ (} E_0 \text{)}$$

- résolution de  $(E_0)$  sur intervalle  $I$  où  $y$  est différent de 0

$$\forall x \in I \frac{y'(x)}{y(x)} = -1 \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} \forall x \in I \ln|y(x)| = -x + C$$

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in I y(x) = e^{-x} \cdot e^C = C \cdot e^{-x},$$

les fonctions  $f(x) = C \cdot e^{-x}$  sont solutions de  $(E_0)$  où  $C$  est n'importe quelle constante réelle.

- solution particulière :  $0 \leq x \leq 1, g(x) = 3$

$$y' + y = 3 \Rightarrow y(x) = 3$$

$$\text{ainsi pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ } S = \{x \in \mathbb{R} \rightarrow 3 + C \cdot e^{-x} / C \in \mathbb{R}\}$$

$$x \geq 1 : g(x) = 2 \cdot e^{1-x} + 1$$

$$y' + y = 2 \cdot e^{1-x} + 1$$

méthode de la variation de la constante : soit  $(x)$  une fonction solution de  $(E)$  et  $h(x)$  une fonction dérivable tant que  $\forall x \in I u(x) = f(x) \cdot h(x)$

$$\dots h(x) = 2ex + e^x + C \text{ et } u(x) = (2 \cdot e) \cdot x \cdot e^{-x} + 1 + C \cdot e^{-x}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \rightarrow (2 \cdot e) \cdot x \cdot e^{-x} + 1 + C \cdot e^{-x} / C \in \mathbb{R}\} \text{ (Sarah-E3)}$$

On observe que Sarah, tout en ignorant la tâche initiale, s'est focalisé sur la résolution algébrique de l'équation différentielle sur deux intervalles et elle l'a résolu correctement dans ces intervalles.

Il convient tout d'abord de remarquer que, comme on s'y attendait, l'étude du comportement d'une fonction définie par une équation différentielle est réduite par 17 étudiants à la résolution algébrique. Nous avons observé cinq types d'études qui se distinguent par rapport aux sous-types de tâches accomplis :

**Quatre études portent sur la recherche d'une seule solution de l'équation différentielle définie sur le deuxième intervalle.** Ceci met l'accent sur l'accomplissement de quatre premiers sous-types de tâches de la technique algébrique.

Compte tenu des réponses données par ces étudiants on s'étonne de constater qu'ils ont résolu l'équation différentielle uniquement sur le deuxième intervalle. Même si ce comportement signifie qu'ils ont compris la question (qui demande d'étudier le comportement de la fonction  $y(x)$  quand  $x$

tend vers l'infini), ils n'ont pas effectué ce travail et se sont arrêtés après avoir appliqué les conditions initiales. Nous constatons qu'aucun étudiant n'a résolu correctement l'équation différentielle.

**Six études concernent seulement trois sous-types de tâches ( $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ ) composant la technique algébrique.** Ces étudiants ont réalisé des études d'une façon automatique tout en mobilisant les habitudes acquises de l'enseignement actuel. Cela signifie qu'ils ont fait le choix de résoudre l'équation différentielle sur deux intervalles afin de trouver une seule solution à partir des conditions initiales données. Même si tous ces étudiants ont résolu l'équation différentielle sur le premier intervalle avec succès aucun d'entre eux n'a pu la résoudre sur le deuxième intervalle.

Il convient de noter que trois étudiants sur les six ne savent pas à quel moment appliquer les conditions initiales. Leurs études nous ont permis de constater que, pour eux, l'existence d'une constante d'intégration implique l'application des conditions initiales même si elles ne sont pas valables dans l'intervalle où on a résolu l'équation différentielle.

**Deux études concernent la recherche de la solution de l'équation homogène ( $T_2$ ) et l'application des conditions initiales ( $T_4$ ).** On constate que l'application des conditions initiales à la solution de l'équation différentielle homogène met en évidence une erreur importante chez ces étudiants.

**Cinq études portent sur la résolution de l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle proposée.** La connaissance éventuelle de l'application de la technique algébrique à ce type d'équations différentielles conduit ces étudiants à chercher la solution générale de l'équation différentielle homogène tout en ignorant tous les autres sous-types de tâches de cette technique.

### 2.2.3. Analyse a posteriori de la Question 3

#### a. Résultats globaux

Le tableau 16 montre la répartition générale des réponses des étudiants selon les techniques choisies :

Technique associée	Effectif / Réussite
Technique qualitative	0
Technique algébrique	20 / 8
Technique numérique	0
Autres	9 / 4

Tableau 16 : Présentation des réponses obtenues en fonction des techniques mobilisées

On observe que :

- > cette troisième question concernant l'étude du champ des vecteurs d'une équation différentielle a été négligée par 21 étudiants.

- > la seule technique accessible aux étudiants et qui permet d'accomplir la tâche proposée est la technique algébrique. Ainsi 20 étudiants sur 29 répondant à la question font appel à cette technique alors que les autres se sont contentés d'attribuer une réponse sans justifier leur choix.

#### b. Interprétation des réponses obtenues

Nous nous proposons d'étudier en détail chacune des réponses obtenues en définissant deux catégories : la première se rapporte aux réponses données avec utilisation de la technique algébrique et la deuxième concerne les réponses données sans expliciter la technique utilisée.

##### ⇒ *Les études algébriques*

Il convient tout d'abord de remarquer qu'une grande partie des étudiants (12 sur 20) ayant utilisé cette technique n'ont pas pu accomplir correctement la tâche proposée : tous ces étudiants se sont contentés de calculer la limite de la fonction solution de l'équation différentielle et de comparer la valeur obtenue aux graphiques proposés en vue d'aboutir à la réponse finale.

Voici un exemple représentant ce type de réponses :

" C'est la figure 2 car on voit que quel que soit  $C \in \mathfrak{R}$   $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$  . Or sur cette seule figure tous

les champs de vecteurs converge en 1, donc c'est la figure 2". (Yannick, E26)

A ce propos on a fait l'hypothèse que l'exactitude de la réponse donnée à cette troisième question dépend de celle donnée à la question précédente.

Après comparaison entre les deux réponses fournies par ces étudiants aux deux questions (la question dont l'analyse est en cours et la question 2 de l'exercice) nous avons observé que notre hypothèse est valable pour 15 étudiants sur 20. En cohérence avec leurs réponses à la Question 2, 5 étudiants sur 15 ont donné des bonnes réponses alors que 10 étudiants ont fourni des réponses fausses à la Question 3.

Les études des autres étudiants (5 études sur 20) ne montrent pas de lien entre les réponses données à ces deux questions. On s'étonne ainsi d'observer une réponse correcte chez 3 étudiants qui avaient donné une réponse erronée à la question précédente : un examen attentif des copies de ces trois étudiants peut expliquer leur réussite par le fait que le second membre de l'équation différentielle représente, pour eux, la solution particulière de cette dernière. Cette acception les amène tout naturellement à vérifier que la fonction  $y(x)$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers l'infini. On s'étonne aussi d'observer des réponses erronées chez 2 étudiants qui avaient résolu correctement l'équation différentielle proposée : ils ont proposé soit la figure 1 soit la 4 comme étant la figure représentant le champ des vecteurs de l'équation différentielle. La raison d'un tel échec n'a pu être identifiée à partir des réponses données.

⇒ ***Les études non justifiées***

Malgré le rappel demandant de justifier la réponse donnée, neuf étudiants se contentent de choisir une figure parmi celles proposées pour répondre à la question posée. L'exemple suivant illustre ce propos :

"La figure qui représente le champ des vecteurs tangents associé à l'équation différentielle précédente est la figure 4". (Michel, E9)

On constate que les réponses données par huit étudiants sont en accord avec les réponses données à la question précédente où ils ont résolu l'équation différentielle proposée. Ceci signifie que, bien qu'ils n'aient pas justifié les réponses données ils ont utilisé la technique algébrique pour accomplir la tâche proposée. Conformément aux réponses données auparavant, trois étudiants sur huit ont réussi à trouver la bonne figure et les cinq autres ont donné des réponses erronées.

Quant à la réponse du dernier étudiant, sa copie laisse penser qu'il a choisi par hasard la figure correcte sans entrer vraiment dans le problème.

### 3. Les analyses de l'Exercice 3

#### 3.1. Analyse a priori de l'exercice

##### 3.1.1 Présentation de l'exercice

Rappelons tout d'abord deux des questions posées au début de ce chapitre et auxquelles nous ferons référence dans ce paragraphe :

*Q3 : Compte tenu de l'importance attachée à la résolution algébrique des équations différentielles, les étudiants sont-ils capables d'appliquer correctement les techniques algébriques étudiées dans cette institution ?*

*Q6 : L'utilisation des mêmes symboles algébriques en vue de représenter des équations différentielles est-elle capable d'engendrer des effets notables dans le travail des étudiants ?*

*Q7 : Quels sont les comportements des étudiants face à une tâche qui nécessite d'associer une équation différentielle à une situation réelle, par exemple au fonctionnement d'un circuit électrique ?*

En vue d'apporter des éléments de réponses à ces questions nous avons proposée un exercice se composant de deux études complémentaires dont chacune se présente sous la forme d'une question. La première question propose une étude complètement mathématique basée sur la tâche la plus souvent étudiée dans cette institution : résoudre une équation différentielle. La deuxième question nécessite d'interpréter les solutions obtenues à la question précédente dans le cas d'un circuit *RLC*.

Ce troisième exercice se présente de la manière suivante :

Exercice3 :

Q1 : Soit une équation différentielle  $y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0$  (E),  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 0$

Trouver la solution de l'équation différentielle (E) satisfaisant aux conditions initiales données lorsque les constantes  $\lambda$  et  $\omega$  sont réelles, positives et (numériquement) égales. Justifier chaque étape de votre étude.

Q2 : Supposons que cette équation différentielle (E) décrit la décharge d'un condensateur  $C$  placé dans un circuit en série avec une inductance  $L$ , et une résistance  $R$ . ( $\lambda$  et  $\omega$  sont reliés aux

paramètres  $R, L, C$  par les relations :  $2\lambda = \frac{R}{L}$  et  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ).

Etudier physiquement les conditions initiales données ?

Etudier le résultat obtenu à la question précédente en se référant au circuit présenté ci-dessus.

(Pour ce faire vous pourrez tracer le graphique décrivant l'évolution de la charge du condensateur et/ou l'intensité du courant traversant le circuit). Et faire une synthèse des résultats obtenus ?



## 3.1.1. Analyse a priori de la Question 1

**1° Description de la tâche**

Cette question s'inscrit dans la deuxième phase de l'évaluation des étudiants à propos de la résolution algébrique des équations différentielles linéaires. A travers de cette première question nous visons d'une part à évaluer le degré d'acquisition des techniques permettant de résoudre algébriquement les équations différentielles linéaires du second ordre et d'autre part à faire apparaître des difficultés que rencontrent des étudiants lors de cette résolution. Cependant la tâche proposée ne se réduit pas à une simple résolution algébrique que les étudiants rencontrent souvent parce qu'elle exige une justification de chaque étape de la résolution. Cette justification est utile essentiellement pour observer le niveau d'acquisition des techniques par les étudiants. Plus particulièrement nous souhaitons connaître si les éléments de la technologie qui composent la technique algébrique sont disponibles chez les étudiants. De plus cette question nécessite de travailler sur une équation différentielle représentée d'une façon différente que celle observée en mathématiques. A ce propos notons que nous avons fait le choix d'utiliser des symboles algébriques qui appartiennent à la fois aux mathématiques (comme  $y$ ) et à l'électrocinétique (comme  $t, \lambda, \omega$ ). Ceci correspond à un double objectif : d'une part nous voulons mettre l'accent sur le fait que cette équation différentielle représente une situation réelle et ainsi faciliter les tâches se présentant dans la deuxième question de cet exercice et d'autre part nous voulons savoir si une telle représentation peut être à l'origine de certaines difficultés ou erreurs chez les étudiants.

**2° L'étude mathématique de la question posée et les réponses attendues**

En nous appuyant sur l'analyse de l'enseignement actuel, nous avons choisi une technique permettant d'exécuter la tâche proposée. Il s'agit de la technique algébrique qui se compose de trois sous types de tâches tels que nous les présentons ci-dessous :

$T_1$  : Trouver l'équation caractéristique de l'équation différentielle et calculer la valeur de discriminant

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle proposée,  $y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0$ , s'écrit de la façon suivante :  $r^2 + 2\lambda r + \omega^2$  d'où  $\Delta = 0$ .

$T_2$  : Ecrire la forme de la famille de fonctions solutions de l'équation différentielle proposée

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle proposée est :

$$\text{Pour } \Delta = 0, S = \{t \in \mathfrak{R}, t \rightarrow (C_1 + C_2 t) e^{-\lambda t} / (C_1, C_2) \in \mathfrak{R}\}.$$

L'analyse des photocopiés mis à la disposition des étudiants montre que les éléments technologiques vérifiant cette technique algébrique vise d'une part, à expliquer la recherche de l'équation caractéristique de ce type d'équations différentielles et d'autre part, à vérifier l'exactitude de la forme de l'ensemble des solutions proposées.

$T_3$  : Trouver une seule solution de cette équation différentielle

Ce type de tâches correspond à l'application des conditions initiales dans le but d'en déduire les valeurs des constantes d'intégration. En l'occurrence la solution cherchée s'écrit:  $y(t) = (2 + 2\lambda t)e^{-\lambda t}$ .

Comme il s'agit de la seule technique à l'aide de laquelle on résout généralement ce type d'équations différentielles au niveau première année de DEUG; nous nous attendons à ce que la plupart des étudiants y fassent référence.

### 3.1.2. Analyse a priori de la Question 2

#### **1° Description de la question**

Cette question porte sur un circuit *RLC* et propose aux étudiants un champ d'application pour interpréter la solution obtenue à la question précédente. A travers les réponses obtenues nous voulons particulièrement étudier les compétences des étudiants en matière d'intégration des savoirs concernant les équations différentielles du second ordre dans une situation institutionnalisée par une autre discipline.

#### **2° Etude de la question posée**

Pour mieux étudier cette question, nous la décomposons sous la forme de plusieurs tâches dont chacune est accompagnée par sa résolution :

$t_1$  : Redéfinir l'équation différentielle

Cette tâche nécessite de réécrire l'équation différentielle étudiée à l'aide de paramètres associés au circuit électrique proposé. La nouvelle forme de cette équation différentielle sera :

$$q''(t) + \frac{R}{L}q'(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0 \quad (2\lambda = \frac{R}{L} \text{ et } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}})$$

$t_2$  : Interpréter les conditions initiales données

Cette deuxième tâche implique d'écrire les relations suivantes :  $q(t=0)=2$  (qui signifie que le condensateur est initialement chargé) et  $i(t=0) = 0$ .

$t_3$  : Tracer les graphes décrivant l'évolution de la charge et/ou l'évolution de l'intensité du courant qui traverse le circuit

Pour exécuter cette tâche on écrit tout d'abord la solution générale de l'équation différentielle trouvée à la question précédente :  $y(t) = (2 + 2\lambda t)e^{-\lambda t} \Rightarrow q(t) = (2 + \frac{R}{L}t)e^{-\frac{R}{2L}t}$

La technique algébrique permettant d'exécuter cette tâche cumule trois sous-types de tâche détaillés comme ci-dessous:

$T_1$  : Chercher la variation de la courbe en examinant le signe de la dérivée première de la fonction solution.

$$q(t) = \left(2 + \frac{R}{L}t\right)e^{-\frac{R}{2L}t} \text{ et } q'(t) = -\frac{R^2}{2L^2}te^{-\frac{R}{2L}t}$$

$q'(x) < 0$  donc la courbe est strictement décroissante.

$T_2$  : Déterminer les branches infinies

$$q(t) = \left(2 + \frac{R}{L}t\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$$

$$t = 0 \quad q(t) = 2 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0 \text{ car } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{R}{2L}t} = 0$$

En associant des connaissances physiques (qui permettent de donner l'allure de la courbe solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre pour laquelle la valeur de discriminant est nulle) et celles des mathématiques (trois sous-types de tâches), il est possible de proposer un graphique comme ce qui suit :

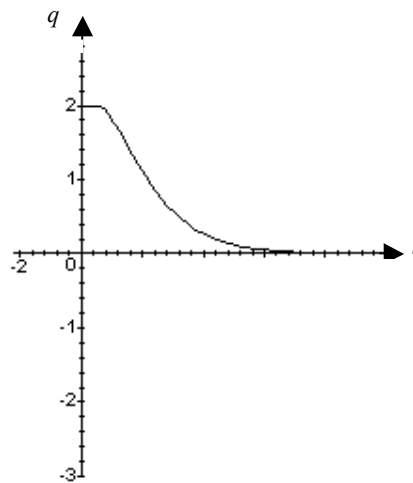


Figure 8 : Représentation graphique de la fonction  $q(t)$

$t_4$  : Faire une synthèse sur les résultats obtenus :

Le graphe tracé ci-dessus nous permet de conclure qu'il s'agit d'un "régime critique" pour lequel la charge s'annule dans le temps le plus court possible.

## 3.2. Analyse a posteriori de l'exercice

### 3.2.1. Résultats globaux

Ayant proposé aux étudiants de travailler sur deux questions complémentaires il nous a paru intéressant de comparer le taux de participation des étudiants à ces deux questions.

Les tâches essentielles proposées	Effectif / Réussite
La recherche d'une seule solution de l'équation différentielle (Question 1)	46 / 20
Présentation des conditions initiales pour le circuit donné (Question 2 - t <sub>2</sub> )	22 / 18
Présentation des solutions obtenues à l'aide d'un graphique+synthèse (Question 2 - t <sub>3</sub> et t <sub>4</sub> )	8 / 4

Tableau 17 : Présentation des réponses obtenues à deux questions de l'exercice

Le premier résultat à signaler est l'importance du taux de participation (92%) des étudiants à la Question 1 par rapport à celui relatif à la Question 2 (au maximum 46%). Ceci montre que la moitié des étudiants qui résolvent l'équation différentielle proposée n'ont pas répondu à la deuxième question où nous avons proposé d'interpréter les conditions initiales données et de représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle pour un circuit électrique *RLC*.

### 3.2.2. Analyse a posteriori de la Question 1

En favorisant la méthode d'analyse développée pour analyser les réponses obtenues à la deuxième question de l'exercice précédent, qui permet de classer les études en fonction des sous-types de tâches, nous classons les réponses des étudiants en deux groupes :

- un **premier groupe** de réponses se focalise essentiellement sur la recherche d'une solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales.
- un **deuxième groupe** se focalise particulièrement sur la résolution algébrique de l'équation différentielle proposée tout en ignorant la tâche initialement proposée.

Détaillons les réponses des étudiants selon les deux groupes décrits ci-dessus :

#### ⇒ **Groupe 1** :

Une grande partie des étudiants (34 étudiants sur 46) ayant répondu à cette question, en fournissant des études complètes conformément à la technique étudiée, se placent dans ce premier groupe. Interprétons les réponses de ces étudiants selon les trois sous-types de tâches qui décrivent la technique permettant de résoudre la tâche initialement proposée.

→ *L'accomplissement les deux premiers sous types de tâches T<sub>1</sub> (La recherche de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle et de la valeur de discriminant) et T<sub>2</sub> (La résolution algébrique de l'équation différentielle)*

L'analyse des réponses obtenues nous permet signaler tout d'abord qu'aucun étudiant n'a justifié explicitement les étapes de la technique appliquée : certains étudiants (4 sur 34) ont tenté d'expliquer la recherche de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle, mais aucun d'entre eux

n'a cherché à expliquer la méthode par laquelle on arrive à écrire l'ensemble des solutions de l'équation étudiée. Ceci nous amène à nous questionner tout naturellement sur l'automatisme développé, chez les étudiants, à ce propos.

Cependant on observe que plus des deux tiers des étudiants (27 sur 34) ont réussi à trouver correctement la forme de l'ensemble des fonctions solutions vérifiant l'équation différentielle proposée. Les autres étudiants ont fourni des réponses erronées en se trompant au niveau de la forme de la solution qui convient à la valeur du discriminant. A ce propos on observe que 4 étudiants proposent la forme la plus générale des solutions du type :  $C.e^{-\lambda x}$  comme la solution de l'équation différentielle étudiée. Cette proposition montre qu'ils ont résolu correctement l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle mais n'ont pas pu se rappeler la forme qui convient à la situation étudiée. Les 3 autres étudiants ont commis une erreur analytique en se trompant sur le signe de la fonction exponentielle qui caractérise la solution cherchée.

Bien que la réussite observée chez ces étudiants montre que l'utilisation des différents symboles n'entraîne pas des difficultés lors de la résolution de l'équation différentielle, il est nécessaire de noter que 21 étudiants ont pris l'initiative de remplacer le symbole "t" par "x". Ceci est dû à l'habitude de travailler, en mathématiques sur les équations différentielles écrites à l'aide des mêmes symboles algébriques.

→ L'application des conditions initiales (T<sub>3</sub>)

Il convient tout d'abord de remarquer que les conditions initiales sont appliquées correctement par 33 étudiants se classant dans ce groupe. Cependant le fait de ne pas pouvoir exécuter correctement T<sub>2</sub> conduit six étudiants à une réponse erronée.

On observe aussi que certains étudiants (7 ayant fourni correctement la solution générale de l'équation différentielle) ont commis des erreurs au niveau du calcul, en conséquence ils n'ont pas pu identifier correctement la valeur de la constante d'intégration.

Un seul étudiant a commis une grave erreur en appliquant les conditions initiales à la solution proposée lors de l'identification de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle.

Citons la réponse de cet étudiant :

$$" y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0 \text{ avec } y'(0) = 0$$

la solution de l'équation différentielle est de la forme  $M.e^{xt}$

$$y(t) = M e^{xt}$$

$$y'(t) = Mx e^{xt}, y'(0) = 0 \Leftrightarrow Mx e^{x0} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$y''(t) = Mx^2 e^{xt}$$

$$\text{d'où } Mx^2 e^{xt} + 2\lambda Mx e^{xt} + \omega^2 M e^{xt} = 0$$

$$\Leftrightarrow M e^{xt} (x^2 + 2\lambda x + \omega^2) = 0$$

$$\text{équation du second degré : } \Delta = b^2 - 4ac = 4\lambda^2 - 4\omega^2$$

$$\text{avec } \lambda = \omega, \Delta = 0$$

$$\text{donc une seule solution } y(t) = 2 e^{0.t} = 2". \text{ (Jonathan, E14)}$$

Cette erreur montre des difficultés notables chez cet étudiant à propos de l'utilisation des conditions initiales.

⇒ **Groupe 2 :**

Compte tenu du taux de répétition des exercices proposés par l'enseignement mathématique avec pour thème la résolution d'une équation différentielle, on ne s'étonne pas de constater que 12 étudiants (sur 46) se focalisent particulièrement sur la recherche de la solution générale de l'équation différentielle étudiée tout en négligeant la justification demandée et la recherche d'une seule solution vérifiant les conditions initiales. L'exemple suivant se rapporte à ce type d'études :

$$"y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0 \text{ (E) avec } y'(0) = 0$$

c'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. Pour la résoudre on a besoin de son équation caractéristique qui n'est autre que  $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$  calculons le discriminant :  $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega^2 = 0$ . On peut voir que le discriminant est égal à 0 car :  $\lambda$  et  $\omega$  sont égales.

D'où  $r_0 = -\lambda$

Le système fondamental de solution est  $\{u_1, u_2\}$  avec

$$u_1 : x \rightarrow e^{-\lambda x}$$

$$u_2 : x \rightarrow x \cdot e^{-\lambda x}$$

d'où  $S_E = \{C_1 e^{-\lambda x} + C_2 x e^{-\lambda x} / C_1 \text{ et } C_2 \in \mathfrak{R}\}$

= solution de l'équation différentielle (E)" (Claire, E33)

On observe qu'un certain nombre d'étudiants (7 sur 12) arrivent à donner correctement la forme des fonctions solutions vérifiant l'équation différentielle proposée. Les autres (5 sur 12) ont fourni des réponses soit erronées soit incomplètes. Comment peut-on interpréter ces échecs ? Ces étudiants ont-ils des difficultés à mémoriser les formes des solutions de ce type d'équation différentielle ? Ou au contraire, ont-ils des difficultés à trancher sur la forme des solutions qui conviennent à la situation étudiée ? L'étude des réponses proposées par ces étudiants nous donne des éléments de réponse. Notons que 2 étudiants sur 5 ont proposé une fonction exponentielle comme la solution générale de l'équation en s'inspirant de l'utilisation de ce type de fonctions lors de la recherche de l'équation caractéristique. Deux autres étudiants ont abandonné le travail après avoir résolu l'équation caractéristique et un seul donne à la fois les trois formes des solutions de ce type d'équation différentielle en commettant une erreur au niveau du signe de la fonction exponentielle.

### 3.2.3. Analyse a posteriori de la Question 2

Nous interpréterons les réponses des étudiants selon les 4 tâches décrites ci-dessous :

→ *Décrire la nouvelle forme de l'équation différentielle décrivant le circuit proposé (t<sub>1</sub>)*

Face à une tâche implicitement proposée, nous trouvons dans quelques copies (12) la redéfinition de l'équation différentielle pour le circuit proposé. Notons qu'un seul étudiant a fait référence à l'origine de la fonction qui représente ce circuit:

"Si cette équation différentielle représente un circuit *RLC*, alors on peut l'écrire de la façon suivante :  $\frac{d^2q}{dt^2}(t) + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot q = 0$ ." (Anne-Claire, E29).

Alors que la plus grande partie des étudiants (10) se sont contentés de remplacer  $2\lambda$  par  $\frac{R}{L}$  et  $\omega$  par  $\sqrt{\frac{1}{LC}}$  dans l'équation différentielle proposée. Derrière une telle étude, il y a sans doute l'habitude de travailler quasi-exclusivement sur des équations abstraites sans faire référence à une situation réelle et l'ambiguïté liée à la proposition d'une tâche implicite.

On observe aussi qu'un seul étudiant tente de modéliser le circuit proposé en faisant intervenir la loi des mailles qui permet souvent d'écrire l'équation différentielle de ce type de circuits. Voici la réponse fournie par cet étudiant :

"Dans un circuit *R, L, C*

$$U_C + U_L + U_R = 0 \text{ avec } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q(t)}{C} + L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = 0$$

$y(0) = 2 \Leftrightarrow q(0) = 2C$  valeur de la charge sur l'armature *A* du condensateur au temps  $t = 0$ .

$y'(0) = 0 \Leftrightarrow i(0) = \frac{dq(0)}{dt} = 0$  l'intensité du courant est nulle au temps 0". (Steven, E16)

Cette réponse fort intéressante nous signale ici que l'étudiant entretient un certain automatisme pouvant être réutilisé dans toutes les études de circuits électriques même si la question n'est pas de trouver cette équation différentielle.

→ *L'interprétation des conditions initiales données ( $t_2$ )*

On constate que 22 étudiants ont abordé cette deuxième tâche même si 10 parmi eux n'ont pas pensé à réécrire l'équation différentielle sous une forme qui représente le circuit proposé. 20 étudiants sur ces 22 ont fourni des réponses similaires en vérifiant que le circuit électrique était chargé à l'instant  $t = 0$ .

Citons un exemple représentatif des réponses de ces étudiants :

$$"2\lambda = \frac{R}{L} \text{ et } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$y''(t) + \frac{R}{L} y'(t) + \frac{1}{LC} y(t) = 0$$

\*si  $y(0) = 2$  cela signifie qu'à un temps  $t = 0$ , le condensateur *C* a déjà commencé sa décharge.

\*si  $y'(0) = 0$  cela signifie qu'au temps  $t = 0$  on n'a pas de tangente à l'origine". (Sarah, E3)

Deux autres étudiants fournissent des réponses qui montrent une incompréhension des conditions initiales. En effet, leurs études témoignent qu'ils ont considéré  $\lambda$  et  $\omega$  comme conditions initiales et qu'ils ont cherché à interpréter ces deux variables. Voici un exemple représentatif :

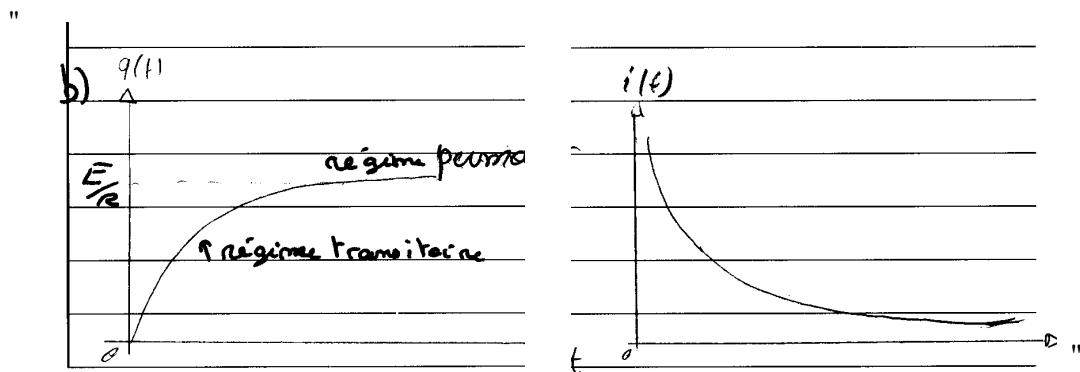
"Physiquement il s'agit de  $\omega$  la pulsation du circuit ( $\omega = 2\pi f$ ) et  $\lambda$  constante du temps". (Romain, E20)

→ La représentation graphique de la solution fonction et la synthèse des résultats ( $t_3$  et  $t_4$ )

Nous avons remarqué qu'une grande majorité des étudiants (38 sur 46) ayant cherché la résolution algébrique de l'équation différentielle ne tentent pas de tracer le graphe de la solution trouvée. En nous référant aux résultats obtenus à la première question de l'exercice 2 où nous avons constaté que presque tous les étudiants avaient tenté de tracer le graphe demandé, nous expliquons cette absence par les caractéristiques de l'étude demandée qui s'inscrit sur deux disciplines à la fois.

On observe que seulement 4 étudiants sur 8 ont réussi à tracer correctement le graphe de  $q(t)$  dont un seul a tenté de détailler le graphe demandé en faisant appel au calcul de limite. Deux étudiants parmi ceux-ci ont déclaré que le graphe représentait un "régime critique" sans entrer vraiment dans les détails.

Quatre autres graphiques proposés par les autres étudiants montrent les difficultés à réaliser une telle étude qui nécessite de relier les résultats mathématiques à une situation physique. On constate ainsi que ces étudiants ont fourni des graphes similaires portant sur le graphique le plus souvent étudié dans l'enseignement de l'électrocinétique afin de mettre en évidence l'évolution de la charge (et du courant) au cours du temps. Citons ci-dessous un exemple représentatif :



(Michel, E34).

Ce comportement montre un effet important du contrat institutionnel qui conduit les étudiants à proposer toujours les mêmes types de graphes sans se questionner sur les caractéristiques du circuit étudié.



## Conclusion

Nous avons essayé d'identifier les caractéristiques des rapports personnels des étudiants aux équations différentielles en tant qu'objet. Au cours de ce test les étudiants ont été invités à mobiliser leurs connaissances conceptuelles à propos de l'objet équation différentielle, à montrer leur aptitude à résoudre certaines équations différentielles linéaires et leurs capacités à mettre en relation cet objet avec une situation réelle.

### **Examen de la question (1)**

*Quelles sont les conceptions des étudiants à propos de l'objet équation différentielle ?*

Pour répondre à cette question nous avons mené notre recherche sur trois axes :

Un premier axe visait à connaître les conceptions des étudiants à propos des équations différentielles. Il s'agissait de quatre conceptions prévues dont trois n'étaient pas correctes<sup>1</sup>.

A partir de l'analyse des productions des étudiants nous pouvons faire deux tentatives de réponses :

- > Il est difficile de parler d'acquisition de conceptions correctes (conformément au contrat institutionnel) chez une grande partie des étudiants.
- > La conception du type "*toutes les équations différentielles sont linéaires*" est majoritairement répandue chez ces étudiants. Ceci est sans doute la conséquence de l'étude quasi exclusive de ce type d'équations différentielles.

Un deuxième axe avait pour objectif de relever les conceptions des étudiants à propos de la linéarité des équations différentielles. On a vu qu'il en existe trois<sup>2</sup> dont une correcte qui est la plus répandue chez les étudiants.

Un troisième axe visait à relever les conceptions des étudiants à propos de l'ordre des équations différentielles. Nous en avons détecté trois<sup>3</sup>. Cependant notre analyse montre qu'une partie importante des étudiants est capable d'identifier l'ordre des équations différentielles.

### **L'examen de la question (2)**

*Compte tenu des caractéristiques de l'enseignement actuel, serait-il possible de tester la viabilité d'une autre approche que l'approche algébrique, par exemple l'approche qualitative, à propos de l'étude d'une équation différentielle ?*

---

<sup>1</sup> - une première implique que dans une équation différentielle, il doit exister une fonction inconnue et l'une de ses dérivées,

- une deuxième signale que toutes les équations différentielles sont linéaires,  
- et une troisième associe la présence du symbole de dérivée aux équations différentielles.

<sup>2</sup> Il s'agit de trois conceptions dont une correcte. Les deux autres conceptions sont:

- les équations différentielles non linéaires se réduisent aux équations comportant une fonction trigonométrique et/ou une puissance,

- une équation différentielle linéaire ne doit comporter que des variables indépendantes linéaires.

<sup>3</sup> Il s'agit de trois conceptions dont une correcte. Les deux autres conceptions se formulent ainsi :

- l'ordre de la dérivée, qui se place en premier dans l'équation différentielle, est l'ordre de cette équation différentielle,

- le plus haut degré, soit des dérivées soit des puissances, détecté dans une équation différentielle, est l'ordre de cette équation.

Les caractéristiques de l'enseignement de l'objet équation différentielle décrites dans la partie C nous ont conduit à changer les enjeux didactiques à propos du contenu et de la présentation d'une tâche relative à cet objet, ceci en vue de tester la viabilité de l'approche qualitative. Les productions des étudiants nous ont montré qu'il est quasiment impossible d'amener ces étudiants à utiliser une autre méthode que la méthode algébrique à laquelle ils sont fortement habitués.

***L'examen de la question (3)***

*Compte tenu de l'importance attachée à la résolution algébrique des équations différentielles, les étudiants seront-ils capables de résoudre des tâches semblables et d'appliquer correctement les techniques algébriques étudiées dans l'institution mathématique ?*

Nous répondrons à cette question en utilisant la trame suivante : résolution d'une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre et résolution d'une équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre.

Résolution d'une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre :

La répétition importante des mêmes types de tâches relativement à la résolution de ce type d'équations différentielles n'assure pourtant pas, chez une grande partie des étudiants, une réussite absolue. En effet les réponses obtenues mettent fortement l'accent, chez une grande partie des étudiants, sur des lacunes au niveau des calculs algébriques.

Résolution d'une équation différentielle linéaire du 2<sup>nd</sup> ordre :

Nous avons mis en évidence, le degré d'automatisme développé chez certains des étudiants lors de la résolution de ce type d'équation différentielle. Leur réussite peut être expliquée dans ce cas par leurs capacités à mémoriser correctement les formes de fonctions solutions correspondantes.

***L'examen de la question (4)***

*La prédominance de types de tâches portant sur les calculs algébriques lors de l'étude d'une équation différentielle, peut-elle conduire les étudiants à méconnaître d'autres types de tâches relatifs aux équations différentielles ?*

Notre analyse montre bien qu'il n'est pas facile de faire saisir à une partie importante des étudiants que les attentes officielles peuvent aller au delà des études algorithmiques. Autrement dit il y a une réelle difficulté à faire comprendre aux étudiants qu'on ne peut pas résumer tous les types de tâches relatifs à une équation différentielle par ceux de la résolution algébrique. La question 2 de l'exercice 2 par exemple, montre qu'une partie importante des étudiants ayant été soumis à ce test se sont contentés de trouver la famille des fonctions solutions vérifiant l'équation différentielle proposée.

***L'examen de la question (5)***

*Les étudiants sont-ils capables d'identifier correctement la représentation graphique d'une équation différentielle dont la représentation symbolique est connue ? Si oui quels types de connaissances sont-ils mobilisés ? Si non, quelles sont les difficultés que les étudiants rencontrent à ce propos ?*

Dans la population testée, on a pu noter que les étudiants n'étaient pas assez à l'aise pour réinvestir leurs connaissances dans un problème de changement de représentation d'une équation différentielle. Il apparaît qu'une partie importante des étudiants ont refusé de s'investir dans un tel problème.

Un autre résultat qui mérite d'être évoqué est que les étudiants, ayant tenté d'identifier la représentation graphique d'une équation différentielle, ont mobilisé quasi exclusivement la technique algébrique. Ceci montre à nouveau l'effet du contrat algébrique dans les pratiques des étudiants qui se traduit par un blocage notable dans leurs raisonnements.

***L'examen de la question (6)***

*L'utilisation des mêmes symboles algébriques en vue de représenter des équations différentielles est-elle capable d'engendrer des effets notables dans les réponses des étudiants ?*

Au cours de notre analyse nous avons tenté de répondre à cette question à deux niveaux : lors de l'identification des équations différentielles (l'exercice 1), et lors de la résolution d'une équation différentielle (Question 1 de l'exercice 3).

Les résultats obtenus au premier niveau montrent la tendance des étudiants à rester fidèles à la représentation algébrique des équations différentielles, voire à la généraliser par certains symboles habituels. En effet la quasi-totalité des étudiants ont définis systématiquement les symboles  $x$  et  $t$  comme des variables indépendantes. Compte tenu de la totale liberté de choisir n'importe quel symbole pour la représentation algébrique d'une équation différentielle en mathématiques, cette tendance se manifeste ainsi comme l'effet du contrat algébrique.

Un autre résultat de notre analyse (analyse de la question 1 de l'exercice 3) se présente comme la tendance des étudiants à changer les symboles lors de la résolution de l'équation différentielle représentée d'une façon inhabituelle.

***L'examen de la question (7)***

*Quels sont les comportements des étudiants face à une tâche qui nécessite d'associer une équation différentielle à une situation réelle, par exemple au fonctionnement d'un circuit électrique ?*

Dans notre analyse des réponses à la question 2 de l'exercice 3 de ce test, nous avons observé qu'une grande partie des étudiants, malgré leurs réponses correctes à la première question du même exercice où ils ont trouvé la fonction solution de l'équation différentielle, n'ont pas voulu envisager une telle

tâche. Ceci est sans doute l'un des résultats de l'enseignement en mathématiques qui a pratiquement abandonné la tâche de modélisation.

Il nous reste à connaître les caractéristiques des rapports des étudiants aux équations différentielles en tant que modèle. C'est l'objet de notre prochain chapitre D2.



# Chapitre D<sub>2</sub> : Rapports des étudiants aux "équations différentielles" en tant que modèle

## Introduction

L'objectif de ce chapitre est de caractériser les rapports personnels des étudiants aux équations différentielles en tant que modèle, en l'occurrence le modèle associé aux circuits électriques. Il s'agit d'un modèle mathématique qui permet donc d'interpréter certains phénomènes physiques à l'aide des symboles mathématiques. Ce modèle permet d'avoir une vision globale sur l'évolution des systèmes considérés et ainsi d'établir des relations entre les différents paramètres de ces derniers. La méthodologie adoptée, est identique à celle présentée dans le chapitre précédent et se présente sous la forme d'un test. Ce test comporte deux parties : une partie expérimentale et une partie théorique qui, chacune, concernent un exercice. Pour préparer les contenus de ces deux parties nous nous sommes appuyés, à la fois, sur les résultats de l'analyse des conditions de l'apparition de l'objet équation différentielle (Partie B) et sur les résultats du rapport institutionnel dégagés dans la Partie C. Notons ci-dessous quatre constats liés à ces résultats et qui nous ont aidés à construire notre test :

C1 : Notre analyse épistémologique (Chapitre B) nous permet de déduire que le concept d'équation différentielle a émergé comme un outil et a pris le statut d'un modèle mathématique. A l'époque de la naissance des équations différentielles, pour résoudre les problèmes posés en géométrie et en mécanique, les scientifiques faisaient appel au calcul différentiel et, en conséquence, au concept d'équation différentielle. La démarche qui fonctionnait à cette époque avait les caractéristiques d'une démarche expérimentale. Cette démarche postule que l'élaboration d'un modèle correspond à la généralisation d'une propriété locale, par exemple : "la sous-tangente d'une courbe est constante" ou "la vitesse verticale du système étant constante...", au moyen du calcul différentiel en vue de connaître la structure globale de la courbe et du système considéré. Ceci montre que, contrairement à la démarche actuelle, cette démarche historique nécessitait l'utilisation de méthodes analytiques et géométriques permettant de dégager les étapes qui amenaient au modèle associé au système. Ce constat épistémologique nous conduit à nous poser la question suivante :

*Q1 : Compte tenu des caractéristiques du travail de modélisation dans l'enseignement actuel, serait-il possible de faire construire par l'apprenant le modèle équation différentielle en favorisant une démarche expérimentale?*

C'est pour répondre à cette question que nous posons les questions 1 et 2 de l'exercice 1 du test ci-dessous.

C2 : Notre analyse des caractéristiques du rapport institutionnel (en électrocinétique), réalisée dans la Partie C de cette thèse, nous a montré que dans l'enseignement actuel, le travail de modélisation associé à un circuit électrique passe généralement par trois étapes :

- la première étape, prise en charge par l'enseignant, consiste en la définition du système à l'aide d'un schéma du montage,
- la deuxième étape est celle au cours de laquelle on cherche à établir l'équation différentielle représentant le circuit électrique étudié. Cette étape se réalise par l'écriture des différences de potentiel – aux bornes de la bobine, aux bornes de la résistance, etc. – et par l'application de la loi des mailles à ces grandeurs,
- enfin, la troisième étape est celle qui porte sur le travail fait à partir du modèle construit (par exemple recherche de la fonction temporelle représentant l'évolution de ce système).

Nous en déduisons que le travail de modélisation et ainsi le fonctionnement des équations différentielles a été limité quasi exclusivement à certaines études algorithmiques et pratiques. A ce propos nous nous posons les questions suivantes :

*Q2 : les étudiants qui suivent ce type d'études sont-ils capables de reconnaître différentes conditions d'utilisation des équations différentielles ?*

Pour répondre à cette question nous nous servons des réponses obtenues à la Question 2 du deuxième exercice du test.

C3 : La démarche de modélisation actuelle met exclusivement en évidence le fonctionnement d'une vision algorithmique axée sur l'utilisation des lois théoriques à propos de la construction du modèle. Ce constat nous a conduit à nous poser la question suivante :

*Q3 : L'usage répété de cette démarche dans l'enseignement actuel peut-il contribuer à assurer un apprentissage adéquat à propos de cette démarche ? A quel moment les étudiants développent-ils leurs automatismes à ce propos ?*

La première question du deuxième exercice proposé pourra nous permettre de relever les éléments de réponse à Q4.

C4 : Nous avons constaté un déficit au niveau des tâches conduisant les étudiants à considérer l'objet équations différentielles avec un statut de modèle dans l'institution physique. Cette faiblesse nous a incité à nous poser la question suivante :

*Q4 : Les étudiants attribuent-ils à l'objet équation différentielle un statut différent de celui donné dans l'institution mathématique? Ou traitent-ils cet objet en fonction du statut qu'il a dans l'institution mathématique ?*

Deux questions du test proposé (Question 3 de l'exercice 1 Question 3 de l'exercice 2) nous seront utiles pour répondre à cette cinquième question.

Analysons maintenant chacun des exercices du test en suivant la même méthode d'analyse que dans le chapitre précédent.

## 1. Les analyses de l'Exercice 1

### 1.1. Analyse a priori de l'exercice

#### 1.1.1. Présentation de l'exercice

En vue d'apporter des éléments de réponse aux deux questions Q1 et Q4 se posées ci-dessus, nous avons proposé un exercice s'inspirant d'un problème épistémologique, proposé par Debaune au 17<sup>ème</sup> siècle, époque à laquelle on a commencé à construire la théorie des équations différentielles. L'énoncé de ce problème était :

"Trouver une courbe  $y(x)$  pour laquelle en chaque point la section coupée par le normale et la tangente sur l'axe des  $x$  soit toujours égale à une constante". (Debaune, 1638, représenté par Wanner en 1988)

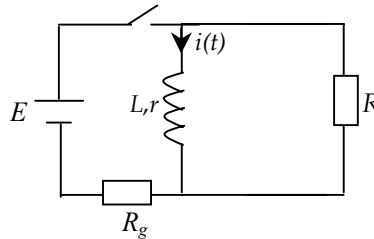
C'est autour de cette idée que nous avons proposé ce premier exercice qui comporte trois questions:



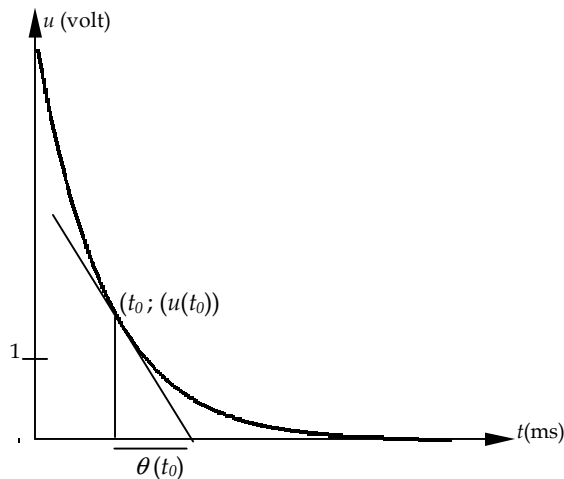
Exercice 1 :

**Enoncé :**

On considère un circuit, représenté dans le schéma ci-dessous, comportant une résistance  $R$ , une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ . Initialement, l'intensité dans la bobine vaut  $i_0$ .  
On branche un oscilloscope aux bornes de la résistance pour visualiser la tension  $u_R$ .



La figure ci-dessous présente la courbe observable  $\beta$ , qui décrit l'évolution de la tension " $u_R$ " en fonction du temps " $t$ ", sur l'écran de l'oscilloscope à l'instant  $t \geq 0$ .



On trace la tangente  $T_{t_0}$  en un point  $(t_0; f(t_0))$  et on s'intéresse au paramètre  $(\theta(t_0))$  défini comme la longueur de l'intervalle séparant l'instant  $t_0$  du point d'intersection de  $T_{t_0}$  avec l'axe des temps.

Question 1 :

- a. Quelle est la dimension du paramètre  $(\theta(t_0))$  ? Justifier votre réponse.
- b. Tracer des tangentes à la courbe en trois points et mesurer les différentes valeurs de  $(\theta(t_0))$  correspondantes? On s'intéressera ultérieurement à la valeur moyenne.

Question 2 : Noter que l'équation de la tangente à une courbe quelconque en un point donné, par exemple  $t_0$  est donnée par :  $f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0)$ . Etablir l'équation différentielle décrivant la courbe ci-dessus sachant que le paramètre " $\theta$ " est constant (comme vous avez dû le constater à la question (1.b) ?

Question 3 : Préciser la nature de la solution de cette équation différentielle? Un étudiant propose comme solution :  $f(t) = t e^{\theta t}$ . Etes-vous d'accord ? Discuter votre réponse en utilisant tout ce que vous connaissez sur ce phénomène et sur les équations différentielles.

L'exercice proposé n'a pas pour objet d'introduire un nouveau concept mais de mettre en relation des notions déjà étudiées. En effet il s'agit plus précisément de faire mobiliser les compétences acquises avec un point de vue mathématique dans un autre domaine, la Physique.

Etudions en détail chacune de ces questions :

### 1.1.2. Analyse a priori de la Question 1

#### ***1° Description des tâches***

Cette première question de l'exercice proposé, qui peut se présenter comme la première phase de construction du modèle, nécessite de travailler sur certaines caractéristiques d'une propriété locale. En effet elle concerne les deux tâches suivantes : recherche de la dimension du paramètre " $\theta$ " et recherche de la valeur moyenne de ce paramètre. Cet exercice est une activité préparatoire qui amène les étudiants au modèle mathématique du système proposé.

#### ***2° Résolution de la question et les réponses attendues***

Dans une analyse détaillée, traitons les techniques nécessaires pour résoudre chacune des tâches proposées :

Il s'agit de deux techniques permettant d'exécuter *une première tâche* proposée :

⇒ Technique graphique

Une première technique implique la lecture du graphe. Le paramètre  $\theta$ , définissant une longueur de l'intervalle séparant l'instant  $t_0$  du point d'intersection avec l'axe des temps peut être mesuré sur l'axe des abscisses. Une bonne lecture du graphique montre alors que ce paramètre a bien la dimension d'un temps.

⇒ Technique utilisée habituellement

Une deuxième technique nécessite de mobiliser des savoirs acquis en électrocinétique vérifiant qu'une sous-tangente tracée à partir de l'origine d'une courbe représente le *constante du temps*  $-\tau$ - du système étudié. L'association faite entre le paramètre  $\theta$  et la constante de temps  $\tau$  permet de conclure que ce paramètre a la dimension d'un temps.

Compte tenu de la facilité de la technique graphique face à la deuxième, nous nous attendons à ce qu'une grande partie des étudiants mobilisent la première technique.

La présentation de *la deuxième tâche* proposée (tracé des tangentes pour déterminer la valeur moyenne de paramètre  $\theta$ ) et les caractéristiques de l'enseignement actuel nous conduisent à décrire deux techniques permettant l'accomplissement d'une telle tâche:

⇒ Technique graphique

L'énoncé de l'exercice proposé indique une technique permettant d'accomplir cette tâche. Nous avons fait le choix d'annoncer la technique nécessaire en vue de conduire les étudiants vers une démarche expérimentale.

Cette technique nécessite de tracer trois tangentes au graphique  $\beta$  comme ci-dessous (figure 9):

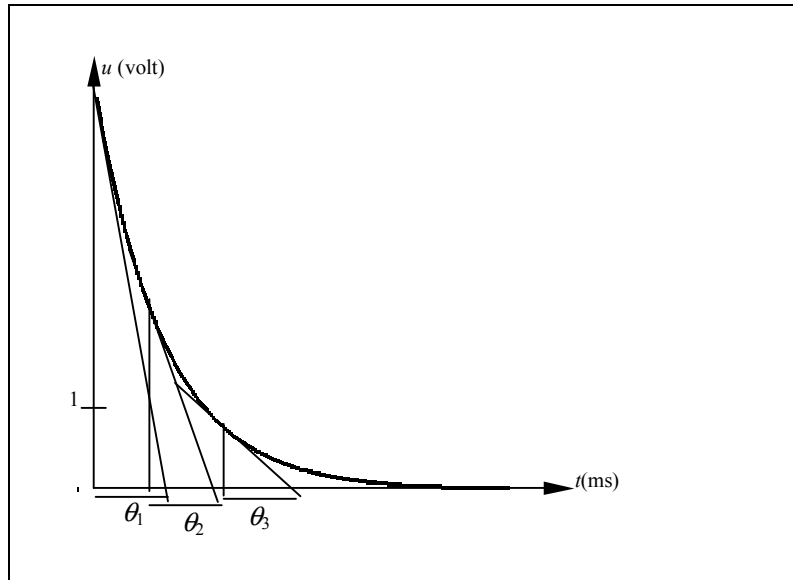


Figure 9: Tracés de trois tangentes à la courbe exponentielle donnée

Cette figure nous permet d'observer trois valeurs similaires, par exemple :  $\theta_1 = 0,90$ ,  $\theta_2 = 0,95$ ,  $\theta_3 = 0,85$  à partir desquelles il est possible de dégager la valeur moyenne du paramètre recherché.

Suite à ce calcul numérique il est possible de caractériser cette valeur en énonçant qu'elle doit être constante en chaque point de la courbe donnée. C'est en effet l'une des propriétés de la fonction exponentielle.

⇒ Technique utilisée habituellement

Cette deuxième technique nécessite d'associer le paramètre " $\theta$ " à la constante du temps " $\tau$ " du circuit électrique. Cette constante de temps s'écrit:  $\tau = \frac{L}{R_T}$ . Cette relation donne en effet le temps requis pour que  $u_R(t)$  atteigne une fraction de sa valeur initiale.

Conformément aux choix faits dans l'énoncé de la tâche proposée, nous nous attendons à ce qu'une grande majorité des étudiants mobilisent la première technique explicitée ci-dessus. Dans le cas contraire, une mobilisation plus importante de la deuxième technique montrera l'effet du contrat institutionnel.

## 1.1.3. Analyse a priori de la Question 2

**1° Description de la tâche**

Cette question représente la deuxième phase de la construction du modèle ; nous proposons ici aux étudiants, de travailler sur l'équation de la tangente initialement tracée sur la courbe proposée pour aboutir au modèle cherché, c'est à dire pour arriver à l'équation différentielle de la courbe.

Il s'agit donc de relever les aptitudes des étudiants à passer du registre graphique (la courbe solution d'une équation différentielle) au registre symbolique (l'équation différentielle elle-même). Plus particulièrement nous visons à dégager les difficultés rencontrées lors du passage d'une représentation à l'autre pour un même circuit électrique. Cette étude, en effet, est la dernière étape de la démarche expérimentale qui amène l'étudiant au modèle mathématique du circuit.

⇒ Remarques sur la forme de l'équation de la tangente

Les symboles utilisés dans l'équation de la tangente proposée aux étudiants avaient été choisis avec beaucoup d'attention. A ce propos deux remarques sont à faire :

- La première est que les symboles utilisés ( $f(t)$ ,  $t$ ) ne correspondent pas tout à fait aux caractéristiques du graphique donné. Ceci n'est pas le fruit du hasard mais est dû à notre volonté de connaître la relation entre la courbe cherchée et l'équation différentielle (qui doit être proposée par l'étudiant), et ainsi de pouvoir repérer les difficultés éventuelles rencontrées lors du changement du registre.
- La deuxième remarque est que l'équation donnée pour la tangente est valable pour un seul point ( $t_0$ ). La tâche de généraliser la relation proposée pour chaque point de la courbe a été laissée à la charge des étudiants. Pour accomplir cette tâche, il est indispensable de caractériser le paramètre " $\theta$ " comme constante.

**2° Résolution de la question et réponses attendues**

Compte tenu des conditions dans lesquelles a été posée cette deuxième question, nous ne détaillerons ci-dessous qu'une seule technique de résolution:

L'équation de la tangente était donnée de la façon suivante :  $f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t - t_0)$ . En remplaçant les valeurs observées sur le graphique donné, on trouve la relation suivante:  
 $0 - f(t_0) = f'(t_0) \cdot \theta$

$$\text{d'où } \theta = \frac{-f(t_0)}{f'(t_0)}$$

Sachant que le paramètre  $\theta$  est constant en chaque point de la courbe, on peut en déduire la relation suivante :  $\theta = -\frac{f(t)}{f'(t)}$ .

Sur le graphique donné on peut contrôler que  $f(t)$  représente la tension aux bornes de la résistance -  $u(t)$ - ; l'équation différentielle doit alors s'écrire :  $u'(t) + \frac{1}{\theta}u(t) = 0$

Nous nous attendons à ce qu'une grande majorité des étudiants utilisent cette technique.

Cependant en proposant de résoudre une tâche qui peut se résumer comme "la recherche de l'équation différentielle représentant un circuit  $RL$ " on peut, compte tenu des caractéristiques de l'enseignement actuel, s'attendre à rencontrer des réponses passant par l'unique technique disponible, chez les étudiants, pour établir l'équation différentielle d'un circuit : l'application de la loi des mailles. Un tel comportement témoignerait fortement des effets du contrat institutionnel.

#### 1.1.4. Analyse a priori de la Question 3

##### **1° Description de la tâche**

Cette dernière question du premier exercice comporte deux tâches : la première nécessite de trouver la nature de la fonction solution de l'équation différentielle, la deuxième porte sur un système de contrôle permettant aux étudiants de vérifier la solution trouvée précédemment. Cette deuxième tâche propose en effet aux étudiants de travailler sur une réponse fautive donnée à la première tâche. Le but essentiel est de connaître le degré de mobilisation des différents savoirs et les relations possibles entre ces savoirs mais aussi de discerner si les symboles mathématiques ayant une origine physique concrète possèdent réellement du sens pour les étudiants.

L'objectif visé par l'ensemble de cette question est de connaître les aptitudes des étudiants à mobiliser telle ou telle technique en vue de répondre aux tâches proposées.

##### **2° Exécution des tâches proposées et réponses attendues**

L'étude faite au niveau des rapports institutionnels des étudiants nous permet de ne décrire qu'une seule technique pour résoudre correctement la première tâche proposée dans cette question :

Cette technique nécessite de résoudre algébriquement l'équation différentielle précédemment trouvée.

L'application d'une telle technique permet de déduire que la fonction solution de cette dernière est de la forme :  $S_0 = \left\{ t \in \mathfrak{R} \rightarrow B e^{-\frac{1}{\theta}t} / B \in \mathfrak{R} \right\}$

Prenant en compte les caractéristiques des rapports institutionnels des étudiants, nous faisons l'hypothèse que tous les étudiants mobilisent cette unique technique.

Deux techniques nous paraissent possibles pour exécuter la deuxième tâche proposée :

⇒ Technique à caractère physique

Cette technique nécessite de se questionner sur la représentation physique de chaque symbole de la fonction proposée ( $f(t) = t.e^{\theta.t}$ ). Examinons cette fonction à travers les dimensions physiques de chaque symbole :  $[Volt] = [temps]. e^{[temps]. [temps]}$

Ceci permet de conclure immédiatement qu'une telle fonction ne peut pas être la solution de l'équation différentielle ; physiquement, elle ne peut pas exister :

- > les dimensions de deux côtés de l'égalité ne sont pas les mêmes,

- > l'argument de la fonction exponentielle ne peut avoir de dimension.

⇒ Techniques à caractère mathématique

Deux groupes des techniques se classent dans cette catégorie :

→ *Un premier groupe de techniques est associé aux différents registres sémiotiques et s'intéresse à la congruence entre la solution proposée et la courbe donnée. Nous avons défini ainsi trois techniques:*

- > La première passe par le calcul de la limite de la fonction et la comparaison du résultat obtenu avec le graphique proposé :  $f(t) = t.e^{\theta t}$ ,  $f(t) = +\infty$  car  $e^{+\infty} = +\infty$ . Par comparaison avec la courbe donnée, qui tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini, il est facile de déduire que cette fonction ne peut pas être solution de l'équation différentielle étudiée.
- > La deuxième nécessite de comparer la fonction proposée à la courbe initiale : on observe que la fonction proposée est une fonction exponentielle ayant un signe positif. Ceci indique que la courbe représentative de cette fonction doit être croissante ; or le graphique donné représente une courbe décroissante. On en déduit que la fonction proposée ne peut pas être solution de cette équation différentielle.
- > La troisième implique de calculer certaines valeurs de la fonction proposée et de les comparer à celles de la courbe en question : Calculons tout simplement la valeur de la fonction pour  $t = 0 : f(t = 0) = 0$   
Sur le graphique proposé on trouve une ordonnée égale à 5 pour  $t = 0$ . Cette comparaison montre explicitement que la fonction proposée ne peut pas être solution d'une telle équation différentielle.

→ *Le deuxième groupe de techniques à caractère mathématique se formule dans le registre symbolique.*

- > Une première technique nécessite de résoudre l'équation différentielle en question et de comparer la fonction solution trouvée à celle proposée : La solution exacte de l'équation différentielle du système doit être sous la forme suivante :  $u(t) = B.e^{-\frac{t}{\theta}}$ . La comparaison faite entre la solution proposée et la solution exacte met en évidence certaines différences :
  - la solution proposée contient un "t" à la place de la constante d'intégration,
  - l'argument de l'exponentielle est le produit de "t et  $\theta$ " alors qu'il devrait en être le quotient,
  - l'exponentielle a un signe positif or, dans la solution correcte il y a un signe négatif.
- > Une deuxième technique passe par la substitution de la solution proposée dans l'équation différentielle :

L'équation différentielle était sous la forme  $u'(t) + \frac{1}{\theta}.u(t) = 0$  ou  $f'(t) + \frac{1}{\theta}.f(t) = 0$

En injectant la fonction proposée dans l'équation différentielle on trouve la relation suivante :  $t^2 \cdot e^{t\theta} + \frac{1}{\theta} \cdot e^{t\theta} \neq 0$ . Cette dernière relation montre explicitement que la solution proposée ne vérifie pas l'équation différentielle : elle ne peut donc pas être la solution de cette dernière.

Les analyses faites précédemment (Partie C) nous conduisent à penser qu'une grande partie des étudiants mobiliseront des techniques à caractère mathématique.

## 1.2. Analyse a posteriori de l'exercice

### 1.2.1. Analyse a posteriori de la Question 1

#### a. Résultats globaux

Cette première phase de la construction du modèle était structurée en deux étapes : La recherche de la dimension du paramètre " $\theta$ " qui représente une sous tangente tracée initialement sur le graphique donné, et la recherche de la valeur moyenne de ce paramètre. Le tableau 18 ci-dessous résume ainsi les réponses des étudiants selon les techniques appliquées lors de la résolution de deux tâches proposées :

Tâches proposées	Techniques mobilisées	Effectif / Réussite
Recherche de la dimension de " $\theta$ "	Technique graphique	37 / 24
	Technique habituelle <sup>1</sup>	6 / 6
Recherche de la valeur de " $\theta$ "	Technique graphique	45 / 12
	Technique habituelle <sup>2</sup>	0

Tableau 18 : Présentation des réponses des étudiants selon les techniques mobilisées

La comparaison entre le taux de mobilisation de la technique graphique et de celui de la technique habituelle révèle naturellement que pour une grande majorité des étudiants la technique graphique est la plus accessible.

#### b. Interprétation des réponses des étudiants

En gardant la méthode d'analyse intégrée dans le chapitre précédent (Chapitre D<sub>1</sub>), nous analysons les réponses obtenues en fonction des techniques mobilisées par les étudiants lors de l'accomplissement de chacune des tâches proposées :

<sup>1</sup> Il s'agit d'une technique fréquemment utilisée dans l'enseignement et qui mobilise des savoirs acquis en électrocinétique (cf. paragraphe 1.1.2 de chapitre D<sub>2</sub>)

<sup>2</sup> Il s'agit d'une technique qui associe le paramètre " $\theta$ " au constant du temps " $\tau$ " du circuit électrique (cf. paragraphe 1.1.2 de chapitre D<sub>2</sub>)

**1° Réponses données à la tâche qui porte sur la recherche de la dimension du paramètre " $\theta$ "**

⇒ Les études réalisées en fonction de la technique graphique

L'ensemble des réponses des étudiants confirme que le recours au graphique pour accomplir la tâche proposée est utilisé par les trois quarts des étudiants. Une grande partie de ces étudiants (24 sur 37) ont fourni la réponse correcte en raisonnant de la façon suivante :

" $\theta(t_0)$  est un temps, en effet, il correspond à la longueur d'un intervalle situé sur l'axe des temps".

(Aurélie, E38)

Les réponses données par les autres étudiants (13), indiquent une confusion entre le concept de dimension et celui d'unité. Voici un exemple de cette confusion:

" $\theta(t_0)$  est en ms car il s'agit d'une différence entre deux temps". (Hugo, E23)

⇒ Les études réalisées à l'aide de la technique habituelle

Pour donner une idée des réponses données à l'aide de cette technique, nous citons un exemple ci-dessous:

"Le paramètre  $\theta(t_0)$  est un temps, car c'est le temps caractéristique mis par le circuit  $R, L$  pour se décharger". (Romain, E32).

Ce type de réponses étant fourni par 6 étudiants (sur 43) indique que le temps caractéristique d'un circuit électrique mesuré à l'aide d'une tangente tracée sur une courbe exponentielle est une situation de référence qui sert de critère d'identification. Dans les rapports personnels, l'effet du contrat est clairement identifié : la sous-tangente tracée en un point précis, sur une courbe exponentielle représentant l'évolution d'un paramètre du système, désigne toujours le temps caractéristique de ce système.

4 étudiants sur 6 ont donné des réponses, mobilisant leurs savoirs antérieurs, sans entrer dans les détails. 2 autres étudiants ont tenté de justifier la réponse donnée en faisant référence aux dimensions des composants du circuit ( $R, r, L$ ) avec lesquels le paramètre  $\theta$  est exprimé. L'un de ces étudiants, même s'il a commis une erreur en faisant appel au temps caractéristique défini pour un circuit  $RLC$ , a pu démontrer que la dimension de ce paramètre était un temps. Ce comportement traduit que, pour cet étudiant, le temps caractéristique a une seule forme, indépendamment du circuit étudié:  $\tau = R.C$

**2° Réponses obtenues à la tâche de recherche de la valeur moyenne du paramètre " $\theta$ "**

Le fait d'annoncer explicitement la technique d'exécution de la tâche proposée, amène tous les étudiants ayant répondu à cette question à utiliser cette technique. Il n'existe cependant que douze étudiants ayant tenté de trouver la valeur moyenne de ce paramètre ; six de ceux-ci ont réussi à identifier ce paramètre à une constante. Les autres étudiants se sont contentés de tracer les trois tangentes à la courbe et de donner les valeurs des sous-tangentes mesurées.



Nous constatons qu'une grande majorité de ces étudiants ont tracé correctement les tangentes demandées et ont trouvé ainsi des valeurs très proches qui permettent de répondre à la question. Citons un exemple qui explique ce propos :

$$\theta_1(t_0) = 4,75 \cdot \frac{1}{5} = 0,9s$$

$$\theta_2(t_0) = 4,75 \cdot \frac{1}{5} = 0,9s$$

$$\theta_3(t_0) = 4,75 \cdot \frac{1}{5} = 0,9s" \text{ (Hugo, E23)}$$

Bien que E23 ait réussi à identifier plusieurs fois la même valeur des sous-tangentes tracées, il ne pense pas à en déduire que ce paramètre doit être constant en chaque point de la courbe en question. Peut-être est-ce dû à l'habitude de travailler souvent sur des tâches précises qui ne nécessitent pas de se questionner sur le résultat obtenu.

### 1.2.2. Analyse a posteriori de la Question 2

#### a. Résultats globaux

Dans notre analyse a priori, compte tenu des caractéristiques de la question posée qui vise à faire établir l'équation différentielle décrivant le circuit proposé à partir d'une démarche expérimentale, nous avons mentionnée une technique, notée technique graphique, comme l'unique technique capable de résoudre cette question. Nous constatons néanmoins que certains étudiants adoptent, lors de la résolution de cette question, une démarche théorique, la seule en fait qui fonctionne dans l'enseignement actuel, et mobilisent ainsi une autre technique qui passe par l'application de la loi des mailles, notée technique habituelle. Le tableau 19, ci-dessous, présente la répartition des réponses des étudiants selon ces deux techniques:

Techniques associées	Effectif / Réussite
Technique graphique	24 / 2
Technique habituelle	10 / 0

Tableau 19 : Répartition générale des réponses obtenues selon les techniques mobilisées

Notons tout d'abord le taux important d'absence de réponse à la question posée (un tiers des étudiants : 16 sur 50).

Ce tableau montre en outre l'échec observé chez une grande partie d'étudiants dans l'établissement de l'équation différentielle par une démarche expérimentale. Ces résultats peuvent sans doute être expliqués en partie par la confrontation à une tâche inhabituelle.

## b. Interprétation des réponses

Interprétons à présent les réponses des étudiants en les regroupant selon la technique utilisée:

⇒ Etudes réalisées par la technique graphique :

Exploitions tout d'abord les différents types d'équations algébriques proposées par les étudiants comme l'équation différentielle recherchée en vue de représenter la courbe proposée (tableau 20).

Les équations proposées	$f'(t) + \frac{1}{\theta} f(t) = 0$	$f'(t_0) + \frac{1}{\theta} f(t_0) = 0$	$f'(t_0) + \frac{1}{\theta} f(t_0) = y$
Effectif	2	14	8

Tableau 20 : Différents types d'équations algébriques proposées par les étudiants

Nous constatons que la quasi-totalité du public ayant utilisé cette technique confond l'équation différentielle de la courbe avec l'équation écrite en un seul point de cette courbe : 22 étudiants utilisent, très scrupuleusement, l'équation de la tangente donnée et obtiennent une équation de la droite tangente valable pour un point donné. Cela nous montre que ces étudiants n'éprouvent pas de difficultés dans l'utilisation des propriétés élémentaires de la géométrie analytique mais qu'ils ont des difficultés notables à propos de la généralisation de l'équation écrite en un point de la courbe.

On constate en outre qu'aucun étudiant ne fait référence à l'origine de la fonction donnée qui représente la tension aux bornes de la résistance. Ceci est un résultat sans doute explicable par l'utilisation exclusive du symbole "f" à la place de "u<sub>R</sub>" et montre que les étudiants réalisent une étude très superficielle en se contentant de modifier certains éléments de l'équation de la tangente.

En ce qui concerne le test de validité du modèle, on peut noter que les réponses données sont en majorité non-pertinentes : une petite minorité (2 sur les 24 ayant employé une technique graphique) aboutit au résultat correct en remarquant que le paramètre "θ" est constant en chaque point de la courbe tandis que les autres étudiants proposent une équation ponctuelle (22 sur 24). Citons un exemple représentatif :

$$\text{"On a } f'(t_0) = \frac{y - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{y - f(t_0)}{\theta}$$

$$\text{Or } y = 0$$

$$\text{Donc } \theta = -\frac{f(t_0)}{f'(t_0)}$$

L'équation différentielle décrivant la courbe ci-dessus :

$$\text{On a } \theta f'(t_0) = -f(t_0)$$

$$\Leftrightarrow f'(t_0) + \frac{1}{\theta} f(t_0) = 0 \text{ " (Amandine, E40) "}$$

Il s'avère que les copies fournissant ce type de réponses (qui montre une incohérence entre les deux représentations d'un même circuit - représentation graphique et représentation algébrique-) mettent

ainsi en évidence une incompréhension du concept d'équation différentielle. En effet, pour ces étudiants, toute relation entre une fonction et ses dérivées est une équation différentielle même si cette relation n'est valable qu'en un seul point.

En plus de cette incohérence, dans certaines copies (8 sur 22) on observe des équations algébriques avec un second membre, tel que  $y$ , qui représente probablement un générateur de tension. Ceci manifeste une conception selon laquelle un circuit électrique qui possède un courant doit posséder aussi un générateur de tension. Nous pouvons vérifier l'existence de cette conception à l'aide des réponses données par les mêmes étudiants à l'exercice 2 du test proposé.

⇒ Les études réalisées selon la technique habituelle

Malgré les indications de l'énoncé conduisant les étudiants à utiliser la technique graphique, dix étudiants ont choisi la technique habituelle. Ce comportement met fortement l'accent sur l'effet du contrat institutionnel chez ces étudiants.

Pour mieux analyser ce type d'études nous présentons ci-dessous le tableau 21 qui rassemble les différents types d'équations différentielles proposées par les étudiants:

Equations proposées	$i(t)' + \frac{R}{L}i(t) = 0$	$i(t)' + \frac{R}{L}i(t) = E$
Effectif	9	1

Tableau 21 : Différents types d'équations différentielles proposées par les étudiants

Notons que les réponses obtenues montrent explicitement l'incohérence entre la courbe cherchée et les équations différentielles proposées. En effet cette courbe représente l'évolution de la tension aux bornes de la résistance, tandis que les équations différentielles proposées se centrent sur le courant électrique qui traverse le circuit. Il est fort possible que le choix de la fonction  $i(t)$  soit lié naturellement aux pratiques de l'enseignement actuel où les étudiants rencontrent le plus souvent des équations différentielles décrivant l'évolution de la charge ou du courant électrique. Ce comportement montre l'automatisme développé par ces étudiants à propos l'établissement de l'équation différentielle d'un circuit électrique.

A part cette incohérence, nous avons observé que l'une des réponses fournies signale l'existence de la même conception, qui vérifie que l'existence du courant électrique dans un circuit nécessite toujours l'existence d'un générateur, observée chez huit étudiants ayant mobilisé la technique graphique pour décrire l'équation différentielle cherchée. Ceci peut être relié aux habitudes acquises dans l'enseignement actuel où les étudiants travaillent le plus souvent sur les circuits qui possèdent un générateur de tension. Autrement dit ceci montre à nouveau l'effet du contrat institutionnel.

## 1.2.3. Analyse a posteriori de la Question 3

## a. Résultats globaux

Rappelons que cette question comporte les deux tâches suivantes : "Trouver la nature de la fonction solution de l'équation différentielle trouvée à la question précédente" et "Vérifier si la fonction proposée est la solution de cette équation différentielle". Résumons les réponses des étudiants obtenues pour ces deux tâches selon les techniques définies dans notre analyse a priori (tableau 21):

Tâches proposées	Technique associée	Effectif
Trouver la nature de la fonction solution de l'équation différentielle	Technique algébrique	26
Vérifier si la fonction proposée est la solution de l'équation différentielle	Technique à caractère physique	4
	Technique à caractère mathématique	13

Tableau 21 : Représentation des réponses des étudiants données aux deux tâches proposées

Il convient tout d'abord de signaler le nombre important d'absences de réponse : seulement la moitié des étudiants ont tenté d'exécuter la première tâche proposée et seulement dix-sept, la deuxième. Il est fort possible que ceci s'explique par les études réalisées lors de la résolution de la question précédente. Détaillons ce propos dans le paragraphe suivant.

## b. Interprétation des réponses

En faisant référence à la méthode d'analyse employée précédemment, interprétons ci-dessous les réponses données à chacune des tâches proposées :

***1° Réponses obtenues à la première tâche : recherche de la solution de l'équation différentielle***

Nous avons observé dans l'analyse de la question précédente (Question 2) que seulement deux étudiants ont trouvé une équation différentielle correcte pour la courbe proposée. Les autres étudiants ont proposé soit une équation algébrique valable en un seul point, soit une équation différentielle qui représente l'évolution de la charge au cours du temps, à travers des pratiques acquises sans se référer à la courbe proposée.

Dans cette analyse, nous nous focalisons particulièrement sur la mise en oeuvre de l'unique technique disponible et sur la cohérence entre les réponses données à cette tâche (proposition d'une fonction solution) et les réponses données à la tâche de la question précédente (proposition de l'équation différentielle correspondant à la courbe) par chacun des étudiants.

En tenant compte des différents types d'équations proposées à la question précédente, on peut remarquer que les réponses données à cette tâche par une proportion importante des étudiants (20 sur 26) sont conformes aux réponses données précédemment. Autrement dit la fonction solution proposée par les étudiants vérifie les équations algébriques proposées par eux-mêmes.

Les réponses données par les autres étudiants (6 sur 26) ne sont pas cohérentes avec les réponses données à la question précédente : 5 étudiants parmi ceux qui avaient proposé une équation ponctuelle (pour un temps donné  $t_0$ ) à la question précédente, ont proposé une solution générale dépendant d'une variable  $t$ . Il y a incompatibilité entre ces deux propositions. Comment en effet, une fonction peut-elle être écrite à l'aide d'une variable  $t$ , si elle est la solution d'une équation seulement valable à un temps fixé  $t_0$  ? L'extrait suivant, emprunté à E3, illustre cette incohérence observée dans plusieurs réponses :

$$\begin{aligned} \text{" } \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} &= -\frac{1}{\theta(t_0)} \\ \ln|f(t_0)| &= -\frac{1}{\theta(t_0)} t_0 + C \\ \forall t_0 \in I \exists C \exists \Re f(t_0) &= C.e^{-\frac{t_0}{\theta}} \\ f(t) &= C.e^{-\frac{t}{\theta}} \text{" (Sarah, E3)} \end{aligned}$$

Même si cette contradiction signifie qu'il y a incohérence entre les deux expressions algébriques, le travail de Sarah montre que ces étudiants sont capables de reconnaître qu'une relation ponctuelle ne peut pas être la solution d'une équation différentielle quelconque.

Un seul étudiant (Mathieu, E22) a commis une erreur en ignorant la constante d'intégration dans la solution fonction proposée. Cette erreur peut être la conséquence d'un simple oubli ou de difficultés rencontrées dans l'application de la technique de résolution algébrique des équations différentielles.

D'une façon générale, à part la proposition des équations valables en un seul point  $t_0$ , les réponses obtenues chez une grande partie des étudiants montrent en effet la réussite dans l'application de la technique de résolution algébrique des équations différentielles linéaires du premier ordre sans second membre.

### ***2° Réponses obtenues à la deuxième tâche : travail sur une proposition de fonction solution***

En mettant les étudiants face à une tâche inhabituelle (travail sur une solution proposée), nous voulons identifier les connaissances mobilisables par ces étudiants sur le circuit proposé d'une part, et sur le concept équation différentielle d'autre part.

Analysons maintenant les réponses des étudiants en fonction de la technique mobilisée en vue d'accomplir la tâche proposée :

⇒ Etudes réalisées à l'aide de la technique à caractère physique

Un certain nombre d'étudiants (4 sur 17) ont examiné la solution proposée en prenant en compte les dimensions des symboles utilisés et en associant ces derniers à certains éléments du circuit étudié.

Citons un exemple de ce type de réponses :

"Non.  $C \rightarrow$  Tension initiale et  $t \rightarrow$  temps. Ici de plus si  $\theta$  est un temps  $\theta t$  donne un temps au carré.

On doit obtenir une tension d'où  $\frac{t}{\theta} \rightarrow$  sans dimension et  $C$  une tension initiale". (Romain, E20)

Même si tous ces étudiants n'ont pas effectué une analyse dimensionnelle comme nous l'avons prévu dans notre analyse a priori, leurs études montrent qu'ils se sont interrogés sur cet aspect de la Physique.

⇒ Etudes réalisées à l'aide des techniques à caractère mathématique

Nous avons constaté qu'au total 13 étudiants se sont placés dans le cadre mathématique lors de l'exécution de la tâche proposée, ce qui nécessitait de vérifier si la fonction proposée était la solution de l'équation différentielle correspondant à la courbe cherchée. Pour mieux analyser toutes les réponses obtenues nous avons classé ces étudiants en deux groupes, selon les techniques mobilisées: un premier groupe englobe huit étudiants ayant mobilisé des techniques qui nécessitent de travailler en fonction de deux registres, algébrique et graphique. Un deuxième groupe concerne cinq étudiants qui ont utilisé les techniques fonctionnant dans un seul registre, algébrique. Détaillons ainsi ci-dessous les réponses de tous les étudiants :

### **Groupe 1**

Une partie de ces étudiants (5 sur 8) a comparé la fonction proposée à la courbe donnée. L'exemple suivant montre explicitement les caractéristiques de ce type de réponses :

"Dans la question précédente, on avait  $u'(x) = \alpha u(x)$  avec  $(\alpha = -\frac{1}{\theta})$ , la solution est donc une

exponentielle dont le facteur est négatif car elle est décroissante. Or dans la solution proposée, le facteur de  $e$  est positif". (Nicolas, E10)

Pour ces cinq étudiants il est évident qu'une fonction exponentielle ayant un facteur positif correspond à une courbe croissante or la solution de l'équation différentielle en question doit représenter une courbe décroissante. Cette remarque amène ces étudiants à une réponse finale correcte.

Deux autres étudiants (2 sur 8) ont calculé la valeur limite de la fonction proposée et l'ont comparée ensuite à la valeur observée sur la courbe.

Un seul étudiant s'est focalisé sur les valeurs des certains points de la fonction proposée. Cette technique lui a permis d'aboutir à une réponse correcte en comparant les valeurs trouvées à celles de la courbe proposée.

**Groupe 2**

Ce deuxième groupe d'étudiants (5 sur 13) ont réalisé des études algébriques tantôt en remplaçant la fonction proposée dans l'équation trouvée, tantôt en la comparant à la réponse trouvée à l'item précédent. L'exemple suivant illustre ce type des réponses :

" Sur le plan purement algébrique, la solution proposée est fausse

Si  $f(t) = te^{\theta t}$ ,  $f'(t) = t\theta e^{\theta t}$  (<sup>1</sup>)

Et  $\theta f'(t) + f(t) = t e^{\theta t} (1 + \theta^2) \neq 0$ " (Isaac, E2)

Ce type d'étude permet d'observer que la fonction proposée ne vérifie pas l'équation différentielle et ainsi d'en déduire qu'elle ne peut pas être solution de l'équation différentielle du système.

Le choix fait par les étudiants ayant fourni une étude mathématique, montre que le concept d'équation différentielle et sa solution restent toujours dans le cadre mathématique même s'ils représentent un système réel, ou un phénomène physique où ils devraient gagner des dimensions et du sens.

---

<sup>1</sup> Cet étape témoigne que E2 a commis des erreurs

## 2. Les analyses de l'Exercice 2

### 2.1. Analyse a priori de l'exercice

#### 2.1.1. Présentation de l'exercice

Le deuxième exercice de ce test a pour objectif d'apporter des éléments de réponses à trois des questions proposées au début de ce chapitre.

*Q2 : Les étudiants qui suivent ce type d'études (qui limite le domaine d'utilisation des équations différentielles à certaines études algorithmiques) sont-ils capables de reconnaître des conditions d'utilisation des équations différentielles ?*

*Q3 : L'usage répété de cette démarche dans l'enseignement actuel peut-il contribuer à assurer un apprentissage adéquat à propos de cette démarche ? A quel moment les étudiants développent-ils leurs automatismes à ce propos ?*

*Q4 : Les étudiants attribuent-ils à l'objet équation différentielle un statut, différent de celui donné dans l'institution mathématique ? Ou traitent-ils cet objet en fonction du statut qu'il a dans l'institution mathématique ?*

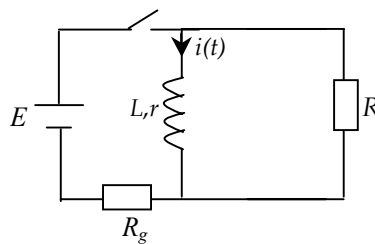
En prenant en compte les caractéristiques de l'enseignement actuel, nous avons proposé l'exercice suivant.

Exercice 2 :

On travaille toujours avec le même circuit (rappel ci-dessous) :

**Énoncé :**

On considère un circuit, représenté dans le schéma ci-dessous, comportant une résistance  $R$ , une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ . Initialement, l'intensité dans la bobine vaut  $i_0$ .



Question 1 : Établir l'équation algébrique qui représente le circuit ci-dessus à l'instant  $t$  à partir des lois de l'électrocinétique ? Justifier chaque étape de votre raisonnement.

Question 2 : En déduire la signification du paramètre  $\theta$  évoqué dans l'exercice 1 (l'étude expérimentale) et vérifier sa dimension.

Question 3 : Trouver l'évolution du courant qui traverse la bobine au cours du temps ? Justifier votre réponse ?

Question 4 : La tension existant aux bornes de la résistance peut-elle s'annuler en un temps fini ? Pourquoi ?



## 2.1.2. Analyse a priori de la Question 1

**1° Description de la tâche**

Il s'agit d'une tâche familière aux étudiants dès la classe de terminale qui nécessite d'établir l'équation différentielle d'un circuit à étudier. En proposant une telle tâche nous cherchons à connaître les pratiques des étudiants à propos de l'application de l'unique technique de modélisation des circuits électriques utilisée dans l'enseignement actuel. Plus particulièrement, nous voulons savoir si les étudiants mettent en œuvre cette technique d'une façon automatique ou si, connaissant les choix faits lors d'une telle modélisation, ils arrivent à expliciter leurs raisonnements.

La proposition d'une telle tâche familière aux étudiants ne permet pas de tester correctement l'utilisation des équations différentielles en Physique. Ce qui est intéressant, dans notre cas, c'est de repérer les justifications qui accompagnent la résolution. Même si l'absence de justification n'apporte pas d'éléments nouveaux, les réponses non justifiées sont nécessaires pour faire une comparaison entre les réponses données par les étudiants à deux questions (Question 2 de l'Exercice 1 et cette question) qui conduisent les étudiants chaque fois à trouver l'équation différentielle du même circuit électrique. Ces deux questions font référence respectivement à la démarche expérimentale et à la démarche théorique du travail de construction du modèle mathématique.

**2° Exécution de la tâche et réponses attendues**

Une seule technique mobilisée généralement dans l'enseignement actuel, permet d'accomplir la tâche proposée. Cette technique est mise en œuvre de la façon suivante :

Dans un premier temps, pour trouver l'équation différentielle du circuit on fait appel à la loi des mailles de l'électrocinétique qui énonce que *la somme algébrique des variations de potentiel le long de toute maille d'un circuit fermé est nulle*.

Cela implique que la somme des différences de potentiel le long de la boucle complète d'un circuit égale à zéro : 
$$\sum_{\text{autour d'une boucle quelconque}} un = 0$$

Rappelons le circuit proposé (voir figure 10):

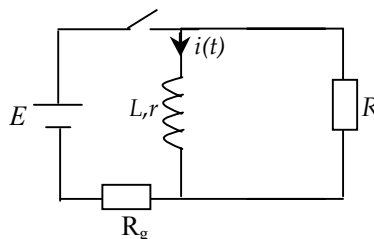


Figure 10

L'application de la loi des mailles à ce circuit permet d'écrire la relation suivante :  $u_L + u_R = 0$

Dans un deuxième temps, il faut trouver l'expression de la différence de potentiel à chaque instant aux bornes de la bobine et aux bornes de la résistance:

La loi de Lenz-Faraday donne la relation entre la force électromotrice d'induction  $e$  et la variation de l'intensité  $\frac{di}{dt}$  :  $e = -L \cdot \frac{di}{dt}$

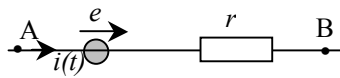


Figure 11

Une bobine ( $AB$ ) siège d'une force électromotrice d'induction est équivalente à l'association série d'un générateur de tension f.e.m algébrique  $e$  et d'une résistance  $r$  (voir figure 11). Alors :

$$u_{BA} = -L \cdot \frac{di}{dt}(t) - r \cdot i(t) \text{ ou bien } u_{AB} = u_L = L \cdot \frac{di}{dt}(t) + r \cdot i(t)$$

D'autre part, la loi d'Ohm permet d'écrire la différence de potentiel aux bornes de la résistance en fonction de  $R$  et de  $i(t)$  ( $u_R = R \cdot i(t)$ ).

Dans la maille constituée par le circuit fermé, on a la relation globale :

$$u_L + u_R = r \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = 0$$

$$\text{D'où } L \frac{di(t)}{dt} + (R + r) \cdot i(t) = 0$$

Nous nous attendons à ce qu'une grande majorité d'étudiants se contentent de présenter l'équation différentielle sans justifier l'étude réalisée.

### 2.1.3. Analyse a priori de la Question 2

#### 1° Description de la tâche

Rappelons que l'analyse des manuels et des photocopiés, nous a montré que le domaine d'utilisation des équations différentielles est limité, délibérément en physique. En effet cette limitation se manifeste par l'étude de certains types de tâches qui nécessitent exclusivement d'établir l'équation différentielle d'un circuit électrique et la recherche de la fonction solution de cette dernière. Nous avons proposé une tâche inhabituelle qui favorise l'utilisation de deux équations différentielles trouvées, à partir de deux démarches : démarche expérimentale et démarche théorique, dans les deux exercices du test. Plus particulièrement nous avons proposée aux étudiants de trouver la signification du paramètre  $\theta$  en fonction des différents composants du circuit étudié. Par cette tâche nous visons à connaître leurs aptitudes à saisir le domaine d'utilisation du concept d'équation différentielle.

**2° Résolution de la tâche et réponses attendues**

Deux techniques analogues permettent de répondre à la question :

⇒ Une première technique (Technique 1) consiste à comparer les deux équations différentielles associées au même circuit électrique. Cette technique est décrite ci-dessous :

$$\frac{du}{dt}(t) + \frac{1}{\theta}u(t) = 0 \text{ (E1)}$$

$$\frac{di}{dt}(t) + \frac{R+r}{L}i(t) = 0 \text{ (E2)}$$

Pour que les deux équations différentielles soient comparables, elles doivent être de la même origine.

Ainsi en utilisant la loi d'ohm qui permet de décrire  $i(t)$  en fonction de  $u(t)$ , tel que  $i(t) = u(t)/R$  on peut écrire la deuxième équation différentielle sous la forme :  $\frac{du}{dt}(t) + \frac{R+r}{L}u(t) = 0$  (E2)

D'où  $\theta = \frac{L}{R+r}$ .

$$\text{On cherche la dimension de } \theta : \theta = \frac{\frac{[\text{volt}][\text{temps}]}{[\text{ampère}]}}{\frac{[\text{volt}]}{[\text{ampère}]}} = [\text{temps}]$$

⇒ La deuxième technique (Technique 2) nécessite de comparer les deux fonctions solutions de deux équations différentielles du circuit en question :

> La fonction solution de l'équation différentielle suivante :  $\frac{du}{dt}(t) + \frac{1}{\theta}u(t) = 0$ , doit être sous la forme:  $u(t) = A.e^{-\frac{t}{\theta}}$  ou  $u(t) = u_0.e^{-\frac{t}{\theta}}$  (S1)

> Et la fonction solution de l'équation différentielle, du type  $\frac{di}{dt}(t) + \frac{R+r}{L}i(t) = 0$ , doit s'écrire de la manière suivante :  $i(t) = B.e^{-\frac{t}{\theta}}$  ou  $i(t) = i_0.e^{-\frac{t}{\theta}}$  (S2)

En faisant appel à la loi d'ohm qui permet de relier les deux équations mathématiquement identiques, on identifie le paramètre :  $\theta = \frac{L}{R+r}$ . On peut vérifier que la dimension de ce paramètre est un temps.

Le fait de faire appel à ces techniques atteste en effet de la capacité de l'étudiant à fonctionner dans des situations qui nécessitent implicitement d'utiliser notre objet d'étude. Ainsi nous attendons des réponses relatives à ces deux techniques vues ci-dessus.

Cependant nous nous attendons aussi à ce que l'étudiant ait recours aux savoirs antérieurs qui lui permettent d'associer ce paramètre au temps caractéristique du circuit ; il en résulte que le paramètre  $\theta$  peut s'écrire de la manière suivante :  $\tau = \frac{R+r}{L}$ . Comme la dimension de ce dernier est familière aux

étudiants, cette relation ainsi vérifiée que la dimension de paramètre  $\theta$  est un temps.

## 2.1.4. Analyse a priori de la Question 3

**1° Description de la tâche**

A première vue, cette question est construite autour d'une tâche classique que rencontrent très souvent les étudiants. Néanmoins, contrairement au questionnement habituel, nous ne demandons pas l'évolution du courant qui traverse le circuit mais celui qui traverse la bobine. Cette nouvelle présentation de ce type de tâche amène les étudiants à se remémorer que dans un circuit en série le courant doit être le même dans chaque composant.

La recherche de la solution de l'équation différentielle permet d'observer la compétence technique de l'étudiant fonctionnant dans un registre donné, c'est à dire son aptitude à passer d'une relation algébrique à une autre relation représentant le même système électrique.

**2° Résolution de la tâche et réponses attendues**

Deux techniques permettent de réaliser la tâche proposée :

⇒ Technique analogique

La solution de l'équation différentielle trouvée précédemment (Question 3 de l'Exercice 1) se présentait de la façon suivante :  $u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{\theta}}$ .

En faisant appel à la loi des mailles, il est possible de trouver l'évolution de  $i(t)$  :  $i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\theta}}$  ou  $i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{L}{R+r}t}$

⇒ Technique algébrique

En résolvant algébriquement l'équation différentielle du type :  $\frac{di}{dt}(t) + \frac{R+r}{L}i(t) = 0$ , on trouve

facilement que la fonction solution doit être sous la forme suivante :  $i(t) = A \cdot e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$  (où  $A \in \mathfrak{R}$ ). Pour résoudre complètement l'équation différentielle en question, cherchons la valeur de la constante  $A$  en faisant appel aux conditions initiales implicitement données dans l'énoncé :  $i(t=0) = i_0$  d'où  $A = i_0$ .

Et finalement  $i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$

Notons que, dans cette activité, les étudiants ayant résolu l'équation différentielle intervenant dans l'exercice précédent ne doivent pas résoudre à nouveau cette équation différentielle. Il est possible en effet de trouver l'évolution du courant passant dans la bobine en mobilisant ainsi la première technique illustrée ci-dessus. Mais nous nous attendons à ce qu'une grande partie des étudiants, suite aux habitudes acquises dans l'enseignement actuel, mobilisent la deuxième technique algébrique.

### 2.1.5. Analyse a priori de la Question 4

#### 1° Description de tâche

Afin de connaître les raisonnements des étudiants à propos d'une relation mathématique représentant l'évolution d'un système (l'évolution de la tension aux bornes de la résistance), nous leur demandons de commenter le devenir de ce système. Au travers de cette activité nous souhaitons tester la capacité des étudiants à relier les données théoriques aux données expérimentales et à mobiliser des connaissances du champ des mathématiques ou de la physique.

#### 2° Résolution de la tâche et réponses attendues

Nous détaillons ci-dessous deux techniques permettant de réaliser cette tâche. Une première s'appuie sur les principes mathématiques, la deuxième sur des principes physiques :

⇒ La technique à caractère mathématique

La solution de l'équation différentielle du circuit, trouvée dans la partie expérimentale du test, se présentait sous la forme de la fonction exponentielle suivante :  $u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{\theta}}$

Pour exécuter la tâche proposée, on peut chercher à quel instant  $u(t)$  est nul en appliquant  $u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{\theta}} = 0$ . On en déduit que  $u(t)$  s'annule lorsque  $t$  tend vers l'infini. Cela suppose que, mathématiquement, la tension aux bornes de la résistance ne peut s'annuler que pour un *temps infini*.

⇒ La technique à caractère physique

Les expériences réalisées à propos de la décharge de ce type de circuit montrent qu'au bout d'un temps cinq ou dix fois supérieur au temps caractéristique, la tension aux bornes de la résistance est pratiquement nulle.

En s'appuyant sur les observations des classes et sur l'analyse des caractéristiques de l'enseignement actuel on peut s'attendre à ce qu'une grande majorité des étudiants raisonne mathématiquement en prenant en compte les propriétés de la fonction exponentielle.

## 2.2. Analyse a posteriori de l'exercice

### 2.2.1. Analyse a posteriori de la Question 1

#### a. Résultats Globaux

Nous résumons ci-dessous dans le tableau 22 les réponses obtenues à la question posée :

Technique associée	Effectif / Réussite
Technique utilisée habituellement (loi des mailles)	49 / 40

Tableau 22 : Présentation générale des réponses des étudiants

Ce tableau nous permet de constater tout d'abord que la quasi-totalité du public concerné (98%) s'investit dans la tâche proposée en mobilisant l'unique technique enseignée dès la classe de terminale. On observe aussi une réussite importante d'une grande partie des étudiants (82%) ayant répondu à cette question.

### b. Interprétation des réponses

Compte tenu de la relation forte entre cette question qui vise à faire trouver aux étudiants l'équation différentielle représentant le circuit proposé à l'aide des lois théoriques de la physique et la Question 2 de l'Exercice 1 qui visait en effet à la faire établir à partir d'une courbe expérimentale, nous menons notre analyse en deux temps : dans un premier temps nous analysons d'une façon détaillée les réponses des étudiants tout en mettant en évidence le degré de validité des réponses et les justifications faites (si elles existent), dans un deuxième temps nous comparons la réussite des étudiants pour ces deux questions.

→ Une analyse détaillée montre qu'aucun étudiant ne tente jamais de justifier la réponse donnée. Ceci se manifeste ainsi comme un automatisme développé par les étudiants, à propos de l'établissement de l'équation différentielle dans une telle situation. Notre analyse montre également qu'une grande partie des étudiants (40 sur 49) ont répondu correctement à la question posée. Toutes les réponses correctes ont des caractéristiques similaires. Illustrons ci-dessous un exemple représentatif :

"En adoptant la convention récepteur et sachant que la tension est la même en parallèle, on a :

$$|u_R(t)| = |u_L(t)|$$

$$u_R(t) = R i(t) \text{ loi d'Ohm}$$

$$u_L(t) = r i(t) + L \frac{di}{dt} \text{ où } r : \text{résistance interne de la self.}$$

$$L \frac{di}{dt} + i(t)(R + r) = 0 \text{ (Aurélie, E38)}$$

Les neuf autres étudiants ont fourni des réponses erronées que nous détaillons ci-dessous :

Nous trouvons des réponses minoritaires mais significatives d'un rapport au savoir avec une vision causale que l'on peut traduire en disant que l'existence d'un courant électrique implique la présence d'un générateur. Il s'agit de 6 copies comportant des propositions erronées du style :

$$R.i(t) + r.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E . \text{ Voici une réponse de ce type :}$$

"La loi des mailles doit vérifier

$$U_R + U_L = U_{\text{générateur}}$$

$$U_R(t) = R i(t)$$

$$U_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} + r i(t) \text{ avec } r : \text{résistance interne de la bobine}$$

$$U_G(t) = E$$

$$\text{On obtient donc : } R i(t) + r i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E$$

$$\Leftrightarrow (R + r) i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E \text{ (Geraldine, E6)}$$

Derrière une telle proposition, il y a probablement une conception qui implique l'existence d'un générateur dans le circuit (pour justifier l'existence d'un courant électrique) et aussi l'habitude de travailler souvent sur les circuits contenant un générateur. Si on compare les équations proposées à celles fournies précédemment (Question 2 de l'exercice 1) par ces étudiants, on observe que deux sur les six ont proposé le même type d'équation,  $(f'(t_0) + \theta(t_0) = y)$ , comme l'équation différentielle décrivant le circuit proposé. Il est fort possible que pour ces étudiants le symbole  $y$  corresponde à un générateur. Un autre étudiant a appliqué chaque fois la même technique en vue de trouver l'équation différentielle du circuit et, en conséquence a proposé la même équation différentielle avec les mêmes symboles dans les deux questions du test. Et enfin trois autres étudiants n'ont pas attribué de réponse à la question précédente (Question 2, l'Exercice 1).

Trois autres étudiants ont commis une erreur identique qui se rattache probablement aux pratiques de leurs enseignants. A ce propos nous avons observé l'existence de certaines erreurs intervenant dans l'étude des circuits électriques : ignorance de la résistance interne de la bobine et remplacement du courant électrique  $-i(t)$  par  $-\frac{dq(t)}{dt}$ . A cause de ces habitudes acquises, ces trois étudiants ont mal répondu à la question posée. Deux étudiants (Nicolas, E10 et Nicolas, E49) ont préféré négliger la résistance interne de la bobine lors de l'étude du circuit et ont fourni une équation différentielle du type :  $R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$  ; enfin, un autre étudiant (Chouki, E8) a fourni une équation, telle que :

$$R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0.$$

→ On peut maintenant comparer la réussite des étudiants pour ces deux questions (Question 2 du premier exercice du test et la question dont l'analyse est en cours). Une telle comparaison nous permet de noter le fort taux de réussite pour cette dernière question et un quasi échec pour l'autre question. Ceci montre qu'une grande partie des étudiants ne sont pas capables d'établir l'équation différentielle d'un système en dehors des situations typiques de l'enseignement et qu'ils ont développé des automatismes leur permettant de construire leur modèle pour travailler sur les circuits électriques.

Ce fait observé est naturellement très lié à la culture du lycée et de DEUG 1<sup>ère</sup> année où la pratique de la démarche théorique prend une place tout à fait privilégiée par rapport à la démarche expérimentale. Ici nous observons que, par simple habitude, les étudiants commencent par l'application de la loi des mailles et terminent par l'obtention de l'équation du système.

### 2.2.1. Analyse a posteriori de la Question 2

#### a. Résultats Globaux

Citons le tableau récapitulatif résumant les réponses des étudiants données à cette question :

Techniques associées	Technique 1 <sup>1</sup>	Technique 2 <sup>2</sup>	Autres
Effectif / Réussite	7 / 3	6 / 3	11 / 6

Tableau 23 : Présentation des étudiants selon les techniques mobilisées

A partir de ce tableau qui résume les réponses des étudiants à la tâche proposée, on observe un taux de non-réponses important (26 sur 50). Ceci pourrait être dû à la nature de la tâche qui ne s'inscrit pas dans le contrat institutionnel. Cependant on constate que presque la moitié des étudiants ayant répondu ont réussi à trouver la bonne réponse. Dans le paragraphe suivant, nous nous proposons d'analyser toutes ces réponses d'une façon détaillée.

#### b. Interprétation des réponses

Classons les réponses obtenues en trois catégories qui se réfèrent aux groupes du tableau ayant traité la question :

⇒ Les études réalisées à l'aide de la Technique 1

Dans cette analyse, nous nous intéressons tout d'abord à l'application de la technique choisie par les étudiants. Nous notons que l'utilisation du symbole  $f(t)$  dans l'Exercice 1 du test, constitue une source d'ambiguïté pour ceux qui ne traitent pas les symboles avec leur signification physique. En effet la fonction  $f(t)$  représente la tension aux bornes de la résistance. Nous avons constaté ainsi que certains étudiants (4 sur 7) ont commis une grosse erreur lors de la comparaison de deux équations différentielle en associant explicitement  $i(t)$  à  $f(t)$ . Même si les deux équations sont identiques mathématiquement, elles sont complètement différentes au niveau de la Physique.

<sup>1</sup> Technique qui consiste à comparer les deux équations différentielles associées au même circuit électrique

<sup>2</sup> Technique qui nécessite de comparer les deux fonctions solutions de deux équations différentielles du circuit en question



Nous voulons examiner ensuite le cas des réponses correctes. A ce propos on constate qu'une petite partie des étudiants (3 sur 7) ont réussi à accomplir correctement la tâche proposée. Citons un exemple de ce genre de réponses :

"Si  $f(t)$  décrit l'évolution de la tension aux bornes de la résistance on peut dire que

$$\theta f'(t_0) + f(t_0) = 0 \Rightarrow \frac{du_R(t)}{u_R(t)} = -\frac{dt}{\theta}$$

$$\text{Et } \frac{L}{R} \frac{du_R(t)}{dt} + \frac{r+R}{R} u_R(t) = 0$$

$$\text{D'où } \frac{du_R(t)}{u_R(t)} = -\frac{r+R}{L} dt$$

$$\text{Donc } \theta = \frac{L}{r+R} = \tau$$

On a donc bien la dimension d'un temps" (Mathieu, E22)

Cet exemple montre que même si ces étudiants ont eu recours à cette technique pour identifier le paramètre  $\theta$ , tel que:  $\theta = \frac{L}{r+R}$ , ils ont utilisé leurs savoirs antérieurs pour trouver la dimension : une

fois qu'ils ont trouvé l'expression  $\theta$ , ils l'ont associé au temps caractéristique et en ont déduit que sa dimension était celle d'un temps. Ce genre de réponses témoigne d'un effet de contrat important créé, chez les étudiants, par l'enseignement actuel.

Les quatre autres étudiants (qui ont comparé  $i(t)$  à  $f(t)$ ) se sont contentés de trouver la relation algébrique représentant ce paramètre sans en vérifier la dimension.

Ainsi aucun étudiant ayant mobilisé cette première technique, n'a effectué l'étude que nous avons prévu dans l'analyse a priori.

⇒ Les études réalisées à l'aide de la Technique 2

Ces réponses données par 6 étudiants montrent, d'une part, que la tâche proposée leur permet d'échapper aux attitudes habituelles et d'autre part, qu'elle leur donne l'occasion de fournir une étude algébrique en accord avec le contrat institutionnel qui les oriente, chaque fois vers une technique algébrique de résolution. Voici l'une des réponses appartenant à cette catégorie :

"Pour trouver  $\theta$  il nous faut résoudre l'équation

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{(R+R_L)}{L} i(t) = 0 \Rightarrow i(t) = C e^{-\frac{R+R_L}{L}t}$$

$$\text{à } t=0 \text{ } u_R(t) = E \text{ or } u_R(t) = R i(t)$$

$$\text{donc } i(t=0) = E/R \text{ on a donc } C = E/R$$

$$\text{d'où } i(t) = (E/R) e^{-\frac{R+R_L}{L}t}, \text{ on a donc bien une solution de la forme } f(t) = C e^{\theta t}$$

$$\text{avec } \theta = \frac{-(R+R_L)}{L}." \text{ (Laurent, E21)}$$

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à l'application de la technique utilisée. A ce propos on note que 4 étudiants sur 6 ont commis une erreur identique à celle observée ci-dessus en associant la fonction  $f(t)$  à  $i(t)$ . Ceci montre encore une fois que les étudiants ont mémorisé les connaissances relatives aux équations différentielles dans le cadre mathématique mais ne font pas référence aux phénomènes qu'elles représentent.

Dans un deuxième temps, nous voulons passer en revue les caractéristiques des différents types de réponses : nous avons constaté que seulement trois étudiants ont fourni des réponses correctes en vérifiant que ce paramètre a la dimension d'un temps. L'un de ces étudiants a vérifié sa réponse en faisant appel aux dimensions de  $R$  et  $L$ , alors que deux autres étudiants, après avoir trouvé l'expression algébrique représentant ce paramètre, en ont déduit la réponse finale.

Deux autres étudiants ont fourni des réponses fausses en proposant  $H.\Omega^1$  comme dimension de  $\theta$ . Le dernier étudiant mobilisant cette technique s'est contenté de donner l'expression représentant le paramètre cherché sans aller jusqu'au bout de sa réponse.

⇒ Autres types des réponses

Malgré la nature de la tâche les conduisant à réagir d'une façon inhabituelle, 11 étudiants sur 24 ont fait appel aux savoirs antérieurs en vérifiant que la longueur de la sous-tangente, tracée en un point d'une courbe exponentielle, correspond au temps caractéristique du circuit étudié. Citons un exemple pour mieux expliquer ce propos :

"Ce paramètre est la constante de temps et sa dimension est en seconde.  $\theta = \frac{R_T}{L}$ ". (Maximo, E27)

Dans cette analyse nous pensons qu'il est utile de nous questionner sur deux aspects : la validité de la technique employée et la variété des réponses fournies. On note d'une part que l'utilisation d'une technique qui nécessite d'associer ce paramètre au temps caractéristique du circuit ne correspond pas aux objectifs de la question, et d'autre part, qu'elle ne constitue pas une technique adéquate pour ceux qui ont déjà mobilisé cette technique en vue de trouver, pour la première fois la dimension de ce paramètre (rappelons que les étudiants ont déjà rencontré cette tâche à la question 1 du premier exercice du test proposé). Comme il s'agit de la vérification de la dimension du paramètre  $\theta$ , il fallait mobiliser une autre technique que celle qui a été utilisée pour trouver cette dimension. Nous avons cependant constaté que certains étudiants (4 sur 11) ont effectué le même type d'étude dans les deux parties du test, ce qui montre que cette deuxième tâche n'a pas été réalisée correctement par ces étudiants.

On constate de plus que seulement 6 étudiants ont affirmé que la dimension de ce paramètre était un temps. Alors que les autres se sont contentés d'écrire l'expression qui représente ce paramètre tout en s'inspirant de la relation connue du temps caractéristique, telle que  $\tau = \frac{L}{R_T}$  sans en déduire la dimension cherchée.

## 2.2.3. Analyse a posteriori de la Question 3

## a. Résultats globaux

Le tableau 24, ci-dessous, résume les réponses obtenues à cette question :

Tâche proposée	Technique associée	Effectif / Réussite
L'évolution du courant du circuit	Technique analogique	1 / 1
	Technique algébrique	20 / 12
	Autres	7 / 0

Tableau 24 : Présentation des réponses des étudiants en fonction des techniques mobilisées

Il convient tout d'abord de remarquer que, la recherche de l'évolution du courant électrique qui traverse la bobine a poussé vingt étudiants à répondre en résolvant algébriquement l'équation différentielle du circuit. Douze étudiants parmi ces vingt ont réussi ainsi à aboutir à une réponse correcte.

Les huit autres étudiants ont utilisé différentes techniques et sept ont donné des réponses erronées.

## b. Interprétation des réponses

Classons les réponses des étudiants en trois catégories :

⇒ Les études réalisées à l'aide de la technique analogique

Une seule étudiante (Géraldine, E6) a exécuté la tâche proposée en faisant appel à la solution trouvée dans la partie A. Nous donnons ci-dessous la réponse de cette étudiante :

"En assimilant  $i(t)$  à  $f(t)$

$$S = \{t \in \mathfrak{R} \rightarrow k \cdot e^{-t/\theta} / k \in \mathfrak{R}\}$$

$$\text{Donc ici : } S = \{t \in \mathfrak{R} \rightarrow k \cdot e^{-\frac{R_{\text{total}} t}{L}} / k \in \mathfrak{R}\}$$

$$i(t) = k \cdot e^{-\frac{R_{\text{total}} t}{L}} \text{ ". (Géraldine, E6)}$$

Cette réponse montre explicitement l'analogie faite entre les deux parties du test proposé. Cependant, on constate que cette étudiante n'a pas appliqué les conditions initiales en vue de connaître la solution complète.

⇒ Les études à caractère algébrique

Compte tenu des caractéristiques générales de la question posée, nous avons choisi d'analyser les réponses données par la technique algébrique selon trois lignes directrices :

- > influence des habitudes acquises dans les deux disciplines,
- > validité des réponses fournies,
- > utilisation des conditions initiales (tache implicite).

- > 14 étudiants sur vingt ont choisi de résoudre l'équation différentielle en passant par toutes les étapes nécessaires. Le reste des étudiants a choisi une méthode plus économique et plus pratique, utilisée plutôt par les enseignants de physique et qui permet de donner la solution en une seule étape. Les réponses obtenues révèlent que la méthode utilisée en mathématiques lors de l'étude des équations différentielles est plus accessible à une grande majorité des étudiants. Cela indique explicitement l'effet du contrat actuel de l'enseignement mathématique sur l'étude des phénomènes étudiés en Physique.
- > Compte tenu des exercices et des problèmes traités dans l'enseignement actuel de ce type d'équations différentielles, nous nous étonnons de constater que 8 étudiants (presque un tiers de l'effectif) ne puissent pas obtenir la solution correcte. Le plus souvent ils commettent le même type d'erreur correspondant à négliger la constante d'intégration. Ils résolvent donc l'équation différentielle d'une façon algorithmique tout en ne passant que par certaines des étapes habituelles.
- > En Physique, la résolution d'une équation différentielle consiste souvent à chercher une seule solution qui satisfasse les conditions initiales. Nous avons constaté que certains étudiants (12 étudiants sur 20), comme Marcklis E41, se sont contentés de trouver la solution générale comme ils en ont pris l'habitude en mathématiques. Voici, en exemple, la réponse donnée par cet étudiant :

"On résout l'équation différentielle :

$$\text{On a } L \frac{di(t)}{dt} + (R+r)i(t) = 0$$

$$\text{d'où } \frac{di(t)}{dt} = -\frac{(R+r)}{L}i(t)$$

$$\text{on obtient } \frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{(R+r)}{L}dt$$

$$\exists C \in \mathfrak{R} \ln|i(t)| = -\frac{(R+r)}{L}t + C \text{ d'où } |i(t)| = -\frac{R+r}{L}t + C$$

$$\text{les solutions sont : } i(t) = C e^{-\frac{(R+r)}{L}t} / C \in \mathfrak{R} \text{". (Marcklis, E41)}$$

Ceci nous permet de constater encore une fois, au niveau du contrat, la prédominance des Mathématiques sur la Physique.

⇒ Les études réalisées à partir d'une autre technique que celle décrite dans l'analyse a priori

Dans cette troisième catégorie, nous avons placé les réponses de 7 étudiants qui ont eu des difficultés à comprendre et donc à réaliser la tâche proposée.

Les difficultés observées chez ces étudiants montrent qu'ils ont du mal à saisir que la fonction solution de l'équation différentielle du système étudié représente effectivement l'évolution du courant au cours du temps dans circuit étudié. L'exemple suivant permet d'illustrer ce type de difficultés :

"L'intensité du courant qui traverse la bobine

$$i(t) = Ce^{-\frac{R_T}{L}t}$$

$$U_L = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R_T}{L} \cdot C \cdot e^{-\frac{R_T}{L}t} \text{ " (Marjorie, E5)}$$

Ces difficultés peuvent être expliquées par le fait que, souvent, les mêmes tâches sont associées aux mêmes techniques ce qui permet aux étudiants de construire une relation indiscutable entre le type de tâches et la technique apprise.

#### 2.2.4. Analyse a posteriori de la Question 4

##### a. Résultats globaux

Le tableau 25 résume les réponses des étudiants selon les techniques utilisées.

Tâche proposée	Technique mobilisée	Effectif
Interprétation du phénomène physique	Technique à caractère mathématique	17
	Technique à caractère physique	6
	Autres	2

Tableau 25 : Présentation des réponses obtenues suivant les techniques utilisées

Cette quatrième question constitue un révélateur des savoirs nécessaires pour établir une relation et un choix entre les deux cadres (mathématique ou physique). Les réponses obtenues et résumées par le Tableau 25 nous permettent de vérifier que cette question a été le plus souvent abordée par un raisonnement mathématique par une grande majorité des étudiants.

##### b. Interprétation des réponses

Présentons les réponses des étudiants en fonction de la technique choisie pour réaliser la tâche proposée :

⇒ Les études réalisées selon la technique à caractère mathématique

Au total dix-sept étudiants ont raisonné dans le cadre mathématique en vue d'accomplir la tâche proposée et ont tous affirmé que la tension aux bornes de la résistance ne peut pas s'annuler en un temps fini.

Cependant lors de l'accomplissement de la tâche certains d'entre eux (12 sur 17) rendent celle-ci inutilement complexe. En effet, au lieu de prendre en compte la courbe fournie au début du test et/ou son expression algébrique trouvée dans la deuxième question de l'Exercice 1 pour décider si la tension aux bornes de la résistance peut s'annuler, ces étudiants ont fait appel à l'expression algébrique du courant qui traverse le circuit.

Voici l'une des réponses obtenues :

"Pour que la tension soit nulle à la résistance il faut que  $i(t)$  soit nul. Pour cela il faut que  $e^{-\frac{r+R}{L}t}$  soit nul ; ce qui n'est possible que pour  $t = \infty$ . Donc la tension ne peut pas être nulle en un temps fini, mais elle sera très proche de 0". (Steven, E24)

⇒ Les études réalisées selon la technique à caractère physique

Signalons d'abord qu'un faible taux de réponse (6 sur 25) a été donné en mobilisant des connaissances acquises en Physique.

Citons un exemple de réponse:

"La tension aux bornes de la résistance,  $u_R$ , est donnée par la relation  $u_R = R i(t)$ . Pour un temps suffisamment long ( $5\tau$ ) l'intensité dans le circuit va devenir nulle (le circuit se sera totalement déchargé) donc  $u_R = 0$  car  $i(t) = 0$ ". (Remi, E30)

Les copies comportant une réponse vérifiant que la tension aux bornes de la résistance peut s'annuler en un temps fini, ont établi le lien entre cette tension et l'intensité du courant. Nous avons deux types de réponses : 4 réponses affirment que pour un temps suffisamment long (par exemple  $5\tau$ ), l'intensité du courant devient nulle alors que les autres réponses se focalisent sur la dissipation de l'énergie que la bobine contient. Dans les deux cas ces étudiants déclarent que la tension peut s'annuler en un temps fini.

## Conclusion

Rappelons que dans le chapitre précédent (Chapitre D<sub>1</sub>) nous avons mis en évidence certaines caractéristiques des rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle en tant que concept mathématique. Ce deuxième chapitre (Chapitre D<sub>2</sub>) vise à caractériser les rapports personnels des étudiants à ce même objet en tant que modèle. Pour cela, au début de ce chapitre, nous nous sommes posés une série de questions que nous examinons ci-dessous d'une façon détaillée :

### ***Examen de la question (Q1)***

*Compte tenu des caractéristiques du travail de modélisation dans l'enseignement actuel, serait-il possible de faire construire par l'apprenant le modèle équation différentielle en favorisant une démarche expérimentale?*

Pour répondre à cette première question nous avons proposé aux étudiants de trouver l'équation différentielle qui représente un circuit électrique. La volonté d'une grande partie des étudiants de répondre à une telle question à l'aide de cette démarche expérimentale montre qu'il est possible de proposer cette démarche dans l'enseignement actuel. Cependant les pratiques de ces étudiants nous conduisent à mettre l'accent sur les points suivants :

- > les étudiants ont de difficultés notables à considérer l'objet équation différentielle avec un statut de modèle concernant deux aspects complémentaires : lexicale et sémantique. En effet un tel modèle doit s'exprimer à l'aide de symboles mathématiques et il doit représenter le système physique proposé ce qui signifie que, au delà de la définition mathématique, une équation différentielle ne doit pas seulement consister en une relation entre une fonction et l'une de ses dérivées mais elle doit aussi montrer clairement la relation qui existe entre les différents composants du système physique. On observe que cet aspect sémantique est totalement ignoré par tous les étudiants qui ont cherché à modéliser le système proposé.
- > Notons aussi qu'une grande partie des étudiants ont des difficultés à saisir convenablement ce que représente une équation différentielle quand elle décrit une situation physique. Les expressions assimilées à des équations différentielles par une grande partie des étudiants, (alors qu'elles n'étaient valables qu'en un seul point de la courbe étudiée), nous permettent de tirer une telle conclusion.

### ***L'examen de la question (Q2)***

*Les étudiants qui suivent ce type d'études (qui limite le domaine d'utilisation des équations différentielles à certaines études algorithmiques) sont-ils capables de reconnaître des conditions d'utilisation des équations différentielles ?*

Les réponses données par une grande partie des étudiants à un type de tâche qui nécessite de se focaliser sur deux représentations différentes d'une même équation différentielle représentant le même

circuit montrent que ces étudiants ont du mal à s'y retrouver. On voit qu'ils ont tendance à réaliser systématiquement certains types de tâches connues d'une façon algorithmique.

***L'examen de la question (Q3)***

*L'usage répété de cette démarche (la démarche théorique) dans l'enseignement actuel peut-il contribuer à assurer un apprentissage adéquat de cette démarche? A quel moment les étudiants développent-ils leurs automatismes à ce propos ?*

En tenant compte des caractéristiques du rapport institutionnel décrit dans le champ de l'électrocinétique, nous avons proposé aux étudiants de modéliser un circuit électrique à l'aide d'une équation différentielle. En effet cette étude porte sur une tâche classique de l'enseignement actuel. Cependant dans notre cas il ne s'agit pas seulement de réaliser la tâche proposée mais il s'agit aussi de vérifier la technique utilisée qui s'appuie sur la démarche théorique. Les réponses obtenues pour une telle tâche nous ont montré que des automatismes ont été développés chez les étudiants leur permettant de réaliser les unes après les autres les étapes de la technique habituelle. Conformément aux attentes institutionnelles, nous avons noté, à la fois, une réussite notable dans l'application de la technique enseignée et une absence remarquable de la vérification de cette dernière.

Les résultats obtenus indiquent en effet une perte de sens du travail de modélisation chez les étudiants pour lesquels ce travail se réduit à l'application de certaines lois théoriques.

***L'examen de la question (Q4)***

*Les étudiants attribuent-ils à l'objet équation différentielle un statut, différent de celui donné dans l'institution mathématique? Ou traitent-ils cet objet en fonction du statut qu'il a dans l'institution mathématique ?*

Nous avons noté que l'on attribue à l'objet équation différentielle deux statuts différents dans chacune des deux institutions sur lesquelles nous nous sommes focalisés dans cette recherche. Nous avons observé une séparation forte entre ces deux statuts dans l'enseignement actuel (par les exercices proposés et par les pratiques des enseignants). Nous avons noté, à partir de leurs productions, qu'une grande partie des étudiants avaient des difficultés à traiter cet objet dans un statut de modèle. Plus précisément nous avons constaté que les tâches portant sur une situation physique ont été résolues par une grande partie des étudiants en mobilisant des connaissances acquises en mathématiques. Ceci montre explicitement que cet objet, même si l'on utilise en vue de représenter des situations physiques, ne gagne pas un statut de modèle et donc n'acquiert pas du sens auprès de ces étudiants.

Les deux premiers chapitres de cette partie (Partie D) nous ont permis de relever d'une façon générale certaines caractéristiques des rapports personnels des étudiants. Il nous reste maintenant à décrire les différents rapports personnels observés chez le public concerné. C'est l'objet de notre prochain chapitre (Chapitre D<sub>3</sub>).





# Chapitre D<sub>3</sub> : Typologie des rapports personnels des étudiants aux équations différentielles

## Introduction

Après avoir analysé d'une façon détaillée les réponses obtenues<sup>1</sup> aux deux tests proposés, dans les deux chapitres précédents (Chapitre D<sub>1</sub> et D<sub>2</sub>), nous voulons à présent relever les différents rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle. Rappelons que, au cours de ces deux chapitres, nous sommes interrogés sur les deux questions suivantes : " Les étudiants arrivent-ils à résoudre telle ou telle tâche tâche relative à une équation différentielle ? ", " Sont-ils capables de formuler les énoncés technologiques qui sous-tendent leurs actions lors de la résolution d'une tâche proposée, particulièrement si celle-ci est familière ? ". Nous avons constaté que la quasi-totalité des étudiants ne tentent jamais de reformuler les énoncés technologiques et qu'ils ont des difficultés à traiter certains types de tâches.

Ainsi, dans ce dernier chapitre notre objectif est de réaliser une étude plus spécifique visant à accéder le mieux possible au rapport personnel d'étudiants. Cette étude commence par la caractérisation de différents modèles de rapports personnels et se prolonge par une classification des étudiants (en fonction de ces derniers).

## 1. Différents modèles de rapports personnels

Nous proposons une typologie qui peut être qualifiée d'outil d'analyse permettant de définir les différents rapports personnels des étudiants à l'objet d'étude. Cette typologie est le résultat de l'analyse des réponses des étudiants à l'ensemble des questions posées dans notre expérimentation.

Nous présentons tout d'abord les critères généraux qui construisent cette grille d'analyse :

- C1 : Traitement de toutes les questions posées,
- C2 : Mobilisation correcte des techniques étudiées,
- C3 : Mobilisation de la technique mise en avant par l'institution pour réaliser un type de tâches donné,
- C4 : Transfert des connaissances d'un domaine à un autre (du domaine mathématique au domaine physique et vice-versa).

Cette grille nous permet de caractériser quatre modèles de rapports personnels dont chacun est décrit selon les valeurs prises par ces critères.

---

<sup>1</sup> L'ensemble des réponses des étudiants se trouve dans l'annexe de la Partie D

**Rapport Conforme aux rapports institutionnels à l'objet équation différentielle (RC)**

Dans ce modèle de rapport il existe une relation forte avec le rapport institutionnel qui a été décrit dans la partie précédente de ce travail (Partie C). Cette relation peut être facilement observée à partir des réponses obtenues à l'ensemble des tâches proposées dans les deux tests (en mathématiques et en électrocinétique). Ce modèle de rapport personnel correspond à la validité de tous les critères décrits ci-dessus.

**Rapport Sélectif aux types de tâches proposés (RS)**

Dans ce modèle RS, les seules tâches traitées sont celles les plus fréquemment proposées dans l'enseignement actuel. Comme nous l'avons évoqué précédemment (Partie C), dans l'enseignement actuel, les étudiants sont amenés à travailler (surtout dans les séances de travaux dirigés) systématiquement sur certains types de tâches tels que:

- > En mathématiques, l'identification de la nature des équations différentielles et la résolution algébrique des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre
- > En électrocinétique, l'établissement de l'équation différentielle qui modélise l'évolution du courant dans le circuit.

Le premier critère qui correspond à une résolution complète des questions posées n'est pas vérifié pour ce modèle de rapport.

**Rapport centré exclusivement sur le statut Mathématique des équations différentielles (RM)**

Ce modèle de rapport personnel est relié particulièrement aux types de tâches et aux techniques enseignées dans l'institution mathématique. Nous le distinguons de RC par la tendance des étudiants à réinvestir des connaissances mathématiques dans l'étude de situations physiques et par le refus de transférer des connaissances physiques dans le domaine des mathématiques.

Mis à part l'accomplissement des types de tâches très classiques de l'institution physique, ce sont les techniques à caractère mathématique qui prennent la place des techniques à caractère physique. Ceci se manifeste par une simple utilisation des équations différentielles en physique, sans que soit donné à celles-ci un statut de modèle de la situation physique.

Les deux critères C1 et C4 ne sont plus vérifiés dans ce modèle de rapport.

**Rapport Non conforme aux rapports institutionnels à l'objet équation différentielle (RN)**

Ce modèle de rapport personnel peut se caractériser par des tentatives d'apprentissage en général infructueuses : on ne peut alors pas dire qu'il y a un apprentissage attendu par l'institution. Ce rapport se caractérise par la présence des deux observables suivantes :

- > beaucoup de non-réponses ;
- > difficultés à accomplir certaines tâches relatives aux équations différentielles ou erreurs très importantes à propos d'utilisation de techniques enseignées dans l'institution.

Seul le critère C3 est vérifié dans ce dernier modèle de rapport.

Le tableau ci-dessous résume le fonctionnement des critères d'analyse pour chacun de ces modèles de rapports :

Critères ⇒ Modèles de rapports ↓	Exhaustivité de l'étude C1	Mobilisation correcte –techniques C2	Mobilisation de la technique conforme C3	Transfert des connaissances C4
RC	Oui	Oui	Oui	Oui
RS	Non	Oui	Oui	Oui
RM	Non	Oui	Oui	Non
RN	Non	Non	Oui	Non

Tableau 26 : Représentation des différents modèles de rapport personnel en fonctions des critères

## 2. Etude des différents rapports personnels des étudiants à l'objet équation différentielle

### 2.1. Méthodologie d'analyse

Pour mettre en évidence le plus clairement possible les différentes caractéristiques des rapports personnels des étudiants qui participent à notre expérimentation, nous réalisons une analyse de leurs copies par étapes successives : nous commençons par classer les étudiants en fonction des quatre modèles de rapports personnels, puis nous continuons par le regroupement des rapports selon les caractéristiques communes observées, et finalement nous nous focalisons sur chacun des rapports. Dans ce dernier travail nous insisterons particulièrement sur les difficultés que rencontrent les étudiants.

### 2.2. Interprétation des réponses d'étudiants

Bien qu'il soit difficile de faire une classification complètement objective compte tenu des éléments dont nous disposons et des difficultés d'accès à des informations personnelles, nous pouvons proposer quelques éléments significatifs. Nous classons les étudiants, à l'aide de leurs réponses, en mettant en oeuvre les critères généraux regroupés pour chaque modèle de rapport personnel.

Ainsi pour mieux analyser les rapports des étudiants nous menons notre analyse en deux temps : dans un premier temps nous illustrons et discutons les caractéristiques générales du rapport examiné à l'aide d'une copie d'étudiant; dans un deuxième temps, nous détaillons le mieux possible chacun des rapports personnels classés dans un groupe.

## 2.2.1. Le groupe "RC"

Seize étudiants sur cinquante relèvent du modèle RC.

On trouve dans les copies de ces étudiants les caractéristiques générales de ce modèle : tous les critères d'analyse y sont vérifiés. Illustrons le par certains extraits de copie d'un étudiant.

Extraits des réponses données au test mathématique (cf. Annexe n°1 de la Partie D pour les énoncés des exercices proposés et Annexe n° 3 pour les détails de la copie d'étudiant (Steven, E16))

Exercice 1. a.  $x^2 y' + (1 + \sin x)y = -5x$  est de la forme  $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$  c'est donc une équation différentielle linéaire du premier ordre. [...]<sup>1</sup>

Exercice 2. Q1.  $g(x) = 3$  si  $0 \leq x \leq 1$ ,  $g(x) = 2.e^{1-x} + 1$  si  $x \geq 1$  [...]

Q2. soit  $(E_0)$   $y'(x) + y(x) = 0$ ,  $S_0 \{C.e^{-x} / C \in \mathfrak{R}\} = Vect(u)$  où  $u : x \in \mathfrak{R} \rightarrow e^{-x}$

On détermine  $y_p(x)$  la solution particulière de  $(E)$  :

Méthode de variation de la constante : soit  $y(x)$  solution de  $E$  : on pose  $y(x) = C(x).u(x)$

$y(x) = C(x).e^{-x}$ ,  $y'(x) = C'(x).e^{-x} - C(x).e^{-x}$ . [...]  $y(x) = 2xe^{1-x} + 1 + k.e^{-x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$

Q3. Figure 2

Exercice 3. Q1.  $y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0$   $(E)$   $y(0) = 2, y'(0) = 0$

[...]  $S_E = \{t \in \mathfrak{R} \rightarrow (C_1 + C_2 t)e^{\alpha} / (C_1, C_2) \in \mathfrak{R}^2\}$ . [...]  $y(t) = (2 + (1 - 2\omega)t)e^{\alpha}$

Q2 : [...]  $y(0) = 2 \Leftrightarrow q(0) = 2C$  valeur de la charge sur l'armature du condensateur au temps  $t = 0$ .

$y'(0) = 0 \Leftrightarrow i(0) = dq / dt = 0$ , l'intensité du courant est nulle au temps 0. [...]

Extraits des réponses données au test physique (cf. Annexe n°2 de la Partie D pour les énoncés des exercices proposés et Annexe n°3 pour les détails de la copie d'étudiant (Steven, E16))

Exercice 1. Q1.a. Dimension de  $(\theta(t_0))$  : c'est un temps (s). [...]  $\theta(t_0)$  est homogène à un temps, il s'exprime en secondes.

b.  $\theta(t_1) = 5\text{ms}$ ,  $\theta(t_2) = 5\text{ms}$ .

Q2 :  $f'(t_0) = \frac{y - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(t_0)}{\theta(t_0)}$ ,  $\theta(t_0)f'(t_0) = f(t_0)$

Loi des mailles :  $u_R(t) + u_L(t) = 0$

$R.i(t) + L \frac{di}{dt} + r_L i(t) = 0$  [...] or  $\frac{du_R(t)}{dt} = f'(t)$  [...]  $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-(R + r_L).R}{L} = \theta(t_0)$

Q3. [...]  $f(t) = t.e^{\theta}$  Cela signifierait qu'à  $t = 0$   $f(t=0) = 0$  or à  $t = 0$   $i_0$  est maximal et  $R. i_0$  maximal  $\Rightarrow f(t=0)$  est maximal. Donc la tension à l'instant  $t = 0$  aux bornes de la résistance n'étant pas nulle, cette solution ne peut pas "marcher".

Exercice 2 :

<sup>1</sup> L'utilisation [...] signifie que la réponse a été complétée par l'étudiant. Nous avons transcrit les passages significatifs pour notre recherche

$$Q1. u_L + u_R = 0 \text{ [...] } R.i(t) + L \frac{di}{dt} + r_L i(t) = 0$$

Q2. [...]  $\theta(t) = \frac{i(t)}{di(t)/dt}$  on peut faire varier la valeur de  $\theta(t)$  en changeant les paramètres  $R$  et  $(L, r_L)$  du circuit car  $i(t)$  dépend de ces paramètres.

Q3 : [...]  $i(t)$  est l'intensité qui traverse la résistance mais aussi la bobine car le courant est à chaque instant le même partout dans le circuit.

Q4 : D'après l'expression de  $i(t)$ , le courant tend vers 0 pour un temps infini. Ceci implique que la tension  $u_R(t)$  tend vers 0 ainsi pour un temps fini.

→ C1 : Traitement de toutes les questions posées

Cet extrait nous permet de constater un effort important pour accomplir l'ensemble des tâches proposées. Notons que la réussite observée se justifie par l'application correcte des techniques utilisées mais pas toujours par l'obtention des réponses correctes. Il est en effet possible de constater des erreurs qui proviennent de manque d'attention ou de fautes des calculs dans les copies de ces étudiants.

→ C2 : Mobilisation correcte des techniques étudiées

Un examen attentif de la copie mentionnée montre que cet étudiant n'a aucune difficulté à appliquer les techniques qu'il utilise pour résoudre les différentes questions.

→ C3 : Mobilisation de la technique mise en avant par l'institution pour accomplir un type de tâches

Montrons ci-dessous deux exemples empruntés à la copie précédente qui vérifient ce critère :

*Utilisation de la forme générale des équations différentielles linéaires comme moyen de savoir si une expression algébrique représente ou non une équation différentielle.*

Comme nous l'avons observé précédemment (Chapitre C<sub>1</sub>), l'enseignement actuel des équations différentielles se limite pratiquement aux équations linéaires. Ce fait a comme conséquence que les étudiants utilisent la forme générale des équations différentielles comme une définition des équations différentielles générales. Illustrons ce propos par l'une des réponses donnée par E16 à l'exercice 1 du test :

"a.  $x^2 y' + (1 + \sin x)y = -5x$  est de la forme  $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$  c'est donc une équation différentielle linéaire du premier ordre."

Bien que l'utilisation de cette forme ne permette pas toujours d'identifier correctement les expressions algébriques représentant une équation différentielle, il y a là une adéquation forte entre le rapport institutionnel et ce rapport personnel.

*Mobilisation systématique d'une technique algébrique lors de la résolution d'une question qui admettrait également l'utilisation d'autres techniques.*

Notre observation des classes nous a montré explicitement la prédominance des techniques algébriques face aux autres techniques dans l'enseignement actuel. Cette pratique est observée facilement à partir d'un passage de la copie proposée au début de ce paragraphe :

"Q2. soit  $(E_0) y'(x) + y(x) = 0$ ,  $S_0 \{C.e^{-x} / C \in \mathfrak{R}\} = Vect(u)$  où  $u : x \in \mathfrak{R} \rightarrow e^{-x}$

On détermine  $y_p(x)$  la solution particulière de  $(E)$  :

Méthode de variation de la constante : soit  $y(x)$  solution de  $E$  : on pose  $y(x) = C(x).u(x)$

$y(x) = C(x).e^{-x}$ ,  $y'(x) = C'(x).e^{-x} - C(x).e^{-x}$

[...]  $y(x) = 2xe^{1-x} + 1 + k.e^{-x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 1$  " (Steven, E16)

La question pour laquelle E16 fournit cette réponse était formulée de la façon suivante :

" Etudier le comportement de la fonction solution  $y(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini pour l'équation différentielle :  $y'(x) = -y(x) + g(x)$  satisfaisant  $y(2) = 4$ ."

Comme nous l'avons signalé précédemment (Chapitre D<sub>1</sub>, paragraphe 2.1) l'étudiant aurait pu répondre à cette question en appliquant une technique qualitative qui aurait supprimé la complexité et éventuellement les difficultés d'une série de calculs algébriques.

→ C4 : Transfert des connaissances d'un domaine à un autre

Le dernier critère opérationnel suppose qu'un étudiant relevant d'un tel rapport est capable transférer des connaissances acquises dans un premier domaine vers un autre domaine. Ceci apparaît pour cet étudiant qui donne la réponse suivante :

"Q2 : [...]  $y(0) = 2 \Leftrightarrow q(0) = 2C$  valeur de la charge sur l'armature du condensateur au temps  $t=0$ .

$y'(0) = 0 \Leftrightarrow i(0) = dq/dt = 0$ , l'intensité du courant est nulle au temps 0. [...]" (Steven, E16)

Après avoir résolu l'équation différentielle proposée à la première question de l'Exercice 3 (mathématique), cet étudiant se focalise sans difficulté sur la deuxième en vue d'interpréter le résultat purement mathématique pour le phénomène physique.

Tous les étudiants relevant de ce modèle de rapport personnel n'ont pas fourni de copies fortement similaires à celle examinée ci-dessus. Ce constat nous a conduit à les classer en trois groupes selon les difficultés observées à propos des deux statuts de l'objet équation différentielle:

- > un premier groupe noté RC1 rassemble les étudiants qui ont des difficultés au niveau de l'accomplissement des tâches relatives au statut d'objet d'étude des équations différentielles,
- > un deuxième groupe noté RC2 concerne les étudiants qui ont du mal à exécuter des tâches relatives au statut de modèle,
- > un dernier groupe noté RC3 comprend des étudiants ayant des difficultés à traiter l'objet équation différentielle quel que soit son statut.

Analysons de façon détaillée chacun des rapports personnels s'inscrivant dans ces trois groupes:

### ***Groupe RC1***

Quatre étudiants se classent dans ce groupe. Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, il s'agit d'étudiants qui ont des difficultés à propos de l'accomplissement de tâches proposées en mathématiques. Compte tenu des caractéristiques de leurs copies, il est possible de les séparer en deux sous-groupes : un premier sous-groupe rassemble les copies de trois étudiants (Benoit E25, Anne-Claire E29 et Lise E39). Ces copies nous permettent d'observer un point commun qui montre que pour eux les équations différentielles se réduisent aux équations linéaires.

La dernière copie (Aurélien E19), appartenant au deuxième sous-groupe, met en évidence la difficulté de l'étudiant à réaliser une tâche proposée à la suite de la résolution algébrique d'une équation différentielle. Cette difficulté se manifeste par la réponse donnée à la deuxième question de l'Exercice 2 (en mathématiques) nécessitant d'étudier le comportement de la fonction solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Cette réponse comporte une résolution complète de cette dernière mais l'absence du calcul de limite permettant d'aboutir à la réponse attendue.

### ***Groupe RC2***

Certains étudiants (3 étudiants - Steven E16, Sophie E31, Amandine E40 - sur 16) donnent systématiquement de bonnes réponses aux exercices se présentant dans le test mathématique. Cependant leurs réponses aux questions posées dans le deuxième test (physique) nous permettent de conclure qu'ils ont des difficultés à traiter l'objet équation différentielle comme un modèle dans un contenu inhabituel associé à une situation physique. Ce constat est le fruit de l'analyse des réponses données à l'Exercice 1 du test de physique (cf. Annexe n° 2 de la Partie D) où les étudiants sont invités à établir l'équation différentielle d'un circuit électrique à partir d'une courbe représentative.

Ils ont en effet proposé une équation algébrique valable en un seul point de la courbe donnée, comme étant l'équation différentielle de cette dernière. Une telle proposition nous permet de constater qu'ils ont des difficultés à saisir, en dehors des contextes habituels, ce que signifie une équation différentielle d'une part et d'autre part ce que représente une équation différentielle en tant que modèle.

### ***Groupe RC3***

Une grande partie des étudiants (9 sur 16) relevant du modèle RC, semblent relever de RC3. Ils fournissent effectivement des réponses qui signalent l'existence de certaines difficultés à propos des deux statuts de l'objet équation différentielle.

Pour mieux analyser ce groupe, nous classerons ces étudiants en quatre catégories selon les caractéristiques de leurs copies : une première catégorie concerne deux étudiants (Romaine E35 et Clio E43) ayant des difficultés, d'une part, à réaliser certains calculs algébriques lors de la résolution d'une équation différentielle du premier ordre, et d'autre part à construire un modèle mathématique à



partir d'une démarche expérimentale. Ce dernier point se manifeste par la proposition d'équations valables en un seul point de la courbe cherchée.

Une deuxième catégorie concerne trois étudiants (Sarah E3, Claire E33, Malika E37) qui ne possèdent pas des connaissances pertinentes liées au concept d'équations différentielles : deux (E3 et E37) parmi eux considèrent que toutes les équations différentielles sont linéaires alors que pour E33 une équation différentielle doit posséder toujours une fonction inconnue et l'une de ses dérivées. Leurs copies montrent aussi qu'elles ont les mêmes difficultés que les deux étudiants cités ci-dessus.

Une troisième catégorie comprend deux étudiants (Laurenne E21 et Maximo E27) pour lesquels on observe certaines difficultés conceptuelles :

- toutes les équations différentielles doivent être linéaires (E21) ou une équation différentielle doit comprendre une fonction inconnue et l'une de ses dérivées (E27)
- tout circuit électrique parcouru par un courant, doit avoir un générateur de tension.

Finalement une quatrième catégorie concerne deux étudiants (Marjorie E5 et Yannick E26). Leurs copies montrent que :

- ils possèdent les mêmes connaissances à propos des équations différentielles que les étudiants cités ci-dessus (E5 comme E21, alors que E26 comme E27),
- ils proposent comme équation différentielle associée à la courbe de l'énoncé une relation valable en un seul point.

On constate que les difficultés de ces étudiants se regroupent généralement en trois niveaux : les difficultés conceptuelles, les difficultés à mener à bien des calculs algébriques et les difficultés à traiter le concept d'équation différentielle avec un statut de modèle.

### 2.2.2. Le groupe "RS"

Nous avons observé des choix faits par certains étudiants (6 étudiants sur 50) dans l'accomplissement des types de tâches proposées. Nous avons constaté que ces étudiants ont refusé systématiquement :

- > d'étudier un circuit électrique à l'aide de résultats obtenus à une question purement mathématique,
- > de trouver le champ des vecteurs tangents d'une équation différentielle,
- > de réaliser la partie expérimentale du test proposé en électrocinétique.

Pour mieux illustrer ces propos, nous proposons d'examiner l'une des copies tout en mettant en avant les caractéristiques générales de ce modèle.

Extraits des réponses données au test mathématique, (cf. Annexe n°1 de la Partie D pour les énoncés des exercices proposés et Annexe n°4 pour les détails de la copie d'étudiant (Céline, E44))

Exercice 1. [...] b.  $\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$  c'est une équation différentielle du second degré avec second degré. [...].

Exercice 2. Q1.  $g(x) = 2.e^{1-x} + 1$  si  $x \geq 1$ ,  $g'(x) = -2e^{1-x}$

Signe de  $g'(x)$  :  $e^{1-x} > 0$  d'où :  $-2e^{1-x} < 0$  pour  $x \geq 1$ . [...]

Q2. on a l'équation différentielle :  $y'(x) = -y(x) + g(x)$

Je m'intéresse à l'équation différentielle homogène :  $y'(x) + y(x) = 0$

[...]  $S_0 = \{Ce^{-x} + k / C \in \mathfrak{R}\}$  où  $k$  est la solution particulière.

On sait que  $y(x) = C(x).e^{-x}$ . [...], d'où  $y(x) = 2xe^{-x} + 1 + ke^{-x}$

$y(2) = 4$ , [...] d'où  $S = \{e^{-x} + 3e^2 - 4e\}$

quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y(x) = 3.e^2 - 4e$ .

Q3. C'est la figure 4

Exercice 3. Q1. on s'intéresse à l'équation caractéristique :  $x^2 + 2\lambda x + \omega^2 = 0$

$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega^2$ , et comme l'énoncé nous a dit que :  $\lambda = \omega$  d'où  $\Delta = 0$  [...]

Extraits des réponses données au test physique, (cf. Annexe n°2 de la Partie D, pour les énoncés des exercices proposés et Annexe n°4 pour les détails de la copie d'étudiant (Céline, E44))

Partie B:

Q1 : La loi des mailles  $u_{AB} + u_{BA} = 0$

$$L \frac{di(t)}{dt} + ri(t) + Ri(t) = 0 \Rightarrow L \frac{di(t)}{dt} + (r + R)i(t) = 0$$

Q3.  $L \frac{di(t)}{dt} + (r + R)i(t) = 0$ . Pour trouver le courant qui traverse la bobine, il suffit de résoudre cette équation différentielle.

$$[...] i(t) = e^{\left(\frac{-r+R}{L}\right)t}$$

Discutons rapidement le fonctionnement des critères caractérisant ce modèle sans entrer dans les détails comme précédemment.

Rappelons que dans le modèle RS, le premier critère n'est pas vérifié. L'extrait précédent nous est utile pour mettre en évidence tout d'abord les choix faits: on constate que E44 se focalise particulièrement sur les types de tâches le plus souvent rencontrés dans l'enseignement actuel.

Mais il mobilise systématiquement et correctement des techniques mises en avant par chaque institution pour accomplir tel ou tel type de tâches. Les trois autres critères sont donc vérifiés.

Détaillons, comme précédemment les différents rapports s'inscrivant dans ce modèle. Nous les avons scindés en deux groupes : RS1 rassemble les étudiants qui ont réussi à accomplir correctement les tâches choisies par eux-mêmes, RS2 concerne les étudiants qui ont commis des erreurs lors de l'exécution des tâches choisies.

### **Groupe RS1**

Deux étudiants (Hugo E23 et Rachida E28) fournissent des études très sélectives mais correctes. On observe qu'ils se focalisent régulièrement, en mathématiques, sur l'identification des expressions proposées (Exercice 1) et sur la résolution algébrique de deux équations différentielles proposées dans le test en question, alors qu'en physique ils se focalisent (en utilisant une démarche théorique) sur la recherche de l'équation différentielle du circuit proposé et sa résolution. Un tel rapport personnel peut se former à partir de la prise en compte du contrat institutionnel des deux institutions.

### **Groupe RS2 :**

Nous avons observé certaines difficultés, au niveau de l'accomplissement des tâches choisies, chez quatre étudiants (Benoit E12, Hasiniama E42, Celine E44 et Aurélie E47) qui relèvent d'un rapport sélectif. Une analyse détaillée de leurs réponses montre tout d'abord que :

- E12, E44 et E47 réduisent toutes les équations différentielles aux équations linéaires alors que E42 n'a pas travaillé sur l'exercice nécessitant d'identifier les expressions qui représentent une équation différentielle,
- ils ont tous des difficultés à résoudre complètement une équation différentielle linéaire du premier ordre. Ces difficultés se présentent au niveau de la recherche d'une solution particulière, plus spécialement au niveau du calcul intégral.

### 2.2.3. Le groupe "RM"

Certains étudiants (6 sur 50) ont tendance à toujours traiter l'objet équation différentielle d'après son statut mathématique. L'identification de ce modèle se fait à partir des observations suivantes :

- > refus de ces étudiants de réaliser une étude interdisciplinaire concernant deux questions qui s'inscrivent dans deux institutions complémentaires (Exercice 3 du test mathématique) ; ils traitent uniquement la partie mathématique de cette étude en ignorant la partie physique,
- > tendance de ces étudiants à respecter le contrat institutionnel mathématique dans l'ensemble des exercices proposés en utilisant systématiquement des techniques généralement présentes dans l'institution mathématique pour traiter des tâches relatives à une situation physique.

Pour concrétiser ce que nous venons de dire analysons les réponses se trouvant dans une des copies d'étudiants classés dans ce groupe:

Extraits des réponses données au test mathématique, (cf. Annexe n°1 de la Partie D pour les énoncés des exercices proposés et Annexe n°5 pour les détails de la copie d'étudiant (Nicolas, E49)

Exercice 1. a.  $x^2 y' + (1 + \sin x)y + 5x = 0$  est une équation différentielle linéaire du 1<sup>ère</sup> ordre car elle peut se mettre sous la forme :  $x^2 y' + (1 + \sin x)y = -5x$

[...]

Exercice 2. Q1. [...]

Q2. [...] Etude sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  ; l'équation devient  $y'(x) = -y(x) + 3$ . C'est une équation différentielle linéaire du 1<sup>ère</sup> ordre. Son équation différentielle homogène associée est :  $y'(x) + y(x) = 0$ . [...].

La solution générale est la somme des solutions : de  $(E_0)$  et d'une solution particulière de  $(E)$  c'est donc :

$$S_0 = \{x \in [0,1] \rightarrow C_1 e^{-x} + 3 / C_1 \in \mathfrak{R}\}$$

Etude sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  : l'équation devient alors  $y'(x) = y(x) + 2e^{1-x} + 1$  satisfaisant :  $y(2) = 4$ .

$y'(x) - y(x) = 2e^{1-x} + 1$  est une équation différentielle linéaire de 1<sup>ère</sup> ordre. Son équation homogène est  $y'(x) + y(x) = 0$ .

$$[...] S = \{x \in [1; \infty[ \rightarrow (2xe + C + C_2)e^{-x} + 1 / (C_1 e^{-x} + 3 / C, C_2 \in \mathfrak{R})\}$$

$$[...] \text{ donc } S = \{x \in [1; \infty[ \rightarrow (2xe + (-4e))e^{-x} + 4\}$$

L'exercice 3. Q1. Soit l'équation différentielle :  $y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0$ ,  $y(0) = 2$  et  $y'(0) = 0$

[...] la solution de l'équation est de la forme :  $S = \{x \in \mathfrak{R} \rightarrow (C_1 + C_2 x)e^{-x} / C_1, C_2 \in \mathfrak{R}^2\}$  avec les conditions initiales  $S = \{x \in \mathfrak{R} \rightarrow (2 + 2x)e^{-x}\}$

Extraits des réponses données au test physique (cf. Annexe n°2 de la Partie D pour les énoncés des exercices proposés et Annexe n°5 pour les détails de la copie d'étudiant (Nicolas, E49)

Partie A. Q1. Le paramètre  $\theta(t_0)$  a pour dimension un temps car il est lu sur un axe de valeur temporelles. [...].

Q2. dans ce circuit d'après la loi des mailles :  $\vec{u}_L + \vec{u}_R = 0$ ,

$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$  est l'équation différentielle de la courbe

Q3. La solution de cette équation différentielle est du type :  $f(t) = C.e^{\theta t}$  avec  $C$  et  $\theta$  des constantes.

L'élève se trompe car dans  $te^{\theta t}$ ,  $t$  n'est pas une constante et de plus cette solution donne une courbe croissante et non décroissante.

Partie B. Q1. D'après la loi des mailles :  $Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$

$$Q2. Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = 0 \text{ [...] } i(t) = e^{-\frac{R}{L}t}$$

On a alors  $\theta = -\frac{R}{L}$  [...] donc  $\theta = -\frac{u}{Lu} \frac{di}{dt}$  son unité est des  $s^{-1}$ . On peut faire varier ce paramètre en changeant

la résistance ou l'inductance de la bobine.

Q4. la tension aux bornes de la résistance ne peut pas s'annuler car son intensité décroît de manière exponentielle et donc ne sera jamais nulle, et comme dans une résistance,  $U=RI$ ,  $U$  ne sera jamais nulle.

Comme nous pouvons l'observer à l'aide de cet extrait, Nicolas E49 ne tente pas de répondre à la deuxième question de l'Exercice 3 du test mathématique (cf. Annexe n° 1 de la Partie D). Nous pouvons aussi tester, grâce à cet extrait, l'aptitude à utiliser des arguments mathématiques pour répondre une question qui se rattache à une situation physique. Pour l'Exercice 1 du test physique (cf. Annexe n° 2 de la Partie D), nous trouvons ce type d'argument :

" Q3. La solution de cette équation différentielle est du type :  $f(t) = C.e^{\theta t}$  avec  $C$  et  $\theta$  des constantes. L'élève se trompe car dans  $t.e^{\theta t}$ ,  $t$  n'est pas une constante et de plus cette solution donne une courbe croissante et non décroissante."

De la même façon, pour l'Exercice 2 du test physique, nous avons encore :

"Q4. La tension aux bornes de la résistance ne peut pas s'annuler car son intensité décroît de manière exponentielle et donc ne sera jamais nulle, et comme dans une résistance,  $U = R.I$ ,  $U$  ne sera jamais nulle."

La question Q3 nécessitait en effet de discuter la fonction solution proposée à l'aide de différents arguments qui s'appuyaient sur différentes techniques. Cependant cet étudiant se focalise particulièrement sur les propriétés de la fonction exponentielle tout en ignorant la situation physique représentée par cette fonction (qu'il a proposée comme solution de l'équation différentielle décrivant cette situation). Alors que la deuxième question donne l'occasion aux étudiants de se placer soit dans le cadre mathématique soit dans le cadre physique, ceux-ci se placent systématiquement dans le cadre mathématique et donnent une réponse en mobilisant les connaissances acquises dans cette dernière institution.

Tout en conservant notre méthode d'analyse, nous avons distribué ces étudiants sur trois groupes, selon leur mode d'accomplissement de chacune des tâches choisies :

- > RM1 englobe les étudiants qui montrent certaines difficultés lors de l'exécution des tâches relatives au statut d'objet d'étude des équations différentielles,
- > RM2 regroupe les étudiants qui ont des difficultés à accomplir les tâches relatives au statut modèle des équations différentielles,
- > RM3 concerne les étudiants ayant des problèmes avec ces deux statuts.

### **Groupe RM1**

Une seule étudiante (Pauline E17) fonctionne dans ce groupe. Un examen attentif de la copie de cette étudiante montre qu'elle est très à l'aise lors de l'accomplissement de tâches relatives au statut de modèle des équations différentielles. En marge de cette réussite on observe des difficultés à propos de la résolution algébrique d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Ces difficultés proviennent de lacunes au niveau du calcul intégral.

**Groupe RM2**

Un seul étudiant (Nicolas E49) à qui nous avons emprunté l'extrait précédent se place dans ce groupe. Comme nous l'avons observé, il a réussi à réaliser toutes les tâches choisies par lui-même dans le test mathématique mais a commis des erreurs au niveau des tâches demandées dans le test physique. Ces erreurs se manifestent par la réponse qu'il donne à la Question 3 de l'Exercice 2 (cf. Annexe n° 2 de la Partie D). Ceci montre des difficultés à saisir le rôle joué par les équations différentielles quand on les associe à une situation réelle.

**Groupe RM3**

Quatre étudiants (Isaac E2, Géraldine E6, Gaëlle E13 et Mathieu E50) se placent dans ce groupe en faisant certaines erreurs relatives aux deux statuts des équations différentielles. Chacun de ces étudiants présentent différentes caractéristiques que nous les avons détaillé de la façon suivante :

- en ce qui concerne le statut mathématique, les réponses de deux étudiants (E2 et E13) montrent la réduction des équations différentielles aux équations linéaires ainsi que la présence de difficultés dans la résolution algébrique des équations différentielles linéaires,
- en ce qui concerne le statut de modèle, on observe que ces étudiants proposent, comme beaucoup d'autres, une relation algébrique valable en un seul point, comme l'équation différentielle associée à la courbe expérimentale.

On retrouve chez E6 d'une part la limitation des équations différentielles par les équations linéaires et d'autre part la recherche d'un générateur dans tout circuit électrique. Ce dernier point est constaté dans l'établissement de l'équation différentielle associée au circuit, à l'aide de deux démarches (démarche expérimentale qui porte sur une courbe observée, et démarche théorique qui porte sur l'application de la loi des mailles). La copie de cet étudiant témoigne aussi de certaines erreurs au niveau de la résolution algébrique de l'équation différentielle linéaire du premier ordre.

La première copie fournie au test mathématique par E50 montre que cet étudiant suppose qu'une équation différentielle doit toujours comprendre une fonction inconnue et l'une de ses dérivées. La deuxième copie (fournie au test physique) fait apparaître que chaque équation différentielle associée à un circuit électrique doit s'écrire en fonction de  $q(t)$ . Le passage entre  $i(t)$  et  $q(t)$  n'est ici qu'un automatisme acquis et qui ne reflète pas une réelle compréhension de ce problème.

**2.2.4. Le groupe "RN"**

Nous détectons au total quinze étudiants qui correspondent aux caractéristiques générales du modèle RN. Pour concrétiser ce modèle de rapport, nous présentons ci-dessous l'une des copies où nous avons constaté certains indices de ce modèle :

Extraits des réponses données au test mathématique (cf. Annexe n°1 de la Partie D pour les énoncés des exercices proposés et Annexe n° 6 pour les détails de la copie d'étudiant (Yann E11))

Exercice 1.

[...]

e. ce n'est pas une équation différentielle on a que la forme dérivée de  $f(x)$ .

Exercice 2. Q2.  $y'(x) = -y(x) + g(x)$ ,  $y(2) = 4$

Pour  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y'(x) = -y(x) + 3$

$$y_p(x) = 3 \text{ car } (3)' = -3 + 3 \Rightarrow 0 = 0$$

Solution générale : solution de  $y'(x) = -y(x)$ , [...]  $y(x) = C.e^{-x} \forall C \in \mathfrak{R} \neq 0$

Pour  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y_1(x) = 3 + C.e^{-x}$

$$\text{Or } y(2) = 4 = 3 + C.e^{-2} \text{ [...] } C = e^2$$

$$y_1(x) = 3 + e^2.e^{-x} = 3 + e^{2-x}$$

pour  $x \geq 1$ ,  $y'(x) = -y(x) + 2e^{1-x} + 1$

on a vu que  $y'(x) = -y(x)$  admet comme solution  $y(x) = C.e^{-x} \forall C \in \mathfrak{R} \neq 0$

$$y'_p(x) = y_p(x) + 2.e^{1-x} + 1 \Rightarrow y_p(x) = 2.e^{1-x} + 1$$

$$y_2(x) = 2.e^{1-x} + 1 + C.e^{-x} \forall C \in \mathfrak{R} \neq 0$$

$$y(2) = 4 = \frac{2}{e} + 1 + \frac{C}{e^2} \text{ [...] } C = 3e^2 - 2e.$$

$$y_2(x) = 2.e^{1-x} + 1 + (3e^2 - 2e)e^{-x}$$

Q3. La figure correspondante est la 2 [...].

Exercice 3. Q1.  $y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0$  (E),  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$

$$\text{[...] } y(t) = M.e^{-\lambda}, y(0) = 2 = M.e^{-\lambda} = M$$

$$y(t) = 2e^{-\lambda}$$

Extraits des réponses données au test physique (cf. Annexe n°2 de la Partie D pour les énoncés des exercices proposés et Annexe n°6 pour les détails de la copie d'étudiant (Yann E11))

Partie B

Q3 :  $u_R + u_L = 0$  la loi des mailles

$$Ri(t) + (ri(t) - (-L \frac{di(t)}{dt})) = 0$$

$$i(t)(R + r) + L \frac{di(t)}{dt} = 0$$

Pour ce modèle, un seul critère est vérifié, celui qui correspond à la mobilisation des techniques de l'enseignement actuel. Un regard rapide sur les réponses données par cet étudiant permet de le vérifier :

" $u_R + u_L = 0$  la loi des mailles

$$Ri(t) + (ri(t) - (-L \frac{di(t)}{dt})) = 0$$

$$i(t)(R + r) + L \frac{di(t)}{dt} = 0" \text{ (Yann, E11)}$$

En outre, cet extrait nous permet d'observer que beaucoup de questions restent sans réponse. Quant aux questions auxquelles l'étudiant a tenté de répondre, on observe très souvent des erreurs importantes au niveau de l'application des techniques utilisées. Par exemple la réponse donnée à la Question 2 de l'Exercice 2 du test mathématique (cf. Annexe n° 1 de la Partie D) est un bon exemple qui montre que cet étudiant a des difficultés notables à propos de la résolution algébrique d'une telle équation différentielle : on constate que, d'une part, il considère le second membre de l'équation différentielle proposée comme une solution particulière de cette équation différentielle et que, d'autre part, il applique les conditions initiales de façon aléatoire pour déterminer les valeurs des différentes constantes (ex : il applique les conditions initiales en vue de définir la constante d'intégration de la fonction solution de l'équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle proposée)

Compte tenu des différentes caractéristiques observées chez les étudiants relevant de ce type de rapport, nous avons défini deux groupes : RN1 englobe des étudiants qui ont des difficultés à traiter des tâches purement mathématiques alors que RN2 comprend les étudiants qui ont des difficultés à traiter tous les types de tâches rencontrées dans les deux tests en question.

### ***Groupe RN1***

Sept étudiants se classant dans cette catégorie montrent un comportement partiellement RS en se focalisant sur les types de tâches le plus souvent rencontrées dans les deux institutions. On constate ainsi que, généralement, dans le test mathématique, ils traitent, uniquement des tâches relatives à l'étude des expressions algébriques et celles relatives à la résolution de deux équations différentielles. Dans le test physique, ils se limitent particulièrement à l'accomplissement des tâches relatives à la recherche de l'équation différentielle d'un circuit électrique et à celles relatives à sa résolution algébrique. Cette limitation ne nous permet pas de connaître les différentes caractéristiques de leurs rapports car leur travail est restreint à l'application de techniques habituellement utilisées.

Cependant les réponses obtenues aux questions du test mathématique nous permettent de relever certaines difficultés rencontrées lors de l'exécution des tâches habituelles. On observe ainsi que tous ces étudiants ne savent pas répondre à la question: "qu'est-ce qu'une équation différentielle". En effet E18 n'a pas abordé l'Exercice 1 du test mathématique qui nécessite de travailler sur certaines expressions algébriques proposées et les autres ont fourni des réponses erronées. D'ailleurs trois d'entre eux (Yann E11, Deleunay E14, Aurélie E38) ont commis des erreurs lors de la résolution algébrique de deux équations différentielles proposées. Ces erreurs se manifestent par une mauvaise application de la méthode de variation de la constante lors de la recherche d'une solution particulière



de l'équation différentielle linéaire du premier ordre et par une mauvaise identification de la forme de la famille de solutions de l'équation différentielle du second ordre.

Les quatre autres étudiants de cette catégorie n'ont pas cherché à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre. En ce qui concerne leurs études portant sur la résolution de l'équation différentielle linéaire du second ordre, on observe que deux d'entre eux (Fabien E18 et Steven E24) donnent correctement la famille des solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre alors que deux autres (Jonathan E14, Remi E30) n'ont pas su répondre à cette question.

### ***Groupe RN2***

Il s'agit de huit étudiants qui n'ont pas essayé de résoudre plusieurs questions. Cependant, leurs copies nous permettent de dire qu'ils ne connaissent pas ce que signifie une équation différentielle et qu'ils cherchent un générateur de tension dans chaque circuit électrique parcouru par un courant. Ces copies permettent aussi de constater d'importantes difficultés dans la résolution algébrique des équations différentielles linéaires.

## **Bilan de l'étude des rapports personnels d'étudiants aux équations différentielles**

Nous avons tenté de mettre en évidence les différentes caractéristiques des rapports personnels en nous focalisant particulièrement sur les difficultés observées chez les étudiants. Nous avons commencé par définir quatre modèles de rapports, puis nous avons examiné d'une façon détaillée les rapports personnels s'inscrivant dans ces différents modèles. Cette méthode d'analyse nous a permis de schématiser les rapports personnels des étudiants dans le tableau 27 ci-dessous :

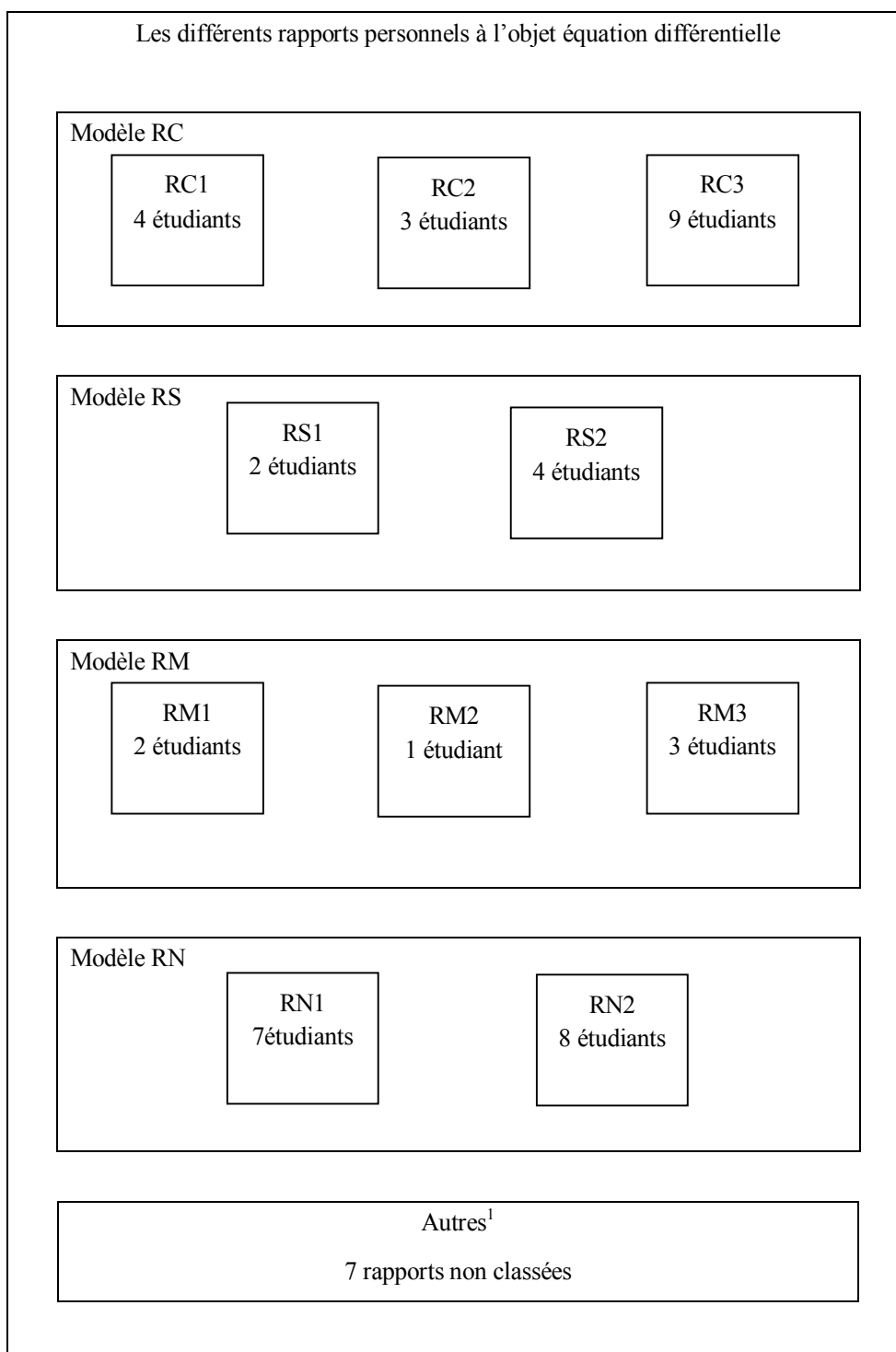


Tableau 27 : Répartition générale des étudiants en fonction de différents modèles de rapports personnels

<sup>1</sup> Notons que les rapports personnels qui sont mentionnés dans cette catégorie ne sont pas détaillés dans l'analyse faite.

Ce tableau montre que de nombreux rapports personnels à l'objet équation différentielle sont conformes aux modèles RC et RN. Les deux autres rapports de modèle RS et RM sont moins fréquents mais représentent néanmoins 24% des étudiants.

Les rapports personnels de modèle RC se retrouvent chez les étudiants dits bons qui sont capables d'étudier les équations différentielles dans différents contextes. Les rapports RS et RM mettent l'accent sur l'intégration les pratiques du contrat dans les pratiques des étudiants. Finalement, le rapport RN est relevé chez beaucoup d'étudiants dits en difficulté.

Notre analyse nous a aussi permis d'évoquer certains résultats qui peuvent être observés dans chacun de types de rapports effectivement rencontrés :

### ***Une carence conceptuelle***

Les étudiants, quel que soit leur rapport personnel, n'arrivent pas à rendre opérationnelle la définition générale des équations différentielles. Ceci est facilement observable même si certains étudiants comblent cette lacune par la définition des équations différentielles linaires. Ceci nous a permis de conclure que les équations différentielles en tant qu'un concept sont largement méconnues du public concerné.

### ***La prédominance de la résolution algébrique des équations différentielles***

Nous avons trouvé dans la totalité des copies des étudiants que l'approche algébrique, qui se présente dans l'enseignement actuel comme l'unique façon d'étudier les équations différentielles, bloque fortement les différentes réflexions des étudiants. On peut se demander si cette approche algébrique ne s'érige pas en obstacle aux autres types d'études relatives aux équations différentielles.

### ***Une difficulté liée aux calculs algébriques***

Malgré la place accordée dans l'enseignement actuel à la résolution algébrique des équations différentielles linéaires, l'analyse des réponses obtenues nous a montré qu'une grande majorité des étudiants sont déroutés par la complexité des ces calculs qui ne servent qu'à identifier la forme générale des fonctions solutions.

A ce propos nous avons noté deux sortes de difficultés observées dans différents groupes d'étudiants :

- Une première sorte de difficulté porte sur la réalisation des calculs algébriques élémentaires plutôt que sur le calcul intégral.
- Une deuxième sorte concerne une mauvaise application des techniques algébriques pratiquées souvent dans l'enseignement actuel.

Bien que les étudiants soient souvent amenés, dans l'enseignement actuel, à pratiquer des méthodes de résolution algébrique des équations différentielles, ils commettent des erreurs élémentaires qui les empêchent de mener leur calcul jusqu'au bout.

***Un contrat théorique***

L'existence d'un contrat théorique risque de réduire le travail de modélisation des étudiants à l'application des lois physiques. En effet on observe des échecs systématiques dans la construction du modèle équation différentielle à partir d'une démarche expérimentale quel que soit le rapport personnel de l'étudiant. Par contre la construction du même modèle (équation différentielle) par une démarche théorique est faite avec succès.



# *PARTIE E*

## *Conclusion et bibliographie*

*Chapitre E<sub>1</sub> : Conclusion générale*

*Chapitre E<sub>2</sub> : Références bibliographiques*



# Chapitre E<sub>1</sub> : Conclusion générale

## 1. Résultats principaux de l'étude

Revenons sur le questionnaire initial qui nous a conduit à mener ce travail. Comme nous l'avons souligné dans la Partie A, nous voulions comprendre *ce qui se passe quand l'objet équation différentielle est enseigné à la fois dans deux disciplines différentes "mathématiques et physique"*.

Notre problématique peut se résumer par deux questions auxquelles nous avons associé deux hypothèses de recherche.

La question 1 et l'hypothèse 1 se rapportent à l'enseignement des mathématiques et peuvent s'écrire ainsi:

**Question 1:** *Quels sont les choix didactiques de l'enseignement des équations différentielles dans l'institution mathématique et quels sont les effets de ces choix sur la construction des savoirs des étudiants ?*

**Hypothèse 1:** *La prédominance de la résolution algébrique en mathématiques est une contrainte pour la vie de la notion d'équation différentielle et conduit les étudiants à faire porter l'accent sur cette résolution. Il en résulte que lorsque les étudiants sont confrontés à d'autres tâches que la résolution algébrique, ils rencontrent des difficultés notables.*

La question 2 et l'hypothèse 2 se rapportent à l'enseignement de la physique et peuvent s'énoncer de la manière suivante:

**Question 2:** *Quelles sont les caractéristiques du processus de modélisation, associé aux équations différentielles, dans l'institution physique ? Quel rôle les équations différentielles peuvent-elles jouer, pour les étudiants, dans l'institution physique ?*

**Hypothèse 2 :** *La force du contrat institutionnel en physique entraîne, chez les étudiants, la réduction du processus de modélisation à l'aide des équations différentielles à une étude algorithmique qui facilite leurs tâches mais conduit à une perte du sens.*

Pour répondre à ces questions et tester la validité de nos hypothèses de recherche, nous nous sommes placés dans le cadre de la théorie anthropologique de la didactique.

### **Etude épistémologique (Partie B)**

Cette première étude a été réalisée pour mieux cerner notre sujet et comprendre la genèse des équations différentielles.



Les études faites dans le chapitre A<sub>1</sub> à propos de fonctionnement des équations différentielles en mathématiques et en physique nous ont conduit à nous questionner, à la fois, sur l'existence d'une (de) démarche(s) autre(s) que la démarche théorique pouvant être utilisée(s) lors de la construction du modèle équation différentielle et sur le rôle que jouent les autres disciplines, et plus particulièrement la physique, dans le développement de la notion d'équation différentielle.

En vue de clarifier ces deux points nous avons conduit une étude épistémologique en liaison avec l'hypothèse de travail suivante :

*Une analyse épistémologique devrait nous permettre d'établir un parallèle entre le fonctionnement historique des équations différentielles et leur fonctionnement dans l'enseignement moderne afin d'en tirer éventuellement des réponses aux questions qui se posent aujourd'hui dans l'enseignement des équations différentielles.*

La méthodologie que nous avons adoptée consiste en l'analyse des premières questions, datant du 17<sup>ème</sup> siècle -et qui ont donné naissance à la notion d'équation différentielle- et des conditions d'évolution historique de cette notion.

Cette analyse nous a montré dans un premier temps que cette notion a été utilisée, comme plusieurs autres notions de mathématiques, afin d'étudier différents problèmes, de mécanique et de géométrie notamment. Cette situation d'émergence nous a permis d'étudier l'utilisation des équations différentielles par les scientifiques du 17<sup>ème</sup> dans le processus de modélisation. A ce propos l'analyse des solutions proposées (par les scientifiques) aux problèmes qui se posaient à cette époque, nous a conduit à nous intéresser à une démarche dite expérimentale (au sens que nous avons défini dans le paragraphe 2.3. du chapitre A<sub>1</sub>), différente de la démarche théorique. Cette démarche expérimentale ne s'assimilait pas à une méthode algorithmique, mais au contraire, utilisait, suivant le problème posé, différents champs des mathématiques et de la physique.

Notre analyse nous a amenée à formuler la question suivante:

*Q<sub>B</sub> : Cette démarche historique trouve-t-elle une vie dans l'enseignement universitaire ?*

Nous discuterons des réponses à donner à cette question dans le paragraphe consacré à la Partie C dans cette conclusion.

Dans un deuxième temps, cette analyse nous a montré que la notion d'équation différentielle a eu une existence complètement différente de celle qu'elle connaît actuellement. En effet cette notion a connu trois périodes importantes, chacune correspondant à une nouvelle approche de résolution. Notre analyse a mis l'accent sur la simultanéité entre l'apparition de ces trois approches de résolution des équations différentielles et les problèmes issus généralement des autres disciplines et qui ont fait leur apparition pendant ce développement.

***Etude des Rapports Institutionnels (Partie C)***

Cette partie de notre étude était nécessaire pour aborder ensuite les rapports personnels des étudiants aux équations différentielles. Une question  $Q_C$  vient affiner les questions de recherche au niveau des rapports institutionnels :

*$Q_C$  : Quelles sont les caractéristiques de l'ensemble des rapports institutionnels à l'objet équation différentielle en mathématiques et en physique?*

Dans le but d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous avons examiné différents éléments qui jouent un rôle dans la définition des rapports institutionnels des étudiants : les manuels de mathématiques et de physique de la classe terminale (qui permettent, selon nous, de dégager les caractéristiques de la première rencontre des élèves avec les équations différentielles), les polycopiés de cours magistraux, les feuilles de travaux dirigés et ce qui est enseigné effectivement dans les classes (première année de l'université). Nous avons mené une analyse de ces éléments dans une perspective écologique et praxéologique. Cette analyse nous a permis de mettre en évidence les conditions d'utilisation des équations différentielles dans ces deux institutions et ainsi les caractéristiques de l'organisation du savoir. Nous reprenons ici de façon synthétique les résultats principaux de cette étude :

*Les équations différentielles dans l'enseignement mathématique :*

Notre étude des manuels de la classe de terminale nous permet de vérifier que les équations différentielles font partie des différents chapitres mais qu'elles n'occupent pas une place importante dans cette classe. La première rencontre officielle des apprenants est abordée par l'énoncé d'une définition générale des équations différentielles et surtout par la manipulation, sans questionnement, des familles de fonctions solutions qui vérifient certains types d'équations différentielles linéaires du premier et du second ordre.

L'étude réalisée au niveau de l'université a montré que le contenu de l'enseignement actuel des équations différentielles est la continuation du choix algébrique et algorithmique fait dans l'enseignement secondaire. En effet nous avons noté que l'étude du concept d'équation différentielle est souvent ramenée à l'exécution des types de tâches liés à la résolution des équations différentielles linéaires. Relativement à notre objet de recherche, deux points essentiels méritent particulièrement d'être évoqués : le manque de liens avec d'autres disciplines que les mathématiques et, en conséquence, une quasi-absence de travail de modélisation et l'utilisation exclusive des méthodes algébriques pour résoudre les équations différentielles étudiées. Nous avons pu vérifier ces points à la fois au niveau du contenu de l'enseignement et au niveau des exercices proposés.

*Les équations différentielles dans l'enseignement de physique*

L'analyse des manuels de terminale a montré que les équations trouvent une place importante dans la modélisation des phénomènes oscillants. Cependant, le lien entre les équations différentielles et le processus de modélisation est assuré par l'application de certaines lois de la physique (la loi fondamentale de la dynamique, la loi des mailles). Cela veut dire que l'élève de terminale devra connaître et savoir appliquer ces lois théoriques pour mener à bien la plupart des tâches qui lui sont proposées. Les équations différentielles sont donc utilisées pour des travaux qui s'appuient essentiellement sur des démarches algorithmiques.

A l'aide de l'étude réalisée au niveau de la première année de l'université nous avons montré que le processus de modélisation est remplacé, même à ce niveau, par une étude algorithmique qui ne donne que très rarement une place à des discussions sur les phénomènes réels. Par ailleurs, ce choix conduit les étudiants à travailler directement à partir des modèles qu'ils ne discutent pas et avec des modélisations souvent tronqués.

Les analyses réalisées dans cette Partie C nous ont permis de mettre en évidence les choix communs des deux institutions à propos de l'enseignement du concept d'équation différentielle :

- Choix du seul registre symbolique, pour représenter des équations différentielles. Cette représentation cependant ne porte pas toujours sur les mêmes symboles.
- Limitation de l'étude des équations différentielles au cas des équations linéaires,
- Utilisation fréquente des mêmes méthodes de résolution algébrique pour trouver la famille de fonctions solutions des équations différentielles

Ceci montre l'analogie implicite entre l'enseignement du concept dans deux institutions assuré par ces choix.

***Etude des rapports personnels (Partie D)***

Il s'agit de la partie principale de notre recherche. Nous précisons ci-dessous notre questionnement initial par deux questions se rapportant aux rapports personnels des étudiants aux équations différentielles:

*Q<sub>D1</sub> : Quelles sont les caractéristiques du rapport personnel des étudiants à l'objet équation différentielle ? Et notamment quel est le degré d'adéquation entre le rapport personnel et le rapport institutionnel (de deux institutions) à l'objet en question ?*

*Q<sub>D2</sub> : Quelles sont les difficultés spécifiques des étudiants résultant des choix faits dans les deux institutions ?*

Pour pouvoir apporter des éléments de réponses à ces questions, nous avons proposé deux tests dont chacun s'inscrit dans l'une de deux institutions qui nous intéressent. Nous avons préparé une série

d'exercices dont les énoncés comportent les différents types de tâches rencontrés dans l'enseignement actuel.

En prenant en compte les résultats de l'analyse des rapports institutionnels dans le test proposé en mathématiques, nous avons invité les étudiants à réaliser trois types d'études : une étude portant sur le concept d'équation différentielle, une étude se centrant sur la résolution des équations différentielles, et une étude interdisciplinaire (Chapitre D<sub>1</sub>). Cela nous a permis de mettre en évidence les aptitudes des étudiants à réaliser ces types d'études, ainsi que leurs difficultés.

Comme une démarche expérimentale de construction du modèle équation différentielle ne se voit jamais dans l'enseignement de la physique, nous avons mis en place un test dans lequel nous avons voulu faire vivre les deux types de démarches (expérimentale et théorique). Dans ce test, les étudiants étaient invités à travailler sur une courbe expérimentale représentant l'évolution de la tension aux bornes d'une résistance dans un circuit électrique et sur un schéma de montage du même circuit électrique. L'analyse des réponses des étudiants nous permet de répondre en partie aux deux questions citées ci-dessus.

Pour mieux relever les caractéristiques des rapports personnels des étudiants nous avons proposé une typologie portant sur différents modèles des rapports personnels. Nous avons noté au total quatre modèles de rapports : RC, RS, RM et RN définis en se basant sur les réponses obtenues aux exercices proposés dans les deux tests. Notre analyse a montré qu'une partie des étudiants (32 %) est caractérisée par un rapport de type RC qui répond aux attentes institutionnelles alors que le dernier type, RN (30% des étudiants), est très loin de pouvoir répondre à ces attentes. Les deux autres modèles de rapport RS (12%) et RM (12%) sont, selon nous, la manifestation forte des choix didactiques constatés dans les deux institutions. Compte tenu des caractéristiques des exercices proposés qui se basaient sur les connaissances antérieures des étudiants, on s'étonne de constater le faible taux d'apparition des rapports personnels (RC) conformes aux rapports institutionnels.

A ce propos il nous a paru utile de discuter le degré d'adéquation entre rapports institutionnels et rapports personnels en ce qui concerne la manière de traiter des questions posées et la capacité des étudiants à y répondre correctement. Sur le premier point, nous avons observé une grande conformité entre les techniques enseignées dans les deux institutions et celles mobilisées par les étudiants. Quant au deuxième point, nous avons montré qu'une grande partie des étudiants ont des difficultés à accomplir les tâches proposées.

Notre expérimentation cherchait aussi à dégager les difficultés spécifiques des étudiants liées aux choix institutionnel (Q<sub>D2</sub>) :

On peut préciser en quelques points les difficultés essentielles qui apparaissent suite aux choix de *l'institution mathématique* :

- > On observe, dans l'enseignement mathématique, l'absence d'études conceptuelles des équations différentielles visant à faire comprendre aux apprenants le sens de ce concept. De plus l'étude de ces équations se centre particulièrement sur les équations différentielles linéaires en favorisant un seul registre de représentation sémiotique: le registre symbolique.

*Il y a donc une réelle difficulté pour les étudiants à connaître et à comprendre "le concept d'équation différentielle".*

- > Les résultats de notre analyse du rapport institutionnel ont confirmé à nouveau le poids des méthodes de résolution algébrique des équations différentielles linéaires dans l'enseignement actuel. Toute approche autre que l'approche algébrique est bannie de cet enseignement, ce qui semble entraîner une incompréhension des différentes tâches autres que celles liées à la résolution algébrique (voir l'analyse de l'Exercice 2 du test, paragraphe 2.2 de Chapitre D<sub>1</sub>).

- > Notre analyse a aussi confirmé un quasi abandon du processus de modélisation (actif et passif) et l'absence de liens avec des situations issues d'autres disciplines lors de l'enseignement des équations différentielles.

*Cela entraîne des difficultés chez les étudiants pour mobiliser et intégrer les connaissances relatives à l'objet équation différentielle acquises dans les deux disciplines.*

Les difficultés liées aux choix de *l'institution physique* peuvent être décrites de la façon suivante:

- > Le processus de modélisation ne concerne que la deuxième des trois étapes définies auparavant : définition du système à modéliser, construction d'un modèle (et travail dans ce modèle) et étude du système étudié à partir du modèle construit. De plus, cette deuxième étape est en général remplacée par une étude algorithmique.

*Il y a donc une grande difficulté à instituer une réelle modélisation des phénomènes physiques. De plus, la capacité de l'étudiant à réaliser cette deuxième étape de la modélisation dépend du contexte de l'exercice proposé ; si ce contexte est similaire à celui qui a été favorisé dans l'enseignement actuel (par ex. : contexte qui porte sur l'application des lois de la physique) l'étudiant arrive à établir l'équation différentielle des systèmes proposés.*

- > Le fait de faire appel aux équations différentielles systématiquement pour les études algorithmiques ayant le même but entraîne chez les étudiants :

*d'une part des difficultés à saisir les différentes utilisations de ces dernières (l'analyse des réponses obtenues à la Question 2 et 3 de l'Exercice 2 du test montre ces difficultés), d'autre part*

*une incapacité à attribuer un sens physique aux équations différentielles. En conséquence, celles-ci sont utilisées de la même façon qu'en mathématiques.*

### **Synthèse**

Globalement nos hypothèses de recherche ont été vérifiées :

En ce qui concerne l'hypothèse 1, nous avons montré que la prédominance de la résolution algébrique est une contrainte qui pèse fortement sur l'enseignement actuel. Cette contrainte conduit les étudiants à se focaliser sur ces méthodes de résolution. Par conséquent, chez une partie importante des étudiants, les réponses montrent des difficultés à exécuter des types de tâches liées aux équations différentielles. On peut d'ailleurs remarquer qu'une partie importante des étudiants rencontrent des difficultés mêmes pour accomplir les types de tâches liés à la résolution algébrique.

En ce qui concerne l'hypothèse 2, nous avons noté, en physique, la force du contrat institutionnel à propos du processus de modélisation. Cette contrainte conduit les étudiants à développer leurs automatismes pour réaliser les étapes prévues et, par conséquent à réduire le processus de modélisation à l'application des lois théoriques. Nous avons aussi montré que, pour une grande partie des étudiants, les équations différentielles jouent le rôle d'un simple outil leur permettant de traiter les questions rencontrées.

Les réponses que l'on peut avancer à notre questionnement sont les suivantes :

Le concept d'équation différentielle ne gagne ni le statut d'objet ni celui de modèle dans les deux institutions mathématique et physique. Les contraintes institutionnelles réduisent l'étude des équations différentielles à des études algorithmiques masquant ainsi la force et l'utilité de ce concept. Ceci a un effet notable dans la construction des savoirs des étudiants pour lesquels ce concept d'équation différentielle devient un simple objet dont la résolution nécessite une série de calculs algébriques et un outil qui facilite l'étude des systèmes physiques.

## **2. Perspectives**

Le travail que nous avons effectué a permis de déterminer, d'une part, les caractéristiques générales de l'enseignement de l'objet équation différentielle en mathématiques et en physique, d'autre part les caractéristiques des rapports personnels des étudiants à ce même objet. Il a également confirmé le poids des choix institutionnels dans la construction du rapport personnel des individus, ici les étudiants, à un objet de savoir.

Les résultats que nous avons obtenus à ce propos peuvent être interprétés comme un tableau synoptique représentant les éventuelles relations entre certains choix institutionnels et leurs effets chez les étudiants. C'est pourquoi, un prolongement de notre travail pourrait consister en l'élaboration et la

réalisation d'une ingénierie didactique sur l'enseignement du concept d'équation différentielle, qui prendrait en compte la complémentarité des deux disciplines mathématiques et physique, source de synergie à la fois pour introduire et étudier le concept d'équation différentielle et recréer cette relation forte entre phénomènes physiques et équations différentielles qui était présente au moment de l'émergence des équations différentielles.







## Chapitre E<sub>2</sub> : Références Bibliographiques

ARTIGUE M (1989), Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. *Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble*, 183-209, IMAG, Grenoble.

ARTIGUE M. (1990), Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2.3) 241-286, Grenoble : La pensée Sauvage.

BACHELARD S. (1979), Quelques aspects historiques des notions de modèle et de justification des modèles. In P. Delattre et M. Thellier (éds) *Elaboration et justification des modèles*. Paris : Maloine.

BESSOT D. et al. (1999), *Aux origines du calcul infinitésimal*. Paris : Ellipses.

BLANCHARD P., DEVANEY R.L.& HALL G.R. (1996), *Differential Equations*. Brooks: Cole Publishing Company.

BLAY M. (1992), *La naissance de la mécanique analytique*, Presses Universitaires de France.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1) 77-123, Grenoble : La pensée Sauvage.

BOSSUT C. (1810), *Histoire générale des mathématiques depuis leur origine jusqu'à l'année 1808*. Paris : F Louis.

BOTTAZINI U. (2000), Stabilité et instabilité. Les génies de la science. Poincaré : philosophe et mathématicien. *Pour la science* 4, 54-64.

CHAACHOUA A. (1997), *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier- Grenoble.

CHABERT J.L. (1993), Le problème brahistrochrone ou la recherche de la courbe de descente la plus rapide, In, *Histoires de problèmes : histoire des mathématiques*, Commission inter-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques, (179-199), Paris : Ellipses-Marketing

CHAU O., PLUVINAGE F. (1999), Comparaison de compétences dans les approches algébriques, qualitative et informatique des équations différentielles ordinaires en première année universitaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) 195-220, Grenoble : La pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1989a), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Perspectives circulaires : La notion de modélisation, *Petit X* 19, 43-72.

CHEVALLARD Y. (1989b), Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique année 1988-1989*, LSD-IMAG, Grenoble, 211-236.

CHEVALLARD Y. (1998), Analyse des pratiques enseignants et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique, *Actes l'U.E. de la Rochelle*.

CORNU B. (1983), *Apprentissage de la notion de limite : Conceptions et obstacles*. Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

DIEUDONNE J. (1982), Mathématiques vides et mathématiques significatives. In *Penser les mathématiques : séminaire de philosophie et mathématiques*. Paris : Seuil

DI MARTINO H., LAGRAND M. et PINTARD D. (1995), Modélisation et situations fondamentales, In *Actes de la VIIIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 279-290.

DROUIN A. M. (1988), Le modèle en question. *Aster*, 7, 1-21.

DUPIN J. J. (1995), Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques. In *Actes de la VIIIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, 247-257.

DUVAL R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives- IREM de Strasbourg*, 5, 37-65.

GUILLON A. (1995), Démarches scientifiques en travaux pratiques de physique de DEUG à l'université de Cergy-Pontoise, *Didaskalia*, 6, 113-127.

HARRIER E., NORSET S.P., (1987), *Solving Ordinary differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer Verlag.

HARRIER E., WANNER G. (2001), *L'analyse au fil de l'histoire*. Springer Verlag

HUBBARD J., WEST B. (1999), *Equations différentielles et systèmes dynamiques* / trad. de l'anglais et adapt. Véronique Gautheron. Paris : Cassini

JOHSUA S., DUPIN J.J. (1993), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Presses Universitaires de France.

LEIBNIZ G. W. (1989), *La naissance du calcul différentiel. 26 articles des Acta Eruditorum*. Introduction, traduction et notes par Marc Parmentier. Paris : Mathesis.

LE VAN T. (2001), *Etude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-nam*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble.

MENSOURI D. (1994), *Essai de délimitation en termes de problématiques des effets de contrat et de transposition : le cas des relations et équations dans les classes de Seconde et de Première*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier-Grenoble.

MONTUCLA J.F. (1968). *Histoire des mathématiques, Tome troisième*. Paris : A. Blanchard.

NEWTON I. (1740), *La méthode des fluxions et des suites infinies*. Traduit par Buffon. Paris : Debure l'aîné.

PAVE A. (1994). *Modélisation en Biologie et en Ecologie*, Paris : Aléas.

PICHOT A. (1991). *La naissance de la science*. Tome 1, Paris: Gallimard.

POINCARÉ H. (1910). *La valeur de la science*, Paris : Flammarion .

RABALLAND C. (1996), Equations différentielles et sciences physiques. Terminale S, classes préparatoires, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 781, 265-297.

RAJONSON L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : Trois études de cas*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II.

RAMUNNI G. (1991) *L'analyse et la recherche/ Henri Poincaré*. Paris : Hermann

RASMUSSEN C. (1998), Learning obstacles in differential equations, *Psychology of Mathematic Education*, 22, 25- 32.

RODRIGUEZ R. (2003), *Le contrat didactique relatif aux équations différentielles comme outils de modélisation en classe de Terminale S*. Mémoire de DEA, Université Joseph Fourier - Grenoble.

SANCHEZ F. (1984) *Il n'est science de rien*. Traduit du latin par A. Camparot, Paris : Klincksieck.

SERRA G. (1999), Résolution des équations différentielles par les méthodes de l'analyse numérique, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 815, 965-977.

WANNER G. (1988) Les équations différentielles ont 350 ans. *L'enseignement Mathématique*, 34, 365-385.

WINTHER J. (1993). Activités de modélisation dans l'enseignement des sciences physiques, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 755, 841-863.

WINTHER J. (1996), Les équations différentielles dans le programme de physique de la classe de terminale scientifique, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 781, 249-265.

WINTHER J. et al. (2003), Les équations différentielles en terminale scientifique, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 855, 934-962.

#### ***Autres références***

[1] : <http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Leibniz.html>

[2] : [http://occawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubbooks/thomas\\_awl/chapter1/medialib/custom3/topics/diffeq.htm](http://occawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubbooks/thomas_awl/chapter1/medialib/custom3/topics/diffeq.htm)

#### ***Manuels et programmes scolaires***

BONTEMPS G., alii (1998) *Mathématiques Terminale S*, Collection Fractale, Editions Bordas

DURANDEAU J. P., alii (1999) *Physique Terminale S*, Collection Durendeau, Editions Hachette

TERRACHER P. H., FERACHOGLOU R. (1998), *Mathématiques Terminale S*, Collection Terracher, Editions Hachette

TOMASINO A., alii (1999) *Physique Terminale S*, Editions Nathan

Programme de Terminale S spécialité mathématique de 1998 : B.O. n°4 du 12 juin 1997, hors série.

Programme de Terminale S spécialité physique et chimie de 1996 : B.O. Spécial n°3 du 16 février 1995.

### **Bibliographie complémentaire**

ALIBERT D. & al. (1987), Le thème "différentielles" un exemple de coopération maths-physique dans la recherche, *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 7-45, Grenoble : La Pensée Sauvage

ARTAUD, M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et al. (eds.), *Actes de la IX<sup>ème</sup> Ecole d'Eté de Didactique des mathématiques*, 101-139.

BRONNER A. (1997), *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier- Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111, Grenoble : La pensée Sauvage.

DANTAL B. (2001). Les enjeux de la modélisation en probabilités, in M. Henry, *Autour de la modélisation en probabilité*, 137-140, Commission Inter-IREM Statistiques et Probabilités PUFC.

DHOMBRES J. & al. (1987), *Mathématiques au fil des âges*, IREM Groupe Epistémologie et Histoire, Gauthier-Villars.

DIEUDONNE J. et al. (1978a). *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. I. Algèbre, Analyse classique, Théorie des nombres*. Paris : Hermann

DIEUDONNE J. et al. (1978b). *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900. II. Fonctions elliptiques, analyse fonctionnelle, géométrie différentielle, topologie algébrique, probabilités, logique mathématique*. Paris : Hermann.

HENRY M. (2001). *Autour de la modélisation en probabilité*. Commission Inter-IREM Statistiques et Probabilités PUFC.

KUNTZ G. (2002). Equations différentielles : la perte du sens n'est pas sans risque. *Repères*, n°46, 107-114.

MAURY S., CAILLOT M. (2003). Quand les didactiques rencontrent le rapport au savoir, in Maury S. et Caillot, M. *Rapport au savoir et didactique*, Paris : Fabert.

SMITH D.E. (1953), *History of mathematics. Volume ii. Special topics of elementary mathematics*. New York : Dover.



# *ANNEXES*





# *Annexes A*

## *Extrait du programme de Terminale S*

*Extrait du programme de mathématique (n°1)*

*Extrait du programme de physique chimie (n°2)*



*Extrait du programme de mathématique (n°1)*

B.O. n°4 du 12 juin 1997

**V - PROGRAMME DE TERMINALE SCIENTIFIQUE**

Dans ce texte les parties spécifiques à l'enseignement de spécialité sont différenciées par l'utilisation de caractères italiques.

**I - Analyse**

Le programme d'analyse porte essentiellement sur les fonctions numériques, en relation avec l'étude de situations continues. L'objectif principal est d'exploiter la dérivation et l'intégration pour l'étude globale et locale des fonctions usuelles et de fonctions qui sont construites à partir de celles-ci par des opérations simples. Quelques problèmes d'importance majeure fournissent un terrain pour cette étude : variations, extremums, équations et inéquations, comportements asymptotiques, calcul de grandeurs géométriques.

Quelques notions sur les suites complètent le programme d'analyse dans le seul but de permettre l'étude de situations discrètes sur des exemples simples, ainsi que la construction et l'étude d'algorithmes d'approximation (solution d'une équation, grandeur géométrique, ...).

Pour l'ensemble du programme d'analyse, il convient d'exploiter aussi bien les aspects qualitatifs (monotonie, convergence...) que les aspects quantitatifs (majorations, encadrements, vitesse de convergence, approximation à une précision donnée...).

En outre, on exploitera largement des situations issues des sciences biologiques et physiques, de la géométrie et de la vie économique et sociale en marquant les différentes phases : modélisation, traitement mathématique, contrôle et interprétation des résultats. De même, on exploitera systématiquement les interprétations graphiques des notions et des résultats étudiés et les problèmes numériques qui sont liés à cette étude.

Enfin, il revient au professeur d'organiser l'enseignement des divers points du programme concernant les suites et les fonctions : l'ordre adopté dans le texte qui suit correspond à une simple commodité de rédaction.

**I - Fonctions numériques : étude locale et globale**

Pour l'étude des fonctions, on s'appuiera conjointement sur les interprétations graphiques  $y = f(x)$  et cinématiques  $x = f(t)$ . On prendra des exemples dans les autres disciplines (signaux relatifs à l'évolution d'une intensité, d'une différence de potentiel, évolution d'une population, d'un taux de concentration...).

Les résultats fondamentaux sont énoncés dans le cadre des fonctions définies sur un intervalle. Pour l'essentiel, il porte sur le cas des fonctions bien régulières sur cet intervalle (c'est-à-dire possédant des dérivées jusqu'à un ordre suffisant), ce qui permet d'exploiter les outils du calcul différentiel. Quelques énoncés sur les limites figurent au programme : ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent uniquement à faciliter, le cas échéant, l'étude du comportement aux bornes de l'intervalle et notamment du comportement asymptotique au voisinage de l'infini. Il n'y a pas lieu de multiplier les exemples posés a priori et on se gardera de tout excès de technicité. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles ; on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles. Le plus souvent, l'ensemble de définition sera indiqué ; on évitera les exercices de recherche a priori de cet ensemble.

Les fonctions étudiées dans le cadre du programme sont dérivables par intervalles. C'est donc au théorème des valeurs intermédiaires énoncé en classe de première que l'on se réfère, notamment pour résoudre une équation du type  $f(x) = \lambda$  et pour définir une fonction réciproque. Ces divers travaux seront l'occasion de donner une première approche non formalisée d'une fonction continue sur un intervalle ou d'une fonction discontinue en un point. Mais la notion de continuité demeure en dehors des objectifs du programme.

Pour la notion de limite, le point de vue adopté reste le même qu'en première. Les définitions par  $(\epsilon, \alpha)$ ,  $(\epsilon, A)$ , ... sont hors programme. A travers les exemples étudiés, on soulignera le caractère local de la notion de limite, mais tout exposé sur la notion de propriété locale est exclu.

a) Énoncés usuels sur les limites (admis)

• Comparaison

- Si, pour  $x$  assez grand,

$f(x) \geq u(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;

énoncé analogue lorsque  $f(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$ .

- Si, pour  $x$  assez grand,

$|f(x) - L| \leq u(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .

- Si, pour  $x$  assez grand,

$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = L$ ,

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ .

• Compatibilité avec l'ordre :

Si, pour  $x$  assez grand,  $f(x) \leq g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L'$ , alors  $L \leq L'$ .

• Limite d'une fonction composée :

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et si  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \lambda$ .

(où  $a, b, \lambda$  sont finis ou non), alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lambda$ .

b) Calcul différentiel

Dérivation d'une fonction composée.

Application à la dérivation de fonctions de la forme  $u^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\exp u$ ,  $\ln u$  et  $u^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Dérivées successives; notations  $f', f'', \dots$

• Inégalité des accroissements finis :

étant donné une fonction  $f$  dérivable sur un segment

- si  $m \leq f' \leq M$  et si  $a \leq b$ ,

alors  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ ;

- si  $|f'| \leq M$ ,

alors  $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$ .

• Primitives d'une fonction sur un intervalle

Définition. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.

c) Fonctions usuelles

- Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle;

notation  $\ln$  et  $\exp$ . Relation fonctionnelle, dérivation, comportement asymptotique. Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions  $h \mapsto \exp h$  et  $h \mapsto \ln(1+h)$ . Nombre  $e$ ; notation  $e^x$ . Définition de  $a^b$  ( $a$  strictement positif,  $b$  réel).

Résolution de l'équation différentielle  $y' = ay$ , où  $a$  est un nombre réel : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

- Fonctions puissances  $x \mapsto x^n$  ( $x$  réel et  $n$  entier) et  $x \mapsto x^\alpha$  ( $x$  strictement positif et  $\alpha$  réel). Dérivation, comportement asymptotique.

Cas où  $\alpha = \frac{1}{n}$  ( $n$  entier strictement positif); notation  $\sqrt[n]{x}$  ( $x$  positif).

- Fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente.

Résolution de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$ , où  $\omega$  est un nombre réel : existence et unicité (admisses) de la solution vérifiant des conditions initiales données.

L'objectif est d'apprendre aux élèves à mettre en œuvre, sur des exemples simples, ces énoncés et ceux donnés en première concernant les opérations algébriques.

De manière générale, dans la plupart des situations de majorations et d'encadrements intervenant dans le programme d'analyse, les inégalités larges suffisent; les inégalités strictes doivent être réservées aux cas où elles sont indispensables.

Bien entendu, cet énoncé, condensé pour faciliter la mémorisation, recouvre plusieurs cas qu'il convient de distinguer clairement et d'illustrer à l'aide d'exemples.

La démonstration de cette règle n'est pas au programme, mais on mettra en valeur l'idée fondamentale qui conduit au résultat : on conserve les termes d'ordre 1 et on néglige les autres.

En liaison avec les sciences physiques, on donnera aussi les notations  $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots$

Ces résultats sont déduits de l'énoncé admis en classe de première sur le sens de variation des fonctions.

Le théorème de Rolle et la formule

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

sont en dehors du programme.

On ne soulèvera pas de difficulté sur l'existence des primitives. On admettra en particulier que toute fonction dérivable sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Le mode d'introduction des fonctions  $\ln$  et  $\exp$  n'est pas

imposé. L'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises. En revanche, les propriétés des fonctions  $\ln$  et  $\exp$  feront l'objet de démonstrations.

En liaison avec l'enseignement d'autres disciplines, on mentionnera la fonction logarithme décimal  $x \mapsto \log x$ .

Hormis les deux exemples de l'exponentielle et de la racine  $n^{\text{ème}}$ , l'étude des fonctions réciproques n'est pas au programme.

Les élèves doivent avoir une bonne pratique des représentations graphiques des fonctions étudiées dans ce paragraphe et savoir en déduire celles des fonctions directement apparentées, telles que

$$t \mapsto \cos \omega t, t \mapsto e^{\omega t}, t \mapsto a^t.$$

Croissance comparée des fonctions de référence  
 $x \mapsto \exp x$ ,  $x \mapsto x^\alpha$ ,  $x \mapsto \ln x$  au voisinage de  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \cdot \exp(-x) = 0,$$

$$\text{si } \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

d) Notions sur les suites numériques  
 • Énoncés usuels sur les limites (admis)

- Comparaison, compatibilité avec l'ordre.
- Somme, produit, quotient.
- Image d'une suite par une fonction : étant donné une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  et une suite  $(u_n)$  de points de  $I$ , si  $\lim u_n = a$  (finie ou non) et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$  (finie ou non), alors  $\lim f(u_n) = \lambda$ .

Suites définies par récurrence.

Obtention des valeurs d'une fonction d'une variable à l'aide d'une calculatrice.

Étude du sens de variation d'une fonction, détermination de son signe, recherche des extremums. Détermination de la position de la courbe représentative par rapport à une de ses tangentes.

Recherche de la limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

Exemples de recherche d'asymptotes ; exemples d'étude du comportement local ou asymptotique d'une fonction.

Tracé de la courbe représentative d'une fonction.

Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique.  
 Étude d'équations  $f(x) = \lambda$  ou d'inéquations  $f(x) \leq \lambda$ .

Exemples d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale...)

Obtention des termes d'une suite à l'aide d'une calculatrice.

Certaines études aux bornes mettent en jeu des formes indéterminées. S'il s'agit d'une étude en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ , aucune autre connaissance que celles mentionnées ci-contre n'est exigible des élèves ; dans le cas d'une étude en un point  $a$ , on se limitera à quelques exemples se résolvant très simplement à l'aide du nombre dérivé en ce point d'une fonction usuelle ; aux épreuves d'évaluation, des indications seront données sur la méthode à suivre.

Le programme se place dans le cadre des suites définies pour tout entier naturel. L'étude générale des opérations sur les suites n'est pas au programme.

Les énoncés ci-contre sont calqués sur ceux relatifs aux fonctions. L'objectif est d'apprendre aux élèves à les mettre en œuvre sur des exemples simples. Les élèves doivent connaître les limites et les comportements asymptotiques comparés des suites  $(\ln n)$  ;  $(a^n)$ ,  $a$  réel strictement positif ;  $(n^\alpha)$ ,  $\alpha$  réel.

Pour la définition de suites par récurrence, on prendra un point de vue très intuitif : Étant donné une fonction  $f$  laissant stable un intervalle  $I$ , le choix d'un point  $c$  de  $I$  définit une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $I$  telle que  $u_0 = c$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'existence et l'unicité de cette suite.

#### Travaux pratiques

Dans l'ensemble des travaux pratiques, on exploitera largement des situations issues des sciences physiques et biologiques.

En classe, on pourra également déterminer des valeurs d'une fonction grâce à un tableur.

La résolution de certaines questions nécessite l'étude d'une fonction auxiliaire ; aux épreuves d'évaluation, cette fonction sera indiquée. Pour déterminer la position d'une courbe par rapport à une de ses tangentes, on étudiera les variations de la dérivée, ce qui peut nécessiter la considération de la dérivée seconde. Mais aucune connaissance de la relation entre concavité de la courbe et dérivée seconde n'est exigible des élèves.

L'étude d'asymptotes verticales utilise les résultats usuels sur les limites. Pour l'étude des comportements asymptotiques en  $+\infty$  (ou en  $-\infty$ ), on exploitera la comparaison de la fonction donnée  $f$  à une fonction plus simple  $g$  telle que  $\lim (f-g) = 0$  ; en dehors du cas des asymptotes horizontales, la fonction  $g$  devra être clairement mise en évidence sous la forme  $f(x) = g(x) + h(x)$ , avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$  (ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ ).

Étant donné une fonction  $f$  strictement monotone sur  $I$ , et un élément  $\alpha$  de  $I$  tel que  $f(\alpha) = 0$ , les élèves doivent savoir comparer  $\alpha$  à un élément donné  $\beta$  de  $I$  en utilisant le signe de  $f(\beta)$ . Pour des fonctions dérivables sur un intervalle, on justifiera la résolution à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires vu en classe de première. A contrario, on pourra rencontrer à propos de telles équations l'idée intuitive de discontinuité d'une fonction en un point.

On s'attachera à interpréter les résultats (variations, signe, extremums, comportement asymptotique, ...). On étudiera quelques problèmes d'optimisation.

*Extrait du programme de physique (n°2)*

B.O. spécial n°3 du Février 1995

**II. SYSTÈMES OSCILLANTS [à titre indicatif 27 h + (9 h)]**

Les phénomènes oscillants, en oscillations libres, auto-entretenues et forcées, interviennent constamment dans notre vie quotidienne. Aussi, cette partie est-elle abordée à l'aide d'exemples nombreux qui ne sont pas seulement des oscillateurs linéaires afin de montrer l'extraordinaire richesse de la physique des instabilités et de poser les problèmes. On justifie ainsi le choix qui portent d'abord sur les systèmes oscillants les plus simples linéaires, en ouvrant la dernière partie sur les systèmes non linéaires qui feront éventuellement l'objet d'études ultérieures...

Il est proposé que l'étude soit expérimentale et s'appuie sur les échanges énergétiques. Il est également prévu qu'elle précède, dans la progression, l'établissement de l'équation différentielle. L'accent mis sur l'énergie conduit à porter un intérêt tout particulier aux oscillations auto-entretenues qui doivent être bien distinguées des oscillations forcées. Les oscillateurs auto-entretenus, les seuls à osciller durablement, sont fondamentalement non linéaires.

L'oscillateur harmonique, dont l'équation est la seule qui se résolve analytiquement à ce niveau, apparaît donc comme un modèle limite, aussi bien dans le cas de l'oscillateur mécanique que dans le cas de l'oscillateur électrique. L'étude des oscillateurs électriques est l'occasion d'introduire les phénomènes qui régissent le comportement d'un condensateur et d'une bobine. Elle offre la possibilité d'un certain nombre de manipulations et travaux pratiques, qui peuvent dépasser le strict cas du dipôle (R, L, C classique (quartz, signaux d'horloge).

L'introduction en activités support de l'étude de l'équation de Van der Pol par simulation à l'ordinateur peut paraître audacieuse. En fait le modèle est très physique et réaliste et ne présente pas de difficulté conceptuelle. Il permet de décrire en première approximation les comportements de nombreux oscillateurs où la non-linéarité se manifeste sur le coefficient de la dérivée première (ce modèle a été introduit la première fois dans le but de modéliser le comportement de l'oscillateur à triode). On illustre sur cet exemple la puissance que peut apporter l'ordinateur dans l'analyse des problèmes pratiques pour lesquels l'approche analytique est difficile, voire exclue.

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES
----------	-----------------------

**1. Présentation des systèmes oscillants.**

1.1. Illustration expérimentale de la diversité et de la complexité des phénomènes oscillants.

Définir et mesurer ou calculer une période, une fréquence, une amplitude.

1.2. Propriétés caractéristiques : grandeurs physiques concernées ; période, fréquence ; analyse qualitative de la mise en

Savoir :

- qu'un oscillateur (mécanique ou électrique) non amorti évolue à énergie constante ;

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES
oscillation et de l'évolution du système à l'aide de la loi de conservation de l'énergie.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- qu'un oscillateur amorti dissipe une énergie vers le « milieu extérieur » ;</li> <li>- que tout système d'entretien des oscillations fournit l'énergie dissipée par l'oscillateur.</li> </ul>
<p><b>2. Oscillateurs mécaniques.</b></p>	Donner l'expression d'une énergie potentielle élastique.
<p>2.1. Analyse expérimentale des échanges énergétiques énergie cinétique énergie potentielle. Cas particuliers du pendule élastique et du pendule simple. Introduction de l'expression de la période par analyse dimensionnelle.</p>	Savoir qu'un oscillateur mécanique non amorti évolue à énergie mécanique constante, qu'au cours des oscillations il y a transformation continue d'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement.
<p>2.2. Oscillateur amorti et entretien des oscillations (ex. horloge).</p>	
<p>2.3. Analyse qualitative du phénomène d'oscillations forcées et de résonance.</p>	
<p><b>Activités support.</b></p>	
<p><i>Présentation d'oscillateurs simples et complexes : pendule, oscillateur électrique, vase de Tantale, oscillations hydrodynamiques (oscillation de sillage type Bénard-Von Karman), acoustiques (instruments de musique), biologiques (cardiaques, populations animales), chimiques (réaction de Belousov-Zhabotinski), oscillateur paramétrique (balançoire, botafumeiro de Saint-Jacques de Compostelle), etc.</i></p>	
<p><i>Enregistrement et traitement de données sur ordinateur concernant : le mouvement d'un oscillateur mécanique sur table à coussin d'air, celui d'un pendule en oscillations quelconques.</i></p>	
<p><b>3. Oscillateurs électriques.</b></p>	Utiliser un oscilloscope pour visualiser une tension, aux bornes d'un dipôle, une intensité. Expliquer le comportement d'un condensateur. Savoir :
<p>3.1. Etude expérimentale du condensateur. Relation intensité tension. Dipole RC.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- que le temps de charge et de décharge d'un dipôle (R, C) soumis à un échelon de tension augmente avec RC, grandeur qui a les dimensions d'un temps ;</li> </ul>
<p>3.2. Etude expérimentale d'une bobine ; relation intensité-tension. Dipole RL.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- qu'un condensateur qui se charge sous tension U est un récepteur qui stocke l'énergie <math>1/2 CU^2</math>.</li> </ul>
<p>3.2.1. Phénomène d'induction. Loi de Lenz. Applications.</p>	Connaître les relations algébriques reliant les grandeurs intensité, tension aux bornes et charge d'une armature.
<p>3.2.2. Phénomène d'auto-induction.</p>	Savoir qu'un circuit indéformable qui « voit » un champ magnétique variable est le siège d'une f.e.m.
<p>3.3. Etude expérimentale des oscillations libres d'un dipole RLC.</p>	Connaître la loi de Lenz.
<p>Echanges énergétiques et dissipation d'énergie. Introduction de l'expression de la période du circuit LC par analyse dimensionnelle.</p>	Savoir qu'une bobine s'oppose aux variations de courant du circuit où elle se trouve.
<p>Entretien des oscillations (montage avec AO ou transistor).</p>	
<p>3.4. Oscillateur électrique en régime forcé. Analyse expérimentale de la résonance.</p>	



CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES
<p><b>Activités support.</b>  <i>Etude à l'oscilloscope de la réponse d'un dipôle (RC, RLC, à un échelon de tension). Régimes transitoires observés à l'ordinateur utilisé en saisie de données ou à l'oscilloscope à mémoire.</i>  <i>Courbe de résonance d'intensité d'un dipôle RLC.</i>  <i>Oscillateur utilisant un amplificateur opérationnel.</i>  <i>Fréquence de résonance d'un quartz.</i>  <i>Exemples de signaux d'horloge générés par d'autres oscillateurs électriques.</i></p> <p><b>4. Modèles.</b>  4.1. Un même formalisme pour de nombreux oscillateurs. Oscillations sinusoïdales libres, établissement de l'équation différentielle.  4.1.1. Oscillateur mécanique linéaire : application de la relation de la dynamique au cas du ressort linéaire horizontal.  4.1.2. Oscillateur électrique linéaire : application de la loi des tensions au dipôle (LC).  4.2. Oscillations entretenues. Apport d'énergie (réaction positive) et limitation de l'amplitude (non-linéarité).  Retour sur les exemples étudiés : horloge mécanique, oscillateur électrique, effet Larsen.</p>	<p>Connaître la relation algébrique reliant intensité et tension à ses bornes : <math>e = -L \frac{di}{dt}</math>.  Savoir qu'une bobine qui joue le rôle de récepteur, stocke l'énergie <math>\frac{1}{2} Li^2</math>.  Savoir qu'au cours des oscillations libres d'un dipôle RLC il y a échange d'énergie entre la bobine et le condensateur et perte d'énergie par effet Joule.  Connaître l'expression de la période des oscillations libres du dipôle LC.</p> <p>Définir les régimes oscillants critiques, et sous-critique.  Décrire un exemple de dispositif permettant de compenser l'amortissement des oscillations.  Réaliser un montage permettant de relever une courbe de résonance.  Savoir qu'un dipôle RLC en oscillations forcées est traversé par un courant dont la période est celle imposée par le générateur et non celle des oscillations libres.  Savoir qu'il y a résonance d'intensité si période propre et période du générateur sont égales, qu'alors <math>I = U/R</math> et qu'il y a risque de surtension aux bornes des dipôles.  Déterminer sur la courbe de résonance la bande passante à 3dB.  Savoir que cette bande passante est d'autant plus étroite que la résistance est plus faible.</p>
<p><b>Activités support.</b>  <i>Etude à l'ordinateur de l'équation de Van der Pol : un modèle (oscillateur RLC entretenu) pour l'introduction aux effets non linéaires.</i></p>	<p>Etablir l'équation différentielle d'un oscillateur (mécanique ou électrique) non amorti et, dans le cas de l'oscillateur sinusoïdal, retrouver l'expression de la période.</p>

## *Annexes B*

*Les solutions proposées à certains problèmes posés au 17<sup>ème</sup>  
siècle*

*La solution proposée au problème "Isochrone" (n°1)*

*La solution proposée au problème "Brahystochrone" (n°2)*



**Problème "isochrone" et la solution proposée par Jacques Bernoulli (n°1)**

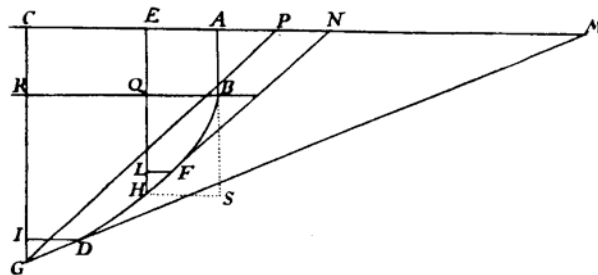
"Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformément, et approche également de l'horizon en temps égaux ". (Leibniz, 1687 (cité par Blay, 1992)).

Les détails trouvés chez Blay (1992) expliquant la solution proposée par Jacques Bernoulli (1690) à ce problème sont données ci-dessous :

La solution Jacques Bernoulli se scinde en deux étapes bien distinctes : *une première* a pour objet de ramener le problème physique à un problème de géométrie et *une deuxième* comprend la résolution de cette question de géométrie à l'aide du calcul différentiel.

*La réduction à la pure géométrie :*

Au début de cette partie, dans une première étape, Bernoulli essaye de résoudre le problème, en proposant quelques conditions, et en le représentant sur une figure (celle donnée ci-dessous) qui permet de mieux le comprendre. Pour vérifier la condition qui impose une vitesse verticale constante, Leibniz suppose qu'un point pesant est abandonné en *A* sans vitesse initiale. Soit *BFG* la courbe que le point pesant doit décrire, en arrivant à *B* avec la vitesse acquise au cours de la chute *AB* avec une vitesse constante suivant la direction verticale.



L'étape suivante nous montre que le cadre conceptuel géométrique entre en jeu, ici. Jacques Bernoulli modélise le problème en se servant du concept des infiniment petits et il choisit deux arcs de la courbe *BFG* similaires à des segments de droite (*DG* et *FH*) tels que les hauteurs de chute *IG* et *LH* leur correspondant soient égales. Par conséquent, les arcs sont parcourus dans des intervalles de temps égaux. Dans le processus de résolution du problème par les règles de la géométrie, il trace, d'une part, les tangentes *DM* et *FN* à la trajectoire *BFG* respectivement en *D* et en *F*, et, d'autre part, la parallèle *GP* à *FN* (ou *HN*, puisque *HF* est assimilé à un petit segment de droite).

Sur le schéma, il appelle  $v_G$  et  $v_H$  les "vitesses acquises en *G* et *H*" par un point pesant tombant en chute libre "de la même ligne horizontale *AC* suivant les droites *CG* et *EH*". Il continue, d'après la loi de la chute des graves de Galilée qui permet une résolution en passant par la géométrie :

$$\frac{v_G^2}{v_H^2} = \frac{CG}{EH}$$

Cette loi permet de remplacer dans toutes les démonstrations le rapport des carrés des vitesses par celui des longueurs.

Dans sa solution, Jacques Bernoulli suppose sans l'expliciter, contrairement à ce que fera son frère Jean, que la vitesse le long des segments rectilignes infiniment petits  $FH$  et  $DG$  est constante, et donc, puisque ces segments sont parcourus dans le même intervalle de temps, que :

$$\frac{v_G}{v_H} = \frac{DG}{FH}$$

A l'aide de cette nouvelle relation, il remplace dans toutes les démonstrations le rapport des vitesses par celui des longueurs. Par conséquent, la combinaison de ces deux relations rend possible, par élimination de la vitesse, une réduction à la géométrie pure.

$$\frac{CG}{EH} = \frac{DG^2}{FH^2}$$

En introduisant  $GI^2$  (avec  $GI = HL$ ), on peut écrire ceci :

$$\frac{CG}{EH} = \frac{DG^2}{FH^2} = \frac{DG^2}{FH^2} \cdot \frac{GI^2 \text{ (ou } LH^2)}{GI^2}$$

Or les triangles ( $CGM$  et  $IGD$ ) et ( $EHN$  et  $LHF$ ) sont semblables :  $\left(\frac{DG}{GI} = \frac{GM}{GC}\right)$  et  $\left(\frac{LH}{FH} = \frac{HE}{HN}\right)$

par conséquent :  $\frac{CG}{EH} = \frac{GM^2}{GC^2} \cdot \frac{HE^2}{NH^2}$ .

Ou encore, on considérant les triangles semblables  $EHN$  et  $CGP$   $\left(\frac{HE}{HN} = \frac{GC}{GP}\right)$ .

D'où finalement  $\frac{CG}{EH} = \frac{GM^2}{GC^2} \cdot \frac{HE^2}{NH^2} \Rightarrow \frac{CG}{EH} = \frac{GM^2}{GP^2}$

Il ne s'agit plus maintenant que de trouver la courbe  $BHG$  telle que le rapport des racines carrées de  $CG$  et  $EH$  soit égal au rapport de  $GM$  à  $GP$ .

*Analyses :*

Le problème physique a été ramené à de la pure géométrie. Jacques Bernoulli introduit les différents symboles algébriques qui rendent possible, dans le cadre du calcul leibnizien, la résolution de ce nouveau problème de géométrie.

Il pose alors :  $CG = a$ ,  $GM = b$ ,  $AE = x$ ,  $LF = dx$ ,  $EH = y$  et  $HL = dy$ .

En s'adressant encore une fois à la construction des triangles semblables  $CGP$  et  $LHF$ , il conclut :

$$\frac{HL}{HF} = \frac{GC}{GP} \text{ soit encore en remplaçant : } GP = \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$$

En utilisant  $\frac{CG}{EH} = \frac{GM^2}{GP^2}$  et en remplaçant, on trouve:

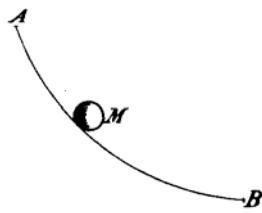
$$\frac{a}{y} = \frac{b^2}{\frac{a^2 dx^2 + a^2 dy^2}{dy^2}}$$

d'où l'équation différentielle qui définit la courbe cherchée :  $dy\sqrt{b^2 y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$ .

Maintenant il s'agit de résoudre cette équation différentielle par la méthode d'"intégral" employée à cette époque. Bernoulli l'intègre et obtient finalement l'expression classique caractéristique de la parabole semi-cubique. (Blay, 1992)

**Problème "brahystochrone" et la solution proposée par Jacques Bernoulli (n°2)**

"Trouver la courbe plane  $AMB$  qu'un point pesant  $M$  doit parcourir pour descendre sans vitesse initiale d'un point  $A$  à un point  $B$  dans le temps le plus bref." (Jean Bernoulli, en 1697 cité par Blay, 1992)



La solution proposée à ce problème par Jean Bernoulli (1697) est détaillée ci-dessous en s'appuyant sur les travaux de Chabert (1993) et sur ceux de Blay (1992))

Dans sa solution Jean Bernoulli utilise une approche différente en s'appuyant sur le principe de Fermat qui dit: « un rayon de lumière passant d'un milieu moins dense ou plus rare dans un milieu plus dense se rompt par rapport à la perpendiculaire en sorte que le rayon procédant continuellement de la source de lumière vers le point éclairé emploie le moins de temps possible ».

Ce principe permet à Fermat d'en déduire la loi des sinus : si  $v_i$  désigne la vitesse dans une certaine bande et  $v_r$  dans la bande juste en dessous, l'angle  $i$  que fait avec la verticale le segment de la trajectoire situé dans la première bande et l'angle  $r$  que fait celui situé dans la suivante sont liés par la règle des sinus :  $\frac{\sin i}{v_i} = \frac{\sin r}{v_r}$

An s'appuyant sur ce principe :

[...] il (Jean Bernoulli) imagine l'espace découpé en lamelles suffisamment fines pour qu'à l'intérieur de chacune la vitesse puisse être imaginée constante. Dans chaque bande, la trajectoire devant être le plus court chemin est nécessairement un segment. Globalement, la trajectoire présente alors l'allure d'une ligne polygonale. (Chabert, 1993 )



Si les lamelles horizontales deviennent de plus en plus fines, leur nombre augmentant indéfiniment, la ligne polygonale tend vers une courbe. La tangente en chaque point de cette courbe se confond en ce point avec le segment de la ligne polygonale. (Chabert, 1993)

L'angle  $\alpha$  (que la tangente fait avec la verticale) est proportionnel à la vitesse :  $\frac{\sin \alpha}{v} = \frac{1}{a}$

Jean Bernoulli pose :  $AC = x$ ,  $CH = v$ ,  $CM = y$ ,  $Cc = dx$ ,  $nm = dy$ ,  $Mm = dz$

Alors en  $M$  :  $\sin \alpha = \frac{nm}{Mm} = \frac{dy}{dz}$  or par l'hypothèse,  $\sin \alpha = \frac{v}{a}$

D'où  $\frac{v}{a} = \frac{dy}{dz}$  et  $a^2 dy^2 = v^2 dz^2$

Or  $dz^2 = dx^2 + dy^2$  d'où  $dy = \frac{v dx}{\sqrt{a^2 - v^2}}$  (Blay, 1992).

## *Annexes C*

### *Présentation générale des manuels de Terminale S*

*Présentation des manuels de mathématiques (n°1)*

*Présentation des manuels de physique (n°2)*

### *Echantillon des exercices proposés aux étudiants en première de DEUG*

*Echantillon des exercices proposés en mathématiques (n°3)*

*Echantillon des exercices proposés en électrocinétique (n°4)*





**Présentation des manuels de mathématique (n°3)**Manuel "Terracher"*Présentation générale des chapitres liés aux équations différentielles*

Chapitre 7 : Fonctions exponentielles et puissances. Equations différentielles	
Sommaire	Objectifs
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Fonction exponentielle</li> <li>- Fonction puissances</li> <li>- La croissance comparée</li> <li>- Dérivées, primitives...</li> <li>- Equations différentielles</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- introduire la fonction exponentielle et les fonctions, et se familiariser avec leurs propriétés (algébriques, graphiques, fonctionnelles)</li> <li>- Etudier leur croissance comparée (avec celle de la fonction ln)</li> <li>- Les utiliser dans la recherche de primitives</li> <li>- Etudier deux équations différentielles de base : <math>y' = ay</math> et <math>y'' + \omega^2 y = 0</math></li> </ul>

Manuel "Fractale"*Présentation générale des chapitres liés aux équations différentielles*

Chapitre 2 : Calcul différentielle primitives
Sommaire
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Dérivée d'une fonction composée</li> <li>- Dérivées successives</li> <li>- Inégalité des accroissements finis</li> </ul> Primitives d'une fonction sur un intervalle
Chapitre 5 : Fonction exponentielle
Sommaire
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Définitions</li> <li>- Propriétés algébriques</li> <li>- Etude de la fonction exponentielle</li> <li>- Equation différentielle <math>y' = ay</math></li> </ul>

**Présentation des manuels de physique (n°2)**Manuel "Nathan"*Présentation générale des chapitres liés aux équations différentielles*

Chapitre 18 : Modélisation des oscillateurs	
Sommaire	Objectifs
<ul style="list-style-type: none"> <li>- L'oscillateur libre non amorti</li> <li>- L'oscillateur amorti</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- savoir établir l'équation différentielle d'un oscillateur non amorti et, dans le cas de l'oscillateur sinusoïdale, savoir retrouver l'expression de la période</li> <li>- savoir appliquer le théorème du centre d'inertie dans le cas du pendule élastique horizontale</li> <li>- savoir appliquer la loi des tensions dans le cas du circuit (<math>R, L, C</math>)</li> </ul>

Manuel "Durandea"*Présentation générale des chapitres liés aux équations différentielles*

Chapitre 19 : Modélisation des systèmes oscillants	
Sommaire	Objectifs
<ul style="list-style-type: none"> <li>- modélisation des systèmes oscillants</li> <li>- Oscillateurs libres non amortis</li> <li>- Oscillateur libres amortis</li> <li>- Entretien et naissance des oscillations</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Etablir l'équation différentielle d'un oscillateur</li> <li>- retrouver l'expression de la période d'un oscillateur sinusoïdal,</li> <li>- modéliser un oscillateur entretenu</li> </ul>

## Echantillon des exercices proposés en mathématiques (n°3)

Méthodes d'intégration des équations différentielles ...

3

Commentaire : les exercices suivants ne comportent aucune astuce ; ils nécessitent seulement d'appliquer le cours correctement ! Encore faut-il le savoir ...

**1** Déterminez toutes les fonctions  $y$  réelles solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes

$$(E_0) \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$$

$$(E_1) \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x e^{2x}$$

$$(E_2) \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x e^x$$

$$(E_3) \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 8 \sin 2x.$$

Indications :

- ◊ 1 est racine de  $r^2 + r - 2$ , quelle est l'autre racine ?
- ◊ Attention au second membre de  $(E_2)$ .
- ◊ Pour  $(E_3)$ , vous ne trouverez pas de solution particulière de la forme  $\lambda \sin 2x$  : sous quelle forme faut-il la chercher ?

**2** Déterminez toutes les fonctions  $y$  réelles solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes

$$(E_0) \quad y''(x) + y(x) = 0$$

$$(E_1) \quad y''(x) + y(x) = x + 1$$

$$(E_2) \quad y''(x) + y(x) = \cos x$$

$$(E_3) \quad y''(x) + y(x) = 2 \cos x - x - 1.$$

Précisez quelle est la solution  $y$  de  $(E_3)$  sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie de plus

$$y(0) = -1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

Indications :

- ◊ est-ce vraiment nécessaire de calculer un discriminant pour trouver les racines complexes de  $r^2 + 1$  !!!
- ◊ Attention au second membre de  $(E_2)$  : vous n'en trouverez pas de solution particulière de la forme  $\lambda \cos x + \mu \sin x$  : sous quelle forme faut-il la chercher ?
- ◊ Pour  $(E_3)$ , pensez au principe de superposition.
- ◊ Ensuite, les conditions initiales données en 0 détermineront complètement  $y$ .

**3** Déterminez toutes les fonctions  $y$  réelles solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes

$$(E_0) \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

$$(E_1) \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 3x^2$$

$$(E_2) \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{2x}$$

$$(E_3) \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x e^{-x}$$

$$(E_4) \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x^2 e^x.$$

Indications :

- ◊ rappelez-vous une identité connue depuis bien longtemps !
- ◊ Attention au second membre de  $(E_3)$  et à la multiplicité de la racine  $-1$  ...

**4** Déterminez toutes les fonctions  $y$  réelles solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes

$$(E_0) \quad y''(x) + 6y'(x) + 25y(x) = 0$$

$$(E_1) \quad y''(x) + 6y'(x) + 25y(x) = 16x^3 e^{-3x}$$

$$(E_2) \quad y''(x) + 6y'(x) + 25y(x) = 73 \cos 4x$$

$$(E_3) \quad y''(x) + 6y'(x) + 25y(x) = 16x^3 e^{-3x} + 73 \cos 4x.$$

Indications :

- ◊ le discriminant trouvé est négatif.
- ◊ Les coefficients 16 et 73 sont là pour que les calculs s'arrangent !
- ◊ Pour  $(E_3)$ , pensez au principe de superposition.

**5** Déterminez toutes les fonctions  $y$  réelles solutions sur  $\mathbb{R}$  des équations différentielles suivantes

$$(E_0) \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$$

$$(E_1) \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (6x + 4) e^x$$

$$(E_2) \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 25 \sin 2x$$

$$(E_3) \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (3x + 2) e^x - 25 \sin 2x.$$

Indications :

- ◊ factorisez  $r^2 - 2r + 1$ .
- ◊ Attention au second membre de  $(E_1)$ .
- ◊ Cherchez une solution particulière de  $(E_2)$  sous la forme  $\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$ .
- ◊ Pour  $(E_3)$ , pensez au principe de superposition.

**6** Déterminez toutes les fonctions  $y$  réelles solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 8x^3.$$

**7** Déterminez toutes les fonctions  $y$  réelles solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = (3x^2 + 1)e^{3x}.$$

**8** Résolvez l'équation différentielle homogène

$$(E_0) \quad y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

puis déterminez la solution  $y$  de  $(E_0)$  qui vérifie les conditions initiales

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1.$$

Réponse finale :  $y(x) = e^{2x} - e^x$ .

**9** Résolvez l'équation différentielle

$$(E) \quad y''(x) - 4y(x) = 4e^{-2x}$$

puis déterminez la solution  $y$  de  $(E)$  qui vérifie de plus

$$y'(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

Réponse finale :  $y(x) = (-1 - x)e^{-2x}$ .

~~~~~

*Exercices facultatifs :*  
pour mieux comprendre le cours.

**10**

**Détermination**  
de toutes les solutions de  $(E_0)$   
dans le cas  $\Delta \geq 0$

Soit l'équation différentielle linéaire homogène

$$(E_0) \quad y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0.$$

Supposons que le polynôme  $r^2 + pr + q$  admette une racine réelle  $r_1$ . Il est alors légitime de poser

$$y(x) = C(x)e^{r_1x}$$

puisque  $e^{r_1x}$  ne s'annule jamais.

De plus, comme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad C(x) = y(x)e^{-r_1x}$$

(et qu'une exponentielle est indéfiniment dérivable), lorsque  $y$  est dérivable,  $C$  l'est aussi.

**a)** Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur la dérivée  $C'$  de la nouvelle fonction inconnue pour que  $y$  soit solution de  $(E_0)$ .

Réponse :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad C''(x) + (p + 2r_1)C'(x) = 0$ .

L'intérêt de la méthode est maintenant clair : elle permet de passer d'une équation différentielle du second ordre en  $y$  à une équation du premier ordre en  $C'$  ... Cette méthode porte un nom : c'est la **méthode de réduction de l'ordre**. On l'utilise aussi pour des équations linéaires d'ordre plus grand ou à coefficients variables, dès que l'on en connaît une solution qui ne s'annule pas sur un intervalle donné.

**b)** Notons  $r_2$  l'autre racine réelle de  $r^2 + pr + q$  (distincte ou non de  $r_1$ ). On rappelle que la somme des racines vaut  $-p$  :

$$r_1 + r_2 = -p.$$

Déterminez les fonctions  $C'$  solutions de l'équation différentielle trouvée au a), puis par un calcul de primitives, tirez-en l'expression de  $C$  et ainsi toutes

## Echantillon des exercices proposés en électrocinétique (n°4)

## - MISE EN EQUATION DE CIRCUITS RC -

Energie dépensée pendant la charge d'un condensateur à travers une résistance : Etude de régime transitoire.

**Objectif :** Apprendre à mettre en équation un circuit à partir des lois sur les tensions et les courants en insistant sur les conditions de signe pour les dipôles générateurs ou récepteurs de puissance.

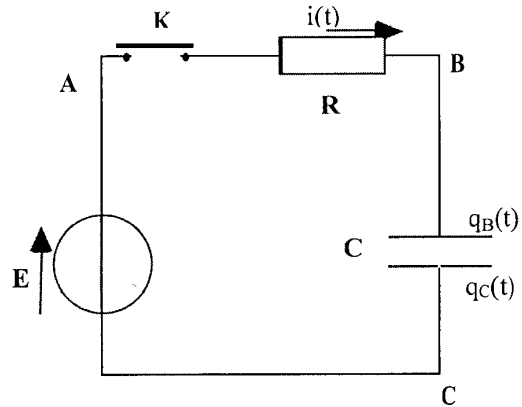
**Partie I :** On considère le circuit de la figure A où  $R$  est la résistance du résistor,  $E$  la force électromotrice de la source de tension *continue* et  $C$  la capacité du condensateur.

**Question 1 :** Ecrire la relation entre les tensions ( $u_{AB}(t)$ ,  $u_{BC}(t)$ ,  $u_{CA}(t)$ ) aux bornes des différents éléments du circuit à un instant quelconque  $t$ . On notera  $v_A(t)$ ,  $v_B(t)$ ,  $v_C(t)$  les potentiels associés : la convention récepteur est-elle bien respectée ?

**Question 2 :** En déduire l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur au court du temps.

**Question 3 :** Résoudre cette équation pour la charge en supposant l'interrupteur initialement ouvert et le condensateur déchargé.

**Question 4 :** En déduire l'évolution de l'intensité du courant dans le circuit au court du temps. Tracer qualitativement sur un même graphe les courbes  $q(t)$  et  $i(t)$ .



**Figure A** L'interrupteur  $K$  est initialement ouvert. On suppose qu'on le ferme à l'instant  $t=0$ .

**Partie II :** On rappelle que l'énergie emmagasinée dans un condensateur peut s'écrire  $E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C}$  et l'on va chercher à comparer cette énergie emmagasinée dans le condensateur au cours du temps à l'énergie qui aura été dissipée par effet Joule à travers la résistance.

**Question 5 :** Que vaut la charge  $q_\infty = q(t \rightarrow +\infty)$  dans la limite des temps longs ? A quel temps doit-on comparer ces temps "longs" ? Que vaut alors l'énergie du condensateur.

**Question 6 :** Sachant que l'énergie dissipée dans la résistance depuis la fermeture de l'interrupteur peut s'écrire  $\int_0^\infty R i^2(t) dt$ , calculer l'énergie totale dissipée dans la résistance pendant la charge du condensateur.

**Question 7 :** Comparer cette énergie à celle emmagasinée dans le condensateur. Conclure. En déduire l'énergie totale fournie par le générateur.

**Partie III** Indiquer ce qu'il faudrait faire pour observer la décharge du condensateur à travers la résistance...

... Une autre manière de procéder consiste à laisser l'interrupteur est fermé et à remplacer le générateur de tension par un générateur de signaux carrés de fréquence  $f=50\text{Hz}$  et d'amplitude 1V (Passant successivement de 0 à 1V puis 0...)

**Question 1 :** Indiquer l'expression de la tension mesurée aux bornes du condensateur à la décharge et en tracer le comportement.

**Question 2 :** Trouver l'équation de la tangente à l'origine et la valeur d'intersection avec l'axe des abscisses.

**Question 3 :** On suppose que  $R=1000\Omega$ ,  $C=4\mu\text{F}$  : tracer les tensions relevées à l'oscilloscope aux bornes du condensateur et du générateur

**Question 4 :** On prend maintenant  $R=10\text{k}\Omega$ ,  $C=4\mu\text{F}$  : montrer que la tension aux bornes du condensateur est en forme de "dent de scie" et discuter son amplitude lorsque  $R$  augmente.

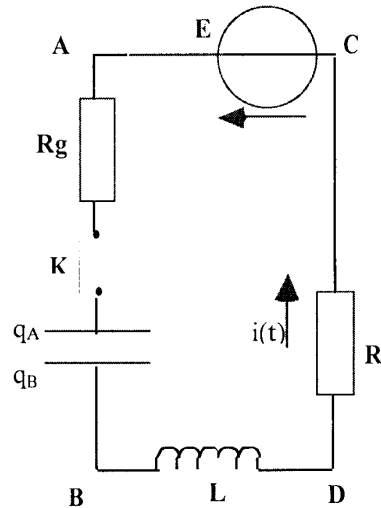
Ce résultat sera repris dans le TD 3.

## LES REGIMES CRITIQUES ET APERIODIQUES DANS UN CIRCUIT R, L, C SERIE

## Régimes transitoires lors de l'installation du courant dans un circuit R, L, C

**Objectif :** Apprendre à manipuler les solutions des équations différentielles du second ordre à coefficients constants et avec second membre

Nous nous proposons d'étudier comment se déroule le régime transitoire correspondant à l'installation d'un courant dans un circuit série R, L, C, connecté à un générateur de tension continue de résistance interne négligeable et de f.e.m.  $E$  à travers une résistance  $R$  et une self inductance  $L$  (Voir la figure). Le condensateur  $C$  est connecté au générateur à l'instant  $t=0$  par un interrupteur  $K$ . La situation initiale correspond au condensateur  $C$  déchargé qui présente, à cet instant, une différence de potentiel nulle entre ses armatures, de sorte que  $v_A(0) - v_B(0) = 0$ .



**Question 1** En appliquant à chaque composant la convention récepteur, trouver la relation algébrique que doit satisfaire au cours du temps, la charge  $q_A(t)$  accumulée sur l'armature A du condensateur.

**Question 2** En déduire l'équation différentielle que doit satisfaire le courant  $i(t)$  circulant dans le circuit R, L, C.

**Question 3** Ecrire l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle pour  $q_A(t)$ .

**Question 4** Donner l'expression de  $q_A(t)$  dans le régime aperiodique. Tracer le graphe de  $q_A(t)$  dans le régime aperiodique. Donner l'expression de  $i(t)$  dans le régime aperiodique. Tracer le graphe de  $i(t)$  dans le régime aperiodique.

**Question 5** Modifier l'équation différentielle que doit vérifier  $q_A(t)$  et intégrer cette nouvelle équation entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  pour faire apparaître les échanges énergétiques qui se produisent pendant le régime aperiodique.

## *Annexes D*

### *Tests proposés aux étudiants*

*Test mathématique (n°1)*

*Test physique (électrocinétique) (n°2)*

### *Certaines copies d'étudiants*

*Les copies fournies par E16 (n°3)*

*Les copies fournies par E44 (n°4)*

*Les copies fournies par E49 (n°5)*

*Les copies fournies par E11 (n°6)*

### *Tableaux récapitulatifs des réponses des étudiants*

*L'ensemble des réponses obtenues au test mathématique : Exercice 1 (n°7),*

*Exercice 2 (n°8), Exercice 3 (n°9)*

*L'ensemble des réponses obtenues au test physique : Exercice 1 (n°10),*

*Exercice 2 (n°11)*



